Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS
Megarensis, Philosophi & Mathematici excellentissimi, sex libri priores, de Geometricis principijs, Græci & Latini, unà cum demonstrationibus propositionum, absq; literarum notis, ueris ac propriis, & alijs quibusdam, usum earum concernentibus, non citra maximum huius artis studiosorum emolumentum adiectis.

ALGEBRAE PORRO REGVLAE, PROPTER NVMErorum exempla, passim propositionibus adiecta, his libris præmissæ sunt, eædemq; demonstratæ.

AVTHORE IOANNE SCHEVBELIO, In inclyta Academia Tubingensi Euclidis professore ordinario.

Collegij Cæsarei Soc. IESV Pragæ
A. 1644.
Bibliotheca Mathematica.

Cum gratia & priuilegio Cæsario, ad quinquennium.

BASILEAE, PER IOANNEM [illegible] 3.

M. GARBICIVS ILLYRICVS
ad Lectorem.

Εὐκλείδᾳ σοφίᾳ πολλοὶ καὶ ἴσοχοι ἄνδρες
ἠμαθίως μίμασθαι πολλάκις ἐπονίεν,
πολλὰ δ' εὐφραδίως πολυΐδρειήσι νόοιο
ἐκτέλεσαν μύναξ προθέμενοί τι πλέον.
ἀλλ' ἑτέρου κείνῃ σοφίᾳ πλεῖστοισί περ ἔμπης
ἐξακέεβοσ' ἁπλῶς ἀνσηκατάληπτον ἔφυ.
πρόσθε μὲν ἐν πάντεσσ' ὧν μὴ λόγοις ἔσχε πολλή,
ἠδὲ διαρθρώσεις πίλναθ' ἑπασυτέρη.
τῷ δ' ἀκεβίλιον τοῖς πρόσθεν πολλ' ὧν πρόσθεις,
πολλῷ τ' ἀναρθρώσας θῆκ' ὠφελιμώτερα.
πάντα δ' ἀσκήπτως εὖ ἀφαρὼς παραδείγμασι πυκνοῖς,
ὥσ' ἅπασι ῥᾴστως διδασκόμενα ἅδε ἔπι.
τοῖς δ' ἅμα προσλιπῶν μετεωρίης τὰ πλεῖστα διδάσει,
ἁπλῆ ἔπῃ' ὡς ἐν πάρεστι νεῖν' ἀκίνητα λαχών.

IOAN. SAMBVCVS PANNO-
nius Tirnauiensis.

Hactenus Algebræ latuit quia regula multos,
Et summis tantum est illa adamata uiris:
Explicat hanc noster tanta Scheubelius arte,
Quilibet ut paucis perdidicisse queat.
Sex quoq; demonstrat libros Megarensis abunde:
Ingenium quare, Lector amice, probes.

NOBILIBVS, ERVDITIONE AC VIRTVTE VIRIS ORNATISSIMIS, FVGGERIS, ANTONIO NATV SENIORI, ac fratris sui P. M. Reimundi filijs, Ioanni Iacobo, Georgio, Christophoro, Vdalrico, & Reimundo, fratribus, Kirchpergæ & Vueissenhorni dominis, Mœcenatibus suis perpetuò colendissimis,

IOANNES SCHEVBELIVS S.



VM inter liberalia studia, quæ à liberis & ingenuis hominibus disci debent, Geometria etiam numerari meruerit, Euclidis uerò, μαθηματικῷ ἀγαμόνῳ καὶ πορυφαίῳ, geometria in omnibus fere publicis scholis proponi cõsueuerit, quo illam laudatissimam consuetudinem meo etiam conatu iuuarem, cum omnes ipsius libros uno tempore tradere, propter multa impedimenta, difficile sit, priores sex, tanquam potiores, unà cum Algebræ regulis, ad hos summè necessarijs, demonstrandos & declarandos suscepimus. At quoniam hic noster tradendi modus ab aliorum traditionibus nonnihil uariat, huius diuersitatis causſam, post expositam à nobis geometriæ originẽ & usum, declarabimus. Cum Nilus Ægypti fluuius, ut author est Strabo, longe lateq; augescẽs, se diffunderet, atq; sua exundatione deinde agrorum limites in illa uicinia ita turbaret, ut decrescente, & in suum se alueum recolligente aqua, limites & termini diluuio confusi submouerentur priorib⁹ finibus, quibus designandis significandisq; erant constituti, euenie bat sanè ut nullus sui fundi, nec locum nec quantitatem certò assignare posset. Quamobrem ne contentiones inter uicinos orirentur, sed potius ut uera & iusta distributione suum quisq; fundum integrum reciperet, ab Ægyptijs, propter summam necessitatem & commoditatem, quam experiebantur metiendis agris, Geometria inuenta est: quemadmodum Phœnices, propter negociationem, Numerorum scientiam primi reperisse dicuntur. Hanc ab Ægyptijs acceptam Græci postea omni studio & diligentia excoluerunt. Non ideo tantùm, ut hac in ædificando aut reliquis artibus mechanicis, magno suo cõmodo uterentur: sed multo magis, ut liberos suos ad philosophiam, omnesq; uitæ partes præpararent, a quas res mensurarum cognitio non leuiter conduceret. Nam primum quid quæso, in ulla parte philosophiæ sine demonstrandi scientia rectè cognosci potest, aut percipi? At demonstrationum doctrinæ, incredibile est, quantum lucis afferant exempla geometrica, quæ sine controuersia sunt omnium maximè & ad docendum, & ad intelligendum illustria & expedita. In oculos namq; incurrunt, & ad manifestas menti nostræ rationes referuntur. Deinde constat ex hac ipsa mensurarum notitia, non demonstrationes tantùm longè plurimas, ad doctrinam de natura rerum illustrandam passim accommodatas, sed huius ipsius etiam

prima initia ex illa ſumpta eſſe. Ex illa enim non plures mundos, non hunc ipſum in quo uiuimus, aut ullum omnino aliud corpus, infinitum eſſe oſtenditur. Quæ ſanè phyſicæ uera ſunt & propria exordia putanda. Quòd hæc ipſa menſurarum ratio & terræ amplitudinem metitur, & cœli ipſius ſpacia deſcribit: & diſciplinę ſuę, regulis quaſi quibuſdam, in cœlum ſubuectis mentibus hominum, omnes illos orbium & corporum cœleſtium ortus, obitus, motuſq; demonſtrat. Atq; hæc tam multa & minimè contemnenda commoda iis præcipuè affert, qui in umbra & ocio uiuentes, ueritatem exquirunt. Cum interim neq; pauciora, neq; leuiora iis etiã præſtet, qui ex umbra in ſolem progrediuntur, & in communi hominũ conſuetudine uerſantes, priuatam aut publicã rem gerũt. Galenus ſcribit, ſæpe ſe in incertarum rationum æſtu ualde anxium & dubium laborantem, Geometricarum demonſtrationum beneficio ſubleuatum eſſe, quæ modum & uiam præclarè operandi ſibi monſtrauerint. Etenim cum animaduerteret rotunda & circularia ulcera tardius quàm longa curari, cenſuit eius curationis uiam ſibi ex Geometria petendam eſſe. Proinde in lectionem de Iſoperimetris incidens, inuenit, quòd circulus quidem omnium Iſoperimetrarum figurarum eſſet capaciſſimus: nimirum quòd extrema eius undiq; plus à ſe mutuo, quàm in alijs Iſoperimetris figuris, diſtarent. Hac ratione fretus, in Methodo curandi, ad finem libri tertij ſcribens, ſic inquit:

τὰ μὲν γὰρ ἐγκάρσια δίκην τοῦ χείλεος αὐτῶν μᾶλλον διεστηκέναι τε καὶ ἀφεστηκέναι, τὴν συναγωγὴν ἀκριβεστέρας δεῖται, ὥστε καὶ ῥᾳφαῖς καὶ ἀγκτήροσιν ὠὴ τούτων χρῆσθαι.

Vnde Hippocrates etiam filium ſuũ Theſſalum, in quadam ad ipſum epiſtola, hortatur, ne uel Geometriam, uel Arithmeticam negligat, inter alia ſcribens his uerbis:

Ἰατρίας δὲ μελέτω σοὶ ὦ παῖ, γεωμετρικῆς καὶ ἀριθμήσιος.

Et grauis author Quintilianus, eandem etiam Geometriam oratori ſuo, Rempub. domi & in pace gubernaturo, neceſſariam eſſe, multis & grauibus de cauſſis oſtendit. Ac res ipſa clamat, foris & in bello uſum huius non uulgarem exiſtere, cum caſtris ſcilicet locus eſt capiendus, magnæ moles loco mouendæ, machinæ bellicę & tormenta fabricanda, aut trajcienda flumina pontibus, obſidẽda hoſtium mœnia, & huius generis ſexcenta alia facienda ſunt. Celebratur Archimedis induſtria, quæ ſola & acerrimos ſummi Imperatoris Marcelli impetus leui ſępe momẽto fruſtrata eſt, & obſidionem Syracuſarũ in longius traxit. Inter ciues aũt & milites magna uis eſt ordinis, magna cõcordiæ, magna amoris mutui: quas res in primis efficit & conſeruat in hominũ ſocietatibus proportio Geometrica. Quare Plato hanc, ut ſalutarẽ, præcipuè aſciſcendã eſſe duxit ciuitatibus, quæ rerum ſuarum ſtatum optimũ eſſe uellent, & quàm firmiſſimum. Vbi enim pro meritis & dignitate, magiſtratus & imperia

optimis

optimis & prudentiſſimis mandantur, ubi ordines & diſcrimina perſonarum ſeruantur, ubi melior imperat, paret & obtemperat imprudentior, ibi ſuas quemq; partes, ſuum munus, ſuum officium & intelligere & facere, & ueram ac durabilem æqualitatem eſſe. Et ex hac deinde mutuam inter ciues concordiam & beneuolentiam gigni, neceſſe eſt. Quia ἴσον ἴσῳ φίλον eſt, id quod equidem in Repub. maximè efficit proportio Geometrica: & ob hanc cauſſam maximi facienda eſt Geometria etiam ad Reipub. gubernacula acceſſuris. Vnde non ſine magnis & grauibus cauſſis exiſtimandum eſt, Platonem feciſſe, ut à ſua ſchola rudes & imperitos huius artis omnes, ipſa etiam inſcriptione, arcẽdos duxerit. Notus eſt enim uerſiculus, quem ſcholæ ſuæ ueſtibulo inſcriptum propoſuit:

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΟΥΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ.

Cum enim ſe non eos tantum, qui remoti ab adminiſtratione Reip. rationem doctrinæ & ueritatis in umbra & ocio exquirerent, ſed illos etiam qui quæſitas, & inuentas ſapientiæ rationes in lucem ac ſolem proferrent, & rebus humanis agendo conſulerent, inſtitutione ſua formare intelligeret, uidit nimirum uir diuinus, ad neutram inſtitutionem idoneos, qui non Geometriæ diſciplina exculti accederent. Quare huiuſmodi barbara & monſtroſa ingenia, quæ ab hac, maximè propria naturæ hominum, diſciplina abhorrerent, tanquam inepta percipiendæ doctrinæ ſuæ, meritò à ſe repulit. Quod ipſius prudens & neceſſarium conſilium, utinam etiamnum in ſcholis publicis ſequeremur: non minor modo ſtudiorum perturbatio eſſet, ſed ex his ipſis etiam longè maiores fructus Reſpub. caperet, ad cuius adminiſtrationem multo melius inſtructi homines uenirent. Porrò conſtat, inter omnia ſcripta eorum, qui quidem in hoc genere artium elaborauerunt, præcipuo ſemper loco fuiſſe Euclidea: è quibus tanquam inexhauſto fonte, ferè omnia mathemata profluxere. Itaq; & nos huic authori pro uirili noſtra illuſtrando, operæ aliquid attribuendum duximus: qua in re ab uſitata hactenus in ſcholis uia, non ſine grauibus cauſſis (ut nos quidem opinamur) diſceſſimus. Multos fuiſſe demonſtratores geometriæ Euclidis Megarenſis, philoſophi ac mathematici, certũ eſt: inter omnes tamen, Græcorũ quidẽ Theonis & Hypſiclis Alexandrinorũ philoſophorũ, Latinorũ uerò, Campani Galli & Zamberti Veneti, explicationes in geometriam Euclidis, ut omnium perfectiſſimæ celebrantur. Quæ ſanè tales ſunt, ut nihil ferè in illis ad plenam huius authoris intelligentiam deſiderari poſſit. Ita enim ſingularum propoſitionum cõcluſiones ex ſuis hypotheſibus colligunt, ut animum ſuum ad utramq; rem diligenter aduertenti, nihil prorſus dubitationis relinquatur. Sed cum literarum figuras in deſignandis demonſtrationum momentis uſurpant, id mihi & facere præter ipſius Euclidis inſtitutum uidentur, qui ſuas in his elementis geometriæ propoſitiones nudè, & abſq; illis literarum figuris ſcriptas reliquit: & præterea fieri ui

detur, ut quod doctissimorum hominum pace dixerim, non solum his qui docent & labor & molestia augeatur, sed etiam impediatur intelligentia discentium. Idq; ipse non solùm docendis his elementis quotidie experior, sed etiam de eorum querelis non semel cognoui, qui in cognoscendis his ipsis Euclidis nostri elementis, tyrocinium quoddam posuerunt. Nam & hi se tam longa sæpe & multiplici literarum inculcatione, ueluti remoris quibusdam intelligentiæ suæ turbari & impediri confessi sunt: & ego ipse sentio quàm molestum sit, & omnino plenum fastidij, ad eum modũ subinde literas, aut in sermone repetere, aut adscribere ad figuras. His igitur de caussis, usurpatam ab alijs rationem demonstrandi per literas omittendam, & aliam quandam uiam, magis, non modò huius nostri authoris tractationi cõsentaneam, sed & intelligendum etiam tyronibus planam & expeditam, ingrediendũ mihi, in his quidem prioribus sex libris explicandis duxi. In qua & illas literarum ambages remoueo, & quæ sunt demonstrationibus ostendenda, suis quæq; proprijs appellationibus, ut ipse etiam Euclides solet, designo. In q̃ eo non compendium modò me consequi, sed etiam magis uitare obscuritatis difficultatisq; incõmodum arbitror: id quod de subiũctis exemplis quiuis facile intelliget. Nam angulus rectus uel maior in operatione seu figura oblatus, nulla certè appellatione cõuenientiori exprimi poterit, quàm ut rectus, ut maior, non autem angulus a b c, uel γ δ ε uocetur. In his namq; prolixa literarum inter se collatione res demonstranda opus habet cum priore illa nostra uia & ratione rem non modo breuius, sed, ut ego quidem existimo, clarius, per suam ipsius appellationem designare possim, quæ significatam rei notionem, absq; ulla longiore collationis mora, animo auditoris statim cum ipsa proprij nominis uoce affert. An non etiam apertius absq; notis literarum sic aliquis loquatur, Angulus igitur angustior ad æqualitatem amplioris, per propositionem 23, augeatur: uel, describatur à data recta quadratum, ducatur etiam in eo diameter, & eius generis infinita alia: quàm si eadem literis appositis reddat magis implicata & obscura, sic pronũciando, Angulus igitur a b c ad æqualitatem anguli d e f, per propositionem 23, augeatur. Vel, ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς α β τετράγωνον τὸ α β γ δ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ β δ, & τὰ λοιπὰ. Quid obsecro his ambagibus literarum à solida & erudita demonstrationis explicatione magis est alienum? Nam hic primùm discenti recurrendum ad figuram est, & in illa multiplici ac inter se implicata literarum uarietate diu quærendum, ubi sint illæ ipsæ literarum notæ a b c, d e f, & ubi his ipsis designati anguli. Nec minore cura id quoque quærendum, ubi in quadrato β δ literæ, & ab his ipsis ducenda linea cuiusmodi futura sit. His & consimilibus ambagibus in illa nostra ratione nihil opus est, cũ scilicet singula suis proprijs nominibus enuncientur. Quod quidem ut in explicando Euclide facerem, non meo tantùm iudicio, sed

eorum

eorum quoq; hortatu adductus sum, quos in hac demandata mihi ab amplissimo scholæ Tubingensis senatu functione docẽdos susceperam. Hi enim hunc modum docendi & sibi pergratum, & mihi minus molestum fore confirmabant. Quibus equidem gratificandum hac in parte fuit, partim ut huius nostræ rationis aliquod periculum in docendis geometricis faceremus: partim uerò, ne opinione difficultatis eius quam esse in illa altera ratione quærerentur auditores nostri, prorsus auocarentur à studio Geometriæ, quam alioquin hoc nostro tam iniquo literis seculo nimium à pleriscq; negligi sentiebam. Atq; id nostrum consilium discentibus in hac nostra schola non parum profuisse animaduerti. Nec defuerunt boni & docti uiri, qui me ad consilium editionis operæ nostræ in hac parte nauatæ hortarentur: quibus ipsis acquiescendũ duxi, nec ideo quidem, ut me propter hanc ipsam ambitiose apud eruditos ostẽtarem: sed ut rem literariã, & in primis huius honestissimæ disciplinæ studium, pro mea quoq; uirili iuuarem. Hos igitur labores qualescunq;, nobilissimi uiri, domini & Mœcenates mei omnibus modis colendi, in communem omnium studiosorum utilitatẽ iam olim susceptos, atq; nunc etiam Dei auxilio perfectos, in lucem editurus, clarissimo nominis & authoritatis uestrę patrocinio commendatos & defensos, exire uolui. Nam cum multa sint, & non uulgaria liberalitatis in me uestræ beneficia, hoc etiam laboris & operæ nostræ patrocinium non grauatè susceпturos speraui. Quod quidẽm ut pro uestra uirtute, sapientia, & in omnes studiosos literarum amore, ac studio singulari mihi in hac parte tribuatis, atq; me clarissimæ dignitati uestræ commendatum habeatis, etiam atq; etiam rogo. Valete. Datæ Calend. April.

Anno post Christum natum

M. D. L.

De Euclidis cùm tempore quo uixit, tum libris editis, nemo est, quod sciam, inter ueteres scriptores, qui plenius tradiderit, quàm Proclus Diadochus. Is enim libro Cõmentariorum secundo, super primum Euclidis, enumeratis aliquot non paucis, qui ætate Euclidẽ præcessissent, claris Mathematicis, ueluti sunt (ut nomina tantum eorũ breuiter percurrã) Thales, Ameristus Stesichori poetæ frater, Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Oenopides Chius, Theodorus Cyrenæus, Hippocrates, Plato, Leodamas Thasius, Architas Tarentinus, Theætetus Atheniẽsis, Neoclides, Leon, Eudoxus Cnidius, Amyclas, Menæchmus, Denostratus, Theudeus Magnes, Cyzicinus Athenien sis, Hermotimus Colophonius, & Philippus Metensis: postea subiungit, ὁ πλὴν δὲ τούτων νεώτερος ὅσων Εὐκλείδης, ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγών, καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελειωσάμενος· ἔτι δὲ τὰ μᾶλλον ἀνίκητα τοῖς ἐμπροσθεν εἰς ἀναντίρρητα ἀποδείξεις ἀναγαγών. Nunc quando uixerit, sequitur: γέγονε δὲ (inquit) οὗτος ὁ κατὰ τοὺς πρώτους Πτολεμαίου (Lagi hic filius fuit, qui, ut tradunt Historici, post mortem Alexandri Macedonis, Aegypto, Aphrica, & magna Arabiæ parte potitus, regnauit) Et paulo pòst: νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους. οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὡς αὐτός φησιν Ἐρατοσθένης. Sed & professionis, qua fuerit, meminit idem, dicens: καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ὢν, καὶ τῇ Φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ ἡ συμπάσης στοιχειώσεως τέλος ποιήσασθαι, τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν χρημάτων σύστασιν. Dehinc alios eius autoris libros mathematicos, magna industria conscriptos, commemorat, subijciens: πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα, θαυμασῆς ἀκριβείας καὶ φιλονικῆς θεωρίας μεστά. τοιαῦτα γὰρ τὰ ὀπτικὰ, καὶ τὰ κατοπτρικά. διαῦτα δὴ καὶ αἱ τῆς μουσικῆς στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Qui autem ex omnibus his libris eius præcipuam laudem mereatur: respondet idem Proclus, dicens: διαφορώτατος δ' ἂν τις αὐτὸν ἀγαθείη τῇ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων, ἡ τάξεως ἕνεκα, καὶ ἡ ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα παρεισημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων. καὶ γὰρ ὅσα χάριν λέγειν, ἀλλ' ὅσα στοιχειωδῶς ἀναπόδεικτα ἦν. Sed & alia quædã huius autoris præter mathematica, recenset idem, subiungens: ἔτι δὲ οὗτος τῶν συλλογισμῶν παντοίους τρόπους, οὐ μὲν ἀπὸ τῶν αἰτίων λαμβάνοντας τὴν πίστιν, οὐ δὲ ἀπὸ τεκμηρίων ὡρμημένους, πάντως δὲ ἀνελέγκτους καὶ ἀναμφιβόλους, καὶ πρὸς ὑπόθεσιν οἰκείους. πρὸς δὲ τούτοις τὰς μεθόδους ἀπάσας τὰς διαλεκτικὰς, τήν τε διαιρετικὴν ἐν ταῖς εὑρέσεσι, τήν τε ἀναλυτικὴν ἐν ταῖς ἀπὸ τῶν ζητουμένων ὑπὸ τὰς ἀρχὰς ἀναφοραῖς. Et paulo pòst: ἐπεισὶν δὲ πολλὰ φαντάζει μὲν ὡς ἀληθείας ἀντεχόμενα, καὶ ταῖς ὑπονοουμέναις ἀρχαῖς ἀκολουθοῦντα, φθείρουσι δὲ εἰς τὸ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν παλίλλογον, καὶ τὸν ὑπολαμβάνοντας ἀπατᾶ, μεθόδους παραδίδωσιν καὶ ἡ τούτων διορατικὴ φρονήσεως, ἃς ἐχόντων γυμνάζειν δυνησόμεθα τοὺς ἀρχομένους ἐν θεωρίαις ταύτης, πρὸς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν, ἀνεξαπάτητοι δὲ διαμένειν. καὶ τοῦτο δὴ τὸ σύγγραμμα, δι' οὗ τὴν παρασκευὴν ἡμῖν ταύτην ὑπέθηκεν, ὑδηγαρίων ἐπέγραψε, τρόπους τε αὐτῶν ποικίλους ἐν τάξει διαριθμησάμενος, καθ' ἕκαστον γυμνάσας ἡμῶν τὴν διάνοιαν παντοίοις θεωρήμασι· τοὺς δὲ ὑδηγοὺς ἀληθεῖς παραθείς, καὶ τὴν πεῖραν ἐν ἐλέγχῳ ἐν ἀπάτῃ σωματοῦσαν. οὗτος μὲν οὖν ὁ βιβλίου καθαρτικός ὅδε, καὶ γυμνασικός. ἡ δὲ στοιχείωσις αὐτὴ ἡ τῶν καθόλου θεωρίας τῶν ἐν γεωμετρίᾳ πραγμάτων ἀνέλεγκτον ἔχει, καὶ τελείαν ὑφήγησιν. Hæc de Euclide & libris eius, ex Proclo.

BREVIS

BREVIS REGVLA-RVM ALGEBRAE DESCRIPTIO, VNA CVM DEMONSTRATIONIBVS GEOMETRICIS,

AVTORE IOANNE SCHEVBELIO.



VVM, ut in absolutis numeris naturali quodam ordine maior sequitur minorem, ita quoq; in denominatis proportione aliqua (quorum computationem hoc libro explicare instituí) fieri consentaneum sit: primùm ostendam quæ uocabula & signa, & qui ordo talium numerorum, deinde quæ & cuiusmodi sint regulæ Algebræ, rationum ualdè artificiosarum, planum facere, ac quoad eius fieri potest, breuissimè & perspicuè docere aggrediar. Porrò harum regularũ inuentionem ascribunt Diophanto Græco scriptori, qui, ut autor est Regiomontanus in præfatione Alphragani, libris tredecim eas descripsit, atq; ut Latini REI ET CENSVS sit Arabes regulas illas uocabulo suo appellare solent ALGEBRAS, id quod obiter indicandum erat.

NVMERATIO. CAPVT I.



Characteres uocabulorum seu appellationum, quibus in his regulis numeri naturali quodam ordine proportionis denominantur, sunt, 9, 2ę, 3, cę, 33, 53, 3cę, b53, 333. ccę, 353, T53, 33cę, &c̃.

Signa præterea, + & —

CHARACTERVM EXPLICATIO.

9. Primus character, habet appellationem numeri, sic, ut cuicunq; numero appositus sit, pro simplici is habeatur. Vt 4, apposito characterę 9, sic, 4 9, effertur quatuor numeri, hoc est, quatuor unitates simplices. Ac præterea 13 9, 49 9, 486 9, tredecim, quadraginta nouem, quadringenta & octoginta sex, item cęteri numeri, unitates simplices significabunt.

2ę. Secundus ordine character, appellationem habet Radicis uel Rei, sic, ut cui numero appositus sit, hac ille appellatione exprimatur. Vt 4 2ę, denotant quatuor radices uel res. Sic 8 2ę, sunt & exprimuntur octo radices.

3. Tertius character, appellationem obtinet Census uel Quadrati, sic, ut numerus cui sit ascriptus talis character, hac appellatione appelletur. Vt 4 3, exprimuntur quatuor census uel quadrati. Sic 87 3, sunt octoginta septẽ census uel quadrati.

cę. Quartus character, repræsentat nobis numerũ cubicum, sic, ut numerus hac nota insignitus, cubi appellationem habeat. Vt 4 cę, exprimũtur quatuor cubi. Sic 49 cę, sunt quadraginta nouem cubi. Haud longè secus exprimendos reliquos characteres, si quibus erunt adiuncti numeris, censendum. Quare eorum tantum appellationibus, quid nimirum singuli significent, figura quadam repræsentatis, ui deinde aut significatione signorum + & — expressa, quorum nimirum illud, Plus & additionem: hoc uerò, Minus & diminutionem significet, quod ad numerationis descriptionem attinet, per hæc quæ hoc loco proponuntur, nunc satis manifestum erit.

SIGNIFICANT AVTEM CHARACTERES.

9 quidem, Numerum — 2ę, uerò Radicem.
ȝ, Quadratum — cę, Cubum.
ȝȝ, Quadratū de quadrato. — ſȝ, Surſolidum.
ȝcę, Quadratum de cubo, uel contrà, Cubum de quadrato
Bſȝ, Biſſurſolidū ſignificat.
ȝȝȝ, Quadratum de quadrati quadrato, uel contrà, Quadratum quadrati de quadrato
ccę, Cubum de cubo
ȝſȝ, Quadratum de ſurſolido, uel contrà, Surſolidum de quadrato.
Tſȝ, Terſurſolidum
ȝȝcę, Quadratum quadrati de cubo, uel contrà, Cubum quadrati de quadrato.

Quia uerò hæ numerorum appellationes in infinitum ſeſe extendunt, cum ex multiplicatione (ut quę ſemper cõtinuari poſsit) ipſę proueniant, ne imponendis nominibus tandẽ infinitio nobis faciat negociũ, per numeros naturali ordine poſitos, cum & ipſi in infinitum creſcant, ſingulas appellationes nominabimus, ſic, ut primus character. 9: Numeri, Secundus uerò, 2ę: Radicis nomẽ habeat. Tertius de de, ȝ. qui cũ ex multiplicatione radicis in ſe producatur, & primo quidem: Prima quantitas, & Pri etiam ſyllaba notata, appelletur. Quartus uerò cę quia ex multiplicatione eiuſdem radicis cum quadrato, hoc eſt, cum prima quantitate, ſecundò producitur: Se ſyllaba notata, Secunda quantitas dicitur. Sic character quintus, ȝȝ, quia ex multiplicatione radicis cum ſecunda quantitate tertiò naſcitur: Ter ſyllaba notata, Tertia etiam quantitas dicitur. Sextus eadem ratione, ſyllaba quar: Quarta. Deniq; reliqui omnes, quo ordine ſinguli naſcũtur, eo etiam ſuæ initialis ſyllabæ numero appellantur.

TYPVS QVO HAEC QVAE IAM DICTA SVNT, ſuis figuris ordine depinguntur.

9 Numerus	Radix	Cenſus uel Quadratus	Cubus	Quadrantus de quadrato	Surſolidus	Quadratus de cubo, uel contra.	Biſſurſolidus.	Quadratus de quadrati quadrato.
9	2ę	ȝ	cę	ȝȝ	ſȝ	ȝcę	bſȝ	ȝȝȝ
N Numerus	Ra.	Pri.	Se.	Ter.	Qrar.	Quin.	Sex.	Sep.
Numerus	Radix	Prima	Secunda	Tertia	Quarta	Quinta	Sexta	Septima quantitas.

EXEMPLA NVMERATIONVM PROPONUNTUR ſic.

$$44\,\text{ſȝ quar.} \;+\; 11\,\text{ȝ pri.} \;+\; 31\,\text{9 N.} \;-\; 53\,\text{2ę ra.}$$

Exprimitur, uel 44 ſurſolidi, plus (id eſt &) 11 quadrati, plus 31 numeri, minus 53 radices, Vel 44 quartæ, plus 11 primæ plus 31 numeri, minus 53 radices. Similiter

$$25\,\text{bſȝ ſex} \;+\; 13\,\text{ſȝ quar.} \;+\; 9\,\text{cę ſe.} \;-\; 48\,\text{ȝ pri.} \;-\; 11\,\text{2ę ra.}$$

Exprimi

Exprimitur 25 biſſurſolidi, plus 13 ſurſolidi, plus 9 cubi, minus 48 quadrati, minus 11 radices. Vel 25 ſextæ, plus 13 quartæ, plus 9 ſecũdæ, minus 48 primæ, minus 11 radices.

Proinde harum regularum exempla, cum eodem modo, quo in communi negociatione aliàs monetarum, menſurarum & ponderum, atq; etiam quarumlibet aliarum rerum numeri, enuncientur, his duobus exemplis poſitis, puto iam facile omne propoſitum exemplum exprimi poſſe; quare de enunciatione iam ſatis.

ADDITIO. CAPVT II.

IN additione ſcribantur numeri cum ſuis characteribus & ſignis, non aliter atq; in communi numerorum uel phyſicalium minutiarum tractatione fieri conſueuit, linea deinde ſub ordinibus ducta, omnes unius characteris, ſeu appellationis numeri in unum colligantur. Quod ſi horum ſummæ tandem, unà cum charactere & ſigno cuiuſq;, ſub linea, eo quo maximè collectæ ſint loco, ſcriptæ fuerint, additio peracta erit.

EXEMPLA.

Ter.	ra.	N	Quar.	N	Pri
7 +	8 —	5	7 +	8 —	5
3 +	9 —	8	4 +	11 —	5
10 +	17 —	13	11 +	19 —	8

Quod ſi in uno ordine numerus fuerit, cuius characteri uel appellationi ſimilis in reliquis ordinibus non reperitur, ille cum ſuo charactere & ſigno ſummæ ſub linea aſcribendus erit. ut,

7 quar.	+	8	ra.	—	5	N	Item	9	ter.	
4 quar.	+	9	ter.	+	6	ra.		8	ra.	
11 quar.	+	9	ter.	+	14	ra	— 5 N	9 ter.	+	8 ra.

Item	4	primis	+	9	N	
addendæ ſunt	3	primæ	—	4	ra.	
ueniunt	7 pri.		+	9 N	—	4 ra.

Quòd ſi in ſignis fuerit aliqua diuerſitas, ſic quòd numerorum unius appellationis alter +, alter uero ſignũ — habuerit: maioris ſuper minorem numerũ exceſſu per ſubtractionem cognito, is cum maioris numeri ſigno & charactere ſub linea, quemadmodum alia, ſcribatur. ut,

Pri.	ra.		Pri.	ra.
6 —	8	Item	6 +	8
4 +	12		4 —	4
10 +	4		10 +	4

PROBA SEV EXAMEN.

—		+	40
	+ $2\frac{4}{9}$		+ 48
+ $4\frac{4}{9}$		+ 8	
	+ $2\frac{4}{9}$		+ 48

COMPROBATIO VEL EXAMEN OPERATIONIS.

Vt nunc comprobetur rectè ne an ſecus in additione operatum ſit, neceſſe erit ut primò præparetur tabula huic negocio deſeruiens, hoc modo. Accipiatur ad placitum numerus, integer uel fractus, eo deinde radicis loco poſito, eius, prout quidem exemplorum quæ comprobari debeant characteres requirunt, ſingulæ quantitates ordine deſignentur, atq; notatis tandem his, unà cum radice poſita, tabula, ut ſequitur parata erit.

TABVLA COMPROBATIONIS.

Radix posita.	Prima.	Secun.	Tertia.	Quarta.	Quinta.	Sexta.	Septi.	Octaua quantitas.
2	4	8	16	32	64	128	256	512
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{2187}$	$\frac{1}{6561}$	$\frac{1}{19683}$
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$42\frac{7}{8}$	$150\frac{1}{16}$	$525\frac{7}{32}$	$1838\frac{17}{64}$	$6433\frac{119}{128}$	$22518\frac{193}{256}$	$78815\frac{227}{512}$
7	49	343	2401	1637	117649	823543	5764801	40353607

Et quia tabula iam eſt confecta, exemplorum examen, recténe an ſecus computatio ſit facta, hoc modo cognoſcetur. Reſoluantur numeri denominati in ſingulis ordinibus, ſecundum unius numeri ex radicibus poſitis (eius nimirum per quem probatio inſtituitur) quantitates, in numeros abſolutos, ſumptis interim & iis in ſingulis ordinibus, qui propriè numeri, nempe ſimplices, appellantur. Proinde qui ex additis proueniunt ſimplices numeri, in unum tamen prius collecti, ſi id collectũ, ſiue totus is numerus, ei qui ex inferiori, hoc eſt ex ſumma colligitur, æqualis fuerit: rectè te operatum ſcias, at contra ſi inæqualis: reiterandam eſſe nimirum operationem ipſo errore admoneberis. Atq; in hunc modum, ultimum quidem per radicem poſitam 2. quod uerò exemplum ipſum præcedit, per $\frac{1}{3}$ comprobatum eſſe ſcias.

SEQVITVR EXEMPLVM ALIVD.

7 quint. + 8 ter. — 4 ra. + 8 N
7 quint. + 5 quar. — 11 ter. — 11 ſe.

14 quint. + 5 quar. — 3 ter. — 11 ſe. — 4 ra. + 8 N

Probatur hoc exemplum per 2.

Numeri ordinis

Primi 576 Secundi 344.

Summa 920. Atq; tot etiam unitates ſimplices, uel tantus numerus ueniet, ubi ſumma ſub linea poſita ſimili modo reſoluta fuerit.

Idem exemplum probatum per

$\frac{1}{3}$: $+ 6\frac{565}{729}$, $- \frac{374}{729}$ } $+ 5\frac{191}{729}$; $+ 6\frac{191}{729}$

$3\frac{1}{2}$: $1406\frac{23}{64}$, $1336\frac{57}{64}$ } $2743\frac{1}{4}$; $2743\frac{1}{4}$

SVBTRACTIO CAP. III.

IN ſubtractione id quod ſubtrahitur, ſub eo à quo ſubtractio fieri debet, ordine ſcribatur, ſubducta deinde linea, ſingularum in ſubtrahendo appellationum numeri à numeris appellationum ſimilium, eius à quo ſubtractio fieri debeat, auferãtur. Quod ſi tandem reſidui, unà cũ cuiuſq; charactere & ſigno, ſub linea ſuo loco poſiti fuerint, ſubtractio peracta erit. Hic tamen maximè reſpectus habeatur ſignorum + & —. nam per illa quid ſubtrahendũ ſit, & quid non, quantum deinde illud ſit, de quo ſubtractio fieri debeat, quantum fuerit initiò, & quantum ſubtractione nunc ei deſit, cognoſcitur. quæ certè omnia niſi animaduertantur: difficilis erit omnis ſubtractio, contrà uerò: nulla non facilis, ſi obſeruentur.

EXEMPLA.

Pri.		ra.		N
7	+	8	+	14
3	+	5	+	7
4	+	3	+	7

Ter.		ra.
8	+	7
5	—	4
3	+	11

Primum

Primum exemplum est facile, secundum autem, quia in eo non 5 tertiæ totæ & integræ, sed hæ, quatuor radicibus minus subtrahendæ sunt. postquam igitur 5 tertiæ integræ à superioribus subtractæ fuerint, 4 radices residuo reddendæ erunt. Quo fit, ut 11, & non 3 radices, ultra 3 tertias in residuo conspiciuntur. ut

Ter.		pri		pri		N
14	+	9		19	—	5
9	+	12		14	+	14
5	—	3		5	—	19

In his duobus exemplis superiorum memori nulla difficultas occurret. Nam cum aliquid totum & integre subtrahi non possit, nihilominus id quod maximè potest, de summa est detrahendum, quod reliquum deinde est, per diminutionum signum, —, ut communi apprehenditur notione, in debitum ponendum est, quod ipsum in priori exemplo cognosci potest. In posteriori, cum 14 exponi debeant, prius uerò 8 eiusdem appellationis, de summa exposita sint, 22 iam per signum — notanda erunt.

Pri.		N		Pri.		N
12	—	9		12	—	4
8	—	4		8	—	9
4	—	5		4	+	5

In his duobus exemplis, cum in utroq; non 8 quantitates primæ, sed hæ in uno quidem minus 4, in altero uerò, minus 9 numeris subtrahendæ sint, 8 primis integrè subtractis, residuis tandem id quod plus æquo subtractum est, iure accedere debet. Quare in priori quidem exemplo, loco — 9, cum 4 accedant, tantum — 5, in posteriori uerò loco — 4, cum 9 accedant, + 5 N positum est.

ALIVD EXEMPLVM.

A	1056	primis	—	696 secund.
subtra.	4032	primæ	—	1008 secund.
manent	312	secundę	—	2976 pri.

Proba, sumpto radicis ualore

2			3	
— 1344	— 1344		— 9288	— 9288
+ 8064	— 1344		+ 9072	— 9288
— 9408			— 18360	

Vel facta subtractione

— 1344		— 9288	
+ 8064	— 9408	+ 9072	— 18360
— 9408	— 9408	— 18360	— 18360

Hactenus quæ in signis animaduertenda, ostendimus.

Quod si in uno ordine, uel in eo qui subtrahitur, uel in eo à quo subtrahitur, numerus fuerit, cuius characteri in altero similis non reperitur, in subtrahendo quidem numerus ille cum suo charactere, signo tamen opposito, in altero uerò ordine, omnia, hoc est, numerus, character & signum, sub linea scribantur.

EXEMPLVM.

A	4	quar.	—	5	radi.	
subtrahantur	2	quar.	+	9	N	
manent	2	quar.	—	9 N	— 5	ra.

ALIA DVO.

	8	pri.		4	quar.	+	8	ra.
	4	ter.		3	quar.	—	8	N
8 pri.	— 4	ter.		1	quar + 8	ra.	+ 8	N

ALIVD EXEMPLVM.

	Sep.		ſex.		quin.			Ter		ſe.			primę quan.			
	8	+	9	+	11	+	14 quar.	— 4	—	8	—	4				
	5	+	12	—	9	+	10 ra.	+ 8	—	4	—	9	—	6	N	
3 ſep.	— 3	ſex.	+ 20	qn.	+ 14	quar.	— 10 ra.	— 12	—	4	+	5	+	6	N	

PRPBAE NVMERVS, AC RADICIS VALOR,

eſto 2

+	4208	+	1894
+	2314		
		+	1894

COMPROBATIO, VEL EXAMEN OPERATIONIS.

In examine ſubtractionis utere tabula in additione à nobis propoſita, contrario tamen uſu, nam quod illic additur, hic ſubtrahitur. Neceſſe igitur, ut quantum fuerit numerorum ſubtrahendi, ſecundum ſuorum characterum appellationem reſolutione facta, tantundem de alterius ordinis numeris, eodem modo reſolutis, ſubtrahatur. Quod ſi tandem quod relinquitur reſidui numeri ſub linea ſolutioni reſponderit, ut in hoc ultimo præmiſſo exemplo apparet, non eſt quod te hallucinatum fuiſſe ſubtractione exiſtimes.

Idem ultimum exemplum examinatum, radicis ualore exiſtente $3\frac{1}{2}$

Singulorum characterum numeri, pro ualore radicis poſitę ſoluti, ſunt, in ordine

quidem à quo ſubtrahitur,	+	$\frac{512}{6561}$	—	$\frac{64}{81}$
ſubtrahendo uerò	+	$3\frac{2876}{6561}$	—	$7\frac{17}{81}$
reſiduo deinde	+	$6\frac{4206}{6561}$	—	$3\frac{460}{729}$

hoc eſt,

	—	$\frac{4672}{6561}$			
			+	$3\frac{66}{6561}$	
	—	$3\frac{4738}{6561}$			
			—	$\frac{4672}{6561}$	
	+	$3\frac{66}{6561}$			

Poteſt proba ſubtiliori etiam modo inſtitui, iſs nimirum, qui poſt illud, quo dicitur, Hoc eſt, ponuntur, numeris neglectis. Sed per hanc iam ſatis.

MVLTIPLICATIO. CAP. IIII.

IN multiplicatione, ſcriptis ordinibus, linea item ſub iſs ducta, ut ſolet, multiplicentur numeri ſingulorum characterum ſuperioris, cum ſingulis characterum numeris ordinis inferioris, atq; productis poſthac ſingulis legitimè in unum collectis, ſi cuiq; producto tandem ſuus proprius character & ſignum, quæ ſic multiplicando ſortiuntur numeri, adſcripta ſint, multiplicatio peracta erit. In hac autem numerorum collectione animaduertendum eſt, qualem characterem, quale item ſignum, quilibet productus numerus ſortiatur. Quantum igitur ad characterem pertinet, hoc eſt, ut ſciatur, qui character ſit aſcribendus procreato ex multiplicatione numero, ex hac ſubiecta tabula intelligi poterit.

TABV-

TABVLA MVLTIPLICATIONIS, QVANTVM ad characteres.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	Ra.	Pri.	Secun.	Ter.	Quar.	Quin.	Sex.	Sep.	Octa.	No.	De

cima &cæ. quanti.

COMPOSITIO TABVLAE.

Scribantur characteres singuli ordine quo ipsi prouenisunt & numerantur, sic, ut character N. primus, locum primũ: Radix uerò character secundus, secundum: reliqui deinde omnes naturali ordine sua loca occupent. Super primo deinde charactere, N scilicet, figura nihili o posita, reliquis omnibus naturali numerorum ordine, ab unitate incipiendo, signatis, tabula confecta erit, cuius usus talis est.

VSVS TABVLAE.

In multiplicatione, duobus duorum characterum numeris inter se multiplicatur, qui super horũ numerorum characteribus in præscripta tabula reperiuntur numeri, hi simul aggregati, summa sua characterem producti in tabula ostendent.

Porrò quod ad signa + & — attinet, quale scilicet unicuiq; producto sit adnotandum, communis notitia atq; intelligentia, ex sequentium exemplorum descriptione, expeditam nobis & promptam rationem suppeditabit.

SEQVVNTVR EXEMPLA.

8	pri.	8	N	9	se.	29	quar.
4	N	8	N	8	ra.	9	quar.
32	pri.	64	N	72	ter.	261	No.

Initium ordinis numerorum semper repræsentare plus admonendus est lector.

ALIA EXEMPLA.

			8	pri.	+	9	N					8	pri.	+	9	N
			7	pri.	+	4	N					8	pri.	+	9	N
			32	pri.	+	36	N					72	pri.	+	81	N
56	ter.	+	63	pri.				64	ter.	+	72	pri.				
56	ter.	+	95	pri.	+	36	N	64	ter.	+	144	pri.	+	81	N	

In his duobus exemplis nulla est difficultas, in utroq; enim omnes superioris cum omnibus numeris ordinis inferioris multiplicandi sunt. Quare sicut signum + ad omnes, tam multiplicandi quàm etiam multiplicantis ordinis, numeros est positũ, ita etiam singuli ex multiplicatione producti numeri ex æquo eodem signo + notentur. Hinc regulam colligunt in Algebricis exercitati. Quòd + cum + multiplicatum, + producat, quæ est notanda.

ADHVC ALIA EXEMPLA.

7	pri.	+	4	ra.			
			9	ra.			
63	se.	+	36	pri.			

ALIA EXEMPLA.

2	pri.	—	4	ra.					9	ra.	
			9	ra.		7	pri.	—	4	ra.	
63	se.	—	36	pri.		63	se.	—	36	pri.	

Primũ exemplum est facile, cũ in eo tam 7 primæ quantitates quàm 4 radices, cum 9 radicibus multiplicari debeant. Secundi autẽ, & tertij exemplorũ ratio, cũ sit paulò inuolutior, explicanda communi quadam (quæ uersatur in huiusmodi rebus) notitia esse uidetur. In secundo, 7 primæ solidę ac integrę cum 9 radicibus, in

tertio,

tertio, 9 radices cum 7 itidem integris primis multiplicentur: hæ tamen integræ cũ non ſint, ſed quandam deceſsionem perpeſſę ſint priuatiuo ſigno —, neceſſe eſt, ut in multiplicatione tantum decedat, quantum non legitimè acceſſit, priori ſummæ procreatæ ex multiplicatione: atq; hic quidem, quantum 9 radices cum 4 radicibus: illic uerò, 4 radices cum 9 radicibus multiplicatę producunt, id quod per ſignũ diminutionis — fieri debet, ſic, — 36 pri. — 36 pri. Ex quo ratio intelligi poteſt, propter quam, ſi multiplicetur + cum —, uel contrà — cum +: non plus, ſed minus producatur, quod & ipſum regula quadam propoſuerunt in Algebricis exercitati, quæ eſt notanda.

ALIVD EXEMPLVM.

8	pri.	—	9	N		
8	pri.	—	9	N		
64	ter.	—	72	pri.		
		—	72	pri.	+ 81	N
64	ter.	—	144	pri.	+ 81	N

	3	8	3	
cum	3	8	3	produ.
1	4	6	6	8 9
				nbæ
1	4	6	6	8 9

Quomodo 8 primæ cum 8 pri. ut totum cum toto multiplicari debet, item quomodo 8 primæ — 9 N. cum 8 primis, Poſtremò 8 primæ etiam cum 8 primis — 9 N. ſuprà oſtendimus. At uerò cum in hoc exemplo multiplicandi ratio minus ſit perſpicua, eam explanare obiter hoc loco uolui, ut intelligatur ſcilicet cauſſa etiam, propter quam, ſigno — notatis numeris, non minus, ſed plus procreetur, hoc quod diuerſum quid, quàm in ſuperioribus hactenus eſt habitum, eſſe ſolet. Multiplicentur igitur 8 primæ — 9 N. ut dictum eſt, cum 8 primis, & producentur 64 ter. — 72 pri. Sed quia non cum 8 primis integris, uerùm cũ ijs, detractione, 9 N. imminutis, multiplicatio inſtitui debet, plus quàm par erat, priore multiplicatione eſt procreatum, quare ut conueniens producatur numerus, ratione defectus in multiplicante, 8 primæ nouies ex hoc producto ſubtrahendæ erunt. Atqui rurſum, cum non 8 primæ, ſed hæ minus 9 N. multiplicari debeant, 9 N rurſus nouies addendæ ſunt. quod tum fit, quando minus multiplicatur per minus (id quod tertiò ratione ſignorum, + & — in multiplicatione obſeruari debet) Quo demum reddito, uerus productus numerus apparebit.

Tribus igitur regulis his ſuprà propoſitis, omnis multiplicatio, ratione quidem ſignorum + & — abſoluitur: quæ tamen, quia prima & ultima coincidunt, ad duas regulas reduci poſſunt.

Prima.

Si fuerint eadem ſigna multiplicantis & multiplicandæ quantitatis, procreatus ex multiplicatione numerus notatur ſigno affirmatiuo +.

Secunda.

Si fuerint ſigna diuerſa: notatur productus ex multiplicatione numerus ſigno priuatiuo uel negatiuo —.

POTEST ETIAM ALITER HVIVS EXEMPI PRAECEdentis multiplicatio inſtitui.

Multiplicentur primò 8 pri. — 9 N cum 8 primis una, poſtea etiam cum 9 N altera quantitate. Subtrahatur deinde, per caput præcedens, poſterius productum à priori, & relinquetur uerus ex multiplicatione productus numerus, ut ſequitur.

8 pri.

8 pri. — 9 N
cum 8 pri.
64 ter. — 72 pri.

8 pri. — 9 N
cum 9 N
72 pri. — 81 N

Productorum ſubtractio.

64 ter. — 72 pri.
72 pri. — 81 N
64 ter — 144 pri. + 81 N

SEQVITVR HVIVS REI EXEMPLVM IN NVMEris rationalibus.

17 — 6, hoc eſt 11
cum 9 — 4 cum 5
153 — 54
— 68 + 24
153 — 122 + 24

hoc eſt, 55. Et tantum etiam ſunt 11. quinquies, uel undecies quinq, ut quidem multiplicatione patet, quod erat oſtendendum.

ALIVD MVLTIPLICATIONIS EXEMPLVM.

9 pri. + 8 N — 3 ra.
7 ſe. — 4 ter. — 8 pri.
63 quar. + 56 ſe. — 21 ter.
— 36 qn. — 32 ter. + 12 quar.
— 72 ter. — 64 pri. + 24 ſe.
75 quar. + 80 ſe. — 36 qui. — 125 ter. — 64 pri.

PROBAE NVMERVS AC RADICIS VALOR.

ſit $\frac{1}{3}$

\+ 8
— $5\frac{35}{81}$
— $\frac{55}{81}$
— $5\frac{35}{81}$

Poteſt etiam, cum iam ſciatur, quale ſignum cuiuis producto ſit aſcribendum, multiplicatio ad uulgarem modum ſic inſtitui.

9 pri. + 8 N — 3 ra.
7 ſe. — 4 ter. — 8 pri.
— 72 ter. — 64 pri. + 24 ſe.
— 36 quin. — 32 ter. + 12 quar.
63 quar. + 56 ſe. — 21 ter.
75 quar. + 80 ſe. — 36 quin. — 125 ter. — 64 pri.

PROBAE NVMERVS AC RADICIS VALOR.

ſit 2

\+ 38 — 1520
— 40
— 1520

COMPROBATIO VEL EXAMEN OPERATIONIS.

Proba hic non aliter inſtituitur atq; in ſuperioribus, nempe per reſolutionem denominatorum numerorum. Nec à ſuperiori differt, niſi quòd hic numerus abſolutus unus cum altero multiplicetur, cũ illic ſimul additi, uel unus ab altero ſubtractus ſit. Tabula igitur, quam in additione præſcripſimus, huc etiam aſſumenda erit, & ad multiplicationis reſolutionem adhibenda.

DIVISIO. CAP. V.

SI numeri diuidendi character ſemper maior eſſet charactere ſui diuiſoris, uno item charactere diuiſor ipſe ſignaretur, ſimpliciſsima & facillima eſſet omnis diuiſio. Etenim numero uel numeris diuidendi ſingulis in numerum diuiſoris diuiſis, characteris deinde diuiſoris numero (quo ſcilicet in multiplicationis tabula ſignatur) à numero, uel numeris characterũ diuidẽdi ſingulis ſubtracto, diuiſio utiq; peracta eſſet. Diuiſio enim ſic per exeuntes: ipſos numeros, ſubtractio uerò numerorũ, quibus ſignantur in tabula characteres, ubi reſiduus, uel reſidui numeri ſinguli in tabulam multiplicationis miſſi fuerint: horum numerorũ denominationes ſeu characteres offeret.

In ſignis porrò nulla fit planè mutatio. Quæ enim ſigna habet ipſe diuidendus, illa eadem etiam in exeunte ponuntur.

EXEMPLA SVNT.

Diuidantur 9 ra. (exe. 3 ra — Item 10 ſe. (exe. $3\frac{1}{3}$ N
in 3 N — in 3 ſe.

ALIA EXEMPLA.

8 ra. in 9 ra. — Item 10 ſe. in 3 ra.
exeunt $\frac{8}{9}$ N — exeunt $3\frac{1}{3}$ pri.

ADHVC ALIA.

9 pri. + 4 ra. in 3 ra. — Item 18 ter — 12 pri in 4 ra.
exeunt 3 ra + $1\frac{1}{3}$ N — exeunt $4\frac{1}{2}$ ſe. — 3 ra.

Sed quia non rarò contingit, quòd diuiſoris character maior quàm diuidendi character ſit, pluribus etiam characteribus quàm uno, ſignetur. Alia ratione igitur numerus qui proponitur, diuidendus erit. Nam tum diuiſor numerus diuidendo ſubſcribi, ac uirgula interponi atq; interduci oportet.

Vt diuidere uolens, 8 quar. in 2 pri. — 4 N
Item 8 pri. — 9 ra. in 4 ra. + 3 N.

Diuiſores ſuis diuidendis tantum, ut præcipitur, ſubſcribat: ac uirgulis deinde interiectis, diuiſionem abſolutam eſſe ſciat.

EXEMPLA.

Diuidẽden.	Diuiſor	Exiens
8 quar.	in 2 pri. — 4 N	8 quar / 2 pri. — 4 N

Diuidẽden.	Diuiſor	Exiens
8 pri. — 9 ra.	in 4 ra + 3 N	8 pri. — 9 ra. / 4 ra. + 3 N

ALIA EXEMPLA.

9 N in 3 ra. — exeunt $\frac{3\text{ N}}{1\text{ ra.}}$

8 ra. in 4 pri. — exeunt $\frac{8\text{ ra.}}{4\text{ pri.}}$ uel $\frac{2\text{ N}}{1\text{ ra.}}$

Afferri autem huc neceſſe eſt tabulam, in multiplicatione, pro characteribus productorum habendis, expoſitam. Nam quemadmodum in multiplicatione, numeri characterum eorum qui inter ſe multiplicantur, pro characteribus productorum habendis, addendi: ſic in diuiſione iam, ut habeatur character exeuntis unius, diuiſoris ſcilicet character de numero characteris ipſius diuidendi ſubtrahi debet. Per reſiduum enim numerum ſtatim, in tabula illa, exeuntis character manifeſtabitur: cum is nimirum ſit, cui eſt numerus reſiduus ſuprà poſitus. Et hæc de integris hactenus pro inſtituto noſtro ſatis nos dixiſſe opinor.

Sequuntur

SEQVVNTVR REGVLAE QVAS OBSERVARI IN FRACTIONIBVS oportet.

ENVNCIATIO. CAP. I.

QVantum ad enunciationem fractionum seu minutiarum, nulla est hic difficultas, cum hæ non aliter atq; in communi minutiarum tractatione enuncientur, nisi quòd etiam uocabula seu characteres suis appellationibus efferantur, & horum quidem primus, si duo fuerint, numeratorem: alter deinde, ipsum denominatorem sequatur. Quod si unus tantum fuerit minutiæ character, ad minutiæ numeratorem illum pertinere scias. Vt minutia $\frac{3\ N.}{8\ ra.}$ enunciatur, tres numeri diuisi in octo radices. Item $\frac{7}{9}$ pri. sunt septem primæ diuisæ in 9. Simili modo alias minutias omnes efferri oportet.

ADDITIO ET SVBTRACTIO. Caput II.

PRo additione, addantur fractiones, prout communis earum tractatio requirit. Qui deinde characteres numeratoris & denominatoris collectæ minutiæ sint, ostendet tabula in multiplicatione de integris exposita. Idem usuuenit etiam in subtractione, in qua itidem una minutia de alia subtracta, characteres residuæ minutiæ tabula integrorum suprà proposita offeret.

EXEMPLA ADDITIONIS.

$$\frac{\frac{31\ pri.}{15\ pri.}}{\frac{3\ N}{4\ ra.}}\ ad\ \frac{\frac{16\ pri}{4\ ra.}}{\frac{5\ pri.}{20\ se.}}$$

Item

$$\frac{\frac{15\ pri. + 14\ ra.}{15\ pri.}}{\frac{\frac{1}{6}\ pri.}{18\ N}}\ ad\ \frac{\frac{14\ ra.}{\frac{7}{8}\ ra.}}{}$$

ALIVD EXEMPLVM.

$$\frac{48\ N}{7\ pri.}\ ad\ \frac{48\ N}{12\ ra. - 3\ pri.}\ uen\ \frac{192\ pri. + 576\ ra.}{84\ se. - 21\ ter.}$$

ADHVC ALIVD.

$$\frac{4}{9}\ N\ ad\ \frac{1}{9}\ pri.\ ue.\ \frac{1\ pri. + 4\ N}{9}$$

ALIVD.

$$\frac{9\ ra. + 2\ pri.}{36\ se.}\ ad\ \frac{21\ ter. - 8\ pri.}{36\ se.}\ ue.\ \frac{21\ ter. + 9\ ra. - 6\ pri.}{36\ se.}$$

Vel in minimis, quantum ad numeros & characteres, ueniunt.

$$\frac{7\ se. + 3\ N - .2\ ra.}{11\ pri.}$$

EXEMPLA SVBTRACTIONIS.

$\frac{15 \text{ quar.}}{16 \text{ quar.}} \quad \frac{31 \text{ quar.}}{4 \text{ ra.}} \quad \frac{31 \text{ se.}}{5 \text{ pri.}} \quad \text{de} \quad \frac{31 \text{ se.}}{20 \text{ ter.}} \quad \frac{20 \text{ quin.}}{}$

Item $\frac{15 \text{ pri.}}{5/6 \text{ pri.}} \quad \text{de} \quad \frac{14 \text{ ra.}}{15 \text{ pri.} + 14 \text{ ra.}} \quad \frac{15 \text{ pri.} + 14 \text{ ra.}}{18 \text{ N}} \quad \frac{18 \text{ N}}{}$

Vel in minimis, &cæ.

$\frac{3 \text{ N}}{4 \text{ ra.}} \qquad \frac{7}{9} \text{ ra.}$

ALIVD EXEMPLVM.

$\frac{48 \text{ N}}{12 \text{ ra.} - 3 \text{ pri.}} \quad \text{de} \quad \frac{232 \text{ ra.} + 576 \text{ N}}{84 \text{ pri.} - 21 \text{ se.}} \quad \text{uel de} \quad \frac{48 \text{ N}}{7 \text{ pri.}}$

Sunt duæ subtractiones, manent autem, ratione quidem prioris

$\frac{6912 \text{ ra.} + 312 \text{ se.} - 2976 \text{ pri.}}{63 \text{ qr.} + 1008 \text{ se.} - 504 \text{ ter.}}$ poste. $\frac{576 \text{ ra.} - 480 \text{ pri.}}{84 \text{ se.} - 21 \text{ ter.}}$ uerò

Vel manet ratione prioris

$\frac{576 \text{ N} - 104 \text{ ra.}}{84 \text{ pri.} - 21 \text{ se.}}$ quod probari potest.

OPERATIO SVBTRACTIONIS PRIORIS.

$\frac{6912 \text{ ra.} + 312 \text{ se.} - 2976 \text{ pri.}}{4032 \text{ pri.} - 1008 \text{ se.}} \quad \frac{1056 \text{ pri.} + 69\,12 \text{ ra.} - 696 \text{ se.}}{48 \text{ N}} \quad \frac{48 \text{ N}}{12 \text{ ra.} - 3 \text{ pri}} \quad \text{de} \quad \frac{232 \text{ ra.} + 576 \text{ N}}{84 \text{ pri.} - 21 \text{ se.}} \quad \frac{}{63 \text{ quar.} + 1008 \text{ se.} - 504 \text{ ter.}}$

Posterioris subtractionis calculus quia est facilis, ideo etiam relinquitur.

ALIVD EXEMPLVM.

$\frac{8 \text{ pri.} + 4 \text{ ra.}}{9 \text{ se}} \quad \text{de} \quad \frac{9 \text{ se.}}{8 \text{ pri.} - 4 \text{ ra.}} \quad \text{ma.} \quad \frac{81 \text{ quin.} - 64 \text{ ter.} + 16 \text{ pri.}}{72 \text{ quar.} - 36 \text{ ter.}}$

ADHVC ALIVD.

$\frac{9 \text{ pri.} + 8 \text{ ra.}}{2 \text{ se.} - 6 \text{ N.}} \quad \text{de} \quad \frac{11 \text{ se.} + 16 \text{ pri.} + 8 \text{ ra.}}{2 \text{ se.} - 6 \text{ N}} \quad \text{ma.} \quad \frac{11 \text{ se.} + 7 \text{ pri}}{2 \text{ se.} - 6 \text{ N}}$

MVLTIPLICATIO ET DIVISIO.

Caput III.

DEro multiplicatione, multiplicentur numeri, numeratores scilicet & denominatores, prout in communi tractatione id fieri solet, inter se: productorum deinde characteres, quem quisq; sortiatur, dabit tabula superius pro hac re exposita. Idem fit etiam in diuisione, ubi itidem una minutia in aliam primò, ut moris est, diuisa, numerorum exeuntium characteres ex superioribus petendi erunt.

EXEMPLA MVLTIPLICATIONIS

$\frac{2 \text{ ra.}}{5 \text{ pri.}} \text{ cum } \frac{8 \text{ N}}{9} \qquad \text{Item } \frac{6 \text{ pri.} + 8 \text{ N}}{9 \text{ ra.}} \text{ cum } \frac{15 \text{ ra.}}{8 \text{ N}}$

produ. $\frac{16 \text{ ra.}}{45 \text{ pri.}}$ pro. $\frac{15 \text{ pri.} + 20 \text{ N}}{12 \text{ N}}$

ALIVD EXEMPLVM.

$\frac{7 \text{ se.} - 8 \text{ pri.}}{3 \text{ ra.} + 4 \text{ N.}} \text{ cum } \frac{4 \text{ ter.} + 5 \text{ ra.}}{7 \text{ se.} - 8 \text{ pri.}}$

produ

producuntur $\frac{4 \text{ ter.} + 5 \text{ ra.}}{3 \text{ ra.} + 4 \text{ N.}}$

ADHVC ALIVD.

$\frac{28 \text{ sex.} + 35 \text{ ter.} - 32 \text{ quin.} - 40 \text{ se.}}{7 \text{ se.} - 8 \text{ pri.}}$ de $\frac{4 \text{ ter.} + 5 \text{ ra.}}{5 \text{ se.} - 8 \text{ pri.}}$

$\frac{}{3 \text{ ra.} + 4 \text{ N}}$

$\frac{}{15 \text{ ter.} - 4 \text{ se.} - 32 \text{ pri.}}$

ALIVD.

$\frac{7 \text{ ter.} + 12 \text{ N}}{8 \text{ pri.}}$ cum $\frac{7 \text{ ter.} - 12 \text{ N}}{8 \text{ pri.}}$

produ. $\frac{49 \text{ sep.} - 144 \text{ N}}{64 \text{ ter.}}$

ADHVC ALIA.

$\frac{7 \text{ pri.}}{8 \text{ ter}}$ cũ 4 ra. 8 — N. Item $\frac{7 \text{ pri.} + 8 \text{ ra.}}{5 \text{ se.} - 12. \text{N}}$ cum $\frac{4 \text{ ra.}}{5 \text{ pri.}} - 8 \text{ N.}$

produ. $\frac{7 \text{ se.} - 14 \text{ pri.}}{2 \text{ ter.}}$ pro. $\frac{32 \text{ pri.} - 280 \text{ ter.} - 292 \text{ se.}}{25 \text{ quar.} - 60 \text{ pri.}}$

Est huius secundæ multiplicationis duplex operatio. Vna quidem, ut ante multiplicationem, — 8 N in multiplicante, ad eandem cum 4 radicibus reducantur de nominationẽ. Eritq; tum multiplicationis huius modus, qui est superiorum exemplorũ. Altera uerò, ut sicut duę sunt in multiplicante diuersæ inter se quantitates, sic etiam duę instituantur multiplicationes. Vna quidem cum $\frac{4 \text{ ra.}}{5 \text{ pri.}}$, altera deinde cũ — 8 N, & quod secũdò producetur, id à priori subtrahatur, & residuum productã ex multiplicatione minutiam manifestabit: id quod quiuis ex communi notitia deprehendere potest.

EXEMPLA DIVISIONIS.

Diuidan. $\frac{2 \text{ N}}{3 \text{ ra.}}$ in $\frac{8 \text{ ra.}}{9 \text{ pri.}}$ uel cont. $\frac{8 \text{ ra.}}{9 \text{ pri.}}$ in $\frac{2 \text{ N}}{3 \text{ ra.}}$

exeunt in minimis $\frac{3}{4}$ N, exit $1\frac{1}{3}$ N

ALIVD EXEMPLVM.

$\frac{15 \text{ se.} + 20 \text{ ra.}}{12 \text{ ra.}}$ diuidantur in $\frac{6 \text{ pri.} + 8 \text{ N}}{9 \text{ ra.}}$

exeunt $\frac{45 \text{ se.} + 60 \text{ ra.}}{24 \text{ pri.} + 32 \text{ N}}$

ALIVD EXEMPLVM.

$\frac{7 \text{ se.} - 14 \text{ pri.}}{2 \text{ ter.}}$ in $\frac{7 \text{ pri.}}{8 \text{ ter.}}$ exe. 4 ra. — 8 N

Sic $\frac{7 \text{ se.} - 14 \text{ pri.}}{2 \text{ ter.}}$ in 4 ra. — 8 N

exe. $\frac{7 \text{ se.} - 14 \text{ pri.}}{8 \text{ qr.} - 16 \text{ ter.}}$ hoc est $\frac{7 \text{ se}}{8 \text{ ter.}}$ uel in minimis $\frac{7 \text{ N}}{8 \text{ pri.}}$

REGVLA PROPORTIONVM.

Regulam de proportionibus, quæ nunc recto ordine sequi deberet, cum quiuis partim ex communi ipsius descriptione, partim ex ijs quæ hactenus sunt cõmemorata, quomodo hæc in integris atq; etiã in fractionib. tractari debeat, facilè cognoscat: Lectori satis me facturũ uno duntaxat atq; altero exemplo sum opinatus.

EXEMPLA AVTEM SVNT
huiuſmodi.

Primum, 6 N alícuius rei ualent 3 primis aureorum, quanti 7 ra. + 1 pri. eiuſdem rei.

Facit $\frac{7 \text{ ſe.} + 1 \text{ ter.}}{2 \text{ N}}$

Secun. 6 ra. ualent 9 pri. aureorum, quantum emitur 4 ſe. — 2 ra. au.

Facit $\frac{8 \text{ pri.} - 4 \text{ N}}{3 \text{ N}}$

Tertium, 3 ra. + 4 N ualent 8 ſe. + 4 pri. quanti 8 ter. — 4 ra.

Facit $\frac{64 \text{ ſex.} + 32 \text{ quín.} - 32 \text{ ter.} - 16 \text{ ſe.}}{3 \text{ ra.} + 4 \text{ N}}$

Vel quantum emitur 8 ter. — 4 ra. aure.

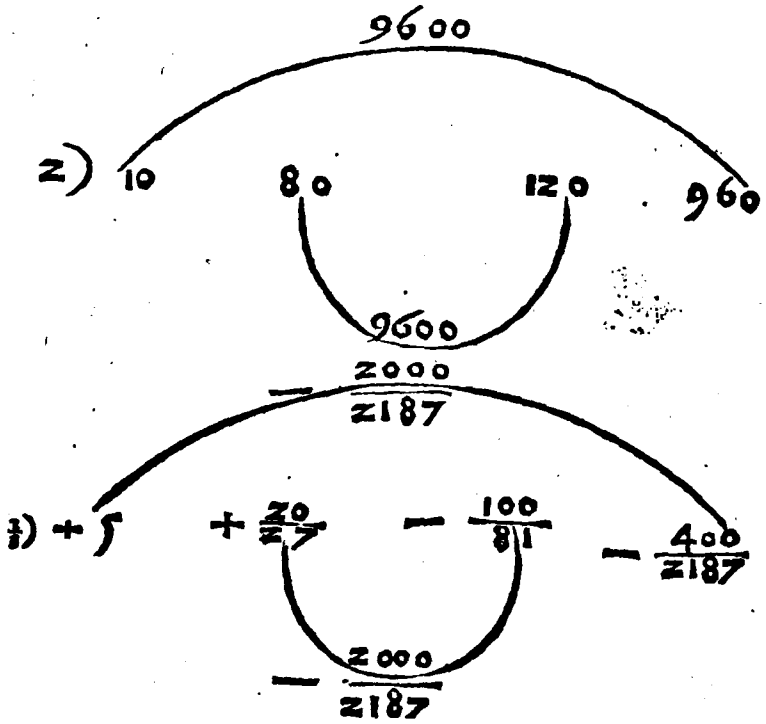
Facit $\frac{6 \text{ ter.} + 8 \text{ ſe.} - 3 \text{ ra.}}{2 \text{ pri.} + 1 \text{ ra.}} - 4 \text{ N}$

HVIVS EXEMPLI EXAMEN.

Quantitates proportionales, quantum ad partem priorem,

Prima, ſecunda, tertia, quarta,
3 ra. + 4 N , 8 ſe. + 4 pri. , 8 ter. — 4 ra. , 64 ſex. + &cæ 5 ra.

RESOLVTAE SECVNDVM VALORES QVANTITATVM.

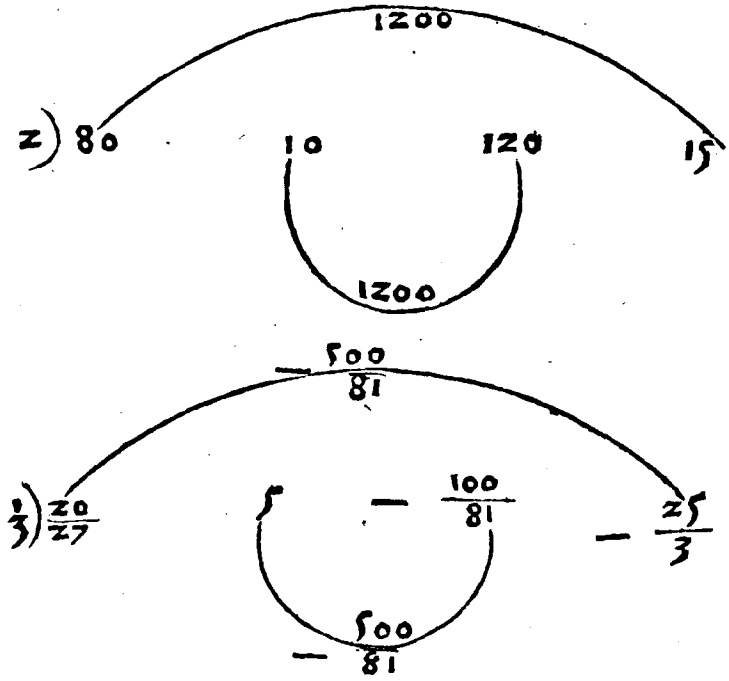


Quan-

Quantitates proportionales, quantum ad partem posteriorem.

Prima,	secunda,	tertia,	quarta,
8 se. + 4 pri. ,	3 ra. + 4 N ,	8 ter. — 4 ra. ,	$\frac{6 \text{ ter.} + 8 \text{ se. \&cæ.}}{2 \text{ pri.}}$

RESOLVTAE SECVNDVM VALORES QVANTITATVM.



PROBATIO SEV EXAMEN.

Probantur huius regulę exempla per numerũ loco radicis pro arbitrio sumptũ, si per eius quantitates, singulæ propositi exempli quantitates solutæ fuerint. Hoc autem apparet in exemplo præmisso ultimo, cuius quidem numeros characterum singulos, primò per numerum binarium, secundò deinde per tertiam unitatis partem solutos fuisse uides.

SIMILI MODO ET IN FRACTIONIBVS EXEMPLA proponi possunt.

$\frac{3}{4}$ ra. ualent $\frac{4}{7}$, quanti $\frac{1}{3}$ se.	Facit $\frac{16 \text{ N}}{45 \text{ pri.}}$
$\frac{3}{5}$ ra. ualent $\frac{4}{9} \frac{\text{pri.}}{\text{N}}$ quan. $\frac{9}{13} \frac{\text{N}}{\text{se.}}$	Facit $\frac{6}{13} \frac{\text{N}}{\text{pri.}}$

NVNC DE ÆQVATIONIBVS,

QVAE IN SOLVENDIS EXEMPLIS, MVLTIfariam sese offerunt, dicendum erit.

AEquatio, ut hoc loco sumitur, prout etiam ipsius uocabuli ἐτυμον indicat, est, ubi duæ res uel quantitates inter se æquales esse proferuntur. Et quoniam per has Algebræ regulas obscura numerorum explicantur ænigmata, quæ quidem ubi secundum conditiones suas atq; hypotheses, per has regulas examinata fuerint, accidit tandem, ut aliquot quantitates, unà cũ suis numeris, inter se æquentur. Quæ quantitatum collatio

collatio, cum prima fronte obscura & minus perspicua appareat, ut planius, & clarioribus uerbis, tanquam ob oculos, ponatur, necesse erit.

Proinde multæ licet sint æquationes ac infinitæ quodammodo, cum diuersæ propositorum ænigmatum supputationes subinde aliam atq; aliam postulent, tres nihilominus tamen ex his, priores atq; etiam præcipuas (cum quod nostra tractatio non plures requirat, tum etiam quod tribus ijs perceptis ac cognitis, facilè reliquas etiam constituere, & ijs cõmodè uti quispiam possit) in præsentia ordine describemus. EST ITAQVE PRIMA AEQVATIO in qua unius quantitatis uel characteris numerus unius characteris numero æquatur. SECVNDA VERO ET TERTIA AEQVATIONES sunt, ubi tribus characteribus consignatis numeris, illic quidẽ naturali eorũ ordine, hic uerò iam uno, iam duobus uel pluribus, obseruato ordine interrupto, omissis characteribus, numeri duorum uni, uel contrà, unius characteris numerus duobus æquatur. Et de his tribus nunc deinceps ordine dicemus, & primò quidem de processu æquationis primæ.

AEQVATIO PRIMA.

PRima æquatio est, ubi duæ quantitates uel duo numeri, diuersis characteribus signati, inter se æquales esse proferuntur. Diuiditur in hac, ut regula de proportiõibus præcipit, minoris uel debilioris characteris numerus, in numerũ characteris maioris seu potentioris. Quia autẽ numerus exiens modò ipsius radicis, modò quantitatis cuiusdã ualorem exprimit, ubi radicis ualorẽ expresserit, quæstioni tũ statim satisfactũ erit, atq; omnia peracta. Quod si fuerit ualor cuiusdã quãtitatis, numeri exeuntis radix inuestiganda, atq; per inuestigatam illam tandem quæstioni respondendum erit. Huius autem æquationis demonstratio & fundamentum est ipsa de Proportionibus regula, Radicum deinde inuentionis tractatio, ut quę ambo in communi numerorum supputatione plerumq; demonstrari solent.

SEQVVNTVR EXEMPLA.

8 radices		16 N.		2
9 primæ		18 ra.	quot unitatibus æquatur	2
6 secundæ	æquantur	24 pri.	una radix. Facit	4
4 quintæ quantitates.		12 quar.		3

Hæc nunc per resolutionem examinari poterunt.

ALIA EXEMPLA.

8 primæ		32 N		2
9 se.	æquantur	36 ra.	Facit una radix	2
6 ter.		384 ra.		4
4 sex.		108 ter.		3

ADHVC ALIA.

$8\frac{1}{2}$ pri.		34 N		2
$9\frac{1}{2}$ se.	æquantur	33 ra.	Facit una radix	2
$6\frac{3}{4}$ ter.		432 ra.		4
$4\frac{3}{3}$ sextæ.		126 ter		3

Sic alia huius æquationis exempla præscribi possunt atq; solui etiam, ut præcipitur.

Sequuntur

SEQVNTVR NVNC QVAEDAM AENIGMATA SEV QVAESTIONES, QVORVM solutiones tandem hanc primam æquationem requirunt.

Primum. Inueniendus est numerus, à quo primò eius $\frac{1}{4}$, de reſi duo deinde $\frac{2}{7}$ ſubtractis, 13 tandem, uel 27 maneant.

Facit $28\frac{8}{9}$ uel 60

PRO HVIVS ATQVE ETIAM OMNIVM SEQVENtium, ac aliorum quæ forte proponi poſſunt, exemplorum tractatione, ſequitur Canon quidam generalis.

In omnibus exemplis quæ per has Algebræ regulas ſoluí debent, ὡς καθόλου, loco eius qui quæſtioni ſatisfacere debeat numeri, Radix ſeu una res, tanquam aliquid id eſſe de quo quæritur ſignificans, ponenda eſt: ea deinde, ac ſi uerus ſolutionis numerus eſſet, ſecundum exempli hypotheſes examinata, in fine tandem id quod uenire debeat, numerus ſcilicet quæſtionis uerus, ſeſe offeret, quare duo æqualia inter ſe. Sed quia hoc quod ultimò uenit, cum propter inuſitatos huius regulæ characteres quibus exprimitur, non tam perſpicuum ſit, ut prompte intelligi poſsit, ulteriori operatione opus erit, quæ nimirum per diuerſos operationum canones abſoluitur. Cuius rei exemplum eſto tale.

Quis eſt numerus, cuius una tertia quater ſumpta, 11 faciat?

Hoc exemplum talem habet ſupputationem. Loco numeri, ut dictum eſt, cuius una tertia, & reliqua, ponatur 1 radix. Et quia exemplum habet, cuius una tertia quater ſumpta, 11 faciat, de radice poſita una tertia accipienda, atq; accepta, mox ea quater ſumenda erit. Veniunt autem ſic $\frac{4}{3}$ ra. quæ cum ex hypotheſi 11 eſſe debeant, erit unum alteri æquale, ex quo dicta eſt æquatio. Cadit autem in æquationem illam quæ iam deſcripta à nobis eſt. Numerus igitur characteris debilioris in numerum ſignificantioris diuidendus, ac per exeuntem tandem quæſtioni reſpondendum erit. Veniunt autem $8\frac{1}{4}$, numerus de quo quærebatur. Quod nunc examinari poteſt in hunc modum.

EXEMPLI EXAMEN.

Numerus ille de quo quæſtio erat, ſunt $8\frac{1}{4}$. Et quia eius una tertia, $2\frac{3}{4}$ ſcilicet quater ſumpta, 11 faciunt, operatio bona eſt, uerus etiam numerus inuentus.

PROCESSV IGITVR NVNC, QVI GENERALITER in omnibus exemplis ſeruari debet, præmiſſo, primò poſiti exempli operatio ſic ſe habebit.

Ponatur numerum illum de quo quæritur, eſſe		1.	ra. cuius nunc $\frac{1}{4}$,
	nimirum	$\frac{1}{4}$.	ra. ſubtracta
	manent	$\frac{3}{4}$.	ra. atq; de his tandem
$\frac{2}{7}$ eius,	quæ ſunt	$\frac{3}{10}$	ra. ſubtractis
	manent	$\frac{9}{20}$	ra.
13	uel 27 N	æquales.	

Facta igitur diuiſione, ut præceptum eſt, debilioris characteris numeri in numerum characteris ſignificantioris, ueniunt radicum ualores ut poſiti ſunt, $28\frac{8}{9}$ ſcilicet reſpectu 13, 60 deinde reſpectu numeri 27. Quod nunc quidem de utroq; probari ſeu examinari poterit.

EXEMPLVM SECVNDVM.

Diuidantur 40 in tres partes ſecundum rationem Subſuperbipartientem tertias continuatas.

Facit $7\frac{17}{49}$ $12\frac{13}{49}$ $20\frac{29}{49}$.

OPERATIO.

Eſto	1 ra.	prima	
quare	$1\frac{2}{5}$ ra.	ſecunda	
ac	$2\frac{7}{9}$ ra.	deinde, tertia pars erunt.	
Summa igitur	$5\frac{4}{9}$ ra.	æquales	40. N

POTEST OPERATIO ETIAM INSTITVI, INCIPIENDO A' NVMERO ſeu parte proportionali media, uel ultima etiam, ſi placeat, ut ſequitur.

Prima	$\frac{2}{5}$ ra.		$\frac{9}{25}$ ra.		
Secunda	1 ra		$\frac{3}{5}$ ra.		
Tertia pars	$1\frac{2}{5}$ ra.		1 ra.		
Summa	$3,\frac{4}{5}$ ra.	uel	$1\frac{24}{25}$ ra.	æqua.	40 N

Tertium, Diuidantur 40 in tres partes,

Vt cum has, primam quidem in 4, ſecundam uerò in 5, ac tertiam deinde in 6 diuiſero, exeuntes numeri in Subſuperbipartiente tertias ratione continuentur.

Facit	partes quidem	$5\frac{15}{29}$	$11\frac{43}{87}$	$22\frac{86}{87}$
	numeri uerò rationis	$1\frac{11}{29}$	$2\frac{26}{87}$	$3\frac{217}{201}$

Vel, ut cum has, primam quidem per 4, ſecundam uero per 5, ac tertiam deinde per 6 multiplicauero, producti numeri in Subſuperbipartiente tertias, ſeu ſi mauelis, in Dupla ratione continuentur.

Facit quantum ad ratio-

nem 3	partes quidem	$9\frac{63}{113}$	$12\frac{84}{113}$	$17\frac{79}{113}$
nem 5	numeri uerò ra.	$38\frac{26}{113}$	$63\frac{81}{113}$	$106\frac{23}{113}$
nem 2	partes quidem	$25\frac{25}{47}$	$10\frac{10}{47}$	$4\frac{18}{47}$
nem 1	numeri uero ra.	$102\frac{6}{47}$	$51\frac{8}{47}$	$25\frac{25}{47}$

OPERATIO EXEMPLI QVANTVM AD DIVISIONEM.

	Diuiſionis	Rationis		Diuiſionis	Rationis partes,
Prima	1 ra.	$\frac{1}{4}$ ra.		$\frac{6}{25}$ ra.	$\frac{3}{50}$ ra.
Secunda	$2\frac{1}{12}$ ra.	$\frac{5}{12}$ ra.	uel	$\frac{1}{2}$ ra.	$\frac{1}{10}$ ra.
Ter. pars.	$4\frac{1}{6}$ ra.	$\frac{25}{30}$ ra.		1 ra.	$\frac{1}{6}$ ra.
	$7\frac{1}{4}$ ra.	uel		$1\frac{37}{50}$ ra.	Aequales 40 N. &cæ.

OPERATIO EXEMPLI QVANTVM AD MVLTIPLICATIONEM.

Ratio

	Ratio $\frac{3}{5}$		Ratio $\frac{2}{1}$	
Prima	1	4	1	4
Secun.	$1\frac{1}{3}$ ra.	$6\frac{2}{3}$ ra.	$\frac{2}{5}$ ra.	2 ra.
Ter.pars	$1\frac{23}{27}$	$11\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	1

Et ueniunt

$4\frac{5}{27}$ ra. æqua. 40 N. uel $1\frac{17}{30}$ ra. æqua. 40 N.

4. Groſſus ualet 10 nummulis, 24 uerò groſsi florinum conſtituunt. Aliquis nunc florinum permutans, tot pro eo groſſos, quot nummulos cupiens, quæritur quantum utriuſq; recipiat.

Facit, utriuſq; recipiet & habebit $21\frac{9}{11}$

OPERATIO.

Vna radix groſs. & 1 ra. num. &cæ.

Veniunt, facta operatione, $\frac{11}{10}$ ra. æqua. 24 N.

5. Eſt area quædam quadrangularis, continens in ſuperficie 588 areolas, inter ſe & toti ſimiles. Quia autem huius areæ longitudo ad latitudinem eſt, ut 4 ad 3: quanta ipſius longitudo, latitudo item ſit, quæritur.

Facit longitudo quidem 28, latitudo uerò 21.

OPERATIO.

Longitudo	1 ra.	uel	$1\frac{1}{3}$ ra.
Latitudo	$\frac{3}{4}$ ra.		1 ra. &cæ.
ueniunt	$\frac{3}{4}$ pri.	uel	$1\frac{1}{3}$ pri. æqua. 588 N.

6. Dux in caſtris ſuo ſub imperio habet aliquot mille milites. Quoniam autem exercitum quadrata figura tantę amplitudinis, quanta fieri poſsit, inſtruere conatur, primáq; inſtructione ſpecie quadrata perfecta, reſidui manent 284 milites: quòd ſi in ſingulos ordines unum duntaxat militem adieciſſet, tum ei 25 ad abſoluendam quadratam aciem defuiſſent. Quæritur igitur, quot ſub ſe dux ille milites habuerit.

Facit 24 mille milites.

OPERATIO.

1 ra.		1 ra. + 1 N	
1 pri.		1 pri + 2 ra. + 1 N	
+ 284 N		— 25	
1 pri. + 284 N	æquales	1 pri. + 2 ra. — 24 N.	

ADMONITIO.

Hìc, licet duorum characterum numeri, tribus trium characterum numeris æquentur, ſed quia characteres in diuerſis ordinibus unius ſunt appellationis, per illas duas communes notitias, quarum una quidem eſt: Si æqualibus æqualia adijciantur, quòd & tota æqualia ſint. altera uerò: Si ab æqualibus æqualia auferantur, quòd & reliqua ſint æqualia: per additionem & ablationem huic ſuccurritur. Erit itaq;, hoc facto, huius æquationis exemplum, ut ſequitur.

309 N æquales 2 ra.

Vna igitur radix, numerus ſcilicet militum unius ordinis in prima acie, 154. quare uniuerſus militum numerus 24000, qui erat inueniendus.

Potest huius exempli operatio, si placet, etiam sic instituí.

1 ra. in se.	1 ra. — 1 N in se.
1 pri.	1 pri. + 1 N — 2 ra.
— 25 N	+ 284 N
quare 1 pri. — 25 N æqua.	1 pri. + 285 N — 2 ra.

7. Est numerus unus ad alterum sesquiquartus. Quoniam autem de maiori 8 ablatis, minori uerò numero 8 uel 4 additis, collectum ad residuum $2\frac{1}{2}$ rationem constituit, qui'nam sint illi duo numeri, quæritur.

Facit, ubi quidem addun-

tur { 8, $16\frac{8}{17}$ maior, $13\frac{3}{17}$ uerò minor
4 uerò, $14\frac{2}{17}$ $11\frac{5}{17}$

OPERATIO.

Numeri rationis		residuum	colle.
1 ra.	$\frac{4}{5}$ ra.	1 ra. — 8 N.	$\frac{4}{5}$ ra. + { 8 / 4 } N

Quantitates proportionales,

$\frac{4}{5}$ ra + { 8 / 4 } N, 1 ra. — 8 N. ut 5, 2. Quare

$1\frac{3}{5}$ ra. + { 16 / 8 } N equal. 5 ra. — 40 N

8. Numerus in tres partes diuisus est. Quoniam autem prima pars respectu diuisi, subsequialteram: secunda uero, subduplam: ac tertia deinde, & ipsa respectu diuisi, postquam tamen 4 aliunde acceperit, subsesquitertiam rationem constituit, quantus sit ipse totus numerus, quante etiam singulæ partes, quęritur.

Facit, Impossibile, cum tertia pars nihil sit, propterea quòd duabus prioribus totum & plus etiam conueniat.

	Totus quidem numerus			$4\frac{4}{11}$
Vel facit		prima	secun.	tertia
	Partes uerò	$2\frac{10}{11}$	$2\frac{2}{11}$	$-\frac{8}{11}$

Id quod examinari potest in hunc modum:

Totus diuisus	Partes uerò prima	secunda	tertia
$4\frac{4}{11}$	$2\frac{10}{11}$	$2\frac{2}{11}$	$-\frac{8}{11}$

Pars prima	totus diui.	pars secun.
$2\frac{10}{11}$	$4\frac{4}{11}$	$2\frac{2}{11}$
cum 3	cum 2	bis
$8\frac{8}{11}$	$8\frac{8}{11}$	$4\frac{4}{11}$

Æquales numeri, bene igitur. Totus diuisus, bene igitur.

— 8

— $\frac{8}{11}$ Tertia pars.

+ 4

sunt	3 $3\frac{3}{11}$	$4\frac{8}{11}$	Totus diuisus.
cum	4	cum 3	
produ.	$13\frac{1}{11}$	produ. $13\frac{1}{11}$.	Aequales numeri.

Igitur bene operatum.

Quod si loco rationis quam habet secunda pars ad totum, Subduplæ scilicet, Subquadrupla posita fuerit.

Veniet facta operatione,

Totus quidem numerus		6	
	Prima	secun.	tertia.
Partes uero	4	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

OPERATIO PARTIS PRIORIS.

Totus diuisus.	Prima	secunda	tertia pars.
1 ra.	$\frac{2}{3}$ ra.	$\frac{1}{2}$ ra.	$\frac{3}{4}$ ra. — 4 N

Quare $1\frac{11}{12}$ ra. — 4 N æquales 1 radici.

Vel additis & subtractis, ueniunt $\frac{11}{12}$ ra. æqua. 4 N, &cæ.

Potest etiam operatio aliter institui, si radix una loco alicuius partis ponatur, sic.

Partes		Partes	
1 ra.		$1\frac{1}{3}$	
	Totus		Totus
$\frac{3}{4}$ ra.	$1\frac{1}{2}$ ra.	1 ra.	2 ra.
$1\frac{1}{8}$ ra. — 4 N		$1\frac{1}{2}$ ra. — 4 N	

Aequatio.

$1\frac{3}{8}$ ra. æqua. 4 N. Item $1\frac{5}{8}$ ra. æqua. 4 N.

OPERATIO PARTIS POSTERIORIS.

Totus diuisus	$\frac{2}{3}$ ra.		1 ra.	Totus diui.
1 ra.	$\frac{1}{4}$ ra.	Vel	$\frac{3}{8}$ ra.	$1\frac{1}{2}$ ra.
	$\frac{3}{4}$ ra — 4 N		$1\frac{1}{8}$ ra. — 4 N.	

9. Sunt tres numeri, quorum primus & tertius noti, 48 & 11, medius ignotus, Quia uerò, quam rationem habent primus & tertius inter se, illa eadem est & excessus primi super medium, ad excessum medij super numerum tertium, quantus ergo medius numerus sit, quæritur.

Facit $17\frac{53}{59}$ quod probari potest.

OPERATIO.

Primus	medius	tertius.
48	1 ra.	11

48 N — 1 ra. 1 ra. — 11 N.

Considerato iam, quæ sint quantitates proportionales, quæ deinde proportionalium quantitatum proprietas, ueniunt ultimò.

59 ra. æqua. 1056 N, &cæ.

Sic inter { 42 | 8 3/5 | 8/9 | 21 } & { 30 | 6 | 2/5 | 14, } medius est { 35 | 7 | 16/29 | 16 4/5 }

Sunt autem numeri medietatis Harmonicæ.

10. Sunt tres numeri, quorum primus & tertius noti, 48 & 11, uel 24 & 12, medius ignotus. Quia uerò, quam rationem habent primus & tertius inter se, illa eadem est differentiæ medij & tertij ad differentiam primi & medij, quantus ergo medius numerus sit, quæritur.

Facit 41 6/59 uel 20. quod probari potest.

11. Diuidantur 61 in 9 uel 6 partes Arithmeticæ progressionis, & esto quòd prima pars, uel primus ac minimus numerus sint 6, qui sunt octo, uel quinq; reliqui?

Facit respectu quidem diuisionis

in nouem	6 7/30.	6 7/18.	6 7/12.	6 7/9.	6 15/30.	7 1/6.	7 13/30.	7 7/9.
in sex uerò	7 2/3	9 1/3	11	12 2/3	14 1/3.			

OPERATIO.

6 N	minimus nu.		6 N	minimus	
1 ra.	excessus communis	uel	1 ra.	max. nu.	
6 N + 8 ra.	numerus ul.		1 ra + 6 N	aggregati dimidium.	
&cæ.					

Sic numerus 49 diuisus, facta operatione ueniunt, respectu quidem diuisionis eius in partes.

nouem	Impossibile				
in sex uerò	6 13/15.	7 11/15.	8 3/5.	9 7/15.	10 1/5.

12. Est quidam rex, sunt & principes, comites & milites, quot autem rex sub potestate sua habet principes, in duplo plures sub se comites habẽt singuli principes: in quadruplo uerò plures sub se habent milites singuli comites. Quia uerò militibus numeratis, inuenitur, quòd ducentesima eorum pars nouencuplam rationem ad numerum principum constituat: quot igitur nunc principes fuerint, quot item comites ac milites deinde, in dubium uocatur.

	Principes	Comites	Milites.
Facit	15	450	27000

Quod secundum ænigmatis hypotheses examinari poterit.

OPERATIO.

	Principum		Comi.	Mili.	
Ponatur	1 ra.	& erunt	2 pri.	8 uerò secundæ	
			atq; tandem		
1/27 se.		æqualis		9 ra.	

13. Est ædificium quoddam παραλλήλως secundum quatuor eius latera extructum,

ra extructum, cuius altitudo cum ad ſuam longitudinem Superbipartientem tertias, ad latitudinem uero, Duplam ſeſquialteram conſtituat rationem, altitudine deinde cum longitudine, ac producto tandem cum latitudine multiplicato, numerus 39930. ulnarum producatur, quantæ huius ædificij ſinguլę dimenſiones fuerint, quęritur.

Facit 55 Altitudo, 33 Longi. & 22 Latitudo.

OPERATIO.

Altitudo	1 ra.		$1\frac{2}{3}$		$2\frac{1}{2}$
Longi.	$\frac{3}{5}$	uel	1 ra.		$1\frac{1}{2}$
Latitu.	$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{5}$	Vel	1 ra.

Facta multiplicatione ut præcipitur, ueniunt

$\frac{6}{25}$ ſe. uel $\frac{1}{5^0}$ ſe. uel $\frac{1}{4^5}$ ſe. æquales 39930 N.

14 Murus, cuius longitudo quidem in $3\frac{1}{2}$ ad latitudinem, altitudo uerò in quincupla ratione ad longitudinẽ cõſtructus eſt, ab Artifice tandẽ 980 coronatis redimitur. Quoniã autẽ, cũ pro ſingulis uirgis, ut dicitur, extruẽdis, tot coronati, quot ipſe murus in latitudine uirgas habet, expoſiti ſint, quę nã huius muri altitudo ſit, lõgitudo itẽ, ac latitudo etiã, quęritur.

Facit 35 Altitudo, 7 Longi. & 2 Latitudo.

OPERATIO.

Altitudo	5	uel	1 ra.		$17\frac{1}{2}$
Longi.	1 ra.		$\frac{1}{7}$		$3\frac{1}{2}$
Latitudo	$\frac{2}{7}$		$\frac{2}{35}$	uel	1 ra.
	$\frac{10}{7}$ ſe.		$\frac{2}{175}$		$\frac{245}{4}$

Nunc quantum ad ſolutionem, dicendum eſt

Vlna 1 { $\frac{2}{7}$ / $\frac{2}{35}$ ra. / 1 } quanti { $\frac{10}{7}$ / $\frac{2}{175}$ ſe. / $\frac{245}{4}$ } Facit { $\frac{20}{49}$ / $\frac{4}{6125}$ ter. æ. 980 N / $\frac{245}{4}$ } Corona.

15. Diuidantur 72 in quatuor partes, quarum prima ſit una ſeptima ſecundæ & tertiæ, ſecunda uero $\frac{1}{7}$ tertię & quartę, tertia autem $\frac{1}{2}$ quartę & primę, quęritur de partibus.

Prima	ſecunda	tertia	Facit. quarta pars,
$4\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	$20\frac{1}{4}$	36

OPERATIO.

Ponatur primam partem eſſe 1 radicem; erunt ergo ſecunda & tertia partes ſimul 7 radices, ac quarta deinde id quod eſt reliquum, nimirum 72 N — 8 ra. ſic.

Prima	ſecunda & tertia	quarta.
1 ra.	7 ra.	72 N 8 ra.

Et quoniam ex hypotheſi, ſecunda pars eſt tertiæ & quartæ partium una quinta: partes coniungendo, erit hæc eadem ſecunda omnium trium, hoc eſt ſecundæ tertiæ & quartæ partium, una ſexta. Ex harum igitur aggregato, quod eſt 72 N — 8 ra, una ſexta ſumpta, per eam quanta ſecunda pars ſola ſit, manifeſtabitur.

Quæ

Quæ quidem cum ſit iam nota, & tertia per ſubtractionem nota erit. Partes igitur ſingulæ, ut ſequitur.

Prima	ſecunda	tertia	quarta.
1 ra.	12 N — $\frac{1}{6}$ ra.	7 $\frac{1}{6}$ ra. — 12 N	72 N — 8 ra.

Rurſus quoniam etiam, & id ex hypotheſi, tertia pars ipſarum quartæ & primæ partium dimidium eſt: ſequitur hanc eandem tertiam bis ſumptam, quartæ & primæ partibus ſimul ſumptis, uel ſi mauis, hanc tertiam ſolùm eius quod ex quarta & prima colligitur dimidio, æqualem eſſe. Aequatio igitur, ut ſequitur.

14 $\frac{1}{3}$ ra. — 24 N æqual. 72 N. — 7 ra.

in minimis 21 $\frac{1}{3}$ ra. æqual. 96 N.

uel 7 $\frac{1}{6}$ ra. — 12 N æqual. 36 N — 3 $\frac{1}{2}$ ra.

in minimis 10 $\frac{2}{3}$ ra. æqual. 48 N.

Sic 90, unitas, ac quilibet numeri alij, Fractiones etiam, eadem ratione diuidi poſſunt.

Sunt autem partes, reſpectu quidem

	Prima	ſecunda	tertia		quarta.
90	5 $\frac{5}{8}$	14 $\frac{1}{16}$	25 $\frac{5}{16}$	&	45
Vnitatis uero,	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{9}{32}$	&	$\frac{1}{2}$

16. Tres negociatores ſocietatẽ ineuntes, contulerunt 170 aureos. Primus itaq; cum ſua pecunia collata huic contractui intereſſe uult 3 menſibus, ſecundus 6, tertius 8. Nunc ſi hac communi pecunia, tantùm hoc temporis ſpacio lucrifecerint, ut ſors cum lucro perficiat ſummam 375 aureorum, atque primo 75, ſecundo uerò 200 aurei, & tertiò deinde quod reliquum eſt tribuatur, quæritur quanta nam uniuſcuiuſq; ſors, ſiue à ſingulis collata pecunia fuerit. Facit

Primi 60. ſecundi 80. tertij 30. aurei.

OPERATIO.

	Tempus	accepta	collata pecunia.
Primi	3.	75	1 ra.
Secundi	6.	200	1 $\frac{1}{3}$ ra.
Tertij	8.	100	$\frac{1}{2}$ ra. atq;
	tandem 2 $\frac{5}{6}$ ra.	æquales	170 N.

17. Propoſitum eſt diuidere 91, 27 uel 118 in quatuor partes.

Primò, ſecundum rationes 1 $\frac{1}{2}$, duplam & ſubſeſquitertiam, quæritur quænam ſint partes futuræ.

OPERATIO

		91	27	118
1 ra.		37 $\frac{5}{22}$	11 $\frac{1}{22}$	48 $\frac{3}{11}$
$\frac{2}{3}$	Facit	24 $\frac{9}{11}$	7 $\frac{4}{11}$	32 $\frac{3}{11}$
$\frac{1}{3}$		12 $\frac{9}{22}$	3 $\frac{15}{22}$	16 $\frac{5}{11}$
$\frac{4}{9}$		16 $\frac{6}{11}$	4 $\frac{10}{11}$	21 $\frac{5}{11}$
2 $\frac{4}{9}$ ra.		æqua.	91, 27 uel	118 N.

Vel

Vel secundo, secundum rationem $1\frac{1}{2}$ seu $2\frac{1}{2}$ continuatam.

		91	27	118
		$37\frac{4}{7}$.	$11\frac{14}{67}$	$49\frac{3}{67}$
Facit secundum rationem,	$1\frac{1}{2}$ quidē	$25\frac{1}{7}$	$7\frac{21}{67}$	$32\frac{44}{67}$
		$16\frac{4}{7}$	$4\frac{64}{67}$	$21\frac{51}{67}$
		$11\frac{1}{7}$	$3\frac{21}{67}$	$14\frac{34}{67}$
		$58\frac{18}{803}$	$17\frac{173}{803}$	$75\frac{191}{803}$
	$2\frac{1}{2}$ uerò	$21\frac{609}{803}$	$6\frac{366}{803}$	$28\frac{173}{803}$
		$8\frac{128}{803}$	$2\frac{238}{803}$	$10\frac{366}{803}$
		$3\frac{48}{810}$	$\bullet\frac{720}{803}$	$3\frac{777}{803}$

OPERATIO

1 ra.

$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	AEQVATIO				91
$\frac{4}{5}$ ra.	$\frac{6}{64}$ ra.	$2\frac{11}{27}$ ra.	uel	$1\frac{391}{712}$ ra.	æqua.	27 N.
$\frac{8}{27}$	$\frac{27}{712}$					118

Vel tertiò, ut primę parti 4, secundæ deinde 3 additis, à tertia uero parte, 2, ac quarta deinde, unitate subtracta, aggregati tandem & residui numeri subduplam rationem continuatam, uel subduplam, subquadruplam, & $1\frac{1}{3}$ rationes habeant. Quęritur &cæ. Facit

quantum ad rationem subduplam continuatam,

Respectu quidem	91	27 uerò,		ac 118 deinde
Prima pars	$2\frac{1}{3}$		$-1\frac{14}{17}$	$4\frac{2}{17}$
Secunda	$9\frac{2}{3}$	Impossibi-	$1\frac{2}{17}$	$13\frac{4}{17}$
Tertia	$27\frac{1}{3}$	le, uel	$10\frac{4}{17}$	$34\frac{8}{17}$
Quarta deinde	$51\frac{2}{3}$		$17\frac{8}{17}$	$66\frac{1}{17}$

Quantum ad rationes subduplam, subquadruplam, & $1\frac{1}{3}$

Respectu quidem	91	27		118
Prima pars	$1\frac{10}{17}$		$-2\frac{3}{17}$	$3\frac{3}{17}$
Secunda	$8\frac{2}{17}$	Impossibile	$+0\frac{13}{17}$	$11\frac{6}{17}$
Tertia	$46\frac{12}{17}$	uel	$+16\frac{10}{17}$	$59\frac{7}{17}$
Quar. deinde	$34\frac{9}{17}$		$+11\frac{16}{17}$	$44\frac{1}{17}$

OPERATIO.

Sit prima pars	1 ra.	Vel •	1 ra.
secunda igitur	2 ra. + 5 N		2 ra. + 5 N
tertia uerò	4 ra. + 18 N		8 ra. + 34 N
ac quarta deinde	8 ra. + 33 N		6 ra. + 25 N

Aequatio igitur quantum ad

primum 15 ra. + 56 N

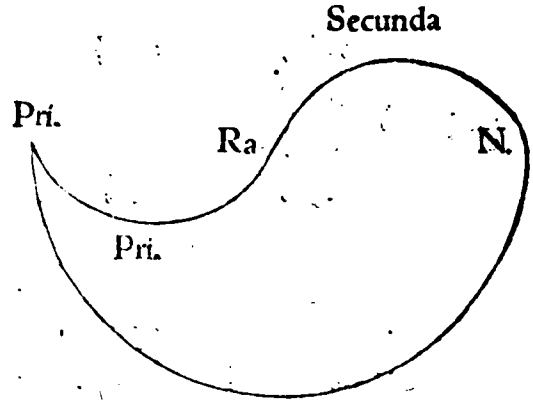
æqual. 91. 27. 118 N.

secun. 17 ra. + 64 N

AEQVATIO SECVNDA.

SEcunda æquatio eſt, ubi tres numeri tribus diuerſis, continuatis tamen, characteribus ſignati, duo uni, uel unus item duobus æqualis eſſe profertur. Hæc æquatio quia tripliciter uariari poteſt, cum aut duo maiores minimo, aut duo minores maximo, aut uerò maximus & minimus, medio characteri, ut præſens figura habet, æquentur.

FIGVRA AEQVATIONVM.



Tertia æquatio.

Ideone in generali huius deſcriptione confundi lectorem contingat, pro eo ut tripliciter uariatur, ita etiam triplici eam regula uel canone ordine deſcribemus.

CANON HVIVS AEQVATIONIS PRIMVS.

Vbi nimirum maiores duo, minimo characteri æquentur, utpote prima quantitas & radix, numero, ſic.

Pri. + ra. æquales N.

Huiuſmodi exẽplo propoſito, erit maximę quãtitatis numerus, aut unitas, aut nõ. Quod ſi unitas fuerit, tũ ad quadratũ dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata, dimidiũ characteris medij ſubtrahi debet. quo facto, quæſiti numeri cõpos aliquis erit, cũ uide licet per id quod relinquitur, radicis ualor exprimatur. Quòd ſi uerò nõ ſit unitas maximi characteris numerus in exẽplo aliquo propoſito, quia nõ pluriũ, ſed unius tãtum radicis ualor deſideratur, in maximi characteris numerum, aut fractionem, uel quicquid tandem fuerit, ſinguli ſingulorum trium characterum numeri diuidendi, & diuiſorum loco exeuntes, ut eorum ſubmultiplices, ſumendi & ponendi ſunt. Erit autẽ ſic exemplũ æquationis aliud, quod licet diſsimile uideatur priori poſito, nihilominus tamen, cum multiplicium & ſubmultiplicium una & eadem ſit ratio, non ab eo diuerſum erit. Reductione igitur hac ad unitatem maximi characteris numeri, procedendum deinde, prout ſuprà canone eſt traditum.

CANON HVIVS AEQVATIONIS SECVNDVS.

Vbi nimirum duo minores, radix ſcilicet & numerus, æquentur primę, characteri maximo, ſic.

Ra. + N æquales pri.

Et in huiuſmodi exemplis maximi characteris numerus, aut unitas erit, aut non. Quod ſi fuerit unitas, tum ad quadratum dimidij numeri characteris medij, ut in præcedenti canone factum, numerus characteris minimi addi: ad radicem deinde huius collecti quadratam, dimidium characteris medij ſummi debet, & perfecta erit æquatio. Quod ſi uerò non ſit unitas maximi characteris

racteris numerus in exemplo aliquo propoſito, huic tum (quemadmodum in præcedenti traditum) diuiſione, ut ad unitatem redigatur, ſuccurrendum erit.

CANON HVIVS AEQVATIONIS TERTIVS.

Vbi nimirum maximus & minimus, ut eſt prima quantitas & numerus, medio characteri, radici ſcilicet, æquentur, ſic.

Pri. + N Aequales ra.

In huiuſmodi exemplis, ubi maximi characteris numerus unitas fuerit, ſtatim à quadrato dimidij numeri characteris medij, contrà ut iam in præcedentibus eſt factum, numerus characteris minimi ſubtrahi: radix deinde huius reſidui quadrata, ut libuerit, ac prout rationi magis conſentaneum fuerit, uel à dimidio numeri characteris medij ſubtrahi, uel eidem addi oportebit. atq; utrum horum factum fuerit, cũ tam pri. quod nic colligetur, quàm etiam quod illic relictum fuerit, radicis ualor indicetur, exemplo ſatisfactum erit.

SEQVVNTVR NVNC HVIVS SECVNDAE AEQVAtionis ſecundum præſcriptos tres canones exempla.

CANONIS PRIMI.

1 pri. + 8 ra. 65 N.

4 in ſe. 16 + 65

ueniunt 81. Huius radix,

ſunt 9, minus 4,

manent 5.

SECVNDI.

13 ra. + $1\frac{3}{4}$ N 1 pri.

$\frac{3}{2}$ in ſe. $\frac{9}{4}$ + $1\frac{3}{4}$

ueniunt 4. Huius radix,

ſunt 2 plus $1\frac{1}{2}$

ueniunt $3\frac{1}{2}$

Atq; tantus eſt radicis ualor: quod quidem reſolutione facta nunc probari poteſt.

EXEMPLVM CANONIS TERTII.

1 pri. + 12 N equales 8 ra.

4 in ſe. 16 minus 12

manent 4. Huius radix quadrata

ſunt 2 { de / ad } 4, & manent 2, uel proueniunt 6.

Vterq; radicis ualor, ac probationi conueniens numerus.

SEQVVNTVR EXAMINA.

Primùm autem numerorum canonis primi, radicis ualore exiſtente 5,

1 pri. + 8 ra. æquales 65 N

5 in ſe, cum 5.

25 40

65 Atq; tot ſunt etiam numeri, ut apparet: bene igitur.

Examen numerorum canonis ſecundi, radicis ualore exiſtente $3\frac{1}{2}$

3 ra. + $1\frac{3}{4}$ N æquales 1 pri.

cum $3\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{2}$ in ſe.

$10\frac{1}{2}$ + $1\frac{3}{4}$

$12\frac{1}{4}$ æquales $12\frac{1}{2}$ bene igitur.

Examen numerorum canonis tertij, radicis ualore existente 2.

1 pri	+	12 N	æquales	8 ra.	
2 in se.				bis	
4	+	12			
16			æquales numeri	16:	bene igitur.

Eodem modo instituatur nunc examinis operatio, radicis ualore existente 6

1 pri	+	12 N	æquales	8 ra.	
6 in se				sexies	
36	+	12			
48			æquales numeri	48	&cæ.

ALIVD EXEMPLVM.

PRIMI CANONIS.

Pri.		ra.		N	
4	+	3	æquales	217	

SECVNDI CANONIS.

ra.		N		pri.
3	+	175	æqu.	4

Hic, quia maximi characteris numerus non est unitas, diuisione, ut dictum est, ei succurri debet. Veniunt autem facta diuisione,

pri.		ra.		N			ra.		N		pri.
1	+	$\frac{3}{4}$	æqu.	$\frac{217}{4}$			$\frac{3}{8}$	+	$\frac{175}{4}$	æqu.	1
$\frac{3}{8}$ in se,		$\frac{9}{64}$	+	$\frac{217}{4}$			$\frac{3}{8}$ in se.		$\frac{9}{64}$	+	$\frac{175}{4}$
ueni.		$\frac{3481}{64}$.	Huius ra.				ueni.		$\frac{2809}{64}$.	Huius ra.	
sunt		$7\frac{3}{8}$	minus	$\frac{3}{8}$			sunt		$6\frac{5}{8}$	plus	$\frac{3}{8}$
manent		7.					ueniunt		7		
radicis ualor.							radicis ualor.				

ALIVD TERTII CANONIS EXEMPLVM.

3 pri.	+	217	N	æquales	52 ra.

Et hic, quia maximi characteris numerus non est unitas, diuisione ei succurrendum erit. Veniunt autem hoc facto,

1 pri.	+	$\frac{217}{3}$	N	æquales	$\frac{52}{3}$	N
$\frac{25}{3}$	in se.	$\frac{6760}{9}$,	minus	$\frac{217}{3}$,	manet	$\frac{25}{9}$

Huius ra. qua. est $1\frac{2}{3}$ $\left\{\begin{matrix}\text{de}\\ \\ \text{ad}\end{matrix}\right.$ $5\frac{2}{3}$, & manent 7, uel proueniunt $10\frac{1}{3}$. Vterq; radicis ualor, quod examinari potest.

Porrò ne quis opinetur huius æquationis tractationem rationibus ac demonstrationibus carere, is sciat: Primi quidem canonis operationẽ ex propositione 4 libri Euclidis secundi, Secundi uerò ex sexta, ac tertij deinde canonis ex quinta propositione eiusdem secundi libri desumptam esse. Eò itaq; cum peruentum fuerit, horum demonstrationes ac similitudines quas cum rationibus illarum propositionum habent, indicabimus.

SEQVVNTVR NVNC QVAEDAM AENIGMATA, SEV QVAESTIONES, QVORVM solutiones tandem hanc æquationem requirunt.

Primum. Quærantur duo numeri in ratione $3\frac{1}{4}$, ut si unus cum altero

altero multiplicatus, producto deinde ambo numeri additi fuerint, 142 ½ colligantur.

Facit 19 ½ & 6

HVIVS EXEMPLI OPERATIO HAEC EST.

Esto primus numerus, & maior quidem, 1 radix, Et quia ratio, ex hypothesi, constituta est Tripla sesquiquarta, hoc obseruato, Regula Proportionū (dicendo 13 dant 1 ra. quid 4) erit numerus secundus $\frac{4}{13}$ ra. Quia uerò multiplicatio huiusmodi numerorum, unius cum altero, unà cum his ipsis numeris simul additis, 142 ½ consti tuere debet, & id ex hypothesi: 1 radix igitur cum $\frac{4}{13}$ ra. multiplicari, producto deinde ambo numeri, 1 radix scilicet & $\frac{4}{13}$ ra. addi debent, & colliguntur tandem

$\frac{4}{13}$ pri. + 1 $\frac{4}{13}$ ra. æquales 142 ½ N

Quoniam autem est huius secundæ æquationis exemplum primum, hæc uero ipsa æquatio cum praxim habeat aliquanto quàm præcedens prima difficiliorem, ne alicui fortè hac descriptione nō satis me feciſſe uidear, quod descriptione regulę propoſuimus, illius eiusdem etiam iam calculum subiungere uisum fuit. Esto itaq;

numerus Maior 1 ra. Minor $\frac{4}{13}$ ra. Produ. $\frac{4}{13}$ pri.

Numerorum additione facta,

ueniunt $\frac{4}{13}$ pri. + 1 $\frac{4}{13}$ ra. æquales 142 ½ N.

uel diuisione, secundum superiorem regulam, maximi characteris numero ad unitatem reducto,

ueniunt 1 pri. + 4 ¼ ra. æquales 463 ⅛ N.

Est autem exemplum canonis primi. Facta igitur nunc operatione, ut præcipitur, ueniunt numeri 19 ½ & 6, ut suprà indicatum.

ALIA HVIVS EXEMPLI OPERATIO.

Vt in præmissa operatione radix posita numerum rationis maiorem significabat, ita nunc, initio sumpto à minore, esto quòd radix posita significet numerum rationis minorem, cum sic regula proportionum (dicendo 4 dant 1 ra. quid 13) maior numerus sit 3 ¼ ra. multiplicatione & additione peractis, ueniunt

3 ¼ pri. + 4 ¼ ra. æquales 142 ½ N.

Vel, reductione facta, &cæ.

1 pri + $\frac{17}{13}$ ra. æquales $5\frac{70}{13}$ N.

Secundum. Proficiscitur aliquis peregrè, uadit autem primo die 1 ½ miliare, secundi deinde diei atq; deinceps sequentium ordine omnium itinera, arithmetica medietate absoluit, iter cuiusq; sequentis super præcedentis diei iter in miliaris una sexta augens. Nunc uero cum ille secundum hanc medietatem iter quoddam 1370 uel 2955 miliariorum absoluendum & perambulandum sibi instituerit, in quanto tempore id facere possit, quæstio erit.

Facit quantum ad { primum quidem, in 17 septimanis, & 1 die. / secundum uerò, in semestri, minus 2 diebus.

OPERATIO.

Ponatur 1 radix dierum, quo illud iter absoluat, et erit 1 ra. — 1 N, excessuū numerus. Et quia ⅙ miliaris, excessus communis, erit 1 ra. — 1 N, excessuū summa. Et quia etiam 1 ½ miliaris, primus numerus, 6

$\frac{1 \text{ ra.} + 8 \text{ N}}{6}$ igitur, ultimus numerus erit

Atq; sic $\frac{1 \text{ ra.} + 17 \text{ N}}{6}$, ex primo & ultimo aggregatis, & tandem multiplicatione facta, $\frac{1 \text{ pri.} + 17 \text{ ra.}}{12 \text{ N}}$ æquales 1370 uel 2955 N, &cæ.

3 Numerus in duo diuisus est, in 4 scilicet, partem notam, & alium deinde numerū, partē scilicet ignotam. Quoniā autem parte ignota multiplicata primò in se, deinde cum parte etiam illa nota, 117 colliguntur,

quantus fuerit totus numerus? Facit 13
quanta item ignota pars? 9

OPERATIO.

Ponatur 1 ra. numerus diuisus. Et quia 4, una & nota pars, atq; sic 1 ra. — 4 N, pars ignota, ultimò tandem, multiplicatione scilicet facta,

4 ra. + 117 N uni primę æquales erunt.

Est autem exemplum canonis secundi, &cæ.

ALIA OPERATIO.

4 pars data ex hypothesi,
1 radix, non data, quare tandem
1 pri. + 4 ra. æqual. 117 N. Exemplum canonis primi.

4. Sunt tres numeri continuè proportionales, unus autem extremorum cum sint $20\frac{1}{4}$, alter uerò & duplum medij, 22 faciant, quantus uterq; sit, medius scilicet & alter extremorum, quæritur.

Facit medius quidem 9
alter uero extre. 4

OPERATIO.

$\frac{20\frac{1}{4}}{1 \text{ ra.}}$ uel $\frac{20\frac{1}{4}}{11 \text{ N} - \frac{1}{2} \text{ ra.}}$
22 N — 2 ra. 1 ra.

Facta multiplicatione, ueniunt ultimò

N		pri ra.		ra.		pri. N
$445\frac{1}{2}$	æquales	1 + $40\frac{1}{2}$		125	æqua.	1 + 484
Exemplum canonis primi				Canonis tertij.		

5. Propositum est diuidere numerum 8 in duas partes, quarum secundæ quantitates, unà cum primis, & his ipsis numeris, 199 faciant, quæritur, &cæ.

Facit 5 & 3.

OPERATIO.

1 ra.	1 pri.	1 se.
8 N — 1 ra.	64 N — 16 ra. + 1 pri.	512 N — 192 ra. + 24 pri. — 1 se.

584 N — 208 ra. + 26 pri. æquales 194 N

Vel additis & subtractis æqualibus,

ueniunt 26 pri. + 390 N æquales 208 ra.

Est

Est autem exemplum canonis tertij, atq; radicis ualor 3 uel 5, ut lubet, prior pars. Quare posterior 8 minus, &cæ.

6. Duo habent mercis cuiusdam libras uel ulnas 11. Quoniam autem, cum quot ulnas primus habet, tot secundus uno coronato uendere soleat, primus deinde, quia uno coronato tantum exponit, quanta est $\frac{1}{6}$ earum ulnarum quas secundus habet, atq; cum sic ambo 6 coronatos, uno sextante minus, acceperint, quot ulnas seorsim uterq; habuerit, quot deinde ulnas uno coronato uendiderit, quæritur.

Facit { primus 2 ul. / secund. 9 ul. } Vendidit autem uno corona. { $1\frac{1}{2}$ ul. / 2 ul. }

OPERATIO.

Primus	1 ra.	Accipiunt	$\frac{6 \text{ ra.}}{11 \text{ N} - 1 \text{ ra.}}$
secundus	11 N — 1 ra.	autem	$\frac{11 \text{ N} - 1 \text{ ra.}}{1 \text{ ra.}}$

Quare $\frac{121 \text{ N} + 7 \text{ pri.} - 22 \text{ ra.}}{11 \text{ ra.} - 1 \text{ pri.}}$ æqua. $5\frac{5}{6}$ N

In integris deinde & ultimò

ueniunt 77 pri. + 726 N æqual. 517 ra.

Est autem exemplum canonis tertij, atq; facta operatione, radicis ualor 2 pro negociatore primo. Quantum nunc secundus habuerit, quot deinde uterq; ulnas uno coronato uendiderit, facili calculo hæc ex ipsa positionis solutione, seu exempli huius hypothesibus haberi possunt.

Esto nunc quòd ambo acceperint 7 coronatos, ulnæ uero $24\frac{1}{2}$ fuerint, cæteris manentibus.

Operatione igitur instituta, uenisunt quòd primus habuerit $3\frac{1}{2}$ ulnas. Quare sic secundus reliquas 21. & quod uterque uno coronato ulnas $3\frac{1}{2}$ exposuerit.

7. Habent duo sericum, unus quidem 40, alter uerò 90 ulnas. Quoniam autẽ, cum primus in triente ulnæ plus, uno coronato det quàm ipse secundus, atq; deinde in medium collatis pecunijs, 42 coronatos numerent, quot uterq; ulnas uno coronato exposuerit, quæritur. Facit { primus $3\frac{1}{3}$ / secundus 3 }

OPERATIO.

ul.

in triente + 40 Pri. 1 ra. + $\frac{1}{3}$ N — Accepta pec. — $\frac{120 \text{ N}}{3 \text{ ra.} + 1 \text{ N}}$

42 coro. &cæ.

90 se. 1 ra. — $\frac{90 \text{ N}}{1 \text{ ra.}}$

Ad regulam proportionum quantitates positæ.

ulnæ	coro.	ulnæ.	
$\frac{3 \text{ ra.} + 1 \text{ N}}{3}$	uno	40	
			Facit &cæ.
1 ra.	uno	90	

Facta

Facta additione, ueniunt

$$\frac{390 \text{ ra.} + 90 \text{ N}}{3 \text{ pri.} + 1 \text{ ra.}} \quad \text{æquales} \quad 42 \text{ N}.$$

Sub una denominatione deinde atq; ultimò, in minimis item

58 ra. + 25 N æquales 21 pri.

Est autem exemplum canonis secundi, atq; operatio sic instituenda,

$$\frac{\frac{58}{21} \text{ ra.} + \frac{15}{21} \text{ N} \quad \text{æquales} \quad 1 \text{ pri.}}{}$$

$\frac{29}{21}$ in se, $\frac{841}{441}$. + $\frac{15}{21}$, ueniunt $\frac{1156}{441}$

cuius radix qua. $\frac{34}{21}$ & . $\frac{29}{21}$ (quæ simul, 3 constituunt) numerus est ulnarum, quot secundus pro uno coronato exposuit.

Primi igitur $3\frac{1}{3}$

ALIA HVIVS EXEMPLI OPERATIO.

Esto quòd uno coronato uendat

uln.		uln.	accepta pecunia	coro.
40.	Primus quidem	1 ra.		40 N
90.	quare secun.	1 ra. — $\frac{1}{3}$ N		1 ra.
				270 N
				3 ra. — N

Facta additione acceptorum, ueniunt

$$\frac{390 \text{ ra.} - 40 \text{ N}}{3 \text{ pri.} - 1 \text{ ra.}} \quad \text{æquales} \quad 42 \text{ N}$$

In integris ueniunt

390 ra. — 40 N æquales 126 pri. — 42 ra.

Vltimo uerò & in minimis.

216 ra. æquales 63 pri. + 20 N

Est autem exemplum canonis tertij, unde operatio sic instituenda.

$$\frac{\frac{216}{63} \text{ ra. uel } \frac{24}{7} \text{ ra.} \quad \text{æqua.} \quad 1 \text{ pri.} + \frac{20}{63} \text{ N}}{}$$

$\frac{24}{7}$, $\frac{12}{7}$ in se, $\frac{144}{49}$, minus $\frac{20}{63}$

manent $\frac{1156}{441}$. Huius radix $\frac{34}{21}$ { de / ad } $1\frac{2}{7}$ uel $\frac{30}{21}$

manent $\frac{2}{21}$, non uerus: uel ueniunt $3\frac{1}{3}$, uerus numerus. Id quod nunc examinari potest.

AEQVATIO TERTIA.

TErtia æquatio est ferè eadem cum secunda: nam & hæc tres numeros tribus diuersis characteribus signatos requirit. Sunt tamen in hac numerorum characteres non continui, uerùm semper inter quosq; duos sibi proximos, iam unus, iam uerò duo uel plures omissi: ac duo tandem uni, uel unus character cum suo numero duobus æqualis esse profertur. Quapropter ut secundæ, ita & huius tertiæ æquationis est operatio, nisi quod postquam ad finem operationis peruentum fuerit, ubi iam radicis ualor expectandus esset, cum non radicis, uerùm alterius cuiusdam characteris ualor sese offerat, illius characteris secundum sui exigentiam (prout quidem unus uel plures characteres sint omissi) radix, ut in prima æquatione factum quærenda, atq; per eam

eam tandem inuentam, radicis ualor exprimendus erit. Hæc nullam requirit demonſtrationem, cum ex præcedentibus duabus (quarum demonſtrationes unde peti debeant, indicauimus) compoſita ſit.

SEQVVNTVR EXEMPLA.

Primum. 9 Ter. + 5 pri. æquales 294 N
$\frac{5}{9}$ $\frac{294}{9}$

$\frac{5}{18}$ in ſe, $\frac{25}{324}$, plus $\frac{294}{9}$, ueniunt $\frac{10609}{324}$. Huius radix $\frac{103}{18}$ minus $\frac{5}{18}$ manent $\frac{98}{18}$ uel $\frac{49}{9}$. Atq; is eſſet numerus ſolutionis. ſed quia utrinq; unus character negligitur, huius igitur numeri, ut primæ quantitatis, radix, $2\frac{1}{3}$ ſcilicet, numerus ſolutionis erit.

Secundum. $14\frac{7}{8}$ ſec. + $1200\frac{1}{2}$ N æqua. 1 Quin.

$7\frac{7}{16}$ in ſe, $\frac{14161}{256}$ plus $1200\frac{1}{2}$, ueniunt $\frac{321489}{256}$. Huius ra. $\frac{567}{16}$, plus $7\frac{7}{16}$, ueniunt $\frac{686}{16}$ uel $\frac{343}{8}$. Atq; is eſſet numerus ſolutionis. ſed quia utrinq; duo characteres negliguntur, huius igitur numeri ſecundæ quantitatis radix, $3\frac{1}{2}$ ſcilicet, numerus ſolutionis erit.

Tertium. 1 ſep. + 2401 N æquantur 2402 ter.

1201 in ſe, 1442401, minus 2401, manent 1440000. Huius radix quadrata, ſunt 1200, $\left\{\begin{matrix}\text{de}\\\text{ad}\end{matrix}\right.$ 1201, & colliguntur hìc quidem 2401, illic uerò 1 manet, uterq; ſolutionis numerus. Sed quia utrinq; omittuntur tres characteres, non ij igitur numeri, ſed horum numerorũ, ut tertiarum quantitatum, radices, quæ ſunt 1 & 7, ſolutionis numeri erunt.

His certe tribus exemplis uidere Lector poterit, quàm planè idem ſit huius ac præcedentis ſecundæ æquationis proceſſus. niſi quòd in hac ultimò, prout quidem characteres plures uel pauciores intermiſsi fuerint, radix quærenda ſit. Vno igitur atq; altero pro hac æquatione exemplo poſito, ad alias huius regulæ præceptiones pergendum erit.

SEQVVNTVR NVNC QVAEDAM AENIGMATA, SEV QVAESTIONES, QVOrum ſolutiones tandem hanc æquationem requirunt.

Primum. Propoſitum eſt inuenire duos numeros, quorum multiplicatio quidem unius cum altero 24, ſecundæ uero illorum quantitates ſimul iunctę 280, uel 539 conſtituant: quęritur, qui nam ſint illi duo numeri.

Facit 4 & 6, uel 3 & 8.

OPERATIO.

Numeri		Secundæ quantitates, primi	ſecundi numeri.
1 ra	24 N / 1 ra.	1 ſe.	13824 N. / 1 ſe.

Quantitatibus ſecundis ſimul iunctis, ueniunt

1 quin. — 13824 N æquales 280 uel 539 N.
1 le.

In integris quantum ad numerum 280.

1 Quin. + 13824 N æquales 280 ſe.

140 in ſe, 19600, minus 13824, manent 5776. Huius radix quadrata

76 { de / ad } 140. medieta. medij, manent 64, uel proueniunt 216, ra-

dicis quidem ualores ac quæſtionis numeri, ſi characteres continui eſſent. Sed quia utrinq; duo characteres neglecti ſunt, non igitur hi, ſed horum numerorum, ut ſecundarum quantitatum radices, 4 ſcilicet & 6, quæſtionis numeri erunt. Id quod nunc probari poteſt, ut ſequitur.

Quantum ad numerum

priorem		280		posteriorem		539
Numeri propoſiti		Secun. quanti.		Numeri propoſ.		Secundæ quantitates
4	16	64		3	9	27
6	36	216		8	64	512
24		280		24		539

Secundum. Propoſitum eſt inuenire numerum, cuius quadratum poſt quam primò acceperit 8, ſecundo uerò 3 amiſerit, ut multiplicatio tandē collecti cum reſiduo 6942 producat.

Facit 9

OPERATIO.

1 ra.		1 pri. + 8 N		
1 pri.		1 pri. — 3 N		
	1 ter. + 5 pri. — 24 N	æquales	6942 N.	

Vel additis quæ ſunt addenda, nimirum — 24 N, parti utriq; , ueniunt

1 ter. + 5 pri. æqua. 6966 N.

Eſt autem in ſecunda æquatione exemplum canonis primi, quare ſecundum illius præceptionem operatio inſtituenda eſt. Veniunt autem operatione abſoluta 81, tanquam radicis ualor. Sed quia unus character utrinq; inter duos proximos eſt neglectus, non igitur ipſe numerus, ſed eius radix quadrata, 9 ſcilicet, radicis ualor & numerus quęſitus erit, id quod nunc examinari poterit.

Tertium. Propoſitum eſt inuenire numerum, cuius quadratum, poſtquam primò acceperit 8, numerus uerò ipſe 3 amiſerit, ut multiplicatio tandem collecti cum reſiduo 534 producat.

Facit 9

Sequuntur

SEQVVNTVR NVNC ALIAE HVIVS REGVLAE PRAECEPTIONES, ALGORITHMI NIMIRVM, VT VOCANT, DE SVRDIS QVADRATORVM, CVBICORVM, & id genus, Binomiorum item & Reſiduorum, per ſingulas ſpecies tractatio.

NVMERI igitur ſurdi ſunt, quorum radices deſideratæ, numero certo expreſſæ, inueniri nequeunt. Vt numerus 3, quia non 3, ſed ex ipſo quantitatis cuiuſdam radix expetitur, licet per ſe rationalis ſit numerus, tamen ratione illius defectus, iam irrationalis & ſurdus appellatur. Eadem ratione 17. 13. 21. 346, multi item numeri alij, pro ſurdis haberi ſolent. Notantur autem, ut in ſequentibus apparet, huiuſmodi ſurdi, prout radix alia atq; alia deſideratur, ſuis propriis notis. Quod ipſum ideo fit, ut nimirum eorum à rationalibus numeris diſcrepantia (qui abſq; ſigno & abſolutè proferuntur) cognoſci poſſit. Quia autem uarię ſunt numerorum ſecundum quantitates appellationes, cũ alij primę quantitatis, alij uerò ſecundæ, tertiæ, quartę, uel decimæ, ac deinceps quarumuis aliarum quantitatum appellationem habeant, uarios etiam horum ſurdorum numerorum Algorithmos, ſeu tractationes eſſe, neceſſariò ſequitur. Atq; de his nunc ordine dicendum erit. & primò quidem:

DE SVRDIS NVMERORVM PRIMAE QVANTITATIS, SEV, VT VOCANT, Quadratorum.

NVMERATIO VEL ENVNCIATIO.
Caput I.

ENunciatio eſt facilis. Primò enim character, uel ſyllaba, quæ numero præſcripta eſt, per quam etiam numerum propoſitum, Surdum eſſe ſignificamus, mox deinde numerus ipſe exprimitur. Vt exempli gratia. ra. 29 exprimitur, Radix uiginti nouem: uel, ut ſit enunciatio planior, Radix numeri uiginti nouem. Intelligitur autem radix quadrata, cum in præſentia ſit quadratorum tractatio. In cubicis uerò, de quibus erit tractatio ſequens, cubica uel ſecundę quantitatis radix conſideratur. Atq; in genere, cuiuſcunq; ſanè quantitatis tractatio fuerit, eius conditio per notam radicis, Ra. ſignificatur, ac deinde etiam exprimitur. Solent tamen multi, & bene etiam. has deſideratas radices, ſuis punctis cum linea quadam à dextro latere aſcendente, notare, atq; ſic pro radice quidem quadrata, ubi hæc in aliquo numero deſideratur, notam ⟋: pro cubica uerò, ⟋: ac radicis radice deinde, ⟋ præponunt: de quo obiter admonere Lectorem uolui.

MVLTIPLICATIO. CAP. II.

MVltiplicatio ſurdorum in genere, eſt radicis unius ſurdi numeri toties, quot ſunt unitates in radice ſurdi alterius, coaceruatio. Hæc autem perficitur, multiplicatione unius numeri rationalis (neglecto charactere) cum numero rationali altero. Nam ſtatim tandem radix producti, id quod ex multiplicatione radicis unius cum radice ſurdi alterius prouenerit, indicabit.

EXEMPLA SVNT.

ra. 7 cum ra. 8	Item	ra. 24 cum ra. 54
produ. ra. 56		produ. 36

Quod autem in his duobus exemplis, multiplicatio in uno quidem, Surdum: in altero uerò, rationalem numerũ produxerit, mirandũ non est. posse enim id fieri in multiplicatione surdorũ, docetur propositionibus 19 & 21 decimi libri Euclidis.

SEQVVNTVR EXEMPLA ALIA.

ra. 6 cum ra. 24	Item	ra. $12\frac{1}{2}$ cum ra. $4\frac{1}{2}$
produ. 12		produ. $7\frac{1}{2}$

ADHVC ALIA.

3 cum $\sqrt{8}$	Item	$4\frac{1}{2}$ cum $\sqrt{14}$
produ. $\sqrt{72}$		produ. $\sqrt{283\frac{1}{2}}$

In his duobus exemplis, cum unus numerus surdus, alter uerò rationalis sit, numerus rationalis, ad similem ipsius surdi quantitatis appellationem, multiplicatione reducendus erit. Nam semper unius appellationis esse numeros in surdorum tractatione, cùm hac in regula, tum in sequentibus necesse est. Ex quo nunc sequitur, cum una surdorum debeat esse quantitatis appellatio: quod duplare quidem hoc loco, per 4, hoc est, per binarij quadratum: triplare uerò & quadruplare, ac præterea si quæ sint multiplicationes aliæ, per illorum numerorum quadrata, 9 scilicet & 16, atque ordine deinceps, perficiendæ sint, ac fieri debeant.

SEQVVNTVR EXEMPLA.

ra. 8 bis	ra. 8 ter.	ra. 8 quater.
produ. ra. 32	produ. ra. 72	produ. ra. 128

Est autem huius tractationis tanquam examen, ipsa diuisio, quæ iam sequitur.

DIVISIO. CAP. III.

Diuisio surdorum in genere, est inuentio numeri, cuius radix tot habeat unitates, quoties radix diuidẽs continetur, in ipsa radice diuidenda. Hæc autẽ perficitur, diuisione unius numeri rationalis (neglecto charactere) in numerum rationalem alterum. Nam statim tandem exeuntis radix id, quod ex diuisione radicis unius in radicem surdi alterius exiuerit, indicabit.

EXEMPLA SVNT.

ra. 56 in ra. 8	Item	ra. 72 in ra. 8
exit ra. 7		exeunt 3

ALIVD EXEMPLVM.

ra. $457\frac{1}{3}$ in ra. 21, exit ra. $21\frac{7}{9}$.

ALIA.

$\sqrt{7\frac{1}{7}}$ in $\frac{2}{3}$	Item	$\frac{2}{3}$ in $\sqrt{\frac{8}{4}}$
exit $\sqrt{16\frac{1}{7}}$		exit $\sqrt{\frac{16}{27}}$

Diuidatur radix numeri 8 in

2, exit $\sqrt{2}$ in 3, exit $\sqrt{\frac{8}{9}}$ in 4, exit $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Id quod ex præmissis patet.

Huius tractationis tanquam examen, est ipsa multiplicatio, quæ paulo antè descripta est.

Additio

ADDITIO. CAP. IIII.

ADditio ſurdorum in genere, eſt radicum propoſitorum ſurdorum in unam ſummam collectio. Hæc autem ex 4 propoſitione ſecundi Euclidis perficitur hoc modo. Sumantur ſurdorum, tanquam partium alicuius totius (lineæ, ſeu numeri) in partes diuiſi, quadrata: una deinde parte uel numero, cum altero multiplicato, is qui producitur numerus, quùm allegata propoſitio dicat bis, duplicetur: hoc eſt, per 4, ut in multiplicatione dictum eſt, multiplicetur. Quia uerò hęc omnia, partium uidelicet totius, hoc eſt, numerorum ſurdorum, quadrata, & quod producunt illi ſurdi inter ſe multiplicati bis, ex allegata propoſitione, totius numeri quadrato ęqualia ſunt: his igitur omnibus in unum collectis, radice deinde quadrata collecti quęſita, per eam tandem radicum ſumma datorum ſurdorum indicabitur.

EXEMPLA SVNT.

ra. 12 ad ra. 20 — Item — ra. 15 ad ra 17

12 — 20 — 15 — 17

ra. 240 — ra. 255

bis per 4 — bis per 4.

ra. 960 — ra. 1020.

Facta additione, ueniunt

32 + ra. 960 — 32 + ra. 1020

quadratum totius.

Radix igitur huius collecti, uel totius, quadrata, quæ eſt

Radix collecti 32 + ⟨ 960 — ra. col. 32 + ⟨ 1020

ſurdorum propoſitorum ſumma radicum erit.

Adduntur huiuſmodi numerorum ſurdorum radices commodius per particulam illam Plus, uel per eius ſignum +, quod idem eſt, ſic

ra. 20 plus ra. 12 — Item — ra. 17 + ra. 15

Quòd ſi uno ſurdo cum altero multiplicato, producti radix aſſignari queat, tum loco illius producti radix aſſumenda, ac binario deinde ea duplanda eſt. Quo facto, & breuior & expeditior erit operatio.

EXEMPLA SVNT.

ra. 27 ad ra. 12 — Item — ra. 18 ad ra. 32

27 — 12 — 18 — 32

ra. 324 — ra. 576

18 — 24

bis — bis

36 — 48

75 — 98

Omnium productorum ſumma

ra. 75 — Radicum ſumma. — ra. 98

Atq; is eſt generalis additionis ſurdorum canon. Sed quia numerorum ſurdorũ, alij compoſiti, ſeu, ut uocant, commenſurabiles inter ſe ſunt, alij deinde incompoſiti & incommenſurabiles: Ac commenſurabiles quidem ſunt, qui alicuius communis numeri diuiſione, ad quadratos reduci poſſunt, ut ſunt ra. 6 & ra. 54, item ra. 27 & ra. 12: Incommenſurabiles uerò, qui nullo communi numero, diuidendo, ad quadratos reduci poſſunt, ut ſunt ra. 7 & ra. 13, itẽ ra. 12 & ra. 20: Qui commenſurabiles inter ſe ſunt ſurdi, alia & breuiori uia, quàm in generali regula traditum eſt, addi poſſunt, in hunc modum.

Reducantur primò ſurdi hi commenſurabiles ad numeros quadratos, quadratorum deinde radices ſimul addantur, & quod colligitur, huius quadratum cum communi ſurdorum commenſurabilium numero multiplicetur. quo facto, producti radix propoſitorum ſurdorum radicum ſummam indicabit, quod per duo exempla præmiſſa ſequenti calculo cernere licebit.

ra. 27 ad ra. 12

com. 9 quadrata 4

nu. 3 3 radices 2

5 in ſe,

25

com. numerus 3

75

Summa radicũ $\sqrt{}$ 75

Item ra. 18 ad ra. 32

com. 9 quadra. 16

nu. 2 3 ra. 4

7 in ſe

49

com. numerus 2

98

Summa radicum $\sqrt{}$ 98

Simili modo cum alijs exemplis omnibus, hæc, ſiue per numeros integros, ſiue per fractiones, ſeu per integros & fractiones expoſita fuerint, procedendum erit.

EXEMPLA.

ra. $5\frac{1}{3}$ ad ra $6\frac{3}{4}$ Facit ra. $24\frac{1}{12}$.

Item ra. $26\frac{2}{3}$ ad ra. $33\frac{3}{4}$ Facit ra. $120\frac{5}{12}$

ALIVD EXEMPLVM.

3 ad ra .8. Facit radix collecti 17 + $\sqrt{}$ 288. Vel 3 + $\sqrt{}$ 8.

Eſt autem huius tractationis tanquam examen ipſa ſubtractio, quæ iam ſequitur.

SVBTRACTIO. CAP. V.



Vbtractio ſurdorum in genere, eſt radicis unius propoſiti ſurdi de radice alterius ſubtractio. Hæc autem ex propoſitione 7. ſecundi Euclidis, perficitur hoc modo. Sumantur quadrata amborum, hoc eſt, eius à quo debet fieri ſubtractio, ut totius: atq; etiam radicis ſubtrahendæ, ut unius partis lineæ, uel numeri diuiſi. Et quia hęc ſimul collecta, ex allegata propoſitione, ęqualia ſunt numero, quem producit totum cum dicta parte, hoc eſt, una radix cũ altera multiplicata bis, & quadrato alterius partis, hoc eſt, quadrato radicis reſiduæ. Ab illo igitur quadratorum collecto, numerus quem producunt radices inter ſe multiplicatę bis, ſubtrahendus, reſidui deinde radix quęrenda: qua inuenta, ſubtractio abſoluta erit, cum per hanc ipſam remanentis ſeu reſidui radix indicabitur.

EXEMPLA SVNT.

ra 12. de ra. 20

12 20

ra. 240

bis per 4

ra. 960

Item ra. 15 de ra. 17

15 17

ra. 255

bis per 4

ra. 1020

Facta ſubtractione manent

32 — ra. 960 32 — ra. 1020

remanentis uel reſiduæ radicis quadratum.

Radix igitur huius reſidui quadrata, quę eſt

radix reſidui 32 — $\sqrt{}$ 960 radix reſidui 32 — $\sqrt{}$ 1020

remanentis ſurdi radix quadrata erit,

Subtra-

Subtrahuntur huiuſmodi numerorum ſurdorum radices commodius per particulam illam Minus, uel per eius ſignum —, quod idem eſt, ſic,

ra. 20 minus ra. 12 Item ra. 17 — ra. 15.

ALIA EXEMPLA.

ra. 27 de ra. 75. Item ra. 32 de ra. 98

27 75 32 98

102 130

2025 3136

45 56

bis bis

90 112

12 18

quadratum reſidui

ra. 12 igitur ra. 18 igitur

radix reſidui.

Quia uerò & in hac ſpecie, quemadmodum in præcedenti, aliàs commenſurabilium, aliàs incommenſurabilium ſurdorum fit ſubtractio: ubi commenſurabiles fuerint propoſiti, hi eodem, quod in additione traditum eſt, compendio, unus ab altero ſubtrahi poterit: niſi quod hic radix à radice ſubtrahenda, cum illic una alteri addenda ſit. Reſiduæ deinde radicis quadrato, ut in additione aggregati ex radicibus quadrato, cum numero, quo ſcilicet propoſiti ſurdi ad quadratos reducti ſunt, multiplicato, ex producto tandem radice quæſita, ſubtractio peracta erit. Quod per duo exempla præmiſſa ſequenti calculo cernere licebit.

ra. 27 de ra. 75 Item ra 32 de ra. 98

com. nu. com. nu.

3 9 quadra. 25 2 16 quadra. 49

3 radices 5 4 ra. 7

2 in ſe 3 in ſe

4 9

communis nume. 3 com. numerus 2

12 18

Radix reſidua ⌊ 12 Radix reſidua ⌊ 18

Simili modo cum alijs exemplis omnibus, hæc ſiue per numeros integros, ſiue per fractiones, ſeu per integros & fractiones, expoſita fuerit, procedendum erit.

EXEMPLA.

ra. $6\frac{3}{4}$ de ra. $8\frac{1}{3}$ Item ra. $\frac{2}{5}$ de ra. $\frac{3}{4}$

manet ra. $\frac{1}{12}$ ma. ra. $\frac{1}{24}$

ALIVD EXEMPLVM.

ra. $26\frac{2}{3}$ de ra. $33\frac{3}{4}$ ma. ra. $\frac{5}{12}$.

ADHVC ALIVD.

ra. $6\frac{3}{4}$ de ra. $12\frac{1}{12}$, manet radix reſidui $18\frac{5}{6}$ — ⌊ $326\frac{1}{4}$.

Hæc autem eſt, ut quidem ſuo loco cognoſcetur, ⌊ $12\frac{1}{12}$ — ⌊ $6\frac{3}{4}$ id quod examinari poteſt.

Huius tractationis tanquam examen, eſt ipſa additio, quæ paulo ante deſcripta eſt.

Sequitur

SEQVITVR ALGORITHMVS DE SVRDIS NVMERORVM SECVNDAE QVANTITATIS, seu, ut uocant, de surdis Cubicorum.

NVMERATIO, VEL ENVNCIATIO.

Caput I.

ENunciatio est, sicut in iam absoluta de surdis quadratorum tractatione expositа est. Vt ra. 29, hæc quantitas, quia uersamur in tractatione cubica: ideo etiam non radix quadrata, sed radix cubica, uel secundæ quantitatis radix, numeri 29 exprimitur. Sic in cæteris exemplis agendum. Solet tamen plerumq; syllabæ, Ra. propter confusionem uitandam, addi syllaba, cu. præsertim quidem, ubi extra tractationem alibi scriptę fuerint ac inueniantur, sic:

Ra. cu. 11. Item radix se. 11, 24, uel alterius numeri.

MVLTIPLICATIO ET DIVISIO.

Caput II.

MVltiplicatio & Diuisio eodem modo hic, quo superius in tractatione surdorum quadratorum, perficiuntur: nisi quòd ultimò, loco radicis quadratæ, quæ ex multiplicationis producto & diuisionis exeunte illic eliciebatur, in præsentia nunc, cum sit tractatio cubica, ex ijsdem radix cubica quærenda sit,

SEQVVNTVR EXEMPLA, ET PRIMO DE multiplicatione.

Ra. cu. 7 cum ra. cu. 11 — produ. ra. cu. 77.

Item ra. $7\frac{2}{3}$ cum ra. $\frac{3}{4}$ — produ. ra. $5\frac{1}{4}$.

ALIA.

ra. $\frac{2}{16}$ cum ra. $\frac{16}{27}$ — produ. ✓ $\frac{1}{3}$

Item ✓ $\frac{2}{3}$ cum ✓ $\frac{4}{9}$ — producuntur $\frac{2}{3}$.

ALIVD.

ra. cu. $3\frac{3}{8}$ cum 6, producuntur 9.

ALIA.

ra. cu. 9 bis — pro. ra. cu. 72.

✓ 9 ter. — pro. ✓ 243

ra. cu. 9 quater, — pro. ra. 576.

Hæc tria aut quatuor exempla, licet in se habeant aliquid obscuritatis, tamen qui priorum memor fuerit, nullam horum planè requiret explicationẽ ulteriorem.

SEQVVNTVR EXEMPLA DIVISIONIS.

Diuidatur ra. cu. 16 in ra. cubicum 4, exit radix cu. numeri 4.

Item ✓ 24 in ✓ 3, exeunt 2. Similiter ra. 20 in ra. 6. exit ra. $3\frac{1}{3}$

Item diuidatur ✓ 240 in 6, uel contrà 6 in ✓ 240, exeunt, hic quidem ra. cu. $\frac{2}{10}$, illic uerò ra. cu. $1\frac{1}{9}$

Medietas radicis cubicæ numeri 48, est radix cubica numeri 6.

Sic tertia pars eiusdem, numeri 48, est radix cubica numeri $1\frac{7}{9}$

compro-

Comprobantur autem hæ duę ſpecies, multiplicatio ſcilicet & diuiſio, alternis, ut aliàs fieri conſueuit.

ADDITIO ET SVBTRACTIO.
Caput III.

SVnt & hic conſiderandi duplices ſurdi, cum, quemadmodum in ſuperiori tractatione, alij commenſurabiles inter ſe ſint, alij incommenſurabiles. Ac commenſurabiles quidem, ut ra. cu. 4, & ra. cu. 32, radices item cubicæ numerorũ 24 & 81. Incõmenſurabiles uerò, ut ra. cu. 24 & ra. cu. 54, radices itẽ cubicæ numerorũ 20 & 12, uel 21 & 13, atq; id genus. Qui igitur commenſurabiles inter ſe ſunt ſurdi, illorũ radices non aliter adduntur, uel una ab altera ſubtrahitur, atq; in ſurdorum quadratorum tum additione, tum ſubtractione ſuprà traditum eſt, niſi quod illic quadratè, hic uerò cubicè omnia agantur. Quare uno atq; altero exemplo poſito, res ſatis dilucida erit. Qui uerò incommenſurabiles, & planè ſurdi ſunt, illorum additio & ſubtractio percom modè ſigno affirmatiuo, +, & negatiuo, —, abſoluuntur.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

Additio

Ra. cu. 24 ad ra. cu. 81

3 — 8 — 27

2 — 3

5

125

com. numerus 3

375

ra. cu. 375, radicum ſumma.

Item

Subtractio.

ra. 24 de ra. 81

3 — 8 — 27

2 — 3

1

1

com. numerus 3

3

ra. cu. 3, radix reſidua.

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{}$ $10\frac{2}{3}$ ad $\sqrt{}$ $4\frac{1}{2}$ Item $\sqrt{}$ $4\frac{1}{2}$ de $\sqrt{}$ $10\frac{2}{3}$

In integris & ſub una denominatione, ſexta ſcilicet

$\sqrt{}$ 64 ad $\sqrt{}$ 27 Item $\sqrt{}$ 27 de $\sqrt{}$ 64

4 — 3 — 3 — 4

7 — 1

343 in 6 diuiſa, 1 in &cæ.

exeunt $57\frac{1}{6}$. Quare exit $\frac{1}{6}$. Quare

$\sqrt{}$ $57\frac{1}{6}$ radicum ſum. $\sqrt{}$ $\frac{1}{6}$ ra. ra.

EXEMPLA PARTIS POSTERIORIS.

Additio

$\sqrt{}$ 24 ad $\sqrt{}$ 32

uenit $\sqrt{}$ 32 + $\sqrt{}$ 24

Item

Subtractio.

$\sqrt{}$ 24 de $\sqrt{}$ 32

ma. $\sqrt{}$ 32 — $\sqrt{}$ 24

ALIA.

$\sqrt{}$ 9 ad $\sqrt{}$ 27

uenit $\sqrt{}$ 27 + $\sqrt{}$ 9

Item

$\sqrt{}$ 9 de $\sqrt{}$ 27

ma. $\sqrt{}$ 27 — $\sqrt{}$ 9

SIMILITER ALIA.

$\sqrt{}$ $8\frac{1}{3}$ ad $\sqrt{}$ $9\frac{1}{7}$

uenit $\sqrt{}$ $9\frac{1}{7}$ + $\sqrt{}$ $8\frac{1}{3}$

Item

$\sqrt{}$ $8\frac{1}{3}$ de $\sqrt{}$ $9\frac{1}{7}$

ma. $\sqrt{}$ $9\frac{1}{7}$ — $\sqrt{}$ $8\frac{1}{3}$.

Eſt & alia addendi & ſubtrahendi ratio, quę quidem, ubi ſurdi commenſurabiles fuerint, locum habet.

Surdis commensurabilibus propositis, hi primùm communi eorum mensurae uel numero, quem habent, ad cubos rationales reducendi, deinde tam cuborum radices, quàm etiam radicum quadrati, ponendi sunt. Hoc facto, utriusq; radix cum triplo quadrati radicis alterius multiplicari: haec duo producta deinde unà cũ duobus cubis, si quidem additio instituitur, coniungi: uel pro subtractione absoluenda, maioris radicis productum maiori, minoris uerò productum minori cubo addi, atq; ab illo deinde hoc collectum subtrahi debet. quo facto, tam quòd illic colligitur, quàm hic relinquitur, utrunq; cum communi commensurabilium surdorum numero multiplicatum, per radicem producti tandẽ cubicam cùm additioni, tum subtractioni etiam satisfactum erit.

Ra. cu. 40	ad	ra. cu. 135
5	8	27
	2	3
	4	9
	12	27
	54	36

Summa omnium 125

com. numerus 5

625. quare

ra. cu. 625 radicum summa

Item

✓ 40	de	✓ 135
5	8	27
	2	3
	4	9
	12	27
	54	36

Id quod relinquitur, 1

com. numerus 5

5. quare

✓ 5 ra. dix residua.

SEQVITVR ALGORITHMVS DE SVRDIS NVMERORVM TERTIAE QVANTITATIS, seu, ut uocant, de surdis quadratorum de quadratis.

NVMERATIO, VEL ENVNCIATIO.

Caput I.

ENunciatio eadem est quae in praecedentibus, nisi quòd character, qui numero ascribitur, pro suo ualore & natura exprimatur. Vt ra. ra. 29 Radicis radix, uel radix tertiae quantitatis, numeri 29. exprimitur. Sic reliqua huius generis exẽpla omnia exprimi debẽt. Prẽponitur autẽ huiusmodi surdis duplex ra. eo quòd bis ex eis radix quadrata, elicienda sit, semel quidem ex ijs ipsis surdis, secundò uerò ex eorum radicibus inuentis, quod obiter annotare libuit. Breuitatis uerò, atq; compendij gratia, (ut suprà etiam indicauimus) solent huiusmodi nnmeri notari & repraesentari duplici puncto &cae. sic ✓, ut ✓ 29, quod & ipsum notandum est.

MVLTIPLICATIO ET DIVISIO.

Caput II.

PErficiuntur hę duae species, multiplicatio & diuisio, eodem modo quo in superioribus traditum est: nisi quòd ultimò, ratione appellationis, tam de multiplicationis producto, quàm etiam diuisionis exeunte, radix tertię quantitatis, hoc est radix quadrata de radice quadrata elici debeat.

EXEMPLA MVLTIPLICATIONIS SVNT.

ra. ra. 21 cum ra. ra. 12 produ. ra, ra. 252.

Item ✓ 27 cum ✓ 12 produ. ✓ 18.

Alia

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{162}$ cum $\sqrt{32}$ — produ. $\sqrt{72}$

Item ra. ra. $7\frac{1}{7}$ cum ra. ra. $\frac{4}{7}$ — produ. ra. $2\frac{2}{7}$

ADHVC ALIA.

$\sqrt{24}$ cum 6 uel contra. — produ. $\sqrt{31104}$

Item $\sqrt{45}$ cum $4\frac{1}{2}$ — produ. $\sqrt{158673\frac{2}{9}}$

EXEMPLA DIVISIONIS.

$\sqrt{84}$ in $\sqrt{7}$ — exit $\sqrt{12}$

Item ra. ra. 48 in ra. ra. 12 — exit ra. 2.

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{873}$ in $\sqrt{97}$ — exit $\sqrt{3}$

Item $\sqrt{66}$ in $\sqrt{8}$ — exit $\sqrt{8\frac{1}{2}}$

ALIA EXEMPLA.

$\sqrt{5\frac{1}{7}}$ in $\sqrt{3\frac{1}{7}}$ — exit $\sqrt{\frac{28}{45}}$

$\sqrt{12\frac{1}{2}}$ in $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ — exit $\sqrt{1\frac{2}{3}}$

$\sqrt{12}$ in $\sqrt{8\frac{1}{3}}$ — exit $\sqrt{1\frac{1}{5}}$

APPENDIX AD EA QVAE HACTENVS, CVM IN HOC, tum etiam in præmiſſis algorithmis, de multiplicationibus & diuiſionibus ſurdorum commemorata ſunt, cognitu neceſſarius.

Cum hactenus tantum, quomodo ſimilium appellationum ſurdi inter ſe, ſurdus item cum rationali numero, uel contrà, per has duas ſpecies tractari debet, traditum ſit, haud raro autem accidere ſoleat, quòd etiam diuerſarum appellationū ſurdi inter ſe his regulis tractandi occurrant, & illorum tractatio nunc, ne quid in præmiſſa de ſurdis deſcriptione deſiderari poſsit, paucis præſcribetur.

Si duos igitur diuerſarum appellationum ſurdos inter ſe multiplicare, aut unum in alterum diuidere propoſitum ſit, utriuſq; appellationis numerus ſecundum appellationem numeri alterius multiplicandus eſt. quo facto, producuntur duo numeri alij, alia etiam, & una quidem, horum productorum appellatio: quibus poſtea, uel uno cum altero multiplicato, uel uno in alterum diuiſo, res confecta erit. Quam uerò hi producti numeri ſortiuntur appellationē, in additis & diminutis, circa multiplicationem dudum iam traditum eſt.

EXEMPLA HVIVS SVNT.

ra.	24		ra. cu.	16
ra.	72	cum, uel in	ra. ra.	32
ra. cu.	32		ra. ra.	8

Producuntur, ratione quidem multiplicationis,

Primò, Radix quintę quãtitatis, hoc eſt, radix quadraticubica, numeri 3538944.

Secundò, Radix tertiæ quantitatis, hoc eſt, radicis radix, numeri 165888.

Tertiò, Radix undecimæ quantitatis, hoc eſt, radix cubica de quadrati quadrato, uel contra, numeri 536870912.

Ratione uerò diuiſionis, exeunt ĩſdem quantitatibus denominati numeri,

Primò quidem 54, ſecundò uerò 162, ac tertiò deinde 2048. &cæ.

ALIA EXEMPLA IN RATIONALIBVS.

⌊ 4		⌊⌊ 8	4	1	
⌊ 9	cum uel in	⌊ 16	pro. 6	uel ex.	1½
⌊⌊ 27		⌊ 81	9	1	

APPENDICIS COMPENDIVM.

Habet hæc operatio ſuum quoq; compendium, in exemplis nimirum, ubi aliqua eſt in appellationibus numerorum conuenientia & ſimilitudo. Vt ſi, exempli gratia, hi duo ſurdi, ra. 6 & ra. ra. 12, unus cum altero multiplicari, uel in alterũ diuidi debeat, numerus 6 quadratè tantum multiplicari, 12 uerò prout ſunt, ita abſq; immutatione relinqui debent. Producitur autem multiplicatione quidẽ, ra. ra. 432, diuiſione uerò exit ra. ra. 3. Sic radice quadrata de radice cubica, uel contrà radice cubica de radice quadrata aliquis numerus notatus, ſi cum numeri alterius radice cubica, uel radice quadrata multiplicari, ſeu in eam diuidi debeat, numerus multiplicans ſeu diuidens, ratione quidem cubi, in ſe tantum quadratè, ratione uerò quadrati, in ſe tantum cubicè multiplicandus erit.

ADDITIO ET SVBTRACTIO. CAP. III.

QVinetiã hac tractatione ſurdi aliàs cõmenſurabiles ſunt, aliàs uerò incõmenſurabiles. Qui igitur cõmenſurabiles inter ſe ſunt ſurdi, ad ſuæ appellationis rationales, hoc eſt, ad tertię quantitatis numeros reducendi ſunt, ac ſi quidem additio inſtituitur, radices horum addi: quod ſi uerò ſubtractio, una radix ab altera ſubtrahi debet. Quo facto, utriuſq;, hoc eſt, tam eius quod ex additione colligitur, quàm etiam eius quod per ſubtractionem relinquitur, tertia quantitas, cum communi numero multiplicetur, & erit eius quod producitur, Radicis radix, ſeu tertiæ quantitatis radix: hic quidem radicis radix reſidua, illic uerò harum ſumma. Quòd ſi incommenſurabiles & planè ſurdi ſunt, tũ illorũ additio & ſubtractio percõmodè ſigno affirmatiuo, +, & negatiuo, —, abſoluuntur.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

Additio

ra. ra. 32 ad ⌊ 162

2 16 81

2 3

5

625

2

communis numerus

1250

ra. ra. 1250, radicum ſumma

Item

Subtractio.

ra. ra. 32 de ⌊ 162

2 16 81

2 3

1

1

2

2

ra. ra. 2, radix reſidua.

ALIA EXEMPLA.

⌊ 5 1/16 ad ⌊ 39 1/16 Item ⌊ 5 1/16 de ⌊ 39 1/16

In integris ſub una denominatione, ſedecima nimirum.

⌊ 81 ad ⌊ 625 Item ⌊ 81 de ⌊ 625

3 5

8 in ſe, &cæ. 4096

3 5

2 in ſe 16,

diuiſa in 16.

exit ſeu manet 1

Facit ⌊ 256 / 16 id eſt 4

Eſt autem hoc exemplum in numeris rationalibus expoſitum.

Sequitur

Sequitur iam ſimile in irrationalibus.

√ 266 7/9 ad √ 1350 9/16 Item √ 266 7/9 de √ 1350 9/16

In integris ſub una denominatione, 144

√ 38416 ad √ 194481 Item √ 38416 de √ 194481

16 81 16 81

2 3 2 3

5 1

in ſe, &cæ. in ſe

625 1

cum 2401 cum 2401

pro. 1500625 in 144 diui. pro. 2401 in 144 diuiſa,

exeunt √ 1500625/144 exeunt √ 2401/144

Radicum igitur ſumma, Radix igitur reſidua,

radix quadrata numeri 102 1/12 ra. quadrata numeri 4 1/12

EXEMPLA PARTIS POSTERIORIS.

√ 18 ad √ 24 Item √ 18 de √ 24

ueniunt √ 24 + √ 18 ma. √ 24 — √ 18

ALIA.

√ 7 2/3 ad √ 12 1/2 Item √ 7 2/3 de √ 12 1/2

ueniunt √ 12 1/2 + √ 7 2/3, ma. √ 12 1/2 — √ 7 2/3

SEQVITVR ALGORITHMVS DE BINOMIIS ET RESIDVIS.

Eſt autem Binomium ſeu ex binis nominibus linea, ut eã Euclides, per 36 decimi libri propoſitionem, definit, linea irrationalis, quã duæ rationales, potentia tantum cõmenſurabiles, in directum ſumptæ, conſtituunt. ut 4 + √ 7, √ 12 + 3, √ 27 + √ 15, 4 + √ 8, √ 12 + 2, √ 27 + √ 18. & ſi quæ ſunt alia. Reſiduum uerò ſeu Apotome, ut idẽ Euclides id per 73 decimi propoſitionẽ definit, linea irrationalis, quã duæ rationales, potentia tantum commenſurabiles, quarum una ab altera ſi ab lata fuerit, tandem relinquunt. ut 4 — √ 7, √ 12 — 3, √ 27 — √ 15 4 — √ 8, √ 12 — 2, √ 27 — √ 18, & id genus alia multa.

ENVNCIATIO. CAP. I.

HAbet hæc Binomiorum & reſiduorum tractatio, nihil ferè difficultatis, cum illorum operationes omnes ſuis regulis ſuperius deſcriptæ ſint. Et quia Enunciatio eſt facilis, cum ex præcedentibus conſtet & intelligatur: Sequitur igitur

ADDITIO. CAP. II.

IN additione binomiorum & reſiduorum, qui unius ſunt appellationis numeri, addantur ſimul, abſoluti ſcilicet abſolutis, & denominati denominatis, ut ſuperius traditum eſt, ratione interim ſignorum + & — habita.

SEQVVNTVR EXEMPLA, ET PRIMO DE BINOMIIS.

4 + ra. 7 ra. 27 + ra. 15

4 + ra. 8 ra. 27 + ra. 18

8 plus radix binomij ra. 108 plus radix binomij

15 + √ 224 33 + √ 1080

Vel 8 plus √ 7 + √ 8 Vel √ 108 plus √ 15 + √ 18.

ALIA EXEMPLA.

ra. 12 + 3	8 + ra. 28
ra. 12 + 2	4 + ra. 7
ra. 48 + 5	12 + 12. 63.

SEQVITVR SECVNDO EXEMPLVM DE RESIDVIS.

4 — ra. 7
4 — ra. 8

8, minus radix binomij. 15 + ra. 224

Vel 8, minus radix 7, minus item ra. 8

ALIA EXEMPLA.

ra. 48 — 6	ra. 3 — ra. 2
ra. 3 — 1	3 — ra. 5
ra 75 — 7	3 + ra. 3 — ra. 2 — ra. 5

ALIVD EXEMPLVM.

ra. 1620 — 18
54 — ra. 1620

Summa 36.

SEQVVNTVR TERTIO EXEMPLA DE BINOmijs & residuis.

4 + ra. 7	4 + ra. 8
4 — ra. 8	4 — ra. 7
8, minus radix residui	8, plus radix residui
15 — ra. 224	15 — ra. 224
Vel ma. 8 + ∫7 — ∫8	Vel ma. 8 + ∫8 — ∫7.

ALIA DVO EXEMPLA.

ra. 12 + 3	4 — ra. 7
ra. 12 — 3	3 + ra. 28
ra. 48	7 + ra. 7

SVBTRACTIO. CAP. III.

QVemadmodum in additione, unius appellationis numeri addendi: ita nunc, ut subtractio perficiatur, unus ab altero, absolutus scilicet numerus ab absoluto, & denominatus à denominato subtrahendus est, Quòd si interea, quid cum signis + & — fieri debeat, non oscitanter obserues, nihil est quod ultra desiderare possis.

SEQVVNTVR EXEMPLA, ET PRIMO DE Binomijs.

ra. 12 + 3	12 + ra. 63
ra. 12 + 2	8 + ra. 28
manet 1	4 + ra. 7

ALIVD EXEMPLVM.

4 + ra. 8
4 + ra. 7

manet radix residui 15 — ∫224, uel ma. ∫8 — ∫7.

Exempla

EXEMPLA SECVNDO DE RESIDVIS.

4 — ra. 7	4 — ra. 8
4 — ra. 8	4 — ra. 7
manet	Impoſsibile, uel ma.
ra. reſidui 15 — ∫ 224	minus radix reſi. 15 — ∫ 224

ALIA DVO EXEMPLA.

ra. 60 — ra. 20	ra. 12 — 6
ra. 20 — ra. 15	6 — ra. 12
ma. ra. 135 — ra. 80	ma. ra. 48 — 12

ALIA EXEMPLA.

6 — ra. 24	ra. 108 — 9
3 — ra. 6	ra. 48 — 4
3 — ra. 6	ra. 12 — 5

SEQVVNTVR TERTIO EXEMPLA DE BINOMIIS ET RESIDVIS.

4 + ra. 7	ra. 27 — 8
4 — ra. 7	ra. 3 + 4
ma. ra. 28	ma. ra. 12 — 12

ALIVD EXEMPLVM.

24 + ra. 24	Vel	24 + ra. 12.
16 — ra. 12		16 — ra. 24

manent utrobiq́, 8 plus radix bino. 36 + ∫ 1152

ADHVC ALIVD EXEMPLVM.

24 — ra. 24	24 — ra. 12
24 + ra. 12	24 + ra. 24

manent utrobiq́, 8 minus radix bino. 36 + ∫ 1152.

MVLTIPICATIO. CAP. IIII.

MVltiplicẽtur ſingularũ appellationũ numeri multiplicãtis, cũ ſingularũ appellationũ numeris ipſius multiplicãdi, ꝓductis deinde ſingulis cũ ſuis ſignis debito modo additis, multiplicatio abſoluta erit. Hoc tamẽ curabitur ſẽper, ut ſinguli duo numeri, qui inter ſe multiplicari debẽt, unius ſint denominationis. quòd ſi ſic, facilis erit omnis multiplicatio. Sin minus, multiplicatione, ut una & eadẽ ſit eorũ denominatio, efficiendũ eſt.

SEQVITVR EXEMPLVM.

4 + ra. 7
4 + ra. 8
pro. 16 + ra. 128 + ra. 112 + ra. 56.

ALIA DVO EXEMPLA.

12 + ra. 20	ra. 12 + 3
12 + ra. 20	ra. 12 + 2
164 + ra. 11520	18 + ra. 300

ALIVD EXEMPLVM.

6 — ra. 5
6 — ra. 5
— ra. 180 + 5
+ 36 — ra. 180
produ 41 — ra. 720

ALIA DVO EXEMPLA.

ra. 12 + 6	ra. 12 — 6
6 + ra. 12	6 — ra. 12
ra. 1728 + 48	ra. 1728 — 48

Adhuc

ADHVC ALIA DVO.

4 + ra. 7	ra. 12 + 6
4 — ra. 7	6 — ra. 12
produ. 9	produ. 24.

DIVISIO. CAP. V.



N diuiſione binomiorum & reſiduorum, cum diuiſor aut numerus abſolutus, aut denominatus, aut binomium ſeu reſiduum eſſe poſsit, ad diuiſionem commodius abſoluendam, diſtinctione quadam opus erit. Diuiſor itaq; ſi numerus abſolutus uel denominatus fuerit, in eum ſinguli ipſius diuidendi numeri, ut dictum eſt, diuidãtur. etenim exeuntibus deinde cum ſuis ſignis ſimul collectis, diuiſio peracta erit. Quòd ſi fuerit binomium, ſeu reſiduum: tunc tam diuiſor, quàm etiam diuidendus, per diuiſoris contrariũ nomen, hoc eſt per reſiduum, ſi binomium ipſe fuerit: uel per binomium. ſi reſiduum fuerit, multiplicari debet: nam productis deinde (cum hæc ex 17 propoſitione Euclidis lib. ſeptimi, eandẽ quam ipſi multiplicati, hoc eſt, diuidendus & diuiſor propoſiti, rationem cuſtodiant) illo ſcilicet quem diuidendus deſerit in alterum, diuiſis, diuiſio peracta erit.

EXEMPLA PARTIS PRIORIS.

8 + ra. 20 in 2 — exeunt 4 + ra. 5

Item ra. 24 — 8 in 3 — exit ra. $2\frac{2}{3}$ — $2\frac{2}{3}$

ALIA PRIORIS PARTIS EXEMPLA.

8 + ra. 20 in ra. 5 — exit ra. $12\frac{4}{5}$ + 2

Item ra. 24 — 8 in $\sqrt{6}$ — exeunt 2 — ra. $10\frac{2}{3}$

EXEMPLVM PARTIS POSTERIORIS.

Diuidatur ra. 72 + ra. 32 in $\sqrt{10}$ + $\sqrt{8}$

Multiplicetur igitur uterq; numerus per $\sqrt{10}$ — $\sqrt{8}$, diuiſoris reſiduũ, contrarium ſcilicet nomen, & producuntur ra. 2000 — 40, diuidendus. 2 uerò, numerus diuiſor, diuiſione deinde facta, erit exiens ra. 500 — 20, quod quidem multiplicatione eius cum diuiſore primò poſito, ut ſequitur, probari poterit.

	ra. 500 — 20
	ra. 10 + ra. 8
	+ ra. 4000 — ra. 3200
	ra. 5000 — ra. 4000
produ. ra. 5000 — ra. 3200, atq; tantus eſt etiam diuidendus primò poſitus, ra. 72 + ra. 32, id quod ſubtractione tandem & additione patebit.	

SEQVVNTVR ALIA EXEMPLA.

Diuidantur 9 in reſiduum 4 — ra. 7. uel in binomium 4 + ra. 7

Exeunt hic quidem 4 — ra. 7, illic uerò 4 + ra. 7.

Diuidatur binomium 23 + ra. 448 in 4 + ra. 7

Exeunt 4 + ra. 7.

Quæritur

Quæritur autem huius diuisionis diuidendus numerus sic,

Multiplicentur		Subtrahatur	
23 + J 448		J 3703 de	J 7168
cum 4 — J 7	7	529	1024
92 — J 3136		23	32
— J 3703			9 in se
+ J 7168			81
			7
produ. 36 + J 567			J 567. Cætera
diuidendus			nunc sunt facilia.

Diuidantur 48 + ra. 432 + ra. 384 + ra. 72, in binomium 8 + ra. 12.
exeunt 6 + ra. 6, id quòd multiplicatione diuisoris cum exeunte probari potest.

Diuidatur ra. 448 + ra. 336 in ra. ra. 252 + ra. ra. 28.
Exit ra. ra. 252 + ra. ra. 28.

DE EO QVOMODO DISCREPANTIA BINOMIORVM ET RESIDVORVM COGNOscatur, quomodo deinde ex eis radices quadratæ elici debeant. Caput 6.

Quid sit Binomium in genere, quid item Residuum, ab initio huius Algorithmi dictum est. Et quia sex sunt tantum binomiorum uarietates seu species, quæ sit cuiusq; propria definitio, nunc subiungere uisum est.

EST IGITVR BINOMIVM, SEV EX BINIS NOMININIBVS

Prima, secunda, tertia, Quarta, quinta uel sexta,

irrationalis quædam, ex duabus rationalibus, potentia tantum commensurabilibus composita, recta linea, quarum longior breuiori maius potest in quadrato lineæ, longiori longitu-

dine { commensurabili, cuius item { longior / breuior / neutra } portio propositæ rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est ex binis nominibus { Prima, / secũda, / tertia, } ut { 6 + √20 / √18 + 4 / √24 + √18 }

dine { incommensurabili, cuius item { longior / breuior / neutra } portio propositæ rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est ex binis nominibus { Quar. / quinta, / sexta, } ut { 6 + √24 / √18 + 5 / √24 + √12 }

Et tantum quidem de binomiorum definitionibus. Residua porrò per apheresin eodem modo se habent, quare

RESIDVVM SEV APOTOME

Prima, secunda, tertia. Quarta, quinta uel sexta.

est irrationalis quædam, ex duabus rationalibus, potentia tantum commensurabilibus, ubi quidem una ab altera ablata fuerit tandem relicta, cuius tota ablata maius potest in quadrato lineæ, ipsi toti longitu-

dine { commensurabili, cuius item { Tota / ablata / neutra } expositæ rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est apotome { Prima, / secũda, / tertia, } ut { 6 − √20 / √18 − 4 / √24 − √18 }

dine { incommensurabili, cuius item { Tota / ablata / neutra, } expositæ rationali longitudine commensurabilis existit, sicut est apotome { Quar. / quinta / sexta, } ut { 6 − √20 / √18 − 4 / √24 − √18 }

Exhis

Ex his nunc patet, tam binomia quàm etiam reſidua, licet aliquid commune habeant, nimirum quòd omnia in genere irrationales ſint lineæ, duas item rationales, potentia tantum commenſurabiles, rectas lineas ad earum conſtitutionem requirant, in triplici eſſe differentia, quarum prima quidem eſt. Quòd licet in omnibus binomijs, longioris portionis quadratum, quadrato breuioris portionis maius ſit, tamen in prioribus tribus, primo ſcilicet ſecundo & tertio, binomijs, quadratum longioris breuioris portionis quadrato maius eſt, in quadrato lineæ, longiori longitudine commenſurabili: in poſterioribus uerò, maius eſt in quadrato lineę, longiori longitudine incommenſurabili. ut, 12 + ra. 23, ra. 45 + 5 & ra. 20 + ra. 15. Item 12 + ra. 24, ra. 45 + 6 & ra. 20 + ra. 14.

Secunda uerò, quòd binomium primum & quartum, longiorem portionem rationalem, breuiorem uerò irrationalem: & contra, binomium ſecundum & quintum, breuiorem rationalem, longiorem uerò irrationalem habeant. ut, 18 + ra. 35, eſt binomium primum, 18 + ra. 38, quartum. Sic ra. 48 + 6, ſecundum, ſed ra. 48 + 5, quintum. Ac tertia deinde, quòd binomium tertium & ſextum. neutram portionem rationalem, ſed utramq; irrationalem habeant. ut ra. 60 + ra. 45, quod eſt tertium, at, ra. 60 + ra. 35, ſextum binomium eſt. Atq; ſecundum has differentias nunc facilè erit cuiuis, qualecunq; binomium propoſitum fuerit, cuiuſnam ordinis binomium ſit, indicare.

ET QVIA IAM VNVMQVODQVE BINOMIVM, PER CONSEQVENS ETIAM VNVMQVODqué reſiduum, cuiuſnam ordinis binomium uel reſiduum ſit, intelligi poteſt, ad alterum huius capitis punctum, quomodo ſcilicet ex eis radices quadratæ elici debeant, accedendum erit.

QVòd omne binomium poſsit eſſe radix quadrata alterius cuiuſdam binomij, ex eo perſpici poteſt, quòd aliàs in abſolutis numeris accidere conſueuit, multiplicatione ſcilicet ſui in ſe. Quòd item contrà, omne binomium ſit quadratum, ſeu radicem quadratam habeat, cum Euclides in ſenario decimi libri quarto, cuius initium eſt propoſitio 54: finis uerò 59, ſingulorum binomiorum radicibus propria nomina imponat, niſi hæ inueniri poſſent, ineptè feciſſet, ſi rebus, quæ non ſunt, nomina & appellationes impoſuiſſet. Ex hoc igitur quarto decimi Euclidis ſenario, commodè & uerè infertur, omnia binomia quadrata eſſe, atq; ſic etiam radices quadratas habere, licet de numero abſoluto illud idem non concedatur. Dicit autem Euclides in prima huius ſenarij propoſitione, quod Areolam, hoc eſt, ſpaciũ ſub rationali, atq; ex binis nominibus prima comprehẽſum, potens, Irrationale ſit. Ex binis item nominibus linea una uocetur. Vnde nunc, cum rationale id Vnitas etiam eſſe poſsit, unitas inſuper in quemcunq; numerum, uel quantitatem ducta, eandem producat: rectam lineam, ex binis nominibus primam potentem, hoc eſt, primi binomij tetragonicum latus, binomium eſſe, facile colligitur. Eodem modo ex ſequentibus huius ſenarij propoſitionibus ordine habetur. Secundi binomij radicem quadratam, eſſe lineam irrationalem, atq; Ex binis mediis primã, Tertij: lineam irrationalem, atq; Ex binis mediis ſecundam, Quarti: lineam irrationalem, atq; Maiorem. Quinti uerò: lineam irrationalem, atq; Rationale & medium potentem. Sexti deinde: lineam irrationalem, atq; Duo media potentem. Hæc ille. Et quia iam ſatis conſtat, ſingula binomia radices quadratas habere, hæ quomodo nunc ex ſingulis elici debeant, per canonem quendam generalem tradetur.

PRO ELICIENDIS BINOMIORVM RADICIbus quadratis, canon quidam generalis.

Binomio propoſito, ſubtrahatur minoris quadratum de quadrato nominis maioris, atq; in reſidui quarta parte, ubi radix quadrata quæſita ac inuẽta fuerit, ea medietati maioris nominis adijciatur: & erit eius quod inde colligetur radix quadrata, una inueniendæ radicis portio. Porrò ſi collectũ hoc, de tõto maiori nomine ſubtrahatur, tũ radix reſidui quadrata, alterã portionẽ oſtẽdet. Vtriſq; igitur portionibus per ſignũ + copulatis, tota binomij propoſiti radix quadrata, ſeſe exhibebit.

SEQVVNTVR NVNC PRO SINGVLIS BINOmijs ſingula exempla.

23 + ra. 448 binomium primum,
529 maioris nominis quadratum,
448 minoris nominis quadratum,
81 reliduum, $8\frac{1}{4}$ reſidui quarta pars
$4\frac{1}{2}$ quartæ partis radix, ad $11\frac{1}{2}$ medietatem maioris,
ueniunt 16, collectũ: 4 deinde collecti radix, & una inueniendę radicis portio.
23 totum maius nomen,
16 collectum,
7 reliduum: ra. 7 deinde,
reſidui radix, & altera inueniendæ radicis portio.
Tota igitur binomij propoſiti radix quadrata,
4 + ra. 7, quæ erat inuenienda.

Eſt autem, ut habet propoſitio huius iam commemorati ſenarij prima, linea irrationalis, & Ex binis nominibus una. Quòd porrò ſit uera binomij radix, id multiplicatione ſui in ſe probari poteſt.

ALIA DVO EXEMPLA, DE BINOMIO

ſecundo,	tertio,
ra. 448 + 14	ra. 448 + ra. 336
448	448
196	336
252	112
63	28
ra. 63 ad ra. 112, ueniunt	ra. 28 ad ra. 112, ueniunt
ra. 343, de ra. 448, ma. ra. 7	ra. 252 de ra. 448, ma. ra. 28
ergo √ 343 + √ 7	ergo √ 252 + √ 28

radix quadrata eſt binomij propoſiti.

Linea itẽ irrationalis, & reſpectu quidẽ binomij ſecundi, Ex binis medijs prima, ut habet propoſitio ſecunda. Conſideratione uerò binomij tertij, linea irrationalis, & Ex binis medijs ſecunda, ut habet propoſitio tertia. Quòd porrò ueræ binomiorũ radices quadratę inuentę ſint, id multiplicatione, ut ſequitur, examinari poteſt.

EXAMEN

binomij ſecundi,	binomij tertij,
ra. ra. 343 + ra. ra. 7	√ 252 + √ 28
ra. ra. 343 + ra. ra. 7	√ 252 + √ 28
ra. 343 + ra. 7	√ 252 + √ 28
ra. ra. 2401 uel 7	√ 7056
ra. ra. 2401 uel 7	√ 7056
Summa productorum.	
ra. 448 + 14	√ 448 + √ 336
binomia	propoſita

Aliud

ALIVD EXEMPLVM DE BINOMIO QVARTO.

24 + ra. 448

576 maioris nominis quadratum,
448 minoris nominis quadratum,
128 Residuum,
32, residui quarta pars,

ra. 32, quartæ partis radix, ad 12, medietatem maioris, colliguntur 12 + ra. 32, cuius radix quadrata, Radix binomij 12 + ra. 32, una &cæ. portio.

24, Totum maius nomen,
12 + ra. 32, id quod collectum est,

manet 12 — ra. 32, cuius radix quadrata, quæ est, Radix
residui 12 — √32, portio altera.

Tota igitur binomij propositi radix quadrata est, Radix utriusq; tam scilicet binomij 12 + √32, quàm etiam residui 12 — √32

Est autem linea irrationalis, & Maior uocatur, ut dicit propositio huius senarij quarta. Quòd porrò sit uera propositi binomij radix, multiplicatione, ut sequitur, probari potest.

Radix binomij 12 + √32, et radix resi. 12 — √32
Radix binomij 12 + √32, et radix resi. 12 — √32

12 + √32, + 12 — √32
ra. 112
ra. 112

Summa productorũ 24 + ra. 448, binomium scilicet propositum, bene igitur.

ALIA DVO EXEMPLA DE BINOMIO

quinto,

ra. 448 + 12

448 ma. nominis qua.
144 mi. nominis qua.
304
76
ra. 76 ad ra. 112,
colligitur ra. 112 + ra. 76.

Huius nunc radix quadrata, nimirum radix binomij ra. 112 + ra. 76,
una portio.

ra. 448 Totum ma. no.
ra. 112 + ra. 76. Id quod col.
ma. ra. 112 — ra. 76.

Huius nunc radix quadrata, nimirum Radix residui ra. 112 — ra 76.
pars altera.

Binomij igitur propositi radix est
Radix utriusq; binomij scilicet √112 + √76 & residui √112 — √76

sexto,

ra. 448 + ra. 352

448 ma. no. quadratum
352 mi. no. quadratum
96
24
ra. 24 ad ra. 112,
colligitur ra. 112 + ra. 24.

Huius nunc radix quadrata, nimirum radix binomij ra. 112 + ra. 24
una portio

ra. 448 Totum &cæ.
ra. 112 + ra. 24 Id
ma. ra. 112 — ra. 24.

Huius nunc radix quadrata, nimirum Radix residui ra. 112 — ra. 24
pars altera.

Binomij igitur propositi radix est
Radix utriusq; bino. scilicet √112 + √24 & residu. √112 — √24

Est autem linea irrationalis, & uocatur
Rationale mediumq; potens, Duo media potens,
ut quidem dicit propositio huius senarij
quinta sexta

PROBA BINOMII QVINTI.

Radix binomij $\sqrt{112} + \sqrt{76}$ et ra. residui $\sqrt{112} - \sqrt{76}$

Radix binomij $\sqrt{112} + \sqrt{76}$ et ra. residui $\sqrt{112} - \sqrt{76}$

$\sqrt{112} + \sqrt{76}$ & $\sqrt{112} - \sqrt{76}$

$+ 6$

$+ 6$

Summa productorum ra. 448 + 12, & bene.

PROBA BINOMII SEXTI.

Radix binomij $\sqrt{112} + \sqrt{24}$ et ra. residui $\sqrt{112} - \sqrt{24}$

Radix binomij $\sqrt{112} + \sqrt{24}$ et ra. residui $\sqrt{112} - \sqrt{24}$

$\sqrt{112}$ $\sqrt{24}$ & $\sqrt{112} - \sqrt{24}$

ra. 8

ra. 88

Summa productorum ra. 448 + ra. 352&, bene.

Et hęc quidem de binomiorum radicibus inueniendis dicta sufficiant. Simili modo iam agendum est cum Residuis, cum & ipsa quadrata esse, atq; ita radices quadratas habere, ex propositione 91, & ordine sequentibus quinq; eiusdem decimi Euclidis manifeste pateat. Quare pro ijs eodem modo operatione instituta.

Primi residui, quod est 23 — ra. 448, radix quadrata inuenitur esse, 4 — ra. 7. Est autem & ipsa Residuum, & irrationalis linea, ut habet propositio huius senarij prima. Secundi uerò, quod est ra. 448 — 14, radix quadrata inuenitur, ra. ra. 343 — ra. ra. 7. Quæ est linea irrationalis, & Mediæ residua prima, ex propositione 92. Tertij autem, quod est ra. 448 — ra. 336, radix, quadrata inuenitur, ra. ra. 252 — ra. ra. 28, quæ est linea irrtionalis & Medię residua secunda, ex propositione 93. Quarti deinde, quod est 24 — ra. 448 radix quadrata inuenitur, Radix binomij 12 + ra. 32, minus, radix residui 12 — ra. 32. quę est linea irrationalis, & Minor uocata, ex propositione 94. Quinti itē, quod est ra 448 — 12, radix quadrata inuenitur, Radix binomij ra. 112 + ra. 76, minus radix residui ra. 112 — ra. 76. quę est linea irrationalis, & Cum rationali medium totum conficiens linea, ex propositione 95. Sexti tandem, quod est ra. 448 — ra. 312, radix quadrata inuenitur, Radix binomij ra. 112 + ra. 24 minus radix residui ra. 112 — ra. 24 quę est linea irrationalis, & Cum medio mediū totum conficiens linea, ex propositione huius senarij ultima 96.

Et licet satis iam superque, quomodo ex binomijs, residuis item, radices quadratæ inueniri debeant, traditum sit, ne quid tamen huius artis studiosi habeant, quod conquerantur unius atq; alterius exempli praxim, pro utroq; subiungere placuit. Sit itaq; propositum inuenire radicem quadratam.

ex binomio	ex residuo
$72 - \sqrt{2880}$	$72 + \sqrt{2880}$
5185	5184
2880	2880
2304	2304
576	576
24 ad 36	24 ad 36
ueniunt 60 de 72	ueniunt 60 de 72
manent 12	manent 12
ergo $\sqrt{60} +$ (quia bino.)	ergo $\sqrt{60} -$ (quia resi.)
$\sqrt{12}$, propositi binomij	$\sqrt{12}$, propositi residui.
radix quadrata erit.	

Sic

SIT NVNC PROPOSITVM HARVM INVENtarum radicum, ut quæ sunt binomium & residuum sextum, radices quadratas inuenire.

ra. 60 + ra. 12	ra. 60 — ra. 12
60	60
12	12
48	48
12	12
✓ 12 ad ✓ 15	✓ 12 ad ✓ 15
ueniunt ✓ 15 + ✓ 12	ueniunt ✓ 15 + ✓ 12
de ra. 60	de ra. 60
ma. ✓ 15 — ✓ 12.	ma. ✓ 15 — ✓ 12.
Propositi igitur binomij	Propositi igitur residui
radix quadrata est	
Radix utriusq; binomij scilicet ✓ 15 + ✓ 12 & residui ✓ 15 — ✓ 12.	Radix binomij ✓ 15 + ✓ 12, minus radix re. ✓ 15 — ✓ 12.

SEQVITVR PROBA, INSTITVTA PRO residuo.

radix bi. ✓ 15 + ✓ 12 minus ra. re. ✓ 15 — ✓ 12
radix bi. ✓ 15 + ✓ 12 minus ra. re. ✓ 15 — ✓ 12

✓ 15 + ✓ 12 plus ✓ 15 — ✓ 12
minus ✓ 3
minus ✓ 3

Summa pro. ✓ 60 — ✓ 12 Residuum propositum, bene igitur operatum.

EST PORRO QVIDAM CANON GENERALIS ALIVS, per quem iuxta Algebræ regulas binomiorum & residuorum radices inueniuntur, qui sic se habet.

Binomio uel Residuo aliquo proposito, recipiatur dimidium portionis, uel no minis minoris, maiore deinde portione iuxta Algebræ regulas in duas partes sic diuisa, ut harum multiplicatio, unius scilicet cum altera tantùm, quantùm nimirùm quadratum medietatis minoris fuerit, producat, res peracta erit, cum tandem binomij uel residui propositi radix, per harum partium radices simul collectas, ratione binomij: uel una ab altera subtracta, si residuum propositum fuerit, significetur. Hunc autem canonem infrà, ubi res & similitudo postulauerint, tractabimus.

Hactenus de radicibus, binomiorum & residuorum inueniendis. Ne quis autem terreatur, quòd in hac tractatione decimi libri Euclidis subinde mentionem facimus, cum uidelicet illa sine decimi libri cognitione intelligi nequeant, ac prius cognosci librum hunc oporteat, quàm harum explicatio regularum suscipiatur. Quod ipsum sanè uerum esset, si perfectam & integram horum quis cognitionem requireret, sed tantum de eis intelligere, ut quæ iam sequuntur, planiora sint, etiam si nullas planè adduxissemus propositiones, res satis descripta esset. Quare eas hanc ob caussam solùm propositas à nobis esse existimet quispiã, ut nimirum earum operationes certis rationibus fundari persuasum sibi haberet: ansam deinde etiam, his nunc perceptis, arriperet, subtilius ista exquirendi, cum iam sint aliquo modo descripta, & quodammodo primis lineamentis adumbrata.

Sequuntur

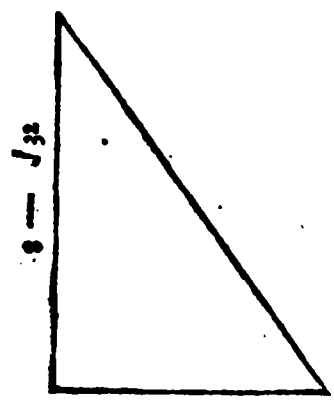
SEQVVNTVR NVNC AD AEQVA-
TIONES SVPRA TRADITAS, AD EA ETIAM quæ hactenus de ſurdis expoſita ſunt, commodius exercenda, exempla alia.

Primum. Eſto triangulum rectangulum, atq; cathetus eius 8 — ⟨/⟩ 32, baſis uerò & hypotenuſa ſimul, 16 — ⟨/⟩ 128, quanta erit utraq; baſis ſcilicet & hypotenuſa, linea ſeorſim, quæritur. Facit

Baſis quidem 6 — ⟨/⟩ 18
Hypotenuſa uerò 10 — ⟨/⟩ 50

OPERATIO.

Cathetus ex hypoteſi, ſunt 8 — ⟨/⟩ 32
Sit autem nunc baſis 1 ra.
Hypotenuſa igitur, erunt 16 — ⟨/⟩ 128 N minus 1 ra.



Et quia quadratum hypotenuſæ in triangulo rectangulo, ex propoſitione 47 primi, quadratis catheti & baſis linearum æquale eſt. Singularum igitur linearum quadratis acceptis, de eo etiam quod ab hypotenuſa deſcribitur, catheti uel baſis, utro uoles, quadrato, ſubtracto, id quod relinquitur, ex communi illa notitia, Si ab æqualibus æqualia ſubtrahantur, &cæ. alterius, baſis quidem, ubi catheti, catheti uerò, ubi baſis quadratum ſubtractum fuerit, quadrato æquale erit.

SEQVITVR NVNC DICTORVM calculus.

8 — ⟨/⟩ 32 N Cathetus
8 — ⟨/⟩ 32
96 — ⟨/⟩ 8192 quadratum

1 radix Baſis
1 ra.
1 pri. quadratum

16 — ⟨/⟩ 128 N minus 1 ra. Hypotenuſa,
16 — ⟨/⟩ 128 N minus 1 ra.
256 + 128 N plus 1 pri.
— ⟨/⟩ 32768 N bis
minus 16 — ⟨/⟩ 128 radi. bis
384 — ⟨/⟩ 131072 N, plus 1 pri. minus 32 — ⟨/⟩ 512 ra.

quadratum hypotenuſæ. A quo primò quadratum catheti, deinde etiam quadratum baſis ſubtrahendum eſt, & relinquuntur tandem,
ratione quidem ſubtractionis prioris,
288 — ⟨/⟩ 73728 N plus 1 pri. minus 32 — ⟨/⟩ 512 ra.
æquales uni primæ,
ratione uerò ſubtractionis poſterioris,
384 — ⟨/⟩ 131072 N minus 32 — ⟨/⟩ 512 ra.
æquales 96 — ⟨/⟩ 8192 N

Et

Et ultimò, iuxta illam communem notitiam, Si æqualibus æqualia adjiciantur, &cæ. Si item ab æqualibus æqualia subtrahantur &cæ. ueniunt.

288 — ⌊ 73728 N æqua. 52 — ⌊ 512 ra.

Est prima æquatio. Diuisione igitur numeri quantitatis debilioris in numerum quantitatis potentioris, radicis ualor cognoscendus: per eum deinde, Basis quantitas exprimenda est.

Quoniam autem huius diuisionis diuidens quantitas est residuum, per suum igitur binomium, quod est 32 + ⌊ 512, alia diuidenda, alia item quantitas diuidens, multiplicatione, inuenienda est, ut sequitur.

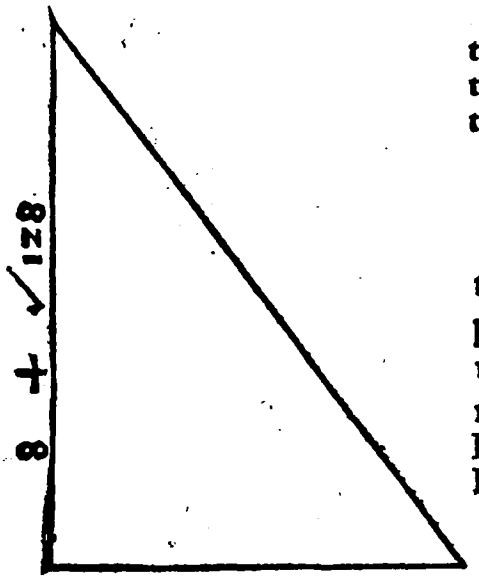
	288 — ⌊ 73728			32 — ⌊ 512	
cum	32 + ⌊ 512		cum	32 + ⌊ 512	
	9216 — ⌊ 6144			1024 — 512	
	— ⌊ 73728				
	+ ⌊ 41472	millies			hoc est,
	3072 — ⌊ 4608	uicies			
		quater			
	Quantitas diuidenda			512 diuidens	

INSTITVATVR NVNC DIVISIO.

Diuidantur 3072 — ⌊ 4608 millies uicies &cæ.

exeunt 6 + ⌊ 18, & tanta est basis quantitas.

in 512 quinquagies decies bis.
256



Et quia iam basis quantitas nota est, quanta hypotenusa sola fuerit, cum hæ duę quantitates simul, ex hypothesi, 16 — ⌊ 128 sint, subtractione manifestabitur

ALIVD EXEMPLVM simile.

Triangulũ esto rectangulum, atq; cathetus eius 8 + ⌊ 128, basis uerò & hypotenusa simul, 16 + ⌊ 512, quanta erit utraq;, basis scilicet & hypotenusa, linea seorsim, quęritur. Facit

Basis quidem 6 + ⌊ 72
Hypote. uerò 10 + ⌊ 200

OPERATIO.

Cathetus, ex hypothesi sunt 8 + ⌊ 128
Sit autem nunc basis 1 radix
Hypotenusa igitur erunt 16 + ⌊ 512 minus 1 ra.
Multiplicatione quærantur quadrata laterum, & erunt
Catheti quidem 192 + ⌊ 32768
Basis uerò 1 pri.
ac hypotenusæ deinde,
768 + ⌊ 524288 N, plus 1 pri. minus 32 — ⌊ 2048

Quare, iuxta penultimam propoſitionem primi,

768 + ⌊ 524288 N, plus 1 pri. minus 32 — ⌊ 2048

æquales 192 + ⌊ 32768 N. + 1 pri.

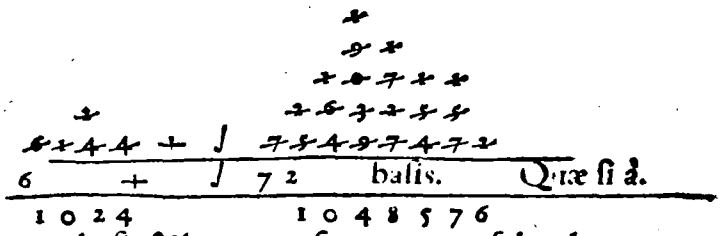
Atq; ultimò tandem, iuxta communes notitias additione & ſubtractione facta, ueniunt

576 + ⌊ 294912 N æqua. 32 + ⌊ 2048 ra.

Eſt autem prima æquatio. Numerus igitur characteris N, tanquam debilioris, in numerum characteris potentioris, ra. diuidendus eſt, ut ſequitur.

Quæratur primò nouus diuidendus, nouus item diuiſor, per multiplicationem utriuſq; cum diuiſoris contrario nomine, reſiduo nimirum ⌊ 2048 — 32.

⌊ 294912 + 576	⌊ 2048 + 32
cum ⌊ 2048 — 32	cum ⌊ 2048 — 32
24576 — 18432	2048 — 1024
— ⌊ 301989888	
+ ⌊ 679477248	
6144 + ⌊ 75497472	1024
Diuidendus	Diuiſor.



6 + ⌊ 72 baſis. Quæ ſi à.

1024 1048576

baſis & hypotenuſæ aggregato ſubtrahatur, relinquuntur 10 + ⌊ 200, hypotenuſæ quantitas, ut ſuprà.

Calculus porrò ſubtractionis præcedentis ſic inſtituatur.

	⌊ 301989888	de	⌊ 679477248
8	37748736		84934656
4	9437184		21233664
	3072	de	4608
	manent 1536 in ſe		
	produ. 2359296		
	communis nu. 32		
	75497472		

Porrò triangulorum areæ ſunt, prioris quidem 36 ⌊ 1152, poſterioris uerò 72 + ⌊ 4608. Id quod ex propoſitione 41 primi, & canone quodam generali, in eodem primo libro expoſito, facile colligetur.

OPERATIO TRIANGVLI PRIORIS per canonem.

Latera	Exceſſus
10 — ⌊ 50	2 — ⌊ 2
8 — ⌊ 32	4 — ⌊ 8
6 — ⌊ 18	6 — ⌊ 18
24 — ⌊ 288	Medietas 12 — ⌊ 72

12 — ⌊ 128 primum, 108 — ⌊ 10368 ſecundum,

2448 — ⌊ 5971968 tertium productum.

Huius

Huius igitur radice ut sequitur quæsita,

2448 — ⌊ 5971968.

5992704 maioris quadratum,
5971968 minoris quadratum,
20736 residuum,
5184 residui quarta pars,
72 quartæ partis radix, ad 1224,
ueniunt 1296, unius portionis quadratum, de 2448
manent 1152, alterius portionis quadratum.

Radix igitur, ac per consequens trianguli propositi area, 36 — ⌊ 1152

OPERATIO TRIANGVLI ALTERIVS.

Latera	Excessus
10 + ⌊ 200	2 + ⌊ 8
8 + ⌊ 128	4 + ⌊ 32
6 + ⌊ 72	6 + ⌊ 72
24 + ⌊ 1152	Medietas 12 + ⌊ 288

24 + ⌊ 512 primum 216 + ⌊ 41472 secundum

Porrò 9792 + ⌊ 95551488, tertium productum. Atq; area deinde trianguli 72 + ⌊ 4608, id quod sequenti calculo manifestabitur.

9792 + ⌊ 95551488

95883264 maioris 95551488 minoris quadratum,
331776 residuum, 82944 residui quarta pars,
288 quartæ partis radix, ad 4896,
ueniunt 5184 unius portionis, &cæ. de 9792,
manent 4608, alterius portionis quadratum, quare
72 + ⌊ 4608 radix binomij, &cæ.

EXEMPLVM SECVNDVM.

Sunt 12 diuisa in duas partes. Quoniam autem partium multiplicatio, unius quidem cum altera, 20 uel 28 producit, quanta erit utraq; pars?

			minor	maior
Facit quantum ad	20	sunt	2	10
	28		6 — ra. 8,	6 + ra. 8

Tertium. Sunt 12 diuisa in partes duas. Quoniam autem partium quadrata simul 90 uel 100 faciunt, partes igitur quantæ sunt?

Respondetur respectu

			minor	maior
quidem	90	sunt	3	9
uerò	100		6 — ⌊ 14,	6 + ⌊ 14.

SEQVITVR OPERATIONIS EXAMEN.

Sumantur numeri ſecundò inuenti,

6 — ⌊ 14 minor 6 + ⌊ 14 maior

6 — ⌊ 14 6 + ⌊ 14

36 + 14 36 + 14

100. & bene.

Quartum. Numerus in duo diuiſus eſt, quoniam autem partium differentia ſunt 6, qui uerò ex multiplicatione unius cum altera producitur numerus, 27 uel 36, quantus ſit ipſe diuiſus, quantę deinde etiam partes, quæritur. Facit

diuiſus quidem 12 uel ra. 180

Partes deinde, reſpectu

		minor	maior
quidem	27	3	9
uerò	36	ra. 45 — 3	ra. 45 + 3

Vel, qui uerò ex partium quadratis colligitur numerus, 50 ſunt, uel 72, quantus &cę.

Facit diuiſus quidem 8 uel ra. 108

Partes uerò, reſpectu

		minor	maior
quidem	50	1	7
uerò	72	ra. 27 — 3	ra. 27 + 3

OPERATIO PARTIS PRIORIS, QVANTVM ad multiplicationem partium,

ponatur	1 ra.		totus diuiſus.
Et quia	6 N,		partium differentia, ex hypotheſi,
erit	½ ra. — 3 N		minor,
&	½ ra. + 3 N		maior pars.

Quare quantum ad multiplicationem, uenit

¼ pri. — 9 N æqual. 27 uel 36 N.

Quantum uerò ad partium quadrata, uenit

½ pri. + 18 N æqual 50 uel 72 N.

ALITER INSTITVTA HVIVS EXEMPLI operatio.

Quærantur primò partes, deinde etiam ipſe totus numerus. Sit itaque

1 ra. maior, uel 1 ra. minor,

1 ra. — 6 N pars minor, 1 ra. + 6 N maior.

uenit

uenit, multiplicatione facta,

ratione quidem
- productorum, 1 pri. 6 ra. æqual. 27, uel 36 N.
- 1 pri. + 6 ra.
- quadratorum uerò, 1 pri. æqua. 6 ra. + 7 N, uel + 18 N.
- 1 pri. + 6 ra. æqual. 7, uel 18 N.

EXEMPLVM QVINTVM.

Sunt 12, uel 19 diuisa in duas partes.

Quoniam autem una parte cum altera multiplicata, producto deinde in partium differentiam diuiso: $17\frac{1}{2}$ exeunt, quantę partes sint, quęritur.

	maior	minor pars.
Facit	7	5
	ra. $396\frac{1}{2}$ — 8	27 — ra. $396\frac{1}{2}$

Vel, Quoniam autem partium quadrata simul iuncta, atq; id quod colligitur, in partium differentiam diuisum: 37 exeunt, quantę partes sint quęritur.

	maior	minor pars
Facit	7	5
	28 — ra. 252,	ra. 252 — 9

OPERATIO PARTIS PRIORIS.

1 ra.	Maior,	uel	1 ra.	Minor,
12 N — 1 ra.	minor.		12 N — 1 ra.	maior.
12 ra. — 1 pri.	produ.		12 ra. — 1 pri.	productum,
2 ra. — 12 N	differentia		12 N — 2 ra.	differentia.

AEQVATIO IGITVR

$\frac{12 \text{ ra.} - 1 \text{ pri.}}{2 \text{ ra.} - 12 \text{ N}}$ æqua. $17\frac{1}{2}$ N $\quad \frac{12 \text{ ra.} - 1 \text{ pri.}}{12 \text{ N} - 2 \text{ ra.}}$ æqua. $17\frac{1}{2}$ N

SIC ETIAM INSTITVATVR OPERATIO cum numero 19, & uenit

1 pri. + 16 ra.	1 pri. + $332\frac{1}{2}$ N
æquales $332\frac{1}{2}$ N	æquales 54 ra.

Posterioris partis operatio ex priore nunc est facilis.

EXEMPLVM SEXTVM.

Sunt tres numeri, quorum primus cum aliquo alio, quarto scilicet, ad reliquos duos simul sumptos, sit $\frac{1}{3}$. Secundus uerò cum eodem quarto, ad reliquos, sit in ratione $\frac{1}{5}$. Ac tertius deinde, & ipse cum eodem quarto numero, reliquis duobus æqualis sit. cum sic ille quartus numerus, ex hypothesi, 8 esse ponatur, quanti nunc hi tres numeri esse debeant, quęritur.

	Primus,	secundus,	& tertius numerus.
Facit	24	40	56

OPERATIO.

Primus	ſecundus & tertius.	Quartus alius,
Ponatur 1 radix,	& erunt 3 ra. + 24 N,	atq; 8.

Et quoniam ſecundus cum dato, tertij & primi numerorum tres quintæ ſunt: tota igitur omnium ſumma ad eoſdem, tertium & primum, numeros, in ratione, ut 8 ad 5, uel octo quintæ erunt. Per regulam ergo proportionum, dicendo 8 dant 5, quid 4 ra. + 32 N: primi & tertij numerorum ſumma manifeſtabitur. Quoniam autem primus numerus notus eſt, cum is ſit 1 radix poſita, eodem primo de hac ſumma ſubtracto: tertius, hoc tertio deinde de tertij & ſecundi numerorum ſumma ſubtracto: ſecundus etiam numerus manifeſtabitur. Ponuntur itaq; numeri ſinguli ſeorſim ſic.

Primus	ſecundus	tertius	quartus.
1 ra.	$1\frac{1}{2}$ ra. + 4 N	$1\frac{1}{2}$ ra. + 20 N	8

Et quoniam etiam tertius cum quarto numeris primo & ſecundo æqualis eſt, tertius igitur quarto, ſecundus uerò numero primo additus, quæ colliguntur,

$1\frac{1}{2}$ ra. + 28 N & $2\frac{1}{2}$ ra. + 4 N

inter ſe æquales erunt. Radix igitur, hoc eſt, primus numerus 24, ſecundus 44, & tertius 56 uenient, quod probari poteſt.

Septimum. Sunt tres numeri, quorum primus cum aliquo alio, quarto ſcilicet, ad reliquos duos ſimul ſumptos: ſeſquialteram, ſecundus uerò cum eodem quarto ad reliquos: ut 3 ad 5. ac tertius deinde, & ipſe cum eodem quarto numero: æqualitatis rationem conſtituit, cum ille quartus numerus iuxta propoſitum 9 uel 24 aut unitas eſſe ponatur, quanti hi tres numeri eſſe debeant, quæritur.

Facit, quantum ad numerum

		Primus	ſecundus	tertius
9 .		$13\frac{14}{19}$	$5\frac{4}{19}$	$9\frac{18}{19}$
24 .		$36\frac{12}{19}$	$13\frac{17}{19}$	$26\frac{10}{19}$
unitatẽ .		$1\frac{10}{19}$	$0\frac{11}{19}$	$1\frac{2}{19}$

Octauum. Diuidantur 132 in tres partes ſic, ut prima multiplicata per 3, producat tres quartas minus 3, ſecundæ partis diuiſæ in 2, Et iterum prima multiplicata per 4, producat tres quintas minus 1, tertiæ partis diuiſæ in 7, quæritur, &cæ.

	prima	ſecunda	tertia pars
Facit	2	24	105

OPERATIO.

Eſto prima pars 1 radix, hæc multiplicata per 3, producuntur 3 ra. Et quoniam hæ ex hypotheſi, in ternario minus ſunt, quàm tres quartæ partis ſecundæ, diuiſæ in duo, hoc eſt, quàm tres quartæ dimidij ſecundæ partis, ad 3 ra. igitur 3 N addendi, eius deinde quod colligitur, (cum illud tres quartæ tantũ ſint) integrum regula proportionum, dicendo $\frac{3}{4}$ ſunt 3 ra. + 3 N, quid unum, quærendum eſt. Veniunt autem ſic 4 ra. + 4 N, ipſum integrũ, ac per conſequens, ſecunda pars in duo diuiſa. eodẽ igitur integro bis ſumpto, ſecunda pars, 8 ra. + 8 N erunt.

Non

Non aliter iuxta exempli hypotheſes, & tertia pars quærenda erit. Quo facto, partes erunt.

Prima 1 ra. ſecunda 8 ra. + 8 N
Tertia $46\frac{2}{3}$ ra. + $11\frac{2}{3}$ N, Atq;
ultimò tandem $55\frac{2}{3}$ ra. æqua. $111\frac{1}{3}$ N.

Nonum. Diuidantur 36 in tres partes ſic, ut prima multiplicata per 6, producat ſeſquialterum plus 9, ſecundę partis diuiſę in 5. : et ſecunda diuiſa in 8, ſtatuat ſeſquiquartum minus 4, tertię partis multiplicatę per 3, quęritur &cę.

Facit $3\frac{14}{325}$ $30\frac{56}{65}$ $2\frac{31}{325}$

PONITVR AD OPERATIONEM SIC.

Prima 1 ra.
ſecunda 20 ra. — 30 N
tertia 10 ra. + 1 N
15

Summa partium $21\frac{2}{3}$ ra — $29\frac{14}{15}$ N æqua. 36 N.

Eodem modo 45 in tres partes diuiſa,

	Prima	ſecunda	tertia
exeunt partes	$3\frac{149}{325}$	$39\frac{11}{65}$	$2\frac{121}{325}$

Id quod probari poteſt, ut ſequitur.

Prima	ſecunda pars
$3\frac{149}{325}$	$39\frac{11}{65}$
cum 6	in 8
$20\frac{244}{325}$	$4\frac{233}{260}$
minus 9	plus 4
$11\frac{244}{325}$. Dic	$8\frac{233}{260}$. Dic
3 dant $11\frac{244}{325}$, quid 2,	5 dant $8\frac{233}{260}$, quid 4
Facit $\frac{2546}{325}$	Facit $\frac{2313}{325}$
cum 5	in 3
produ. $39\frac{11}{65}$, ſecunda	exeunt $2\frac{121}{325}$, tertia pars. bene igitur.

Decimum. Propoſitumeſt, numerum 6, 12, 8 uel 21, ſeu quemcunq; alium numerum, diuidere in duas portiones, quarum maioris quadratum tantum faciat, quantum numerus ipſe, cum ſua portione minore multiplicatus, producit.

Facit ratione numeri

	Maior	minor portio
6,	ra. 45 — 3	9 — ra. 45
12	ra. 180 — 6	18 — ra. 180
8	ra. 80 — 4	12 — ra. 80
21	ra. $551\frac{1}{4}$ — $10\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$ — ra. $551\frac{1}{4}$

Similem

Similem diuisionem lineæ alicuius datæ proponit Euclides in secundo, per undecimam: in sexto deinde, per propositionem 30, quod obiter indicare libuit.

OPERATIO NVMERI VNIVS, 6 SCILICET,

sit instar omnium. Esto itaq;

1 ra. maior, uel 1 ra. minor,

erunt 6 N — 1 ra. minor. 6 N — 1 ra. maior.

Quadrata deinde portionum maiorum,

1 pri. 36 N — 12 ra. + 1 pri.

Producta uerò, &cæ.

36 N — 6 ra. 6 ra.

Atq; tandem æquatio ultima,

1 pri. + 6 ra. æqua. 36 N, uel 1 pri + 36 N æqua. 18 ra.

Procedatur nunc secundum canones secundæ æquationis primum & tertium, & ueniet ut positum

SEQVITVR PROBA INSTITVTA PRO numero primo 6.

54 — ⌊ 1620

Totus	Maior portio	minor
6	ra. 45 — 3	9 — ra. 45

Iungē,

54 — ⌊ 1620

PROPONVNTVR HVIVSMODI EXEMPLA etiam sic.

Diuidantur 24 in duas portiones inæquales, ut, cum maiorem in seipsam, totum uerò numerum 24 cum minore portione multiplicauero, æquales numeri producantur, Facit

Maior & Minor portio

ra. 720 — 12 & 36 — ra. 720

In hunc modum radice numeri 48 diuisa,

exeunt partes, Maior quidem ra. 60 — ra. 12, minor uerò ra. 108 — ra. 60, quod probari potest.

Vndecimū. Et quia numero in duas portiones diuiso, quarū maioris quadratū tantū faciat, quantū totus diuisus numerus cū minori sua portione multiplicatus producit, quantus fuerit ipse totus numerus, minor item portio, cum maior portio ex hypothesi sit ra. 80 — 4, uel ra. 45 — 3

quæritur. Facit { 8 / 6 } totus { 12 — ra. 80 / 9 — ra. 45 } minor portio.

OPERATIO.

Totus	Maior	Minor portio.
	⌊ 80 — 4	⌊ 80 — 4
1 ra.	quare 1 radix, minus	
	⌊ 45 — 3	⌊ 45 — 3

Atq;

Atq; facta multiplicatione, ueniunt

$96 - \sqrt{5120}$ N, æqua. 1 pri. minus $\sqrt{80} - 4$ ra.
$54 - \sqrt{1620}$ $\sqrt{45} - 3$

Vel ex communi quadam notitia,

$\sqrt{80} - 4$ ra. + $96 - \sqrt{5120}$ N, æqua. 1 pri.
$\sqrt{45} - 3$ $54 - \sqrt{1620}$

Est autem exemplum canonis æquationis secundæ secundi, atq; eius solutio talis.

Quantitates æquationis quantum ad primum, sunt

Media	minima	maxima quantitas
$\sqrt{80} - 4$ ra. +	$96 - \sqrt{5120}$ N	æqua. 1 pri.

$\sqrt{20} - 2$, in se, $24 - \sqrt{320}$, plus $96 - \sqrt{5120}$ ueniunt $120 - \sqrt{8000}$. Huius radix sunt $10 - \sqrt{20}$ plus $\sqrt{20} - \sqrt{2}$ &cæ.

Cum quantitatibus æquationis secundi, eodem modo operatione instituta, æquè etiam feliciter succedet.

EXEMPLVM DVODECIMVM.

Duobus numeris inæqualibus, 34 & 30 datis, propositū est, maiorem in duas portiones ita diuidere, ut inter eas medietas minoris sit medio loco proportionalis. uel, quod idē est, ut qui sub portionibus, una cum altera multiplicata, continetur numerus, æqualis sit quartæ parti quadrati, numeri minoris,

Facit 25. & 9.

OPERATIO.

Maior	Minor	Medietas minoris
34	30	15

Quantitates ex hypothesi proportionales

ra.	15	34 N — 1 ra.
quare 34 ra. — 1 pri.	æqua.	225 N &cæ.

ALIA HVIVS DIVISIONIS EXEMPLA.

Numeri propositi maior,	minor	Medietas minoris	Partes diuisionis	
117	108	54	81	36
65	56	28	49	16
49	27	$13\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{2} + \sqrt{418}$	$24\frac{1}{2} - \sqrt{418}$
30	18	9	27	3
25	24	12	16	9
13	12	6	9	4
5	4	2	4	1
$8\frac{1}{3}$	8	4	$5\frac{1}{3}$	3
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{17}{576}}$	$\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{17}{576}}$

Posuimus huius diuisionis exempla plura, cum eorum usus in decimo Euclidis libro requiratur.

NVNC PRO RADICIBVS BINOMIORVM ET RESIDVORVM INVENIENDIS, CVM eadem sit illas eliciendi, quæ est propositæ diuisionis, operatio, unum atq; alterum exemplum subijciemus.

Sit binomium ra. 448 + 14, uel residuum ra. 448 — 14, atq; propositum, radicem eius quadratam elicere.

OPERATIO.

Duæ huius binomij uel residui portiones, seu nomina inæqualia,

maius minus medietas, mi.

sunt ra. 448 & 14, atq; 7.

Quantitates proportionales,

1 radix • 7 ℒ 448 N — 1 ra.

Facta multiplicatione, uenit

ℒ 448 radicum — 1 pri. æqua. 49 N

Vel, ex communi illa notitia, Si æqualibus æqualia addantur,

ℒ 448 radi. æqua. 1 pri. + 49 N.

Est autem exemplum canonis tertij æquationis secundæ, atq; eius solutio, ut sequitur.

Numerus characteris medij ℒ 448, huius dimidium ℒ 112, dimidij uerò huius quadratū 112, minus 49, manent 63, cuius radix quadrata, ℒ 63, de medietate radicū, ℒ 112, subtracta, uel ei addita, colligitur hic quidē ℒ 343, una desideratæ radicis portio, manet uerò illic ℒ 7, portio altera. Et quia est binomiū propositū: per radices portionum aggregatas, ut ✓ 343 + ✓ 7, Binomij, uel, quia est residuum propositum: per id quòd relinquitur, postquam minoris radix de radice portionis maioris subtracta est, nimirum ✓ 343 — ✓ 7, residui propositi radix indicabitur, id quod examinari poterit.

SEQVVNTVR HVIVS REI DVO EXEMPLA alia, unum quidem pro binomio tertio, alterum uerò pro sexto residuo expositum.

Binomium tertium ℒ 448 + ℒ 336

Maius minus nomen Minoris me.

ℒ 448 ℒ 336 ℒ 84

Quantitates proportionales

1 radix ℒ 84 • ℒ 448 N — 1 radice.

Facta multiplicatione, uenit ultimò

ℒ 448 radicum æqua. 84 N + 1 pri.

ℒ 112 in se, 112, minus 84, manent 28. Huius radix quadrata, ℒ 28, de ℒ 112 subtracta, uel ad ℒ 112 addita, manet ℒ 28, uel uenit ℒ 252. Harum partium radices simul iunctæ, ut ✓ 252 + ✓ 28. Binomij, radice uerò unius de alterius portionis radice subtracta: per id quod relinquitur, nimirum ✓ 252 — ✓ 28, Residui propositi radix indicabitur.

Residuum

Reſiduum ſextum $\sqrt{448} - \sqrt{352}$

Maius	minus nomen	Minoris medietas
$\sqrt{448}$	$\sqrt{352}$	$\sqrt{88}$

Quantitates proportionales,

1 radix	$\sqrt{88}$	$\sqrt{448}$ N — 1 ra.

Facta multiplicatione, uenit ultimò

$\sqrt{448}$ radicum æqua. 88 N + 1 pri.

atq; partes deinde,

maior quidem	minor uerò
$\sqrt{112} + \sqrt{24}$	$\sqrt{112} - \sqrt{24}$

Totius tandem reſidui radix,

Radix binomij $\sqrt{112} + \sqrt{24}$ minus ra. reſidui $\sqrt{112} - \sqrt{24}$

Nominis uerò contrarij, Binomij ſcilicet, radix eſt

Radix utriuſq;, hoc eſt,

& binomij $\sqrt{112} + \sqrt{24}$, atq; etiam reſidui $\sqrt{112} - \sqrt{24}$.

EXEMPLVM DECIMVM TERTIVM.

Diuidantur 10 in duas portiones, quarum una cum altera multiplicata, 15, 20, 24, 1 uel $\frac{3}{4}$, &cę. producuntur.

Facit ratione nume.

ri	maior portio	minor portio
15,	$5 + \sqrt{10}$	$5 - \sqrt{10}$
20,	$5 + \sqrt{5}$	$5 - \sqrt{5}$
24,	6	4
1,	$5 + \sqrt{24}$	$5 - \sqrt{24}$
$\frac{3}{4}$,	$5 + \sqrt{24\frac{1}{4}}$	$5 - \sqrt{24\frac{1}{4}}$.

OPERATIO.

Sit 1 radix, una, & 10 N — 1 ra. altera portio.

Et ueniunt facta multiplicatione,

10 ra. — 1 pri. æqua. 15, 20, 24, &cæ. N.

Decimum quartum. Sint tres numeri, & eſto quòd primus cum 6, ſecundi $\frac{2}{3}$: ſecundus uerò cum 4, ipſum tertium bis, & eius $\frac{1}{4}$: ac tertius deinde minus 9, primi numeri tres quartas contineat, quęritur de numeris.

	Primus	ſecundus	tertius
Facit	$48\frac{1}{3}$	$81\frac{1}{2}$	38

OPERATIO.

1 ra. Pri. $\frac{3 \text{ ra.} + 81 \text{ N}}{2}$ ſecun. $\frac{6 \text{ ra.} + 52 \text{ N}}{9}$ Ter.

quare $\frac{6 \text{ ra.} - 29 \text{ N}}{9}$ æqua. $\frac{2}{3}$ ra.

Decimum quintum. Detur numerus quadratus, cuius radicis quadruplo 21 additis, quod inde colligitur, ad ipſum quadratum ſe habeat in ratione $3\frac{2}{3}$ uel $2\frac{1}{4}$, uel ęqualitatis, &cæ. quęritur.

Facit 9, uel $10\frac{74}{81} + \sqrt{31\frac{6529}{6561}}$, uel 49.

OPERATIO.

1 radix 1 pri. 4 ra. + 21 N.

Proportionalitates.

4 ra. + 21 N ad 1 pri. ut { 11 ad 3 ; 9 ad 4 ; 1 ad 1. }

Multiplicatione facta, ueniunt

12 ra. + 63 N
16 ra. + 84 N æquales { 11 pri. ; 9 pri. &cæ. ; 1 pri. }
4 ra. + 21 N

SEQVITVR HVIVS EXEMPLI EXAMEN.

Sumatur ad examinandum numerus secundus.

$10\frac{74}{81} + \sqrt{31\frac{656}{6561}}$

Huius radix quadrata, $\sqrt{6\frac{20}{81}} + \frac{8}{9}$, quater sumpta, uenit $\sqrt{161\frac{79}{81}} + 3\frac{5}{9}$

Additis 21, colliguntur $\sqrt{161\frac{79}{81}} + 24\frac{5}{9}$. Et quoniam hæc summa ad ipsum quadratum, $10\frac{74}{81} + \sqrt{31\frac{656}{6561}}$, se, ut positum est, habere debet, sicut 9 ad 4. Facta igitur multiplicatione primæ cum quarta, secundæ deinde cum quantitate uel numero tertio, cum idē numerus, nimirum, $\sqrt{2591\frac{49}{81}} + 98\frac{7}{9}$, utrinq; producatur: quòd hoc inuento numero, exemplo satisfactum sit, ex posteriori parte propositionis decimæ sextæ sexti Euclidis tandem infertur. Vel, facta igitur diuisione utriusq; antecedentis in suum consequens, cum æquales inter se sint numeri exeuntes: similes etiam rationis numeros, summam scilicet, quadratum, 9 & 4, esse constabit. Est autem communis exiens $2\frac{1}{4}$.

Decimum sextum. Sunt tres numeri, primus quidem ad ipsum tertium, triplus: secundus uerò ad eundum tertium, ut 3 ad 4. Quoniam autem 6 de primo subtractis, tribus uerò secundo numero additis, ac residuo deinde cum collecto multiplicato: nouencuplus, uel quadruplus sesquitertius, ad tertium numerum producitur. Quanti igitur illi tres numeri singuli seorsim sint, in dubium uenit.

Facit, quantum ad rationem

	Primus	secundus	tertius,
nouen.	12	3	4
$4\frac{1}{3}$ uerò,	$\sqrt{\frac{5833}{81}} - \frac{1}{9}$,	$\sqrt{\frac{5833}{1296}} - \frac{1}{36}$,	$\sqrt{\frac{5833}{729}} - \frac{1}{27}$

OPERATIO.

Primus 1 ra. 1 ra. — 6 N residuum
secun. $\frac{1}{4}$ ra. $\frac{1}{4}$ ra. + 3 N collectum
tertius $\frac{1}{3}$ ra. Facta multiplicatione,

producitur $\frac{1}{4}$ pri. + $1\frac{1}{2}$ ra. — 18 N æqua. 3 uel $1\frac{1}{2}$ ra.

Et ultimò tandem in integris

1 pri. æquales 6 ra. + 72 N.
9 pri. + 2 ra. æquales 648 N.

Quare radicis ualor, & primus numerus 12. uel $\sqrt{72\frac{1}{81}} - \frac{1}{9}$, ut dictum est. Secundum porrò & tertium dat ipsa positionis solutio.

SEQVITVR ALIA HVIVS EXEMPLI POSITIO.

Primus 4 4 ra. — 6 N residuum
secundus 1 ra. 1 ra. + 3 N collectum
tertius $1\frac{1}{3}$ ra.

Facta multiplicatione, ueniunt ultimò

4 pri. æquales 6 ra. + 18 N
4 pri. + $\frac{2}{3}$ ra. æquales 18 N

Adhuc

ADHVC ALIA POSITIO.

Primus 3 — 3 ra. — 6 N reſiduum
ſecun. $\frac{3}{4}$ — $\frac{3}{4}$ ra. + 3 N collectum
tertius 1 ra. Facta multiplicatione, ueniunt ultimò,
$2\frac{1}{4}$ pri. æquales $4\frac{1}{2}$ ra. + 18 N
$2\frac{1}{4}$ pri. + $\frac{1}{6}$ ra. æquales 18 N

SEQVITVR NVNC OPERATIONIS EXAMEN.

Sumantur ad examinandum numeri inuenti ſecundò, qui ſunt

$\sqrt{\frac{5833}{81}} - \frac{1}{9}$, $\sqrt{\frac{5833}{1296}} - \frac{1}{36}$, $\sqrt{\frac{5833}{729}} - \frac{1}{27}$

Primò diuidatur numerus primus in 3, uel ſi placet, multiplicetur tertius cum 3: & apparebit, primum numerum ad tertium triplum eſſe, id quod eſt ex hypotheſibus primum. Quærantur deinde tres quartæ tertij, uel ad ipſum ſecundū addatur ſui una tertia. Et quoniā hic, tertius: illic uero, numerus ſecūdus apparet: & id quod in exemplo dicitur, nimirum, ſecundum ad tertium tres quartas eſſe, apparebit. Subtrahantur ultimò 6 de primo, 3 uerò ad ſecundum numerum addantur. Et quoniam reſiduo cum collecto, tertio deinde numero cum $4\frac{1}{2}$ multiplicato, æquales numeri producuntur, cum ſic tandem omnes exempli hypotheſes hi numeri habeant, eos ueros eſſe nemo dubitet.

DECIMVM SEPTIMVM.

Deſideratur quadratus numerus, cuius $\frac{2}{3}$ ductę in ſe, producant duodecuplum radicis, uel radicis uigincuplum.

Facit 9, uel ra. cubica 2025.

OPERATIO.

1 ra. 1 pri. $\frac{2}{3}$ pri. in ſe, producuntur $\frac{4}{9}$ tertiæ quantitatis
æqua. 12 uel 20 radicibus.

Decimum octauum $\frac{1}{24}$ quadrati ducta in ſe, producit triplum, uel ſeptencuplum radicis, quæritur &cæ.

Facit numerus 12 uel $\sqrt{}$ 4032
quadra. 144 $\sqrt{}$ 16257024

Examen numeri ſecundi.

Numerus uel quadrati radix eſt $\sqrt{}$ 4032,
quadratum uerò ipſum $\sqrt{}$ 16257024
Porrò huius quadrati $\frac{1}{24}$ pars $\sqrt{}$ 1176
in ſe multiplicata, producuntur $\sqrt{}$ 1382976.

Atq; tantundem etiam producitur, ipſa radice, $\sqrt{}$ 4032, cum 7 multiplicata. Quare bene operatum.

Decimum nonum. Sunt duo numeri. Quoniam autem quadratum prioris ad poſteriorem, $1\frac{1}{3}$: poſterioris contrà ad numerum priorem: $4\frac{1}{2}$ rationem conſtituit, quinam illi duo numeri ſint, quæritur.

Facit, 2: numerus prior, 3 uerò: poſterior.

VICESIMVM.

Numerus 12 in duo diuiſus eſt,
Quoniam autem ex multiplicatione totius cum differentia, & minoris quadrato: 64 colliguntur, Vel,
Quoniam autem ex multiplicatione totius cum differentia, & maioris quadrato: 112 colliguntur, Vel,

Quoniam autem quadrata partium, & quod ex multiplicatione totius cum differentia colligitur: 128 constituunt, Vel

Quoniam autem hęc duo simul, quod scilicet ex multiplicatione totius cum differentia, quodcp ex una parte cum altera multiplicata producitur: 80 constituunt, &cę.

Partes diuisionis quantæ erunt? Facit 8 & 4

OPERATIO.

Totus numerus 12

1 ra. maior	uel	1 ra. minor
12 N — 1 ra. mi.		12 N — 1 ra. ma.
2 ra. — 12 N differentia.		12 N — 2 ra. diffe.
Productum ex toto cum diff. 24 ra. — 144 N.		144 N — 24 ra.
Minoris quadratum 144 N + 1 pri. — 24 ra.		1 pri.
Maioris quadratum 1 pri.		144 N + 1 pri. — 24 ra.
Productum ex una parte, cum altera multiplicata,		12 ra. — 1 pri.

Aequationes,

Prima	uel	
1 pri. æqua. 64 N	1 pri. + 80 N æqua.	24 ra.
Secunda	uel	
1 pri. + 24 ra. æ. 256 N.	1 pri. + 176 N æqua.	48 ra.
Tertia	uel	
1 pri. æqua. 64 N.	1 pri. + 80 N æqua.	24 ra.
Quarta	uel	
1 pri. + 224 N æqua. 36 N	1 pri. + 12 ra. æqua.	64 N

ARITHMETICA PROBLEMATA EX 1. LIB. GRAECORVM EPIGRAM.

Πρῶτον.

Παλλὰς ἐγὼ τελέθω σφυρήλατος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Ἀιζηῶν φίλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
ἥμισυ μὲν χρυσοῖο χαρίσιος, ὀγδοάτῳ δὲ
Θέσπις, ἐ δεκάτῳ μοῖραν ἔθηκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐφορσήν Θεμίσων, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα, καὶ τέχνη, δῶρον Ἀριστοδίκου.

DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM ILLA AVri talenta appendit.

Pallas ego sum, malico hunc in modum fabrefacta: sed aurum munus est iuuenum, qui in studio uersantur poetices. dimidiã quidem auri partem: cõtulit Charisius, octauam uerò: Thespis, decimam dehinc: Solon, & uigesimam: Themison. Reliqua autem nouem & mercedem item quę artifici debebatur pro opera, contulit Aristodicus.

Quæstio hinc oritur de toto ipsius statuæ pondere.

Facit 40 talen.

Quantum etiam auri ad hanc fabricandam singuli tribuerint.

Facit Charisius 20, Thespis 5
Solon 4 Themison 2 talenta.

Præterea 9 talenta reliqua, ut ponitur, munus est Aristodici.

Operatio

OPERATIO.

Ponatur pondus auri,

	fuisse,	1 radix talentorum
cuius	Charisius	$\frac{1}{2}$ ra.
	Thespis	$\frac{1}{8}$ ra.
	Solon	$\frac{1}{10}$ ra. dedit
	Themison	$\frac{1}{20}$ ra.
	Aristodicus	9 talenta.

Summa partium & 9 talentorum,

sunt $\frac{31}{40}$ ra. + 9 N, æquales radici positæ,

Est prima æquatio, hinc radicis ualor, pondus scilicet auri, 40 talentorum. Porrò quantum singuli, ad hanc statuam extruendam, contulerint, ex ipsa positionis solutione, iuxta radicis ualorem, facile cognoscitur.

Δεύτερον.

Αυγείην ἱρίεινε μέγα σθένος Αλκείδαο.
Πληθὺν βουκολίων ἀρχήμυν Θ', ὅς δ' ἀπάμερπτο,
Αμφὶ μὲν Αλφειοῖο ῥοὰς φίλΘ' ἥμισυ τῶν ἦ,
Μοίρη δ' ὀκταβάτη ὄχθον κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτη δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' οὖρον,
Αμφὶ δ' αὖ Ηλίδα δῖαν ἰκνεῖται νεμέθοντες.
Αυτὰρ ἐγὼ Αρκαδίην ξυνοσὴν πολέλοιπα,
Λοιπὰς δ' αὖ λεύασσε ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

DE ANGEAE ARMENTIS, QVOTNAM boues fuerint.

Augeam interrogauit generosus Hercules, de multitudine armentorum. cui ille respondit: Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum pascitur: octaua autem, circa Saturni collem: Cęterum duodecima, procul hinc iuxta loca Taraxippi extrema: at uigesima eorum pars, circa Elidem pascitur: trigesimam uerò in Arcadia ego reliqui: reliqua autem, quinquaginta numero armenta, uideas ipse. Quæritur:

Facit 240.

OPERATIO.

Ponatur boues fuisse		1 radix
circa	Alpheum igitur fluuium sunt	$\frac{1}{2}$
circa	collem Saturni	$\frac{1}{8}$
iuxta	Taraxippi extremum	$\frac{1}{12}$ ra.
circa	Elidem montem	$\frac{1}{20}$
in	Arcadia	$\frac{1}{30}$

Summa partium unà cum 50 bobus
sunt $\frac{19}{24}$ ra. + 50 N æqua. radici positę.

Est prima æquatio, atq; radicis ualor, armentorum scilicet numerus, 240.
Porrò quot nunc in singulis locis uagentur boues, quiuis ex positionis solutione facile cognoscet.

Τρίτον.

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δισσὰ
Καὶ στόμα ζωὴ δὲ βίναξ δεξιτόρροιο ποδός.
Πλήθῃ ὑγρατῆρα δυσὶ ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τρισσοῖς, ἓξ πισύρεσσι βίναξ.
Ἄρκιον ἐξ ὥραις πλῆσαι στόμα. ἐν δ' ἅμα πάντα,
Καὶ στόμα, καὶ γλῆναι, καὶ βίναξ, εἰ πρὶ πόλον.

LEONIS CANALES.

Æneus ego sum Leo, canales uerò mihi sunt oculi duo, & os cũ palma dextri pedis. Implent autem craterem eundem: dexter quidem oculus, duobus: siniſter uerò, tribus diebus: & quatuor, palma. Porrò ſex horis, os impiere eum poteſt. Hæc igitur ſimul omnia, & os & oculi & palma, dic quanto tempore eundem craterem impleant.

Facit $\frac{12}{61}$ diei, uel 4 horis $\frac{44}{61}$ &cæ.

OPERATIO.

		dies		horæ
Oculus	dexter	2	uel	48
	siniſter	3		72
Palma		4		96
Os		$\frac{1}{4}$		6

Ponatur tempus, intra quod omnes canales ſimul aqua fluentes craterem impleant, quòd ſit una radix, uel diei, uel horarum, atq; dicatur

dies		horæ			die.		horarum
2	uel	48			$\frac{1}{2}$	ra. uel	$\frac{1}{48}$
3		72	dant 1 impletionem,		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{72}$
4		96	quid 1 ra.	Facit	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{96}$
$\frac{1}{4}$		6			4		$\frac{1}{6}$
				Summa partium	$5\frac{1}{12}$	uel	$\frac{61}{288}$

Quare $5\frac{1}{12}$ ra. dierum uel $\frac{61}{288}$ ra. horarum radici poſitæ hoc eſt, 1 N, æqualis.

Eſt prima æquatio, atque radicis ualor ut ſuprà poſitum, quod probari poteſt.

Τέταρτον.

Ἀμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν,
Ζῆθός τε χ' ὡ ξύναιμος, ἦρ δέ μου λάβῃ
Τρίτον, τὸ τετρατόμτε τοὐμὸν Ἀμφιόνος
Ἐξ ὡάντ' ἀνευρὼν, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS AC MAtris ipſorum Antiopes.

Ambo quidem nos uiginti minas appendimus, Zethus pariter & meus conſanguineus. At ſi de mea, tertiam: Amphionis uerò, quartam partem

partem ſumpſeris: ſex in ſumma inuentis, matris pondus inuenies.

Quanti igitur nunc ponderis & Zethi & Amphionis ſtatua fuerit, quæritur.

Facit Zethi quidem 12 Amphionis uerò 8 minarum.
Antiope autem mater, ut habet hypotheſis, pondus obtinet 6 minarum.

OPERATIO.

Zethus } 20 mi. 1 ra. uel 20 N — 1 ra.
Amphion } 20 N — 1 ra. 1 ra.

Collectis nunc partibus ueniunt
uel 5 N + $\frac{1}{12}$ ra. uel 6 $\frac{2}{3}$ N — $\frac{1}{12}$ ra. æquales 6 N &cæ.
Vltimò tandem per communes notícias, Sí ab æqualibus æqualia &cæ.
Sí item æqualibus æqualia,

$\frac{1}{12}$ ra. æquales 1 N uel $\frac{2}{3}$ N æquales $\frac{1}{12}$ ra.

Εὐκλείδου Γεωμετρικόν.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορίουσαι οἶνον ἐβάστασαν,
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ὑπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο.
Τὴν ἠβαιὸν στενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἑταίρη.
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη,
Εἰ μίτρον ἓν μοὶ δοίης: ἀτωλάσιον σέθεν ἦεα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ δὲ μίτρον ἄριστε γεωμετρίης ἐπαΐοντε.

EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Ibant mulus & aſina uinum portantes, aſina autem ex dolore ponderis ſui ingemiſcebat. Qua re uiſa, mulus grauiter ingemiſcentem aſinam ſic interrogauit: Mater, cur ita lamentaris, cur puellę inſtar lachrymas fundis? Menſuram mihi unam ſi dederis, duplo quàm tu plus ſuſtulero: ſin uerò tu à me unam acceperis, idē planè quod ego pondus feres. Menſuram itaque peritiſsime Geometer dicas uoſo.

Facit Muli pondus, 7: Aſinæ uerò tantum 5 menſurarum.

OPERATIO.

Mulus 1 ra. Mulus 1 ra. + 2 N
Aſina 1 ra. $\frac{+ 3 N}{2}$ uel Aſina 1 ra.

Et ueniunt tandem
$\frac{1 \text{ ra.} + 5 N}{2}$ æqua. 1 ra. — 1 N Vel 1 ra. + 3 N æqua. 2 ra. — 2 N.

Hactenus ex Græcis epigrammatibus.

SEQVITVR EXEMPLVM IN ORDINE uiceſimum primum.

Eſt qui peregrinationē inſtituit hoc modo, ut uidelicet plures abeſſe dies nolit, quàm aureos ſecū domo efferat: eo nimirū conſilio, ut ſi fortè minus proſperè cedat, in ſingulos dies ſinguli ſuppetant ipſi aurei. Et quo-

niam Mercurio duce, singulis diebus tot aurei accedunt illi, quot eo mane cum domo egrederetur, habuerat, tandem reuersus domum, ac numerans pecuniam, 52 aureos & $\frac{1}{2}$, uel 63 inuenit. Quæritur ergo, quot initio profectionis aureos habuerit.

Facit { 3 & dodrantem
3 & $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$.

EXPLICATIO.

Si commune & uulgi quispiam in huius exempli computatione iudicium sequi uoluerit, inueniet certe, quarto die hominem illū reuertentem domū, non integros quatuor aureos habuisse antequam iter ingrederetur: & tertio die idem si reuerti dicatur, tres aureos in ea summa quam primo die secum tulerat desiderari. Et quia plus tribus, minus autem quàm quatuor aureos secum primo die habuit, ponendum igitur, quòd ultra 3 aureos adhuc 1 radicem, hoc est, in summa, 3 N + 1 ra. aureorum habuerit. Et quoniam, iuxta exempli hypothesim, tot dierum iter confecit atq; singulis diebus, & id ex hypothesi, illam quam tunc secum habet pecuniam, duplicauit: tertio tandem finito die domum rediens, 24 N + 8 ra. aureorum habet, quod est notandum.

Rursum quandoquidem quartum quoq; diem non integrum, sed eius partem tantum aliquam, nimirum 1 radicem positam, perambulat: non igitur 24 N + 8 ra. aureorum, sed huius summæ partem proportionalem illa radice dierum acquirit. quare dicendum,

dies		aureorum		diei
1	integer acquirit	24 N + 8 ra.	quid	1 ra.

Facit 24 ra. + 8 pri. Quæ nunc, si pecuniæ tertiæ diei addita fuerint, ueniunt

8 primæ + 32 ra. + 24 N, æqua. { $52\frac{1}{2}$ / 63 } N. &cæ.

Radicis igitur ualor, facta operatione æquationi conueniens: dodrans, uel $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$ aurei erunt. Tres igitur aureos & dodrantem, uel 3 aureos & $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$ aure. initio profectionis habuit. Atq; tot etiam dierum iter confecit, quod nunc probari potest.

Instituatur probari seu examinari numerus irrationalis

3 plus $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$

Numerus aureorum quos primò ille habuit, sunt 3 plus $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$

Atq; tot etiam diebus peregrè profectus fuit

3 plus $\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$ Initio profectionis.

bis

6 plus $\sqrt{35\frac{1}{2}} - 4$ primi

bis

12 plus $\sqrt{142} - 8$ secundi } diei aurei.

bis

24 plus $\sqrt{568} - 16$ tertij

Iam dicendum

die inte.		aurei		die.
1	acquiruntur 24	plus $\sqrt{568} - 16$,	quid	$\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$,

Facit, ut quidem sequenti multiplicatione ostendetur $55 - \sqrt{563}$.

Quibus summa, uel aurei, quos tertio die noctu secum tulerat, ut sequitur, additi, 63 aurei colliguntur, quod erat ostendendum.

Sequitur

SEQVITVR MVLTIPLICATIO.

24 plus	$\sqrt{568} - 16$
	$\sqrt{8\frac{7}{8}} - 2$
-48	$+71 + 32$
$+\sqrt{5112}$	$-\sqrt{2272}$
	$-\sqrt{2272}$
	$55 - \sqrt{568}$

SEQVITVR ADDITIO.

24 plus $\sqrt{568} - 16$

$55 - \sqrt{568}$

Summa 63 aurei, ut ſuprà.

Alia additio, quæ in hoc exemplo locum habet.

	$+$ ra. 5112	ad	$-$ ra. 9088
4	1278		2272
2	639		1136
71	9		16
	$+3$		-4

$-$ 1 quater

$-$ 4 bis

$-$ 8 ſeptuagies ſemel

$-$ 567

Summa radicum $-\sqrt{567}$ &cæ.

EXEMPLVM VIGESIMVM SECVNDVM.

Quidã certa aureorũ ſumma negociatus, huius trientẽ, uno aureo & $\frac{1}{2}$ minus, lucratus eſt. quare deinde cũ ſorte & lucro negocians, huius alterã partem, plus 8 aureis lucratur. Id nunc tertiò faciens, ſimilem, aut meliorem fortè, fortunam ſperaturus, eius quod habet iacturam facit in quadrante. Vel ſi placet, eius quod habet quadrantẽ lucrifacit. Quia autem nunc retentã cũ numeret pecuniã, uel aureos, inuenit, hic quidẽ 232 plus $\frac{3}{16}$, illic uerò 100 $-$ $\frac{1}{16}$, queritur quotnã aureos ipſe primò habuerit.

Facit, quantum ad { lacturam quidem 63 aure. & dodrantem / Lucrum uerò 90 aureos.

OPERATIO.

Ponatur	1 radix, quam primò habuit,	
quare	$\frac{1}{3}$ ra. $-$ $1\frac{1}{2}$ N,	Id quod lucratur primò
atq; ſic	$1\frac{1}{3}$ ra. $-$ $1\frac{1}{2}$ N	Sors & lucrum ſimul
Huius $\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{3}$ ra. $-$ $\frac{3}{4}$ N	Lucrum
	$+8$	Lucrum & id
	$\frac{2}{3}$ ra. $+$ $7\frac{1}{4}$ N	quod lucratur ſecundò
	2 ra. $+$ $5\frac{3}{4}$ N	Sors & lucrum ſimul
Huius $\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{2}$ ra. $+$ $1\frac{7}{16}$ N	Iactura uel lucrum
manent	$1\frac{1}{2}$ ra. $+$ $4\frac{5}{16}$ N.	æqua. 100 $-$ $\frac{1}{16}$ N
uel uen.	$2\frac{1}{2}$ ra. $+$ $7\frac{3}{16}$ N	æqua. 232 $+$ $\frac{3}{16}$ N &cæ.

23. Sit unus numerus notus, nimirũ 28, 63 uel 42, quatuor deinde alij ignoti: & eſto quod ignotorum primus cũ reliquorũ trium altera parte, ſecundus uerò cum reliquorum tertia parte, tertius autem cum reliquorum quarta, ac quartus deinde cum reliquorum parte quinta, ipſum notum poſitum æquent: Queritur de numeris ignotis.

Facit ratione nume-

	Primus	ſecundus	tertius	quartus numerus.
28	$\frac{28}{37}$	$14\frac{14}{37}$	$18\frac{24}{37}$	$21\frac{7}{37}$
ti 63	$1\frac{26}{37}$	$32\frac{13}{37}$	$42\frac{21}{37}$	$47\frac{25}{37}$
42	$1\frac{5}{37}$	$21\frac{21}{37}$	$28\frac{14}{37}$	$31\frac{29}{37}$

SEQVITVR HVIVS EXEMPLI EXAMEN.

Sumantur ad examinandum numeri primi,

qui ſunt $\frac{28}{37}$, $14\frac{14}{37}$, $18\frac{24}{37}$ $21\frac{7}{37}$ & 28

Numerus	Partes requiſitæ			Summa ſingulorum cum ſuis partibus,	æquales
primus $\frac{28}{37}$	$7\frac{7}{37}$	$9\frac{17}{37}$	$10\frac{23}{37}$		
ſecun. $14\frac{14}{37}$	$6\frac{24}{111}$	$7\frac{7}{111}$	$\frac{28}{111}$		28
tertius $18\frac{24}{37}$	$5\frac{11}{37}$	$\frac{7}{37}$	$3\frac{24}{37}$		
quar. $21\frac{7}{37}$	$\frac{28}{185}$	$2\frac{164}{185}$	$3\frac{29}{37}$		

EXEMPLVM VLTIMVM, ET SIMILE præcedenti.

Fundus quidam inſcribitur 375 coronatis, quod ubi unus reſciſcit, ipſius autem fortunę multo minores quàm ut eum emere poſsit, re igitur infecta, diſcedit. Hoc idem & alij cuidam, ac deinde etiam tertio accidit. Veruntamen ſi is qui primo loco fundū eſt licitatus, dimidiā pecuniæ partem à reliquis: is uerò qui ſecundo, dodrantē à reliquis: is autē qui tertio, beſſem à reliquis acciperet, ſingulorum tandem pecunię eo modo auctę, ſufficerent ad emendum fundum. Quare nunc quęſtio oritur, quot coronatos ſeorſim quiſq; habuerit.

Facit

Primus	Secundus	Tertius.
$267\frac{6}{7}$	$53\frac{4}{7}$	$160\frac{5}{7}$

Quod examinari poterit.

Et hæc quidem ſunt optime Lector, quæ paucis tibi pro regularum Algebræ declaratione communicare uoluimus. Cæterum qui plura requirit, his nunc inſtructus, ab alijs harum regularum ſcriptoribus petat. Nunc uerò ad Euclidem ipſum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙ-
ΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEO-
metricorum liber primus.

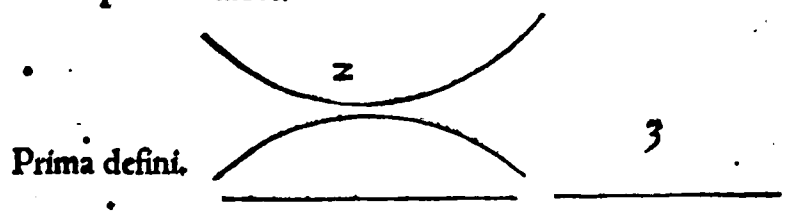
EST hic liber primus totus ferè elementarius, non tantum ad reliquos ſequentes huius Operis libros, ſed etiam ad aliorum Geometrarum ſcripta intelligenda neceſſarius. Nam in hoc libro communium uocabulorum, quę ſubinde in geometria uerſanti occurrunt, definitiones continentur. Prędeptiones deinde ducendi perpendicularem, quomodo item Trilaterę figurę, ſecundum latera uel angulos diuerſæ, & Quadrilateræ, formari debeant. Figura item aliqua propoſita, quomodo illa in alterius formæ figuram permutanda ſit, præceptiones, ut diximus, traduntur. Cum igitur talia doceantur, & plura etiam alia, quàm hoc loco commemorare uoluimus, facile erit cuiuis, non ſolum quàm ſit neceſſarius, ſed etiam ad reliqua perdiſcenda liber iſte quàm utilis, perſpicere.

ΟΡΟΙ.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξίσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

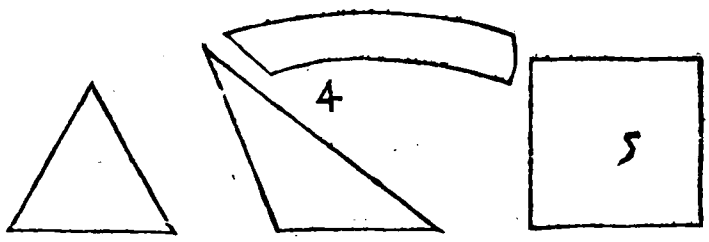
DEFINITIONES.

Punctum eſt, cuius pars nulla. 2. Linea uerò, longitudo latitudinis expers. Lineę autem termini puncta. 3. Recta linea eſt, quę æquabiliter inter ſua puncta iacet.



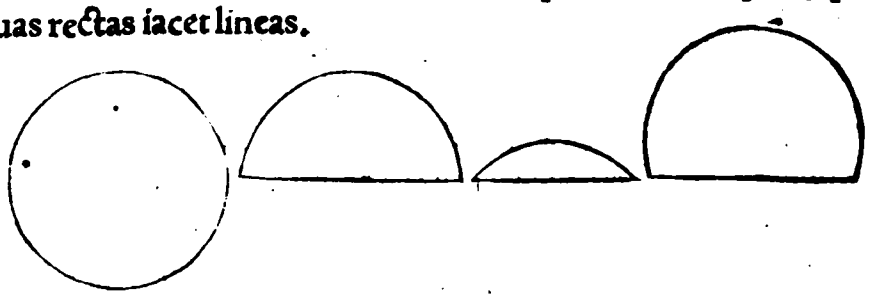
Prima defini.

Ἐπιφάνεια ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἐστίν, ἥτις ἐξίσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.



4. Superficies eſt, quę longitudinem & latitudinem tantum habet.

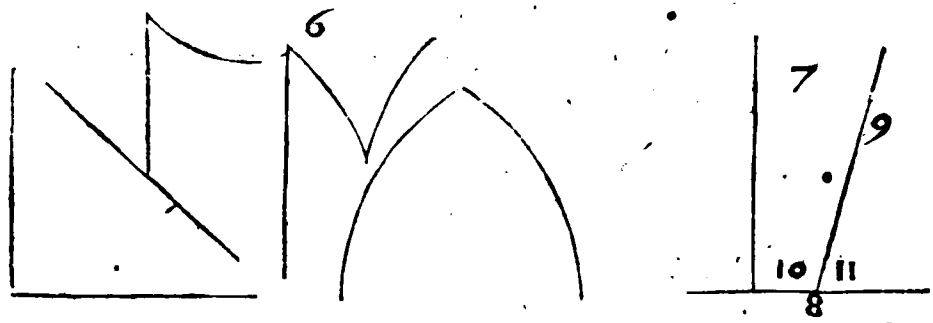
Superficiei uerò termini, lineæ. 5. Plana ſuperficies eſt, quæ æquabiliter inter ſuas rectas iacet lineas.



Ἐπίπεδος γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν στᾶθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

6. Planus angulus, eſt in plano duarum linearum ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, mutua inclinatio. 7. Quando uerò comprehendentes angulum lineæ, rectæ fuerint, Rectilineus uocatur ille angulus. 8. Quando autem recta ſuper rectam conſiſtens lineam, deinceps ſe habentes angulos æquales inter ſe fecerit, Rectus eſt uterq; æqualium angulorum. 9. Et inſiſtens recta linea, Perpendiculum: hoc eſt, Perpendicularis linea uocatur, illius ſuper quam ſteterit. 10. Obtuſus angulus eſt, qui maior recto. 11. Acutus uerò, qui minor eſt recto.



Ὅρος ἐστίν, οὗ τινος ἐστὶ πέρας. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

12. Terminus eſt, quod cuiuſq; extremum eſt.

Vt, Lineæ termini ſunt, puncta: Superficiei, lineæ: Corporum uerò, ſuperficies, quemadmodum ſuprà indicatum eſt.

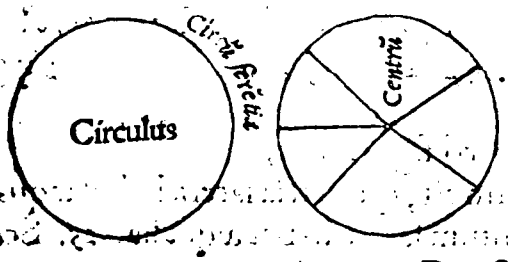
13 Figura eſt, quæ ſub aliquo aut aliquibus terminis comprehenditur.

Vt ſunt omnia, quæ uel ſub lineis, uel ſub ſuperficiebus comprænduntur, ſpacia.

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἡ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων,

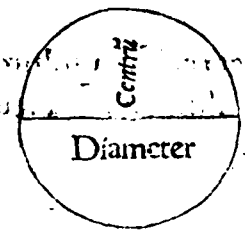
πᾶσαι

πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.



14. Circulus, est figura plana, una linea comprehensa, quæ Circumferentia appellatur, ad quã ab uno quodã puncto eorum, quæ intra figurã sunt posita, omnes cadentes rectæ lineę inter se sunt equales. 15. Punctum uerò hoc, Centrum circuli appellatur.

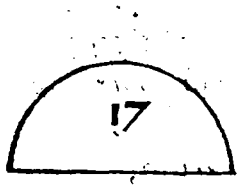
Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου, ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

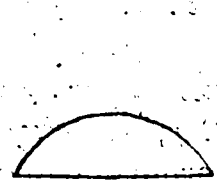


16 Diameter circuli, est recta quędam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in circuli circumferentiam terminata, & quæ circulum bifariam secat.

Ἡμικύκλιόν ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Τμῆμα δὲ κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

17. Semicirculus, est figura, quę sub diametro, atq; de circuli circumferentia ablata portione comprehenditur. 18. Sectio uerò circuli, est figura quę sub recta linea, et circuli circumferentia comprehenditur.





18

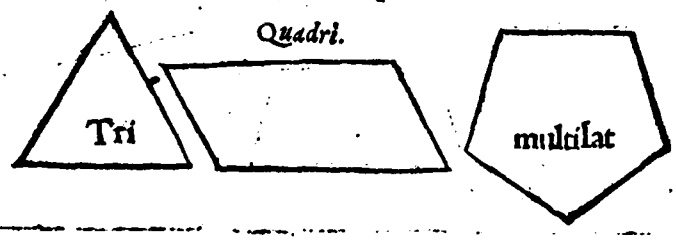


Εὐθύγραμμα σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

19. Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis comprehenduntur.

20. Trilateræ quidem, quæ sub tribus. 21. Quadrilaterę uerò, quę sub quatuor. 22. Multilaterę autem, quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.



Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων,

Ισόπλευρον μὲν τρίγωνον ἔστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. Ισοσκελὲς δέ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς. Σκαληνὸν δέ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Trilaterarum porrò figurarum,

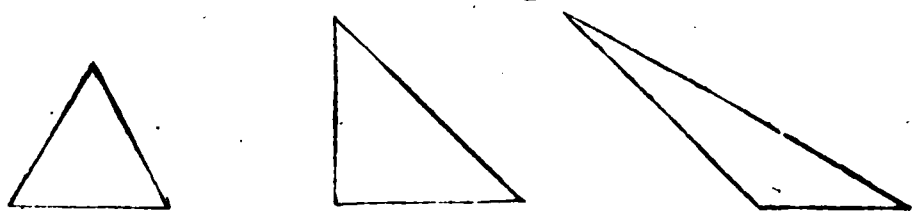
23. Aequilaterum quidē triangulum eſt, quod tria latera habet æqualia. 24. Iſoſceles uerò, quod duo tantum latera habet æqualia. 25. Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

Ετι τὶ τῶν τριπλεύρων σχημάτων,

Ορθογώνιον μὲν τρίγωνον ἔστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. Αμβλυγώνιον δέ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. Οξυγώνιον δέ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Amplius trilaterarum figurarum,

26. Rectangulum quidem triangulum eſt, quod habet rectū angulum. 27. Obtuſiangulum uerò, quod habet obtuſum angulum. 28. Acutiangulum autem, quod tres acutos angulos habet.



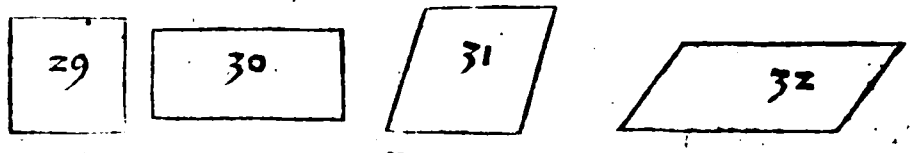
23 & 28 24 & 26 25 & 27

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων.

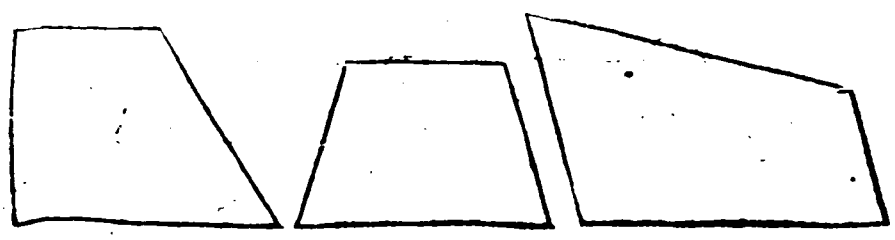
Τετράγωνον μέν ἔστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον. Ετερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. Ρόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. Ρομβοειδὲς δέ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

Figurarum autem quadrilaterarum,

29. Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum eſt, & rectangulum. 30. Altera parte longius uerò, quod rectangulū quidem, at æquilaterum non eſt. 31. Rhombus autem, qui æquilaterus, ſed rectangulus non eſt. 32. Rhomboides deinde, quod ex oppoſito & latera & angulos æquales inter ſe habens, neq; æquilaterum eſt, neq; rectangulum.



Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, Τραπέζια καλείσθω.

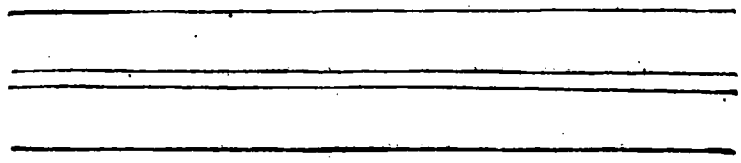


33. Praeter

33. Præter has uerò, quę reliquæ sunt figuræ quadrilaterę, Mensulæ appellantur.

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

34. Parallelæ, sunt rectæ lineæ, quæ in eodem plano existentes, & ex utraq; parte in infinitũ eiectæ, in neutram inter se mutuo coincidunt.

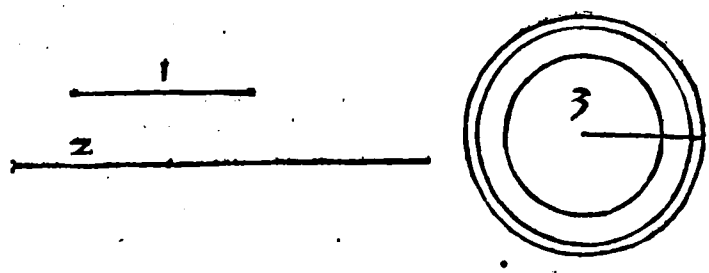


AITHMATA.

Ἠτήσθω, Ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

Postulata.

Petatur, & primò quidem, Ab omni puncto ad omne punctum, rectam lineam ducere posse. Secundò uerò, Terminatam rectam lineam, secundum continuationem, in rectum ejicere. Tertiò tandem, Omni centro & interuallo, circulum describere.

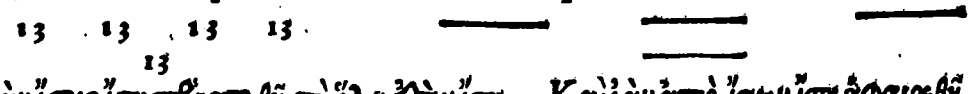


KOINAI ENNOIAI.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

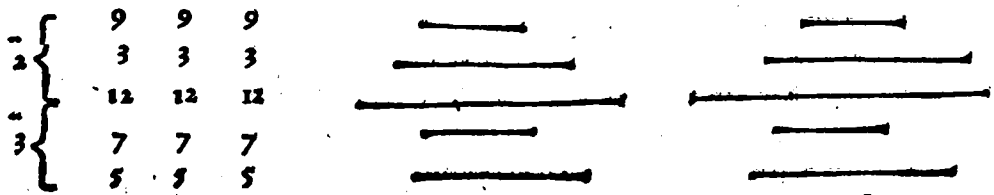
COMMVNES NOTITIAE.

1. Quæ eidem æqualia: & inter se sunt æqualia.



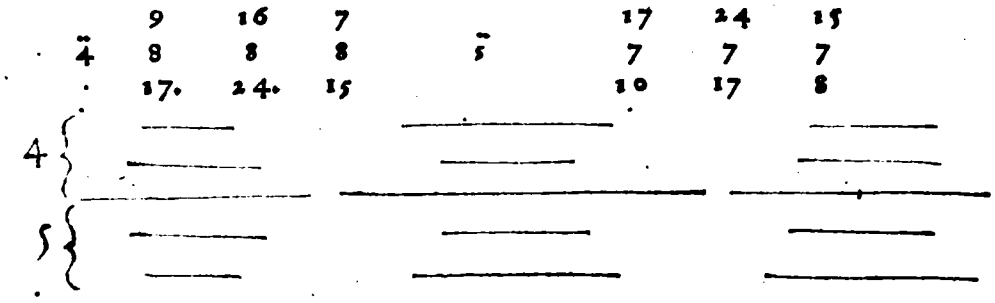
Ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

2 Si æqualibus æqualia adjiciantur: tota sunt æqualia. 3 Et si ab æqualibus æqualia auferantur: quæ relinquuntur sunt æqualia



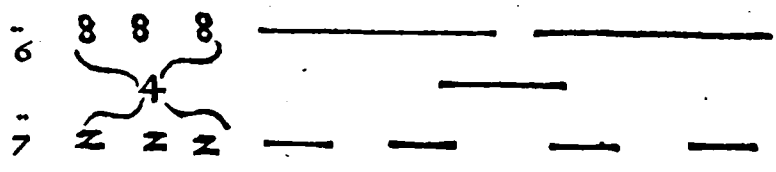
Ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισά ἐστιν. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἄνισά ἐστιν.

4 Si inæqualibus æqualia adijciantur: tota sunt inæqualia. 5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur: reliqua sunt inæqualia.



Τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

6 Quæ eiusdem duplicia: æqualia inter se sunt. 7 Et quæ eiusdem dimidia: æqualia inter se sunt.



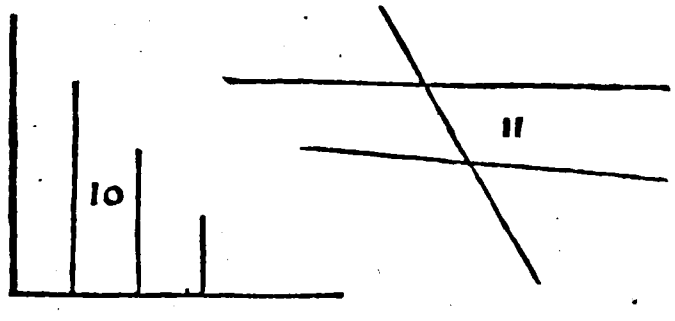
Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστί.

8 Quæ congruunt inter se: æqualia inter se sunt.

9 Et totum parte sua maius est.

Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

10 Omnes recti anguli: æquales inter se sunt. 11 Et si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, duobus rectis minores fecerit: illas ambas productas infinitè, necesse est coincidere, ea in parte, qua duo isti anguli fuerint duobus rectis minores.



Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν.

12 Et duæ rectæ lineæ: spacium non comprehendunt.

ΠΡΟΤΑ-

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

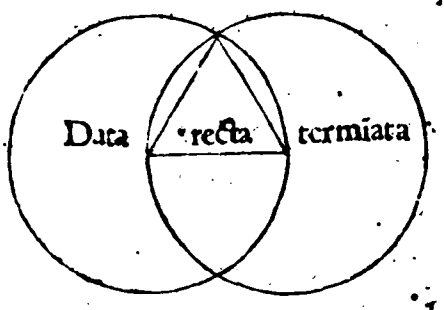
Ἐπὶ τῆ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

PROPOSITIONES.

PRIMA. 1.

Super data recta linea terminata, triangulũ æquilaterum conſtituere.

Terminata recta linea data, propoſitum eſt, ſuper ea triangulum æquilaterum conſtituere. Officio igitur circini, ſecundùm interuallum rectæ datæ, ex utraq; illius extremitate, per tertium poſtulatũ, circulus deſcribatur: atq; ubi alter alterum ſupra lineam ſecat, inde ad utranq; extremitatem datæ recta quędam linea demittatur, & propoſitioni ſatisfactum erit, cum hæ duæ demiſſæ & recta terminata data, triangulum quale petitur comprehendant: id quod facile ex ſtructura & circuli definitione, bis uſurpata, atq; illa communi noticia, Quæ uni ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, demonſtrari poterit. Super data igitur recta terminata linea, triangulum æquilaterum conſtitutũ eſt, quod feciſſe oportuit.



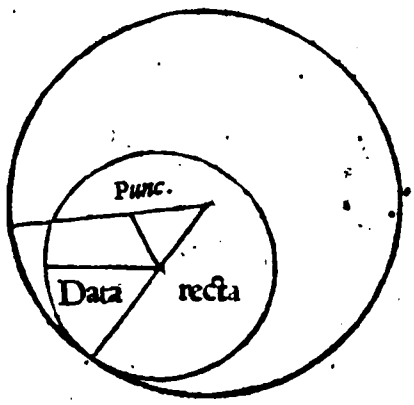
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

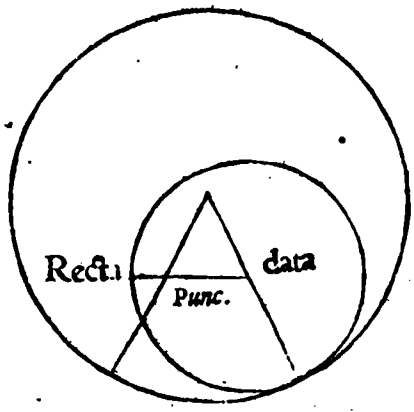
Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

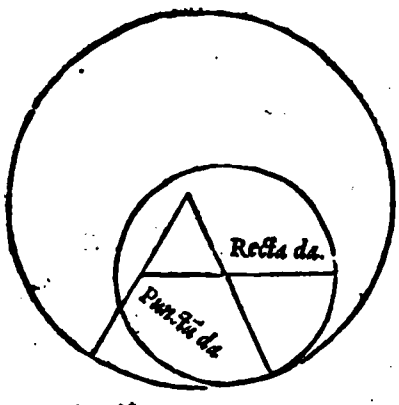
PROPOSITIO II.

Ad datum punctũ, datæ rectæ lineæ, æquadem rectam lineã ponere.

Puncto & recta linea data, deſcribatur primò circulus, cuius ſemidiameter ſit recta data: altera ipſius extremitate, utra fuerit, centri loco ſumpta. Quo facto, à centro circuli iam deſcripti, ad punctum datum, linea quadam recta, per primum poſtulatum ducta, ſuper ea, per propoſitionem præcedentem, triangulum æquilaterum conſtituatur: atq; id latus, quod ad centrum tendit, ad circumferentiam uſq; producatur. Poſtea uerò ſecundum hanc ipſam continuatã, ex illa quoq; extremitate, quam cum latere trianguli altero communem habet, circulus deſcribatur, & ubi tandem latus trianguli alterum uſq; ad circumferentiam continuatum fuerit, confectum erit negocium. A' dato enim puncto linea, datæ æqualis, educta eſt: id quod adiectæ figuræ indicant. atque in hunc modum demonſtrari poteſt. Cum enim in maiori circulo, quæ ex ipſius centro egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione, inter ſe æquales ſint, cumq; etiam ſuper recta, quam centrum circuli minoris et







punctum datum terminant, triangulum æquilaterum constitutum sit, huius uerò trianguli duo latera duarum maioris circuli semidiametrorum partes sint, partibus illis æqualibus ab æqualibus semidiametris subtractis, & quæ relinquuntur rectæ lineæ, ex communi quadam noticia inter se æquales erunt. Sed quia una harum, ex definitione circuli, datæ rectæ est æqualis: & altera, quæ nimirum ex dato puncto egreditur, ex communi quadam noticia, eidem rectæ datæ æqualis erit. Ad datum igitur punctum, datæ rectæ lineæ æqualis recta posita est, quod faciſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

PROPOSITIO III.

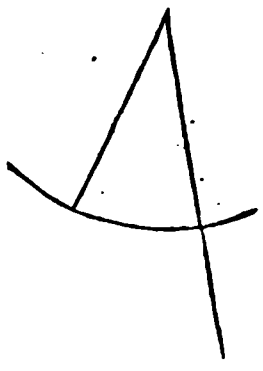
Duabus datis rectis lineis inæqualibus, à longiori, breuiori æqualem rectam lineam abscindere.

Est huius propositionis triplex operatio, seu fabrica. Prima, ut officio circini quantitas breuioris accipiatur: ea deinde in longiore, ab extremitate una incipiendo, puncto aliquo signetur: & factum erit negotiũ, id quod per cõmunem illam noticiã, Quæ uni sunt æqualia, et inter se sunt æqualia, demonstrari poterit.

Linea longior.

Breuior.

Secunda est, ut lineæ propositæ duabus suis extremitatibus utcunq; coniungentur, secundum quantitatem deinde, uel interuallũ breuioris, ex coniunctionis puncto, per tertium postulatum, circulus, uel arcus tantum circuli loco, qui tamen longiorem rectã secat, describatur: & idem effectum erit. Huius autem demonstratio est ipsa circuli definitio supra tradita, cum lineæ à centro in circumferentiam cadentes, per eandem, inter se sint æquales.

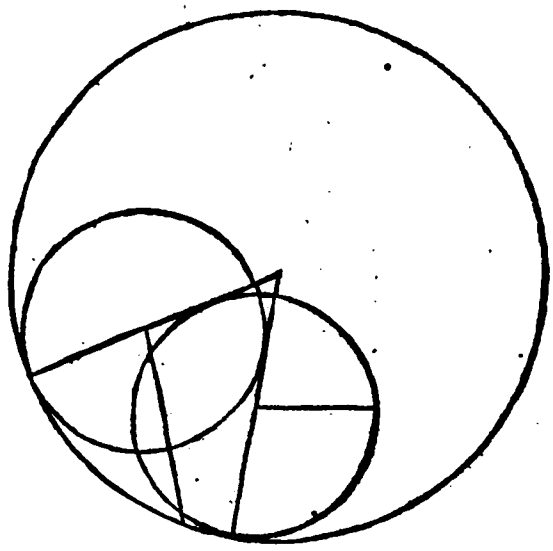


Tertia huius operatio est, ut, per præcedentem propositionem secundam, primò ab extremitate longioris alterutra, tanquam à puncto aliquo dato, linea breuiori æqualis educatur: atq; huic deinde à longiore, prout secunda huius propositionis operatio exigit, æqualis abscindatur. & tertiò, quod uolebat propositio, factum erit.

FIGVRA

FIGVRA OPERATIONIS TERTIAE.

Linea longior. Breuior.



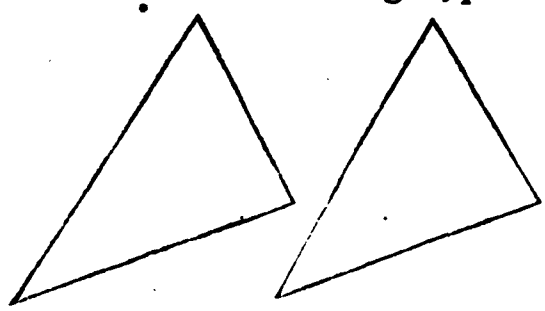
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐαν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

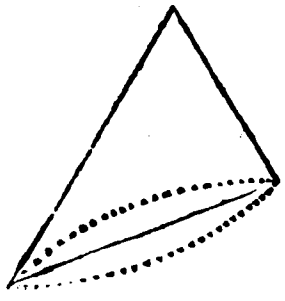
PROPOSITIO IIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunque utrique, habuerint uerò & angulum angulo ęqualem, eum qui ſub ęqualibus rectis lineis comprehenditur: & baſim baſi ęqualem habebunt, & triangulum triangulo ęquale erit, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, uterq; utriq;, ſub quibus ęqualia latera ſubtenduntur.

Sumit hęc quarta propoſitio ſuã demonſtrationẽ ab impoſsibili. Duplex enim eſt, ut norunt dialectici, demonſtrationis genus. Vnum, quod ex ueris & conceſſis procedit, & directum dicitur. Alterum uerò, quod cum directè non poſsit obtineri, ab impoſsibili aliquo & abſurda cõcluſione ſuam demonſtrationẽ cõfirmat, quod paucis tantum hic monere uoluimus. Nunc quantum ad propoſitionẽ. Prędſcribantur huiuſmodi duo triangula, qualia hęc propoſitio requirit, quorum trium rum unius duo latera, duobus lateribus alterius æqualia ſint: atq; angulus deinde ſub ęqualibus lateribus unius, angulo ſub ęqualibus trianguli alterius comprehenſo ęqualis: dico quod & horum triangulorum baſes, ipſa quoq; triãgula tota, atq; reliqui anguli reliquis angulis utrinque inter ſe ęquales ſint. Huius rei nunc accedere deberet ocularis quędam demonſtratio: ſed quia ad ſenſum quaſi ita ſeſe habere res apparet, & euidens eſt, tan-



quam uera atq; omnibus nota relinquitur, cum ſtatim, hoc ſi quis negare uelit, oppoſitum eius, ad extremum, Quod duę rectæ ſpacium comprehendant, ut ſequitur, fateri cogatur, reductione ad abſurdum. Superponatur triangulum unum alteri, ſic ut anguli eorum ęquales, unus ſuper altero iaceat, unum etiam ęqualium laterum unius, ſuper ſuo ęquali alterius triāguli latere ponatur. Et quia hęc duo, & reliqua etiam duo ex altera parte latera, ex hypotheſi inter ſe æqualia ſunt, ab ęqualibus etiam angulis deſcendunt: horum applicatorum laterum extremitates, reliqua etiam ex altera parte latera omnino conuenire atq; coincidere oportet. Quia uerò iam baſiū extremitates (ut quæ eædem ſunt quæ deſcendentium laterū,) conueniunt: baſis igitur baſi aut congruet, aut duæ rectæ lineæ cōprehendent ſuperficiē. Poſterius nō concedetur, cum nimirum id, ex communi quadam noticia, pro abſurdo habeatur. Congruēt ergo baſes: æquales igitur inter ſe, ex cōmuni illa noticia, Quæ congruunt inter ſe, æqualia inter ſe ſunt. Congruet ſic & triangulū triangulo: quare & ipſa æqualia inter ſe, per eandē. Denicq; quia etiam reliqui duo anguli reliquis duobus angulis congruunt, utercq; utricq;: & illi tandem eo modo quo conueniunt, inter ſe æquales erunt. Cum igitur duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrunq; utricq;, habuerint uerò & angulū angulo ęqualem, eum qui ſub æqualibus rectis compræhenditur: & baſim baſi ęqualem habebunt, & triangulum triangulo ęquale, ac reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, utercq; utricq;, ſub quibus ęqualia latera ſubtenduntur, quod demonſtrari oportuit.



ADMONITIO.

Per puncta in figuris, repreſentatur ratio ducens ad abſurdū, ut qui facilis nō eſſet in concedendo id quod uerum eſt, tandem cōuincatur reductione quadam ad impoſsibile, ut hac offenſione abſurditatis quodammodo reſiliat ad confeſsionem ueri. Quod ut hoc loco, ita etiam alijs locis à me factum reperient Lectores, deſignatione punctorum.

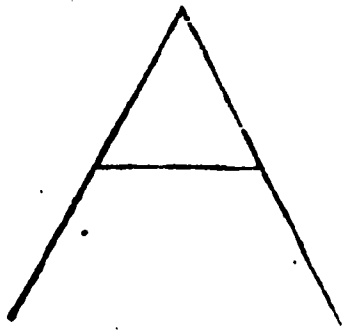
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ πρὸς ἐκβληθεῖσαν τὴν ἴσων ἴσαι γωνίαι, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

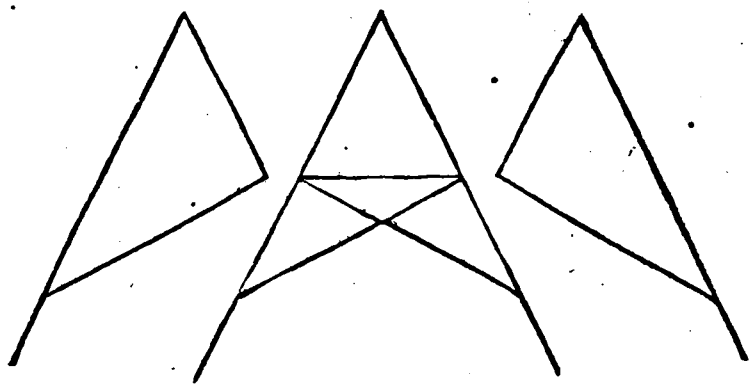
PROPOSITIO V.

Iſoſcelium triangulorum: qui ad baſim anguli, ęquales inter ſe ſunt. Et ęqualibus rectis ulterius productis: qui ſub baſi anguli, ęquales inter ſe erunt.

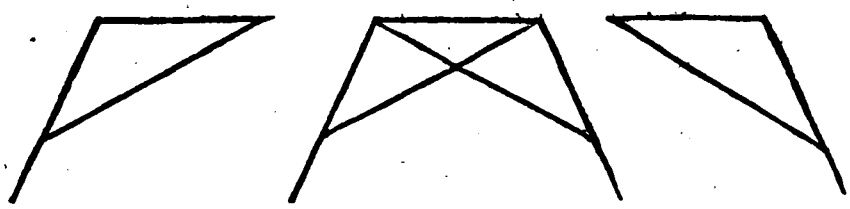
Sunt huius propoſitionis duæ partes, quarum prior quidem eſt, quòd in triangulis duūm æqualium laterum, anguli ad baſim, hoc eſt ad reliquum latus tertium, ſint inter ſe ęquales. Poſterior uerò, ſi in huiuſmodi triangulis ęqualia duo latera ultra triangulum producantur: quod & ſub baſi, qui ſic fiunt anguli, inter ſe æquales ſint. Fiant latera ultra triangulum producta, per 3, inter ſe æqualia, horum deinde ęqualium extremitates cū baſis extremitatibus, duabus rectis, quæ ſeſe mutuo ſecent iunctis, demōſtratio ex 4 prę cedenti, bis uſurpata, & communi tandem illa noticia, Si ab ęqualibus æqualia auferantur, & quæ relinquuntur, &cæ. ſic colligetur. Quoniā enim inferius ad



rius ad Iſoſcelis baſim poſita triangula (ſumpto tamẽ ad utrũq; Iſoſceli deſcripto) duo latera ex hypotheſi & ſtructura, duobus lateribus æqualia, angulum præterea

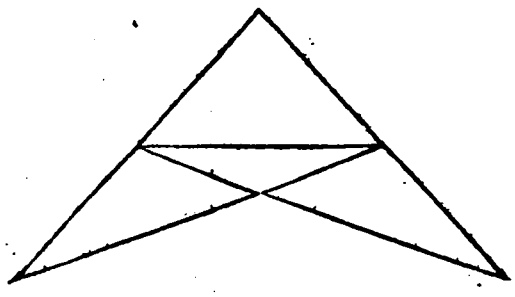


inter æqualia latera, angulo æqualẽ habent: per præcedentem quartã, & baſim baſi, hoc eſt, ſecantes ſeſe mutuo ſub Iſoſcelis baſi lineas, ac reliquos duos angulos reliquis duobus angulis æquales habebunt: quod eſt notandum. Rurſus quoniam eadem duo inferius ad Iſoſcelis baſim poſita triangula, propter ſtructuram quidem, & ea inſuper, quæ iam demonſtrata ſunt, ex propoſitione 4 huius, inter ſe æqualia ſunt, angulos etiam æquales habent: iam ſtatim poſterior huius propoſitionis pars, quod ſcilicet ſub baſi anguli inter ſe æquales ſint, manifeſta erit. Quòd deinde quã tum ad partem priorẽ, ad baſim etiam poſiti anguli inter ſe æquales ſint, ex cõmuni



illa noticia, Si ab æqualibus æqualia auferantur, &cæ. & id tandẽ manifeſtabitur. Conſtat itaque ſic tota propoſitio. Iſoſcelium igitur triangulorum: qui ad baſim ſunt anguli, inter ſe æquales erunt. Productis item æqualibus lateribus: & qui ſub baſi anguli, inter ſe æquales erunt, quod demonſtrari oportuit.

SEQVITVR FIGVRA ALIA.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

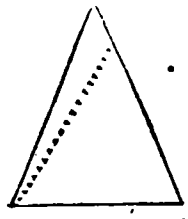
Ἐαν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτεινουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

PROPOSITIO VI.

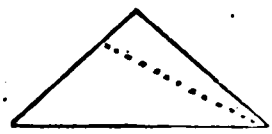
Si trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint; & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera, equalia inter ſe erunt.

Eſto

Esto triangulum, cuius duo anguli sint inter se æquales: dico & latera illis æqualibus angulis subtensa, inter se æqualia esse. Si enim non sunt æqualia: erit alterum eorum longius. ab eo ergo quod est longius, breuiori æquale auferatur, iuxta illum angulum, qui est alteri æqualis, incipiendo, & claudatur triangulum. Et quoniam



Vel



duo triangula, quæ nimirum latus, quod æquis angulis interiacet, cõmune habent, huiusmodi sunt, qualia propositio præcedens quarta requirit, cum per hanc quartam, et basis basi, totum deinde triãgulum toti triangulo, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales sint: partiale triangulum suo totali æquale erit, pars toti, quod est impossibile: partialis etiam angulus, ex communi illa notitia. Quæ uni sunt æqualia, &cæt. suo totali æqualis, quod & ipsum impossibile. Latus igitur unum alteri, propter hæc inconuenientia, non inæquale, sed æquale erit. Si igitur trianguli alicuius duo anguli æquales inter se fuerint, & horum æqualiũ angulorum subtensa latera inter se æqualia erunt. quod demonstrasse oportuit.

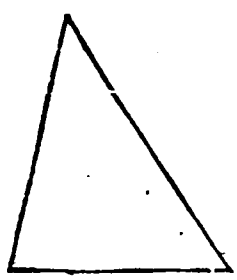
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συνσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

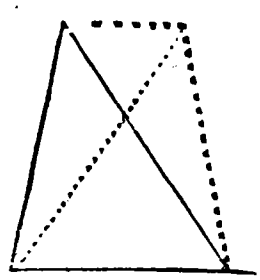
PROPOSITIO. VII.

Super eadem recta, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ æquales, utraq; utriq;, nõ constituentur, ad aliud atq; aliud punctum, ad easdẽ partes, eosdemq; terminos cum duabus initiò ductis rectis lineis habentes.

Sentẽtia est propositionis: Si super alicuius rectæ lineæ extremitatibus, à pũcto uno, extra lineã sumpto, duæ rectæ demissæ fuerint, quòd tũ à puncto quodã alio, in eadẽ qua prius parte constituto, ad extremitates datæ, aliæ duæ rectæ, quæ essent prioribus ductis æquales, utraq; suæ cõterminali, demitti possint, hoc impossibile est. Si enim possibile, detur recta, à pũcto etiã extra datã sumpto, ad utranq; extremitatẽ recta linea ducat. Sumat deinde, ut ita aduersario, uel minus credẽti, mos geratur, in eadem qua prius parte, punctum aliud, à quo & ipso duæ ad extremitates datæ rectæ tandem demittentur lineæ. Et quia in hũc modum descripta figura, ex posterioribus una priorum unã secet aut non secet, utrum nunc contigerit, pũcta semper, per primũ postulatum, recta quadã linea coniungẽda sunt. Quòd si una unã secet, cũ hic appareãt duo triangula, quorũ utrũq; Isosceles, qui in Isosceliũ triãgulorũ uno, per priorẽ partem quintæ, anguli sunt inter se æquales, mox uni æqualium unus angulus, quẽ nimirum habet à latere, additus, de altero uerò unus ablatus: qui sic ueniũt anguli inæquales, per eandem priorem quintæ partem, ratione alterius Isosceles, inter se æquales erunt. quod est impossibile. Esto autem nunc, quod non secet una unam, tum post punctorum coniunctionem, unius Isosceles trianguli æqualia latera ultra basim producantur. Et quoniã qui, ex posteriore parte quintæ, anguli sunt inter se æquales, si uni unus additus, de altero uerò unus ablatus fuerit, ex priore parte eiusdem quintæ idem



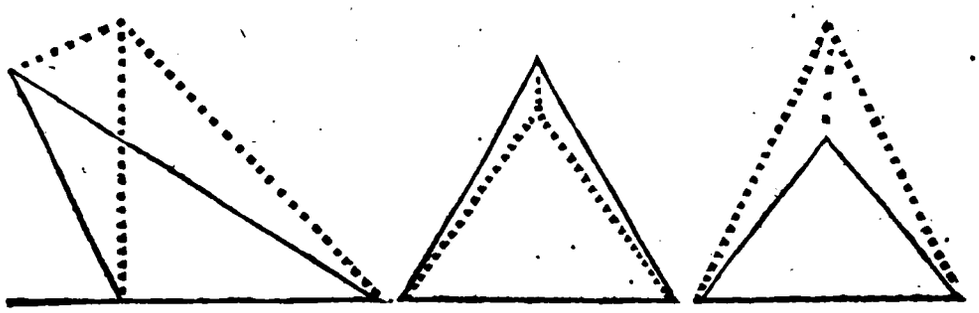
Recta data.



Recta data.

quod

quod prius inferri poteſt, Sequitur ergo nunc, quomodocunq; hoc tentabitur, incaſſum laborari, cum nec intra nec extra demiſſas rectas punctũ aliud ſumi poſ-



Recta data. Recta data.

ſit. Super eadẽ igitur recta, duabus eiſdẽ rectis, & reli. quod demõſtraſſe oportuit.

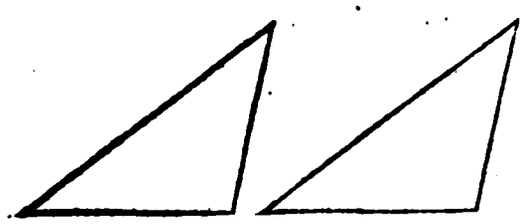
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐαν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

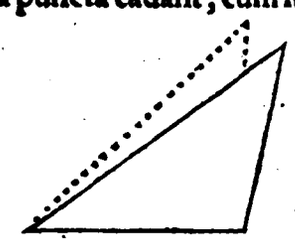
PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, utrũque utriq;, habuerint uero & baſim baſi ęqualem: & angulum angulo æqualem habebunt, eum qui ſub ęqualibus lateribus comprehenditur.

Deſcribantur huiuſmodi duo triangula, qualia hæc propoſitio requirit: dico & angulos, qui ſub æqualibus amborum triangulorum lateribus comprehenduntur, inter ſe ęquales eſſe. Colligit ſuam demonſtrationem hęc propoſitio ex ſeptima, ut



prędcedens ſexta ex quinta, ab impoſſibili hoc modo. Superponat triangulum unum alteri, ſic ut baſis baſim, latera etiam latera, unumquodq; ſuum ęquale, reſpiciant: ac poſita baſi ſuper baſi, una item extremitate unius in uno, ſuper una baſis extremitate in triangulo altero, cum ipſę baſes inter ſe ſint, ex hypotheſi, ęquales: duę harum extremitates reliquæ coincident. atq; ſic etiam ipſæ baſes, cum alias, ubi uidelicet una baſis extra uel intra triangulũ caderet, duæ rectę lineæ ſuperficiẽ clauderent, id quod per communem quandam notitiam fieri poſſe negatum eſt: cõgruunt igitur baſes. Et quia baſes congruunt: latera ſic lateribus aut congruent, aut non. Si prius: & angulus angulo congruet, & ei ęqualis erit, quod erat demonſtrandum. Eſto uero quòd non congruant latera baſibus congruentibus, ſed differant, hoc eſt, in diuerſa puncta cadant, cum ſuper unius rectæ extremitatibus duæ rectæ, ab uno puncto deductæ, prius conſtitutæ ſint, iam uero aliæ duæ, ſuper eiſdem rectæ extremitatibus poſitæ, uerſus eandem partem tendentes, in aliud punctum concurrant, contra propoſitionem prędmiſſam ſeptimam id agi manifeſtum eſt. id quod fieri non ſolet: cum uidelicet Geometrę inde



eorum nimis atq; turpe eſſet, ſi demõſtratæ antea propoſitionis ueritatem & conſtantiam eandem non tueretur. Propter illud igitur inconueniens, congruentibus baſibus: et reliqua latera, cũ ſint, ex hypotheſi, inter ſe æqualia, congruere: atq; ſic angulos, quos dicta latera com-

 prahendunt,

prænendúnt, inter ſe ęquales eſſe, neceſſe erit. Si igitur duo triangula, duo latera duobus &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

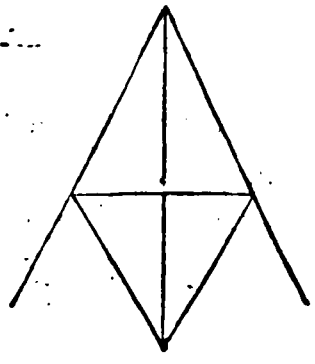
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum: bifariam ſecare.

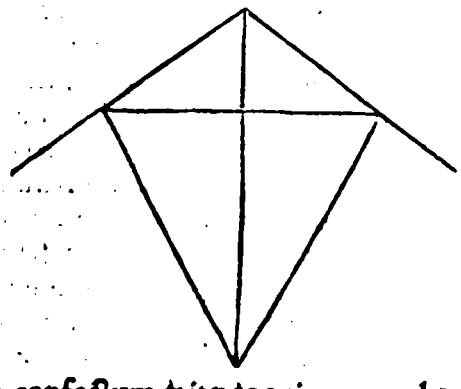
Angulus rectilineus datus.



Sit angulus rectilíneus datus, atq; propoſitũ, eum bifariam ſecare. Officio igitur circini, ex rectis datum angulum continentibus, ab earũ contactu incipiẽdo, portiones ſumantur ęquales: quarum fines deinde linea quadam recta, ut Iſoſceles triangulũ fiat, iuncti, ſuper illa, ex altera parte, triangulum ęquilaterum conſtituat. Quòd ſi tandem línea quadam recta alia angulus datus cum ſibi oppoſito copuletur, propoſitioni iam ſatisfactum erit: id quod propoſitionis κατασκευὴ & propoſitio octaua manifeſtabunt.

ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.

Sit angulus rectilíneus datus, atq; propoſitum, eum bifariam ſecare. Signetur



igitur in uno anguli latere pũctũ aliquod, huic deinde portioni, quę inter pũctũ hoc et angulũ iacet, ęqualis ab altero anguli latere, ab ipſo angulo incipiẽdo, per propoſitionem tertiam auferatur, et connectantur harum portionum fines tertia quadam recta linea. Porrò ſuper hac tertia, ex altera parte, per primam propoſitionem huius, triangulo ęquilatero cõſtituto, angulis in ſuper, quos hæc recta in diuerſis triangulis ſubtendit, recta quadam linea alia iunctis, confectum erit negocium, cum hæc ipſa recta angulum propoſitum bifariam ſecet: id quod, ut prius, oſtendi poterit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

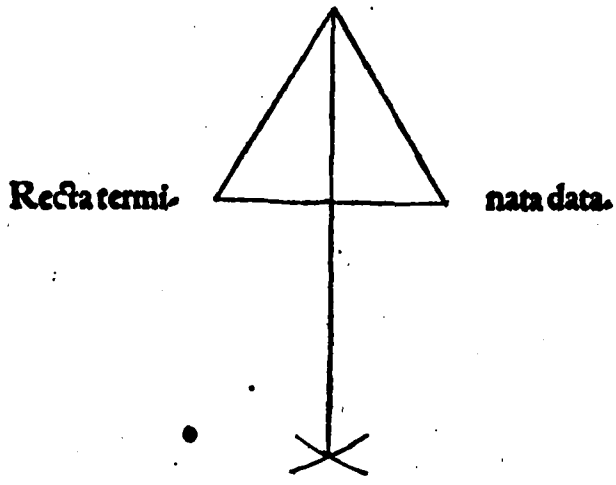
PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam: bifariam ſecare.

Sit recta línea terminata data, atq; propoſitum, eam bifariam ſecare. Super illa igitur triangulum æquilaterum conſtituatur: angulo deinde, quem hæc recta terminata ſubtendit, línea quadam recta alia, per propoſitionem nonam præcedentẽ, bifariam diuiſo, factum erit negocium. Nam quæ angulum, ea ipſa, continuata tamen, & terminatam rectam lineam datam bifariam ſecet: cuius quidem rei demonſtratio, ipſa ſtructura & propoſitio quarta erunt. Data igitur recta terminata línea, bifariam ſecta eſt: quod fieri oportuit.

SEQVITVR

SEQVITVR FIGVRA.



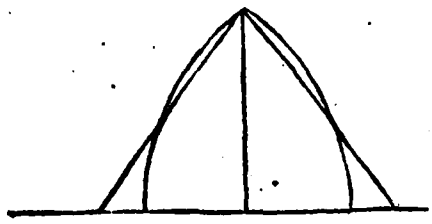
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XI.

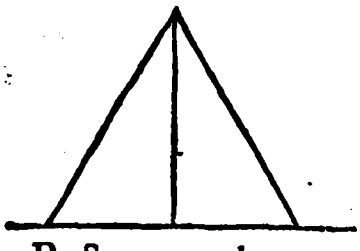
Data recta linea, à puncto in ea dato, ad angulos rectos lineam rectam excitare.

Sit recta linea data, in ea etiam punctũ datum, atq; propoſitum, ex puncto hoc ipſius rectæ lineæ datæ, lineam rectam ad rectos angulos educere. Signentur ex utraq; parte puncti in linea, circini officio, æquales portiones. ex harum finibus deinde, circino prius ulterius expanſo, duo circuli, uel arcus tantum, circulorum loco, ſeſe mutuo ſecantes deſcribantur. A' mutua tandem duorum arcuum interſectione linea recta ad punctum in linea datum ſi demiſſa fuerit: illam demiſſam à puncto in linea ad rectos angulos eductã eſſe, ſic obtinebitur. Ducatur à communi arcuum interſectione ad utranq; illorum cũ recta data interſectionẽ, quædam recta linea.



Et quoniã hîc ſunt duo triangula, qualia propoſitio octaua præcedens requirit, cũ illi anguli, quos recta data, & quæ ab arcuum interſectione demiſſa eſt linea, ἰσοῖς conſtituunt, per eandem octauam, æquales inter ſe ſint, atq; ob id deinde recti, ex definitione: hæc demiſſa ad angulos rectos educta erit, id quod fieri oportuit.

ALIA DEMONSTRATIO HVIVS.



Sit recta linea data, & quæ ſequuntur. Signentur ex utraque parte puncti in linea æquales portiones, una quidem ad placitum, altera uero per propoſitionem tertiam præmiſſam. Super his deinde duabus portionibus, tanquam una linea, triangulo æquilatero per propoſitionẽ primam conſtituto, ad angulũ quem hæc tota ſubtendit, à puncto in linea ſumpto, recta quædam linea ducatur. Erit autem hęc recta, ea quę petebatur, ad rectos ſcilicet angulos à puncto in linea dato educta: id quod, ut modo, mediante ſtructura, ex propoſitione octaua, & definitione anguli recti, facile demonſtrari poterit.

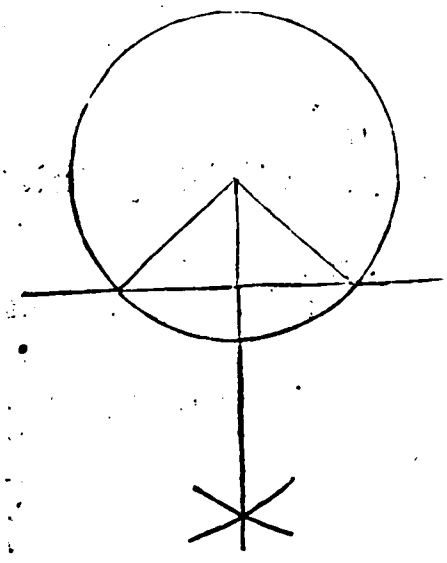
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐυθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον ἐυθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

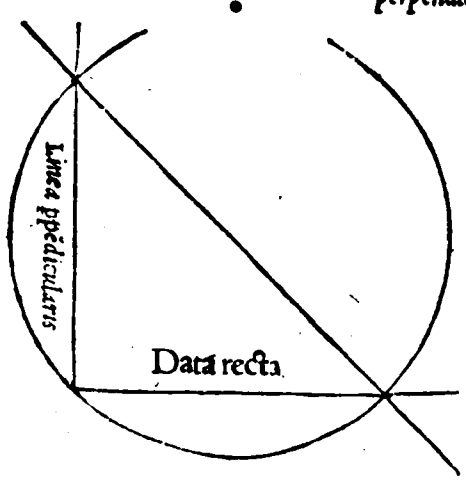
PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam: à dato puncto quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit recta linea ſatis longa data, extra eam etiam punctum datum, atq; propoſitum, à puncto ſuper rectam, perpendicularem rectam lineam demittere. Suſcipiatur ex alterutra parte rectæ, per punctum diuiſæ, punctum aliud, utcunq;, ac centro quidem, puncto dato: interuallo uerò eo, quod à duobus punctis intercipitur, circulus, per 3 poſtulatum deſcribatur. Vel, Ex puncto dato deſcribatur primò circulus tãtus, ut rectam datam in duobus locis interſecet, à quo eodem puncto deinde ad interſectionũ loca duabus rectis lineis ductis, ſecetur uel angulus ad centrum, quem hæ duæ rectæ includunt: per nonam, uel latus eundem angulum ſubtendens, ſi magis placet: per propoſitionẽ 10, biſariam. Dico ergo quod hęc, uel angulũ uel latus, ſecans linea, ea ſit quæ petitur. Quoniam enim ad rectam hanc, quæ datæ rectæ inſiſtit, angulos æquales eſſe ipſa κατασκευή, et propoſitio 4, ſi angulus: uel & propoſitio 8, ſi linea data, ſeu latus biſariam diuiſum fuerit, demonſtrabũt. Et quoniam ſunt anguli deinceps ſe habentes, Quando autem recta rectæ inſiſtens, deinceps ſe habentes angulos æquales inter ſe fecerit: uterq; æqualium angulorum ex definitione, rectus eſt, ac inſiſtens, Perpendicularis uocatur, cum hæc recta ex puncto etiam dato procedat, propoſitioni iam ſatisfactũ erit. Super datã igitur rectam lineã ſatis longã, à dato puncto quod in ea non erat, Perpendicularis educta eſt, quod fieri oportuit.



ALIVS MODVS DVCENDI *perpendicularem lineam.*

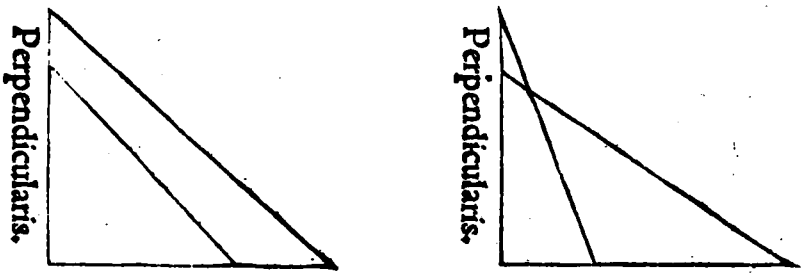


Eſt & tertius modus ducendi perpendicularem lineam, ex prima parte propoſitionis 31, tertij libri ſequentis deſumptus, eò ſpectans, ſi quando fortè ab alicuius rectæ extremitate ea ducenda eſſet. Huius itaque delineationem huc ponere libuit, maximè ob id, quod præter hos modos, non puto præterea alium eſſe modum erigendi perpendicularem lineam.

APPENDIX.

Ex præmiſsis duabus propoſitionibus diſcetur, quomodo triangulum orthogonium formari debeat. Poſteaquam enim perpendicularis ad rectam ducta eſt, ſi deinde

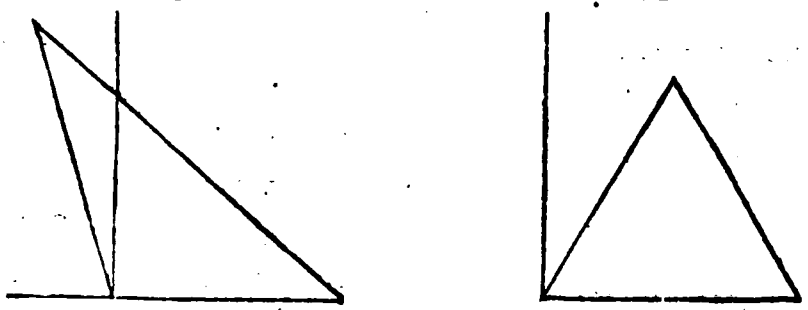
deinde huius extremitas, uel punctum aliquod in ea, cum data recta, uel similiter eius puncto aliquo, coniungatur: triangulum rectangulum descriptum erit, sic:



De Obtusiangulo autem & Acutiangulo, quomodo formentur, si illorum angulos, à quibus denominata sunt, quis animaduerterit, non erit laboriosum facere, cum nullam singularem industriam hæ delineationes requirant, id quod ex sequẽti cuiusq; descriptione apparet.

Triangulum

Amblygonium Oxygonium



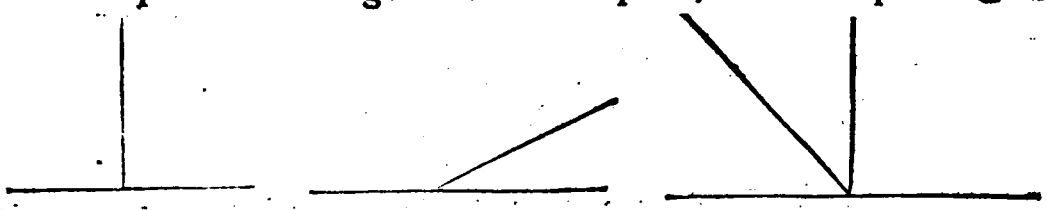
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Ὡς ἀπ' εὐθείας ἐπ' εὐθεῖαν στᾶσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

PROPOSITIO XIII.

Cũ recta linea super rectam consistens lineã, angulos fecerit: aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet.

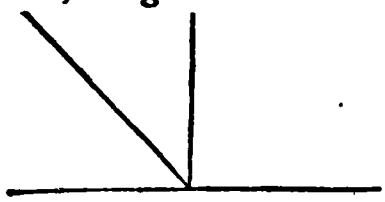
Consistat recta super rectam lineam, angulos faciens: dico illos esse, aut utrunq; rectum, aut ambos simul duobus rectis æquales. Nam linea insistens rectæ alij, faciet deinceps se habentes angulos aut inter se æquales, aut uerò inæquales. Quòd



si æquales: uterq; ex definitione, rectus erit, id quod uult propositio. Sin uero inæquales, quia tamen unus tanto interuallo rectum excedit, quanto alter recto minor est (id quod linea à puncto in recta sumpto, πρὸς ὀρθὰς educta commonstrabit) propter excessus & defectus æqualitatem, iam hi duo anguli, licet non recti per se, tamen duobus rectis æquales sunt, id quod & ipsum habet propositio. Vnde sic patet ipsa tota. Si recta igitur linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis angulis æquales faciet: quod demonstrasse oportuit.

ALIA EIVS QVO IN PROPOSITIONE *dicitur, Aut duobus rectis æquales, demonſtratio.*

Quòd ſi recta inſiſtẽs rectæ alij, angulos deinceps ſe habẽtes inęquales fecerit, tũ ex cõmuni linearum contactu, tanquã ex puncto in linea dato, per propoſitionẽ 11 huius, ad angulos rectos linea excitetur. Et quoniam ex utraq; parte ſemper unus angulus, hic quidem per lineam πρὸς ὀρθὰς ductam: illic uero, per alteram inſiſtentem, in duos angulos diuiſus eſt: ſinguli duo partiales ſuo totali angulo æquales erunt. atq; his deinde illis æqualibus additis, ſic ut duo uni, & unus duobus angulis accedat: tres anguli tribus æquales erunt, uno tandem communi angulo, qui nimirum ſub perpendiculari & alia inſiſtente comprehẽditur, hic & illic ablato: duo anguli duobus æquales erunt. Quia autem duo ex una parte recti ſunt: ex altera parte duo, quos nimirum recta, non ad rectos angulos ducta, & ea cui inſiſtit, comprehendunt, duobus rectis angulis ęquales erunt. Si recta igitur linea ſuper rectã cõſiſtens angulos fecerit, &cęt. quod demõſtrari oportuit.



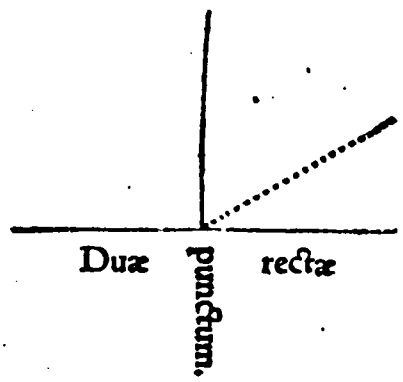
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

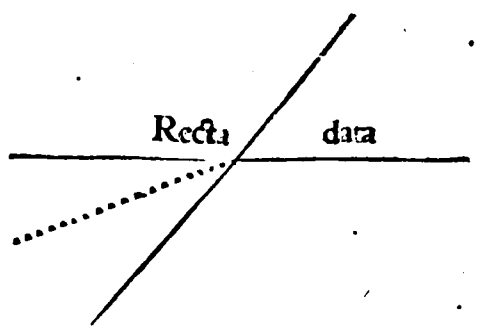
Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum duæ rectę lineæ, nõ ad eaſdem partes ductæ, deinceps ſe habentes angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

Sit quædam recta linea, ad eius etiam unum aliquod punctum, duæ rectæ lineę non ad eaſdem partes ductæ, ſic tamen, ut cum priori recta, angulos duobus rectis æquales faciant: dico quòd, quæ ad punctũ ſunt ductæ rectæ lineę, ad amuſsim una alteri iuncta ſit. Colligit ſuam demonſtrationem hæc propoſitio ex propoſitio-





ne 13 præcedẽti ab impoſsibili, ſic. Niſi enim hæ duæ rectæ, ad punctum prioris rectæ ſic ductæ, una linea ſint, ſi forte ab aliquo minus credente, atq; ſubtili nimis homine, una ductarũ ſuo modo ſecundum continuationem in rectum eiecta fuerit, per præcedẽtem 13, & illam deinde communem noticiam, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune (quod idem eſt) ſubtrahatur, &cæ. inferri poſſet, partialẽ æqualem eſſe angulo ſuo totali. Sed quia hoc eſt contra rationem & notitiam quãdam communem, quæ ſonat, Totum eſſe qualibet ſua parte maius. Non igitur continuari poteſt iuxta hoc punctũ in directũ aliter, neq; illa, cum qua iam hoc tẽtatũ eſt, neq; etiã ducta recta altera: quare hæ duæ in directũ iunctæ ſunt. Si ad aliquã

igitur

igitur rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectę lineæ, non ad eaſdem partes ductæ, deinceps ſe habentes & cæ. quod demonſtrari oportuit.

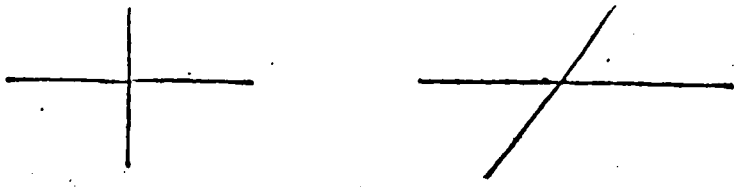
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

PROPOSITIO XV.

Si duę rectę lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: ad uerticem angulos æquales inter ſe faciunt.

Sint duæ rectę lineæ ſeſe mutuo ſecantes: dico, quòd anguli ad uerticem ſint inter ſe æquales. Eſt huius propoſitionis demonſtratio, propoſitio 13 præcedens, cũ per eam recta rectę lineę inſiſtens, ſemper duos angulos aut rectos, aut duobus rectis ęquales faciat. Quare hac propoſitione bis uſurpata, Cum quę uni ęqualia: illa & inter ſe ęqualia ſint, communi angulo ab his ęqualibus ablato: anguli tandem κατὰ κορυφὴν ęquales manebũt. Si duę igitur rectę lineę ſeſe mutuo ſecuerint: ad uerticem angulos ęquales inter ſe faciunt, quod demonſtraſſe oportuit.

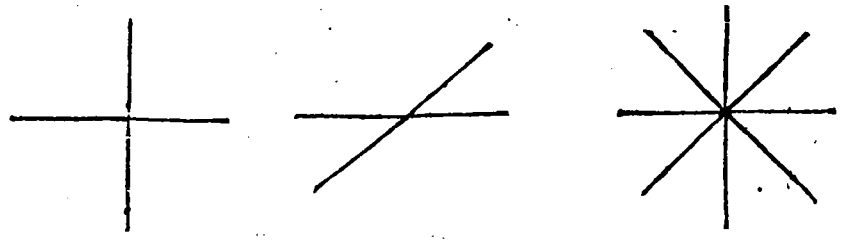


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν· Ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνουσι ἀλλήλας· τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, Quotquot rectas lineas, in eodẽ plano ſeſe mutuo interſecantes: angulos efficere quatuor rectis ęquales.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ.

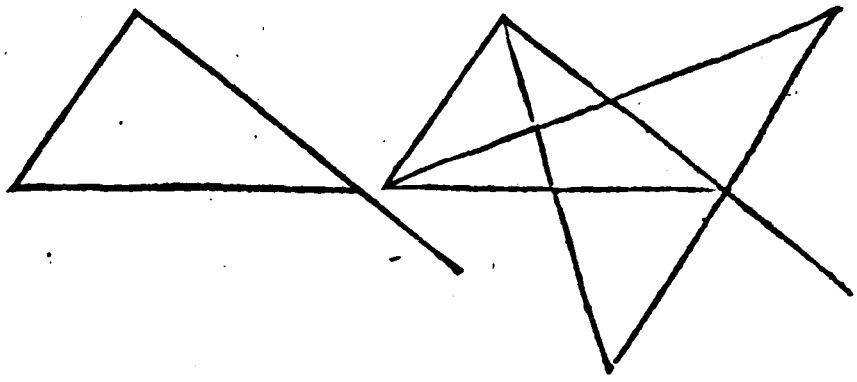
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus utroq; interno, & oppoſito, maior eſt.

Sit triãgulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, qui ſic fit externus angulus, eum utroq; interno, & ex oppoſito conſtituto, maiorem eſſe. Secentur duo latera trianguli, quę ſunt ad angulũ externũ, bifariam, deinde per diuiſionũ puncta, ab angulis, quos hęc eadem latera ſubtendunt, lineæ rectę ultra triangulũ ducantur,

ducantur, sic, ut utriusq; externa, suæ sit internæ portioni æqualis. Extremitatibus



tandem harum rectarum cum puncto, quod est duarum diuisarum communis terminus, duabus rectis lineis cõnexis, demonstrationis figura parata erit. Qua nunc diligenter perspecta, propositionum decimæ quintæ & quartæ memor, rem ita sese habere facile perspiciet.

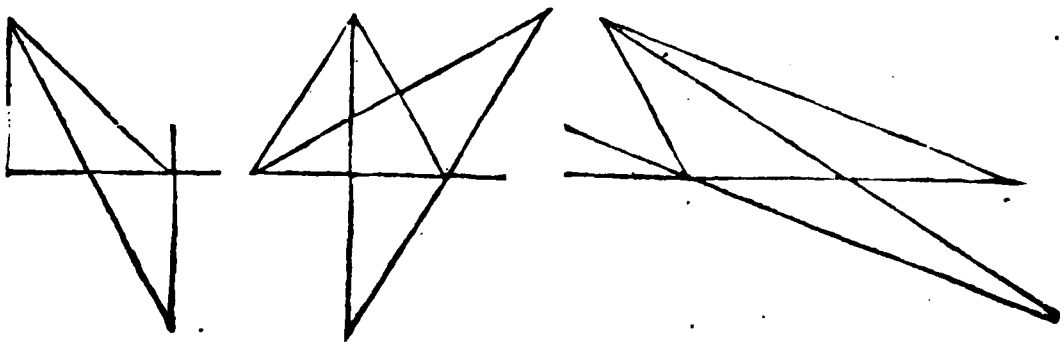
ADMONITIO.

Oportet autem, ut pro utroq; interno & opposito angulo, quo nimirum externus maior esse demonstrari debeat, duo partialia triangula sumantur, quorum alterum quidem angulum illum, de quo agitur, integrum habet: alterum deinde, quod huic ad uerticem iunctum est, tum demum propositionibus allegatis res successum habebit, quod indicare necesse erat.

SEQVITVR GEOMETRICA FIGVRA

alia, pro triangulo

orthogonio & isosc. oxygonio & æquilat. amblygonio & scaleno.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

Παντὸς τριγώνου, αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli, duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Proposito triãgulo qualicũq; dico, quoslibet eius duos angulos, duobus rectis minores esse. Producatur quoduis eius unũ latus ulterius. Et quoniã ex iam præmissa 16 propositione, angulus externus utroq; interno & opposito maior est, & rursus quoniam ex communi quadam notitia, Si inæqualibus æqualia, uel aliquod commune adiectũ fuerit, ipsa tota inæqualia sunt: priorũ inæqualiũ utriq; angulus, qui

est externo

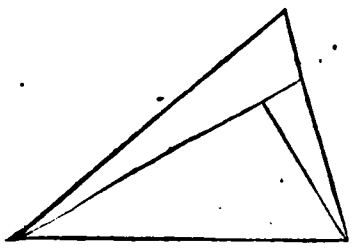
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐαν τριγώνου ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

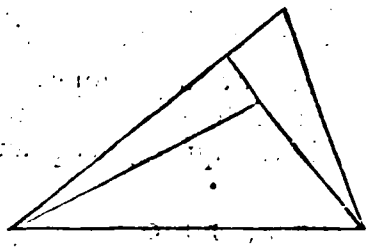
PROPOSITIO XXI.

Si ſuper trianguli uno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint: hę conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus breuiores quidem erunt, ampliorem autem angulum comprehendent.

Eſto triangulum, duæ etiam rectæ lineę, in ipſo concurrentes, ſuper unius lateris extremitatibus conſtitutæ: dico, quòd conſtitutæ hæ reliquis duobus trianguli lateribus breuiores ſint, ampliorem autem angulū comprehendunt. Sunt huius propoſitionis duæ partes. Prior, quod interiores duæ rectæ exterioribus breuiores ſint, id quod patet ex precedenti bis uſurpata, cum per eam, duo quælibet latera uniuſcuiuſque trianguli, tertio longiora ſint, & communi tandem illa notitia, Si ab æqualibus æqualia, uel aliquod commune, ſubtrahatur &cæ.



Oportet tamen, ut prius ex interioribus lineis alterutra in continuum et rectum, ad latus uſque exterius producatur, utq; triangula illa duo partialia, quorum unius quidem unum latus, linea exterior: alterius uero trianguli unum, alterius exterioris lineæ pars, latus unum fuerit, ſumantur, & ſuccedet demonſtratio. Poſterior nunc, quod angulus ſub interioribus eo, quem exteriores rectæ lineæ comprehendunt, maior ſit, ex propoſitione 16, & illa bis uſurpata, uera eſſe cõuincitur. Super uno igit alicuius trianguli latere ad extremitates eius duę rectæ interius cõſtitutę: reliquis duobus trianguli lateribus breuiores quidem ſunt, ampliorem autem angulum comprehendunt, quod demonſtraſſe oportuit.



ALIA PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Vſurpatis triangulis partialibus, quæ prius. Et quoniam, ex præcedenti 20, duo quælibet latera omnis trianguli, tertio latere longiora ſunt, & quoniam etiam, Inæqualibus æqualia ſi adijciantur: tota, ex communi quadā notitia, inæqualia ſunt, utroq; bis (uno tamen poſt alterum) uſurpato, per id demū quod dicitur, Longo breuius, lõgiore multo fortius breuius eſſe, argumento nimirum à maiori ſumpto, concluditur tandē propoſitum, Interiores ſcilicet duas exterioribus duabus, ſiquidem ſecundum propoſitionis hypotheſes conſtitutæ ſint, breuiores eſſe. quod demonſtrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας, ὡς καὶ πάντως τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.

PROPOSITIO XXII.

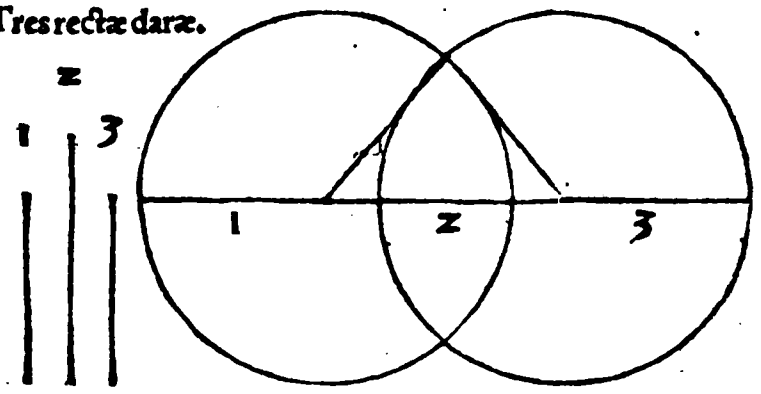
Ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere.

CAVTIO.

Oportet autem duas reliqua longiores esse, omnifariam sumptas, propterea quòd uniuscuiusq; triãguli duo latera, reliquo longiora esse oporteat, omnifariam sumpta.

Datis tribus rectis lineis, quarum quæq; duę reliqua tertia longiores sint, propositum est, ex alijs tribus rectis, quæ sunt datis tribus æquales, triangulum constituere. Ducatur igitur linea recta satis longa, ut quæ propositas rectas, adamussim cõ-

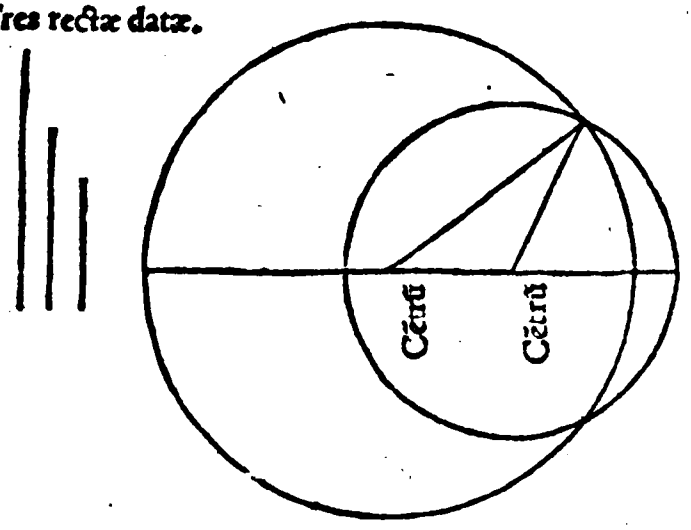
Tres rectæ daræ.



tinuatas, longitudine excedat. Hoc facto, portiones in ea, tribus datis rectis, singulæ singulis, æquales, ordine quo maximè placuerit, per 3 propositionem huius, separatim punctis signentur, ex pũctis deinde duobus intermedijs, tanquam ex duobus centris, secundum extremarum portionum quantitates seu interualla, duo circuli describantur, atq; à puncto tandem intersectionis ad dicta centra duabus rectis lineis ductis, propositioni satisfactum erit, ut quidem hoc ex definitione circuli & illa communi notitia, Eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, facile colligetur. Ex tribus igitur rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constitutum est, quod fecisse oportuit.

ALIA GEOMETRICA FIGVRA, PRO *triangulo scaleno constituendo.*

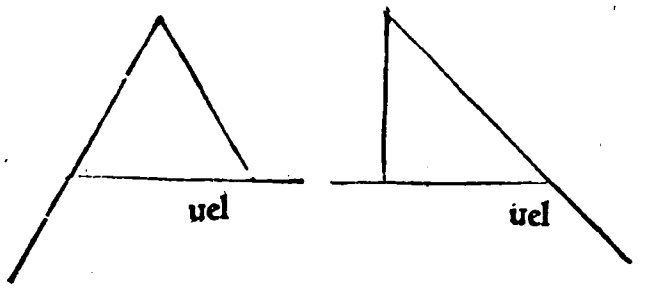
Tres rectæ datæ.



APPENDIX.

Ex hac propositione addiscuntur trium triangulorũ, Aequilateri scilicet, Isosceles & Scaleni, delineationes: cum prima unius tantum, Aequilateri scilicet, formationem nobis proposuerit. Habentur ergo sic omnium triangulorum delineationes, hic quidem

eſt externo ἐφεξῆς adiectus, & tota tandem inter ſe inæqualia eſſe conueniet: atque illud quidem maius, ubi ſcilicet eſt externus angulus: alterum uerò, duo nimi-



rum interni anguli, minus. Maius autem, cum ex propoſitione 13, duobus rectis angulis æquale ſit: alterum nũc, ut qui ſunt duo interni anguli, propter anguſtiam, duobus rectis angulis minus erit. Et quoniam hoc nũc de duobus ad placitũ ſumptis angulis, quod ipſi duobus rectis minores ſint, demonſtratum eſt: de ſingulis duobus amplius nullum dubium erit, quin & ipſi duobus rectis minores ſint, ſubinde tamen alio atq; alio latere ulterius producto. Omnis igitur trianguli duo anguli, & quæ ſequuntur, quod demonſtraſſe oportuit.

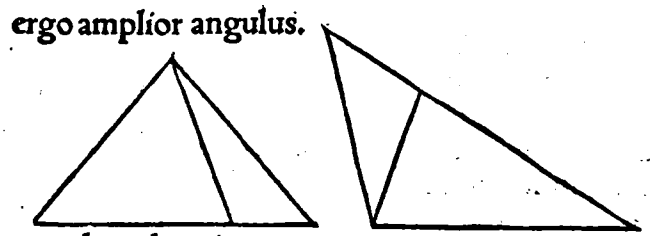
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Παντὸς τριγώνου, ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli, longius latus ampliorem angulum ſubtendit.

Sententia eſt propoſitionis. Quod latus alicuius trianguli eſt longius: illius etiã angulum quem ſubtendit, breuioris ſubtendentis angulo ampliorem eſſe. Deſcribatur igitur triangulum, duum æqualiũ, uel trium inæqualium laterum: dico quòd, cuius anguli eſt latus longius, illum etiã ampliorem eſſe. Duorum angulorũ latera, cum ex hypotheſi, unum eorum longius, alterũ uero breuius ſit, abſcindatur de longiori, per propoſitionẽ 3 huius, portio breuiori æqualis, ac trianguló formato, demonſtratio ex propoſitionibus 5 et 16 præmiſsis ſic colligetur. Quoniam formatũ triangulũ cum ſit ex ſtructura Iſoſceles: erunt ipſius ad baſim anguli inter ſe æquales. ſed quia unus horũ æqualiũ, eſt alterius cuiuſdã triãguli externus, unde ſic utroq; interno eiuſdẽ triãguli & oppoſito, maior: & alter æqualium eodẽ interno angulo maior erit. Alter autem cum ſit eius, quem longius latus ſubtendit anguli pars, internus uerò is qui à breuiori latere ſubtenditur, argumento à maiori uel fortiori ſumpto, ſi pars maior illo eſt: multo fortius igitur ipſum totum. Omnis igitur trianguli, longius latus ampliorem angulum ſubtendit: quod demonſtrari oportuit.



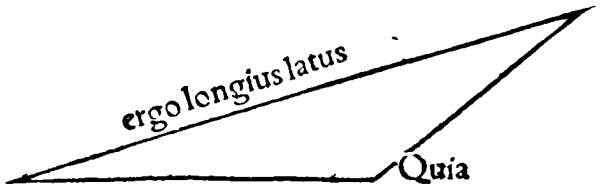
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

Παντὸς τριγώνου, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli, amplior angulus ſub longiori latere ſubtenditur.

Sententia eſt propoſitionis. Qui angulus alicuius trianguli eſt amplior: illius etiam ſubtenſum latus anguſtiorem angulum ſubtendente latere longius eſſe. Nam ſi non fuerit longius illud, de quo dicit, latus, erit id reliquorũ uni aut æquale, aut uno breuius. Quòd ſi uni æquale fuerit: angulus quem ſubtendit, atq; amplior eſt, ex hypotheſi, ex priore parte propoſitionis 5, ſibi alium æqualem angulum habebit: nõ ergo amplior. Quòd ſi uerò uno breuius, cum latus longius, ex præcedente, ampliorem angulum ſubtendat: angulus qui poſitus eſt amplior, iã uno eorũ, illo ſcilicet cuius longius eſt ſubtenſum latus, anguſtior erit. Sed quia non eſt: neq; etiam eius latus alio breuius erit: longius ergo. In omni igitur triangulo amplior angulus longius latus requirit, ſeu ſub longiori latere ſubtenditur, quod demonſtraſſe oportuit.



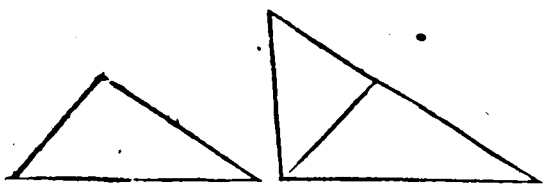
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Παντὸς τριγώνου · αἱ δύο πλευραὶ τῆ λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

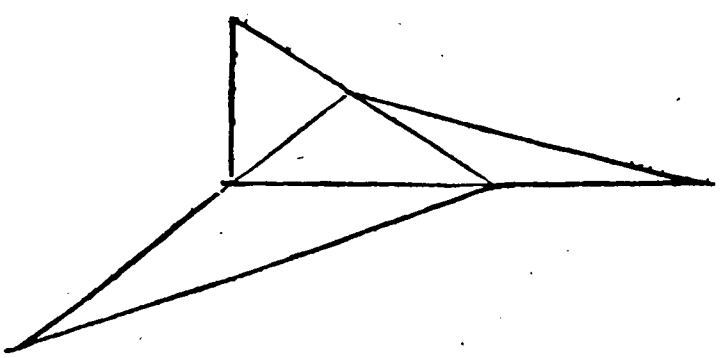
PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli, duo latera reliquo longiora ſunt, omnifariã ſumpta.

Eſto triangulum qualecunq; : dico, quòd eius qualitercunq; ſumpta duo latera ſimul, tertio reliquo longiora ſint. Horum duorum laterum, quæ demonſtrari debeant, quòd tertio reliquo longiora ſint, unum ad longitudinem lateris alterius, ex illa parte ubi eſt communis eorum copula, ultra triangulum continuatur, quẽ deinde hæc duo æqualia, uel hæ duæ æquales rectæ lineæ comprehẽdũt angulum, is tertia quadam linea recta, ut triãgulum fiat, claudatur. Et quoniam illi duo anguli, qui ratione trianguli Iſoſcelis, ex priore parte quintę, inter ſe æquales ſunt, mox ubi uni eorum, partiali nimirum, altera pars acceſſit: totus nũc altero æqualiũ maior erit. Sed quoniã qui maior & amplior eſt in triangulo angulus, longiorẽ ex propoſitione 19 ſubtenſam requirit: illa etiã quę ex duobus dati trianguli lateribus cõtinuata eſt, ea linea, id eſt, tertio reliquo latere longior erit. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo longiora ſunt, omnifariam ſumpta, quod demonſtraſſe oportuit.



SEQVITVR FIGVRA GENERALIS PRO *ſingulis binis lateribus expoſita.*



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

uigesimam tertiam præcedentem, ad æqualitatem minoris formari, & idem fuisset.

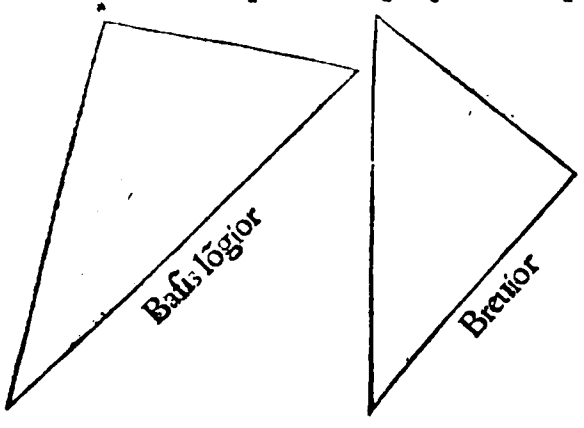
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrũque utrique, habuerint uerò basim basi longiorem: & angulum angulo ampliorem habebunt, eum quem æquales rectæ lineæ comprehendunt.

Sint huiusmodi, qualia hæc propositio requirit, duo triangula: dico, cuius trianguli basis est longior, illius etiam angulum, quem æquales rectæ comprehendunt, ampliorem esse. Nam æquales ne sint anguli, uetat hoc propositio 4, cum sic & bases, per eam, contra hypothesim, inter se æquales esse deberent. Ampliorẽ deinde positũ angustiore minorem, uel contrà, Angustiorem positum ampliore esse maiorem, per propositionẽ præcedentẽ nõ admittitur. Quare ampliorẽ positum in uno, propter longiorẽ basim, illo in triangulo altero, cuius est basis breuior, ampliorem esse necesse est, quod demonstrari oportuit.



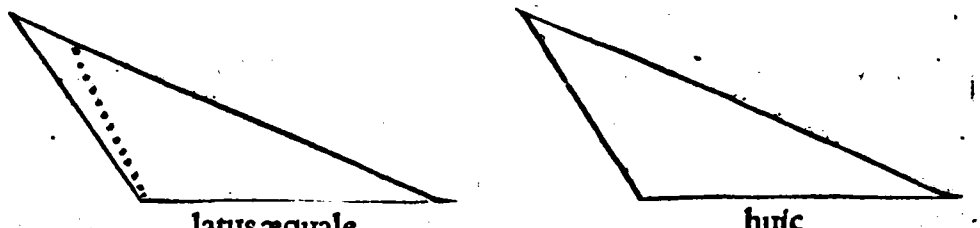
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrunq; utriq;, unũq; latus uni lateri æquale, siue id quod est inter æquales illos angulos, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrunq; utriq;, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

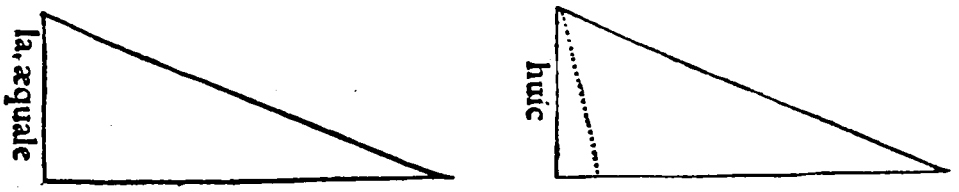
Sint huiusmodi, qualia hæc propositio requirit, duo triangula, ubi scilicet duo



latus æquale huic

anguli unius, duobus angulis alterius sint æquales, latus item unius unũ, lateri unius alterius

alterius trianguli, siue id quod ęqualibus angulis interiicitur, siue reliquorum alterum fuerit, æquale: dico quòd & reliqua latera reliquis lateribus, utrunq; utriq;, atque etiã reliquus angulus reliquo angulo æqualis sit. Quantũ ad primum, ubi scilicet ęquale latus ęqualibus angulis interiectum est, si alterutrum ex reliquis non concedatur suo correspondenti lateri in altero triangulo esse ęquale, ut ei inęquale sit, certe concedendum erit. à longiori igitur (ut quidem suo modo fieri poterit) ex parte reliqui tertij anguli, per propositionem tertiam, portio, breuiori lateri ęqualis, abscindatur: & à puncto tãdem sectionis ad angulum cui hoc latus subtensum est, linea recta ducatur. Describitur autem sic triangulum quoddam partiale aliud, quod, quia suo totali triangulo superponitur, per propositionẽ deinde quartã, alij posito triangulo ęquale est, infertur tandem per illam communem noticiam, Quæ uni ęqualia &cę. partialẽ angulum suo totali, uel contrà, totalẽ suo partiali angulo esse ęqualem, quod est impossibile. Alterum igitur reliquum latus in uno, alteri reliquo lateri in triangulo altero æquale est. Quoniam autem iam duo sunt quartæ propositionis triangula, cum tertium latus, per hanc quartam, tertio ęquale sit: reliqua duo latera reliquis duobus lateribus, utrunq; utriq;, ut infertur, ęqualia erunt. Quantum ad secundum, ubi ęquale latus uni ęqualium angulorum subtenditur: & hic reliqua duo latera & angulus in uno, reliquis duobus lateribus & angulo in triangulo altero ęqualia esse colligetur. Quod si concedatur, non erit opus ullam demonstrationem adducere. Sin minus, erit alterutrũ è duobus in uno, suo correspõdenti latere in altero triangulo lõgius: quod & ipsum, sicut in priori parte huius factũ, ad ęqualitatem alterius si ponatur, atq; deinde triangulũ formetur, contra propositionem decimam sextam, quarta tamen prius usurpata, angulũ externum suo



interno opposito æqualẽ esse, ei qui hoc contradicit, obijcietur. Quare qua sanè ratione, quantũ ad latera, cõtrariũ quis inferre tentauerit, irridendũ se exponet. Quòd preterea & angulus reliquus reliquo angulo sit ęqualis, id ex propositione 4 uel 8 habetur. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis ęquales habuerint, utrunq; utriq;, unumq; latus, uni lateri, & reliqua, quod demonstrasse oportuit.

ADMONITIO.

Necesse autem uidetur, ut primò quidem ea, quæ inter æquales angulos posita sunt, latera, ęqualia inter se esse, atq; tum demum reliquorum duorum laterum, angulos nimirum ęquales subtendentium, æqualitas demonstretur. Nam aliàs, si fortè hæc quæ ęquales angulos subtendunt latera, primò æqualia inter se esse demonstrare quis conaretur, res fortè tardius successura esset: id quòd obiter duxi indicandum. Idem ferè usuenit in propositione septima libri sexti, ubi non duorum reliquorum, hoc est tertiorum in triangulis angulorum, uerùm eorum qui inter proportionalia latera positi sunt, angulorum æqualitas, primò demonstranda est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα εμπίπτουσα, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas recta linea incidens, alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Cadat

hic quidem, eorum qui ſecundum diuerſitatem laterum nomina ſua ſortiuntur: illic uerò, nimirum circa 11 & 12 propoſitiones, ubi de Perpendiculari ducenda ſermo erat, prout conſiderantur hæc, & nomina ſua habent ab angulis, quod obiter dicere uolui.

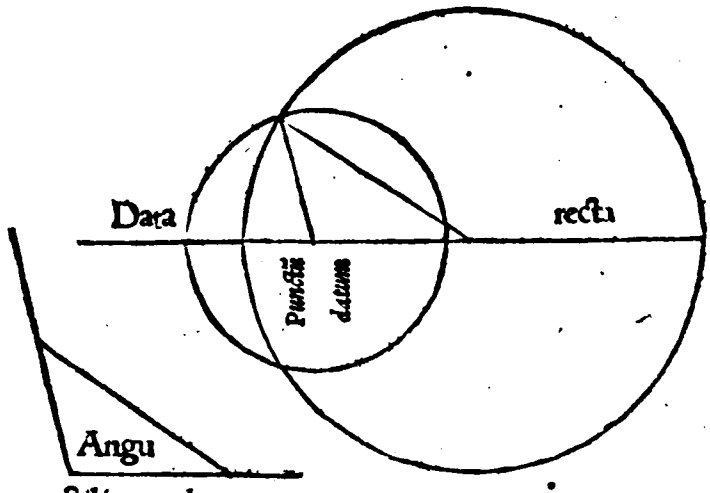
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Sit recta linea data, punctum etiam in ea datum: ſitq; deinde & angulus quidã rectilineus datus, atq; propoſitum, ad id punctum ad hanc item rectam lineam, dato rectilineo æqualem rectilineum angulum conſtituere. Subtendatur primò dato angulo recta quædam linea, quomodocunq; hoc fiat, ut appareat triangulum, ad



lus rectilineus datus

datam rectam deinde, ſecundum quantitatem trium rectarum, quæ ſunt tribus formati iam trianguli lateribus æquales, triangulum, per propoſitionem 22 præmiſſam, conſtituatur, ſic tamen, ut quę datum angulum comprehendunt latera, eorum portiones uel lineæ æquales, in data recta iuxta punctum ſignentur, et factum erit. Colligitur autem huius rei demõſtratio ex ſtructura, communi illa notitia, Eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, propoſitione tandem octaua huius, quod indicandum erat. Ad datam igitur rectam lineam, datumq; in ea punctum dato angulo rectilineo, æqualis angulus rectilineus conſtitutus eſt. quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

Ἐαν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

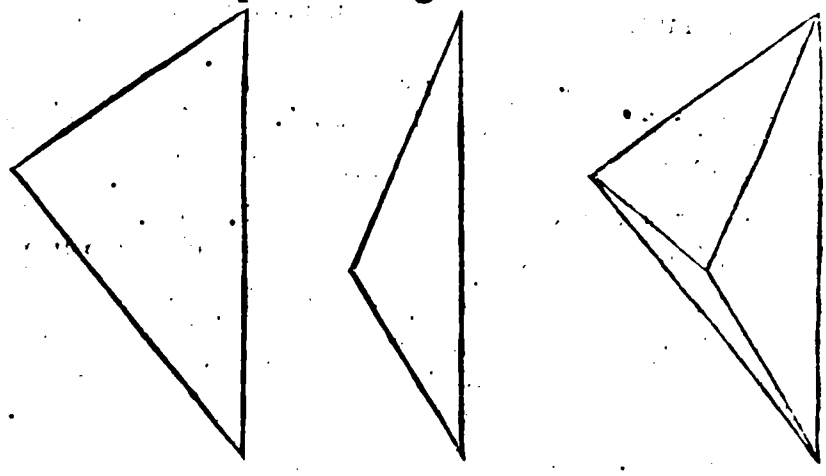
PROPOSITIO XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrũque utriq;, habuerint uerò angulum angulo ampliorem, eum qui ſub æqualibus rectis comprehenditur: & baſim baſi longiorem habebunt.

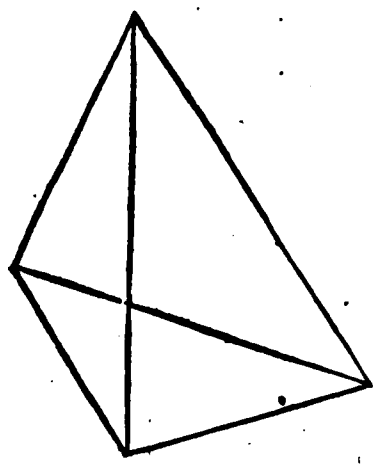
Sint huiuſmodi qualia hæc propoſitio requirit, duo triãgula: dico baſim illius trianguli, quod ſub æqualibus rectis ampliorem cõprehendit angulum, alterius trianguli baſi longiorem eſſe. Cum enim, ex hypotheſi, angulus inter æquales latera in

uno amplior ſit angulo, itidem inter æqualia latera, in triangulo altero, ille qui mi-

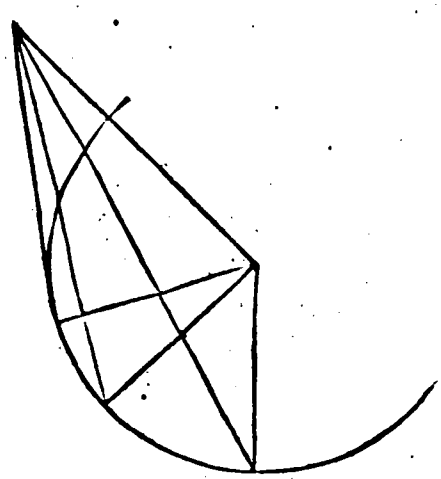
amplior anguſtior



nor eſt, per propoſitionem 23 præcedentẽ, ut ſit ampliori angulo æqualis, augeatur, ab angulo lineam, proximæ rectæ æqualem, educendo. Huic deinde angulo totali iam facto, recta linea ſubtenſa: erit triangulum hoc, per propoſitionem 4, alíj poſito æquale. Formetur nunc triangulum aliud, duas æquales rectas ſuis extremitatibus recta quadam linea coniungendo. Et quia triangulum, ex ſtructura, eſt Iſoſceles: erunt anguli ad baſim, ex priori parte propoſitionis quintæ, inter ſe æquales. Per additionem nunc & ſubtractionẽ angulorum qui his æqualibus angulis adhærent, cum ex decima nona ampliori angulo longius latus ſubtendatur, propoſitum tandem, ubi æqualis pro equali linea ſumitur, inferri poterit: Amplioris ſcilicet anguli in uno, baſim longiorem eſſe, quàm ſit baſis in altero triãgulo anguli anguſtioris, quod demonſtraſſe oportuit.



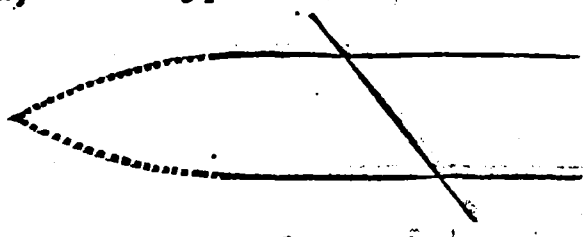
SEQVITVR FIGVRA PRO TRIANGVLIS TRIbus expoſita, necnon ex tertio Euclidis libro deſumpta.



APPENDIX.

Potuiſſet etiam econtrario, maior angulus, in ſtructura, & id per propoſitionem uigeſimam

Cadat in duas rectas recta linea alia, esto etiam quòd anguli qui sic fiũt alternatim, sint inter se ęquales: dico has duas rectas inter se parallelas esse. Nam si non: producta hę et continuatæ, in aliqua parte concurrent, unde sic angulus externus formati trianguli, per propositionẽ 16, interno opposito æqualis. Hoc autem quia est cõtra propositionis hypothesim, non concurrũt ergo: Quę autem in eodem plano existentes rectæ lineæ, in neutra parte concurrunt, si erectæ & continuatæ fuerint, cum, ex definitione, parallelæ sint: parallelæ sunt & istæ ducię. Si in duas igitur rectas recta linea incidens alternatim angulos ęquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se ipsæ rectę lineæ: quòd demonstrasse oportuit.



DEFINITIO ANGVLORVM ἐναλλὰξ.

Porro anguli φαλλὰξ positi, quos Alternatim uertimus, sunt, quos incidens recta cum rectis datis interius, in diuersis partibus, atq; ex opposito constituit & cõprehendit.

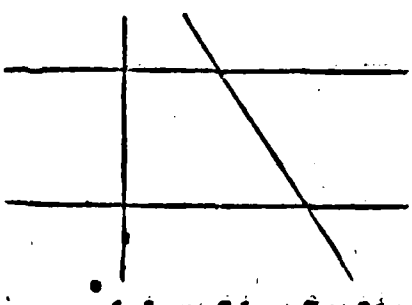
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Ἐαν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta linea incidens, externum angulũ interno & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, aut internos & ad easdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Habet hęc propositio duas partes, quarum utraq; ex sua propria hypothesi, duas illas lineas, in quas nimirum tertia cadit, parallelas esse infert. Prior autem patet ex precedenti, angulis, qui per propositionem 15 inter se sunt ęquales, inter se mutatis. Posterioris nunc demonstratio sic habetur. Quoniã enim recta rectę insistens alij, et angulos faciens, ex propositione 13 aut duos rectos, aut duobus rectis ęquales angulos facit, & quoniam etiam, ex presenti hypothesi, interni illi qui ad easdem partes sunt anguli, duobus rectis ęquales sunt, cũ ã illi duo, quos nimirum incidens cum alterutra rectarũ facit, quàm etiam hi, qui interius ex una & eadẽ parte appareãt anguli, duobus rectis, tanquã uni cuidam ęquales sint: ex cõmuni quadã notitia, & illi duo his duobus angulis ęquales erũt: atq; de utroque deinde, eo angulo, quem hęc duo ęqualia cõmunem habent, subtracto: & qui relinquuntur anguli, ex communi quadam notitia, inter se ęquales erunt. Quia autem reliqui hi aut φαλλὰξ anguli sunt, aut uerò ad easdem partes unus externus & alter internus oppositus, si φαλλὰξ fuerint: ex præcedenti 27: si uerò unus externus, alter internus, ex priore parte propositionis huius, tandem concluditur propositum, has scilicet rectas, in quas alia eo modo, ut dictum est, cadit, parallelas esse. Si igitur in duas rectas recta linea incidens, externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit: aut internos & ad easdem partes, duobus rectis ęquales: parallelæ erunt inter se hæ duæ rectæ lineæ, quod demonstrasse oportuit.



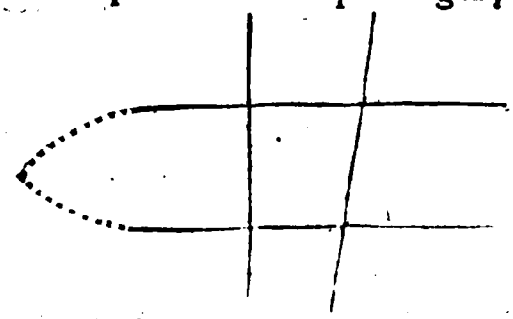
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

Η εἰς τὰς παραλλήλους ἐυθείας ἐυθεῖα ἐμπίπτουσα· τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ· καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην· καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas recta linea incidens: et alternatim angulos inter se æquales efficit: & externum interno & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem: & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

Sunt huius propoſitionis partes tres, quarum ſingulæ parallelas rectas lineas, & rectam deinde aliam, quę in illas parallelas utcunq; cadat, requirunt. Hinc itaq; prima quidem pars, angulos alternatim poſitos æquales: ſecunda uerò, externũ interno, & oppoſito atq; ad eaſdem partes, æqualem: tertia autem, ipſos internos ad eaſdem partes, duobus rectis angulis æquales eſſe aſſerit. Prima pars ab impoſſibili ſic patet. Eſto enim quòd anguli ἐναλλὰξ ſint inter ſe inæquales. Et quoniã inæquales ſunt anguli ἐναλλὰξ, alter nimirum altero amplior, angulo igit̃ eo qui amplíori eſt ἐφεξῆς, ex æquo inæqualibus illis angulis addito: & ipſa tota, ex cõmuni quadam noticia, inter ſe æqualia erunt. Quia autem unũ eorum, maius ſcilicet, per propoſitionem 13, duobus rectis eſt æqualis, alterum quod minus eſt, duobus rectis angulis minus erit: ex illa igitur parte ubi minores duobus rectis ſunt anguli, hæ duæ rectæ, ex communi quadam noticia concurrent. Non concurrunt autem, cum ſint ex hypotheſi, rectæ parallelæ: neq; anguli etiam illi ἐναλλὰξ inæquales inter ſe erunt: æquales igitur eos eſſe, ut prima pars aſſerit, concedendum eſt. Quo nunc conceſſo, cum per propoſitionem 15 ad uerticem anguli ſint inter ſe æquales, æquali nunc pro æquali angulo ſumpto, uel illa cõmuni noticia, Quæ eidem æqualia, & inter ſe æqualia ſunt: etiam angulus externus interno oppoſito, atq; in eadem parte ſumpto, æqualis erit, quod eſt ſecundũ. Non aliter per propoſitionem 13, & hic æquali pro æquali angulo ſumpto, tertię propoſitionis parti ſatisfieri poterit. In parallelas igitur rectas recta linea incidens, & quę ſequuntur, quod demonſtraſſe oportuit.

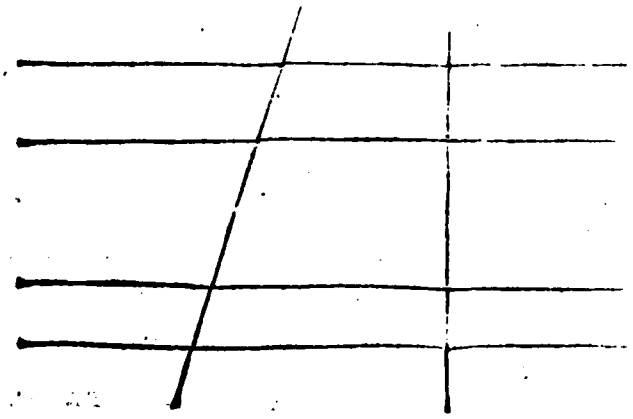


ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

Αἱ τῇ αὐτῇ ἐυθείᾳ παράλληλοι· καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ: & inter ſe ſunt parallelæ.



Sint duæ uel plures rectæ uni alicui rectæ lineæ parallelæ: dico, illas & inter ſe parallelas eſſe. Quod quidem facile, ex propoſitionibus 29 & 27, uel 29 & 28, ſi recta priuſ alia in propoſitas rectas lineas utcunq; inciderit, demonſtrari poteſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

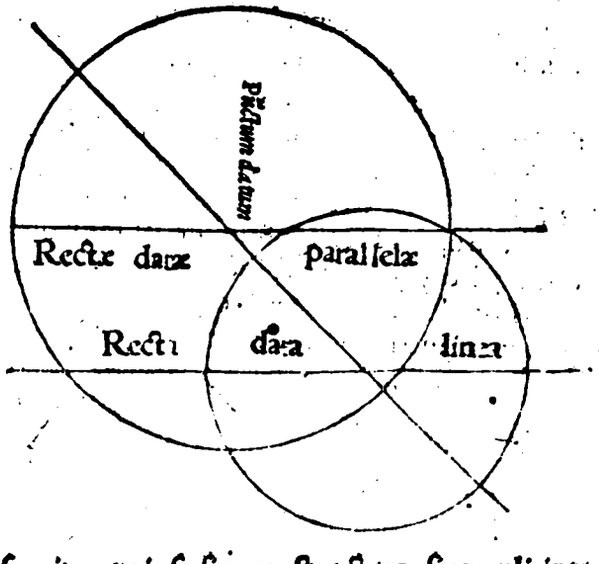
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ ἐυθείᾳ παράλληλον ἐυθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XXXI.

A' dato puncto, datæ rectæ lineæ: parallelam rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, recta etiam linea data, atq; propoſitum, à dato puncto educere rectam lineam, datæ rectæ parallelam. Signetur igitur in recta data punctum ubicunq;, à quo deinde ad punctum datum, recta quadam linea ducta, ad hanc lineam atq; ad punctum datum, angulorum modo deſcriptorum uni, uter is fuerit & eligatur, per propoſitionem 23, angulus æqualis conſtituatur. Quòd ſi tandem hæc ultimò ducta recta linea, uerſus alteram partem in rectum, prout quidem hoc propoſitio 14 requirit, continuata fuerit: propoſitioni ſatisfactũ erit, cum hæc quæ iam ducta eſt linea, ipſa ſit quæ quærebatur.



Demonſtratio ſumitur ex ipſa figuræ ſtructura, ſi anguli, inter ſe æquales facti, alterni poſiti eſſe conſiderentur, id quod admoniſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

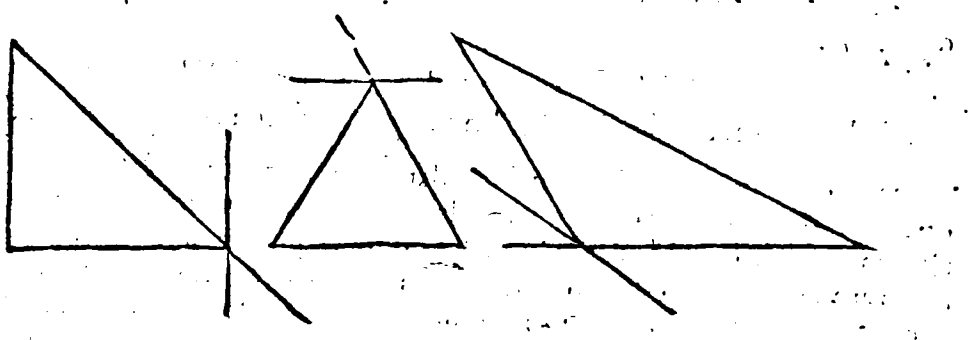
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ τοῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί. Καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto: externus angulus duobus internis & oppoſitis æqualis eſt. Et trianguli tres interni anguli, duobus ſunt rectis æquales.

Sit triangulum, productum etiam ulterius unum eius latus: dico, quòd angulus qui ſic fit externus, duobus internis & oppoſitis angulis æqualis ſit. Et quod etiam ratione corollarij, ex hac ipſa & tredecima propoſitione deſumpti, Trianguli tres anguli interni, duobus rectis æquales ſint. Ducatur per angulum externum linea, trianguli tertio lateri parallela. Et quoniã in parallelas rectas lineas recta incidens, tam alternatim poſitos angulos, ex prima parte propoſitionis 29, inter ſe æquales, quàm etiam externum interno oppoſito, atq; in eadem parte conſtituto æqualem

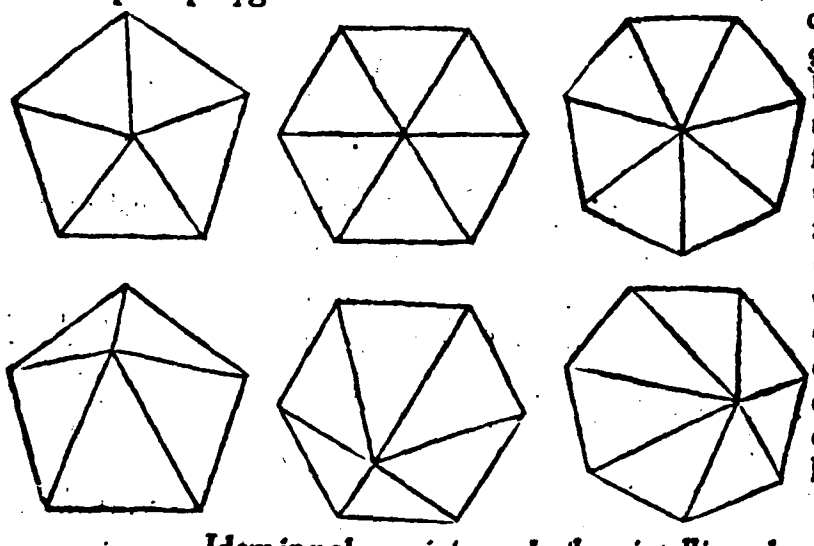
facit, ex ſecunda parte propoſitionis eiuſdem, cum æqualia æqualibus additis, tota etiam, ex communi quadam noticia, inter ſe æqualia ſint: ipſi propoſitio-



ni iam ſatisfactum erit. Corollarij uerò demonſtratio, ex hac ipſa, & propoſitione præcedenti 13, unde nimirum illud deſumptũ eſt, intelligi poteſt, ſi interim ad horum duorum ęqualium utrunq; tertium angulum interiorem reliquum, qui nimirum eſt externo ἐφεξῆς, aliquis aſſumpſerit. Omnis igitur trianguli uno latere producto; externus angulus duobus internis & oppoſitis ęqualis eſt. Et trianguli tres interni ànguli, duobus ſunt rectis ęquales: quod demonſtraſſe oportuit.

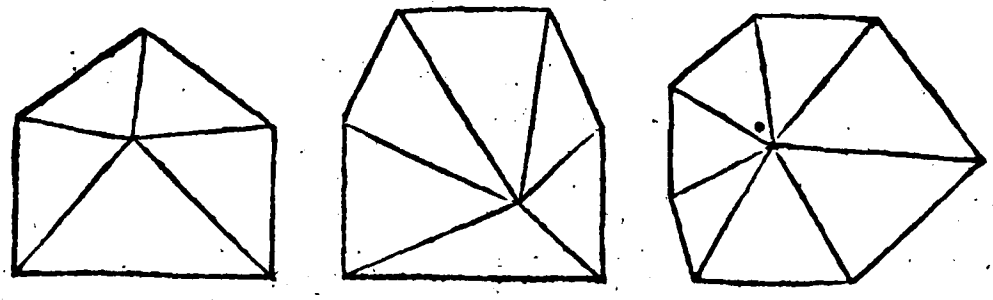
APPENDIX.

Et quia, ut corollarium habet, tres anguli interni omnis trianguli, duobus rectis angulis ſunt æquales, & quia etiam, ut quidem ex corollario propoſitionis 15, uel ipſa propoſitione 13 colligi poteſt, circa omne punctum, unde nimirum rectæ aliquot lineę egrediuntur, qui apparent anguli, uniuerſi ſimul, quatuor rectis ſunt æquales, cum unumquodq; Polygonum, ubi ad punctũ aliquod, in ea ubiuis ſumptum, ab angulis ipſius ſingulis rectę lineæ ductę fuerint, in tot triangula quot nimirum ipſum polygonum in ſuo ambitu latera habuerit, ſubdiuidi poſsit, ſequitur,



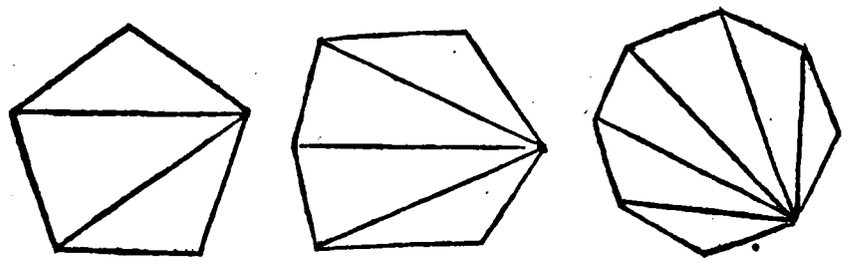
quòd omnes anguli uniuſcuiuſq; Polygoni ſimul, tot rectis angulis ſint æquales, quot unitates habuerit numerus, quẽ quidẽ duplum laterũ eorũ, demptis inde quatuor, indicat. Hoc aũt ex ſequentibus figuris et cernere & intelligere licebit.

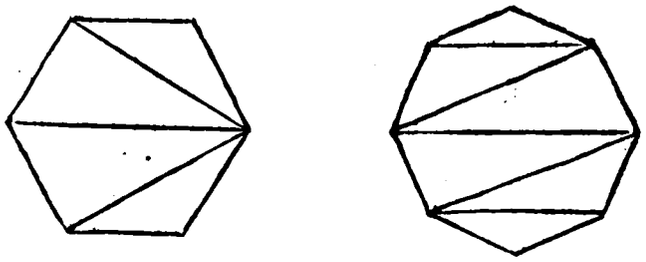
Idem in polygonis irregularibus intelligendum.



Subdiuiduntur

Subdiuiduntur etiam polygona in ſua triangula, ubi ab uno propoſiti polygoni angulo ad omnes reliquos, præter eos quos à latere habet, angulos rectæ lineæ ductæ fuerint. Vel aliò quodam modo, pro alicuius induſtria, in ſua triangula ſubdiuidi polygona poſſunt. Primus tamen modus, cum ex demonſtratione procedat, reliquis preferendus erit.





Atque hæc, de Polygonorum in ſua triangula diuiſione dicta, ſufficiant.

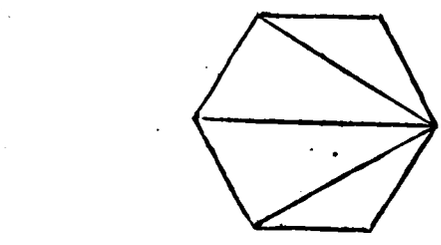
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

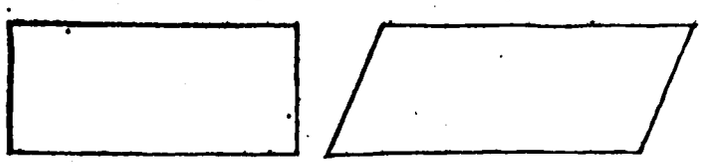
Αἱ τὰς ἴσας τὲ καὶ παραλλήλους ἀπὸ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

PROPOSITIO XXXIII.

Aequales & parallelas ad eaſdem partes rectæ lineæ coniungentes: & ipſæ æquales & parallelæ ſunt.

Sint æquales & parallelæ rectę duę lineę, ſuis etiam extremitatibus utrinq; duabus rectis lineis alijs coniunctę: dico, quòd et ipſę rectę lineæ alię, æquales inter ſe et parallelę ſint. Ducta enim in figura diametro, cum ex prima parte propoſitionis 29, anguli alternatim poſiti ſint inter ſe æquales: quòd & coniungentes rectę inter ſe æquales ſint, ex propoſitiõe 4 intelligi poterit. Quòd uerò eędem rectę ſint etiã parallelę, cum ex allegata propoſitione 4, anguli qui alternatim ponuntur, inter ſe æquales ſint: et id tandẽ, ex propoſitione 27, manifeſtabitur. Aequales igitur & parallelas ad eaſdem partes rectę lineę coniungentes, & ipſę æquales & parallelę ſunt: quod demonſtrari oportuit.





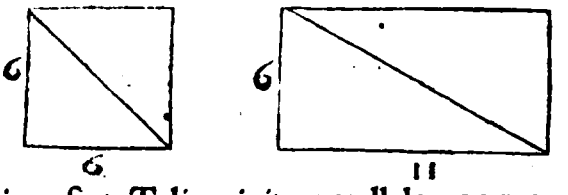
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

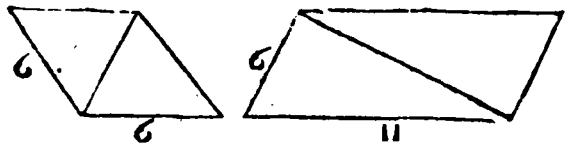
Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων καὶ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

PROPOSITIO XXXIIII.

Parallelogrammorum locorum. & latera & anguli oppoſita, æqualia inter ſe ſunt. Et diameter ea bifariam ſecat.

Parallelogrammum, ut uocabuli ἔτυμον indicat, eſt figura, ſub parallelis rectis lineis comprehenſa. Fit autem ſeu deſcribitur parallelogrammum, per ductam rectam lineam, punctumq; extra eā ſumptum, ſi ex hoc puncto, per propoſitionem 31 & 3, rectę ductę parallela æqualis ducatur, utriuſq; rectæ deinde extremitates, duabus rectis lineis iungantur: & erit, quod ſic deſcribitur, parallelogrammum, propterea quòd poſteriores ductæ, ęquè ut priores duæ rectæ, ex propoſitione 33 præcedenti, parallelæ & inter ſe ęquales lineæ ſint. Talium igitur parallelogrammorum locorum, ſeu talium figurarum, & latera & anguli oppoſita, æqualia inter ſe ſunt. Ducatur in figura diameter. Et quoniã anguli alternatim poſiti, ex prima parte propoſitionis 29, inter ſe ęquales ſunt, unde ſic duo triangula, qualia propoſitio 26 requirit, apparent, quòd latera oppoſita inter ſe ęqualia ſint, angulus item unus ſuo oppoſito ęqualis, per hanc 26 propoſitionem inferri poteſt. Et rurſus quoniam, Si ęqualibus æqualia adijciãtur, ex cõmuni quadam noticia, ipſa tota ęqualia ſunt: huius ſententiæ memor, alterum etiam ſuo oppoſito angulo ęqualem eſſe, facile concedet. Patet itaq; prior propoſitionis pars. Poſterior nunc, quòd ſcilicet diameter ipſum parallelogrammum bifariam ſecet, ſi quis ſuſpicetur id nondum eſſe demonſtratum, per propoſitionẽ quartam id deprehendet. Parallelogrammorum igitur locorum & latera & anguli oppoſita, æqualia inter ſe ſunt. Et diameter ea bifariam ſecat, quod demonſtrari oportuit.





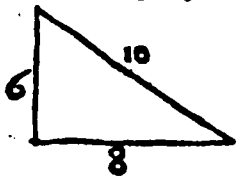
APPENDIX.

Quoniam autem hęc propoſitio 34, & multę etiam ſequentes, in numeris, quantitate nimirum diſcreta, non minus atq; in quantitate continua, ueræ eſſe reperiuntur, quo id oſtendamus commodius, canonem quendam generalem, per quẽ omnis generis triangulorum (modo latera eorum nota fuerint) areæ inueniri poſſent, ſubijcere neceſſe fuit, his uerbis.

Trianguli, cuius aream propoſitum eſt inuenire, latera primò in unum colligãtur, à medietate deinde huius collecti ſingula trianguli latera ſubtrahantur. Relinquuntur autem tres numeri, qui unà cum medietate collecti ex lateribus, tanquam numero quarto, ſi inter ſe multiplicati fuerint, primus ſcilicet cum ſecundo, productum hoc cum tertio, quodq; iam producetur cum numero quarto (nec refert quo ordine numeri ſumantur, qui ue pro primo, ſecundo, tertio uel quarto reputetur) tũ huius ultimi producti radice quadrata, quanta propoſiti trianguli area fuerit, manifeſtabitur.

SEQVVNTVR HVIVS CANONIS EXEMPLA.

Triangulũ propo.



Latera trianguli	Exceſſus uniuſcuiuſque lateris reſpectu medietatis, aggregati ex lateribus.
10	2
8	4
6	6
24 laterum ſumma,	Quatuor numeri
12 laterum mediet.	2 4 6 12

Inſtituantur

Instituantur nunc multiplicationes.

prima	secunda	tertia
12	6	24
2	4	24
24 primum	24 secun.	576 ultimũ productũ

Quadra. Radix 24. Tanta igitur est triangu-
lí, cuius latera sunt 16 8 6, area.

EXEMPLVM IN IRRATIONALIBVS.

Latera	Excessus
$\sqrt{180}$	$9 - \sqrt{45}$
12	$\sqrt{45} - 3$
6	$\sqrt{45} + 3$
Sum. $18 + \sqrt{180}$	Medietas $9 + \sqrt{45}$

Quatuor numeri.

$9 - \sqrt{45}$ $\sqrt{45} - 3$ $\sqrt{45} + 3$ $9 + \sqrt{45}$

36 primum 36 secundum productum

Tertiò multiplicentur 36
cum 36
producuntur 1296, cuius radix
quadrata 36. area est trianguli.

ABBREVIATIO CANONIS PER COMPENDIVM.

Cum tertiæ multiplicationis numeri, qui nimirum ex prima & secunda multiplicatione proueniunt, inter se fuerint æquales, id quod sæpe contingit, in his item duobus exemplis euidens est, eadem tertia multiplicatio negligitur, nec etiã extractione radicis quadratæ tum opus erit. Verùm statim per alterutrum productorum, primum uel secundum, trianguli area indicabitur.

EXEMPLVM CANONIS ALIVD.

Est autem in hac 34 propositione triangulum figuræ primæ.

Latera	Excessus
$\sqrt{72}$	$6 - \sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
6	$\sqrt{18}$
Sum. $12 + \sqrt{72}$	Meditas $6 + \sqrt{18}$.

Primum productum sunt 18, secundum tantundem, tertium deinde 324. huius postea radix 18, area est trianguli, atq; medietas etiam parallelogrammi uel figuræ primæ, quod hoc canone ostendere oportuit.

Potuisset ex cõpendio iam præscripto, tertia multiplicatio negligi, ac statim per 18 uel 18, primum scilicet uel secundum productum, quæstioni responderi, quod idem fuisset.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE SECVNDAE.

Latera	Excessus
$\sqrt{157}$	$\frac{17}{2} - \sqrt{\frac{157}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{157}{4}} - \frac{5}{2}$
6	$\sqrt{\frac{157}{4}} + \frac{5}{2}$
Sum. $17 + \sqrt{157}$	Meditas $\frac{17}{2} + \sqrt{\frac{157}{4}}$

Quatuor

Quatuor numeri.

$3\frac{3}{4}$ primum

$12\frac{1}{2} - \sqrt{157\frac{1}{4}}$ $\sqrt{157\frac{1}{4}} - 6\frac{1}{2}$ $\sqrt{157\frac{1}{4}} + 6\frac{1}{2}$ $12\frac{1}{2} + \sqrt{157\frac{1}{4}}$

$33\frac{3}{4}$ secundum productum

Et quia tertiæ multiplicationis numeri inter se æquales sunt, ideo ea omittitur, nec etiam, extractione radicis quadratæ, ut superius dictū est, opus erit. Trianguli igit̃ propositi, hoc est parallelogrammi medietas, area, sunt $33\frac{3}{4}$, quę erat inuenienda.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE TERTIAE.

Latera	Excessus
6	$\sqrt{15} - \sqrt{3}$
6	$\sqrt{15} - \sqrt{3}$
$\sqrt{60} - \sqrt{12}$	6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$
Sum. 12 plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$	Medias 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Quatuor numeri.

$\sqrt{15} - \sqrt{3}$ $\sqrt{15} - 3$ 6 minus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$ 6 plus $\sqrt{15} - \sqrt{3}$

Primum $18 - \sqrt{180}$ secundum 36 minus $18 - \sqrt{180}$

Tertium productum 144. Atq; huius nunc radix quadrata, nimirum 12, area est trianguli.

SEQVITVR TRIANGVLVM FIGVRAE QVARTAE.

Latera	Excessus
radix qua. residui $157 - \sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ minus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$
11	ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$
6	ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$
17 plus ra. qua. re. $157 - \sqrt{9680}$	Me. $8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. re. $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$

Instituantur nunc multiplicationes.

Prima.

Radix qua. residui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$
Radix qua. residui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$
producuntur $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$.

Secunda.

$8\frac{1}{2}$ plus radix qua. residui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$
$8\frac{1}{2}$ minus radix qua. residui $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$
producuntur $72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$.

Tertia.

$39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$
$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} - \sqrt{605}$
$2835\frac{13}{16} - \sqrt{\frac{5065302025}{16}}$ item $245\frac{5}{16} - \sqrt{\frac{2781225}{16}}$
minus $2145\frac{9}{16} - \sqrt{\frac{5065050580}{16}}$
minus $451\frac{9}{16}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{5065050580}{16}}$
minus $2597\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{5065050580}{16}}$

Facta subtractione, manent 484, cuius radix, 22, area est trianguli.

Vel,

Vel, quæsitis productis, primo scilicet & secundo, calculo exquisitiore, ueniũt

33 — √ 605 primum

√ 605 — 33 secundum.

Quibus nunc inter se multiplicatis, producuntur 484, ut prius: cuius etiam radix, ut prius, 22, trianguli aream representabit.

SIMILE EXEMPLVM PER RATIONALES, PERinde ac si irrationales essent numeri, expositum.

Latera.

6

Radix qua. lineæ ex binis nominib. 40 + √ 576, hoc est. 8,

10

Excessus.

Radix quadrata binomij 10 + √ 36 plus, 2 hoc est 6

8, minus radix, qua. binomij 10 + √ 36 hoc est. 4.

Radix quadrata binomij 10 + √ 36 minus, 2 hoc est 2.

Med. 8, plus radix qua. binomij 10 + √ 36 hoc est, 12.

Instituantur multiplicationes.

Prima.

Radix qua. binomij 10 + √ 36, plus 2, hoc est 6

Radix qua. binomij 10 + √ 36, minus 2, hoc est 2

producuntur 10 + √ 36 minus 4, hoc est 12.

Secunda.

8, minus radix qua. binomij 10 + √ 36. hoc est, 4.

8, plus radix qua. binomij 10 + √ 36. hoc est, 12.

64 minus 10 + √ 36, hoc est 48.

Cruciformes multiplicationes, cum æquales sint numeri, negliguntur. Productorum igitur summa in utraque multiplicatione, ut apparet.

Tertia multiplicatio.

10 + √ 36 minus 4 hoc est, 12.

64 minus 10 + √ 36 hoc est, 48.

640 + √ 147456 item 40 + √ 576

minus 136 + √ 14400

minus 256

pro. 680 + √ 166464, minus 392 + √ 14400

Hoc est,

288 + √ 82944, uel 576 ultimum productum.

Huius itaq; radix quadrata, nimirũ 24, area est trianguli.

EST ET ALIVD TERTIAE FIGVRAE TRIANGVlum, ratione diametri longioris consideratum, atq; huius quidem

latera sunt 6, 6, √ 60 + √ 12

Laterum ſumma 12, plus $\sqrt{60} - \sqrt{12}$

Exceſſus igitur, atq; deinceps quatuor numeri,

$\sqrt{15} + \sqrt{3}$ $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ 6 minus $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ 6 plus $\sqrt{15} + \sqrt{3}$

Primum

$18 + \sqrt{180}$

ſecundum productum

36 minus $18 + \sqrt{180}$.

Tertium productum.

$648 + \sqrt{233280}$ minus $504 + \sqrt{233280}$

hoc eſt, 144. Area igitur trianguli 12, ut prius.

ALIVD ITEM TRIANGVLVM FIGVRAE quartæ, cuius quidem

Latera ſunt	Exceſſus igitur
Ra.qua.bi. $157 + \sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ minus ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$
11	ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $2\frac{1}{2}$
6	ra.qua.bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ plus $2\frac{1}{2}$
17 plus ra.qua.bi. $157 + \sqrt{9680}$	$8\frac{1}{2}$ plus ra. qua. bi. $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$

Producta,

primum

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$

ſecundum

$39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

Inuentio producti tertij.

$72\frac{1}{4}$ minus $39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$

$39\frac{1}{4} + \sqrt{605}$ minus $6\frac{1}{4}$

$2835\frac{13}{16} + \sqrt{\frac{505750205}{16}}$ item $245\frac{5}{16} + \sqrt{\frac{378125}{16}}$

minus $451\frac{9}{16}$

minus $2145\frac{9}{16} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

Summa productorum.

plus $3081\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$

minus $2597\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{59650580}{16}}$.

Hoc eſt, facta ſubtractione, 484.

Huius nunc tertij producti radix quadrata, nimirum 22, area eſt trianguli. Atq; hactenus dicta de triangulorum areis inueſtigandis ſufficiant. Sequitur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

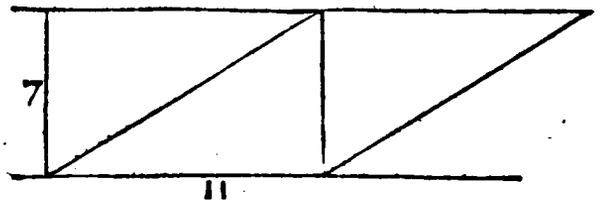
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆ αὐτῆ βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXV.

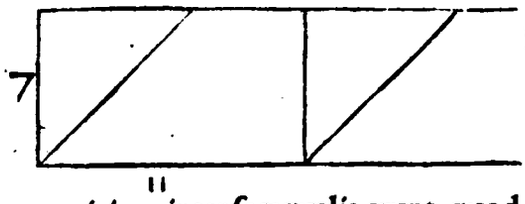
Parallelogramma ſuper eadem baſi conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Poteſt huius propoſitionis figura geometrica tripliciter uariari. Aut enim parallelogrāmis ſuper una & eadem baſi, inter eaſdem item parallelas poſitis, alterum unius latus eſt diameter alterius, aut ea breuius, aut longius. Si primum, cum ex corollario propoſitionis præcedentis, Omne parallelogrammū à ſua ipſius diametro bifariam

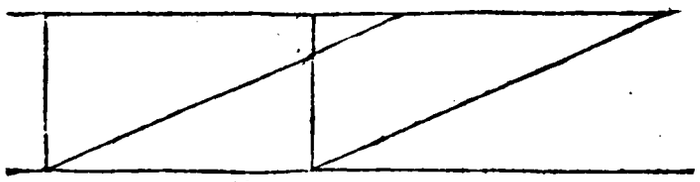
bifariam ſecetur, cumq; etiam ex cõmuni quadam notícia, Eiuſdem duplícia, inter ſe æqualia ſint, hoc quod propoſitio concludit, iam manifeſtum erit. Quòd ſi fuerit



ea breuius, cum parallelogrammorum locorum latera oppoſita inter ſe ęqualia ſint, hoc ípſo uſurpato bis: duo duorũ parallelogrãmorum latera, ex communí quadam notícia, inter ſe æqualia exíſtent: deinde uerò communi portione ab íllís æqualíbus lateríbus ſubtracta, & reſíduæ líneæ inter ſe æquales erũt. Sed quía íllæ, ut quídem ſecunda pars propoſitionís 29, & ipſa propoſitio quarta



demonſtrant, ęqualíum triangulorum latera ſunt, hís ęqualíbus triangulís cõmune trapezíum ſi addatur: & producta, parallelogramma ſcilícet propoſíta, inter parallelas & ſuper una eadẽq; baſi conſtituta, per communem quãdam notíciam, inter ſe æqualía erunt, quod demonſtraſſe oportuit. Sí uerò alterum unius latus fuerit díametro alterius parallelogrammi longius, oportet ut media ínter æquales líneas portío, ex ęquo íllís æqualíbus líneis addatur, quæ productæ, cũ



etipſę ęqualíum triangulorum ſint latera, íllís ęqualíbus triangulís, primò íd quod commune habent, ſubtrahí, reſíduis deinde trapezíjs commune quoddam triangulum alíud addi oportet: & tum etíam ſecundum tertiæ figurę deſcriptionem, propoſitioni ſatisfactum erit. Quacunq; ígitur ratione parallelogramma íllа, (ſeruatis tamen hypotheſibus) deſcripta fuerint, propoſitio uera eſſe cognoſcetur. quod demonſtrarí oportuit.

PER NVMEROS HAEC NVNC, VT PRAECEdens, *tractari poteſt: id quod uno tantum exemplo indicabimus.*

Latera	Exceſſus
$\sqrt{533}$	$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$
$\sqrt{170}$	$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$
11	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$
$\sqrt{533} + \sqrt{170} + 11$	Me. $\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$

Inſtituantur multiplicationes.

prima	ſecunda
$5\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{170}{4}} - \sqrt{\frac{533}{4}}$	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} - 5\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{170}{4}} + \sqrt{\frac{533}{4}}$	$\sqrt{\frac{533}{4}} + \sqrt{\frac{170}{4}} + 5\frac{1}{2}$
$30\frac{1}{4} - 42\frac{1}{2} - 133\frac{1}{4}$	$133\frac{1}{4} + 42\frac{1}{2} - 30\frac{1}{4}$
$+ \sqrt{\frac{90610}{4}}$	$+ \sqrt{\frac{90610}{4}}$
$\sqrt{\frac{90610}{4}} - 145\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{90610}{4}} + 145\frac{1}{2}$

Tertia multiplicatio.

$$\sqrt{\tfrac{90610}{4}} + 145\tfrac{1}{2}$$

$$\sqrt{\tfrac{90610}{4}} - 145\tfrac{1}{2}$$

producuntur $\tfrac{59159}{4}$, tertium productum.

Area igitur trianguli, ratione Trapezij in figura prima, est $38\tfrac{1}{2}$. Quare trapezium integrum 77. Et quia tantū etiam faciunt 11 septies, alterum scilicet parallelogrāmum: & in numeris iam propositioni satisfactum erit, quod quidem fieri oportuit.

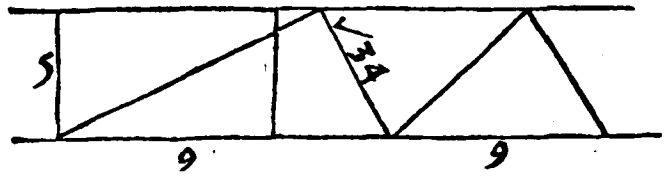
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς.

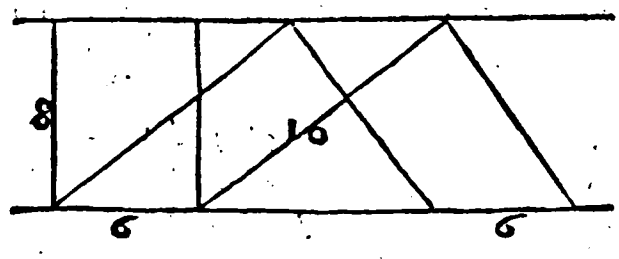
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma super æqualibus basibus constituta, atq; in eisdem parallelis: æqualia inter se sunt.

Hæc propositio licet per se iam satis constare deberet, cum idem sit æqualiū atq; earundem linearum intellectus, quo tamen dilucidius hęc appareat, postquam descripta fuerint parallelogramma, ut præcipitur, anguli superiores duo unius, cum duobus inferioribus alterius parallelogrammi angulis, duabus rectis lineis, sic ut altera alteram nō secet, copulentur. Describitur aūt sic, ut ex propositione 33 colligitur, parrallelogrammum aliud, quod nunc, quia cum utroque posito, & inter lineas parallelas, & super una atq; eadem basi constitutum est: utrumq; positum huic descripto parallelogrammo alij, per propositionem præmissam, atq; illa tandem etiam inter se, per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, & inter se æqualia sunt, æqualia esse ostendūtur. Parallelogramma igit̄ super equalibus basibus & in eisdem parallelis constituta: inter se sunt æqualia, quod demonstrasse oportuit.





NVNC QVANTVM AD PRAXIM NVMERORVM.

Latera		Excessus	
13		$\sqrt{\tfrac{17}{2}} - 2$	
9		$\sqrt{\tfrac{17}{2}} + 2$	
$\sqrt{34}$ +		$11 - \sqrt{\tfrac{7}{2}}$	
$22 + \sqrt{34}$		$11 + \sqrt{\tfrac{17}{2}}$	
primum	secun.	ter. pro.	Area trian.
$4\tfrac{1}{2}$	$112\tfrac{1}{2}$	$\sqrt{\tfrac{2025}{4}}$	$22\tfrac{1}{2}$.

ALIVD

ALIVD TRIANGVLVM EX SECVNDA FIGVRA.

Latera	Exceſſus
$\sqrt{208}$	$8 - \sqrt{52}$
10	$\sqrt{52} - 2$
6	$\sqrt{52} + 2$
$16 + \sqrt{208}$	$8 + \sqrt{52}$

Tertium pro. 576 Area trianguli 24.

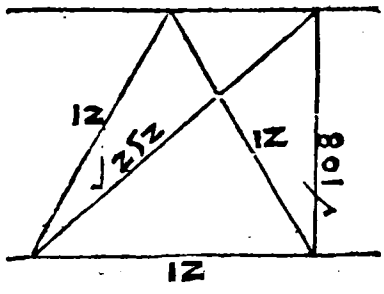
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

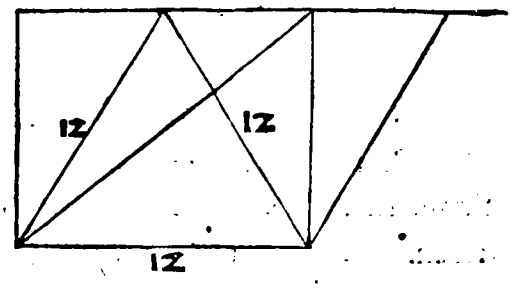
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆ αὐτῆ βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ſuper eadem baſi cõſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Sint inter lineas parallelas, ſuper una & eadem baſi conſtituta duo uel plura triangula: dico, illa inter ſe eſſe æqualia. Continuetur ea, quæ triangulorum uertices coniungit recta linea in utranq; partem, quantum ſatis fuerit, fiant etiam ex propoſitis triangulis parallelogramma, ducendo in unoquoq; triangulo, ab eius uno angulo, eorum qui ad baſim ſunt, lineam, lateri quod hunc eundem angulum ſubtendit, per propoſitionem 31, parallelam. Et quoniam deſcripta parallelogramma, cum ſuper eadem baſi, atq; in eiſdem parallelis conſtituta ſint, inter ſe æqualia eſſe, ex propoſitione 35 notum eſt. Et rurſus quoniam, quæ eiuſdem dimidia, ex communi quadam noticia æqualia inter ſe ſunt: deſcriptorum parallelogrammorum medietates, triangula ſcilicet poſita, inter ſe æqualia erunt. Triangula igitur ſuper eadem baſi conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt, quod demonſtrari oportuit.





NVNC QVANTVM AD NVMERORVM PRAXIM.

Latera	Exceſſus
12	
12	 6
12	
Summa 36	Medietas 18

Tertium productum 3888. Area $\sqrt{3888}$, uel $62\frac{4}{125}$ fere.

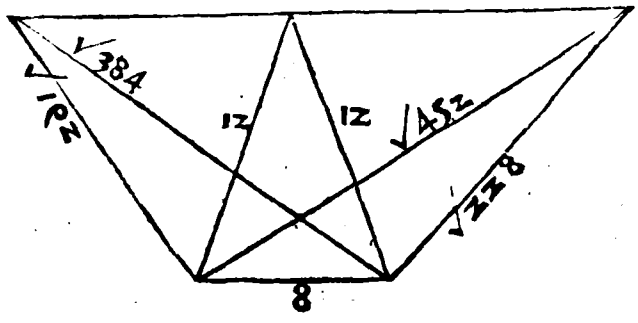
ALTERVM TRIANGVLVM HABET

Latera	$\sqrt{252}$	12	$\sqrt{108}$
Exceſ.	$\sqrt{27} + 6 - \sqrt{63}$	$\sqrt{27} - 6 + \sqrt{63}$	$\sqrt{63} + 6 - \sqrt{27}$

Summa lat. $\sqrt{252} + 12 + \sqrt{108}$ Med. $\sqrt{63} + 6 + \sqrt{27}$

Primum $\sqrt{9072} - 72$ secundum $\sqrt{9072} + 72$ ter. productum 3888 &cæ.

ALIA FIGVRA.



Habet hæc figura tria triangula, quę, ut geometricè, ita et per numeros sequēti calculo inter se æqualia esse ostenduntur.

Communis basis.

Quantum igitur ad triangulum primum, cuius quidem

Latera sunt	Excessus igitur
$\sqrt{384}$	$4 + \sqrt{48} - \sqrt{96}$
$\sqrt{192}$	$4 - \sqrt{48} + \sqrt{96}$
8	$\sqrt{96} + \sqrt{48} - 4$
$\sqrt{384} + \sqrt{192} + 8$	$\sqrt{96} + \sqrt{48} + 4$

Vltimum pro. 2048 Area trianguli $\sqrt{2048}$. uel $45\frac{23}{91}$ ferè.

Porrò triangulum secundum habet

Latera 12 12 8. Excessus 4 4 8.

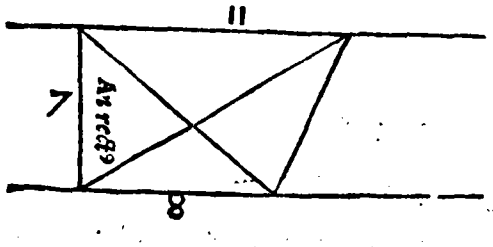
Summa lat. 32. Medietas 16. Primum productū 16.

secun. 128, tertium pro. 2048. Area trian. $\sqrt{2048}$.

Sequitur triangulum tertium, cuius quidem

Latera sunt	Excessus igitur
$\sqrt{452}$	$4 + \sqrt{57} - \sqrt{113}$
$\sqrt{228}$	$4 - \sqrt{57} + \sqrt{113}$
8	$\sqrt{113} + \sqrt{57} - 4$
$\sqrt{452}$ $\sqrt{228} + 8$	$\sqrt{113} + \sqrt{57} + 4$

Vltimū pro. 2048. Area trianguli ut suprà.



Area utriusq; trianguli, sunt 28. æquales igitur inter se.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΗ.

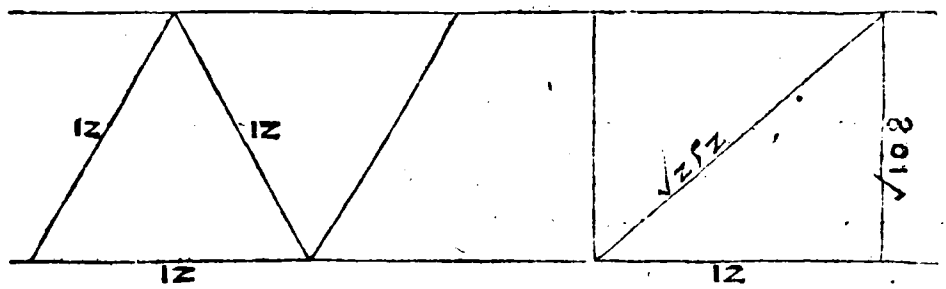
Τὰ πέριγωνα τὰ ὑπὸ τὴν ἴσων ἐφεστώτων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXXVIII.

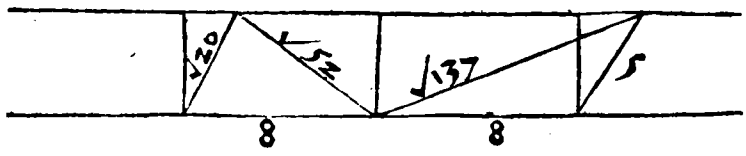
Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, atq; in eiſdem parallelis: æqualia inter ſe ſunt.

Propoſitis triangulis, ut præcipitur, eadem huius quæ præcedentis κατασκευὴ



atq; demonſtratio erit, ſi loco propoſitionis triceſimæ quintæ illic ſumptæ, hîc triceſima ſexta ſumatur.

ALIVD HVIVS PROPOSITIONIS EXEMPLVM.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆ αὐτῆ βάσει ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXXIX.

Aequalia triangula, ſuper eadem baſi, atque ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis.

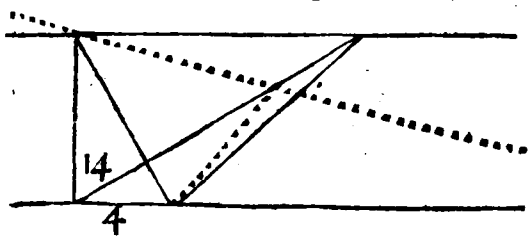
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XL.

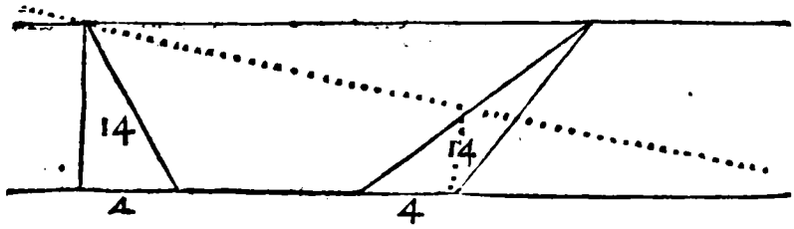
Aequalia triangula, ſuper æqualibus baſibus, atq; ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis.

Requirunt hæ duæ propoſitiones æqualia, eiuſdem uel æqualium baſium triangula, & inde tandem inter lineas parallelas (ſi modo ad eaſdem partes fuerint cõſtituta) ea poſita eſſe inferunt. Triangulis itaq; huiuſmodi deſcriptis, propoſitionum demõſtrationes ab impoſsibili illo, Partem ſuo toti æqualem eſſe, colligentur. Nam recta quadã linea triangulorum uerticibus copulatis, ſi quis præter hanc aliam ab unius trianguli uertice, tanquam à puncto ſignato, baſi parallelam ſtatuere uelit, faciat ſanè hoc, ſi poterit. Et quoniam ſit, quod hæc ducta parallela alterutrius



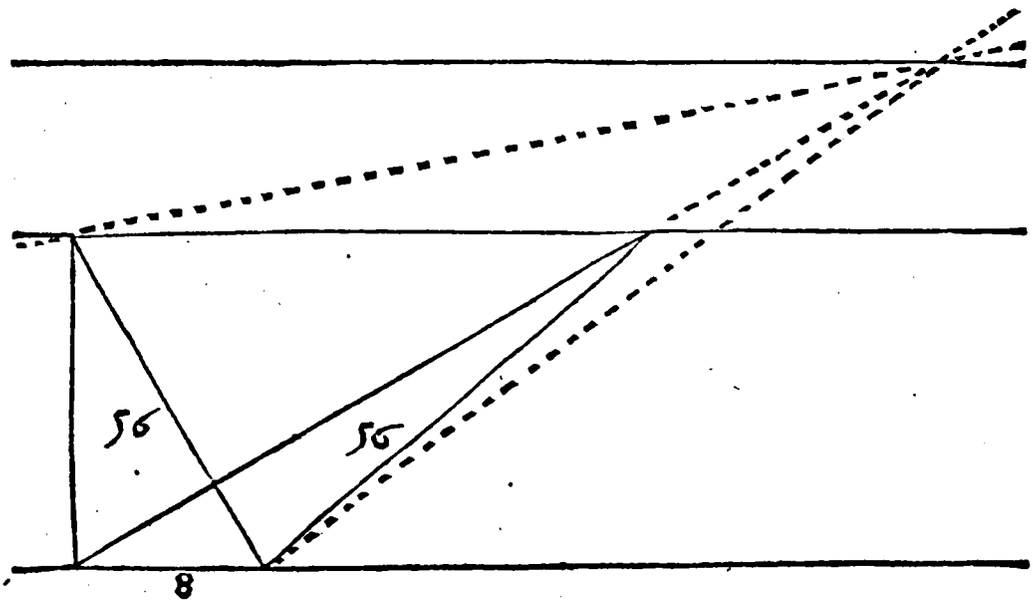
Baſis eadem

utrius trianguli latera secet, aut non secet. Si primum, coniungatur punctum sectionis in uno latere, recta quadam linea, cum sibi opposita basis extremitate. Et quoniam duo triangula apparent, quorum unum quidem cum secundum aduersarij



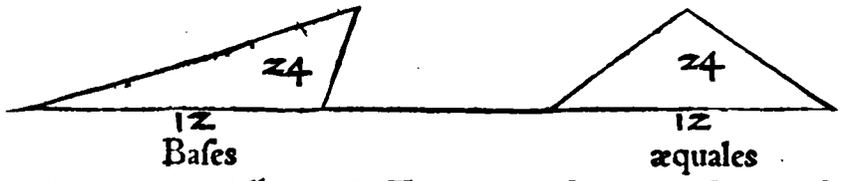
Bases æquales

structuram, ex propositione 35, uni: alterum uero, ex hypothesi, eidem triangulo æquale sit: mox illi, aut per propositionem 37, si unam & eandem basim habuerint: aut uerò per propositionem 38, si separatæ, æquales tamen inter se, bases illorum fuerint, inter se æqualia erunt, partiale totali, quod est impossibile. Esto igitur iam



Basis eadem

quòd non secet parallela hæc alterius trianguli latera, tum huius trianguli unum latus ultra uerticem usq; ad parallelam continuari, punctum deinde contactus cum opposita basis extremitate, ut modò, coniungi debet: & idē quod prius, partiale scilicet triangulum suo totali æquale esse, per allegatas propositiones inferetur. Hoc



Bases æquales

autem, quia ex communi illa noticia, Totum parte sua maius est, impossibile existit, propositionibus consentiendum erit. Aequalia igitur triangula, siue super eadē seu æqualibus basibus, atque ad easdem partes constituta: & in eisdem parallelis erunt, quod demonstrasse oportuit.

SEQVITVR NVMERORVM PRAXIS.

Prioris trianguli figuræ ultimæ

Latera sunt 3 212, 12, 3 20

Laterum

Laterum ſumma $\sqrt{212} + 12 + \sqrt{20}$ Medietas $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Exceſſus igitur, ac per conſequens quatuor numeri.

$\sqrt{5} + 6 + \sqrt{53}$ $5 - 6 + \sqrt{53}$ $\sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$ $\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$

Inſtituantur multiplicationes.

Prima	Secunda
$\sqrt{5} + 6 - \sqrt{53}$	$\sqrt{53} + 6 + \sqrt{5}$
$\sqrt{5} - 6 + \sqrt{53}$	$\sqrt{53} + 6 - \sqrt{5}$
pro. $\sqrt{7632} - 84$	pro. $\sqrt{7632} + 84$

Tertia multiplicatio.

$\sqrt{7632} + 84$

$\sqrt{7632} - 84$

producuntur $7632 - 7056$, hoc eſt 576 tertium productum. Area igitur trianguli 24.

Triangulum poſterius habet

Latera	Exceſſus igitur
12	$\sqrt{52} - 6$
$\sqrt{52}$ }	
$\sqrt{52}$ }	6
$\sqrt{208} + 12$	$\sqrt{52} + 6$. Area 24.

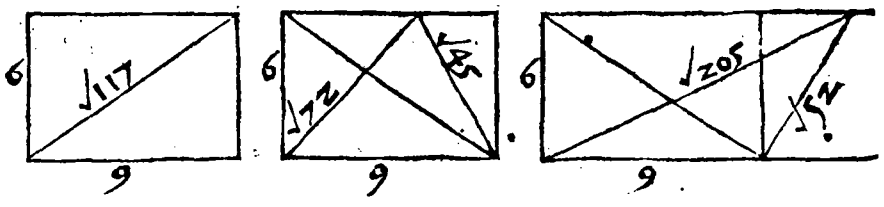
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΑ.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχῃ τῶν αὐτῶν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum cum triangulo baſim habuerit eandem, atq; in eiſdem parallelis fuerit: duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

Statuantur parallelogrammum & triangulum ſuper eadem baſi, eſto etiã quòd ſint inter lineas parallelas: dico quòd parallelogrammum ad triangulum, duplũ ſit. Hoc quòd ducta in parallelogrammo diametro, ex 37 & ſecunda parte propoſi-



tionis 34, cum per hanc quidem triangulorum unumquodq; ſui parallelogrammi dimidium eſſe, per illam uerò, triangula quorũ eadem eſt baſis et eadem altitudo, æqualia eſſe demonſtratum ſit, facile colligetur.

NVMERORVM PRAXIS.

Et primo quidem trianguli, cuius latera ſunt 9 $\sqrt{72}$ $\sqrt{45}$

Laterum ſumma $9 + \sqrt{72} + \sqrt{45}$ Medietas $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$

Exceſſus, ac per conſequens quatuor numeri.

Primus $\sqrt{11\frac{1}{4}} + \sqrt{18} - 4\frac{1}{2}$ ſecundus $\sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{18} + 4\frac{1}{2}$

tertius $4\frac{1}{2} \quad \sqrt{18} \quad \sqrt{11\frac{1}{4}}$ quartus $4\frac{1}{2} + \sqrt{18} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$.

Primum	secundum	tertium pro.
$\sqrt{1458} - 27$	$\sqrt{1458} + 27$	729.

Area trianguli 27. Et tanta etiã est medietas parallelogrammi, cum 6 nouies, uel contrà 9 sexies, 54 constituant.

Aliud triangulum.

Latera	Excessus
$\sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} - \sqrt{29\frac{1}{4}}$
9	$\sqrt{29\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$
6	$\sqrt{29\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$
$15 + \sqrt{117}$	$7\frac{1}{2} + \sqrt{29\frac{1}{4}}$

Productum primum 27, secundum 27, Area trianguli 27.

Tertium triangulum.

Latera	Excessus
$\sqrt{205}$	$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{205}{4}}$
9	$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{205}{4}}$
$\sqrt{52}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{205} + 9 + \sqrt{52}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}$.

Instituantur multiplicationes.

Prima	secunda
$\sqrt{13} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{205}{4}}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} - \sqrt{13}$
$\sqrt{13} - 4\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{205}{4}}$	$\sqrt{\frac{205}{4}} + 4\frac{1}{2} + \sqrt{13}$
$13 - 20\frac{1}{4} - 51\frac{1}{4}$	$51 + 20\frac{1}{4} - 13$
$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$	$+ \sqrt{4151\frac{1}{4}}$
producuntur $\sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2}$	prod. $\sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2}$

Tertia multiplicatio.

$$\sqrt{4151\frac{1}{4}} + 58\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{4151\frac{1}{4}} - 58\frac{1}{2}$$

producuntur 729. Quare Area trianguli 27

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ.

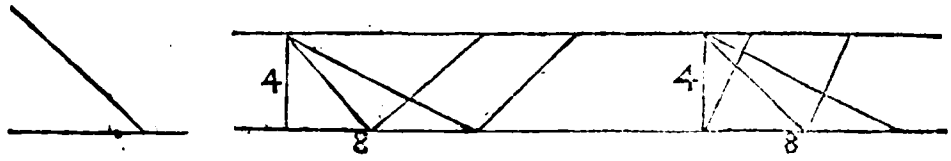
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo: æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

Petit hæc propositio triangulũ, atq; huic deinde æquale iubet formari seu describi parallelogrammum, cuius quidem unus angulus, alij cuidam rectilineo angulo dato, æqualis sit, quod sic fiet. Continuetur trianguli basis in utramlibet partem. huic deinde basi per trianguli uerticem, prout habet propositio 31, recta parallela ducatur. Hoc facto, diuidatur basis, per 10 propositionem, bifariam, & ad punctũ illud

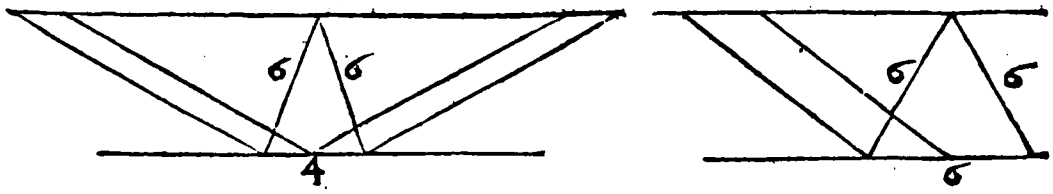
illud diuiſionis, atq; ipſam baſim, angulus dato æqualis, ex propoſitione 23 conſtituatur, cuius deinde latus alterum, ſi uſq; ad lineam, quæ per uerticem trianguli ducta eſt, continuatum, ei etiam ab alterutra baſis extremitate, tanquam à puncto aliquò dato, per propoſitionem 31, recta parallela ducta fuerit, ubi tandem hæc uſque ad lineam, per uerticem tranſeuntem continuabitur, res confecta erit, id quod



ſic demonſtrabitur. De parallelogrammo, quin dato unũ angulum æqualem habeat, nullum eſt dubium, cum id in ſtructura ex propoſitione 23 præuiſum ſit. Quòd uerò idem parallelogrammum dato triangulo æquale ſit, poſtquam à trianguli uertice ad punctum baſis medium linea recta ducta fuerit: & id ex propoſitionibus 38 & 41, atq; communi tandem illa noticia, Quæ eiuſdem duplicia, &cæ. facile perſpicietur. Dato igitur triangulo, æquale parallelogrammum, in dato rectilineo angulo conſtitutum eſt, quod feciſſe oportuit.

ADMONITIO.

Quòd ſi angulus datus fuiſſet acutior, obtuſior, uel omnino rectus, tũc linea hęc, ut latus futuri parallelogrammi, à puncto diuiſionis in baſi, ſecũdum huius anguli quantitatem ducenda fuiſſet. Hæc enim 23, de angulo formando, propoſitio, in genere propoſita eſt, ſic ut nihil referat, quocunq; modo rectilineus angulus fuerit propoſitus.



Area trianguli figuræ ultimæ, ut ſequens calculus indicat, eſt ✓243. Atq; tanta eſt etiam parallelogrammi conſtituti area. Bene igitur.

Latera	Exceſſus	
6	3	
6	3	Vltimum productum 243
6	3	Area igitur trianguli ✓243.
Sum. 18	Med. 9	

ALIVD AEQVILATERVM TRIANGVLVM, laterum irrationalium.

Latera		Exceſſus		
✓48	}	. : .	✓12	pro. primum 12, ſecundũ 36, tertium 432
✓48				
✓48				
✓432			✓108	Area trianguli ✓432.

ALIVD EXEMPLVM.

Latera trianguli ſunt

6 — 8 — ✓4, hoc eſt 6 6 6

Radix binomij 20 + ✓256

Summa laterum 14 — √4, plus radix binomij 20 + √256 18
hoc eſt
Huius medietas 7 — √1, plus radix binomij 5 + √16 9

Exceſſus, ac per conſequens quatuor numeri

Radix binomij 5 + √16 plus 1 — √1
Radix binomij 5 + √16 minus √1 — 1
7 — √1 minus radix binomij 5 + √16
7 — √1 plus radix binomij 5 + √16

hoc eſt 3, 3, 3, 9

Inſtituantur multiplicationes.

Prima.

Radix binomij 5 + √16 plus 1 — √1
Radix binomij 5 + √16 minus √1 — 1
producuntur 5 + √16 minus √4 — 2
hoc eſt 9

Secunda.

7 — √1 minus radix binomij 5 + √16
7 — √1 plus radix binomij 5 + √16
pro. 50 — √196 minus 5 + √16
hoc eſt 27

Tertia multiplicatio eſt 27 ſecundi
cum numero 9 producto primo.
& producuntur 243, ultimo.
Area igitur trianguli √243.

VEL ALITER.

Summa laterum 6 plus 8 — √4, plus radix bin. 20 + √256. 18
hoc eſt
Huius medietas 3 plus 4 — √1 plus radix bin. 5 + √16 9

Exceſſus, & per conſequens quatuor numeri.

Radix binomij 5 + √16 minus 3 plus 4 — √1
Radix binomij 5 + √16 plus 3 minus 4 — √1
3 plus 4 — √1 minus radix binomij 5 + √16
3 plus 4 — √1 plus radix binomij 5 + √16

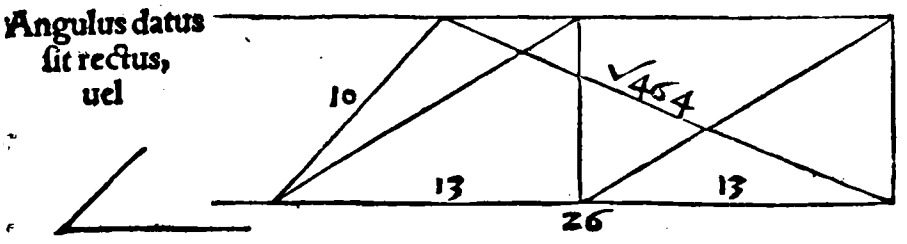
Inſtituuntur multiplicationes.

Prima. Radix binomij 5 + √16 minus 3 plus 4 — √1
Radix binomij 5 + √16 plus √3 minus 4 — √1
producuntur 5 + √16 minus 9 minus 17 — √64
hoc eſt 9.

Secunda. 3 plus 4 — √1 minus radix binomij 5 + √16
3 plus 4 — √1 plus radix binomij 5 + √16
9 plus 17 — √64 minus 5 + √16
plus 12 — √9, bis
Summa productorum, ſunt 27. &c.

ALIA

ALIA FIGVRA GEOMETRICA.



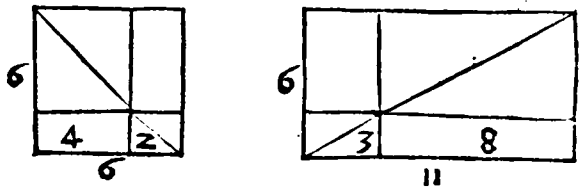
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΓ.

Παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

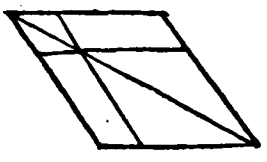
PROPOSITIO. XLIII.

Omnis parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum ſupplementa, inter ſe ſunt æqualia.

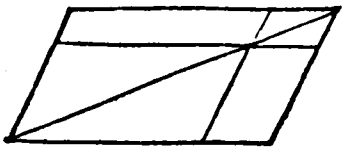
Sit parallelogrammum, ducta etiam in eo diameter, puncto deinde in uno aliquo parallelogrammi latere ubiuis ſumpto, ex hoc ad oppoſitũ uſq; latus reliquis



duobus parallela ducta, ubi hæc diametrum ſecuerit, per hoc ſectionis punctum prioribus lateribus ſimiliter parallela ducenda eſt, & figura parata erit: dico igitur nunc, quòd ipſius parallelogrammi ſupplementa, hoc eſt, ea per quæ diameter non tranſit, parallelogramma, inter ſe æqualia ſint. Nam cum diameter parallelogrammum, ut auditum eſt, bifariam ſecet, ſubtractis ab æqualibus triangulis, medietatibus ſcilicet parallelogrammi, æqualibus triangulis bis, quæ tandem relinquuntur, ex communi quadam notitia, æqualia erunt. Quia autem reliqua hæc ea ſunt, quæ circa diametrum conſiſtunt parallelogrammorum ſupplementa: ergo. Omnis igitur parallelogrammi, eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum ſupplementa, inter ſe ſunt æqualia. quod demonſtraſſe oportuit.



Diameter √108.



Diameter √223.

SEQVITVR TRIANGVLORVM CALCVLVS.

primi		ſecundi	
Latera	excceſſus	Latera	exceſſus
√108	← √27	√223	$\sqrt{8\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{223}{4}}$
6	√27	11	$\sqrt{\frac{223}{4}} - 2\frac{1}{2}$
6	√27	6	$\sqrt{\frac{223}{4}} + 2\frac{1}{2}$
12 + √108	6 + √27	17 + √223	$8\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{223}{4}}$

Primum productum 9. ſecun. 27 — pri. pro. $16\frac{1}{2}$ — ſecun. $49\frac{1}{2}$

tertium 243 Area √243 — ter. $\frac{2267}{4}$ — Area $\sqrt{816\frac{3}{4}}$

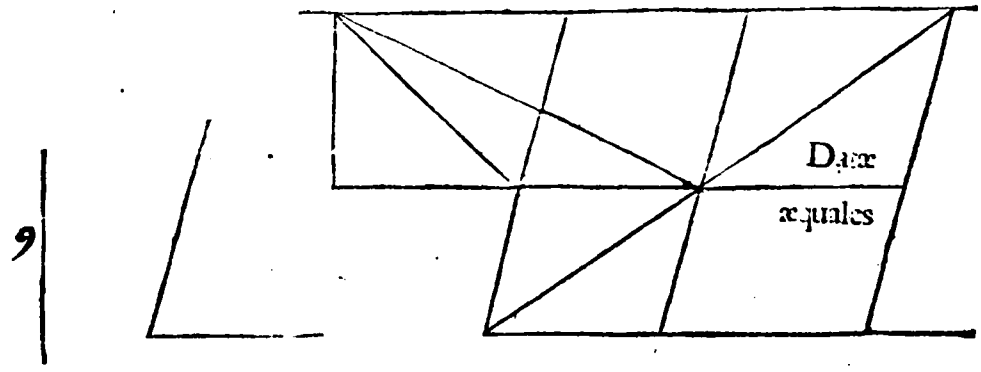
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΔ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XLIIII.

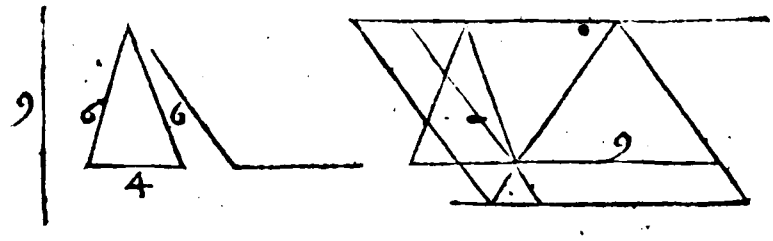
Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum ponere, in dato angulo rectilineo.

Requirit hæc propositio rectam lineam datam, triangulum datum, atq; etiam angulum rectilineum datũ. Proponit autem, quomodo ad datam rectam lineam, parallelogrammum, quod & triangulo dato æquale sit, angulum etiam dato angulo æqualem habeat, constituendum sit. Est huius propositionis structura facilis, propter hypotheses, quas cum propositione præcedente 42. communes habet. Primo enim parallelogrammum, quod dato triangulo æquale sit, angulum insuper angulo æqualem habeat, per eandem 42. constituendum est. Et quoniam dicit propositio, ad datam rectam lineam, altero igitur iam descripti parallelogrammi latere, eorum quæ angulum, dato æqualem comprehendũt, ultra parallelogrammum ad longitudinem rectæ datæ, per secundũ postulatum, prolongato, secundũ pro-



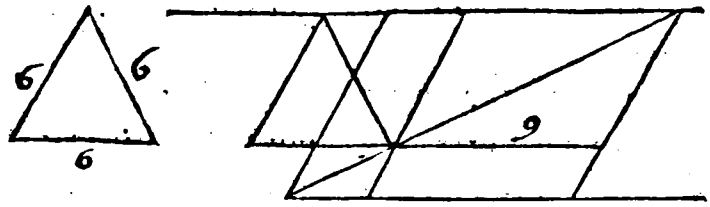
longatam illam portionem & parallelogrãmi latus, quod cũ portione prolongata angulum facit, aliud cum sua diametro parallelogrammũ describatur. Et quoniam hæc diameter, ex una eius parte continuata, & latus parallelogrammi alterum, similiter continuatum, propter incidentem lineam, quæ (ut facile ex tertia parte propositionis 29 colligitur) in una & eadem parte, duos interiores angulos duobus rectis minores facit, ex communi quadam notitia concurrunt, continuetur utrunq; horum, diameter scilicet & latus illud alterum, donec concurrant, atq; ex triangulo formato, cuius quidem latus unum est hæc tota diameter, compleatur parallelogrammum. Quòd si tandem partialis iuxta diametrum, linea, usq; ad oppositum in parallelogrammo latus continuatũ fuerit, cum supplementorum utrunq; dato triangulo æquale sit, ex his uerò alterum super datam rectam constitutum: propositioni satisfactum erit, id quod ex structura facile demonstrari potest. Ad datam igitur rectam lineam, in dato angulo rectilineo parallelogrammum dato triangulo æquale positum est, quod fieri oportuit.

SEQVVNTVR NVNC HVIVS PROPOSITIONIS exempla alia.

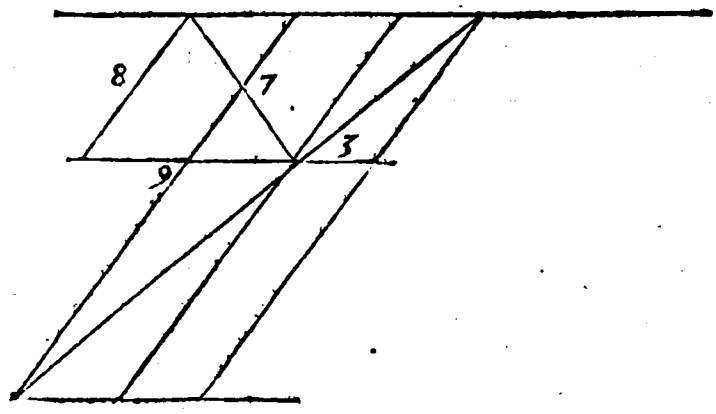


Idem

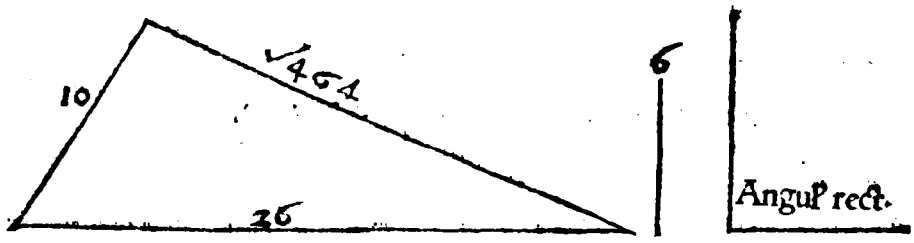
Idem exemplum, mutato tamen Isoſceli in triangulum æquilaterum.

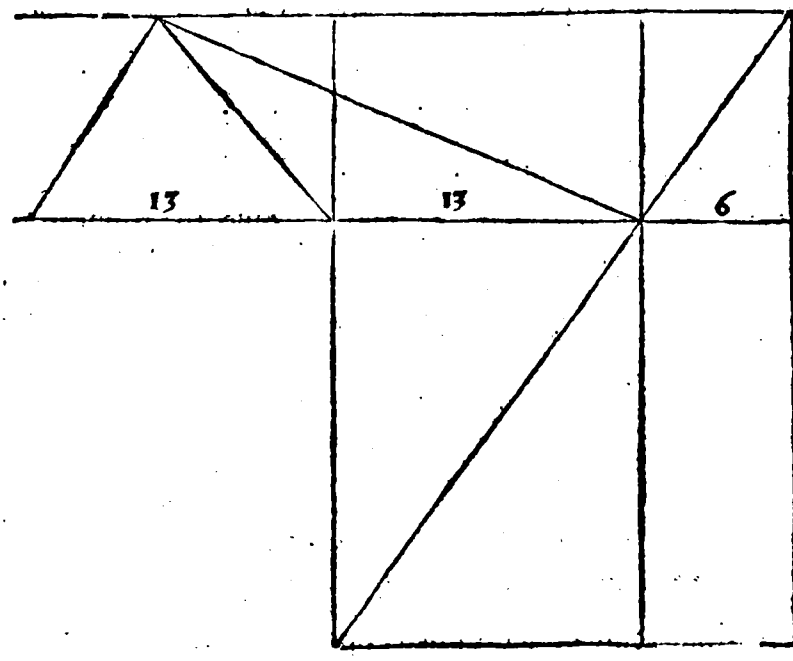


Adhuc aliter, triangulum autem esto Scalenum, linea uerò data 3 punctorum.



ALIVD EXEMPLVM.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ

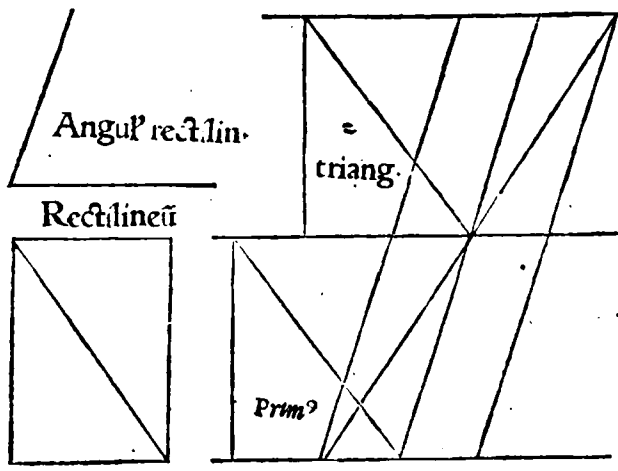
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

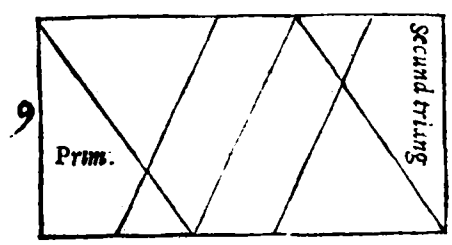
PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

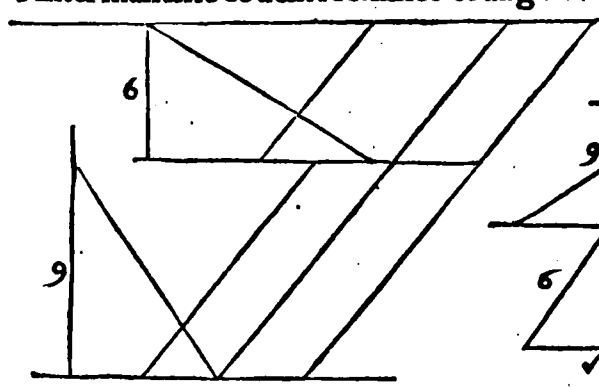
Quod præcedens 42 de triangulo tantũ propoſuit, petit uel iubet hæc fieri cum omni rectilineo. Eſtq; hæc præſens quàm ſuperior magis generalis, & latius patet. Sit itaq; datum rectilineum qualecumque, gratia tamen exempli, & propter facliorem operationem, Quadrilaterum altera parte longius. Illud primò in duo triangula, per diametrum ductam, ſoluendum: parallelogrammum deinde, quod angulum dato æqualem habeat, triangulo uni æquale, per propoſitionem 42, cõſtituendum eſt. Quòd ſi iam ad unum huius parallelogrãmi latus, tanquam ad rectam lineam datã, per propoſitionem 44 præcedentem, alteri triangulo æquale parallelogrammum, quod & ipſum angulum dato æqualem habuerit, cõſtituatur, ſatisfactum propoſitioni erit.



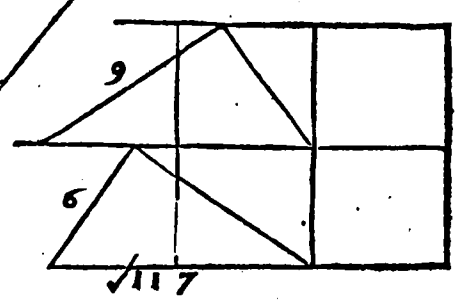
ALIA FIGVRAE DISPOSITIO.



Aliter manente eodem rectilineo & angulo.



Præterea aliter, manente rectilineo, ſed mutato angulo in rectum.

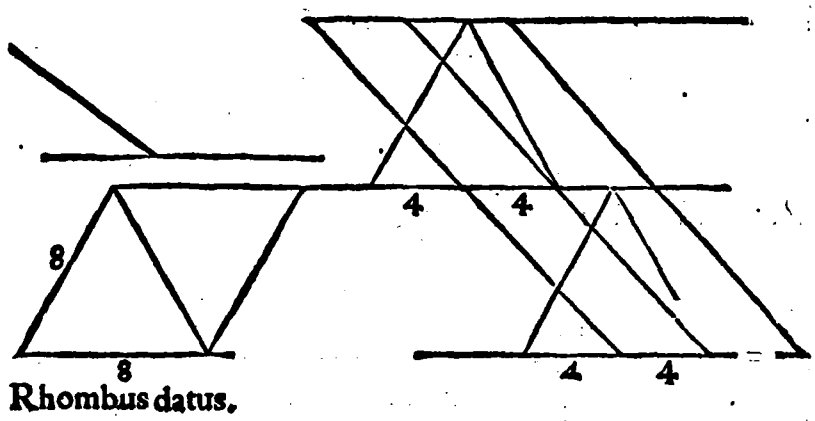


Non aliter cum quadratis agendum erit.

Demonſtratio huius cum ſit facilis, præter operationem amplius quicquam addere

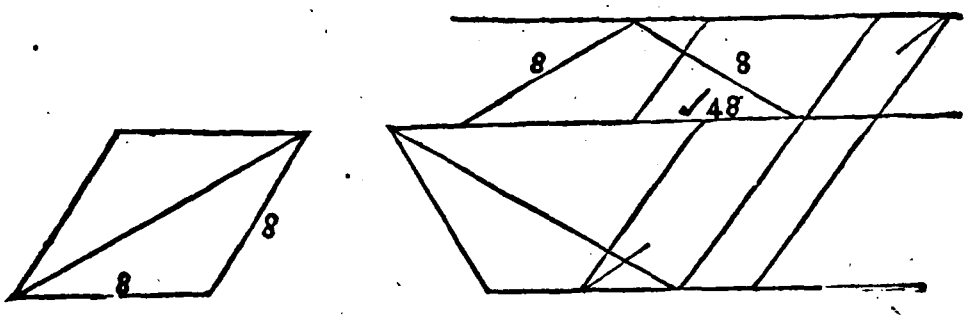
dere nolui, copioſum tantum, propter difficilem huius praxim, in exemplis me uariis oſtendens.

DE RHOMBO.

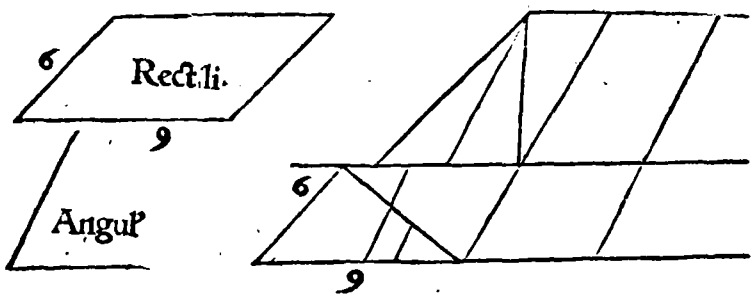


Rhombus datus.

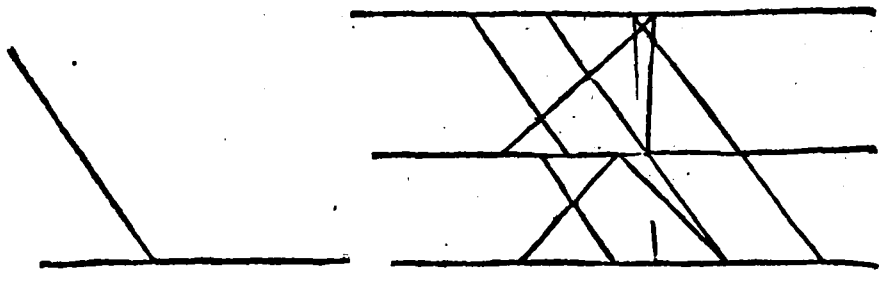
De eodem Rhombo, aliter tamen in triangula ſoluto.



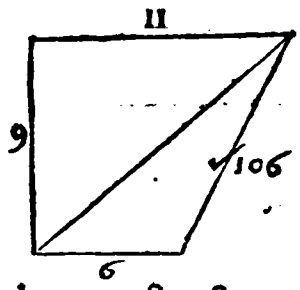
SIC ETIAM QVADRILATERVM, QVOD RHOMboides appellatur, uariari poterit, ut ſequitur.

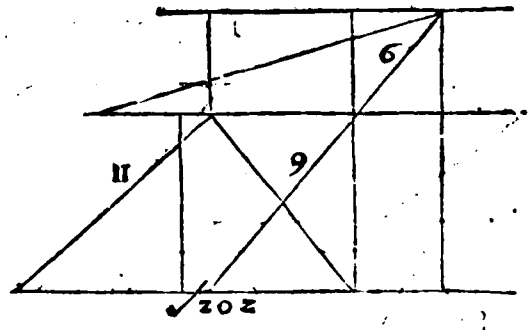


Idem aliter, mutato acuto in angulum obtuſum.



EXEMPLVM DE QVADRILATERO IRREGVLARI.

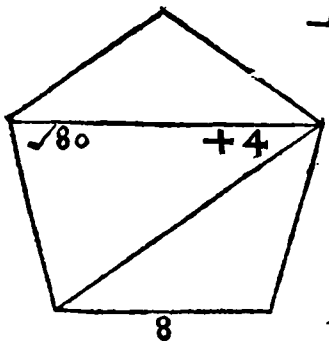


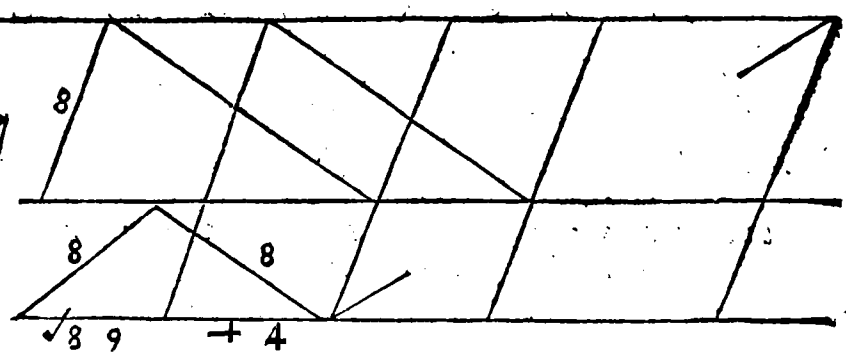


Angulus autem ſit rectus

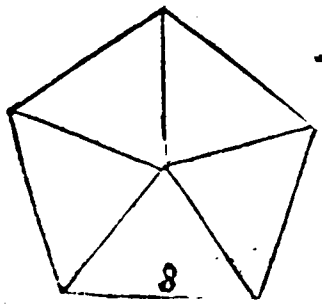
Proinde quemadmodum hactenus in quadrilateris, ſecundo triangulo æquale parallelogrammum, per propoſitionem 44. ad rectam datam conſtitutum eſt, ita eodem modo nunc, ubi quidem rectilineũ propoſitum pentagonũ fuerit, eo in ſua triangula ſoluto: & triangulo tertio per eandem propoſitionem æquale parallelogrammũ addi poterit, atq; ſic deinde etiam abſolui triangulũ quartum in Hexagonis, & quintũ in Heptagonis, ac ordine deinceps. Quomodo autem unum quodq; propoſitum polygonum, uel rectilineum in ſua triangula ſolui debeat, id per appendicem quandam propoſitionis 32, iam traditum atq; oſtenſum eſt.

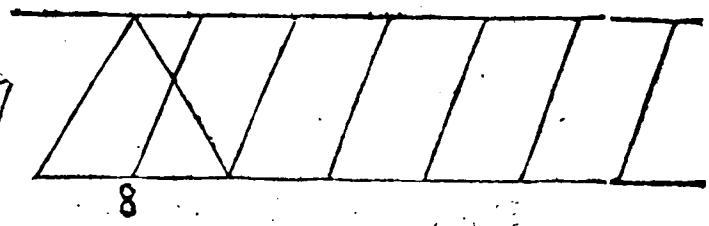
SEQVITVR EXEMPLVM DE PENTAGONO REGVLARI.



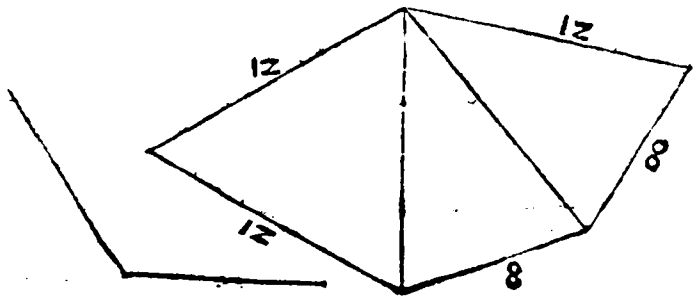


Aliud de Pentagono exemplum.



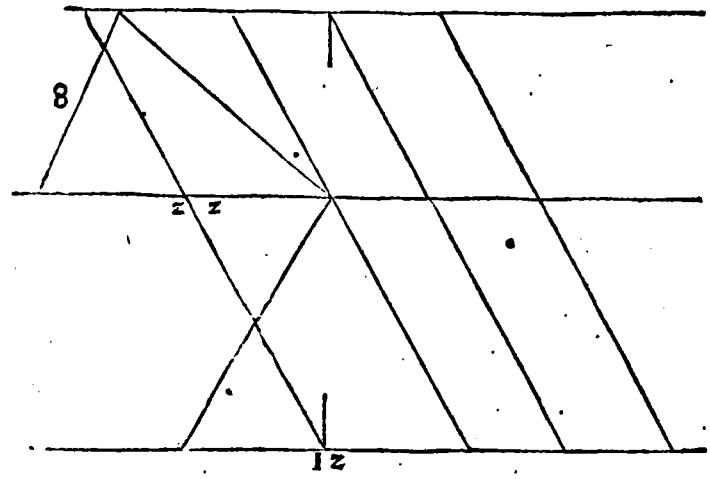


Exemplum, de Pentagono irregulari.

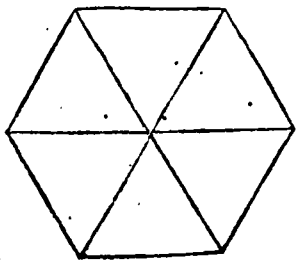


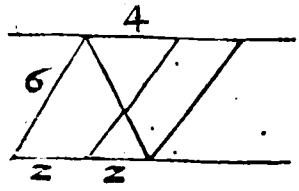
Conſtitutio

Constitutio huius pentagoni irregularis.



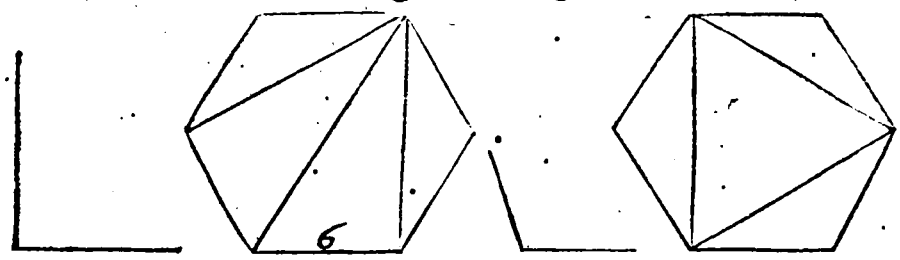
EXEMPLVM HEXAGONI REGVLARIS.

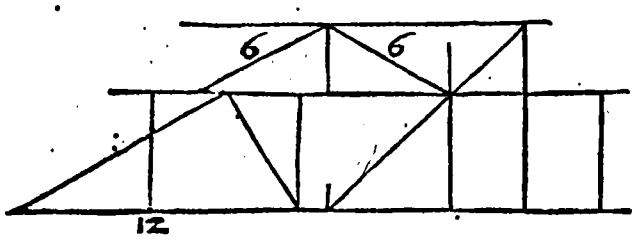




Hoc nisi sexies (cum sex sint triangula inter se æqualia) hexagono parallelogrāmū æquale, in dato angulo rectilineo cōstitutum erit.

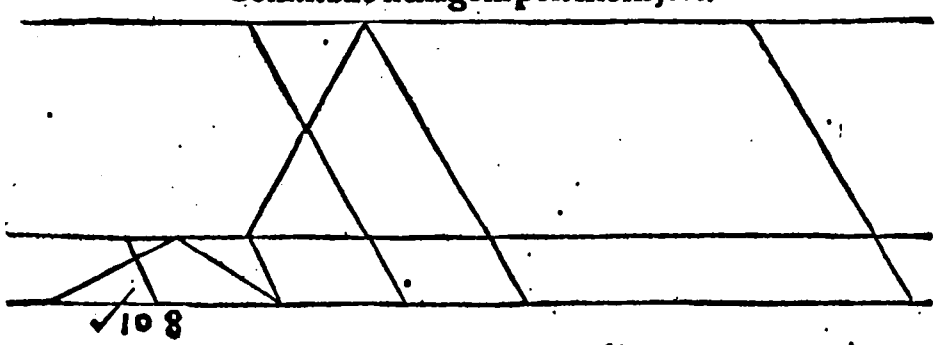
Vel sit illa hexagoni in triangula diuisio.



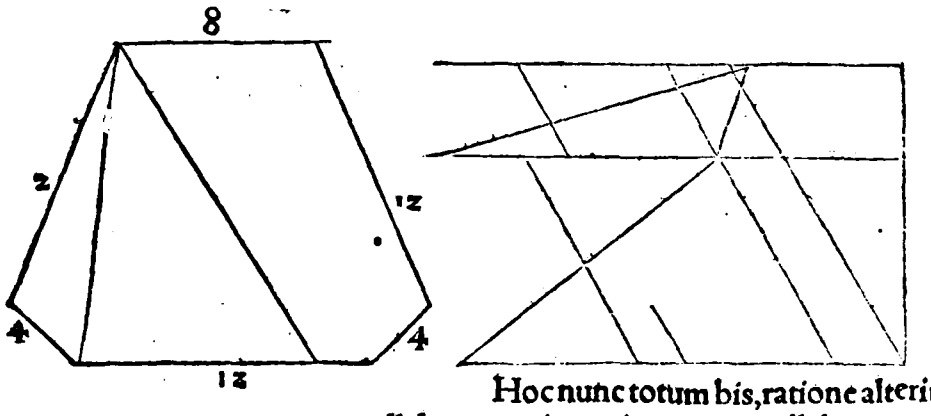


Constitutio hexagoni prioris in paralellogrāmū, quod dato rectilineo angulo æqualem angulum habeat.

Constitutio hexagoni posterioris, &c.

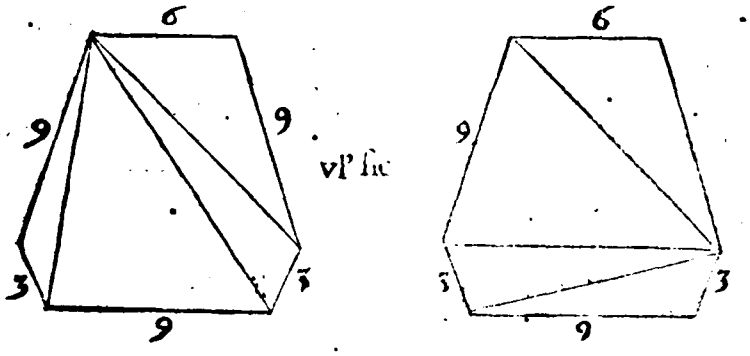


EXEMPLVM HEXAGONI IRREGVLARIS.

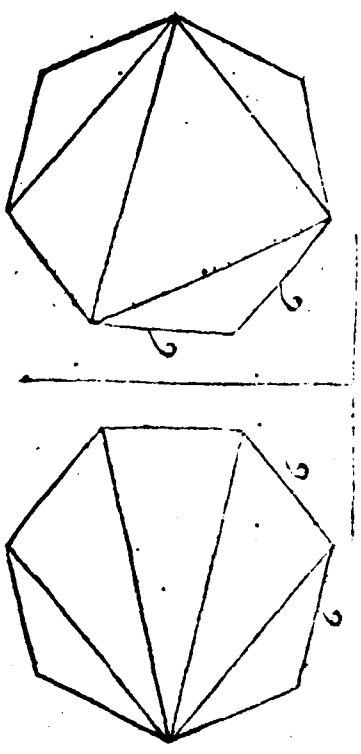


Hoc nunc totum bis, ratione alterius parallelogrammi: exoritur totũ parallelogrammum, toti rectilineo æquale. quod erat faciendum.

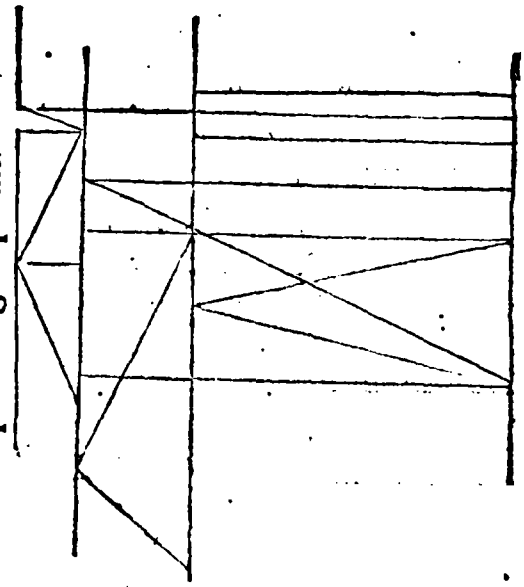
Aliter, similis formæ hexagonum irregulare, in sua triangula solutum.



EXEMPLVM DE HEPTAGONO REGVLARI.



Operatio figuræ primæ.



Secundæ figuræ eadem erit operatio.

Quòd

Quòd ſi à puncto heptagoni medio, hoc eſt à centro, ſeptem ad ipſius angulos rectæ ductæ fuiſſent lineæ, cum ſic heptagonum in ſeptem inter ſe æqualia triangula reſolutum ſit, uni eorum æquali parallelogrammo conſtituto, eo deinde ſepties ſumpto, res confecta erit. Sic cum irregulari heptagono & reliquis multorum laterum figuris omnibus, poſtquam hæ in triangula reſolutæ fuerint, agendum erit.

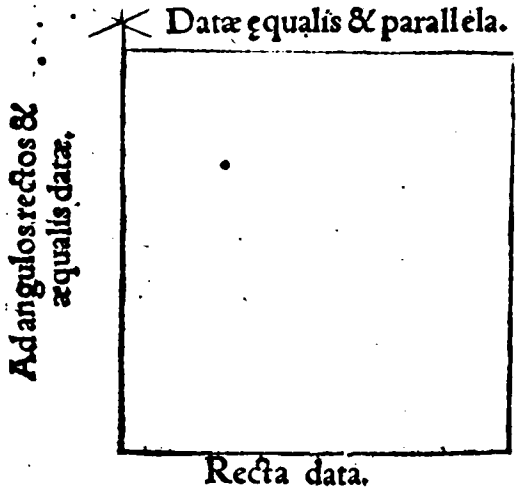
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μς.

Ἀπὸ τῆ δοθείσης εὐθείας, τετράγωνον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO. XLVI.

A' data recta linea, quadratum deſcribere.

Sit data recta linea, atq; propoſitum, ab ea, hoc eſt ſecundum eius quantitatem, quadratum deſcribere. Ab una igitur rectę extremitate, tanquam à puncto in linea ſumpto, per propoſitionem 11. ad angulos rectos linea excitetur: atque hac, per propoſitionem 3. ad æqualitatem datæ poſita, ab eius extremitate altera, & libera adhuc, tanquam à puncto dato, datæ rectæ æqualis & parallela ducatur. Quòd ſi tandem altera ductæ parallelæ extremitas, cum altera datæ extremitate, recta linea cõiungatur, propoſitioni ſatisfactum erit. Demonſtrationem huius, qui eorum quæ in ſtructura facta ſunt, eorum item quæ hactenus tradita recordabitur, ex definitione tandẽ quadrati facile colligere poterit.

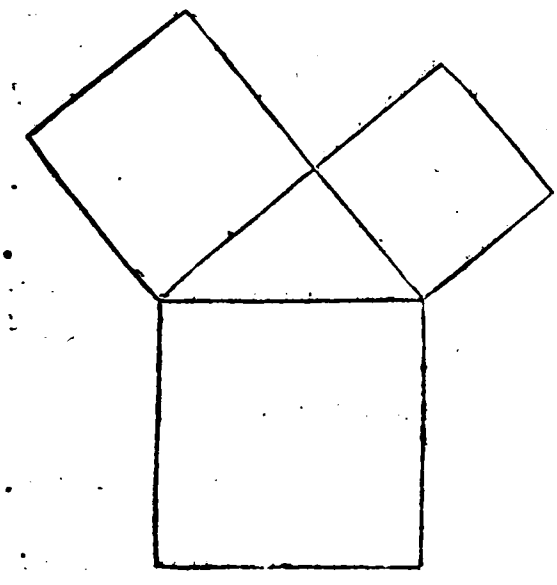


ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μζ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις· τὸ ἀπὸ τῆ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis: quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur quadratis.



Sit triangulum rectangulum, quadrata etiam à ſingulis lateribus, per propoſitionem præcedentem, deſcripta: dico, quadratum lateris ſubtendentis angulum rectum, tantum eſſe, quanta ſunt quadrata, quæ à reliquis duobus lateribus, angulum rectum comprehendentibus, deſcribuntur. Demittatur ab angulo trianguli recto, tanquam à puncto dato, ſuper ſuam ſubtenſam, per propoſitionem 12. linea perpendicularis, atque

hæc ad latus uſq; oppoſitum per quadratum cõtinuetur, & erit quadratum lateris, angulum rectum ſubtendentis, in duo parallelogramma diuiſum, quorum unum quidem uni, alterum uerò alteri reliquorum laterum quadrato æquale eſſe, ſic demonſtrabitur. Quoniam enim triangulum ex hypotheſi rectangulum eſt, ſinguli etiam quadratorum anguli, ex definitione, recti ſunt: angulus in orthogonio rectus cum utroq; eorum qui ſunt ei ἰφεξῆς, duobus rectis angulis æquales erunt. Illud igitur utriuſq; quadrati latus, quod quidem extra triangulum eſt poſitum, illi trianguli lateri, cui applicatum eſt, ex propoſitione 14, adamuſſim iunctum, & cum eo una linea erit, quod eſt notandum. Præterea, quoniam anguli recti, ex communi quadam noticia, inter ſe ſunt æquales, & quoniam etiam, Si æqualibus æqualia, uel aliquod commune adijciatur, quæ inde colliguntur æqualia ſunt: per hęc duo, bis uſurpata, erunt ex utraque parte rectanguli, circa acutos angulos, duo duobus angulis æquales, quod & ipſum notandum. His igitur nunc demonſtratis, propoſitionis ueritas tali, ut ſequitur, linearum ductu haberi poteſt. Demittantur ab angulo triãguli recto, ad remotiores ab eo duos quadrati iam diuiſi angulos, duò rectæ lineæ. Et quoniam his duabus rectis duo triangula deſcripta ſunt, cum hæc eadem triangula, atq; ipſorum parallelogramma, unam & eandem baſim habeant, in eiſdem etiam parallelis conſtituta ſint: triangula parallelogrammorum dimidia, uel contrà, hæc ad illa duplicia eſſe, per propoſitionem 41. iamdudum concluſum eſt. Ducantur ultimò, etiam ab acutis rectanguli trianguli angulis duæ rectę lineę, quarum utraq; per latus eundem angulum ſubtendens, uſq; ad angulum quadrati illum, cui idem acutus hactenus non eſt cõiunctus, continuetur. Deſcribuntur autem ſic duo triangula alia, quæ ſimiliter ſuorum parallelogrammorum, hoc eſt, quadratorum à lateribus duobus deſcriptorũ, dimidia ſunt, cum ſic ęqualia etiam ſint ex propoſitione 4, bis uſurpata, triangulis prioribus deſcriptis, utrunq; ſuo: ad illa priora triangula, eadem quadrata duplicia erunt. Sed quia ad illa priora duplicia etiam ſunt, ut quidem demonſtratũ eſt, duo partialia diuiſi quadrati parallelogrammatis: per cõmunem igitur noticiam, Quæ eiuſdem duplicia, æqualia inter ſe ſunt, parallelogramma partialia, quadratum nimirum lateris, angulum rectum ſubtendentis, reliquorum duorum laterum quadratis æquale erit. In rectangulis igitur triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quę à lateribus rectum angulũ continentibus deſcribuntur quadratis, quod demonſtrari oportuit.

APPENDIX.

Porrò ex Apollodoro refert Laertius, hanc olim propoſitionem à Pythagora, Italicę philoſophiæ principe, inuentam fuiſſe, ſic inquiẽs. φησὶ δ' ἀπολλόδωρος ὁ λογισικὸς, ἐκατόμβην θῦσαι αὐτὸν, εὑρόντα ὅτι τὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τὴν ὀρθὴν περιεχούσαις. Καὶ ἔστιν ἐπίγραμμα οὕτως ἔχον.

Ηνικα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς ἔυρατο γράμμα
Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὰν ἤγαγε βουθυσίην.

Hæc in Latinum ſermonem è Græco uerſa, ſic ſonant.

Refert autem Apollodorus ſupputator, hecatomben illum immolaſſe, cum inueniſſet, quòd trianguli rectanguli hypotenuſa tantum poſſet, quantum ea quę rectum angulum continerent latera. Et eſt epigramma ſic ſe habens,

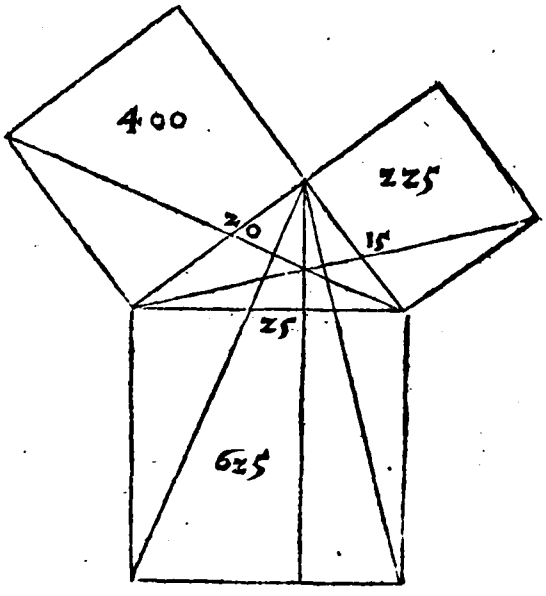
Poſtquam à Pythagora eſt præclara reperta figura,
Tunc centum ille boum ſacra peregit ouans.

Hoc idem attribuit Pythagoræ etiam L. Vitruuius Pollio, libro nono, capite quarto ſuæ architecturæ: atque hunc locum uidere Lector poterit.

Citauimus autem hęc libenter, cùm propter uetuſtatem, tum etiam propter honorificam

norificam & Pythagoræ & propoſitionis huius mentionem, cum illius in omnibus ferè rationibus nō ſit mediocris uſus. Hinc eo maiori ſtudio & diligentia perdiſcenda, memoriæq; commendanda eſt.

SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS FIGVRA GEOmetrica alia, unà cum numeris explicata,



OPERATIO TRIANGVLORVM QVANTVM AD areas inueniendas.

Triangulum unum, cuius

Latera quidem ſunt	Exceſſus uerò
$\sqrt{1450}$	$20 - \sqrt{\frac{1450}{4}}$
25	$\sqrt{\frac{1450}{4}} - 5$
15	$\sqrt{\frac{1450}{4}} + 5$
Summa $40 + \sqrt{1450}$	Medietas $20 + \sqrt{\frac{1450}{4}}$

Quatuor numeri.

$20 - \sqrt{\frac{1450}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1450}{4}} - 5 \cdot \sqrt{\frac{1450}{4}} + 5 \cdot 20 + \sqrt{\frac{1450}{4}}$.

Productum pri. $337\frac{1}{2}$, ſecundum $337\frac{1}{2}$, tertium $\frac{50625}{4}$ atq; area tandem trianguli $112\frac{1}{2}$. Et tanta eſt etiam medietas parallelogrammi partialis, uel quadrati, quod eſt à parte dextra.

Triangulum alterum, quod habet

Latera	Exceſſus itaq;
$\sqrt{1625}$	$\frac{45}{2} - \sqrt{\frac{1625}{4}}$
25	$\sqrt{\frac{1625}{4}} - 2\frac{1}{2}$
20	$\sqrt{\frac{1625}{4}} + 2\frac{1}{2}$
$45 + \sqrt{1625}$	$\frac{45}{2} + \sqrt{\frac{1625}{4}}$

Productum primum 100, ſecundum 400, tertium 40000, atq; tandem trianguli area, 200. medietas ſcilicet alterius partialis parallelogrammi, uel quadrati partis ſiniſtræ. Quare, &c.

ΥΠΟΤΑΣΙΣ

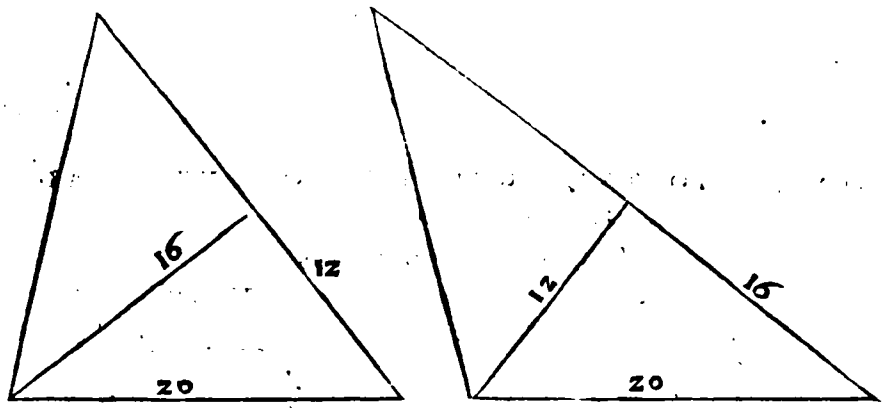
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΗ.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

PROPOSITIO XLVIII.

Si quod ab uno laterum trianguli deſcribitur quadratum, æquale fuerit eis quæ à reliquis trianguli duobus lateribus deſcribuntur quadratis: angulus cõprehenſus ſub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus eſt.

Sit triangulum, cuius quadratum, quod ab uno latere deſcribitur, reliquorum duorum laterum quadratis æquale ſit: dico, angulum quem illud latus ſubtendit, rectum eſſe. id quod ſic demonſtratur. Ab angulo illo, qui, quòd rectus ſit, demonſtrari debet, atq; à latere huius recti uno, tanquam à puncto in recta dato, linea, per propoſitionem 11, πρὸς ὀρθὰς ducatur, ea deinde, per propoſitionem 3, lateri circa hunc rectum alteri, æquali poſita, per id quod petitione quadam permiſſum eſt, nimirum quòd ab omni puncto ad omne punctum linea recta duci poſſit, claudatur tandem triangulum. Et quoniam duæ lineæ, latus ſcilicet trianguli unum, & extra triangulum πρὸς ὀρθὰς ducta, ſunt, ex ſtructura, inter ſe æquales: quod quadra-



ta, ab his æqualibus deſcripta, inter ſe æqualia ſint, manifeſtum eſt. Hinc æqualibus his quodam communi, quadrato ſcilicet lateris alterius, ad quod nimirum extra triangulum linea πρὸς ὀρθὰς ducta eſt, addito: & producta iam, uel collecta, inter ſe æqualia erunt. Quoniam autem utrunq; horum, unum quidem ex hypotheſi, alterum uerò ex propoſitione præcedenti, unius lateris quadrato æquale eſt: & horum duorum quadratorum latera inter ſe æqualia erunt. Igitur, cũ iam duo, qualia ipſa 8. propoſitio requirit, triangula appareãt: angulus ille quem propoſiti trianguli latus, quod in reliqua duo poteſt, ſubtendit, per eandem octauam, rectus erit.

Si igitur ab uno alicuius trianguli latere quadratum deſcriptum, à reliquorum duorum laterum deſcriptis quadratis æquale fuerit: angulus ille, quem hoc latus ſubtendit, rectus erit. quod demonſtraſſe oportuit.

FINIS LIBRI PRIMI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber ſecundus.

SVmit ex hoc libro ſecundo Arithmeticus pulchra ſui calculi compendia, multæ item regularum Algebræ æquationes, & nonnulla etiam harum regularum fundamenta, per huius ſecundi libri propoſitiones demonſtrare ſolet. Habet prꝛterea is liber propoſitiones duas, unam quidem pro Amblygonio, alteram deinde pro Oxygonio triangulo, illæ uerò quantum utilitatis, ſi in re aſtronomica ad penultimam propoſitionem primi, de Orthogonio triangulo expoſitam, referantur, afferre ſoleant, norunt qui in hac diſciplina aliquandiu uerſati ſunt. Quare ſi nullum alium prætera uſum haberet, ob has duas ſaltem propoſitiones præſens hic liber maximopere amplectendus & perdiſcendus eſſet.

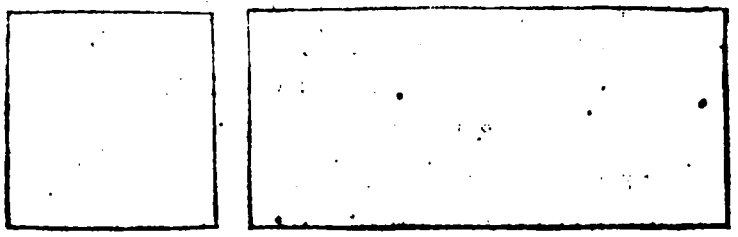
ΟΡΟΙ.

Παν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται, ὑπὸ δύο, τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν ἐυθειῶν

DEFINITIONES.

Prima. Parallelogrammum rectangulum quid.

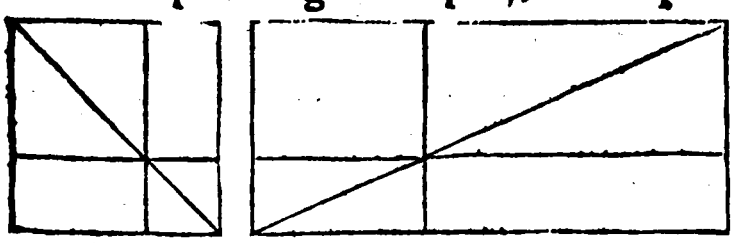
Omne parallelogrammum rectangulum ſub duabus, rectum angulum comprehendentibus, rectis lineis dicitur contineri.



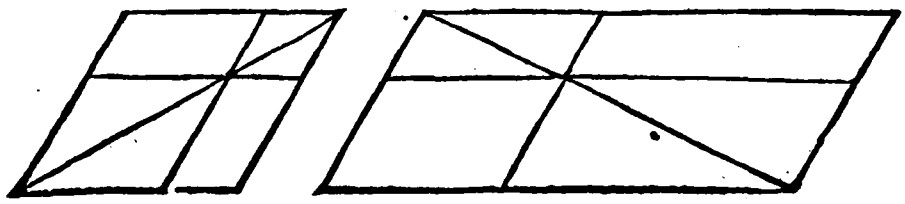
Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν, σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω.

Secunda. Gnomon quid.

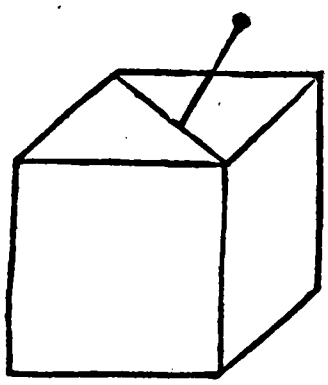
Omnis paralellogrammi ſpacij, eorum quæ circa diametrum illius ſunt parallelogrãmorum unumquodque, cum duobus ſupplementis, Gnomon uocetur.



Sententia definitionis est, Omnis parallelogrammi, quod quidem per ductam ipsius diametrum, ac duas deinde in eo rectas, quæ sese mutuò in communi quodam diametri puncto secant, lineas ductas, in quatuor partialia parallelogramma alia diuisum est, utrunq; eorum, per quæ diameter transit, cum reliquis duobus parallelogrammis, quæ extra diametrum sunt posita, atq; supplementa uocata, Gnomonem nominari.



Est hæc Gnomonis definitio generalior, quàm quæ à Vitruuio est posita, cum hæc rectum tantum angulum, illa uerò cuiuscunq; generis angulos, modo parallelogrammum fuerit spacium, consideret. Definit autem ferè his uerbis Gnomonem Vitruuius, lib. 9. cap. 7. Architecturæ, eum esse ac formari, quando ex medio planicieí linea πρὸς ὀρθὰς erigitur.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

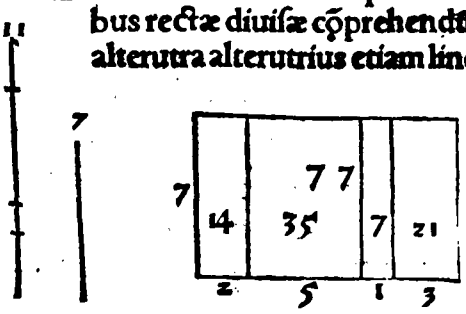
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

PROPOSITIONES.

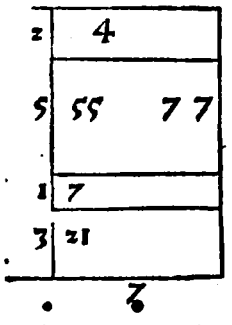
PRIMA I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, secetur'q; altera ipsarum in quotcunq; segmenta: rectangulum comprehensum sub duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ ab insecta & quolibet segmentorum rectangulis comprehenduntur.

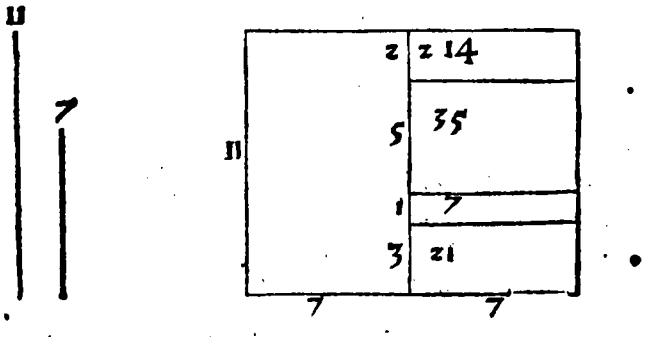
Sint duæ rectę lineæ, harum etiam altera in partes quotcunq; diuisa: dico, rectangulum sub duabus datis rectis cõprehensum, eis, quæ sub indiuisa & singulis partibus rectæ diuisæ cõprehendũtur rectangulis, æquale esse. Excitetur ex alterutra alterutrius etiam lineæ extremitate, per propositionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaq; per tertiam eiusdem, ad æqualitatem alterius posita, ex eius altera extremitate, lineæ, ad quam πρὸς ὀρθὰς linea posita est, parallela, eiq; æqualis, recta linea ducatur, & claudatur superficies. Quòd si iam



iam ex ſingulis diuiſæ lineæ punctis, lineæ rectę, eis quæ ab extremitatibus eiuſdem diuiſæ modò eductæ ſunt, per 31 primi, parallelæ, ad latus uſq; oppoſitum tendentes, ductę fuerint, hac ſtructura tandem propoſitio ſic retinebitur. Quoniam enim totale ipſis partialibus parallelogrammis, ut apparet, æquale eſt, totale autem cum ſub duabus rectis datis, æquali pro æquali linea ſumpta, partialia item ſingula ſub indiuiſa & ſingulis partibus diuiſę, & hic æquali ſubinde pro æquali linea ſumpta, contineantur: ſub duabus igitur datis comprehenſum rectangulũ eis quæ ſub indiuiſa & ſingulis partibus diuiſæ continẽtur rectangulis, æquale erit. Si fuerint igitur duæ rectę lineæ, quarum altera quidem in ſegmenta quotcunq; ſecetur: rectangulum ſub duabus rectis lineis comprehenſum, æquale eſt eis, quæ ab inſecta & quolibet ſegmentorum rectangulis comprehenduntur. quod demonſtrari oportuit.



POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



Quia uerò omnes huius ſecundi libri propoſitiones generaliter & de lineis & de numeris intelligi, atq; per ea declarari poſſunt, ideo etiam, ut quæq; propoſitio ſuos proprios numeros, ſuas etiam conuenientes & debitas lineas haberet, diligenter curauimus. id quod boni conſulere Lector uelit.

APPENDIX.

Solent Arithmetici nõ rarò in multiplicatione, numerum unum eorum, qui inter ſe multiplicari debent, in partes aliquot diſtribuere: alterum deinde, cum partibus diſtributi ſingulis multiplicare, ac multiplicationis tandem productum, per horum partialium productorum ſummam repręſentare: atq; id certe compendio quodam, quod ex hac propoſitione deſumptum eſt, facere eos, ſtudioſi ſciant.

EXEMPLVM SIT.

Indiuiſus	diuiſus in par.	Aliàs multiplicatione ſic,
74	37	
1480	20	74
740	10	37
370	5	518
148	2	222
2738	ijdem numeri	2738

Huius compendij frequens uſus eſt circa multiplicationem in regula Proportionum.

Quòd ſi uerò numeri illi propoſiti æquales inter ſe fuerint, utuntur pro hac prima, ſequenti propoſitione ſecunda, ut quæ idem ſub una recta linea, uel numero, bis tamen eo repetito, proponit, atq; in hoc prima à ſecunda propoſitione differt.

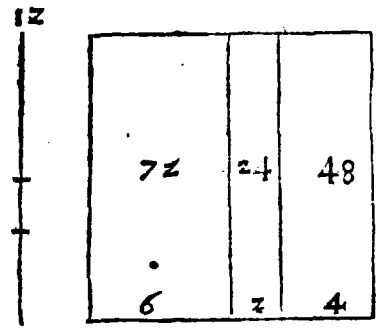
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

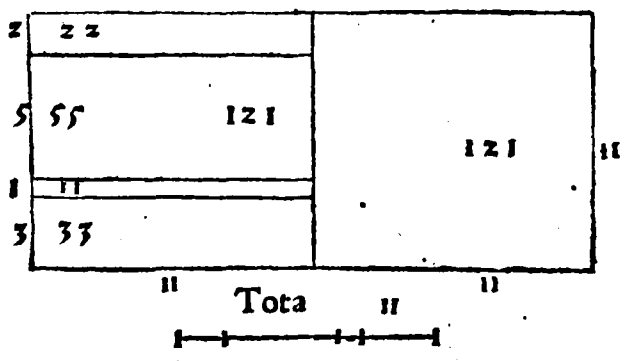
PROPOSITIO II.

Si recta linea ſecetur utcunq; quę ſub tota & utroq; ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato.

Sit recta linea in partes utcunq; diuiſa: dico, quæ ſub tota & utroq; ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia eſſe ei quadrato, quod à tota deſcribitur. Deſcribatur à recta data quadratū, ex puncto deinde uel punctis diuiſionum ſingulis (nam & plurium ſegmentorum lineam hęc propoſitio ferre poteſt) ad angulos rectos lineæ, uel ſi magis placet, utriq; eorum, quæ diuiſæ datæ ad rectos inſiſtunt, laterum parallelæ, uſque ad oppoſitum latus ducantur. Et quoniam partialia per ductas parallelas deſcripta parallelogramma, ei quod à recta diuiſa deſcriptum eſt, quadrato, per propoſitionem prędecētem æqualia ſunt, interiores etiam à punctis ductæ rectæ lineæ, & quadrati latera ſingula, uel hoc ſolum, cui interiores ductę inſiſtūt, omnes ſunt lineæ inter ſe ęquales, æquali ſubinde pro æquali linea ſumpta: hęc ut præcedens tandem manifeſta erit. Si recta igitur linea ſecetur utcunq; quæ ſub tota & uni oq;, uel quòlibet ſegmentorum rectangula comprehenduntur, æqualia ſunt ei quod à tota fit quadrato. quod demonſtrari oportuit.



POTEST FIGVRA ETIAM SIC INSTITVI.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

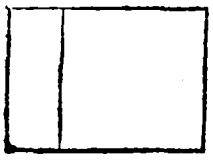
PROPOSITIO III.

Si recta linea ſecetur utcunq; rectangulum ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, ęquale eſt ei quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo, atq; ei quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato.

Sit recta linea ſecta utcunq; dico, rectangulum quod ſub tota & uno eius ſegmentorum cōprehenditur, id ęquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis comprehenſo,

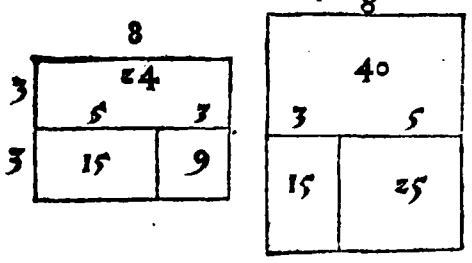
cum

cum quadrato prędicti ſegmenti. Deſcripta figura ut requiritur, demonſtratio ex

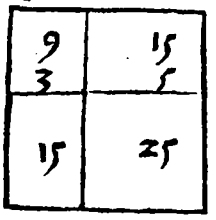


propoſitione prima ſumi poterit, ſegmento illo in quod tota diuiſa ducta eſt, pro altera linea ſumpto. Erunt enim ſic duæ rectæ, una diuiſa, ipſa ſcilicet expoſita, & altera indiuiſa, dictum nimirum ſegmentum. de quo unumquemq; admonitum eſſe uolui.

Alia diſpoſitio.



Sunt hic compendio quodam, duo exempla ſimul iuncta.



ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Deſcribatur ab uno ſegmentorum, utrum hoc fuerit, quadratum: latere deinde quadrati eo, quod diuiſæ rectę opponitur, ad quantitatem ſegmenti alterius ſecundum continuationem in rectum eiecto, à termino illo, tanquam à puncto dato, reliquis duobus quadrati lateribus, per propoſitionem 31. primi, parallela ducatur. Et quoniam, quod ſic deſcriptum eſt totum, duobus, quadrato ſcilicet deſcripto, & rectangulo cuidam, ęquale eſt, totum autẽ cum ſub tota recta & linea quadam uni ſegmentorum æquali comprehendatur, alia uerò duo, unũm quidem ſub ſegmentis diuiſę comprehenſum, alterum uerò ex priori ſegmento quadratum deſcriptũ eſſe appareat, id quod uolebat propoſitio, iam ſic ſe habere manifeſtè patet. Si recta igitur linea ſecetur utcunq; rectangulũ ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, ęquale eſt ei, quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo, atq; ei, quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato. quod demonſtraſſe oportuit.

Eſt autem huius textus figura geometrica ea, quæ ex ſuperioribus eſt in ordine prima.

HAEC PROPOSITIO IN NVMERIS SIC SE HABET.

partes			partes		
Totus 8			Totus 12		
14	8	8	29	17	12
14 6	6	8	29 17	12	12
8	48	64	12	204	144
112 æquales	112		348 æquales	348	

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

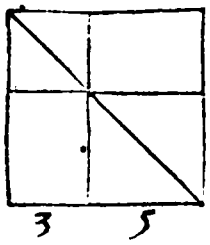
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO IIII.

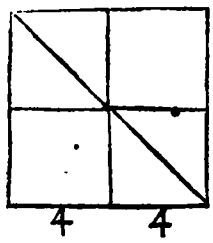
Si recta linea ſecetur utcunq;: quadratũ quod à tota deſcribitur, ęquale eſt quadratis, quæ fiunt à ſegmentis, & ei quod bis ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo.

Sit recta quædam linea data, in duo etiam ſegmenta utcunq; diuiſa: dico, quòd

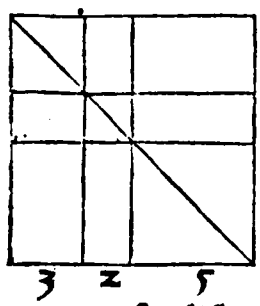
quadratum à tota deſcriptũ, æquale ſit quadratis quæ à ſegmentis fiunt, & ei quod ſub ſegmentis comprehenditur bis. Eſt hæc quarta nihil aliud quàm tertia propoſitio repetita bis, id quod cuilibet manifeſtabitur, qui quadratum totius (mutato nomine) duo rectangula eſſe, quæ ſub tota & duobus ſegmentis comprehenduntur, perceperit. Quare cum iam tertia demonſtrata ſit, hanc quartam demonſtrare non erit neceſſe. Quia uerò non mediocris eſt, in Arithmeticis præſertim, huius propoſitionis uſus, propriam eius demonſtrationem adducere libuit in hunc modum. Deſcribatur à recta data



quadratum, ducatur etiam in eo diameter à puncto deinde, uel punctis (nam ut præcedens, ita & hæc de pluribus ſegmentis intelligi poteſt) diuiſionum ſingulis, lineis, quę à latere ſunt, parallelæ ad oppoſitum uſq; latus ducantur, ubi tandem hæ diametrum ſecant, per puncta illa, reliquis lateribus parallelis ductis, figura parata erit: dico ergo ut ſuprà. Quantum ad demonſtrationem, primò demonſtrandũ erit, parallelogramma illa, per quæ nimirum diameter tranſit, quadrata eſſe, & hoc quidem tali modo. Ex data recta deſcriptum eſt quadratum, cuius latera cum, ex definitione, inter ſe ſint æqualia: qui in utraq; parte ad diametrum ponuntur anguli partiales, ex priore parte propoſitionis 5. primi, inter ſe ęquales erunt.



Et quia cuilibet partiali, ut interno eſt æqualis,, ex ſecunda parte propoſitionis 29. primi alius externus, æqualibus pro æqualibus angulis ſumptis, ſinguli duo in quolibet per quod diameter tranſit parallelogrãmo, anguli inter ſe æquales erunt: quare & latera cuiuſq; trianguli, quæ illos æquales angulos ſubtendunt, ex propoſitione 6. primi æqualia: atq; tandem æqualium laterum, ex 34. & communi illa noticia, Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, hæc ipſa parallelogramma, quod eſt notandum. Ad hæc, quia etiam ex parte tertia propoſitionis 29 primi, atq; ipſa 34 eiuſdem, facile rectangula eſſe oſtenduntur, cum per illam quidem, anguli horum parallelogrammorũ interiores, ex eadem parte ſumpti, duobus rectis ęquales ſint, per hanc uerò, angulos oppoſitos ęquales inter ſe habeant: quadrata igitur ex definitione rectangula illa, atq; ſegmentorum etiam, rectæ diuiſæ quadrata erunt, quod primò demonſtrandum erat. Nunc uerò, quoniam horum quadratorum, hoc eſt parallelogrammorum ſupplementa, ex propoſitione 43. primi, inter ſe ęqualia ſunt, atq; unum quidem eorum, propter linearum æqualitatem, id quòd ſub ſegmentis diuiſæ comprehenditur: & alterum quoq; ſimili ſe modo habebit. Ambo igitur ſimul ei, quod ſub ſegmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Hinc quatuor illa, duo nimirum quadrata, & duo ſupplementa, duorum ſegmentorum quadratis, atq; ei quod ſub ſegmentis comprehenditur bis, æqualia erunt. Sed quia quatuor priora, totius rectæ diuiſæ quadrato, ut apparet, atq; etiam ex tertia præcedenti uſurpata bis, manifeſtum eſt, ęqualia ſunt: & poſteriora tandem, ex communi quadã noticia, eidem quadrato æqualia erunt. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: quadratum quod à tota deſcribitur, æq uale eſt quadratis quæ fiunt à ſegmentis, & ei quod bis ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo. quod demonſtraſſe oportuit.

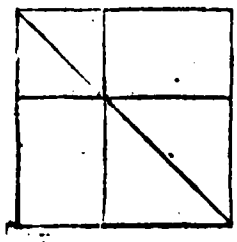


Ετέρα δεῖξις. Aliter idem oſtendere.

Maneat prior diſpoſitio. Et quoniam quadratorũ latera, ex definitione, inter ſe ęqualia ſunt: anguli ad diametrum partiales, ex utraq; parte, per priorem partẽ propoſitionis quintæ primi, inter ſe ęquales erunt. Et rurſus quoniam quadratorum

anguli

anguli sunt recti, & id ex definitione: utercp æqualium angulorum in utrocp triangulo, ex corollario propositionis 32. primi medietas recti erit. Hinc sicut partialium triangulorum unumquodcp, ex secunda parte propositionis 29. primi, angulum rectum habet, ita etiam uniuscuiuscp tertium angulum medietatem recti esse, manifestū erit. Singula igitur triangula, ex propositione 6. primi, Isoscelia, Quadrilatera insuper, ex propositione 34. & illa communi notitia, Quæ eidem æqualia, &c. æquilatera erūt. Et quia unumquodcp etiam rectum angulum unum, cum totius rectæ diuisæ quadrato communē habet, unum deinde ex secunda parte propositionis 29 primi: & reliqui, illis scilicet rectis oppositi, singuli recti erunt: quadrata igitur sunt ea, per quæ diameter transit, quadrilatera: atcp illis etiam, quæ à segmentis diuisæ fiunt, æqualia. Reliqua nunc, ut in priori, demonstrantur.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, Ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, τετράγωνα ἐστίν.

COROLLARIVM.

Ex hoc sanè manifestum est, Quòd in quadratis spacijs circa diametrum parallelogramma, quadrata sint.

APPENDIX.

Hac propositione non rarò utuntur Logistici in regulis Algebræ. per eas enim numerorum irrationalium additionem, Aequationem deinde, in qua, tribus quantitatibus, naturalis ordinis uel æqualibus medijs, propositis, duæ maioris appellationis, tertiæ, cui minor est appellatio, adæquantur, & alia quædam demonstrare solent.

PRIMO QVANTVM AD ADDITIONEM.

Addituri √ 18 ad √ 32 uel id genus, irrationalium numerorum, addunt primò illorum irrationalium quadratos, uno deinde cum irrationali altero multiplicato, numerum qui producitur, propter duo supplementa, bis sumunt. Postremò huius quartę propositionis memores, quæ dicit, Quadratum lineæ, uel numeri, ὡς ἔτυχε diuisi, tantum esse, quantum ex quadratis partium illius, cum eo quod ex una parte cum altera multiplicata bis sumpto, efficitur: omnia hæc, tam quadrata partium, quàm etiam duo supplementa, quę nimirum ex multiplicatione unius partis diuisi numeri cum altera, bis repetita nascuntur, simul iungunt, idcp propterea quidē, ut totius compositi seu in partes diuisi numeri quadratum habeāt, per huius tandem quadrati radicem, quantum sit ipsum latus uel totus numerus, enuncient.

SEQVITVR CALCVLVS.

50
√ 18 ad √ 32
√ 576, bis
√ 2304
hoc est 48. duo supplementa.

Addantur nunc 50, partium quadratis
48, duo supplementa
ueniunt 98, quadratum totius
quare √ 98 ipsum latus,
hoc est partium seu surdorum propositorum summa.

ALIVD EXEMPLVM.

Addantur √ 13 ad √ 21
√ 273, bis
√ 1092, duo supplementa
34, quadrata partium,
quare 34 + √ 1092, quadratum totius compositæ lineæ uel numeri.

numeri. Huius igitur radix quadrata, quæ eſt

Radix collecti 34 + ✓ 1092, uel ✓ 21 + ✓ 13, numerus ipſe.

Quomodo autem uera radix poſita, utpote ✓ 21 + ✓ 13, ex hoc collecto, quod Ex binis nominibus prima dicitur, inueniri debeat, id iamdudum traditum eſt.

SEQVITVR QVAESTIO.

Eſt numerus quidam diuiſus in duas partes, partes autem cum ſint 13 & 21, quantus ipſe totus numerus ſit, quæritur. Facit 34.

Id quod per additionem partium ad ſe, facile deprehenditur.

Quòd ſi quis exercendi ingenij gratia altius hoc quærere uelit, ad quartã huius ſecundi libri propoſitionem confugiat neceſſe eſt, atq; ſic operetur.

Partes propoſitæ ſunt 13 & 21, Partium quadrata 169 & 441, Quod fit, una parte cum altera multiplicata, 273

bis

duo ſupplementa 546

Partium quadrata 610

quadratum igitur totius 1156, atq; tandem

ipſe totus numerus, 34, qui quærebatur.

ALIA QVAESTIO.

Partes alicuius numeri ſunt 49 & 36, quantus eſt ipſe totus.

Facit 85.

Nam quadrata partium ſunt 2401, & 1296. multiplicatio uerò unius partis cum altera bis. producit 3528. Omnia hæc ſimul iuncta, ueniunt 7225, quare huius radix quadrata 85, ipſe totus numerus, qui ex additione datorum conſtituitur. Atq; hæc de additione dicta ſufficiant. Sequitur

AEQVATIO.

Tradidimus in regularum Algebræ deſcriptione tres æquationes, tanquam potiores, quibus ſubinde, per has regulas ænigmata ſoluere cupientes opus habent. Quoniam uerò ſecundam æquationem per tres canones deſcripſimus, primus autem eorum ex hac quarta propoſitione eſt deſumptus, atq; nihil aliud ferè eſſe uidetur, cum idipſum ſic ſeſe habere manifeſtauerimus, propoſitio etiã paulo ante demonſtrata ſit, & hunc canonẽ tandẽ demonſtratũ & fundatum eſſe, nemo dubitet.

Porrò canonis huius tractatio, eſt de tribus naturalis ordinis quantitatibus, quando uidelicet maiores duę, id eſt harum numeri, minimæ quantitatis ſeu characteris numero æquantur. ut eſt

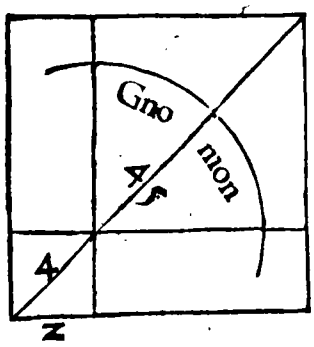
Prima + radix Numero.

Tum ad quadratum (ut paucis repetantur priora) dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata, dimidium characteris medij ſubtrahi debet: quo facto, quæſiti numeri compos aliquis erit, cũ uidelicet per id quod relinquitur, radicis ualor exprimatur. ut Eſto quòd per alicuius exempli operationem eò perũtentum ſit, ut 1 prima + 4 radix æquales ſint 45 N. huius geometrica ſolutio uel demonſtratio talis erit.

Quoniam enim, ut canon habet, ad quadratum dimidij numeri characteris medij, numerus characteris minimi addi, à radice deinde huius collecti quadrata dimidium numeri characteris medij ſubtrahi debet, hoc certe ſi quis propoſitionem hanc quartam, ac canonem etiam altius perpenderit, unam rem eſſe, alijs tamen atque alijs expreſſam uerbis, aſſeret. Nam ultimum quadratum, pro quadrato alicuius totius, puta numeri in partes diuiſi habebit: dimidium uerò radicis characteris medij, alteram huius diuiſi partem: numeros deinde additos, cum ipſorum additio

ditio quadratum efficiat, Gnomonem, ut quem, ex definitione, utrunq; circa diametrum parallelogrammum, & duo supplementa cõstituunt, exponet. Hac expositione tandem, huius quartæ propositionis memor, ex toto quadrato radicem eliciet. Et quia hæc ex partialium quadratorum radicibus composita est, cum unius partialis quadrati radix, dimidium scilicet numeri characteris medij, nota sit: & altera tandem, radix nimirum propositi in exemplo quadrati, subtractione nota erit, id quod pro declaratione huius canonis dicendum erat.

SEQVITVR HVIVS REI FIGVRA GEOMETRICA.



49 quadratum ultimum &. totius diuisi.

Quadratum medietatis medij.

Est demonstratio uel expositio geometrica, puerilis quidem illa, sed quæ rem fidelissimè explicat.

SEQVITVR QVAESTIO CVM CANONI, TVM etiam propositioni accommoda.

Diuidatur numerus in partes duas, quarum quadrata simul, unà cum numero, quem producunt partes inter se multiplicatæ bis 1764 constituant. Vna autem pars cum sit 13 (atq; tantam esse medietatem quantitatis mediæ intelligendum est) quanta fuerit altera quæritur.

Facit 29.

ACCEDIT ET TERTIVS HVIVS QVARTAE PROpositionis, quem habet in Numeris, usus.

In radicibus eliciendis cum semper inuenti numeri quadratum inuestigandum sit, ille uerò numerus subinde, quàm diu sanè durat huiusmodi operatio, una figura crescat, ne totus inuentus semper in se multiplicandus sit, ubi propositionem hanc quartam intellexerint Arithmetici, compendiosius inuentorum quadrata assequentur, per hunc modum. Habito de numero iam inuento, tanquam de una parte totius, quadrato, recipiatur etiam quadratum de numero uel parte altera: una deinde parte cũ altera multiplicata, is qui producitur numerus bis sumatur. Quòd si tandem hoc duplum prioribus duobus partium quadratis cõiungetur, per id collectum tandem commodè, iuxta hanc quartam propositionem, quadratum totius inuenti numeri exprimi poterit.

Huius rei tale sumatur exemplum.

Inuenta est radix ex aliquo numero 6. cuius quadratum quidẽ 36. accedit autem huic radici seu inuento numero, cum nondum ad finem hæc radicis extractio perducta sit, figura alia, nimirum 4, atq; sic aucta est prior inuẽta radix: creuit enim à 6 in 64, atq; huius totius iam desideratur quadratũ, uel quadratus numerus. Prioris igitur figuræ uel inuenti numeri, tanquam unius partis radicis diuisæ, quadrato habito, accipiatur & quadratum alterius, secundò scilicet inuenti numeri, 4, quod erit 16. Et quia numerus primò inuentus, 6. secundum iam locum occupat, unde ratione loci sic, non sex amplius, sed sexaginta significat, ipsius igitur quadrato, 36

ſcilicet duæ figuræ nihili proponendæ ſunt. Poſtremò una cum altera parte multiplicata bis, producuntur 480. Hæc omnia ſi in unam ſummam colligantur, quantum ſit quadratum de 64, apparebit.

SEQVITVR PRAXIS.

	Partes	partium quadra.	Aliàs multiplicatione ſic
Tota radix uel numerus	60	3600	
64	4	16	64
			cum 64
Quod producitur, una parte cum altera multiplicata bis		480	256
			384
Summa productorum		4096	4096

Quòd ſi uerò adhuc una figura acceſſerit, 8 ſcilicet, operatio ſic inſtituatur.

	Partes	partium quadrata	Multiplicatione ſic
Totus numerus 648	640	409600	648
	8	64	cum 648
Ex partium multiplicatione repetitum bis		10240	&c.
Summa omnium, & quadratum totius		419904	

Atq; hactenus de propoſitione quarta. ſequitur

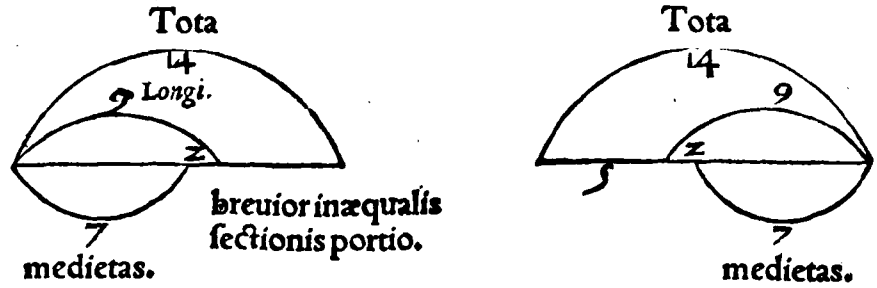
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

PROPOSITIO V.

Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: rectangulum, quod ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio ſectionũ fit, æquale eſt ei quod à dimidio fit quadrato.

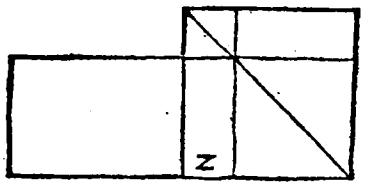
Sit recta quædam linea propoſita, atq; hæc primũ in duo æqualia, deinde etiam in duo inæqualia diuidatur: dico, rectangulum ſub portionibus inæqualis diuiſionis comprehenſum, unà cum quadrato exceſſus longioris portionis inæqualium

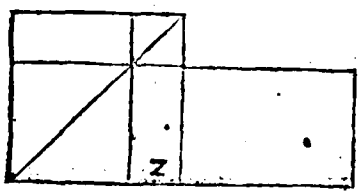


ſuper medietatem lineæ, æqualia eſſe quadrato medietatis. Deſcribatur à dimidia illa, in qua eſt punctum inæqualis diuiſionis, quadratum, cuius diameter cum una datæ extremitate copuletur, atq; ab inæqualis diuiſionis puncto, per diametrum ad latus uſq; oppoſitum, reliquis duobus quadrati lateribus parallela ducatur. Et quia hæc diametrum ſecat, ubi ex puncto interſectionis, utriſq;, hoc eſt, & rectæ datę, & lateri ei oppoſito, altera parallela, datæ æqualis, ducta, ea deinde per tertiam parallelam, cum extremitate datæ, quę adhuc libera eſt, copulata fuerit, figura

parata

parata erit. Dico ergo nunc, ut suprà. Quoniam enim supplementa omnis parallelogrammi inter se æqualia sunt, his nunc æqualibus quadrato breuioris portionis, tanquam communi addito: & quæ colliguntur, ex cõmuni quadam notitia, æqualia erunt. Sed quia unum ex his alij cuidam, cum quo nimirum æqualem basim habet, atq; in eisdem est parallelis, ex propositione 36. primi, est æquale: & alterum, ex communi quadam noticia, eidem æquale erit. His igitur æqualibus nunc, ut tandem concludatur, si utriq; id quod alterum æquale ad complendum medietatis quadratum requirit, addatur: & producta, hoc est rectangulum sub portionibus inæqualibus comprehensum, cum quadrato quod ab intermedia portione describitur, & quadratum medietatis, inter se æqualia erunt. Si igitur recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: rectangulũ quod sub inæqualibus segmentis totius comprehenditur, unà cum quadrato eo quod à medio sectionum fit, æquale est ei quod à dimidio fit quadrato. quod demonstrasse oportuit.





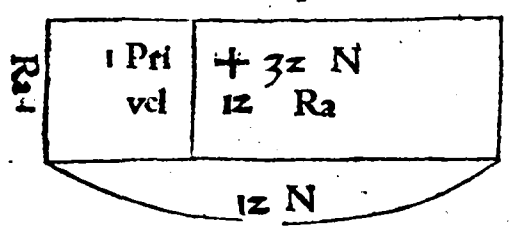
APPENDIX.

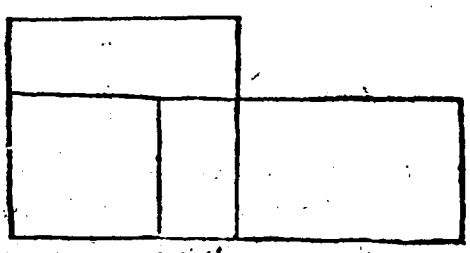
Habet & hæc propositio suum in Numeris locum, cum per eam tertius secundæ æquationis canon, (quo nimirum maximi & minimi characterum numeri, medij characteris numero æquales esse proferũtur) demonstrari soleat in hunc modũ.

Esto exempli gratia, quòd

1 prima + 32 N. æquales sint 12 rad.

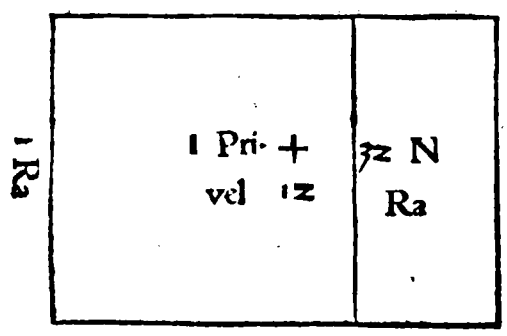
Describatur igitur primò quadratum, propositæ æquationis unam primam repræsentans. huic deinde quadrato, ex una eius parte, eiusdem altitudinis rectangulum, numeros in æquatione uni primę adhærentes significans applicetur. Et quoniam hoc totum rectangulum, ex hypothesi, 12 radicibus æquale est, cum breuius eius latus ratione quadrati, sit una radix: eius latus longius, 12 unitates erunt. Eo igitur longiori latere, ut canon præcipit, bifariam diuiso, erit hoc idem longius latus, linea, qualem propositio hæc quinta requirit, ἐς ἴσα scilicet καὶ ἄνισα diuisa, quod est notandum. Describatur nunc ab una medietate diuisæ quadratum, compleaturq; figura. Et quoniam medietatis quadrato, rectangulum numerorum cum quadrato lineæ, qua rectanguli longius latus medietatem diuisæ excedit, ex hac quinta, æquale est, ubi horum æqualium uni rectangulum numerorum: alteri uerò id, quod rectangulo numerorum, ex propositionibus quadragesima tertia & tricesima sexta primi, ac communi illa notitia, Si æqualibus æqualia adijciantur, etc. æquale est, ablatum fuerit: & quæ relinquuntur tandem, ex communi quadam

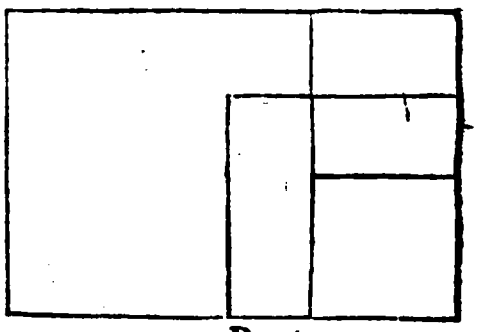




portio quæ à dimidio characteris medij subtrahi debet.

noticia, inter ſe æqualia erunt. Quia autem ex utraq; parte unum & idem parallelogrammum, quadratum ſcilicet circa diametrum alterum, relinquitur, quadratum uerò illud notum eſt, cum uidelicet totum, hoc eſt quadratum medietatis, & ſubtractum deinde, hoc eſt, parallelogrammum uel rectangulum numerorum, nota ſint: & eius radix nota erit. Ea igitur (ut quidem habet deſcriptio figurarum prima) à radice totius quadrati, quod uidelicet à medietate numeri characteris medij deſcriptum eſt, ſubtracta: Vel ea, (ut habet deſcriptio figurarum ſecunda) radici eiuſdem





Portio quæ dimidio characteris medij addi debet.

totius quadrati, addita: alterius quadrati, quod in æquatione propoſitum eſt, radicem notam relinqui neceſſe erit: id quod pro huius canonis demonſtratione, uel pro eius ad hanc propoſitionem applicatione, dicendum erat.

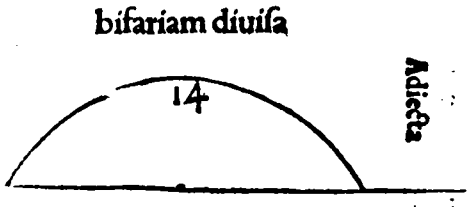
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

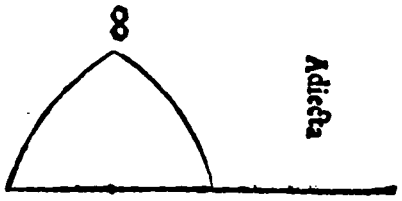
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα, ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VI.

Si recta linea bifariam ſecetur, adijciaturq; aliqua ei in rectũ recta linea: rectangulum comprehenſum ſub tota cũ appoſita & appoſita, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale eſt ei quod à coniuncta ex dimidia & appoſita, tanquam ab una, deſcribitur quadrato.

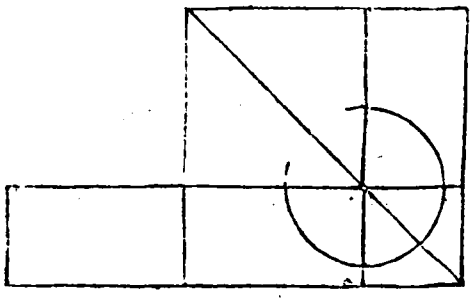
Sit recta linea propoſita, qua bifariam diuiſa, alia ei in rectum linea iungatur. rectangulo deinde & quadratis ſecundum ſuas lineas deſcriptis: dico, rectangulum ſub tota, ex recta data ſcilicet & adiecta compoſita, & adiecta comprehenſum, unà cum quadrato quod à medietate diuiſæ deſcribitur, quadrato à medietate diuiſæ

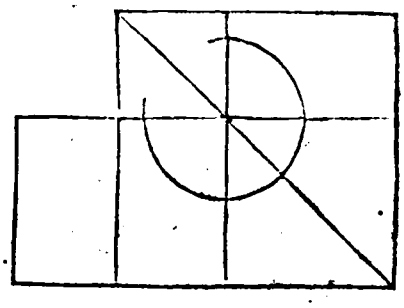




& adiecta, tanquam ab una linea, deſcripto æquale eſſe. Ducatur in quadrato eo, quod à medietate diuiſæ cum adiecta deſcriptũ eſt, diameter, ſic ut per quadratum etiam, à medietate diuiſæ deſcriptum, tanquam diameter tranſeat, deinde latus quadrati eius, quod à medietate deſcriptum eſt alterum, uſq; ad oppoſitum rectanguli latus continuetur. Et quoniam ſuper æqualibus baſibus, atq; in eiſdem parallelis conſtituta

conſtituta parallelogramma, ex propoſitione 36. primi inter ſe æqualia ſunt. Et rurſus, quoniam etiam parallelogrammorum ſupplementa omnis parallelogrãmi ſpacij, ex propoſitione 43 eiuſdem primi, æqualia, cum duo uni æqualia eſſe appareant, illa deinde inter ſe, ex cõmuni quadã notícia æqualia ſint, horum æqualium utriq; parallelogrammo eo quod ad rectam, ex dimidia & appoſita cõpoſitam, ponitur addito: & quę fiunt rectangulũ ſcilicet ſub tota & adiecta comprehenſum, &





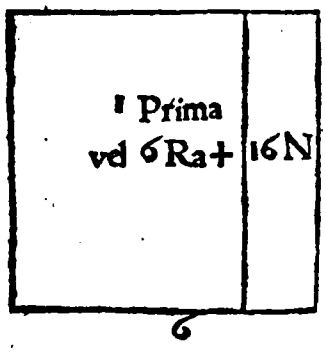
Gnomon, qui quadrato medietatis circumſcribitur, inter ſe æqualia erunt. Ipſum igitur medietatis quadratum, ubi his æqualibus adiectum fuerit, iuxta propoſitionis tandem concluſionem, id quod ſub tota, ex data ſcilicet & adiecta compoſita, & adiecta comprehenditur rectangulum, unà cum quadrato medietatis diuiſæ, ei quod à linea ex medietate & adiecta, conſtituta deſcriptum eſt, quadrato, æquale erit. Si recta igitur linea bifariã ſecetur, adijciaturq; aliqua ei in rectum recta linea: rectangulum comprehenſum ſub tota cum appoſita & appoſita, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, æquale eſt ei quod à coniuncta ex dimidia & appoſita, tanquam ab una deſcribitur quadrato. quod demonſtraſſe oportuit.

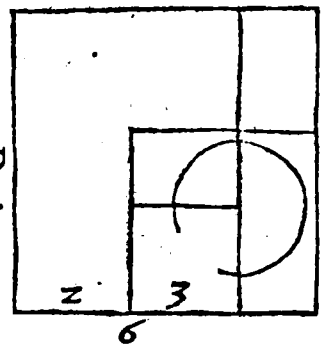
APPENDIX.

Vtuntur hac propoſitione Logiſtici in regulis Algebræ, pro demonſtratione canonis ſecundi in æquatione ſecunda.

Conferuntur in hoc canone duo minorum characterum numeri, cum numero characteris maximi, dicendo, 6 radices + 16 numeris, ſunt æquales uni primæ, ubi tum geometrice ſic agendum erit.

Deſcribatur primò quadratum, quod propoſitæ æquationis primam repreſentet. Et quoniam id ex hypotheſi, 6 radicibus & 16 N. æquale eſt, pro rectangulo numerorum parte aliqua ab eodẽ reſecta, quod relinquitur tandem rectangulum, radicibus ſolum æquale erit. Deſcribantur nunc duo quadrata, quorum quidem





unius latus ſit propoſitarum radicum medietas, alterius uerò, hæc eadem radicum medietas, unà cum rectanguli numerorum latere ei in rectũ iuncto. Et quoniam rectangulum numerorũ, tanquã id quod ſub tota compoſita et adiecta ſeu appoſita comprehenditur, unà cum quadrato dimidiæ lineæ, per hanc ſextam propoſitionem, ei quod à recta ex dimidia & adiecta compoſita, tanquam ab una linea deſcribitur, quadrato æquale eſt, unum autem horum, rectangulum ſcilicet numerorum cum quadrata dimidię, notum cum ſit: & alterum, quadratum

ſcilicet lineæ, à dimidia & adiecta compoſitæ, iam notum erit: quare & ipſius latus notum. Id autem cum à latere quadrati primò deſcripti, in dimidia diuiſæ lineæ altera deficiat, per additionem igitur huius ad latus notum: & ipſius tandem primò deſcripti quadrati latus, hoc eſt radicis ualor notus erit: id quod paucis, quomodo ex hac propoſitione geometricè is canon declarari ac retineri poſſit, indicare uoluimus. Atq; hæc quidem, pro demonſtratione canonũ ſecundæ æquationis in regulis Algebræ dicta, ſufficiant. Quas uerò ſubtiliores illi demonſtrationes habent, eas ſuo tempore peculiari quodam libello Lectori communicabimus.

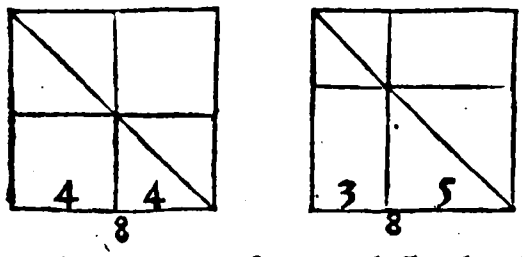
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea ſecetur utcunq; : quod à tota, quodq; ab uno ſegmentorum, utraq; ſimul quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato.

Sit recta linea ſecta utcunq;, hoc eſt, in æqualia uel non æqualia: dico, quòd quadratum totius & quadratum alterutrius ſegmenti æqualia ſint rectangulo ſub tota & ſumpto ſegmento comprehenſo bis, cum alterius ſegmenti quadrato. Formetur ex recta data figura, prout ipſa propoſitio exigit, & prout habet propoſitio huius quarta: & ducatur diameter. per ſingula quadrata tranſiens. Et quoniam ex propoſitione quarta huius, quadratũ totius quadratis partium, & ei quod cõprehenditur ſub partibus bis, æquale eſt, æqualibus nunc æquali, quadrato ſcilicet unius ſegmenti, ex æquo addito: mutatis deinde appellationibus, propoſitioni ſatisfactum erit.



ALIA HVIVS, ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Ex linea, ut quidem propoſitio requirit, figura formata, cum παραλληλόγραμμα omnis parallelogrammi ſpacij inter ſe ſint æqualia, cumq; etiam æqualia, uel aliquod commune, ut hoc loco eſt dicti ſegmenti quadratum, æqualibus additum, quæ inde colliguntur æqualia ſint: hæc duo æqualia ſimul ſumpta, ad utrunq; æqualium dupla erunt. Sed quia ad utrunq; eorũ duplum etiã eſt, quod ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur bis, cum ex communi quadam noticia, Eiuſdem duplicia, inter ſe æqualia ſint: & hæc duo, hoc eſt, Gnomon cum quadrato dicti ſegmenti, & quod ſub tota ac dicto ſegmento comprehenditur bis, inter ſe æqualia erunt. atque hæc tandem, ſi alterius ſegmenti quadratum ex æquo acceperint: cum ſic & collecta æqualia ſint, conſtat tandem propoſitum. Si recta linea igitur ſecetur utcunque, quod à tota, quod'que ab uno ſegmentorum, utraq; ſimul quadrata, æqualia ſunt ei, quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & ei quod à reliquo ſegmento fit quadrato, quod demonſtrari oportuit.

APPENDIX

APPENDIX.

Habet & hæc propoſitio ſuum in Arithmeticis uſum, cum per eam modus ſubtrahendi radices quadratorum irrationales retineatur.

Quo ingenio Arithmetici radices quadratorum irrationales, unam ab altera ſolent ſubtrahere, ex hac propoſitione didicerunt. Poſtquam enim per eam quadratum alicuius rectæ diuiſæ, cum quadrato alterutrius ſegmenti, ei quod ſub tota & dicto ſegmento continetur bis, cum eo quod à reliquo ſegmento deſcribitur quadrato, æquale eſſe cognouerunt, facilis illis fuit omnis ſubtractio. Nam mutatis numerorum appellationibus, numerum ſcilicet à quo ſubtrahitur, totum: ſubtrahendum deinde, unum ſegmentum: reſiduum porrò, alterum diuiſę rectæ ſegmentum eſſe conſiderantes, ſtatim hac propoſitionę freti, quadrata numerorum, eius ſcilicet à quo ſubtrahitur, atq; etiam ſubtrahendi, in unum colligunt. Et quia collectum id ex hac propoſitione, tanto maius eſt quadrato reſidui, quantum ſub his duobus numeris, toto ſcilicet & uno ſegmento, cõtinetur bis, ut de quadrato reſidui, deq; ipſo reſiduo illis conſtaret, mox illud comprehenſum bis de quadratorũ collecto ſubtrahunt. quod quidem obiter circa hanc propoſitionem indicandum erat.

SEQVITVR HVIVS REI EXEMPLVM.

A $\sqrt{75}$ debet ſubtrahi $\sqrt{27}$, inſtituitur ergo operatio ſic,

Numerus ſubtrahendus, hoc eſt, unum ſegmentum, $\sqrt{27}$		numero à quo ſubtrahitur, hoc eſt, à toto, $\sqrt{75}$
102		Totius & ſubtrahendi quadratum
90		Quod ſub toto & ſubtrahendo bis
12		Quadratum reſidui numeri
Quare $\sqrt{12}$,		ipſe reſiduus numerus.

SEQVITVR QVAESTIO.

De numero 34 ſubtracta ſunt 13, quæritur de reſiduo. Facit 21.

Id quod per ſubtractionem 13 à toto numero, facile deprehenditur.

Quòd ſi quis, exercendi ingenij gratia, hoc altius quærere uelit, ad ſeptimam huius ſecundi libri propoſitionem confugiat neceſſe eſt, atque ſic operationem ſuam inſtituat.

Vnum ſegmentum			toto
Subtrahantur 13	à	numero	34
quadrata 169			1156
Quadratorum ſumma 1325			
minus 884,	hoc eſt, eo quod ſub toto, & dicto ſegmento continetur bis.		
manent 441,	quadratum reſidui		
Quare 21,	numerus reſiduus.		

ALIA QVAESTIO.

Sunt duo numeri. Quoniam autem unius numeri quadrato 49. continentur, compoſitus uerò ex illis cum quadratum habeat 121, quantus ſit numerus alter, quæritur. Facit 4.

121 49

176

minus 154

manent 16

Quare 4 &c.

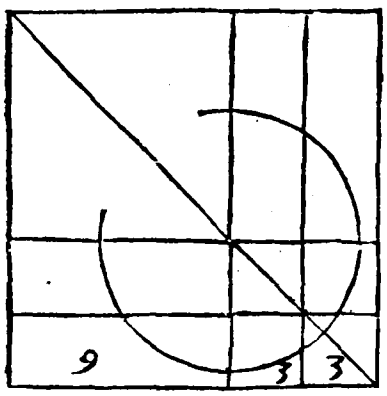
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὸ τετράκις ὑπὸ ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

PROPOSITIO VIII.

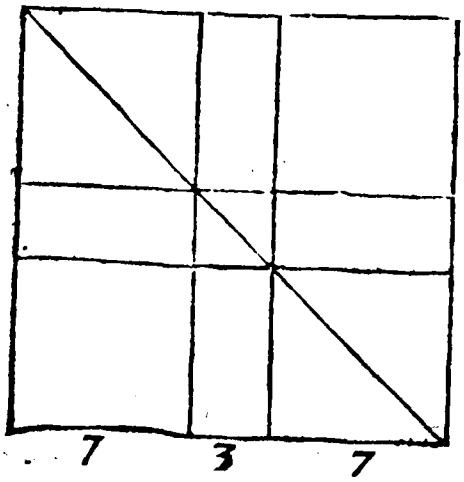
Si recta linea ſecetur utcunq; rectangulum quod ſub tota & uno ſegmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo ſegmento deſcribitur, æquale eſt ei quod à tota & dicto ſegmento, tanquam ab una linea deſcribitur quadrato.

Sit recta linea ſecta: utcunq; dico, quòd rectangulum, ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, quater, unà cum quadrato alterius ſegmenti, æquale ſit quadrato, quod à tota & dicto priori ſegmento, tanquam ab una recta, deſcribitur. Deſcribatur primò quadratum, cuius latus ſit ipſa recta data, cum alterutra eius portione ſibi adamuſſim iuncta: à punctis deinde, coniunctionis ſcilicet uno, & diuiſionis altero, duæ per quadratum hoc tendentes ad angulos rectos lineæ excitentur, quadrati tandem diametro ducta, ubi hæc duas ad rectos ductas lineas ſecue-



Diuiſa 12		Vnum ſegmentorum.
9	3	3
12		12
3		& 3
36		15
quater		cum 15
144		75
81		15
225		225

rit, per ea puncta, tanquã à pũctis datis, reliquis duobus quadrati lateribus, per propoſitionem 31 primi, parallelæ ducantur, & erit huius propoſitionis figura parata. quam quidem ſi quis diligenter inſpexerit, atq; τὸ κατασκευῆς, necnon eorum etiam quæ in propoſitionibus 36 & 43 primi tradita ſunt, memor fuerit, facili opera propoſitioni, ex quarta huius, ſatisfacere poterit.



Diuiſa 10		Vnum ſegmentorum.
in 7	& 3	7
10		10
7		& 7
70		17
quater		cum 17
280		119
9		17
289		289

numeri æquales.

ALIA

ALIA HVIVS ET CLARIOR DEMONSTRATIO.

Sit recta data, ea etiam utcunq; diuiſa: dico &c. Quoniam recta in duo diuiſa eſt, ſegmento ei quod in collatione cum tota diuiſa ſumitur, ad partem etiam ubi ponitur, æqualis recta alia adamuſſim iungatur, quadrato deinde ab hac tota compoſita per 46 primi deſcripto, dupla figura deſcribatur. Et quoniam rectæ diuiſæ alia recta, uni ſegmentorũ æqualis, adamuſſim iuncta eſt, cum parallelogrammorum latera oppoſita, ut in primo libro demonſtratum eſt, inter ſe ęqualia ſint: illæ etiam quas hæ duæ rectæ, hoc eſt ſegmentum id, & recta ei æqualis, lineas ſibi ęquales habent, inter ſe æquales erunt, ſuper ijs deinde parallelogramma poſita, cum hęc etiam æquealta ſint, ex propoſitione 36 primi inter ſe æqualia. Sed quoniam ſupplementa omnis parallelogrammi, ut iam ſæpe dictum, inter ſe æqualia ſunt: & hæc quatuor parallelogramma, quæ ſuper illo ſegmento & ſua æquali, atq; alijs duabus, his æqualibus, rectis conſtituta ſunt, ex communi quadam noticia, inter ſe ęqualia erunt, atq; deinde horum quatuor aggregatũ, ad id quod ſuper idem ſegmentum eſt poſitum parallelogrammum, quadruplum. Pari ratione & reliqua quatuor, circa uel extra diametrum poſita parallelogramma, inter ſe æqualia, ac totum deinde ad id quod ſupra alterum diuiſæ ſegmentum eſt poſitum, quadruplũ. Illud igitur prius cum hoc aggregato, quæ ambo ſimul Gnomonis figuram referunt, ad rectangulum, ſub tota & uno ſegmentorum comprehenſum, quadruplum erit. Quare alterius ſegmenti quadrato ex ęquo illis appoſito: gnomon cum illo alterius ſegmenti quadrato, hoc eſt, totius compoſitę, ut unius lineæ, quadratum, ei quod ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur quater, cum eodem alterius ſegmenti quadrato, ęquale erit. Si recta igitur linea ſecetur utcunq;: rectangulũ, quod ſub tota & uno ſegmentorum comprehenditur quater, cum eo quadrato quod à reliquo ſegmento deſcribitur, ęquale eſt ei quod à tota & dicto ſegmẽto, tanquam ab una linea deſcribitur quadrato. quod demonſtrari oportuit.

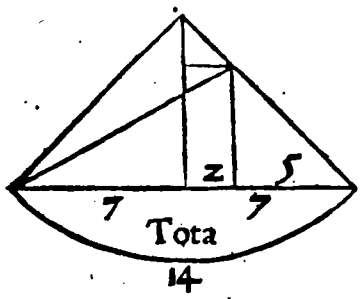
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

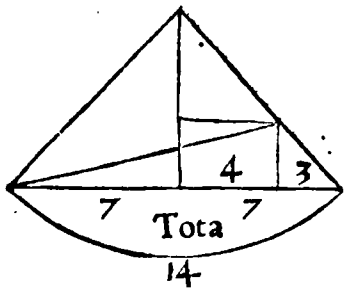
PROPOSITIO IX.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio ſectionum fit quadratorum.

Sit recta linea, in duo æqualia, in duo etiam inæqualia diuiſa: dico, quadrata inæqualium ſegmentorum ſimul ſumpta, dupla eſſe quadratorũ, quorum unum quidem à medietate lineæ, alterum uerò ab ea quæ diuiſionum punctis interiecta eſt linea, deſcribitur. Excitetur ex puncto æqualis diuiſionis in linea, per propoſitionem 11. primi, ad angulos rectos linea, eaq; per 3 eiuſdem, ad æqualitatem medietatis diuiſæ poſita, ab eius altera extremitate duæ ad rectæ diuiſæ extremitates lineæ demittantur. Deſcribuntur autem ſic duo triangula, rectangula, & Iſoſcelia, ut patet ex ſtructura. Excitetur rurſus ex puncto inæqualis diuiſionis, alia ad angulos rectos linea, uel ſi mauis, priori ad rectos ductę linea parallela, eaq; ad latus uſq; oppoſitum continuata, ab huius & lateris oppoſiti contactu, ad priorem in triangulo πρὸς ὀρθὰς ductam linea diuiſę parallela ducatur. Et deſcribuntur alia duo triangula,



quæ & ipſa, ut patebit, rectangula ſunt, & iſoſcelia. Quòd ſi tandem à communi horum duorum triangulorum copula, ad illam rectæ diuiſæ extremitatem, quæ huic quodammodo è regione poſita eſt, linea recta ducatur, huius propoſitionis figura conſtituta erit, cuius quidem explicatio & demonſtratio talis. Quoniam ad punctum æqualis diuiſionis conſtitutorum triangulorum utrunq; iſoſceles eſt, ex ſtructura, & orthogonium, cum anguli eorum ad baſim, per priorem partem propoſitionis quintæ primi, inter ſe æquales ſint, uterq; in utroq; triangulo angulus, primò, ex corollario propoſitionis 32 primi, medietas recti: angulus deinde integer, quem recta diuiſa ſubtendit: rectus erit. Ad hæc, cum linea ex communi partialium triangulorum copula ueniens, ut habet propoſitionis ſtructura, diuiſæ rectæ ſit parallela, deinde uerò alia quædam recta, quæ uidelicet ex puncto æqualis diuiſionis in recta data πρὸς ὀρθὰς excitata eſt, in illas parallelas incidat: angulus externus, ex ſecunda parte propoſitionis 29 primi, ſuo interno & oppoſito æqualis eſt. Quia uerò rectus eſt ipſe internus, ex ſtructura: & externus ſic rectus erit. rectangulũ igitur eſt illud partiale triangulum, atq; deinde per corollarium propoſitionis 32 primi, & ſextam propoſitionem eiuſdem, idem etiam iſoſceles. In hunc modum, & alterum partiale triangulum, ut rectangulum & iſoſceles ſit, demonſtrabitur. Nunc autem cum trianguli rectanguli & iſoſcelis, eius quidem, cuius latera ſunt, ſubtenſa indiuiſa, medietas rectæ indiuiſa, & perpendicularis, medietati diuiſæ æqualis, quadratũ lateris rectum angulum ſubtendentis, reliquis duorum laterum, quadratis, per propoſitionem 47 primi, æquale ſit: erit propter æqualitatem laterum, illud ad utrunq; eorum duplum. Eſt itaq; quadratum hypotenuſæ huius rectanguli, quadrato medietatis rectæ diuiſæ duplũ, quod eſt notandum. Pari ratione etiam in triangulo rectãgulo & Iſoceli partiali ſuperiori, cuius nimirum alterũ circa rectũ angulũ latus, pars eſt perpendicularis, ex æqualis diuiſionis puncto excitatæ, quadratum ſubtenſæ angulo recto, ad quadratum lineæ, quæ ex communi partialium triangulorum copula, medietati rectæ diuiſæ eſt ad æquediſtantiã ducta, duplum erit: quare etiam ad quadratum ſuæ æqualis, lineæ ſcilicet, quę inter diuiſionis puncta iacet, duplum. Cum aũt iam duæ lineæ ſint, quarum utriuſq; quadratũ, ad alterius lineæ quadratum duplum eſt, & illarum quadrata ſimul ſumpta, ad harũ ſimul ſumpta quadrata dupla erunt. Sed illarum linearum quadrata, quæ ſunt ad alia dupla, æqualia ſunt, quadrato lineę, ex communi partialium triangulorum copula ad angulum oppoſitum ductæ, cuius quadrato etiam (cum hæc linea duorum orthogoniorum triangulorum rectos ſubtendat) ſi æqualis pro æquali linea ſumatur, ſegmentorum inæqualis diuiſionis quadrata æqualia ſint, per communem tandem illam noticiam: Quę eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, propoſitum inferri poterit, nimirum. Si igitur recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: quæ ab inæqualibus ſegmentis totius fiunt quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod à medio ſectionum fit quadratorum, quod demonſtraſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

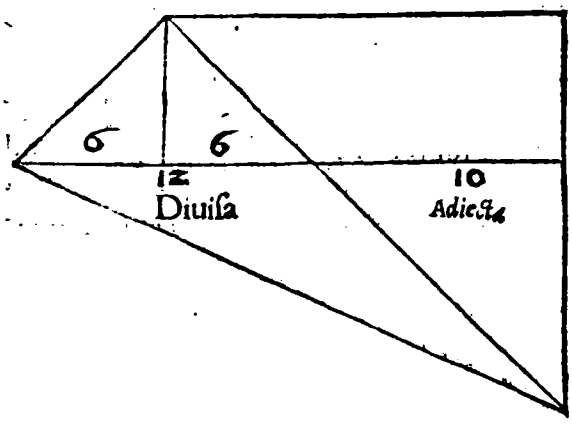
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὸ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦτε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

PROPOSITIO

PROPOSITIO X.

Si recta linea ſecetur biſariam, adiiciaturq; aliqua ei adamuſſim recta linea: quod à tota cum appoſita, & quod ab appoſita, utraq; ſimul quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, deſcriptorum quadratorum.

Sit recta linea propoſita, ea etiam biſariam diuiſa, atq; alia deinde ei adamuſſim adiecta: dico, duo quadrata, compoſitæ ſcilicet lineæ & adiectæ, dupla eſſe ad quadrata linearum, unius quidem, quæ eſt medietas rectæ datæ, alterius uerò, quæ ex medietate altera atq; ei adiecta eſt compoſita. Erigatur ex puncto æqualis diuiſionis ad angulos rectos linea, atq; ea ad æqualitatem medietatis rectæ diuiſæ poſita, altera eius extremitas duabus rectis, cum duabus extremitatibus rectæ diuiſę coniungantur, rectam illam, quæ per coniunctionis punctum tranſierit, ulterius continuando. Fiant autem duo triangula, rectangula atq; Iſoſcelia, in quorum utroque utérq; angulorum ad baſim, ex ſtructura & propoſitione 32 primi, medietas recti eſt, quod eſt notandum. Porrò ſecundum quantitatem ad rectos ductæ, atq; eius quæ ex medietate rectæ diuiſę & adiecta compoſita eſt, lineæ, parallelogrammum rectangulum deſcribatur, latus illud eius, quod ad rectos ductæ lineę oppoſitum eſt & parallelum, ultra adiectam rectam cõtinuando. Et quia hanc continuatam, cum illa, quæ per coniunctionis punctum tranſit, propterea quòd in eas alia recta cadens, ex illa parte duos angulos duobus rectis minores facit, ex cõmuni quadam noticia in libro primo expoſita, concurrere neceſſe eſt, continuentur igitur ambę ut triangulum fiat: & erũt quæ ſic apparẽt duo triangula, tam totale quàm partiale, ex ſtructura & ſecunda parte propoſitionis 29 primi, rectangula & Iſoſcelia, quod & ipſum notandum. Vltimò ducatur & alia recta, cuius termini ſint reliquę extremitates datæ & continuatę linearum, & erit figura, unde nunc huius propoſitionis demonſtratio elici poterit, hoc modo parata. Et quoniam quadratum lineæ ultimò ductæ, per propoſitionem 47 primi, quadratis linearum, compoſitę nimirum ex data & adiecta, & ipſius adiectæ, ęquale eſt, idem etiam quadratum, cum ipſius latus duorum orthogoniorum triangulorum rectos ſubtendat, ęquale, per eandem 47, quadratis duarum linearũ, quę ab extremitate ad rectos ductę altera, per extremitates rectæ diuiſæ deſcendunt: per hanc communem noticiam, Quæ eidem æqualia, &cæ. quadrata priora, compoſitæ ſcilicet & additę lineæ, deſcendentium linearum quadratis ęqualia erunt. Sed quia deſcendentium quadrata, ratione ſuorum triangulorum, quę & rectangula & Iſoſcelia ſunt, ad quadrata, medietatis diuiſę & compoſitæ deinde ex altera medietate & adiecta, dupla ſunt: propter ęqualitatem quadratorum, deſcendentium ſcilicet linearum, compoſitæ deinde & adiectę, conſtabit propoſitum. Compoſitę ſcilicet & adiectę linearum quadrata, dupla eſſe quadratorum, medietatis lineæ diuiſę, & eius quæ ex medietate & adiecta compoſita eſt. Si recta igitur linea ſecetur biſariam, adiiciaturq; aliqua ei adamuſſim recta linea: quod à tota cũ appoſita, & quod ab appoſita, utraq; ſimul quadrata, dupla ſunt eius quod à dimidia, & eius quod ab adiacente ex dimidia & adiecta, tanquam ab una, deſcriptorũ quadratorum. quod demonſtrari oportuit.



SEQVITVR EXEMPLVM IN NVMERIS.

Totus 14 — Adiectus

7 7 — 9

Operatio.

Totus & adie.	Adiectus	Dimidius	Dimidius & adie.
23	9	7	16
529	81	49	256
610	duplus	305	

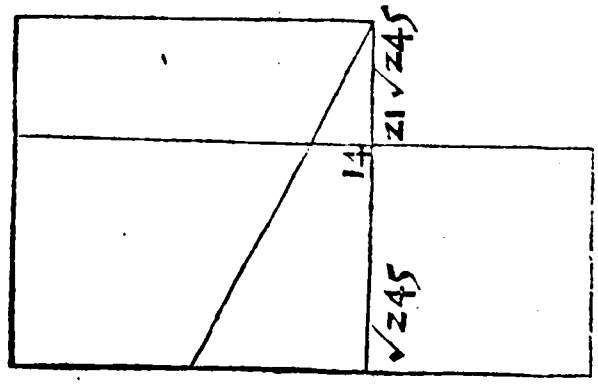
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam secare, ut quod sub tota & altero segmento comprehenditur rectangulum, æquum sit ei, quod fit à reliquo segmento quadrato.

Sit recta linea data, atq; propositum eam in duo secare sic, ut quod sub tota & uno segmento, breuiori scilicet, comprehenditur rectangulum, æquale sit ei, quod ab altero, hoc est longiori segmento describitur quadrato. Describatur à recta data quadratum, sicuti docet propositio in primo 46, illorum deinde laterum, quæ re-



ctæ datæ insistunt, altero bifariam diuiso, à diuisionis puncto linea quædam recta usq; ad alteram datæ extremitatem ducatur, & describitur triangulum rectangulum. Porrò medietas lateris diuisi, quæ à puncto diuisionis & angulo huius trianguli recto intercipitur, eousq; prolongetur, donec lateri, in triangulo rectum angulum subtendenti, æqualis fiat. & ubi deinde secundum quantitatem partis prolongatę exterioris, quadratum ad ipsam descriptum, latus item huius quadrati, quod exteriori parti oppositum est, per quadratum primò descriptum continuatum fuerit, propositioni tandem satisfactum erit. Id quod, cum tam quadratorum, ex definitione, quàm etiam parallelogrammorum opposita latera, ex propositione 34 primi, inter se ęqualia sint, sexta propositio huius & penultima primi, ęqualibus subinde pro æqualibus sumptis, ab æqualibus item eodem communi subtracto, clarę manifestabunt.

SEQVITVR

SEQVITVR EXAMEN HVIVS DIVISIO-
nis in numeris.

Totus 14 | Longius segmen. $\sqrt{245} - 7$ | Breuius $21 - \sqrt{245}$

in se cum

$21 - \sqrt{245}$ cum 14 — $\sqrt{245} - 7$ $\sqrt{245} - 7$

Producuntur

$294 - \sqrt{48020}$, Id quod continetur sub toto & breuiori.

$294 - \sqrt{48020}$ Quadratum segmenti longioris.

Numeri, uel producta æqualia.

APPENDIX.

Hanc lineæ diuisionem requirit propositio nona libri quarti, quę nimirum proponit, quomodo Isosceles triangulum, cuius uterq; angulorum ad basim ad tertium reliquum duplus sit, formari debeat, id quod absq; huius diuisionis cognitione aliàs absolui nequit. Quas deinde proprietates habet hęc eadem sic diuisa linea, quid item conducat, aliquo modo ostendit liber Euclidis tredecimus, cuius obiter Lectorem admonendum esse duximus.

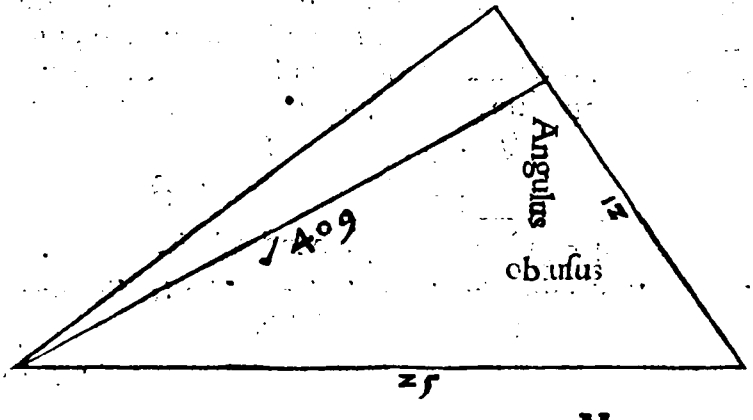
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις ὁ ἀπὸ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς, ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσα ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

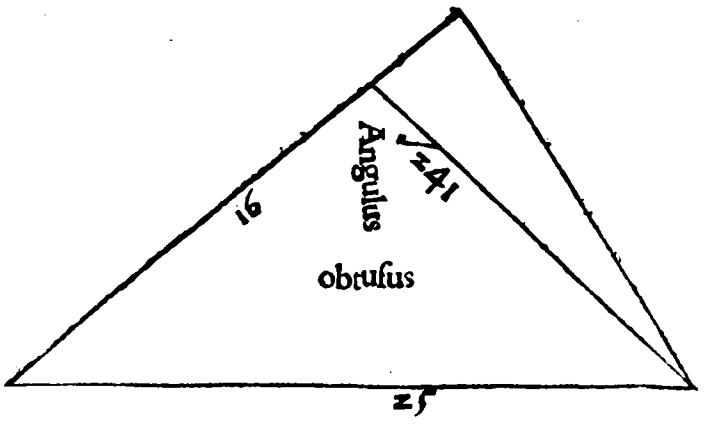
PROPOSITIO XII.

In obtusiangulis triangulis: quod ab obtusum angulum subtendente latere fit quadratum, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, comprehenso bis sub uno eorum quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, perpendicularis cadit, atq; assumpta extra sub perpendiculari ad obtusum angulū.

Obtusiangulo triangulo exposito, uno etiam eorum quę circa obtusum sunt angulum latere, ex parte illius anguli, adeò ultra triangulum continuato, ut in id ab



angulo trianguli acutò, oppoſito quodammodo, perpendicularis commodè cadere poſſit, atq; hæc poſtea ducta, figura deſcripta erit: dico ergo, quadratum, quod à latere obtuſum angulũ ſubtendente deſcribitur, maius eſſe, quàm ſunt quadrata, quæ ab ijs quæ circa obtuſum angulum ſunt, lateribus deſcribuntur, eo quantum eſt id, quod bis cõprehenditur ſub uno latere eorum, quæ circa obtuſum angulum ſunt, atq; eo, quod à dicto latere, ſi illud ultra obtuſum angulum prius protractum fuerit, & demiſſa ab angulo, quem hoc latus ſubtendit, perpẽdiculari intercipitur. Demonſtratio huius, quia eſt facilis, cum ex propoſitione penultima primi, uſurpa



ta bis, quarta tamen huius, propter ſumptionem æqualium pro æqualibus interpoſita, procedat, Lectori eam ut inde colligat commendabimus. In obtuſiangulis igitur triangulis: quadratum lateris ſubtendentis angulũ obtuſum, tanto maius eſt reliquorũ duorũ laterum quadratis, quantum eſt id, quod bis comprehenditur ſub alterutro reliquorum, & portione eidem alteri extra triangulum in directũ adiecta, quæ à perpendiculari ab angulo huic lateri oppoſito demiſſa, & angulo obtuſo intercipitur, quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.

Quomodo uerò, amblygoniò triangulo, cuius tria latera nota ſint, expoſito, portionis exterioris quantitas, quanta deinde ſit perpendicularis, in numeris inueniri debeat, ſequenti calculo manifeſtabitur.

Quantum ad figuram priorem.

Trianguli latera	25	√ 409	12
Laterum quadrata	625	409	144

625
553 } Et tantum eſt quod ſub latere ultra triangulum continuato, & portione
72 { exteriori comprehenditur bis. Huius igitur dimidio 36 in latus notum
12 diuiſo: & portio illa exterior nota fiet. Porrò perpendicularis nunc quanta ſit, penultima propoſitio primi ſequenti calculo manifeſtabit.

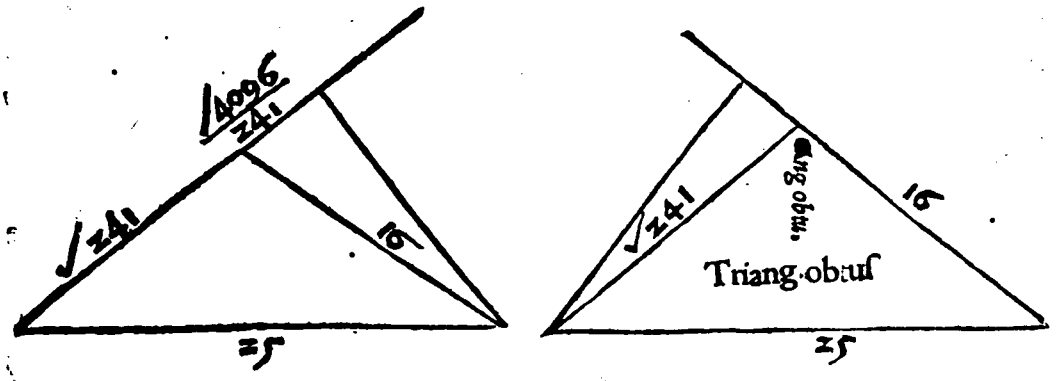
3	√ 409	Latera
9	409	Quadrata

400 Quadratum perpendicularis.

Perpendicularem igitur ipſam, huius quadrati radix, quæ eſt 20, manifeſtabit.

SEQVVNTVR

SEQVVNTVR HVIVS PROPOSITIONIS DVAE figuræ aliæ.

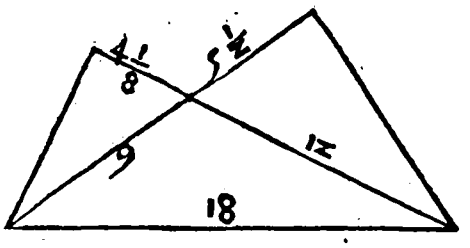


Calculus figuræ posterioris.

Trianguli latera	25	16	√ 241
Laterum quadrata	625	256	241

Facta subtractione, manent 128, id quod sub latere ultra triangulum continuato, & portione exteriori comprehenditur bis, cuius dimidio 64 in latus notum 16 diuiso, exeūt 4, portio exterior. Perpendicularis igitur 15, quod examinari potest.

ALIA FIGVRA, IN QVA DVO EXEMPLA simul exposita sunt.



Examen illius in numeris.

Latera

Subtendens angulum obtusum — Includentia angulum obtusum

Qua- 18 / 324 dra- 9 / 81 ta 12 / 144

225 / 99 duplum rectanguli, quare 49½, rectangulum ipsum, quod nimirum sub alterutro circa obtusum angulum latere, 9 aut 12, & sua exteriori prolongata portione, ab eodē angulo & ipsa perpendiculari intercepta comprehenditur, id quod sequens calculus clarè manifestabit.

Latus alterum	9	Latus alterum	12
Intercepta portio	5½	Intercepta portio	4⅛
	45		48
	4½		1½
	49½ re-	uel	49½ re-

ctangulum comprehensum sub alterutro latere & intercepta portione, ut suprà ostensum est. Quare &c.

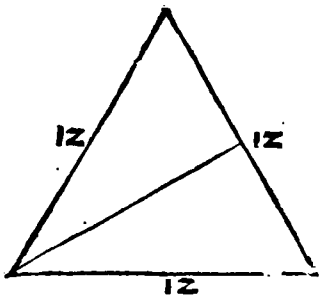
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Εν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἔκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XIII.

In acutiangulis triangulis: quod ab acutum angulum ſubtendente latere deſcribitur quadratum, minus eſt eis quæ ab acutum angulū comprehendentibus lateribus fiunt, quadratis, comprehenſo bis ſub uno eorum, quæ ſunt circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, atq; aſſumpta interius ſub perpendiculari ad acutum angulum.

Sit triangulum acutiangulum, atq; in eo acutus angulus ſumptus, ab utrouis deinde ex reliquis angulo ad ſuum ſubtenſum latus, per propoſitionem 12 primi, recta perpendicularis ducta: dico, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, minus eſſe quam ſunt quadrata, quæ à lateribus circa acutum angulum deſcribuntur, eo quantū eſt id quod ſub uno latere eorum quæ circa acutum angulum ſunt, in quod ſcilicet perpēdicularis cadit, atq; ſub intercepta, à perpendiculari & acuto angulo, portione comprehenditur bis. Cum enim unum circa acutum angulum latus per demiſſam perpendicularem utcunq; diuiſum ſit: erunt quadrata, quæ à diuiſo illo latere & intercepta à perpendiculari angulo q; acuto, portione deſcribuntur, ei quod ſub tota & dicta portione comprehenditur bis cum quadrato alterius portionis, per 7 huius æqualia: atq; his æqualibus communi quodam, quadrato ſcilicet perpendicularis, addito: illa tria quadrata his tribus, rectangulo nimirū bis ſumpto & duobus quadratis æqualia erunt. Sed quia utrobiq; duobus quadratis, ratione anguli recti, ex penultima primi unius lineæ quadratum æquale eſt, mutatione æqualium facta, loco ſcilicet duorum quadratorum laterum circa rectos angulos, ex utraq; parte, rectos angulos ſubtendentiū, quæ ſcilicet non diuiſa ſunt, quadratis ſumptis: & quadrata laterum quæ ſunt circa acutum angulum, ei quod ſub diuiſo latere & intercepta portione comprehenditur bis, atq; quadrato lateris, angulum acutum ſubtendentis, æqualia erunt: quadratum igitur lateris, acutum angulum ſubtendentis, ſolùm quadratis eorum, quę circa acutum angulum ſunt, laterū minus erit in rectangulo, quod ſub diuiſo latere, atq; intercepta a perpendiculari & acuto angulo portione, comprehēditur bis. In oxygonijs igitur triangulis, quadratum lateris ſubtendentis angulum acutum tanto minus eſt reliquorum laterum quadratis, quantum eſt id quod bis comprehenditur ſub altero illorum, in quod nimirum perpendicularis cadit, & portione a perpendiculari angulo q; acuto intercepta. quod demonſtraſſe oportuit.

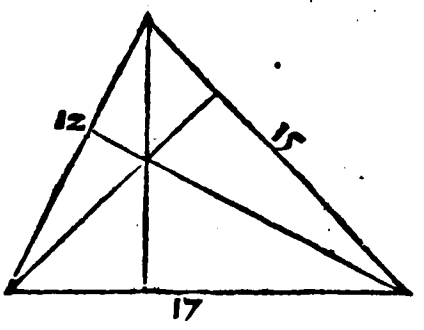


APPENDIX.

Quam uim habeant hæ duæ propoſitiones, 12 ſcilicet de Amblygonio, & 13 de Oxygonio, unà cum penultima primi de triangulo Orthogonio, experietur is, qui aliquando in triangulorum tractationem, in qua ſemper ex tribus notis ad reliquorū trium noticiam, mediante arcuum & chordarū tabula, peruenitur, incideris.

TRIA

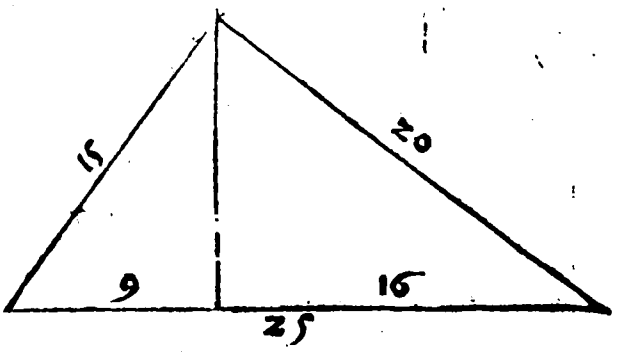
TRIA EXEMPLA VNA FIGVRA EXPOSITA.



ADMONITIO.

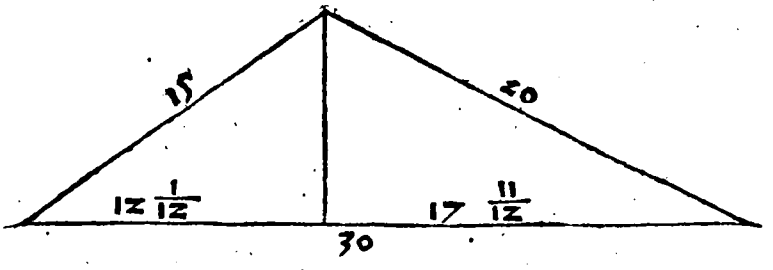
Non autem eſt neceſſe, ut omnes trianguli propoſiti anguli acuti ſint, ut quidem id Acutianguli trianguli definitio requirit. Sed generaliter (cum nullum triangulum ſit, quod non acutum angulum habeat) de omnibus, cuiuſcunq; generis fuerint, triangulis, hæc propoſitio intelligi, per ea inſuper declarari poteſt, id quod per ſequentia duo exempla manifeſtabitur.

PRO TRIANGVLO RECTANGVLO.



In hoc triangulo rectãgulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, tanto minus ſunt quàm uicies quinquies 25, & uicies 20, quantum eſt quod ſub 20 & 20, uel quod ſub 25 & 16 continetur bis. Sic ratione alterius acuti, cuius ſubtenſum latus ſunt 20, ubi uicies 20, tanto minus ſunt quàm uicies quinquies 25, & quindecies 15, quantum eſt quod ſub 15 & 15, uel quod ſub 25 & 9 continetur bis. id quod multiplicatione cernere licet.

PRO TRIANGVLO OBTVSIANGVLO.



Similiter etiam in triangulo obtuſiangulo, quindecies 15, ratione unius acuti anguli, minus ſunt quàm tricies 30 & uicies 20, quantum eſt quod ſub 30 & $17\frac{11}{17}$ continetur bis. Sic ratione alterius acuti anguli, cuius ſubtenſum latus ſunt 20, ubi uicies 20 tanto minus ſunt quàm tricies 30 & quindecies 15, quantum eſt quod ſub 30 & $12\frac{1}{12}$ continetur bis. id quod examinari poteſt.

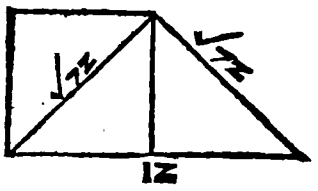
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

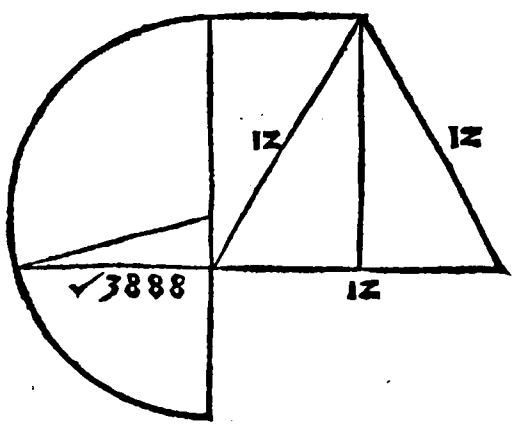
PROPOSITIO XIIII.

Dato rectilineo, æquale quadratum constituere.

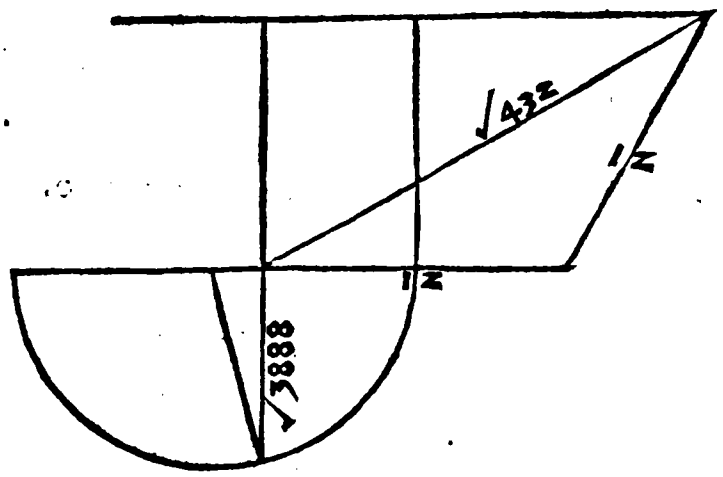
Sit rectilineum datum qualecunq; atq; propositum, quadratum ei æquale constituere. Quia uerò rectilineum datum, uel triangulum, uel plurium laterum rectilineum esse potest. Igitur si triangulum fuerit, ei ex propositione 42 primi: si uerò plurium laterum rectilineum, ex 45 eiusdem primi æquale parallelogrammum constituendum est. Quòd si quadratum fuerit hoc constitutum parallelogrammum, factum erit propositum. Sin minus, ex duobus huius parallelogrammi lateribus, ijs quidem quę sunt



iuxta unum & eundem angulum, alterum alteri adamussim adijciatur, utrouis scilicet huius anguli latere, secundum quantitatem alterius, longiore facto. Deinde secundum hanc totam, ex duobus lateribus compositam lineam, tanquam diametrum, ex eius medio, quod quidem per propositionem 10 primi haberi potest, semicirculus describatur. Quòd si tandem per punctum coniunctionis laterum ea, quæ ad idem punctum terminatur, linea usque ad circumferentiam continuata fuerit: propositioni satisfactum erit. Nam hæc continuata portio ea linea est, cuius uidelicet quadratum rectilineum referre debet, id quod



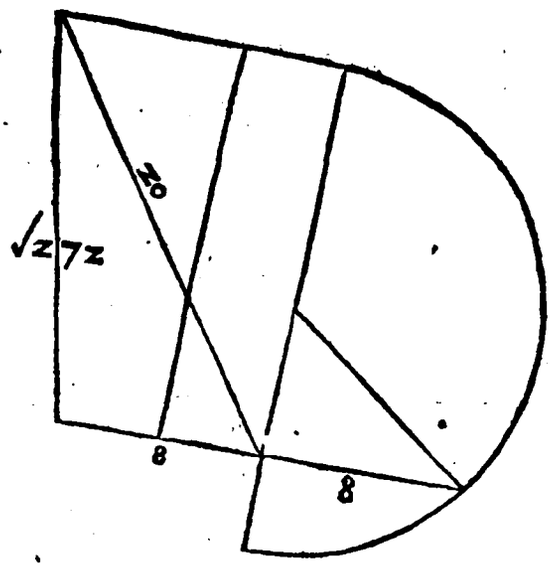
per lineam, à centro ad intersectionem circumferentiæ cũ iam inuenta, rectam du-



ctam, ex quinta huius & penultima primi, æquali interim pro æquali linea sumpta, ab æqualibus etiam deinde æquali, uel eodem communi ablato, facile demonstrabitur. Dato igitur rectilineo, æquale quadratum constitutum est. quod fieri oportuit.

SEQVITVR

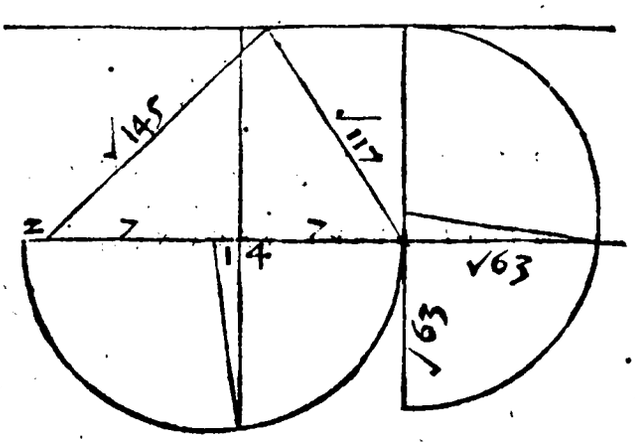
SEQVITVR HVIVS PROPOSITIONIS GEOmetrica figura alia.



PORRO CALCVLVS TRIANGVLI DATI IN hac figura, sic se habet.

Latera	Excessus		
20	√68 — 6	Productum	Primum 32
√272	14 — √68		secund. 128
8	√68 + 6		tertium 4496.
28 + √272	14 + √68		

atq; huius radix quadrata 64, Trianguli, Parallelogrammi & Quadrati area. Quoniam autem unum parallelogrammi latus est notum, 4 scilicet, area etiam nota, nimirum 64: & alterum latus, diuisione, notum erit. Est autem illud 16.



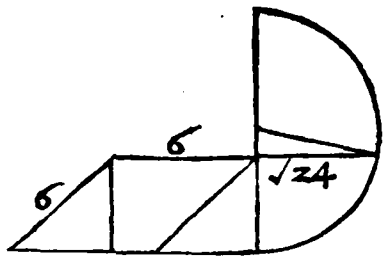
Inuentio areæ trianguli, cuius

Latera sunt	Excessus uerò
14	√117/4 + √145/4 — 7
√145	√117/4 — √145/4 + 7
√117	7 + √145/4 — √117/4
14 + √145 + √117	7 + √145/4 + √117/4

Primum $\sqrt{4241\frac{1}{4}} + 16\frac{1}{2}$ secundum productum $\sqrt{4241\frac{1}{4}} - 16\frac{1}{2}$

Tertium prod. 3969 Area trianguli 63

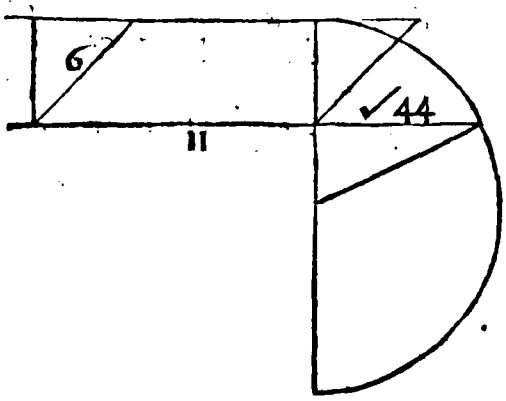
ALIVD EXEMPLVM DE RHOMBO.



Declaratio propositionis quintæ, hoc loco allegatæ, per numeros.

Totus numerus est 10, diuisus in partes, æquales quidem 5 & 5. in inæquales uerò 6 & 4. Medium itaq; sectionum, hoc est excessus longioris portionis respectu medietatis lineę uel numeri diuisi 1. Rectangulum porrò sub partibus inæqualibus comprehensum, sunt 24, cum quadrato unitatis, ueniunt 25. & tantum est etiam quadratum numeri 5, hoc est medietatis diuisi. quod ostendere libuit.

ALIA ET VLTIMA HVIVS PROPOSITIONIS GEOmetrica figuratio de Rhomboide.



Atq; hæc pro declaratione huius propositionis dicta sufficiant.

FINIS LIBRI SECVNDI.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber tertius.

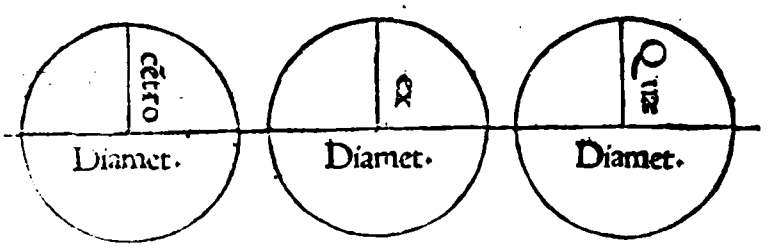
HActenus Euclides prosecutus demonstrationum euidentissimis rationibus, proprietates simplicissimas rectilinearum figurarum, superioribus duobus libris: nunc in tertio, quæ circuli sunt propria πάθη (quod ad doctrinam elementorum pertinet, quæ planè Geometrica & abstracta est) explanare aggreditur. Non enim quę cœlestium, aut quæ aliorum proprietas sit circulorum consideratur hoc loco, nam subiectis cum rebus nihil commune habet geometria sincerior, quippe cõcretione atq; adiunctione certorum subiectorum, mox in aliarum scientiarum titulos cum degeneret, ut Astronomiæ, Architectonicæ, Opticæ, & similium, quarum ipsa sibi scientiam non arrogat quidem, uerùm illas tamen absq; geometria intelligi non posse aut addisci, nemo mediocriter etiam eruditus ignorat. Liber præsens uel hoc nomine præstat præcedentibus, quòd nimirum hic de proprietatibus tractat perfectissimæ figuræ, nempe de Circulo, siquidem pro natura subiectarum rerum scientię aliæ alijs sunt prępondendæ. Vtilis porrò est ad cognitionem Chordarum, & arcuũ pręcisionem in circulis, quippe cum quæ est angulorum, eadem sit quoq; arcuum & chordarum inter se ratio. Præterea de circulis cõtingentibus & sese mutuo secantibus, quòd illud quidem uno, hoc uerò duobus tantum punctis fiat. Quinetiam ostendit, Contingentiæ angulum, omniũ acutorum rectilineorum angulorum esse minimũ: Diametrum item, omnium rectarum linearum in circulo longissimam. & id genus multa complectitur hic liber tertius. Docet præterea, tribus punctis signatis (modo non fuerint in una recta linea) circulus per illa transiens, quo pacto describatur. Quomodo deinde in corpore aliquo solido, sphæricum seu parallelepipedum illud fuerit, duo puncta opposita, ut quæ in sphęricis Poli nomen habeant, inueniantur. Quæ ambo in instrumentorum compositionibus quàm summè sint necessaria, nullis non qui hoc in genere scientiæ uersati sunt, & se in eo aliquantum exercuerunt, manifestum est.

ΟΡΟΙ.

Ισοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι.
ἢ ὧν αἱ ἀπὸ τῶν κέντρων, ἴσαι εἰσίν.

DEFINITIONES.

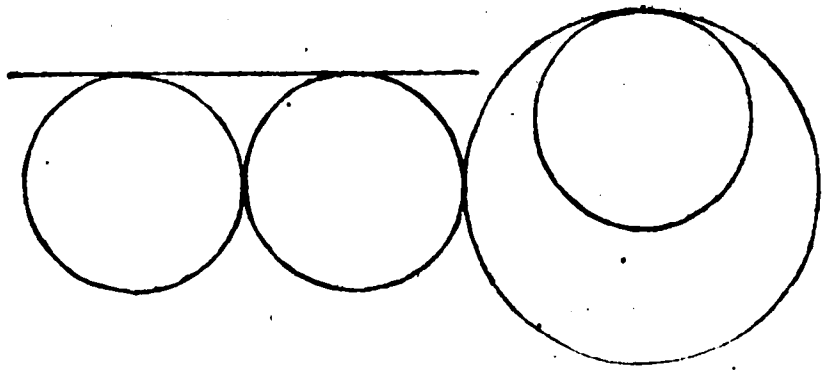
1 Aequales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales. Aut, quorum quæ ex centris, æquales sunt.



Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

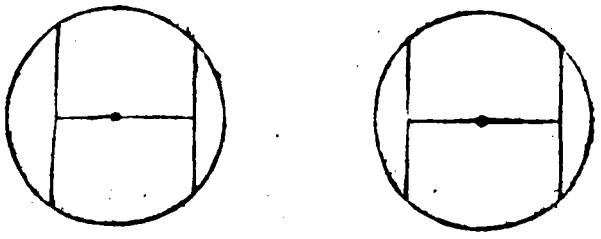
2 Recta linea circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum, & ejecta, circulum non secat.

3 Circuli tangere sese mutuo dicuntur, qui sese mutuo tangentes, sese mutuo non secant.



Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι, ἴσαι ὦσι. Μείζων δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

4 In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum à centro in eas perpendiculares ductæ, æquales fuerint. Plus verò distare dicitur, in quam longior perpendicularis cadit.



Τμῆμα κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

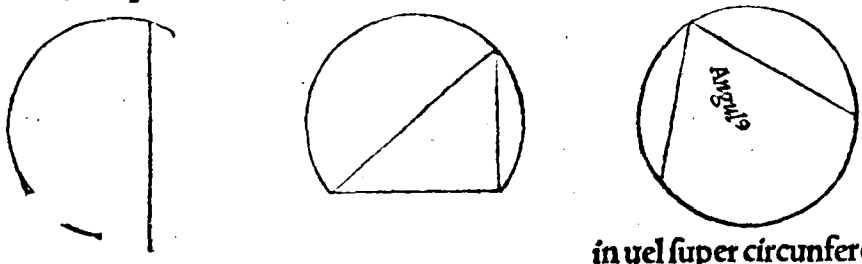
Sectio

5 Sectio circuli, eſt figura comprehenſa ſub recta linea, & circuli circunferentia.



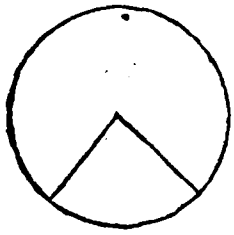
Τμῆμα δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος λαφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι περιλαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

6 Sectionis angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli circũferentia comprehenditur. 7 In ſectione uerò angulus eſt, cũ in ſectionis circunferentia punctum aliquod ſumptum, atq; de illo ad rectę lineæ fines, quę eſt ſectionis baſis, rectæ lineę ductæ fuerint, comprehenſus ſub coniunctis rectis angulus. 8 Quando autem comprehendentes angulum rectæ lineę aliquam ſuſcipiunt circũferentiam, in illa dicitur eſſe angulus.



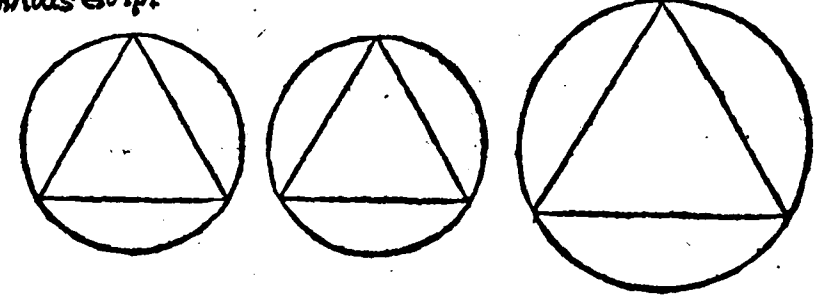
in uel ſuper circunferentia.

Τομεὺς κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.



9 Sector circuli eſt, cum ad centrum circuli ſteterit angulus, comprehenſa figura ſub angulum comprehendentibus rectis lineis, & aſſumpta ſub eis circunferentia.

Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶν τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας. ἢ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Similes

10 Similes ſectiones circuli ſunt, quæ angulos æquales ſuſcipiunt. Aut, in quibus anguli inter ſe æquales ſunt.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

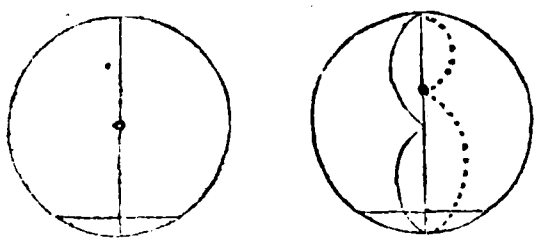
ΠΡΩΤΗ. Α.

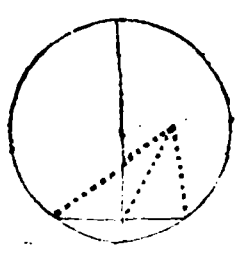
Τοῦ δοθέντος κύκλου, τὸ κέντρον εὑρεῖν.

PRIMA I.

Dati circuli, centrum inuenire.

Sit circulus datus, atque propoſitum, illius centrum inuenire. Ducatur in circulo recta quædam linea utcunq; ita tamen, ut utraq; eius extremitas in circuli ſit circunferentia, hac deinde recta, per propoſitionem 10 primi biſariam diuiſa, à puncto diuiſionis huius ad angulos rectos linea, quæ ſimiliter utrãq; extremitatẽ in circunferentia habeat, per 11 eiuſdem, excitetur. Quòd ſi tandem hęc ad rectos ducta biſariam diuiſa fuerit: punctum huius diuiſionis centrum circuli erit. Id quod ab impoſſibili, ubi aliud quoddam, præter hoc, centrum ſignatum fuerit, demonſtrari poterit, hoc modo. In hac ipſa per mediæ diuiſionis punctum tranſeunte linea, centrum aliud nullum ſtatui poteſt: alioqui ſe quæretur ſtatim, ex ſtructura, & circuli definitione, æquali pro æquali linea ſumpta, Partialem ſua totali linea eſſe longiorem: uel contrà, Totalem ſua partiali breuiorem, quòd eſt impoſſibile. Statuatur ergo nunc extra πρὸς ὀρθὰς ductam punctum loco centri aliud, à quo etiam tres lineæ rectę, una quidem ad communem duarum linearum interſectionem, reliquæ deinde duæ ad duas primò ductæ extremitates, ducantur. Et quia triangula quæ ſic fiunt, huiuſmodi ſunt, qualia propoſitio in primo octaua requirit: anguli qui à duabus ſemidiametris ſubtenduntur, per eandem, inter ſe æquales erunt: ex definitione igitur uterq; rectus. Quia autem, ut habet cõmunis quædam noticia. Omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales, ea mediante, & quia prius etiã ex hoc communi duorum rectorum angulorum puncto πρὸς ὀρθὰς linea educta eſt, infertur tandem, ampliorem angulum anguſtiori: uel contrà, anguſtiorem angulo ampliori eſſe æqualem, quod cum & ipſum abſurdum ſit: operationem conſtare punctum deinde in linea πρὸς ὀρθὰς ducta, medium, centrũ circuli eſſe, nemini dubium erit. Ομοίως δὴ δείξομεν: Simili modo demonſtrabitur, quòd nullum punctum aliud, præter hoc quod in medio huius ductæ ſignatum eſt, centrum circuli eſſe poſſit. Dati igitur circuli centrum inuentum eſt, quod fieri oportuit.





ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, Ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ· ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum eſt, Quòd, ſi in circulo recta quędam linea rectam quandam lineam biſariam, & ad angulos rectos ſecet: in ſecante ſit centrum circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν κύκλου τοῦ ΑΒΓ περιφερείας λαφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα Α, Β, τὰ Α, Β σημεῖα οὐ ζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO II.

Si in circuli circumferentia duo puncta utcunq; accepta fuerint: ad ipsa puncta ducta recta linea, intra ipsum circulum cadet.

Sit circulus, duo etiam puncta in ipsius circumferentia utcunq; signata: dico, si hæc puncta linea quadam recta coniungentur, hanc rectam intra circulum cadere oportere. Colligitur huius propositionis demonstratio ab impossibili. Nisi enim intra circulum cadat recta hæc, statim contrà illam communem noticiam, quæ dicit, Totum parte sua maius esse, inferri potest, quòd pars suo toto maior sit, hoc nimirum modo. Linea illa recta, qua cum puncta, in circunferentia accepta, copulantur, si intra circulum non cadat, extra circulum, aut in ipsam circuli circumferentiam, cadere eam oportet. Cadat ergo primò extra, si fieri potest, & quæratur per propositionem præmissam, circuli centrum, à quo etiam duæ rectæ ad duo in circunferentia accepta puncta ducantur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex definitione circuli, sunt inter se æquales: triangulū igitur quod sic descriptum est, ἰσοσκελὶς erit, habens ad basim positos angulos, ex priore parte propositionis quintæ primi, inter se æquales. Ducatur præterea & alia recta quædam linea, à centro circuli utcunq;, per circunferentiam usq; ad basim trianguli isoscelis, eam continuando. Et quia per hanc rectam isosceles triangulum in duo partialia triangula diuiditur, quorum cum utriusq; unū latus ulterius productum sit: erit ex propositione 16 primi, utriusq; externus angulus suo interno & opposito, uno scilicet æqualium, maior: quare & altero æqualium maior erit. Cum autem iam, ut tandem concludatur, triangulum appareat, unum habens angulum reliquorum altero maiorem, maior uerò angulus, ut testatur propositio in primo 19, longius latus requirat, hac ipsa propositione hic usurpata, æquali deinde linea pro æquali sumpta, infertur tandem, partialem sua totali linea esse longiorem, quod est impossibile. Non ergo extra circulum cadit puncta copulans recta linea. Similiter etiam, quòd non in ipsam circunferentiam cadat, demonstrabitur: cadet itaq; intra ipsum circulum. In circuli igitur circūferentia, ad duo puncta, utcunq; accepta, linea recta ducta, in circulum eam cadere necesse est, quod demonstrasse oportuit.

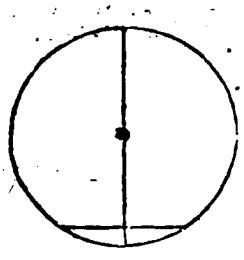
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

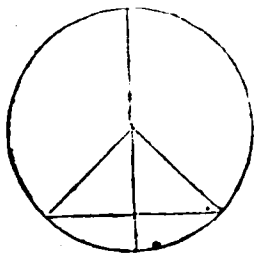
Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθείαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διχᾶ τέμνῃ· καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. Καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ· καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam secet: & ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet: & bifariā quoq; eam secabit.

Præparetur figura, qualem ſcilicet requirit hæc propoſitio, hoc eſt, deſcribatur circulus, in quo etiam duæ rectę, una quidem per centrum tranſiens, altera uerò præter illud, à priori tamen, uel bifariam, uel ad angulos rectos ſecta, ducãtur: dico, ſi bifariam: & ad angulos rectos, ſi uerò ad angulos rectos: & bifariam etiam per centrum ductam alteram ſecare oportere. Quantum ad partem priorem, coniungantur extremitates eius quæ non per centrum tranſit rectæ lineæ, cum centro circuli duabus rectis. Et quoniam hæ duæ rectæ, ut duorũ triangulorum latera, ex definitione circuli, inter ſe æquales ſunt, cum quoq; reliqua duo unius ex ſtructura, reliquis duobus alterius trianguli lateribus ęqualia ſint: anguli etiam, quos rectę, à centro circuli ad extremitates ductę, ſubtendunt, per propoſitionem 8 primi, inter ſe æquales erunt. Quoniã uerò recta linea rectæ inſiſtens lineæ, quando deinceps ſe habentes angulos æquales inter ſe facit, uterq; ex definitione quadam in primo expoſita, rectus eſt: anguli etiam illi duo, quos ſcilicet propoſitio 8 demonſtrauit eſſe inter ſe æquales, recti erunt. Pręter centrum igitur ducta ab illa altera per centrum tranſeunte recta linea, cũ ex hypotheſi bifariam ab ea ſecta ſit, ad angulos etiam rectos ſecabitur, atq; hæc prio parte propoſitionis priore. Poſterioris uerò partis demonſtratio, eadem ſtructura manente, ex 26 primi ſic colligi poterit. Cum enim duo partialia triangula, ex ſtructura, rectangula ſint, ipſum uerò totum, ex definitione circuli, iſoſceles: habebunt hæc partialia triangula duos angulos duobus angulis, utrunq; utriq; æquales. Et quia etiam latus unum lateri uni, uel deſcendentes à centro rectas lineas, uel perpendicularis portionem ambobus communem, æquale habent: & reliqua, per allegatam ex primo propoſitionem, reliquis æqualia habebunt. Quare recta non per centrum tranſiens linea, ab altera quæ per centrum in eam ad angulos rectos cadit, bifariam diuiſa eſt. Si in circulo igitur, recta quædam linea per centrum extenſa, quandam non per centrum ductam rectam lineam bifariam ſecet: & ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet: & bifariam quoq; eam ſecabit. quod demonſtraſſe oportuit.





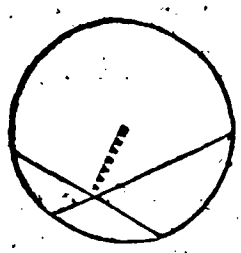
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

PROPOSITIO IIII.

Si in circulo duę rectæ lineæ, non per centrum extenſæ, ſeſe mutuo ſecuerint: ſeſe mutuo bifariam non ſecabunt.

Deſcribatur circulus, ducantur etiam in eo duæ rectæ lineæ, quorum neutra per centrum tranſeat, altera tamen alteram ſecet: dico rectas has bifariam ſeſe mutuo non ſecare. Sumit hæc propoſitio ſuam ab impoſſibili demonſtrationem per præcedentis tertiæ partem priorem, bis quidem, cum duæ ſint rectæ lineæ, uſurpatam, & communem illam noticiam, quæ dicit, Omnes rectos angulos inter ſe eſſe æquales, cum per hæc, ſi mutuo una alteram bifariam ſecaret, ſtatim ubi linea à centro ad communem ductarum interſectionem ducta eſſet, minorem angulum maiori æqualem eſſe inferretur,



ferretur. Hoc autem quia nemini intelligenti perſuaderi poteſt: per inæqualia igitur, & non æqualia, ſeſe huiuſmodi lineæ, ut uult propoſitio, ſecabunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ, non per centrum extenſæ, ſeſe mutuo ſecuerint: ſeſe mutuo bifariam non ſecabunt. quod demonſtraſſe oportuit.

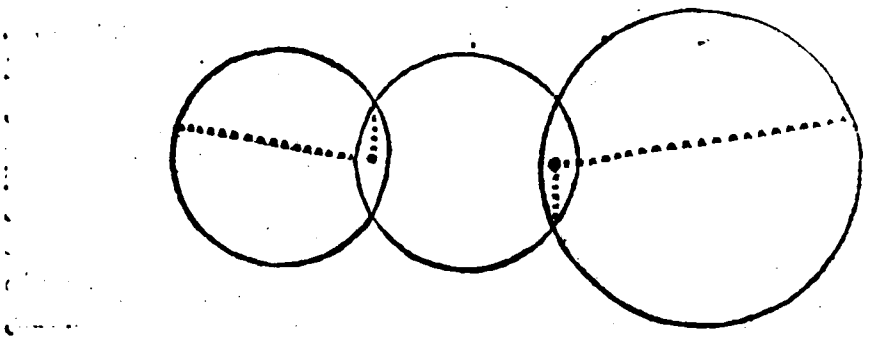
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO V.

Si duo circuli ſeſe mutuo ſecent: non erit eorum idem centrum.

Sint duo circuli ſeſe mutuo ſecantes, dico quòd eorum non ſit idem centrum. Et huius propoſitionis, ut præcedentis, demonſtratio ab impoſſibili ſumitur. Si enim centrum unum & idem habuerint illi ſeſe mutuo ſecãtes circuli, cum centrum non extra, ſed in circulo ſedem ſuam habeat, in nullo loco alio, quàm in portione, utriq; circulo communi, id eſſe poterit. eo igitur in loco illo cõſtituto, inde ad communem circulorum interſectionem linea recta ducatur, & erit hæc utriuſq; circuli ſemidiameter. Ducatur & alia recta ab eodem centro poſito, per communem portionem uſq; ad circunferentiam utriuslibet circuli cõtinuata. Et quoniam hęc tota,



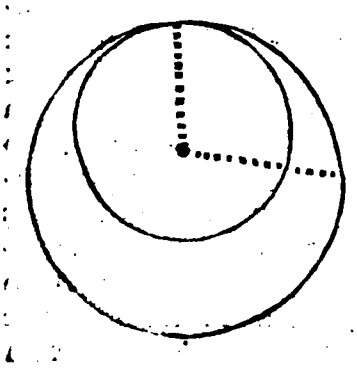
unius: pars uerò eius, alterius circuli eſt ſemidiameter: erit utraq;, pars uidelicet & ipſa tota, primò ductæ rectæ, quæ & ipſa utriuſq; circuli ſemidiameter eſt, æqualis. unde ſic etiam, per communem quandam noticiam, ipſæ inter ſe æquales, pars uidelicet toti, quod eſt impoſſibile. Punctum ergo id quod ſumptum eſt, aut ſi aliud quoddam ſumeretur, centrum circulorum eſſe, haudquaquam poteſt. Duorum igitur ſeſe mutuo ſecantium circulorum, unum & idem centrum non erit. quod demonſtrari oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

PROPOSITIO VI.

Si duo circuli ſeſe mutuo interius tetigerint: nõ erit eorũ idem centrũ.



Sint duo circuli, qui ſeſe interius mutuo tangant: dico, eorum non idem eſſe centrum. Sed eſto ſanè idem, ſi fieri poteſt, & connectatur id cum circulorum contactu, atque poſtea ab eodem communi centro poſito ad exterioris circuli circũferentiam, ubicũq; hoc fuerit, alia recta linea ducta, quòd neque hoc, neq; aliud ullum punctum, horum tangentium circulorum centrum eſſe poſſit, ab impoſſibili, ut in præcedenti, demonſtrabitur. Si duo cir-

culi igitur, seſe mutuo interius tetigerint: non erit eorum idem centrum. quod demonſtraſſe oportuit.

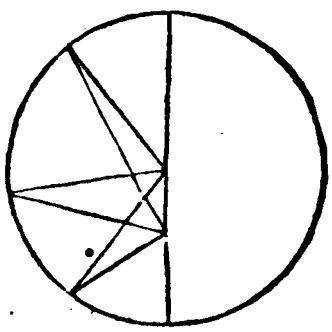
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

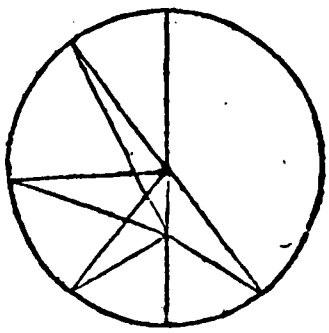
Ἐὰν κύκλου τινὶ διαμέτρου λαφθῇ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον· ἐλαχίστη δέ, ἡ λοιπὴ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἐγγύτερον, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστίν. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι, ἴσαι, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπίπτουσι πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

PROPOSITIO VII.

Si in diametro circuli aliquod ſumatur punctum, quod non ſit centrum circuli, ab eoq; puncto rectæ quædam lineæ in circulum cadãt: longiſſima quidem erit, in qua centrum: breuiſſima uerò, reliqua. Aliarum uerò, ſemper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſq; partes breuiſſimæ.

Sit circulus, in eo etiam ducta diameter, in qua præter centrum aliud ſumatur punctum: dico primò, quotquot ab hoc puncto uſq; ad circunferentiam rectæ lineæ ductæ fuerint, illarum omnium eam quæ per centrum tranſierit, longiſſimam, diametrum uerò perficiens, omnium breuiſſimam eſſe. Ex alijs autem, ſemper propinquior ei quæ per centrum tranſit, remotiore longior extabit. Poſtremò, quòd duæ tantùm inter ſe æquales rectæ lineæ, ab hoc puncto, ex utraq; parte breuiſſimæ, in circuli circunferentiam cadere poſſint. Habet hæc propoſitio quatuor partes, quæ in hunc modum ordine demonſtrari poterunt. Connectantur in circulo ductarum extremitates, quas habent in circunferentia, ſingulæ, cum centro circuli,

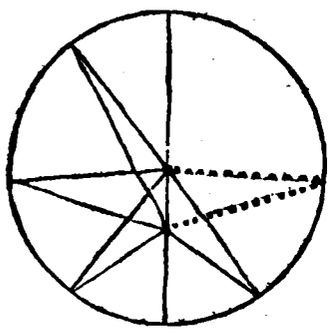




ſingulis rectis lineis. Et quoniam duo quælibet latera omnis trianguli, ex propoſitione 20 primi, reliquo tertio longiora ſunt, tertio porrò longiora duo latera, in præſentia, ex definitione circuli & illa cõmuni noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &cę. uni rectæ alij æqualia ſunt, cum hæc alia centrum circuli contineat: quod in propoſitione primò proponitur, iam manifeſtum erit. Rurſus quoniam ex eadẽ propoſitione 20 primi, quælibet duo trianguli latera reliquo tertio longiora ſunt, tertium porrò latus ex definitione circuli, uni rectæ alij æquale eſt: & tertio longiora duo latera eadem recta alia longiora erunt. Cum autem hæc alia per punctum, præter centrum in diametro acceptum, tranſeat, communi ex æquo de illis inæqualibus portione ablata: & quod in propoſitione ſecundò proponitur manifeſtum erit. Tertium nũc patet ex propoſitione 24 primi. Porrò ut quartum etiam retineatur, ducenda eſt, per propoſitionem 23 primi, ex centro recta linea, quæ

cum

cum ſemidiametro per punctum tranſeunte, angulum faciat, illi angulo, qui ex altera parte ſub eadem ſemidiametro, atq; ex centro ductarum linearum una continetur, æqualem, eaq; ad circunferentiam uſq; continuata, ab ipſius in circunferentia extremitate ad punctum recta linea ducatur. Et quoniam duo triangula, qualia propoſitio in primo 4 requirit, apparent: baſes igitur illorum, hoc eſt, lineæ illæ, quæ ad utraſque partes breuiſſimæ ſunt poſitæ, à puncto item in diametro præter centrum accepto egrediuntur, per hanc 4, inter ſe æquales erunt. Nec alia etiam, in illa eadem parte, ab hoc puncto ei quæ in altera parte eſt poſita, æqualis educi poteſt. Nam ſi fortè ab aliquo minus credẽti hoc tentaretur, qui rectam aliam alteri æqualem duceret, dum cui hæc ſic ducta ex communi illa noticia, Quæ uni ſunt æqualia &c. æqualis eſſe deberet, mox per 3 partem propoſitionis huius, eadem longior eſſe oſtendi poteſt: id quod fieri nequit. Poteſt etiam aliter hæc quarta pars demonſtrari in hunc modum. Ducatur alia, ſi ita poſſibile uidetur, recta linea, ei quæ ex altera parte breuiſſimæ poſita eſt, rectæ æqualis, cuius in circũferentia extremitas cum recta quadam linea iuncta, demonſtratio ſic colligetur. Quoniam anguli ex utraq; parte ad centrũ poſiti, ex propoſitione 8 primi, inter ſe æquales ſunt, unus uerò partialis angulus alterius trianguli totali, ut iam ex 4 primi demonſtratum, æqualis: ille partialis tandem angulus, ex communi illa notícia, Quę uni ſunt æqualia &c. ſuo totali angulo æqualis erit, quod eſt impoſſibile. Duæ igitur ſolùm rectę lineæ æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt ad utraſq; breuiſſimæ lineæ partes. Si in circuli igitur diametro punctum aliquod ſumatur, quod non ſit centrum circuli, ab eoq; puncto rectæ quędam lineæ in circulum cadant: longiſſima quidem erit, in qua centrum: breuiſſima uerò, reliqua. Aliarum uerò, ſemper propinquior ei quæ per centrum protenditur, remotiore longior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ, æquales, ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſque partes breuiſſimę. quod demonſtraſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

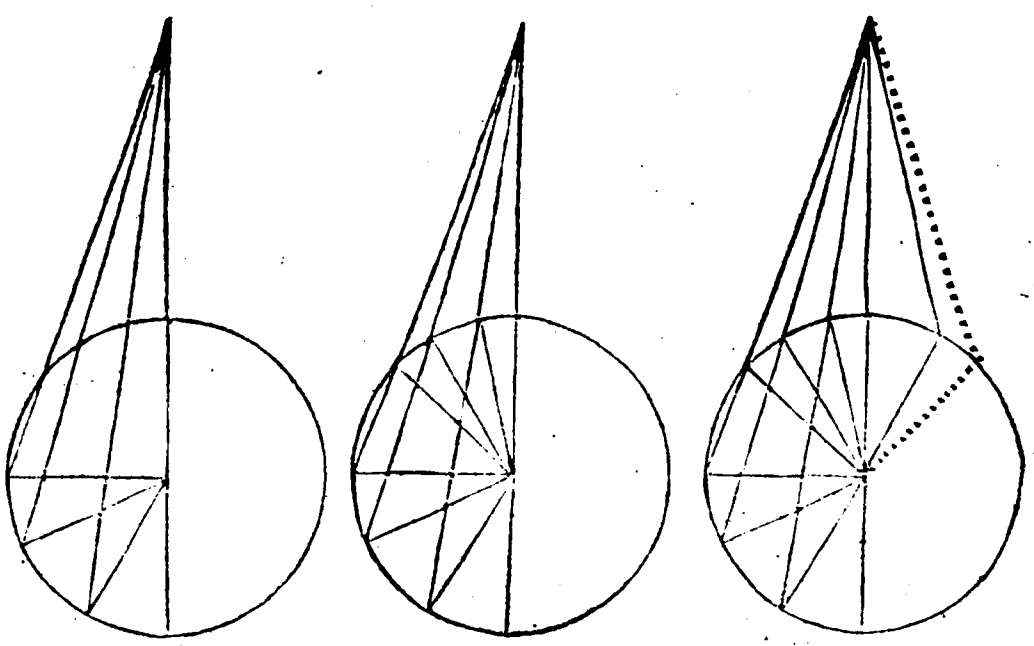
Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τί σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μέν, ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἐγγύτερον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστίν· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἐλαχίστη μέν ἐστιν, ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἐγγύτερον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπωτέρω ἐστὶν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod ſumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum, reliquæ uerò ut accidit: in concauam circũferentiam cadentium linearum, longiſſima quidem eſt quæ per centrum currit. Aliarum autem, ſemper propinquior ei quæ per centrum, remotiore longior erit. In conuexam uerò circumferentiam cadentium linearum, breuiſſima quidem eſt,

dem eſt, quæ inter punctū & diametrum, aliarum aūt, ſemper breuiſſimę propinquior, remotiore breuior eſt. Duæ autem ſolū rectæ lineæ, æquales, cadunt ab hoc puncto in circulum ad utraſcp partes breuiſſimæ.

Sit circulus, extra illum etiam punctum acceptum, à quo aliquot rectæ lineæ, per circulum currentes, uſcp ad concauam circunferentiam ducantur. Eſto autem quòd ductarum una per centrum, aliæ uerò utcunqp tranſeant. Dico itaqp, in concauam circunferentiam cadentium linearum longiſſimā eſſe, quæ per centrum tranſit. Ex alijs autem, ſemper propinquiorem ei, quę per centrum tranſit, remotiore longiorem. Linearum uerò partialium, extra in conuexam circunferentiam circuli cadentium, quę puncto & diametro interiacet, illam omnium breuiſſimam. Ex alijs autem, ſemper breuiſſimæ propinquiorem, remotiore breuiorem eſſe. Ad hæc dico etiam, duas tantum ab hoc puncto rectas lineas, quæ ex utraqp parte breuiſſimæ, in circulum cadunt, æquales educi poſſe. Habet hæc propoſitio quinquè partes, quarum prima & ſecunda, ubi prius à contactibus, prętер centrum ductarum & circunferentiæ, ad centrum rectæ lineæ ductę fuerint, illa quidem ex propoſitione 20 primi, per quam duo quælibet latera in triangulo, tertio longiora ſunt, recta una pro duabus ſibi æqualibus ſumpta, hæc uerò ex 24 eiuſdem primi retineri poterunt. Quòd ſi & ab interſectionibus iam, præter centrum ductarum cum circunferentia, rectæ lineę ad centrum ductæ fuerint: tertiæ quoque &



quartæ partibus per eaſdem primi propoſitiones, ab inæqualibus tamen interim æqualibus ſubtractis, ſatisfieri poterit. Supereſt igitur nunc ut quintæ parti, quæ uidelicet duas ſolùm rectas lineas, ab hoc puncto æquales, ex utraqp parte breuiſſimæ, in circulum cadere aſſerit, ſatisfaciamus: quod quidem ab impoſſibili hoc modo fieri debet. Ducatur per 23 primi, ex centro recta linea, quæ cum ſemidiametro per circūferentiam ad punctum continuata, angulū faciat, illi angulo, qui ex altera parte ſub eadem ſemidiametro atqp ex centro ductarum linearum una continetur, æqualē, & connectatur huius ductæ extremitas quam habet in circunferentia, per primum poſtulatum in primo, cum puncto extrà ſumpto, recta quadam linea, quòd nunc hæc recta ei, quæ ex altera parte diametri ad punctum continuata eſt, ęqualis ſit, & ſola etiam, ſię ut nulla æqualis alia ex hoc puncto egrediatur, utrunqp

non

non aliter, quàm in precedenti quarta pars, retinebitur. Si extra circulum igitur aliquod sumatur punctum, ab hoc uerò puncto ad circulum percurrant rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum, &c. quod demonstrari oportuit.

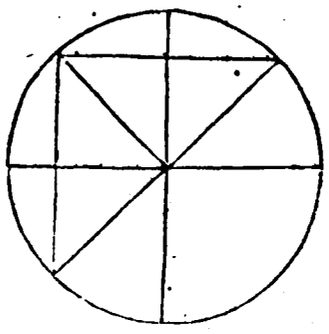
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

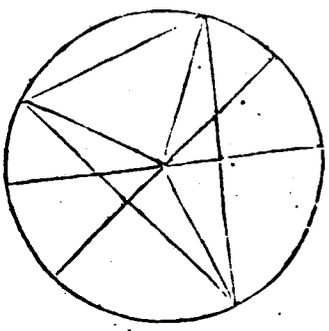
Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τί σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι· τὸ λαφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO IX.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, ab hoc uerò puncto ad circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales: acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

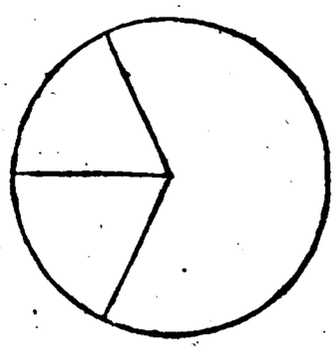
Sit circulus, in eo etiam punctum signatum sic, ut plures quàm duę rectæ lineæ inde usq; ad circumferentiam ductę inter se æquales sint: dico, signatum punctum centrum circuli esse. Coniungantur ductarum extremitates, quas habẽt in circumferentia singulæ, singulis rectis quibusdam lineis, coniungentium deinde duabus, uel omnibus si placet, bifariam diuisis, à punctis harum diuisionum rectæ lineę ad signatum in circulo punctum ducantur, continuenturq; ex utraq; parte usq; in circumferentiam. Et quoniam circa quamlibet ultimò iam ductarum linearum duo triangula sunt, quorum anguli ad illam, κατὰ τὴν κατασκευὴν & propositionem 8 primi, inter se æquales sunt, & quia deinde ex definitione 8 eiusdem, etiam recti: erit in harum ductarum qualibet, ex corollario primæ huius, centrum circuli. Hoc autem cũ ita sese habeat, nullibi potius fuerit, quàm in puncto uel intersectione omnium communi, quod scilicet est punctum signatum.

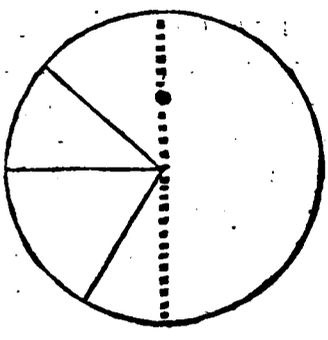




ALITER HOC IDEM AB ABSVRDO OSTENDI POTEST.

Esto circulus, in eo etiam punctum acceptum, sic ut, si fortè inde plures quàm duæ rectæ lineæ usq; ad circũferentiam ductæ fuerint, illæ inter se æquales sint: dico acceptum punctum centrum circuli esse. Sed negetur sanè, non esse centrum circuli punctum id, & si placet, sumatur aliud, atq; per illud acceptumq; prius punctum recta linea ducta ea ex utraq; parte in circũferentiam continuetur. Et quoniam in circuli diametro præter cẽtrum acceptum est punctum aliud, unde etiam plures rectæ ad circumferentiam ductæ sunt, cum illa in qua est centrum circuli, ex prima parte





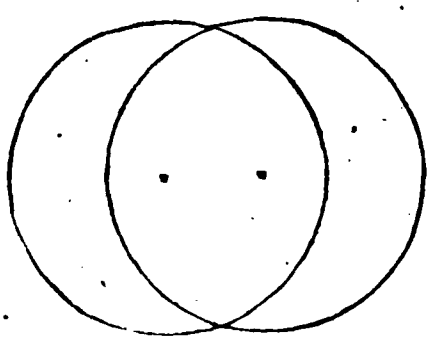
parte propoſitionis ſeptimæ huius, omnium ſit longiſſima, ex reliquis uerò, centro propinquior, ex 3 parte eiuſdem, remotiore longior exiſtat, contra hypotheſim hoc inducitur, cum per eam, ex puncto ductæ rectæ inter ſe poſitæ ſint æquales. Ομοίως δὴ δείξομεν, & reli. Similiter etiam oſtendemus, quòd nullum aliud præter id quod acceptum fuerit, punctum, centrum circuli eſſe poſſit. Punctum igitur in circulo acceptum, unde plures quàm duæ inter ſe æquales rectæ lineæ ad circumferentiam ductæ ſunt, centrum circuli erit. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

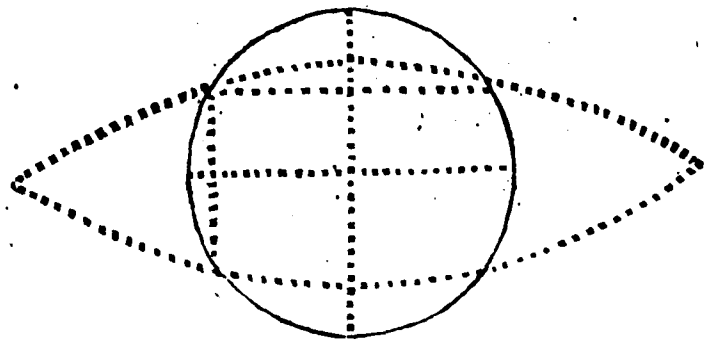
Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

PROPOSITIO X.

Circulus non ſecat circulum in pluribus punctis, quàm duobus.



Sit circulus unus, alius deinde priorem ſecans: dico, quòd hæc ſectio duobus tantum punctis contingat. Quòd ſi negetur hoc, atque affirmaret aliquis, pluribus duobus punctis, quatuor ſcilicet, circulum ſecare circulũ, deſcribatur ſanè ſi fieri poteſt, in hunc modum figura: una deinde harum interſectionum puncto, cũ duobus collateralibus duabus rectis lineis iuncto, his poſtea rectis bifariam diuiſis, ex punctis diuiſionum lineæ ad angulos rectos ducantur. Et quoniam unum & idem punctum, cõmunis nimirum ad rectos ductarum ſectio,



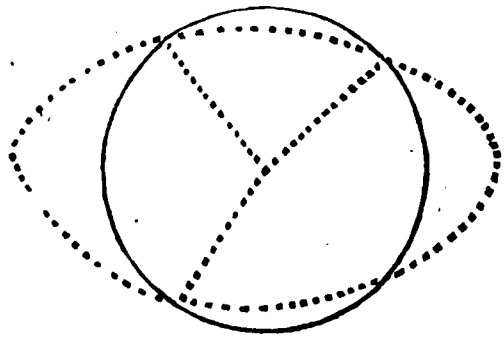
ex corollario propoſitionis primæ huius, bis uſurpato, utriuſq; circuli centrum eſſe demonſtratur, cum id propoſitioni quintæ præmiſſæ maximè aduerſetur, infertur tandem ueram eſſe propoſitionem, nimirum, Si circulus circulum ſecet, non in pluribus duobus locis id fieri, quod demonſtraſſe oportuit.

ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Secat rurſus circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus, &cę. Quæratur, per propoſitionem primam huius, prioris deſcripti circuli centrum, cum eo deinde tribus rectis lineis tria interſectionum puncta copulentur. Et quoniam intra circulum, poſteriorem ſcilicet, acceptum eſt punctum quoddam, à quo cum plures duabus ad illius circumferentiam rectæ egrediantur ęquales: erit illud punctum, per prędcedentem propoſitionem huius, eiuſdem poſterioris circuli centrum, atq; ſic centrum duorum, mutuo ſeſe ſecantium circulorum, id quod per propoſitionem quintam eſt impoſſibile. Non igitur circulus circulum in pluribus punctis quàm duobus ſecat, quod demonſtrari oportuit.

HVIVS

HVIVS AVTEM REI GEOMETRICA FIguratio talis est.



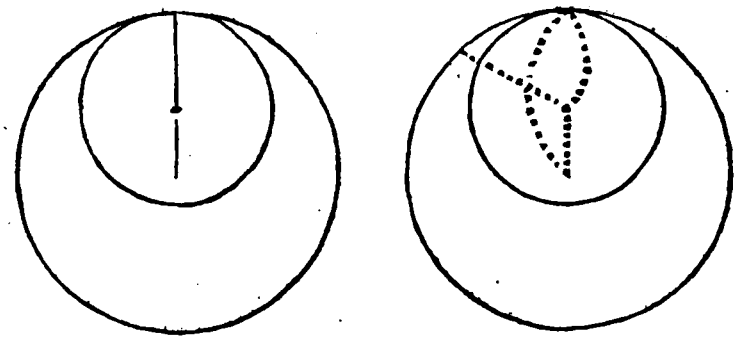
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ λαφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα· ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

PROPOSITIO XI.

Si duo circuli seſe mutuo intus tetigerint, atq; accepta fuerint eorum centra: ad eorum centra ducta recta linea & eiecta, in contactum circulorum cadit.

Sint duo circuli, quorum unus alterum intus tangat, & quærantur centra amborum: dico, si per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, atq; cõtinuata ulterius, hãc in contactũ circulorum cadere, id quod facilè ab absurdo, ut sequitur, demonstrari potest. Recta à centro ad centrum circuli ducta, quia hęc per centrũ maioris circuli continuata, subinde contra cõclusionem, magis ac magis à circulorum contactu recedit, cum ab authore non sit determinatum, ex qua parte recta continuari debeat, illa parte, tanquam frustra inde producturus lineam, posthabita, continuationem rectæ per minoris circuli centrum instituenda est. Instituatur ergo sic. Quòd si ita factum, non contingat in contactum cadere hanc rectam, in alium certè circumferentiæ locum eam cadere necesse erit. Sit sanè, & ducatur ab utriusq; circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam ex tribus rectis lineis, una

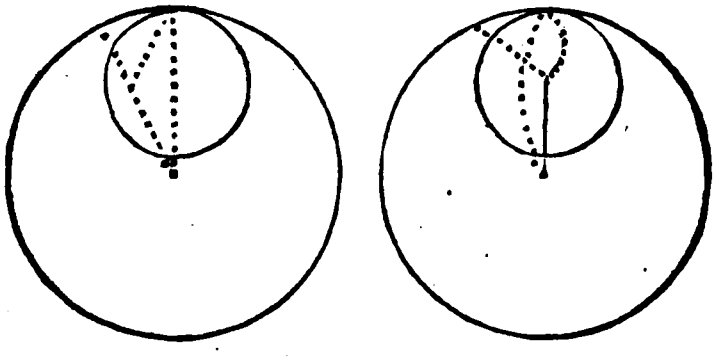


quidem, quæ à centris circulorum intercepta est, duabus uerò quæ à centris ad contactum circulorũ rectę ductę sunt, triangulum constitutũ est, cum omnis trianguli duo quælibet latera, ut iam sæpe demonstratum est, tertio latere longiora sint: & in proposito triangulo intercepta à centris linea, & ea quæ à centro interioris ad contactum ducta est, ut duo trianguli latera, reliquo tertio, eà nimirum linea, quæ à centro exterioris egreditur atq; ad contactum ducta est, longiora erunt. Quare longiora

giora etiam ea quæ huic tertio lateri, ex definitione circuli, eſt linea æqualis. Atq; communi ab inæqualibus ablato, intercepta ſcilicet à centris linea: remanentiū partium una, à centro ſcilicet interioris ad contactum ducta, reliqua, altera ſcilicet, quę à centris per circulum continuata eſt, longior. Sed quia illa, ex definitione circuli, huius parti æqualis eſt: & partialis tandem ſua totali linea longior erit, quod fieri nullo modo poteſt. Si igitur per centra duorum circulorum, quæ ſeſe mutuo intus tangunt, recta quędam linea ducta, atq; ejecta fuerit, in circulorum contactum ea cadet. quod demonſtrari oportuit.

ὁμοίως κἂν ἐκτὸς ᾖ τὸ μικρὸν καὶ πρὸν τὸ μείζονος κύκλου, δείξομεν ὡς ἄτοπον.

Similiter etiam, Si extra paruum circulum centrum maioris circuli fuerit, abſurditatem oſtendemus.



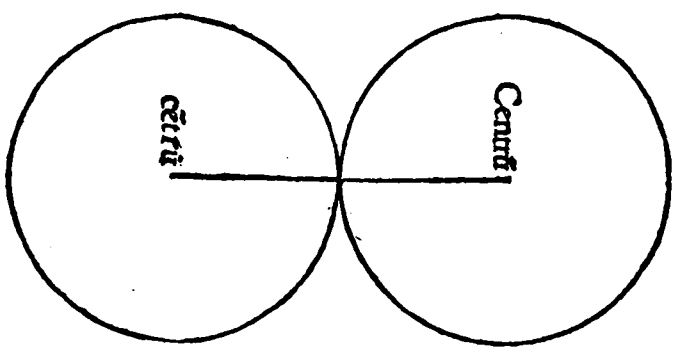
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς· ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἁφῆς ἐλεύσεται.

PROPOSITIO XII.

Si duo circuli ſeſe mutuo exterius tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum tranſibit.

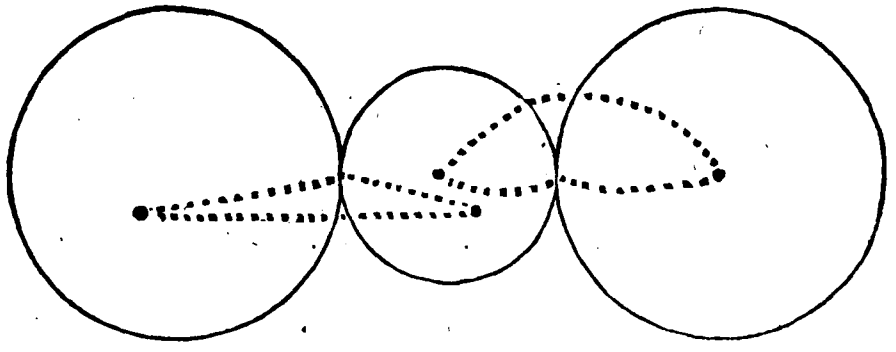
Sint duo circuli, quorum unus alterum extra tangat, & quęrantur centra amborum: dico, ſi per hæc centra ducta fuerit recta quædam linea, eam per circulorum



contactum tranſire. Quòd ſi hoc fortè negetur, aliò eam certè inclinare concedendum erit. Sit ſanè, & ducatur ab utriuſq; circuli centro ad eorum contactum recta linea. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam ducuntur rectæ lineæ, ſunt, ex definitione circuli, inter ſe æquales, eadem definitione bis uſurpata, æqualibus item lineis æqualibus additis: duæ à centris ad contactum ductæ rectæ lineæ, reliquis duabus, quæ & ipſæ à centris ad ſuas circumferentias ductę ſunt, rectis lineis æquales erunt. Ipſa igitur totali, quæ à centro ad centrum ducta eſt, ut tertio trian-

gulli

guli latere, breuiores, quod eſt contra propoſitionem quandã in primo expoſitam, qua dicitur, quòd Omnis trianguli duò quælibet latera adamuſſim ſumpta, reli-



quo tertio longiora ſint. Si duo igitur circuli extrà ſeſe mutuo tetigerint: ad centra eorum applicata recta linea, per contactum tranſibit. quod demonſtraſſe oportuit.

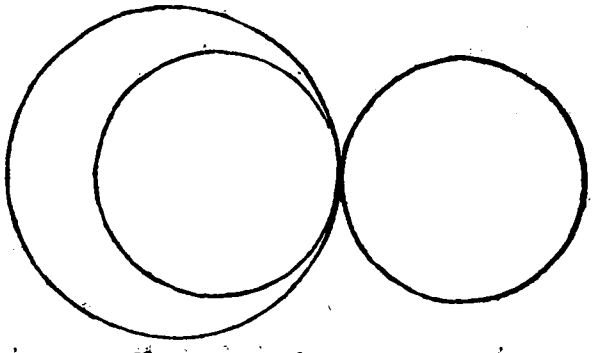
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Κύκλος κύκλον οὐκ ἐφάπτεται πλείοσι σημείοις ἢ κατὰ ἕν, εἴτε ἐντὸς, εἴτε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

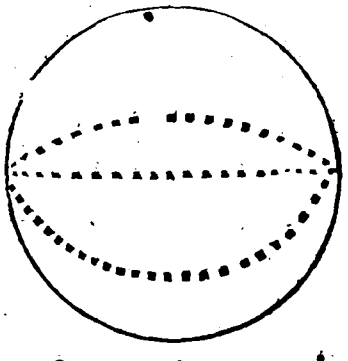
PROPOSITIO XIII.

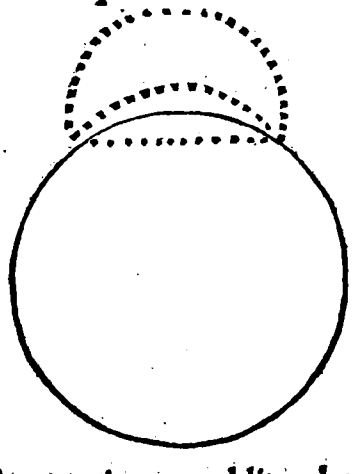
Circulus circulum non tangit in pluribus punctis uno, ſiue intus ſiue extra tangat.

Deſcribatur circulus, dico impoſſibile eſſe alium deſcribi poſſe circulum, qui deſcriptum priorem uel intus, uel extra etiam, in pluribus punctis quàm in uno



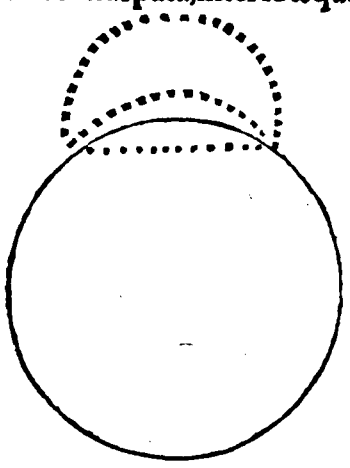
tangat. Quòd ſi uideatur poſſibile, ſit ſanè: tangat autem hunc primò intus in duobus locis, & ducatur per centra circulorum recta quædam linea: hæc autem in utranq; partem continuata, cum ex propoſitione 11 huius, in circulorum cõtactum cadat, quæ ex definitione circuli, lineæ ſunt in-





ter ſe æquales, mox intercepta à centris portione, uni earum addita, ab altera uerò

hac eadem ablata, quæ ſic fiunt lineæ inæquales, ex eadem circuli definitione, ſecundò uſurpata, inter ſe æquales erunt: id quod rationi minime eſt conſentaneum.



Circulus igitur circulum intus tangens, uno tantum puncto hoc faciat neceſſe eſt. Quantum ad ſecundum. Eſto quòd extrà, circulus circulum in duobus locis tangat, atq; ducta à contactu in contactum recta quadam linea, cum hæc, ex propoſitione 2 huius, intra utrunq; circulum cadat, atq; id fieri hic nullo modo poſſit, propterea quod nullius circuli aliqua pars in altero ſit: exterius circulus circulum in pluribus punctis uno non tanget. Et quia neq; etiam interius, ut auditum eſt. Circulus igitur circulum tangens, in uno tantum puncto hoc fiat neceſſe erit, & non in pluribus, interius ſiue exterius hoc accidat, quod demonſtrari oportuit.

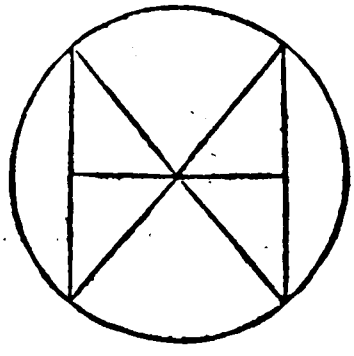
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

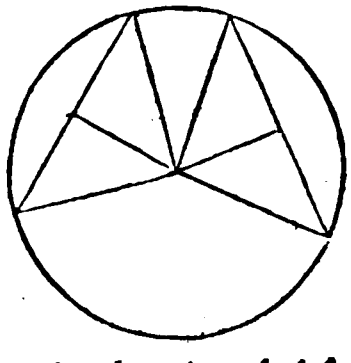
Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XIIII.

In circulo æquales rectæ lineæ: æqualiter diſtant à centro. Et æqualiter diſtantes à centro: æquales inter ſe ſunt.

Deſcribatur circulus, in eo etiam rectæ quædam lineæ æquales ducantur. Et quia æquales: pro priore propoſitionis parte dico, eas etiam æqualiter à centro diſtare. Quòd ſi rectæ in circulo ductæ in æquali à centro diſtantia fuerint: & lineas has, ratione partis poſterioris, inter ſe æquales eſſe conueniet. Quæ quidem ambæ propoſitionis partes ſic retineri poterunt. Coniungantur extremitates ductarum



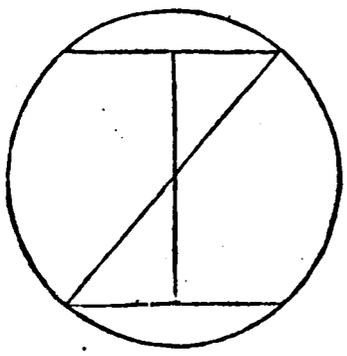


cum circuli centro quatuor rectis lineis. Et quoniam duo triangula deſcripta ſunt, quorum anguli, quos ex una & eadem parte in circumferentia habent, quia per propoſitionem 8 primi, ſunt inter ſe æquales, poſtquam ſuper æquales in circulo ductas lineas, à centro, per propoſitionem 12 primi, perpendiculares ductæ fuerint, cum illæ per has, ex poſteriore parte propoſitionis 3 huius, æqualiter ſecentur: & ipſe perpendiculares tandem, ex 4 eiuſdem primi, inter ſe æquales erunt: in quas deinde hæ cadunt rectæ lineæ, ex 4 definitione huius, æqualiter à centro diſtabunt: quod eſt primum, uel prior propoſitionis pars.

ALIA HVIVS PRIORIS PARTIS DEMONSTRATIO.

Maneat eiuſdem diſpoſitionis figura, niſi quod duæ, ex una parte ab extremitatibus ad centrum ductę, rectę lineæ poſſint omitti, prioris partis demonſtratio etiam

etiam ſic colligi poterit. Quoniam enim recta linea in circulo per centrum extenſa, rectam lineam in circulo ductam aliam, quæ non per centrum tranſit, ad angulos rectos ſecans, ipſam, ex poſteriore parte propoſitionis tertiæ huius, biſariam ſecat, hac eadem parte bis uſurpata, & quia etiam rectæ in circulo ductæ, ex hypotheſi ſunt inter ſe æquales: quæ de his in circulo ductis æqualibus lineis per perpendiculares abſcinduntur lineę, inter ſe æquales erunt. Sed ſunt etiam ęquales inter ſe, ex definitione circuli à centro ductæ lineæ, quæ cum harum æqualium extremitatibus coniunctæ ſunt: per penultimam igitur propoſitionem primi, atq; illis duabus communibus notitijs, Quę uni ſunt æqualia, &c. & item, Si ab æqualibus æqualia ſubtrahantur, & reliqua, res tandem cõcluditur. Lineas ſcilicet ad illas à centro perpendiculares, eo quod quadrata, inter ſe ęqualia habeãt, ęquales eſſe, id quod nunc eſt æqualis ipſarum à centro diſtantiæ argumentũ. Sed eſto iam, quantum ad partem poſteriorẽ, quòd rectę ductę æqualiter à centro diſtent: dico ipſas ductas inter ſe æquales eſſe, & hac quidem demonſtratione. Cadant ad ęqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriuſq; æqualiter diſtantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam perpendiculares ductæ, ex definitione Linearũ ęqualiter à centro diſtãtium, inter ſe ſunt æquales, cum ab æqualibus rectis non poſſint deſcribi diuerſa quadrata: & harum æqualium rectarum quadrata æqualia erunt. Iis igitur perpendicularium quadratis à ſubtendentium rectos, quę & ipſę, ex definitione, inter ſe ęquales ſunt, quadratis ſubtractis: & reſidua quadrata, per 47 primi, inter ſe æqualia erunt: atq; tandem ſic etiam æqualium quadratorũ latera ęqualia. Sed quia utrunq; ex 2 parte propoſitionis 3 huius, rectę ductæ eſt medietas: & ipſæ ductę inter ſe æquales erunt, quod eſt ſecundum. In circulo igitur æquales rectæ lineæ, æqualiter, & re. quod demonſtraſſe oportuit.



ALIA EIVS QVOD IN HAC PROPOSITIONE SEcundò proponitur, demonſtratio.

Cadant ad æqualiter ductas à centro perpendiculares, coniungatur etiam alterutra utriuſq; æqualiter diſtantium extremitas cum centro circuli. Et quoniam quę ex centro ad circumferentiam ducuntur rectę lineę, inter ſe æquales ſunt: quadratum igitur unius quadrato alterius ex centro ductę lineę, æquale erit. Rurſus quoniam utriuſq; ex centro ductæ quadrato, duarum linearum quadrata, ex 47 primi æqualia ſunt: etiam quæ ab illis duabus deſcribuntur quadrata, harum duarum linearum quadratis, ex cõmuni illa notitia, Eidem æqualia &c. bis uſurpata æqualia erunt. Porrò ab utroque æqualium illo quadrato quod à perpendiculari utrobiq; deſcribitur, ſubtracto, cũ ipſæ perpẽdiculares (ut ex hypotheſi & definitione quadam colligere licet) una alteri ęqualis ſit, & reſidua quadrata, ex communi quadam notitia, inter ſe æqualia erunt. Quare & horum ęqualium quadratorum latera, æqualia. At uerò horum æqualium laterum, duplices ſunt, ex poſteriore parte propoſitionis tertię huius, rectę in circulo ductæ: & ipſæ ductę tandem ex illa cõmuni notitia. Eiuſdem duplicia &c. inter ſe æquales erunt. In circulo igitur æquales rectę lineæ, æqualiter diſtant à centro. Et æqualiter diſtantes à centro, æquales inter ſe ſunt. quod demonſtrari oportuit.

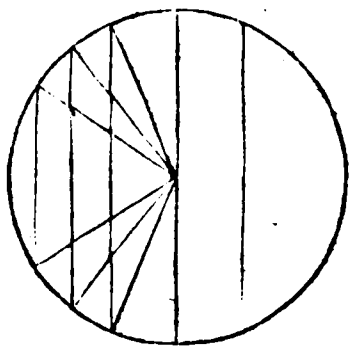
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

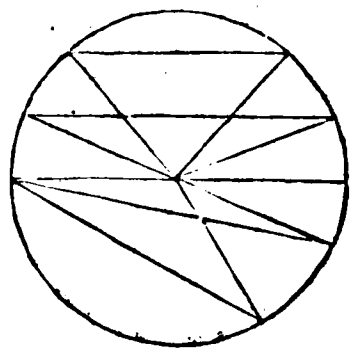
Ἐν κύκλῳ, μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἐγγὺς τοῦ κέντρου τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XV.

In circulo, longissima quidem est diameter. Aliarum uerò, semper propinquior centro, remotiore longior est.

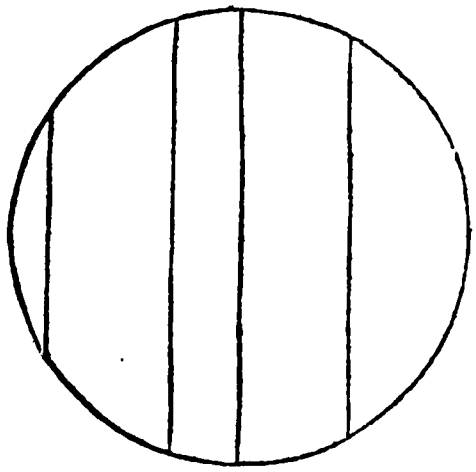
Sit circulus, in eo etiam aliquot rectę lineæ ductæ. Esto autem quòd una harum per circuli centrum, reliquæ uerò utcunq; transeant: dico per centrum transeuntem ex ductis omnium longissimam, aliarum uerò quamlibet centro propinquiorem, remotiore longiorem esse. Vtrisq; enim omnium præter centrum ductarum extremitatibus, rectis lineis cum centro copulatis, prior propositionis pars ex propositione 20 primi, una tamen recta subinde pro duabus alijs sibi æqualibus sumpta, demõstrabitur. Posterior deinde ex 24 eiusdẽ retineri potest. quod indicasse oportuit.

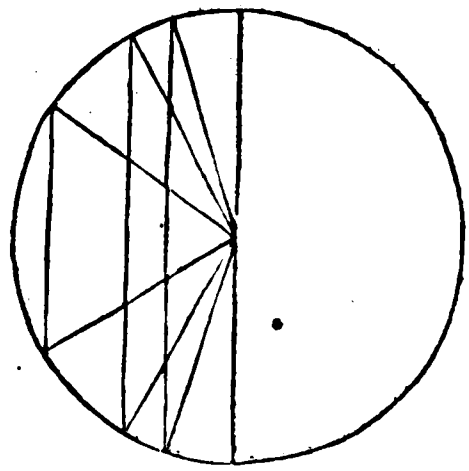




APPENDIX.

Oportet autem, ut omnes rectæ ductę ex una diametri parte appareant, & quidem ideo ut cognoscatur, quæ linea ex reliquis diametro uel centro propinquior, quæ item ab eo remotior sit. Quare si una, uel plures etiam ex altera diametri parte conspiciantur rectæ lineę, in qua parte pauciores fuerint, eius lineæ ad alteram partem traducendę sunt hoc modo. Continuentur in rectum singularum ductarum, quibus in altera parte æquales ducendę sunt, perpendiculares ad suarum ipsarum longitudinem ultra centrum: deinde ab extremitatibus harum, tanquam rectarum datarum, per 11 primi, ad angulos rectos lineæ, ex utraq; parte usq; ad circũferentiam continuatæ excitentur. Et quoniam hæ singulę, rectis in priori parte ductis, ex definitione Rectarum in circulo æqualiter à centro distantium, æquales sunt, quæq; sue, æquali nunc uel æqualibus pro æqualibus usurpatis, demonstratio ut præmissa est absoluatur.





ΥΠΟΤΑΣΙΣ

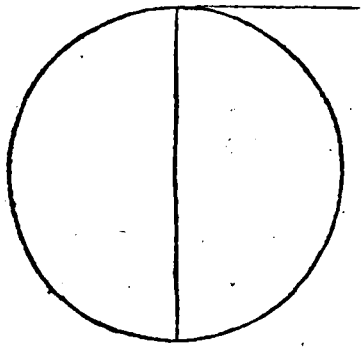
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις.

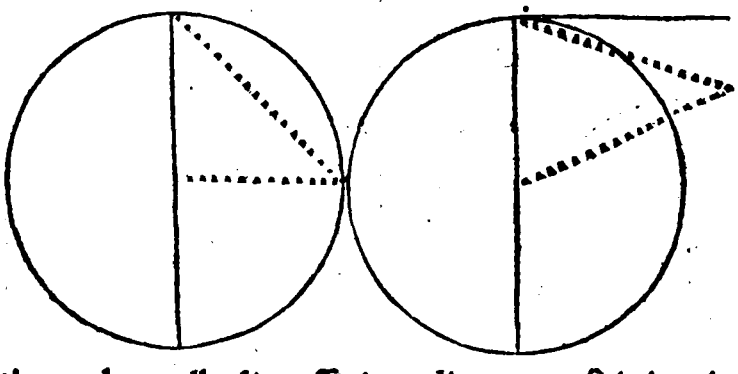
Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Καὶ εἰς τὴν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. Καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, παντὸς ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττων.

PROPOSITIO XVI.

Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet. Et in locum, inter ipſam rectam lineam & circumferentiam, altera recta non cadet. Et ſemicirculi quidem angulus, omni acuto rectilineo angulo amplior eſt. Reliquus autem, anguſtior.

Deſcribatur circulus, ducatur in eo etiam diameter, dico primùm, ſi quę linea ab alterutra diametri extremitate ad rectos excitetur angulos: extra circulum eam cadere oportere, neq; ex angulo, ſub ipſa & circũferentia comprehenſo, aliam rectam educi poſſe. Angulum præterea ſemicirculi, qui ſub diametro & circumferentia continetur, omnium acutorum rectilineorum maximũ: qui uerò ſub circumferentia & ad rectos excitata, omnium acutorum minimum eſſe. Habet hæc propoſitio quatuor partes, quę ordine ſic demonſtrari poſſunt. In ipſam circumferentiam, cum ſit latitudinis expers omnis linea, ad rectos excitata cadere non poteſt, cadet ergo intra uel extra ipſam circumferentiam. Quod ſi intra cadere ſumptũ fuerit, mox, ſi poſſibile ſit, ea ducta, & ad circumferentiam uſq; continuata, clauſo item triangulo, extremitate huius ad rectos ductæ altera, recta quadam linea cum centro copulata. Et quoniam triangulum quod ſic deſcribitur ex definitione circuli, iſoſcelis eſt: duo igitur ipſius anguli quos ad baſim habet, inter ſe æquales erunt. Quia uerò unus eorũ eſt rectus, ratione ductæ ad rectos angulos lineæ: & alter ſic rectus erit, quod eſt contra propoſitionẽ in primo 17, quæ dicit, Omnis trianguli duos angulos, quomodocunq; ſumptos, duobus rectis minores eſſe. Vel contra corollarium propoſitionis in primo 32, quod quidem dicit, Omnis trianguli non duos tantùm, ſed tres eius internos angulos, duobus rectis æquales eſſe. Ab extremitate igitur diametri ad angulos rectos ducta linea, intra circulum non cadet. Et quia neq; in ipſam etiã circumferentiam, ut dictum eſt: extra circulum ergo, ut uult propoſitio, ea cadet, id quod primò erat demonſtrandum. Quòd uerò inter ductam & circumferentiam cadere nulla alia poſſit, impediunt propoſitio in primo 19, atq; deinde circuli definitio. Alia enim quadam interpoſita, ſi ad ipſam deinde à centro, per 12 primi, perpendicularis ducatur, cum rectus in triangulo angulus utroq; reliquo amplior ſit, ex propoſitione etiam 19 primi, ampliori angulo longius latus ſubtendatur: ſtatim ex definitione circuli, æquali tamen pro æquali linea ſumpta, partialem ſua totali linea longiorem eſſe, inferri poteſt: quod eſt impoſſibile. Patet itaq; id quod ſecundò





cundò demonſtrandum erat. Et quia hoc nunc conſtat: angulum igitur illũ, quem diameter & circumferentia continent, omnium acutorum rectilineorum maximũ: reliquum deinde, ſub circũferentia & ad rectos angulos excitata comprehenſum minimum eſſe, ſequi neceſſe eſt, cum aliàs ſi ſtatueretur unus angulus illo maior, alius deinde hoc reliquo minor: ex loco inter circumferentiam atq; ad rectos angulos ductam, cõtra ſecundam partem huius, alia recta educi poſſet. Hoc autem cum demonſtratum ſit eſſe impoſſibile: quod igitur tertiò & quartò propoſitũ eſt, iam demonſtratum erit. Conſtat itaq; tota propoſitio, quod erat demonſtrandum.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν. Ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἑνὸς μόνου ἐφάπτεται σημείου.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum eſt, Quòd à diametri circuli extremitate ad rectos angulos ducta: ipſum circulum tangat. Et quòd recta linea circulum in uno tantum puncto tangat.

Ἐπεὶ δέ Quoniam rectam lineam, duobus in circuli circumferentia punctis comprehenſam, intra ipſum cadere, ex 2 propoſitione huius oſtenſum eſt. quod admonuiſſe oportuit.

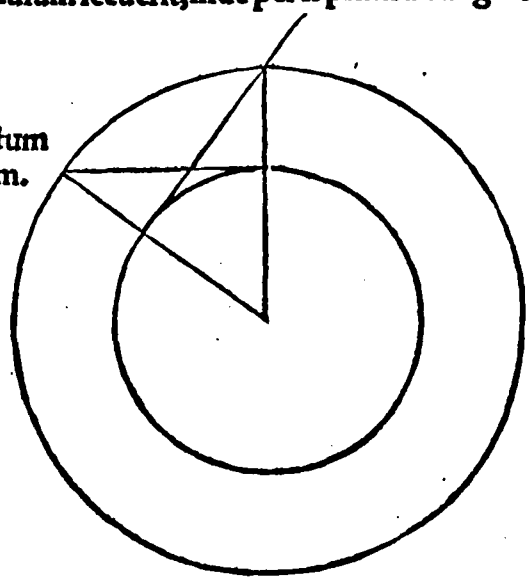
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου, ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto, dato circulo, contingentem rectam lineam ducere.

Sit punctum datum, circulus item datus, atq; propoſitũ, à puncto ad circulum contingentem rectam lineam ducere. Ipſum igitur punctum cum centro circuli, (quod quidem ſemper, ubi ignotum id fuerit, ex propoſitione prima huius inueniri licet) per poſtulatum primum, recta quadam linea coniungatur, atq; ubi hæc recta circulum ſecuerit, inde per 11 primi ad angulos rectos linea excitetur. Porrò hac eadem recta, qua cum pũctum datum & centrũ circuli iuncta ſunt, loco ſemidiametri ſumpta ex dati circuli cẽtro alius deſcribatur circulus, atq; ubi is ad rectos angulos ductam ſecat, ex hoc puncto alia ad centrum recta linea ducatur, à cuius interſectione tandem cum circulo dato, poſtquam linea recta ad datum punctum ducta fuerit, cum hæc recta ea ſit quę maximè petitur propoſitioni ſatisfactum erit, id quod hoc modo demõſtrabitur. Quoniã enim hac præparatione duo triangula deſcripta ſunt, quorum duo latera unius duobus lateribus trianguli alterius, ex definitione circuli, bis uſurpata, æqualia



æqualia sunt, angulum etiam inter æqualia latera, angulo æqualem habent, cum uidelicet ille sit, qui ad centrum ponitur, bis sumptus: ex propositione igitur 4 primi, & reliquum tertium latus reliquo tertio lateri: anguli insuper reliqui angulis reliquis: ac totum triangulum toti triangulo æquale erit. Quia autem unus angulus ex reliquis in triangulo uno, is nimirũ quem ad rectos ducta, & una dati circuli semidiameter comprehendunt, est rectus: & in altero qui huic, propter æqualitatẽ subtensarum, est æqualis, linea item ad rectos ductam secante, & altera dati circuli semidiametro includitur. rectus angulus erit. Hoc igitur cum ita sit: secans hæc, ut diximus, ex priore parte corollarij propositionis 16 huius, circulum datum tangere dicitur. Et quia hæc secans à puncto dato etiam egreditur: factum igitur quod maxime uolebat propositio. A dato scilicet puncto, dato circulo contingens recta linea ducta est. quod fieri oportuit.

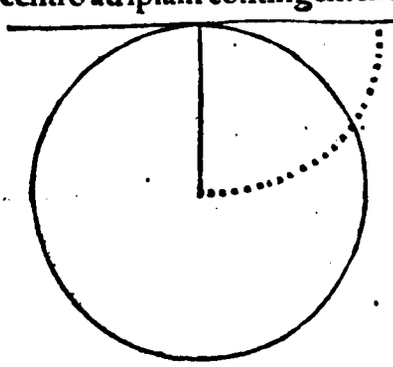
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῷ κατὰ τὴν ἁφὴν τῷ κέντρῳ τῆς εὐθείας ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ.

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quædam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit.

Describatur circulus, cum etiam tangens recta linea ducatur: dico igitur, si à centro ad punctum contactus recta quędam linea ducta fuerit, quòd hæc recta ad contingentem sit perpendicularis. Si uerò non, ducatur per propositionem 12 primi, à centro ad ipsam contingentem recta perpendicularis alia. Et quoniam perpendicularis hæc, propter æqualem & erectum situm, angulos cum contingente ἐφαπτῆς, æquales inter se facit, unde sic uterq; eorum, ex quadam definitione, rectus est: ratione recti huius, qui nimirũ est in triangulo, uterq; ex reliquis eiusdem trianguli angulis, recto angulo minor erit. Quia uerò ampliori angulo omnis trianguli, ex propositione 19 primi, longius latus subtenditur: ex definitione igitur circuli, æquali tamen pro æquali linea sumpta, partialis linea sua totali longior erit, cum tamen contrà Totalis, ex cõmuni quadam noticia, linea sua partiali longior esse debeat. Quare præter contactum à centro in contingẽtem ducta, ad ipsam perpendicularis non erit. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τίς ἐστιν πλὴν τῆς & reliqua. Simili quoq; ratione ostenditur, quod nulla etiam alia, præter eam, quæ à centro ad contactum tendit, ad contingentem perpendicularis esse possit. Quare hæc ipsa quæ à centro ad contactum ducitur recta linea, in cõtingentem perpendicularis erit. Si igitur circulum tetigerit recta quædam linea, à centro uerò in contactum ducta fuerit recta quędam linea alia: ducta, in contingente perpendicularis erit. quod demonstrasse oportuit.



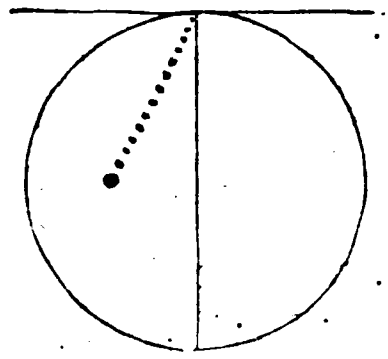
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· ἐπὶ ταύτης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò ipsi tangenti ad angulos rectos recta linea ducta fuerit: erit in ducta centrum circuli.

Descríbatur circulus, eum etiam tangens línea recta ducatur: dico, si à contactu, tanquam à puncto in contingente dato, per 11 primi, ad rectos angulos linea per



circulum ducta fuerit, in ea centrum circuli esse. Quod si non, erit id necessariò extra eam alibi. Eo igitur alibi constituto atq; signato, inde etiam recta quadam linea ad punctum contactus ducta, cum hæc, per præmissam 18, ad contingentem perpendicularis existat: angulus minor maiori, uel partialis suo totali, ex definitione, qua omnes rectos æquales inter se esse intelligitur, æqualis erit: quod est impossibile. Punctum igitur extra perpendicularem alibi constitutum, centrum circuli non erit: in ipsa ergo contingentis per circulum ducta perpendiculari id esse necesse est. Si circulum igitur recta quędam linea tetigerit, à contactu uerò &c. quod demonstrasse oportuit.

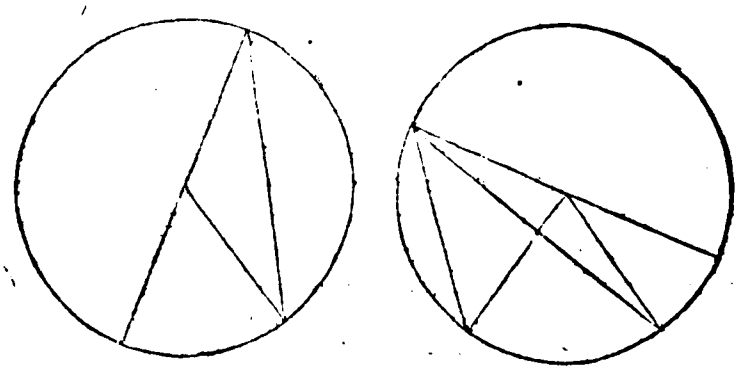
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

PROPOSITIO XX.

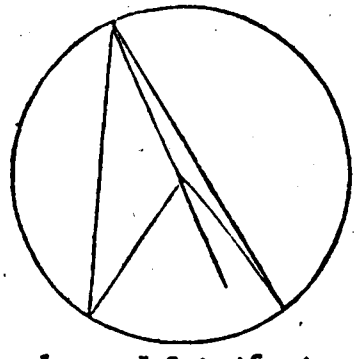
In circulo, qui ad centrum angulus, duplus est eius qui ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam basim habuerint ipsi anguli.

Descríbatur circulus, in eo etiam duo ponantur anguli, unus quidem ad centrum, alter uerò ad circumferentiam, sic ut ambos unus & idem circumferentiæ arcus subtendat: dico, ad centrum positum angulum, duplum esse eius, qui ad circumferentiam ponitur. Huius propositionis figuratio quia tripliciter uariari potest, triplici etiam demonstratione hic opus erit. Aut enim ad centrũ anguli alterũ latus anguli in circũferentia alteri lateri coniungetur, aut non. Si primum, cum ex



definitione circuli à centro ad circumferentiam exeuntes líneæ, inter se æquales sint, unde sic triangulum isosceles appareat. qui anguli, ex priore parte propositionis 5 primi, sunt inter se æquales, hi simul sumpti, ad utrunq; æqualium dupli erunt. Sed quia his simul, ut duobus internis & oppositis trianguli angulis, æqualis est, ex propositione 32 primi, angulus ad centrum positus, ut eiusdem trianguli angulus externus: & ad utrunq; æqualium idem externus, ad centrum positus angulus duplus erit, quod ostendisse oportuit. Sed esto iam quòd nõ coniungantur latera: quia uerò tum accidit, quòd unum latus unius, latus unũ alterius anguli secet, aut non secet. Si secet, diametro ab angulo qui est ad circumferentiam per centrum ducta, cum

cta, cum tam totalis quàm etiam partialis ad centrum externus trianguli angulus, per easdē propositiones primi bis usurpatas, suo interno opposito angulo duplus sit, partialibus ab ipsis totalibus subtractis, cum hi & illi eodem modo sese habeāt: & residui anguli, unus ad alterum, circa centrum quidem ad eum qui est ad circumferentiam duplus erit. Quòd si unū unius, unum latus alterius anguli non secet, ducatur ab angulo qui est ad circumferentiam, per angulum ad centrum recta quædam linea, & demonstratio (partialibus tamen utriusq; anguli simul sumptis) ut modò succedet, angulum scilicet ad centrum eius, qui est ad circumferentiam, duplum esse. Angulus igitur qui ad centrum in circulo ponitur, duplus est eius qui ad circumferentiam, qualitercunque sanè hi, modo una & eadem circumferentia subtenduntur, descripti fuerint. quod demonstrasse oportuit.

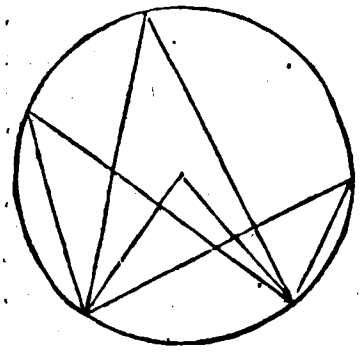


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐν κύκλῳ, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, æquales inter se sunt.



Describatur circulus, in eo etiam aliquot super uno & eodem segmento anguli: dico, illos angulos inter se æquales esse. Quod quidem, ductis à segmenti terminis ad centrum duabus rectis lineis, per præcedentem 20 & communem illam noticiam, Quæ eiusdem dimidia, æqualia inter se sunt, manifestum fiet.

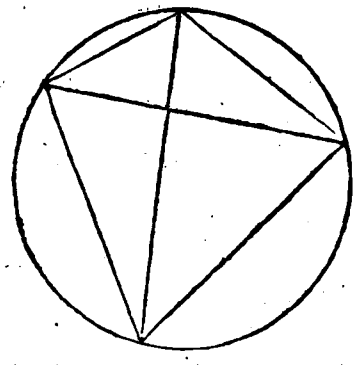
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΒ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων, αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXII.

Quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex opposito, duobus rectis sunt æquales.

Describatur circulus, in eo etiam quadrilaterum qualecunq;, æqualium uel inæqualium laterum: dico, angulos quosq; oppositos duobus rectis æquales esse. Ducantur in quadrilatero duę diametri. Et quoniam omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propositionis 32 primi, duobus rectis æquales sunt. Et rursus, quoniam etiam æquales inter se sunt, ex præmissa 21, qui in eodem segmento sunt anguli, eo quod prius dicitur, semel: altero uerò, bis usurpato, bis insuper angulo pro æquali alio sumpto: quantum ad duos oppositos in quadrilatero angulos ratione oppositionis unius, propositioni satisfactum erit. Porrò eodē ordine, demonstratione pro alijs duobus



oppoſitis in quadrilatero angulis inſtituta, quòd & illi duobus rectis angulis æquales ſint, manifeſtè patebit. Quadrilaterorum igitur in circulis anguli, qui ex oppoſito, duobus rectis ſunt æquales. quod demonſtraſſe oportuit.

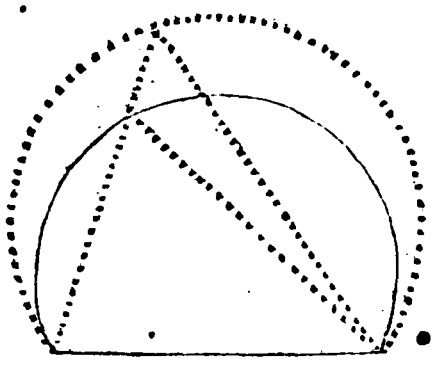
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

PROPOSITIO XXIII.

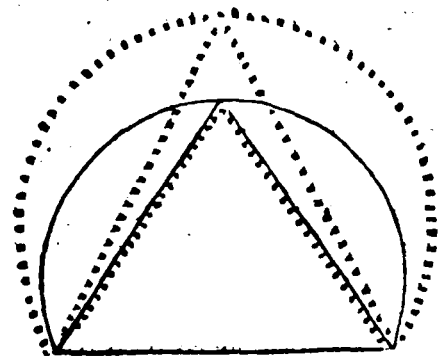
Super eadem recta linea, duæ ſectiones circulorum ſimiles & inæquales, non conſtituentur ad eaſdem partes.

Deſcribatur circuli ſectio: dico, quòd ſuper eius recta impoſſibile ſit, aliam, deſcriptæ ſimilem & inæqualem, ad eandem etiam partem, poſſe cõſtitui ſectionem. Quòd ſi uideatur hoc poſſe fieri, conſtituatur ſanè ſuper hac recta linea ſectio alia,

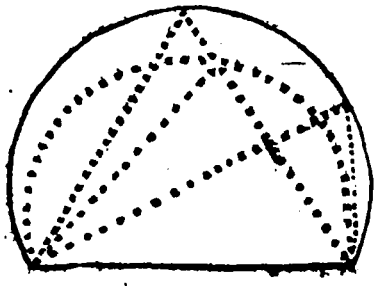


ut quæ poſitæ ſimilis ſit & inæqualis, ad illam eandem etiam partem, & extendatur, per primum poſtulatum primi, recta quædam linea, ab una rectæ extremitate per arcus utriuſq; ſectionis tranſiens, atq; ubi hæc ſectionum arcus ſecuerit, inde etiam, per poſtulatum eiuſdem primi ſecundum, rectæ lineę ad alteram rectæ extremitatem ducantur. Et quoniam ſectiones ſunt, ex hypotheſi aduerſarij, inæquales, atq; etiam ſimiles, cum ſimilitudo ſectionũ circuli ab æqualitate angulorum, quos illæ ſectiones ſuſcipiunt, definiatur: anguli illi quos ſecundò ductæ cum prima in ſectione comprehendunt, externus & internus oppoſitus unius trianguli, inter ſe æquales erunt. Sed quia non ſunt, ut quidem hoc propoſitio in primo 16 teſtatur, neq; ſectiones etiam, ut ponitur, inter ſe inæquales & ſimiles erunt. Super eadem igitur recta linea, duæ ſectiones circulorum ſimiles & inæquales, non conſtituentur ad eaſdem partes. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.



Poteſt etiam figura huius propoſitionis deſcribi, ut ſuper ſectionibus conſtitutorum angulorum uterq; ſua propria latera habeat, utq; latera unius ab alterius ſectionis lateribus includantur. Quòd ſi ad hunc modũ figura deſcripta fuerit, tum quia angulus interioris angulo ſectionis exterioris, per propoſitionem 21 primi, maior eſt, deſcripti igitur arcus ſimiles non erunt, id quod eſt contra propoſitionis hypotheſim.



Item licet uterq; angulorum ſua propria latera habeat, accidit tamen aliquando, ut unum latus unius, unum alterius ſectionis latus ſecet. Quòd ſi ſic, tum propter demonſtrationem faciliorem, ab interſectione arcus interioris, & lateris unius anguli ſectionis exterioris alia ad extremitatem rectę lineæ recta ducenda eſt. Et quoniam in eodem ſegmento anguli, ex propoſitione 21 huius, inter ſe ſunt

se sunt æquales, cum unus eorum alio quodam alterius segmenti angulo, ut externus suo interno, ex propositione 16 primi, maior sit: & alter, propter æqualitatem, eodem maior erit: non æquales igitur anguli, neq; etiã similes sectiones, quod est contra hypothesim. Super eadem igitur recta linea, duæ sectiones circulorum similes & inæquales, nõ constituẽtur, ad easdẽ partes. quod demõstrari oportuit.

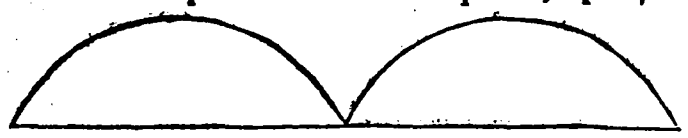
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

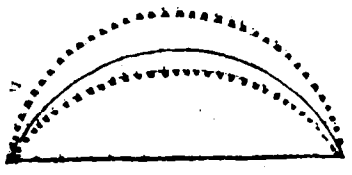
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO XXIIII.

Super æqualibus rectis lineis similes circulorum sectiones, æquales inter se sunt.

Sint duæ uel plures rectæ lineæ æquales, super ijs etiam similes circulorum sectiones cõstitutæ: dico, illas sectiones inter se æquales esse. Est huius propositionis demonstratio præcedens 23. Nam congruente uel superposita una sectione alteri, cum earum rectæ, ex hypothesi, sint inter se æquales, una extremitate unius super unam sectionis alterius posita, & in alteram huius altera extremitas illius coincidet, quare sic & arcus sectionum coincidere oportet. aliàs sequeretur, Similes & inæquales circulorum sectiones super una & eadem recta describi posse, quod est contrà propositionem præcedentem. Coincidunt ergo, ac propterea æquales etiam inter se, ex communi quadam notícia, quę in primo his uerbis exposita est, Quę congruunt, & reliqua.





DEMONSTRATIO ALIA.

Superponatur una sectio alteri, ita ut unius extremitas una super alterius sectionis unam extremitatem ac recta super rectam collocetur. Et quoniam æquales sunt ipsæ rectæ: altera extremitas unius cum altera alterius sectionis extremitate coincidet: atq; hinc linea lineæ congruit. Quòd si sectio sectioni cõgruat: eas inter se æquales esse, ut uult propositio, ex notícia quadam communi conclúditur, Si igitur &cæ. Esto autem quòd non congruant sectiones basibus congruentibus, sed differant, atq; in diuersa loca cadant. Quoniam enim circulus, ut uult propositio 10 huius, in pluribus punctis quàm duobus circulum alium non secat, cum hic in tribus punctis fiat circulorum sectio, propositioni citatæ contrarium fieri apparet, quod non conceditur. Quare congruente linea lineæ, nõ potest non sectioni quoque sectio congruere. Super æqualibus igitur rectis similes circulorum sectiones constitutæ: & ipsæ sectiones inter se æquales erunt. quod demonstrasse oportuit.



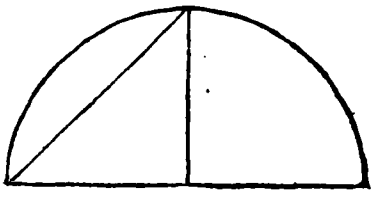
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

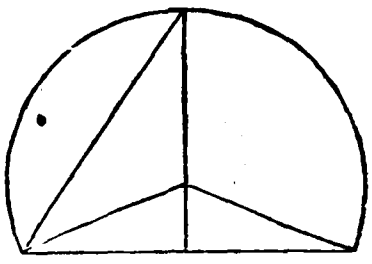
Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλου οὗπερ ἐστὶ τμῆμα.

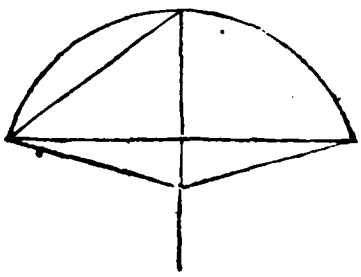
PROPOSITIO XXV.

Circuli ſectione data, deſcribere circulum cuius eſt ſectio.

Sit ſectio circuli data, atq; propoſitum, circulum eius deſcribere, hoc eſt, ſectionem hanc, ut circulus tandē ſit, perficere & complere. Diuidatur igitur recta, ſuper quam eſt conſtituta ſectio, per propoſitionem 10 primi, bifariam, atq; à puncto diuiſionis huius ad angulos rectos linea excitetur, ad arcum uſque, & ultra etiam lineam rectam, quantum nimirum neceſſarium fuerit, eam prolongando. Erit autem in ea ad rectos ducta linea, ut teſtatur corollarium propoſitionis primæ huius, centrum circuli. Ducta igitur ab huius πρὸς ὀρθὰς ductæ & arcus interſectione ad angulum ſectionis alterutrum recta quædam linea, ſi ad hanc anguli inter ſe æquales ſint, ubi hæc eadem πρὸς ὀρθὰς ducta rectam arcus ſecat, ibi centrum circuli: ipſam uerò ſectionem, Semicirculum eſſe pronuncies. Eo igitur ex hoc puncto circini officio completo, nona propoſitione huius adiuuante, propoſitioni ſatisfactum erit. Quòd ſi dicti anguli fuerint inter ſe inæquales, angulo ei qui ſub recta hac, atq; ea ſuper qua eſt conſtituta ſectio, cōprehenditur, per 23 primi, ut alteri angulo æqualis fiat, rectæ cuiuſdam lineæ ductu ſuccurrendum erit. Quo facto, ubi hæc ad rectos ductam tetigerit, centrum circuli ibi eſſe pronūciabis. id quod ſic demonſtrari poteſt. Ducatur ex hoc puncto ad alterā arcus extremitatē recta quędam linea. Et quoniam hæc, & aliæ duæ, quæ ex hoc eodem puncto ad circumferentiam concurrunt rectæ lineæ, ex propoſitionibus 6 & 4 primi æquales inter ſe ſunt: quod tandem id punctum, de quo iam agitur, eius, cuius eſt data ſectio, circuli centrum ſit, ex propoſitione 9 huius manifeſtum erit. Eo igitur nunc ſecundum unius æqualium linearum interuallum, per 3 poſtulatum primi, inde deſcripto, cum perreliquarum etiam æqualium extremitates tranſeat, propoſito ſatisfactum erit. Circuli igitur ſectioni datæ, circulus ipſe deſcriptus atq; cōpletus eſt: quod fieri oportuit.

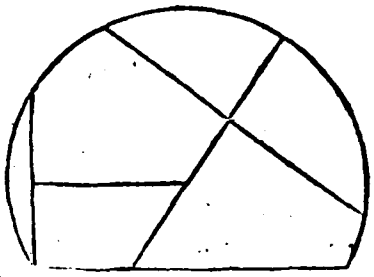


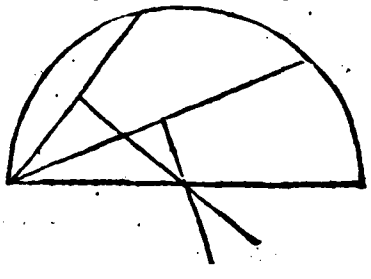




EST ET ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

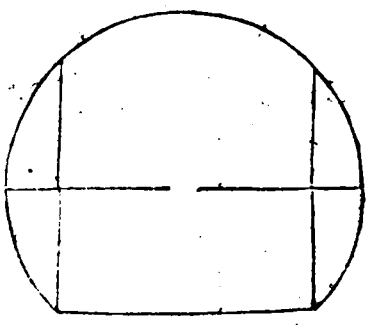
In data ſectione, cuius circulus compleri debet, ducantur duæ rectæ lineæ. Vel, ut ſit operatio certior. Sumantur tria in ſectione puncta, utcunq; hæc duabus rectis lineis copulentur, & erunt, ut ſupra, duæ in ſectione rectę lineæ ductæ. Harum nunc





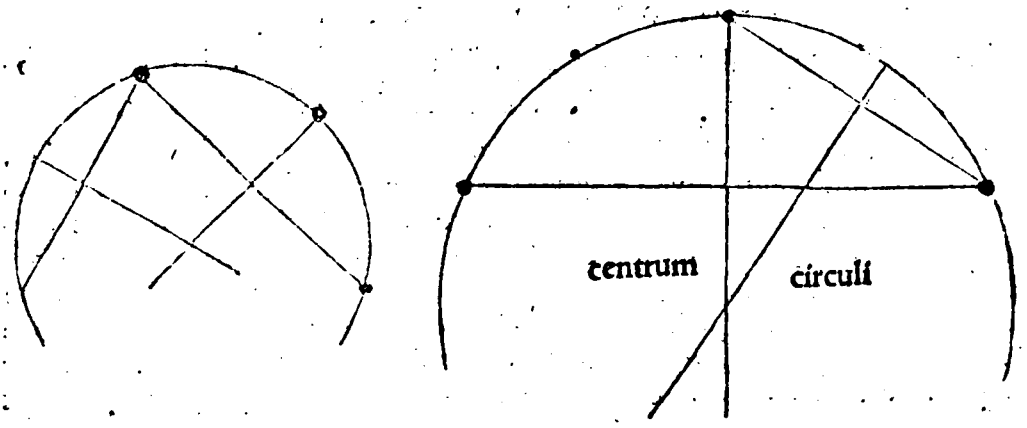
nunc utraq; bifariam diuisa, à puncto diuisionis utriusq; ad angulos rectos linea, per propositionem 11 primi excitetur, ubi tandem hæ duæ ad rectos ductę sese mutuo secant, ibi per corollarium primæ huius, bis usurpatum, circuli, qui sectionẽ datam sua descriptione comprehendit, centrum esse pronunciabitur.

Quod si ad rectos ductæ sese mutuo non secuerint, id quòd aliquando, ubi in circulo ductæ rectæ lineæ parallelę sunt, accidere poterit, quia tum ad rectos ductę coincidunt, atq; simul una recta linea sunt, ea bifariam diuidenda, per punctum deinde hoc, centrum quæsiti circuli exprimendum erit.



APPENDIX.

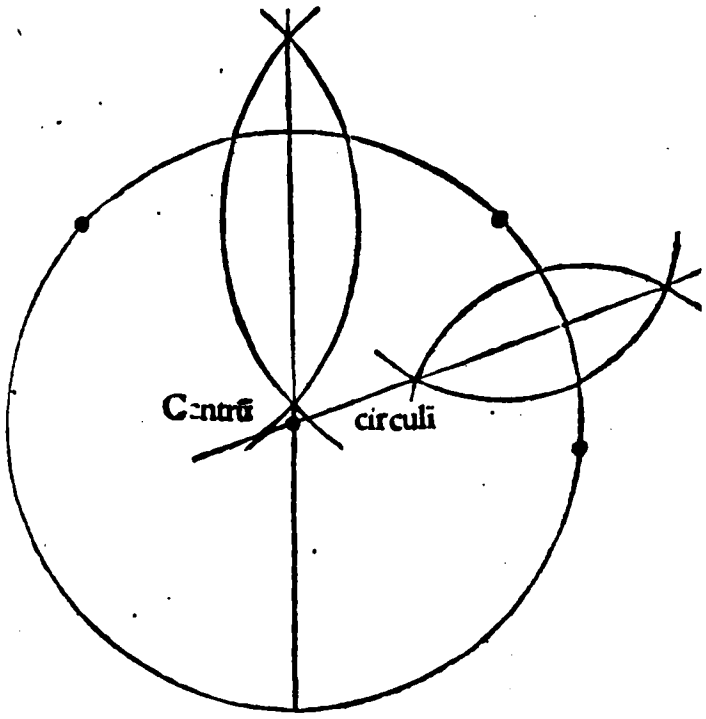
Vtuntur hac propositione, qui centrũ trium punctorum, cum opus sit, quærere, hoc est circulum, per data tria puncta transeuntem, describere solent. Nam cum circulus per data puncta transire debeat, sectionem quandam circuli per puncta data occultè ductam sibi imaginantur. Quòd deinde ex tribus illis punctis (uno ta



men bis repetito) tanquam ex tribus centris, officio circini, ultra medietatem spacij, per quod arcus describi debet, semper extensi, quatuor circulorum arcus describebant, ita ut semper bini & bini sese mutuo secent, per puncta tandem inter sectionum duas rectas uersus unam & eandem partem ducãt, nihil certè aliud est, quàm dicta puncta duabus rectis coniungere, à media deinde harum, ad angulos rectos lineas excitare. Id quod cuilibet, propositionẽ 11 primi altius intuenti, perspicuum erit. Atq; huius hoc loco Lectorem admonere uoluimus.

SEQVITVR HVIVS TRACTATIONIS PRO CENtro trium punctorum inueniendo figura geometrica alia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ



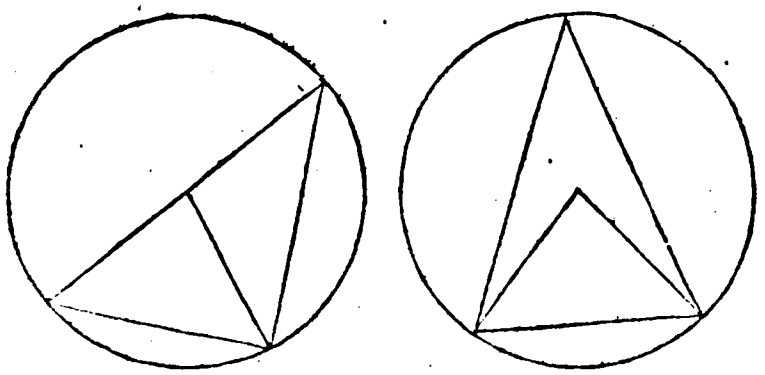
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κϛ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι τῶν ἴσων πρὸς τοῖς κέντροις, ἴσαι ἀλλήλαις βεβήκασι, καὶ πρὸς ταῖς περιφερείαις ὧσι βεβηκυῖαι.

PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli in æqualibus circũferentijs ſubtenduntur, ſiue ad centra, ſeu ad circumferentias deducti fuerint.

Deſcribantur æquales circuli, quod nimirum una circini expanſione fieri debet, in ijs etiam, tam ad centra quàm ad ipſas circumferentias, æquales anguli, in uno quidem primò ad placitũ illis deſcriptis, in altero uerò uel alijs, ſi plures quàm duo circuli fuerint, uno cuiuſcũq; anguli latere ducto, per propoſitionem in primo 23 deſcribendi ſunt: dico igitur, quod illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias poſiti, ſubtenſos arcus æquales habeant. Quoniã enim angulus ad centrum unius eſt æqualis, ex hypotheſi, angulo, ſimiliter ad centrum poſito, circuli alterius, & rurſus quoniam à centris ad circumferentias lineæ rectæ ductæ, propter æquales ex



hypotheſi circulos, inter ſe æquales ſunt, in ſingulis tertio latere ducto: & hæc tertia latera

tia latera per propoſitionem 4 primi, circumferentię deinde uel circulorum ſectiones, propterea quòd angulos, ex hypotheſi, inter ſe æquales ſuſcipiant, per definitionem ſimilium ſectionum, & propoſitionem 24 huius, inter ſe æquales erunt. Subtractis igitur nunc æqualibus arcubus ab æqualibus circulis, cum & reſidui arcus, à quibus ſcilicet æquales in æqualibus circulis anguli ſubtenduntur, ex communi quadam noticia inter ſe æquales ſint, propoſitioni ſatisfactum erit. Aequales igitur anguli in æqualibus circulis, ab æqualibus circumferentijs ſubtenduntur, ſiue ad centra, ſeu ad circumferentias deducti fuerint. quod demonſtraſſe oportuit.

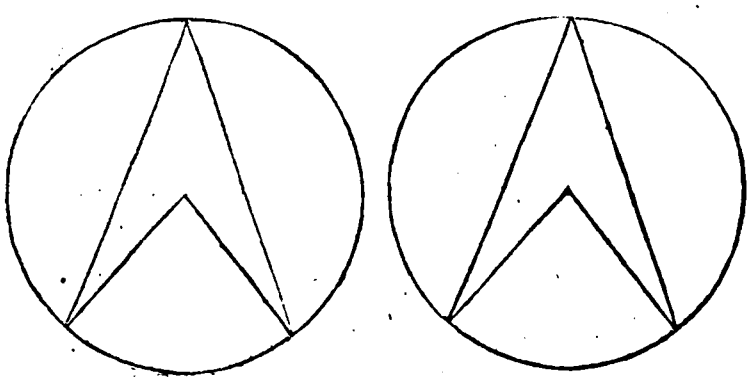
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ὑπὸ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

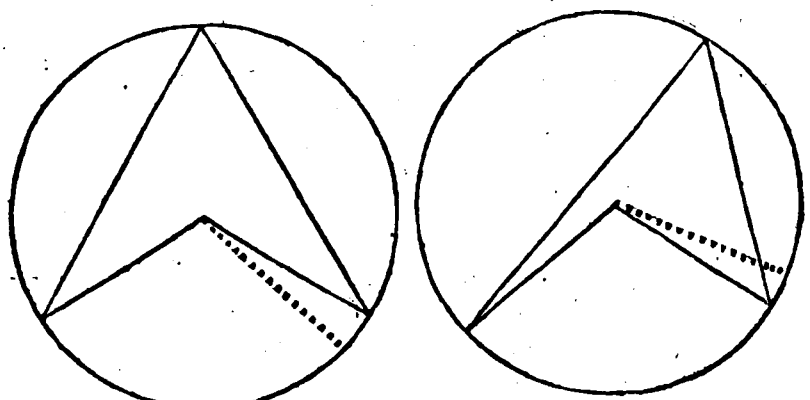
PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis, qui ſuper æquales circumferentias deducuntur anguli, æquales inter ſe ſunt, ſiue ad centra, ſeu ad circumferentias deducti fuerint.

Deſcribantur æquales circuli, ponantur etiam in iſs ſuper æquales circumferentias anguli: dico igitur, quòd illi anguli, tam ad centra quàm ad circumferentias poſiti, inter ſe æquales ſint. Quoniam enim qui ad centra ponuntur anguli, ſunt aut



inter ſe æquales, aut non. Si æquales: & qui ad circumferentias ponuntur anguli, cum hi, ex propoſitione 20 huius, ſint ad centrum poſitis dimidia, inter ſe æquales erunt, quod eſt propoſitum. Quòd ſi fuerint inæquales, ſuccurratur uni ex his, per 23 primi, ſiue maiori ſiue minori angulo, ut alteri æqualis fiat, quo facto, & illorum æqualium angulorum circumferentiæ uel arcus ſubtendentes, per præmiſſam, in-



ter ſe æquales erunt. Sed quia uni illorum æqualis etiam eſt, ex hypotheſi, mutati

anguli ſubtendens. per hanc igitur communem noticiam, Quæ eidem ſunt æqualia & reli. infertur tandem, partialem totali ſubtendenti circumferentiæ æqualem eſſe, quod eſt impoſſibile. Inæquales igitur non ſunt ad centrum poſiti anguli, ſed æquales. Et quia æquales: etiam ad circumferentias poſiti cum ſint horum dimidij, ut dictum eſt, inter ſe æquales erunt. Aequales igitur circumferentiæ uel arcus, in æqualibus circulis, æquales angulos ſubtendunt, ſiue ad centrum, ſiue ad circumferentias poſiti fuerint, quod demonſtraſſe oportuit.

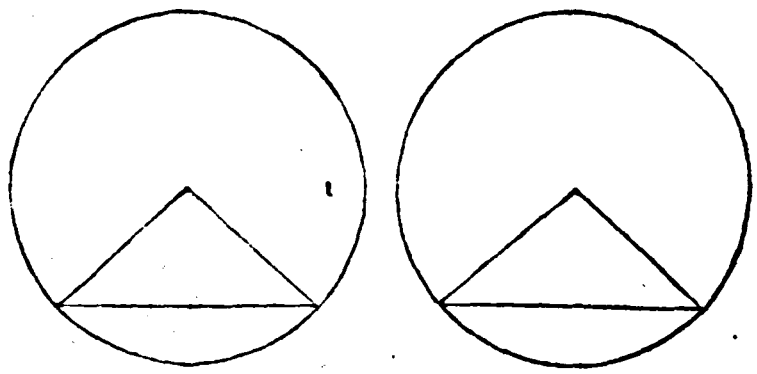
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineę, æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori.

Deſcribantur æquales circuli, in ijs etiam æquales rectæ ducantur: dico igitur, per illas rectas æquales etiam in circulis auferri circumferentias, maiorem ſcilicet maiori, & minorem circumferentiæ minori. Nam ductis ab extremitatibus rectarum ad centra rectis lineis, cũ circuli ex hypotheſi ſint inter ſe æquales, & hæ rectæ



ductæ ex definitione æqualium circulorum, inter ſe æquales erunt. Quare & anguli ad centrum poſiti per propoſitionem 8 primi, æquales, atq; inſuper arcus uel circumferentiæ, quæ hos æquales angulos ſubtendunt, per 26 huius, æquales, quod eſt unum. Porrò quia circuli ex hypotheſi ſunt æquales, ab his igitur ſi æquales circumferentiæ ablatę fuerint, & quę relinquuntur circumferentię, ex communi quadam noticia, inter ſe æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, æquales rectę lineę æquales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem uerò minori: quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

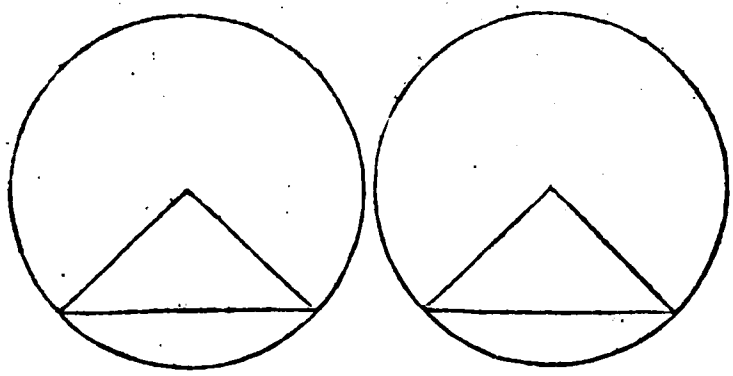
PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, ſub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ ſubtenduntur.

Vt præcedens 28, per æquales rectas in æqualibus circulis ductas, æquales circumferentias auferri aſſerit: ſic quoq; hæc uiceſima nona, ubi in æqualibus circulis per lineas quaſdam rectas, æquales circũferentię ablatæ fuerint, illas rectas æquales eſſe infert. Deſcribantur igitur æquales circuli, in ijs etiam æquales ſumantur circumferentiæ: dico igitur, & illarum æqualium circumferentiarum rectæ ſub-

tenſæ

tenſæ inter ſe æquales ſint. Ducantur ab extremitatibus ſubtenſarum ad centra rectæ lineæ. Et quoniam hæ rectæ ductæ, propter æqualitatem circulorum ex hy-



potheſi, ex definitione prima huius, inter ſe æquales ſunt, anguli inſuper ad centra, ſub illis æqualibus ductis comprehenſi ex 27 huius, æquales: & lineę his æqualibus angulis ſubtenſæ, quæ etiam ſub circumferentijs æqualibus ſubtenduntur, per propoſitionem 4 primi, inter ſe æquales erunt. In circulis igitur æqualibus, ſub æqualibus circumferentijs æquales rectæ lineæ ſubtenduntur. quod demonſtraſſe oportuit.

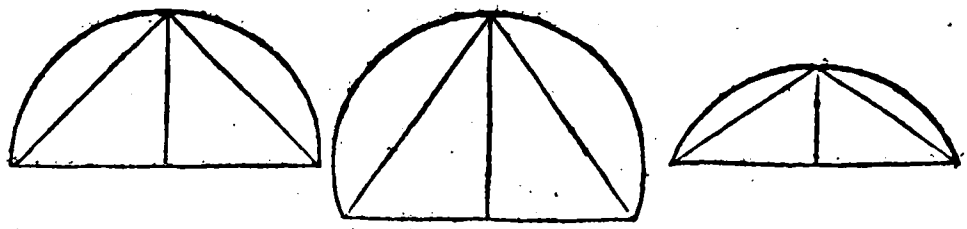
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Λ.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν, δίχα τεμεῖν.

PROPOSITIO XXX.

Datam circumferentiam, bifariam ſecare.

Sit circumferentia data, atq; propoſitum eam bifariam ſecare. Datæ igitur circũferentiæ extremitates recta quadam linea coniungantur, hac deinde recta bifariam diuiſa, à puncto diuiſionis ad rectos angulos linea uerſus circumferentiam excitetur: & erit hæc, ipſa quæ circumferentiam bifariam ſecabit, quod ſic demon-



ſtratur. Ducantur à ſectionis puncto in circumferentia ad eius extremitates duæ rectę lineę. Et quoniã hæ duæ rectę, ex propoſitione 4 primi, inter ſe æquales ſunt, & rurſus quoniam in circulis æqualibus æquales rectæ lineæ, per propoſitionem 28 huius, circumferentias æquales auferunt, maiorem maiori, & minorem minori: cum quod de circulis æqualibus, illud ipſum etiam de uno & eodem dici poſſe & uerùm eſſe cõſtet, demonſtratio abſoluta erit. Data igitur circumferentia bifariam diuiſa eſt. quod feciſſe oportuit.

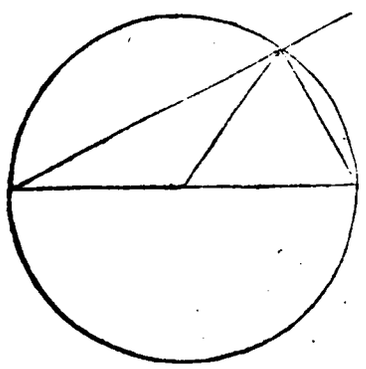
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς. ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. Καὶ ἔτι, ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

PROPOSITIO XXXI.

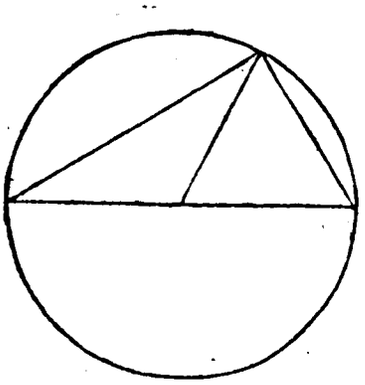
In circulo, angulus qui in ſemicirculo eſt: rectus eſt, qui uerò in maiori ſegmento: minor recto, qui autem in minori ſegmento: maior eſt recto. Et inſuper, angulus maioris ſegmẽti: rectò quidem maior, minoris uerò ſegmenti angulus: minor eſt recto.

Habet hæc propoſitio quinq; partes, puta quòd in ſemicirculo angulus: rectus ſit, in maiori ſegmento quàm eſt ſemicirculus: minor recto, in minori autem: maior recto. Præterea ſegmentorum angulos, ſemicirculo quidem maioris: recto minorem, quod uerò eſt ſegmentum ſemicirculo minus: eius angulum recto maiorem eſſe oporteat. Hæc nũc ſingula ordine ſic demõſtrari poſſunt. Deſcribatur circulus cum ſua diametro, ducãtur etiam à diametri extremitatibus ad punctum aliquod, in circumferentia ubiuis ſumptum, duæ rectę lineę: dico, has duas rectas angulum rectum continere. quod quidem, ſi altera ductarum ultra circumferentiam ſecundum continuationem in rectum eiecta, ex hoc ipſo angulo deinde recta quædam linea ad centrum ducta fuerit, ſic demonſtrari poterit. Quoniam enim totalis in circulo trianguli unum latus ulterius productum eſt: externus qui ſic deſcribitur angulus, duob. internis oppoſitis, ex propoſitione 32 primi ęqualis erit. Sed quia his internis, ex definitione circuli & priore parte propoſitionis quintę primi, bis uſurpatis, æqualis etiam eſt angulus, quem duę in ſemicirculo rectę lineę includunt: eidem igitur in ſemicirculo angulo dictus externus ęqualis erit. quare, ex definitione 10 primi, uterq; rectus. In ſemicirculo igitur angulus, rectus eſt. quod demonſtraſſe oportuit.



POTEST HOC IDEM ETIAM ALITER DEMONSTRARI in hunc modum.

Ducta ab angulo in ſemicirculo ad centrum recta linea, cum partialium angulorum uterque, uni totalis trianguli angulo, ex definitione circuli & priore parte propoſitionis quintæ primi, ſit æqualis, atq; hac ratione & communi illa notitia, Si ęqualibus æqualia adijciantur, &c. idem totalis duobus in triangulo reliquis æqualis: utrunque æqualium, reſpectu totalis trianguli, ex corollario propoſitionis 32 primi, duorum rectorum medietas, atq; tandem utrunque per ſe uni recto æqualis erit. id quod demonſtraſſe oportuit.



Αλλη ἀπόδειξις τοῦ ὁρθὴν εἶναι τὴν ἐν ἡμικυκλίῳ γωνίαν.

Alia demonſtratio iſtius quod in propoſitione dicitur, Angulum in ſemicirculo rectum eſſe.

Cum ex propoſitione 32 primi, Omnis trianguli uno latere ulterius producto, externus angulus duobus internis oppoſitis ęqualis ſit, cumq; etiã ex priore parte propoſi-

propoſitionis 5 primi, iſoſceliũ triangulorũ qui ad baſim ſunt anguli interſe æquales ſint, hac & illa bis uſurpata: qui ad centrũ ſunt anguli, uterq; ad alterius trianguli angul, ũin circumferentia exiſtentem, duplus erit. Sed quia ad centrum poſiti anguli, ex propoſitione 13 primi, duobus rectis ſunt æquales: eorum medietas igitur, ut eſt in ſemicirculo angulus, duorum rectorum medietati, hoc eſt uni recto, æqualis erit. Hinc colligitur

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶ ταῖς ἴση ᾖ· ὀρθὴ ἔστι, καὶ ἡ λοιπὴ τῆς ἐκείνης ἀφεξῆς τοῖς αὐτοῖς ἴσοις ἔσται. Ὅταν δὲ αἱ ἀφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν· ὀρθαί εἰσιν.

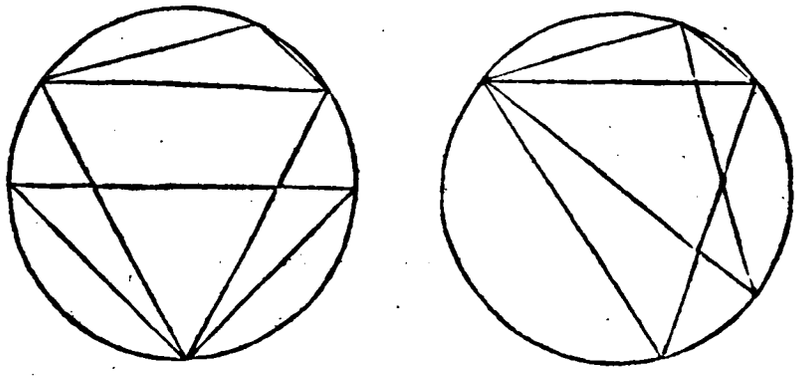
COROLLARIVM.

Ex hoc ſanè manifeſtum. Quando trianguli unus angulus duobus, reliquis ſcilicet, æqualis fuerit: illum rectum eſſe.

Propterea quod ille deinceps ſe habens, eiſdem duobus reliquis æqualis ſit. Quando autem deinceps ſe habentes, anguli æquales fuerint: recti erunt ambo.

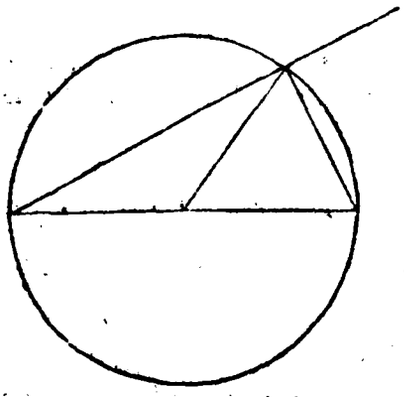
Nunc quantum ad ſecundam ac tertiam propoſitionis partem.

Deſcribatur circulus, ducatur in eo etiam recta quædam linea, non per centrum tranſiens, puncto deinde in utriuſque ſegmenti circumferentia ſumpto, ad utrunq; eorum duæ ab extremitatibus ductæ rectæ ducantur lineæ: dico igitur, eum angulum qui eſt in maiori ſegmento, recto minorem: illum uerò qui eſt in ſegmento minori, recto maiorem eſſe. Ducatur in circulo diameter, quomodocunq;, ad huius



extremitates deinde ab angulo, qui quòd talis ſit qualis proponitur, demonſtrari debet, duæ rectę lineę, uel una tantum ſi ſuffecerit. Et quoniam angulus in ſemicirculo, per primam partem propoſitionis huius, rectus eſt, cum angulus qui eſt in maiori ſegmento, ſit recti anguli pars, contrà uerò, anguli illius qui eſt in minori ſegmento, ipſe angulus rectus pars: qui igitur in maiori ſegmẽto fuerit angulus, ut pars, recto minor, in minori uerò, ut totum, recto angulo maior erit. Vel, probato uno, quòd aut in ſegmento maiori angulus, recto minor ſit: aut alter, recto maior, cũ Omnis quadrilateri, in circulo deſcripti, anguli ex oppoſito, per propoſitionem 22 huius, duobus ſint rectis æquales: ſtatim tandem & alterum inferri poteſt Quarto igitur iam, quòd in propoſitione dicitur, angulum maioris ſegmenti, recto maiorem: ac ultimò tandem, minoris ſegmenti, recto minorem eſſe, ſic demonſtretur. Deſcripto circulo, in eo etiam præter centrum recta quadam linea ducta: dico, &c. Ducatur in circulo diameter ſic, ut eius una extremitas uni ductæ extremitati coputetur, altera deinde ductæ cum altera extremitate diametri recta quadam alia iun-

ct, ubi hæc eadem recta ultra circumferentiam cõtinuata fuerit, demonſtrationis figura parata erit. Et quoniam maioris ſegmenti angulus, ut apparet, eo angulo qui ex prima parte propoſitionis huius, rectus eſt, maior exiſtit, angulorum porrò in hac figura deinceps ſe habentiũ uterq;, ex corollario præmiſſo rectus eſt: qui igitur maioris ſegmenti eſt angulus, ut totum, recto maior: contrà, qui minoris, ut pars, angulo recto minor erit. In circulo igitur qui quidem, & reliqua, quod demonſtraſſe oportuit.



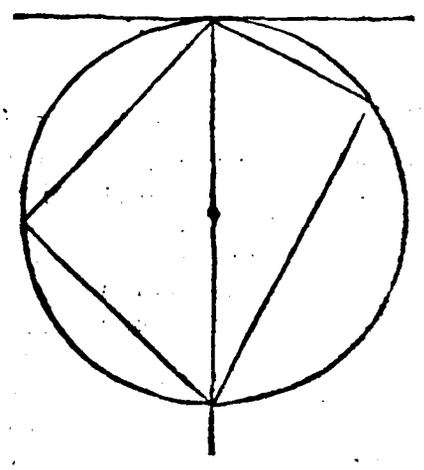
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

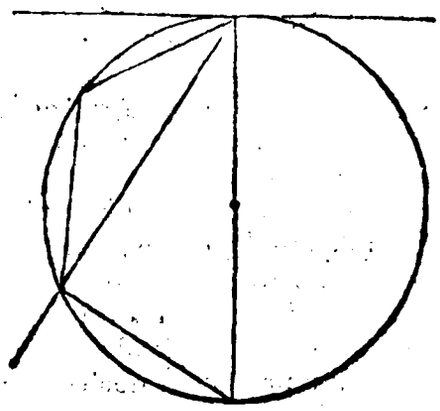
Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον· αἱ ποιοῦσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

PROPOSITIO XXXII.

Si circulum tetigerit recta quædam linea, à contactu uerò extendatur quædam recta linea circulum ſecans: anguli quos facit ad cõtingentem, æquales erunt iis, qui alternatim in circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

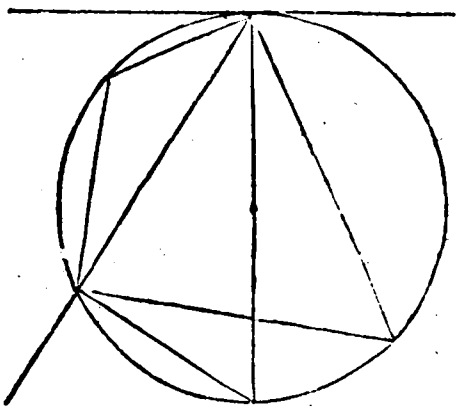
Deſcribatur circulus, ducantur etiam duæ rectæ lineæ, quarum una circulum tangat, altera uerò à puncto contactus, per circulum tranſiens, eum ſecet: & erit circulus per ſecantem quidem in duo ſegmenta diuiſus. Statuatur nunc in utroq; ſegmento angulus, per binas & binas rectas lineas ductas. His itaque deſcriptis: dico, quòd à ſecante & contingente circulum uterq; comprehenſus angulus, ei, qui ex altera parte in ſegmento ponitur, æqualis ſit. Poteſt in deſcriptione figurę, uel quæ per circulum extenditur, uel illa quæ in uno ſegmento angulum conſtituit recta linea, uel neutra harum per centrum circuli tranſire. Quantum ad primum, Cum in ſegmentis angulorum uterq;, ex prima parte propoſitionis 31, rectus ſit, cumq;





etiam ipſa ſecans ad tangentem, ex 18, ſit perpendicularis, atque ita uterq; angulorum qui ſic fiunt, rectus: illis mediantibus, per communem illam noticiam, qua omnes recti anguli æquales inter ſe ſunt, propoſitioni tandem ſatisfactum erit. Quantum

tum ad ſecundum. Cum triangulum appareat, cuius in ſemicirculo angulus ex prima parte propoſitionis 31 huius, rectus eſt, cumq; etiam Omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propoſitionis 32 primi, duobus rectis æquales ſint: reliqui duo eiuſdem trianguli anguli, uni recto æquales erunt. Sed quia unus, rectus etiam eſt ex 18 huius, angulus quem nimirum ex eadem parte contingens ac per centrum tranſiens recta linea comprehendunt: per hanc communem noticiam, Quæ uni ſunt æqualia, &c. illi duo uni huic angulo æquales erunt: communi igitur illo angulo quem habent, ablato, quantum ad unum angulum iam propoſitio conſtabit. De reliquo tandem, cum tam quadrilaterorum in circulis anguli, qui ex oppoſito ſunt, ex 22 huius, quàm etiam qui à contingente & per centrum tranſeunte recta linea cõprehenduntur, ex propoſitione 13 primi, duobus rectis æquales ſint: ex communi quadam noticia, duo priores poſterioribus duobus angulis æquales erunt. ab æqualibus igitur his, angulis qui iamdudum æquales inter ſe eſſe demonſtrati ſunt, ſubtractis: & de altero iam angulo, quod ille ex altera parte in ſegmento poſito angulo æqualis ſit, dubium amplius non erit. Quantum ad tertium, ubi ſcilicet neutra rectarum, neque circulum ſecans, neq; etiam illa quę in ſegmento angulum conſtituit, per centrum circuli tranſeat. Quòd ſi hoc modo figura deſcripta fuerit, tum à puncto contactus, per 11 primi, ipſi tangenti ad rectos angulos linea excitanda eſt. Erit autem hæc, cum ex propoſitione 19 huius, centrum circuli contineat, diameter circuli. Coniungatur porrò diametri altera extremitas cũ extremitate ſecãtis. Et quia angulus qui ſic deſcribitur, eo quòd in ſemicirculo exiſtat, rectus eſt: reliqui duo in hoc triangulo anguli, uni recto æquales erunt.



Sed quia angulus etiam ad contactum totalis ex illa parte, ratione ad rectos angulos excitatę lineæ, eſt rectus: idem totalis prioribus duobus æqualis erit. Subtracto igitur ab illis æqualibus angulo quodam illis communi, cum in omni circulo qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe æquales ſint, de eo qui nimirum in illa parte ſub tangente & ſecante comprehenditur angulo, quòd ille ex altera parte in ſegmento angulo æqualis ſit, tandem conſtabit. De altero nunc angulo nullum erit dubium, quin & ipſe in altero ſegmẽto angulo æqualis ſit. Nam cum quadrilaterum in circulo deſcriptũ, duos angulos oppoſitos duobus rectis ęquales habeat, cumq; inſuper illi, qui à tangente & ſecante circulum comprehenduntur anguli, duobus rectis æquales ſint, per cõmunem illam noticiam, Eidem æqualia &c. illis duobus in quadrilatero angulis, quos ſecans cum contingente facit, duo anguli æquales erunt. Quia aũt unus, ut iam oſtenſum, eſt uni ęqualis: & alter tandem, per ſubtractionem æqualium ab æqualibus, alteri angulo æqualis erit. Si circulum igitur tetigerit recta quædam linea, à contactu, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Εἰ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

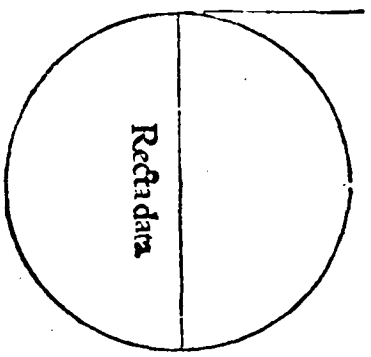
PROPOSITIO XXXIII.

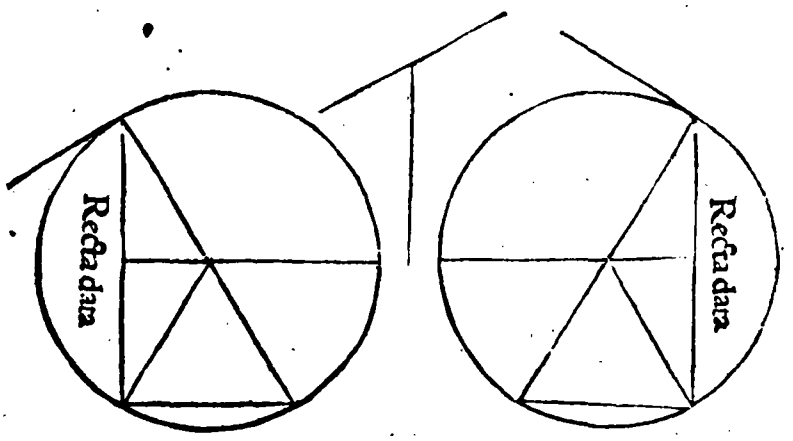
Super data recta linea deſcribere ſectionem circuli, capientem angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Requirit

Requirit hæc propoſitio rectam lineam datam, angulum item rectilíneum datum, proponit autẽ, quomodo ſuper data recta ſectio, quæ dato rectilíneo angulo ęqualem angulum capiat, deſcríbatur. Angulus datus poteſt eſſe rectus, aut non rectus. Si rectus, data recta bifariam diuidenda, ſuper ea deinde ex puncto diuiſionis ſemicirculus deſcribendus eſt, & factum erit propoſitum: id quod ex prima parte propoſitionis 31 huius demonſtrari poterit. ALITER. Si rectus fuerit angulus propoſitus, conſtituatur ad alterutram rectæ datæ extremitatem, atq; ad ipſam rectam lineam, per 23 primi, angulus, dato angulo ęqualis, recta deinde bifariam diuiſa, ex puncto hoc, ſecundum alteram eius medietatem deſcribatur circulus. Et quoniam angulus quem applicata ad rectam datam conſtituit, ex ſtructura, rectus eſt: rectę datæ applicata circulũ illum, ex corollario propoſitionis 16 huius, tanget. Et quoniam etiam, ut habet propoſitio præcedens, angulus quem hę duę rectę comprehendunt, in ſegmento angulo ex aduerſa parte eſt ęqualis, illo igitur deſcripto, cũ ex cõmuni quadã noticia, Eidem æqualia, illa & inter ſe æqualia ſint: de recto iam angulo conſtat propoſitũ. Quòd ſi angulus datus nõ fuerit rectus, erit is maior illo, aut minor. utrum horum fuerit, ad rectam datam & ad alteram eius extremitatem, angulus dato æqualis, per 23 primi, rectæ cuiuſdam lineę ductu conſtituatur. Recta deinde data bifariam diuiſa, tam ex hoc diuiſionis puncto ipſi datæ, quàm etiam ex modò uſurpata datæ extremitate ipſi ductę, ad angulos rectos linea excitetur: & erit communis

Angulus datus, rectus.





harum ad rectos ductarum ſectio, centrum futuri circuli. quod in hunc modum demonſtrabitur. Ducatur ab hoc centro ad alteram datę extremitatem recta quædam linea. Et quoniam hæc, ex ſtructura & propoſitione 4 primi, lineę ei, quę ipſi ductę ad rectos angulos inſiſtit, ęqualis eſt: circulus igitur ex cẽtro poſito, ad unius æqualium interuallum, per 3 poſtulatum primi, deſcriptus, per terminum etiam alterius æqualis tranſibit. Deſcríbatur ergo is, altera etiam ſemidiametro, illa nimirum, quæ ab angulo, dato æquali, ducta eſt, in diametrum continuata, eius in circumferentia extremitas cum altera datæ extremitate iungatur. Et quoniam hæc recta, quæ cum data angulum dato æqualem comprehendit, propterea quòd ab extremitate diametri ad rectos angulos egrediatur, ex priore parte corollarij propoſitionis 16 huius, ipſum deſcriptum circulum tangit, cum angulus ſegmenti, quod ex altera parte ſuper data recta deſcriptum eſt, angulo, ad contingentem, dato æquali

to æquali deſcripto, ex 32 huius æqualis ſit: ſuper data igitur recta ſectio, angulo dato æqualem capiens angulum, deſcripta eſt, quod fieri oportuit.

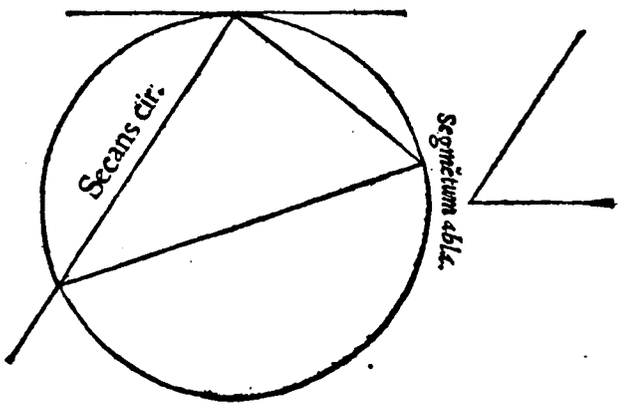
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

PROPOSITIO XXXIIII.

A' dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit circulus datus, angulus item rectilineus datus, atq; propoſitum, à circulo portionem, quæ capiat angulum dato æqualem, abſcindere. Ducatur primò per 17. huius, recta quędam linea circulum tangens, à puncto deinde contactus, per 23



primi, alia recta circulum ſecans, quæ cum tangente angulum dato æqualem faciat, ducatur, & propoſitioni ſatisfactum erit, cum per hanc ipſam ſecantem huiuſmodi ſectio de circulo nunc ſit abſciſſa. Puncto igitur in circumferentia, huic angulo oppoſita, ubiuis ſumpto, ſi ab eo duæ rectæ lineæ ad extremitates circulum ſecantis ductæ fuerint, quem hæ rectæ angulum incluſerint, dato rectilineo angulo æqualem eſſe, propoſitio huius 32, & communis illa noticia, Quæ eidem ſunt æqualia & reliqua, commonſtrabunt. A' dato igitur circulo ſegmentum, quod angulum dato rectilineo angulo æqualem capiat, abſciſſum eſt, quod fieri oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

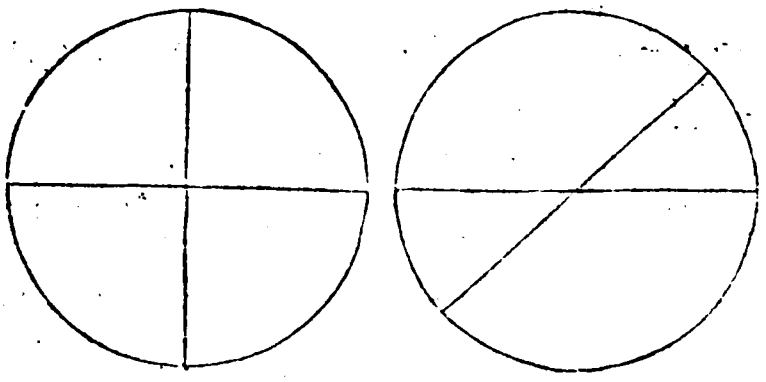
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας· τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO XXXV.

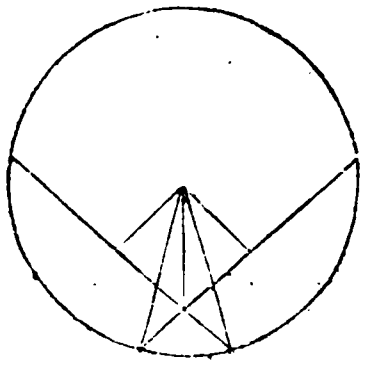
Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: quod ſub ſectionibus unius comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulo.

Deſcribatur circulus, in quo etiam duæ rectæ lineæ, ſeſe mutuo ſecantes, ducantur: dico, rectangulum comprehenſum ſub partibus unius, æquale eſſe ei, quod ſub alterius rectæ partibus continetur, rectangulo. Rectarum in circulo ductarum

rum ſectio ſit, aut in ipſo circuli centro, aut extra. Fiat igitur primò in circuli centro. Et quoniam quæ ex centro ad circumferentiam egrediuntur rectę lineę, ex de-



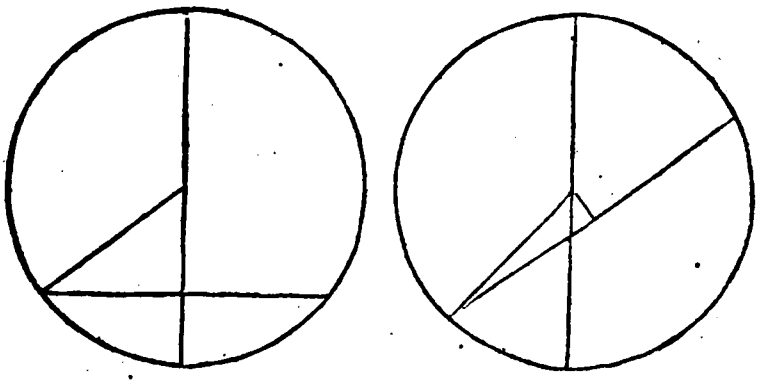
finitione circuli, inter ſe æquales ſunt, cum ſub æqualibus lineis, æqualia rectangula contineri manifeſtum ſit: & quæ ſub ſectionibus in circulo ſecantium linearum rectangula comprehenduntur, inter ſe æqualia erunt. Quòd ſi extra centrum, in circulo ductæ ſeſe mutuo ſecent, tum ad utramque ſecantem ab ipſo circuli centro, tanquam à puncto in linea minimè exiſtente, per propoſitionem 12 primi, perpendicularis linea ducenda, centrum deinde cum interſectione ſecantium communi, atq; alterutra utriuſq; ſecantis extremitate, tribus rectis lineis coniungendum erit, & demonſtratio ſic colligenda. Quoniam utraq; ſecantium per ſuam perpendicularem lineam, iam quidem bifariam ſeu æqualiter, ex ſecunda parte propoſitionis tertiæ huius, diuiſa eſt, cum prius per punctum interſectionis communis inęqualiter etiam diuiſæ ſint, rectangulorum ſub inæqualis ſectionis portionibus comprehenſorum utrunq;, unà cũ quadrato portionis intercepte, per propoſitionem quintam ſecũdi bis uiurpatam (ſunt enim duæ ſecantes) quadrato medietatis æquale erit, atq; communi deinde, quod ſcilicet à perpendiculari ſecantis utriuſq; deſcribitur, quadrato adiecto: rectangulorum utrunq; cum duobus quadratis, interceptæ ſcilicet portionis uno, & perpendicularis ſuæ altero, duobus quadratis, quę nimirum à dimidio linea & perpendiculari deſcribuntur, æquale erit. Quia uerò in triangulis rectangulis id quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum, reliquorum duorum laterum quadratis per penultimam propoſitionem primi, æquale eſt, hac ipſa propoſitione bis uſurpata: utrunq; rectangulum cum quadrato lineę, à centro ad interſectionem ſecantium ductæ, quadrato ſemidiametri ęquale erit. Semidiametri autem unius circuli, cum ſint inter ſe æquales, atque hinc etiam earundem quadrata æqualia: ipſa inſuper rectangula cum ſuis quadratis, uel cum quadrato eo quod commune habent, inter ſe ęqualia erunt. Illo igitur communi iam ablato: & ipſa rectangula ſola, quæ ſub ſecantium ſegmentis comprehenduntur, inter ſe æqualia erunt. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: quod ſub ſectionibus unius comprehenditur rectangulum, æquum eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulo. quod demonſtraſſe oportuit.



APPENDIX.

Facta autem eſt mentio duarum perpendiculariũ, trium deinde linearum aliarũ, quę pro huius propoſitionis ſtructura ducẽdę ſunt. Quòd ſi uerò, ratione quidem ductarum

ductarum in circulo, una uel plures duci non possint, reliquis tamẽ ductis, demonstratio ut prius, non tamen tam sæpe singula repetendo succedet. Huius autem rei exempla sunt, ut sequitur.



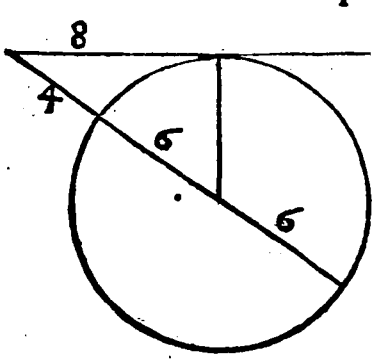
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΣ.

Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

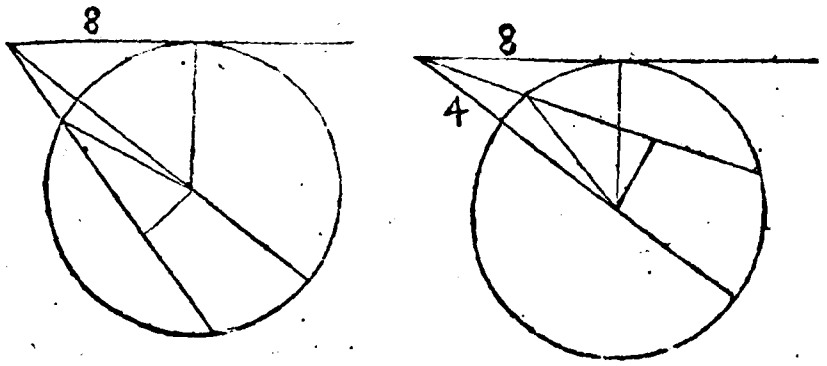
PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulũ secet, altera uerò tangat: erit quod sub tota secante, & exterius, inter punctum & conuexam circumferentiam, sumpta comprehenditur, ei quod à tangente describitur quadrato, æquale.

Describatur circulus, ducantur etiam à puncto, extra circulum sumpto, duæ rectæ lineę, una quidem circulum secans, altera uerò, per propositionem 17 huius, eum tangens: dico, rectangulum sub tota secante & eius externa portione comprehensum, æquale esse quadrato contingentis, quod in hunc modum demonstrabitur. Aut enim circulum secans per centrum transierit, aut non. Si transierit, ducatur à contactu ad centrum recta quædam linea. Et quoniam linea, ut est diameter circuli uel secantis rectæ interna portio, bifariam diuisa est, eiq; alia quædam recta linea, externa nimirum eiusdem secãtis portio, in rectum adiecta est: comprehensum sub tota secante & externa portione rectangulum cum quadrato medietatis diuisæ, quadrato eius, quæ ex dimidia atq; adiecta constituitur, lineę, per propositionem 6 secundi, æquale est. Et quoniã etiam quæ ex dimidia & adiecta constituitur linea, ei in triangulo angulo, qui ex 18 huius rectus est, subtẽditur, atq; hinc ab ea descriptum quadratum, eis quę à reliquis duobus trianguli lateribus describũtur quadratis, ex propositione penultima primi æqualeı æqualium iam mutatione facta, loco unius scilicet lateris quadrati, duorum, contingentis scilicet, & eius quæ à contactu ad centrũ ducta est, quadratis sumptis: & rectangulũ cum dicto quadrato, eis quę à reli-



quis duobus lateribus deſcribuntur, æquale erit æqualibus igitur quadratis, quæ nimirum à lineis, ex definitione circuli, æqualibus deſcripta ſunt, ab his æqualibus ſubtractis, relinquitur tandem, ſub tota ſecante & externa portione comprehẽſum rectangulum, ei quod à contingente deſcribitur quadrato æquale eſſe, quod erat obtinendum. Quòd ſi circulum ſecans per centrum non tranſierit, tum ab eodem extra circulum ſumpto puncto, recta linea circulum ſecans alia, quę per centrum tranſeat, ducenda eſt. Et quia de hac nullum eſt amplius dubium, quin ſub tota illa



& parte ſua exteriori comprehenſum rectangulum, lineæ contingentis quadratò æquale ſit, duabus à centro rectis lineis ductis, una quidem quæ priori ſecanti perpendicularis ſit, altera uerò ad eiuſdem prioris ſecantis cum circulo interſectionem tendens: & de illa, quæ per centrum non tranſierit ſecante linea, cum per ſuam ad rectos ductam lineam, ex ſecunda parte propoſitionis 3 huius, bifariam diuiſa ſit, ex propoſitionibus ſexta ſecundi & penultima primi, interim tamen communi quodam, ad rectos ſcilicet ductæ quadrato, addito, æqualibus item ab æqualibus ſubtractis, nemo dubitabit. Si extra circulum igitur ſumatur aliquod punctum, ab eoq; in circulum cadant duę rectæ lineæ, quarum una quidem circulum ſecet, & reli. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπ' αὐτοῦ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἡ δὲ ἐντὸς τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

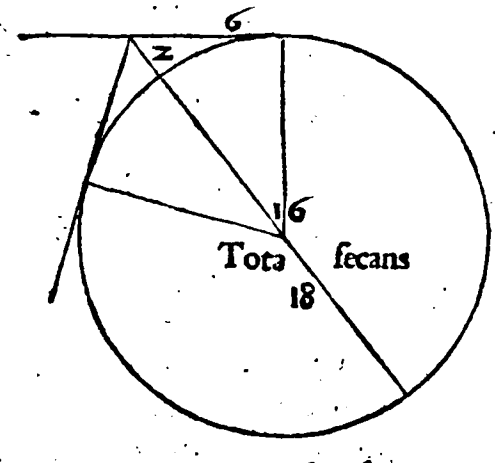
PROPOSITIO XXXVII.

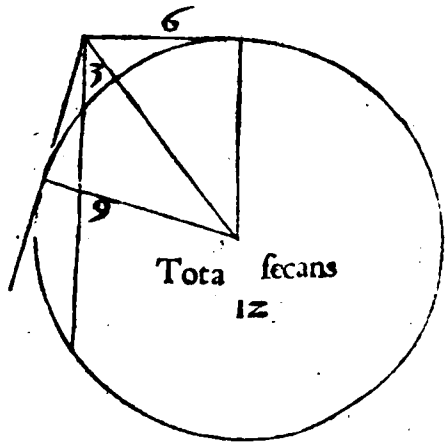
Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, à puncto uerò in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum una quidem circulum ſecet, altera uerò incidat, quod item ſub tota ſecante, & exterius inter punctũ & conuexam circumferentiam ſumpta, comprehenditur, æquale ſit ei, quod à cadente deſcribitur: cadens ipſa circulum tanget.

Deſcribatur circulus, ducantur etiam à puncto extra circulum ſumpto, in ipſum circulum, duæ rectę lineę, una quidem circulum ſecans, altera uerò quæ in ipſum tantùm cadat. Eſto autem quòd rectangulum, ſub tota ſecante & eius externa portione comprehenſum, æquale ſit quadrato in circulum cadentis lineæ: dico igitur, ipſam cadentem rectam circulum tangere. Ducatur à puncto extra circulum ſumpto, per 17 huius, linea circulum cõtingens, à centro deinde circuli ad tria puncta,

quæ

quæ ſunt punctum contactus, id quod extra circulum ſumptum eſt, & tertium deinde, ea cadentis extremitas qua cum in circulum cadit, tres rectæ lineæ ducantur. Et quoniam circulum tangentis quadratum, rectangulo, ſub tota ſecãte & eius





externa portione comprehenſo, ex propoſitione prȩcedenti ȩquale eſt, cum eidem rectangulo, ex propoſito, æquale etiam ſit quadratum lineę in circulum cadentis: cadens in circulum linea, & eum tangens, cum æqualia quadrata ab eis deſcribantur, lineę inter ſe æquales erunt. Præterea, quoniam etiam in circulo ex centro uſq; ad ipſam circumferentiam continuatę rectæ lineę, inter ſe ſunt æquales, cum iam duo appareant triangula, quorum duo latera unius duobus lateribus alterius ȩqualia ſint, baſes etiam eorum, cum ſit una & eadem linea illis communis, ȩquales: & angulus inter æqualia latera in uno, angulo, inter æqualia latera in altero triangulo, per propoſitionem 8 primi, ȩqualis erit. Sed quia unus eorum, ex 18 huius, eſt rectus: & alter ſic, propter æqualitatem, rectus erit. In circulum igitur cadens, hypotheſibus illis mediantibus, eum etiam tangere, ex priore parte corollarij propoſitionis 16 huius concluditur. Si extra circulum igitur punctum aliquod ſumatur, à puncto etiam in circulum cadant duæ rectę lineę, quarum una quidem circulum ſecet, altera uerò eum tangat, quod item ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexum circumferentiæ ſumpta portione comprehenditur, æquale ſit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato: cadens recta linea circulum tanget, quod demonſtraſſe oportuit.

FINIS LIBRI TERTII.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber quartus.

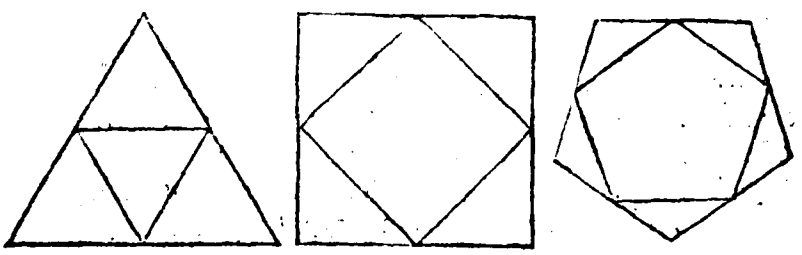


St huius libri quarti tractatio de inſcriptionibus & circumſcriptionibus figurarum rectilinearum, uel planorum. Docet enim, quomodo una figura alij inſcribi, uel ab alia circumſcribi debeat. Quia uerò alia eſt huius quàm præcedentium librorum tractatio, alijs etiam in eo uocabulis utitur: atq; ea, ut ſequentia deinde planius intelligi poſſint, ſingula ordinè definit.

ΟΡΟΙ.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

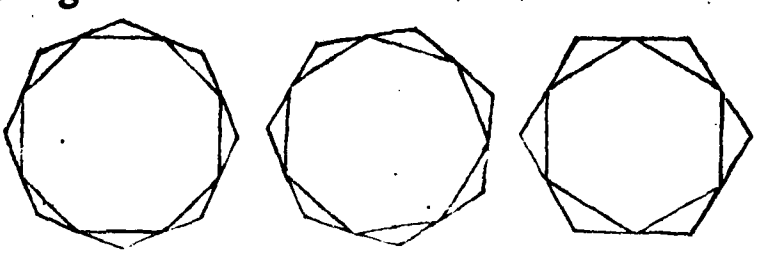
Σχῆμα δὲ ὁμοίως πρὸς σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας, τοῦ πρὸς ὃ περιγράφεται ἅπτηται.



DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando unuſquiſq; inſcriptæ figuræ angulus, unumquodque, latus eius in qua deſcribitur, tangit.

2 Figura autem ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodq; latus circumſcriptæ, unumquemque angulum eius circa quam deſcribitur, tangit.



Ex his duabus definitionibus colligitur, Inter illas tantum figuras, poſſe unam alteri

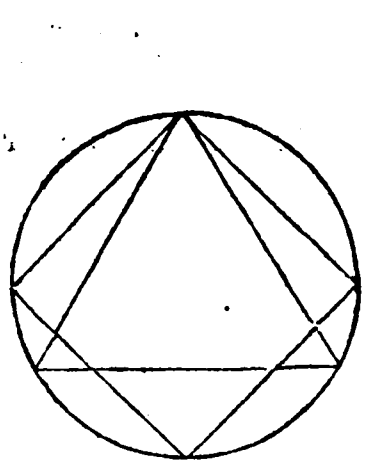
alteri inſcribi uel circumſcribi, quæ líneas numero æquales habent. Nunquã enim triangulum quadrato, pentagono uel hexagono, inſcribitur aut circũſcribitur, cum illius pauciores ſint anguli, quàm horum latera. Et contrario. Sed triangulum triangulo, quadratum quadrato, & quælibet ſuę ſpeciei figuræ, & inſcribi & circumſcribi poteſt.

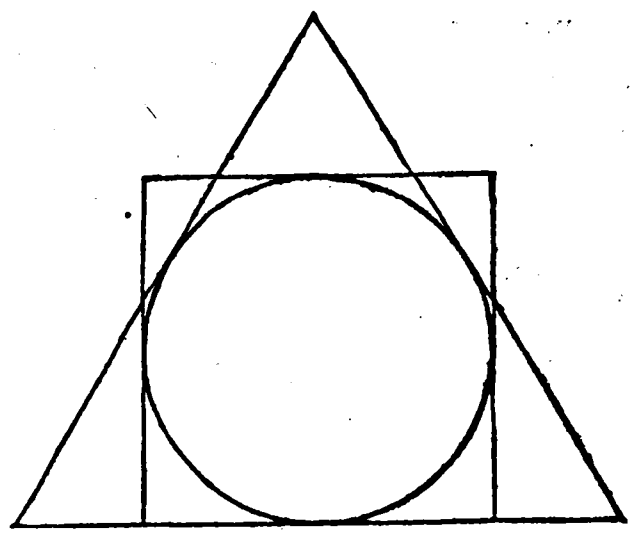
Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ κύκλου τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

3 Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſq; angulus inſcriptæ circuli circumferentiam tangit.

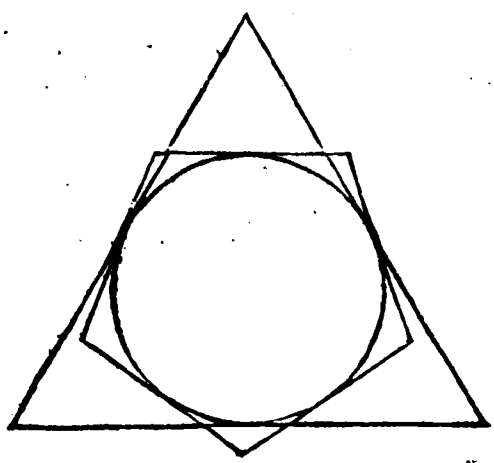
4 Figura uerò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodq; latus circumſcriptæ, circuli circumferentiam tangit.





Requirit utraq; definitio circulum, cui deinde figura rectilínea per priorẽ quidem inſcribitur, per poſteriorem uerò ei circumſcribitur.

Κύκλος ὁμοίως εἰς σχῆμα ἐγγεγράφθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγραφεται ἅπτηται.



5 Circulus ſimiliter in figura deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia, unumquodque latus eius in qua deſcribitur, tangit.

Κύκλος

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber quartus.

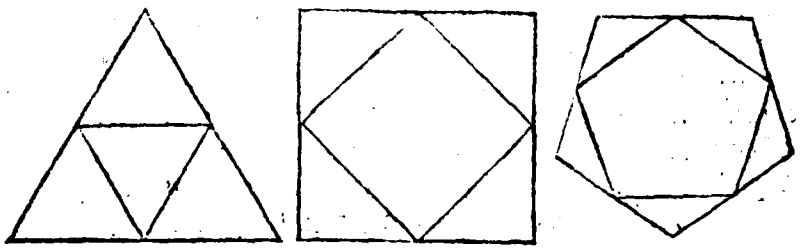


St huius libri quarti tractatio de inſcriptionibus & circumſcriptionibus figurarum rectilinearum, uel planorum. Docet enim, quomodo una figura alij inſcribi, uel ab alia circumſcribi debeat. Quia uerò alia eſt huius quàm præcedentium librorum tractatio, alijs etiam in eo uocabulis utitur: atq; ea, ut ſequentia deinde planius intelligi poſſint, ſingula ordinè definit.

ΟΡΟΙ.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

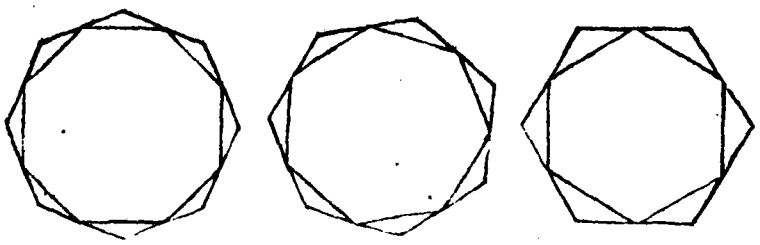
Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.



DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando unuſquiſq; inſcriptæ figuræ angulus, unumquodque, latus eius in qua deſcribitur, tangit.

2 Figura autem ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodq; latus circumſcriptæ, unumquemque angulum eius circa quam deſcribitur, tangit.



Ex his duabus definitionibus colligitur, Inter illas tantum figuras, poſſe unam alteri

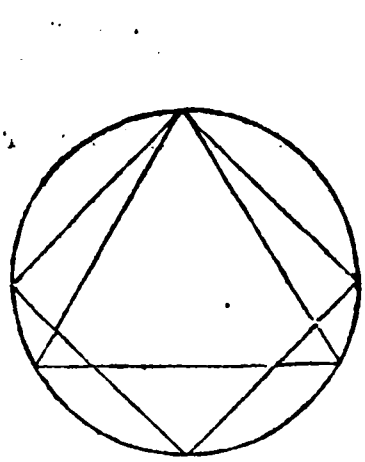
alteri inſcribi uel circumſcribi, quæ líneas numero æquales habent. Nunquã enim triangulum quadrato, pentagono uel hexagono, inſcribitur aut circũſcribitur, cum illius pauciores ſint anguli, quàm horum latera. Et econtrario. Sed triangulum triangulo, quadratum quadrato, & quælibet ſuę ſpeciei figuræ, & inſcribi & circumſcribi poteſt.

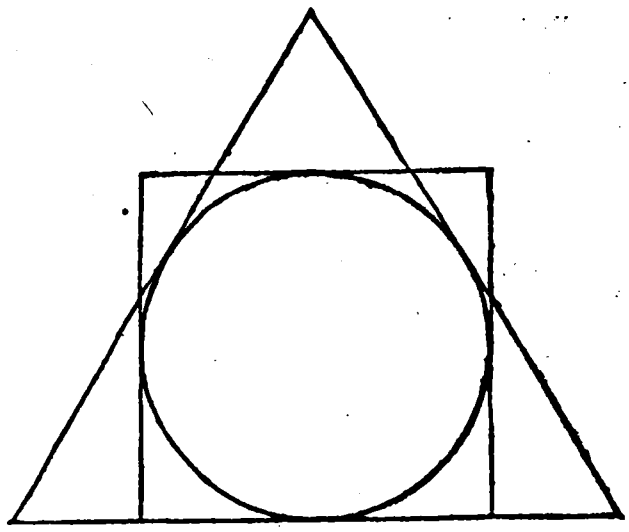
Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

3 Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſq; angulus inſcriptæ circuli circumferentiam tangit.

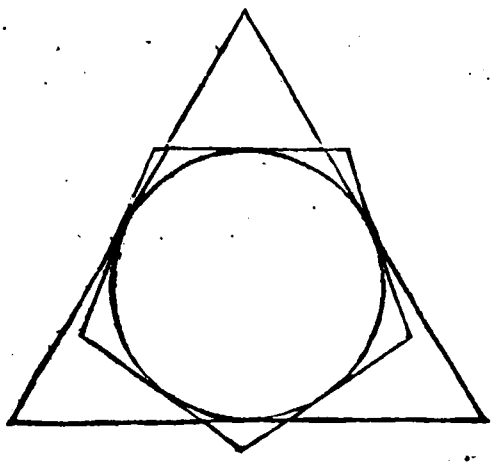
4 Figura uerò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodq; latus circumſcriptæ, circuli circumferentiam tangit.





Requirit utraq; definitio circulum, cui deinde figura rectilinea per priorẽ quidem inſcribitur, per poſteriorem uerò ei circumſcribitur.

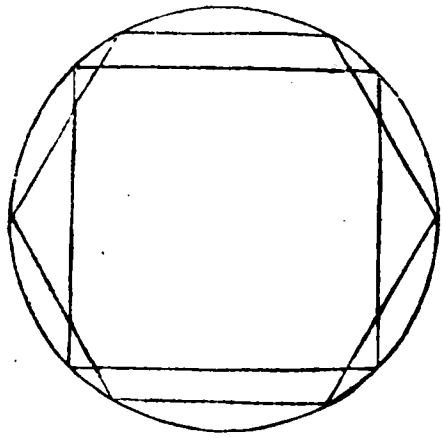
Κύκλος ὁμοίως εἰς σχῆμα ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγραφεται ἅπτηται.



5 Circulus ſimiliter in figura deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia, unumquodque latus eius in qua deſcribitur, tangit.

Κύκλος

Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

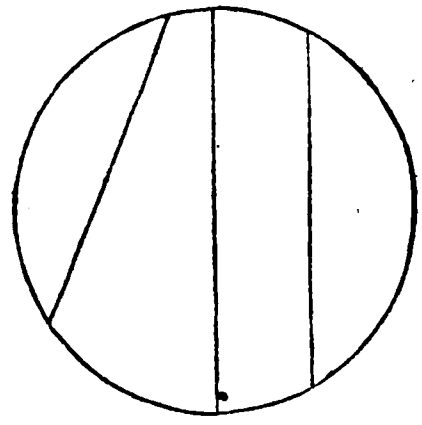


6 Circulus uerò circa figuram deſcribi dicitur, quãdo circuli circumferentia unumquemq; eius circa quam deſcribitur, angulum tangit.

Requirunt hæ duæ definitiones figuram rectilíneam, cui deinde circulus per quintam inſcribitur, per ſextam uerò circulus circumſcribitur.

Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

7 Recta linea in circulum coaptari dicitur, quando eius extrema in circuli circumferentia fuerint.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

PROPOSITIONES.

PRIMA I.

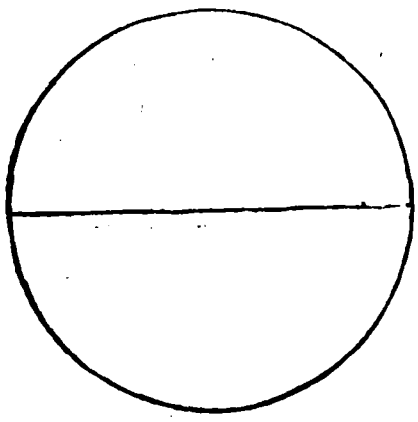
In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ minime longior ipſa circuli diametro exiſtat, æqualem rectam lineam coaptare.

Requirit hæc propoſitio circulum, rectam inſuper lineam datam. Monet autem expreſſe, ne hæc recta circuli diametro longior ſit. Nam ſi data fuerit diametro longior, cum hęc inter ductas in circulo rectas lineas, ex præcedentis tertij propoſitione 15, ſit omniũ longiſsima: nunquam in circulo data illa coaptari poſſet, ſed ipſum

potius

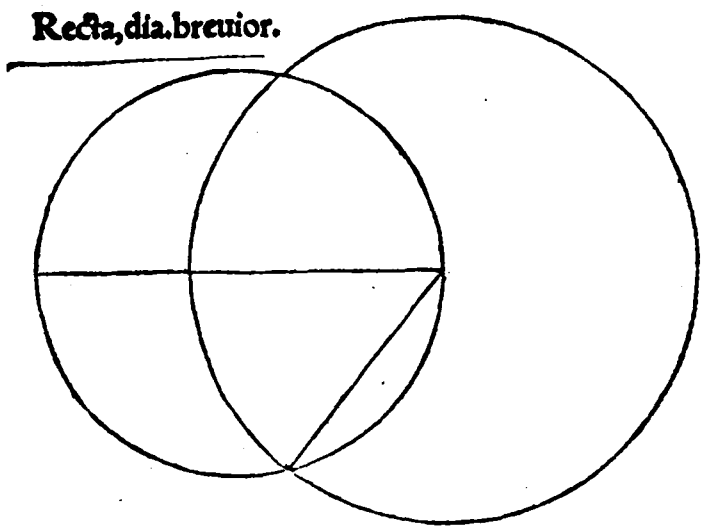
potius ſuis extremitatibus excederet & ſecaret. Quare neceſſe eſt, ut ſit diametro

Recta, diametro æqualis.



breuior, aut ei æqualis. Sit ergo primò ei æqualis: erit diameter ipſa linea, id quod ex ſua ipſius definitione ſatis manifeſtum eſt. Quòd ſi uerò recta data fuerit diametro breuior, cũ iam duæ inæquales ſint rectæ lineæ, à longiore, per 3 primi, portio breuiori æqualis abſcindatur, ſecundum quam deinde ex altera ſua, quam habet in circumferentia, extremitate circulo deſcripto, centroq; huius cum communi circulorum interſectione recta linea iuncto: per hanc eandem rectam tandem propoſitioni ſatisfa-

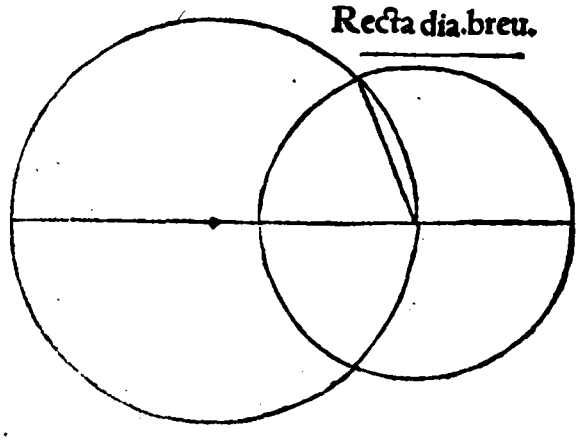
Recta, dia. breuior.



ctum erit, quod & ipſum ex definitione circuli, communi deinde illa noticia, Quæ eidem ſunt æqualia &c. facile demonſtrari poterit. In dato igitur circulo, datæ rectæ lineæ, quæ minime longior ipſa circuli diametro exiſtat, æqualis recta linea coaptata eſt, quod feciſſe oportuit.

ALIA ALTERIVS HVIVS PARTIS DEMONSTRAtio, in qua ſcilicet, recta, cui æqualis in circulo coaptanda eſt, breuior diametro eſſe debet.

Recta dia. breu.



Huic rectæ datæ ad alterutram ipſius diametri extremitatem, per propoſitionem 2 primi, æqualis ponatur: ſecũdum quam poſitam, ex ſumpta diametri extremitate, circulo deſcripto, recta deinde alia ex hoc centro ad punctum interſectionis huius & primò deſcripti circuli ducta, cum hæc tandem illa ſit quæ petebatur

recta linea, res confecta erit, id quod ex ſtructura & definitione, ut modò factum eſt, demonſtrari poteſt.

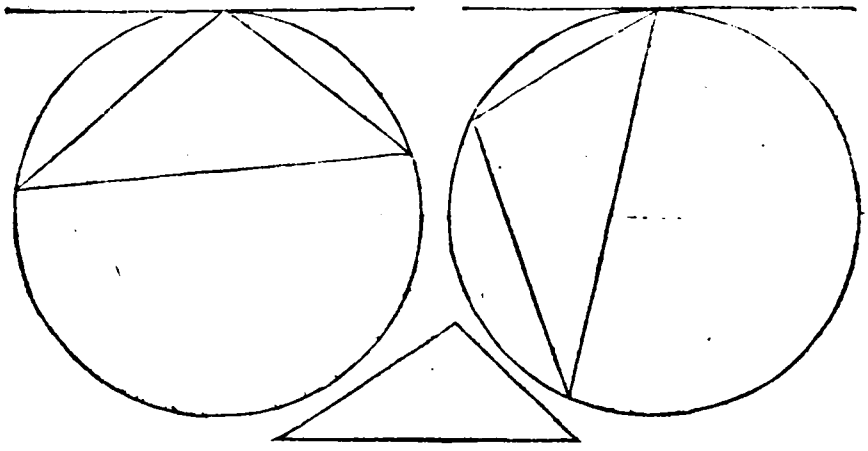
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Εις τὸ δοθὲν κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO II.

In dato circulo, dato triangulo, æquiangulum triangulum deſcribere.

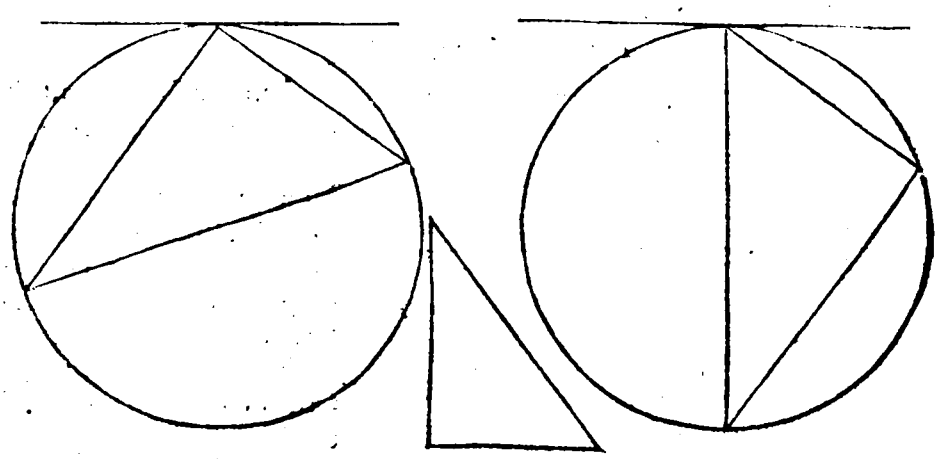
Eſto circulus datus, triangulum etiam datum, atq; propoſitum, in circulo triangulum dato æquiangulum deſcribere. Circulo igitur & triāgulo datis, ducatur per propoſitionem 17 tertij, linea circulum contingens atq; à puncto contactus duę rectę, per circulum tranſeuntes, quarum anguli, quos cum contingente ex utraq; parte faciunt (uel quarum anguli, quos hæ ductæ, una quidem cum cōtingente, altera uerò cum priore ducta faciunt) duobus in triangulo angulis uterq; utriq;, æquales ſint, per propoſitionem 23 primi demittantur, his tandem rectis, ſuis quas habent in circumferentia, extremitatibus, tertia quadam recta linea copulatis: propoſitioni ſatisfactum erit. Cum enim duo anguli, qui à ſecantibus & contingente linea



continentur, duobus quidem in triangulo angulis, ex ſtructura, duobus uerò in alternis ſectionibus, ex propoſitione 32 tertij, ſint æquales: duo in triangulo, duobus in ſectionibus circuli angulis, ex communi quadam notícia, æquales erunt: quare & tertius angulo tertio æqualis.

VEL QVANTVM AD ALTERAM CONSTRVCTIONEM

Cum duo anguli, quorum unus quidē à contingente & una ductarū, alter uerò ab ipſis ductis continetur, duobus in triangulo dato angulis, ex ſtructura, duobus



item

tem in triangulo, circulo nunc inscripto, unus quidē, ut apparet, alter uerò, ex propositione 32 tertij, æquales sunt. Cumq; etiam ex corollario propositionis 32 primi, omnis trianguli tres interni anguli duobus sint rectis æquales: & tertius sic angulo tertio, in his duobus triangulis, æqualis erit. Aliàs enim, ubi inæquales essent, tres anguli in uno duobus rectis non æquiualerent, quod non conceditur: æqualis igitur tertius angulo tertio. In circulo igitur descriptum triangulū, cum dato æquiangulum erit. Quare in dato triangulo, & reli. quod fieri oportuit.

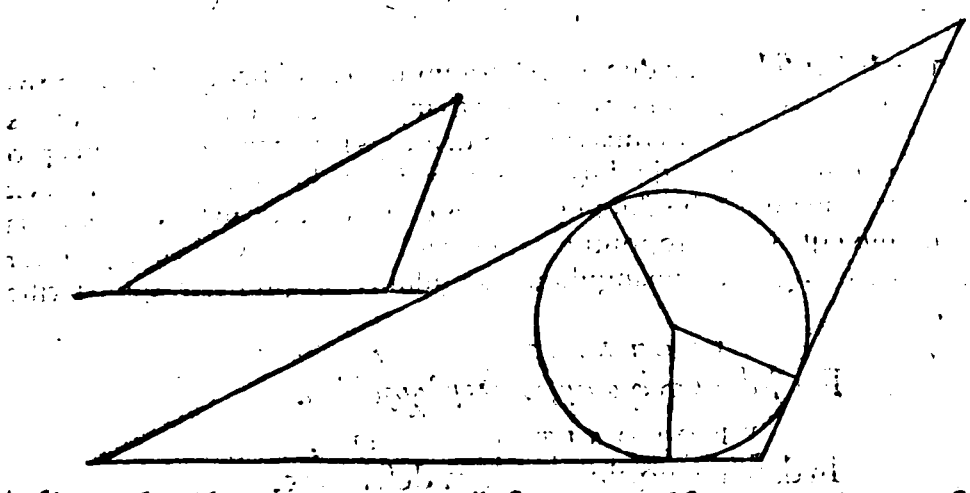
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Περὶ δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO III.

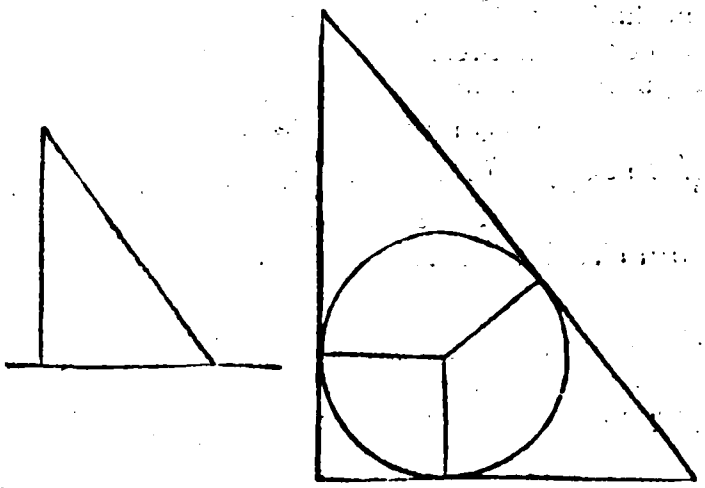
Circa datum circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus, datum etiam triangulum, producatur autem ipsius trianguli unum latus ulterius ex utraq; parte: & erunt qui fiunt anguli externi, suis internis oppositis, per propositionem in primo 32, æquales. Ducatur insuper à centro cir-



culi, quod quidem per primam tertij, si ignotum id fuerit, acquiritur, recta linea usq; ad circumferentiam utcunq;, atq; ad huius alteram extremitatem, quod centrum circuli est, tanquam ad punctum datum, per 23 primi bis usurpatam, duo anguli, ex utraq; parte unus, duobus externis trianguli angulis æquales, uterq; utriq;, constituantur. Vltimò, per puncta contactus, trium à centro exeuntium linearum cum circulo, tres rectæ circulum contingentes, ex utraq; parte eousq; prolongatæ, donec una cum altera concurrat, ducātur: & propositioni satisfactum erit, cum hæ tandem rectæ triangulum, quale petebat propositio, constituant. Sed ne quis fortè dubitare posset, de contingentium continuatarum inter se concursu: igitur priusquam propositionis demonstrationem aggrediamur, quòd harum cōtingentium singulæ duæ lineę cōcurrant, paucis demonstrabimus. Imaginetur ab uno puncto contactus ad alterum recta quædam linea. Et quoniā hæc imaginaria recta in alias duas, contingentes scilicet continuatas rectas, incidens, internos & in eadem parte positos angulos, duobus rectis minores facit: has cōtingētes ea in parte, qua duos angulos incidens duobus rectis minores efficit, ex communi quadam noticia, in primo exposita, concurrere necesse erit, quod erat demonstrandum. Nunc ad triangulum propositionis, circa datum circulum descriptum, quòd nimirum illud dato triangulo æquiangulum sit, hoc sic colligetur. Quoniam enim anguli, à contingentibus & ab earum contactuum punctis ad centrum deductis rectis lineis comprehensi, singuli, per propositionem libri præcedentis decimam octauam, recti sunt,

Et rurſus, quoniam omnis quadrilateri quatuor anguli, quatuor rectis angulis ſunt æquales, propterea quòd per ductam ab uno ipſius angulo in oppoſitum, rectam lineam, in duo triangula diuidatur: duobus in quolibet quadrilatero rectis



angulis, quos habet, ſubtractis, duo qui relinquuntur in quolibet quadrilatero anguli, duobus rectis æquales erunt. Sed quia in triangulo, cuius unum latus ulterius productum fuerit, angulus externus cum ſuo deinceps ſe habente interno, per propoſitionem 13 primi, ſimiliter duobus rectis æqualis eſt: illi igitur duo priores, ex communi quadam noticia, his duobus æquales erunt. Quare iam ſubtractis æqualibus ab angulis æqualibus, propoſitum tandem inferri poteſt. Circa datum igitur circulum, dato triangulo, æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. quod feciſſe oportuit.

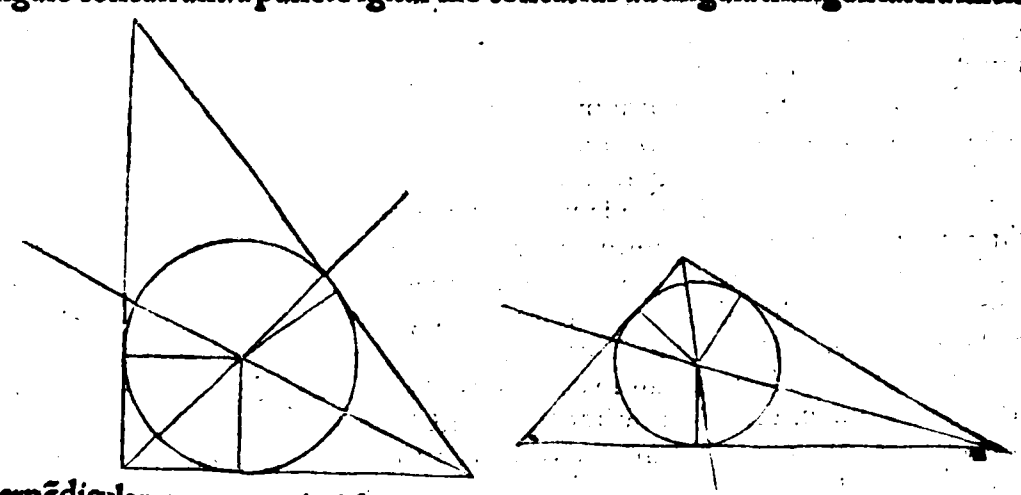
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Εις τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo, circulum deſcribere.

Sit datum triangulum, atq; propoſitum, circulū in eo deſcribere. Duo igitur in triangulo anguli, quomodocunq; ſumpti, ex prop. 9 primi, per duas rectas lineas bifariā ſecentur. Et quoniam hæ duæ rectæ, ex propoſitione 17 primi, & cōmuni illa nōtia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem, &c. in triangulo concurrunt: à puncto igitur illo concurſus ad ſingula trianguli latera lineæ



perpēdiculares, per 12 primi ducantur. Et quoniam hæ, ex propoſitione 26 primi, bis

bis uſurpata, & illa cõmuni noticia, Quæ eidem æqualia, &c. inter ſe æquales ſunt, ubi ex hoc puncto concurſus, tanquam ex centro poſitò, ſecundum unius harum æqualium linearum interuallum, circulus deſcribatur, propoſitioni tandem ſatisfactum erit: id quod prior pars corollarij propoſitionis decimę ſextæ tertij, & definitio huius libri quinta ſic demonſtrant. Quoniam enim, ut quidem demonſtratum eſt, ductæ ad latera perpendiculares inter ſe ęquales ſunt, ex uno inſuper puncto eductę: ex eodem igitur puncto circulus, ſecundum unius ęqualium interuallum deſcriptus, per omnium aliarum extremitates tranſire neceſſe erit: unde ſic etiam ſingulæ deſcripti circuli ſemidiametri exiſtent, & tanget ſingula trianguli latera circulus deſcriptus ex priore parte corollarij propoſitionis 16 tertij: quare eidem etiam triangulo, ex definitione, circulus inſcriptus eſt. In dato igitur triangulo, circulus deſcriptus eſt. quod feciſſe oportuit.

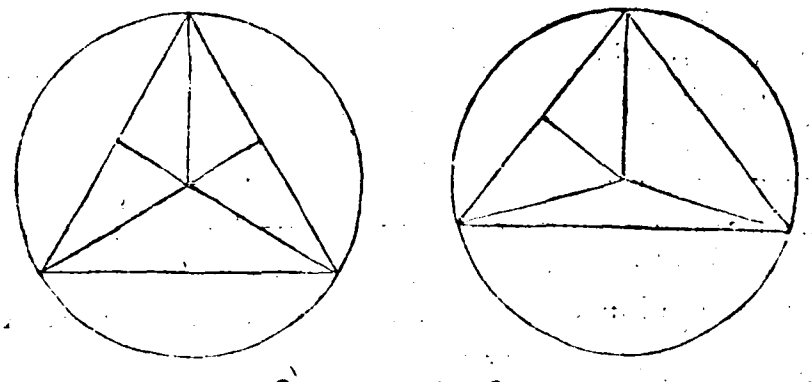
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον περιγράψαι.

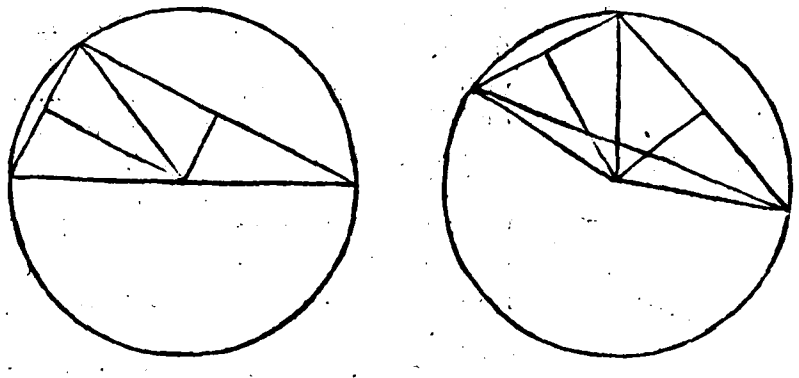
PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum, circulum deſcribere.

Quemadmodum præcedentis propoſitionis operatio duorũ angulorum ęquales requirebat diuiſiones, ita in hac, ut trianguli dati, duo latera, quomodocunque ſumpta, ſicuti docet propoſitio in primo 10 bifariam diuidantur, neceſſe erit. Hoc autem facto, à punctis mediarum diuiſionum ad angulos rectos lineæ, uerſus eam partem, ubi maximè uidetur eſſe centrum deſcribendi circuli, educantur. Et quo-



niam hæ continuatæ, ex propoſitione 17 primi, & communi illa noticia, Si in duas rectas recta linea incidens, internos, & in eadem parte angulos, &cę. concurrunt, ubiex hoc puncto, tanquam ex centro poſito, ſecundum interuallum ſpacij, inter hoc punctum & angulorum quemuis intercepti, circulus deſcribatur, res confecta erit. Nam is erit circulus, propoſiti trianguli circumſcriptioni cõueniens, quod



certè tribus rectis lineis ex hoc puncto, quod centrum eſſe ponitur, ad tres an-

gulos ductis, cum hæ ex propositione 4 primi, bis usurpata, & communi illa notícia, Eidem æqualia, &c. æquales inter se esse demonstrentur, per 9. propositionem tertij facile conceditur. Circa datum igitur triangulũ circulus descriptus est, quod fieri oportuit.

APPENDIX.

Est autem hic modus generalis, ad omnia triangula, quomodocunq; sanè illa, secundum latera uel angulos considerata, nominabuntur. Quare quòd nõnulli ad pleniorem huius propositionis declarationem, pro triangulorum, quantum ad angulos, uaria distinctione, uarios canones tradiderunt, cum is unus omnis generis triangulis satisfaciat, illorum traditiones hoc loco consulto prætermisimus.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν, Οτι ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἡμικυκλίου μὲν γὰρ ὄντος τοῦ ὑπὸ β α γ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ὀρθῆς ἐστιν ὀρθῆς. Οτε δὲ ἐπὶ τῆς β γ· ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθὴ ἔσται. Οταν δὲ ἐκτὸς τῆς β γ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ· ἡ ὑπὸ β α γ ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ὀρθῆς ἐστιν ὀρθῆς. Ωστε καὶ, ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ δοθεῖσα γωνία· ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ δ ζ, ε ζ. Οταν δὲ ὀρθὴ, ἐπὶ τῆς β γ. Οταν δὲ μείζων ὀρθῆς· ἐκτὸς τῆς β γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Et manifestum est, quòd quando intra triangulum cadit centrum circuli: angulus in maiori quàm est semicirculus segmẽto existens, recto minor sit. Quando uerò in rectam lineam, hoc est in latus, cadit, cũ sic angulus in semicirculo existat: ille rectus erit. Cum uerò extra rectam lineam, hoc est extra triangulum, centrum circuli ceciderit, quia tum in maiori quàm est semicirculus segmẽto angulus existit: maior recto erit. Et econtrario, cum minorem recto contingat esse angulum: ad rectos ductæ intra ipsum triangulum concurrent. Quando uerò rectum: in aliquod trianguli latus. Si uerò maiorem recto: extra ipsam rectam lineam, hoc est, extra ipsum triangulum concurrent. quod admonuisse oportuit.

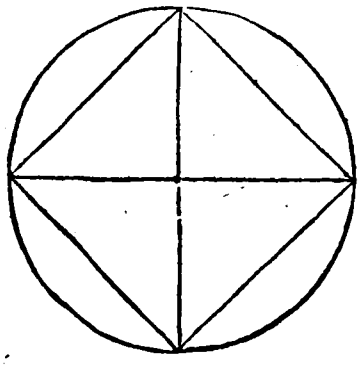
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In circulo dato, quadratum describere.

Sit circulus datus, atque propositum, quadratum in eo describere. Ducantur igitur in circulo duæ diametri, ad angulos rectos sese mutuo secãtes, quarum extremitates tandẽ si quatuor rectis lineis copulentur, per eas propositioni satisfactum erit, quod sic patet. Primò, quòd hęc quatuor linearum figura sit circulo inscripta, declarat ipsius rei definitio. Secundo, quòd sit quadratum, hoc est, æqualium laterũ & rectorum angulorum, quantum ad rectos angulos, cũ omnes eius anguli sint in semicirculo: ex prima parte propositionis 31 tertij hoc cõstabit. Quantũ uero ad latera, potissimũ hoc ex propositione 4 primi, quoties opus fuerit ea usurpata,



& conta-

& communi illa notitia, Quæ uni ſunt æqualia, &c. colligetur. Rectangulũ igitur & æquilaterum: quare & quadratũ ex definitione, & deſcribitur in circulo. In circulo igitur dato quadratum deſcriptum eſt, quod feciſſe oportuit.

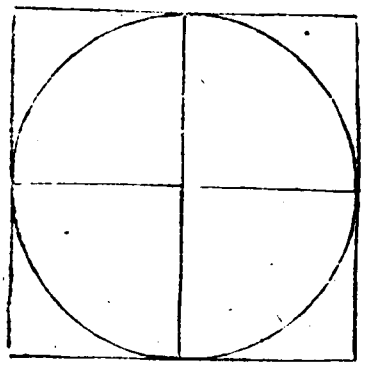
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τετράγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum, quadratum deſcribere.

Sit circulus datus, atque propoſitum, quadratum circa ipſum deſcribere. Quemadmodum præcedens, ductis in circulo duabus diametris, harum extremitates ut quatuor rectis coniungerentur lineis requiſiuit, ita hæc, poſtquã circulus datus, in eo etiam duę ad rectos angulos diametri ductæ fuerint, ut per harum extremitates ſingulas, ex 17 propoſitione libri præcedentis, quatuor lineæ circulũ contingentes ducãtur, neceſſe erit. Et quoniam hæ ſi in utramq; partẽ continuatæ fuerint, ſemper duæ & duę, ex propoſitione 18 tertij, & cõmuni quadam notitia, concurrunt, contiuentur itaq; omnes, in utramq; etiã partem, donec una cũ altera concurrat, & propoſitioni ſatisfactum erit, cũ uidelicet ſub illis ipſis lineis huiuſmodi quadratum cõtineatur, quod ſic patet. Primò quòd circũſcriptio debita facta ſit, ex definitione habetur. Quòd inſuper ſit quadratũ, id ſic colligetur. Quoniam enim contingentiũ quęlibet duæ oppoſitæ, ſuæ diametro, ex ſecunda parte propoſitionis 28 primi, ipſæ deinde inter ſe ex propoſitione 30 eiuſdem, æquediſtantes ſunt: quod ſub his contingentibus, quæq; etiam ſub contingentium unaquaq; & diametro ſua parallela cõprehẽduntur, rectilinea, ſingula, ex definitione, parallelogramma erũt. Hęc autem quoniam ex propoſitione 34 primi, latera oppoſita æqualia habent: contingentes oppoſitæ primò, ex communi illa notitia, Quæ uni æqualia &c. omnes deinde inter ſe, propter diametrorum æqualitatẽ, æquales erunt. Aequilaterum igitur eſt circa circulum deſcriptum parallelogramum. Quòd uerò ſit etiam rectorum angulorum, cum qui ad centrum ponuntur anguli, ſinguli, ex ſtructura, recti ſint, cumq; etiam, Omnis parallelogrammi latera & anguli oppoſiti, ut ſæpe dictum, æquales ſint, patet etiam illud. Factũ eſt ergo quod fieri oportuit, deſcriptum nimirum circa datum circulum quadratum, quod erat propoſitum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

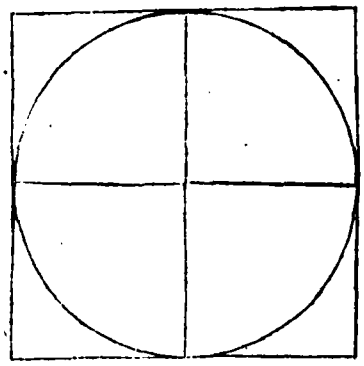
Εἰς τὸν δοθέντα τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato, circulum deſcribere.

Sit datum quadratum, atq; propoſitum, circulũ in eo deſcribere. Duo igitur circa unum in quadrato angulum latera, per propoſitionẽ 10 primi, bifariam diuidantur, à punctis deinde illis mediis, perpendiculares, ad latera uſq; oppoſita peruenientes, lineæ educantur: & erit punctum illud, quod eſt communis harum duarum perpendicularium ſectio, centrum futuri circuli. Nam cum hæ ductæ ex ſuis punctis perpendiculariter egrediantur: utraq;, ex poſteriore parte propoſitionis 28 primi, ſuis collateralibus quadrati lateribus æquediſtans erit. Omnes igitur figuræ rectilineę, quotcunq; in hac diſpoſitione colligi poſſunt, parallelogramma, horum

horum deinde latera oppoſita, ex propoſitione 34 primi, æqualia inter ſe erũt. Sed cum linearum æqualium, æquales ſint etiam medietates, ut ratione colligitur: infertur tandem ex hac communi noticia, Eidem æqualia, &c. & illas quatuor in medio lineas inter ſe æquales eſſe. Punctum igitur, communis nimirum perpendicularium ſectio, ut dictum eſt, ex propoſitione 9 tertij: centrum eſt circuli. Quare eo ſecundum unius harum æqualium quantitatem deſcripto, cum is propter linearum æqualitatem, per aliarum etiam extremitates tranſeat, hæ uerò extremitates ſingulæ in lateribus quadrati exiſtãt, cum per propoſitionem 16 tertij intra circulum non cadant, per corollariũ deinde eiuſdem ipſum circulum tangant: ex definitione tandem, qua dicitur, Circulus ſimiliter in figura deſcribi, &c. circulum in dato quadrato deſcriptum eſſe concluditur. quod fieri oportuit.



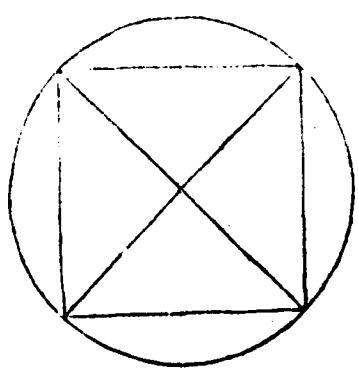
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ϵ.

πόδι τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον πόδιγράψαι.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum, circulum deſcribere.

Sit datum quadratum, atq; propoſitum, circulum circa ipſum deſcribere. Ducantur in quadrato duæ diametri, quæ ſeſe mutuò ſecent: & erit communis illarum ſectio, locus, unde circulus, ad circumſcribendum quadratum propoſitum conueniens, deſcribi debet. Quoniam enim ſumptis duobus triangulis, quæ nimirum ſunt quadrati medietates, cum anguli partiales ſinguli, per propoſitio. 8. primi, inter ſe æquales ſint, atq; ſic uterq; ſemper medietas anguli recti, cumq; etiam ipſi recti inter ſe æquales: & horum rectorum medietates ſingulæ, partiales nimirum anguli omnes, inter ſe æquales erũt. Quare per propoſitionem 6 primi quater ſumptam, & horum partialium angulorum latera, quatuor nimirum partiales diametrorum lineę, inter ſe ęqualia erunt. Punctum igitur illud, centrũ eſt circuli. Poteſt etiã loco octauę, propoſitio quinta uſurpari, hoc modo. Cũ quadratũ per diametros in triangula quatuor reſolutũ ſit, hæc uerò triangula omnia, æqualia crura habeant, latera nimirum quadrati propoſiti: infertur per propoſit. 5 primi, & ipſos ad baſim angulos inter ſe æquales eſſe. quilibet igitur illorum, per propoſitionem 32 eiuſdem primi, medietas eſt recti. Tertius enim angulus, ratione quadrati, per ſe unus rectus eſt. Quia autem omnes recti anguli, ex communi quadam noticia, inter ſe ęquales ſunt: ſequitur, quòd etiam inter ſe æquales ſint omnes partiales (de quibus facta eſt mentio) anguli. Igitur & diametrorum partes, per propoſitionem 6 primi, inter ſe æquales. unde tandem, id commune punctum, per 9 tertij, centrum circuli erit: quo nunc ſecundum quantitatem unius æqualium linearum deſcripto, cum is per reliquarum etiam æqualium extremitates tranſeat, propoſitioni tandem ſatisfactum erit, circa datum nimirum quadratum circulus deſcriptus. quod feciſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

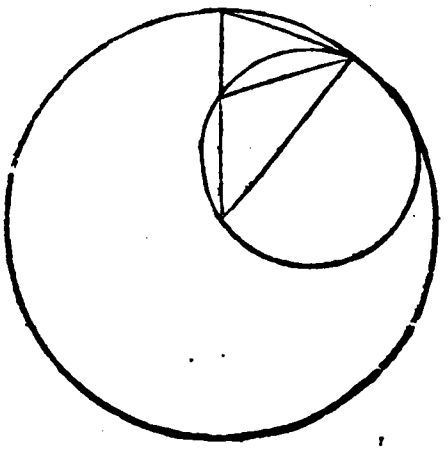
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

PROPOSITIO X.

Duum æqualium laterum triangulum conſtituere, habens utrunq; eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum, duplum reliqui.

Sententia eſt propoſitionis, triangulũ iſoſceles, cuius uterq; angulorũ qui ab æqualibus lateribus ſubtenduntur, ad tertium reliquum duplus ſit, deſcribere. Ducatur igitur linea recta, longa uel breuis, ad placitum. hac recta deinde, ut quidem habet propoſitio ſecundi undecima, in duas portiones diuiſa, ex pũcto hoc, quod eſt communis terminus diuiſæ & portionis longioris, ſecundum interuallum rectæ datæ circulus deſcribatur. Hoc facto, longiori portioni, quæ nimirum eſt diametro circuli breuior, æqualis recta in circulo, per propoſitionem primam huius, coaptetur. Quòd ſi tandem extremitas huius, longiori portioni æqualis, altera cum centro & diuiſionis puncto duabus rectis lineis copuletur: propoſitioni ſatisfactum erit. Nam id demũ triangulum, cuius duo latera à centro uſq; ad circumferentiam continuata ſunt, erit quod quærebatur, cuius quidem demonſtratio ut ſequitur. Circa triangulũ partiale, cuius unus angulus ad cẽtrum ponitur, per propoſitionẽ 5 huius, circulus deſcribatur. Et quoniã tam quadrato longioris portionis ex ſtructura, uel propoſitione 11 ſecundi, quàm etiam quadrato rectę in circulo coaptatę, huic longiori portioni ęquali, rectangulum ſub prioris circuli ſemidiametro & breuiori eius portione compræhẽſum, ęquale eſt: longiori æqualis poſita recta linea, per propoſitionem 37 tertij, minorem circulum contingens erit. Et rurſus quoniã hæc recta circulum minorem contingit, à puncto item contactus alia quædã, eundem circulum ſecãs, ducta eſt, illa nimirum quæ in diametro ad punctũ diuiſionis terminatur: angulus igitur, quẽ hæ duæ rectæ cõtinent, partialis, angulo alterni ſegmẽti, qui ad centrum ponitur, ex propoſitione 32 tertij ęqualis erit. unde totalis poſtea, ſi partialis alter ex æquo his æqualibus adijciatur, duobus æqualis. Sed quia duobus his, ut trianguli huius partialis internis, angulus ille, qui in alio partiali ad diuiſionis punctum ponitur, externus, ex propoſitione 32 primi, eſt æqualis & eidẽ externo ille totalis, ex communi quadam notitia, æqualis erit. Et quia etiam totalis, illi qui ſub diametro atq; circulum minorem tangente recta linea continetur, ex definitione circuli & priori parte propoſitionis quintæ primi, æqualis eſt: & qui ſub iſtis lineis continetur angulus, dicto externo æqualis erit. Tres igitur anguli inter ſe æquales, unum etiam triangulum partiale, cum duo ex æqualibus angulis in eo ſint poſiti, ex propoſitione 6 primi, Iſoſceles, hoc eſt duũm æqualium laterum erit. Sed quia uni eorum, coaptatæ ſcilicet in circulo lineæ, æqualis eſt, ex ſtructura, longior diuiſæ ſemidiametri portio, & alteri lateri hæc eadem longior, portio æqualis erit: quare Iſoſceles, triangulum etiam partiale alterum. Hoc autem quia, ex propoſitione 5 primi, duos ad baſim angulos inter ſe æquales habet, & quia etiam illis æqualibus, angulus huius Iſoſcelis externus æqualis eſt, unde ſic ad utrunq;, ac per conſequens, ad eum qui ad centrum ponitur duplus: & illorum qui huic externo æquales ſunt, uterq;



ad eundem ad centrum poſitum angulum, duplus erit, et ſunt etiam in hoc ipſo, in quo ille ſcilicet, totali triangulo. Triangulum igitur Iſoſceles, cuius uterq; eorum qui baſim ſunt angulorum, ad reliquum tertium duplus ſit, conſtitutum eſt, quod quidem feciſſe oportuit.

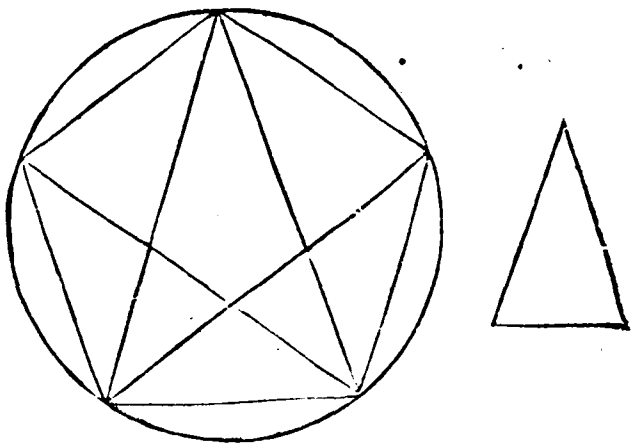
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Εις τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XI.

In dato circulo, pentagonũ & æquilaterũ & æquiangulũ deſcribere.

Sit datus circulus, atque propoſitum, pentagonum in eo æquilaterum & æqui angulum deſcribere. Circulo igitur dato, primò Iſoſceles triangulum, cuius uterq; æqualium angulorum ad tertium duplus ſit, per propoſitionem præcedentem 10 formari, huic deinde æquiangulum triãgulum in dato circulo, per propoſitionem 2 huius deſcribi, debet. Poſtea utroq; eorum, qui ad tertiũ dupli ſunt, angulorum, recta quadam linea, per prop. 9 primi, bifariam diuiſo, quinq; iam anguli inter ſe



æquales erunt. Quòd ſi tandem rectæ hæ, per quas ad tertium dupli anguli bifariam diuiſi ſunt, ad circunferentiam uſq; continuatæ fuerint, cum hi quinq; in una ſint circũferentia anguli, atq; æquales etiam inter ſe: & eorũ arcus à quibus ſubtenduntur, per prop. 26 tertij: horũ deinde arcuum rectæ lineæ, per 29 eiuſdem, æquales erunt, quare pentagonũ æquilaterũ. Quod uerò ſit etiam æquiangulum, id ſic patet. Quoniã enim ſinguli huius pentagoni arcus, ut quidẽ demonſtratũ eſt, inter ſe ſunt æquales, ſumptis duob. quibus uidelicet nullus eſt cõmunis terminus, ſiutri que eorũ duo hi, quos interceptos habent, arcus additi fuerint: & collecti ſic arcus, ex communi quadam notitia, inter ſe æquales erunt, Quare etiam æquales, ex poſitione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcubus ſubtenduntur, anguli. Conſtat igitur ſic æqualitas de angulis duobus. Quia autem ſicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum proceſſu toties, quot fuerint anguli, minus uno, uſurpato, conſtare manifeſtum eſt: pentagonum igitur hoc æquiangulum eſſe concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo æquilaterum & æquiangulum pentagonum deſcriptum eſt. quod feciſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

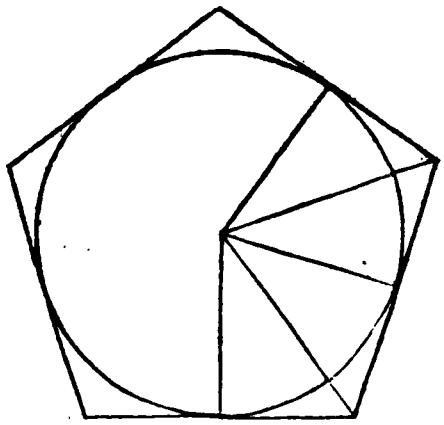
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit

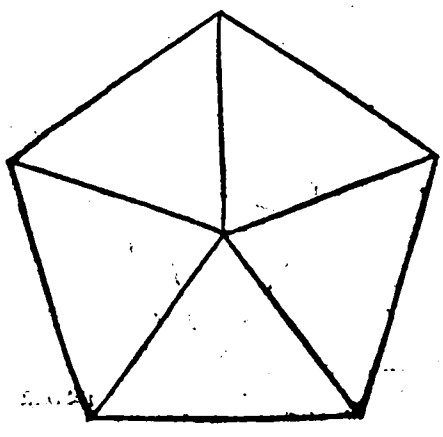
Sit datus circulus, atq; propoſitum, pentagonum circa eum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Diuidatur igitur circuli dati circunferentia, per præcedentem, in quinque partes æquales, à punctis deinde diuiſionum ſingulis per propoſitionem 17 tertij lineæ, ipſum circulum contingentes ducantur, hæ tandem, ſi in utranq; partem, donec altera alteri occurrat, continuatæ fuerint: propoſitioni ſatisfactum erit. Nam illæ ipſæ circulum contingentes rectæ lineæ pentagonum, qualem propoſitio hæc requirit, comprehendunt, quod ſic demonſtrari poteſt. Primò à tribus quibuslibet, proximis tamen inter ſe, contactuum punctis demittantur ad circuli centrum tres rectæ lineæ. Et quoniam hæ ſingulæ ex propoſitione 18 tertij, ad ſuas contingentes perpendiculares ſunt: omnes igitur illi qui ſic fiunt anguli, recti erunt: quod eſt oſeruandũ. Ducantur porrò à duobus pentagoni angulis iis, qui ab his tribus lineis continentur, aliæ duæ ad centrum rectæ lineæ. Deſcribuntur autem ſic quatuor triangula, quorum quæq; duo extrema, per penultimam primi, laterum æqualium: per propoſitionẽ deinde 8 & 4 eiuſdem, æqualium angulorum eſſe demõſtrantur. Et quia ſic eſt: tam illi igitur, qui ad cẽtrum ſub perpendicularib. cõtinentur anguli, ad ſuos partiales, quàm etiã ipſius pentagoni anguli ad ſuos, dupli erunt. Et rurſus quoniam ad cẽtrum anguli ſuper æquales, circunferentias deducuntur, cum iidem anguli, ex propoſitione 27 tertij, inter ſe æquales ſint: & illorum dimidij omnes, quemadmodum & ipſi toti inter ſe æquales erunt. Et quia iam ſunt duo triangula, quorũ nimirum latus quod habent commune, perpendicularis linea eſt, quę cũ duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrunq; utriq;, unum item latus uni lateri æquale: & reliqua latera reliquis lateribus, atque etiam reliquum angulũ reliquo angulo, per propoſitionem 26 primi æqualia habebunt. Circulum igitur contingentium linearum unaquæq; per ſuam perpendicularem bifariam diuiſa eſt, quare & ipſæ ad utranq; partem, tanquam ad ſuas medietates, duplæ. Partes uero cum ſint inter ſe æquales, ut iamdudum demonſtratum eſt: & ipſas totas contingentes rectas lineas inter ſe æquales eſſe conueniet. Pentagonum igitur æquilaterum. Quod uerò ſit etiam æquiangulum, cum ipſius pentagoni anguli æqualium ſint angulorum dupli: patet & illud. Circa datum igitur circulum, æquilaterum & æquiangulum pentagonum deſcriptum eſt, quod faciſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

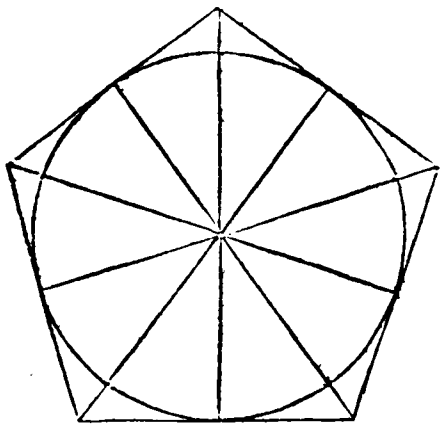
PROPOSITIO XIII.



In dato pentagono, quod eſt æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum, æquilaterum exiſtens & æquiangulum, atq; propoſitum, circulum in eo deſcribere. Pẽtagoni igitur dati duo quilibet proximi anguli, duabus rectis, per propoſitionem 9 primi, bifariam diuidantur: & erit punctum concurſus harum rectarum

in pentagono: centrum circuli qui petitur, cuius hæc ſit demonſtratio. Ducantur à tribus indiuiſis pentagoni angulis, ad punctum illud concurſus, tres rectæ lineæ. Et quoniam duo ipſius pentagoni anguli, ſuis rectis ductis bifariam diuiſi ſunt: quæq; duo circa illos diuiſos poſita triangula, inter ſe æqualia eſſe, per 4 primi, demonſtrantur. Quia uerò ad unum angulum in utroq; triangulo, angulus ſuus totalis duplus eſt: propter æqualitatem, totalium quidem ex hypotheſi, ac partialium deinde, ut modo oſtenſum eſt, inter ſe: & in utroq; triangulo angulus totalis ad ſuũ partialem: ſinguli item totales, hac operationem, ad ſingulos ſuos partiales angulos. Dupli erunt. Quare unumquemq; ſic bifariam diuiſum eſſe, manifeſtum erit.



Porrò pro ulteriori demonſtratione, demittantur à puncto concurſus ad ſingula pentagoni latera perpendiculares. Hæ autem quoniam facili opera per propoſitionem 26 primi, æquales inter ſe eſſe demonſtrantur: punctum igitur illud concurſus, ut dictum eſt, ex propoſitione 9 tertij, centrum circuli erit. Eo igitur nunc ſecundum unius, harum æqualium perpendicularium interuallũ, deſcripto, cum is, propter æqualitatem, per ſingularum extrema puncta tranſeat unumquodq; inſuper pentagoni latus, ex priore parte corollarij prop. 16 tertij, circulũ tangat (alias enim ſi ſcilicet unum ex his ſecaretur, circulum contingens in ipſum cadere contra allegatam propoſitionem conuinceretur) propoſitioni ut oportuit ſatisfactum erit. In pentagono nimirum æquilatero & æquiangulo circulus deſcriptus eſt. quod fieri oportuit.

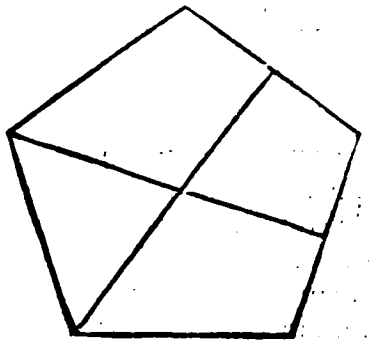
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

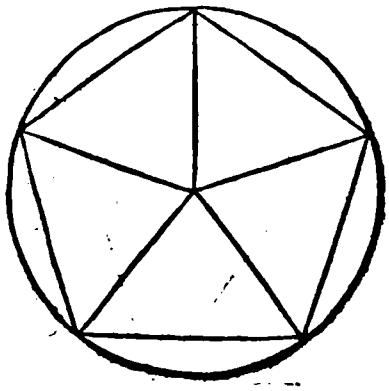
πρὸς τῷ δοθέντι πενταγώνῳ, ὃ ἔστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO XIIII.

Circa datum pentagonum, quod eſt æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum quale requiritur, atq; propoſitum, circulũ circa ipſum deſcribere. Diuidantur, ut in præcedenti factum eſt, duo inter ſe proximi in pentagono anguli, per propoſitionem 9 primi, duabus rectis bifariam: & erit punctum concurſus harum rectarum, centrum futuri circuli qui hoc datum pentagonum circumſcribet, id quod ex propoſitione 4, toties quoties opus fuerit eam repetendo, atq; ex nona deinde tertij, hoc modo demonſtrabitur. Ducantur à tribus indiuiſis pentagoni angulis, ad punctum illud concurſus tres rectæ lineæ. Et quoniam in





penta-

pentagono duo anguli, ex ſtructura, biſariam diuiſi ſunt, cum pentagonum ſit ex hypotheſi æquiangulum, ubi bis aut ter duo triangula, quorum unum quidem unam, alterũ uerò alteram biſariam diuiſi anguli medietatem ſibi uendicat, ſumpta fuerint, & reliqui tres pentagoni anguli ex propoſitione 4 primi, biſariam diuiſi erunt. Quare, ut ipſi totales, ex hypotheſi, ita nunc ex demonſtratione, per allegatam quartam ſumpta, partiales anguli omnes, ductæ inſuper à centro hoc ad angulos pentagoni rectæ lineæ, inter ſe æquales erunt. Quoniam autem hæ rectæ plures quàm duæ ſunt, circuli igitur per harum æqualium extremitates, ut quæ ſunt in pentagoni angulis, tranſeuntis centrum, per propoſitionem 9 tertij, hoc punctum erit. Eo igitur inde deſcripto, propoſitioni tandem ſatisfactum erit, circa pentagonum uidelicet, æquilaterum & æquiangulum, circulus deſcriptus. quod feciſſe oportuit.

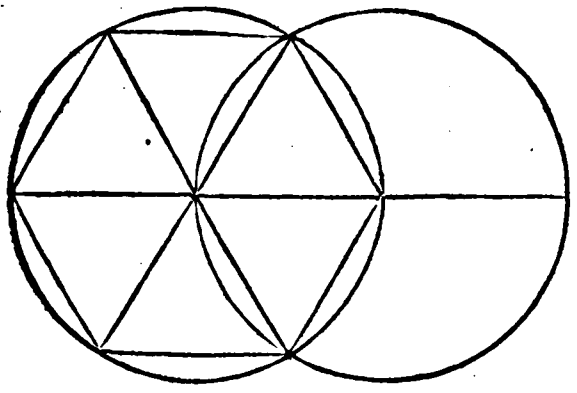
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΕ.

Εἰς τὸ δοθὲν κύκλον, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XV.

Indato circulo, hexagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus, atq; propoſitum, hexagonum in eo æquilaterum & æquiangulum deſcribere. Circulo igitur dato, diametro etiam in eo ducta, alterutra eius extremitate loco centri ſumpta, alius ad prioris dati quantitatem circulus deſcribatur, atq; ubi hi duo circuli ſeſe mutuo ſecãt, ab illis ſectionum punctis per centrum circuli prioris, uſq; ad eius circumferentiam, aliæ duæ rectæ extendantur. Erunt autem ſic in circulo dato puncta ſex, quæ tandem ſex etiam rectis lineis continuata ſuis quodque punctis proximis, confectum erit negocium. Quoniam enim cum à centris circulorum, tanquam à mediis punctis, ad circumferentias deductæ rectæ lineæ, ex definitione, inter ſe ſunt æquales: utrunq; eorum, quæ in portione circulorum communi deſcripta ſunt, triangulorum, ex hac circuli definitione bis uſurpata, illa deinde communi notitia, Eidem æqualia, &c. æquilaterum, atq; mox deinde etiam, per priorẽ partem propoſitionis quintę primi, æquiangulum erit. Quoniam autem interni tres anguli omnis trianguli, ex corollario propoſitionis 32 primi, duobus rectis ſunt æquales: unuſquiſq; horum duorum triangulorum angulus unum duorum rectorum tertium erit, duo igitur ad centrum prioris uel dati circuli poſiti anguli, duobus duorum rectorum tertijs ſunt æquales. Quia uerò illi duo cum eo quem ex utraq; parte habent ἰφεξῆς, per propoſitionem 13 primi, duobus rectis angulis ſunt æquales: & hunc ἰφεξῆς angulum, cum tres tertiæ unum integrum faciant, unum duorũ rectorum tertium eſſe neceſſe eſt, hi tres igitur anguli inter ſe æquales erunt. Sed quia his æquales etiam ſunt, ex propoſitione 15 primi, anguli quos ſinguli ad uerticem habent: ſex igitur ad centrum deducti anguli inter ſe æquales erunt. quare & illorum arcus à quibus ſubtenduntur ex propoſitione 26 tertij, & arcum deinde rectæ lineæ, ex 29 eiuſdem, æquales erunt. Hexagonum igitur æquilaterum. Quòd uerò ſit etiam æquiangulum, id ſic patet. Quoniam enim ſingulæ huius hexagoni laterum circumferentiæ uel arcus, ut quidem demonſtratum eſt, inter ſe ſunt æquales, ſumptis duobus quibus uidelicet nul



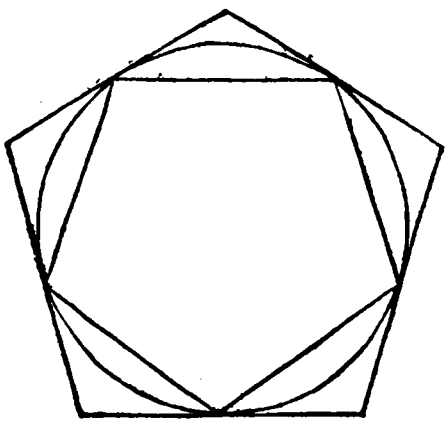
lus eſt communis terminus, ſi utriq; eorum tres illi qui ab his duobus intercipiuntur, additi fuerint: & collecti ſic arcus, ex communi quadam notitia, inter ſe æquales erunt: quare etiam æquales, ex propoſitione 27 tertij, qui ab his æqualibus arcubus ſubtenduntur anguli. Conſtat igitur ſic æqualitas de duobus. Quia autem ſicut de duobus, ita etiam de omnibus, hoc nimirum proceſſu toties quot fuerint anguli minus uno, uſurpato, conſtare manifeſtum eſt: hexagonum igitur hoc æquiangulum eſſe concluditur, & quia etiam æquilaterum. In dato igitur circulo, æquilaterum & æquiangulum hexagonum deſcriptum eſt. quod feciſſe oportuit.

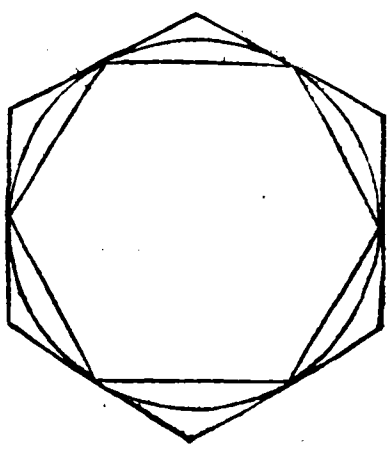
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ, ἴσῃ ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Καὶ ἐὰν διὰ τῶν α β γ δ ε ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν· περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ὑπὸ τὸ πεντεκαιδεκάγωνον εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ὑπὸ τὸ πεντεκαιδεκάγωνον εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομεν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc quidem manifeſtum eſt. Quòd uidelicet hexagoni latus, æquale ſit ei, quæ ex centro circuli producitur, rectæ lineæ. Et ſi per ſex angularia hexagoni puncta contingentes circulum deduxerimus, quod tum circa circulum, æquiangulum & æquilaterum hexagonum deſcriptum ſit, perinde atq; pentagonum quoq;, ut antè dictum eſt. Inſuper in dato hexagono, uel circa datum hexagonum, per ea quæ ſimiliter de pentagono dicta ſunt, circulum deſcribemus. quod admonuiſſe oportuit.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.

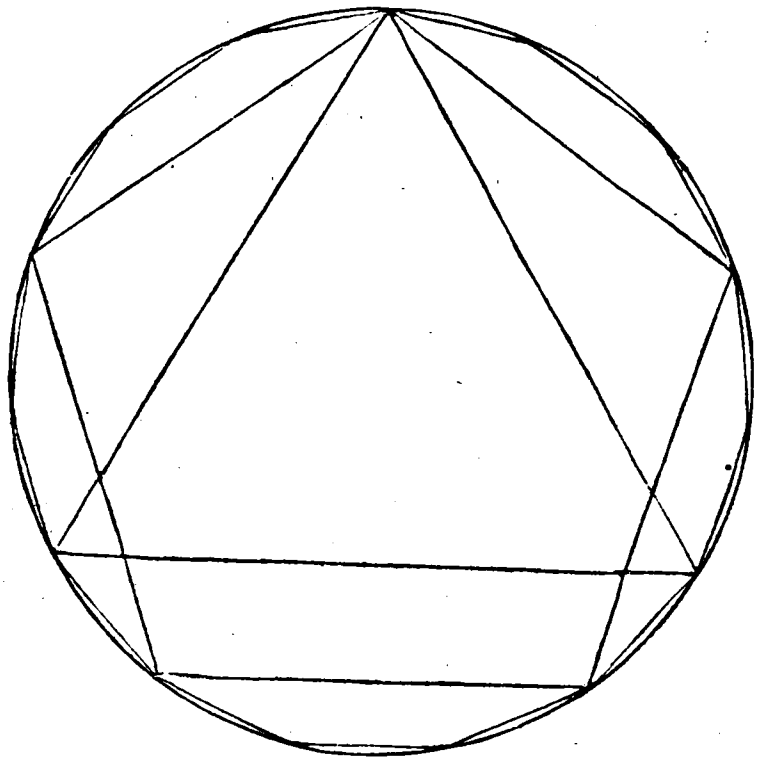
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus, atq; propoſitum, quindecagonum in eo, æquilaterũ & æquiangulum deſcribere. Circulo igitur dato, primùm in eo triangulum æquilaterum, deinde æquilaterum pentagonum, illud quidem ex propoſitione 2, hoc uerò ex huius

huius deſcribatur. Curetur tamen, ut unus trianguli & unus pentagoni angulus, unum in circumferentia punctum commune ſortiantur. Et quoniam, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum in circulo dato deſcribere propoſitum eſt, cum circumferẽtia ideo in quindecim partes æquales diuidenda ſit, infertur, ut qualium tota circumferentia fuerit æqualium partium quindecim: talium tertiam eius partem, quæ à trianguli latere ſubtenditur, quinq; : quintam uerò, quam pentagoni la-



tus ſubtendit, tres eſſe debere. Exceſſus igitur arcus illius ſuper hunc taliũ duarum, qualium tota circumferentia eſt quindecim, partium erit. Quare eo, per propoſitionem 30 tertij, bifariam diuiſo, quantum dati circuli quindecagoni latus fuerit, alterutra ipſius exceſſus medietas indicabit. Quo habito, ſi id quindecies circulo ordine, per primam propoſitionem huius, coaptatum fuerit, propoſitioni tandem ſatisfactum erit, In circulo nimirum, quindecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcriptum. quod feciſſe oportuit. Demonſtratio neglecta eſt, cum ex ſtructura hæc clara ſit.

APPENDIX.

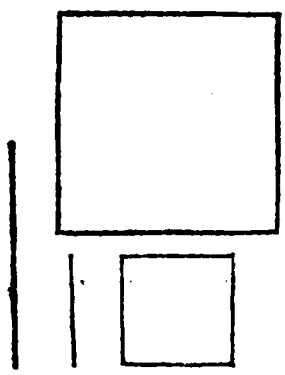
Porrò circulo dato, quomodo circa ipſum quindecagonum æquilaterum & æquiangulum: Inſuper, quomodo circa quindecagonum datum, circulus deſcribendus ſit, licet illa ab Euclide non tradantur, nemini tamen difficile erit, ſi modò eorum quæ in hoc libro ad 12 & 13 propoſitiones de pentagono dicta ſunt, meminerit. Atq; hactenus de inſcriptionibus & circumſcriptionibus figurarum inter ſe, cuius quidem tractatio in hoc quarto libro erat propoſita.

FINIS LIBRI QVARTI.

ΣΧΟΛΙΟΝ

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ Ε,
ΑΔΗΛΟΥ.

Σκοπὸς τῷ ε βιβλίῳ περὶ ἀναλογιῶν παραλαβεῖν. Κοινὸν γὰρ τοῦτο τῶν βιβλίων γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς, καὶ μουσικῆς, καὶ παντὸς ἁπλῶς μαθηματικῆς ὑπάρχει. Τὰ γὰρ ἐν αὐτῷ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἁρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικὴν τεταγμένοις ὡς προείρηται ὑπάρχει. Ὁ μὲν οὖν σκοπὸς, οὗτος. Τὸ δὲ βιβλίον, Εὐδόξου τινὸς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι, τοῦ Πλάτωνος μαθητοῦ. Ἐπεὶ οὖν σκοπὸς περὶ ἀναλογιῶν, ἡ δὲ ἀναλογία λόγων τινῶν ἐστὶς· ἀναγκαῖον γνῶναι πρότερον τίνες οἱ τοιοῦτοι λόγοι. Δεῖ γὰρ τὰ ἁπλᾶ πρότερον γνῶναι τῶν συνθέτων. Ἐὰν γάρ τινα τινὰ συγκρίνωσι πρὸς ἄλληλα, φορὰς ἐποιοῦν δύο μεγέθη, αὐτὰ μὲν Ὅροι καλοῦνται· ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸ ἕτερον μετάβασις, Διάστημα· ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἕτερον σύγκρισις, Σχέσις, ἣν ἐκάλεσαν οἱ παλαιοὶ λόγον. Τὴν δὲ φύσιν τοῦ λόγου πρὸς ἄλλον λόγον, κατ' ὁμοιότητα σύγκρισιν, ἤτοι σχέσιν, Ἀναλογίαν προσηγόρευσαν, ἵνα μὴ ὡς τόδε τὸ μέγεθος συγκρίνηται, ἀλλ' ὡς ὅδε ὁ λόγος πρὸς τόνδε τὸν λόγον. αὕτη δὲ ἡ σύγκρισις. Λόγου λέγεται λόγος· οἷον ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν λοιπὴν πλασίονα λόγον ἔχει· τὸ αὐτὸ δὴ τὸν πλασίονα λόγον ἐχούσης τετράγωνον, τετραπλασίονα λόγον ἕξει πρὸς τὸ αὐτὸ δὴ λοιπῆς τετράγωνον, ἥπερ ἡ μείζων εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Τὰ γὰρ μήκει πλάσια, δυνάμει τετραπλάσια. Ὁ τοίνυν λόγος τῶν τετραγώνων, τετραπλάσιος ὢν τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν πλασίος ἐστί· Καλεῖται δὲ οὗτος, ὁ λόγου λόγος. Ἀλλ' ἐπὶ αὐτοῦτο ὑπὸ τὸν πόδα. Διττὸς γὰρ ὁ λόγος· ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ. καὶ τὸ μὲν ἐν ἀξίᾳ ὁμοίᾳ ἐστὶν ἑτέρου πρὸς τὴν πεῦσαν χρείαν, τὸ δὲ κατὰ τὸν ποσὸν εἴδη ἐστὶν ε. Ὁ μὲν γὰρ ἐστὶ Πολλαπλάσιος· ὡς τὸ γ ὁ ς. ὁ δὲ Ἐπιμόριος· ὡς τὸ γ ὁ δ. ὁ δὲ Ἐπιμερὴς· ὡς τοῦ γ ὁ ε. Ἐπὶ οὖν μὲν Ἁπλοῖ, οὕτως δὲ ἐπὶ ἁπλούστερος, ὁ πολλαπλάσιος. Ἑτέροι δὲ ἐπὶ τούτων συνθέσεως γινόντες ϛ, ὅτε Πολλαπλασιεπιμόριος· ὡς τὸ γ ὁ ζ. καὶ ὁ Πολλαπλασιεπιμερὴς· ὡς τὸ γ ὁ η.



Ὑπερόγκοι δέ εἰσιν οἱ ἐλάττονος τῶν μειζόνων, Ὑπερπολλαπλάσιοι, ὑπερεπιμόριοι, ὑπερεπιμερεῖς, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ἰστέον δέ, ὡς ἡ βιβλίου ἀρχὴ διήρηται, καὶ πρόκειται τὰ μὲν πρῶτα τῶν τῶν ἁπλουστέρων διδασκαλίαν, συντίθησι, τῶν τῶν πολλαπλασίων, τὰ δὲ δεύτερα καθολικώτερα περὶ παντὸς τῶν λόγων. Δεῖ γὰρ ὑπὸ παντὸς, ὡς εἴρηται, προαγματος τῶν τ ἁπλῶν ἡγεῖσθαι διδασκαλίαν. Τῶν δὲ φ τοῦ βιβλίου διαιρέσεως τρόπων, καὶ ἡ τῶν ὅρων γενήσεται διαίρεσις. οἱ μ̄ γὰρ πρότεροι περὶ ὑπερόγκων, ἐστὶ πολλαπλάσιοι· οἱ δὲ ἑξῆς καθολικώτεροι περὶ παντὸς τῶν λόγων.

BREVIS

BREVIS INTERPRETATIO

HVIVS QVINTI LIBRI, INCERTI AVTORIS.

Scopus huius quinti libri eſt is, ut tractetur de proportionib. Pertinet enim liber iſte & ad geometriã, ac arithmeticam & muſicã, omnesq; alias quæ ſimpliciter mathematicæ diſciplinæ uocãtur. Etenim quę in ipſo traduntur, non geometricis ſolum contemplationibus cõueniũt, illisq; propria exiſtũt, ſed & omnib. quę ſub mathematica ipſa cõprehenduntur, & ut prius dixi, diſciplinis. Sit igitur hic libri ſcopus. Cæterùm librũ ipſum cuiuſdã Eudoxi inuentũ eſſe aſſerunt, diſcipuli Platonis. Cũ igitur ſit ſcopus de proportionib. proportio aũt ſit rationũ quarundã habitudo: quę ſint illæ rationes; prius cognoſcendum erit neceſſariò. Oportet enim ſimpliciũ cognitionẽ præcedere, cũ de cõpoſitis dicatur aliquid. Itaq; ſi quædam inter ſe cõparentur (ſumamus aũt duas magnitudines) illæ quidem Termini appellabũtur, tranſmutatio aũt ſiue trãſitus ab uno in alterũ, Interuallum dicitur. Cõparatio uerò alterius ad alterũ, Habitudo uocatur, quam ueteres Rationẽ nominauerũt. Collationem uerò huiuſcemodi rationis ad aliã rationẽ, quæ fit ſimilitudine quadã, aut eiuſcemodi habitudinem, appellarũt Proportionẽ, nõ perinde quaſi magnitudo illa cõpareť, ſed ut illa ratio ad illã rationẽ: quæ deinde collatio, Rationis ratio dicitur. ut ſi duæ fuerint rectæ lineę, quarũ una alterius reſpectu duplam habeat rationem: quadratum quod ab ea linea eſt deſcriptum, quæ duplam rationem habet, quadruplã quoq; rationẽ habebit, reſpectu uidelicet eius quadrati, quod ab altera eſt deſcriptũ, ſiquidẽ collatio habeať longioris lineæ ad breuiorẽ rectã. Quæ enim lõgitudine dupla ſunt: ea potẽtia quadrupla exiſtũt. Ratio igitur quadratorũ quadrupla exiſtens, duplæ rationis exiſtentiũ rectarũ dupla eſt. Talis aũt uocať Rationis ratio. Sed fuerit illa in quãtitate. duplex enim eſt ratio, una in dignitate, altera uerò quantitatis. ac dignioris quidẽ nulla ſpecies uidetur eſſe ad preſentẽ uſum accommodata: huius uerò rationis, quæ ſecundũ quantitatẽ dicitur, ſpecies ſunt quinq;. Alia enim ratio Multiplex appellatur: cuiuſmodi eſt 6 ad 3: alia Superparticularis, ut 4 ad 3: alia uerò Superpurtiens, ut 5 ad 3. atq; hæ quidẽ ſunt Simplices, quarũ tamen omnium rationũ magis ſimplex eſt Multiplex. Reliquæ uerò duę ſpecies ex harũ naſcũtur cõpoſitione, Multiplex ſuperparticularis ſcilicet, ut 7 ad 3: & Multiplex ſuperpartiens, ut 9 ad 3.

Sub rationes aũt uocãtur, cum minores maioríb. cõferuntur: Submultiplices, Subſuperparticulares, Subſuperpartiẽtes, & ſic deinceps. Sciendum aũt, diuidi hunc librũ in duas partes, et initiò quidẽ ſimpliciũ cõtinet doctrinã, hoc eſt, eam quę de multiplicib. tractat, deinde uniuerſaliora de omnib. rationib. tradũtur. Oportet enim, ut iã oſtẽſum eſt, in omni re ſimpliciũ doctrinã prędecedere. Si quis aũt cõſideret modũ diuiſionis, terminorum etiã diuiſio facta erit. Nã priores quidẽ, ſcilicet termini, Multiplices: qui autem deinceps ſequuntur uniuerſaliores, de omnibus rationibus.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber quintus.



Et hic quintus liber Euclidis περὶ τοῦ λόγου καὶ τῆς ἀναλογίας, hoc eſt, de ratione & proportione. Quæ igitur ad hanc tractationem requiruntur uocabula, primò, ut in præcedentibus etiam factum eſt, ordine definit.

ΟΡΟΙ.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

DEFINITIONES.

1 Pars eſt quantitas quantitatis, minor maioris, quando minor metitur maiorem.

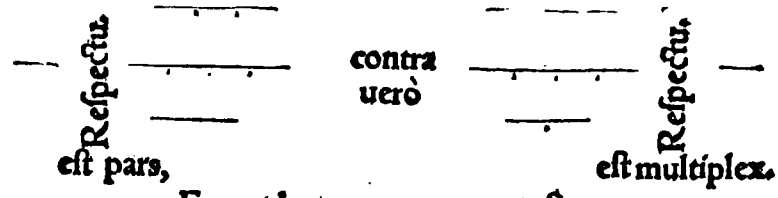
μέγεθος) Licet hac uoce continua tantum quantitas, ſub qua nimirum lineæ, ſuperficies & corpora comprehenſa ſunt, intelligatur, unde ſic quidem magnitudinis ſignificationem habet: tamen quia omnia, quæ in hoc libro, tam per definitiones quàm etiam propoſitiones, ab authore nobis præſcribũtur, per numeros æque ut per lineas oſtendi poſſunt: non magnitudinis, ſed quantitatis uoce, ſub qua, tanquam uocabulo generali, numeri etiam cõprehenduntur, in uerſione uſi ſumus, id quod Lector æquo animo ferat, præſertim cũ in hoc autori nihil detrahatur, cumq; etiam ſingula numeris declarauerimus.

Καταμετρεῖν) autem eſt metiri, atq; hoc loco diuidere aliquid integrè, & quaſi ad libellam, ut dicitur, ſic quòd nõ maneat, ultima ſubtractione facta, aliquid minore minus, ſed nihil omnino, ad menſurandum amplius relinquatur.

Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

2 Multiplex eſt, quantitas quantitatis, maior minoris, quando maior menſuratur à minore.

Harum definitionum de parte & multiplici exempla ſunt.



Exempla per numeros expoſita.

3 reſpectu ſcilicet { 6, 9, 12, 15, 21 } eſt pars, Contra uerò { 6, 9, 12, 15, 21 } reſpectu 3, multiplex

Λόγος

Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα πρὰ σχέσις.

3 Ratio, eſt duarum quantitatum eiuſdem generis, aliquatenus inter ſe quædam habitudo.

Duæ requiruntur, ut ex definitione colligitur, ad rationem cõſtituendam, quantitates, atq; ea deinde inter illas habitudo, quanta nimirũ una reſpectu alterius fuerit. hoc inquam, uel illa conſideratio, ſiue reſpectus, ratio dicitur. Exempla ſunt,

_____ ad _____

_____ ad _____

uel _____ ad _____

Exempla per numeros expoſita.

25 ad { 25, 5, 24, 17, 3, 7 } uel contra { 25, 5, 24, 17, 3, 7 } ad 25, eſt ratio,

hoc eſt, quidam reſpectus, ut ratione primi exempli in utroq; ordine, numeri ſeſe mutuo æqualiter reſpiciunt. Ratione ſecundi, in priori quidem, eſt prior quantitas numerus poſterioris quincuplus, in poſteriori uerò ſubquincuplus, & ſic ordine deinceps. Illa autem cõſideratio quantitatum inter ſe, unius ad alteram, dicitur ratio. Et ſicut lineæ ac numeri, ita quoq; ſuperficies, corpora, ac quæq; res aliæ inter ſe conferri poſſunt.

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

4 Rationem habere inter ſe quantitates dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ inuicem excedere.

Exempla ſunt.

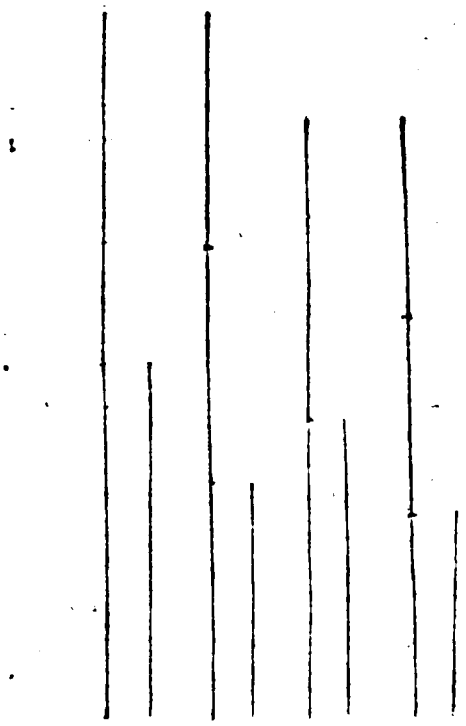
27	18	12	12	18	27
9	6	4	4	6	9
36	36	36	27	30	22
9	9	9	9	5	11

Sic per lineas exempla præſcribi poſſunt.

Εν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν μὲν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

5 In eadem ratione quantitates dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æquè multiplicia à ſecundæ & quartæ æquè multiplicibus, iuxta quamuis multiplicationem utrun-

que ab utroq; ,uel unà deficiunt,uel unà æqualia ſunt, uel unà excedunt, ſumpta inter ſe.



prima ſecunda tertia quarta quantitas.

Dicit definitio. Quarum rationum antecedentes uno aliquo numero, uno item, ſiue illo priori uel quouis numero alio, & conſequentes quantitates multiplicatæ fuerint, multiplex inſuper primæ ſimili modo à multiplici ſecundæ defecerit, ei æquale fuerit,uel idem exceſſerit. ſicut multiplex tertiæ deficit, æquale eſt , uel excendit multiplex quantitatis quartæ: in eadem ratione dicuntur eſſe hæ quantitates. Oſtendit autem hoc in quatuor quantitatibus autor, & dicit, In eadem ratione quantitates, &c.

Exempla in numeris ſunt.

Multi.	24	18	12	9	exceſſus
	24	24	12	12	æqualitas
	16	18	8	9	defectus.
Quantita.	8	6	4	3	
	prima	ſecun.	tertia	quar.	

Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

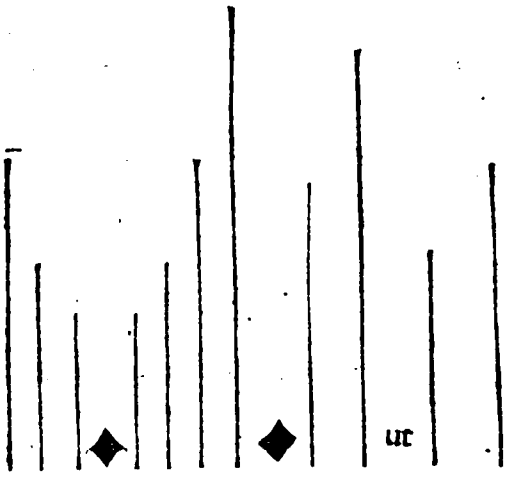
6 Eandem autem habentes rationem quantitates, proportionales uocentur.

Huius definitionis exempla ſunt,quæ ex definitionibus præcedentibus, quarta & quinta,colliguntur.

Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, ὁ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιος ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, ὁ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιος μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

7 Quando uerò æquè multiplicium,multiplex primæ exceſſerit multiplex ſecundę,ipſum uerò multiplex tertiæ non exceſſerit multiplex quartæ:tunc prima ad ſecundam maiorem quàm tertia ad quantitatem quartam rationem habere dicitur.

Cohæret



uel contrà

Cohæret hæc definitio cum præcedentibus duabus, quinta & ſexta. Quando uerò dicit, æquè multiplicium, tum primæ & tertiæ, ſecundæ item & quartæ quantitatum, intelligendum eſt.

Exempla in numeris ſunt.

16 8 18 18 24 20 27 45
8 4 9 9 8 4 9 9

Aliud exemplum.

16 20 18 45
8 4 9 9

Sunt hic tria exempla, quorum primum & ſecundum patent. In tertio autem, licet multiplex primæ in nullo multiplex ſecundæ excedat, cum tamen id minus à multiplici ſecundæ, quàm tertiæ multiplex à multiplice quantitatis quartæ deficiat: erit adhuc primæ ad ſecundã maior, quàm tertiæ ad quartam quantitatẽ ratio.

Alia exempla.

22 12 14 18 21 18 15 24
11 ad 2 & 7 ad 3 Item 7 ad 3 & 5 ad 4

APPENDIX.

Cum quis uelit inter duas rationes iudicare, utra maior ſit, commodiſſimè per hanc definitionem id expedire poterit.

Ἀναλογία δέ ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

8 Proportio uerò eſt, rationum ſimilitudo.

ADMONITIO.

Similes ſiue eædem, & diſſimiles ſunt rationes, quantitates uerò æquales & inæquales inter ſe, quod hic annotare libuit.

Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

9 Proportio autem in tribus terminis minima eſt.

Hoc eſt, ad conſtituendam proportionem requiruntur ad minus tres quantitates. Cum enim proportio ſit rationum ſimilitudo, & non rationis: ſingulæ uerò rationes duabus quantitatibus, antecedente ſcilicet & conſequente, conſtent: ſequitur proportionem, duabus rationibus præſcriptam, quatuor terminos requirere. Sed quia non rarò ſolet contingere, ut unius rationis unus terminus bis repetatur, ſemel quidem ut ſit conſequens prioris, poſtea uerò ut ſit poſterioris rationis antecedens, conſtat, tres terminos, ut proportio conſtituatur, aliquando ſufficere, pauciores uerò nunquam.

Exempla sunt.

9 6 4 16 12 9 16 20 25

Alia.

9 ad 4 ut 27 ad 12 32 ad 24 ut 12 ad 9

Similiter alia.

27 18 ut 12 8 64 80 ut 100 125

Adhuc aliud.

12 ad 15 ut 8 ad 10, atq; ut 4 ad 5

Cæterùm, maximam proportionem quot termini constituant, hoc non definit Autor, cum ea semper quoad quis uoluerit, ut habet propositio in octauo secunda, per unum terminum augeri possit.

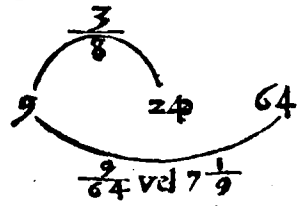
Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

10 Quando uerò tres quantitates proportionales fuerint: prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur, quàm ad secundam.

Ἀνάλογον ᾖ, hoc est, continuè unam & eandem rationem habuerint.

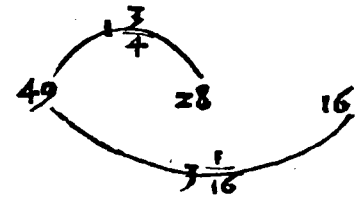
Exempla sunt.

Denominatio uel ratio primæ ad secun.



Denominatio uel ratio primæ ad tertiam.

Denominatio uel ratio primæ ad secun.



Denominatio primæ ad tertiam, &c.

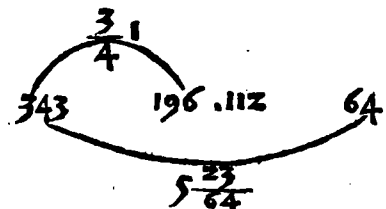
Est autem respectu prioris duplicata, hoc est bis sumpta.

Exempla huius definitionis alia, sunt numeri uel quantitates, quas examinat definitio præcedens quarta.

Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλέον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

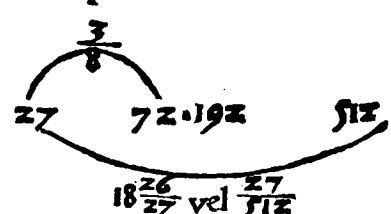
11 Quando autem quatuor quantitates proportionales fuerint: prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur, quàm ad secundam. Et semper ordinatim una plus, prout quidem proportio extensa fuerit.

Ratio primæ ad secun.



Ratio primæ ad quartam.

Ratio primæ ad secun.



Ratio primæ ad quartam.

Est autem respectu primæ collationis triplicata, hoc est, ter sumpta.

Ὁμόλογα

Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

12 Similis rationis quantitates dicuntur esse, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus.

Est hæc definitio modus quidam & canon, per quem, sicuti ex præcedenti quinta, quæ quantitates proportionales sint, cognoscitur, atq; huius sensus talis. Quatuor aut pluribus quantibus, pari numero propositis, quarum semper duæ & duæ inter se conferuntur, si quidem antecedentes illam inter se, quam ipsæ consequentes, eodem ordine sumptæ, rationem habuerint: similis rationis hæ quantitates esse dicuntur.

pri 9 / 6 — ter. 6 / 4 quarta

Item

An 12 / 8 — An 9 / 6 Cõse

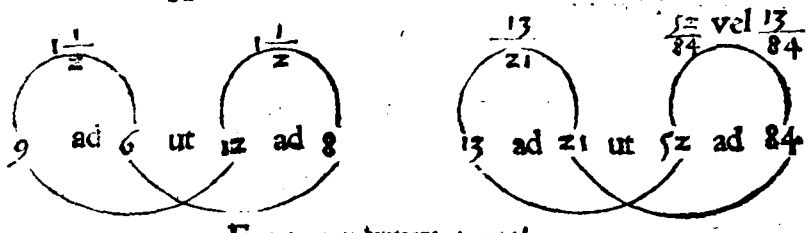
Quia prima & tertia, hoc est antecedentes, illam quam consequentes, quæ sunt secunda & quarta quantitates, inter se habent rationes: similis igitur rationis prima, secunda, tertia & quarta quantitates erunt. Sic de pluribus idem intelligitur.

Ἐναλλὰξ λόγῳ ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸν ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸν ἑπόμενον.

13 Permutata ratio, est acceptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

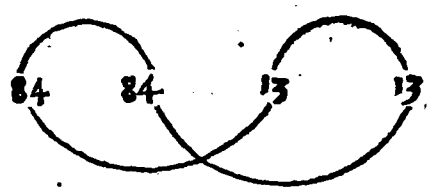
Similis rationis quantitatibus positis: erit, ex permutata ratione, antecedens ad antecedentem, hoc est prima ad tertiam, sicut consequens ad consequentem, secunda nimirum ad quantitatem quartam.

Ex hypoth. Ex hypot.



Ergo ex permutata ratione,

Aliud exemplum in ratione æqualitatis.



In τῇ ἐναλλὰξ λόγῳ.

APPENDIX.

Est huius, & proximè sequentium quatuor definitionum, generalis hypothesis, ut uidelicet quantitates similis rationis habeant.

Ἀνάπαλιν λόγος, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου ὡς ἑπομένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

14 Conuersa ratio, est acceptio consequentis tanquam antecedentis, ad antecedentem tanquam ad consequentem.

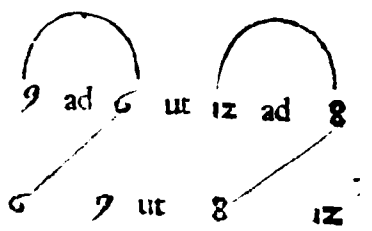
Vt si fuerit proportionalium quantitatum prima ad secundam, ex hypothesi, ut tertia ad quartam: erit contrà ex conuersa ratione, secunda ad primam, nimirum consequens ad antecedentem, sicut quarta ad tertiam, similiter consequens ad antecedentem.

Exemplum est,

geometricum quidem



in numeris uerò

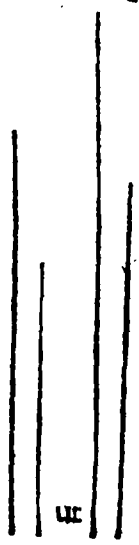


Σύνθεσις λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

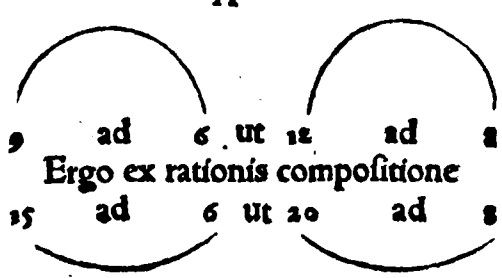
15 Compositio rationis, est acceptio antecedentis cum consequente, sicut unius, ad eandem consequentem.

Exemplum est,

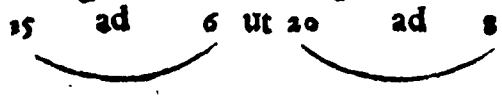
geometricum quidem



in numeris uerò,
Ex hypothesi



Ergo ex rationis compositione



Διαίρεσις

Διαίρεσις δὲ λόγου, ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ἡ ὑπερέχει, τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

16 Diuisio rationis, est acceptio excessus, quo excedit antecedens ipsam consequentem, ad eandem consequentem quantitatem.

Exemplum est.

Quia	9	ad	6	ut	12	ad	8	ex hypo.
quare	3	ad	6	ut	4	ad	8	ex diuisa ra.

Ἀναστροφὴ λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἡ ὑπερέχει ὁ ἡγούμενος τοῦ ἑπομένου.

17 Conuersio rationis, est acceptio antecedentis ad excessum, quo excedit antecedens ipsam consequentem quantitatem.

Exemplum est.

Cum ex hypothesi fuerint 9 ad 6 ut 12 ad 8: erunt ex conuersionis ratione 9 ad 3 ut 12 ad 4

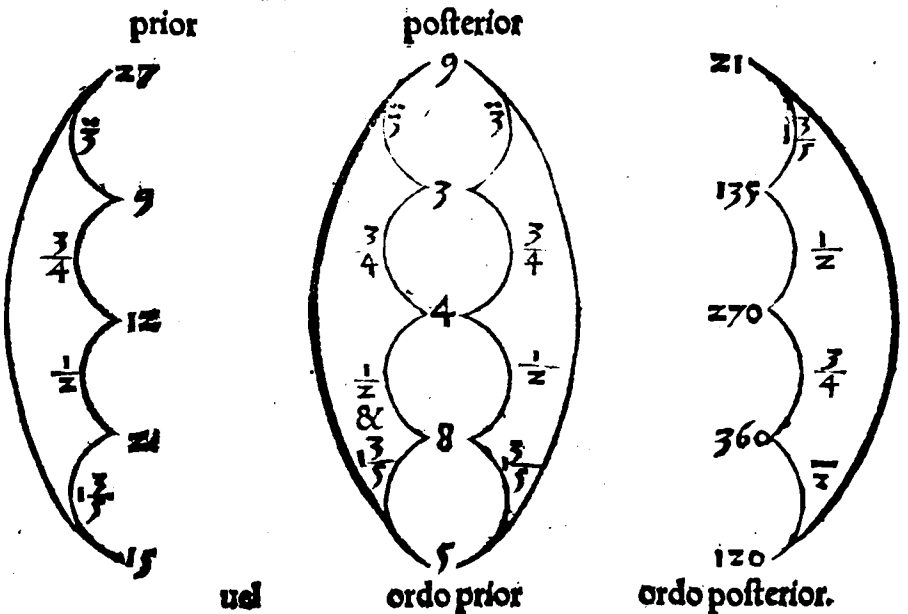
SEQVITVR EXEMPLVM GENERALE, QVINQVE præmissas proportionis proprietates declarans.

Quia 15 sunt ad 8 ut 45 ad 24 ex hypothesi,

igitur { 15, 8, 23 erunt ad 7, 15 } { 45, 15, 8, 8, 7 } ut { 8, 24, 69, 21, 45 } ad { 24, ex permutata ratione; 45, ex conuersa ratione; 24, 24, ex rationis { compositione, diuisione } ; 21, conuersione. }

Διίσου λόγου ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Ἢ ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων, καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Ordo



uel ordo prior ordo posterior.

18 Æqua ratio eſt, pluribus exiſtentib. quantitatibus, & alijs eis æqualibus multitudine, cũ duabus ſumptis, & in eadem ratione, quando fuerit, ſicut in prioribus quantitatibus, prima ad ultimam: ſic in poſterioribus quantitatibus, prima ad ultimam. Vel aliter. Æqua ratio, eſt acceptio extremarum, per ſubtractionem mediarum.

Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ᾖ, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι.

19 Ordinata proportio eſt, quando fuerit, ſicut antecedens ad conſequentem ſic antecedens ad conſequentem, ſicut & conſequens ad aliud quiddam ſic conſequens ad aliud.

Vult definitio. Ordinatis tribus quantitatibus, & alijs deinde totidem, quando fuerit prima priorum ad ſuam ſecundam, ſicut prima poſteriorum ad ſecundam, illarum deinde ſecundam ad tertiam, ut ſecunda harũ ad tertiam, atq; ſic ordine deinceps, ſi plures quàm tres, ex utraq; parte, quantitates fuerint: infertur ut in præcedenti, quòd ſcilicet tandem extremorum utrinq; ſit æqua ratio.

Exemplum eſt,

$4\frac{1}{2}$	Antecedens	$1\frac{4}{5}$	9	18	Antecedens
	Conſequens		5	10	Conſequens
	Aliud	$2\frac{1}{2}$	2	4	Aliud

Poteſt hæc definitio, atq; etiam proximè ſequens ſe extendere, & intelligi de pluribus quantitatibus, quemadmodum ipſa præcedens, ut patet.

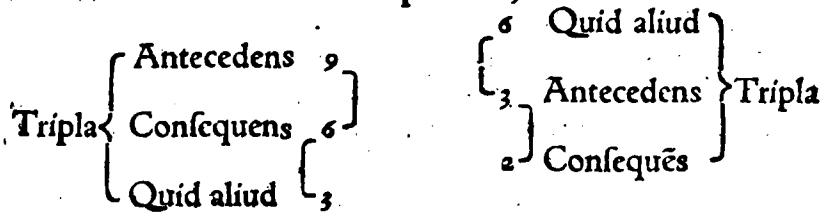
Ordo prior	Ordo poſte.	Ordo prior	Ordo poſte.
27	9	16	64
9	3	8	32
12	4	5	20
24	8	9	36
15	5	3	12

Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

20 Perturbata uerò proportio eſt, quando tribus exiſtentibus quantitatibus, & alijs eis æqualibus multitudine, fit, ſicut quidem in prioribus quantitatibus antecedens ad conſequentem, ſic in poſterioribus quantitatibus antecedens ad conſequentem: ſicut autem in prioribus quantitatibus, conſequens ad aliud quiddam, ſic in poſterioribus quantitatibus, id aliud ad antecedentem.

Exemplum

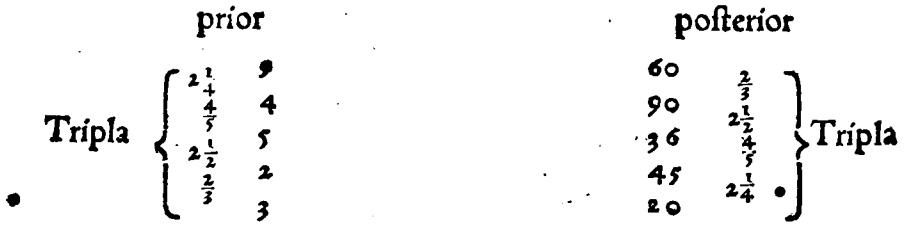
Exemplum eſt,



Alia duo exempla

Anteced.	9	9	Quid aliud	Antec.	7	8	Quid aliud
Conſeq.	3	24	Antecedens	Conſeq.	4	14	Antecedens
Quid aliud	8	8	Conſequens	Quid al.	7	8	Conſequens

Exemplum pro quinq; quantitatibus in utroq; ordine.



ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. A.

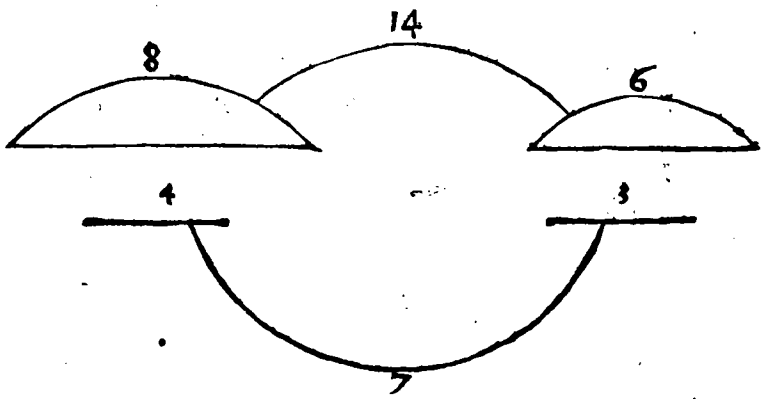
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

PROPOSITIONES.

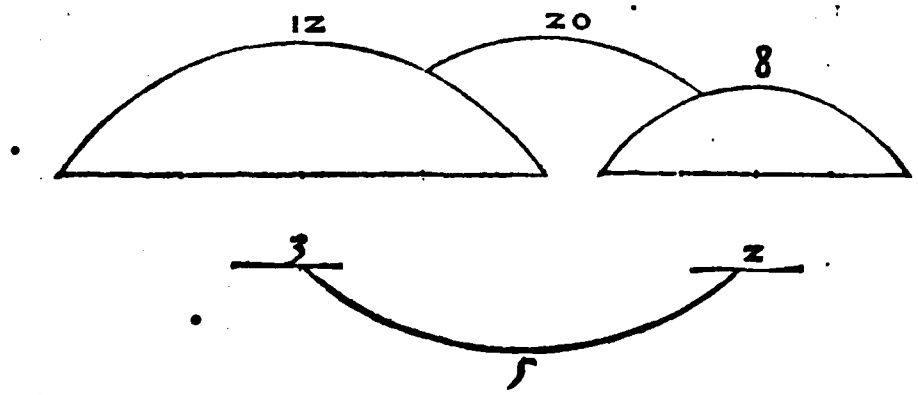
PRIMA. I.

Si fuerint quotcunq; quantitates, quotcunq; quantitatum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices: quàm multiplex eſt una quantitas unius, tam multiplices erunt omnes omnium.

Sint quotcunq; quantitates, ſiue duæ, tres, quatuor aut plures, aliarum totidem æquè multiplices, quæq; recto ordine ſuæ, dico, quàm multiplex eſt una multiplicium reſpectu ſuæ inferioris, tam multiplices eſſe multiplices omnes, ſimul ſumptas, omnium inferiorum ſimul ſumptarum. Eſt huius propoſitionis demonſtratio



potiſſimum illa communis noticia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. Cum enim inferiores æqualiter, ex hypotheſi, in ſuis multiplicibus contineantur: ſequitur, ut quot portiones una inferiorum in ſua multiplici æquales habuerit, totidem etiam & reliquarum quæq; habeat. Diuiſis ergo multiplicibus, unaquaq; ſcilicet in ſuas portiones, quot in una earum portiones ſunt ſuæ inferiori uel parti æquales, tot & in unaquaq; alia erunt: atq; inſuper quemadmodũ primæ portiones multiplicium ſuis inferioríb. ſunt æquales, ita ordine quæq; aliæ. Æqualibus igitur æqualibus additis, erunt multiplicium portiones eiuſdem ordinis, primi ſcilicet ſecundi uel tertij & reliqui, ſi tot fuerint, ſimul ſumptæ, ipſis inferioríb. ſimul ſumptis æquales. Quare ſi primis ſecundæ multiplicium portiones additæ fuerint, aggregata ad partes



duplicia erunt. Quod ſi tertiæ his adiectæ fuerint: triplicia. Quia autem, ut ex hypotheſi habetur, in una multiplici non plures portiones ſunt ſuæ inferiori æquales, quàm in alia: quoties igitur multiplex una ſuã inferiorem uel ſubmultiplicem continet, toties & multiplicium aggregatum, id quod ex inferioribus, hoc eſt multiplicibus, colligitur, cõtinere neceſſe eſt. Si fuerint igitur quotcunq; quantitates, quotcunq; quantitatum, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

Sequitur exemplum pro quatuor.

99

Multipli.	24			18			21			36			ſuperiores
	8	8	8.	6	6	6.	7	7	7.	12	12	12	
Submulti.	8			6			7			12			inferiores

33

Poteſt & huiuſmodi exemplum proponi.

		14				28						
Superiores	7		7			9		19			9	
					Item							
Inferiores	7		7			9		18			9	
		14				28						

In his duobus exemplis, quemadmodum nec prima, ſecunda, neq; etiam tertia ex ſuperioribus ſuæ inferioris eſt multiplex, ſed ei æqualis: ita etiam ſuperiorum aggregatum, eius quod ex inferioribus colligitur, non multiplex, ſed æquale eſt. Sed ad propoſitum nihil, uel parum, cum de æque multiplicibus, & non æqualibus quantitatibus hæc intelligenda ſit.

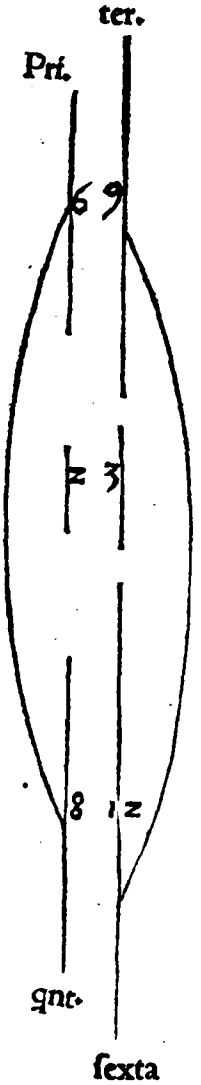
ΠΡΟΤΑΣΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

PROPOSITIO II.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, & ſexta quartæ: & compoſita, prima ſcilicet & quinta, ſecundæ æquè erit multiplex, & tertia & ſexta quartæ.



Sint ſex quantitates, & eſto quòd prima ſecundæ, ut tertia quartæ, ſit multiplex: atq; etiam quinta eidem ſecundæ, ut ſexta quartæ: dico ergo, & compoſitam ex prima & quinta ipſi ſecundæ, ut eſt compoſita ex tertia & ſexta ipſi quartæ, multiplicem eſſe. Quoniã enim prima ſecundæ & tertia quartæ, ex hypotheſi æquè multiplex eſt: quot igitur portiones ſibi æquales habet ſecunda in prima, tot habet & quarta in ipſa tertia: atq; eadẽ ratione, quot in quinta ſecunda, tot etiã in ſexta portiones ſibi æquales habet ipſa quarta. Quare quoties ſecunda in ipſa prima & quinta reperitur, toties etiã quarta in quantitatib. tertia & ſexta. Quàm multiplex igitur eſt cõpoſita ex prima & quinta ſecundæ, tam multiplex eſt & cõpoſita ex tertia et ſexta ipſius quartę. Aequè igitur multiplices ſunt, compoſita ex prima & quinta ſecundæ, & compoſita deinde ex tertia & ſexta ipſius quartæ. Quare ſi prima ſecundę æquè fuerit, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ALIA HVIVS REI DEMONSTRATIO.

Sint quantitates, quot & quales propoſitio requirit, &cæ. Quoniam enim ſecunda in prima & quinta, ex hypotheſi, to

quinquies		quinquies	
Te	bis	ter	bis
12	8	9	6
	4		3

ſexta ties continetur, quoties quarta in quantitatibus tertia & ſexta, ſi iam ad ęquales, priorum multiplicium portiones denominantes numeros, poſteriorum multiplicium portiones denominantes æquales numeri addantur: ipſi toti, denominantes multiplicium portiones numeri, ex communi illa notitia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. inter ſe æquales erunt. atq; unus quidem, qui quoties ſecunda in compoſita ex prima & quinta, alter uerò quoties quarta in tertia & ſexta ſimul ſumpta continetur, oſtendit. Quare ſic compoſita ex prima & quinta, multiplex eſt ſecundæ: ita & quæ ex tertia & ſexta conſtituitur quantitas, ad ipſam quartã multiplex erit. Si prima igitur ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, & ſexta quartæ: & compoſita, prima ſcilicet & quinta, ſecundæ æquè erit multiplex, & tertia & ſexta quartæ. quod demonſtraſſe oportuit.

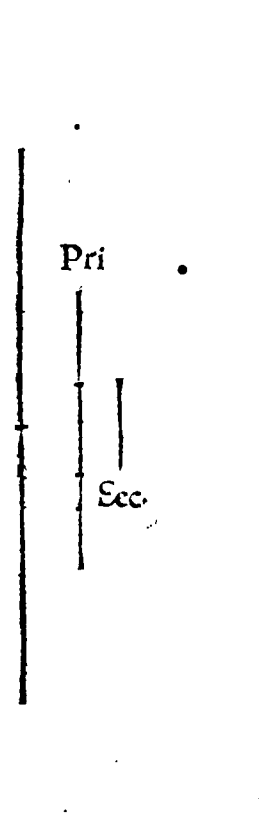
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, λαφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δι' ἴσου τῶν λαφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

PROPOSITIO III.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, & tertia quartæ, ſumantur autem æquè multiplices primæ & tertiæ: & æqualiter ſumptarum utraq; utriuſque æquè multiplex erit, illud quidem ſecundæ, hoc uerò ipſius quartæ.

Sint quatuor quantitates, & eſto quòd prima ſecũdæ & tertia quartæ ſint æquè multiplices. Sint etiam duæ quantitates aliæ, quæ & ipſæ, una quidem primæ, altera uerò tertiæ, ſint æquè multiplices: dico igitur, quòd etiam multiplex primæ ipſi ſecundæ, tertiæ deinde multiplex ipſi quantitati quartæ æquè multiplices ſint. Eſt huius propoſitionis demonſtratio ſecunda præmiſſa, ſi toties ea, quoties prima in quinta continetur, minus uno, repetatur. Hoc autem apparet, ſi quinta quanti-



Exemplum in numeris.

63 84

prima 9 12 tertia

ſecunda 3 4 quarta quantitas

Aliud

24 30

8 8 8 10 10 10

prima 8 tertia 10

ſecun. 4 quar. 5

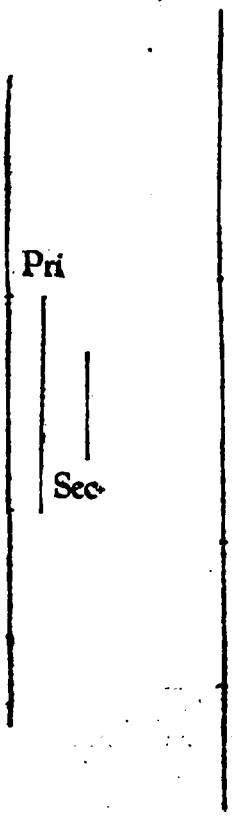
tas & ſexta in portiones, primæ & tertiæ quantitatibus æquales, diſtribuantur, loco primæ deinde & tertiæ quantitatum, æquales ex quinta & ſexta portiones ſumantur, quod indicaſſe oportuit.

ALIA ET PLANIOR HVIVS PROPOSITIONIS demonſtratio.

Sint quatuor quantitates, &c. Quoniam enim primæ & tertiæ æquè ſunt, ex hypotheſi, aſſignatæ multiplices: quot igitur portiones ſibi æquales in ſua habet ipſa prima, tot & tertiam in ſua habere neceſſe erit. quare utraq; multiplici in portiones ſuæ inferiori æquales diſtributa: erit utiq; æqualis multitudo portionum unius, ſi-

cut

cut & multiplicis alterius. Quia uerò æquè multiplex eſt prima quãtitas ſecundæ, & tertia quartæ, loco primæ & tertiæ quantitatum, portionibus, quas in ipſarum multiplicibus æquales habent, ſingulis ordine ſumptis: & ipſæ portiones quantitatum ſecundæ & quartæ æquè multiplices erunt. Ordinatis ergo iam ſex quantitatibus, quarũ prima quidem & quinta ſint priores duæ, quas habet prima in ſua multiplici æquales, portiones, ſecunda deinde ſit ipſa ſecunda, ac quarta ipſa quarta. Tertia uerò & ſexta quantitates ſint duæ portiones in multiplici quantitatis tertię, & ipſæ priores. Et quoniam hæ ſex quantitates huiuſmodi ſunt, quales propoſitio præcedens ſecunda requirit, erit per hanc, ex prima & quinta compoſita ita multiplex ſecundæ, ut ex tertia & ſexta compoſita multiplex eſt ipſius quartæ. Igitur, ſi in multiplicibus non plures quàm duæ, primæ & tertię quãtitatibus æquales portiones fuerint: iam ſtatim conſtat ipſa propoſitio. Quòd ſi plures fuerint, maneant ſecunda & quarta quantitates, prima uerò & tertia eſto priorum duarum in multiplicibus portionum aggregata, quinta deinde & ſexta ſint tertiæ in multiplici bus portiones. Et quoniam etiam iam quales propoſitio præcedens ſecunda requirit, ſex quantitates apparent: idem etiam quod prius per eam inferri poteſt. Conſtat itaq; propoſitio, ubi quidem tres fuerint in multiplicibus portiones, ſuis inferioribus æquales. Non aliter procedendum erit, ubi portiones quatuor, quinq; aut plures etiam fuerint, id quod pro pleniore huius propoſitionis declaratione dicere libuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰς ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦτε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰς ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, λαμβανόμενα κατάλληλα.

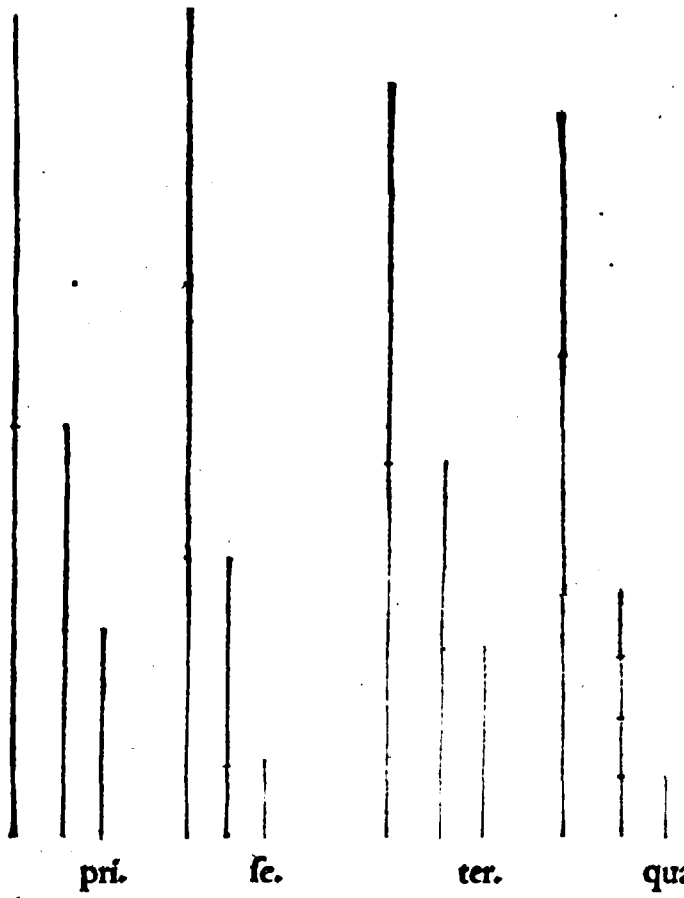
PROPOSITIO IIII.

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: & primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices quantitatum ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ad ſe ſumptæ.

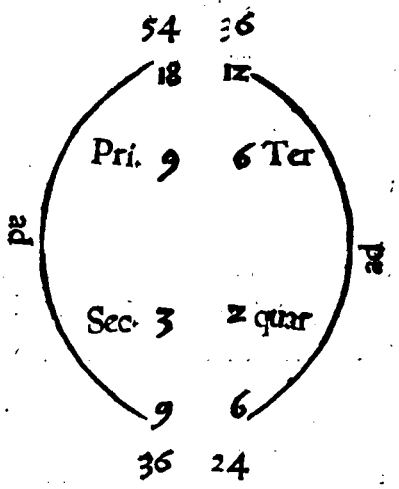
Sint quatuor quantitates, & eſto quòd prima ad ſecundam eam habeat rationem, quam tertia ad quartam. Sint etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, æquè inſuper multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, quantitatum ſecundæ & quartæ: dico igitur, & ipſas primæ & tertiæ æquè multiplices, ad æquè multiplices

ces

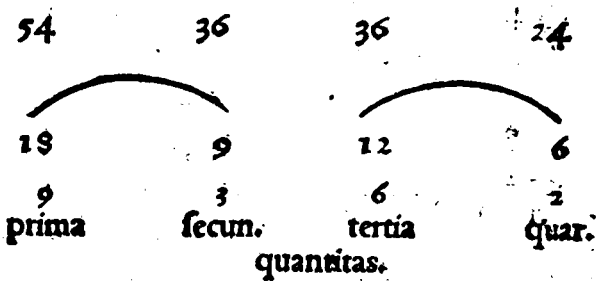
ces quantitatum ſecundæ & quartæ, eandem habere rationem, id quod ſic colligitur. Quoniam ex hypotheſi, primæ & tertiæ æquè ſunt multiplices aſſignatæ, qui-



bus ſi aliæ æquè aſſignentur multiplices: erunt illæ ultimò aſſignatæ, per propoſitionem præmiſſam tertiam, etiam ipſarum primæ & tertiæ æquè multiplices. Per eandem inſuper, cum ſecunda & quarta ſuas æquè multiplices, ex hypotheſi, habeant, ſi ipſis aliæ æquè multiplices aſſignentur: & illæ aliæ, ſecundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima, ſecunda, tertia & quarta, ex hypotheſi, ſunt proportionales: multiplices igitur, de quibus



Poſſunt numeri etiam ſic ordinari.



ſam ſermo ſit, ex conuerſione definitionis quintæ huius, in defectu, æqualitate, & exceſſu æqualiter ſeſe habebunt, atq; deinde, cum hæ eædem multiplices, aliarum etiam

etiam, primarum ſcilicet quantitatum, multiplices ſint: & illę aliæ tandem ex quinta definitione ipſa, ordine, quo ſolent, proportionales erunt. Si prima igitur ad ſecundam & tertia ad quãtitatem quartam eandem rationem habuerint: & primæ &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐπεὶ δὲ ἐδείχθη, ὅτι ἐὰν ὑποδιπλάσιον ᾖ τὸ κ τοῦ μ· ὑποδιπλάσιον καὶ τὸ λ τοῦ ν, καὶ ἐὰν ἴσον· ἴσον, κἂν ἔλασσον· ἔλασσον. Δῆλον ὅτι, ἐὰν ὑποδιπλάσιον ᾖ τὸ μ τοῦ κ· ὑποδιπλάσιον καὶ τὸ ν τοῦ λ, καὶ ἐὰν ἴσον· ἴσον, καὶ ἐὰν ἔλασσον· ἔλασσον. Καὶ ἁπλῶς ἐὰν ὦσιν ὡς τὸ κ πρὸς τὸ ε, οὕτως τὸ θ πρὸς τὸ ζ.

LEMMA, VEL ASSVMPTVM.

Quoniam igitur demonſtratum eſt, Si multiplex primæ quantitatis multiplicis excedat multiplicem multiplicis tertiæ: & multiplex multiplicis ſecundæ excedet multiplicem multiplicis quantitatis quartæ. Quòd ſi æqualis: æqualis. Si uerò minor fuerit: minor etiam erit. Manifeſtum autem eſt, Si multiplicis tertiæ quantitatis multiplex, excedat multiplicem multiplicis quantitatis primæ: quod tum & multiplex quartæ quantitatis multiplicis, multiplicem multiplicis quantitatis ſecundæ excedet, & ſi ſit æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor etiam ſit. Atque ideo etiam multiplex ſecundę ad multiplicem primę, ſicut multiplex quartæ ad multiplicem quantitatis tertiæ ſeſe habebit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἀναπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, quòd ſi quatuor quantitates in proportione ſint, & permutatim etiam illas proportionales eſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

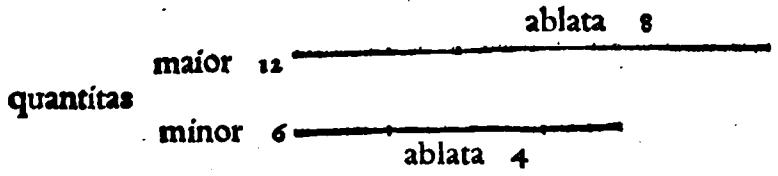
Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὃπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

PROPOSITIO V.

Si quantitas quantitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit.

Sint duæ quantitates, quarum una ſit alterius multiplex: auferatur autem ab utraq; harum portio aliqua, quarum ſimiliter una alterius, ſicut tota totius, ſit multiplex: dico, & reliquarum quantitatum, ut tota totius, unam alterius multiplicem eſſe. Sicut ablatum maioris multiplex eſt, ex hypotheſi, ablati quantitatis minoris, ita multiplex eſto, ex ſtructura, maioris reſiduum quãtitatis alterius quartę: & erit ex propoſitione prima huius, maior quantitas aggregati, quod ex quarta quantitate & maioris ablato naſcitur, ſicut ablatum de maiore minoris quantitatis ablati, multiplex. Sed quia ita etiam, ex hypotheſi, multiplex eſt maior quantitas ipſius minoris: æquè igitur eſt multiplex maior quantitas utriuſq; ipſorum, aggregati ſcilicet iam commemorati, & minoris quantitatis: quare æqualia inter ſe, aggregatum

& minor quantitas. Dempto igitur eo quod eſt eis commune, ablato ſcilicet minoris, ex utraq; parte: & reliqua, quarta ſcilicet quantitas, atq; reſiduum minoris, ex



communi quadam noticia, inter ſe æqualia erunt. Quare quemadmodum, ex ſtructura, æquè eſt multiplex ablatum maioris ipſius minoris quantitatis ablati, & reſiduum maioris ipſius quartæ quantitatis: ita nunc propter æqualitatem, loco ſcilicet quartæ quantitatis reſiduo minoris ſumpto, & reſidua, quemadmodum ablata, inter ſe multiplicia erunt. Sed quia ut ablatum ablati, ſic ex hypotheſi, & maior quantitas ipſius minoris: quare & ablatum ablati, ut ipſæ quantitates, unum alterius multiplex erit. Si quantitas igitur quãtitatis multiplex fuerit, quemadmodum ablatum ablati: & reliquum reliqui, ut totum totius multiplex erit. quod demonſtraſſe oportuit.

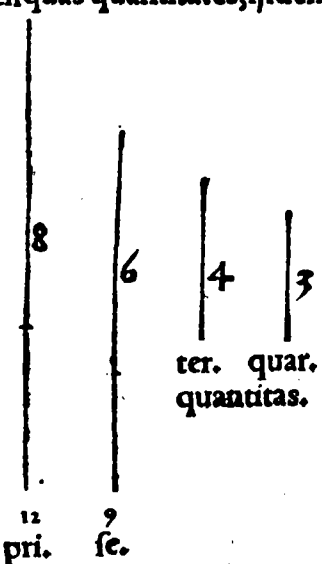
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤγουν ἴσα ἐστί, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

PROPOSITIO VI.

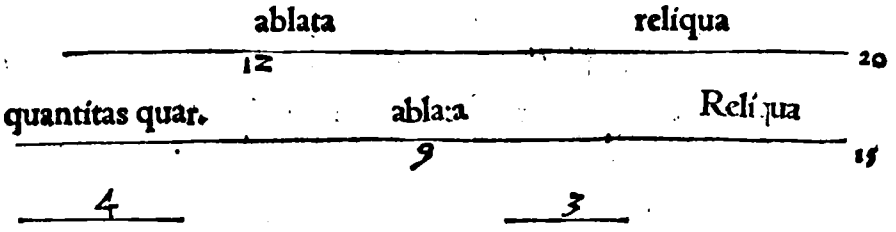
Si duæ quantitates duarum quantitatum æquè fuerint multiplices: & ablatæ quædam earundem æquè fuerint multiplices: reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.

Sint duarum quantitatum æquè multiplices, ſint etiam portiones quædam, de multiplicibus ablatæ, ad eaſdem duas æquè multiplices: dico, multiplicium reliquas quantitates, iiſdem duabus aut æquales, utranq; utriq;, aut uerò earũ æquè multiplices eſſe. Minores non poſſunt eſſe reliquæ ipſis quantitatibus poſitis, propterea quòd multiplices eis æqualiter aſſignatæ ſint. Eſto igitur primò quòd prioris multiplicis reliqua ſuæ quantitati æqualis ſit: dico ſanè, & poſterioris multiplicis reliquam ſuæ quantitati æqualem eſſe, id quod hoc modo demonſtrabitur. Sumatur ipſi poſteriori æqualis quantitas alia. Et quoniam portiones ablatæ, ex hypotheſi, ipſarum quantitatum, primæ ſcilicet & ſecundæ, ſunt æquè multiplices, cum quantitati priori, ſuæ multiplicis reliqua, ex hypotheſi, poſteriori uerò alia quædam quantitas, ex ſtructura, æqualis ſit, ſi reliqua multiplicis ſuæ prioris ablatæ, ſumpta deinde quantitas poſterioris multiplicis ablatæ acceſſerint: & hæ compoſitæ earundem quantitatũ æquè multiplices erunt. Sed quia etiam una compoſitarum, quæ eſt prior multiplex, ipſius prioris, quemadmodum poſterior poſterioris, eſt multiplex, cum duæ quantitates uni ſint æquè multiplices: illas ex communi quadam noticia inter ſe æquales eſſe, concluditur. Communi igitur portione, quæ eſt ablata multiplicis poſterioris quantitas, ab illis ſeiuncta, & quæ relinquuntur, ex communi quadam noticia: atq; deinde, cum una reliqua poſteriorẽ quantitatem æqualem habeat, & illa



eadem

eadem posterior quantitas & reliqua ipsius, & id ex communi quadam notitia, inter se æquales erũt. Sicut igitur prioris multiplicis reliqua quãtitas ipsi priori quan-



titati, ex hypothesi, æqualis est: ita & posterioris reliquam ipsi posteriori quantitati æqualem esse necessariò sequitur. Ομοίως δὴ δείξομεν, Similiter ostẽdemus, si prioris multiplicis reliqua suæ quantitatis multiplex sit, quòd & posterior ad suam tam multiplex esse debeat. Si duę igitur quantitates duarum quantitatum æquè fuerint multiplices, & ablatæ quædam earũdem æquè fuerint multiplices: reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquè ipsarum multiplices. quod demonstrasse oportuit.

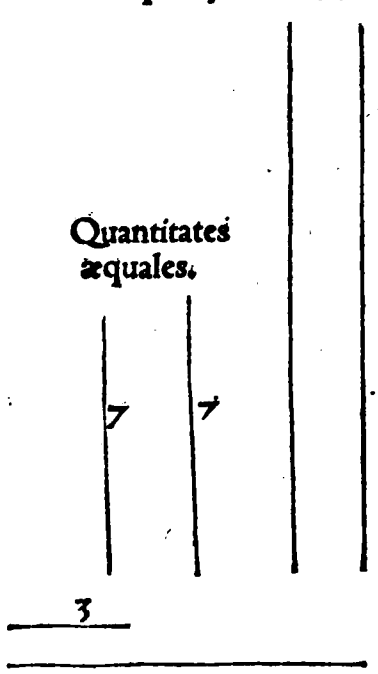
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

PROPOSITIO VII.

Æqualia ad idem, eandem habent rationem. Et idem, ad æqualia.

Sint duæ quantitates æquales, ad aliam tertiã, quantamcunq; relatæ: dico, neutram æqualium diuersam ab alia cum tertia illa constituere rationem. Colligit hæc propositio suam demonstrationem ex definitione 5 huius, in hunc modũ. Sumantur æqualium quantitatum æquè multiplices, & erunt hæ, ex communi quadam notitia, inter se æquales. Sumatur & ipsius quantitatis tertię aliqua utcunq; multiplex, & ordinentur quantitates, ut scilicet æqualium una, prima: alia, tertia: alia deinde, ubi plures essent, quinta: ac cæteræ deinceps prout naturalis imparium numerorum ordo requirit, uocentur. Illa tertia uerò, ut quæ æqualium omnium est communis consequens, à paribus numeris, secundæ, quartæ & sextæ, &cæ. nomen habeat. Et quoniam, quantum ad priorem partem, primæ & tertiæ, ac cæterarum, quarum impar est appellatio, quantitatum, æquè assignatæ multiplices, secundæ & quartæ, ac reliquarum deinde, ut quæ à pari numero nominantur, quantitatum æquè multiplices æqualiter excedunt, uel eis omnino æquales, uel minores ijs sunt: infertur, ex definitione 5 huius, ipsas quantitates, primam nimirum ad secundã, & tertiam ad quartam, ac reliquas deinde omnes, quam libet ad suam, in eadem esse ratione: quare sic patet pars prior. Posterior uerò. Manentibus ijsdem quantitatibus, alio tamen ordine dispositis, ita nimirum, ut quæ in priori secundæ & quartæ quantitatis nomen habuit, iam primæ & tertiæ appellationem sortiatur. Prima uerò quæ prius, secunda nunc: & secunda deinde, quarta iam uocetur. Sicq; per eandem definitionem quintam: & posterior huius propositionis pars obtinebitur, primam scilicet, hoc est illam, quæ iam est communis æqualium omnium antecedens, ad secun-



dam, unam ex æqualibus, esse, ut eadem prima ad æquales omnes. Æquales igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. quod demonstrari oportuit.

Multiplices quanti. æquales.

30 12 6
30 12 6 } ad 5
30 12 6

Multiplices quanti. æquales.

15 30 uel contrà 5 ad { 6 6 6

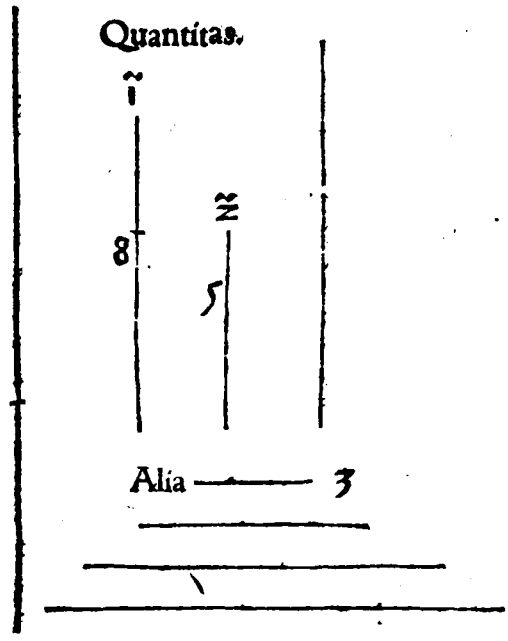
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, ὁ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. Καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

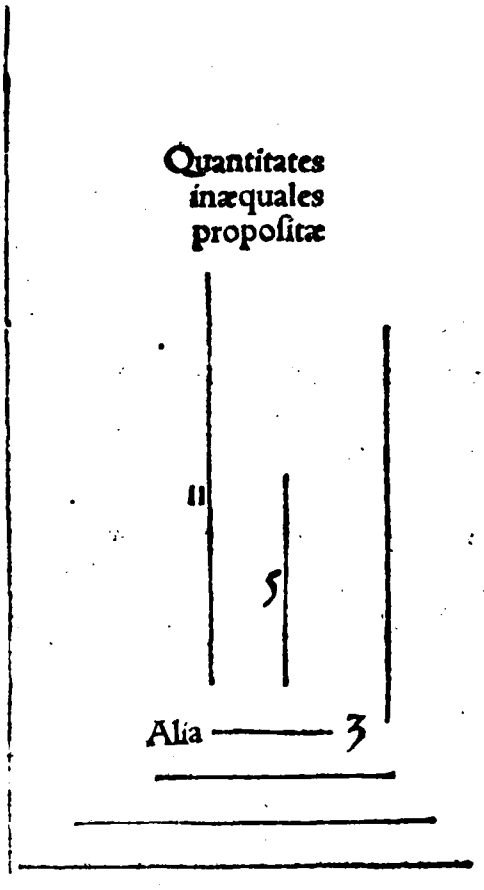
PROPOSITIO VIII.

Inæqualium quantitatum, maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem, quàm ad maiorem.

Sint quantitates quotcunq; in præsentia autem, pro faciliori exemplo, duæ sufficiant, & esto quòd ex æquo ad unam & eandem quantitatem conferantur: dico igitur, quòd maior inæqualiũ: maiorem, minor uerò ad eandem: minorem, & contra, hæc eadem ad minorem inæqualium, maiorem, quàm ad maiorem, habeat rationem. Sumatur ex inæqualium maiori portio, quæ sit minori æqualis: & erit altera quæ relinquitur portio, breuiori signatę aut æqualis, aut inæqualis. Si inæqualis, utra breuior fuerit, illius multiplex, quæ communi omnium consequente maior sit, accipiatur, quàm multiplex deinde hæc eadem sumpta quantitas iuæ inferioris fuerit, tam multiplex esto etiam quantitas alia portionis in maiori maioris, alia insuper ipsius minoris quantitatis. His multiplicib. tali ordine sumptis, ipsius tandem omnium consequentis dupla, tripla, atq; deinde quadrupla quantitas accipienda est, ac deinceps iusta serie ad multiplices quãtitates alias tamdiu progrediendum, donec ipsa, quæ minoris quantitatis multiplice maior sit, occurrat. Sit autem, pro operatione faciliori, consequentis quadrupla, primò ipsa minoris quantitatis multiplice maior: quę igitur dictæ consequentis tripla quantitas fuerit, hæc eadem minoris multiplice primò minor erit: quare contrà, minoris multiplex eadem consequentis tripla quantitate maior. Et quoniam quantitatum, reliquæ scilicet in maiori, & minori in ea æquali positæ, æquè sunt assignatæ multiplices, cum quàm multiplex sit una unius, tam multiplices etiam, ex propositione prima huius, omnes omnium sint: maioris quantitatis & breuioris in ea portionis æquè multiplices erunt. Sed cum ut breuioris portionis ita etiam, ex structura minoris quantitatis multiplex sumpta sit: minoris & maioris quantitatum



tum æquè multiplices erunt, quod eſt obſeruandũ. Rurſus quoniam quantitatum, poſitæ ſcilicet in maiori minori æqualis, & ipſius minoris, æquè ſunt, ex ſtructura aſſignatæ multiplices: ſequitur, ut quemadmodũ quantitates, ita & ipſarum æquè multiplices inter ſe æquales ſint: atq; inſuper, ſicut una, multiplex ſcilicet minoris, quàm conſequentis tripla quantitas, ex ſtructura, maior eſt, ita & altera, multiplex ſcilicet poſitæ in maiori quantitati minori æqualis, propter æqualitatem, eadem conſequentis tripla maior erit. Maior autem eſt, ſimiliter ex ſtructura, breuioris in maiori quantitate portionis multiplex ipſa conſequente: tota igitur totius maioris quãtitatis multiplex, ſimul utriſq;, conſequente ſcilicet & tripla eius, maior erit: quare etiam & eadem totius maioris multiplex, propter æqualitatem, conſequentis quadrupla maior erit: unde ſic ipſum etiam excedit. Sed quoniam multiplex minoris conſequentis quadruplam non excedit, ut patet ex ſtructura: maior igitur maiorem ad communem omnium conſequentẽ, quàm ipſa minor quãtitas ad eandẽ, ex definitione 7 huius, ratione habebit. Atq; hæc eſt priorhuius propoſitionis pars. Porrò moxdeinde, cõſequentibus loco antecedentiũ, & antecedentibus loco conſequentiũ ſumptis, per eandem allegatam 7 definitionem, conſequentis ad minorem, rationem maiorem, quàm ad maiorem quantitatem habebit. Eſto uerò nunc altera, quæ relinquitur, portio, breuiori ſignatæ æqualis, quia quantitates uel portiones in maiori æquales ſunt, tum utriuſuis portionis multiplex, quæ communi omnium conſequente maior ſit, quantitas ſumenda eſt. nam ſtructura deinde & demonſtratione ipſa, ut in priori, inſtituta, res ſucceſſum habebit. Si igitur inæqualium quantitatum ad unam & eandem collatio facta fuerit: maior maioris, quàm minoris quantitatis ad eam ratio erit. Contra uerò, eiuſdẽ ad minorem maior, quàm ad maiorem quantitatem ratio. quod demonſtraſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROPOSITIO IX.

Quæ ad idem eandem habent rationem: æqualia inter ſe ſunt. Et ad quæ idem eandem rationem habet: & illa æqualia inter ſe ſunt.

Habeant quotcunq; quantitates ad unã eandemq; eandem rationem. Aut contrà, eſto quòd unius eiuſdemq; ad quotcunq; ſit una & eadem ratio: dico, utrum poſitum fuerit, illas quantitates inter ſe æquales eſſe. Hoc autem demonſtratione ad incommodum ducente, ex propoſitione octaua præcedenti, ſic patet. Niſi enim

essent æquales quantitates illæ: sequeretur, per partem præcedentis priorem, illas ad unam & eandem: hæc deinde eadem, per partem eiusdem propositionis poste-

vel

riorem, ad illas, diuersas constituere rationes. Hoc autem cum sit contra propositionis nostræ hypothesim, illas quantitates æquales esse inter se, tam ad priorem quam etiam ad posteriorē partem, ex hac prop. 8 obtinebitur. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem quantitates, &c. quod demonstrasse oportuit.

7 7 7 Item 9 9 9 9 9

7 7 7 9 9 9 9 9

uel con. 5 ad 5 uel contra 13 ad 13

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὴν μείζονα λόγον ἔχον· ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει· ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι.

PROPOSITIO X.

Ad eandem rationem habentium, maiorem rationem habens: illa maior est. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet: illa minor est.

Conferantur quotcunq; quantitates ad unam eandemq; : dico, quòd illa, quæ ex his maiorem ad communem earum consequentem habuerit rationem, maior sit: dico etiam, ad quam ipsa consequens quantitas maiorem rationem habuerit,

vel

eam contrà minorem esse. Nam si maiorem habens rationem, ad aliam non reputetur esse maior, erit illa alij aut æqualis, aut alia minor. Si æqualis, cum æqualium ad idem, ex priore parte propositionis septimæ huius, eadem sit ratio, harū uerò quantitatum, ex hypothesi, ratio diuersa, cōtra nostram illam hypothesim agetur, quod non permittitur. Esto autem nunc, quòd maiorem rationem habens ad aliam, minor sit, &c. Et quoniam, per priorem partem propositionis 8 huius, Inæqualium quantitatum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor, erit id contra propositionis hypothesim. Constat itaq; propositionis prior pars. Posterior eodem modo, ex posterioribus allegatarum propositionum partibus, retinebitur. Ad eandem igitur, &c. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris.

Antecedentes 7 6 4 9

Consequens 5 uel 9

una & eadem quantitas.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

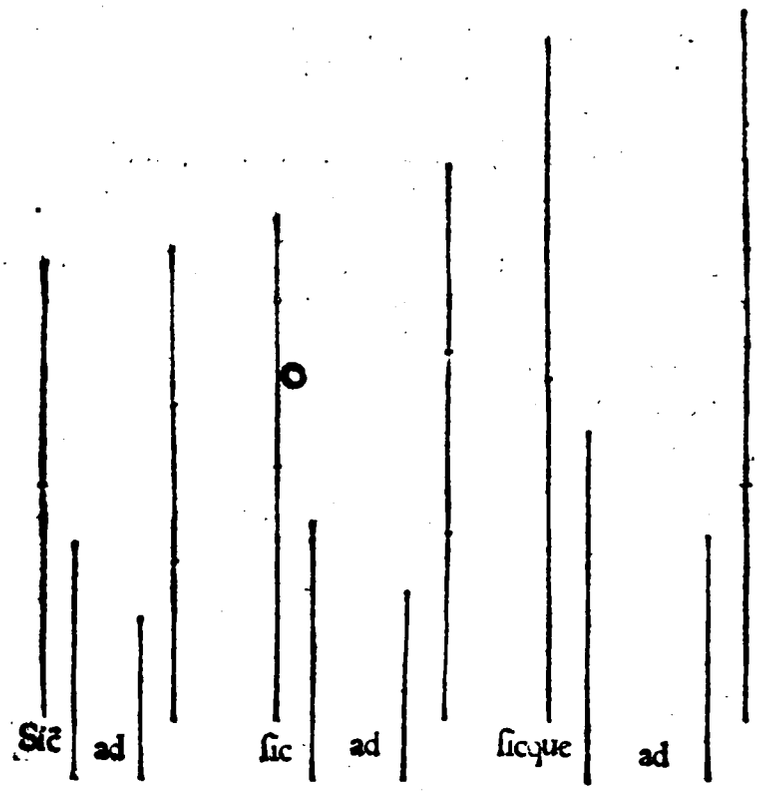
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις ἐσίν οἱ αὐτοί.

PROPOSITIO XI.

Quæ eidem ſunt eædem rationes: & inter ſe ſunt eædem.

Quæ in primo libro, inter communes notitias, autor de quantitatibus in genere his uerbis, Quæ uni ſunt æqualia, &c. propoſuit, in eodem etiam libro idem, per propoſitionem 30, in lineis æquediſtantibus, uerum eſſe demonſtrauit, id quoq; iam in ipſis rationibus ſimiliter ſeſe habere, proponit, & hoc quidem per definitionis quintæ huius conuerſionem atq; ipſam quintam, hac ſtructura. Sint rationes, exempli gratia, duæ qualeſcunq;, alij tertiæ cuidam ſimiles & eædem: dico, eas & inter ſe ſimiles eaſdemq; eſſe. Sumantur antecedentium quantitatũ æquè multiplices, ſimiliter & cõſequentium. Et quoniam utraq; duarum rationum, quæ ſunt ter-



tiæ ſimiles, antecedens quantitas, eſt ad ſuam conſequentẽ, ex hypotheſi, ut antecedens tertiæ rationis ad ſuam cõſequentem, & rurſus, quoniam tam antecedentium quàm etiam conſequentium, ex ſtructura, æquè ſunt aſſignatæ multiplices: ſequitur per conuerſionem definitionis quintæ huius, bis repetitam (ſunt enim duæ rationi uni ſimiles poſitæ) multiplices antecedentium, hoc eſt primæ & tertiæ quantitatum, in addendo, minuendo, uel æqualitate, reſpectu ſuarum conſequentium æqualiter ſeſe habere. Quemadmodum igitur ſe habet multiplex antecedentis in tertia ratione, ad multiplicem ſuæ conſequentis: ita etiam ſeſe habebunt multiplices antecedentium reliquarum duarum rationum, ad ſuarum conſequentium multiplices. Cum res igitur ita ſeſe habeat: per hanc ipſam quintam definitionem huius concluditur propoſitum, illas ſcilicet duas rationes inter ſe ſimiles eſſe & eaſdem. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum

Exemplum in numeris.

	6		12	18		24
Sint rationi	3	eædem, rationes	6	9	&	12
	2		4	6		8
	4		8	12		16
	6		12	18		24
	8		16	24		32

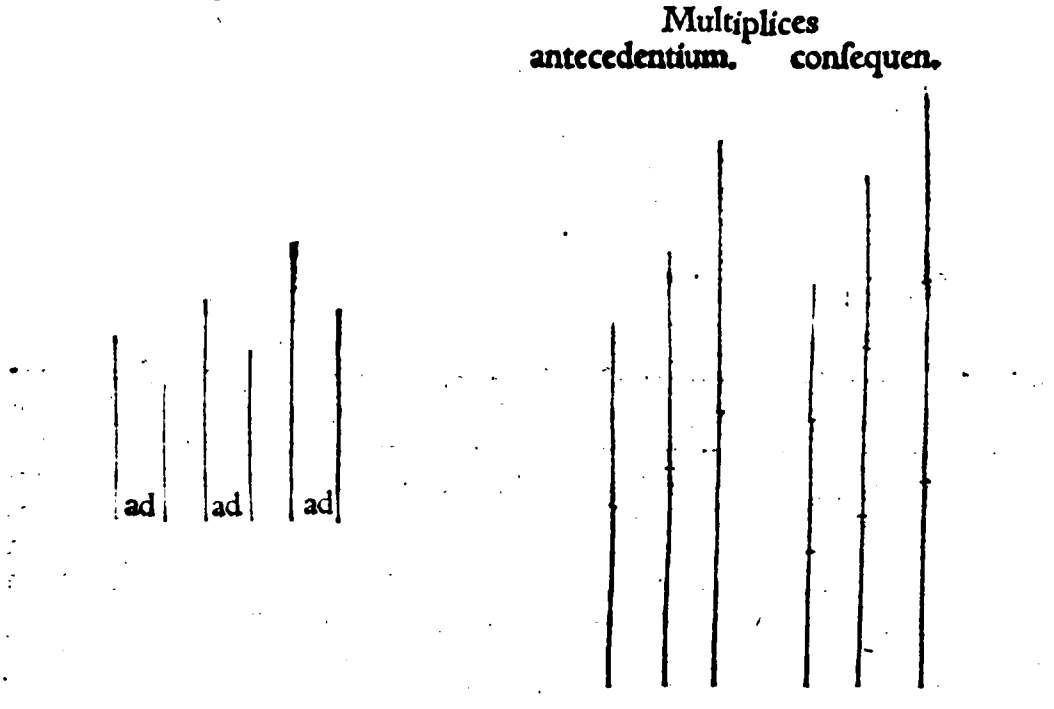
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint quotcunq; quantitates proportionales: erit, ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

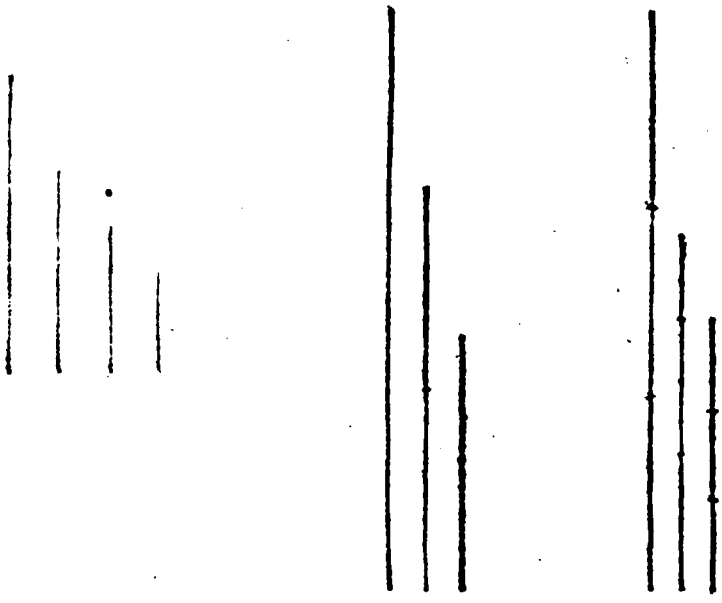
Simile autor propoſuit in propoſitione libri huius prima, de multiplicibus. Itaq;, quanto ipſa multiplice ratio eſt generalior, tanto etiam hæc præſens propoſitio, quàm ipſa præcedens prima, latius ſeſe extẽdit. Sint igitur quantitates quotcunq;, continuè uel non continuè proportionales: dico, quam rationem habet una antecedens ad ſuam conſequentem quantitatem, eandem & aggregatum antecedentium ad aggregatum ex conſequentibus habere. Sumptis enim æquè multiplicibus ad antecedentes, æquè item utcunq; multiplicibus ad conſequentes quantitates, cum ſit, ex hypotheſi, ut antecedens una ad ſuam conſequentem, ſic ſingulæ ad ſingulas: ſequitur ex conuerſione definitionis 5 huius, toties quoties opus fue-



rit eam repetendo, ut ſicut unius antecedentis multiplex à ſuæ conſequentis multiplice defecerit, uel ei æqualis ſit: ſiue uerò eandem exceſſerit, ſic & ſingulæ antecedentium ad conſequentium ſingulas multiplices ſeſe habere. Igitur ſi primæ quantitatis

titatis multiplex à ſuæ conſequentis multiplice defecerit, aut ei æqualis ſit, uel eandem exceſſerit: ſequitur, ut antecedentium multiplices ſingulæ, eodem modo ſuarum conſequentium multiplices reſpiciant. Quare, ſicut una ſuæ inferioris eſt multiplex, ita omnes omnium. Per primam igitur propoſitionem huius, bis repetitam, quàm multiplex eſt una unius, tam multiplex etiam aggregatum antecedentium, ad cõſequentium aggregatum erit. Ordinentur ergo iam quantitates, ſic, ut unius rationis antecedens ſit prima: ſua deinde conſequens, ſecunda: aggregatum uerò antecedentium, tertia, & conſequentium poſtea aggregatum, quantitas quarta. Et quia quantitatum, primæ & tertiæ, æquè ſunt aſſignatæ multiplices, ſecundæ inſuper & quartæ ſimiliter: infertur, ex definitione quinta, tandem id quod maximè uolebat propoſitio. Si fuerint igitur quotcunq; quantitates proportionales: erit ſicut una antecedentium ad unam conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum rationis ſeſquialteræ, continuæ, in quantitatibus quatuor



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ.

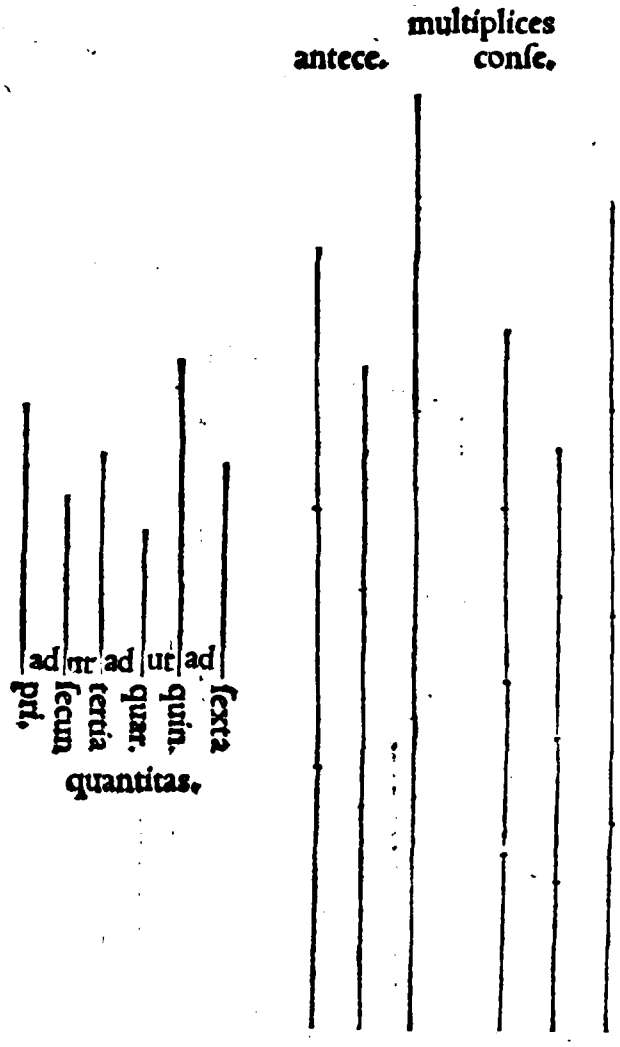
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationẽ habuerit quàm quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam maiorem rationẽ habebit quàm quinta ad ſextam.

Sint ſex quantitates, & eſto quòd primæ ad ſecundam & tertiæ ad quartam ſit una & eadem ratio, quam uerò tertia ad quartã habet rationem, ea ſit ratione quintæ ad ſextam maior: dico igitur, quod & primæ ad ſecundam maior quàm quintæ ad ſextam ſit ratio. Quoniam enim tertiæ ad quartam maior eſt ratio, ex hypotheſi, quàm quintæ ad ſextam, ſumantur ipſarum tertiæ & quintæ æquè multiplices, quartæ deinde & ſextæ ſimiliter, ſic tamen, quòd multiplex tertiæ excedat multipli

cem quartæ, non autem excedat multiplex quintæ ipsius sextæ quantitatis multiplicem. Sumantur etiã ipsarum primę & secundę secundum multiplicitatem tertię & quartæ æquè multiplices. Et quoniam prima quantitas est ad secundam, sicut tertia ad quartam, primæ uerò & tertiæ, ut antecedẽtibus, secundæ insuper & quartæ, ut consequentib. æquè sunt ex structura, assignatæ multiplices: primæ igitur & tertiæ multiplices, ad multiplices secundæ & quartæ quantitatum, ex conuersione definitionis 5 huius, in minuendo, æqualitate, & addendo æqualiter sese habebunt. Cũ igitur, & id ex structura, multiplex tertiæ excedat multiplicem quartæ, multiplex uerò quintæ non excedit multiplicem sextæ quantitatis: propter similitudinem rationum, & primæ quantitatis multiplex, ad secundæ quantitatis multiplicem cõferendo, id faciet: maior igitur est ex definitiõe 7 huius, ad secundam, quàm quintæ quantitatis ad sextam ratio. Si prima igitur ad secũdam eam habuerit rationẽ quam tertia ad quantitatem quartam, tertia uerò ad quartam maiorem rationem habuerit quàm quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad sextam. quod demonstrasse oportuit.



Exemplum in numeris sic ponitur.

18	16	9	8	12	12
		maior		minor ratio	
6 ad	4 ut	3 ad	2	4 ad	3
pri.	secun.	ter.	quar.	quin.	sex. numerus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

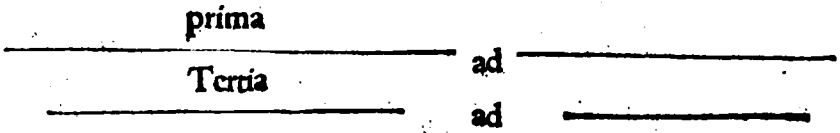
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὁ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ ὁ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

PROPOSITIO XIIII.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem, quam tertia ad quartam, prima uerò ipsa tertia maior fuerit: & secunda quarta maior erit, quòd si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor.

Sint

Sint quatuor quantitates, prima ad ſecundam ut tertia ad quartam: dico, quemadmodum prima maior eſt quàm tertia, uel ei æqualis, ſiue minor ea, ita & ſecunda erit reſpectu quantitatis quartę. Cum enim, ex hypotheſi, prima maior ſit quàm tertia: ſequitur ex priore parte propoſitionis octauæ huius, quòd prima maiorem quàm tertia ad ſecundam quantitatem, habeat rationem. Quoniam autem, quem-



admodum prima eſt ad ſecundam, ita eſt & tertia, ex hypotheſi, ad quartam: propter illam rationum ſimilitudinem, & tertiæ ad quartam maior quàm eiuſdem tertiæ ad ſecundam ratio erit. Ad quam autem una & eadem quantitas maiorem habet rationem, illa, ut poſterior pars propoſitionis 10 huius teſtatur, minor eſſe cenſetur: minor igitur eſt quarta ipſa ſecunda, quare contrà ſecunda quàm quarta maior, quod demonſtraſſe oportuit. Ομοίως δὴ δείξομεν. Similiter etiam oſtendemus, quòd ſecunda quartæ æqualis, uel ea minor ſit, prout quidem prima reſpectu tertię poſita fuerit. Si prima igitur ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, prima uerò ipſa tertia maior fuerit: & ſecunda quarta maior erit, quòd ſi æqualis, æqualis, ſi uerò minor: minor. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris ſic ſe habet.

15 ad 9 ut 5 ad 3

Vel 27 18 12 8

Quantitas		ratio			ratio	quan.
prima 27	ad ſecun. 18	maior	mutatis nunc terminis uel quantitat.	12 ad 8	ma. quare	minor
tertia 12		minor		12 ad 18	mi.	maior.

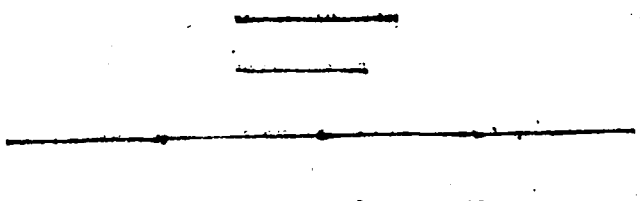
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΕ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium, eandem habent rationem, ad ſe ſumptæ.

Sint duæ uel plures quantitates, quarum unaquæq; ſit alterius cuiuſdam quantitatis, tanquam ſuæ multiplicis, pars: eſto tamen, ut quota pars eſt una unius, tota ſint etiam ſingulæ ſingularum: dico ergo, quòd quam ipſæ partes, illam eandem & multiplices inter ſe rationem habeant. Diſtribuantur multiplicium una-



quæque in portiones ſuæ inferiori uel parti æquales. Et quoniam æquè ſunt parti-

bus, ex hypotheſi, aſſignatæ multiplices: erunt in una tot portiones ſuæ parti æquales, quot & in altera. Rurſus quoniam portiones cuiuſque multiplicis inter ſe ſunt æquales: erit ſingularum portionum ad portiones ſingulas, una & eadem ratio, & illa quidem, quæ eſt partis ad partem. Quare, ſicut eſt una unius multiplicis portio, uel æqualibus pro æqualibus ſumptis, ſicut eſt una pars ad portionem alterius, uel partem, ſic, ex propoſitione 12 huius, aggregatum illorum, hoc eſt antecedentium, ad conſequentium aggregatum. Quam igitur æquè multiplicium partes, illam eandem & ipſæ multiplices inter ſe habent rationem. quod demonſtrari oportuit.

28 12 28

7 7 7 7 3 3 3 3 7 7 7 7

7 3 3 3 3

quare ſicut 7 ad 3, ſic 14 ad 12

12

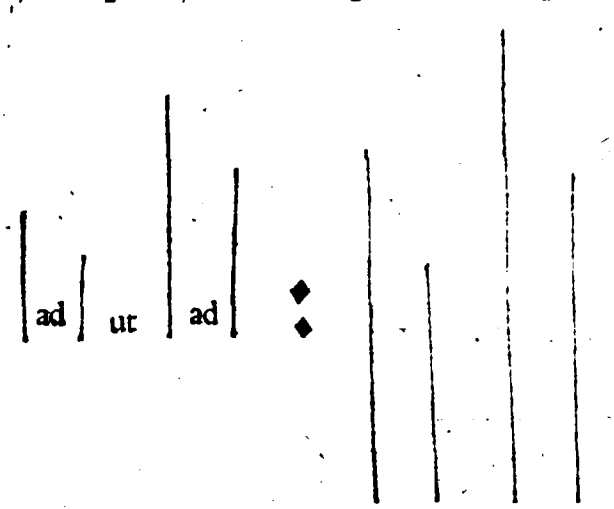
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint; & permutatim hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates in ratione una: dico, quòd & permutatim, uel permutata ratione, hoc eſt, prima ad tertiam & ſecunda ad quartam, in una ratione ſint. Sumantur primæ & ſecundæ quantitatum æquè multiplices, atq; inſuper tertiæ & quartæ: & erunt hæ, ex præmiſſa, bis uſurpata, in ea quæ ſunt ipſæ partes ratione: atque deinde, ex propoſitione 11 huius ſimili ratione bis pro ſimili ſumpta, in una etiam & eadem ratione, prima ſcilicet multiplex ad ſecundam, & tertia ad multiplicem quartam. Sed cum fuerint quatuor quantitates proportionales, prima ad ſecundam ut tertia ad quartam, prima uerò ipſa tertia maior, uel ei æqualis, uel minor ea ſit, & ſecunda quartam, ex propoſitione 14 huius, ſic reſpiciet. Quatuor igitur iam quantitatibus ordinatis, prima ſcilicet & quarta, ut prius, ſecunda uerò in tertium, ac tertia deinde in ſecundum locum poſitis, cum huius ordinationis primæ & tertiæ quantitatum æquè multiplices æqualiter ſe habeant, in addendo, minuendo uel æqualitate, ad ſecundæ & quartæ quantitatum æquè aſſignatas multiplices, ex definitione tandem huius quinta concluditur propoſitum: primæ ſcilicet ad tertiam eam eſſe, quę eſt ſecundæ ad quartam quantitatem ratio. Si igitur quatuor quantitates proportionales fuerint: & permutatim hæ proportionales erunt. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum

Exemplum in numeris.

21 9 56 24 21 9

7 ad 3 ut 28 ad 12 pri. 7 ter. 3
se. 28 quar. 12
56 24

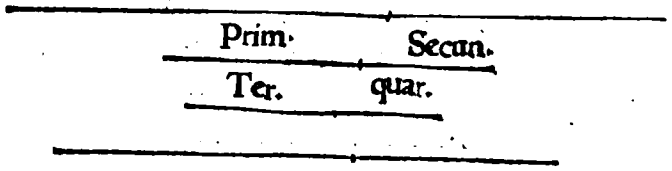
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν συγκείμεναι μεγέθη ἀνάλογον ὦσι· καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

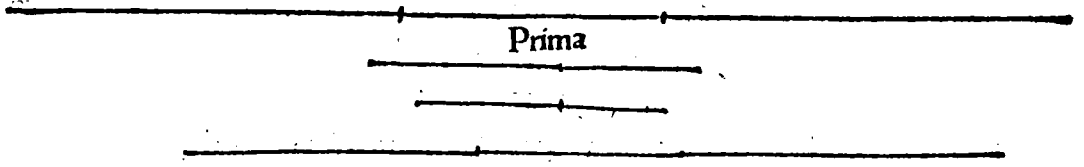
PROPOSITIO XVII.

Si compoſitæ quantitates proportionales fuerint: & diuiſæ hæ proportionales erunt.

Sint quatuor quantitates, atq; eſto, quòd hæ, compoſitæ, hoc eſt prima cum ſecunda ad ſecundam, & tertia cum quarta ad quartam, in una & eadem ratione ſint: dico igitur, & diuiſim, uel diuiſionis ratione, quod idem eſt, illas quantitates in una & eadem ratione eſſe. Colligitur huius rei demonſtratio potiſſimum ex pro



poſitionibus prima & ſecunda huius. Sumptis enim quatuor quantitatum, primæ ſcilicet, ſecundæ, tertiæ & quartæ æquè multiplicibus: erit, ratione primæ & ſecundæ quantitatum, ut quàm multiplex eſt una unius, tam multiplices etiam ſint, per propoſitionem primam huius, omnes omnium, atq; deinde hoc idem, per eandem etiam propoſitionem, ratione quantitatum tertiæ & quartæ locum habet, ac tandem, cum ex hypotheſi, æquè ſint quatuor quantitatum aſſignatæ multiplices, commutatione facta primæ & ſecundæ, ut unius, tertiæ item & quartæ, & harum ut unius quantitatis æquè multiplices erunt, quod eſt notandum. Sumantur rurſus ſecundæ & quartæ, utcunque aliæ æquè multiplices, cum prius etiam ipſarum ſecundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices aſſignatæ ſint, modò



ſumptæ ipſis prioribus multiplicibus iunctæ, earundem ſecundæ & quartæ quantitatum, ex propoſitione 2 huius, æquè multiplices erunt. Quoniam autem quantitates, prima cum ſecunda, ſecunda, tertia cum quarta, & ipſa quarta, ex hypotheſi proportionales ſunt, primæ uerò & tertiæ, atq; ſecundæ & quartæ quantitatum æquè multiplices aſſignatæ: primæ & tertiæ quantitatum multiplices, ipſas ſecundæ & quartæ quantitatum multiplices, ex conuerſione definitionis quintæ huius in minuendo, æqualitate uel addendo æqualiter reſpiciunt. Quare ſi multiplex primæ, hoc eſt ex prima & ſecunda compoſitæ, à multiplice ſecundæ quantitatis defecerit, ei æqualis fuerit, uel hanc eandem exceſſerit: & multiplex tertiæ, quæ ſcilicet ex tertia & quarta compoſita eſt, ad multiplicem quartæ conferendo, ſic ſe habebit, ac portionibus deinde illis, quas ex utraq; parte communes habent, ablatis atq; neglectis, cum de reſiduis multiplicibus, ex communi quadam notitia, quòd hæ

etiam ad ſuas inferiores ſic ſeſe habeant, nullum dubium ſit: ex definitione tandem 5 huius, id quod maximè uolebamus concluditur, primę ſcilicet ad ſecundam eſſe, ut eſt tertiæ ad quartam quantitatem ratio. Si compoſitæ igitur quantitates proportionales fuerint: & diuiſę hę proportionales erũt, quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum in numeris.

30 40

18 12 24 16

9 6 12 8

15 20

30 30

18 40 12 12 6 18

9 20 6 16 8 24

15 40

30 50 40 40

12 12 16 16

18 18 24 24

9 6 12 8

Idem exemplum, alijs multiplicibus expoſitum.

45 60

27 18 36 24

9 6 12 8

12 16

15 20

45 30

27 60 18 18 6 12

9 20 6 24 8 16

15 40

45 30 60 40

18 18 24 24

27 12 36 16

9 6 12 8

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

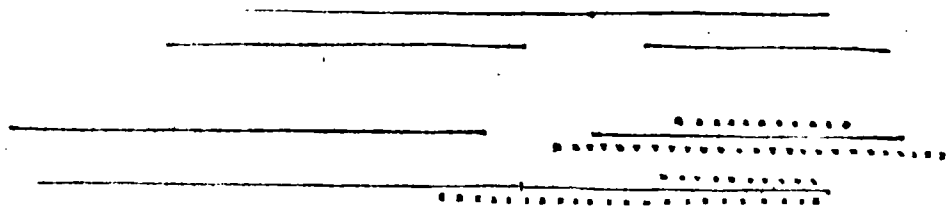
Ἐὰν διῃρημέναι μεγέθη ἀνάλογον ὦσι· καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

PROPOSITIO XVIII.

Si diuiſæ quantitates proportionales fuerint; & compoſitæ hæ proportionales erunt.

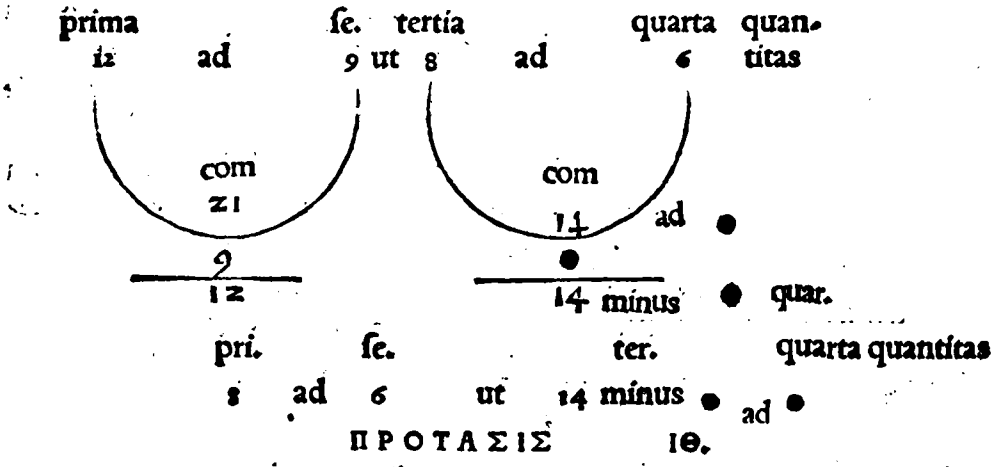
Sint

Sint quatuor quantitates diſiunctæ proportionales, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam: dico igitur, & compoſitionis ratione eas proportionales eſſe. Nam ſi non, ſumatur loco quartæ quantitas alia, ad quam nimirum ſe habeat tertia cum quarta, ſicut prima cum ſecunda ad ſecundam. Et quoniam hæc ſumpta, quantitati quartæ minime æqualis eſſe poteſt (nam ſi æqualis eſſet, retineretur illa: atq; ſtatim pateret propoſitū) erit aut minor illa, aut maior. Vtrum nunc horum ponitur, con-



trarium ſemper infertur, ſumptam ſcilicet, maiorem eſſe ipſa quarta, ubi poſita fuerit minor, uel contrà, eandem ſumptam, ipſa quarta maiorem poſitam, hac eadem minorem eſſe, hoc modo. Quoniam enim compoſita ex prima & ſecūda ad ſecundam, in ea eſt ratione, ex ſtructura, in qua eſt altera ex tertia & quarta compoſita quantitas, ad ipſam ſumptam, cum ſit συνθεσις λόγου, ipſæ eædem, ſi ſeparatæ à ſeſe fuerint, per præmiſſam 17 proportionales erunt, prima ſcilicet ad ſecundam, ut tertia cum defectu uel exceſſu quantitatis ſumptæ reſpectu quartæ, ad quantitatem ſumptam. Sed quia ſic etiam eſt ex hypotheſi, tertia ad quantitatem quartam, cum quæ eidem ſunt eædem rationes, per 11 huius, inter ſe etiam eædem ſint: per primam tandem partem propoſitionis 14 huius quantitatem ſumptam ipſa quarta maiorem eſſe infertur, cum tamen ſit minor ea poſita. Vel, per tertiam partem eiuſdem 14, minor, cum ſit poſita maior. Quorum ſanè utrunq; cum nullo modo eſſe poſſit, quod nimirum una & eadem quantitas iam ſit alia quadam minor, atq; mox deinde etiam maior, uel contrà, concluditur uerum eſſe propoſitum. Si diuiſæ igitur quantitates proportionales fuerint: & compoſitæ hæ proportionales erunt. quod demonſtraſſe oportuit.

Sint pro exemplo quatuor hæ quantitates.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν· καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

PROPOSITIO XIX.

Si fuerit ſicut totum ad totum, ſic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit.

Sint

Sint duæ quantitates, portio etiam aliqua ab utraq; quantitate ablata sic, ut ablatæ portiones eam inter se quam ipsæ totæ habeant rationem: dico, quòd & reliquę eandem cum totis rationem habeant. Cum enim, ex hypothesi, tota sit ad quantitatem totam, ut portio ablata ad ablatam: ex permutata ratione, tota ad ablatam, ut

To. —————————— ——————————

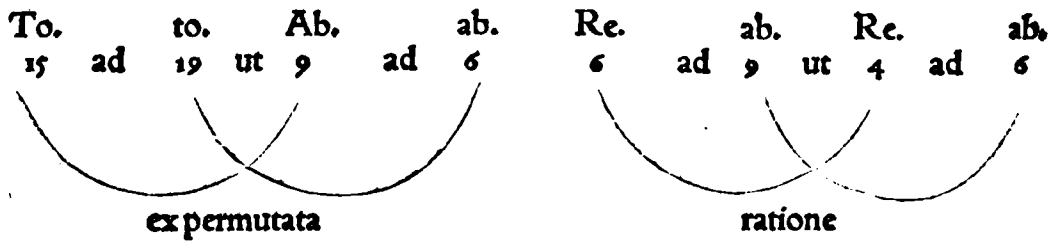
Ablata —————————— ——————————

Reliqua —————————— ——————————

tota ad ablatam erit. Quoniam autem est cõpositio rationis, quantitates uerò compositæ proportionales, cum hæ, ex propositione 17 præcedenti, diuisæ etiam proportionales sint, hoc considerato: reliqua ad ablatam in ratione reliquę ad ablatam erit: atq; reliqua deinde ad reliquam, ex permutata ratione, ut ablata ad ablatam erit. Quia uerò ut ablata ad quantitatem ablatam, ita etiam est, ex hypothesi, tota quantitas ad totam: reliqua igitur quantitas ad reliquam, ex propositione 11 huius ut tota ad totam erit. Si fuerit igitur sicut totum ad totum sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum erit. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum huius in numeris.

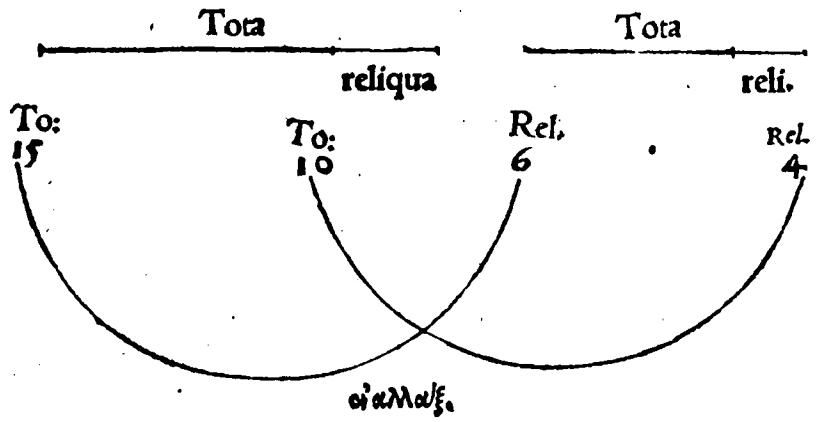
Totum 15 totum 10 est ex hypothesi
ut ablatum 9 ad abla. 6, Igitur
& reliqua 6 reli. 4 ut
totum ad totum erit.



Ergo per 11 propositionem huius, cum duę rationes, totorum scilicet & reliquorum, uni, ablatorum nimirum, sint eædem: erunt illæ & inter se eædem. Reliquum igitur ad reliquum ut totum ad totum erit. quod demonstrasse oportuit.

Καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὡς ὅλη ἡ α β πρὸς ὅλην τὴν γ δ, οὕτως καὶ τὸ λοιπὸν τὸ α ε πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ γ ζ δ· λέγω ὅτι καὶ ἀναλλὰξ, ὡς ἡ α β πρὸς τὴν α ε, οὕτως ἡ γ δ πρὸς τὴν γ ζ δ· συγκείσθω γὰρ ἀνάπαλιν τῷ ἀναλόγου ὄντος.

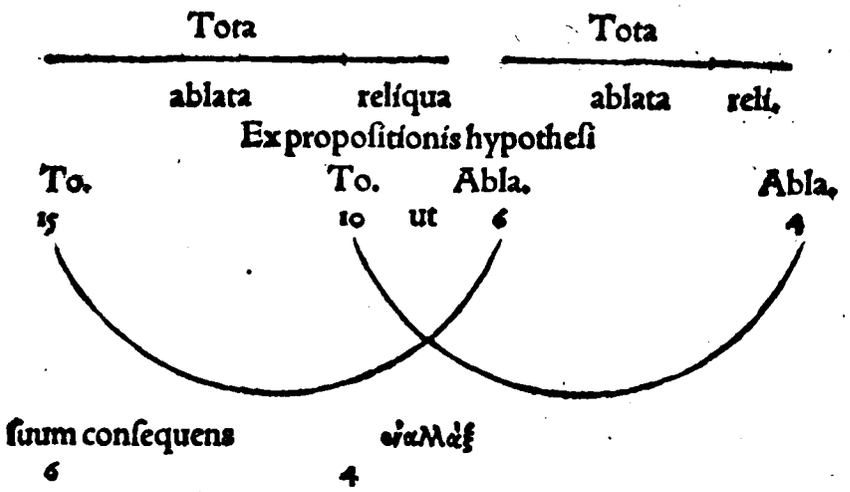
Et quoniam ostensum est, quemadmodum totum ad totum, ita etiam reliquum ad reliquum: conuersa uerò ratione, cum sit totum ad reliquum, ut totum ad reliquum: compositæ igitur quantitates proportionales erunt.



Totum

Δεδείχθη δέ, ὡς τὸ α β πρὸς τὸ α ε, οὕτως δὲ γ δ πρὸς τὸ γ ζ. εἰ γὰρ ὡς ὑπεμέριον τὸ α β πρὸς τὸν ὑπεροχὴν αὐτῶν ὃν ὑπερέχει τὸ ὑπεμέριον τὸ α β καὶ ἔστιν ἀναστρέψαντι.

Demonſtratum eſt autem, nimirum ex propoſitionis huius hypotheſi & permutata ratione, ſicuti totum ad ablatum, ſic totum ad ablatum, cum ſit ut antecedens ad id quo ipſum excedit ſuum conſequens, ad reliquum ſcilicet: & rationis conuerſione quantitates proportionales erunt.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, Si compoſitæ quantitates proportionales fuerint: & conuerſione rationis eas proportionales eſſe. quod demonſtraſſe oportuit.

Γίνονται δὲ οἱ λόγοι, καὶ ὧδι τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, ἡγούμενον μὲν ὧδι τὸν ἀφαιρεθέντα. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ πρῶτον πρὸς δεύτερον ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τεταρτοῦ ἔσται, καὶ ὡς ἄρα τὸ πρῶτον πρὸς δεύτερον, οὕτως τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. ἀνάπαλιν δή, καὶ ὡς τὸ δεύτερον πρὸς τὸ πρῶτον, οὕτως τὸ τέταρτον πρὸς τὸ τρίτον ἔσται. Εἰ γὰρ οὐκ ἔστιν ὡς τὸ πρῶτον πρὸς δεύτερον οὕτως τρίτον πρὸς τέταρτον, οὐδὲ ἀνάπαλιν ἔσται. ἔστω γὰρ ὡς μὲν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὃ δὲ λοιπὸν τοῦ τετάρτου, καὶ ἀφῃρήσθω τοῦ ἡμιολίου ἑκατέρου λόγου ἑκάτερον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Locum quoq; habent rationes in æqualiter multiplicibus. Quando enim ut primum ſecundi, ſic tertiũ quarti fuerit multiplex: erit etiam, ut primum ad ſecũdum, ſic tertium ad quartum, non autem conuertendo. Si enim fuerit ſicut primum ad ſecundum, ſic tertium ad quartum: non omnino erit, neq; primum ſecundi: neque uerò tertium quarti æquè multiplex, quemadmodum hoc in ſequialteris, ſeſquitertijs, atque huius generis ſuperparticularibus alijs manifeſtum eſt. quod demonſtraſſe oportuit.

Exemplum prioris partis, ubi quantitates ſunt multiplices, atq; ſic etiam proportionales.

Vt	9	3	6	2
item	36	9	12	3
uel	16	4	8	2, &c.

Exemplum partis posterioris, ubi, licet quantitates sint proportionales, tamen non contrà omnino æquè multiplices.

Vt 6 4 3 2
4 3 12 9
5 3 15 9

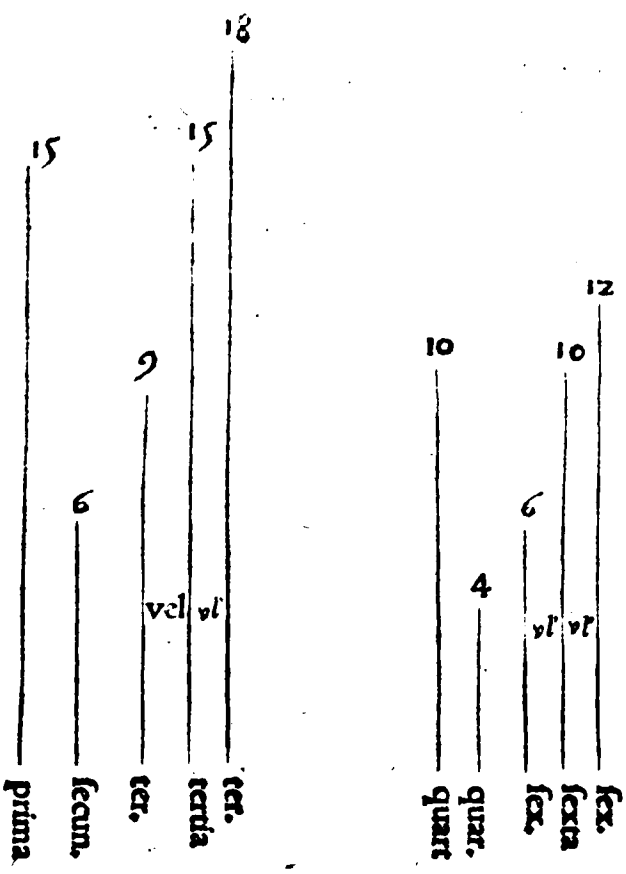
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος συνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται. καὶ ἂν ἴσον· ἴσον· καὶ ἔλασσον· ἔλασσον.

PROPOSITIO XX.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione, ex æquali autẽ prima tertia maior fuerit: & quarta sexta maior erit, & si æqualis: æqualis si uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem insuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter se habeant rationes; dico, si prima priorum maior fuerit ipsa sua tertia, uel ei æqualis, siue ea minor: & primam posteriorũ ipsa sua tertia maiorem, ei æqualem, uel minorem ea esse. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypothesi, maior ponitur, quàm ipsa tertia: erit illius ad mediã, ex priore parte propositionis octauæ, maior quàm huius ad eandem mediam ratio. Sed quia rationes in utroque ordine sunt inter se similes & eædem, prior scilicet priori, posterior uerò ratio posteriori: & posterioris ordinis prima ad mediam, maiorem quàm ipsa tertia rationem habebit: quare etiã, per priorem partem decimæ, prima posterioris, hoc est quarta, eadem sua tertia, hoc est sexta quãtitate maior erit. Eodem modo, si prima quàm tertia minor fuerit, per easdẽ propositionum partes propositum inferri poterit. Quod si prima & tertia prioris ordinis quantitates æquales inter se fuerint, cũ, per priorem partem septimæ, una & eadem sit harum ad mediam quantitatem ratio, propter rationum similitudinem, quæ in utroq; ordine esse præsupponitur: & in posteriori ordine prima ipsa tertiæ ex priori parte proportionanæ æqualis erit. quod demonstrasse oportuit.



APPENDIX.

Eadem ratio & in hac, & proximè ſequenti propoſitione concludi poteſt, ſi quatuor aut plures etiam in uno ordine, totidem quoq; ſimilium rationum in altero quantitates poſitæ fuerint, ſi prima prioris maior ſit ſua ultima, ei æqualis uel minor ea: quòd & tum prima poſterioris ordinis, reſpectu ſuæ ultimæ, ſimiliter ſeſe habeat.

Exemplum in numeris, ubi prima eſt

	maior ulti.		ultimæ æqualis		minor ultima	
Prima	9	6	9	6	9	12
	6	4	6	4	6	8
	15	10	15	10	15	20
ultima	3	2	9	6	12	16
quant.	prior	poſter.	prior	poſt.	prior	poſterior ordo

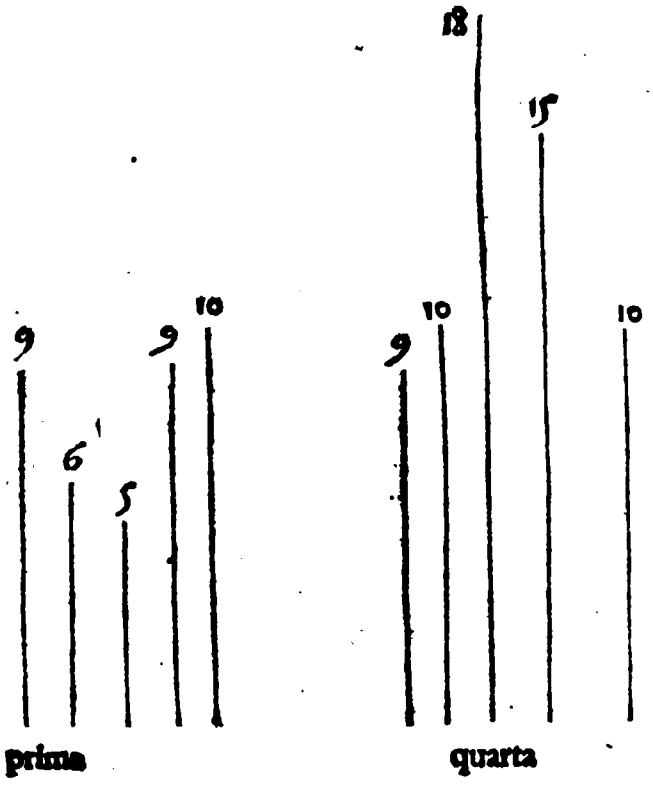
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, συνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ἡ δὲ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται καὶ ἴσον ἴσον, καὶ ἔλασσον ἔλασσον.

PROPOSITIO XXI.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipſa tertia maior fuerit: & quarta ſexta maior erit, & ſi æqualis: æqualis, ſi uerò minor: minor.

Sint tres quantitates, totidem inſuper aliæ, quæ eas quas priores inter ſe habeãt rationes, ſit tamen perturbata earum proportio: dico, ſi prima priorũ maior fuerit ipſa ſua tertia, uel eilæqualis, ſiue ea minor: & primam poſteriorum ipſa ſua tertia maiorem, ei æqualem, uel minorem ea eſſe. Quoniam enim prioris ordinis prima, ex hypotheſi, maior ponitur quàm ipſa tertia: maiorem etiam ad ſecundã prima quàm ipſa tertia, ex priore parte propoſitionis 8 huius, habebit rationẽ. Quoniam autem quæ primæ ad ſecundã in priori, ea etiam eſt, ex hypotheſi, ratio ſecundæ ad tertiã in ordine poſteriori: ſecũdæ igitur



ad tertiam in ordine posteriori: secūdæ igitur ad tertiam ordinis posterioris, maior quàm tertiæ ad secūdam in ordine priori ratio erit, unde sic maior etiã quàm in eodem posteriori secundę ad primam, eo quod eiusdẽ secundę ad primã, ex nostra hypothesi & conuersa ratione, sit ut in priori tertiæ ad secundam ratio. Quare ex posteriore parte propositionis decimę huius, concluditur propositū, primam scilicet in ordine posteriori ipsa sua tertia, hoc est, quartam sexta quantitate maiorem esse: Simili modo, æqualitatem: & quod etiam quantitas quarta quàm sexta minor sit, si prima tertiæ æqualis uel minor ea ponatur, inferemus. Si fuerint igitur tres quantitates, & alię eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione. fuerit autem perturbata earum proportio, ex æquali autem prima ipsa tertia maior fuerit: & quarta sexta maior erit, & si æqualis: æqualis, si uerò minor: minor. quod demonstrasse oportuit.

Exemplum in numeris, ubi prima.

	tertia maior		tertię æqualis		minor tertia	
prima	9	24	9	16	6	16
	8	18	8	18	8	18
tertia	6	16	9	16	9	24

Aliud exemplum.

	9	16	24	12
	8		18	
9	6	12	16	

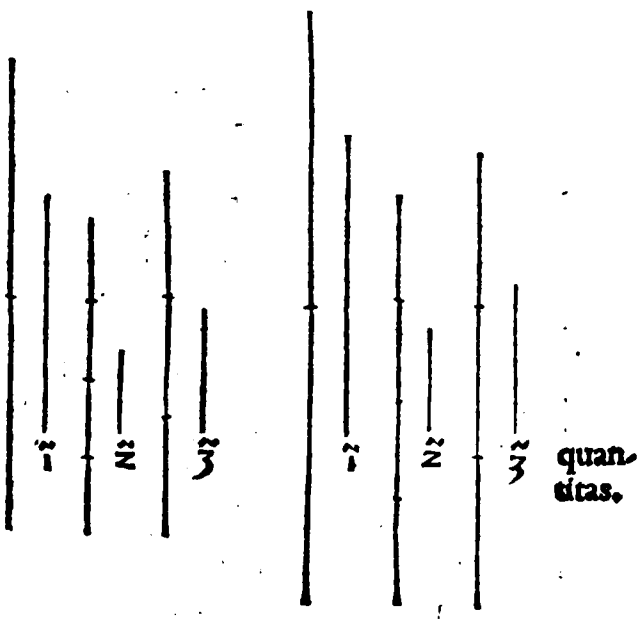
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, totidem insuper aliæ, quæ eas quas priores, eo etiam ordine, inter se habeant rationes: dico, quòd & ex æquali primæ ad tertiam prioris ea sit, quę primę ad tertiam ordinis posterioris, ratio. Sumptis enim primarum, hoc est, primæ prioris & primæ posterioris ordinis, quantitatum æquè multiplicibus, secundarum item ijsdem, seu utcunq; alijs æquè multiplicibus positis, etiã tertiarũ deinde quantitatum æquè assignentur multiplices. Et quoniã sem per quatuor proportionalium, primę & tertię, secundæ item & quartæ, æquè



repetiantur

reperiantur esse assignatę multiplices: erunt igitur ex propositione 4 huius, toties eam, quot in utroq; ordine quantitates reperiuntur, minus tamen uno, repetendo, & ipsæ multiplices, eodem ordine sumptæ, inter se proportionales. Quoniam autem tres sunt quantitates, prioris scilicet ordinis multiplices, aliæ deinde ipsis æquales numero, multiplices scilicet quantitatum ordinis posterioris, cum duabus sumptis, & in eadem ratione, cum sicut prima prioris sua ultima uel maior, ei æqualis, uel minor ea fuerit, sic & primã posterioris suam ultimã ex propositione 20 huius respicere oporteat: per 5 definitionem huius tandem concluditur propositum, primam scilicet prioris ordinis ad suam ultimam sese habere, ut se habeat prima posterioris ad suam ultimam. Si fuerint igitur tres quantitates, & aliæ eisdẽ æquales multitudine, in eadem cũ duabus sumptis ratione: & ex æquali in eadem ratione erunt. quod demonstrasse oportuit.

APPENDIX.

Hæc propositio cum proximè sequenti, quemadmodum præmissæ duæ, non de tribus tantum, uerumetiam de pluribus quantitatibus intelligi potest, si modò in uno tot, quot & in altero ordine, quantitates constituantur.

Exemplum in numeris sit.

27	9	27	81
26	13	39	78
35	7	21	105
32	8	24	96

27		32		81		96	
9	·	8	ut	27		24	

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

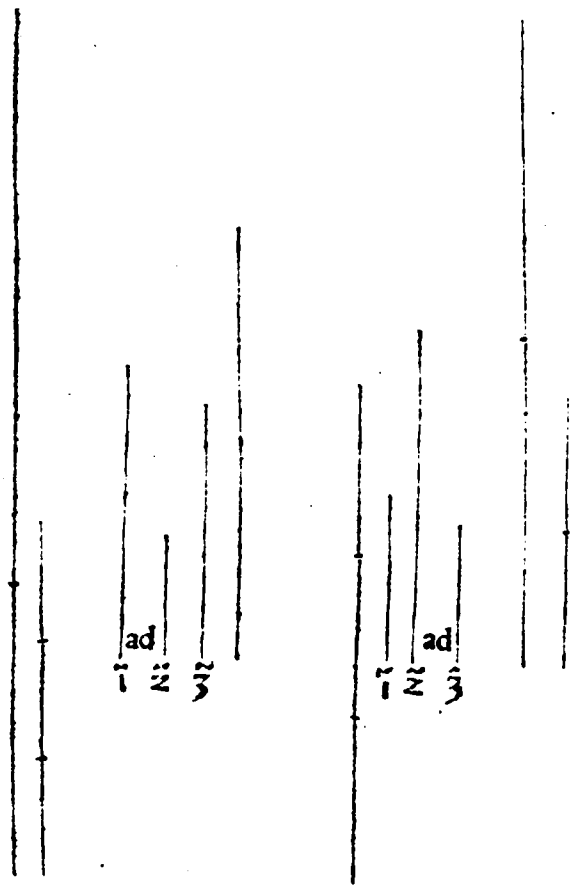
Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates, & aliæ eisdem æquales multitudine, in eadem cum duabus sumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres quantitates, atque totidem etiam aliæ, quæ eas quas priores, perturbato tamen ordine, inter se habent rationes: dico, quòd & ex æquali primæ ad tertiam prioris, ea sit, quæ primæ ad tertiam ordinis posterioris, ratio. Sumptis enim primæ & secundæ in priori, & primæ in posteriori ordine quantitatis æquè multiplicibus, etiam reliquarum trium, tertiæ scilicet in priori, & secundę ac tertiæ in posteriori ordine æquè multiplices assignentur. Et quoniam, quæ ipsarum partium seu submultiplicium, illa eadem est, ex 15 huius, etiam multiplicium ratio, & quoniam etiam, quæ eidem sunt eædem rationes, ipsæ inter se sunt eædem, utraq; propositione bis usurpata, semel quidem ratione multiplicium primæ & secundæ prioris, ac deinde etiam ratione multiplicium secundæ quantitatis & tertiæ ordinis posterioris: quam priores inter se habent rationem, illam eandem & posteriores multiplices habebunt. Simili modo, cum secunda prioris ad suam tertiam, ex hypothesi, sit, ut prima ad secundam in ordine posteriori ac deinde, ex permutata ratione

hæ nominatæ quantitates proportionales ſint: & ſecunda prioris ad primam poſterioris ut tertia illius, ad ſecundam huius, & multiplices quantitatum, ſecundę ſeſ licet prioris & primæ poſterioris ordinis, per eaſdem decimam quintam & undecimam propoſitiones huius eã, quam multiplices tertiæ prioris, & ſecundę quantitatis ordinis poſterioris, habebunt rationem: atq; ex permutata deinde ratione, multiplices ſecundę & tertię prioris, ut multiplices primæ & ſecundæ quãtitatum ordinis poſterioris erunt. Oſtenſum autem eſt prius, quòd & multiplices quantitatum prioris ordinis, primæ & ſecundæ, in eadem ſint ratione, in qua ſunt multiplices ſecundę & tertiæ quantitatum ordinis poſterioris. Quoniam aũt tres ſunt quantitates, atq; totidem etiã aliæ, in eadem cum duabus ſumptis ratione, eſtq; earum perturbata ratio: quemadmodũ igitur prima maior tertia, uel ei æqualis ſiue minor ea fuerit, ita ex propoſitione 21 huius, & quarta reſpectu ipſius ſextæ erit. Quare per definitionem 5, huius concluditur tandem, ut quam in priori ordine prima ad tertiam habet rationem, illam eandem in poſteriori ordine prima ad tertiam habeat. Si fuerint igitur tres quãtitates, & aliæ eiſdem æquales multitudine, in eadem cum duabus ſumptis ratione, fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æquali in eadem ratione erunt. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum in numeris ſit.

Ordo

prior			posterior	
15	5		5	15
6	2		10	20
8	4		4	8

15 6 ut 20 8 — 6 15 ut 8 20

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

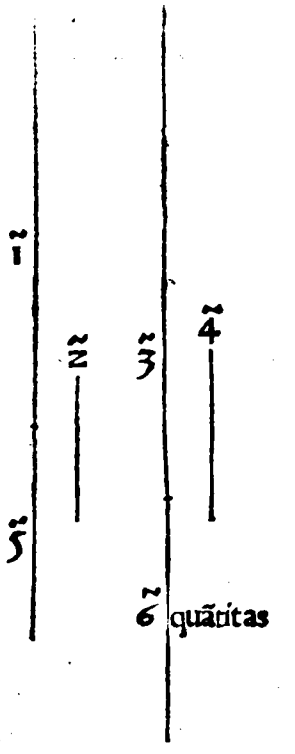
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· ἐὰν συντεθῇ, πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXIIII.

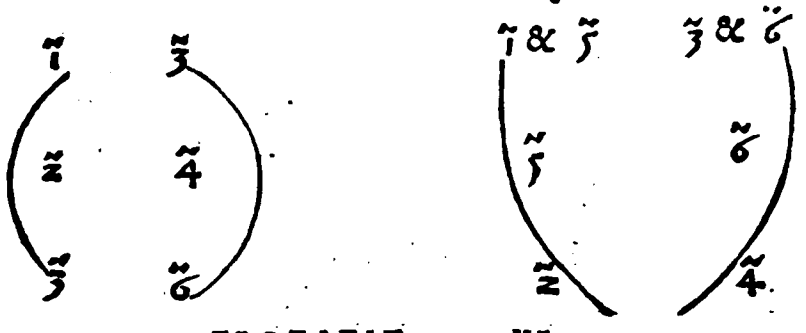
Si prima ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam habuerit autem & quinta ad ſecundam eam rationem quam ſexta ad quartam: & compoſita, prima & quinta, ad ſecundam eam habebit rationem, quam tertia & ſexta ad quartam.

Sint ſex quantitates, & eſto quòd prima ad ſecundam ſit ut tertia ad quartã, ſimiliter quinta ad eandem ſecundam, ut ſexta ad quartam: dico ergo, & compoſitam ex prima & quinta, ad ſecundam, eam quæ eſt compoſitæ ex tertia & ſexta ad quartam, rationem habere. Quoniam enim prima ad ſecundam, ex hypotheſi, eſt, ut tertia ad quartam, & rurſus, quoniam quinta ad ſecũdam, ſimiliter ex hypotheſi, eſt ut ſexta ad quartam, ex conuerſa ratione uerò, ſecunda ad quintam ut quarta ad quantitatem ſextam: & prima ad quintam, iuxta ordinatam proportionem, ex æquali, per propoſitionem 22 huius, ut tertia ad ſextam: erit. Eſt autem diuiſio rationis, unde ex rationis compoſitione, ut teſtatur propoſitio 18 huius, hæ quantitates proportionales erunt: prima igitur & quinta ad quintam, ſicut tertia & ſexta ad quantitatem ſextã. Quoniam aũt quinta ad ſecundam, ex hypotheſi, eſt ut ſexta ad quartã: quare rurſus per eandẽ ordinatam rationem, cũ duo iam quantitatum ordines appareant, cuiuſmodi ſcilicet hæc proportio requirit, infertur tandem propoſitũ, primam ſcilicet & quintam coniunctim ad ſecundam ſe habere, ut ſe habent tertia & ſexta, & ipſæ coniunctæ ad quantitatem quartam. Si prima igitur ad ſecundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad ſecundam, &c. quod demonſtraſſe oportuit.



Exemplum huius in numeris ſic.

prima		ſecunda		tertia		quarta
7	ad	9	ut	21	ad	27
quinta 6				ſexta 18		
13				39		



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ.

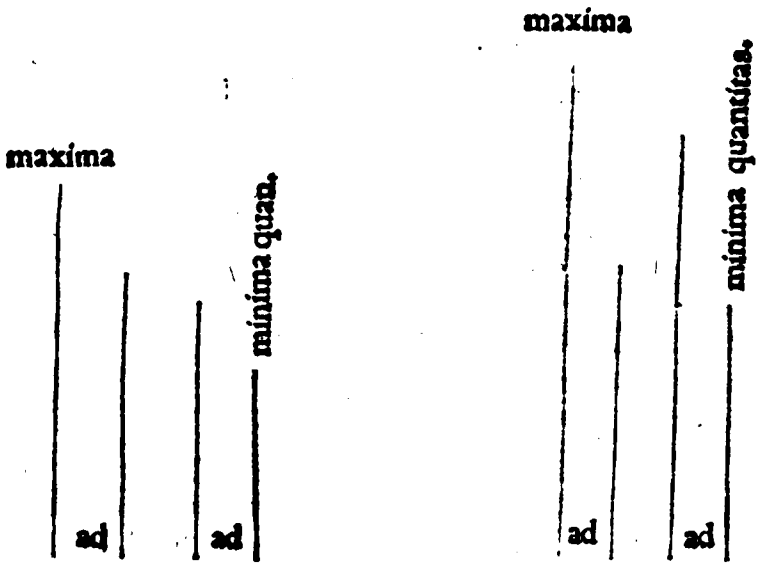
Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστι.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores sunt.

Sint quatuor eiusdem generis quantitates proportionales, qualitercunq;, modò non sint in ratione æqualitatis, ut dicitur. nam hic nulla apparet quantitas maxima uel minima, quod nunc est contra propositionis hypothesim: dico, maximam cum minima reliquis duabus quãtitatibus maiorem esse. Ponantur in maioribus quantitatibus portiones, ex propositione 3 primi, suis minoribus æquales. Et quoniam quantitates maiores, aut ex hypothesi statim, aut permutata ratione etiam usurpa-



ta, primò illam, quam ipsæ minores, secundò deinde, ubi quidem loco minorum, portiones, quas ipsæ minores in maioribus signatæ æquales habent, sumptæ fuerint, quam ipsæ portiones inter se habent rationem, cum iam totum sit ad totum, sicut ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ex propositione 19 huius, ut totum ad totum erit. Quia autem ex maioribus una, necessariò altera maior esse debet: & reliqua illius ex prima parte propositionis 14 sola, uel eadem ipsa parte, præmissa tamen permutata ratione, huius reliqua maior erit. Et quia etiam utraq; minor suæ ablatæ est æqualis, si æqualibus æqualia addãtur: & quæ proueniunt quantitates, utraq; uidelicet minor cum alterius ablata, inter se æquales erunt. Quòd si iisdem æqualibus inæqualia, reliqua scilicet, addita fuerint, utrunque suo, ac debito ordine: & producta iam, ex communi quadam notitia, inter se inæqualia erunt. Illud quidem maius, quod plus acceperit, alterum deinde minus. Cum igitur id quod maius est, ex maxima & minima, quod uerò minus, ex duabus quantitatibus reliquis compositum sit, propositio tandem constabit. **Si quatuor igitur quantitates proportionales fuerint, maxima & minima duabus reliquis maiores sunt.** quod demonstrasse oportuit.

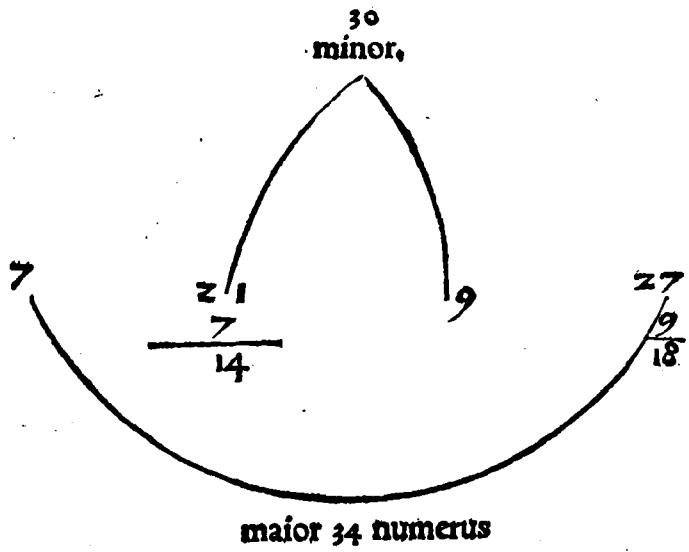
Exemplum in numeris sit.

Maximus		Minimus numerus
27	21 ut	9 . . 7
9	7	portiones minoribus æquales, & ablatæ ex totis.
18	14	Reliqui numeri.

Reliqua

Reliqua			Tota	
18	14	ut	27	21
Minor 9			Minor 7	
ablata alte. 7			ablata alterius 9	
16			16	
14			18	
30 minus, quia minus accepit			34 productum maius: quia maius acce.	

Sequitur hoc idem exemplum, numeris tamen aliter positis.



27	21,	ut	18	14
Minores			Ablatæ por.	
7			7	
9			9	
16			16	
14			18	
30			34 &c.	

FINIS LIBRI QVINTI.

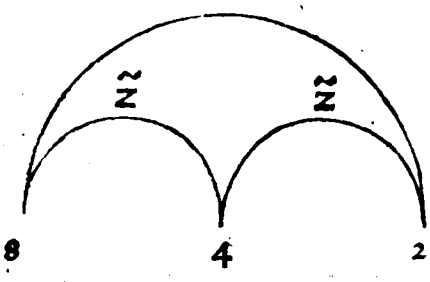
LI ΣΧΟΛΙΟΝ

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ε,
ΑΔΗΛΟΥ.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τῶν λόγων πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσί τινα λόγον. Ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται, ὧν αἱ πηλικότητες ποιοῦσιν αὐτόν. Πηλικότητες δὲ λέγει, ἀφ' ὧν ὀνομάζονται· ὡς ἀπὸ τοῦ διπλάσιος. Ἔστω λόγος τοῦ α πρὸς τὸν δ διπλασίων, καὶ αὖ πάλιν ὁ δ πρὸς τὸν β διπλασίων, καὶ αὐτός· ὁ τετραπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦτε α πρὸς τὸ δ, καὶ τοῦ δ πρὸς τὸν β, ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως. Ἐπεὶ, ὡς εἴρηται, πηλικότητες οἱ ἀριθμοί λέγοντες, ἀφ' ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται· οἷον ἀπὸ τοῦ διπλάσιος καὶ τριπλάσιος καὶ τετραπλάσιος λόγος. ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἴσου. ἔστι δὲ ὁ διπλάσιος τοῦ τετραπλασίου ἥμισυς. λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, ἀφ' ἧς ὁ διπλάσιος τῶν τετράρων ἥμισυς λέγεται, ὧν λεπτῶν πρῶτον λ λαμβάνω, καὶ ἕτερον ἥμισυ μονάδος, ἀφ' ἧς πάλιν ὁ δ ἥμισυς λέγεται τῆς κ, καὶ πολλαπλασιάζω τὰ λ πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ λ πρῶτα, καὶ αὐτὰ λέπτα, καὶ γίνονται διοσμύρια λεπτά, χιλιακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω ἤτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ ὀγδοήκοντα πρῶτα λεπτά, ἃ τινα δεκαογδοήκοντα πρῶτα λεπτὰ τέταρτόν εἰσι μονάδος. τεσσάκις γὰρ ι ε ξ. Ἀλλὰ διὰ ἴσου ὁ μείζων τοῦ β, καὶ α, ὁ μ. καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ μ, ἐπόγδοόν ἐστιν, λαμβάνω τὸ ἐπόγδοον τῆς μονάδος ὃν λεπτῶν τριῶν. Ἐπεὶ πάλιν ὁ μ, πρωτοπλασίων ἐστὶ τοῦ α μορίου τοῦ μ ὁ α λέγεται, πολλαπλασιάζω τὰ τρία τὸ ἐπόγδοον τοῦ ξ, πρὸς τὰ ε, ἀφ' ὧν πέμπτον μόριον ὁ α τοῦ μ λέγεται, καὶ γίνονται ι ε λεπτά, ἅπερ ἐστὶ τέταρτον μονάδος. καὶ οὕτως πάλιν ὁ β τοῦ α, τέταρτός ἐστι. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν δ ε ι β, ὁ α. ἐπεὶ ὁ δ ἥμισυς ἐστὶ τοῦ α, ὁ δὲ α ὑφημιόλιος τοῦ ι β. λαμβάνω τὰ λέπτα λ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ μ λεπτὰ τὸ ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ λ πρῶτα τὰ μ, καὶ γίνονται χίλια διακόσια, διοσμύρια λεπτά, ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ α. τὰ α τριῶν ἐστὶ μονάδος, ὁ δὲ α ἓν τριῶν ἐστὶ τοῦ ι β. Ἔστω μεταξὺ τοῦ β ε τοῦ ι β ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ διπλάσιος τοῦ δ ἥμισύ ἐστιν, ὁ δὲ δ τοῦ ι β ὑποτριπλάσιος, λαμβάνω τὰ λ λεπτὰ, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ· ε τὰ α, τὸ τρίτον αὐτῶν. ἀπὸ γὰρ τῆς τρία ὁ τριπλάσιος πεντάκις γίνεται. καὶ πρῶτα τὰ λ ἐπὶ τὰ α, γίνονται ἑξακόσια διοσμύρια λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται δέκα πρῶτα, τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος, καὶ ὁ β ἕκτον τοῦ ι β. Πάλιν ἔστω μεταξὺ τοῦ δ καὶ ε, ὁ α. καὶ ἐπεὶ ὁ δ ὑποεπτάπλάσιος ἐστὶ τοῦ α, ὁ δὲ α τετραπλάσιος τοῦ ε, λαμβάνω τὸ δ μονάδος πέμπτον, τὰ ι β, καὶ τὸ δ, ἀφ' ὧν ὁ ε τετραπλάσιον λέγεται τοῦ α, καὶ ποιῶ τὸ τέταρτον πρὸς τὸ διακόσιοστόν, γίνονται μ η ὑποεπτὰ τέταρτος τῆς μονάδος. καὶ ὁ δ τοῦ ε, ὑποεπτὰ τέταρτος ἐστίν. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τοῦ β, καὶ δ ὁ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ τοῦ γ ἐπίτριτός ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ ὅ ἐστι μονάς. λαμβάνω τῶν μονάδα,

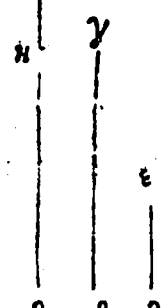
INTERPRETATIO, INCERTI AVTORIS.

Ratio ex rationibus cõponi dicitur, quãdo rationum quantitates, hoc eſt denominationes, multiplicatæ, rationẽ cõſtituunt. Ratio ex rationib. cõpoſita dicit, quã uidelicet rationum denominationes cõponunt. Quantitates uerò, hoc eſt denominationes rationũ, dicunt, à quib. rationes denominãtur, ut à duob. dicitur dupla. Sit ratio octonarij ad quaternarium dupla, atq; etiã ipſius quaternarij ad binariũ dupla & ipſa: quadrupla igitur ratio, octonarij ad binarium, cõponi dicit ex duab. rationib. octonarij ſcilicet ad quaternariũ, & quaternarij ad binariũ. ambarũ etenim rationũ denominationib. cõpoſita hęc denominatio cõſtituit. Quoniã ergo, ut dictũ modò eſt, quãtitates, ſeu denominatiões rationũ numeri dicuntur, à quib. habitudines nominãtur, deſcribũtur ac referunt inter ſe, ueluti à binario ternario ac quaternario: dupla, tripla ac quadrupla ratio. Nominat uerò & dimidiũ ab uno, ſunt aũt duo ipſius quaternarij dimidiũ. Capio igitur dimidiũ unius (integri ſcilicet, ut numeri 60 cũ is cõmodiſſimè diſtribui in minutias poſſit) à q̃ duo ipſius quaternarij dimidium dicit, quarũ acceptarũ partiũ, 30 accipio: & alterũ dimidiũ illius unius, à q̃ iterũ quaternarius octonarij medietas dicitur. & multiplico 30 prima minu. ad, hoc eſt cũ 30 min. & fiũt ſecũda min. 900, hęc in 60 ſcilicet traduco ſeu diuido, fiũt 15, prima min. q̃ ſanè 15 prima mi. quarta pars ſunt unius, ſeu integri. quater .n. 15, ſexaginta ſcilicet cõtinent. Proinde eſto binarij & octonarij medius 40. Et q̃niã 2 ipſius 40 uigincuplũ ſunt, accipio uigincuplum, unius ſeu integri, nẽpe tria minu. At uerò rurſus 40 quincuplũ ſunt octonarij: pars ipſius 40 octonari' dicit, multiplico 3 uigincuplã partẽ ipſius 60, cũ 5 denominante octonariũ in 40, & fiunt 15 min. quarta pars integri, 60, ſ. q̃ denominatio q̃q; eſt inter 2 et 8, poſitos num. Eſto rurſus inter ipſos 4 & 12 octon. q̃niã 4. dimidiũ ſunt octonarij, 8 uerò ipſius duodenarij ſubſeſquialter: accipio mi. 30, dimidiũ integri, & facio 40 min. ſubſeſquialteræ integri, & facio 30 ad 40, & fiunt 1:00 ſecun. mi. quib. diuiſis, fiunt prima mi, 20 & uiginti tertiũ ſunt integri: et quatuor igit tertium ſunt duodenarij. Eſto inter binariũ & 12 quaternarius, & q̃niam binarius quaternarij dimidiũ eſt, quaternar. ỽò duodenarij ſubtriplus, accipio 30 min. unitatis ſeu integri dimidiũ: 20 deinde, tertiũ ipſius. à ternario enim tripla denominat, & facio 30 cũ 20, fiunt 60 ſecun. min. quib. in integræ diuiſis, fiunt 10 prima, q̃ 10 ſexta pars ſunt integri: & 2 ſexta pars eſt duodenarij. Rurſus, ſit inter 4 & 5 num. 20. & q̃niã quaternar. ſubquincuplus eſt ipſius 20, numerus ỽò 20 ad 5 quadruplus, accipio integri 5 partẽ, nimirũ 12, & quaterna. à q̃ quinarius quadruplus dicit ipſius 20, & facio quadruplũ, ad 12, fiunt 48, ſubſeſquartũ integri: & 4 ipſorũ 5 ſubſeſquartũ eſt. Eſto rurſus inter 2 & 4 ternarius. Et quoniam 4 ad ternarium eſt ſeſquitertius, cũ ipſum & tertium ipſius, quæ eſt unitas, habeat, accipio integræ,

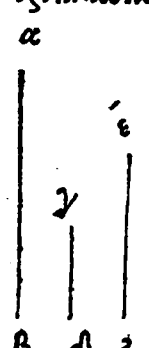


ὅπερ ἐστὶ λεπτὰ ξ. ἀφ' ἧς, μονάδι τῷ τρίᾳ, ὁ δι ἐπίτριτος αὐτῇ λέγεται. λαμβάνω καὶ τῷ μ, τῷ τῇ μονάδι ἥμισυ, δηλ. τὸ τρία ἡμιόλιον ἐστὶ τοῦ β. ὀνομάζεται δὲ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως. καὶ ποιῶ τὸ λ πρὸς τῶν μονάδα, ἤτοι ξ λεπτά, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια, δι' ὧν τὰ λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνεται λ πρῶτα λεπτά, τούτων ἥμισυ μονάδι. καὶ ὁ β τοῦ δι ἥμισύς ἐστιν.

Λόγοι ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιαζόμεναί ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου. ἐχέτω γάρ τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ λόγον διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἢ τινα ἄλλον. καὶ τὸ γ δ πρὸς τὸ ε ζ καὶ αὐτὸ διπλάσιον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α β, πρὸς τὸ ε ζ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ α β πρὸς τὸ γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς τὸ ε ζ, ἤτοι ὅτι ἐὰν ἡ τοῦ α β, πρὸς τὸ γ δ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτὴν τὸν τοῦ γ δ πρὸς τὸ ε ζ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὸν τοῦ α β πρὸς ε ζ. Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ μὲν α β τοῦ γ δ μεῖζον, καὶ τὸ γ δ τοῦ ε ζ. εἰ ἴσον τὸ μὲν α β τῷ γ δ διπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ τριπλάσιον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν γ δ τοῦ ε ζ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ γ δ διπλάσιον τὸ α β, τὸ ἄρα α β τοῦ ε ζ, ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ἐπεὶ δὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιον τινὸς διπλασιασθῇ, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. δῆλον γάρ ἐστι κηρίου συνθέσεως. ἡ οὕτως, ἐπεὶ τὸ α β τοῦ γ δ ἐστὶ διπλάσιον, διηρήσθω τὸ α β εἰς τὰ τῷ γ δ ἴσα, καὶ ἔστω τοῦτο, τὰ α η η β. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ τοῦ ε ζ ἐστὶ τριπλάσιον, ἴσον δὲ τὸ α η τῷ γ δ, καὶ τὸ α η ἄρα, τοῦ ε ζ ἐστὶ τριπλάσιον. ὅλον ἄρα τὸ α β τοῦ ε ζ ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ ε ζ λόγος, συνῆπται ἐκ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔστι τοῦ α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγου.



Ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ γ δ ἑνὸς τοῦ α β ε ζ, συναχθήσεται. Ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν α β, τοῦ γ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ ἥμισυ τοῦ ε ζ. Καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ ε ζ, τοῦ δὲ γ δ τριπλάσιον τὸ α β, τὸ α β ἄρα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ε ζ. ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισυ τινὸς τριπλασιάσωμεν, ἔξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν α β τοῦ γ δ ἐστὶ τριπλάσιον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἐστὶ ἥμισυ, οἱονοῦν ἐστὶ τὸ α β ἴσον τῷ γ δ τριῶν, τοιαῦτα ἐστὶ τὸ ε ζ δύο, ὥστε τὸ ἡμιόλιόν ἐστι τὸ α β τοῦ ε ζ. ὁ ἄρα τοῦ α β πρὸς τὸ ε ζ λόγος, συνῆκται ἐκ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔστι τοῦ α β πρὸς γ δ, καὶ τοῦ γ δ πρὸς ε ζ λόγου. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω τὸ γ δ ἑνὸς τοῦ α β ε ζ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν α β τοῦ γ δ ἥμισυ μόριον, τὸ δὲ γ δ τοῦ ε ζ ἑπίτριτον. Ἐπεὶ οὖν, οἱονοῦν ἐστὶ τὸ α β δύο, τοιαῦτα ἐστὶ τὸ γ δ τέτταρα. οἱονοῦν δὲ τὸ γ δ τέτταρα, τοιαῦτα τὸ ε ζ καὶ γ δ πέντε. καὶ οἱονοῦν ἄρα τὸ α β δύο, τοιαῦτα ε ζ τρεῖς. συνῆκται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ α β πρὸς ε ζ λόγος, συνῆκται ἐκ τοῦ γ δ μέσου ὅρου, ὁ τοῦ δύο πρὸς τὰ τρία. Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πάντων. καὶ δῆλον ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἷς ὁ προσοῦν τῷ συντεθέντων ἀφαιρεθῇ, ἑνὸς τοῦ ἁπλοῦ ἀφανισθέντος, οἱ λοιποὶ τῷ συντεθέντων καταλειφθήσονται.



quod eſt 60 min. à q̃ integro tertiũ exiſtente ternarij, quaternarius ſeſqtertium ipſius dicit. accipio & 30, integri dimidiũ, per quæ 3 ad 2 ſeſquialterꝫ erit. nominat uerò ſeſquialterꝫ à dimidio, & facio 30 ad integrum, utpote 60 min. & fiunt 1800, ſecunda min. his diuiſis, & fiunt 30 prima min. hæc dimidium ſunt integri: quare & binarius ipſius quaternarij dimidiũ eſt.

Ratio ex duab. ſiue ex plurib. rationib. cõponi dicitur, quando rationũ quãtitates, hoc eſt denominationes, multiplicatę, aliquã rationis quãtitatẽ cõſtituunt. Habeat igit primũ ad ſecundũ, rationẽ datã, ueluti duplã, aut triplã, ſiue aliquã aliã, habeat & ſecundũ ad tertiũ, rationẽ, & ipſam datã: dico q̃ primi ad tertiũ ratio, ex primi ad ſecundũ, & ſecũdi ad tertiũ rationibus, cõpoſita ſit. Aut, quando primi ad ſecundũ rationis quantitas cum ſecundi ad tertium rationis quãtitate multiplicata fuerit, quantitatẽ primi ad tertiũ cõſtituit. Sit igit, et primò quidẽ, primũ maius ſecundo, ſecundũ itẽ maius tertio, eſto etiã, q̃d primũ quidẽ ad ſecundum duplã, ſecundũ ỽò ad ipſum tertiũ triplã rationẽ habeat. Quoniã eñ ſecundũ triplũ eſt ipſius tertij, ipſius uerò ſecundi duplũ ipſum primũ: primũ igit ipſi⁹ tertij ſexcuplũ erit. qñ. n. ſi triplũ alicui⁹ duplicauerimus, ipſius ſexcuplũ ꝓducitur: hoc enim eſt ꝓprie cõpoſitio. Aut ſic, qñ primũ ſecundi duplũ eſt, ſubdiuidat primũ in partes ipſi ſecundo æquales: uocẽtur aũt hæ prior & poſterior. Et qñ ſecundũ ipſius tertij triplũ eſt, æqualis uerò eſt prior primi pars ipſi ſecundo: & hęc eadẽ pars, ut ipſum ſecundũ, tertij tripla erit. primũ igit ipſius ſecundi eſt ſexcuplũ, q̃ igitur primi ad tertiũ ratio (cõiuncta ꝑ ſecundũ, mediũ terminũ) ex primi ad ſecundũ & ſecundi ad tertiũ ratione, cõpoſita eſt.

12 6 2

Similiter ỽò & ſi minus fuerit ſecundũ utriſq; ipſorꝫ, primo ſcilicet & tertio, cõtrahẽtur illa. Eſto eñ iterꝫ primũ quidẽ ſecundi triplum, ſecundu ỽò tertij dimidiũ. Et qñ ſecundũ eſt tertij dimidiũ, ſecundi ỽò triplũ eſt ipſum primũ: primũ igit ipſius ſecũdi ſeſqalterꝫ erit. qñ. n. ſi dimidiũ alicuius triplicauerimus, habet ipſum ſemel & dimidiũ. Et qñ primũ ſecũdi triplũ, ſecundũ ỽò ipſius tertij dimidiũ eſt: qualiũ primũ eſt trium ſecundo æqualiũ, talium eſt & tertiũ duorꝫ, quaꝓpter ſeſquialterꝫ eſt primũ ipſius tertij. primi igit ad tertiũ ratio (ut q̃ per ſecundũ, mediũ eius terminum cõiuncta eſt) ex primi ad ſecundum et ſecundi ad tertium ratione cõpoſita eſt. Sed rurſus, ſit ſecundũ utriſq; illorꝫ, primo & tertio, maius, & ſit quidẽ primũ ſecũdi dimidia pars, ſecundũ ỽò tertij ſeſqtertiũ. Quoniã igit quantũ eſt primi dimidiũ, tãta eſt ſecũdi quarta: quãta ỽò eſt ſecundi q̃rta pars, tãta eſt primi cũ tertio una quinta: dimidia igit primi, tertia deinde tertij, inter ſe æqualia erunt. Primi igitur ad tertium, nimirꝫ 2 ad 3, ratio, ꝑ ſecundum, mediũ eius terminum, cõiuncta eſt. Similiter etiã & in plurib. in reliqs etiã caſib. Et manifeſtum eſt, q̃ ſi à cõpoſita ratiõe una qualiſcunq; cõpoſitarꝫ auferat, una ſimpliciũ ſublata, reliq; ratiões cõpoſitarꝫ cõprehẽdant.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOmetricorum liber ſextus.

ΟΡΟΙ.

Ομοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

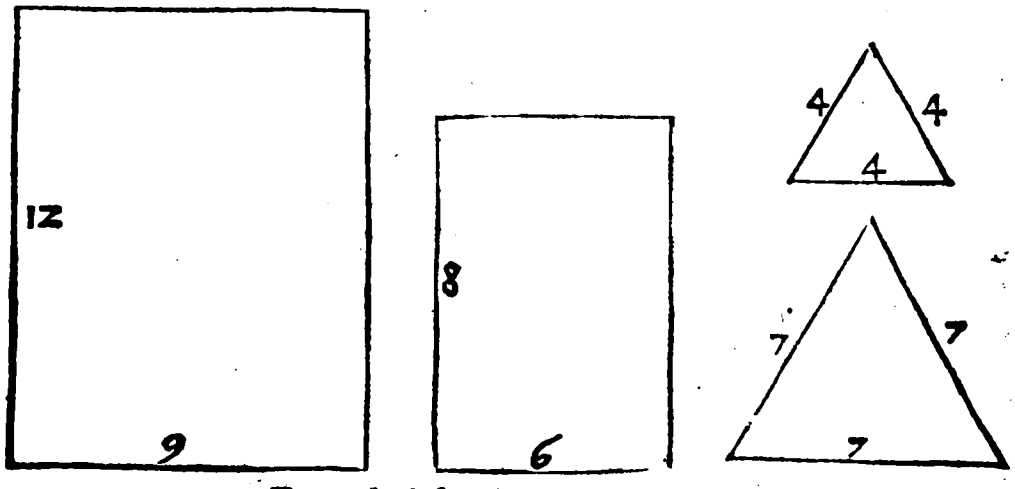
Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

DEFINITIONES.

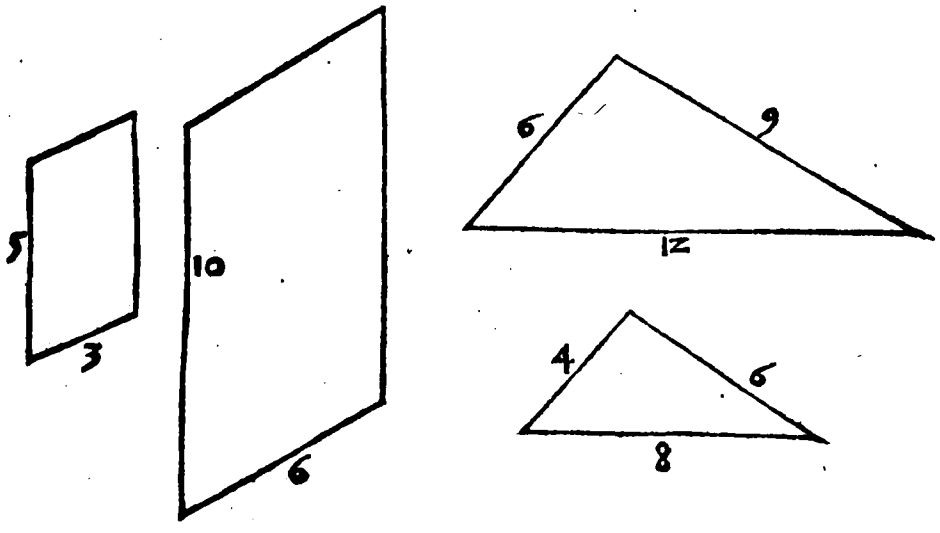
1 Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos æquales habent ad unum, & quæ circa angulos æquales latera, proportionalia.

2 Reciprocæ autem figuræ ſunt, quando in utraq; figura antecedentes & conſequentes termini rationales fuerint.

Exempla definitionis primæ.



Exempla definitionis ſecundæ.



Αχρομ

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ἡ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

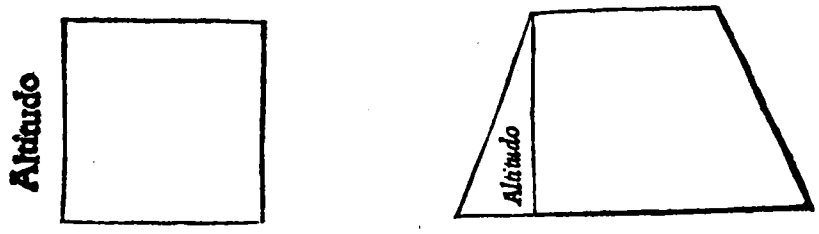
3 Secundum extremam & mediam rationem recta linea diuidi dicitur, quando fuerit, ſicut tota ad maius ſegmentum, ſic maius ad ſegmentum minus.

Tota			Tota		
12			8		
$\sqrt{180} - 6$		$12 - \sqrt{180}$	$\sqrt{80} - 4$		$12 - \sqrt{80}$
maius ſegmentum		minus	maius		minus
12	ad $\sqrt{180} - 6$	ut	$\sqrt{180} - 6$	ad	$12 - \sqrt{180}$
Similiter 8	$\sqrt{80} - 4$		$\sqrt{80} - 4$	12	$\sqrt{80}$

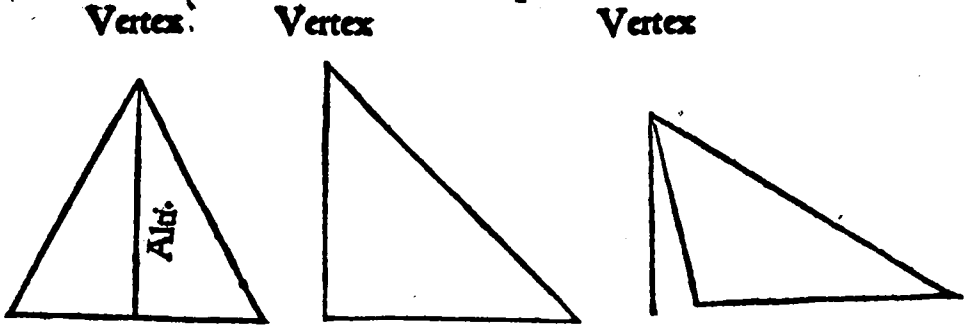
Ὕψος δέ ἐστι παντὸς σχήματος, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

4 Altitudo uniuſcuiuſque figuræ eſt, à uertice ad baſim ducta perpendicularis.

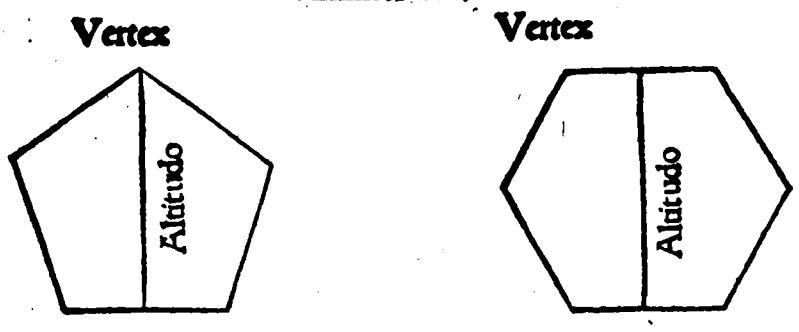
Sunt autem huius definitionis exempla hæc.



Alia exempla.



Similiter alia.



Λόγος

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιαθεῖσαί, ποιῶσί τινα λόγον.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates multiplicatæ inter se, aliquam effecerint rationem.

Vt rationẽ duplam, cuius quantitas est 2, componunt & constituunt rationum sequialteræ & sesquitertiæ, quantitates, $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, multiplicatæ inter se, ut sequitur.

Componentes		Composita ratio		
3	4	12	uel	2
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	6		1
Sesquialtera	Sesquitertia	Dupla		

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

ΠΡΩΤΗ. Α.

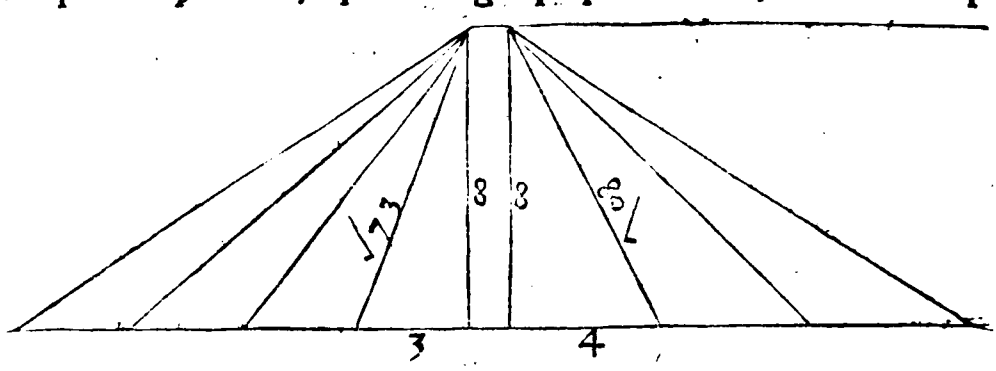
Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

PROPOSITIONES.

PRIMA. I.

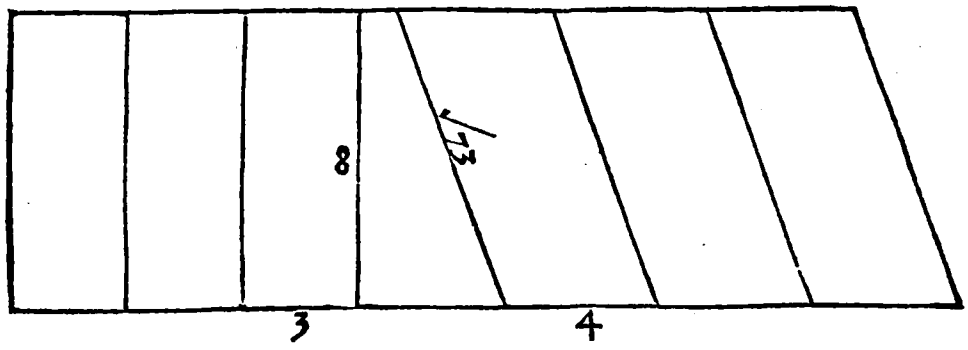
Triangula & parallelogramma, quæ sub eodem sunt uertice: ad se sunt ut baſes.

Describantur sub una altitudine aliquot triangula, uel parallelogramma: dico, utra descripta fuerint, illorum eam inter se esse rationem, quæ est basium. Prolongentur in utranq; partem ultra figuram baſes, unicuiq; deinde basi in sua continuata portione, aliquot portiones (siue uni basi tot quot alij, siue pauciores) sibi sumantur æquales. atq; tandem, si quidẽ triangula proposita fuerint, extremitatibus por-



tionum singulis cũ uertice illius trianguli, cuius basi hæ portiones sunt æquales, rectis lineis iunctis: Vel, si parallegrãma fuerint, tot, quot portiones sunt, parallelogrammis, secundum portionum atq; descriptorum parallelogrammorum laterum quantitatem descriptis, figura demonstrationis perfecta erit. Quare nunc ad demonstrationem ipsam. Triangula siue parallelogrãma cũ, ex hypothesi, sint æque alta, utrinq; etiam æquales baſes habeant: erunt tam hæc, ex 36, quàm illa, ex propositione 38 primi, inter se æqualia, Quàm multiplex igitur est utriusque basis basiũ aggregatum, tam multiplex etiam erit utriusq; trianguli uel parallelogrammi, id quod ex triãgulis uel parallelogrammis colligitur. Quod si fortè iam basium aggregatum in una, ex structura, æquale fuerit basium aggregato in collatione altera:

tera & ipſa tota triangula, ex 38, ſeu parallelogramma, ex propoſitione 36 primi, ex utraq; parte inter ſe æqualia erunt. Quòd ſi uerò unum alterum exceſſerit, uel ab

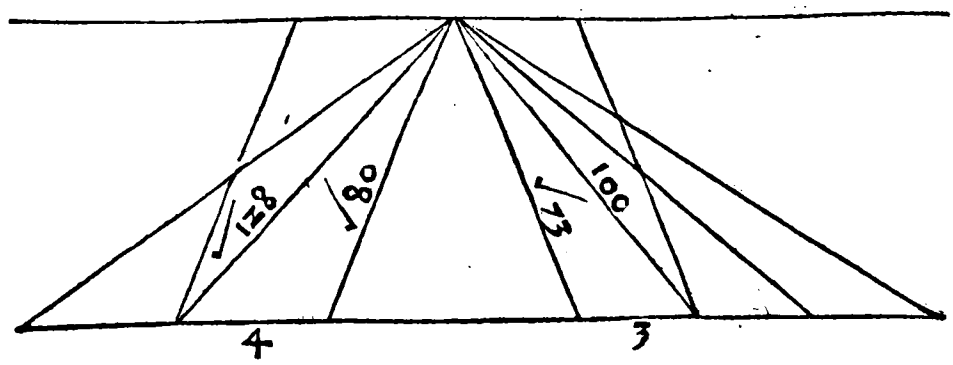


eo defecerit: & triangula ſeu parallelogrãma tum eodẽ modo ſeſe habebunt. Quatuor igitur nunc quantitatib. toties quidẽ prout multa uel pauca triangula ſeu parallelogramma propoſita fuerint, ordinatis, quarum prima & ſecũda ſint baſes triangulorum ſeu parallelogrammorum poſitorum, tertia uerò quantitas & quarta baſibus his ſuperpoſita triangula ſeu parallelogramma, cum iam primæ & tertiæ, ſecundæ item & quartæ æquè ſint aſſignatæ multiplices: infertur tandem, per definitionem 5 quinti, id quod uolebat propoſitio: Triangula ſcilicet & parallelogramma, ſi ſub uno & eodẽ uertice fuerint, in ſuarum baſium ratione eſſe. quod demonſtrari oportuit.

8	9	32	36	12	9	72	96
4	3	16	12	4	3	24	32
Triangulorum baſes		Ipſa triangula		Parallelogrammorum baſes		Ipſa parallelogramma.	

APPENDIX.

Poteſt hæc res de triangulis tantũ demonſtrari, ut ſcilicet ſit (cũ de uno dicatur) in demonſtrando facilior progreſſus. Quo facto, cum parallelogrammum & triangulum, ubi eandẽ baſim habuerint, atq; etiã inter lineas æquediſtantes fuerint, per propoſitionem 41 primi, illud ad hoc duplum ſit, cumq; etiam partes eodem modo multiplicium, per propoſitionem 15 quinti, eandem habeant rationem: & alterum, de parallelogrammis, tandem ſic ſe habere infertur, quod admonuiſſe oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β.

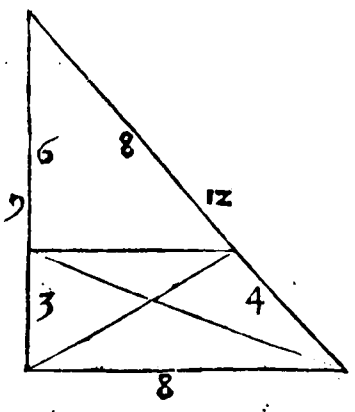
Ἐὰν τριγώνῳ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. Καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον

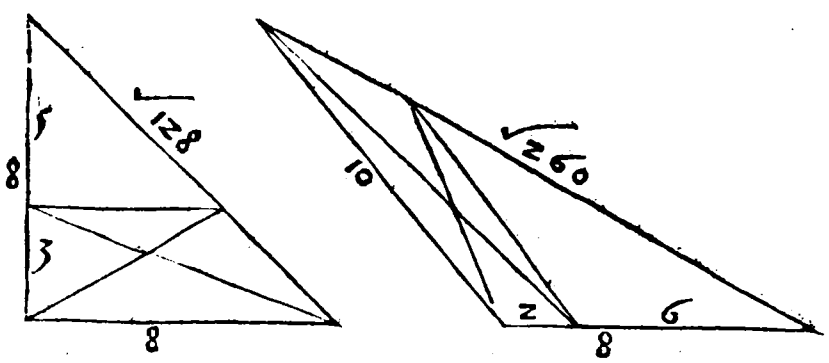
τμηθῶσιν· ἡ ΔΕ τὰς γραμὰς ἀναλόγως τμήσει· καὶ ἐὰν τὰς λοιπὰς ἴσας τοῖς πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ πλευραῖς προσλάβωμεν.

PROPOSITIO II.

Si ad unum trianguli latus ducta fuerit recta quædam linea parallela: proportionaliter hæc secat trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint: quę ad sectiones iungitur recta linea, ad reliquum tertium latus parallela erit.

Describatur triangulum, ducatur in eo etiam, ab uno latere ad reliquorũ utrumlibet, recta quædam linea, reliquo tertio trianguli lateri parallela: dico, quantum ad partem priorem, latera illa per ductam parallelam ἀναλογικῶς, hoc est proportionaliter, secta esse, sic scilicet, quemadmodum se habet superior unius sectí lateris pars ad suam inferiorem, uel contrà, inferior ad superiorem, ita in altero superior uel inferior pars ad reliquam se habeat. Porrò si recta in triangulo ducta linea, duo eius latera proportionaliter secet: hæc ducta, quantum ad partem posteriorem, lateri tertio parallela erit. Quantum igitur ad partem priorem. Cum triangulum per ductam parallelam, ut apparet, in quadrilaterum & triangulũ diuisum sit, ductis in quadrilatero duabus diametris: erunt quæ sic fiunt triangula, propterea quòd unam & eandẽ lineam, ductam scilicet perpendicularẽ, pro basi habeant, in eisdem item parallelis sint, ex propositione 37 primi, inter se æqualia: eorum igitur, ad reliquum ultra quadrilaterum triangulum, per priorem partem propositionis 7 quinti, una & eadem ratio. Cumq; etiam horum duorum æqualium triangulorum utrunq;, cum tertio reliquo æquealtum sit, atq; sic, ex præmissa prima bis usurpata, eam, quã bases, inter se habeant rationẽ. cum quæ eidẽ sint eædem rationes, ex propositione 11 quinti, hæ inter se etiã eædem sint, hæc propositione bis usurpata, prior pars tandẽ manifestabitur. Sequitur posterior. Maneat eadem figuræ dispositio. Et quoniam latera, per ductam in triangulo lineam, ἀναλογικῶς ex hypothesi secta sunt, & quoniam etiam triangula, ad has portiones uel laterum





partes constituta, eam quam bases, inter se habent rationem: & triangulorum inter tertium latus & ductam in triangulo lineam comprehẽsorum, ad tertium reliquũ, per propositionem 11 quinti, una & eadem ratio erit: unde sic etiam, per priorem partem nonæ eiusdem quinti, eadem triangula inter se æqualia: atq; tandem, per propositionem 39 primi, inter lineas æquedistantes. Ducta ergo in triangulo hæc

recta

recta linea, tertio lateri æquedistans erit. In triangulo igitur si ad unum eius, &cæ. quod demonstrasse oportuit.

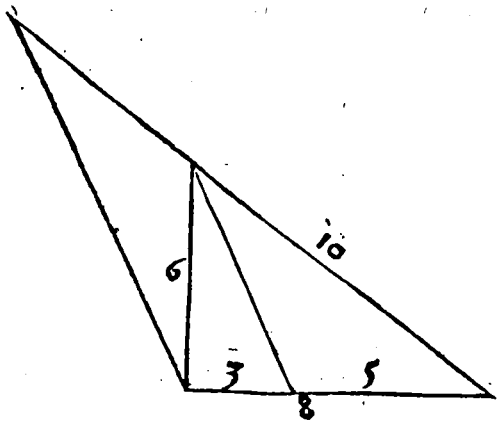
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Γ.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν· τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. Καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet & ipsam basim: basis segmenta eandem habebunt rationem reliquis ipsius trianguli lateribus. Et si basis segmenta eandem habuerint rationem reliquis ipsius triãguli lateribus: à uertice ad sectionem ducta recta linea, bifariam secat ipsius trianguli angulum.

Describatur triangulum qualitercunq; ducatur etiam ab uno eius angulo ad latus suum subtendens recta linea, quæ, per propositionem 9 primi, ipsum angulum bifariam, latus uerò eius utcunq; secet: dico, quantum ad partem priorem, secti lateris segmenta eam, quam duo reliqua latera, inter se habere rationem. Excitetur ex alterutra secti lateris extremitate linea per propositionẽ 31 primi, rectæ latus unum secanti, parallela, hæc deinde, latus insuper illud: quod ab altera secti lateris extremitate egreditur, usq; dum concurrant, prolongentur. Et quoniam in has duas parallelas recta quædam linea, unum scilicet trianguli latus incidit: erit angulus, medietas scilicet una diuisi, per primam partem propositionis 29 primi, suo coalterno angulo æqualis, atq; mox deinde & altera, per illam communem noticiã, Quæ uni sunt æqualia, &c. eidẽ coalterno æqualis erit. Sed quia hæc altera diuisi medietas, ut angulus externus, per secundam partem eiusdem 29, suo interno, qui scilicet sub παλλήλως ducta, ac producti lateris portione exteriori continetur, est æqualis: & illi duo anguli, ad παλλήλως ductã positi, per eandem communem noticiam, inter se æquales erũt: triangulum igitur, per propositionem 6 primi, isosceles. Quòd si quis propositionis 2 huius sententiæ recordabitur, æquali pro æquali linea sumpta: quod prius sumptum erat, tandem inferri poterit. Posterius nunc, quod scilicet, si ab aliquo trianguli angulo recta linea ad suam subtẽsam demissa fuerit, sic ut huius subtensæ uel basis segmenta eam quam reliqua latera, inter se habeant rationem, angulus ille bifariam diuisus sit, hoc sic patet. Maneat eadem figuræ dispositio. Et quoniam duo reliqua latera, ex hypothesi, illud deinde quod ulterius protractum est latus, & exterior portio, per propositionem 2 huius, eam, quam ipsę diuisi lateris partes, inter se habent rationem; quia duę rationes unt sunt eædem: illæ ex 11 quinti, & inter se eædem erunt. Hæ duæ igitur lineæ, portio scilicet exterior, & alterum trianguli latus, per secundam partem propositionis nonæ quinti, inter se æquales erunt. sicq; triangulum isosceles, cuius anguli ad basim, lineam scilicet παλλήλως ductam, per priorem partem quintæ primi, inter se sunt



æquales. Quia uerò unus, ex prima parte propositionis 29 primi, uni: alter uerò, ex secunda parte eiusdem, alteri diuisi anguli parti est æqualis: ut ipsi isoscelis ad basim anguli, ex priore parte quintæ primi: sic propter æqualitatem iam, & diuisi anguli partes inter se æquales erunt, quare bifariam diuisus. Si igitur trianguli angulus bifariam secetur, &c. quod demonstrásse oportuit.

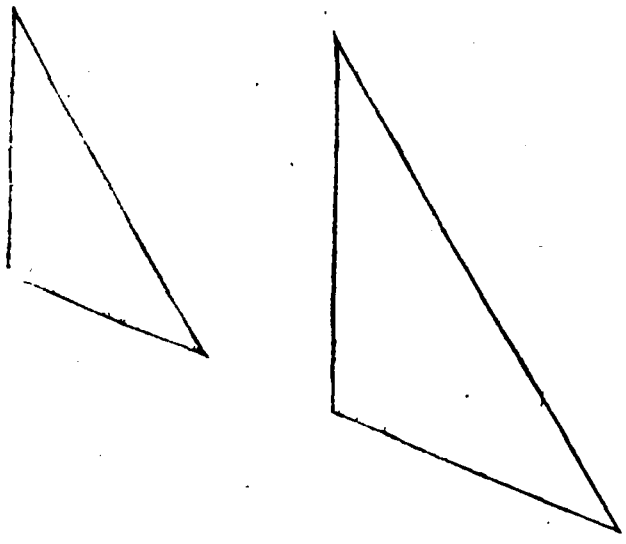
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων· ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

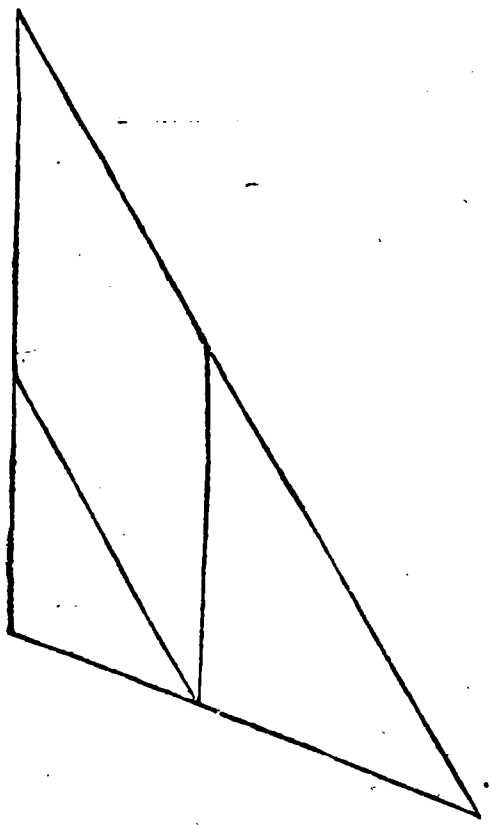
PROPOSITIO IIII.

Æquiangulorum triangulorum: proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & similis rationis latera, quæ subter æquales illos angulos subtenduntur.

Fiant duo triangula, qualia propositio hæc quarta requirit, hoc modo. describatur primò unum qualitercunq; , ducta deinde recta linea ad eius unam extremitatem per propositionem 23 primi, unus angulus uni, ad alterã deinde, uersus illam & eandẽ partem, alius alij trianguli angulo æqualis constituatur, ac continuatis duabus illis rectis donec concurrant, triangulũ hoc, ei quod prius descriptũ est, æquiangulum erit. Dico ergo nunc, cum sint triangula æquiãgula, quòd & illorũ quæ sunt circa æquales angulos, latera, proportionalia sint: eiusdemq; & similis rationis latera, quæ sub æqualibus angulis subtenduntur. Solent huius propositionis conclusionem alij aliter interpretari. Sunt enim, qui prioris rationis terminos, antecedentẽ puta & consequentem, in uno, posterioris uerò, in altero triangulo accipiunt, in hæc uerba. In qua ratione sunt quælibet duo latera circa unum angulum in uno: in eadem sunt etiam duo, circa angulum sumpto æqualem, latera, in triangulo altero. Præterea sunt, qui antecedentes in uno, in altero uerò triangulo consequentes rationum terminos accipiunt, hoc modo. In qua ratione sunt quælibet duo latera, duos in duobus triangulis æquales inter se angulos subtendentia: in eadem sunt etiam singula reliqua ad sua singula. Cuius sanè conclusionis duplex interpretatio, cũ in scholis recepta sit, utriusq; etiam demonstrationem adducendam duximus. Prioris igitur talis esto. Coniungentur triangula sic, ut unum unius & alterum latus trianguli alterius sit linea una: utq; anguli etiam, ad hęc latera exteriores, ipsis medijs, uterq; suo remotiori, sint æquales. Et quoniam in duas rectas, quę sunt extrema horum triangulorum latera, ex duobus lateribus composita recta linea incidit, cum qui sic describuntur anguli, ex structura & propositione 17 primi (æquali tamẽ pro æquali angulo sumpto) duobus rectis angulis minores sint: in eadem parte hæc duo latera, uel has duas rectas continuatas cõcurrere, ex quadam communi noticia, necesse est. Continuentur ergo ut cõcurrant. Et quoniã id quod sic describitur, ex prima parte propositionis



positionis 28 primi, bis usurpata, parallelogrammũ esse cõstat, parallelogrammi insuper latera opposita, ex propositione 34 primi, inter se equalia sunt: per propositionem 2 huius & permutatam rationem utroque bis usurpato, æquali subinde pro æquali linea sumpta, ex æqua ratione, quantum ad priorem conclusionis interpretationem, propositioni satisfactum erit. Vel, per propositionem secundam huius, bis usurpatam, cum duæ rationes uni eædem sint, atq; illæ sic, ex propositione 11 quinti, inter se eædem: & posterior conclusionis interpretatio manifesta erit. Aequiangulorum igitur triangulorum, proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & similis rationis latera, quæ subter æquales illos angulos subtenduntur. quod demonstrasse oportuit.



APPENDIX.

Et licet utraq; cõclusionis interpretatio, ut diximus, in scholis recepta sit, tamen cum non conueniat ex unius propositionis hypothesibus duplicem conclusionis colligere interpretationem, quòd ex nostra sententia, prior posteriori interpretationi præferenda sit, lectorem scire uolumus. Habet tamen & posterior suam defensionem, cum sit, ut conijcere licet, ex propositione 14 huius petita.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

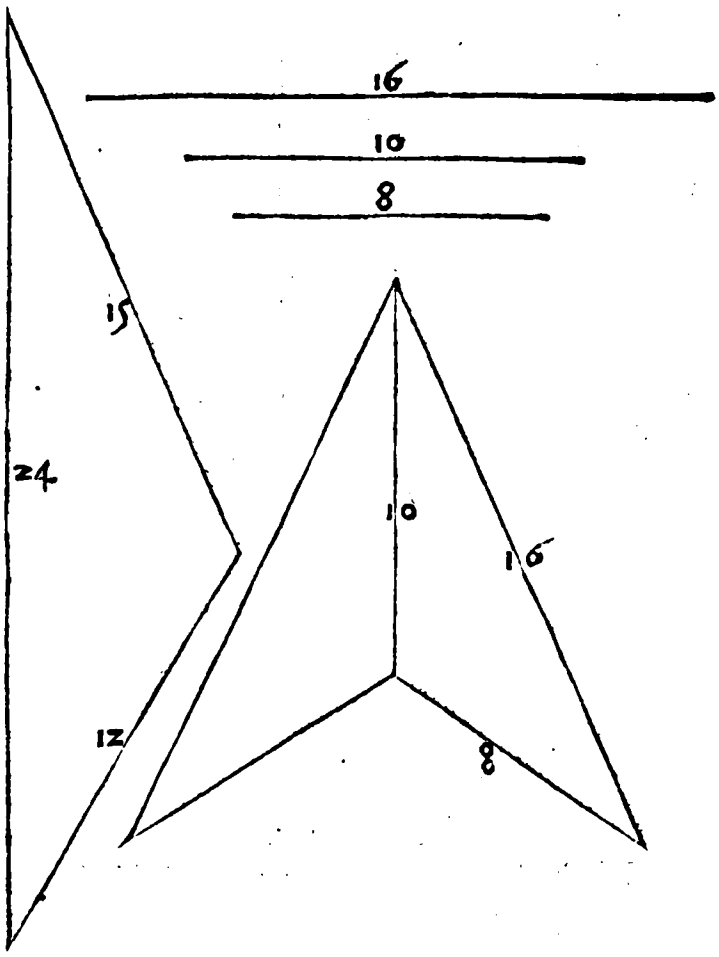
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, sub quibus similis rationis latera subtenduntur.

Describatur primò triangulum qualitercunq;, ex tribus deinde rectis lineis alijs quæ eas inter se quas descripti trianguli latera, rationes habent, aliud triangulum, per propositionem 22 primi, constituatur. Erunt autem descripta duo triangula, qualia propositio hæc quinta requirit: quare dico, quòd ea etiam æquiangula sint, angulos item qui sub similis rationis lateribus subtendũtur, æquales habeant. Constituantur ad unum utriusuis trianguli latus, atq; ad eiusdem lateris extremitates, ex illa parte quæ est extra triangulũ, per propositionem 23 primi, duo anguli, ad utrãq; nimirum extremitatem unus, duobus in altero triangulo angulis æquales. Et quoniam per continuationem linearum, illo triangulo clauso, tertius angulus

huius, tertio alterius triãguli angulo, ex corollario propoſitionis 32 primi, eſt æqualis: hæc duo triangula primò æquiangula, atq; inde, ex propoſitione 4 huius, late-



rum etiam proportionalium erunt. Duo igitur ſimul compoſita triangula, per propoſitionem 11 quinti, & nonam eiuſdem, utroq; bis ſumpto, æquilatera, per octauam deinde & 4 primi, uel octauam ſolũ, ter repetitam, etiam æquiangula erunt. Quare per communem illam notitiam, Quæ uni ſunt æqualia, &c. quantum ſatis fuerit ea repetita, infertur tandem concluſio, triangula ſcilicet talia propoſita, inter ſe etiam æquiangula eſſe: atq; inſuper, quod anguli in utroq;, ſub quibus ſimilis rationis latera ſubtenduntur, æquales ſint. Si duo igitur triangula latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebũt angulos, ſub quibus ſimilis rationis latera ſubtenduntur. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

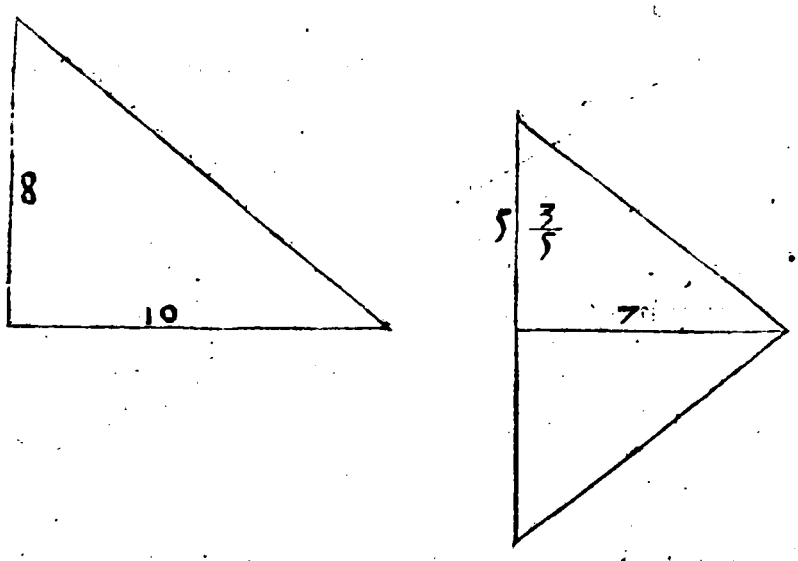
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualẽ, circa item æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula: & æquales habebunt angulos, ſub quibus ſimilis rationalis latera ſubtenduntur.

Deſcribatur

Deſcribatur primò triangulum, ducatur etiam recta quædam linea, ad cuius extremitatem deinde alteram, per propoſitionem 23 primi, angulo, qui ſit uni ex triangulo æqualis, conſtituto, fiat ut hæ rectæ eam, quam in triangulo, circa ſumptum angulum latera, inter ſe habeant rationem, & coniunctis extremitatibus tertia quadam linea, quod ſic deſcribitur triangulum, & prius deſcriptum, huiuſmodi qualia hæc propoſitio requirit, triangula erunt: dico ergo nunc, quòd & æquiangula ſint hæc eadem triangula: angulos item, qui ſub ſimilis rationis lateribus ſubtenduntur, æquales habeant. Conſtituantur ad unum utriuſuis trianguli latus, atq; ad eiuſdem lateris extremitates, ex illa parte quæ eſt extra triangulum, per 23 primi, duo anguli, duobus in triangulo altero angulis æquales. Et quoniam per continuatio-



nem linearum illo triangulo clauſo, tertius angulus huius, tertio alterius trianguli angulo, ex corollario propoſitionis 32 primi, eſt æqualis: hæc duo triangula primò æquiangula, atq; deinde ex propoſitione 4 huius, laterum etiam proportionalium erunt. Sed quia rationũ quantitatibus inter ſe collatis, inde, atq; etiã ex propoſitionis hypotheſi, duæ rationes eidem eædem ſunt, cum hæ duæ, ex propoſitione unde cima quinti, etiam inter ſe eædem ſint, unam deinde uel antecedentem uel conſequentem (pro ut quidem inſtituta collatio fuerit) quantitatem habeant: duo illa ſimul compoſita triangula, per propoſitionem 9 quinti, quartam deinde primi, & æquilatera & æquiangula erunt. Quia uerò unum ex his uni ex datis, per ſtructuram eſt æquiangulum, & alteri datorum idem æquiangulum erit: quare ſic & ipſa inter ſe, per communem quandam noticiam: proportionalium igitur laterum, ex propoſitione 4. Si igitur, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα, ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

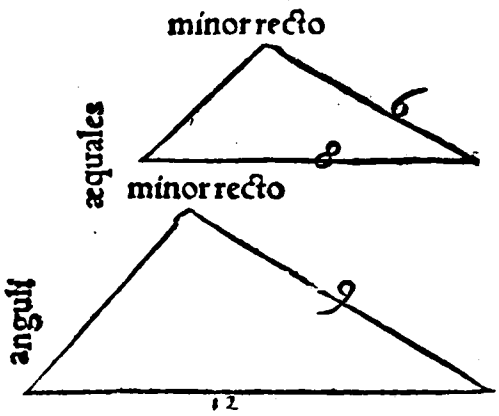
PROPOSITIO VII.

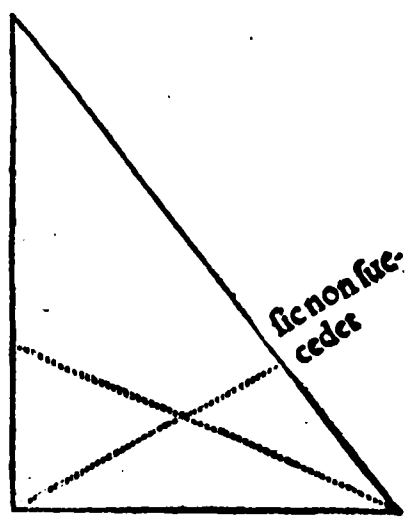
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autẽ alios angulos latera proportionalia habuerint, reliquorum uerò utrunque ſimul aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt triangula,

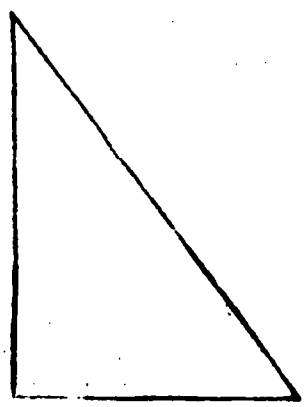
&

& æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

Describatur triangulum, ducatur etiam recta quædam línea, ad cuius alteram extremitatem angulus, uni ex triangulo æqualis, per 23 primi constituatur. Ex duobus deinde trianguli lateribus, quæ sunt circa alium, quàm cui æqualem posuimus angulum, proportionales partes desumptæ, una in alterutra línea, ab angulo iam formato incipiendo, signetur: altera uerò pars, ex hoc puncto, angulo formato subtendatur: quæ ubi alterã lineam attigerit, quanta ipsa, ut tertium trianguli latus, esse debeat, apparebit. Danda autem est opera in hac alterius proportionalis partis applicatione, ut quemadmodum tertius in triangulo, primò descripto, angulus minor uel non minor recto est, ita & in altero, quod iam formatur, triangulo, tertius angulus existat. Erunt autem iam descripta duo triangula, qualia propositió hæc septima requirit: dico igitur, siue uterq; ex reliquis horum duorum triangulorum angulis, minor recto, æqualis, seu maior recto, fuerit: æquiangula esse huiusmodi triangula, atq; eos qui sub similis rationis lateribus subtenduntur, angulos æquales habere. Primò igitur, aut enim illi duo, inter proportionalia latera anguli, sunt inter se æquales, aut inæquales. Si æquales fuerint, cum proposita duo triangula duos etiam angulos, ex hypothesi, inter se æquales habeant, tertius item tertio, ex corollario propositionis 32 primi, æqualis sit: huiusmodi triangula iam æquiangula esse cõcluditur. Quod si ijdem inter proportionalia latera anguli, inæquales inter se fuerint, tum, siue reliquorum uterq; simul, aut minor, aut non minor recto fuerit, maiori angulo, ut minori æqualis fiat, per re-







ctam quandam lineam, quemadmodum docet propositio in primo 23, succurrendum est. Et quoniam duo triangula sunt, partiale unum, & alterum positum, quorum duo anguli unius, duobus alterius trianguli angulis æquales sunt, unus quidem uni, ex hypothesi, alter uerò alteri, ex structura per propositionem 23 primi, cum & tertius nunc tertio angulo, ex corollario propositionis 32 primi, æqualis sit: triangula hæc, partiale scilicet & alterum positum, æquiangula, hinc etiam ex

propoſi-

propoſitione 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quoniam autem rationum quantitatibus inter ſe collatis, inde, atq; etiam ex propoſitionis hypotheſi, duæ rationes eidem eædem ſunt, cum hæ duæ ex prop. 11 quinti, etiã inter ſe eædem ſint, unam inſuper quantitatem communem habeant: quæ reliquæ duæ harũ ſimilium rationum quantitates ſunt, alterius nimirum partialis trianguli duo latera, ex propoſitione nona quinti inter ſe æquales erunt. Triangulum igitur iſoſceles, habens angulos, qui ad baſim ſunt, ex priore parte propoſitionis quintæ primi, inter ſe æquales, id quod in genere obſeruandum eſt. Quòd ſi iam ex propoſito receptum ſit, utrunq; reliquorum non minorem recto eſſe, cum ſic propter æqualitatem, & alter huius iſoſcelis angulus, non minor, hoc eſt rectus uel maior recto exiſtat: duo in triangulo anguli, non minores duobus rectis exiſtentes, collocentur. Id autem, cum obſtante propoſitione in primo 17, per quam omnis trianguli duo quilibet anguli, duobus rectis minores ſunt, nullo modo eſſe poſſit: neq; etiam inæquales, ſed æquales inter ſe inter proportionalia latera anguli erunt. Quare, &c. Sed eſto iam ex propoſito utrunq; reliquorum minorem recto eſſe: cum ſic alter, huius iſo-

recto minor

recto minor

ſcelis, ad baſim poſitus angulus, recto minor ſit, ac per conſequens huius iſoſcelis angulus exterior, per prop. 13 primi, recto maior: & ille qui in triangulo altero, ex corollario allegato, eidem exteriori eſt æqualis, ſimiliter recto angulo maior erit, cum tamen ſit poſitus recto minor, quod nunc eſt impoſſibile, unum & eundem angulum, iam minorem, atq; deinceps angulo recto maiorem eſſe. Illos igitur ſub proportionalibus lateribus comprehenſos angulos, non inæquales, ſed æquales inter ſe eſſe oportet: quare reliquus angulus reliquo, ex corollario, æqualis erit. Aequiangula igitur triangula huiuſmodi propoſita. Si duo igitur triangula unum angulum uni angulo æqualem, circa autem alios, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

APPENDIX.

Præcepimus autem in ſtructura, maiori angulo, ut minori æqualis fieret, ſuccurrendum eſſe, & rectè quidem. Quòd ſi contrà aliquis, minorem ad æqualitatem maioris, per eandem propoſitionem 23 primi, augere uellet, tam facili opera propoſitionis demonſtrationem inde colligere poſſet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

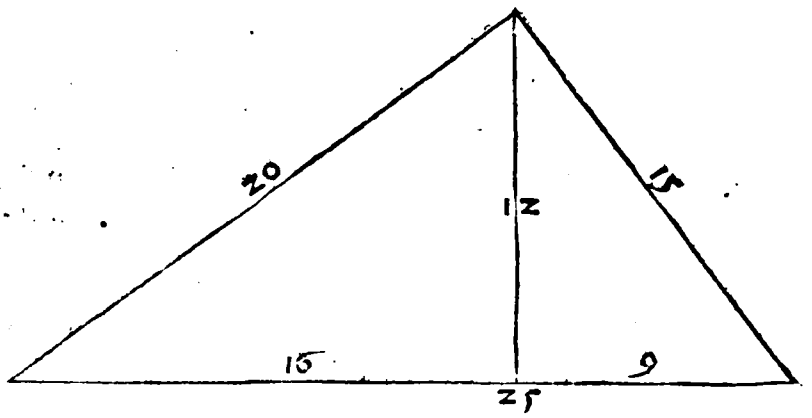
Ἐὰν ᾖ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularem triangula, cùm toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

Deſcribatur triangulum rectangulum, demittatur etiam ab eius angulo recto, per propoſitionem 12 primi, ad ſuam ſubtenſam linea perpendicularis: dico quòd partialia illa triangula, totali, atq; etiam ſibiipſis, ſimilia ſint. Cum enim, ex qua-

dam communi noticia, omnes recti anguli inter se æquales sint, partialium insuper



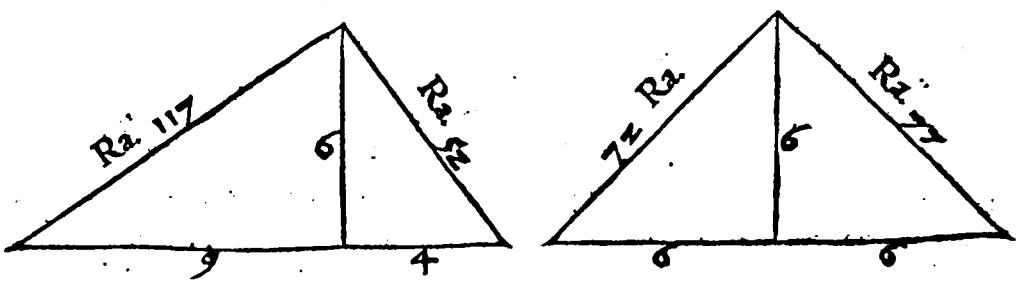
triangulorum utrunq;, ut apparet, unum angulum cum totali triangulo communem habeat: hæc tria triangula, totale & duo partialia, primò ex corollario propositionis 32 primi, æquiangula: statim deinde, ex propositione 4 huius, laterum proportionalium: atq; tandem, ex similium figurarum definitione, etiam similia erunt. Si in rectangulo igitur triangulo, ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: quæ ad perpendicularem triangula, cùm toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt, quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν· Ὅτι, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστι. Καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτουοῦν τῶν τμημάτων, ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta fuerit: hanc ductam inter basis segmenta mediam proportionalẽ esse. Et insuper, inter ipsam basim, & utrunq; segmentum, latus, quod ad idẽ segmentum ponitur, mediũ proportionale.



Numeri uel quantitates proportionales.

9	6	4	6	6	6
13	√ 117	9	12	√ 72	6
13	√ 52	4	12	√ 72	6

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

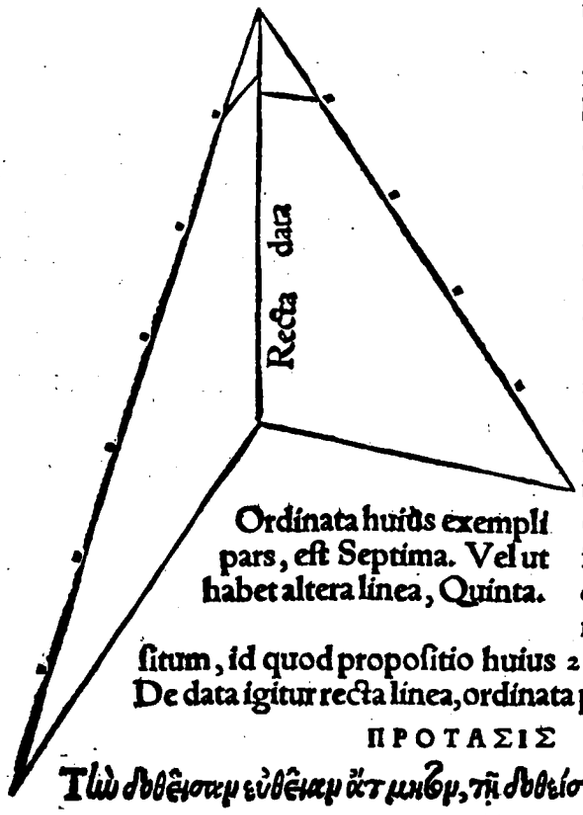
Τῆς δοθείσης εὐθείας, τὸ προσταχθὲν μόριον ἀφελεῖν.

PROPOSITIO

PROPOSITIO IX.

De data recta linea, ordinatam partem abscindere.

Sit data recta linea, atq; propositum, ordinatam ab ea partem, utpote septimam, tertiam, tredecimã, uel aliam quamcunq;, abscindere. Alia igitur recta, satis longa, lineæ rectæ datæ angulariter applicetur, in qua officio circini, utcunq; extensi, ab angulo descendẽdo, septem uel tredecim, hoc est tot, quot quidem ordinatæ partis, quæ abscindi debet, denominatio requisiuerit, æquales partes signentur, finis deinde septimæ (si quidẽ illa pars ordinata fuerit) cum altera datæ extremitate, linea quadam recta, ut triangulum fiat, iungatur. Quòd si iam à fine primæ partis, huic ultimò ductæ rectæ, tanquam uni trianguli lateri, per propositionem 31 primi, parallela ducta, eaq; ad datam rectam usque continuata fuerit, factum iam erit propositum, id quod propositio huius 2 & composita ratio demonstrabũt. De data igitur recta linea, ordinata pars abscissa est. quod fieri oportuit.



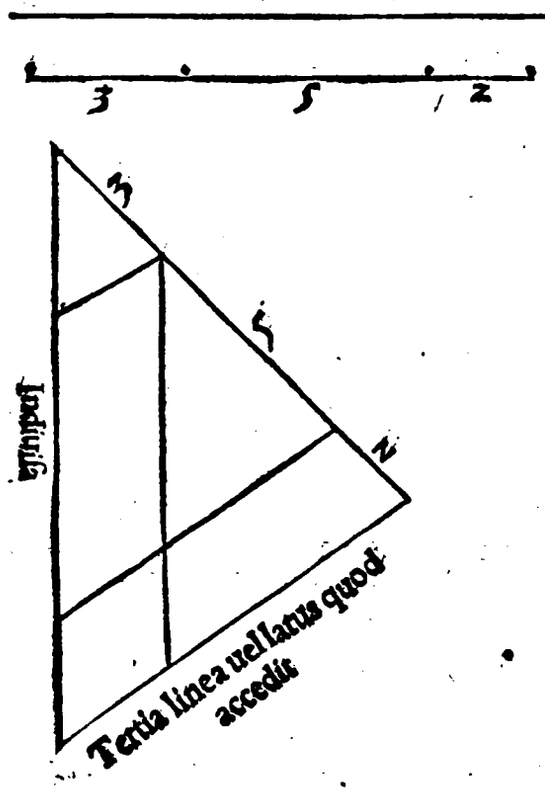
Ordinata huius exempli pars, est Septima. Vel ut habet altera linea, Quinta.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμηθον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

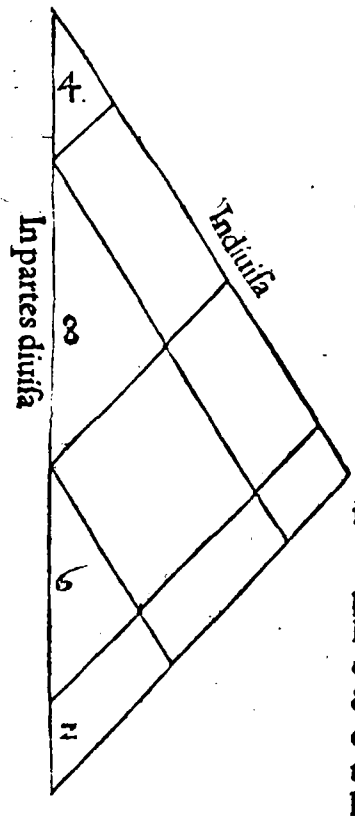
PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam non sectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.



Sint duæ rectæ lineæ datæ, una quidem indiuisa, altera uerò in partes, quot & qualitercunq; diuisa, atq; propositum, indiuisam in partes secũdum rationes partium diuisæ diuidere. Applicentur lineæ angulariter, accedat etiam tertia linea, qua liberæ datarum extremitates, ut triangulum fiat, iungantur, à punctis tandem diuisionũ singulis, tertiæ lineæ parallelæ ductæ, atq; ad indiuisam lineam usq; continuatæ: propositioni satisfactũ erit, atq; demonstratio talis. Ducantur à punctis diuisionum singulis, illo tantùm, quod est tertiæ lineæ proximum, dempto, indiuisæ lineę parallelæ,

atque hæ ad tertiam usque lineam, ut parallelogramma fiant, continuentur. Et quoniam parallelogrammorum locorum latera opposita, per propositionem 34 primi, inter se æqualia sunt: triangula etiam hic appareant, quorum duo latera, per lineam tertio lateri parallelam, diuisa sunt: per propositionem 2 huius, toties, quoties secta diuisa fuerit, uno minus, eam repetendo, æqualibus subinde pro æqualibus lineis sumptis, constabit propositum. Linea enim indiuisa ad rationē diuisę diuisa est. quod fieri oportuit.



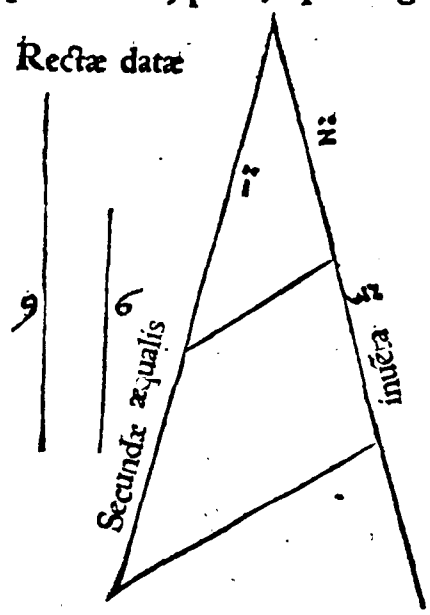
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atq; propositum, tertiam proportionalem, ad quam scilicet se habeat secūda, sicut ad hanc secundam linea prima, inuenire. Connectantur rectæ datæ, ut angulum qualemcunq; comprehendant, & claudatur triangulum recta quadam linea alia. Productis deinde uel continuatis rectis datis, ex parte tertij lateris, quæ est linea modò ducta, ultra triangulum, uni earum, in continuata parte lineæ alterius, per propositionem 3 primi, æqualis signetur, ab huius fine postea, ubi per propositionem 31 primi, tertio trianguli lateri parallela ducta fuerit, cū hæc eadem in altera prolongata per suam intersectionē tertiæ proportionalis quantitatem ostendat, propositioni satisfactum erit. Quoniam enim ad unum totalis trianguli latus recta parallela ducta est, cum hæc parallela reliqua nominati trianguli duo latera, per propositionem 2 huius, proportionaliter secet: æquali pro æquali linea sumpta, statim concludi tur propositum: Duabus scilicet datis rectis lineis, tertiam proportionalem inuentam esse. id quod fieri oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ.

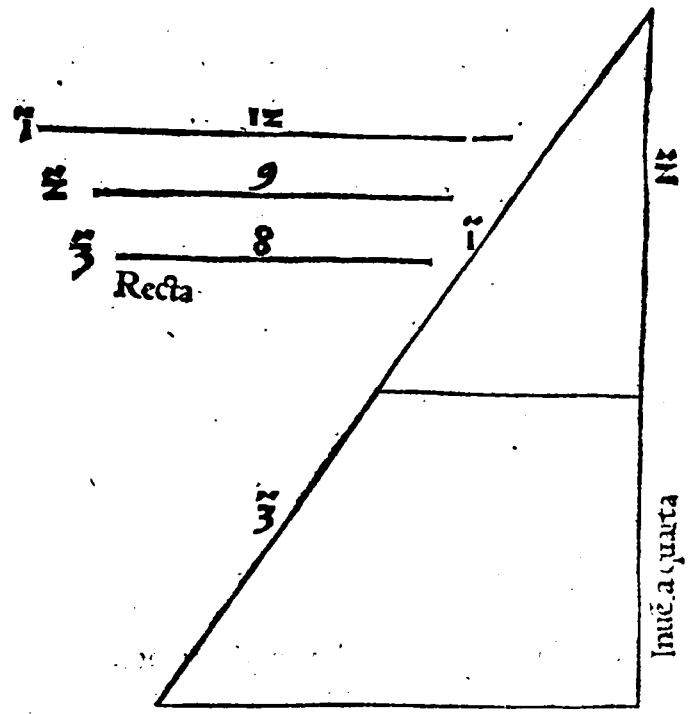
Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Sint tres rectæ datæ, atq; propositum, quartam proportionalem inuenire. Iungantur prima recta & tertia, ut angulum qualemcunq; faciant, & claudatur triangulum.

gulum. Secunda deinde, uel alia, ſecundæ æqualis, primæ ad amuſſim iuncta, tertia uerò ultra triangulum continuata, à fine huius ſecundæ, ad continuatam uſq; ter-



tio trianguli lateri, per propoſitionem 31 primi, parallela ducatur: & erit portio, rectæ tertiæ & huic ſectioni interiacens, linea illa quæ quæritur. Hoc autem patet ex 2 propoſitione huius, æquali pro æquali linea ſumpta. Tribus igitur datis rectis lineis, quarta proportionalis inuenta eſt. quod feciſſe oportuit.

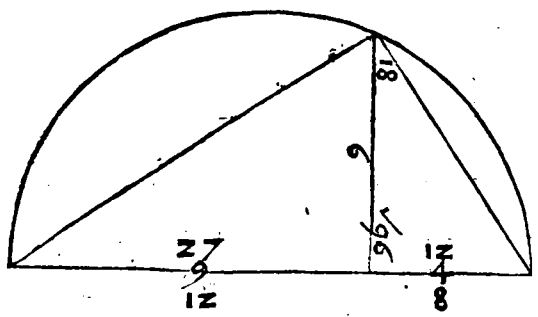
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον πρόσευρεῖν.

PROPOSITIO XIII.

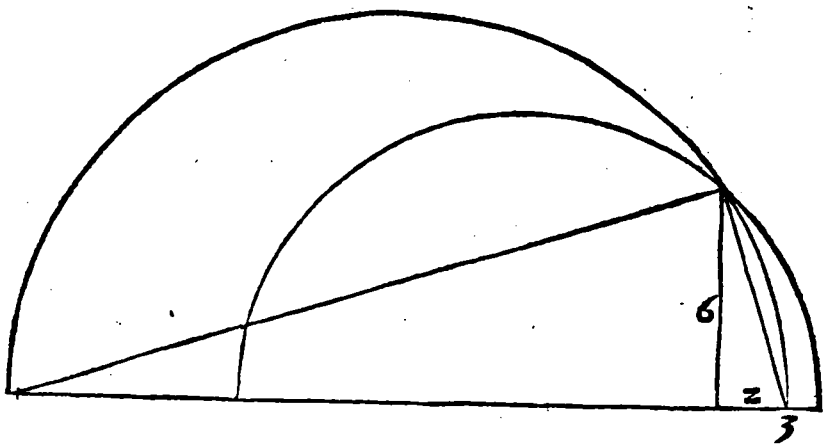
Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ datæ, atq; propoſitum, mediam ipſarum proportionalem, ad quam ſcilicet ſe habeat una ex datis, ſicut hæc ipſa media ad alteram, inuenire. Coniungãtur ad amuſſim duæ rectæ datę: ex his deinde cõpoſita bifariã diuiſa, ex puncto diuiſionis ſuper ipſam totam, ad interuallum alterutrius medietatis, ſemicirculus deſcribatur. Quòd ſi tandem à puncto coniunctionis datarum, tanquam à puncto in hac recta dato, ad angulos rectos linea ad circumferentiam uſque ducta fuerit: quòd hæc ducta, media datarum proportionalis ſit, ſic demonſtrabitur. Iungantur extremitates rectæ, ex duabus compoſitæ, cum interſectione ad rectos ductæ & ſemicircũferentiæ, duabus rectis lineis. Et quoniã angulus in ſemicirculo, ex prima parte propoſitionis 31 tertij, rectus eſt, cum ab eo ad baſim per-

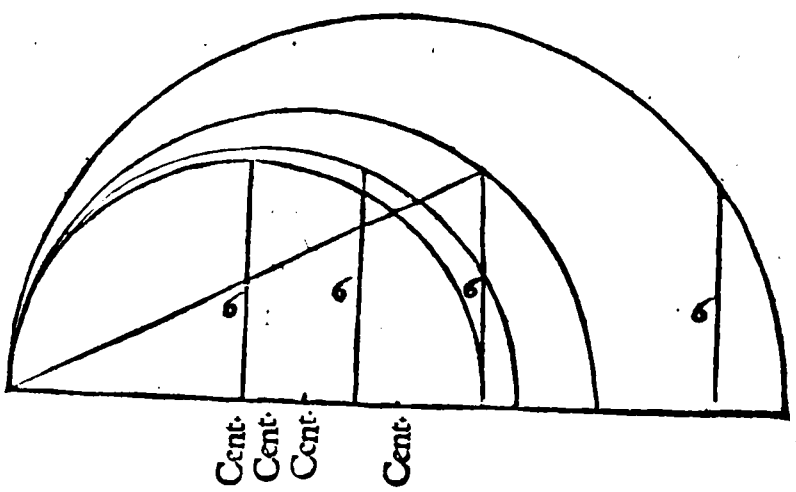


pendicularis recta demissa sit: ex priore parte corollarij propositionis 8 huius, res tandem demonstrata erit, lineam scilicet illam, quam diximus, mediam inter datas proportionalem esse. Duabus igitur datis rectis lineis, media proportionalis inuenta est, quod fieri oportuit.

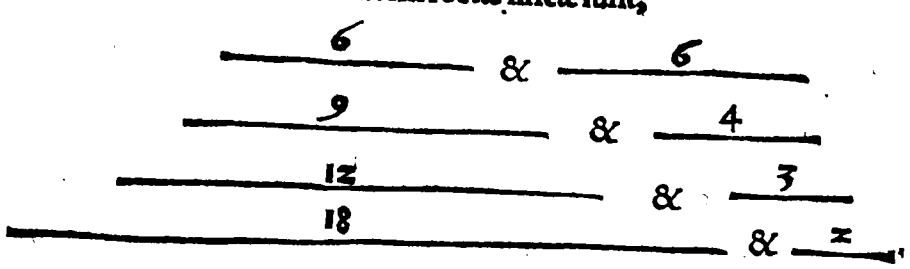
Alia huius tredecimæ propositionis figuratio.
Sunt autem exempla duo.



Similiter alia, quatuor exemplis ornata.



Datæ autem rectæ lineæ sunt,



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων· ἐναπαλλάσσουσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν

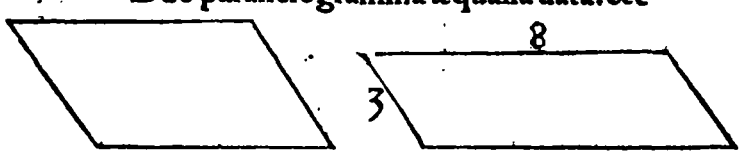
μιᾶν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἃ δὲ ἀντιπεπόνθασιν ἐνέστω.

PROPOSITIO. XIIII.

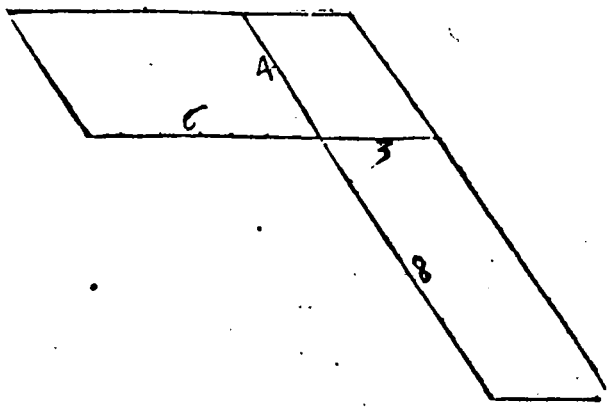
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum: reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium, reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos: æqualia ſunt & illa.

Sint duo parallelogramma æqualia: & eſto, quòd unus angulus unius, ſit uni alterius parallelogrammi angulo æqualis: dico, horum parallelogrammorum latera, circa æquales angulos, reciproca eſſe. Reciproca autem dico ea parallelogramma,

Duo parallelogramma æqualia data. &c.



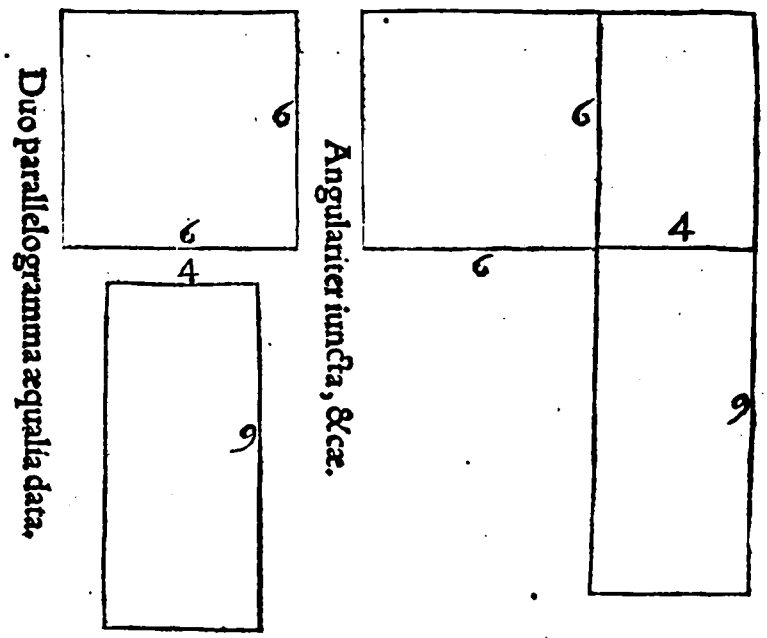
quorum unius longitudo ad latitudinem alterius eam, quam longitudo alterius ad latitudinem prioris, habet rationem. Coniungantur igitur parallelogramma, ut angulum faciant, utq; anguli illorum æquales, ſint circa unum punctum, longitudo inſuper unius & latitudo parallelogrammi alterius adamuſſim unam lineam conſtituant. Quibus ſic coniunctis, & reliqua duo circa æquales angulos latera, una linea erunt, ſequeretur enim aliàs, ſi alterutrum horum cõtinueretur, ſiue per propoſitionem 15 primi, & communem illam noticiam, Eidem æqualia, &c. ſeu per propoſitionem 13 eiuſdem primi bis uſurpatam, & communem illam noticiam, Si ab



æqualibus æqualia auferantur, &cæ. partialem angulum ſuo totali eſſe æqualem, quod fieri non poteſt. Sunt igitur & reliqua duo horum angulorum latera, adamuſſim linea una. Compleatur parallelogrammum tertium, ſecundum quantitatem laterum anguli utriuſuis exterioris: eritq; demõſtrationis figura parata. Et quoniam duo, primò deſcripta, parallelogramma, ex hypotheſi, ſunt inter ſe æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propoſitionis 7 quinti, una & eadem ratio. Et rurſus, quoniam etiam parallelogrammorum, quæ ſub eodem uertice ſunt poſita, in eadem qua ipſæ baſes, per primam huius, ſunt ratione, hac prima propoſitione, deinde 11 quinti, utraq; bis uſurpata, prior pars manifeſtabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem poſteriorem, parallelogramma, quæ unum angulum uni æqualẽ, latera etiã circa illos æquales angulos reciproca habeãt inter ſe æqualia

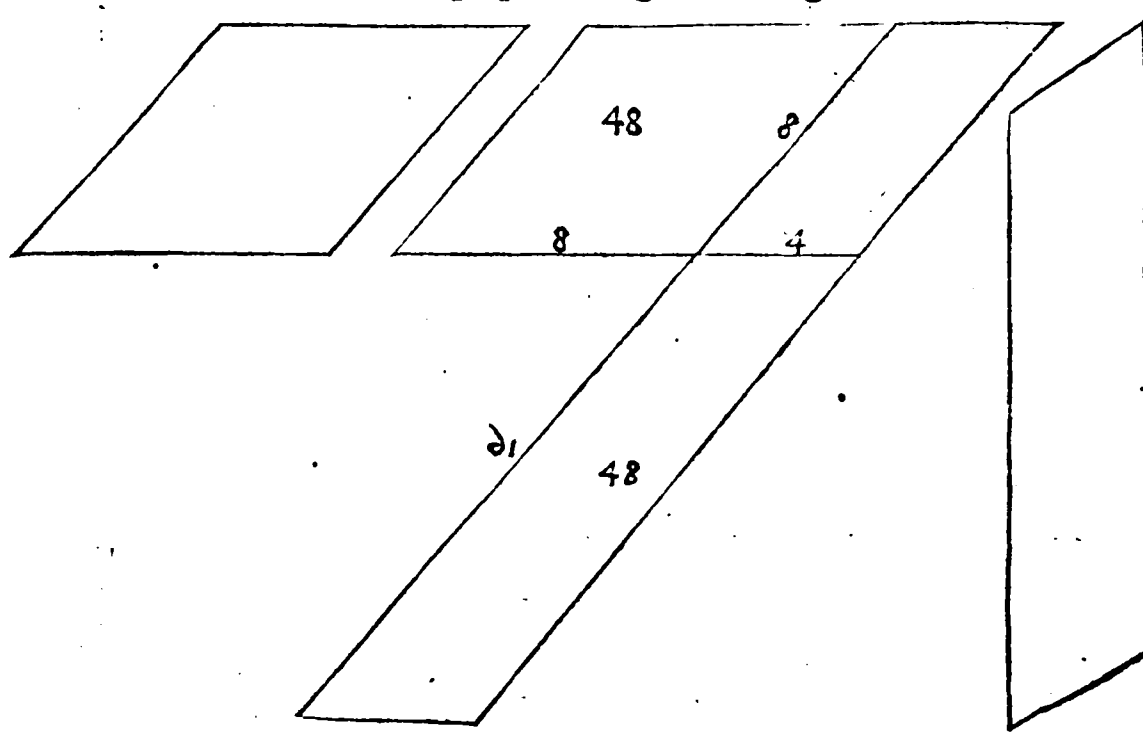
ſint,

sint, cum, ex eadem prima huius, bis usurpata, & 11 propositione quinti, parallelogramma posita cum tertio unam & eandem rationem habeant: per priorem par-



tem propositionis 9 quinti, id tandem retinebitur. Aequalium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, &c. quod demonstrasse oportuit.

Tertia huius propositionis geometrica figuratio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τῶν γώνων· ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

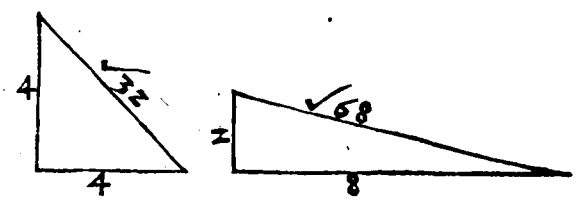
PROPOSITIO

PROPOSITIO XV.

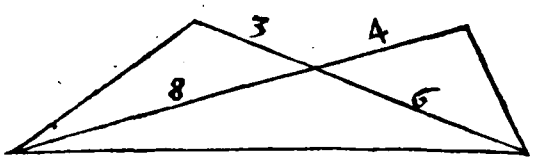
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos: æqualia ſunt & illa.

Sint duo triangula æqualia, & eſto quod unus angulus unius ſit uni alterius trianguli angulo æqualis: dico, horum triangulorum latera, circa æquales angulos, reciproca eſſe. Coniungantur triangula, ut angulum faciant, utq; anguli illorum æquales, quemadmodum in præmiſſa, ſint circa unum punctum, antecedens inſuper in uno & ſuum conſequens in triangulo altero, ad amuſſim unam lineam

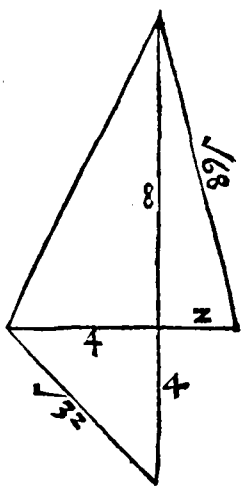
Triangula æqualia data.



Angulariter iuncta, &c.



uel



faciant: adamuſſim igitur ſic, ſuperiori ratione, & reliqua duo latera erunt. Deſcribatur triangulum tertium, per lineam quandam rectam, ab uno angulo unius ad alterum, in eadem parte alterius trianguli angulum, ductam, eritq; demonſtrationis figura parata. Et quoniam duo, primò deſcripta, triangula, ex hypotheſi, ſunt inter ſe æqualia: erit eorum ad tertium, per priorem partem propoſitionis ſeptimæ quinti, una & eadem ratio. Et rurſus, quoniam etiam triangulorum quæ ſub eodem uertice ſunt poſita, in eadem qua ipſæ baſes, per propoſitionem primam huius, ſunt ratione: per eandem igitur primam & propoſitionem 11 quinti, utranq; bis uſurpatam, prior pars manifeſtabitur. Quòd nunc etiam, quantum ad partem poſteriorẽ, ex unius illorum anguli æqualitate, & reciprocis circa illos æquales angulos lateribus, æqualitas inferatur, non aliter atq; poſterior præcedentis propoſitionis pars, de parallelogrammis id retinebitur. Æqualium igitur & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum: reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ ſunt circa æquales angulos: æqualia ſunt & illa. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. 15.

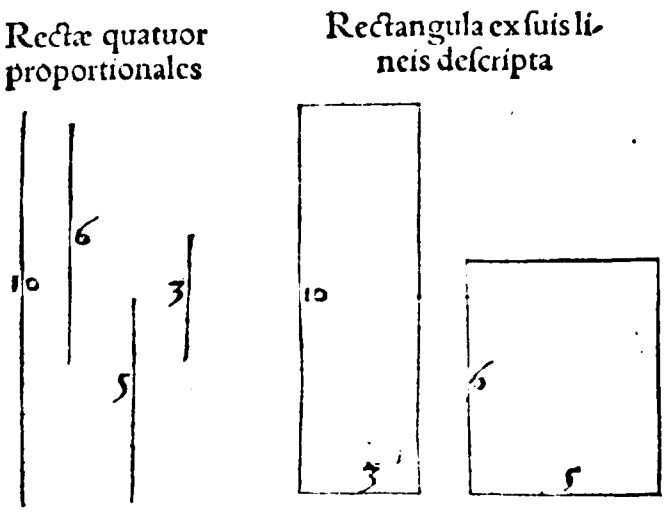
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Καὶ ἐὰν ὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis

comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub mediis comprehenditur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum, æquale fuerit ei quod ſub mediis comprehenditur rectangulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineę proportionales, prima ſcilicet ad ſecundam ut tertia ad quartam: dico rectangulum ſub prima & quarta comprehenſum, ei quod ſub ſecunda & tertia comprehenditur rectangulo æquale eſſe. Deſcribãtur ex quatuor rectis proportionalibus duo rectangula, utrunq; ex ſuis lineis. Et quoniam primæ ad ſecundam, lateris ſcilicet unius ad latus rectanguli alterius, ex hypotheſi, eſt ut tertiæ lineæ ad quartam, lateris nimirum huius ad latus illius: hæc duo rectangula, cum circa æquales angulos (omnes enim recti inter ſe ęquales ſunt) latera reciproca habeant, ex propoſitione 14 huius, inter ſe æqualia erunt: quę eſt pars prior. Poſterior iam, lineis ſcilicet quatuor rectis propoſitis, ſi rectangula ſub prima & quarta, ſub ſecũda item & tertia, cõprehenſa, ex hypotheſi inter ſe æqualia ſint: illas tum lineas proportionales eſſe, ſic patet. Cum rectangula, ex hypotheſi, inter ſe æqualia ſint, cumq; etiam omnes anguli recti inter ſe æquales: ipſa rectangula primò æquiangula erunt, atque deinde circa æquales angulos, ex priore parte propoſitionis 14 huius, latera reciproca habebunt, quæ eſt pars poſterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub mediis comprehenditur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum, æquale fuerit ei quod ſub mediis comprehenditur rectãgulo: quatuor rectæ lineæ proportionales erũt. quod demonſtraſſe oportuit.



ALIA HVIVS PROPOSITIONIS DEMONSTRATIO.

Quatuor rectis lineis expoſitis, dico, ſi hæ rectæ, ex hypotheſi, proportionales fuerint, prima ſcilicet ad ſecundam ut tertia ad quartam: & quæ ſub prima & quarta, ſub ſecunda item & tertia linea comprehenduntur rectangula, inter ſe æqualia eſſe. Quòd ſi harum rectarum rectangula, quæ ſub prima & quarta, ſubq; ſecunda & tertia comprehenduntur, ex hypotheſi, inter ſe æqualia ſint: & ipſas rectas proportionales eſſe oportere. Quantum igitur ad partem priorem, excitentur à duabus, primæ & ſecundæ, rectarum extremitatibus, utræ hæ fuerint, per propoſitionem 11 primi, duæ ad angulos rectos lineę: de priori deinde excitata, à cõmuni puncto incipiendo, recta quartæ æqualis, ab altera verò, tertiæ datæ æqualis recta, per propoſitionẽ. 3 primi, abſcindatur, cõpleanturq; parallelogrãma. Et quoniam prima ad ſecundam, ex hypotheſi, eſt ut tertia ad lineam quartam, cum lineis tertiæ & quartæ æquales aliæ in parallelogrammis poſitæ ſint, æqualibus illis pro tertia & quarta ſumptis: deſcriptorum parallelogrammorum circa æquales angulos latera reciprocè proportionalia erunt: unum igitur parallelogrammum, ex priori parte propoſitionis 14 huius, alteri æquale. Quare cum unũ ſub prima & alia quadam

recta

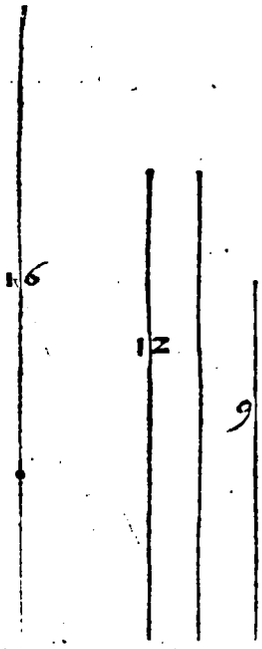
recta, quartæ æquali; alterum uerò ſub ſecunda & alia, tertię æquali, recta linea contineatur, æquali pro æquali linea habita atque uſurpata: prior pars nunc manifeſta erit. Eſto autem iam, quantum ad partem poſteriorem, quòd ſub prima & quarta comprehenſum rectangulum, ei quod ſub ſecunda & tertia cõprehenditur rectangulo, æquale ſit: dico, quòd quatuor rectæ propoſitæ illo ordine proportionales ſint. Eiſdem namq; conſtructis, quoniam quod ſub prima & quarta comprehenditur rectangulum, ex hypotheſi, ſub ſecunda & tertia comprehenſo, æquale eſt: hæc deſcripta rectangula, cum unum quidem ſub prima & alia quadam recta, quartæ æquali, alterum uerò ſub ſecundæ æquali & tertia linea contineatur, æqualitas inſuper linearum nullam uarietatem inducat, inter ſe æqualia erunt, atq; æquiangula etiam, propterea quòd omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales. Aequalia uerò & æquiangula parallelogramma, cum ex priore parte propoſitionis 14 huius, latera circa æquales angulos reciprocè proportionalia habeant: iam ſtatim propter æqualitatem linearum, ſuperiori ratione, & poſterior huius propoſitionis pars manifeſta erit. Si igitur quatuor rectæ lineæ, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· ἡ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. Καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei quod à media quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod à media quadrato: tres rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint tres rectæ lineæ proportionales, prima ſcilicet ad ſecundam, ut hæc ipſa ſecunda ad tertiam: dico, rectangulum ſub prima & tertia comprehenſum, ei quod à media deſcribitur quadrato, æquale eſſe. Quoniam enim ad ſecundam linea prima, hæc deinde eadem ſecunda ad tertiam lineam confertur, pro ſecunda collatione, puncto inter ſecundam lineam & tertiam ad placitum ſumpto, ad id per propoſitionem 2 primi, linea recta ſecundæ æqualis ponatur, & erit ex priore parte propoſitionis 7 quinti, ſecundæ, & ſuæ æqualis ad lineam tertiam una & eadem ratio. Quatuor igitur cum ſint lineæ proportionales, duarum item æqualium eadem ſit quæ eſt unius, bis ſumptæ, lineæ conſideratio prior propoſitionis pars, ex precedentis propoſitionis parte prio re concludi poterit, atq; deinde etiam, ex poſteriore ipſa poſterior. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

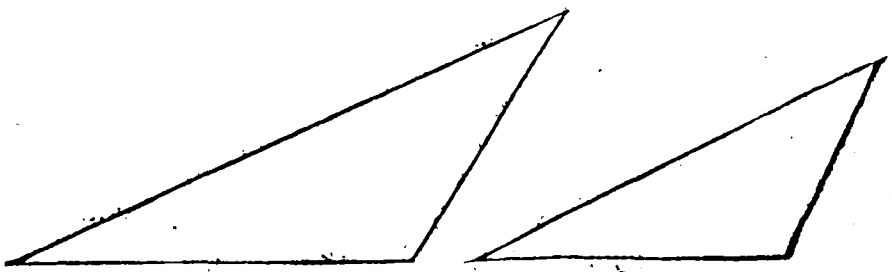
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

PROPOSITIO XVIII.

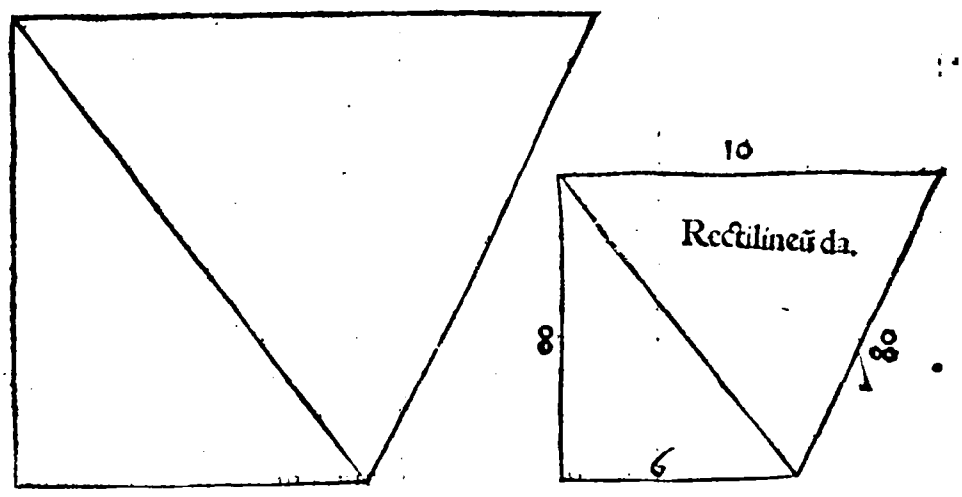
A' data recta linea, dato rectilineo, ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere.

Sit recta linea data, rectilineum item datum, atq; propoſitum, à recta data ipſi dato rectilineo ſimile, ſimiliterq; propoſitum rectilineum deſcribere. Rectilineum illud datum aut erit Trilaterum, quadrilaterum, aut multilaterũ. Si trilaterum, hoc eſt triangulum, fuerit rectilineum datum, ad unam extremitatem datæ, per propo-



Recta data Trilaterum rectilineum datum

ſitionem 23 primi, unus angulus uni, ad alteram deinde, uerſus illam & eandem partem, per eandem etiam propoſitionem, alius alij trianguli angulo æqualis conſtituatur, & continuatis lineis, donec altera alteri occurrat, cum tertius ſic tertio trianguli angulo æqualis ſit: hæc duo triangula iam æquiangula, deinde etiam per propoſitionem 4 huius, laterum proportionalium erunt. Quare ex definitione rectilinearum ſimilium, à data recta dato rectilineo trilatero, ſimile trilaterum deſcriptum eſt. Quòd ſi iam unum, minus ſcilicet, alteri quod maius eſt, trilatero, uel triangulo applicetur ſic, ut unum angulum ambo cõmunem habeant: tum hæc etiam ſimiliter poſita erunt. Quare factum eſt, quod propoſitio requirebat. Sed eſto iam quòd rectilineum datum ſit quadrilaterum, uel multilaterum, tunc primò id in ſua



Recta data

triangula ſoluendum, & cum uno eorum ac recta linea data, ut iam auditum eſt, pergendum erit, & uidendum deinde, quam in hoc triangulo angulus, qui eſt uni integro in rectilineo angulo æqualis, ſubtenſam habeat, ut ſcilicet, ea cognita, ad ipſius extremitates alterius in rectilineo trianguli, quod ſcilicet primò abſoluto coheret, duo anguli æquales collocentur, atq; continuatis lineis donec concurrant, cum tertius ſic tertio huius alterius trianguli angulo æqualis ſit: triangula hæc, ex ſtructura æquiangula erunt, deinde etiam, ex 4 huius, laterum proportionalium,

atq;

atq; tandem ex definitione, inter se etiam similia. Non aliter cum tertio, ac reliquis rectilinei triangulis singulis agendum erit. Et quoniam rectilineum, quale propositum erat, eo modo tandem describitur, propositioni igitur satisfactũ erit, quod sic demonstrari potest. Quoniam enim rectilinei, super recta data descripti, tot triangula sunt, quot ipsius rectilinei dati: ex structura igitur & communi illa notitia, Si æqualibus æqualia addantur, &c. hæc duo rectilinea iam æquiangula erunt. Et quia ex propositione 4 huius, propter proportionalitatẽ laterum ipsorum triangulorum, euidenter apparet, illa etiam proportionalium laterum esse: per definitionem tandem similium superficierum concluditur propositum.

APPENDIX.

Est hoc loco notandum, postquam primum iam triangulum absolutum, ac cum alijs deinde operari cœptum fuerit, ut partiales anguli singulorum, debito ordine suis partialibus æqualibus, & non temerè quilibet cuilibet, coniungantur. Nam hoc animaduerso, non erit laboriosum, neq; etiam molestum, qualicunque rectilineo, regulari uel irregulari, multorum item uel paucorum laterum, dato, simile simi literq; positum à data recta linea rectilineum describere.

APPENDIX II.

Quoniam propositio mentionem facit rectilinei, & rursus quoniam sub rectilineo, ut quidem ex definitione patet, omnes rectarum linearum figuræ, siue trilateræ hæ, quadrilateræ uel multilateræ fuerint, comprehendantur: in genere de omnibus rectarum linearum figuris hanc propositionem intelligendã colligimus. Hinc etiam factum, quòd per triangula, tanquam rectarum linearum figuram primam, hanc propositionem primò declarauimus.

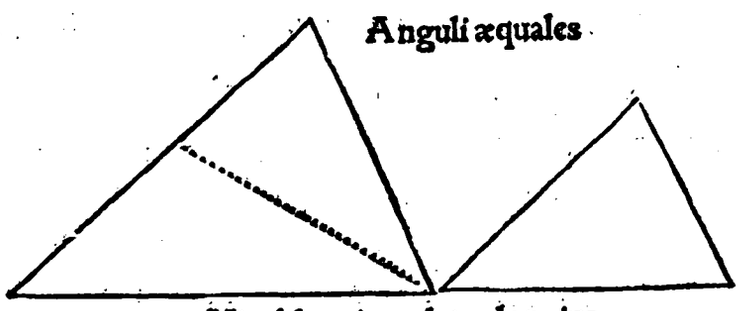
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula: inter se in dupla ratione sunt, similis rationis laterũ.

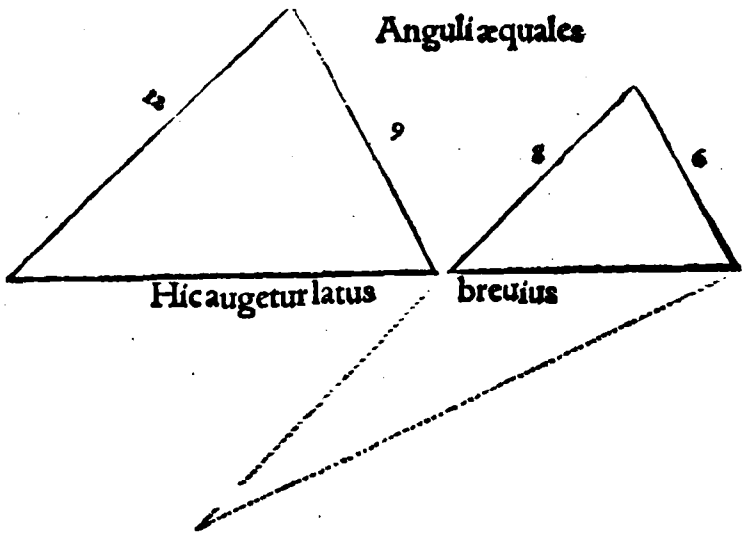
Describantur duo triangula, unum quidem qualitercunq;, alterum uerò per propositionem præcedentem, huic simile: dico igitur, triangula hæc duplicatam inter se habere rationem, quam habet latus unius ad similis rationis latus trianguli alterius. Lateribus illis, quorum rationem duplicatam inter se ipsa triangula habere debeant, tanquam duabus rectis datis, per propositionem 11 huius, tertia continuè proportionalis quærenda est, & id quidem uel longiori latere abbreuiato, uel



Hic abbreuiatur latus longius.

breuiori aucto. atque ex hoc puncto deinde, seu inuentæ proportionalis termino, ad angulum quem abbreuiatum uel auctum latus subtendit, linea recta ducenda.

Fiunt autem ſic duo triangula, quorum alterum, cuius ſcilicet tertia proportionalis eſt unum latus, alteri integro adhuc, ex poſteriore parte propoſitionis 15 huius, eſt æquale: id quod nulli nō, hypotheſiū propoſitionis ac rationis permutatę, quodq; rationes uni eædē, per propoſitionem 11 quinti, etiā interſe eædem ſint, memon,



occurrere poterit. Rurſus, quoniam tres ſunt lineę proportionales, duo ſcilicet propoſitorum duorum triangulorum latera, & tertia ad ea proportionalis inuēta, cum ſic prima ad tertiam, ex quadam definitione in quinto expoſita, ſit in ratione eiuſdem primæ ad lineam ſecundam duplicata, triangula deinde (quorum baſes ſunt prima & tertia lineæ) per propoſitionem primam huius, in ſuarum ſint baſium ratione, ſimilium rationum quantitatibus alijs pro alijs ſumptis: & hæc ipſa triangula primæ lineæ ad ſecundam rationem duplicatam habebunt. Quia uerò prima & tertia lineæ ſunt expoſitorum ſimilium triangulorum ſimilis rationis latera, triangula porrò ipſa, unum quidem uni ex datis, alterum uerò alteri datorum æqualis: hoc conſiderato, propoſitum iam concludi poteſt. Similium igitur triangulorum ratio, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Ἐπεὶ πρὸ ἐδείχθη, ὡς ἡ γ Α πρὸς τὴν Β Η, οὕτως τὸ α β γ τρίγωνον, πρὸς τὸ α β η τρίγωνον, τουτέστι τὸ δ ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, Quando tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quòd ſit, ſicut prima ad tertiam, ſic quod à prima fit triangulum, ad id quod à ſecunda deſcriptū fuerit ſimile, ſimiliterq; poſitū triangulum.

Quoniam oſtenſum eſt, ſicut prima recta linea, hoc eſt unum unius trianguli latus, ad tertiam proportionalem inuentam: ſic & harum primę & tertiæ linearum triangula, hoc eſt (æquali nimirum pro æquali triangulo ſumpto) triangulum primæ ad triangulum lineæ ſecundæ, quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ

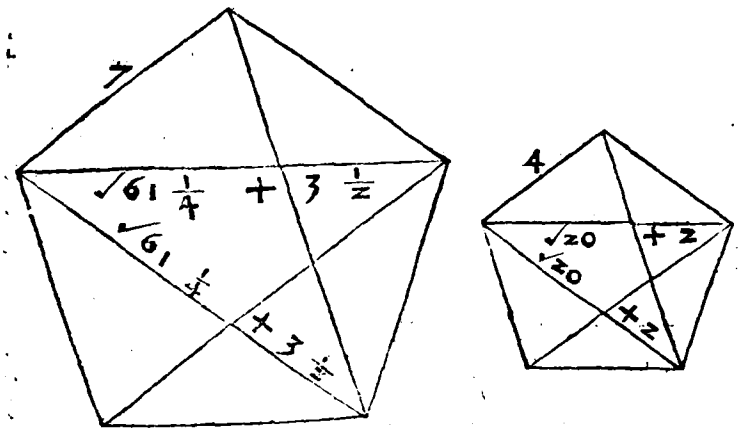
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Καὶ τὸ πολύγωνον τὸ πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

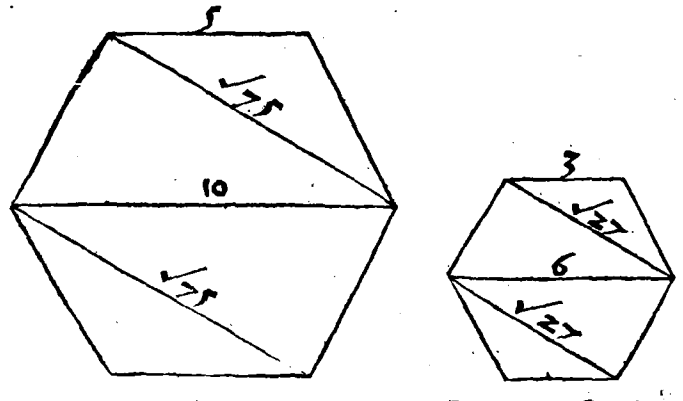
PROPOSITIO XX.

Similia polygona: in similia triangula diuiduntur, & æquali numero; & simili ratione totis. Et polygona duplicatam rationem habent, quam similis rationis ad similis rationis latus.

Describantur duo polygona, unum quidem qualitercunq; , alterum uerò per propositionem 18, huic simile: dico igitur, quòd hæc polygona in similia, & numero æqualia triangula subdiuidantur, & quòd etiam triangula cum polygonis eandem rationem habeant. Polygonorum insuper ratio ea sit, quæ est lateris unius ad similis rationis latus polygoni alterius duplicata. Diuidantur polygona per lineas rectas in sua triangula. Et quoniam polygona, ex hypothesi, sunt similia, similes



porrò figuræ rectilineæ; ut ex definitione patet, æquales angulos ad unum, & quæ circa æquales angulos sunt latera, proportionalia habent, iam statim aliquot: subtractis uerò subinde æqualib. ab angulis æqualibus, partialibus nimirum ab ipsis totis, singula unius singulis triangulis polygonij alterius per propositionem 6 huius, æquiangula erunt: quare per propositionem 4 huius, & similium figurarum definitionem, etiam similia. Polygona igitur descripta in similia, & æquali numero, triangula subdiuisa sunt, quod est primùm. Quantum ad secundũ, quòd scilicet triangula illam, quam polygona, inter se habeant rationem. Quoniam enim polygonorum triãgula, ut demonstratum est, inter se similia sunt: erit illorum, per propositionem præcedentem, ratio, quę est lateris unius ad similis rationis latus trianguli alterius duplicata. Hoc nunc toties, quot in utrouis polygono triangula reperiũtur, usurpato, cum quæ eidem eædem sunt rationes, ipsæ, per propositionem 11 quinti, & inter se eædem sint: per propositionem 12 tandem eiusdem, id quod in hac propositione, de simili ratione triangulorum cum totis polygonis, secundò proponitur, concludi potest. Quantum igitur ad tertium, Quoniam triangula, ut demonstratum est, cum sint similia, in dupla ratione sunt similis rationis laterum: cum, quam triangula, illam eandem & ipsa polygona inter se habeant rationem: & polygona similis rationis laterum duplicatam rationem habebunt.



habebunt. Similia igitur polygona, in similia triangula diuiduntur, & cæ. quod demonstrasse oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Ωσαύτως δὴ, καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. Ὥστε καθόλου, τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Καὶ ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον λάβωμεν, τὴν ξ. πρὸς τὴν ξ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α πρὸς τὴν ζ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ὁμοίου πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ὁμοίου (ὅμοιον δὲ πεντάπλευρον πρὸς πεντάπλευρον, διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ α πρὸς τὴν ζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων.

COROLLARIVM.

Similiter etiam in similibus quadrilateris demonstrari poterit, quòd hæc in dupla ratione sint similis rationis laterum. Id autem & in triangulis demonstratum est. Proinde in uniuersum, Similes rectæ lineæ figuræ inter se in dupla ratione sunt similis rationis laterum.

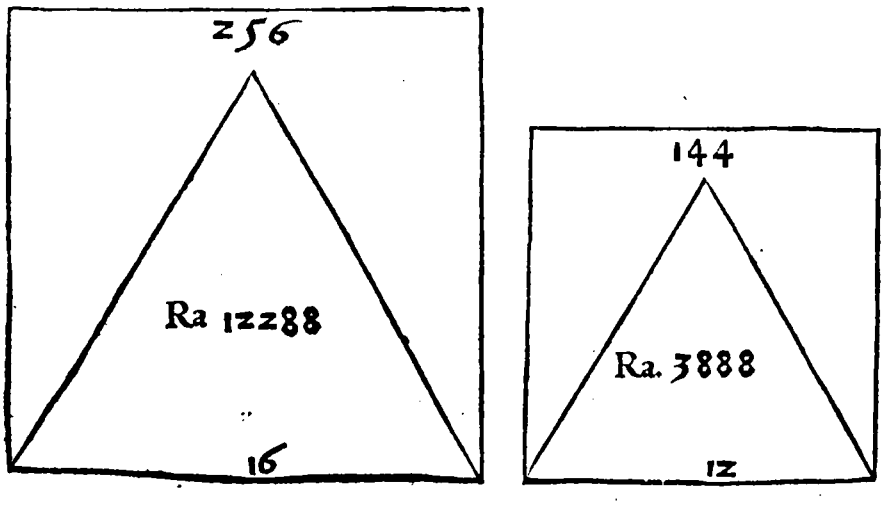
Nam si duarum linearum proportionalis tertia capiatur: ipsa prima ad tertiam duplam, quàm ad secundam, habebit rationem. Habent autem & Polygona similia, quadrilatera item duplam rationem, quam similis rationis latus ad similis rationis latus hoc est, quam prima ad lineam secundam. Demonstratum uerò hoc est & in triangulis, hinc.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἰδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COROLLARIVM II.

Proinde etiam in uniuersum manifestum est, Quòd si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: erit, sicut prima ad tertiam, sic quæ à prima specie ad eam quæ à secunda similis & similiter descripta est. quod demonstrasse oportuit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ

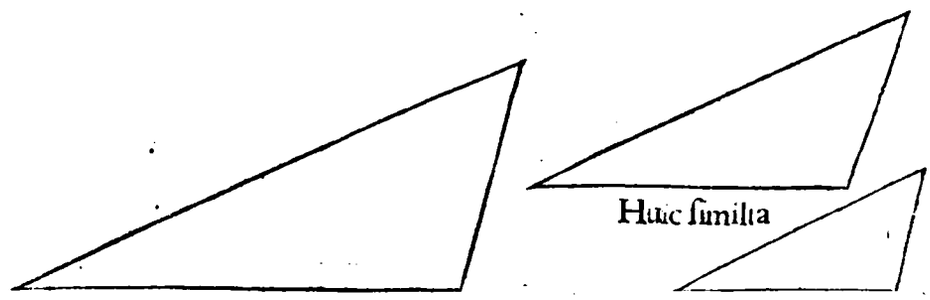
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Deſcribatur primò rectilineum unum qualitercunq; ad placitum, per propoſitionem deinde 18 huius, duo uel plura alia deſcripto ſimilia: dico, illa & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim ſingula, per propoſitionem 18 deſcripta, rectilinea, ei quod



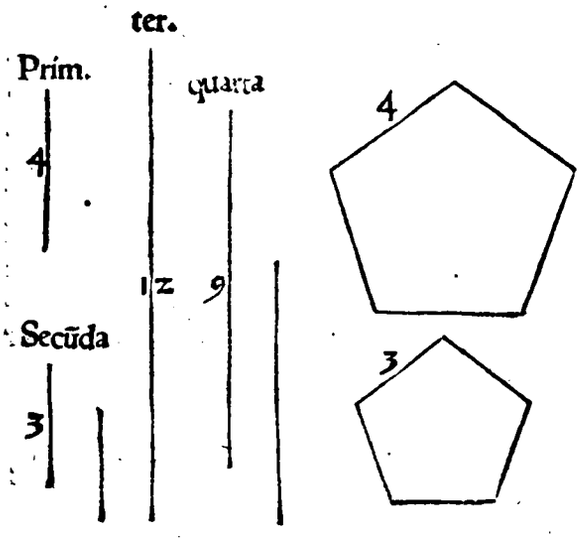
primò deſcriptum eſt, ſimilia ſunt: cum ſic ſingula etiam cum eodē primo, ex conuerſione definitionis ſimilium figurarum, æquiangula ſint, ac circa æquales angulos latera proportionalia habeant: porrò eidem æqualia, illa ex communi quadam noticia, & inter ſe æqualia: quæ inſuper eidem eædem ſunt, rationes, illæ ex propoſitione 11 quinti, inter ſe eædem ſint: per definitionem tandem, & illa ſecundò deſcripta rectilinea, inter ſe ſimilia erunt. Quæ igitur eidem rectilineo, &cæ. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. Κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

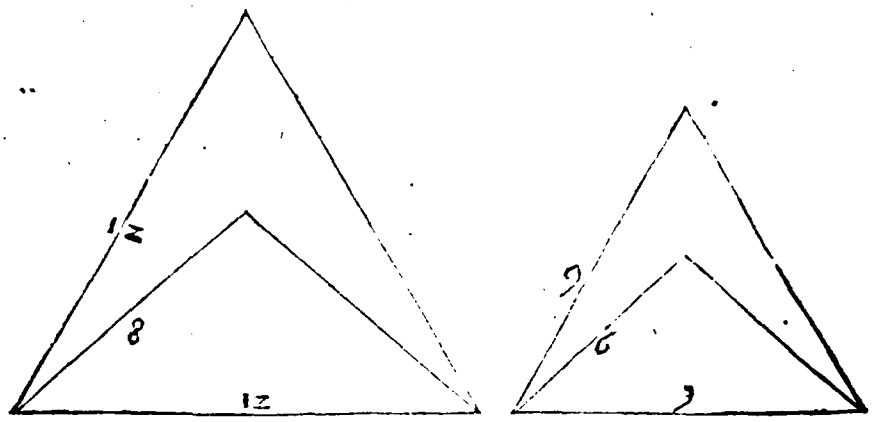
PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ab ipſis rectilinea, ſimilia ſimiliterq; deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

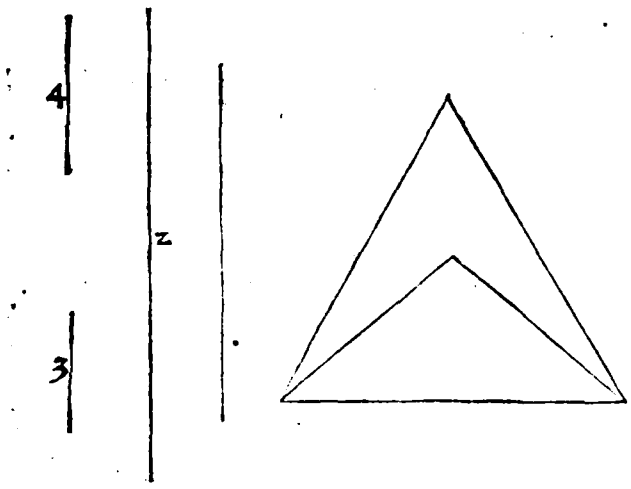


Sint quatuor rectæ lineæ, atque eſto quòd hæ ex hypotheſi proportionales ſint: dico ergo rectilinea, ab ipſis ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, proportionalia eſſe. Deſcribantur à prima & ſecunda rectis lineis per 18 præcedentem, ſimilia ſimiliterq; poſita rectilinea, hoc idē fiat cum rectis lineis tertia & quarta per eandem, primę deinde et ſecundæ, tanquam duabus rectis datis,

per propoſitionem 11 huius, tertia proportionalis inueniatur, atq; hoc idem contingat lineis tertia & quarta. Et quoniam prima ad ſecundam eſt, ex hypotheſi, ut tertia ad lineam quartam, ſecunda uerò ad aliam quandam, ex ſtructura, ſicut quar



ta ad aliam: ex æqua ratione, & extrema unius in alterius ordinis extremorum ratione erunt: per corollarium igitur ſecundum propoſitionis 20 huius, patebit prior pars. Sed eſto iam, quòd à rectis quatuor datis rectilinea deſcripta, ſimilia ſimiliterq; poſita ſint: quòd tum ipſæ rectæ proportionales ſint, ſic retinetur. Inueniatur per 12 huius, primæ, ſecundæ & tertiæ, tanquam tribus rectis lineis datis, quarta proportionalis: ab hac deinde quarta, per propoſitionem 18 huius, rectilineum, tertio rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum, deſcribatur. Et quoniam prima, ſecunda, tertia, & iam inuẽta, quatuor ſunt, ex ſtructura, lineæ proportionales, à prima uerò & ſecunda, à tertia item & ipſa inuenta, ſimilia ſimiliterq; poſita rectilinea deſcripta ſunt, cum ipſa recti linea eo ordine, ex priore parte propoſitionis huius, proportionalia ſint: rectilineum primæ ad rectilineum lineæ ſecundę, ſicut tertiæ ad inuentę rectilineũ erit. Sed quia ſic etiã eſt, ex hypothe ſi, rectilineũ tertiæ, ad rectilineũ lineę quartę: rectilinea igit̃ quar tæ & iam inuentæ linearum, per



propoſi. 11 quinti, & poſteriorem partem propoſitionis nonæ eiuſdem, inter ſe æqualia erunt. Et quia per propoſitionem 21 præcedentem, inter ſe etiam ſimilia, cum ſimilia ſimiliterq; poſita, & inter ſe æqualia, rectilinea, ab inæqualibus lineis deſcribi non poſſint: inuenta & quarta poſita, lineæ inter ſe æquales erunt, tertiæ igitur ad eas, ex poſteriori parte propoſitionis nonæ quinti, una & eadem ratio, & illa quidem quæ eſt primæ ad lineam ſecundam. Atq; hæc eſt pars poſterior. Si quatuor igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, δείξομεν οὕτως.

ASSVMPTVM.

ASSVMPTVM.

Quòd uerò, ſi rectilinea æqualia fuerint, & ſimilia, ſimilis rationis latera ipſorum æqualia inter ſe ſunt, ſic demonſtrabimus.

Sint æqualia & ſimilia rectilinea, ea nimirum, quæ à quarta & inuenta linea deſcripta ſunt, cum hæc, ex definitione ſimilium figurarum, latera habeãt circa æquales angulos proportionalia: dico, illorum ſimilis rationis latera inter ſe æqualia eſſe, id quod ab impoſsibili ſic demonſtrari poteſt. Eſto quòd inæquales inter ſe ſint, quarta & inuenta (propter illas enim id aſſumptum eſt) æqualium ac ſimilium rectilineorum lineæ. Et quoniam æqualia ac ſimilia ſunt hæc rectilinea, cum quæ circa æquales angulos habent latera, ex definitione proportionalia ſint, ſicut quidem prima maior tertia uel minor fuerit, ita ex propoſitione 14 quinti, ſecũda linea reſpectu quartæ erit, duæ igitur rectæ cum ſint duabus rectis alijs longiores, utraq; utraq: & rectilineũ ſub prioribus compręhẽſum altero rectilineo maius erit, cum tamen ipſa, ex hypotheſi, ſint poſita inter ſe æqualia. Non ſunt igitur inæquales inter ſe, ſed æquales, quarta & inuenta lineæ. quod demonſtraſſe oportuit.

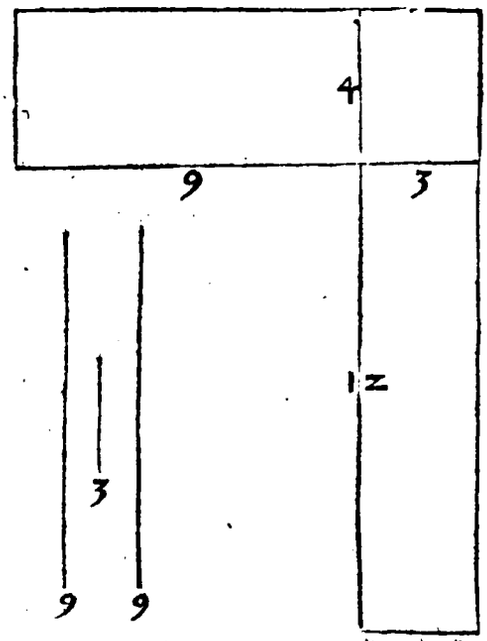
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ.

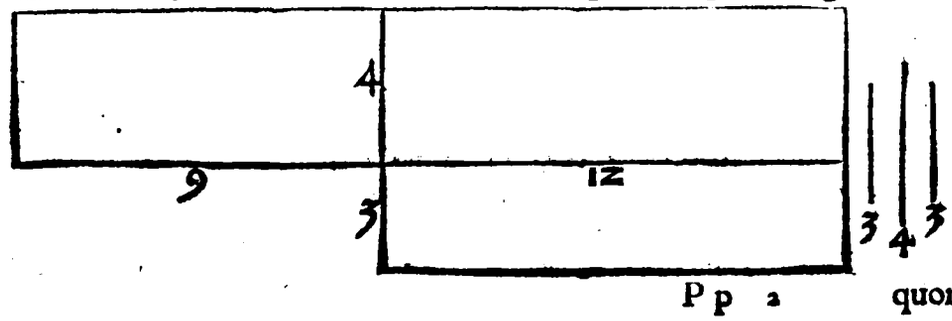
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

PROPOSITIO XXIII.

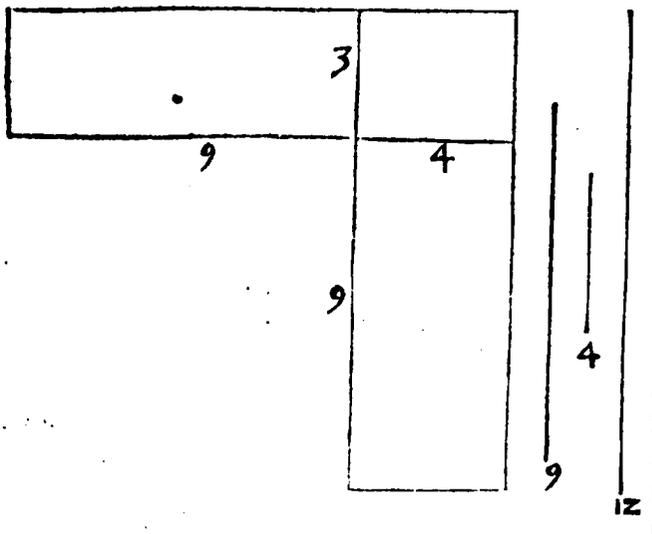
Æquiangula parallelogramma, inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

Sint duo parallelogramma æquiangula: dico illorum inter ſe rationem, ex laterum ſuorum, quę ſunt circa æquales angulos, rationibus compoſitam eſſe. Coniungantur parallelogramma cum angulis ſuis, quos habent æquales inter ſe, angulariter ſic, ut unum latus uniùs, uel parallelogrammi uel anguli, uni lateri, alterius ſit in directum una linea: & erunt, ex propoſitione 14 primi, & reliqua duo circa illos angulos latera in directum iuncta. deſcribatur etiam ſecundum alterutrius anguli externi, & laterum ipſius quãtitatem, parallelogrammũ tertiũ, quas uerò rationes habent circa æquales angulos latera, in ijſdem rationibus continuo ponantur. iam tres rectæ lineæ aliæ, prima quidẽ ad placitum ducta, ſecunda uerò & tertia ex propoſitione 12 huius, primæ adiungantur. Et quoniam quas habent latera parallelogrammorum inter ſe rationes, illas habẽt iam ex ſtructura, hæ tres rectæ ductæ, & rurſus, quoniam parallelogrammorum,

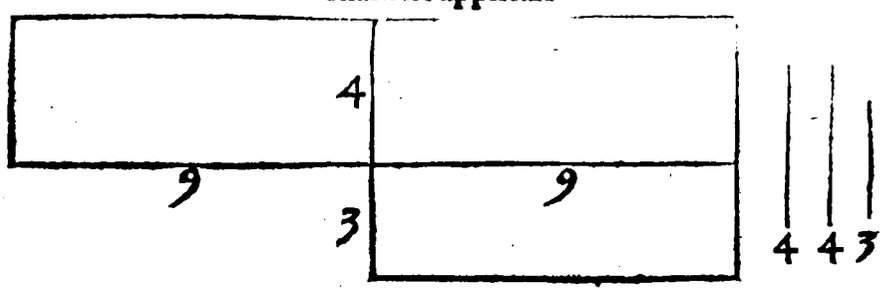




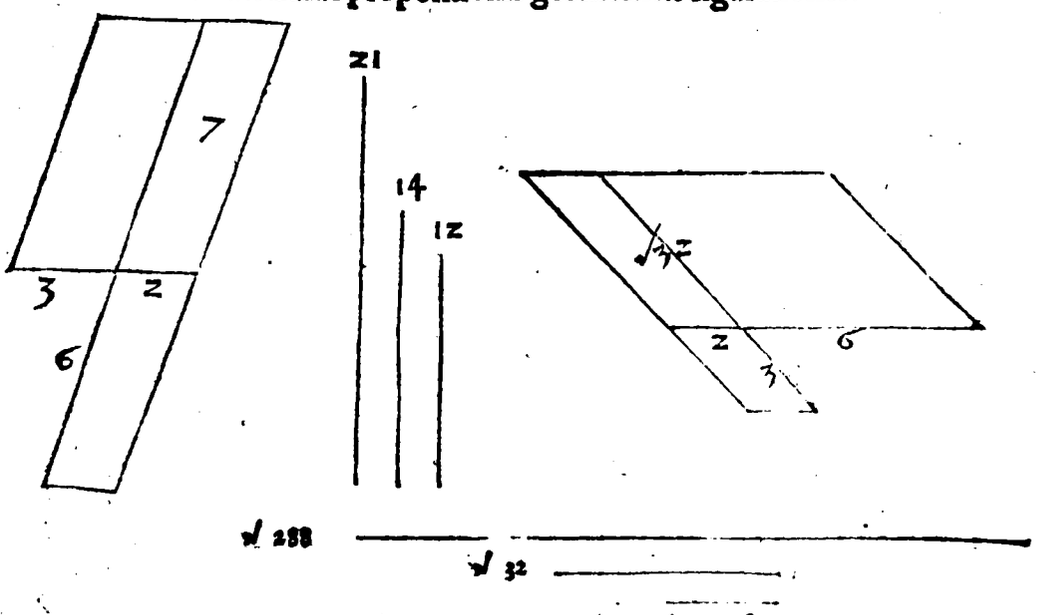
quorum unus & idem uertex fuerit, ex prima propoſitione huius, in ſuarum baſium ſunt ratione, hac ipſa prima, propoſitione deinde 11 quinti, utraq; bis uſurpata, & hæc tria parallelogramma, primum ſcilicet, tertium & ſecundum, in ductarum trium linearum ratione erunt, unde ex æqua ratione ſicut prima ducta ad tertiam, ſic & primum parallelogrammum ad ſecũdum erit. Sed quoniã primæ lineæ ad tertiam ratio, ex primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad lineam tertiam, hoc eſt ex datorum parallelogrammorum laterum, rationibus, compoſita eſt: & parallelogrammum igitur prius ad poſterius, rationem ex laterum rationibus compoſitam habebit. Aequiangula igitur parallelogramma, &cæ, quod demonſtraſſe oportuit.



Poſſunt huius ſecundæ figurationis parallelogramma etiam ſic applicari.



Aliæ duæ huius propoſitionis geometricæ figurationes.



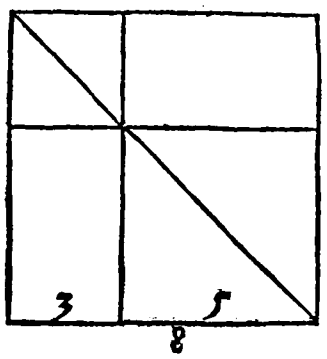
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΚΔ.

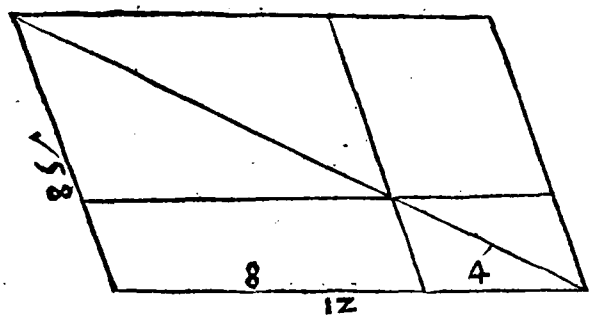
Παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις.

PROPOSITIO XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quę circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

Deſcribatur parallelogrammum, cum ſua diametro, lineæ deinde rectæ duæ, ſeſe mutuo in diametro ſecantes, quarum una quidem duobus, altera uerò reliquis duobus parallelogrammi lateribus parallela ſit, ducantur, & figura parata erit: dico ergo iam, quòd partialia, per quæ ſcilicet totius parallelogrammi diameter tranſit, parallelogramma, & toti, & ſibiipſis inter ſe, ſimilia ſint. Quoniam enim in utroq; triangulo, duabus ſcilicet totius parallelogrammi medietatibus, ducta eſt linea, tertio in triangulo lateri parallela, cum ſic reliqua duo latera in utroq; triangulo, ex propoſitione ſecunda huius, per ductam parallelam proportionaliter ſecta ſint, hac propoſitione bis uſurpata (ſunt enim duo triangula:) & parallelogrammi latera per has duas, ſeſe mutuo in diametro ſecantes rectas lineas, ex propoſitione 11





quinti, proportionaliter ſecta erunt. Quia autem diuiſæ quantitates proportionales, hæ compoſitæ etiã, ex propoſitione 18 quinti, proportionales ſunt: partialium igitur parallelogrammorum utrunq;, ex permutata ratione cum ipſo totali parallelogrammo latérum proportionalium erunt. Præterea, quoniam lineæ, in diametro parallelogrammi ſeſe mutuo ſecantes, oppoſitis ſuis lineis, ex ſtructura parallelæ ſunt: triangula partialia ſingula ſuis totalibus, ex ſecunda parte propoſitionis 29 primi, toties eam, quoties opus fuerit, repetendo, æquiangula, atq; ſtatim etiã totale parallelogrammum utriq; partiali parallelogrammo æquiangulum erit: proportionalium deinde laterum, ex 4 huius, eorum quæ circa æquales angulos. Et quia proportionalium laterum: ſimile igitur utrunq; ipſi toti per definitionem, quod eſt notandum. Sed quoniam, quę eidem rectilineo ſimilia, illa & inter ſe ſimilia eſſe, propoſitio 21 huius teſtatur, & hæc ipſa partialia parallelogramma, eadem ratione, inter ſe ſimilia erunt, quod & ipſum notandum. Conſtat autem ſic tota propoſitio. Omnis igitur parallelogrammi, quæ circa diametrum parallelogramma, tam toti quàm ipſa inter ſe ſimilia ſunt, quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ.

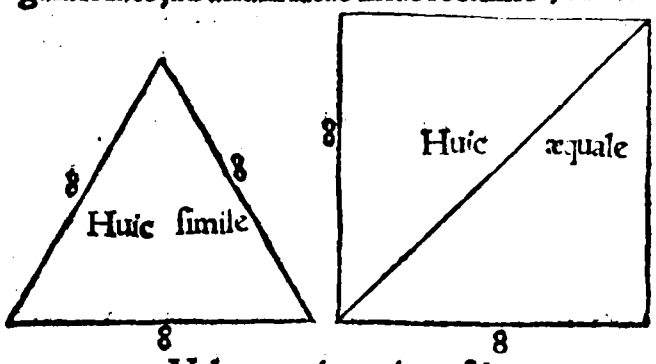
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὁμοίον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον, τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo, ſimile, & alij dato æquale, idem conſtituere.

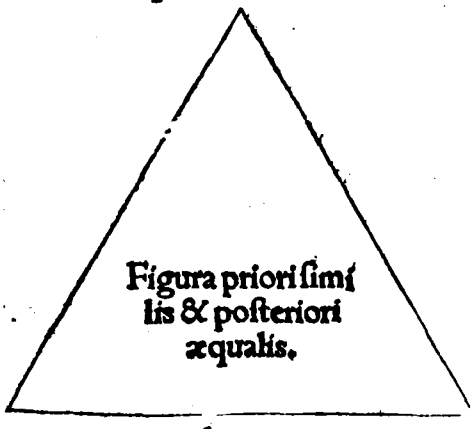
Duobus rectilineis datis, propoſitum eſt, tertium, quod uni quidem ex datis ſimile, alteri uerò rectilineo æquale ſit, deſcribere. Rectilineorum utroq; in ſua trian-

gula ſoluto, ad unum latus illius rectilinei, cui debet fieri tertium ſimile, tantumq ad rectam lineam datam, per propoſitionem 44 primi, in dato alterius rectilinei uno angulo, tot parallelogramma, in quot triangula idem prius rectilineum ſolutum eſt, unicuiq; ſcilicet triangulo unum æquale, ordine prætendantur, et erit totum compoſitū toti priori rectilineo æquale. Eodem modo ad

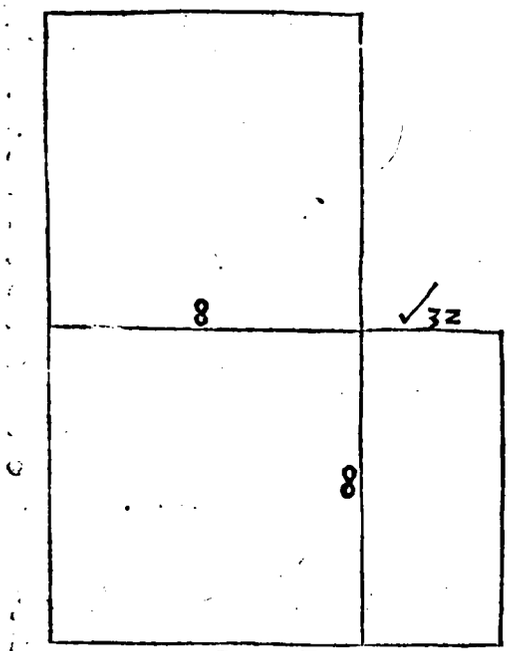


Vel contra, inueniatur, &c.

unum huius totius compoſiti rectilinei latus, quod ſcilicet lateri, in rectilineo ſumpto, minimè eſt oppoſitum, per eandem 44 propoſitionem, tot parallelogramma, in quot triangula alterum rectilineum diuiſum eſt, unicuiq; ſcilicet unū æquale, in priori rectilineo angulo, prætẽdantur. Erit aũt ſic illud huius totius parallelogrãmi latus, atq; prioris parallelogrãmi deſcripti, quod ſcilicet in rectilineo ſumptū eſt, ex prop. 14 primi adamuſſim una linea. Media igitur proportionali, inter dicta latera, per prop. 13 huius, inuenta, ab eadem tandem rectilineū, quod ſit priori rectilineo ſimile, ſimiliterq; poſitum, per propoſitionem 18 huius deſcribatur: & propoſitioni ſatisfactum erit, quod ſic demonſtratur. Quoniam tres ſunt lineæ proportionales, duorum nimirum parallelogrammorum, quæ duobus rectilineis, utrunq; utriq;, æqualia ſunt, duo latera, & media inter ea linea proportionalis inuenta, cum ab harum prima, atq; etiam ſecunda, ſimilia, ſimiliterq; poſita rectilinea deſcripta ſint: prima ad lineam tertiam erit, ex corollario propoſitionis uiceſimæ ſecundo, ut quod à prima, ad id quod à ſecunda ſimiliter deſcriptum eſt rectilineū. Et rurſus, quoniam parallelogramma, quæ ſub eodem uertice ſunt poſita, ex prima huius, in ſuarum baſium ſunt ratione: quam rationem igitur habet rectilineum primum, ad id quod ex propoſitione 18 iam deſcriptum



ſcriptum eſt, illam eandem habet etiam, ex propoſitione undecima quinti (duæ enim rationes uni ſunt eædem) parallelogrammum, priori rectilineo æquale, ad id quod poſteriori rectilineo æquale eſt, parallelogrammum, atq; ex permutata ratione deinde, per propoſitionem 16 quinti, rectilineum ad parallelogrammum ut rectilineum ad parallelogrammum. Sed quia rectilineum in priori collatione, eſt ſuo parallelogrammo, ex ſtructura æquale: & in poſteriori ſic, propter rationum ſimilitudinem, rectilineum ſuo parallelogrammo æquale erit. quare & rectilineo alteri, huic parallelogrammo æquali, idem rectilineum æquale erit. Eſt autem & priori ſimile. Duobus igitur rectilineis deſcriptis, tertiũ iam, uni quidem ſimile, alteri uerò æquale, idem rectilineum deſcriptum eſt, quod feciſſe oportuit.



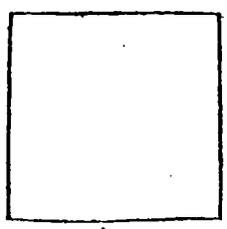

√768

Figura poſteriori ſimilis & priori æqualis.

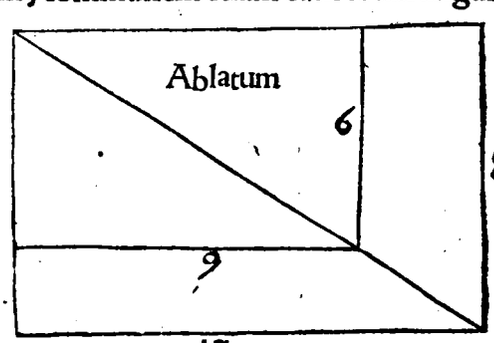
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κϛ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τοῦ ὅλου.

PROPOSITIO XXVI.

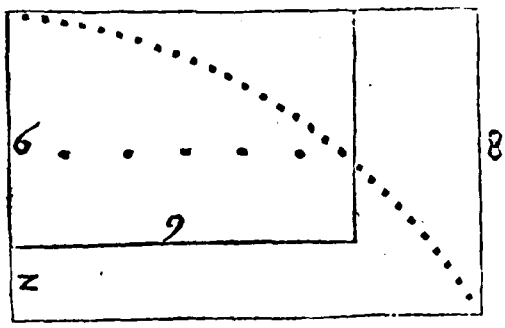
Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, & ſimile toti & ſimiliter poſitum, communem angulum habens ei: circa eandem diametrum eſt toti.

Deſcribatur parallelogrammum, ab eo deinde aliud, ſibi ſimile ſimiliterq; poſitum, communem etiam cum totali angulum habens, parallelogrammum auferatur: dico, ablatum circa totalis parallelogrammi diametrum conſiſtere. Sumit hæc propoſitio ſuam demonſtrationem ab abſurdo illo, Partem ſuo toti, uel contrà, Totũ ſuæ parti æqualem eſſe, hoc modo. Ducatur ablati parallelogrammi diameter, ab angulo, quem cum totali communem habent incipiendo. Quod ſi hæc, ulterius continuata, diameter etiam parallelogrammi totalis fuerit: uerum eſt quod dicit propoſitio. Si uerò non, ducatur ab eodem communi angulo, ſi poſſibile ſit, linea recta alia, quæ ſit totalis parallelogrammi diameter: puncto deinde interſectionis, huius diametri & lateris parallelogrammi ablati linea, quæ per ablatum parallelogrammum tranſeat, & inſuper duo-



bus

bus totalis parallelogrammi lateribus, parallela sit, per propositionem 31 primi, excitetur. Et quoniam parallelogrammorum utrunq; ablatum quidem, ex hypothesi, quod uerò iam formatum est ex propositione 24 huius, totali parallelogrammo simile est: utriusq; igitur circa æquales angulos latera, ex definitionis similium figurarum conuersione bis usurpata, atq; propositione 11 quinti inter se proportionalia erunt. Quia autẽ una & eadem linea, illa scilicet quæ utriusq; est latus commune, ad duo reliqua horum parallelogrammorum latera, uel contrà (prout quidem in demõstratione processum fuerit) hæc duo ad commune illud latus, unam & eandem rationem habent: hæc duo reliqua latera, ex priore uel posteriore parte propositionis nonæ quinti, inter se æqualia erũt, longius breuiori, uel contrà, quod est impossibile. Propter illud absurdum igitur hæc duo parallelogramma, ablatum scilicet & totale, his propositionis hypothesibus, circa eandem diametrum consistere necesse erit. Si à parallelogrammo igitur parallelogrammum auferatur, &c. quod demonstrasse oportuit.



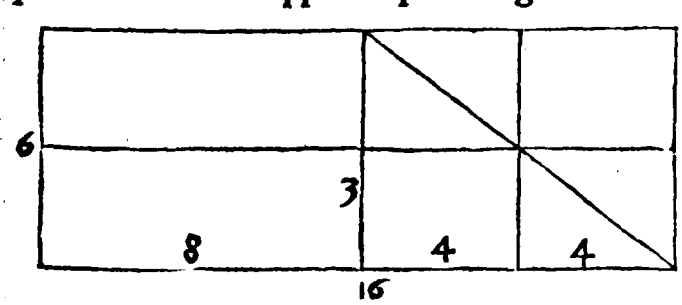
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Παντων των παρα την αυτην ευθειαν παραβαλλομενων παραλληλογραμμων, και ελλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ· μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

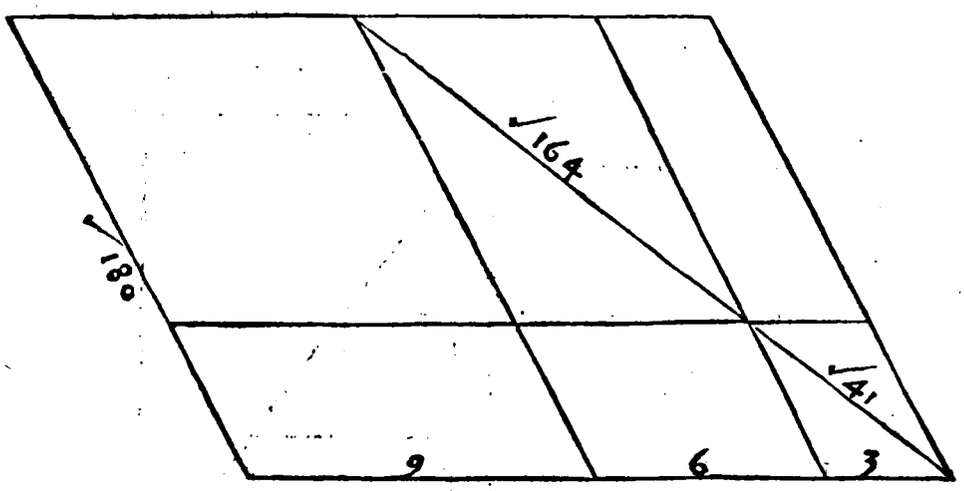
PROPOSITIO XXVII.

Omnium, circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ specie deficiunt parallelogrammis, similibus, similiterq; positis ei, quod à dimidia linea describitur: si deficientia conferantur, erit quod ad dimidium proiectum est, & simile sumpto existit, omnium maximum.

Sensus propositionis est. Si eidem rectæ lineæ applicentur aliquot parallelogramma, unum quidem ad ipsius rectæ medietatem, alia deinde ad ipsam rectam utcunq;, quæ tamen singula, ad completionem rectæ, deficiant in parallelogrammis, specie similibus & similiter positis, ei quod ab altera medietate descriptum est: quòd tum medietati applicatũ parallelogrammum omnium maximum sit. Recta igitur linea data, ea primũ bifariam secanda, atq; ab una eius medietate, parallelogrammum utcunque describendum est. Ab altera deinde rectæ medietate parallelogrammum unum, duo uerò uel plura parallelogramma alia, à uarijs, ad placitum sumptis, diuisæ lineæ partibus, quæ sint medietate ipsius rectę uel longiores uel breuiores describantur. esto tamẽ quòd singulę in parallelogrammis ei, quod primò ab una medietate diuisæ descriptum est, similibus, deficiant. Dico igitur,



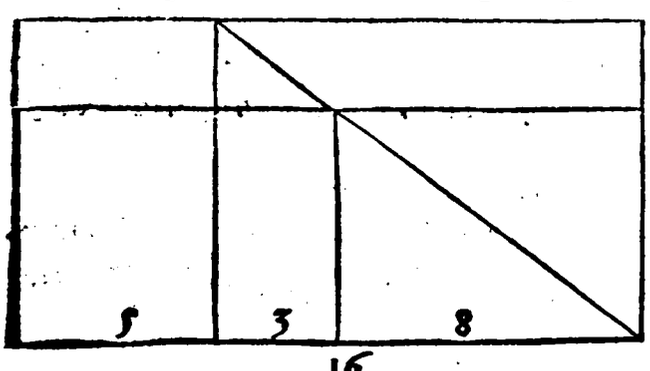
co igitur, quod tum, si deficientia conferantur, id quod à media descriptum est parallelogrammum, omnium maximum sit. Cum enim illa, in quibus ad rectam posita parallelogramma deficiunt, similia inter se, alterum item alterius sit ablatum, unum deinde angulum communem habeant: circa eandem diametrũ hæc, ex præcedenti propositione 26, consistunt. qua igitur ducta, figura item descripta, ut scilicet παραλληλόγραμμα appareant, demonstratio sic succedet. Quoniam supplementa omnis parallelogrammi inter se æqualia sunt, æqualia insuper uel aliquod commune æqualibus additum, æqualia proueniunt. Et rursus, quoniam quæ sub eodem uertice sunt parallelogramma, si æquales bases habuerint, æqualia inter se sunt, eò



ordine procedendo, cum duo uni æqualia sint, æqualium uno pro altero sumpto, unum supplementum tandem cum altero simili, partiali ei, quod ad medietatem rectæ ponitur, parallelogrammo, æquale erit. Illis igitur æqualibus altero supplemento adiecto: ipse gnomon, qui scilicet, propter æqualitatem parallelogrammorum, pars est eius, quod à medietate altera descriptum est, parallelogrammi, alteri parallelogrammo æquale erit: totum igitur eo maius. Omnium igitur circa eandem diametrum, &c. quod demonstrasse oportuit.

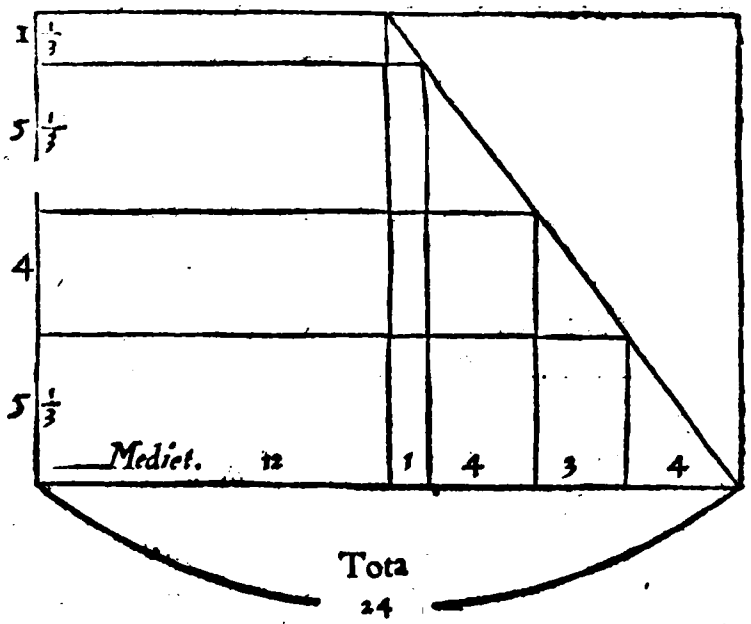
ALITER.

Sit rursus à rectæ lineæ medietate descriptum parallelogrammum, in medietate altera deficiens, ab ipsa recta uerò parallelogrammum aliud, quod deficiat in parallelogrammo simili ei, in quo à medietate descriptum defecerat. esto autem quòd illud alterum sit priori descripto parallelogrammo altius: dico ergo adhuc, id quod à medietate rectæ descriptum est parallelogrammum, maius esse, &c. Quoniam enim illa, in quibus ad rectam lineam posita parallelogramma deficiunt, ut in superiori figuratione sese habent, ducta diametro, alia etiam recta linea propter supplementa accedente, demonstratio sic succedet. Parallelogramma, quorum unum est parallelogrãmi spacij supplementum, habẽs pro latere, lineam medietati rectæ æqualem, alterum uerò quod huic continuatum est, cum æquales bases habeant, æquè etiam alta sint: erunt illa, ex 36 primi, inter se æqualia. Et quia



etiam parallelogrammorum ſupplementa omnis parallelogrammi ſpacij, inter ſe æqualia ſunt, cum duo uni æqualia, illa & inter ſe æqualia eſſe, ex quadam communi noticia receptum ſit, ab horum æqualium uno parallelogrammum, per quod diameter tranſit, ablatum: id quod relinquitur, alteri æqualiũ inæquale erit. Quòd ſi tandem his inæqualibus id, quod alterum eorum ad complendum parallelogrammum, à medietate diuiſæ deſcriptum, deſiderat, ex æquo adiectum fuerit, cum quæ ſic proueniant, ex communi quadã noticia inter ſe inæqualia ſint, maius autem eorum, id quod à medietate deſcriptum eſt, parallelogrammum, minus uerò alterum à recta data, &c. deſcriptum, concluditur propoſitum. Omnium igitur circa eandem rectam lineam proiectorum parallelogrammorum, eorum quæ ſpecie deficiunt, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

Figura huius propoſitionis geometrica alia.



Habet hæc figura quatuor rectilinea, unum quidem ad medietatem ductæ pro ſectum, tria deinde alia, ut oportuit, ad aliquam datæ partem. Et quia ſingula ad totius datæ rectæ completionẽ in aliquo rectilineo deficiunt toti ſimili: dico igitur, quod ad medietatẽ comparatum eſt rectilineum, unoquoq; ex reliquis maius eſſe. Id quod præter geometricam rationem uel in numeris patet, atque ob id etiam hæc figura poſita eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλείπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι.

Δεῖ δὴ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ αὐτοῦ δὴ τῆς ἡμισείας, καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν.

PROPOSITIO XXVIII.

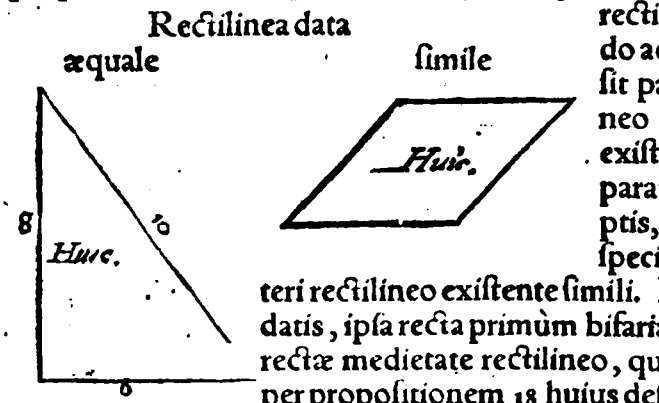
Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare deficiens ſpecie parallelogrammo, quod ſimile exiſtat rectilineo dato.

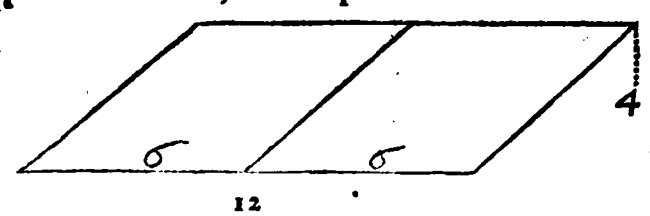
CAVTIO.

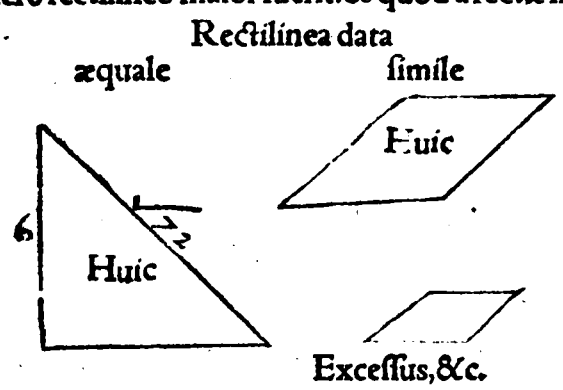
Oportet autem datum rectilineum, cui æquale comparandum eſt, non

non maius esse eo, quod ad dimidiam comparatur similibus uidelicet exi stentibus, deficientibus specie, inter se, eo nimirum, quod ad dimidiam comparatur, ei quod simile specie deficit, existente simili.

Quoniam enim, ut habet propositio præcedens 27, si quæ parallelogramma ad rectam quandam lineam comparata fuerint, quæ singula ad completionem rectæ lineæ deficiunt specie parallelogrammis, similibus similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur, cum quod ad medietatem rectæ comparatur, ex propositione præcedenti 27 omnium maximum sit: hinc ergo factum est, quod huic 28 propositioni hæc cautio tanquam obseruatu digna adiecta sit. Nunc igitur quantum ad propositionem. Requirit hæc propositio primò rectam lineam, deinde uerò duo rectilinea: proponit autem, quomodo ad datam rectam comparãdum sit parallelogrammum, uni rectilineo æquale, quod minime maius existat ad medietatem rectæ comparato, similibus existentibus sumptis, sic ut ad completionem rectæ, specie parallelogrammo deficiat, alteri rectilineo existente simili. Recta igitur linea ac rectilineis datis, ipsa recta primùm bifariam secetur, ab alterutra deinde rectæ medietate rectilineo, quod alteri ex dato simile existat, per propositionem 18 huius descripto, à quo id deficiet ad completionem rectæ, etiam cõpleatur: & erit ille defectus alteri rectilineo, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι, aut æquale, aut eo maius. Si æquale, factum erit propositum: parallelogrammum nimirum ad rectam datam, uni rectilineo dato æquale, deficiens specie parallelogrammo, quod alteri dato rectilineo simile est, comparatum. Quòd si defectus ille altero rectilineo maior fuerit: & quod à rectæ medietate, per propositionem 18 descriptum est rectilineum, propter æqualitatem, eodem altero rectilineo maius erit. In quo igitur excedit, tali excessui parallelogrammum, quod etiam ut ipsum totum alteri dato simile sit, per propositionem 25 huius describatur, & erit illud cũ rectilineo dato uno, iam toti parallelogrammo æquale: toti etiam per se, ex propositione 21 huius, simile: laterum igitur, quæ habet circa æquales angulos, proportionalium. Et quoniã huic toti, quod scilicet dato uni rectilineo simile, ad medietatem etiam rectæ positum est, alteri rectilineo cum iam descripto parallelogrammo æquale est: erit contrà, hoc totum parallelogrammũ iam descripto solo maius: quare & illius, quàm huius, latera longiora. In longioribus igitur breuioribus æqualibus signatis, compleatur parallelogrammum: eritq; illud ei, quod per propositionem 25 descriptum est, parallelogrammo æquale: ipsi insuper toti ex propositione 21 huius, simile: circa eandem







igitur diametrum hæc, partiale nimirum & totale parallelogrammum ex 26 huius consistunt. Ducatur ergo diameter, & describatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammum rectilineo uni, & excessui æquali descripto parallelogrammo, est æquale, assignatum uerò in eo parallelogrammum, excessui æquale, cum ex communi quadam notitia, si ab æqualibus æqualia subtrahantur: & ea quę relinquuntur æqualia sint: subtractione igitur facta, gnomon, qui ex una parte relinquitur, rectilineo cuidam, ex altera parte relicto, æqualis erit. Sed quia ipsi gnomoni, ut ex primo libro facile colligitur, æquale est ad rectam comparatum parallelogrammum: quare ex communi quadam notitia, eidem relicto rectilineo hoc parallelogrammum æquale erit, deficitq; specie parallelogrammo, ad complendum totum, eo quod est alteri rectilineo dato simile. Ad datam igitur rectam lineam, dato rectilineo, &c. quod fieri oportuit.

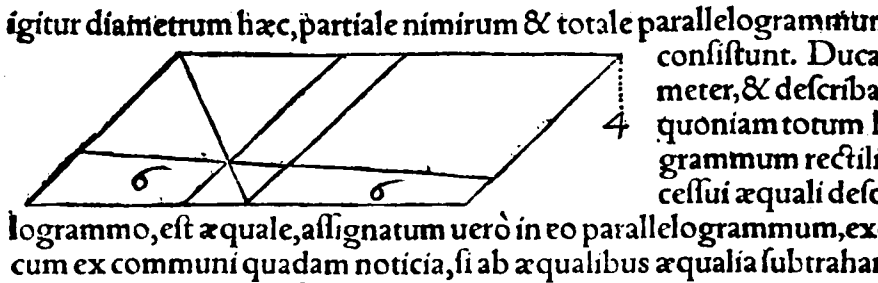
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ.

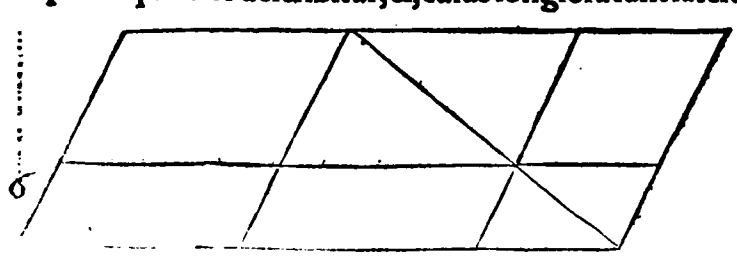
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑποβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum comparare, excedens specie parallelogrammo, simili dato.

Et hæc propositio, ut præcedens 28 duo rectilinea, & rectam lineam datam requirit. Proponit autem, quomodo ad datam rectam comparandum sit parallelogrammum, quod quidem ipsum esset uni rectilineo æquale: excessus uero ipsius, qui est ultra rectam lineam, alteri specie similis. Recta igitur linea ac rectilineis datis, ipsa recta primum, ut in præcedente, bifariam secetur: ab alterutra deinde rectæ medietate parallelogrammo, uni ex dato rectilineo simili, per propositionem 18 huius, descripto, aliud deinde, quod & ipsum sumpto rectilineo simile sit, iam uerò descripto cum rectilineo dato altero æquale existat, per propositionem 25 huius describatur: hęc igitur, quod scilicet iam descriptum est, & prius positum, cum uni sint rectilineo similia, ex structura, inter se etiam, per prop. 21, similia erunt, ac similis rationis latera circa æquales angulos habebunt. Et quoniam unum altero parallelogrāmo, ut totum sua parte, maius est: & latera illius quàm huius parallelogrammi latera longiora erunt. Breuioribus igitur ad suarum longiorum quantitatē continuatis, parallelogrāmo etiā deinde cōpleto: quod sic describitur, ei, cuius longiora sunt latera, æquale, atq;





etiam simile erit: quare & alteri descripto, cuius nimirum latera continuata sunt,

ex

ex 21 huius ſimile: circa eandem igitur hæc duo parallelogramma diametrum, ex propoſitione 26, conſiſtunt. Ducatur igitur diameter, & deſcribatur figura. Et quoniam totum hoc parallelogrammi ſpacium, ſuo gnomoni & alteri parallelogrammo ad medietatem rectæ comparato, ut ſuis partibus, eſt æquale, æquale etiam ex communi quadam noticia, huic alteri parallelogrammo & uni rectilineo, ablato de illis communi: & reliquus gnomon, ex una parte, rectilineo æqualis erit. Cum igitur ſupplementa omnis parallelogrāmi ſpacij, ex propo. 43 primi. cumq; etiam parallelogramma, ſuper æqualibus baſibus in eiſdem item parallelis conſtituta, ex 36 eiuſdem, inter ſe æqualia ſint: huius memor, æquali pro æquali, hoc eſt, loco gnomonis ipſo rectilineo, ſumpto, res tandem concludetur. Ad datā igitur rectam lineam dato rectilineo, &c. quod feciſſe oportuit.

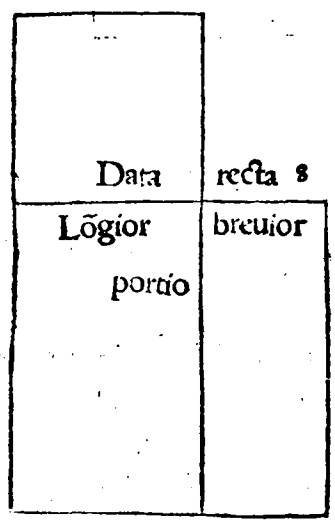
ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Λ.

Τὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν πεπρᾶσμένῳ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam, per extremam ac mediam rationem ſecare.

Proponit hæc propoſitio idem quod in ſecundo propoſitio decima, ſub alijs tamen uerbis. Sit igitur recta linea terminata data, atq; propoſitum, eam per extremam & mediam rationem ſecare. Deſcribatur igitur, per propoſitionem 46 primi, à recta data quadratum, ad lineam deinde, rectæ datæ πρὸς ὀρθὰς inſiſtentem, alterutram, parallelogrammum, quod ipſi quidem quadrato æquale: ultra uerò quadratum de eo proiectum, eidem quadrato etiam ſimile ſit, per propoſitionem 29 comparetur. Et quia per huius parallelogrammi alterum latus, quod ſcilicet per quadratum tranſit, recta data, ut iuſſum, diuiſa eſt: propoſitioni igitur ſatisfactum erit: demonſtratio deinde hoc modo colligenda. Quoniam enim à recta data deſcriptū, quadratum eſt ex ſtructura: quadratum igitur eſt & id, propter ſimilitudinem, quod ultra quadratum de parallelogrammo porrigitur. Et rurſus, quoniam parallelogrammum, ad latus, rectæ datæ conterminale, per propoſitionem 29 applicatum, æquale eſt, ex ſtructura, rectæ datæ quadrato: igitur eo quod hæc duo æqualia commune habent, de ijs ablato, & quę relinquuntur, per communem quandam noticiam, inter ſe æqualia erunt. Sed quia ſunt etiam æquiangula: latera igitur eorum circa æquales angulos, ex priore parte propoſitionis 14 huius, reciprocè proportionalia erunt. Quare, cum quadratorum latera ex definitione, inter ſe æqualia ſint, parallelogramma inſuper latera oppoſita, ex propoſitione 34 primi, æqualia inter ſe habeant: ex definitione lineæ, extrema & media ratione diuiſæ, iam infertur propoſitum, quòd ſcilicet recta data, extrema & media ratione diuiſa ſit, quod fieri oportuit.



Portio lon. √80 — 4
breuior 12 — √80

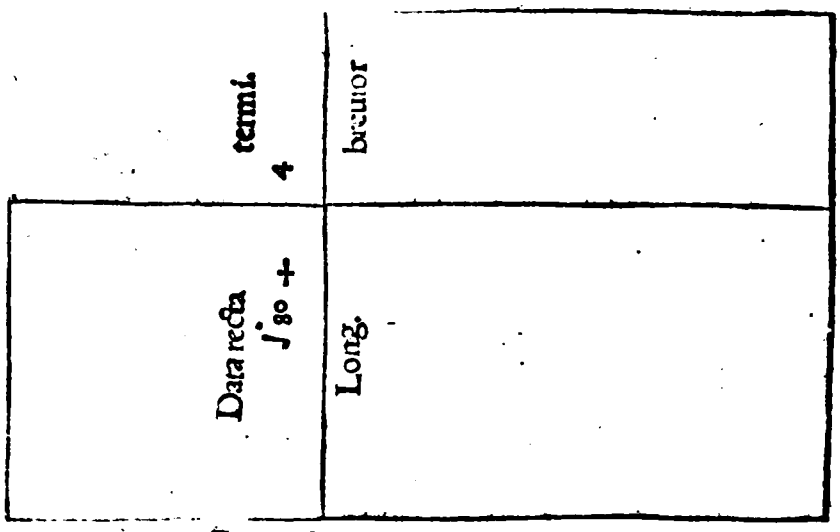
Exemplum in numeris.

Sit totus numerus

10 18 24 39 52 &c.

Portio maior	minor
$\sqrt{125} - 5$	$15 - \sqrt{125}$
$\sqrt{205} - 9$	$27 - \sqrt{205}$
$\sqrt{718} - 12$	$36 - \sqrt{718}$
$\sqrt{1901\frac{1}{4}} - 19\frac{1}{2}$	$58\frac{1}{2} - \sqrt{1901\frac{1}{4}}$
$\sqrt{3390} - 26$	$78 - \sqrt{3389}$

Exemplum geometricum aliud.



Portio longior 8
breuior $\sqrt{8} - 4$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

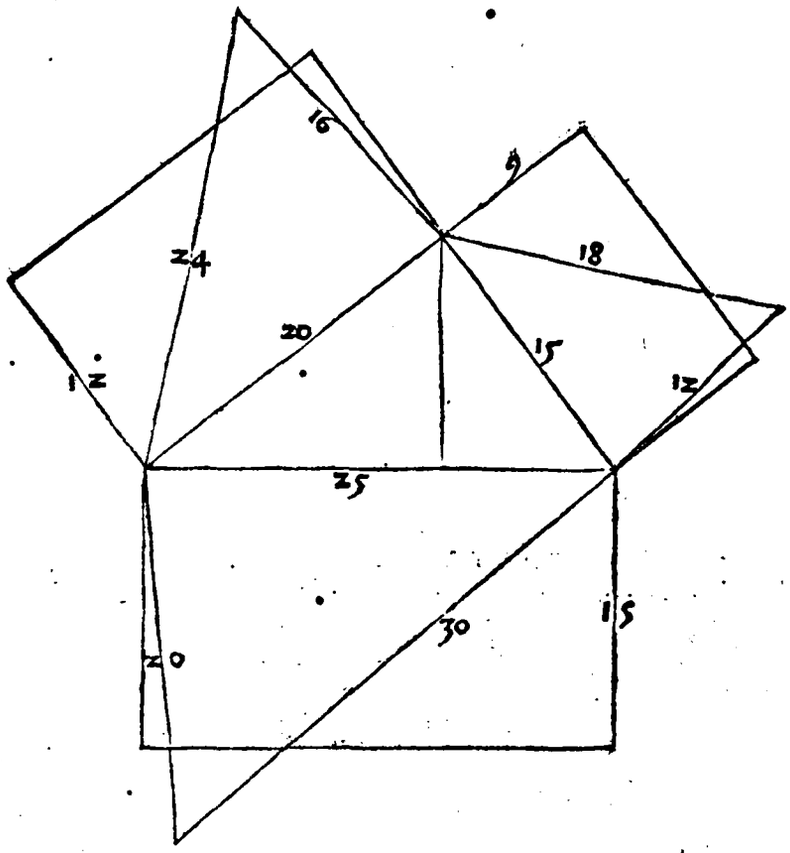
PROPOSITIO XXXI.

In rectangulis triangulis: quæ, ab rectum angulum subtendente, latere species descripta fuerit, ea æqualis est eis, quæ similes similiterq; positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Est hæc propositio aliquanto generalior, & latius se extendit quàm quæ est in primo quadragesima septima, cum hæc de quadratis tantùm, illa uerò de omnis generis rectarum linearum figuris, modò similis delineationis fuerint, intelligatur. Sit igitur triangulum rectangulum, ab illius etiam unoquoque latere rectilineum descriptum, primum quidem à latere uno, ut lubet, à reliquis deinde reliqua, quem admodum docet propositio 18: dico ergo, rectilineum lateris quod subtendit angulum rectum, reliquis duorum laterum rectilineis æquales esse. Ducatur ab angulo trianguli recto, per propositionem 12 primi, ad basim perpendicularis. Et quoniam partialia descripta triangula, per propositionem 8 huius, & toti, & ipsa inter se similia sunt: æquiangula igitur hæc, & latera circa æquales angulos proportionalia habebunt. scilicet, sicut se habet subtendens rectũ totalis trianguli, ad utrumq; circa rectum angulum latus, sic & in utroq; partiali triangulo, recto angulo subtensa, ad utrunq; alterum. Sed quoniam tribus rectis lineis proportionalibus existentibus, cum, per corollarium secundum propositionis 20 huius, prima sit ad tertiam,

ut

ut quæ à prima ad illam quę à ſecunda, ſimilis ſimiliterq; poſita ſpecies deſcribitur, ratio, eodem corollario bis uſurpato, conuerſa inſuper ratione & illa bis ſumpta, cum ſex quantitates appareant, quarum prima quidem ad ſecundam eſt ut tertia

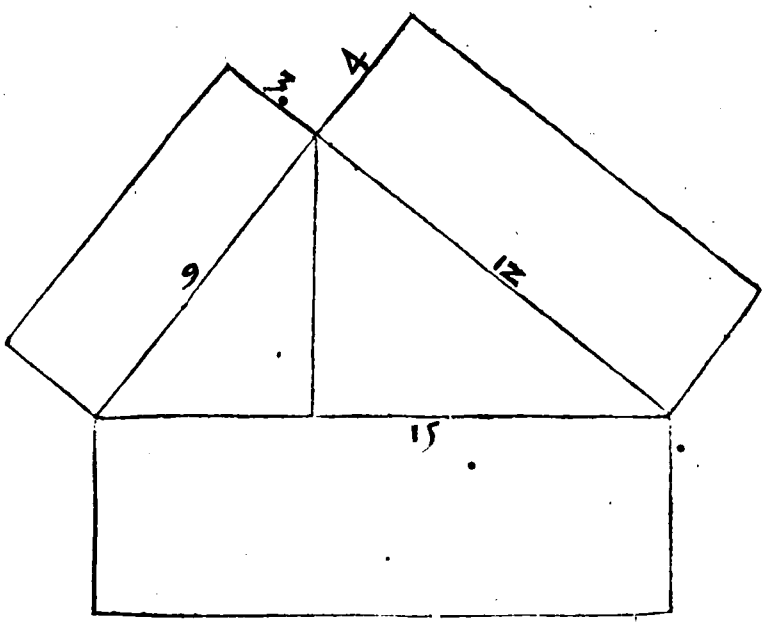


ad quartam, quinta uerò ad eandem ſecundam ut ſexta ad quartam, atq; ita, per propoſitionem 24 quinti, prima cum quinta ad ſecundam, ſicut tertia cũ ſexta ad quantitatem quartam: ſicut prima cum quinta ſecundæ, ita & tertia cum ſexta quartæ quantitati æqualis ſit, hinc propoſitioni ſatisfactũ erit. In triangulis igitur rectangulis, quæ ab rectum angulum ſubtendente latere ſpecies deſcripta fuerit, ea æqualis eſt eis, quæ ſimiles ſimiliterq; poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. quod demonſtraſſe oportuit.

ALITER.

Figuræ, à rectanguli trianguli lateribus deſcriptæ, ſunt, ex hypotheſi, inter ſe ſimiles: & quoniam ſimiles figuræ, ex corollario propoſitionis 20 huius ſecundo, in duplicata ratione ſunt ſimilis rationis laterum, habet uerò & quadratum ad quadratum ſuorum laterum duplicatam rationem: & rectilinei igitur ad rectilineum, ex propoſitione 11 quinti, ut quadrati ad quadratum ratio erit. Hæc ſic omnia bis uſurpata, cum etiam iam ſex quantitates, quales propoſitio 24 quinti requirit, appareant, per eandem & propoſitionem quadrageſimam ſeptimam primi, de triangulis rectangulis expoſitam, infertur tandem propoſitum.

Alia huius propoſitionis figuratio.



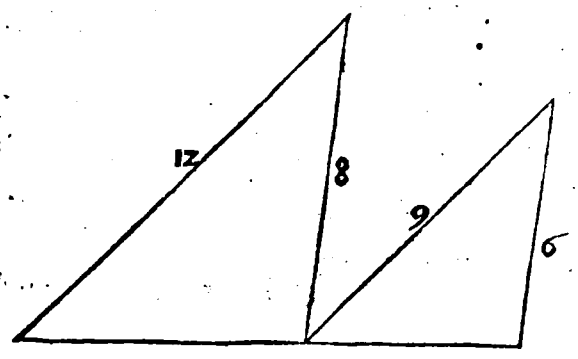
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΒ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ, κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, ſecundum unum angulum compoſita fuerint, ſic ut proportionalia illorum latera parallela ſint: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam erunt.

Sint duo triangula qualia hæc propoſitio requirit, quorum unius duo latera illam, quam duo alterius trianguli latera rationem conſtituant. Hęc autem applicentur ſecundum unum eorum angulum ſic, ut latera rationis in uno, duobus lateribus rationis in triangulo altero ſint parallela: dico, quod tertium unius, & tertium latus trianguli alterius, adamuſſim unam lineam conſtituant. Quoniam enim latera rationis in uno, lateribus rationis in triangulo altero, ex hypotheſi, ſunt lineæ parallelæ, cum in eas etiam cadat recta quædam linea alia, unum ſcilicet ex parallelis latus: αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, ex prima parte propoſitionis 29 primi, inter ſe æquales erunt. Eadem igitur parte bis uſurpata: & anguli qui in utroq; triangulo inter proportionalia latera continentur, ex communi quadam notitia, inter ſe æquales erunt: atq; deinde triangula ipſa, ex priore parte propoſitionis 6 huius æquiangula, tandem duo anguli ad tertium unius, duobus angulis ad tertium latus trianguli alterius, æquales erunt. Duobus igitur æqualibus his, utri hi fuerint, angulis, anguli coalterni, qui & ipſi, ut iam demon-



demonſtratum eſt, inter ſe æquales ſunt, additi: & duo duobus, duo inquam anguli in uno triangulo, duobus extra illud æquales erunt. Addito inſuper his æqualibus angulo quodam communi, tertio ſcilicet huius trianguli angulo: tres in triangulo anguli tribus alijs æquales erunt. Sed cum omnis trianguli tres anguli interiores, ex corollario propoſitionis 32 primi, duobus rectis æquales ſint: & alij tres duobus rectis angulis æquales erunt. Quoniam autem ad aliquam rectam lineam quæ eſt, unum ex parallelis latus, atq; ad eius punctum, quod eſt commmunis triangulorum copula, duæ rectæ lineæ, tertia nimirum duorum triangulorum latera, non ad eaſdem partes ductæ, deinceps ſe habentes angulos duobus rectis æquales faciunt: in directum igitur, ex propoſitione 14 primi, hæc duo tertia latera una linea erunt. Si duo igitur triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, &c. quod demonſtraſſe oportuit.

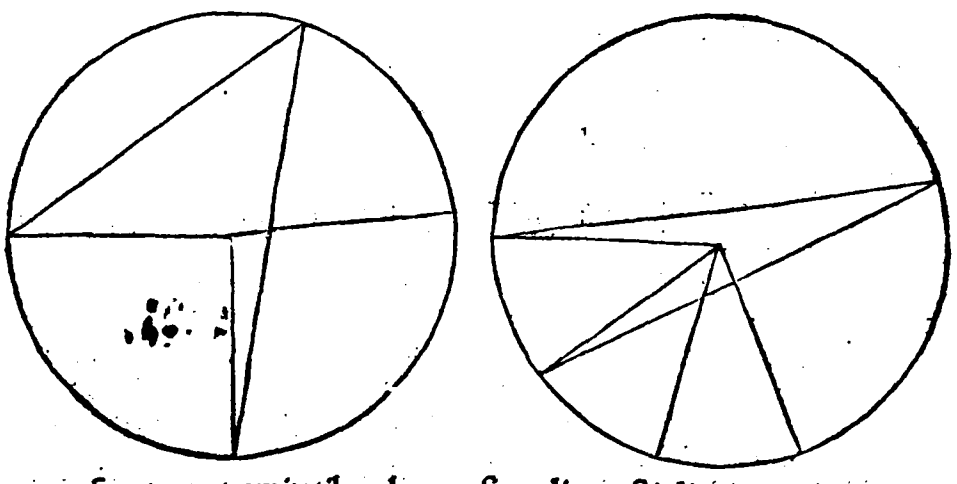
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείας ὦσι βεβηκυῖαι. Ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

PROPOSITIO XXXIII.

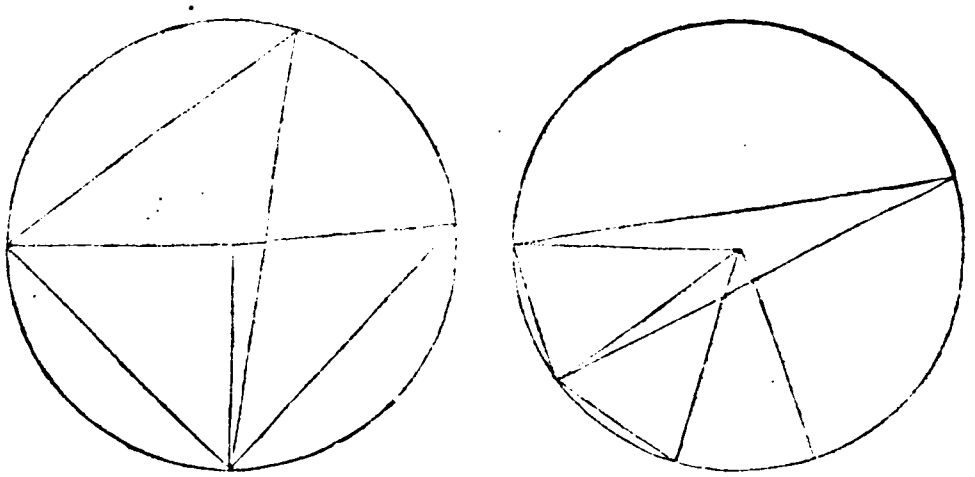
In æqualibus circulis, angulis eandem habent rationem ipſis circumferentijs ſuper quibus conſtituuntur, illi ſiue ad centrum ſiue ad circumferentias conſtituti ſunt: Inſuper uerò & ſectores, ad centra conſtituti.

Habet hæc propoſitio partes duas, requirit circulos æquales, & dicit: Si in æqualibus circulis anguli poſiti fuerint, illos eandem quam ipſæ circumferentiæ à quibus deducuntur rationem habere, ſiue ad centra illi, ſeu ad circumferentias poſiti fuerint. Inſuper quod etiam ſectores ad centra, illam, quam uel anguli uel circumferentiæ, rationem habeant. Deſcribantur igitur æquales circuli, duo uel plures, in ijs etiam anguli ponantur, ad centra ſiue ad circumferentias deducti: dico, quam ipſæ circumferentiæ, illam eandem & angulos, ad centra ſiue ad circumferentias deductos, rationẽ habere: dico inſuper, & ſectores, qui ad centra poſiti ſunt, illam eandem, quam uel circumferentiæ uel anguli, habere rationem. Signentur in uno circulo ordine quotcunque circumferentiæ, ei quæ ſubtendit angulum in circulo conſtitutum, æquales: & hoc quidem, ex propoſitione 28 tertij, officio circini, eo ſecundum quantitatem rectæ quam eadem circumferentia, ſi ſubtendi debeat, requi



rit, extenſo, atq; extremitatibus harum ſingulis, rectis lineis cum centro iunctis, hoc idem, ſecundum illam uel aliam multitudinem, fiat etiam in circulis alijs. Et quoniam æquales ſunt, ex ſtructura, circumferentiæ inter ſe, æquales autem circumferentiæ,

cumferentiæ,ex propoſitione 27 tertij,in æqualibus circulis,æquales angulos ſubtendunt: & ipſi anguli ſic inter ſe æquales erunt. Sicut igitur in unoquoq; circulo, circumferentiarum aggregatum ad unam,illam ſcilicet, quæ in eodem circulo angulum ſubtendit,eſt multiplex: ſic & angulorum aggregatum ad illũ eundem angulũ multiplex erit. Quare ſi circumferentiarum aggregatum in uno,æquale fuerit aggregato circumferẽtiarum in alio circulo,uel maius uel minus eo:& angulorum aggregata eodem modo ſeſe habebunt. Sunt autem iam quatuor quantitates,duo ſcilicet anguli ad centra poſiti,horum deinde angulorum circumferentiæ ſubtenſæ, quarum cum primæ & tertiæ aſſignatæ multiplices æqualiter ſe habeant,in addendo,minuendo & æqualitate,reſpectu multiplicium, quæ ipſis ſecundæ & quartæ aſſignatæ ſunt:erunt illæ quantitates,ex definitione 5 quinti,in eadem ratione, prima ſcilicet ad ſecundam,ut tertia ad quartam,circumferentiarum nempe, ut angulorum ad centra poſitorum,ratio. Quoniam autem ad centra deductorum angulorum ratio,ea eſt ex 20 tertij,& propoſitione 15 quinti, quæ eſt angulorum qui ad circumferentias deducti ſunt, cum duæ rationes eidem eædem, ipſæ ex 11 quinti inter ſe eædem ſint: prior propoſitionis pars iam manifeſta erit. Poſterior nunc, quòd & ſectorum ad centra,ut circumferentiarum ſit ratio,ſic demonſtrari poteſt. Maneat prior diſpoſitio,linearum deinde ipſorum ſectorum extremitates,quas habent, utercp in ſua circumferentia,lineis rectis coniungantur. Hoc idem fiat ex altera parte cum ſectoribus proximis, & ſignentur in quatuor iſtis circumferentijs uel arcubus,quatuor puncta utcunq;,atq; ab ijs ad eorum arcuum fines rectæ lineę ducantur. Et quoniam quæ ex centro circuli ad circumferentiam uſq; egrediuntur rectæ lineæ, ex definitione circuli, inter ſe ſunt æquales, cum ſic in utroq; circulo duo triangula appareant, quorum duo latera unius,duobus lateribus in triangulo altero ſunt æqualia,angulus etiam inter illa angulo, ut iam oſtenſum eſt, æqualis: & tertium latus tertio lateri: totum deinde triangulum toti triangulo, ex propoſi-



tione 4 primi,æquale erit.Et quia tertia horum triangulorum latera inter ſe æqualia ſunt, æquales uerò rectilineæ in æqualibus circulis, ex propoſitione 28 tertij,æquales circumferentias auferunt,maiorem maiori,& minorem minori,ſi in utroq; circulo,utriuſq; etiam rectæ lineæ arcus à toto circulo ſubtrahantur: quæ relinquuntur circumferentiæ,per hanc eandem propoſitionem,inter ſe æquales erunt: quare & anguli,qui ſuper illas circumferentias deducuntur,ex propoſitione 27 tertij,inter ſe æquales.Sectiones igitur,ex definitione,ſimiles:atque deinde etiam,cum ſuper æqualibus rectis conſtitutæ ſint,ex 24 tertij,inter ſe æquales.Eſt autem & triangulum triangulo æquale:totus igitur ſector toti ſectori æqualis, atq; ideo & ſectores in utroq; circulo tandem omnes,inter ſe æquales erunt. Quotuplex igitur eſt in utroq; circulo circumferentiarum aggregatum ad unam, illam ſcilicet, quæ in eo-

dem

dem circulo ſectorem ſubtendit, tam multiplex eſt etiam ſectorum aggregatum ad illum eundem ſectorem. Ergo ſicut ſe habet prima ex illis quatuor, ad tertiam, in addendo, minuendo, uel æqualitate: ita & ſecũda erit, reſpectu quantitatis quartę. Sunt autem iam quatuor quantitates, duo ſcilicet ſectores ad centra poſiti, horum deinde ſectorum circumferentiæ ſubtenſæ, quibus cum primæ & tertiæ, ſecundæ item & quartæ æquè ſint aſſignatæ multiplices, erunt illæ quantitates, ut ſuprà, in eadem ratione: prima ſcilicet ad ſecundam, ut tertia ad quartam: hoc eſt, Sectorum ut circumferentiarum, uel propter ſimilitudinem, ut angulorum ratio. In circulis igitur æqualibus, eadem ratio angulorum eſt, quę circumferentiarum ſuper quibus conſtituuntur, ſiue ad centra ſiue ad circumferentias conſtituti ſint. Itidemq; ſectores, qui ad centra conſiſtunt. quod demonſtraſſe oportuit.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ δῆλον, ὅτι ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

COROLLARIVM.

Et manifeſtum eſt, quòd ſicut ſector ad ſectorem: ita & angulus ad angulum.

FINIS LIBRI SEXTI.

IOANNES SCHEVBELIVS
candido Lectori S.

Habes ita, candide Lector, ſex libros geometriæ Euclidis priores, ex traditione noſtra, unà cum regulis Algebræ. Quod ſi fortè in aliquibus locis hallucinati ſumus (id quod in hoc hactenus inuſitato ac lubrico demonſtrationis genere facile accidere potuit) quia tamen paſſim multa inuenientur, quibus oblectare ſeſe ſtudioſus harum rerum poterit, lapſus in hac re noſtri apud te facile, ut ſpero, ueniam merebuntur. Quòd ſi candorem & iudicium non iniquum his adhibitum animaduertero, poſteriores etiam nouem libros pari ſtudio illuſtrare conabor, tecumq; communicare fideliter.

BASILEAE, PER IOANNEM [redacted], Anno ſalutis humanæ M. D. L. Menſe Septembri.

