

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

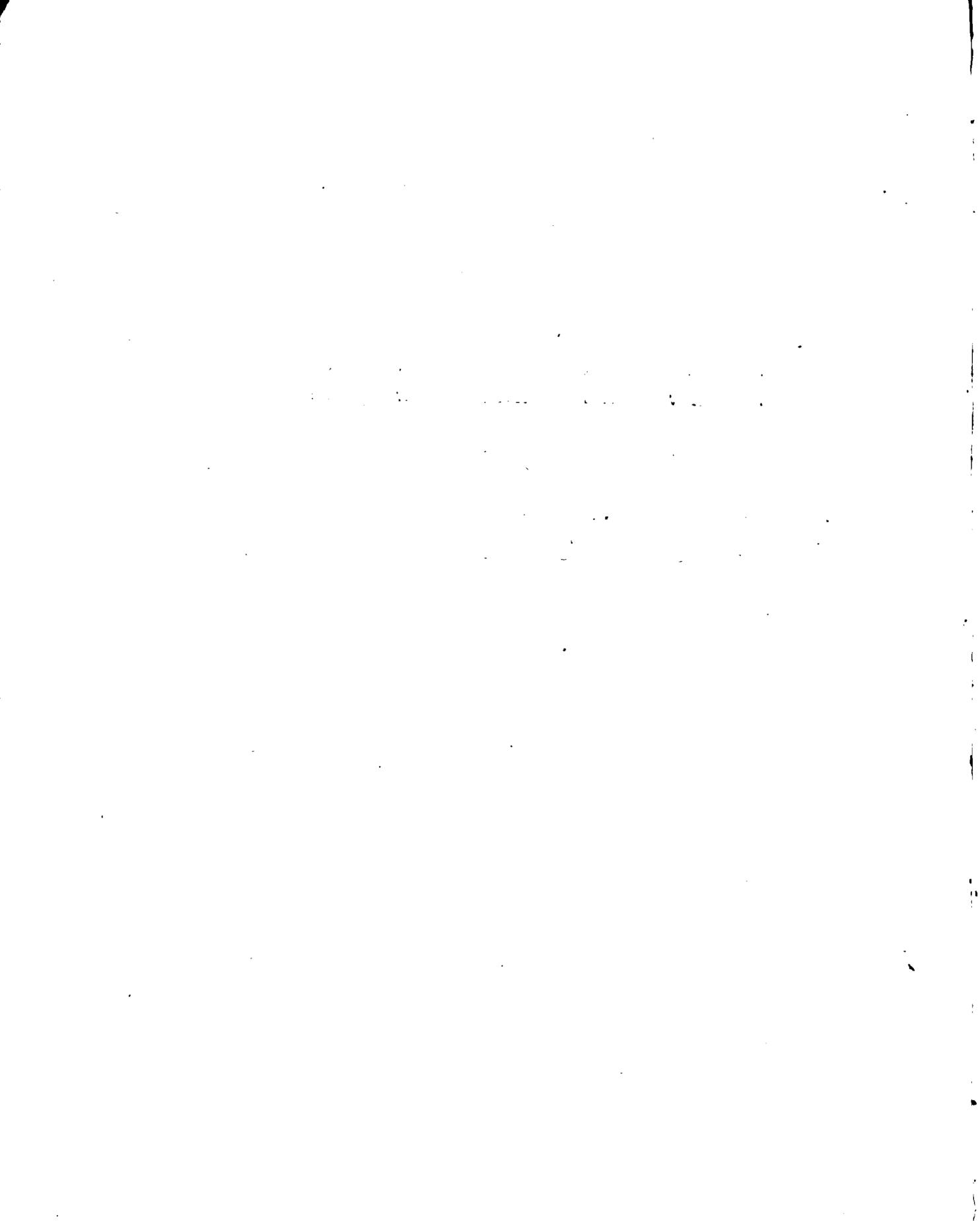
SOURCE DES IMAGES

Google Livres

E L E M E N S

D E

G E O M E T R I E.



E L E M E N T S
D E
G E O M E T R I E,
C O N T E N A N T
L E S S I X P R E M I E R S L I V R E S
D ' E U C L I D E,

MIS DANS UN NOUVEL ORDRE, ET À LA PORTÉE DE LA
JEUNESSE SOUS LES DIRECTIONS
DE MR. LE PROFESSEUR KOENIG,
ET REVUS
PAR MR. A. KUYPERS.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.



A L A H A T E,
Chez HENRI SCHEURLEER, F. Z.
M. D. CC. LVIII

1. The first part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

2. The second part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

3. The third part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

4. The fourth part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

5. The fifth part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

6. The sixth part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

7. The seventh part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

8. The eighth part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

9. The ninth part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

10. The tenth part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of correspondents. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

A V I S D U L I B R A I R E

JE publiai en 1754 un projet de Souscription pour une nouvelle Edition des **ELEMENS D'EUCLIDE**. J'y promettois d'en délivrer des **Exemplaires** complets vers la fin de 1755. Les **Souscripteurs** ont eu sans doute lieu de se plaindre des délais que j'ai été forcé de mettre à l'exécution de mes promesses. J'en rougirois moi-même, si je n'étois persuadé que le **Public**, suffisamment instruit des raisons qui m'ont empêché & qui m'ont presque mis dans l'impossibilité de remplir mes engagements, voudra bien se prêter à excuser cette faute, involontaire de ma part.

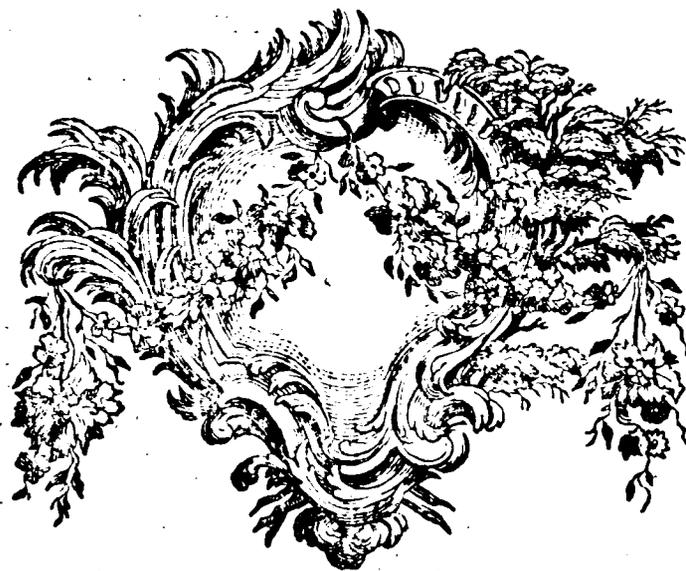
Pour remplir mes promesses, du moins autant qu'il m'est possible, j'offre ici les six premiers **Livres d'EUCLIDE** qui forment la **Premiere Partie** de mon **Ouvrage**. Je me propose de mettre la dernière main à mon Edition en publiant, le plutôt qu'il me sera possible, les **Onzieme & Douzieme Livres**. Cette **Entreprise** seroit même achevée, si une circonstance imprevue, mais prête à être décidée, n'avoit suspendu sa consommation.

Le **Public** peut être persuadé que le respect qu'il mérite de ma part, & que l'honneur de ma presse me font voir avec peine que je ne puisse fixer le tems où je ferai paroître ces deux **Livres**.

Il ne tiendra pas à moi d'abreger l'intervale que je suis obli-

vj A V I S D U L I B R A I R E .

gé de mettre à l'impaticence des Amateurs de la GÉOMETRIE ;
& je ne négligerai rien pour completer mon Edition. Mais
j'espère qu'en attendant, le Public, instruit de mes peines & de
mes travaux, rendra justice à mon zele, & voudra bien pour le
present se contenter de la Premiere Partie de cette Edition
des ELEMENS D'EUCLIDE, une des plus parfaites qui aient
paru jusqu'à present.



AVER-

AVERTISSEMENT

SUR CETTE

NOUVELLE EDITION.

LE Siecle des Mathématiques commence à renaître: on voit depuis quelque tems paroître, presque tous les jours, de nouveaux Traités de Géométrie. Nous ne chercherons point à déprimer ces Productions; elles ont certainement leur mérite. Mais les Auteurs de ces Traités donneront, avec nous, la préférence aux **ELEMENS D'EUCLIDE**: ce sont de ces Chefs-d'œuvres qu'on peut imiter, mais qu'il est impossible de surpasser.

Il seroit donc inutile de chercher à assurer à **EUCLIDE**, une supériorité que personne ne lui dispute. Notre unique but doit être d'indiquer ici les avantages de cette nouvelle Edition sur celles qui l'ont précédée.

1°. On a conservé, avec toute l'attention possible, toutes les Propositions & les Démonstrations d'**EUCLIDE**, qu'on a laissées dans le même ordre où elles se trouvent dans les meilleures Editions.

2°. Comme ce fameux Géometre avoit l'esprit Philosophique & que tous ses raisonnemens se suivent, on en a conservé, autant qu'il a été possible, la forme, la liaison & toute l'exactitude.

3°. Après avoir exposé, avec toute la clarté & la précision possible, les parties essentielles de ses Propositions, on a développé le sens de ses raisonnemens, & on l'a exposé dans un si beau jour, que l'œil tant soit peu attentif peut l'apercevoir. Pour rendre ces Elemens encore plus faciles, on a distingué en plusieurs Articles séparés, les différentes opérations & les raisonnemens essentiels à une bonne Démonstration.

4°. Pour faire quelques progrès dans l'étude des Mathématiques, il faut s'appliquer à découvrir la liaison & le rapport qu'il y a entre les Propositions; se former une juste idée du nombre & des qualités des argumens qui servent à établir une nouvelle vérité; connoître, en un mot, toutes les parties intrinseques d'une Démonstration.

Or comme il est impossible d'aquerir ces connoissances, sans savoir ce qui entre dans la composition d'un Théorème & d'un Problème. 1°. On a distingué la

viiij. AVERTISSEMENT SUR CÈTE NOUVELLE EDITION.

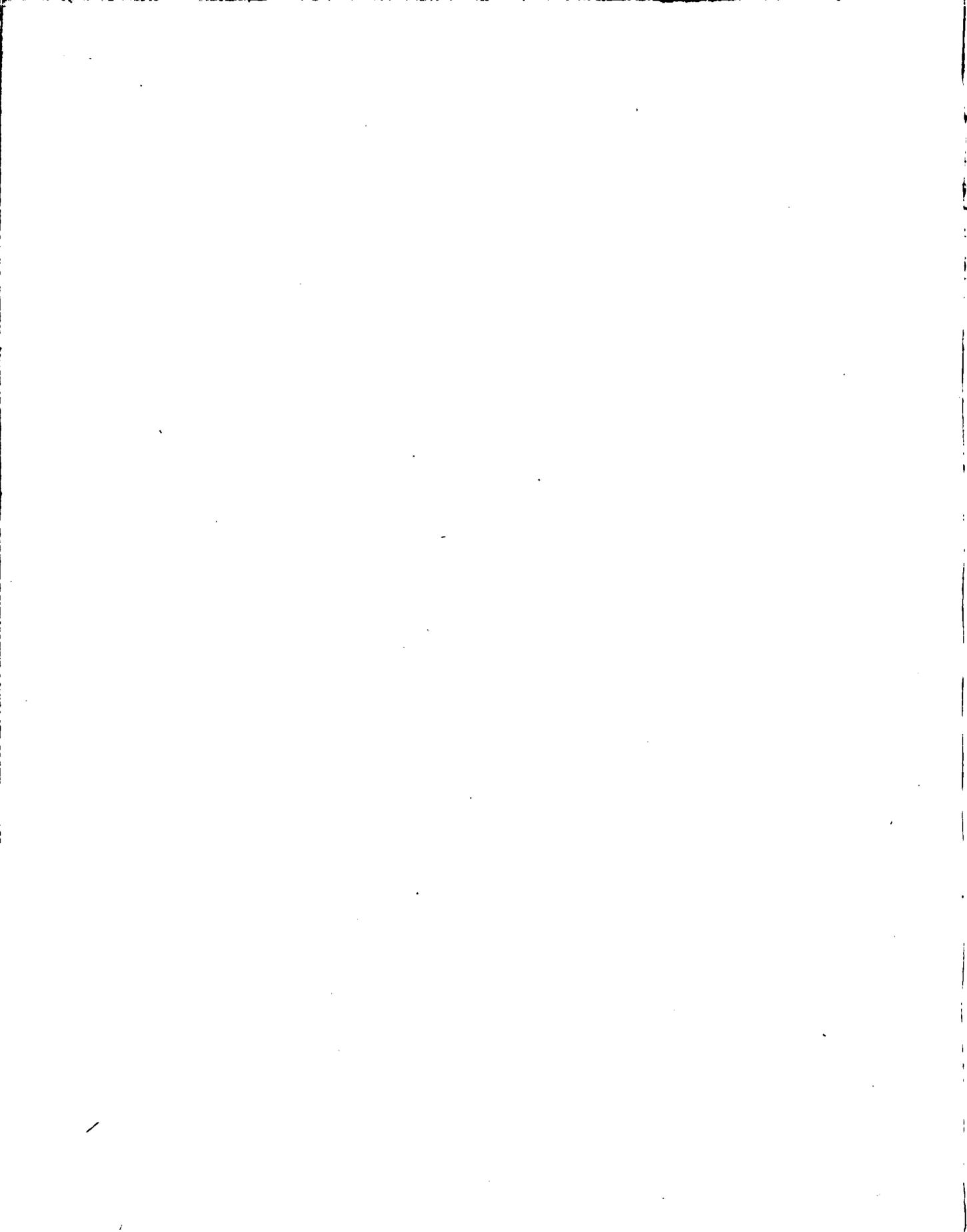
la Préparation & la Démonstration. 2°. Après avoir enoncé la Proposition, on a fait connoître sous le nom d'*Hypothese* les choses qu'on suppose dans cette Proposition, & sous celui de *These* celles qu'on y affirme. 3°. On a rangé dans des Articles séparés, toutes les opérations nécessaires pour faire servir des vérités connues à la preuve d'une vérité inconnue. 4°. On s'est particulièrement attaché à suivre, dans la Démonstration, la méthode qu'on s'étoit prescrite, c'est-à-dire, qu'on a eu soin de faire connoître, comme il est dit dans le *Projet*, par des citations de divers fondemens de chaque Proposition relative à la figure, laquelle est la *Mineure* de l'argument. Une Citation marginale rappelle aussi la vérité déjà démontrée, qui en est la *Majeure*. En un mot on n'a rien négligé pour fixer l'attention des Commençans, pour leur faire connoître la chaîne des raisonnemens Géométriques & pour leur apprendre à en suivre le fil.

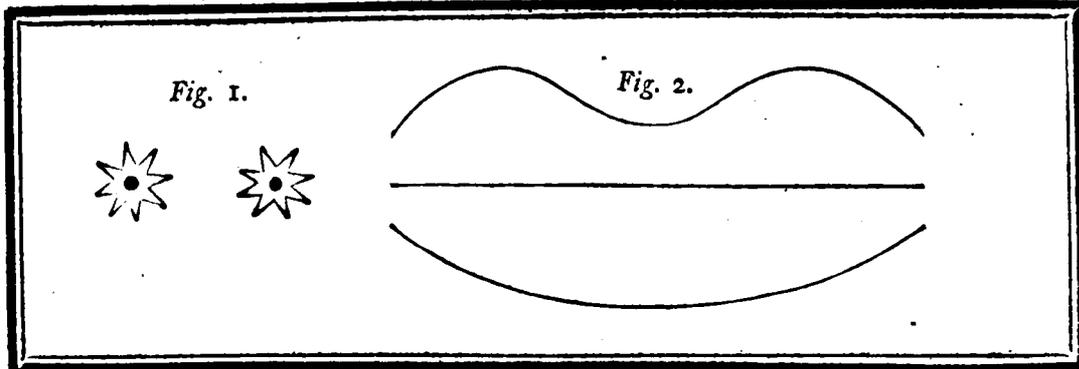
5°. Les Géometres modernes se servent ordinairement des parties aliquotes dans leurs Démonstrations touchant les raisons & proportions des grandeurs en général. Comme cette méthode leur paroît plus facile que celle des equimultiples, ils sont surpris qu'EUCLIDE, ce fameux Géometre, ait eu recours, dans les Démonstrations de la plûpart de ses Livres, à ces equimultiples, au lieu d'avoir fait usage des parties aliquotes. On explique fort au long, dans les Définitions du cinquieme Livre, les raisons qui l'ont engagé à en agir ainsi.

6°. On découvre, dans un Appendice que Mr. *Koenig* y a joint, la méthode de trouver les Logarithmes par le seul moïen des proportions établies & démontrées dans le cinquieme Livre.

7°. La beauté de l'impression, l'ordonnance & la régularité des figures & l'attention qu'on a eue de prévenir jusqu'aux moindres petites fautes soit dans les calculs, soit dans les Lettres, soit dans les chiffres, soit dans les citations marginales &c. relevent encore le mérite de cette Edition qui ne peut manquer d'être favorablement reçue du Public.

LES
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
LIVRE PREMIER.





DEFINITIONS.

I.

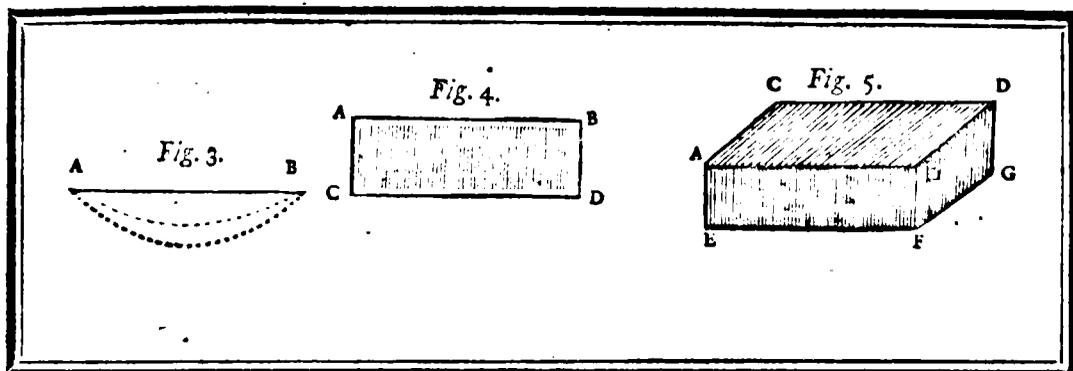
LE Point est une marque sans parties. Fig. 1.

Dans cette définition, aussi bien que dans la seconde & la cinquième, Euclide explique simplement la manière de concevoir les premiers objets de la Géométrie, le point, la ligne, & la surface; il ne démontre pas qu'il y ait de tels objets dans la classe des êtres réels. Ces notions, quoique très utiles en Géométrie, ne sont que des abstractions, qu'il faut éviter de réaliser, en se les représentant comme ayant une existence effective hors de l'esprit, où elles ont pris naissance. Il n'existe pas de points mathématiques dans la nature, (du moins ce qu'Euclide en dit ne le prouve pas); mais il existe des choses étendues, qu'on est en droit de traiter comme de simples marques non-étendues, toutes les fois qu'on ne veut pas les considérer comme ayant des parties, mais simplement comme limites de quelque autre étendue. Ainsi, lorsqu'il est question de mesurer la distance de deux astres, l'Astronome procède comme si ces astres n'étoient que des points sans parties: & il a raison; puisqu'il ne veut point connoître leur étendue, mais celle de la distance qui les sépare, & dont il les envisage comme les termes. Il en est de même des autres notions de cette espèce. On se représente sous l'image d'une ligne, ou bien d'une longueur sans largeur, toute étendue dont la seule longueur nous intéresse, quelle que puisse être sa largeur & sa profondeur, ou ses autres qualités. L'imagination, toujours disposée à transformer en réalités ce qui n'en a point, forme de ces abstractions une classe d'êtres qui paroissent avoir de l'existence hors de l'entendement. Il est très permis au Géomètre d'adopter ces êtres, entant qu'ils peuvent lui servir à faire entendre facilement ce qu'il veut proposer sur les différentes manières d'envisager l'étendue; mais il ne lui est nullement permis de se faire illusion sur leur origine & leur véritable usage.

II.

La Ligne est une longueur sans largeur. Fig. 2.

A



D E F I N I T I O N S .

I I I .

LEs Extrémités de la Ligne font des points (A, B,). Fig. 3.

I V .

La Ligne Droite est celle qui est également située entre ses extrémités (A, B,). Fig. 3.

Cette définition est imparfaite, puisqu'elle n'offre aucune marque essentielle de la ligne droite; aussi Euclide n'en a-t'il rien pu tirer; elle ne se trouve plus citée dans le corps de l'ouvrage. Il est obligé d'avoir recours à d'autres principes (par exemp. à l'axiome 12.), toutes les fois qu'il a besoin d'employer des vérités qui dépendent d'une définition parfaite de la ligne droite.

V .

La Superficie, ou Surface, est une étendue ayant de la longueur & de la largeur sans profondeur. Fig. 4.

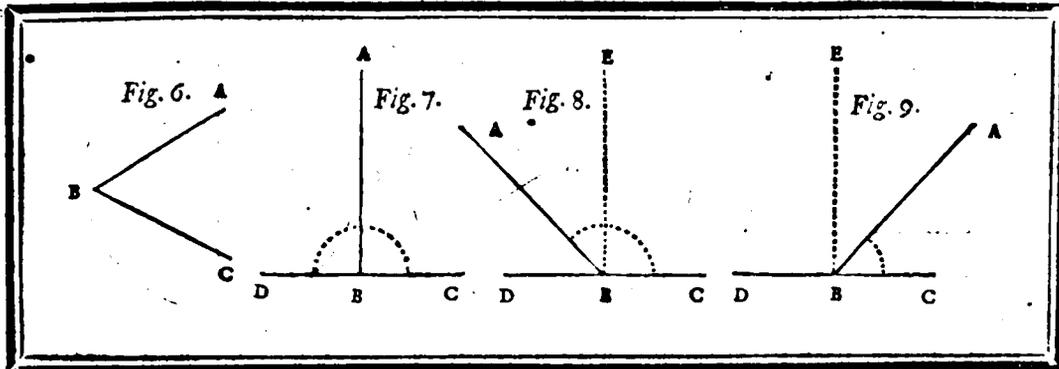
V I .

Les Extrémités de la Superficie font des lignes (AB, CD, AC, BD,). Fig. 4.

V I I .

On nomme Superficie Plane, ou simplement un Plan (AD), celle qui est également située entre ses extrémités. (AB, CD, AC, BD,). Fig. 5.

Cette définition est encore dans le cas de la quatrième.



D E F I N I T I O N S.

V I I I.

L'Angle Plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes (AB, BC,) qui se rencontrent, & qui se trouvent situées dans un même plan. Fig. 6.

I X.

L'Angle est nommé *Rediligne*, si les lignes, entre lesquelles il est compris, sont droites. Fig. 6.

X.

Quand une ligne droite (AB), tombant sur une autre ligne droite (CD), fait les angles contigus (ABD, ABC) égaux entr'eux, ces angles sont appelés *Angles Droits*. La ligne (AB), qui tombe de cette manière sur l'autre (CD), est appelée *Perpendiculaire*. Fig. 7.

X I.

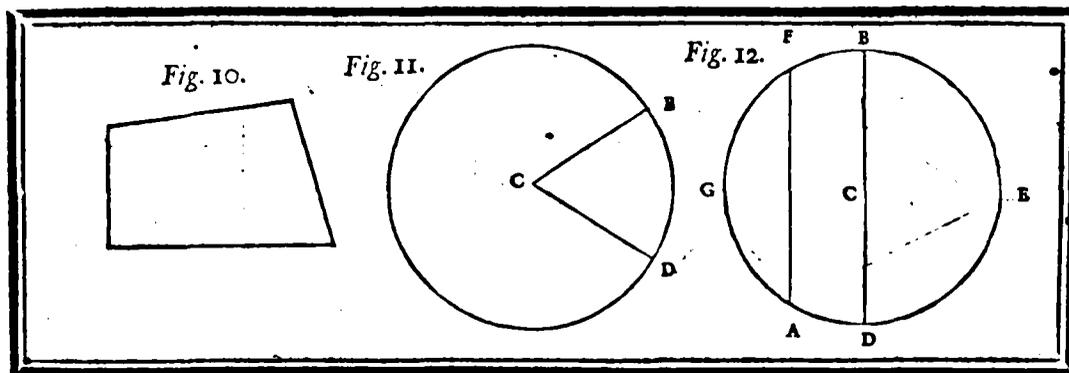
L'Angle *Obtus* (ABC) est un angle plus grand qu'un angle droit (EBC). Fig. 8.

X I I.

L'Angle *Aigu* (ABC) est un angle plus petit qu'un angle droit (EBC). Fig. 9.

X I I I.

On nomme *Terme* l'extrémité de quelque étendue.



D E F I N I T I O N S.

XIV.

Une *Figure* est une étendue limitée d'un ou de plusieurs termes. *Fig. 10.*

XV.

Le *Cercle* est une figure plane terminée par une seule ligne, ayant la propriété que toutes les lignes droites (CB, CD,) tirées d'un même point (C) à cette seule ligne, nommée *Circonférence*, sont égales entr'elles. *Fig. 11.*

XVI.

On nomme ce point (C) *Centre*, & les droites (CB, CD,) tirées du centre à la circonférence, des *Rayons*. *Fig. 11.*

XVII.

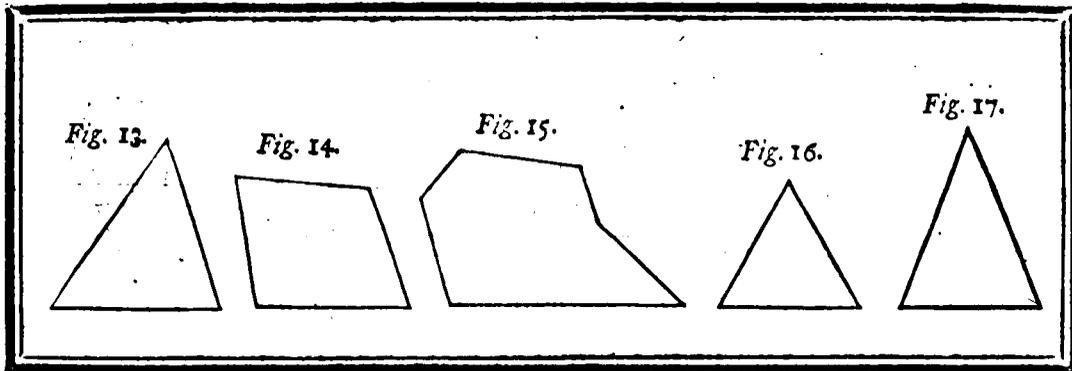
On nomme *Diamètre* du cercle toute droite (DB) tirée par le centre, & terminée à la circonférence de part & d'autre (*Fig. 12*). Un diamètre partage le cercle en deux parties égales.

XVIII.

Le *Demi-cercle* est une figure plane (DEB) terminée par le diamètre (DB) & par la demi-circonférence (DEB), c. a. d. cette portion de la circonférence (DEB) qui aboutit de part & d'autre à ce diamètre (DB). *Fig. 12.*

XIX.

Un *Segment de cercle* est une figure comprise d'une ligne droite (AF), nommée *Corde*, & d'une partie de la circonférence (AGF ou AEF) qu'on appelle *Arc*. *Fig. 12.*



D E F I N I T I O N S.

X X.

ON appelle en général *Figures Rectilignes*, toutes celles qui sont terminées par des lignes droites. *Fig. 13. 14. 15. 16. 17.*

X X I.

Et en particulier *Figures Trilatères*, ou figures à trois côtés, celles qui sont comprises de trois lignes droites. *Fig. 13. 16. 17.*

X X I I.

De même *Figures Quadrilatères*, ou Figures à quatre côtés, toutes celles qui sont comprises de quatre lignes droites. *Fig. 14.*

X X I I I.

Et généralement *Figures Multilatères*, ou figures à plusieurs côtés, toutes celles qui se trouvent terminées par plus de quatre lignes droites. *Fig. 15.*

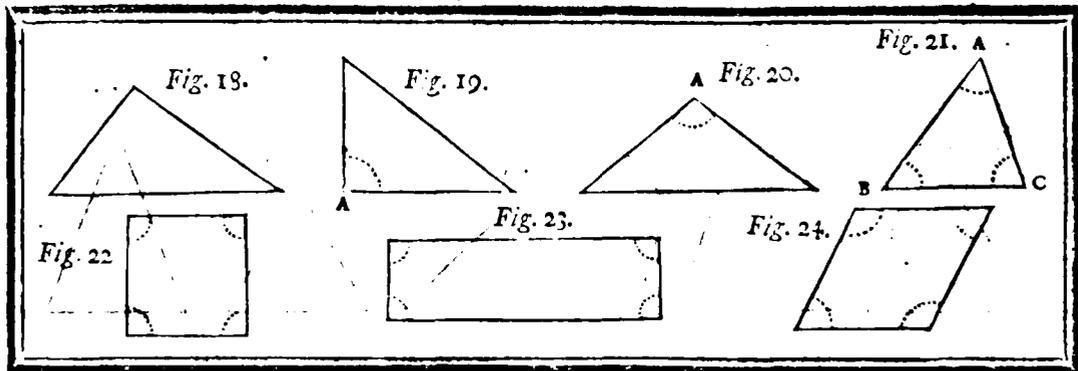
X X I V.

Pour ce qui est des figures trilatères en particulier :

On nomme *Triangle Equilatéral*, celui dont les trois côtés sont égaux entr'eux. *Fig. 16.*

X X V.

Mais s'il n'y a que deux côtés égaux entr'eux, le *Triangle* est *Isocele*. *Fig. 17.*



D E F I N I T I O N S .

X X V I .

ET lorsque les trois côtés font inégaux entr'eux , le *Triangle* est *Scalene*. Fig. 18.

X X V I I .

Pareillement ; parmi ces mêmes figures trilatères :

On nomme *Triangle Rectangle* , un Triangle qui a un angle droit. Fig. 19.

X X V I I I .

Et *Triangle Amblygone* , ou *Obtus-angle* , un Triangle qui a un angle obtus (A). Fig. 20.

X X I X .

Enfin , on appelle *Triangle Oxygone* , ou *Acutangle* , un Triangle qui a les trois angles aigus (A, B, C,). Fig. 21.

X X X .

Dé la même maniere dans l'espece des figures quadrilatères :

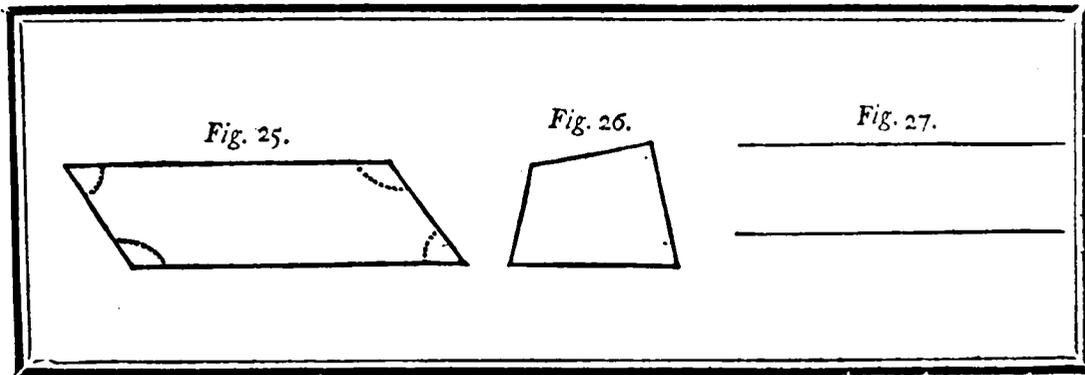
On nomme *Quarré* , celle qui est quadrilatère , équilatérale & rectangulaire. Fig. 22.

X X X I .

Et on entend par *Rectangle* , une figure quadrilatère , rectangulaire , non-équilatérale. Fig. 23.

X X X I I .

Par *Rhombe* , une figure quadrilatère , équilatérale , non-rectangulaire. Fig. 24.



D E F I N I T I O N S .

X X X I I I .

ET par *Rhombôide*, une figure quadrilatère, ayant les angles & les côtés opposés égaux entr'eux, mais ni équilatérale, ni équiangulaire. *Fig. 25.*

X X X I V .

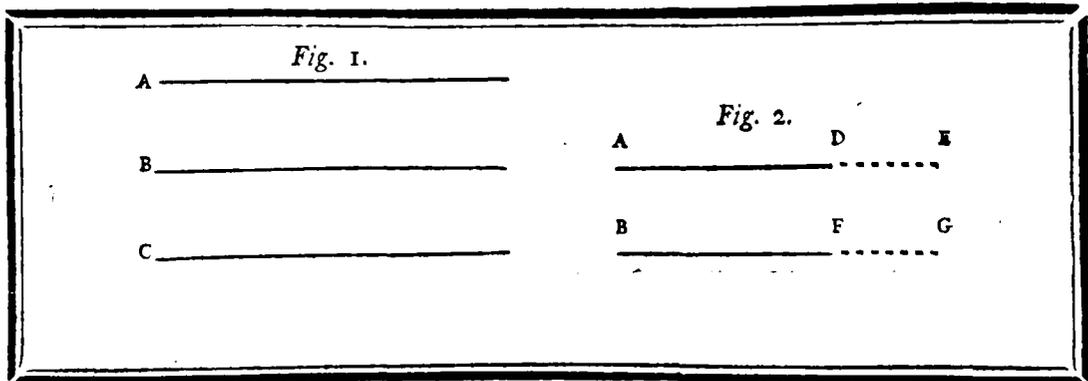
Toute autre Figure quadrilatère est appelée. *Trapeze. Fig. 26.*

X X X V .

Enfin on nomme *Lignes Paralleles*, des lignes droites situées dans un même plan, qui, quoique prolongées à l'infini de part & d'autre, ne se rencontrent jamais. *Fig. 27.*

C'est pour cela qu'on designe par le terme de parallélogramme, toute Figure Quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Fig. 25.





D E M A N D E S

I.

ON demande que d'un point à un autre point on puisse mener une ligne droite.

I I.

Qu'on puisse prolonger une ligne droite quelconque à l'infini.

I I I.

Que d'un centre quelconque & d'un rayon quelconque, on puisse décrire un cercle.

A X I O M E S

O U

N O T I O N S C O M M U N E S.

I.

Deux grandeurs égales à une même troisième sont égales entr'elles.

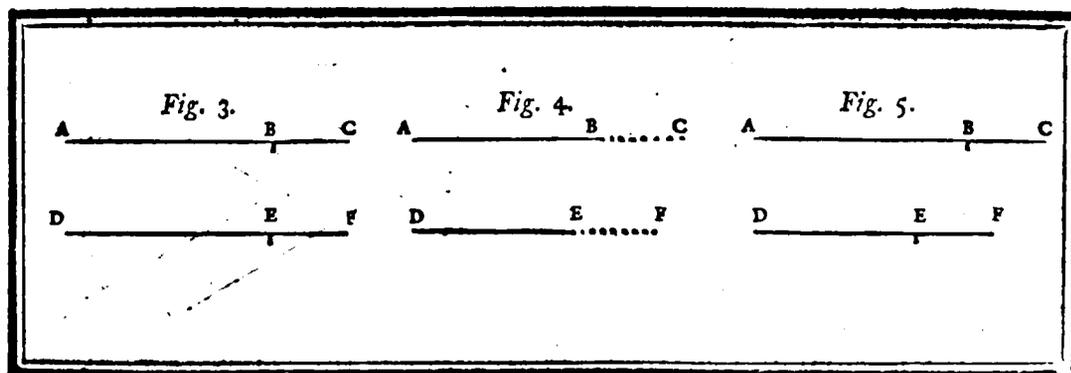
Si la ligne A est égale à la ligne B, & la ligne C égale à la même ligne B; la ligne A sera égale à la ligne C. Fig. 1.

I I.

Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les Touts seront égaux.

Si à la ligne AD on ajoute la partie DE, & qu'à la ligne BF, qui est égale à la ligne AD, on ajoute la partie FG, égale à la partie DE; les Touts AE, BG, seront égaux entr'eux. Fig. 2.

Si



A X I O M E S .

. I I I .

SI de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales; les restes sont égaux.

Si de la ligne entière AC, on retranche la partie BC, & de la ligne entière DF, égale à AC, on retranche la partie EF, égale à BC; les restes AB, DE, seront égaux. Fig. 3.

I V .

Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales; les tous sont inégaux.

Si à la ligne AB, on ajoute la partie BC, & qu'à la ligne DE, plus petite que AB, on ajoute la partie EF, égale à la partie BC; les tous AC, DF, seront inégaux. Fig. 4.

V .

Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales; les restes sont inégaux.

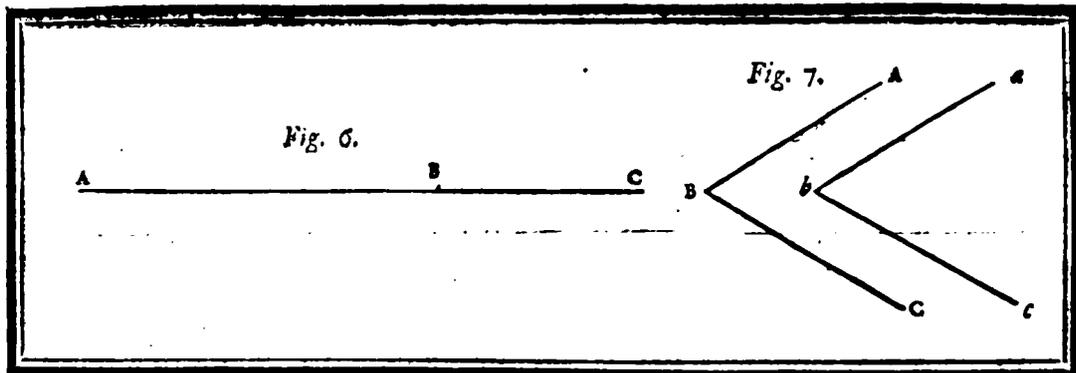
Si de la ligne AC, on retranche la partie BC, & de la ligne DF plus petite que AC, on retranche la partie EF, égale à BC; les restes AB, DE, sont inégaux. Fig. 5.

V I .

Les grandeurs doubles, ou également multiples d'une même grandeur; sont égales entr'elles.

V I I .

Les grandeurs égales à la moitié, ou également sousmultiples d'une même grandeur, sont égales entr'elles.



A X I O M E S

VIII.

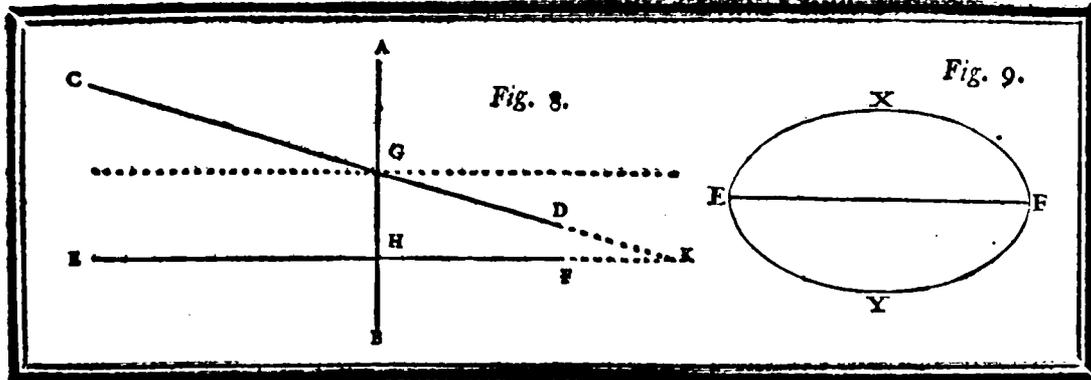
LE Tout est plus grand que sa partie.

Toute la ligne AC est plus grande que sa partie BC . Fig. 6.

IX.

Les grandeurs (c. à. d. les étendues limitées), qui conviennent; sont égales & semblables. Et réciproquement; les grandeurs égales & semblables conviennent.

Cet axiome est appelé le principe de la congruence; & il tient par une liaison intime au grand principe de la similitude, dont il sera question au commencement du VI Livre. Ces deux principes sont les grandes sources d'invention en Géométrie. Pour ce qui est de la notion de la congruence, elle renferme la notion des termes, & la notion de la possibilité de leur coïncidence. Deux étendues limitées conviennent, entant que leurs limites peuvent coïncider parfaitement; entant qu'elles peuvent être renfermées dans les mêmes bornes. Euclide regarde le principe de la congruence comme une notion commune: il y est autorisé par l'usage où tous les hommes sont, d'examiner l'égalité des choses qui doivent avoir cette propriété, en les ajustant les unes sur les autres, ou en les renfermant entre les mêmes bornes, de manière que l'œil puisse juger de la coïncidence de leurs limites. On auroit tort de s'imaginer, qu'une telle maxime ne peut conduire qu'à une pratique de tâtonnement, incompatible avec la précision de la Géométrie. Euclide fait faire de cette maxime un principe très scientifique. Il ne suppose sur la congruence, qu'un fort petit nombre de vérités simples, desquelles il démontre rigoureusement, les vérités plus composées qui en dépendent. Voici ces vérités simples.



A X I O M E S.

- I. **T**ous les points conviennent.
2. Les lignes droites égales entr'elles conviennent. Et réciproquement; les lignes droites dont les extrémités conviennent; sont égales.
3. Si dans deux angles égaux ($\angle ABC, \angle abc,$) les sommets, ($B \& b,$) conviennent, & une des jambes (BA) à une des jambes (ba); l'autre jambe (BC) conviendra aussi à l'autre jambe (bc). *Item*, tous les angles dont les jambes conviennent; sont égaux, Fig. 7.

Euclide n'a pas énoncé séparément, ces axiomes particuliers subordonnés à l'axiome général, mais il n'en fait pas moins usage; comme il est aisé de s'en convaincre par l'analyse de plusieurs de ses démonstrations.

X.

Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

X I.

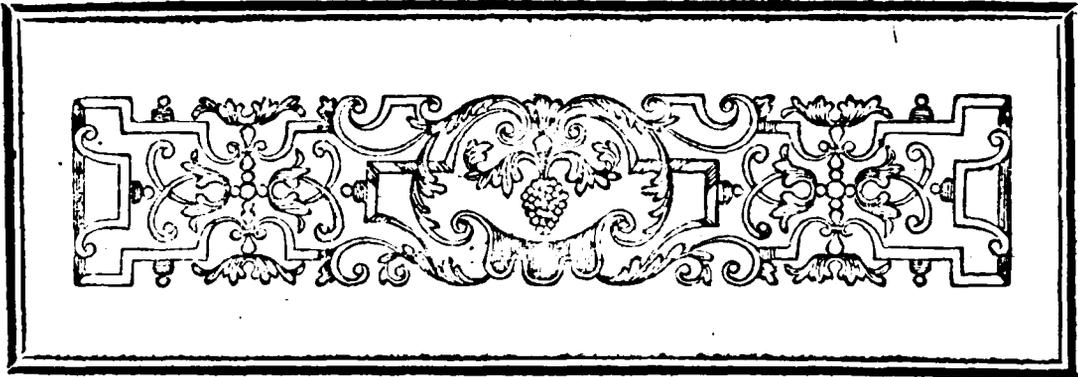
Si une ligne droite (AB) coupe deux autres lignes droites ($CD, EF,$) situées sur un même plan, en sorte qu'elle fasse les angles intérieurs ($\angle DGH, \angle FHG,$) du même côté, moindres que deux droits; ces deux lignes (CD, EF) prolongées à l'infini se rencontreront du côté (K), où les deux angles sont moindres que deux droits. Fig. 8.

Cette vérité n'est pas assez simple, pour pouvoir être reçue au nombre des axiomes. Elle est une suite de la XXVII proposition du premier Livre; ce n'est que là où elle pourra être établie convenablement.

X II.

Il est impossible, que deux lignes droites puissent renfermer un espace.

Si les deux lignes EF & EXF renferment un espace, ces deux lignes ne peuvent être toutes les deux des lignes droites, il faut absolument que l'une du moins comme EXF soit un ligne courbe.



EXPLICATION DES SIGNES.

⊥ Perpendiculaire

< Plus grand que

> Plus petit que.

+ Plus

— Moins

∨ Angle

∟ Angle droit

△ Triangle

= Egal

□ Quarré

⊙ Cercle

○ Circonférence

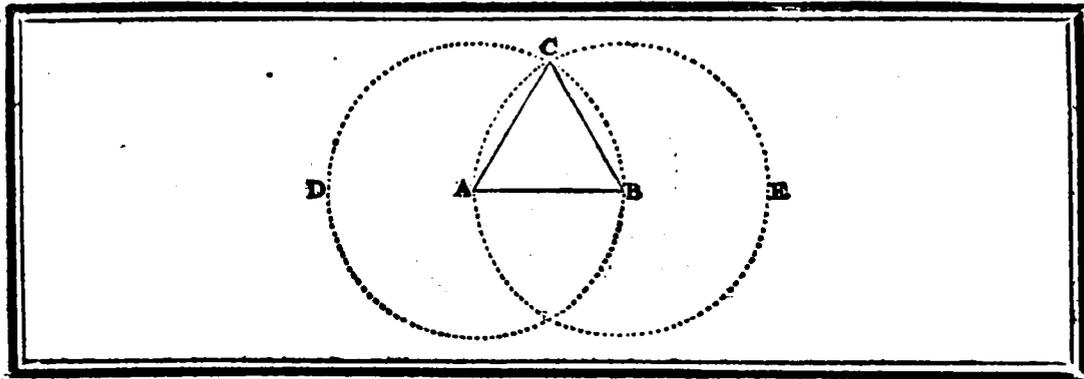
A B R E V I A T I O N S.

Plle. Parallele.

Pgr. Parallélogramme.

Rgle. Rectangle.





PROPOSITION I. PROBLEME I.
Sur une droite donnée & terminée (AB); construire un triangle équilatéral (ABC).

DONNEE

La droite terminée AB.

CHERCHEE.

La construction d'un Δ équilatéral sur la droite terminée AB.

Résolution.

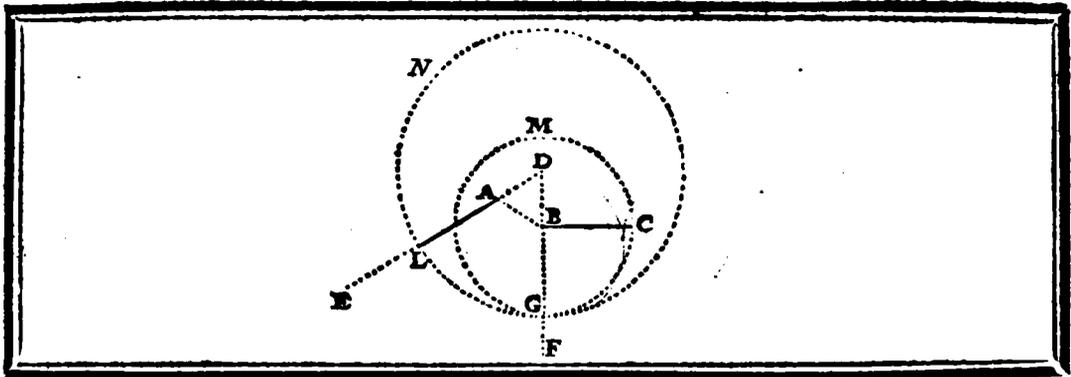
- | | |
|--|---------|
| 1. Du point A comme centre & du rayon AB decrivez le cercle BCD: | Dem. 3. |
| 2. Du point B comme centre & du rayon BA decrivez le cercle ACE. | Dem. 3. |
| 3. Marquez le point d'intersection C. | |
| 4. Du point A au point C tirez la droite AC. | Dem. 1. |
| 5. Du point B au point C tirez la droite BC. | Dem. 1. |

DEMONSTRATION.

Puisque le point A est le centre du \odot BCD (*Ref. 1.*), & que les lignes AB, AC sont tirées du centre A à la \odot BCD (*Ref. 4.*).

- | | |
|--|--------------|
| 1. Ces deux lignes AB, AC sont des rayons d'un même \odot . | D. 16. L. 1. |
| 2. Par conséquent, la ligne AC est = à la ligne AB. | D. 15. L. 1. |
| De même, puisque le point B est le centre du \odot ACE (<i>Ref. 2.</i>), & que les lignes BA, BC, sont tirées du centre B à la \odot ACE (<i>Ref. 5.</i>). | |
| 3. Ces deux lignes sont encore des rayons d'un même cercle ACE. | D. 16. L. 1. |
| 4. Partant, la ligne BC est aussi = à la même ligne AB. | D. 15. L. 1. |
| 5. Les lignes AC, BC sont donc = à une même troisième AB. (<i>Arg. 2. & 4.</i>) | |
| Or si deux grandeurs sont égales à une même troisième elles sont égales entr'elles. | Ax. 1. |
| 6. La ligne AC est donc = à la ligne BC. | |
| Mais chacune de ces deux lignes = entr'elles (<i>Arg. 6.</i>) est aussi = à la ligne AB, (<i>Arg. 5.</i>) | |
| 7. Donc les trois lignes AB, BC, AC, qui forment les trois cotés du Δ ABC, sont toutes les trois = entr'elles. | |
| 8. Partant, le Δ ABC construit sur la droite donnée & terminée AB, est un triangle équilatéral. | D. 24. L. 1. |

C. Q. F. F.



D PROPOSITION II. PROBLEME II.
 Un point donné (A); mener une droite (AL), égale à une autre droite donnée (BC).

DONNEES

1. Le Point A.
2. La droite BC.

CHERCHEE.
 $AL = BC.$

Résolution.

1. Du point A au point B tirez la droite AB.
2. Sur cette droite AB construisez le Δ équilatéral ADB.
3. Prolongez à l'infini les côtés DA & DB de ce Δ .
4. Du point B comme centre, & de la droite BC comme rayon décrivez le \odot CGM.
5. Item; du point D comme centre, & de la droite DG comme rayon décrivez le \odot GLN, qui coupe la droite prolongée DA quelque part en L.

Dem. 1.
 P. 1. L. 1.
 Dem. 2.
 Dem. 3.
 Dem. 3.

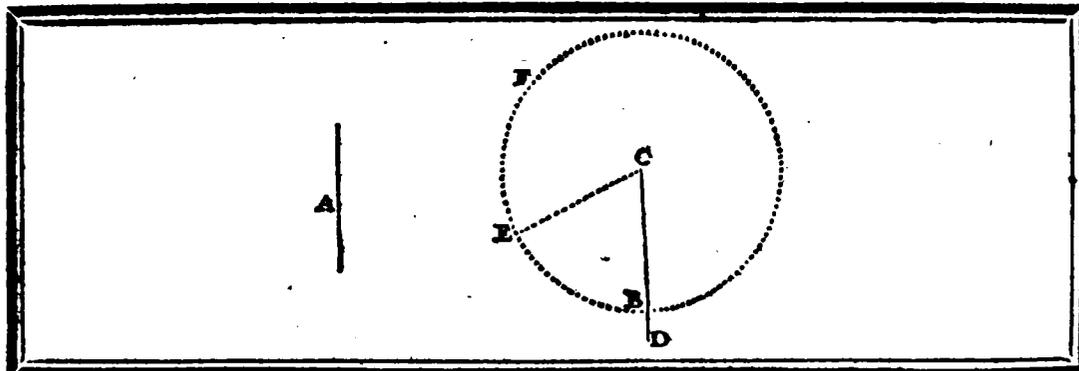
DEMONSTRATION.

Puisque les lignes BC & BG sont menées du centre B à la \odot CGM. (Ref. 4.)

1. Ces deux lignes sont des rayons d'un même \odot CGM.
2. Par conséquent, $BC = BG$.
3. De même; les lignes DG & DL étant tirées du centre D à la \odot GLN (Ref. 5.)
4. Ces lignes sont aussi des rayons d'un même \odot GLN.
4. Et par la même raison, $DG = DL$.
5. Or les lignes DA & DB, étant des côtés d'un Δ équilatéral ADB (Ref. 2.)
5. La ligne DA est $=$ à la ligne DB.
 Retranchant donc des lignes égales DG, DL (Arg. 4.), leurs parties égales DB, DA (Arg. 5.)
6. La ligne restante AL est $=$ à la ligne restante BG.
 Puisque la ligne AL est donc $=$ à la ligne BG (Arg. 6.) & que la ligne BC est aussi $=$ à la même ligne BG (Arg. 2.)
7. La ligne AL est $=$ à la ligne BC.
 Mais il est manifeste, que cette ligne AL, est une ligne menée du point donné A (Ref. 3.)
8. Partant on a mené du point donné A, une droite AL, égale à la droite donnée BC.

D. 16. L. 1.
 D. 15. L. 1.
 D. 16. L. 1.
 D. 15. L. 1.
 D. 24. L. 1.
 Ax. 3.
 Ax. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION III. PROBLEME III.

Deux droites inégales (A & CD) étant données; retrancher de la plus grande (CD ,) une partie (CB) égale à la plus petite A .

DONNEE.

La ligne CD $>$ ligne A .

CHERCHEE.

De CD retrancher $CB = A$.

Résolution.

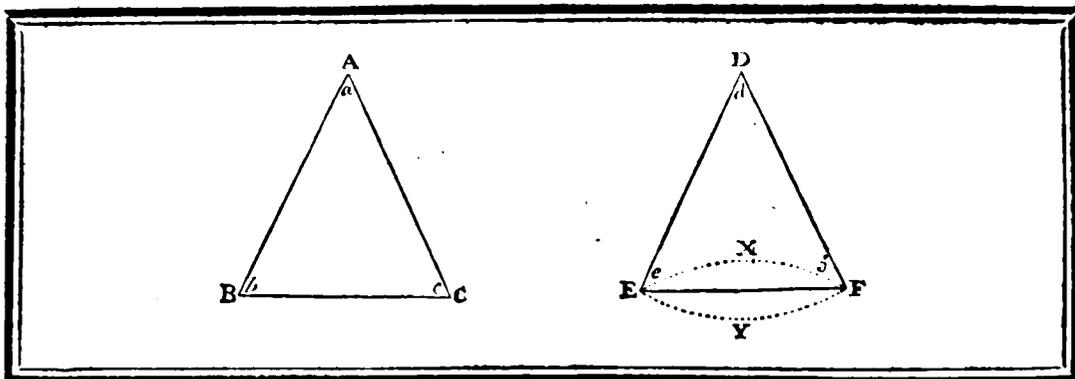
1. Du point C menez la droite $CE =$ à la donnée A . P. 2. L. 1.
2. Du centre C & du rayon CE décrivez le \odot CEB ; qui coupe Dem. 3.
la plus grande CD en B .

DEMONSTRATION.

- L**es droites CB CE , étant menées du centre C à la \odot BEF (Ref. 2.)
1. Elles sont des rayons, d'un même \odot BEF . D. 16. L. 1.
 2. Partant, $CB = CE$. D. 15. L. 1.
Or la droite A étant $=$ à la droite CE (Ref. 1.); & la droite CB étant $=$ à la même droite CE (Arg. 2.)
 3. La droite A est $=$ à la droite CB . Ax. 1.
Mais la droite CB , fait partie de la droite entière CD .
 4. Partant, on a retranché de la plus grande CD , une partie $CB =$ à la plus petite donnée A .

C. Q. F. F.





PROPOSITION IV. THEOREME. I.

SI deux triangles (BAC, EDF), ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun; (c. à. d. $AB = DE$, & $AC = DF$), & de plus, l'angle compris (a) égal à l'angle compris (d): ils auront aussi la base (BC), égale à la base (EF); & les deux autres angles (b & c) égaux aux deux autres angles (e & f), chacun à chacun de ceux qui se trouvent opposés à des côtés égaux; & le triangle entier (BAC) fera égal au triangle entier (EDF).

HYPOTHESE.

- I. $AB = DE$.
- II. $AC = DF$.
- III. $\sphericalangle a = \sphericalangle d$.

THESE.

- I. $BC = EF$.
- II. $\sphericalangle b = \sphericalangle e$ & $\sphericalangle c = \sphericalangle f$.
- III. $\triangle BAC = \triangle EDF$.

Préparation.

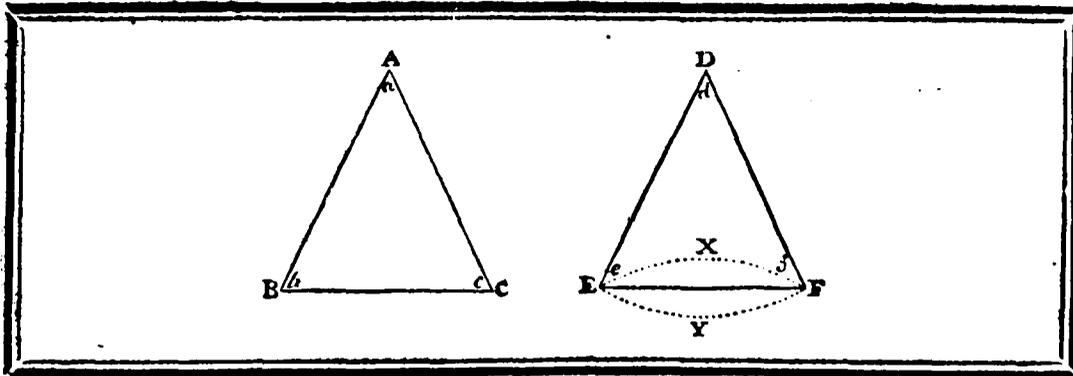
- Imaginez que le $\triangle BAC$ soit posé sur le $\triangle EDF$; de manière que
1. Le sommet A tombe sur le sommet D.
 2. Et que le côté AB tombe sur le côté DE.

DEMONSTRATION.

Puisque la ligne AB est = à la ligne DE (Hyp. 1), que le point A tombe sur le point D (Prep. 1), & la ligne AB sur la ligne DE (Prep. 2).

1. Le point B tombera nécessairement sur le point E. Ax. 9.
De même; puisque $\sphericalangle a = \sphericalangle d$ (Hyp. 3), que le sommet A tombe sur le sommet D (Prep. 1) & la jambe AB sur la jambe DE (Prep. 2.)
2. La jambe AC tombera nécessairement sur la jambe DF. Ax. 9.
De plus, à cause que cette jambe AC est = à la jambe DF.
3. Il faut, que le point C tombe aussi sur le point F. Ax. 9.
4. C'est pourquoi les extrémités B & C de la base BC, conviennent aux extrémités E & F de la base EF.
5. Et par conséquent, la base entière BC convient à la base entière EF. Car si la base BC ne convenoit pas à la base EF, nonobstant que les extrémités B & C de la base BC, conviennent aux extrémités E & F de la base EF; deux lignes droites renferméroient un espace (EXF, ou EYF); ce qui est impossible. Ax. 12.
Puis donc que la base BC convient à la base EF. (Arg. 5.)

6. Cette



6. Cette base BC fera \equiv à la base EF.

C. Q. F. D. I.

Ax. 9.

Derechef, la base BC convenant à la base EF (*Arg. 5*), & les deux autres côtés AB, AC du Δ BAC convenant aux deux autres côtés DE, DF du Δ EDF (*Prep. 2, Arg. 2.*)

7. Ces deux Δ BAC, EDF font nécessairement égaux entr'eux.

C. Q. F. D. III.

Ax. 9.

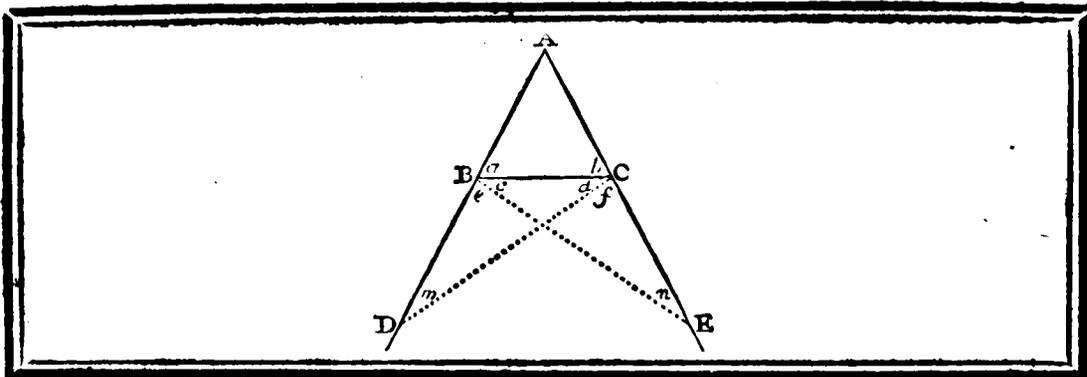
Enfin, puisque les $\sphericalangle b$ & $\sphericalangle e$ opposés aux côtés égaux AC, DF (*Hyp 2*); Item, les $\sphericalangle c$ & $\sphericalangle f$ opposés aux côtés égaux AB, DE (*Hyp. 1*), conviennent & par leurs sommets & par leurs jambes. (*Arg. 1. 2. 3. 5.*)

8. Il s'en suit, que les $\sphericalangle b$ & $\sphericalangle e$ de même que les $\sphericalangle c$ & $\sphericalangle f$, opposés à des côtés égaux, sont égaux entr'eux.

Ax. 9.

C. Q. F. D. II.





PROPOSITION V. THEOREME. II.
Dans tout triangle isocèle (BAC) : les angles (a & b) sur la base (BC) sont égaux entr'eux, & les côtés égaux (AB, AC) étant prolongés : les angles ($c + e$, & $d + f$) sous la base (BC) sont aussi égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. Le Δ BAC est isocèle.
- II. AB & AC sont prolongés indéfiniment.

THESE.

- I. $\sphericalangle a$ & $\sphericalangle b$ sur la base sont = entr'eux.
- II. $\sphericalangle c + e$ & $\sphericalangle d + f$ sous la base sont aussi = entr'eux.

Préparation.

1. Sur le côté prolongé AB prenez un point quelconque D.
2. Faites AE = AD.
3. Par les points B & E, item C & D tirez les droites BE, CD.

Prop. 3. L. I.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le Δ DAC les deux côtés AD, AC sont égaux aux deux côtés AE, AB du Δ EAB chacun à chacun (Prep. 2. Hyp. I); & que $\sphericalangle A$ compris entre ces côtés égaux est commun aux deux Δ .

1. La base DC est = à la base BE; & les deux autres $\sphericalangle m$ & $b + d$ du Δ DAC, sont égaux aux deux autres $\sphericalangle n$ & $a + c$ du Δ EAB chacun à chacun de ceux qui sont opposés à des côtés égaux.

Prop. 4. L. I.

De plus la ligne entière AD étant = à la ligne entière AE (Prep. 2), & la partie AB = à la partie AC (Hyp. 1.); en retranchant $\sphericalangle c$.

2. Les lignes restantes BD, CE sont aussi = entr'elles.
 Recherchez, puisque dans le Δ DBC les côtés DB, DC sont égaux aux côtés CE, EB du Δ ECB chacun à chacun (Arg. 2. \sphericalangle 1.) & qu'outre cela \sphericalangle compris m est égal à \sphericalangle compris n (Arg. 1.).

Ax. 3.

3. Les deux autres \sphericalangle sont = aux deux autres \sphericalangle opposés à des côtés égaux, chacun à chacun c. à d. $\sphericalangle c + e = \sphericalangle d + f$ & $\sphericalangle d = \sphericalangle c$.

Prop. 4. L. I.

Les \sphericalangle entiers $a + c$ & $b + d$ étant donc = entr'eux, & leurs parties $\sphericalangle c$ & $\sphericalangle d$ l'étant de même (Arg. 1. \sphericalangle 3.); en retranchant $\sphericalangle c$.

4. Les \sphericalangle restants a & b sont aussi = entr'eux.

Ax. 3.

Mais ces \sphericalangle sont les deux \sphericalangle sur la base BC.

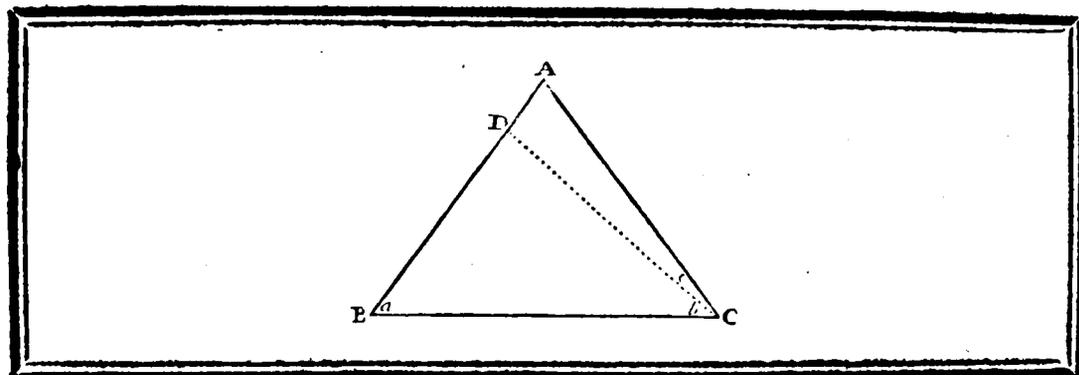
5. Donc $\sphericalangle a$ & $\sphericalangle b$ sur la base BC sont = entr'eux.

C. Q. F. D. I.

De plus, puisque $\sphericalangle e + c = \sphericalangle d + f$ (Arg. 3.) sont les \sphericalangle sous la base.

6. Il est clair que les $\sphericalangle e + c$ & $\sphericalangle d + f$ sous la base sont aussi = entr'eux.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION VI. THEOREME III.
SI un triangle (ABC) a deux angles (a & $b + c$) égaux entr'eux : les côtés opposés à ces angles égaux , seront aussi égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

Dans le ΔACB , $\forall a = \forall b + c$.

THESE.

Le côté CA = au côté BA.

DEMONSTRATION.

Si non ,

1. Les côtés CA, BA seront nécessairement inégaux.
2. Par conséquent l'un, comme BA, fera $>$ l'autre CA.

N. C.
 N. C.

Préparation.

1. Retranchez donc du $>$ côté BA, une partie égale au $<$ côté CA. P. 3. L. 1.
2. Menez du point C au point D la droite CD. Dem. 1.

DAns les $\Delta ACB, DBC$ le côté $BD =$ au côté CA (Prep. 1), le côté BC est commun aux deux Δ , & \forall compris $a = \forall$ compris $b + c$ (Hyp.)

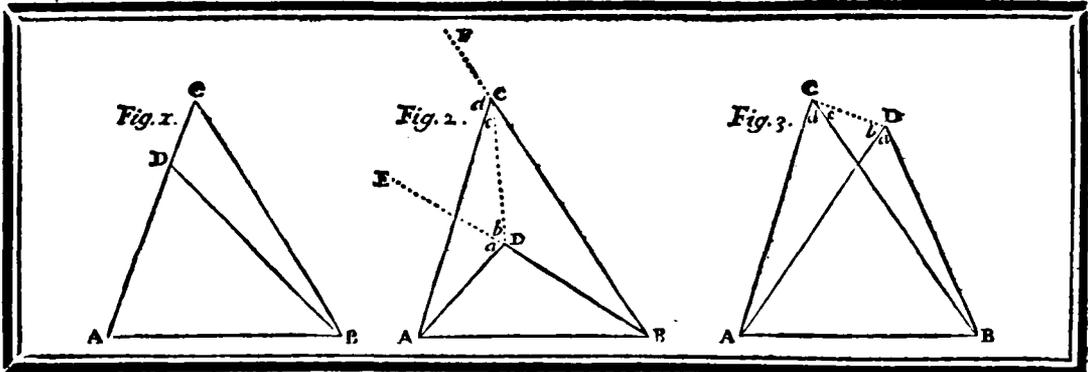
1. Partant deux $\Delta ACB, DBC$ ont deux côtés = à deux côtés chacun à chacun, & \forall compris $a = \forall$ compris $b + c$.
2. C'est pourquoi le ΔACB est = au ΔDBC .
3. Mais le ΔACB étant le tout, & le ΔDBC sa partie.
4. Il s'enfuiroit que le tout seroit = à sa partie.
5. Ce qui est impossible.

P. 4. L. 1.

Ax. 8.

N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. THEOREME IV.

Des extrémités (A & B) d'une ligne droite (AB), desquelles on a mené à un même point (C), deux droites (AC, BC): on ne peut mener à quelqu'autre point (D), situé du même côté de cette ligne, deux autres droites (AD, BD), égales aux deux premières chacune à chacune.

HYPOTHESE.

1. AC, BC, item AD, BD sont des droites;
2. tirées des mêmes points A & B;
3. à deux points differens D & C, situés du même côté par rapport à la ligne AB.

THESE.

Il est impossible que AC soit $= AD$,
& $BC = BD$.

DEMONSTRATION.

Si non.

Il y a du même côté de la ligne AB un point D tel, que AC soit $= AD$, & $BC = BD$. Par conséquent ce point se trouvera

- Cas 1. Ou sur un des côtés AC, ou BC. Fig. 1.
 Cas 2. Ou dans le Δ ACB. Fig. 2.
 Cas 3. Ou hors du Δ ACB. Fig. 3.

CAS. I. Si on suppose le point D sur un des côtés, comme sur le côté AC. Fig. 1.

Puis donc qu'on suppose, que le point D est un point dans AC différent du point C.
 1. La ligne AD est ou $>$ ou $<$ la ligne AC.
 2. Partant il est impossible que AD soit $= AC$.

N. C.

C. Q. F. D.

CAS. II. Si on suppose le point D au dedans du Δ ACB. Fig. 2.

Préparation.

1. Du point D au point C tirez la droite DC.
2. Prolongez à discrétion BD en E. & BC en F.

Dem. 1.
 Dem. 2.

Puisque AC est supposée = AD.

1. Le $\triangle CAD$ sera un \triangle isoscèle. D. 25. L. 1.
2. Par conséquent les \sphericalangle sur la base $a + b$ & c seront égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
De même BC étant supposée = BD.
3. Le $\triangle CBD$ sera aussi un \triangle isoscèle. D. 25. L. 1.
4. Et à cause de cela les \sphericalangle sous la base, b & $c + d$, seront aussi égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
C'est pourquoi, si on ôte de $\sphericalangle c + d$ sa partie $\sphericalangle d$.
5. $\sphericalangle b$ fera $\sphericalangle \sphericalangle c$. N. C.
Et si au même $\sphericalangle b$, on ajoute ensuite $\sphericalangle a$.
6. \sphericalangle entier $a + b$ fera à plus forte raison $\sphericalangle \sphericalangle c$. N. C.
7. Partant $\sphericalangle a + b$ & $\sphericalangle c$ ne sont point égaux. N. C.
Mais on a démontré qu'en vertu de la supposition de ce cas, $\sphericalangle a + b$ & $\sphericalangle c$ doivent être égaux (*Arg. 2*).
8. D'où il suit que cette supposition ne sçauroit avoir lieu, à moins que ces \sphericalangle ne soient à la fois égaux & inégaux.
9. Ce qui est impossible. N. C.
10. Partant, la supposition, qui fait $AC = AD$ & $BC = BD$, est impossible elle-même.

C. Q. F. D.

CAS III. Si on suppose le point D hors du $\triangle ACB$. *Fig. 3.*

Préparation.

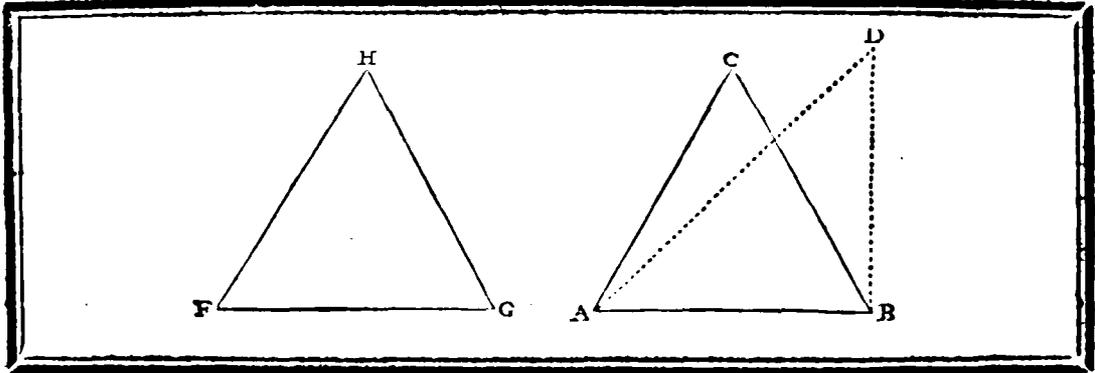
Du point D au point C tirez donc la droite DC.

Dem. 1.

Puisqu'on suppose $AC = AD$

1. Le $\triangle CAD$ sera un \triangle isoscèle. D. 25. L. 1.
2. Par conséquent $\sphericalangle b$ & $\sphericalangle d + c$ sur la base sont égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
Derechef, puisqu'on suppose aussi $BC = BD$;
3. Le $\triangle CBD$ sera aussi un \triangle isoscèle. D. 25. L. 1.
4. Par conséquent $\sphericalangle c$ & $\sphericalangle b + a$ sur la base seront aussi égaux entr'eux. P. 5. L. 1.
Orant donc du dernier de ces $\sphericalangle b + a$ sa partie $\sphericalangle a$.
5. L' $\sphericalangle c$ fera $\sphericalangle \sphericalangle$ restant b . N. C.
Si à ce même $\sphericalangle c$ on ajoute donc $\sphericalangle d$.
6. L' \sphericalangle entier $c + d$ fera à plus forte raison $\sphericalangle \sphericalangle b$. N. C.
7. Partant, $\sphericalangle c + d$ & $\sphericalangle b$ ne sont point égaux entr'eux.
Or, on vient de prouver, qu'en vertu de la supposition de ce cas, $\sphericalangle d + c$ & $\sphericalangle b$ sont égaux entr'eux (*Arg. 2*).
8. D'où il suit encore que cette supposition ne sçauroit avoir lieu, à moins que ces angles ne soient à la fois égaux & inégaux.
9. Ce qui est impossible. N. C.
10. Partant, la supposition, qui fait $AC = AD$ & $BC = BD$ est impossible.

C. Q. F. D.



T R I A N G L E S. **PROPOSITION VIII. THEOREME. V.**
 Tous les triangles, (FHG, ACB), qui ont les trois côtés (FH, HG, GF) égaux aux trois côtés (AC, CB, BA) chacun à chacun : sont égaux entr'eux, & les angles compris par des côtés égaux, sont aussi égaux chacun à chacun.

HYPOTHESE.

- I. $FH = AC$.
- II. $HG = CB$.
- III. $GF = BA$.

THESE.

$$\Delta FHG = \Delta ACB, \text{ et } \begin{cases} \sphericalangle F = \sphericalangle A, \\ \sphericalangle G = \sphericalangle B \\ \sphericalangle H = \sphericalangle C \end{cases}$$

Préparation.

Qu'on s'imagine, que le ΔFHG soit posé sur le ΔACB , enforte

1. Que le point F convienne au point A.
2. Et la base FG à la base AB.

DEMONSTRATION.

PUIS donc que le point F convient au point A (*Prep. 1*) & la ligne FG à la ligne AB (*Prep. 2*), & que ces lignes sont égales (*Hyp. 3*)

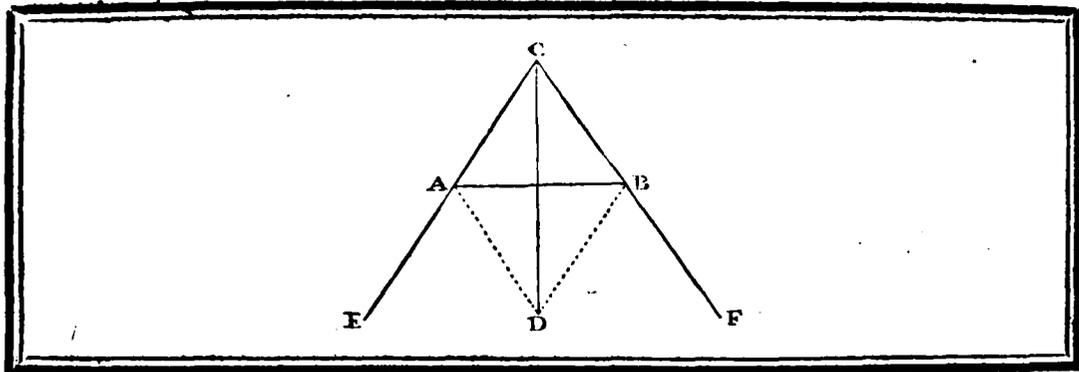
1. Il faut que le point G convienne au point B.
 Les points extrêmes F & G du côté FG, convenant donc aux points extrêmes A & B du côté AB, (*Prep. 1. Arg. 1.*); & les droites FH, GH étant égales aux droites AC, BC, chacune à chacune.
2. Les droites FH, GH, conviendront nécessairement aux droites AC, BC, chacune à chacune.
 Si non; on pourroit tirer des extrémités A & B, d'une ligne AB, à deux points différens C & D, & du même côté, deux droites AC, BC égales à deux autres droites AD, BD chacune à chacune. Ce qui est impossible.
3. Ces côtés conviennent donc.
4. Mais la base FG convenant à la base AB (*Prep. 2.*), le côté FH au côté AC & le côté GH au côté BC (*Arg. 2.*)
5. Il s'ensuit que les ΔACB , FGH sont égaux entr'eux; aussi bien que leurs \sphericalangle compris par des côtés égaux chacun à chacun.

AX. 9.

P. 7. L. 1.

AX. 9.

C. Q. F. D.



UN angle rectiligne (ECF) étant donné; le couper en deux parties égales (ECD , FCD).

DONNE
 \sphericalangle rectiligne ECF .

CHERCHE.
 $\sphericalangle ECD = \sphericalangle FCD$.

Résolution.

1. Prenez CA de longueur arbitraire.
2. Faites $CB = CA$.
3. Du point A au point B tirez la droite AB .
4. Sur la droite AB construisez le Δ équilatéral ADB .
5. Du point C au point D tirez la droite CD .

P. 3. L. 1.
Dem. 1.
P. 1. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

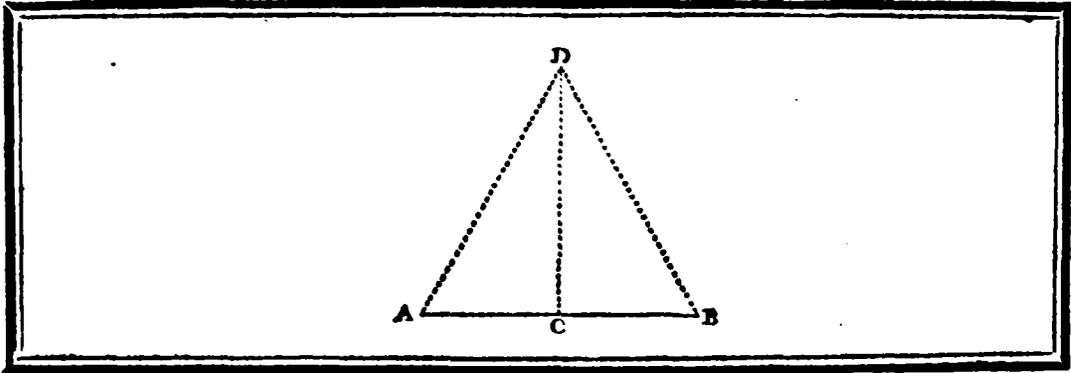
Puisque $AC = CB$ (Ref. 2), $DA = DB$ (Ref. 4), & le côté DC commun aux deux Δ CAD , CBD ;

1. Ces deux Δ ont les trois côtés égaux chacun à chacun.
2. Partant les $\sphericalangle FCD$, ECD , compris par les côtés égaux CA , CD ; & CB , CD sont égaux entr'eux.

P. 8. L. 1.

C. Q. F. F.





C . PROPOSITION X. PROBLEME V.
Couper en deux parties égales, (AC, CB) une ligne donnée & terminée (AB).

DONNEE.

La droite terminée AB

CHERCHER

$AC = BC$.

Résolution.

1. SUR la droite AB construisez le Δ équilatéral ADB.
2. Coupez en deux parties égales \sphericalangle ADB par la droite DC.

P. 1. L. 1.

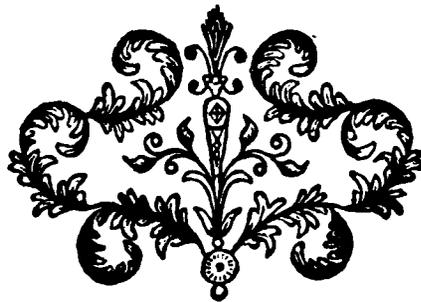
P. 9. L. 1.

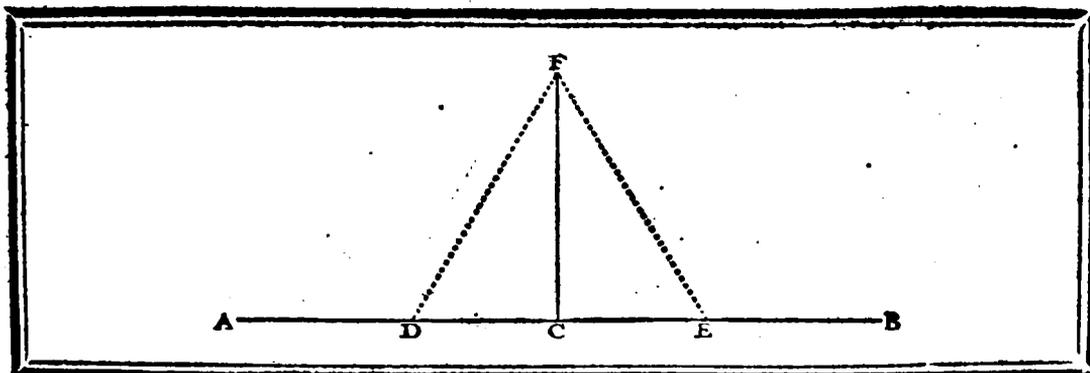
DEMONSTRATION.

Puisque $AD = BD$ (Ref. 1.), que le côté DC est commun aux deux Δ ADC, BDC & \sphericalangle compris ADC = \sphericalangle compris BDC (Ref. 2).
1. Ces deux Δ ADC, BDC, ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun ; & \sphericalangle compris ADC = \sphericalangle compris BDC (Ref. 2).
2. Partant, la base AC = à la base BC.

P. 4. L. 1.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XI. PROBLEME VI.

D'un point quelconque (C), dans une droite indéfinie (AB), élever une perpendiculaire (CF) sur cette droite.

DONNEE

La droite indéfinie AB & le point C dans cette droite.

CHERCHEE.

La droite CF élevée du point C \perp sur AB.*Résolution.*

1. DE part & d'autre du point C, prenez les droites CD, CE = entr'elles.
2. Sur la droite DE construisez le Δ équilatéral DFE.
3. Du point F au point C tirez la droite FC.

Prop. 3. L. 1.

Prop. 1. L. 1.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

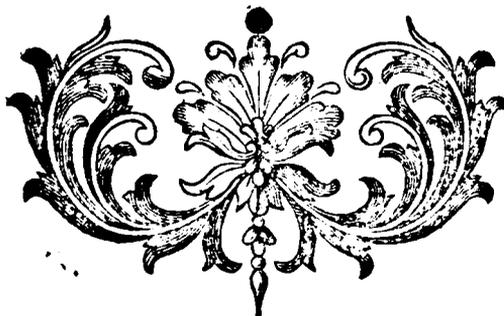
Puisque CD est = à CE (Ref. 1), FD = FE (Ref. 2), & que le côté CF est commun aux deux Δ DFC, EFC.

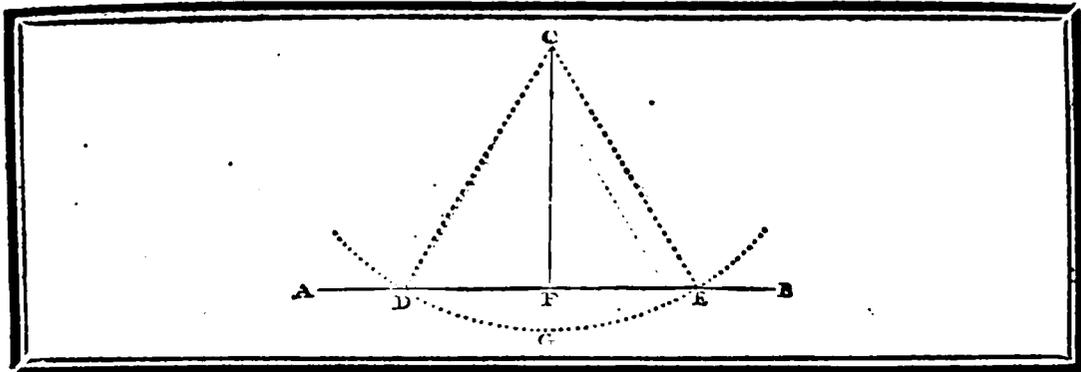
1. Il est évident que ces deux Δ ont les trois côtés égaux aux trois côtés chacun à chacun.
2. Par conséquent, les \sphericalangle contigus FCD, FCE (compris par les côtés égaux FC, CD, item FC, CE) sont égaux entr'eux.
Mais c'est la droite FC qui tombant sur AB, forme ces \sphericalangle contigus = entr'eux.
3. Partant, la droite FC est \perp sur AB.

Prop. 8. L. 1.

Def. 10. L. 1.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XII. PROBLEME VII.
D'un point donné (C), hors d'une ligne droite indéfinie (AB); abaisser sur cette droite une ligne perpendiculaire (CF).

DONNEE

La droite indéfinie AB et
 le point C hors de cette droite.

CHERCHEE.

La droite CF abaissée du point C \perp sur AB.

Résolution.

1. DE l'autre côté de la droite AB, par rapport au point donné C, prenez un point quelconque G.
2. Du point C comme centre, & du rayon CG, décrivez un arc de \odot DGE, qui coupe la ligne indéfinie AB en deux points D & E.
3. Coupez la ligne DE en deux parties égales, au point F.
4. Du point C au point F tirez la droite CF.

Dem. 3.
 P. 10. L. 1.
 Dem. 1.

Préparation.

Du point C aux points D & E tirez les droites CD & CE.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les lignes CD, CE, sont tirées du centre C à la \odot DGE (Ref. 2. & Prep.),

1. Ces lignes sont des rayons d'un même \odot .

D. 16. L. 1.
 D. 15. L. 1.

2. Partant, la ligne CD est \equiv à la ligne CE.

Puis donc que CD est \equiv à CE (Arg. 2), DF = FE (Ref. 3) & que le côté CF est commun aux deux Δ DCF, ECF

3. Ces deux Δ ont les trois côtés égaux aux trois côtés chacun à chacun.

4. Partant, les \sphericalangle CFD, CFE, compris par les côtés égaux FC, FD, & FC, FE sont \equiv entr'eux.

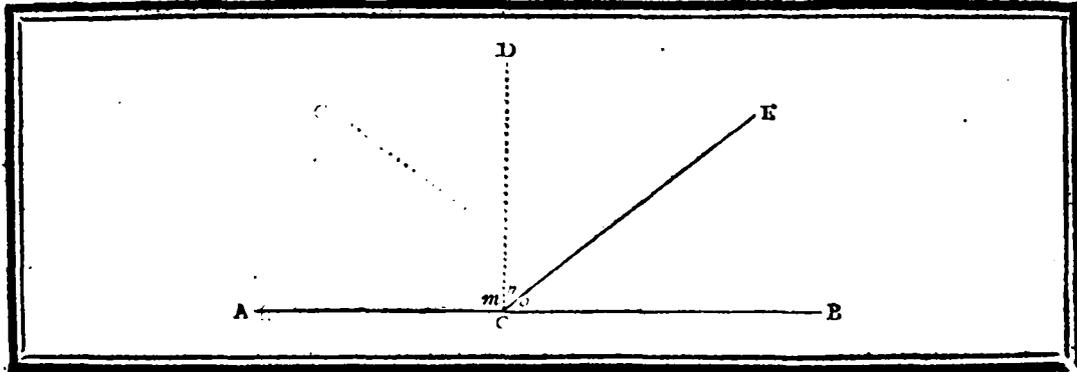
P. 8. L. 1.

Mais ces deux \sphericalangle CFD, CFE \equiv entr'eux (Arg. 4), sont des \sphericalangle contigus formés par la ligne CF qui tombe sur la ligne AB,

5. Partant, chacun de ces deux \sphericalangle CFD, CFE, est un \perp , & la ligne CF est \perp sur la ligne AB.

D. 10. L. 1.

C. Q. F. F.



S **PROPOSITION XIII. THEOREME VI.**
 Une ligne droite (EC) tombe sur une autre ligne droite (AB): elle fait ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

HYPOTHESE

EC est une droite tombant sur AB, au point C.

THESE.

I. Ou chacun des \sphericalangle ACE, ECB est un \perp .
 II. Ou leur somme est \equiv à deux \perp .

SUP. I. Si \sphericalangle ACE est \equiv à \sphericalangle ECB

DEMONSTRATION.

Puisque les angles contigus ACE, ECB, formés par les droites CE & AB sont égaux entr'eux (*Sup*).

1. Il s'ensuit que chacun d'eux est un \perp .

D. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

SUP. II. Si \sphericalangle ACE n'est pas \equiv à \sphericalangle ECB.

Préparation.

Du point de rencontre C élevez sur AB la \perp CD.

P. 11. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque DC est \perp sur AB (*Prep*).

1. Les deux \sphericalangle DCA & DCB sont des \perp .

D. 10. L. 1.

Mais comme \sphericalangle DCB est \equiv aux deux \sphericalangle $n + o$; si on ajoute de part & d'autre \sphericalangle DCA ou \sphericalangle m .

2. Les deux \sphericalangle DCA + DCB sont \equiv aux trois \sphericalangle $m + n + o$.

Ax. 2.

Derechef, puisque \sphericalangle ECA est \equiv aux deux \sphericalangle $m + n$, si on ajoute de part & d'autre \sphericalangle ECB ou \sphericalangle o .

3. Les deux \sphericalangle ECA, ECB sont aussi \equiv à ces mêmes trois \sphericalangle $m + n + o$.

Ax. 2.

4. Par conséquent, les deux \sphericalangle ECA & ECB sont \equiv aux deux \sphericalangle DCA & DCB.

Ax. 1.

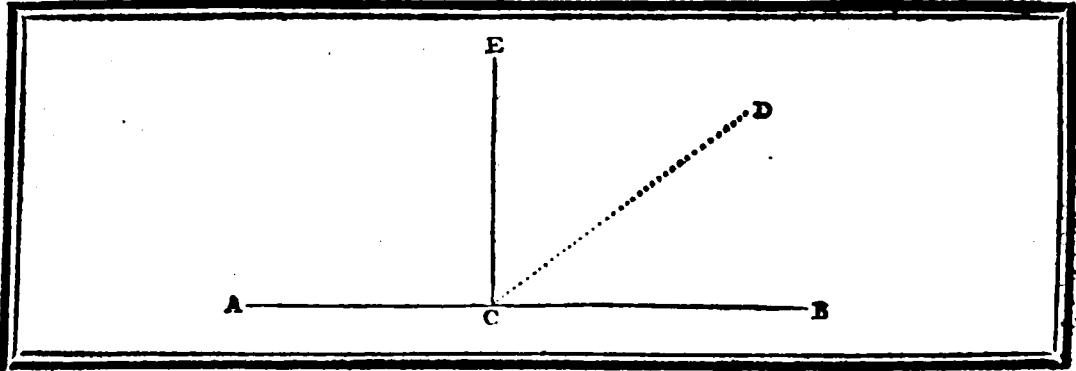
Mais les deux \sphericalangle DCA & DCB étant deux \perp (*Arg. 1*).

5. Il est évident, que la somme des deux \sphericalangle ECA & ECB est aussi \equiv à deux \perp .

Ax. 1.

D 2

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. THEOREME VII.
SI deux droites (AC, BC) rencontrent de part & d'autre une droite (EC), en un même point (C), faisant avec cette droite (EC) la somme des deux angles contigus (ACE, ECB) égale à deux angles droits: ces deux lignes droites (AC, BC) se rencontreront directement.

HYPOTHESE.

- I. Les deux lignes AC, BC se rencontrent au point C.
- II. Les \sphericalangle contigus ACE + ECB sont = à deux \sphericalangle .

THESE.

Les lignes AC, BC, se rencontrent directement c. à. d. elles ne forment qu'une même ligne droite AB.

DEMONSTRATION.

Si non.

On pourra prolonger AC quelque part de C, en D, en sorte que le prolongement DC ne fasse avec AC, qu'une même ligne droite ACD. Dem. 2.

Préparation.

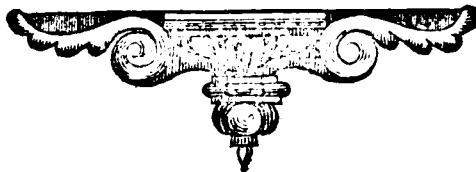
Prolongez donc AC, de C en D:

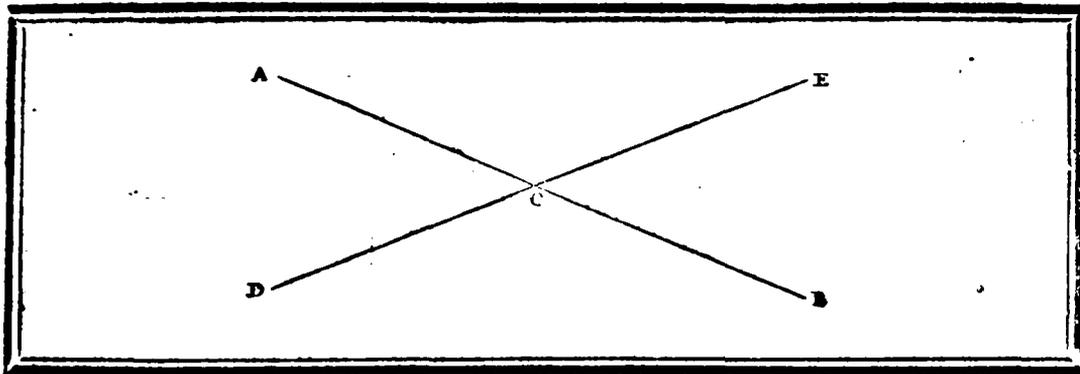
Dem. 2.

Puis donc que la ligne ACD est une ligne droite sur laquelle tombe la ligne EC:

1. Il s'ensuit, que la somme des \sphericalangle contigus ACE + ECD est = à deux \sphericalangle . P. 13. L. 1.
 Mais les \sphericalangle ACE + ECB étant aussi = à deux \sphericalangle (Hyp. 2).
2. Les deux \sphericalangle ACE + ECB sont donc = aux deux \sphericalangle ACE + ECD. Ax. 1.
 Orant donc de part & d'autre \sphericalangle commun ACE.
3. Les \sphericalangle restans ECB & ECD seront égaux entr'eux. Ax. 3.
 Mais \sphericalangle ECB étant le tout, & \sphericalangle ECD sa partie,
4. Il s'ensuit, que le tout est égal à sa partie.
5. Ce qui est impossible. Ax. 8.
6. Partant, les lignes AC & BC se rencontrent directement; ou ne forment qu'une même ligne droite AB.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XV. THEOREME VIII.

SI deux lignes droites (AB, DE) s'entre-coupent (en C): les angles (ECA, DCB & ACD, BCE), opposés au sommet (C), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

AB, DE sont des lignes droites,
qui s'entre-coupent au point C.

THESE.

- I. $\sphericalangle ECA = \sphericalangle DCB$.
- II. $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite AC tombe sur la droite DE (Hyp.),

1. La somme des deux \sphericalangle contigus ECA + ACD est \equiv à deux \perp .

Prop. 13. L. 1.

Derechef, puisque la droite DC tombe sur la droite AB (Hyp.),

2. La somme des \sphericalangle contigus ACD + DCB est aussi \equiv à deux \perp .

Prop. 13. L. 1.

3. Par conséquent, les \sphericalangle ECA + ACD sont égaux aux \sphericalangle ACD + DCB. Ax. 1.
Retranchant donc de ces sommes égales (Arg. 3), \sphericalangle ACD, qui leur est commun.

4. Les \sphericalangle restans ECA, DCB, opposés au sommet C, sont \equiv entr'eux.

Ax. 3.

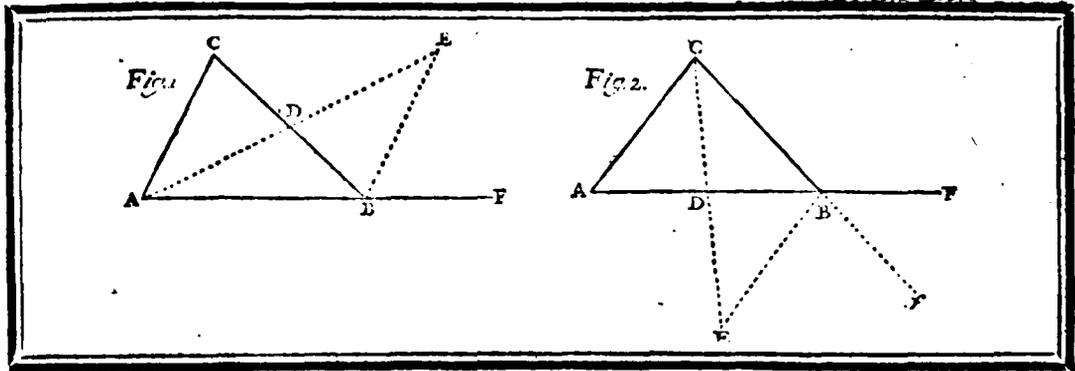
C. Q. F. D. I.

Par un raisonnement semblable on prouvera

5. Que \sphericalangle ACD est \equiv à \sphericalangle BCE qui lui est opposé au sommet.

C. Q. F. D. II.





PROPOSITION XVI. THEOREME IX.

EN tout triangle (ACB), dont un des côtés (comme AB) est prolongé, l'angle extérieur (CBF) est plus grand que chacun des intérieurs opposés (ACB; CAB).

HYPOTHESE.

- I. ACB est un Δ .
- II \angle CBF est un \angle extérieur formé par le côté prolongé AB.
- III. Les \angle ACB & CAB sont intérieurement opposés.

THESE.

\angle extérieur CBF \gt que \angle intérieur opposé ACB, ou CAB.

Préparation.

1. Partagez CB en deux également au point D (Fig. 1).
2. Du point A au point D tirez la ligne AD & prolongez la indéfiniment en E.
3. Faites DE = DA.
4. Du point B au point E tirez la droite BE.

P. 10. L. 1.
Dem. 1.
Prop. 3. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- L**es droites AE; BC (Fig. 1) s'entre-coupent au point D. (Prep. 2).
1. Par conséquent, les \angle opposés au sommet CDA, BDE sont = entr'eux. Puis donc que dans les Δ ACD, DEB, le côté CD est = au côté DB (Pr. 1), AD = DE (Prep. 3) & \angle compris CDA est = à \angle compris BDE. (Arg. 1).
 2. Il s'ensuit que les autres \angle sont = aux autres \angle , chacun à chacun de ceux qui sont opposés à des côtés égaux. Or les \angle ACD, DBE sont opposés aux côtés égaux AD, DE (Prep. 3).
 3. Donc \angle ACD est = à \angle DBE. Or \angle CBF étant le tout, & \angle DBE sa partie.
 4. Il s'ensuit que \angle CBF \gt \angle DBE.
 5. Partant, \angle extérieur CBF est aussi \gt \angle intérieur ACB. De la même manière, en partageant le côté AB en deux également, au point D (Fig. 2), on prouvera par un raisonnement semblable,
 6. Que \angle extérieur ABf est \gt \angle intérieur CAB. Mais cet \angle ABf est opposé au sommet à \angle CBF.
 7. D'où il s'ensuit que \angle ABf = \angle CBF.
 8. Partant, il est encore vrai que \angle extérieur CBF \gt \angle intérieur CAB.

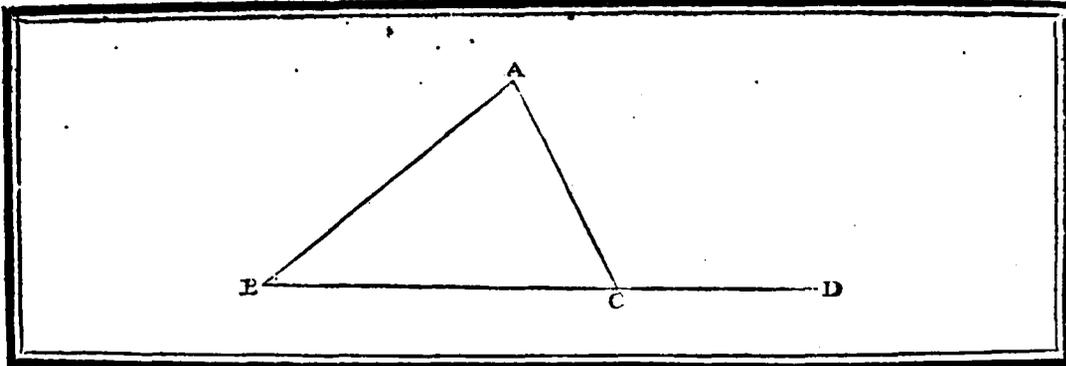
Prop. 15. L. 1.

Prop. 4. L. 1.

Ax. 8.
N. C.

Prop. 15. L. 1.
N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. THEOREME. X.
EN tout triangle (BAC), deux angles quelconques (comme ABC, ACB) sont moindres que deux droits.

HYPOTHESE.
ABC est un Δ.

THESE.
Les ∠ ABC + ACB sont < deux L.

Préparation.

Prolongez le côté BC (sur lequel les deux ∠ ABC, ACB sont placés) en D.

Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puisque ∠ ACD est un ∠ extérieur du Δ BAC.

1. Il est > que son intérieur opposé ABC.

Prop. 16. L. 1.

Puis donc que ∠ ACD est > ∠ ABC; si on ajoute de part & d'autre ∠ ACB,

2. Les ∠ ACD + ACB seront > que les ∠ ABC + ACB.

Ax. 4.

Mais les ∠ ACD + ACB sont des ∠ contigus, formés par la droite AC, qui tombe sur BD (*Prep.*).

3. Par conséquent, ces ∠ ACD + ACB sont = à deux L.

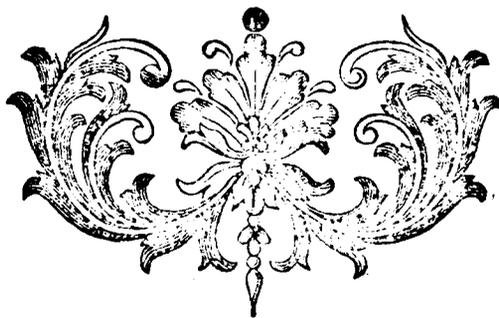
Prop. 13. L. 1.

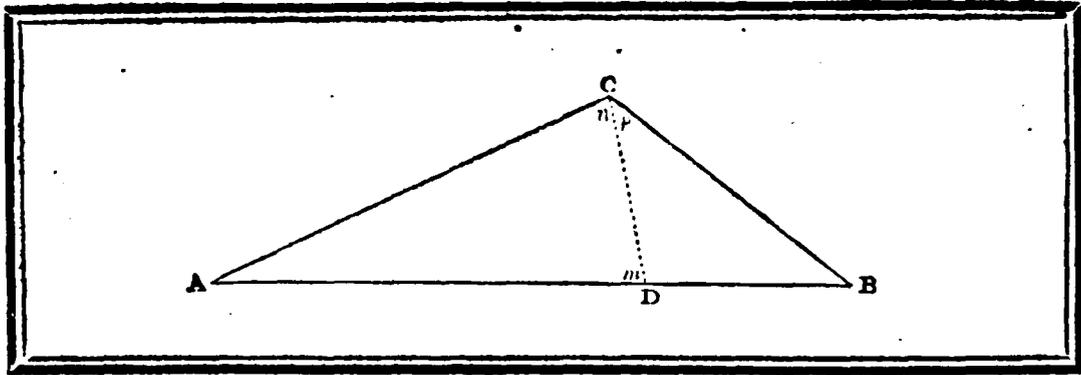
Or les ∠ ACD + ACB étant = à deux L (*Arg. 3*) & ces mêmes ∠ étant > que les ∠ ABC + ACB (*Arg. 2*).

4. Il s'ensuit que les ∠ ABC + ACB sont < deux L.

N. C.

C. Q. E. D.





PROPOSITION XVIII. THEOREME XI.
Dans tout triangle (ACB); les plus grands côtés sont opposés aux plus grands angles.

HYPOTHESE.

ACB est un Δ , ou AB est un côté $>$ AC.

THESE.

\sphericalangle ACB, opposé au $>$ côté AB, est plus grand que \sphericalangle ABC opposé au moindre côté AC.

Préparation.

Puisque le côté AB $>$ AC (Hyp.).

1. Faites AD = AC.
2. Du point C au point D tirez la droite CD.

Prop. 3. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le côté AD est = au côté AC (Prep. 1).

1. Le Δ ACD est isocèle.
2. Partant, les \sphericalangle m & n sur la base CD sont = entr'eux.
Or \sphericalangle m étant un \sphericalangle extérieur du Δ DCB.
3. Il s'ensuit, qu'il est $>$ \sphericalangle intérieur opposé DBC.
Mais \sphericalangle m est = à \sphericalangle n (Arg. 2).
4. Donc \sphericalangle n est aussi $>$ \sphericalangle DBC
Et si à \sphericalangle n on ajoute encore \sphericalangle p.
5. \sphericalangle n + p, ou \sphericalangle ACB, opposé au plus grand côté AB, fera à plus forte raison $>$ \sphericalangle DBC, ou ABC opposé au moindre côté AC.

D. 25. L. 1.

Prop. 5. L. 1.

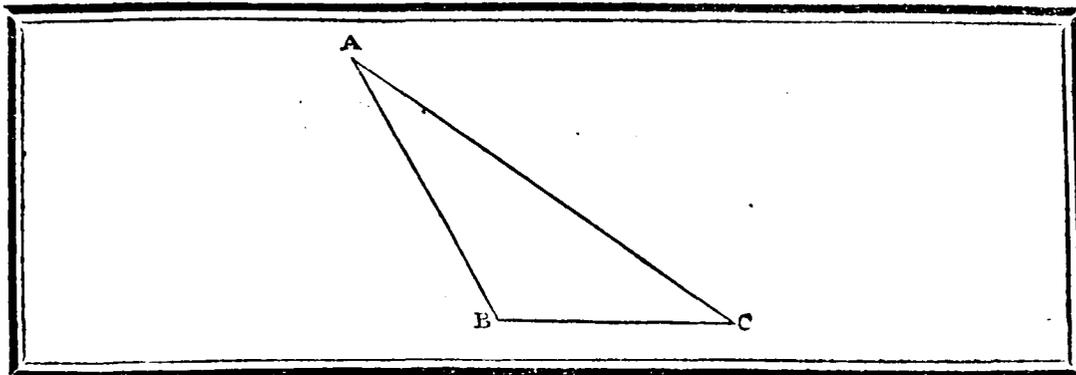
Prop. 16. L. 2.

N. C.

N. C.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIX. THEOREME XII.
EN tout triangle (BAC), les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés.

HYPOTHESE.

Dans le $\triangle BAC$, $\sphericalangle C$ est $>$ $\sphericalangle A$.

THESE.

Le côté AB opposé à $\sphericalangle C$ est $>$ le côté CB opposé à $\sphericalangle A$.

DEMONSTRATION.

SI non.

Le côté AB est ou égal, ou plus petit que le côté CB.

N. C.

CAS. I. Supposé que AB soit $=$ CB.

Puis donc que le côté AB est $=$ au côté CB (Sup. 1).

1. Le $\triangle BAC$ est isocèle.

2. Partant, les $\sphericalangle C$ & A sur la base sont $=$ entr'eux.

Or ces $\sphericalangle C$ & A ne sont pas $=$ entr'eux (Hyp).

3. Donc les côtés AB & CB ne sont point $=$ entr'eux non plus.

Def. 25. L. 1.

Prop. 5. L. 1.

CAS. II. Supposé que AB soit $<$ CB.

Puis donc que le côté AB est $<$ le côté CB (Sup. 2).

1. Il s'ensuit que $\sphericalangle C$, opposé au plus petit côté AB, est $<$ $\sphericalangle A$ opposé au plus grand côté CB.

Or $\sphericalangle C$ n'est pas $<$ $\sphericalangle A$ (Hyp).

2. Par conséquent le côté AB ne sauroit être $<$ le côté CB.

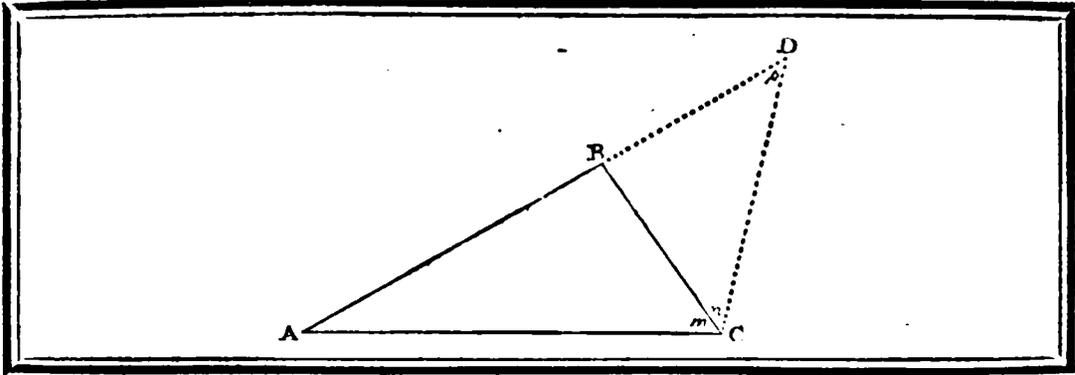
Le côté AB n'étant donc ni $=$ au côté CB (Cas. 1.); ni $<$ le côté CB (Cas. 2).

3. Il s'ensuit, que ce côté AB est $>$ le côté CB.

Prop. 18. L. 1.

N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XX. THEOREME XIII.
EN tout triangle (ABC): deux côtés quelconques (AB, BC) sont plus grands que le troisieme (AC).

HYPOTHESE.
ABC est un Δ .

THESE.
Deux côtés quelconques, comme $AB + BC$, sont $>$ le troisieme AC .

Préparation.

1. **P**rolongez un des deux côtés, comme AB, à l'infini.
2. Faites $BD = BC$.
3. Du point C au point D tirez la droite CD.

Dem. 2.
 Prop. 3. L. 1.
 Dem. 1.

DEMONSTRATION.
Puisque dans le ΔBDC le côté BD est $=$ au côté BC (*Prep. 2*).

1. Ce triangle est isoscele.
2. Par conséquent, les \sphericalangle sur la base n & p sont $=$ entr'eux.
 Or $\sphericalangle m + n$ étant le tout & $\sphericalangle n$ sa partie.
3. Il s'enfuit, que $\sphericalangle m + n$ est $>$ $\sphericalangle n$.
 Mais $\sphericalangle m + n$ étant $>$ $\sphericalangle n$ (*Arg. 3*) & cet $\sphericalangle n$ étant $=$ à $\sphericalangle p$ (*Arg. 2*).
4. Il est évident, que $\sphericalangle m + n$ est $>$ $\sphericalangle p$.
 Puis donc que dans le ΔADC , $\sphericalangle m + n$ est $>$ $\sphericalangle p$ (*Arg. 4*).
5. Le côté AD opposé au plus grand $\sphericalangle m + n$ est aussi $>$ le côté AC opposé au plus petit $\sphericalangle p$.
 Mais à cause que la droite BD est $=$ à la droite BC (*Prep. 2*); si on ajoute de part & d'autre le côté AB,
6. Il s'enfuit, que $AB + BD$, ou AD est $=$ à la somme des deux côtés $AB + BC$.
 Mais AD est $>$ le côté AC (*Arg. 5*).
7. Partant, la somme des deux côtés $AB + BC$ est aussi $>$ le troisieme côté AC.

Def. 25. L. 1.
 Prop. 5. L. 1.

Ax. 8.

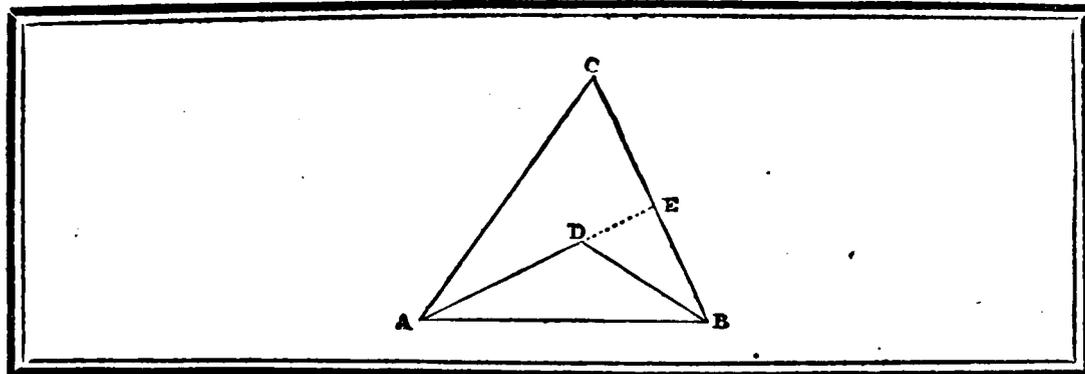
N. C.

Prop. 19. L. 1.

Ax. 2.

N. C.

C. Q. F. D.



S I des extrémités (A & B) d'un côté (AB) de quelque triangle (ACB), on tire à un point quelconque (D), pris au dedans de ce triangle, deux lignes droites (DA, DB): ces deux droites seront plus petites que les deux côtés (CA, CB) de ce triangle; mais elles comprendront un plus grand angle (ADB).

HYPOTHESE.

DA, DB sont deux droites tirées, des points A & B au point D, pris au dedans du Δ ACB.

THESE.

- I. $DA + DB < CA + CB$.
- II. $\sphericalangle ADB > \sphericalangle C$.

Préparation.

Prolongez la droite DA, jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté CB en E. Dem. 2.

DEMONSTRATION.

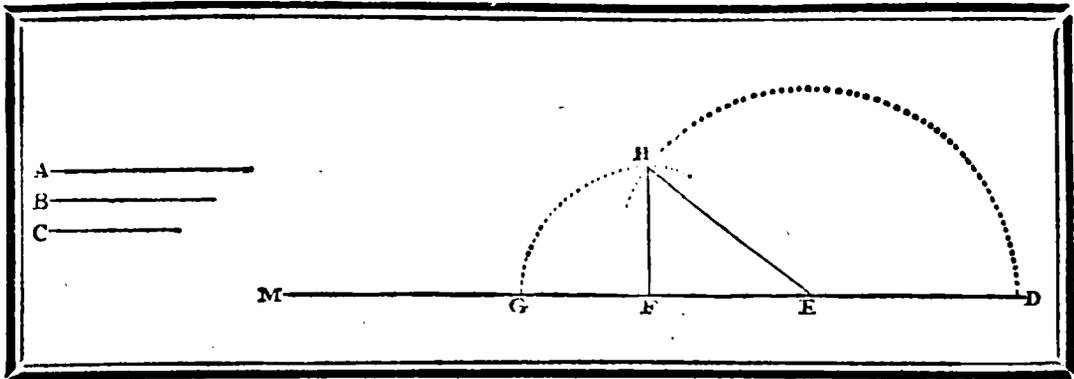
- P**uisque la figure ACE est un Δ (Def. 21. L. 1).
1. Les deux côtés CA + CE sont $>$ le troisième AE. Prop. 20. L. 1.
 - Si on ajoute de part & d'autre la ligne EB,
 2. Les côtés CA + CB (c. à d. CA + CE + EB) sont $>$ les lignes AE + EB. Ax. 4.
 - Derechef, la figure DEB étant aussi un Δ (Def. 21. L. 1).
 3. Les deux côtés EB + ED sont $>$ le troisième DB. Prop. 20. L. 1.
 - Si on ajoute donc de part & d'autre, la partie commune DA;
 4. Les lignes AE + EB (c. à d. EB + ED + DA) sont $>$ les lignes DA + DB. Ax. 4.
 - Mais on a prouvé, que les côtés CA + CB sont $>$ les lignes AE + EB (Arg. 2).
 5. Partant, à plus forte raison les côtés CA + CB seront $>$ les lignes DA + DB. N. C.

C. Q. F. D. I.

De même; puisque $\sphericalangle ADB$ est un \sphericalangle extérieur du Δ DEB (Prep.) & que $\sphericalangle DEB$ est son intérieur opposé,

1. Il suit, que $\sphericalangle ADB$ est $>$ $\sphericalangle DEB$. Prop. 16. L. 1.
2. Par la même raison; $\sphericalangle DEB$ est $>$ $\sphericalangle C$.
- Or puisque $\sphericalangle ADB > \sphericalangle DEB$ (Arg. 1), & que $\sphericalangle DEB > \sphericalangle C$ (Arg. 2).
3. Il est évident, que $\sphericalangle ADB$ est à plus forte raison $>$ $\sphericalangle C$. N. C.

C. Q. F. D. II.



D PROPOSITION XXII. PROBLEME VIII.

DE trois lignes droites, égales à trois autres droites données (A, B, C), construire un triangle (FHE); en supposant que deux quelconques de ces droites données soient plus grandes que la troisième.

DONNEES.

Les lignes droites A, B, C telles que
 $A+B > C$, $A+C > B$, $C+B > A$.

CHERCHEE.

La construction d'un $\triangle FHE$, tel que
 $EH \text{ soit } = A$, $FE = B$, & $FH = C$.

Résolution.

1. **T**irez la droite indéterminée DM. Dem. 1.
2. Faites $ED =$ à la donnée A, $FE =$ à la donnée B, & $FG =$ à la donnée C. Prop. 3. L. 1.
3. Du point E comme centre & du rayon ED decrivez le $\odot DH$. Dem. 3.
4. Du point F comme centre & du rayon FG decrivez le $\odot GH$. Dem. 2.
5. Des points E & F, au point d'intersection H, tirez les droites EH, FH.

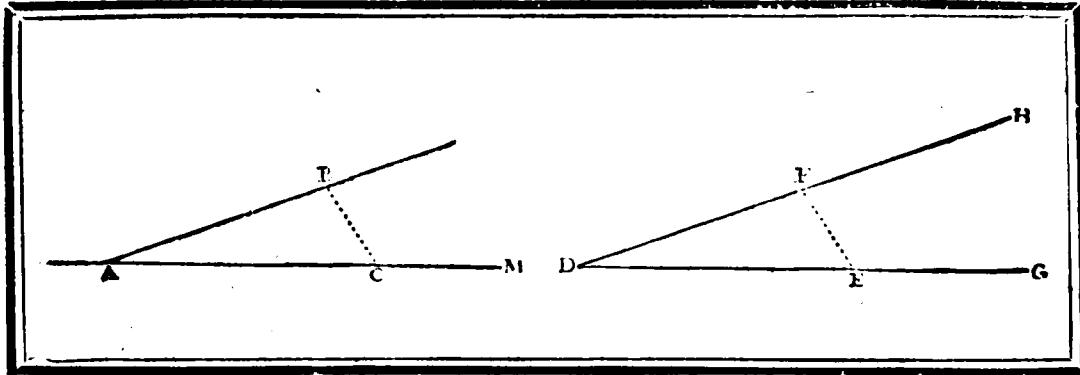
DEMONSTRATION.

- L**es droites ED, EH étant tirées du centre E à la $\odot DH$ (Ref. 3 & 5).
1. Ces deux droites ED, EH sont des rayons d'un même $\odot DH$. Def. 16. L. 1.
 2. Par conséquent, la droite ED est $=$ à la droite EH. Def. 15. L. 1.
 Puis donc que ED est $=$ à EH (Arg. 2) & que la droite donnée A est aussi $=$ à la même ligne ED (Ref. 2).
 3. Il s'ensuit, que EH est $=$ à la donnée A. Ax. 1.
 Par un raisonnement semblable on prouvera, que
 4. La ligne FH est $=$ à la donnée C.
 Or le côté EH étant $=$ à la donnée A (Arg. 3), le côté FH $=$ à la donnée C (Arg. 4), & enfin le côté FE $=$ à la donnée B (Ref. 2).
 5. Il est évident, que les trois côtés EH, FE, FH du $\triangle FHE$, que l'on vient de construire, sont $=$ aux trois droites données A, B, C.

C. Q. F. F.

R E M A R Q U E.

La condition ajoutée, que deux des données quelconques soient plus grandes que la troisième, est essentielle, en vertu de la XX Prop. du 1 Livre; sans cette condition les cercles décrits des centres E & F ne sçauroient s'entre-couper, de fait qui rendroit la construction impossible.



U PROPOSITION XXIII. PROBLEME IX.
 Une droite indéterminée (AM) étant donnée, avec un de ses points (A); décrire sur cette droite & à ce point un angle rectiligne (BAC), égal à un autre angle rectiligne donné (HDG).

DONNEE

- I. La droite indéterminée AM ,
- II. Le point A dans la droite AM .
- III. L'angle rectiligne HDG .

CHERCHEE.

Un angle BAC décrit sur AM ,
 au point $A = \hat{=} \sphericalangle HDG$.

Résolution.

1. Sur les jambes DG, DH , de l'angle donné HDG , prenez deux points quelconques E & F .
2. Du point E au point F tirez la droite EF .
3. Sur la droite indéterminée AM & au point A , construisez un $\triangle ABC$, dont les trois côtés soient égaux aux trois côtés du $\triangle DFE$.

Dem. 1.

Prop. 22, L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les trois côtés AB, AC, BC du $\triangle ABC$ sont \equiv aux trois côtés DF, DE, FE du $\triangle DFE$ chacun à chacun (*Ref. 3*).

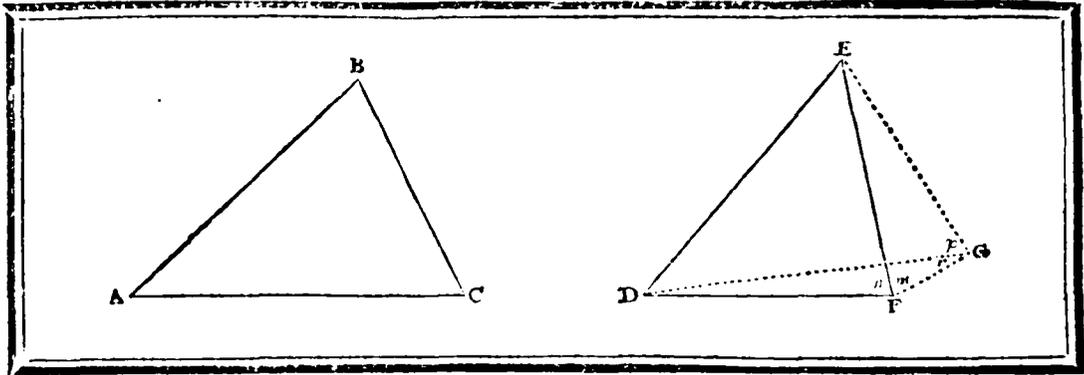
1. Il s'ensuit, que les $\sphericalangle BAC$ & HDG , opposés aux côtés égaux BC, FE , sont \equiv entr'eux.

Prop. 8, L. 1.

Mais $\sphericalangle BAC$ étant \equiv à \sphericalangle donné HDG , & se trouvant décrit outre cela sur la droite donnée AM au point donné A (*Ref. 3*).

2. Il s'ensuit, qu'on a décrit sur une droite donnée AM , & à son point donné A , un \sphericalangle rectiligne $BAC \equiv$ à un autre \sphericalangle rectiligne donné HDG .

C. Q. F. F.



S I deux triangles (ABC, DEF), ont deux côtés (BA, BC) égaux à deux côtés (ED, EF) chacun à chacun; mais l'angle compris (B) plus grand que l'angle compris (DEF): la base (AC) opposée au plus grand angle, sera aussi plus grande que la base (DF) opposée au plus petit angle.

HYPOTHESE.

- I. $BA = ED$
- II. $BC = EF$
- III. $\sphericalangle B > \sphericalangle DEF$.

THESE.

La base AC est $>$ la base DF .

Préparation.

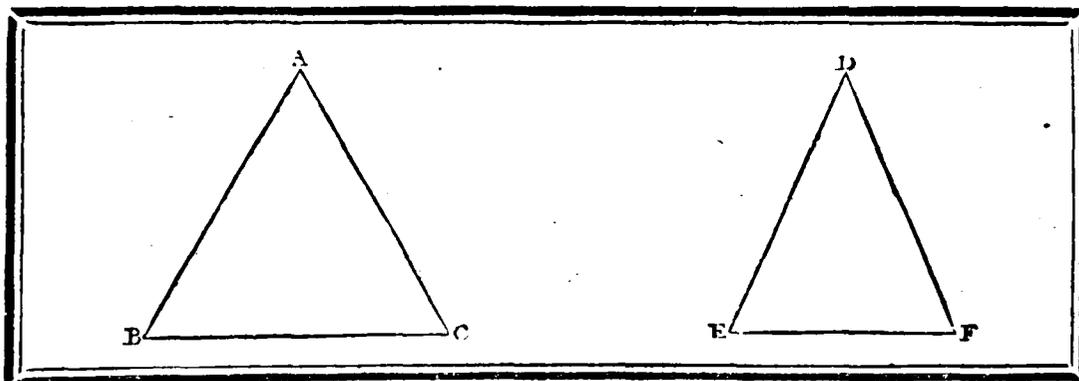
1. Sur la ligne DE au point E décrivez $\sphericalangle DEG = \sphericalangle B$ donné. Prop. 23. L. 1.
2. Faites $EG = BC$ ou à EF . Prop. 3. L. 1.
3. Des points D & F au point G tirez les droites DG, FG . Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le $\triangle ABC$ les côtés BA, BC sont $=$ aux côtés ED, EG du $\triangle DEG$ (*Hyp. 1. Prep. 2*) & \sphericalangle compris $B = \sphericalangle$ compris DEG (*Prep. 1*).

1. Il suit, que la base AC est $=$ à la base DG . Prop. 5. L. 1.
Derechef; puisque EG est $=$ au côté EF (*Prep. 2, Hyp. 2*).
2. Le $\triangle FEG$ est un \triangle isocèle. Def. 25. L. 1.
3. Partant, $\sphericalangle m = \sphericalangle r + p$. Prop. 5. L. 1.
4. L'angle m fera $>$ $\sphericalangle r$. N. C.
Et si à $\sphericalangle m$ on ajoute encore $\sphericalangle n$;
5. L'angle entier $m + n$ fera beaucoup $>$ $\sphericalangle r$. N. C.
6. Par conséquent, le côté DG , opposé au plus grand $\sphericalangle m + n$, est $>$ le côté DF opposé au plus petit $\sphericalangle r$. Prop. 19. L. 1.
Or la droite DG étant $>$ DF (*Arg. 6*) & cette même droite DG étant $=$ à la base AC (*Arg. 1*).
7. Il est évident, que la base AC est aussi $>$ la base DF . N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXV. THEOREME XVI.

SI deux triangles (BAC, EDF), ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun, mais la base (BC) plus grande que la base (EF): l'angle (BAC) opposé à la plus grande base (BC), sera aussi plus grand que l'angle (D) opposé à la plus petite base (EF).

HYPOTHESE.

- I. $AB = DE$.
- II. $AC = DF$.
- III. $BC > EF$.

THESE.

L'angle A opposé à la plus grande base BC est $> \angle D$ opposé à la plus petite base EF.

DEMONSTRATION.

SI non.

L'angle A est ou égal ou plus petit que l'angle D.

N. C.

CAS. I. Supposé que $\angle A$ soit $=$ à $\angle D$.

Puisque $\angle A$ est $=$ à $\angle D$ (Sup. 1) & que les côtés AB, AC & DE, DF, qui comprennent ces \angle , sont égaux chacun à chacun (Hyp. 1 & 2).

1. La base BC est $=$ à la base EF.
- Mais la base BC n'est point $=$ à la base EF (Hyp. 3).
2. Donc $\angle A$ ne peut point être $=$ à $\angle D$.

Prop. 4. L. 1.

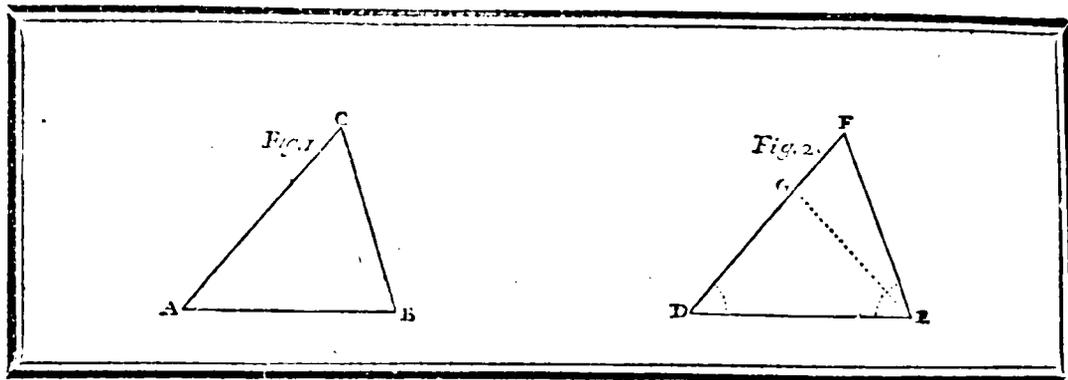
CAS. II. Supposé que $\angle A$ soit $<$ $\angle D$.

Puisque $\angle A$ est $<$ $\angle D$ (Sup. 2) & que les côtés AB, AC & DE, DF, qui comprennent ces \angle , sont égaux chacun à chacun (Hyp. 1 & 2).

1. La base BC est $<$ la base EF.
- Or la base BC n'est pas $<$ que la base EF (Hyp. 3).
2. Donc $\angle A$ n'est pas $<$ $\angle D$.
- Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal non plus (Cas 1).
3. Par conséquent $\angle A$, qui est opposé à la plus grande base BC, est $>$ $\angle D$, qui est opposé à la plus petite base EF.

Prop. 24. L. 1.

C. Q. F. D.



S I deux triangles (ACB, DFE), ont deux angles (A & B) égaux à deux angles (D & FED) chacun à chacun, & un côté égal à un côté; soit, que ce côté, (comme AB & DE) soit adjacent aux deux angles égaux; soit, qu'il se trouve opposé (comme AC & DF) à un de ces angles: ils auront aussi les deux autres côtés (AC, BC ou AB, BC) égaux aux deux autres côtés (DF, EF ou DE, EF) chacun à chacun, & le troisième angle (C) égal au troisième angle (F).

HYPOTHESE

- I. $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.
 II. $\sphericalangle B = \sphericalangle FED$.
 III. $AB = DE$.

CAS. I.

Lorsque les côtés égaux AB, DE sont adjacens aux angles égaux A & D, item B & FED, (Fig. 1 & 2).

THESE.

- I. $AC = DF$.
 II. $BC = EF$.
 III. $\sphericalangle C = \sphericalangle F$.

DEMONSTRATION.

S I non.

Les côtés sont inégaux, & l'un, comme DF, fera \succ l'autre AC.

Préparation.

1. Retranchez donc du plus grand côté DF une partie $DG = AC$.
 2. Du point G au point E tirez la droite GE.

Prop. 3. L. 1.
 Dem. 1.

P Uis donc que dans les $\triangle ACB$, DGE le côté AC est = au côté DG (Prep. 1), $AB = DE$ (Hyp. 3) & que \sphericalangle compris A est = à \sphericalangle compris D (Hyp. 1).

1. Les \sphericalangle B & GED, opposés aux côtés égaux AC & DG, sont = entr'eux. Mais \sphericalangle B étant = à \sphericalangle GED (Arg. 1) & ce même \sphericalangle B étant aussi = à \sphericalangle FED (Hyp. 2).
 2. Il s'ensuit, que \sphericalangle GED est = à \sphericalangle FED.
 Or \sphericalangle FED étant le tout & \sphericalangle GED sa partie.
 3. Le tout seroit = à sa partie.
 4. Ce qui est impossible.
 5. Les côtés AC, DF ne sont donc point inégaux.
 6. Partant, il sont égaux, ou $AC = DF$.

Prop. 4. L. 1.

Ax. 1.

Ax. 8.

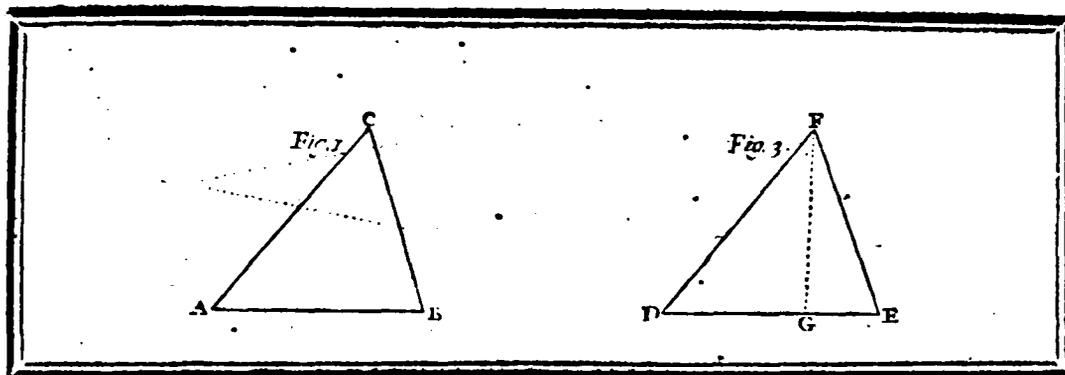
N. C.

C. Q. F. D. I.

- Puis donc que dans les $\triangle ACB$, DFE , le côté AC est = au côté DF (Arg. 6), $AB = DE$ (Hyp. 3), & que \sphericalangle compris A est = à \sphericalangle compris D (Hyp. 1).
 7. Le troisième côté BC est aussi = au troisième côté EF, & les \sphericalangle C & F opposés aux côtés égaux AB, DE sont aussi = entr'eux.

Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. II. & III.



CAS. II.

HYPOTHESE.

- I. $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.
- II. $\sphericalangle B = \sphericalangle E$.
- III. $AC = DF$.

Lorsque les côtés égaux AC, DF se trouvent opposés aux angles égaux B & E (Fig. 1 & 3).

THESE.

- I. $AB = DE$.
- II. $BC = EF$.
- III. $\sphericalangle C = \sphericalangle F$.

DEMONSTRATION.

Si non:

Les côtés AB, DE sont inégaux: & l'un, comme DE, sera \gt l'autre AB.

Préparation.

- 1. Retranchez donc du plus grand côté DE une partie $DG = AB$.
- 2. Du point G au point F tirez la droite GF.

Prop. 3. L. 1.
Dcm. 1.

Puis donc que dans les $\triangle ACB, DFG$ le côté AC est $=$ au côté DF (Hyp. 3), $AB = DG$ (Prep. 1) & que \sphericalangle compris A est $=$ à \sphericalangle compris D (Hyp. 1).

- 1. Les autres $\sphericalangle B$ & $\sphericalangle DGF$, opposés aux côtés égaux AC, DF, sont $=$ entr'eux. L'angle B étant donc $= \sphericalangle DGF$ (Arg. 1) & ce même $\sphericalangle B$ étant aussi égal à $\sphericalangle E$ (Hyp. 2).
- 2. Il s'ensuit, que $\sphericalangle E$ est $=$ à $\sphericalangle DGF$.
- 3. Mais l'angle DGF est un \sphericalangle extérieur du $\triangle GFE$ & $\sphericalangle E$ est son intérieur opposé.
- 4. Donc \sphericalangle extérieur seroit égal à son intérieur opposé.
- 5. Ce qui est impossible.
- 6. Partant, les côtés AB, DE ne sont point inégaux.
- 7. Ils sont donc égaux, ou $AB = DE$.

Prop. 4. L. 1.

Ax. 1.

Prop. 16. L. 1.

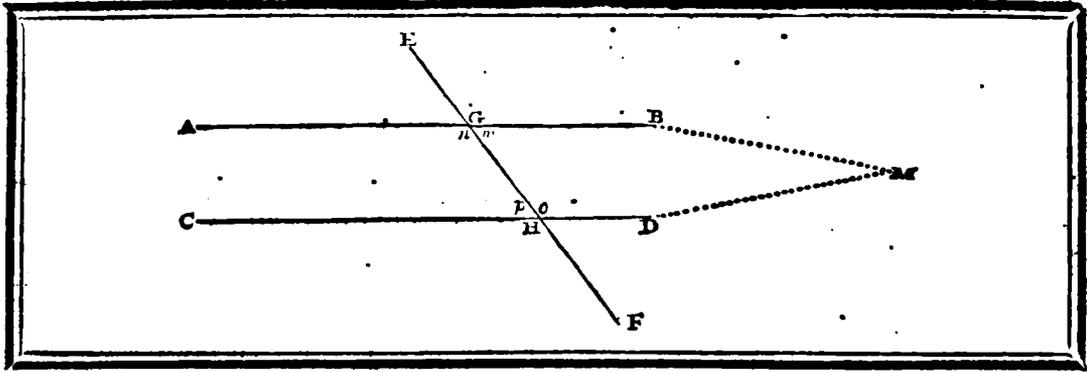
N. C.

C. Q. F. D. I.

Puis donc que dans les $\triangle ACB, DFE$ le côté AC est $=$ au côté DF (Hyp. 3), $AB = DE$ (Arg. 6) & que \sphericalangle compris A est $=$ à \sphericalangle compris D (Hyp. 1).
Il est évident, que le troisieme côté BC est $=$ au troisieme côté EF & que les $\sphericalangle C$ & F, opposés aux côtés égaux AB, DE, sont $=$ entr'eux.

Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. II. & III.



PROPOSITION XXVII. THEOREME XXVIII.
SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (AB, CD) situées dans un même plan, fait les angles alternes (m & p ou n & o) égaux entr'eux: ces deux lignes (AB, CD) sont parallèles.

HYPOTHESE.

- I. AB, CD sont deux lignes droites, situées dans un même plan,
- II. La ligne EF les coupe tellement que $\sphericalangle m = \sphericalangle p$ ou $\sphericalangle n = \sphericalangle o$.

THESE.

Les lignes AB, CD sont Pllas.

DEMONSTRATION.

Sinon.

Les droites AB, CD prolongées doivent se couper quelque part.

D. 35. L. 1.

Préparation.

Prolongez les donc jusqu'à ce qu'elles se coupent en M.

Dem. 2.

Puis donc que $\sphericalangle n$ est un angle extérieur du $\triangle GMH$, & $\sphericalangle o$ son intérieur opposé;

1. L'angle n est $\sphericalangle \sphericalangle o$.

Mais $\sphericalangle n$ est \sphericalangle à $\sphericalangle o$ (Hyp. 2).

Prop. 16. L. 1.

2. Cet $\sphericalangle n$ n'est donc point $\sphericalangle \sphericalangle o$.

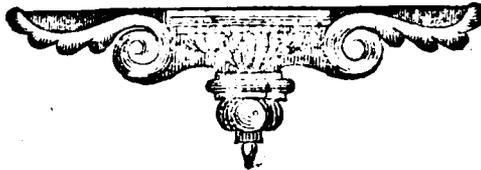
N. C.

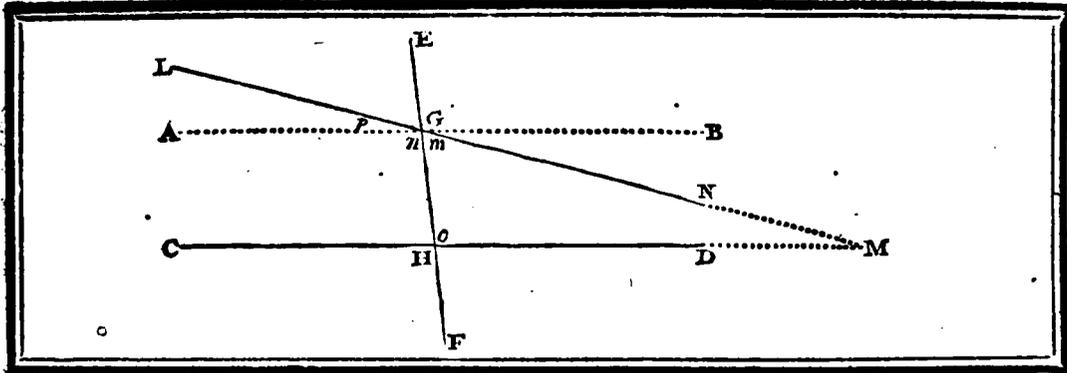
3. Partant il est impossible que les droites AB, CD s'entrecoupent en un point comme M.

4. D'où il suit qu'elles sont des droites Pllas.

Def. 35. L. 1.

C. Q. F. D.





R E M A R Q U E .

SI on reçoit au nombre des axiomes, la proposition qu'Euclide suppose comme évidente par elle-même, * à sçavoir, qu'une ligne droite (EF), qui coupe une de deux parallèles (comme AB), en coupera nécessairement l'autre (CD) aussi, pourvu que cette ligne coupante (EF) soit prolongée suffisamment: on peut démontrer sans peine l'axiome XI, dont la vérité est un peu éloignée des notions communes, & qui sert cependant de fondement à la Proposition XXIX. Voici de quelle manière cela se peut faire.

L E M M E .

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (LN, CD) situées dans un même plan, fait les angles alternes ($p + n$ & o) inégaux entr'eux: ces deux lignes (LN & CD), prolongées suffisamment, s'il est nécessaire, se rencontreront quelque part (en M), du côté où se trouve le plus petit des angles alternes (o).

Préparation.

Car puisqu'on suppose $\forall p + n > \forall o$.

1. On peut décrire dans le plus grand $\forall p + n$, sur la droite EF au point G, l'angle $n = \forall o$,
2. Et prolonger AG à volonté en B.

Prop. 23. L. 1.
Dem. 2.

D E M O N S T R A T I O N .

Puis donc que les deux lignes AB, CD sont coupées par une troisième EF, en sorte que les \forall alternes n & o sont $=$ entr'eux (Prep. 1).

1. Ces deux lignes AB, CD sont Plles.
2. Donc, si on la prolonge suffisamment, elle coupera aussi l'autre CD quelque part en M, du côté où se trouve le plus petit des \forall alternes o .

Prop. 27. L. 1:

Ax. Sup.

C. Q. F. D.

Corollaire.

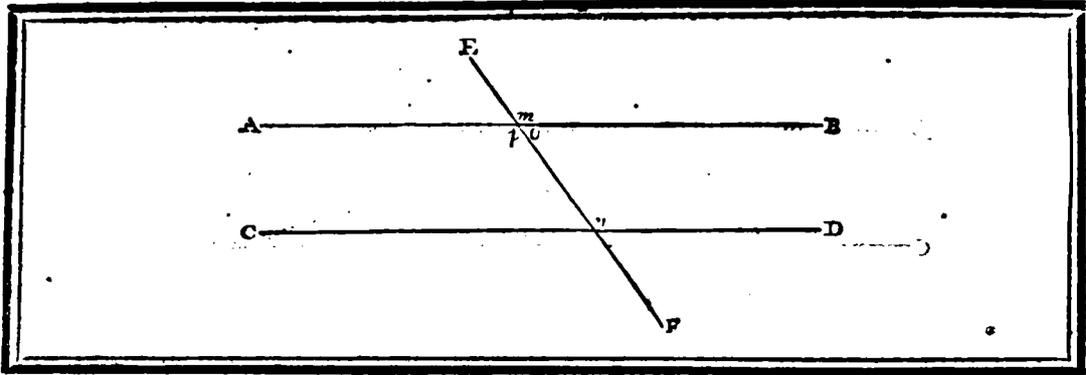
Lorsque $\forall o < \forall p + n$, les deux angles intérieurs $o + m$ sont nécessairement $<$ deux L ; vu que les deux angles $p + n$ & m sont égaux à deux L . Par conséquent, lorsque les deux \forall intérieurs sont $<$ deux L ; les lignes LN, CD, qui forment ces angles avec EF, se rencontreront quelque part du côté de la ligne EF, où ces angles se trouvent placés, pourvu qu'on les prolonge suffisamment.

P. 13. L. 1.

Lem.

C. Q. F. D.

* Voyez la Prép. des Propositions XXX, XXXVII & de plusieurs autres.



PROPOSITION XXVIII. THEOREME XIX.

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (AB, CD) situées dans un même plan, fait l'angle extérieur (m) égal à son intérieur (n) opposé du même côté; ou bien les deux intérieurs (o + n) du même côté égaux à deux droits: ces deux lignes (AB, CD) sont parallèles entr'elles.

HYPOTHESE.

$\sphericalangle m = \sphericalangle n.$

CAS. I.

THESE.

AB, CD sont des lignes Plles.

DEMONSTRATION.

Puisque les $\sphericalangle m$ & p sont des \sphericalangle opposés au sommet.

1. Ils sont = entr'eux.

L'angle p étant donc = à $\sphericalangle m$ (Arg. 1) & $\sphericalangle n$ étant = au même $\sphericalangle m$ (Hyp.).

2. Il est évident que $\sphericalangle p$ est aussi = à $\sphericalangle n$.

Mais les \sphericalangle égaux p & n (Arg. 2), sont en même tems des \sphericalangle alternes.

3. Par conséquent, les droites AB, CD sont Plles.

Prop. 15. L. 1.

Ax. 1.

Prop. 27. L. 1.

CAS. II.

HYPOTHESE.

Les $\sphericalangle o + n$ sont = à 2 L.

THESE.

AB, CD sont des lignes Plles.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite EF, tombant sur la droite AB, forme avec elles les \sphericalangle contigus o & p .

1. Ces $\sphericalangle o + p$ sont = à deux L.

Les $\sphericalangle o + p$ étant donc = à deux L (Arg. 1) & les $\sphericalangle o + n$ étant aussi = à deux L (Hyp.).

2. Il s'en suit que les $\sphericalangle o + p$ sont = aux $\sphericalangle o + n$.

Et si on retranche de part & d'autre l'angle commun o ;

3. Les \sphericalangle restans p & n seront = entr'eux.

Or ces \sphericalangle égaux p & n (Arg. 3), sont en même tems des \sphericalangle alternes.

4. Par conséquent, les droites AB, CD sont Plles.

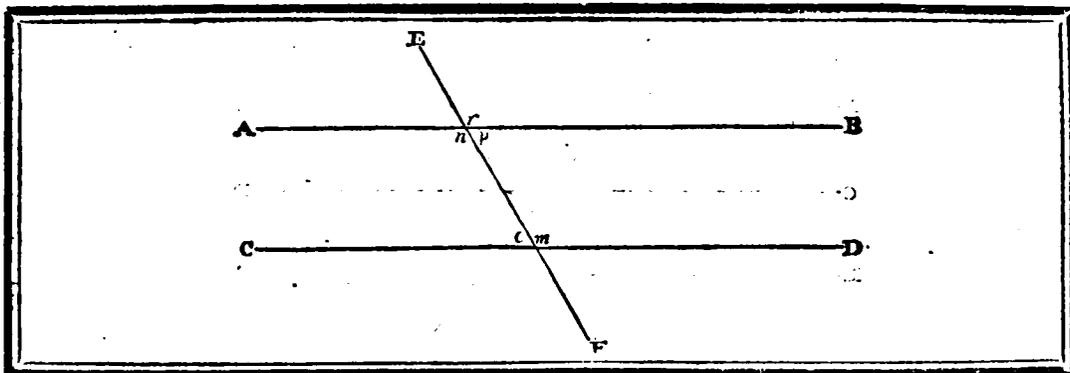
Prop. 13. L. 1.

Ax. 1.

Ax. 3.

Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D.



U PROPOSITION XXIX. THEOREME XX.
 Une ligne droite (EF), tombant sur deux autres droites paralleles (AB, CD), fait les angles alternes (n & m) égaux; de plus l'angle extérieur (r) égal à son intérieur opposé du même côté (m); & enfin les deux intérieurs opposés du même côté ($p + m$) égaux à deux droits.

HYPOTHESE.

AB, CD sont deux lignes Plles, coupées par une même droite EF.

THESE.

- I. $\sphericalangle n = \sphericalangle m$.
- II. $\sphericalangle r = \sphericalangle m$.
- III. Les $\sphericalangle p + m = \text{à } 2 \text{ L.}$

DEMONSTRATION.

Si non.

Les $\sphericalangle m$ & n sont inégaux,
 Et l'un comme $\sphericalangle m$ fera \sphericalangle l'autre $\sphericalangle n$.

N. C.

PUIS donc que $\sphericalangle m < \sphericalangle n$; si on ajoute de part & d'autre \sphericalangle commun p .

1. Les $\sphericalangle m + p$ seront \sphericalangle les $\sphericalangle n + p$.

Mais à cause que $\sphericalangle n$ & $\sphericalangle p$ sont des \sphericalangle contigus; formés par la droite EF, qui tombe sur AB.

Ax. 4.

2. Ces $\sphericalangle n + p$ sont à deux L.

Prop. 13. L. 1.

3. Partant, les $\sphericalangle m + p$ (moindres que les $\sphericalangle n + p$) sont aussi \sphericalangle deux L.

N. C.

4. D'où il suit que les lignes AB, CD ne sont pas Plles.

Corol. du Lem.

Mais les droites AB, CD sont Plles (Hyp.).

5. Par conséquent, les $\sphericalangle m$ & n ne sont point inégaux.

Prop. 27. L. 1.

6. Ils sont donc égaux, ou $\sphericalangle n = \sphericalangle m$.

N. C.

C. Q. F. D. I.

De plus, $\sphericalangle r$ & $\sphericalangle n$ étant opposés au sommet.

7. Ces angles sont à deux L.

Prop. 15. L. 1.

Mais $\sphericalangle m$ étant à deux L. à $\sphericalangle n$ (Arg. 6) & $\sphericalangle r$ étant à deux L. au même $\sphericalangle n$ (Arg. 7).

8. Il s'ensuit, que $\sphericalangle r$ est à deux L. à $\sphericalangle m$.

Ax. 1.

C. Q. F. D. II.

De même; $\sphericalangle n$ étant à deux L. à $\sphericalangle m$ (Arg. 6); si on ajoute \sphericalangle commun p .

9. Les $\sphericalangle n + p$ seront à deux L. aux $\sphericalangle m + p$.

Ax. 2.

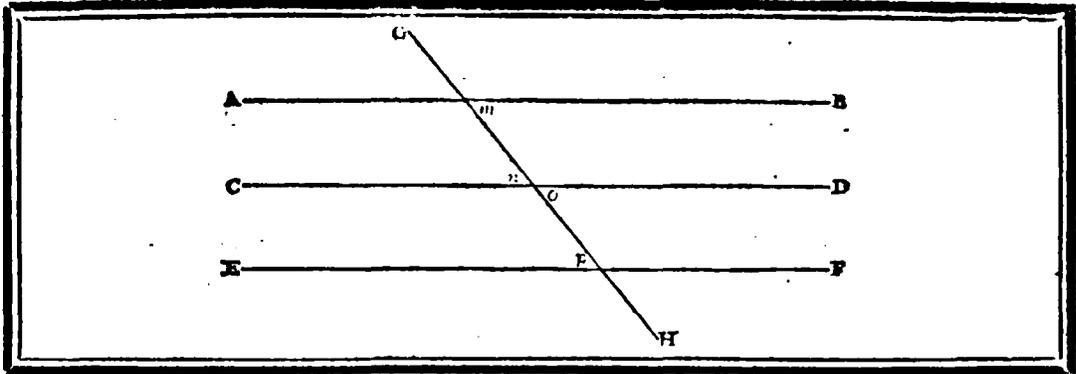
Mais les $\sphericalangle n + p$ sont à deux L. à deux L. (Arg. 2).

10. D'où il suit que les $\sphericalangle m + p$ sont aussi à deux L.

Ax. 1.

F 3.

C. Q. F. D. III.



PROPOSITION XXX. THEOREME XXI.
Les lignes droites (AB, EF), parallèles à une même droite (CD), sont parallèles entr'elles.

HYPOTHESE.

AB, EF sont des droites Plles à CD.

THESE.

Les droites AB, EF sont Plles entr'elles.

Préparation.

Tirez la droite GH qui coupe les trois lignes AB, CD, EF.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB, CD sont deux Plles (*Hyp.*) coupées par une même droite GH (*Prep.*).

1. Les \sphericalangle alternes m & n sont \equiv entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

De même, puisque les droites CD, EF sont deux Plles (*Hyp.*) coupées par une même droite GH (*Prep.*).

2. L'angle extérieur n est \equiv à son intérieur p opposé du même côté.

Prop. 29. L. 1.

Mais $\sphericalangle n$ étant \equiv à $\sphericalangle m$ (*Arg. 1*), & le même $\sphericalangle n$ étant aussi \equiv à $\sphericalangle p$ (*Arg. 2*).

3. Les $\sphericalangle m$ & p seront \equiv entr'eux.

Ax. 1.

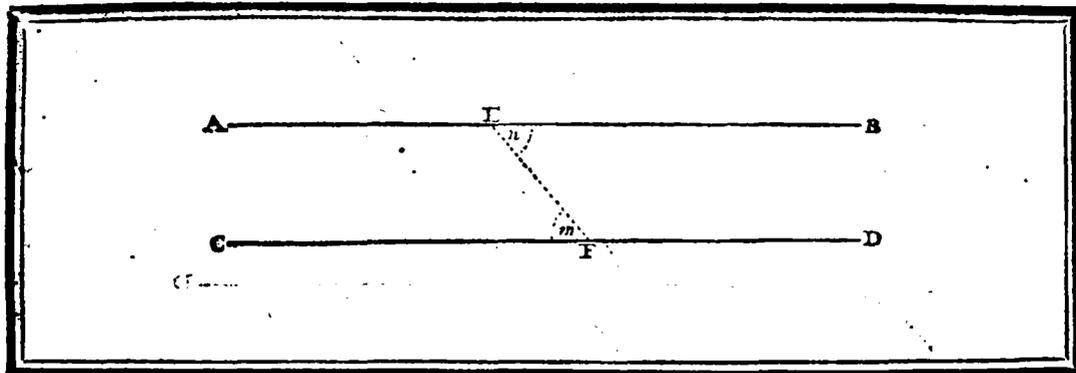
Or ces \sphericalangle égaux m & p (*Arg. 3*), sont des \sphericalangle alternes, formés par les deux droites AB, EF, qui sont coupées par la droite GH.

4. Par conséquent, ces droites AB, EF sont Plles.

Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXXI. PROBLEME X.
 Par un point donné (E), tirer une ligne droite (AB) parallèle à une autre droite donnée (CD).

DONNEE

La droite CD avec le point E.

CHERCHEE.

La droite AB Plle à CD & passant par le point E.

Résolution.

1. Dans la droite donnée CD prenez un point quelconque F.
2. Du point F au point E tirez la droite FE.
3. Sur la droite FE au point E, dans le plan où se trouvent les lignes CD, FE, construisez un $\sphericalangle n = \sphericalangle m$,
4. Et prolongez la jambe EB.

Dem. 1.

Prop. 23. L. 1.

Dem. 2.

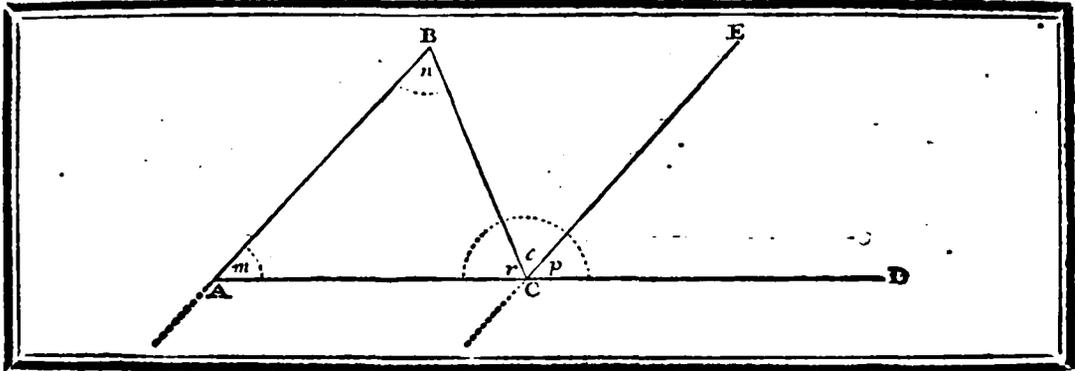
DEMONSTRATION.

Puisque les \sphericalangle alternes m & n , formés par la droite EF, qui coupe les deux lignes AB, CD, sont = entr'eux (Ref. 3).
 Les droites AB, CD sont Pllés.

Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XXXII. THEOREME XXII.
EN tout triangle (ABC), un des côtés (comme AC) étant prolongé : l'angle extérieur ($o + p$) est égal à la somme des deux intérieurs opposés ($n + m$) ; & les trois angles du triangle ($n + m + r$) sont égaux à deux droits.

HYPOTHESE.

ABC est un Δ , dont un des côtés AC est prolongé indéfiniment en D .

THESE.

1. $\forall o + p$ est = aux $\forall m + n$.
 11. Les $\forall n + m + r$ sont = à 2 \angle .

Préparation.

PAR le point C tirez la droite CE Plle à la droite AB .

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB , CE sont deux Plles (*Prep.*) coupées par une même droite BC ,

1. Les \forall alternes n & o sont = entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

De même ; puisque les droites AB , CE sont deux Plles (*Prep.*) coupées par une même droite AD ,

2. L'angle extérieur p est = à son intérieur m opposé du même côté.

Prop. 29. L. 1.

L'angle o étant donc = à $\forall n$ (*Arg. 1*) & $\forall p = \forall m$ (*Arg. 2*).

3. L'angle $o + p$ est = aux angles n & m pris ensemble.

Ax. 2.

C. Q. F. D. I.

Puis donc que $\forall o + p$ est = aux $\forall n + m$ (*Arg. 3*) ; si on ajoute de part & d'autre l'angle commun r ,

4. Les $\forall o + p + r$ seront = aux trois $\forall n + m + r$ du ΔABC .

Ax. 2.

Mais ces $\forall o + p + r$ sont des \forall contigus, formés par la ligne BC , qui rencontre AD au même point C .

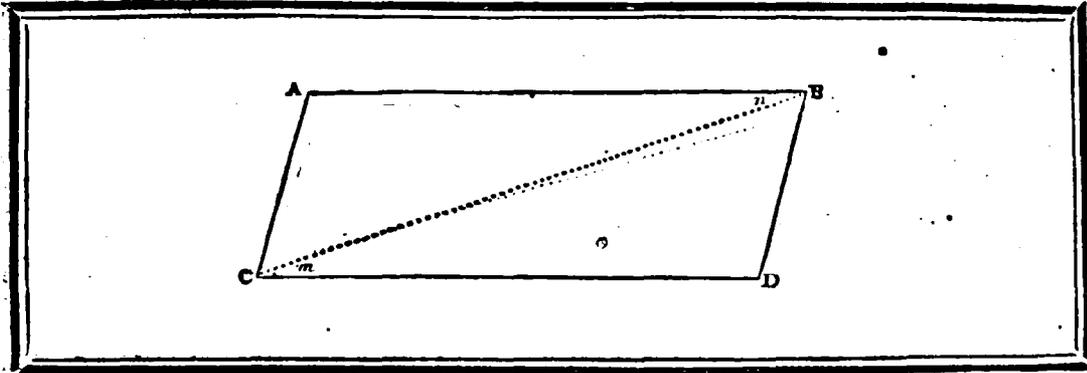
5. Par conséquent, les $\forall o + p + r$ sont = à deux \angle .

Prop. 13. L. 1.

6. Partant, les trois $\forall n + m + r$, qui sont = aux $\forall o + p + r$ (*Arg. 4*), sont aussi = à deux \angle .

Ax. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXXIII. THEOREME XXXIII.
LEs droites (AC, BD), qui joignent de même part les extrémités (A, C & B, D) de deux autres droites (AB, CD) égales & parallèles : sont aussi égales & parallèles entr'elles.

HYPOTHESE.

AC, BD sont deux droites, qui joignent de même part les extrémités de deux autres droites = & Plls AB, CD.

THESE.

- I. Les droites AC, BD sont égales,
- II. Et ces droites AC, BD sont Plls.

Préparation.

DU point B au point C tirez la droite BC.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB, CD sont deux Plls (*Hyp.*), coupées par une même droite BC (*Prep.*).

1. Les \sphericalangle alternes n & m sont = entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

Puis donc que dans les deux Δ CAB, BDC le côté CD est = au côté AB (*Hyp.*), le côté BC commun aux deux Δ & \sphericalangle compris m = à \sphericalangle compris n (*Arg. 1*).

2. Il s'ensuit, que la base AC est = à la base BD;

C. Q. F. D. I.

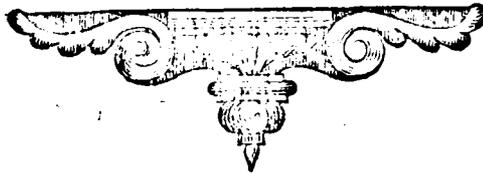
Prop. 4. L. 1.

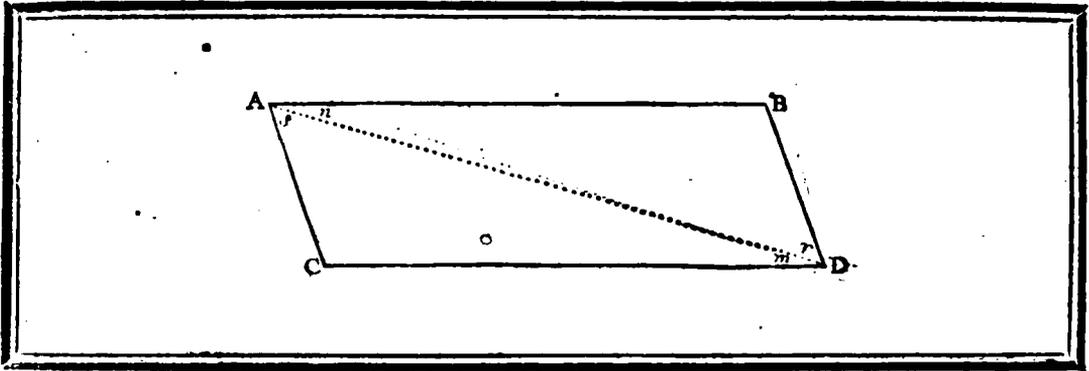
3. Item, que les \sphericalangle ACB, DBC qui sont opposés aux côtés égaux AB, CD, sont aussi = entr'eux.

Or ces \sphericalangle égaux ACB, DBC (*Arg. 3*) sont des \sphericalangle alternes formés par les droites AC, BD coupées par la droite BC.

5. Par conséquent, les droites AC, BD sont Plls.

C. Q. F. D. II. Prop. 27. L. 1.





PROPOSITION XXXIV. THEOREME XXIV.
EN tout parallélogramme (BC), les côtés opposés (AC, BD item CD, AB) & les angles opposés (B, C item $m+r$, $n+s$) sont égaux entr'eux & la diagonale (AD) le coupe en deux également.

HYPOTHESE.

- I. BC est un Pgr.
- II. AD est la diagonale de ce Pgr.

THESE.

- I. Les côtés AC, BD item CD, AB sont = entr'eux,
 $\angle C = \angle B$.
- II. $\angle m+r = \angle n+s$.
- III. Les $\triangle CAD$, $\triangle BDA$ formés par la diagonale sont = entr'eux.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB, CD sont deux Plies (Hyp. I) coupées par une même droite AD (Hyp. 2).

1. Les \angle alternes m & n sont = entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

Derechef, puisque les droites AC, BD sont deux Plies (Hyp. I) coupées par une même droite AD (Hyp. 2).

2. Les \angle alternes r & s sont = entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

Mais les $\triangle CAD$, $\triangle BDA$ ont deux \angle m & s = à deux \angle n & r (Arg. 1 & 2). & le côté AD adjacent à ces \angle égaux est commun aux deux \triangle .

3. Partant, les côtés AC & BD, opposés aux \angle égaux m & n , item les côtés CD, AB, opposés aux \angle égaux s & r sont = entr'eux & le troisième \angle C est = au troisième \angle B.

Prop. 26. L. 1.

C. Q. F. D. I.

Or $\angle m$ étant = à $\angle n$ (Arg. 1) & $\angle r = \angle s$ (Arg. 2);

4. L'angle entier $m+r$ est = à l'angle entier $n+s$.

Ax. 2.

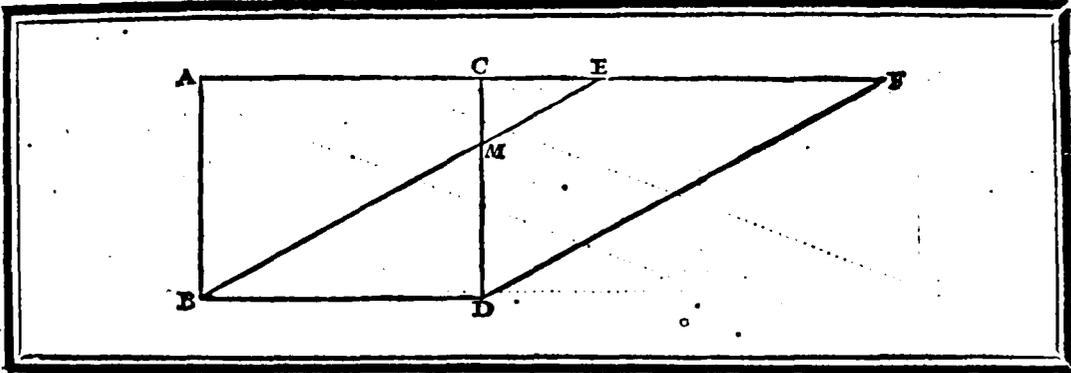
C. Q. F. D. II.

Enfin, puisque dans les $\triangle CAD$, $\triangle BDA$ le côté CD est = au côté AB (Arg. 3), le côté AD commun aux deux \triangle & \angle compris m = à \angle compris n (Arg. 1).

5. Ces deux $\triangle CAD$, $\triangle BDA$, formés par la diagonale AD sont = entr'eux.

Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. III.



PROPOSITION XXXV. THEOREME XXV.
Les parallélogrammes (AD, ED) placés sur la même base (BD) & entre les mêmes parallèles (AF, BD): sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE

1. AD & ED sont deux Pgrs,
- II. Et ces deux Pgrs sont placés sur la même base BD & entre les mêmes Plls AF, BD.

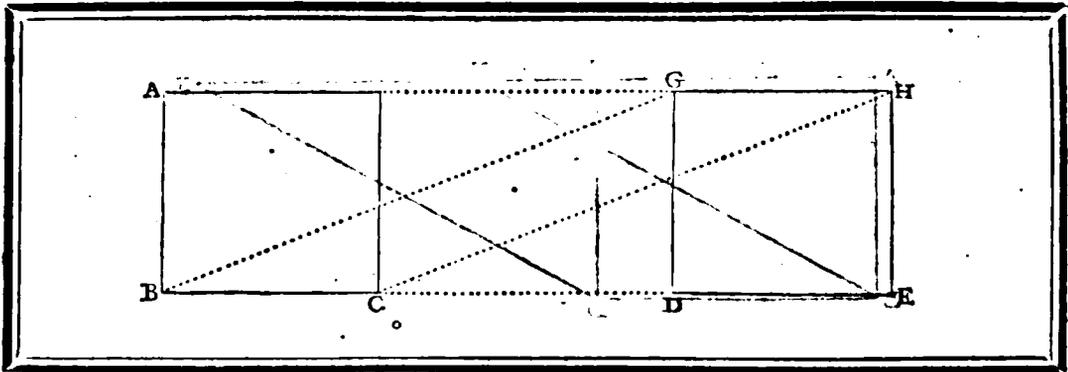
THESE.

Le Pgr AD est = au Pgr ED.

DEMONSTRATION.

- P**uisque la figure AD est un Pgr (Hyp. I).
 1. Les côtés opposés AC, BD & AB, CD sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
 De même; puisque la figure ED est un Pgr (Hyp. I).
 2. Les côtés opposés EF, BD & BE, DF sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
 Or la droite AC étant = à la droite BD (Arg. 1) & la droite EF étant aussi = à la même droite BD (Arg. 2).
 3. Il s'ensuit, que la droite AC est = à la droite EF. Ax. 1.
 Puis donc que AC est = à EF (Arg. 3); si on ajoute de part & d'autre la droite commune CE.
 4. La droite AE est nécessairement = à la droite CF. Ax. 2.
 Dans les Δ ABE, CDF le côté AB est donc = au côté CD (Arg. 1), le côté BE est = au côté DF (Arg. 2) & la base AE est = à la base CF (Arg. 4).
 5. Par conséquent, le Δ ABE est = au Δ CDF. Prop. 8. L. 1.
 Retranchant donc de ces Δ égaux ABE, CDF (Arg. 5) leur partie commune CME;
 6. Les trapezes restans ABMC, MD FE sont = entr'eux. Ax. 3.
 Ajoutant enfin à ces trapezes égaux ABMC, MD FE (Arg. 6) la partie commune MBD,
 7. Les Pgrs AD & ED seront = entr'eux. Ax. 2.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVI. THEOREME XXVI.
LEs parallélogrammes (AC, GE), placés sur des bases égales (BC, DE) & entre les mêmes parallèles (AH, BE), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

1. AC, GE sont deux Pgrs,
- II. Et ces deux Pgrs sont placés sur des bases égales BC, DE & entre les mêmes Plls AH, BE.

THESE.

Le Pgr AC est = au Pgr GE.

Préparation.

1. DU point B au point G tirez la droite BG.
2. Du point C au point H tirez la droite CH.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la figure GE est un Pgr (Hyp. 1).

1. Les côtés opposés DE, GH sont = entr'eux.

Prop. 34. L. 1.

Or la droite BC est = à DE (Hyp. 2) & GH est = à la même droite DE (Arg. 1).

2. Donc BC est = à GH.

Ax. 1.

Mais puisque BC est = à GH (Arg. 2) : & que ces droites sont outre cela des Plls (Hyp. 2), dont les extrémités sont jointes par les droites GB, HC (Prep. 1 & 2).

3. Il est évident, que ces droites GB, HC sont = & Plls.

Prop. 33. L. 1.

4. Partant, la figure GC est un Pgr.

Def. 35. L. 1.

De plus, les Pgrs AC, GC étant placés sur la même base BC, & entre les mêmes Plls AH, BE (Hyp. 2).

5. Ces Pgrs AC, GC sont = entr'eux.

Prop. 35. L. 1.

Par un raisonnement semblable on prouvera,

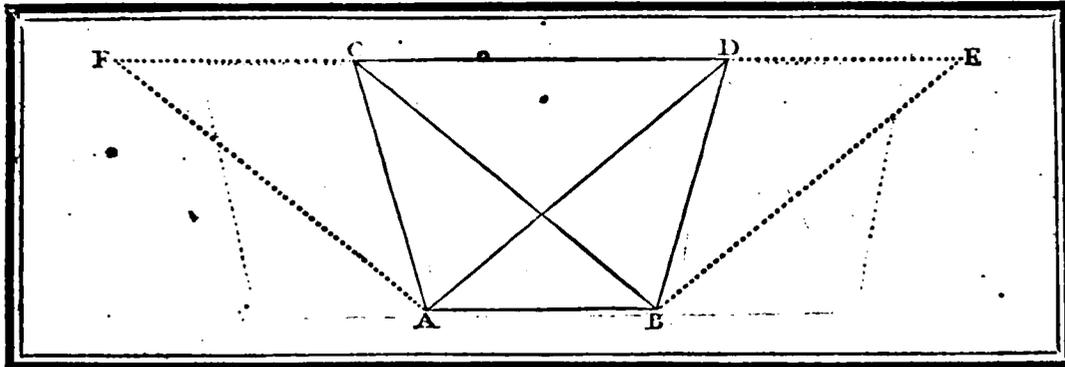
6. Que le Pgr GC est = au Pgr GE.

Puis donc que le Pgr AC est = au Pgr GC (Arg. 5), & que le Pgr GE est = au même Pgr GC (Arg. 6).

7. Il s'en suit que le Pgr AC est = au Pgr GE.

Ax. 1.

C. Q. F. D.



L PROPOSITION XXXVII. THEOREME XXVII.
 Les triangles (ACB, ADB), placés sur une même base (AB) & entre les mêmes
 paralleles (AB, CD), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. ACB, ADB sont deux Δ ,
- II. Et ces deux Δ sont placés sur la même base AB & entre les mêmes Plls AB, CD.

THESE.

Le Δ ACB est = au Δ ADB.

Préparation.

1. Prolongez la droite CD de part & d'autre à l'infini.
2. Par les points A & B tirez les droites AF, BE Plls aux côtés BC, AD; qui rencontreront la prolongée CD quelque part en F & en E (Rem. de la Prop. XXVII).

Dem. 2.

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans la figure BF les côtés opposés AB, FC & AF, BC sont Plls (Hyp. 2. & Prep. 2).

1. La figure BF est un Pgr.

Def. 35. L. 1.

Par un raisonnement semblable on prouvera,

2. Que la figure AE est un Pgr.

Mais les Pgrs BF, AE, sont placés sur la même base AB & entre les mêmes Plls AB, FE (Hyp. 2. & Prep. 1).

3. Par conséquent, le Pgr BF est = au Pgr AE.

Prop. 35. L. 1.

Or les droites AC, BD sont des diagonales des Pgrs BF, AE (Prep. 1 & 2).

4. C'est pourquoi ces diagonales AC, BD partagent les Pgrs BF, AE en deux également.

Prop. 34. L. 1.

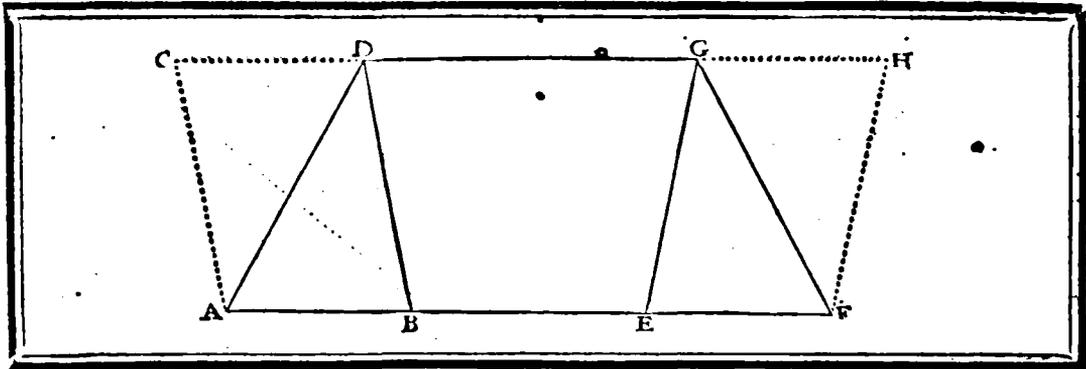
5. Partant, le Δ ACB est la moitié du Pgr BF & le Δ ADB la moitié du Pgr AE.

Puis donc que les Pgrs entiers, BF, AE sont égaux entr'eux (Arg. 3), & que les Δ ACB, ADB sont les moitiés de ces Pgrs (Arg. 5).

6. Il est évident que les Δ ACB, ADB sont aussi égaux entr'eux.

Ax. 7.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVIII. THEOREME XXVIII.
Les triangles (ADB, EGF), placés sur des bases égales (AB, EF) & entre les mêmes parallèles (AF, DG), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. ADB, EGF sont deux Δ ,
- II. Et ces deux Δ sont placés sur des bases $= AB, EF$,
 & entre les mêmes Plles AF, DG .

THESE.

Le ΔADB est $=$ au ΔEGF .

Préparation.

- I. Prolongez la droite DG de part & d'autre à l'infini.
2. Par les points A & F tirez les droites AC, FH Plles aux côtés BD, EG ; qui rencontreront la prolongée DG quelque part en C & en H (*Rem. de la Prop. XXVII*).

Dem..2.

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans la figure BC les côtés opposés AB, CD & AC, BD sont Plles (*Hyp. 2 & Prep. 2*);

1. La figure BC est un Pgr.
 Par un raisonnement semblable on prouvera,
2. Que la figure EH est un Pgr.
 Mais les Pgrs BC, EH (*Arg. 1 & 2*) sont placés sur des bases $= AB, EF$
 & entre les memes Plles AF, CH (*Hyp. 2*).
3. Par conséquent, le Pgr BC est $=$ au Pgr EH .
 Or les droites AD, FG étant des diagonales des Pgrs BC, EH . (*Prep. 1. & 2*).
4. Ces droites AD, FG partagent les Pgrs BC, EH en deux également.
5. Partant, le ΔADB est la moitié du Pgr BC , & le ΔEGF la moitié du Pgr EH .

Def. 35. L. 1.

Prop. 36. L. 1.

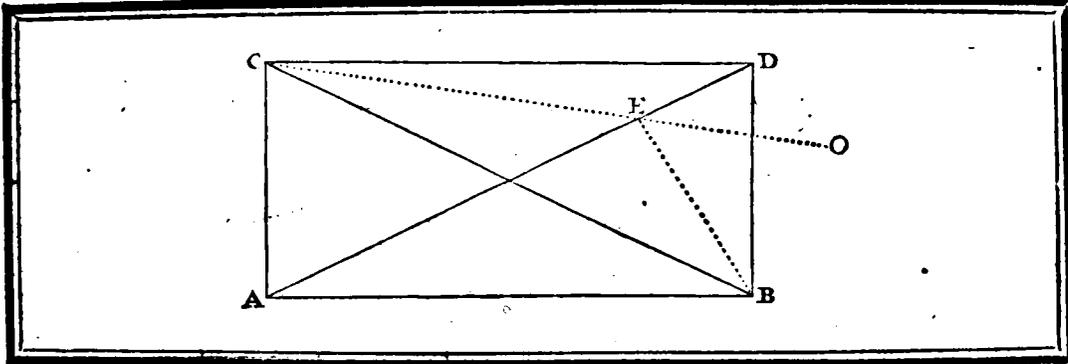
Prop. 34. L. 1.

Puis donc que les Pgrs entiers BC, EH sont $=$ entr'eux (*Arg. 3*) & que les $\Delta ADB, EGF$ sont leurs moitiés de ces Pgrs (*Arg. 5*).

6. Il s'enfuit que ces $\Delta ADB, EGF$ sont aussi $=$ entr'eux.

Ax. 7.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIX. THEOREME XXIX.
Les triangles égaux ($\triangle ACB$, $\triangle ADB$), placés sur une même base (AB) & du même côté, sont entre les memes paralleles (AB , CD).

HYPOTHESE.

1. Les $\triangle ACB$, $\triangle ADB$ sont égaux,
11. Et ces \triangle sont placés sur la même base AB .

THESE.

Les $\triangle ACB$, $\triangle ADB$ sont entre les memes Plles AB , CD .

DEMONSTRATION.

SI non.

Les droites AB , CD ne sont pas Plles, & on pourra tirer par le point C quelque autre droite CO Plle à AB .

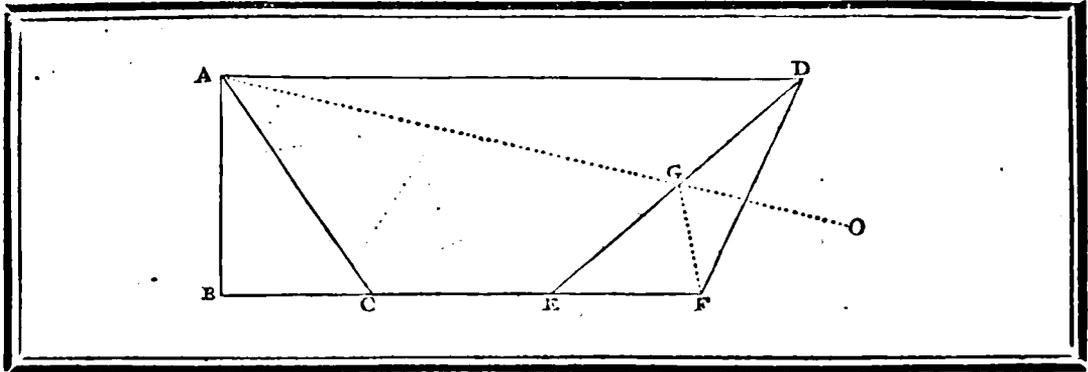
Préparation.

1. **T**irez donc par le point C la droite CO Plle à AB ; laquelle coupera la droite AD quelque part en E (*Rem. de la Prop. XXVII*). Prop. 31. L. 1.
2. Du point B au point d'interfection E tirez la droite BE . Dem. 1

Puisque les deux $\triangle ACB$, $\triangle AEB$ sont sur la même base AB (*Hyp. 2*) & entre les memes Plles AB , CO (*Prep. 1*).

1. Le $\triangle ACB$ est = au $\triangle AEB$. Prop. 37. L. 1.
 Or le $\triangle ADB$ étant = au $\triangle ACB$ (*Hyp. 1*) & le $\triangle AEB$ étant = au même $\triangle ACB$ (*Arg. 1*).
2. Le $\triangle ADB$ est = au $\triangle AEB$. Ax. 1.
 Mais le $\triangle ADB$ étant le tout & le $\triangle AEB$ sa partie,
3. Il s'enfuit que le tout est égal à sa partie,
4. Ce qui est impossible. Ax. 8.
5. Partant, la droite CO n'est pas Plle à AB .
 On prouvera de même, que nulle autre droite, hormis la seule CD ne peut être Plle à AB .
6. Par conséquent, la droite CD , tirée par les sommets des $\triangle ACB$, $\triangle ADB$, est Plle à la base AB .

C. Q. F. D.



PROPOSITION XL. THEOREME XXX.
Les triangles égaux (BAC, EDF), placés sur des bases égales (BC, EF) & du même côté, sont entre les mêmes parallèles (BF, AD).

HYPOTHESE.

1. Les $\Delta BAC, EDF$, sont égaux,
2. Et ces Δ sont placés sur des bases $\equiv BC, EF$.

THESE.

Les $\Delta BAC, EDF$ sont entre les mêmes Plles BF, AD .

DEMONSTRATION.

SI non.

Les droites BF, AD ne sont pas Plles, & on pourra tirer par le point A quelque autre droite AO Plle à BF .

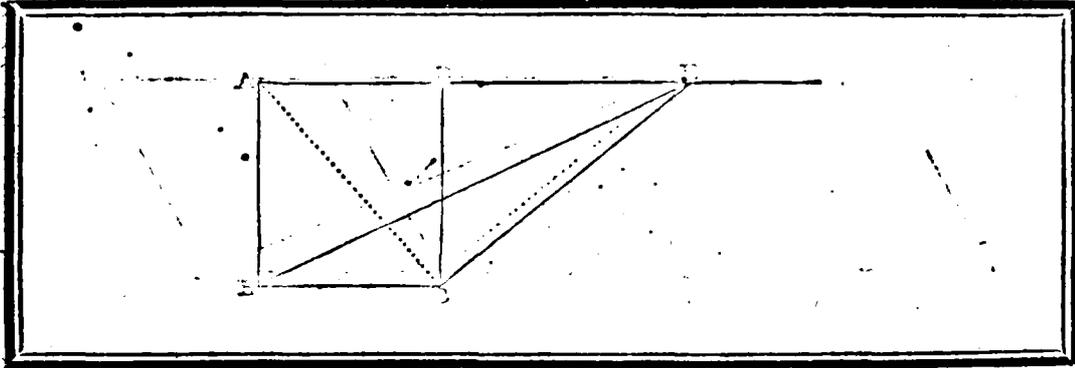
Préparation.

1. **T**irez donc par le point A la droite AO Plle à BF ; laquelle coupera la droite ED quelque part en G (*Rem. de la Prop. XXVII*). Prop. 31. L. 1
2. Du point F au point d'intersection G tirez la droite FG . Dem. 1.

Puisque les $\Delta BAC, EGF$ sont placés sur des bases égales BC, EF (*Hyp. 2*), & entre les mêmes Plles BF, AO (*Prep. 1*).

1. Le ΔBAC est \equiv au ΔEGF . Prop. 38. L. 1.
 Or le ΔEDF est \equiv au ΔBAC (*Hyp. 1*), & le ΔEGF est \equiv au même ΔBAC (*Arg. 1*).
2. C'est pourquoi le ΔEDF est \equiv au ΔEGF . Ax. 1.
 Mais le ΔEDF étant le tout, & le ΔEGF sa partie,
3. Il s'enfuit que le tout est égal à sa partie.
4. Ce qui est impossible. Ax. 8.
5. Partant AO n'est pas Plle à BF .
 On prouvera de même que nulle autre droite, hormis la seule AD ne peut être Plle à BF .
6. Par conséquent, la droite AD , tirée par les sommets des $\Delta BAC, EDF$, est Plle à la droite BF .

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLI. THEOREME XXXI.
SI un parallélogramme (BD) & un triangle (BEC) sont placés sur une même base (BC), & entre les mêmes parallèles (BC, AE): le parallélogramme fera double du triangle.

HYPOTHESE.

1. BD est un Pgr, & BEC un Δ .
11. Ces figures sont placées sur la même base BC, & entre les mêmes Plls BC, AE.

THESE.

Le Pgr BD est double du Δ BEC.

Préparation.

DU point A au point C tirez la droite AC.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

PUisque les Δ BAC, BEC sont placés sur une même base BC & entre les mêmes Plls BC, AE (*Hyp. 2*).

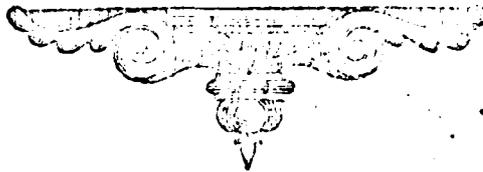
1. Le Δ BAC est = au Δ BEC.
Or la droite AC étant la diagonale du Pgr BD (*Prep.*).
2. Cette diagonale partage le Pgr en deux également.
3. Partant, le Pgr BD est double du Δ BAC.
Mais ce Δ BAC étant = au Δ BEC (*Arg. 1*).
4. Le Pgr BD est aussi double du Δ BEC.

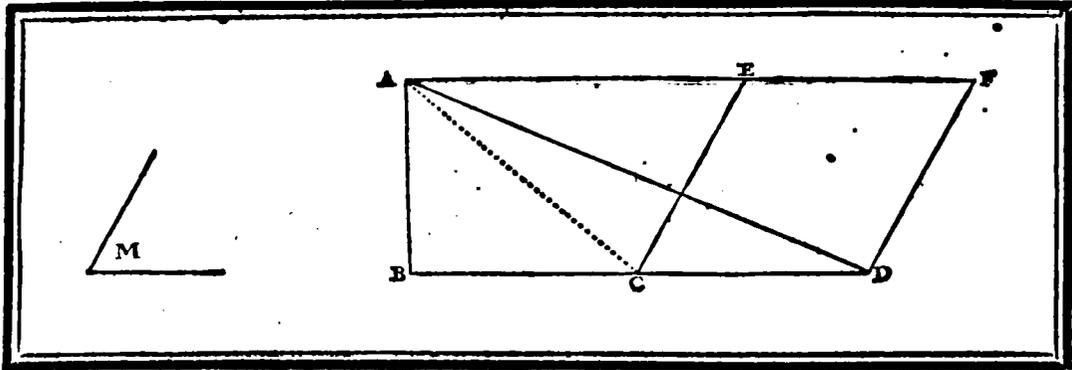
Prop. 37. L. 1.

Prop. 34. L. 1.

Ax. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XLII. PROBLEME XI.
Construire un parallélogramme (ED); égal à un triangle donné (BAD); & qui ait un angle (DCE) égal à un angle rectiligne donné (M).

DONNÉES

1. Le $\triangle BAD$,
2. Et \sphericalangle rectiligne M.

CHERCHEE.

La Construction d'un Pgr \equiv au $\triangle BAD$;
 & qui ait un $\sphericalangle DCE \equiv$ à \sphericalangle donné M.

Résolution.

1. Coupez la base BD en deux parties égales, au point C. Prop. 10. L. 1.
2. Sur la droite BD au point C construisez un $\sphericalangle DCE \equiv$ à \sphericalangle donné M. Prop. 23. L. 1.
3. Par le point A tirez la droite AF Plle à BD. Prop. 31. L. 1.
4. Prolongez la jambe CE de l'angle DCE, jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite AF en un point E (Rem. de la Prop. XXVII). Dem. 2.
5. Par le point D tirez DF Plle à CE, & prolongez la jusqu'à ce qu'elle rencontre AF en un point F (Rem. de la Prop. XXVII). Prop. 31. L. 1.
Dem. 2.

Préparation.

Du point A au point C tirez la droite AC.

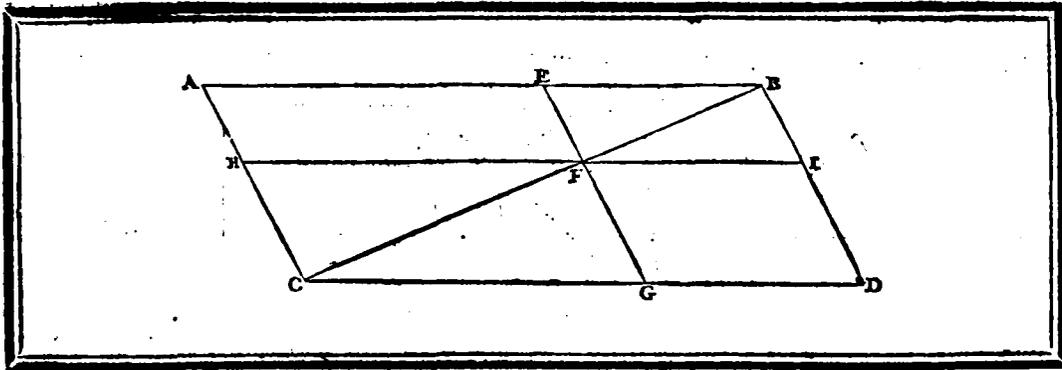
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les $\triangle BAC$, CAD sont placés sur des bases égales BC, CD (Ref. 1) & entre les mêmes Plls BD, AF (Ref. 3).

1. Le $\triangle BAC$ est \equiv au $\triangle CAD$. Prop. 38. L. 1.
2. Partant, le $\triangle BAD$ est double du $\triangle CAD$. N. C.
 Mais dans la figure ED les côtés CD, EF & CE, DF sont Plls (Ref. 3 & 5).
3. Par conséquent, ED est un Pgr. Def. 35. L. 1.
 Or ce Pgr ED & le $\triangle CAD$ sont placés sur une même base CD, & entre les mêmes Plls BD, AF (Ref. 1. 3 & Prep.).
4. D'où il suit, que le Pgr ED est double du $\triangle CAD$. Prop. 41. L. 1.
 Puis donc que le Pgr ED est double du $\triangle CAD$ (Arg. 4) & que le $\triangle BAD$ est aussi double du même $\triangle CAD$ (Arg. 2).
5. Il est évident, que le Pgr ED est \equiv au $\triangle BAD$, Ax. 6.
 Et comme son angle DCE est outre cela \equiv à \sphericalangle donné M (Ref. 2).
6. Ce Pgr ED est \equiv au \triangle donné BAD; & a un $\sphericalangle DCE \equiv$ à \sphericalangle donné M.

C. Q. F. F.



E N tout parallélogramme (AD): les compléments (AF, FD) des parallélogrammes (HG, EI) alentour de la diagonale (BC) sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE

1. AD est un Pgr, dont BC est la diagonale.
11. HG, EI sont des Pgrs alentour, de la diagonale.

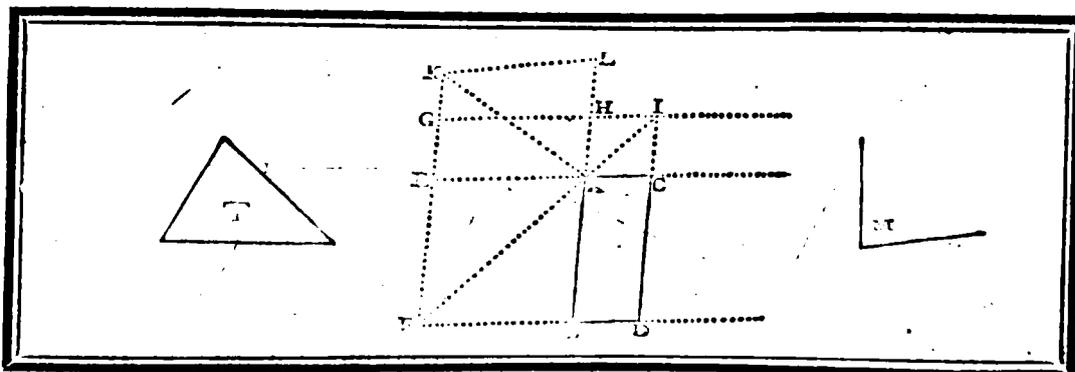
THESE.

Les Pgrs AF, FD qui sont les compléments des Pgrs HG, EI sont = entr'eux.

DEMONSTRATION.

- P** uisque AD est un Pgr, dont BC est la diagonale (Hyp. 1).
1. Cette diagonale partage le Pgr en deux également. Prop. 34. L. 1.
 2. Partant, le ΔCAB est = au ΔBDC .
 - De même; EI étant un Pgr, dont BF est la diagonale (Hyp. 2).
 3. Elle partage aussi le Pgr en deux également. Prop. 34. L. 1.
 4. C'est pourquoi, le ΔFEB est = au ΔBIF .
 - Enfin, HG est un Pgr, dont FC est la diagonale (Hyp. 2),
 5. Qui par conséquent, le partage aussi en deux également. Prop. 34. L. 1.
 6. Partant, le ΔCHF est = au ΔFGC .
 - Puis donc que le ΔFEB est = au ΔBIF (Arg. 4) & le ΔCHF = au ΔFGC (Arg. 6).
 7. Le ΔFEB avec le ΔCHF est = aux ΔBIF & ΔFGC pris ensemble. Ax. 2.
Mais les Δ entiers CAB, BDC étant = entr'eux (Arg. 2); si on retranche de part & d'autre les $\Delta FEB + CHF$ & les $\Delta BIF + FGC$ qu'ils sont égaux (Arg. 7).
 8. Les Pgrs restans AF, FD, qui sont les compléments des Pgrs HG, EI, seront aussi = entr'eux. Ax. 3.

C. Q. F. D.



SUR une ligne droite donnée (AB); construire un parallélogramme (BC) égal à un triangle donné (T); & qui ait un angle (BAC) égal à un angle rectiligne donné (M).

DONNEES.

- I. La droite AB.
- II. Le Δ T,
- III. Et \sphericalangle rectiligne M.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr sur la droite
 AB = au Δ T; & qui ait un \sphericalangle
 BAC = à \sphericalangle donné M.

Résolution.

1. Prolongez la droite AB indéfiniment.
2. Faites AL = à un des côtés du Δ donné T,
3. Et construisez le Δ AKL = au Δ donné T.
4. Décrivez ensuite le Pgr EH = au Δ AKL; & qui ait un \sphericalangle HAE = à \sphericalangle donné M.
5. Par le point B tirez une droite BF Plle à EA ou GH.
6. Prolongez GH indéfiniment; de même GE, jusqu'à ce qu'elle rencontre BF en F (Rem. de la Prop. XXVII).
7. Par les points F & A tirez la droite FA, qui prolongée coupera le prolongement de GH quelque part en I (Rem. de la Prop. XXVII).
8. Par le point de rencontre I tirez la droite ID Plle à HB ou GF,
9. Et prolongez FB, EA, jusqu'à ce qu'elles rencontrent ID aux points D & C (Rem. de la Prop. XXVII).

Dem. 2.
 Prop. 3. L. 1.
 Prop. 22. L. 1.
 Prop. 42. L. 1.
 Prop. 31. L. 1.
 Dem. 2.

Dem. 1.
 Prop. 31. L. 1.
 Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puisque dans la figure DG les côtés opposés GI, FD & GF, ID sont Plls (Ref. 5. 6. 8. & 9).

i. La figure DG est un Pgr.

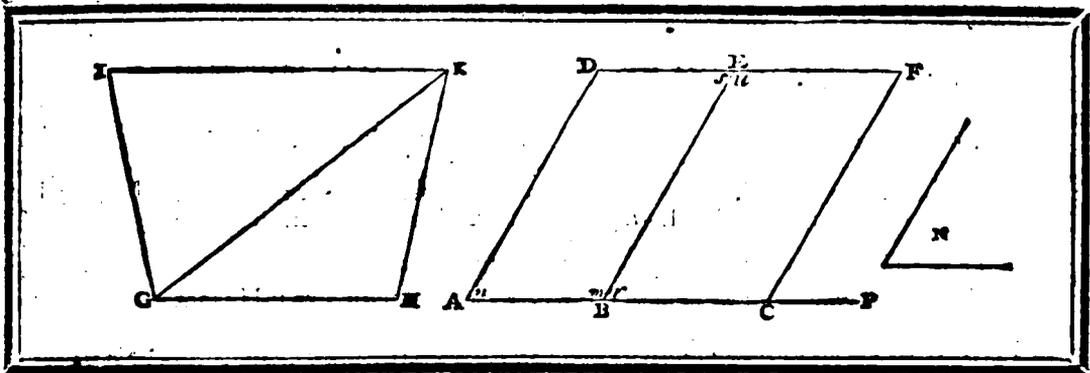
Derechef,

Def. 35. L. 1.

- Derechef, les côtés opposés EA, FB & EF, AB; item HI, AC & HA, IC, des figures EB, HC, étant Plles (Ref. 5. 6. 8. & 9).
2. Ces figures EB, HC sont des Pgrs. Def. 35. L. 1.
- Mais la droite FI est la diagonale du Pgr DG (Ref. 7) & EB, HC sont des Pgrs alentour de cette diagonale (Arg. 2 & Ref. 7).
3. Par conséquent, les Pgrs BC, EH qui en sont les complémens, sont = entr'eux. Prop. 43. L. 1.
Or le Pgr EH est = au Δ AKL (Ref. 4) & le Δ donné T est = au même Δ AKL (Ref. 3).
4. D'où il suit, que le Pgr EH est = au Δ donné T. Ax. 1.
Le Pgr EH étant donc = au Δ donné T (Arg. 4) & ce même Pgr EH étant = au Pgr BC (Arg. 3).
5. Le Pgr BC est = au Δ donné T. Ax. 1.
De plus, à cause que les \sphericalangle HAE, BAC sont opposés au sommet. Prop. 15. L. 1.
6. Ces angles sont = entr'eux. Ax. 1.
C'est pourquoi, \sphericalangle HAE étant = à \sphericalangle donné M (Ref. 4).
7. L'angle BAC est aussi = à cet \sphericalangle donné M.
8. On a donc, sur la droite donnée AB, construit un Pgr BC = au Δ donné T (Arg. 5); & qui a un \sphericalangle BAC = à \sphericalangle donné M (Arg. 7).

C. Q. F. F.





C PROPOSITION LXV. PROBLEME XIII.
 Onstruire un parallélogramme (AF); égal à une figure rectiligne donnée (IH);
 & qui ait un angle (n) égal à un angle rectiligne donné (N).

DONNEES

- I. Une figure rectiligne IH,
- II. Et un \sphericalangle rectiligne N.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr \equiv à la figure rectiligne IH;
 & qui ait un \sphericalangle n \equiv à \sphericalangle donné N.

Résolution.

1. Tirez la diagonale GK. Dem. 1.^o
2. Sur une droite infinie AP construisez le Pgr AE \equiv au Δ GHK;
 qui ait un \sphericalangle n \equiv à \sphericalangle donné N. Prop. 42. L. 1.
3. Sur le côté BE du Pgr AE construisez le Pgr BF \equiv au Δ GIK;
 qui ait un \sphericalangle r \equiv \sphericalangle donné N. Prop. 44. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque \sphericalangle N est \equiv à chacun des \sphericalangle n & r (Ref. 2. & 3).

1. L'angle n est \equiv à \sphericalangle r. Ax. 1.
 Si l'on ajoute de part & d'autre \sphericalangle commun m;
2. Les \sphericalangle n + m seront \equiv aux \sphericalangle r + m. Ax. 2.
 Mais à cause que les côtés AD, BE sont des Plles (Ref. 2) coupées par une même droite AB.
3. Les deux \sphericalangle intérieurs n + m sont \equiv à deux \sphericalangle . Prop. 29. L. 1.
4. Par conséquent, les \sphericalangle contigus r + m, qui leurs sont égaux (Arg. 2), sont aussi \equiv à deux \sphericalangle . Ax. 1.
 Les droites AB, BC, qui rencontrent de part & d'autre la ligne BE au point B, faisant donc avec cette droite BE la somme des \sphericalangle contigus r + m \equiv à deux \sphericalangle (Arg. 4).
5. Ces droites AB, BC ne forment qu'une même ligne droite AC. Prop. 14. L. 1.
 De plus, les droites DE, AC étant deux Plles (Ref. 2) coupées par une même droite BE.

6. Les

6. Les \sphericalangle alternes r & s sont égaux entr'eux,
Et si l'on ajoute de part & d'autre \sphericalangle commun u ;
7. Les $\sphericalangle r + u$ seront \equiv aux $\sphericalangle s + u$.
Mais à cause que les côtés EF , BC sont deux Plles (*Ref. 3*) coupées par une même droite BE .
8. Les \sphericalangle intérieurs $r + u$ sont \equiv à deux L .
9. D'où il suit, que les \sphericalangle contigus $s + u$, qui leurs sont égaux (*Arg. 7*), sont aussi \equiv à deux L .
Les droites DE , EF , qui rencontrent de part & d'autre la ligne BE au point E , faisant donc avec cette droite BE la somme des \sphericalangle contigus $s + u \equiv$ à deux L (*Arg. 9*).
10. Ces droites DE , EF ne forment qu'une même ligne droite DF .
Mais comme les droites AD , BE ; item BE , CF sont des côtés opposés des Pgrs AE , BF (*Ref. 2 & 3*).
11. La droite AD est \equiv & Plle à BE , & BE est \equiv & Plle à CF .
12. Partant AD est \equiv & Plle à CF .
De plus, ces droites \equiv & Plles AD , CF sont jointes par les droites AC , DF (*Arg. 5 & 10*).
13. Partant, la figure AF est un Pgr,
Et puisque le Pgr BF est \equiv au $\triangle GIK$ (*Ref. 3*), le Pgr $AE \equiv$ au $\triangle GHK$
& $\sphericalangle n \equiv$ à \sphericalangle donné N (*Ref. 2*).
14. Le Pgr entier AF est \equiv à la figure rectiligne IH ; & il a un $\sphericalangle n \equiv$ à \sphericalangle donné N .

Prop. 29. L. 1.

Ax. 3.

Prop. 29. L. 1.

Ax. 1.

Prop. 14. L. 1.

Prop. 34. L. 1.

Prop. 30. L. 1.

Ax. 1.

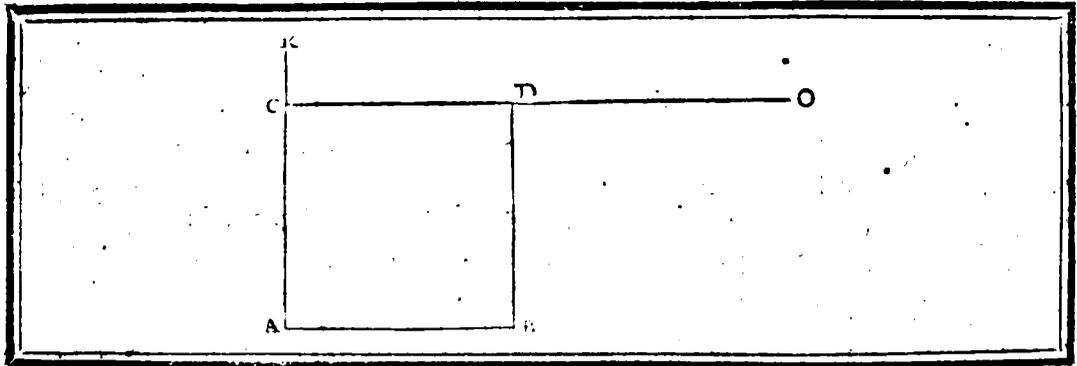
Prop. 33. L. 1.

Def. 35 L. 1.

Ax. 2.

e. Q. E. F.





S PROPOSITION XLVI. PROBLEME XIV.
 Sur une ligne droite donnée (AB) construire un quarré (AD).

DONNEE.
 La droite AB.

CHERCHEE.
 La construction d'un quarré sur la droite AB.

Résolution.

1. DU point A élevez sur la droite AB la perpendiculaire AK. Prop. 11. L. 1.
2. Retranchez de la droite AK une partie AC = à AB. Prop. 3. L. 1.
3. Par le point C tirez la droite CO Plle à AB, Prop. 31. L. 1.
4. Et par le point B tirez la droite BD Plle à AC, laquelle coupera }
 CO quelque part en D (Rem. de la Prop. XXVII).

DEMONSTRATION.

Puisque dans la figure AD les côtés opposés AB, CD, de même que AC, BD sont Plles (Ref. 3 & 4).

1. La figure AD est un Pgr. Def. 35. L. 1.
2. Partant, les côtés opposés AB, CD & AC, BD sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
 Mais AC est = à AB (Ref. 2).
3. Par conséquent, les quatre côtés AB, CD, AC, BD sont = entr'eux. Ax. 1.
 Derechef, puisque les droites AB, CD sont Plles. (Ref. 3).
4. Les \sphericalangle intérieurs opposés A & ACD sont = à deux \sphericalangle . Prop. 29. L. 1.
 Or l'angle A étant un \sphericalangle (Ref. 1).
5. Il est évident, que \sphericalangle ACD est un \sphericalangle aussi. N. C.
 De plus, à cause que AD est un Pgr (Arg. 1).
6. Les angles opposés sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
7. C'est pourquoy, les \sphericalangle BDC & B, opposés aux \sphericalangle droits A & ACD, sont aussi des \sphericalangle .
 La figure AD étant donc un Pgr (Arg. 1) équilatéral (Arg. 3) & rectangulaire (Arg. 7).
8. Il s'enfuit, que cette figure AD construite sur la droite AB est un quarré. Def. 30. L. 1.

C. Q. F. F.

C O R O L L A I R E I .

Tout parallélogramme, qui a deux côtés égaux AB, AC alentour d'un angle droit, est un carré. Car en tirant par les points $C \& B$ les parallèles CD, BD aux deux côtés AB, AC , on aura construit le carré AD (Def. 30. L. 1).

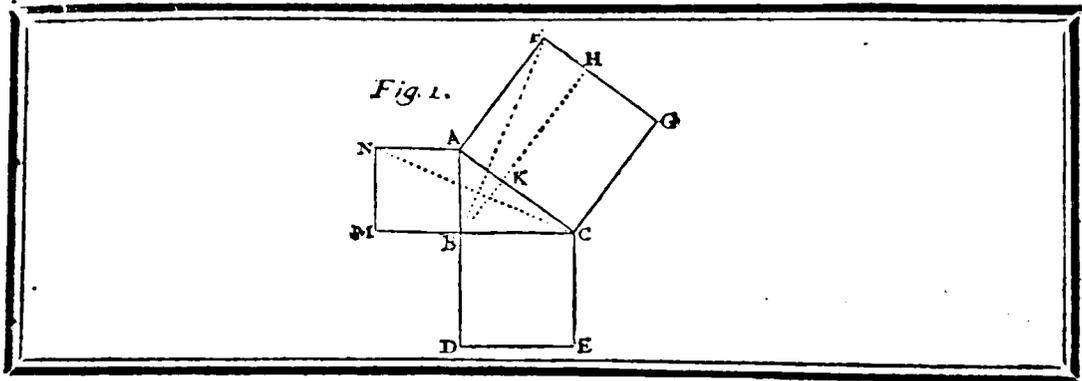
C O R O L L A I R E I I .

Si dans un parallélogramme un seul angle est droit, les trois autres le sont aussi; ou bien, un tel parallélogramme est rectangle. Car puisque les angles opposés $A \& BDC$ sont égaux (Prop. 34. L. 1) & que l'angle A est un angle droit, l'angle BDC sera aussi droit; de plus les lignes AB, CD , item AC, BD étant des parallèles, les angles intérieurs $A \& ACD$, item $A \& B$ sont égaux à deux droits (Prop. 29. L. 1). Mais l'angle A étant un angle droit, il est manifeste que les angles $ACD \& B$ sont des droits aussi.

C O R O L L A I R E I I I .

Si deux lignes sont égales, les carrés décrits sur ces lignes seront égaux; & réciproquement, si les carrés sont égaux, leurs côtés le seront aussi.





PROPOSITION XLVII. THEOREME XXXIII.
Dans tout triangle rectangle (ABC): le carré de l'hypothénuse (AC) est égal aux carrés des deux autres côtés (AB , BC), qui renferment l'angle droit (ABC).

HYPOTHESE.

Le $\triangle ABC$ est rectangle, ou $\sphericalangle ABC$ est \perp .

THESE.

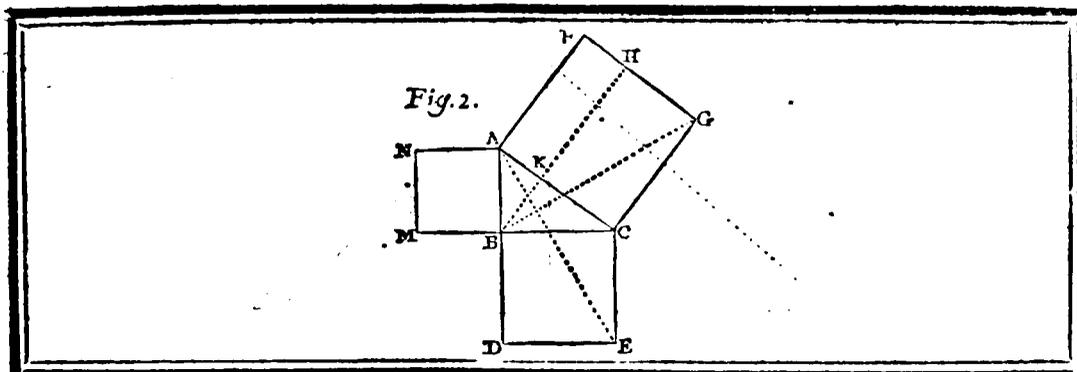
Le \square de l'hypothénuse AC est \equiv au \square de AB .
 & au \square de BC pris ensemble.

Préparation.

1. Construisez (*Fig. 1.*) sur les trois côtés AC , AB , BC des \square AG , AM , CD . Prop. 46. L. 1.
2. Par le point B tirez la droite BH Plle à AF ou CG . Prop. 31. L. 1.
3. Du point B au point F tirez la droite BF , } Dem. 1.
4. Et du point C au point N la droite CN . }

DEMONSTRATION.

- P**uisque la figure AM est un \square (*Prep. 1.*),
1. L'angle ABM est un \perp . Def. 30. L. 1.
 Mais $\sphericalangle ABC$ étant aussi un \perp (*Hyp.*)
 2. Les deux \sphericalangle contigus ABM , ABC sont \equiv à deux \perp . Ax. 2.
 Les droites MB , BC , qui rencontrent de part & d'autre la ligne AB au point B , faisant donc avec cette droite AB la somme des \sphericalangle contigus ABM , ABC \equiv à deux \perp (*Arg. 2.*)
 3. Ces droites MB , BC ne font qu'une même ligne droite MC qui est Plle à NA . { Prop. 14. L. 1.
 Par la même raison on prouvera que { Prop. 29. L. 1.
 4. La droite AB ne forme avec BD qu'une même droite AD qui est Plle à CE .
 De plus, à cause que AG , AM sont des \square (*Prep. 1.*)
 5. Les \sphericalangle FAC , NAB sont \equiv entr'eux (puisque'ils sont des angles droits); & les côtés AF , AC , item AB , AN sont aussi \equiv entr'eux. Def. 30. L. 1.
 Si donc on ajoute à ces \sphericalangle égaux, FAC , NAB (*Arg. 5.*), \sphericalangle commun CAB ;
 6. L'angle



6. L'angle entier FAB sera = à \sphericalangle entier NAC.

Puis donc que dans les Δ AFB, ACN les côtés AF, AB & AC, AN sont = chacun à chacun (*Arg. 5*), & que \sphericalangle compris FAB est = à \sphericalangle compris NAC (*Arg. 6*).

7. Le Δ AFB sera = au Δ ACN.

Mais le Δ AFB & le Pgr AH sont placés sur la même base AF & entre les mêmes Plles AF, BH (*Prep. 2*).

8. D'où il suit, que le Pgr AH est double du Δ AFB.

De même; le Δ ACN & le \square AM étant placés sur la même base AN & entre les mêmes Plles AN, MC (*Arg. 3*).

9. Le \square AM est double du Δ ACN.

Les Δ AFB, ACN étant donc = entr'eux (*Arg. 7*) & le Pgr AH & le \square AM en étant doubles (*Arg. 8 & 9*).

10. Il s'ensuit, que le Pgr AH est = au \square AM.

De la même manière; en tirant (*Fig. 2*) les lignes BG, AE on démontrera, que le Pgr CH est = au \square CD.

11. Mais le Pgr AH avec le Pgr CH forment le \square AG.

12. C'est pourquoi, ce \square AG est = à la somme des \square AM & CD.

Or comme le \square AG est le \square de l'hypothénuse AC, & les \square AM & CD les \square des deux autres côtés qui renferment l'angle droit ABC.

13. Le \square de l'hypothénuse AC est = au \square des deux autres côtés AB & BC pris ensemble.

Ax. 2.

Prop. 4. L. 1.

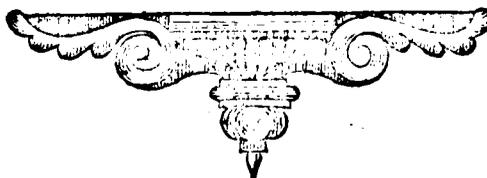
Prop. 41. L. 1.

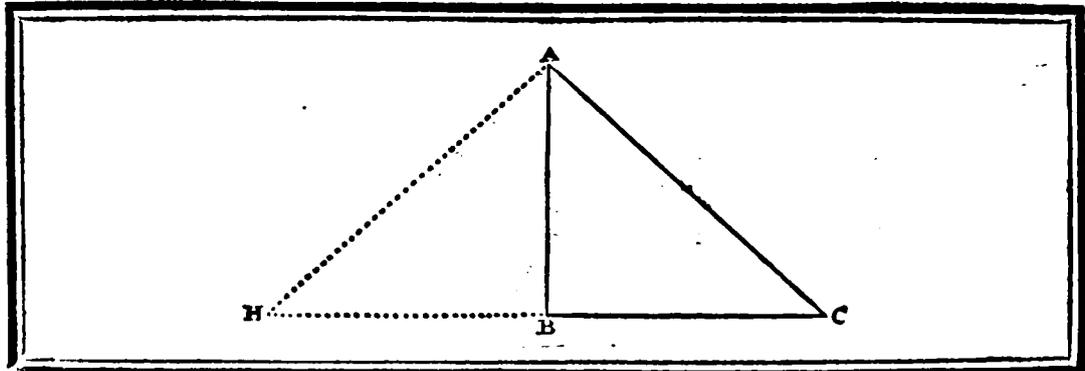
Prop. 41. L. 1.

Ax. 6.

Ax. 1.

C. Q. F. D.





S PROPOSITION XLVIII. THEOREME XXXIV.
 SI le carré de l'un des côtés (CA) d'un triangle (CBA) est égal aux carrés des deux autres côtés (AB, BC): l'angle (ABC) compris de ces deux côtés (AB, BC) est droit.

HYPOTHESE.

Le \square de CA est \equiv aux \square de AB & au \square de BC.

THESE.

L'angle ABC compris des côtés AB, BC est \perp .

Préparation.

1. DU point B, sur la droite BA, élevez la perpendiculaire BH.
2. Faites $BH = BC$.
3. Du point H au point A tirez la droite HA.

Prop. 11. L. 1.
 Prop. 3. L. 1.
 Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque BH est \equiv à BC (Prep. 2).

1. Le \square de BH fera \equiv au \square de BC.

Si on ajoute de part & d'autre le \square de AB.

2. Les \square de AB & BH seront \equiv aux \square de AB & BC pris ensemble.

Mais le \triangle HBA étant Rgle en B (Prep. 1).

3. Il s'enfuit, que le \square de HA est \equiv aux \square de AB & BH.

Puis donc que le \square de CA est \equiv aux \square de AB & BC (Hyp. 1), le \square de HA \equiv aux \square de AB & BH (Arg. 3) & que les \square de AB & BH sont \equiv aux \square de AB & BC (Arg. 2).

4. Il faut nécessairement, que le \square de CA soit \equiv au \square de HA.

5. Partant, CA est \equiv à HA.

Or dans les \triangle CBA, HBA le côté CA est \equiv au côté HA (Arg. 5), AB est commun aux deux \triangle & la base BC est \equiv à la base BH (Prep. 2).

6. Par conséquent, les \sphericalangle ABC, ABH, compris par les côtés égaux AB, BC & AB, BH, sont \equiv entr'eux.

Mais l'angle ABH est un \perp (Prep. 1).

7. Partant l'angle ABC sera aussi droit.

} Prop. 46. L. 1.
 } Coroll. 3.

Ax. 2.

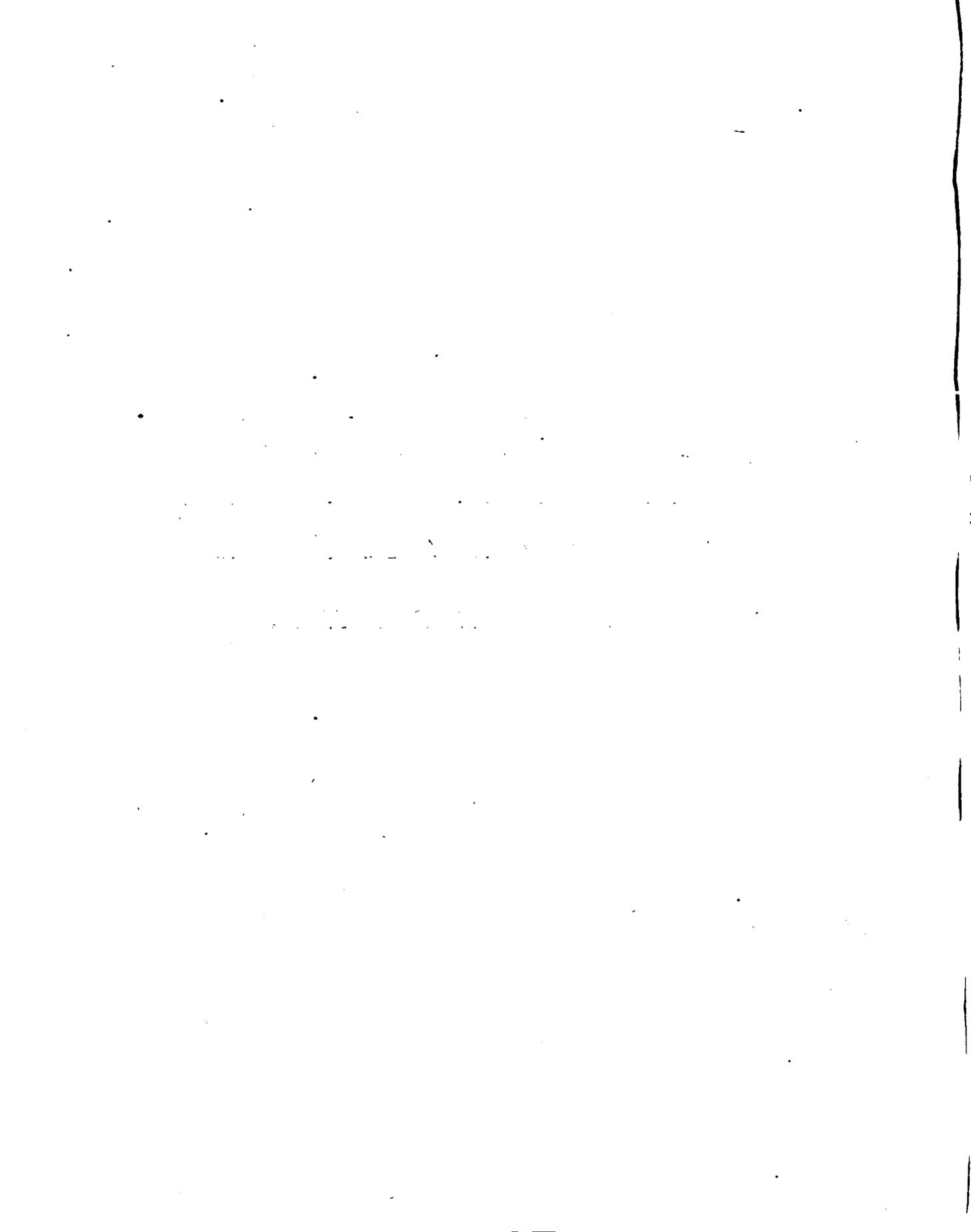
Prop. 47. L. 1.

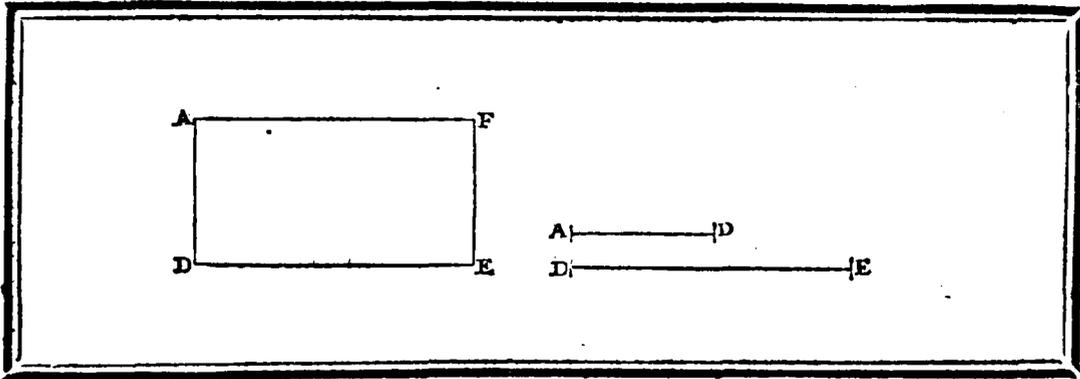
Ax. 1.
 } Prop. 46. L. 1.
 } Coroll. 3.

Prop. 8. L. 1.

C. Q. F. D.

L E S
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
L I V R E S E C O N D.





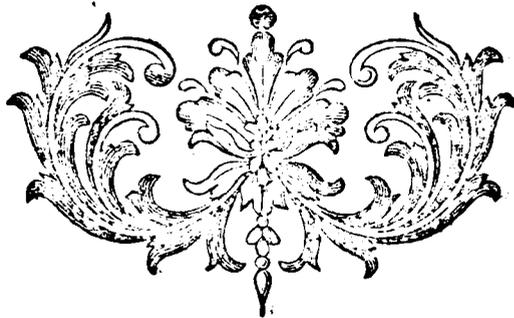
D E F I N I T I O N S.

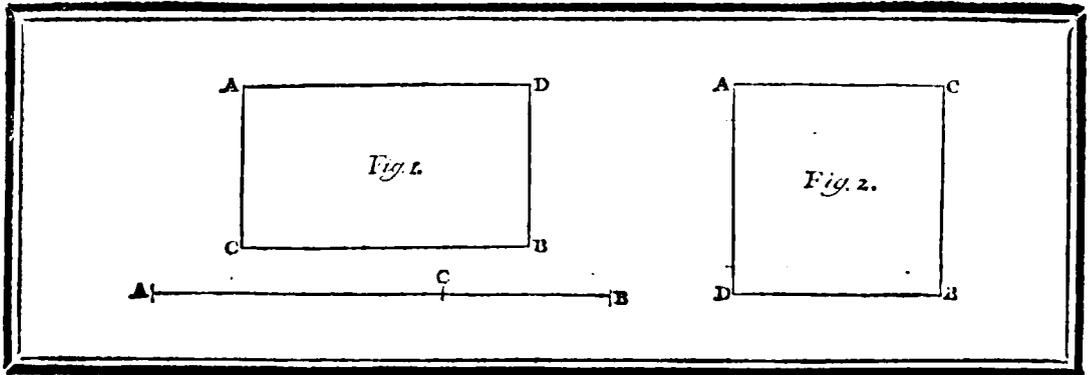
I.

ON dit de tout Parallélogramme rectangle (DF); qu'il est compris des deux côtés (AD, DE) qui environnent l'angle droit (ADE).

1. Un Parallélogramme rectangle peut être désigné de cette manière; parcequ'un angle droit & les deux côtés qui l'environnent sont les déterminantes d'une telle figure. Aussitôt que la longueur des côtés AD, DE, alentour de l'angle droit, est fixée, la grandeur du Rectangle est déterminée en tout sens; puisqu'on achève de le construire en tirant par les extrémités A & E de ces côtés des paralleles à ces mêmes côtés AD, DE, selon la Def. 35. & Prop. 31. L. 1.

2. Pour abréger, on désigne souvent un Parallélogramme rectangle DF par les trois lettres alentour de l'angle droit, en cette manière; le Pgr Rgle ADE. On le marque aussi ainsi. Le Pgr Rgle AD; DE; ce qui veut dire le Pgr Rgle qui resulteroit des deux côtés AD & DE formant un angle droit: on le prononce simplement, le Pgr Rgle sous AD & DE; ou le Pgr Rgle de AD & DE.

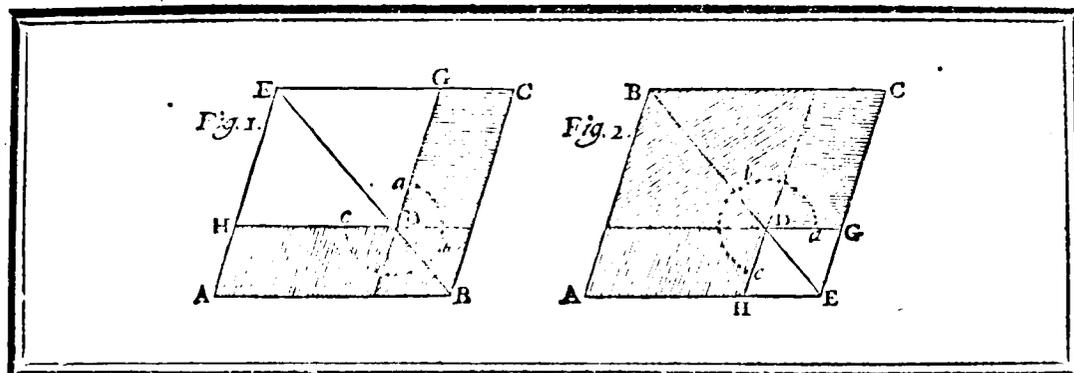




D E F I N I T I O N S.

3. Quelquefois les parties d'une ligne droite servent à indiquer un tel parallélogramme rectangle; par ex. (Fig. 1). la droite AB étant partagée en C, on peut construire (Prop. 31. L. 1.) de ces deux lignes AC, CB un parallélogramme rectangle, en les joignant à angle droit. On désigne donc ce parallélogramme ainsi. Le Pgr Rgle AC; CB; ou bien simplement le Pgr Rgle ACB; où la lettre du milieu marque le point qui est commun aux deux lignes. De la même manière, on entend par le Pgr Rgle ABC, celui qu'on construirait selon les mêmes règles, en prenant AB pour un côté & BC pour l'autre.
4. Dans le cas où les lignes AD, & DB alentour de l'angle droit sont égales (Fig. 2), le parallélogramme DC est un carré (Def. 30. L. 1). Comme dans ce cas, un des côtés DB avec l'angle droit déterminent le carré, que l'on peut construire de ces données (par la Prop. 31. L. 1). On pourra aussi désigner ce carré par ses déterminantes, de cette façon, le \square de DB; ou le \square de AD.



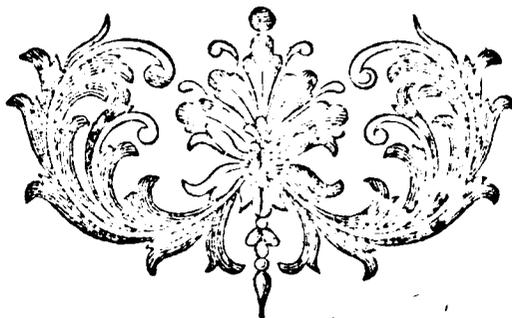


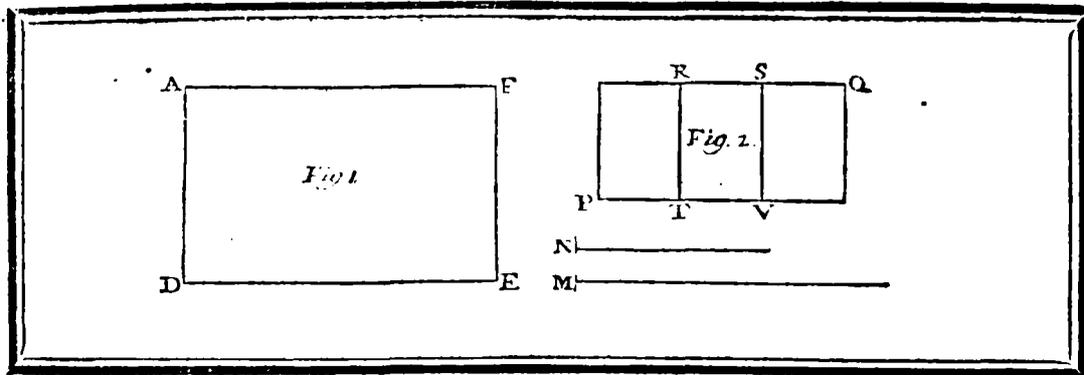
D E F I N I T I O N S .

II.

ON appelle *Gnomon*, ou *Equerre*, la figure (ABCGDHI) composée d'un parallélogramme (DB) alentour de la diagonale (BE) & de deux compléments (AD, DC).

On marque le *Gnomon* par un arc de cercle *abc*, qui passe par les deux compléments (AD, DC) & le *Pgr* alentour de la diagonale, desquels il est composé. On peut former dans chaque *Pgr* deux *Gnomons* différens; d'abord, en retranchant (Fig. 1) du *Pgr* entier, le plus grand *Pgr* (ED) alentour de la diagonale; ou bien, en retranchant (Fig. 2) le plus petit *Pgr* (ED) alentour de la diagonale.





A X I O M E S .

I.

LE tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

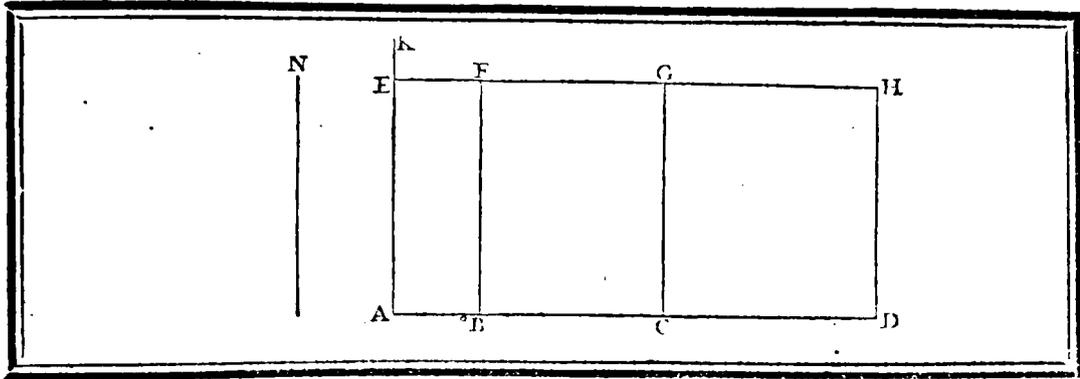
Le Pgr entier PQ, (Fig. 2) est égal à toutes ses parties, les Pgrs PR, TS, VQ pris ensemble.

II.

LEs parallélogrammes rectangles compris de côtés égaux; sont égaux.

Le Pgr Rgle DF (Fig. 1) est compris des droites AD, DE; par conséquent si la droite N est égale à AD, & la droite M égale à DE, le Rgle formé des droites N & M sera nécessairement égal au Rgle DF. Cela est évident par un des premiers principes de nos raisonnemens, qui demande, que toutes les déterminées de deux sujets soient les mêmes, aussitôt qu'il ne se trouve pas de différence dans leurs déterminantes.





S I de deux lignes droites (AD & N), l'une (comme AD) est coupée en tant de parties (AB, BC, CD) que l'on voudra : le rectangle compris de ces deux droites (AD & N) est égal aux rectangles compris de la droite entière (N), & de chaque partie (AB, BC, CD) de la coupée (AD).

HYPOTHESE.

AD & N sont deux droites, dont l'une AD est coupée en plusieurs parties AB, BC, CD.

THESE.

Le Rgle AD . N est = aux Rgles AB . N + BC . N + CD . N.

Préparation.

1. **S**UR AD, au point A élevez la \perp AK.
2. De la droite AK retranchez une partie EA = N.
3. Par les points D & E tirez les droites DH, EH Plles à AE, AD,
4. Et par les points de section B, & C, les droites BF, CG Plles à AE ou DH.

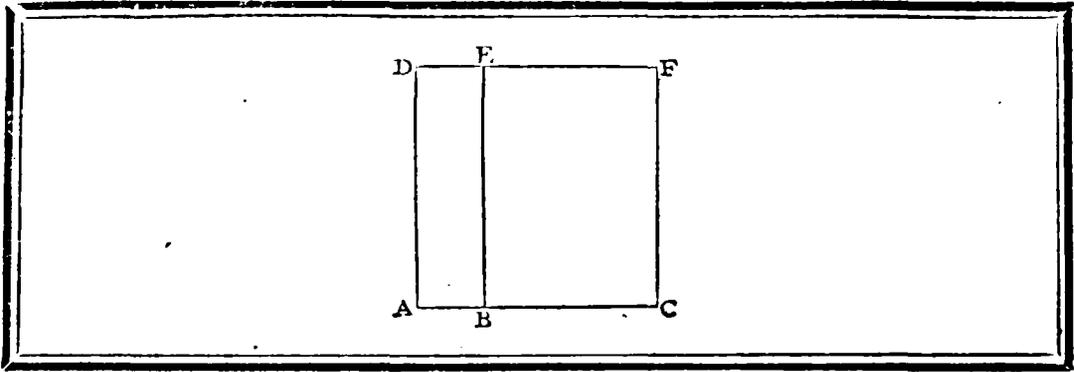
Prop. 11. L. 1.
Prop. 3. L. 1.

} Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

1. **L**E Rgle AH est = aux Rgles AF, BG, CH pris ensemble. Ax. 1. L. 2.
Mais à cause que le Rgle AH est compris des droites EA, AD (*Prep. 3*) & que EA = N (*Prep. 2*).
2. Ce Rgle AH est compris des droites AD & N. Ax. 2. L. 2.
De meme ; à cause que le Rgle AF est compris des droites EA, AB (*Prep. 4*) & que EA = N (*Prep. 2*).
3. Ce Rgle AF est compris des droites AB & N. Ax. 2. L. 2.
4. De la même maniere ; le Rgle BG est compris des droites BC & N ; parce qu'il est compris des droites FB & BC & que FB = N ; Prop. 31. L. 1.
Et ainsi de tous les autres.
5. Partant, le Rgle compris des droites AD & N est = aux Rgles compris des droites AB & N, BC & N, CD & N pris ensemble. c. à. d. le Rgle AD . N est = aux Rgles AB . N + BC . N + CD . N. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



P R O P O S I T I O N I I . T H E O R E M E I I .

SI une ligne droite (AC) est coupée en tant de parties (AB, BC), que l'on voudra: les rectangles compris de la droite entière (CA) & de chacune de ses parties (AB, BC), sont égaux au carré de la droite entière (AC).

H Y P O T H E S E .

AC est une droite coupée en plusieurs parties AB, BC.

T H E S E .

*Le Rgle CAB + le Rgle ACB
sont = au □ de AC.*

- P r é p a r a t i o n .

1. **S**ur la droite AC construisez le □ AF.
2. Par le point de section B tirez la droite BE Plle à AD, ou CF.

Prop 46. L. I.
Prop. 31. L. I.

D E M O N S T R A T I O N .

1. **L**E Rgle entier AF est = aux Rgles AE, BF pris ensemble.
Mais ce Rgle AF est le □ de la ligne AC (*Prep. 1*).
2. Partant, les Rgles AE, BF pris ensemble égalent le carré de la ligne AC.
3. Or le Rgle AE, est compris des droites CA, AB; à cause qu'il est compris des droites DA, AB dont $DA = CA$ (*Prep. 1*).
4. De même, BF est un Rgle compris des droites AC, CB; parcequ'il est compris des droites EB, BC; dont $EB = AC$ (*Prep. 1 & 2*).
5. C'est pourquoi, le Rgle compris des droites CA, AB avec le Rgle compris des droites AC, CB est = au □ de la droite AC; ou bien le Rgle CAB + le Rgle ACB sont = au □ de AC.

Ax. 1. L. 2.

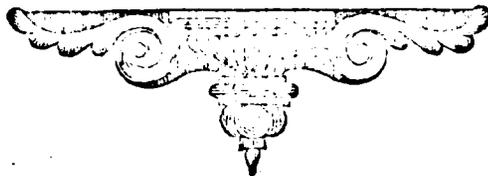
Ax. 1. L. 2.

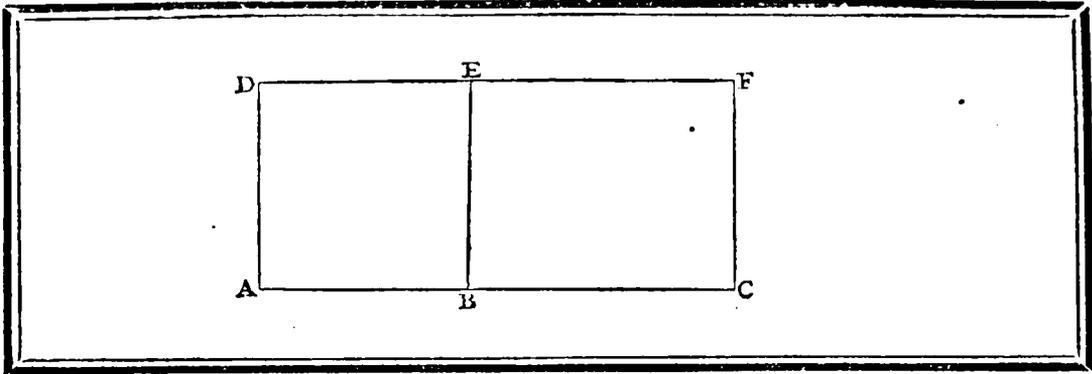
Ax. 2. L. 2.

Prop. 34. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION III. THEOREME III.

SI une ligne droite (AC) est coupée comme l'on voudra (en B): le rectangle compris de la droite entière (CA) & de l'une de ses parties (AB) est égal au rectangle compris des deux parties (AB, BC), & au carré de la partie (AB), prise auparavant.

HYPOTHESE.

AC est une droite coupée en deux parties quelconques AB, BC.

THESE.

Le Rgle CAB est = au Rgle ABC + le □ de AB.

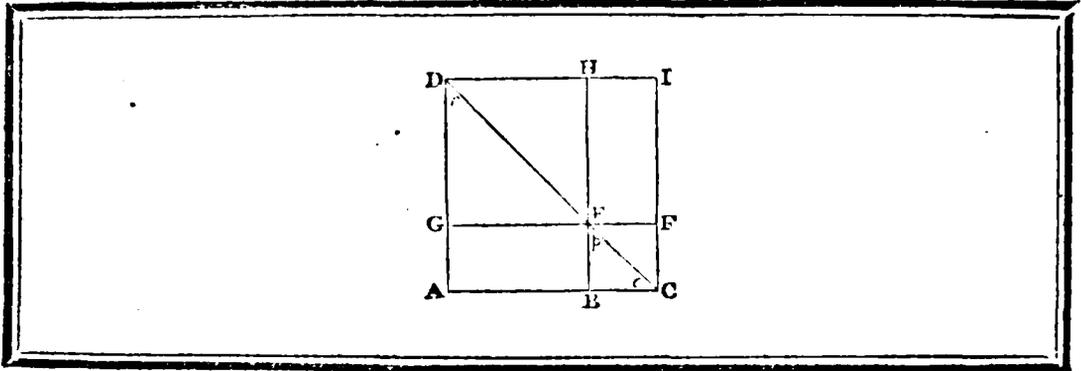
Préparation.

1. Sur la droite AB construisez le □ AE. Prop 46. L. 1.
2. Prolongez le côté DE indéfiniment vers F. Dem. 2.
3. Par le point C tirez la droite CF Plle à AD ou BE, & prolongez la, jusqu'à ce qu'elle rencontre DF au point F. Prop. 31. L. 1.
Dem. 2.

DEMONSTRATION.

1. LE Rgle AF est = aux Rgles AE & BF pris ensemble. Ax. 1. L. 2.
2. Mais le Rgle AF est compris des droites CA, AB; parce qu'il est compris de CA & AD, dont AD = AB (Prep. 1). Ax. 2. L. 2.
3. Et le Rgle BF est compris de AB, BC; à cause qu'il est compris de EB, BC, dont EB = AB (Prep. 1). Ax. 1. L. 1.
4. Le Rgle de CA. AB est = au Rgle de AB. BC avec le □ de AB; ou bien le Rgle CAB est = au Rgle ABC + le □ de AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.

SI l'on coupe une droite (AC) en deux parties quelconques (AB, BC): le carré de la droite entière (AC) est égal aux carrés des deux parties (AB, BC), & au double rectangle compris de ces deux parties (AB, BC).

HYPOTHESE.

AC est une droite coupée en deux parties quelconques AB, BC.

THESE.

Le \square de AC est \equiv au \square de AB + au \square de BC + 2 Rgles AB, BC.

Préparation.

1. Sur AC construisez le \square AI.
2. Par le point de section B tirez BH Plle à CI, ou AD.
3. Tirez la diagonale CD qui coupera BH quelque part en E.
4. Par le point E tirez GF Plle aux côtés opposés DI ou AC.

Prop. 46. L. 1.
Prop. 31. L. 1.
Dem. 1.
Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les lignes AD, BH, CI, de même AC, GF, DI sont Plles (Prep. 1. 2. & 4).

1. Les quatre figures AE, EI, BF, GH sont des Pgrs.
Et parce que chacune de ces figures renferme un des angles droits du \square AI.
2. Ces Pgrs sont aussi Rgles.
De plus; à cause que les côtés DA, AC du \square AI sont égaux (Def. 30. L. 1).
3. L'angle r est \equiv à $\sphericalangle o$.
Et à cause du parallélisme des droites AD, BH (Prep. 2.) coupées par la droite DC (Prep. 3).
4. L'angle intérieur r est \equiv à son \sphericalangle extérieur opposé p .
5. Partant, $\sphericalangle o = \sphericalangle p$.
6. C'est pourquoi, le côté BE est \equiv au côté BC.
7. Et le Rgle BF est un \square ; & nommément le \square de BC.
8. On prouvera de la même manière, que le Pgr GH est un \square ; & nommément le \square de AB; à cause que GE = AB.
De plus BE étant \equiv à BC (Arg. 6).
9. Le Rgle AE, ou le Rgle de AB . BE sera \equiv au Rgle de AB . BC.
Mais le Rgle AE est \equiv au Rgle EI (Prop. 43. L. 1).
10. D'où il suit, que le Rgle EI est aussi \equiv à un Rgle de AB . BC.

Def. 35. L. 1.

Prop. 46. L. 1.
Coroll. 2.

Prop. 5. L. 1.

Prop. 29. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

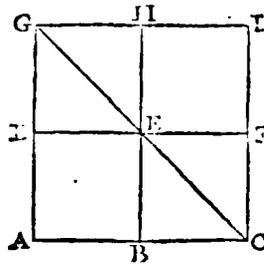
Prop. 6. L. 1.

Def. 30. L. 1.

Prop. 34. L. 1.

Ax. 2. L. 2.

Ax. 1. L. 1.



11. Par conséquent, les deux Rgles AE, EI pris ensemble, sont égaux au double rectangle des parties AB, BC.
 Puis donc que les deux \square GH & BF sont les quarrés des deux parties AB & BC (*Arg.* 7 & 8). & que les Rgles AE, EI pris ensemble, sont = au double Rgle des parties AB, BC.
12. Il s'enfuit, que le \square de la ligne entiere AC est = au \square de AB + au \square de BC + 2 Rgles ABC.

C. Q. F. D.

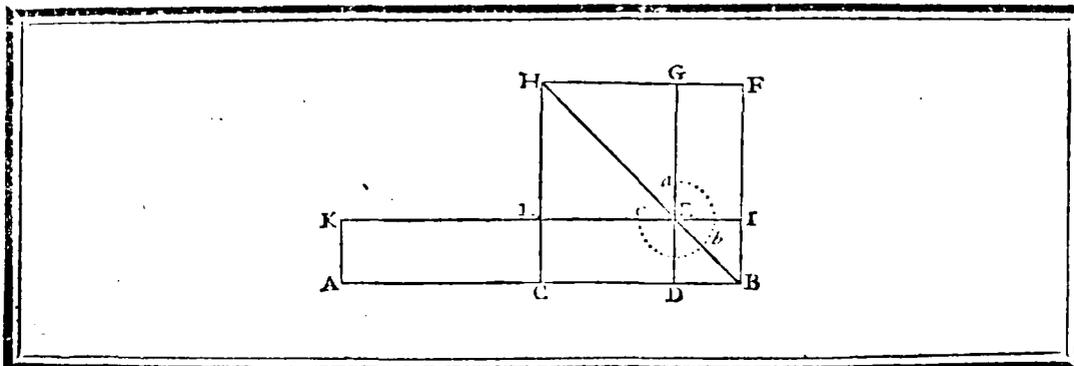
C O R O L L A I R E I.

Quand deux droites HB, DF Ples aux côtés d'un quarré s'entrecoupent en un même point E de la diagonale, les Rgles BF, DH formés autour de la diagonale sont des quarrés.

C O R O L L A I R E II.

SI l'on coupe la ligne AC en deux également en B, les complémens AE, EI sont des quarrés, & ces complémens égaux entr'eux, sont aussi égaux aux quarrés alentour de la diagonale, & le quarré de la ligne entiere AC est quadruple du quarré d'une des parties AB ou BC.

Car BF, DH sont des quarrés, (par le Coroll. précédent), égaux entr'eux; à cause que $BC = AB = DE$. De plus AE étant = à BF & EI étant = à BF, (Prop. 36. L. 1); les complémens AE, EI sont donc des quarrés aussi: & puisqu'ils sont égaux entr'eux; le \square de AC = 4 \square de AB = 4 \square de BC.



P R O P O S I T I O N V. T H E O R E M E V.

UNé droite (AB) étant partagée en deux parties égales (AC, CB) & en deux inégales (AD, DB); le rectangle compris des deux parties inégales (AD, DB) & le carré de la partie (CD), comprise entre les points de section (C & D), sont égaux au carré de la moitié (AC ou CB) de la droite entière (AB).

H Y P O T H E S E.

AB est une droite coupée en deux également en C, & en deux inégalement en D.

T H E S E.

Le Rgle AD.B + le □ de CD sont = au □ de CB.

Préparation.

1. **S**UR la droite CB construisez le □ CF.
2. Par le point de section D, tirez DG Plle à BF ou CH.
3. Tirez la diagonale BH, qui coupera DG quelque part en E.
4. Par le point de section E tirez IL Plle à BC ou FH, & par le point A, la droite AK Plle à CL, qui coupera le prolongement de IL en K.

Prop. 46. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Dem. 1.

Prop. 31. L. 1.

D E M O N S T R A T I O N.

- P**UISQUE la figure CF est un carré (*Prep. 1*).
1. Les Rgles LG, DI, alentour de la diagonale sont des □.
 2. Et nommément DI le □ de DB, & LG le □ de CD; à cause que LE = CD.
 3. De plus, le complément CE est = au complément EF.
 4. Qu'on ajoute de part & d'autre le □ DL.
 5. Le Rgle CI sera = au Rgle DF.
 6. Mais parce que AC = CB (*Hyp.*).
 7. Le Rgle AL est = au Rgle CI.
 8. Partant, le Rgle AL est = au Rgle DF.
 9. Si donc on ajoute de part & d'autre le Rgle CE;
 10. Le Rgle entier AE fera = aux Rgles DF & CE pris ensemble; c. à d. au Gnomon abc.
 11. Mais le Rgle AE est compris de AD, DB; parce qu'il est compris de AD, DE, dont DE = DB (*Arg. 1*).
 12. Par conséquent, le Rgle de AD . DB est aussi = au gnomon abc.
 13. Ajoutant de nouveau de part & d'autre le □ LG, qui est le carré de CD (*Arg. 2*).
 14. Le Rgle AD . DB avec le □ de CD fera = au Gnomon abc avec le □ LG.
 15. Or ce Gnomon abc avec le □ LG est = au □ CF, qui est le carré de la moitié CB, de la droite entière AB (*Prep. 1*).
 16. Partant, le Rgle AD.B + le □ de CD sont = au □ de CB.

Prop. 4. L. 2.

Coroll. 1.

Prop. 34. L. 1.

Prop. 43. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 1. L. 2.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

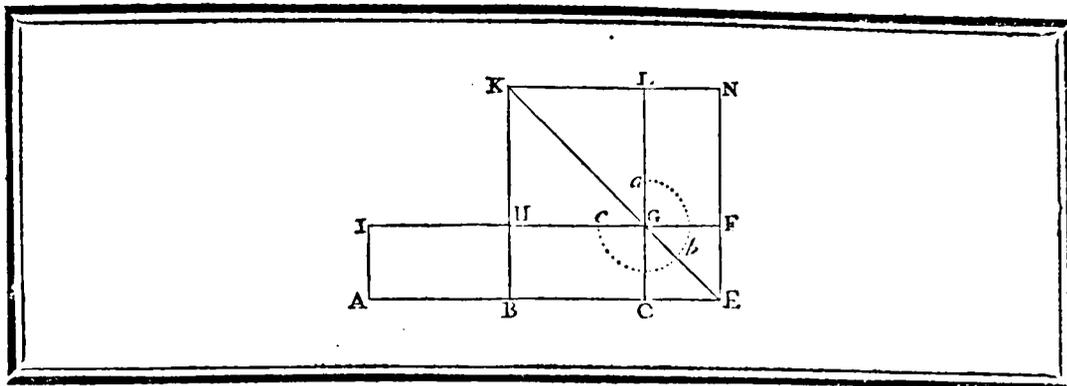
Ax. 2. L. 2.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. THEOREME VI.

SI une droite (AC) est partagée en deux parties égales (AB, BC), & qu'on y ajoute directement une partie quelconque (CE): le rectangle compris de la droite entière (AE) & de l'ajoutée (EC) avec le carré de la moitié (BC), est égal au carré de la droite (BE) composée de la moitié (BC) de l'entière (AC) & de l'ajoutée (CE).

HYPOTHESE

- I. AC est une droite coupée en deux également en B.
- II. A laquelle on ajoute directement une partie CE.

THESE.

Le Rgle AEC + le \square de BC est = au \square de BE.

Préparation.

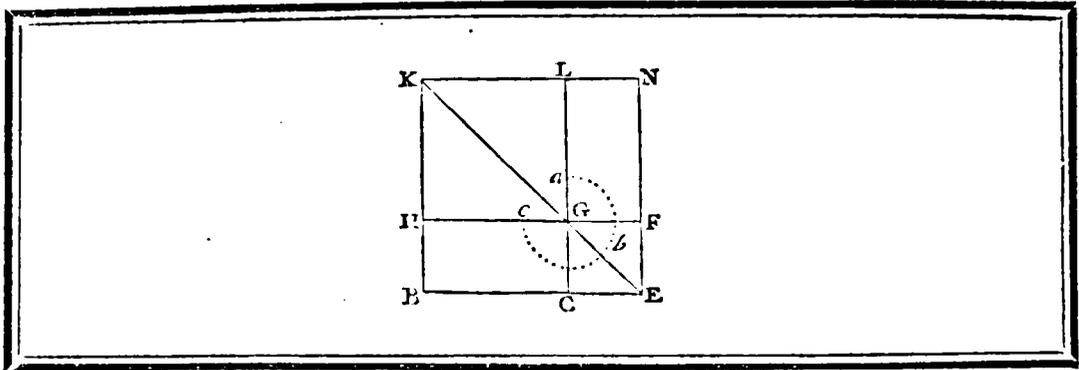
1. Sur la droite BE construisez le \square BN. Prop. 46. L. 1.
2. Par le point C, tirez la droite CL Pile à EN ou BK. Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la Diagonale EK, qui coupera CL quelque part en G. Dem. 1.
4. Par le point G, tirez FH Pile à EB ou NK,
5. Et par le point A, la droite AI Pile à BK, qui coupera le prolongement de FH quelque part en I. } Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

- Puisque la figure BN est un carré (Prop. 1).
1. Les Rgles CF, HL, alentour de la diagonale, sont des carrés. { Prop. 4. L. 2.
Et à cause que HG est = à BC (Prop. 34. L. 1). { Coroil. 1.
 2. Le \square HL est = au \square de BC. { Prop. 46. L. 1.
De plus AB étant = à BC. (Hyp. 1). { Coroil. 3.
 3. Le Rgle AH est = au Rgle BG. Ax. 2. L. 2.
Mais le Rgle BG est = au Rgle GN. (Prop. 43. L. 1).
 4. Le Rgle AH est donc aussi = au Rgle GN. Ax. 1. L. 1.
Et si on ajoute de part & d'autre le Rgle BF;
 5. Le Rgle entier AF fera = aux Rgles GN & BF pris ensemble; c. à d. au Gnomon abc. Ax. 2. L. 1.
 6. Mais ce Rgle AF est compris des droites AE, EC; parceque EC = EF (Arg. 1). Ax. 1. L. 1.
 7. C'est pourquoi le Rgle AE. EC est aussi = au Gnomon abc. Ax. 1. L. 1.
Si on ajoute donc de part & d'autre le \square HL; qui n'est autre chose que le \square de BC (Arg. 2);
 8. Le Rgle AE. EC avec le \square de BC fera = au Gnomon abc avec le \square HL. Ax. 2. L. 1.
Mais le Gnomon abc & le \square HL forment le \square BN, ou le \square de BE (Prop. 1).
 9. Partant, le Rgle AEC + le \square de BC est = au \square de BE. Ax. 1. L. 1.

L

C. Q. F.D.



S I une ligne droite (BE) est coupée en deux parties quelconques (BC, CE): le carré de la droite entière (BE) & le carré de l'une des parties (comme CE), font égaux au double rectangle compris de la droite entière (BE) & de la même partie (EC) prise auparavant, avec le carré de l'autre partie (BC).

HYPOTHESE.

BE est une droite coupée inégalement en C.

THESE.

Le \square de BE + le \square de CE font \equiv à 2 Rgles BEC + au \square de BC.

Préparation.

1. Sur BE construisez le \square BN.
2. Par le point C, tirez la droite CL Pile à EN ou BK.
3. Tirez la diagonale EK, qui coupera CL quelque part en G.
4. Par le point G, tirez la droite FH Pile à EB ou NK.

Prop. 46. L. 1.
Prop. 31. L. 1.
Dem. 1.
Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

P uisque la figure BN est un carré (*Prop. 1*).

1. Les Rgles alentour de la diagonale CF, HL font des \square .
2. Et nommément CF le \square de CE, & HL le \square de BC; à cause que HG = BC. Mais le Rgle BG est \equiv au Rgle NG (*Prop. 43. L. 1*); si on ajoute de part & d'autre le \square CF;
3. Le Rgle BF fera \equiv au Rgle NC.
4. Partant, le double Rgle BF est \equiv aux Rgles BF & NC pris ensemble, Et à cause que les Rgles BF & NC ne font que le Gnomon abc avec le \square CF.
5. Ce Gnomon abc avec le \square CF fera aussi double du Rgle BF; ou bien \equiv au double Rgle BF. Mais le Rgle BF est \equiv au Rgle compris de BE, EC, à cause que EF = EC (*A. 3. 1*).
6. C'est pourquoi, le Gnomon abc avec le \square CF est \equiv au double Rgle compris de BE, EC. Si on ajoute donc de part & d'autre le \square HL, qui est \equiv au \square de BC (*Arg. 2*).
7. Le Gnomon abc + le \square CF + le \square HL seront \equiv au double Rgle BE. EC + au \square de BC.
8. Puis donc que le Gnomon abc + le \square HL font \equiv au \square de BE, & que le \square CF n'est autre chose que le \square de CE (*Arg. 2*).

[Prop. 4. L. 2;
Coroll. 1.
Prop. 34. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

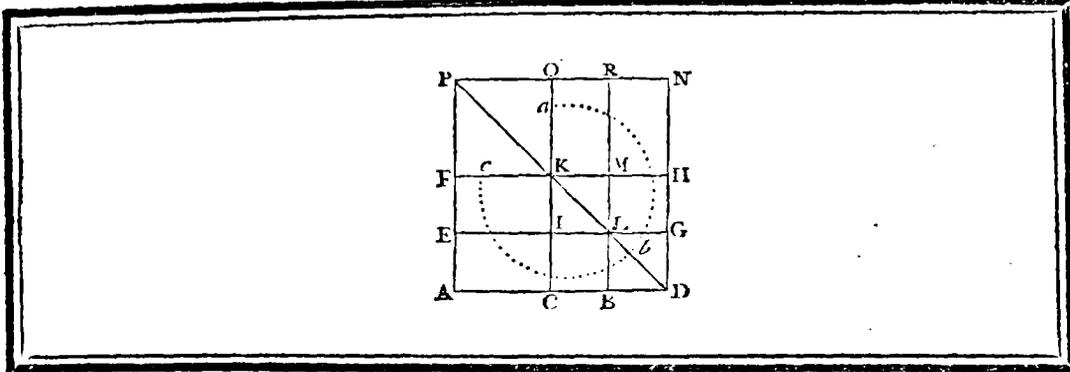
Ax. 1. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.
SI une droite (AB) est partagée en deux parties quelconques (AC, CB): le rectangle quadruple compris de la droite entière (AB) & d'une des parties (BC), avec le carré de l'autre partie (AC), sont égaux au carré de la droite (AD), composée de l'entière (AB) & de l'ajoutée (BD) égale à la partie (BC).

HYPOTHESE.

AB est une droite partagée en C, à laquelle on ajoute directement la droite BD = BC.

THESE.

Le Rgle quadruple ABC + le □ de AC sont = au □ de AD.

Préparation.

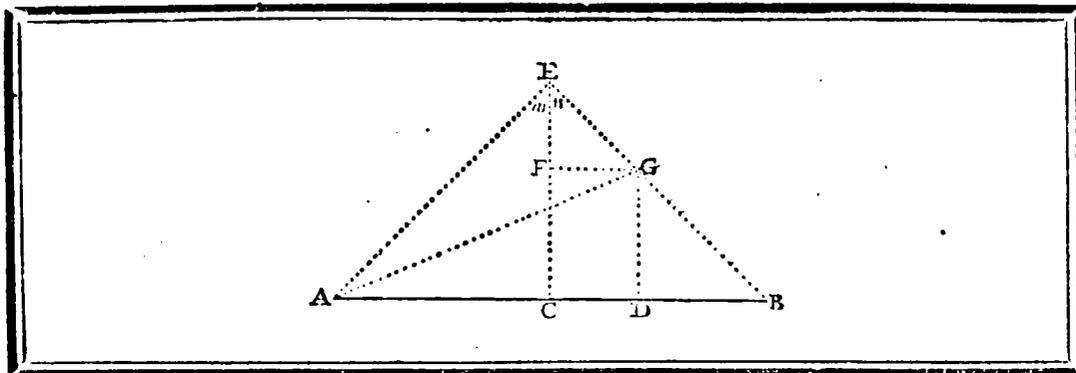
1. Sur AD construisez le carré AN. Prop. 46. L. 1.
2. Par les points B & C, tirez BR & CO Piles à DN ou AP. Prop. 31. L. 1.
3. Tirez la diagonale DP, qui coupera BR & CO quelque part en L & en K. Dem. 1.
4. Par les points L & K, tirez GE & HF Piles à DA ou NP. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque la figure AN est un carré (Prep. 1).
1. Les Rgles alentour de la diagonale CH, ER, FO sont des carrés. Prop. 4. L. 2.
 Et parce que dans le □ CH, le côté CD est partagé en deux également en B (Hyp.). Coroll. 1.
 2. Les Rgles BG, CL, LH, IM sont quatre carrés égaux, Prop. 4. L. 2.
 3. Et le □ CH est = au quadruple □ CL. Coroll. 2.
 De plus, à cause que ER est un carré (Arg. 1).
 4. Le Rgle EK est = au Rgle KR. Prop. 43. L. 1.
 Mais puisque IK = IC (Arg. 2), & CO Pile à AP (Prep. 2).
 5. Le Rgle AI est = au Rgle EK. Prop. 36. L. 1.
 6. Partant, le Rgle AI est aussi = au Rgle KR. Ax. 1. L. 1.
 De même, à cause que KM = MH (Arg. 2), & HF Pile à NP (Prep. 4).
 7. Le Rgle KR est = au Rgle MN. Prop. 36. L. 1.
 8. Partant, les quatre Rgles AI, EK, KR, MN, sont = entr'eux. Ax. 1. L. 1.

L 2

9. Par



PROPOSITION IX. THEOREME IX.

SI une droite (AB) est coupée en deux parties égales (AC, CB), & en deux inégales (AD, DB): les quarrés des deux parties inégales (AD, DB) font doubles du quarré de la moitié (AC) de l'entiere (AB) & du quarré de la partie (CD) comprise entre les deux points de section (C & D).

HYPOTHESE.

AB est une droite partagée en deux également en C, & en deux inégalement en D.

THESE.

Le \square de AD + le \square de DB font doubles du \square de AC + du \square de CD.

Préparation

1. DU point C élevez sur AB la \perp CE. Prop. 11. L. 1.
2. Faites CE : : a AC ou BC. Prop. 3. L. 1.
3. Des points A & B au point E tirez les droites AE, BE. Dem. 1.
4. Par les points D & G tirez les droites DG & GF Plls à CE & AB. Prop. 31. L. 1.

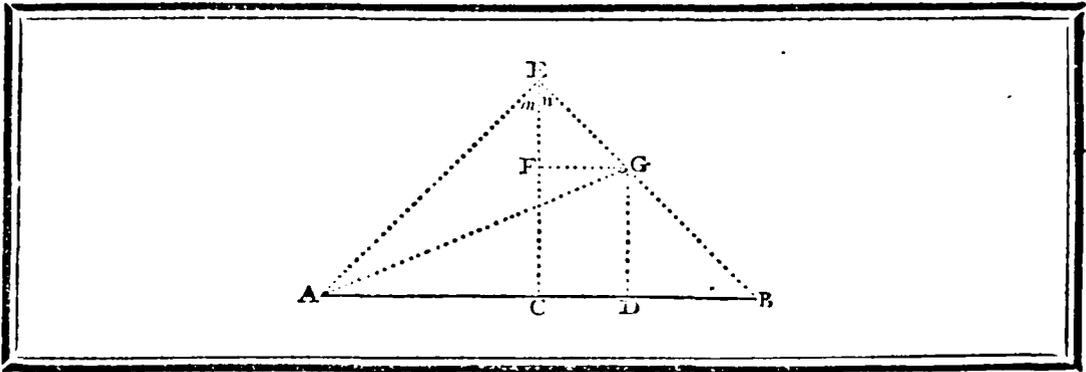
DEMONSTRATION.

- Puisque CE est = à AC (Prep. 2).
1. L'angle CAE est = à \sphericalangle m. Prop. 5. L. 1.
Mais \sphericalangle ECA est un \perp (Prep. 1).
 2. C'est pourquoi, les deux autres \sphericalangle CAE & m pris ensemble sont aussi = à un \perp . Prop. 32. L. 1.
 3. Partant, chacun d'eux est un demi \perp ; parcequ'ils sont = entr'eux (Arg. 1).
On prouvera de la même maniere, que
 4. Chacun des \sphericalangle CBE & n est un demi \perp ,
 5. Et ainsi, \sphericalangle entier $m + n$ est = à un \perp .
Derechef, \sphericalangle n étant un demi \perp (Arg. 4) & \sphericalangle EFG un \perp ; à cause qu'il est = à son interieur opposé ECB (Prop. 29. L. 1), lequel est \perp (Prep. 1).
 6. L'angle EGF est aussi un demi \perp .
 7. Et par conséquent, EF est = à FG,
Par un raisonnement semblable on prouvera, que
 8. L'angle BGD est = à un demi \perp , & DG = DB.
Maintenant, à cause que le \square de AE est = au \square de AC & au \square de CE pris ensemble (Prop. 47. L. 1), & que AC = CE (Prep. 2).
 9. Le \square de AE est double du \square de AC.
On prouvera de même, que
 10. Le \square de EG est double du \square de FG, c. à. d. du \square de CD, puisque FG = CD.

L 3

12. Par

Prop. 34. L. 1.



12. Par conséquent, le \square de AE & le \square de EG pris ensemble, font doubles du \square de AC & du \square de CD.

Ax. 2. L. 1.

Et parce que le \square de AE & le \square de EG pris ensemble font \equiv au \square de AG (Prop. 47. L. 1. & Arg. 5).

13. Le \square de AG est aussi double du \square de AC & du \square de CD pris ensemble.

Ax. 1. L. 1.

Mais $\sphericalangle ECA$ étant \equiv à un \perp (Prep. 1) & $\sphericalangle GDC \equiv$ à $\sphericalangle ECA$ (Prop. 29. L. 1).

14. Le \square de AG est \equiv au \square de AD & au \square de DG.

Prop. 47. L. 1.

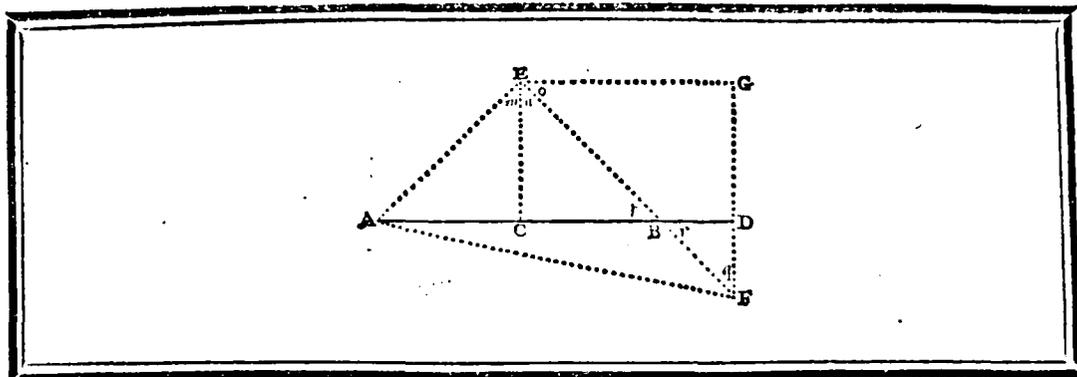
15. Ou le \square de AG est \equiv au \square de AD & au \square de DB pris ensemble; à cause que DB est \equiv à DG. (Arg. 8).

16. Partant, le \square de AD & le \square de DB pris ensemble font doubles du \square de AC & du \square de CD; ou le \square de AD + le \square de DB font doubles du \square de AC + du \square de CD.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION X. THEOREME X.
SI on partage une droite (AB) en deux également (en C), & qu'on y ajoute directement une autre droite (BD): le quarré de la droite (AD) composée de l'entiere (AB) & de l'ajoutée (BD), avec le quarré de l'ajoutée (BD) sont doubles du quarré de la moitié (AC) de l'entiere (AB), & du quarré de la droite (CD), composée de la moitié (CB) de l'entiere (AB) & de l'ajoutée (BD),

HYPOTHESE.

AB est une droite partagée également en C, & à laquelle on ajoute directement une partie BD.

THESE.

Le \square de AD + le \square de BD sont doubles du \square de AC + du \square de CD.

Préparation.

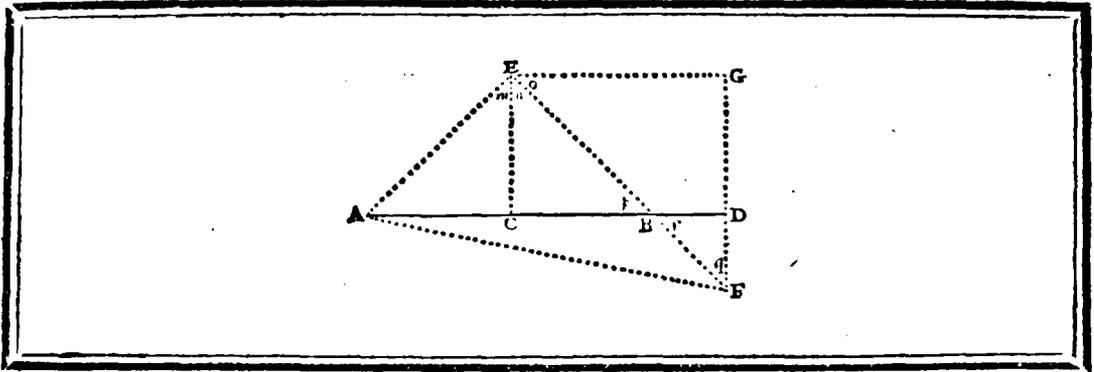
1. Sur AB, au point C, élevez la \perp CE. Prop. 11. L. 1.
2. Faites CE = a AC ou BC. Prop. 3. L. 1.
3. Des points A & B au point E tirez les droites AE & BE, Dem. 1.
4. Par les points E & D menez EG, DG Plls a AD & CE; & prolongez DG jusqu'a ce qu'elle coupe le prolongement de EB en F. Prop. 31. L. 1.
Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le Δ ACE le côté AC est = au CE (Prop. 2).

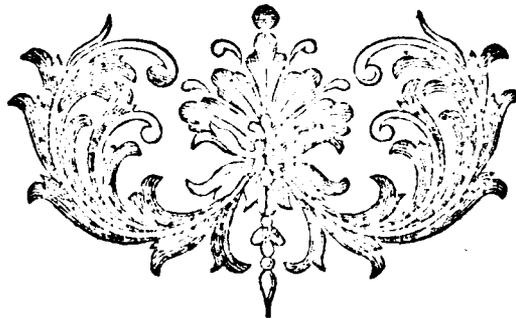
1. L'angle CAE est = à $\forall m$. Prop. 5. L. 1.
Or $\forall ACE$ est un \perp (Prop. 1).
2. Ainsi chacun des $\forall CAE$, & m est un demi \perp . Prop. 32. L. 1.
Par un raisonnement semblable on prouvera, que
3. Chacun des $\forall p$ & n est un demi \perp .
4. Partant, $\forall m + n$ sera = a un \perp . Ax. 2. L. 1.
De plus, $\forall p$ étant un demi \perp (Arg. 3).
5. L'angle r fera aussi un demi \perp . Prop. 15. L. 1.
Mais $\forall BDF$ étant outre cela \perp (Prop. 29. L. 1), puisqu'il est alterne de $\forall ECD$ qui est \perp (Prop. 1).
6. L'angle q est aussi un demi \perp . Prop. 32. L. 1.
7. Partant, le côté BD = au côté DF. Prop. 6. L. 1.
De même; $\forall q$ étant un demi \perp (Arg. 6) & $\forall G$ un \perp , comme diagonalement oppose a $\forall ECD$. (Prop. 34. L. 1).
8. L'angle o est un demi \perp . Prop. 32. L. 1.
9. Donc EG est = à GF. Prop. 6. L. 1.

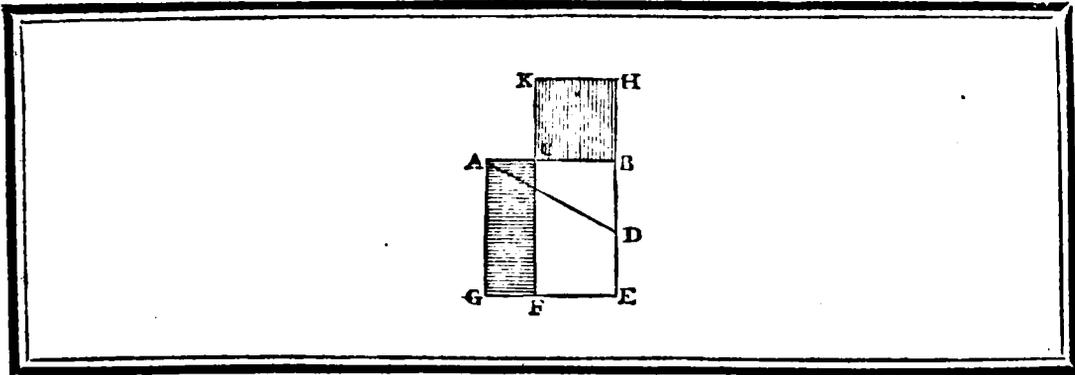
Ensuite



- Ensuite AC étant \equiv à CE (*Prop. 2*).
10. Le \square de AC est \equiv au \square de CE . { *Prop. 46. L. 1.*
Coroll. 3.
11. Partant, les \square de AC & de CE pris ensemble font doubles du \square de AC ,
Et ces \square de AC & CE étant \equiv au \square de AE . (*Prop. 47. L. 1*).
12. Le \square de AE sera aussi double du \square de AC . Ax. 6. L. 1.
- De la même manière on prouvera, que
13. Le \square de EF est double du \square de EG , c. à d. du \square de CD ; puisque $EG \equiv CD$. Prop. 34. L. 1.
14. Par conséquent, le \square de AE avec le \square de EF font doubles du \square de AC
& du \square de CD .
Mais le \square de AE & le \square de EF étant \equiv au \square de AF (*Prop. 47. L. 1*).
15. Le \square de AF est double du \square de AC & du \square de CD .
Et ce même \square de AF étant outre cela \equiv au \square de AD & au \square de DF
(*Prop. 47. L. 1*), ou de BD , attendu que $DF \equiv BD$ (*Arg. 7*).
16. Il s'ensuit donc, que le \square de AD + le \square de BD font doubles du \square de
 AC + du \square de CD .

C. Q. F. D.





C PROPOSITION XI. PROBLEME I.
Couper une ligne droite donnée (AB) de façon; que le rectangle de l'entière (BA) & de l'une de ses parties (AC) soit égal au quarré de l'autre partie (CB).

DONNEE
La droite AB.

CHERCHE.
Le point d'interfection C tel que le Rgle BAC soit = au \square de CB.

Résolution.

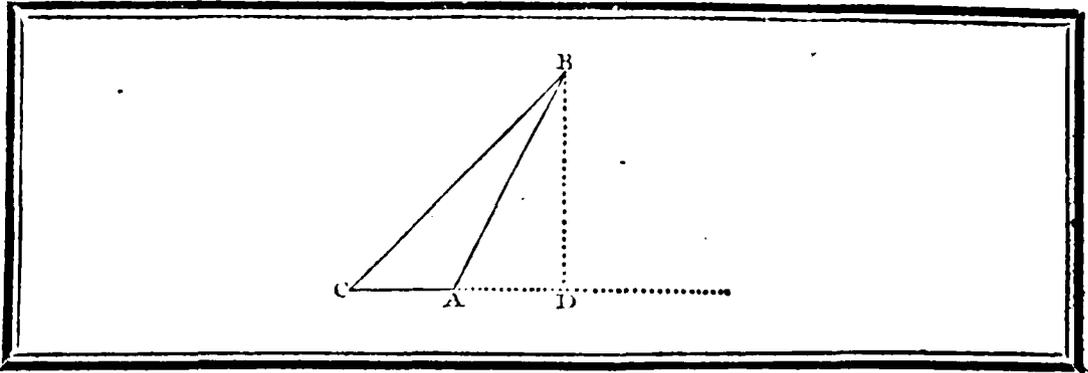
1. Sur la droite AB construisez le quarré AE. Prop. 46. L. 1.
2. Partagez le côté BE en deux également au point D, & tirez du point D au point A la droite DA. Prop. 10. L. 1.
3. Sur le prolongement de EB, faites $DH = DA$. Dem. 1.
4. Sur la droite BH construisez le quarré CH, Prop. 3. L. 1.
5. Et prolongez le côté KC en F. Prop. 46. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite BE est coupée en deux également en D, & que la droite BH y est ajoutée directement.

1. Le Rgle EH. HB + \square de BD est = au \square de DH. Prop. 6. L. 2.
2. Et ce \square de DH est = au \square de DA; parceque $DH = DA$ (Ref. 3). Prop. 46. L. 1.
3. Partant, le Rgle EH. HB + \square de BD est = au \square de DA. Coroll. 3.
Mais ce même \square de DA est = au \square de AB + au \square de BD (Prop. 47. L. 1). Ax. 1. L. 1.
4. C'est pourquoi, le Rgle EH. HB + \square de BD = au \square de AB + au \square de BD. Ax. 1. L. 1.
Si donc on retranche de part & d'autre le \square de BD;
5. Le Rgle EH. HB sera = au \square de AB. Ax. 3. L. 1.
Maintenant; si du Rgle EH. HB qui est = au Rgle FH, (Ref. 4. 5) & du \square de AB qui est = au \square AE (Ref. 1), on retranche le Rgle commun FB;
6. Il restera le \square CH = au Rgle GC. Ax. 3. L. 1.
Ce \square CH étant donc = au \square de BC (Ref. 4) & le Rgle GC = au Rgle BA. AC; à cause que $AG = AB$ (Ref. 1).
7. Il s'enfuit. que la droite AB est coupée en C de façon que le Rgle BAC est = au \square de CB. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XII. THEOREME XI.
EN tout triangle amblygone (CBA) le quarré du côté (BC): qui est oppoſé à l'angle obtus (A) eſt plus grand que les quarrés des deux autres côtés (AB, CA), du double reſtangle compris d'un des côtés (CA) alentour de l'angle obtus, ſur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire abaiffée de l'angle oppoſé (B), & de la partie (AD) comprise entre cette perpendiculaire & le ſommet de l'angle obtus (A).

HYPOTHESE.

- I. CBA eſt un Δ amblygone,
- II. Et BD la \perp abaiffée du ſommet de l'angle B, ſur le prolongement du côté oppoſé CA.

THESE.

Le \square de BC eſt = au \square de AB + au \square de AC + au double Rgle CAD.

DEMONSTRATION.

Puiſque la droite CD eſt coupée en deux parties quelconques CA, AD (Hyp. 2).

1. Le \square de CD eſt = au double Rgle CA . AD & aux \square de CA & de AD pris enſemble.

Prop. 4. L. 2.

Si on ajoute donc de part & d'autre le \square de BD.

2. Le \square de CD + le \square de BD fera = au double Rgle CA . AD + au \square de CA + au \square de AD + au \square de BD.

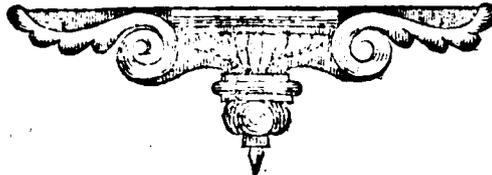
Ax. 2. L. 1.

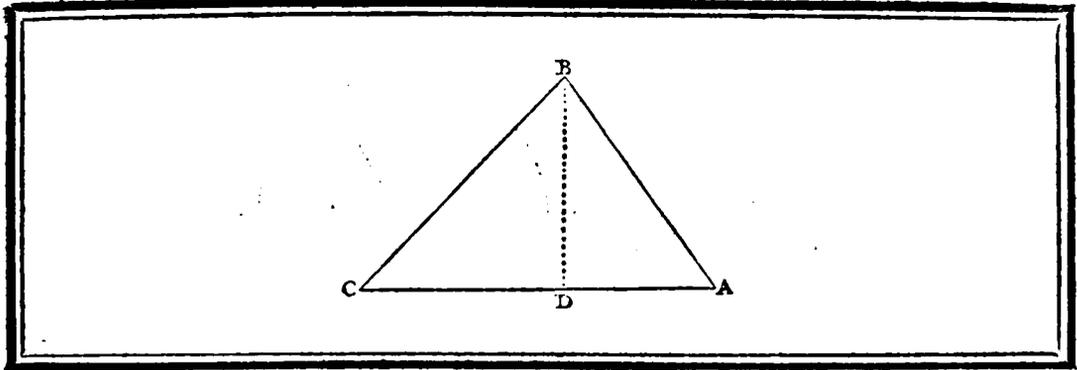
Mais le \square de CD avec le \square de BD eſt = au \square de BC, & le \square de AD avec le \square de BD eſt = au \square de AB (Prop. 47. L. 1).

3. Par conſequent, le \square de BC eſt = au double Rgle de CAD + au \square de CA + au \square de AB.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIII. THEOREME XII.

EN tout triangle oxygone (CBA) : le carré d'un des côtés (BA) opposé à un des angles aigus (C) est plus petit que les carrés des deux autres côtés (CB, CA), du double rectangle compris d'un des côtés (AC) alentour de l'angle aigu, sur lequel tombe la perpendiculaire (BD), abaissée de l'angle opposé (B), & de la partie (CD) comprise entre cette perpendiculaire & le sommet de l'angle aigu (C).

HYPOTHESE.

- I. CBA est un Δ oxygone,
- II. Et BD la \perp abaissée du sommet de l'angle B sur le côté opposé CA.

THESE.

Le \square de BA + le double Rgle \triangle ACD est = au \square de CA + au \square de CB.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite CA est partagée en deux parties quelconques CD, DA (Hyp. 2).

1. Le \square de CA avec le \square de CD est = au double Rgle AC. CD avec le \square de AD.

Prop 7. L. 2.

Si donc on ajoute de part & d'autre le \square de DB,

2. Le \square de CA + le \square de CD + le \square de DB fera = au double Rgle AC. CD + au \square de AD + au \square de DB.

Ax. 2. L. 1.

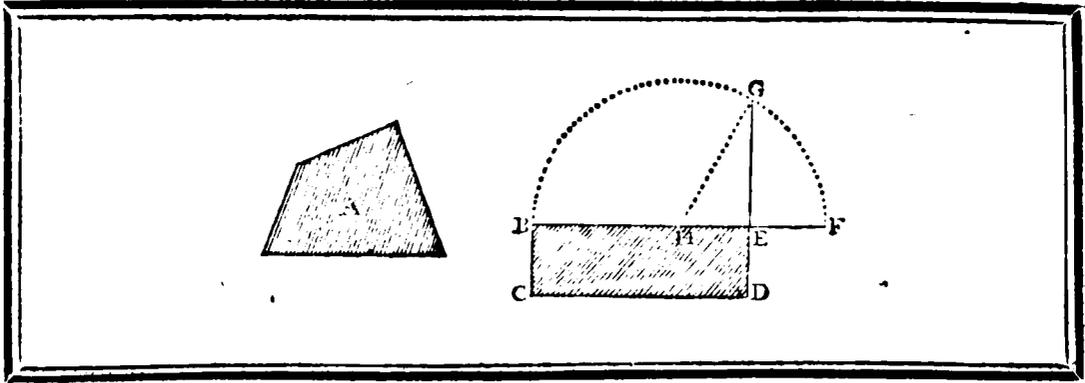
Mais le \square de CD + le \square de DB est = au \square de CB, & le \square de AD + le \square de DB est = au \square de BA (Prop. 47. L. 1).

3. C'est pourquoi, le \square de BA + le double Rgle ACD est = au \square de CA + au \square de CB.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





C PROPOSITION XIV. PROBLEME II.
 Onstruire un quarré; égal à une figure rectiligne donnée (A).

DONNEE

La figure rectiligne A.

CHERCHEE.

La construction d'un quarré = à la figure rectiligne donnée A.

Résolution.

1. FAites le Pgr Rgle $CE =$ à la figure A.
2. Prolongez le côté BE, & faites $EF =$ à ED.
3. Partagez la droite BF en deux parties égales au point H.
4. Et du point H comme centre, & du rayon HB décrivez le \odot BGF.
5. Prolongez le côté DE, jusqu'à ce qu'il coupe la \odot BGF en G.

Prop. 45. L. 12

Prop. 3. L. 1.

Prop. 10. L. 1.

Dem. 3.

Dem. 1.

Préparation.

Tirez du point H au point G la droite HG.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite BF est coupée en deux également en H & en deux inégalement en E (Ref. 3 & 2).

1. Le Rgle BE. EF & le \square de HE pris ensemble sont = au \square de HF.
2. Et parceque $HF = HG$ (Def. 15. L. 1); le \square de HF est = au \square HG.
 Le Rgle BE. EF + le \square HE est = au \square de HG.
 Mais le \square de HG étant = au \square HE & au \square de EG pris ensemble (Prop. 47. L. 1).
3. Le Rgle BE. EF + le \square de HE est aussi = au \square de HE + au \square de EG.
 Si on retranche donc de part & d'autre le \square de HE;
4. Le Rgle BE. EF sera = au \square de EG.
 Et ce Rgle BE. EF étant de plus = au Rgle BE. ED; à cause que $EF = ED$. (Ref. 2).
5. Le Rgle BE. ED sera aussi = au \square de EG.
 Mais le Rgle BE. ED est = à la figure donnée A (Ref. 1).
6. Par conséquent, le \square de EG sera aussi égal à cette figure rectiligne donnée A.

Prop. 5. L. 2.

Prop. 46. L. 1.

Coroll. 3.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 3. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

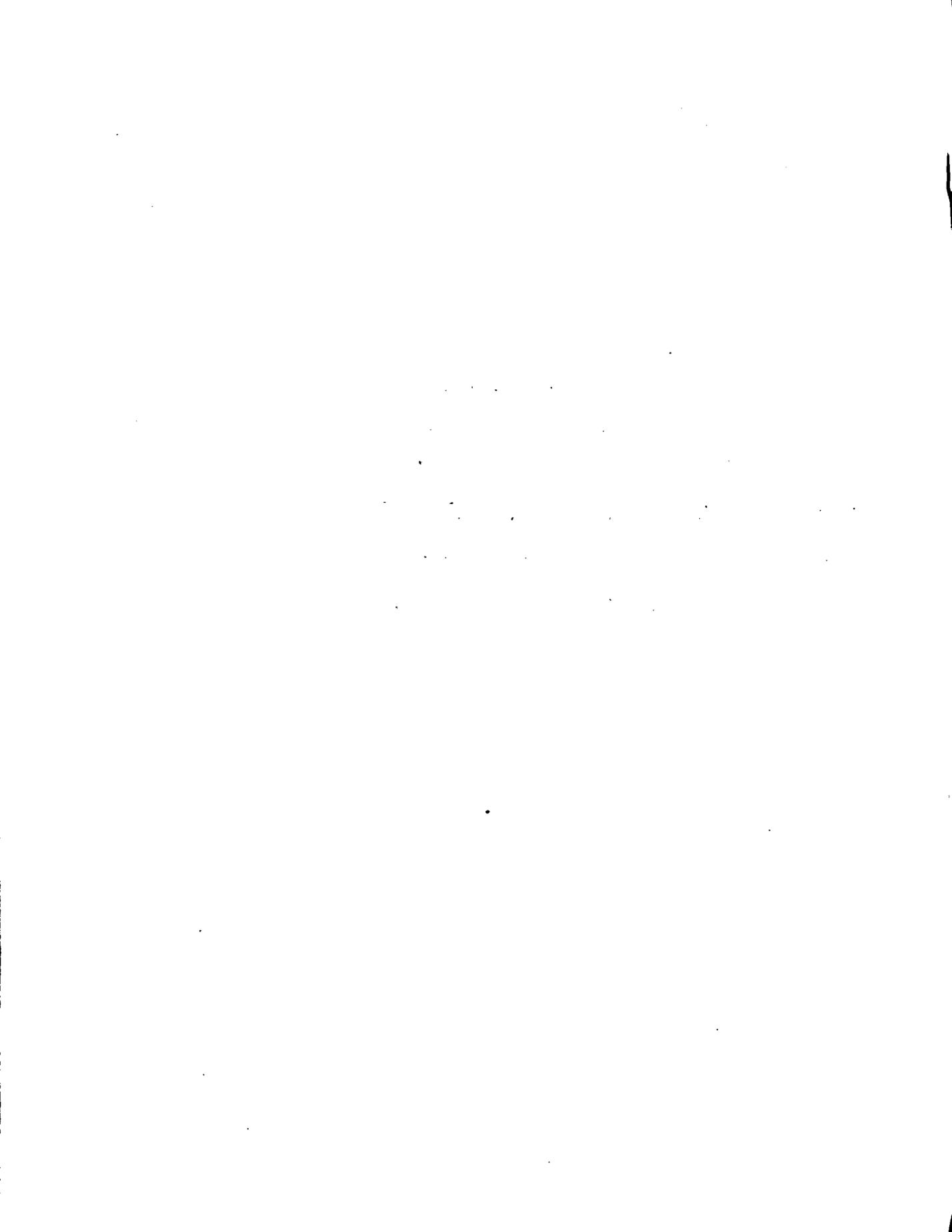
Ax. 1. L. 1.

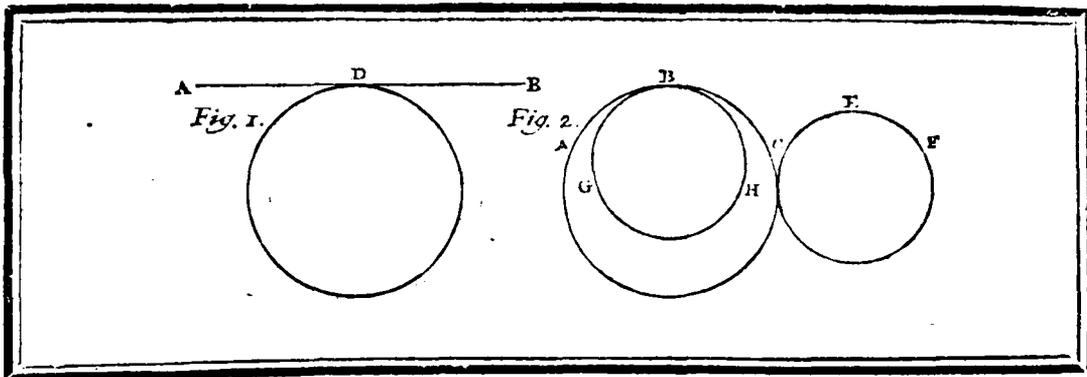
C. Q. F. F.

R E M A R Q U E .

Si le point H tombe sur le point E, les droites BE, EF, ED, seront chacune égales à EG; est le Pgr Rgle CE, lui même, sera le quarré cherché. (Coroll. 1 & 3. de la Prop. 46. L. 1).

L E S
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
LIVRE TROISIEME.





D E F I N I T I O N S

I.

ON nomme *tangente d'un cercle*, une ligne droite (ADB), qui touche le cercle sans le couper, quoique prolongée de part & d'autre à l'infini Fig. 1.

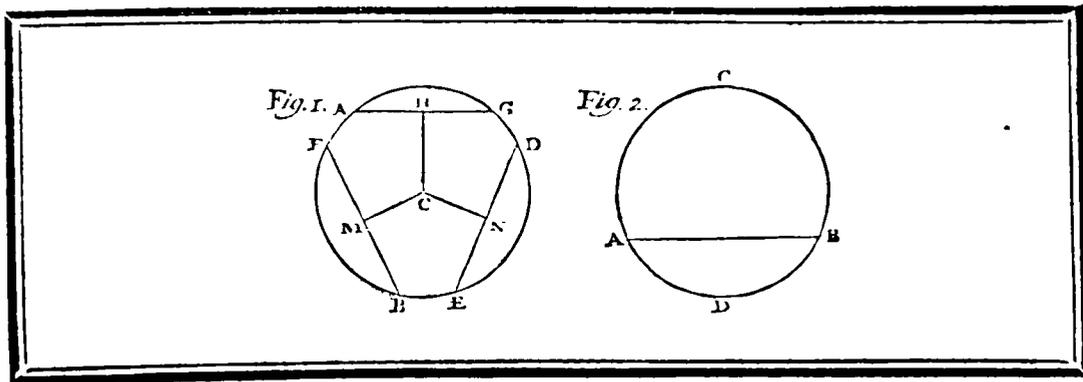
II.

On dit que *deux cercles se touchent*, quand leurs circonférences (ABC, CEF ou ABC, GBH) se touchent sans se couper. Fig. 2.

III.

Deux cercles se touchent extérieurement, quand l'un (CEF) tombe au dehors de l'autre (ABC): Mais deux cercles se touchent intérieurement, quand l'un (GBH) tombe au dedans de l'autre (ABC) Fig. 2.





D E F I N I T I O N S

IV.

LA distance d'une ligne droite (FB) du centre du cercle, est la perpendiculaire (CM) abaissée du centre du cercle (C) sur cette ligne droite (FB); C'est pour cela que l'on dit; que deux lignes droites (FB, DE) sont également distantes du centre du cercle, quand les perpendiculaires (CM, CN), abaissées du centre (C) sur ces lignes droites (FB, DE) sont égales. Fig. 1.

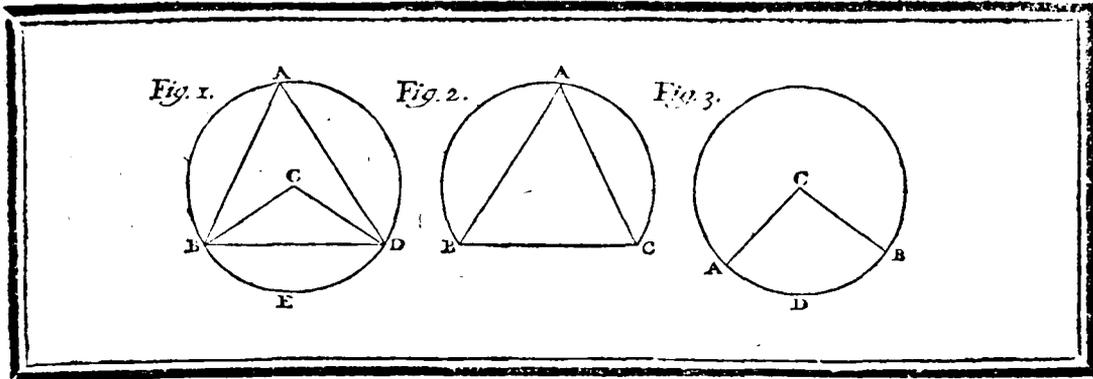
V.

Mais on dit qu'une ligne droite (AG) est plus éloignée du centre du cercle que (BF ou ED), lorsque la perpendiculaire (CH) abaissée du centre (C) sur cette ligne droite est plus grande que (CM ou CN) Fig. 1.

VI.

L'angle mixtiligne du segment, est cet angle (CAB ou DAB) formé de l'arc (CA ou DA) du segment (ACB ou ADB) & de sa corde (AB); Fig. 2.





D E F I N I T I O N S.

VII.

L'angle dans le segment, est un angle (BAC) compris de deux lignes droites (AB, AC) tirées d'un point (A) de l'arc du segment, & terminées aux extrémités (B & C) de la corde (BC) Fig. 2. Quand les lignes droites (AB, AD) partent d'un point (A) pris dans la circonférence du cercle, l'angle (BAD) est un angle à la circonférence: mais quand les lignes droites (CB, CD) partent du centre, l'angle (BCD) est un angle au centre. Fig. 1.

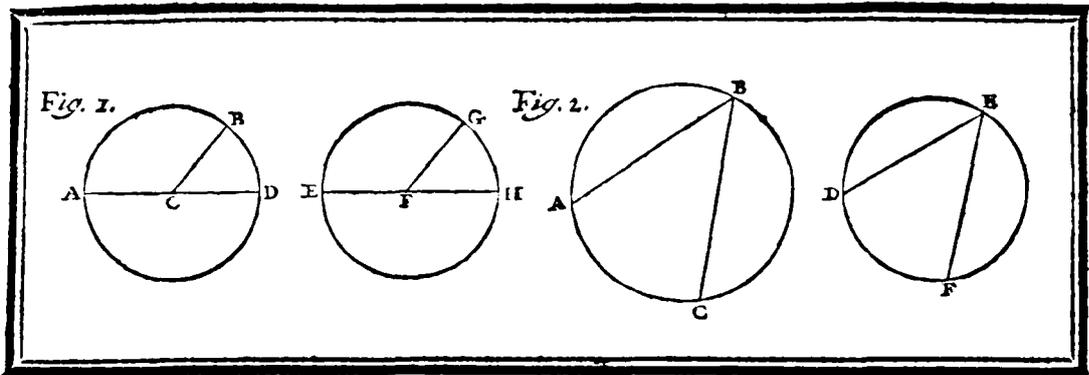
VIII.

On dit, qu'un angle s'appuie sur un arc de cercle, quand les lignes droites (AB, AD ou CB, CD), qui forment cet angle (BAD ou BCD), sont tirées; soit d'un même point (A) de la circonférence; soit de son centre (C), aux extrémités (B & D) de l'arc (BED). Fig. 1.

IX.

Un secteur de cercle, est une figure comprise de deux rayons (CA, CB), & de l'arc, (ADB) compris entre ces deux rayons. Fig. 3.





A X I O M E S.

I.

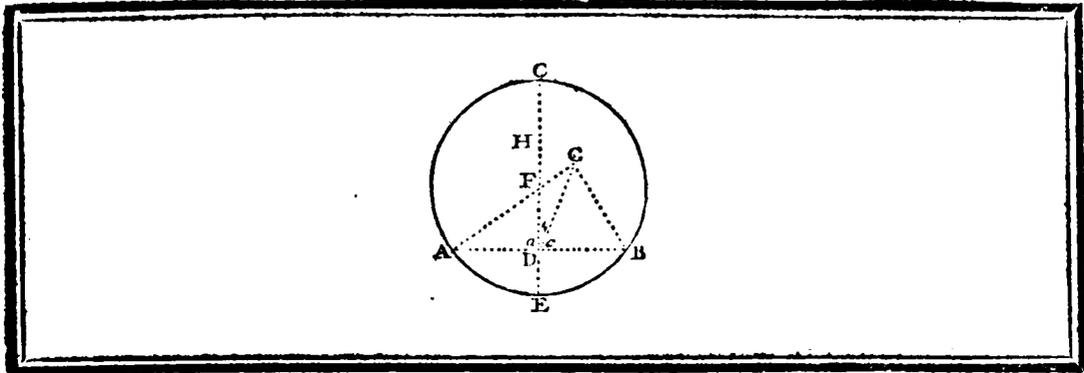
LEs cercles égaux (ABD, EGH), sont ceux dont les diamètres (AD, EH), ou les rayons (CB, FG) sont égaux. *Fig. 1.*

Le rayon est la déterminante du cercle ; parcequ'un cercle est décrit par le mouvement du rayon autour du centre : Or quand les déterminantes de deux figures sont les mêmes, il est naturel que les déterminées le soient aussi ; & c'est la raison pourquoi l'égalité des rayons entraîne nécessairement l'égalité parfaite des cercles décrits de ces rayons.

I I.

LEs segmens de cercle (ABC, DEF), qui peuvent contenir des angles égaux (ABC, DEF), sont semblables. *Fig. 2.*

Les cercles sont des figures semblables : par conséquent tout ce qu'on détermine dans deux cercles de la même manière, doit conserver ce caractère de similitude. Si on retranche donc deux segmens ABC, DEF , au moyen de deux angles égaux ABC, DEF qu'on y place, ces segmens doivent être semblables, comme ayant été retranchés semblablement de deux tous semblables. Cette proposition est proprement un théorème, qui peut être démontré de la véritable notion de la similitude, qu'Euclide n'a point développé.



T PROPOSITION I. PROBLEME I.
 Rouver le centre (F) d'un cercle donné (ACBE).

DONNE
 Le cercle ACBE.

CHERCHE.
 Le centre F de ce \odot .

Résolution.

1. Tirez la corde AB;
2. Coupez la en deux également au point D.
3. Du point D élevez sur AB, la \perp DC, & prolongez la en E.
4. Coupez la droite CE en deux également au point F;
 Ce point F fera le centre cherché du \odot donné ACBE.

Dem. 1.
 Prop. 10. L. 1.
 Prop. 11. L. 1.
 Prop. 10. L. 1.

DEMONSTRATION.

SI non. Quelqu'autre point, comme H ou G pris dans la ligne ou hors de la ligne EC, sera le centre cherché du \odot ACBE.

CAS I.

Supposé, que le centre se trouve dans la ligne EC, en un point H différent du point F.

Puisque le centre du \odot est dans la ligne EC, en un point H différent du point F (Sup. 1).

1. Les rayons HE & HC sont = entr'eux.
 Mais FE étant = à FC (Ref. 4) & HC < FC (Ax. 8. L. 1).
2. HC fera aussi < FE, & à plus forte raison < HE.
3. Partant, HE n'est point = à HC.
4. Le point H pris dans la ligne EC, différent du point F, ne peut donc être le centre du \odot ACBE.

Def. 15. L. 1.

CAS II.

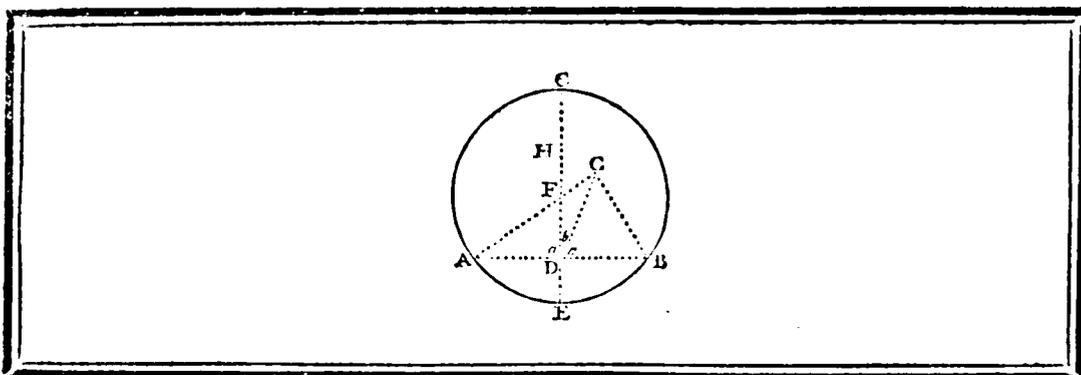
Supposé, que le centre se trouve hors de la ligne EC, en un point G.

Préparation.

Tirez donc du centre G les droites GA, GD, GB.

Dem. 1.

Puisque dans les Δ AGD, DGB le côté GA est = au côté GB (Prep. & Def. 15. L. 1), le côté GD commun aux deux Δ , & la base AD = à la base DB (Ref. 2).



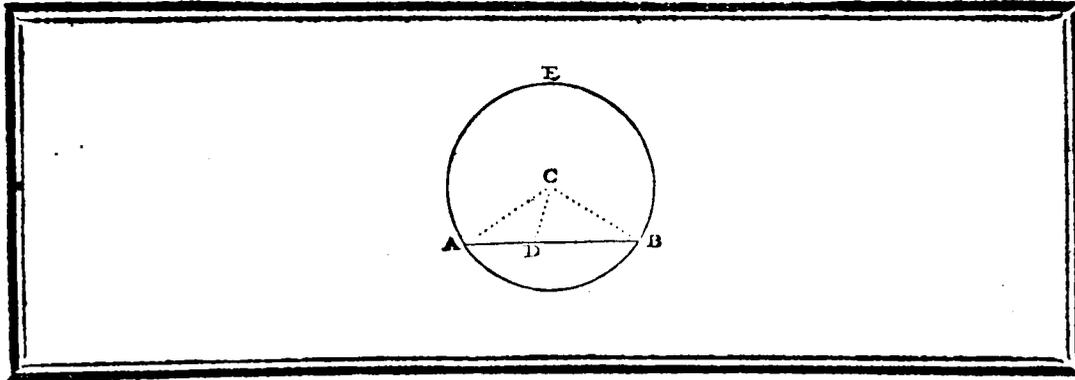
1. Les \sphericalangle contigus $a + b$ & c , opposés aux côtés égaux GA, GB , sont \equiv entr'eux. Prop. 8. L. 1.
2. Partant $\sphericalangle a + b$ est un \perp . Def. 10. L. 1.
 Mais $\sphericalangle a$ étant aussi un \perp (Ref. 3).
3. Il s'ensuit, que $\sphericalangle a + b$ est \equiv à $\sphericalangle a$; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. Partant le point G pris hors de la ligne EC , ne peut être le centre du $\odot ACBE$.
 Ce centre n'étant donc ni dans la ligne EC , en un point H différent du point F (Cas. 1); ni hors de la ligne EC , en un point G (Cas. 11).
5. Le centre cherché du $\odot ACBE$ sera nécessairement en F .

C. Q. F. F.

C O R O L L A I R E.

SI dans un cercle $ACBE$, une corde EC coupe une autre corde AB en deux également & à angles droits; cette corde CE est un diamètre, & par conséquent le centre du cercle s'y trouve (Def. 17. L. 1).





PROPOSITION II. THEOREME I.

SI on prend deux points quelconques (A & B) dans la circonférence d'un cercle (AEB): la droite (AB), qui joint ces deux points, tombera au dedans du cercle.

HYPOTHESE

Les deux points A & B sont pris dans la \odot AEB.

THESE.

La droite AB tombe au dedans du \odot AEB.

Préparation.

1. Cherchez le centre C du \odot AEB.
2. Tirez les droites CA, CD, CB.

Prop. 1. L. 3.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le \triangle ACB, le côté CA est = au côté CB (Prep. 2 & Def. 15. L. 1).

1. Les \sphericalangle CAD, CBD sont = entr'eux.

Prop. 5. L. 1.

Mais \sphericalangle CDA étant un \sphericalangle extérieur du \triangle CDB.

2. Il est \sphericalangle que son intérieur CBD.

Prop. 16. L. 1.

Et à cause que \sphericalangle CBD est = à \sphericalangle CAD (Arg. 1).

3. Cet \sphericalangle CDA sera aussi \sphericalangle \sphericalangle CAD.

4. Partant, le côté CA opposé au plus grand \sphericalangle CDA est \sphericalangle le côté CD opposé au moindre \sphericalangle CAD.

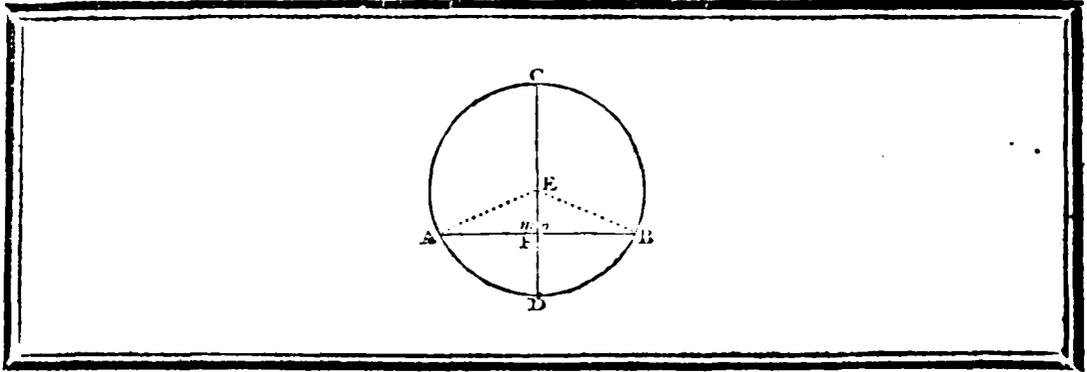
Prop. 19. L. 1.

5. Dou il s'uit, que l'extrémité D de ce côté CD tombe au dedans du \odot AEB.

Et comme on peut démontrer la même chose, de tout autre point pris dans la droite AB.

6. Il est évident, que la droite entière AB tombe au dedans du \odot AEB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION III. THEOREME II.
SI un diamètre (CD) coupe une corde (AB) en deux également (en F) : il la coupe à angles droits. Et *reciproquement* ; si un diamètre (CD) coupe une corde (AB) à angles droits : il la coupe aussi en deux également.

I.

HYPOTHESE.

CD est un diamètre du \odot ACBD, qui coupe AB en deux également au point F.

THESE.

Le diamètre CD est \perp sur la corde AB.

Préparation

Tirez les rayons EA, EB.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Dans les \triangle AEF, BEF, le côté EA est = au côté EB (*Prep. & Def. 15. L. 1*), le côté EF est commun aux deux \triangle , & la base AF = à la base BF (*Hyp.*).

1. Par conséquent, les \sphericalangle contigus m & n , opposés aux côtés égaux EA, EB, sont = entr'eux.

Prop. 8. L. 1.

2. Partant, la droite CD, qui forme sur AB des \sphericalangle contigus m & n = entr'eux, est \perp sur AB.

Def. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

II.

HYPOTHESE.

La droite CD est un diamètre du \odot ACBD, qui est \perp sur la corde AB ; ou qui fait $\sphericalangle m = \sphericalangle n$.

THESE.

AF est = à FB.

DEMONSTRATION.

Les côtés EA, EB du \triangle AEB étant = entr'eux (*Prep. & Def. 15. L. 1*).

1. Les \sphericalangle EAF, EBF le seront aussi.

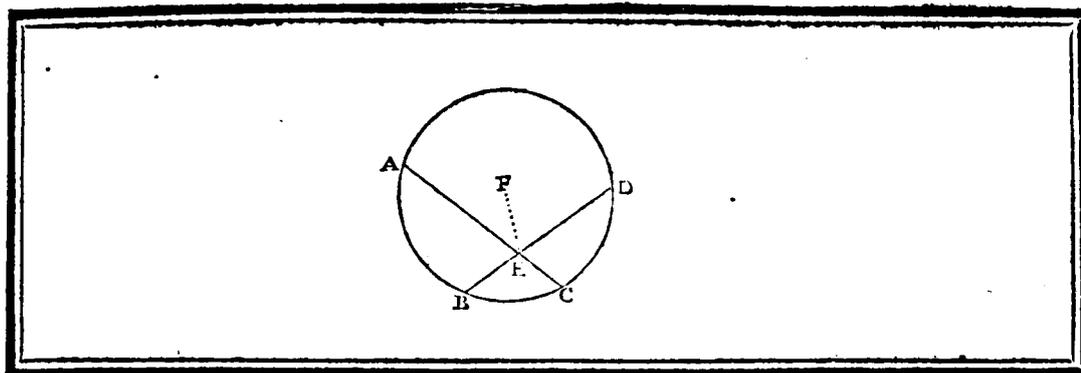
Prop. 5. L. 1.

Puis donc que dans les \triangle AEF, BEF, les \sphericalangle EAF, EBF sont = (*Arg. 1*), de même que les $\sphericalangle m$ & n (*Hyp.*), & le côté EF commun aux deux \triangle .

2. La base AF sera = à la base FB.

Prop. 26. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME III.

SI dans un cercle (ADCB) deux cordes (AC, DB) s'entrecoupent: elles s'entrecouperont en deux inégalement.

HYPOTHESE.

Les deux cordes AC, DB du \odot ADCB s'entrecoupent au point E.

THESE.

Ces cordes s'entrecoupent en deux inégalement.

SI non.

DEMONSTRATION.

Les cordes AC, DB s'entrecoupent en deux également.

Préparation.

Tirez du centre F au point E la portion de diamètre FE.

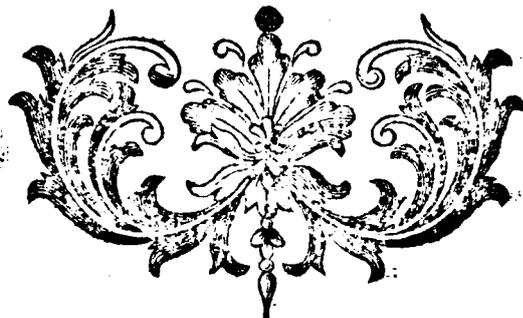
Dem. 1;

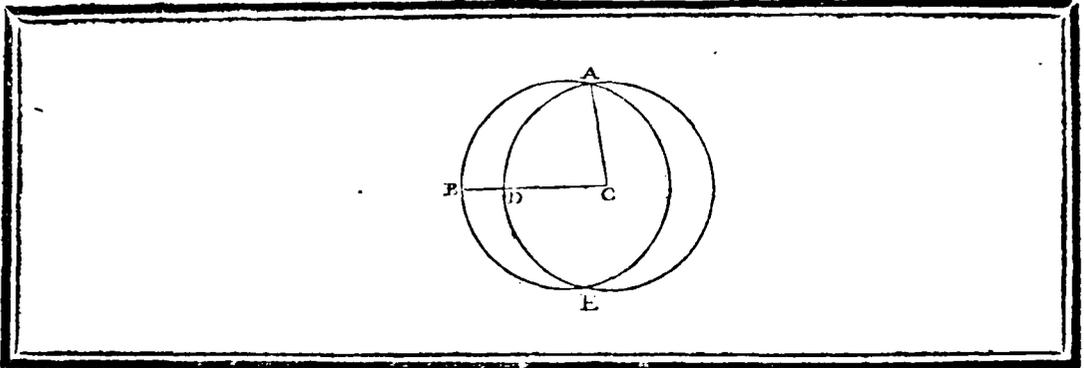
Puisque le diamètre, ou sa partie FE, coupe en deux également chacune des cordes AC, DB du \odot ADCB (Sup.).

1. Cette droite FE est \perp sur chacune des cordes AC, DB.
2. Partant, les \sphericalangle FEB, FEA sont \equiv entr'eux; ce qui est impossible.
3. C'est pourquoi, les deux cordes AC, DB s'entrecoupent en deux inégalement.

Prop. 3. L. 1.
Ax. 10. L. 1.
Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





S PROPOSITION V. THEOREME IV.
SI deux cercles (ABE, ADE) s'entre-coupent mutuellement: ils n'ont pas un même centre (C).

HYPOTHESE.

ABE, ADE sont deux \odot qui s'entre-coupent mutuellement aux points A & E.

THESE.

Ces deux cercles n'ont pas un même centre C.

SI non.

DEMONSTRATION.

Les cercles ABE, ADE ont un même centre C.

Préparation.

1. Tirez du point C à un point de section A le rayon CA.
2. Et du même point C la droite CB, qui coupe les deux \odot aux points D & B. } Dem. 1.

Puisque les droites CA, CD sont tirées du centre C à la \odot ADE (*Prep.* 1. & 2).

1. Ces droites CA, CD sont \equiv entr'elles.

Def. 15. L. 1.

Par un raisonnement semblable on prouvera, que

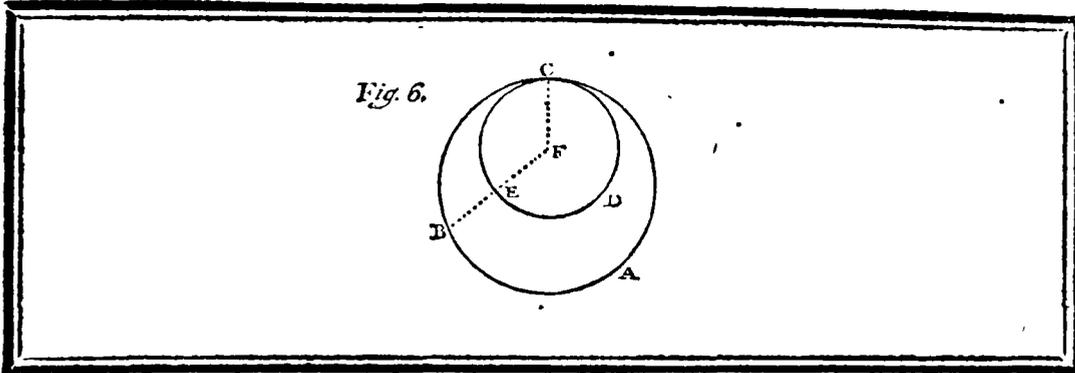
2. Les droites CA, CB sont \equiv entr'elles.

3. Partant, CB seroit \equiv à CD; ce qui est impossible.

Ax. 8. L. 1.

4. Donc les deux cercles ABE, ADE n'ont pas un même centre C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. THEOREME V.
SI deux cercles (BCA, ECD) se touchent intérieurement en (C): ils n'ont pas un même centre (F).

HYPOTHESE.

Le \odot ECD touche le \odot BCA intérieurement en C.

THESE.

Ces deux \odot n'ont point un même centre F.

DEMONSTRATION.

Si non.
 Les \odot BCA, ECD ont un même centre F.

Préparation.

Tirez donc les rayons FB, FC.

Dem. 1.

Puisque le point F est le centre du \odot BCA (*Sup*).

1. Les rayons FB, FC sont = entr'eux.

Derechef; le point F étant aussi le centre du \odot ECD (*Sup*).

2. Les rayons FE, FC sont = entr'eux.

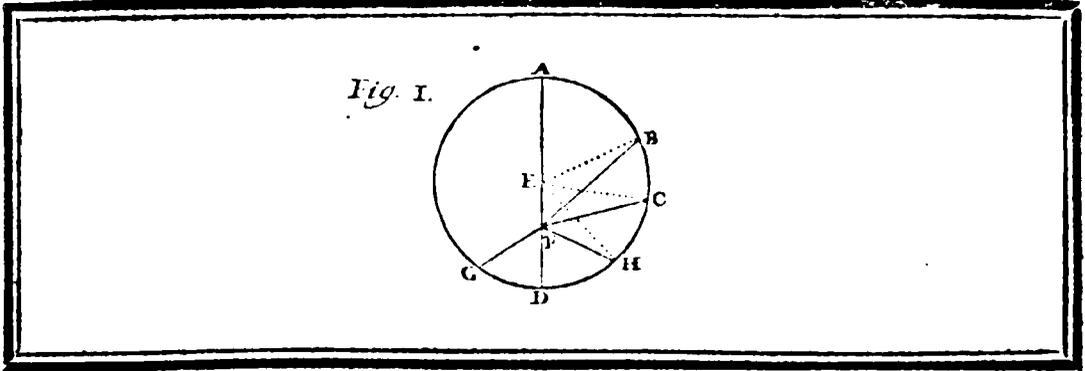
3. Partant FB = FE (*Ax. 1. L. 1*); ce qui est impossible.

4. C'est pourquoi les deux \odot BCA, ECD n'ont point un même centre F.

{ Def. 15. L. 1.
 Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





S I d'un point quelconque (F) dans un cercle (AHG), différent de son centre (E), on tire à sa circonférence tant de lignes droites (FA, FB, FC, FH) que l'on voudra, la plus grande de toutes est (FA) qui passe par le centre, & la plus petite est sa prolongée (FD). Quant aux autres; celle (FB ou FC), qui est plus proche de la ligne (FA) passant par le centre, est plus grande qu'une autre (FC ou FH), qui en est plus éloignée. Enfin; de part & d'autre de la plus petite (FD), on ne sauroit tirer de ce même point (F) plus de deux lignes droites (FH, FG) égales entr'elles.

HYPOTHESE.

- I. Le point F pris dans le \odot AHG, est différent du centre E.
- II. La droite FA, tirée du point F, passe par le centre E du \odot AHG,
- III. Et les droites FB, FC, FH sont tirées du point F à la circonférence AHG.

THESE.

- I. La droite FA est la plus grande de toutes les droites tirées du point F à la circonférence AHG,
- II. Et sa prolongée FD est la plus petite de toutes ces droites.
- III. De toutes les autres droites FB, ou la droite FC, plus proche de FA, est $>$ FC ou FH, qui en est plus éloignée.
- IV. Du point F, de part & d'autre de la plus petite FD, on ne peut tirer plus de deux droites FH, FG = entr'elles.

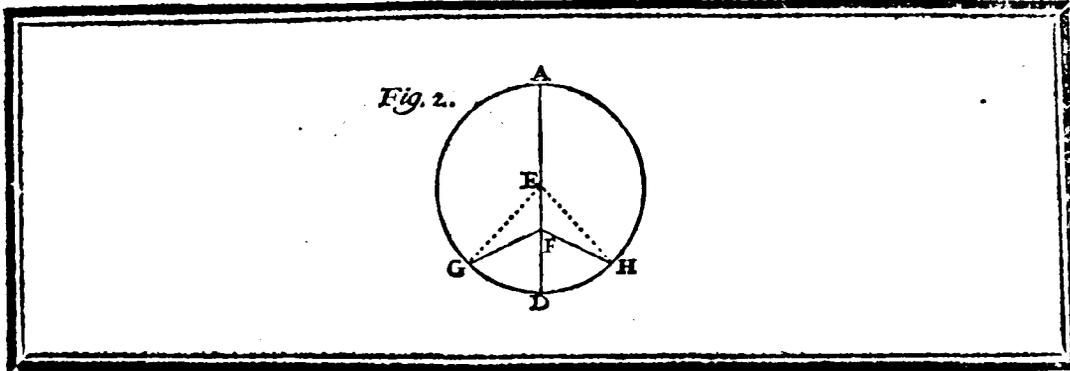
I. Préparation.

Tirez les rayons EB, EC, EH &c. Fig. I.

DEMONSTRATION.

1. Les deux côtés FE+EB du \triangle FEB sont $>$ le troisieme FB. Prop. 20. L.1.
Or EB est = à EA (Def. 15. L. 1).
2. Donc FE+EA, ou FA est $>$ FB.
De la même maniere on prouvera, que
3. La droite FA, est la plus grande de toutes les droites tirées du point F à la circonférence AHG. C. Q. F. D. 1.
4. Derechef; les deux côtés FE+FH du \triangle FEH sont $>$ le troisieme EH. Prop. 20. L.1.
Et ED étant = à EH (Def. 15. L. 1)

5. Les



5. Les droites FE + FH sont aussi \gt ED.
 En retranchant donc de part & d'autre la partie FE;
6. La droite FH sera \gt FD; ou FD \lt FH.
 On démontrera de la même manière que
7. La droite FD, qui est la prolongée de FA, est la plus petite de toutes les droites quelconques tirées du point F à la circonférence AHG.
- Ax. 5. L. 1.
C. Q. F. D. II.

De plus, le côté FE étant commun aux deux Δ FEB, FEC, le côté EB = au côté EC (Def. 15. L. 1), & \sphericalangle compris FEB \gt \sphericalangle compris FEC (Ax. 8. L. 1);

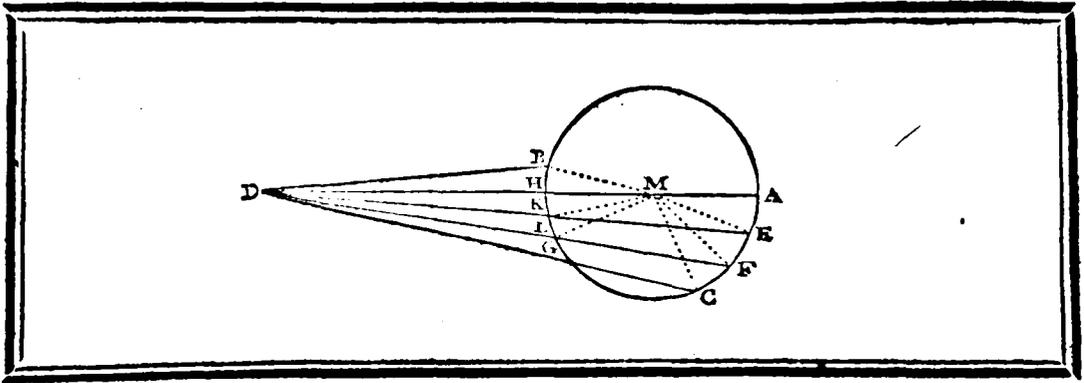
8. La base FB sera \gt la base FC.
 Par un raisonnement semblable on prouvera que
9. La droite FC est \gt FH.
10. Partant, la droite FB ou FC plus proche de la ligne FA, passant par le centre, est \gt celle FC ou FH qui en est plus éloignée.
- Prop. 24. L. 1.
C. Q. F. D. III.

II. Préparation. Fig. 2.

1. FAITES ensuite \sphericalangle FEG = à \sphericalangle FEH, & prolongez EG jusqu'à la rencontre de la \odot AHG.
2. Du point F au point G tirez la droite FG.
- Prop. 23. L. 1.
Dem. 1.

Maintenant, EF étant commun aux deux Δ FEH, FEG, le côté EH = au côté EG (Def. 15. L. 1), & \sphericalangle compris FEH = à \sphericalangle compris FEG (II Prep. 1).

11. La base FH sera = à la base FG.
 Mais parceque tout autre droite, différente de FG, se trouve nécessairement, ou plus proche de la ligne FD ou plus éloignée d'elle, que FG.
12. Une telle droite sera aussi \lt ou \gt FG (Arg. 10).
13. C'est pourquoi on ne peut tirer du point F, de part & d'autre de la plus petite FD, plus de deux lignes droites FH, FG = entr'elles.
- Prop. 4. L. 1.
C. Q. F. D. IV.



P R O P O S I T I O N V I I I . T H E O R E M E V I I .

SI d'un point quelconque (D), pris hors d'un cercle (BGCA), on tire à sa circonférence concave, tant des lignes droites (DA, DE, DF, DC) qu'on voudra, celle (DA) qui passe par le centre (M) : est la plus grande de toutes. Quant aux autres; la plus proche (DE ou DF) de celle (DA) qui passe par le centre, est plus grande qu'une autre (DF ou DC) qui en est plus éloignée; mais au contraire de celles (DH, DK, DL, DG), qui se terminent à la circonférence convexe; celle (DH) dont le prolongement passe par le centre, est la plus petite de toutes. Quant aux autres; la plus proche (DK ou DL), de celle (DH), dont le prolongement passe par le centre, est plus petite qu'une autre (DL ou DG), qui est plus éloignée. Enfin de part & d'autre la plus petite (DH), on ne peut tirer du point (D) que deux lignes droites (DK, DB) égales entr'elles.

H Y P O T H E S E .

- I. Le point D est pris hors d'un \odot BGCA dans un même plan.
- II. Les droites DA, DE, DF, DC, sont tirées de ce point, à la partie concave du \odot BGCA.
- III. Et ces droites coupent la partie convexe aux points H, K, L, G.

T H E S E .

- I. La droite DA, passant par le centre M, est la plus grande de toutes les droites, DA, DE, DF, DC.
- II. Les droites DE ou DF, selon qu'elles sont plus proches de la ligne DA sont \succ DF ou DC, qui en sont plus éloignées.
- III. La droite DH, dont le prolongement passe par le centre M, est la plus petite de toutes les droites DH, DK, DL, DG.
- IV. Les droites DK ou DL, selon qu'elles sont plus proches de la ligne DH, sont \prec DL ou DG, qui en sont plus éloignées.
- V. Du point D, de part & d'autre de la droite DH, on ne peut tirer plus de deux droites DK, DB = entr'elles.

I. Préparation.

Tirez les rayons ME, MF, MC, MK, ML.

D E M O N S T R A T I O N .

- I. **L**es deux côtés DM + ME du \triangle DME sont \succ le troisième DE.
Et parce que ME = MA (Def. 15. L. 1).

Prop. 20. L. 1.

2. DM + MA.

2. $DM + MA$ ou DA fera $\succ DE$.
De la même manière on prouvera que
3. La droite DA passant par le centre M est \succ toute autre droite tirée du point D à la partie concave du $\odot BGCA$.

C. Q. F. D. I.

De plus le côté DM étant commun aux deux $\triangle DME, DMF$, le côté $ME =$ au côté MF (Def. 15. L. 1) & \sphericalangle compris $DME \succ \sphericalangle$ compris DMF (Ax. 8. L. 1).

4. La base DE fera aussi \succ la base DF . Prop. 24. L. 1.
Par un raisonnement semblable on démontrera que
5. La droite DF est $\succ DC$, & ainsi des autres.
6. Partant, les droites DE ou DF , selon qu'elles sont plus proches, de la ligne DA passant par le centre, sont $\succ DF$ ou DC qui en sont plus éloignées.

C. Q. F. D. II.

7. Derechef, les côtés $DK + KM$ du $\triangle DKM$ sont \succ le troisième DM . Prop. 20. L. 1.
Si on retranche de part & d'autre les parties égales MK, MH (Def. 15. L. 1).
8. La ligne restante DK fera $\succ DH$; ou $DH \prec DK$.
On prouvera de même que
9. La droite DH est $\prec DL$, & ainsi des autres.
10. Partant, la droite DH , dont le prolongement passe par le centre M , est la plus petite de toutes les droites tirées du point D à la partie convexe du $\odot BGCA$.

C. Q. F. D. III.

De même, les droites DK, MK étant tirées des extrémités D & M du côté DM du $\triangle DLM$ à un point K , pris au dedans de ce \triangle (Hyp. 3).

11. Il s'ensuit que $DK + MK \prec DL + ML$. Prop. 21. L. 1.
Et en retranchant ces parties égales MK, ML (Def. 15. L. 1).
12. La droite DK fera $\prec DL$.
On démontrera de la même manière, que
13. La droite DL est $\prec DG$; & ainsi des autres.
14. Partant, les droites DK ou DL , selon qu'elles sont plus proches de la ligne DH , dont le prolongement passe par le centre, sont $\prec DL$ ou DG , qui en sont plus éloignées.

C. Q. F. D. IV.

II. Préparation.

1. Faites ensuite $\sphericalangle DMB = \sphericalangle DMK$, & prolongez MB jusqu'à la rencontre de la \odot .
2. Du point D au point B tirez la droite DB .

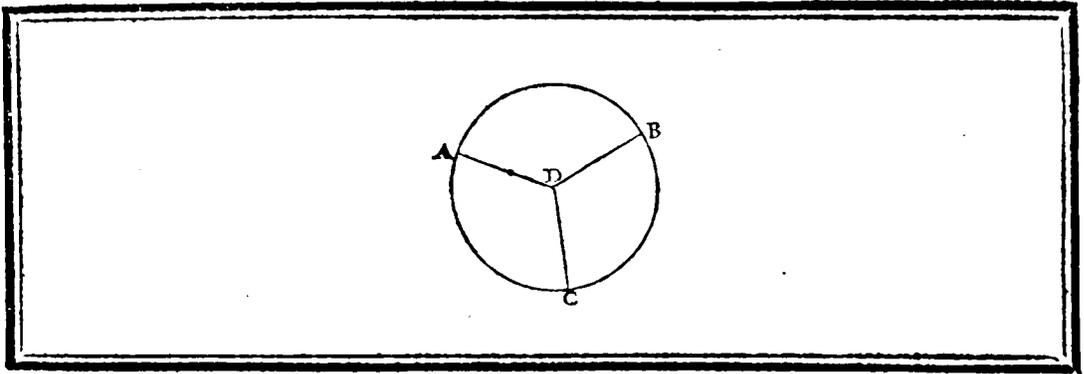
Prop. 23. L. 1.
Dem. 1.

Maintenant, le côté DM étant commun aux deux $\triangle DKM, DBM$, le côté $MK =$ au côté MB (Def. 15. L. 1), & \sphericalangle compris $DMK = \sphericalangle$ compris DMB (II Prep. 1).

15. La base DK sera $=$ à la base DB . Prop. 4. L. 1.
Mais parceque toute autre droite différente de DB , se trouve nécessairement ou plus proche de la ligne DH ou plus éloignée d'elle, que DB .
16. Une telle droite fera aussi \prec ou $\succ BD$ (Arg. 14).
17. C'est pourquoi on ne peut tirer du point D , de part & d'autre de la droite DH , plus de deux lignes droites $DK, DB =$ entr'elles.

Q 3

F. Q. F. D. V.



PROPOSITION IX. THEOREME VIII.
SI d'un point quelconque (D), pris au dedans d'un cercle (ABC), on peut tirer à sa circonférence plus de deux lignes droites (DA, DB, DC) égales entr'elles, ce point fera le centre du cercle.

HYPOTHESE.

Du point D, pris au dedans du $\odot ABC$, on peut tirer à la $\odot ABC$ plus de deux droites DA, DB, DC = entr'elles

THESE.

Le point D est le centre du cercle ABC.

DEMONSTRATION.

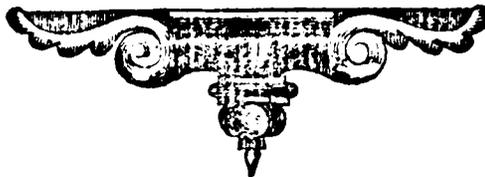
SI non.
 Quelqu'autre point sera le centre.

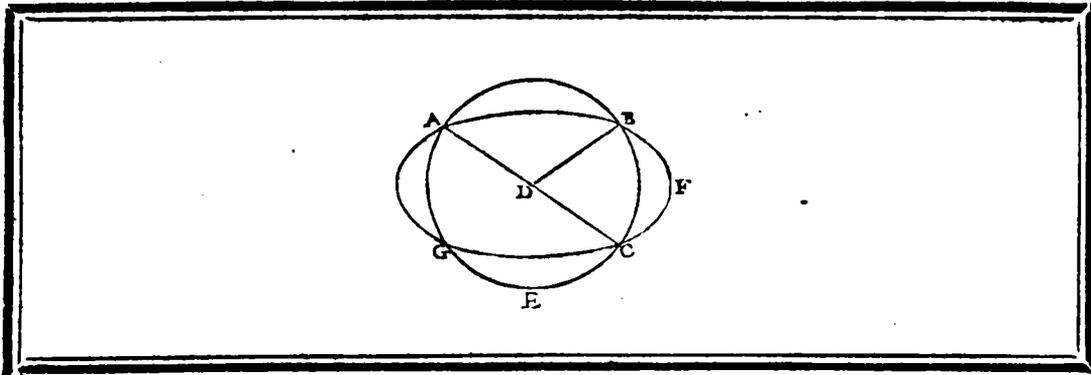
Puisque donc le point D n'est pas le centre (*Sup.*), & que de ce point D, on peut tirer à la circonférence plus de deux droites DA, DB, DC = entr'elles (*Hyp.*).

1. Il s'enfuivroit, que d'un point D, autre que le centre, on pourroit tirer plus de deux droites = entr'elles; ce qui est impossible.
2. Partant, le point D est le centre du $\odot ABC$.

Prop. 7. L. 3.

C. Q. F. D.





PROPOSITION X. THEOREME IX.

SI deux cercles (ABCEG, ABFCG) s'entrecourent: ils ne s'entrecouperont pas en plus de deux points (A & B).

HYPOTHESE.

Les deux \odot ABCEG, ABFCG s'entrecourent.

THESE.

Il ne sçauroient s'entrecouper en plus de deux points A & B.

DEMONSTRATION.

SI non.
Ils s'entre-couperont en plus de deux points, comme en A, B, C &c.

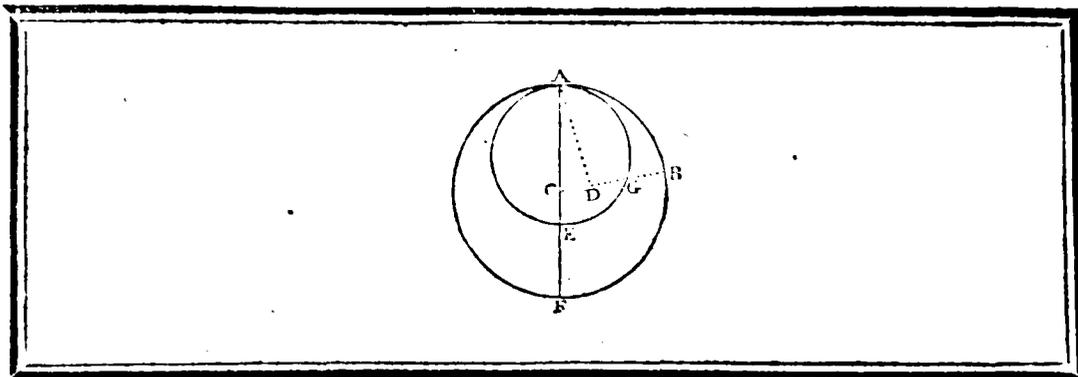
Préparation.

1. Trouvez le centre D du \odot ABCEG. Prop. 1. L. 3;
2. Tirez du centre D aux points de section A, B, C, &c les rayons DA, DB, DC. Dem. 1.

Puisque le point D est pris au dedans du \odot ABFCG, & que plus de deux droites DA, DB, DC, tirées de ce point à la \odot du \odot ABFCG, sont entr'elles (Prep. 1. & Def. 15. L. 1).

1. Le point D est le centre de ce cercle. Prop. 9. L. 3;
Mais ce point étant aussi le centre du cercle ABCEG (Prep. 1).
2. Ils'ensuivroit que deux cercles ABFCG, ABCEG qui s'entrecourent ont un centre commun D; ce qui est impossible. Prop. 5. L. 3;
3. Partant, deux \odot ABCEG, ABFCG ne sçauroient s'entrecouper en plus de deux points.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. THEOREME X.
SI deux cercles se touchent intérieurement (en A): la droite qui joint leurs centres, étant prolongée, passera par le point de leur attouchement (A).

HYPOTHESE.

La droite CA joint les centres des deux \odot AGE, ABF, qui se touchent intérieurement en A.

THESE.

Cette droite étant prolongée, passera par le point d'attouchement A de ces deux \odot .

DEMONSTRATION.

SI non.

Cette droite qui joint les centres, passera quelqu'autre part, comme la droite CGB.

Préparation.

Tirez donc des centres C & D au point d'attouchement les droites CA, DA.

Dem. 1.

Puisque dans le $\triangle CDA$, les deux côtés CD & DA pris ensemble, sont \gt le troisième CA (Prop. 20. L. 1), & que CA est $=$ à CB (Def. 15. L. 1).

1. Les droites CD + DA seront aussi \gt CB,

Si on retranche donc de part & d'autre la partie commune CD;

2. La droite DA sera \gt DB.

Ax. 5. L. 1.

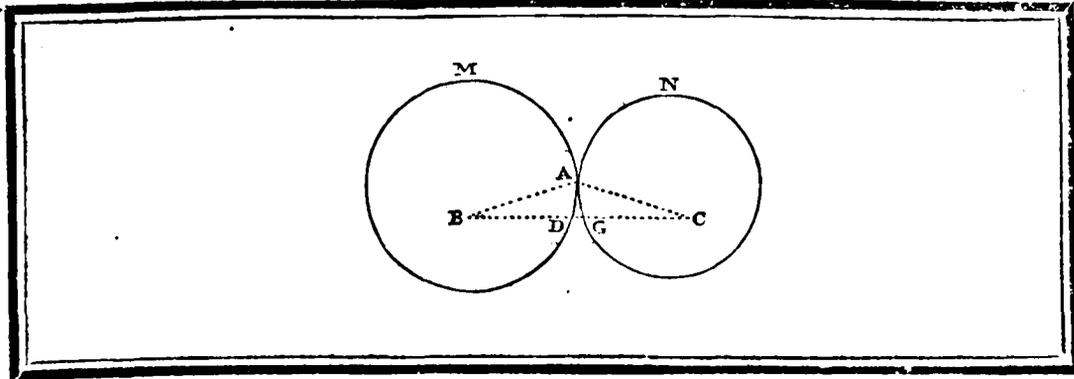
Mais la droite DA étant $=$ à DG (Prop. & Def. 15. L. 1).

3. DG seroit aussi \gt DB; ce qui est impossible.

Ax. 8. L. 1.

4. C'est pourquoi la droite CA, qui joint les centres des \odot AGE, ABF se touchant intérieurement, étant prolongée, passera par le point d'attouchement A.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XII. THEOREME XI.
SI deux cercles (DAM, GAN) se touchent extérieurement : la droite (BC), qui joint leurs centres, passera par le point d'attouchement (A).

HYPOTHESE.
 La droite BC joint les centres des deux \odot DAM, GAN, qui se touchent extérieurement en A.

THESE.
 La droite BC passe par le point d'attouchement des deux \odot .

DEMONSTRATION.

Si non.
 Cette droite, qui joint les centres, passera autre part, comme BDGC.

Préparation.

Tirez donc des centres B & C au point d'attouchement A les rayons BA, CA.

Dem. 1.

Puisque BA est = à BD & CA = à CG (Def. 15. L. 1).

1. Les droites BA + CA sont = aux droites BD + CG;

Ax. 2. L. 1.

Et si on ajoute aux droites BD + CG la partie DG;

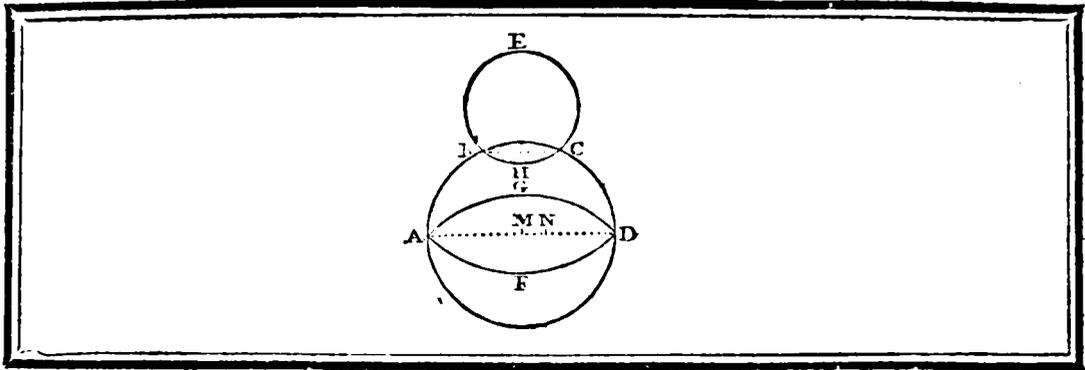
2. BD + DG + CG, ou la base BC du Δ BAC est > les deux côtés BA + CA; ce qui est impossible.

Prop. 20. L. 1.

3. La droite BC, qui joint les centres, passera donc par le point d'attouchement A.

C. Q. F. D.





D PROPOSITION XIII. THEOREME XII.
 Deux cercles (ABCD, AGDF ou ABCD, BECH), qui se touchent; soit intérieurement; soit extérieurement: ne se touchent pas en plus d'un point.

HYPOTHESE

I. Les deux \odot ABCD, AGDF se touchent intérieurement,
 II. Et les deux \odot ABCD, BECH se touchent extérieurement.

THESE.

Les \odot ABCD, AGDF ou ABCD, BECH ne se touchent pas en plus d'un point.

DEMONSTRATION.

SI non.

- I. Les \odot ABCD, AGDF se touchent intérieurement en plus d'un point, comme en A & en D.
- II. Ou bien les \odot ABCD, BECH se touchent extérieurement en plus d'un point, comme en B & en C.

I. Préparation.

1. Trouvez les centres M & N des \odot ABCD, AGDF.
2. Tirez par les centres la droite MN & prolongez la de part & d'autre, jusqu'à la rencontre de la \odot .

Prop. I. L. 3.

Dem. 1. & 2.

Puisque la droite MN joint les centres M & N des deux \odot ABCD, AGDF, (Prep. 2), qui se touchent intérieurement (Sup. I).

1. Cette droite passera par les points d'attouchement A & D.
 Or AM est = à MD (I. Prep. 2. & Def. 15. L. 1).
2. La droite AM est donc \sphericalangle ND & à plus forte raison AN \sphericalangle ND.
 Mais par la raison que AN est = à ND (I. Prep. 2. & Def. 15. L. 1).
3. La droite AN seroit à la fois \sphericalangle ND & = à ND; ce qui est impossible.
4. Partant, deux \odot ABCD, AGDF, qui se touchent intérieurement, ne sauroient se toucher en plus d'un point.

Prop. II. L. 3.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.

II. Préparation.

Tirez par les points d'attouchement B & C des \odot ABCD, BECH, la droite BC.

Dem. 1.

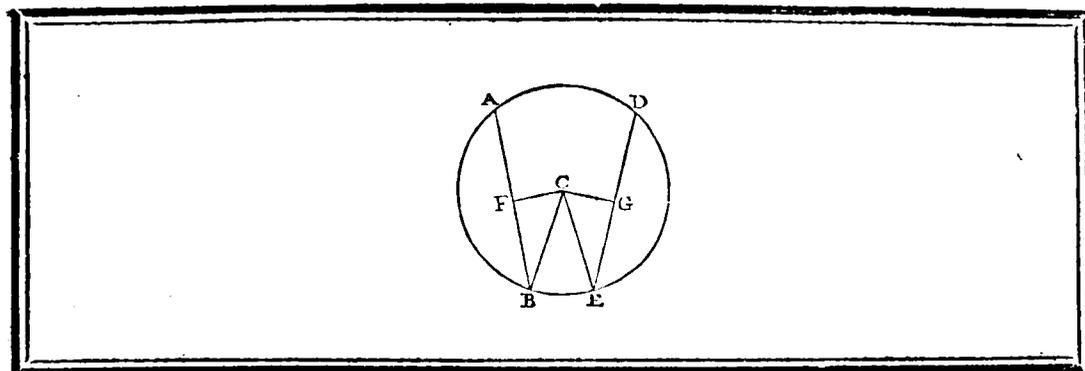
Puisque la droite BC joint deux points B & C, pris dans les \odot des cercles ABCD, BECH (II Prep.).

1. Cette droite tombera au dedans des deux \odot ABCD, BECH.
 Mais le \odot BECH touchant extérieurement le \odot ABCD (Sup. 2).
2. La droite BC, tirée dans le \odot BECH, tombera hors du \odot ABCD.
3. D'où il suit, que la droite BC tomberoit à la fois dans le \odot ABCD (Arg. 1) & hors du même \odot (Arg. 2); ce qui est impossible.
4. C'est pourquoi deux \odot ABCD, BECH, qui se touchent extérieurement, ne se touchent pas en plus d'un point.

Prop. 2. L. 3.

Def. 3. L. 3.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. THEOREME XIII.

Dans un cercle (ABED) les cordes égales (AB, DE) sont également éloignées du centre (C) : & les cordes (AB, DE) également éloignées du centre (C) : sont égales.

CAS I.

HYPOTHESE.

Les cordes AB, DE sont égales.

Préparation.

THESE.

Ces cordes sont également éloignées du centre C.

1. Trouvez le centre C du \odot ABED.
2. Abaissez sur les cordes AB, DE les \perp CF, CG.
3. Tirez du centre C aux points E & B les rayons CE, CB.

Prop. 1. L. 3.
Prop. 12. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Les cordes AB, DE étant \equiv entr'elles (Hyp.), & partagées en deux également en F & G (Prep. 2, & Prop. 3. L. 3).

1. Leurs moitiés FB, GE le sont aussi, Ax. 7. L. 1.
2. Partant, le \square de FB est \equiv au \square GE. Prop. 46. L. 1.
- Mais à cause que le \square de CB est \equiv au \square de CE (Prep. 3. & Prop. 46. Coroll. 3). Coroll. 3.
3. Il s'enfuit, que le \square de FB + le \square de FC est \equiv au \square de GE + au \square de CG. Prop. 47. L. 1.
- Retranchant donc de part & d'autre les \square égaux de FB & de GE (Arg. 2); Ax. 1. L. 1.
4. Le \square restant de FC sera \equiv au \square de GC (Ax. 3. L. 1); ou FC \equiv GC. Prop. 46. L. 1.
5. Partant, les cordes AB, DE sont également éloignées du centre C du \odot ABED. Coroll. 3.

C. Q. F. D.

CAS II.

HYPOTHESE.

Les cordes AB, DE, sont également éloignées du centre C du \odot ABED.

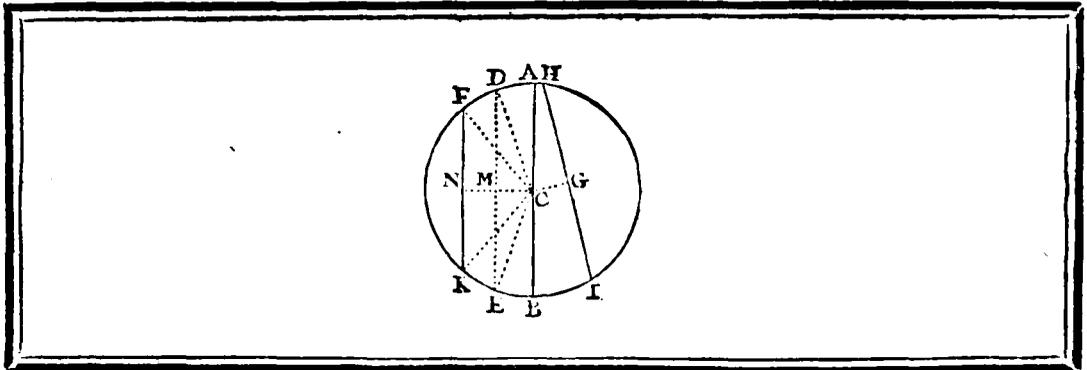
THESE.

Ces cordes sont égales.

- P**uisque FC est \equiv à GC (Hyp. & Def. 4. L. 3), & CB \equiv CE (Prep. 3 & Def. 15. L. 1).
1. Le \square de FC sera \equiv au \square de CG & le \square de CB \equiv au \square de CE. Prop. 46. L. 1.
 - Partant, le \square de FC + le \square de FB est aussi \equiv au \square de CG + au \square de GE. Coroll. 3.
 - En retranchant donc de part & d'autre les \square égaux de FC & de CG (Arg. 1); Prop. 47. L. 1.
 3. Le \square restant de FB sera \equiv au \square de GE (Ax. 3. L. 1); ou FB \equiv GE. Ax. 1. L. 1.
 - Partant, FB, GE étant les demicordes (Prep. 2. Prop. 3. L. 3), les cordes entières AB, DE sont aussi égales entr'elles. Prop. 46. L. 1.

Ax. 6. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. THEOREME XIV.

LE diametre (AB) d'un cercle (AIK) est plus grand que chacune de ses cordes (HI, FK); & une corde (HI) plus proche du diametre est plus grande que toute autre (FK), qui en est plus éloignée.

HYPOTHESE.

1. AB est le diametre du \odot AIK.
 11. Et la corde HI, est plus proche du diametre que la corde FK.

THESE.

I. Le diametre AB est \succ chacune des cordes HI, FK.
 II. La corde HI est \succ la corde FK.

Préparation.

1. DU centre C abaissez sur HI & FK les \perp CG, CN. Prop. 12. L. 1.
2. De CN, la plus grande de ces \perp , retranchez une partie CM = à CG. Prop. 3. L. 1.
3. Elevez au point M sur CN une \perp DM, & prolongez la en E. Prop. 11. L. 1.
4. Tirez les rayons CD, CF, CE, CK. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les droites CD, CE, CA, CB sont = entr'elles (Prep. 4 & Def. 15. L. 1).
1. Il suit, que CD + CE est = à CA + CB ou AB. Ax. 2. L. 1.
 Mais CD + CE est \succ DE (Prop. 20. L. 1).
 2. C'est pourquoi AB est aussi \succ DE, ou \succ HI; à cause que HI = DE (Prep. 2). Def. 4. L. 3.
 - 3 On prouvera par un raisonnement semblable, que AB est aussi \succ FK. Prop. 14. L. 3.

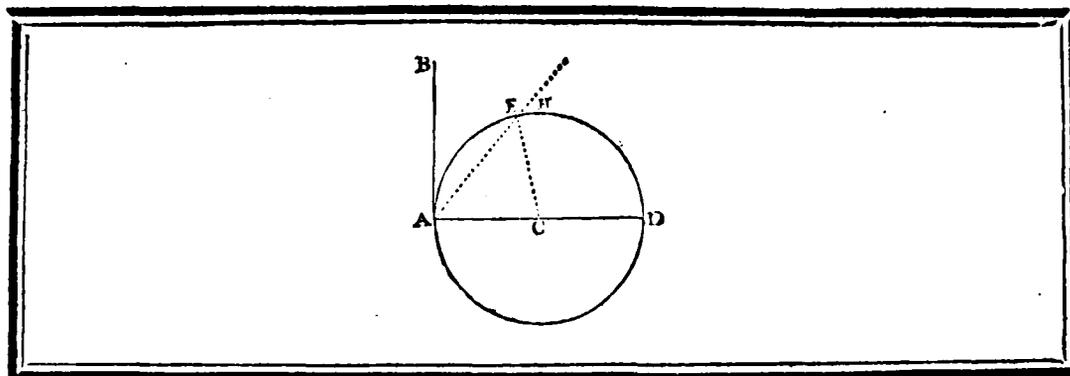
C. Q. F. D. I.

De plus, les Δ CDE, CFK ayant deux côtés CD, CE = à deux côtés CF, CK chacun à chacun (Prep. 4. & Def. 15. L. 1), & \sphericalangle compris DCE \succ \sphericalangle compris FCK (Ax. 8. L. 1).

4. La base DE sera \succ la base FK. Prop. 24. L. 1.
5. Et parceque HI est = à DE (Prep. 2.), HI est aussi \succ FK. Def. 4. L. 3.

Prop. 14. L. 3.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVI. THEOREME XV.
Toute droite (AB) perpendiculaire au diametre d'un cercle (AHD), à son extrémité (A), tombe hors de ce cercle; & on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette perpendiculaire (AB) & la circonférence; de plus l'angle mixtiligne (HAD), formé par une partie de la circonférence (HEA) & le diametre (AD): est plus grand que tout angle rectiligne aigu quelconque; & l'angle (HAB) formé par la perpendiculaire (AB), & la même partie de la circonférence (HEA): est plus petit que tout autre angle rectiligne aigu quelconque.

HYPOTHESE.

- I. AB est tirée perpendiculairement à l'extrémité A du diametre,
- II. Et forme avec l'arc HEA un \sphericalangle mixtiligne HAB,
- III. Le diametre AD forme avec le même arc HEA un \sphericalangle mixtiligne HAD.

THESE.

- I. La \perp AB tombe hors du \odot AHD.
- II. On ne peut tirer aucune droite entre la \perp AB & l'arc HEA.
- III. L'angle mixtiligne HAD est \sphericalangle tout \sphericalangle rectiligne aigu.
- IV. L'angle mixtiligne HAB est \sphericalangle tout \sphericalangle rectiligne aigu.

DEMONSTRATION.

I. **Si** non.

La \perp AB tombera au dedans du \odot AHD & le coupera quelque part en E, comme AE.

Préparation.

Du centre C au point de section E tirez le rayon CE.

Dem. I.

Puisque CA est \equiv à CE (Def. 15. L. I).

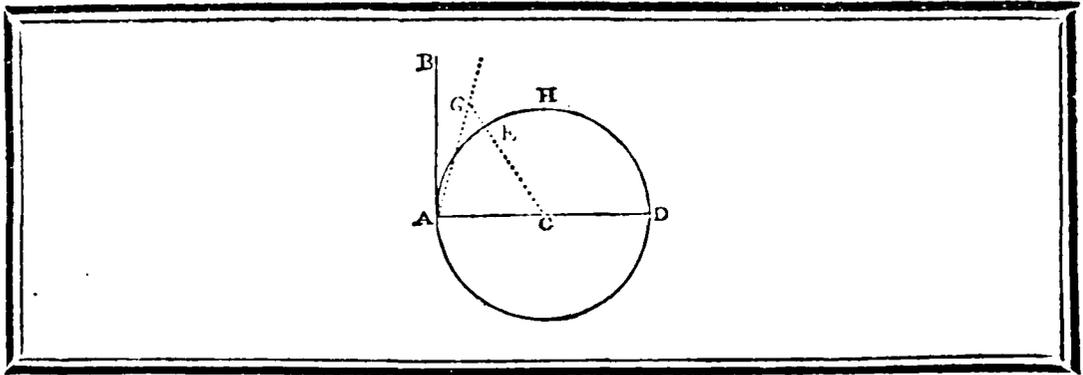
1. L'angle CAE fera \equiv à \sphericalangle CEA.
- 2 Et à cause que \sphericalangle CAE est un \sphericalangle (Sup.); \sphericalangle CEA est aussi un \sphericalangle .
3. C'est pourquoi, les deux \sphericalangle CAE + CEA, du \triangle AEC, ne seront pas \sphericalangle 2 \sphericalangle ; ce qui est impossible.
4. La \perp AB tombe donc hors du cercle.

Prop. 5. L. I.

Ax. 1. L. I.

Prop. 17. L. I.

C. Q. F. D.



II. Si non.

On pourra tirer une droite, comme AG, entre la \perp AB & la circonférence du \odot AHD.

Préparation.

Du centre C, abaissez sur AG la \perp CG.

Prop. 12. L. 1.

Puisque \sphericalangle CGA est un \perp ; & \sphericalangle CAG \lt un \perp (Ax. 8. L. 1); commen'étant que la partie d'un \perp CAB (Hyp. 1).

1. Il fuit que le côté CA est \gt le côté CG.

Prop. 19. L. 1.

Mais CA étant = à CE (Def. 15. L. 1).

2. La droite CE seroit aussi \gt CG; ce qui est impossible.

Ax. 8. L. 1.

3. On ne peut donc tirer aucune droite entre la \perp AB & la \odot du \odot AHD.

C. Q. F. D. II.

III. & IV. Si non.

On peut tirer une droite, comme AG, qui forme de part & d'autre avec le diamètre AD & avec la \perp AB, un \sphericalangle rectiligne aigu GAD \gt \sphericalangle mixtiligne HAD, & un \sphericalangle rectiligne GAB \lt \sphericalangle mixtiligne EAB.

Puis donc que la droite AG, tirée à l'extrémité A du diamètre AD, forme avec le diamètre & avec la \perp AB un \sphericalangle rectiligne aigu GAD \gt \sphericalangle mixtiligne HAD, & un \sphericalangle rectiligne GAB \lt \sphericalangle mixtiligne EAB (Sup.).

1. Cette droite AG tombera nécessairement sur l'extrémité A du diamètre AD, entre la \perp AB & la circonférence du \odot AHD; ce qui est impossible.

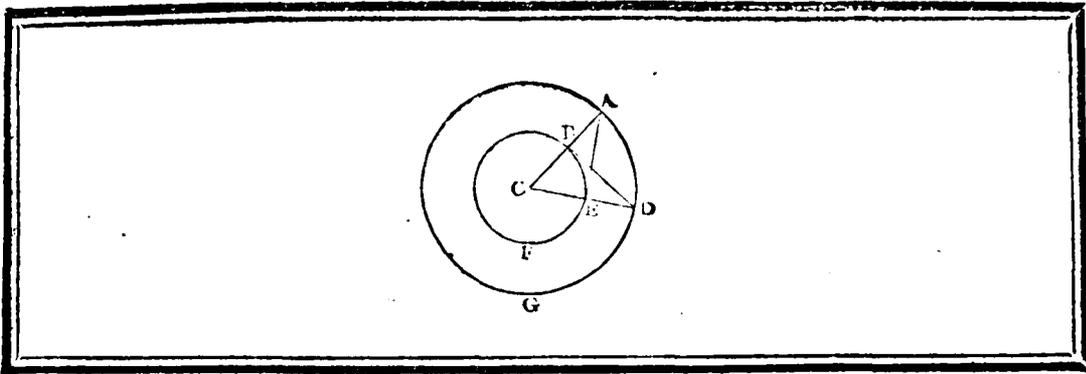
Dem. précéd.

2. L'angle mixtiligne HAD est donc \gt , & \sphericalangle mixtiligné HAB \lt tout \sphericalangle rectiligne aigu.

C. Q. F. D. III. & IV.

C O R O L L A I R E .

Toute droite, tirée perpendiculairement, à l'extrémité d'un diamètre, touche le cercle en un seul point.



T PROPOSITION XVII. PROBLEME II.
 Trer d'un point donné (A) hors d'un cercle (BEF) ; une tangente (AE) à ce cercle.

DONNE.

Le point A hors du \odot BEF.

CHERCHEE.

La tangente AE tirée du point A au \odot BEF.

Résolution.

1. Cherchez le centre C du \odot BEF, & tirez CA.
2. Du centre C & du rayon CA décrivez de \odot ADG,
3. Du point B, ou le rayon CA coupe la \odot BEF, élevez sur CA la \perp BD.
4. Du centre C, au point D, où la \perp BD coupe la \odot ADG, tirez le rayon CD.
5. Du point A au point E, où CD coupe la \odot BEF tirez la droite AE, qui sera la tangente cherchée.

Prop. 1. L. 3.
 Dem. 3.

Prop. 11. L. 1.
 Dem. 1.

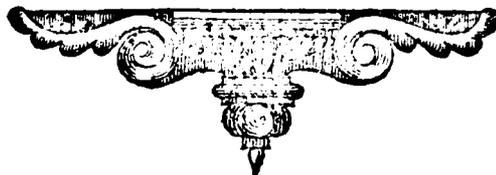
DEMONSTRATION.

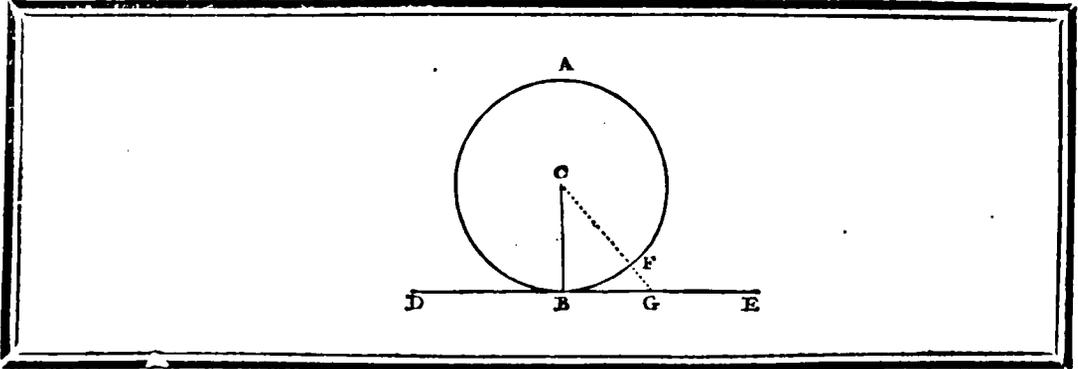
Puisque dans les \triangle CBD, CEA le côté CB est = au côté CE, le côté CA = au côté CD (Def. 15. L. 1) & \sphericalangle compris BCD commun aux deux \triangle .

1. Les \sphericalangle CBD, CEA, opposés aux côtés égaux CD, CA, sont = entr'eux.
2. C'est pourquoi \sphericalangle CBD étant un \perp (Ref. 3), \sphericalangle CEA sera droit aussi.
3. Partant, la droite AE, tirée du point donné A, est tangente du \odot BEF.

Prop. 4. L. 1.
 Ax. 1. L. 1.
 Prop. 16. L. 3.
 Cor. Def. 1. L. 3

C. Q. F. F.





S PROPOSITION XVIII. THEOREME XVI.
 SI une droite (DE) touche un cercle (AFB) en un point (B): le rayon (CB) tiré du centre au point d'attouchement (B), est perpendiculaire sur la tangente (DE).

HYPOTHESE.

- I. La droite DE touche le \odot AFB au point B,
- II. Et le rayon CB passe par le point d'attouchement B.

THESE.

Le rayon CB est \perp sur la tangente DE.

DEMONSTRATION.

SI non.

On pourra abaisser du centre C une autre droite CG \perp sur la tangente DE.

Préparation.

ABaissez donc du centre C sur la tangente DE la \perp CG.

Prop. 12. L. 1.

Puisque l'angle BGC du \triangle BCG est un \perp (Prep.).

1. L'angle CBG sera $<$ un \perp .

2. Partant, CB est $>$ CG,

Et CF étant \equiv CB (Def. 15. L. 1).

3. La droite CF est aussi $>$ CG; ce qui est impossible.

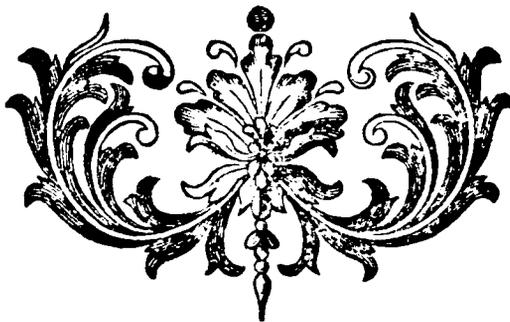
4. C'est pourquoi le rayon CB est \perp sur la tangente DE.

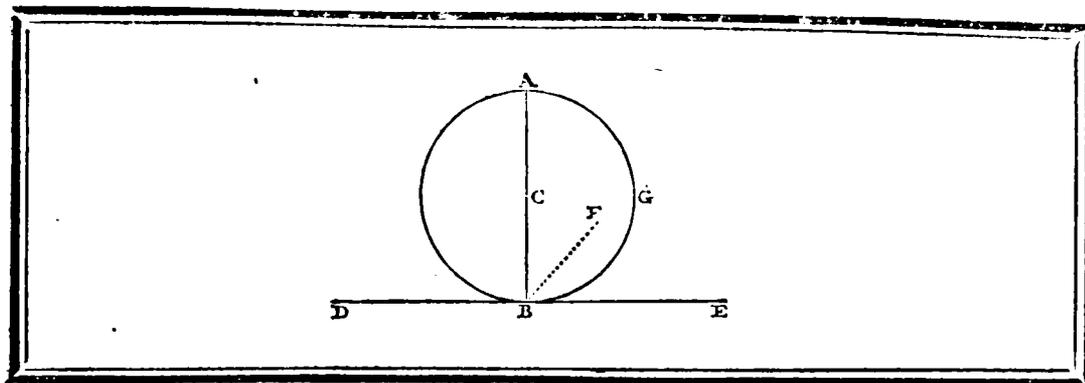
Prop. 17. L. 1.

Prop. 19. L. 1.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIX. THEOREME XVII.
SI une ligne droite (DE) touche un cercle (AGB en B): la perpendiculaire (BA) élevée du point d'attouchement (B) sur cette tangente, passera par le centre (C) du cercle.

HYPOTHESE.

- I. La droite DE est tangente du \odot AGB,
- II. Et BA est la \perp élevée du point d'attouchement B sur cette tangente.

THESE.

La droite BA passe par le centre C du \odot AGB.

SI non.

DEMONSTRATION.

Le centre se trouvera dans un point F hors de la droite BA.

Préparation.

Tirez donc du point d'attouchement B au centre F la droite BF.

Dem. 1:

Puisque la droite BF est tirée du point d'attouchement B au centre F du \odot AGB (*Prep.*).

Prop. 18. L. 3:

1. L'angle FBE est un \perp .

Mais \sphericalangle ABE étant aussi un \perp (*Hyp.* 2.).

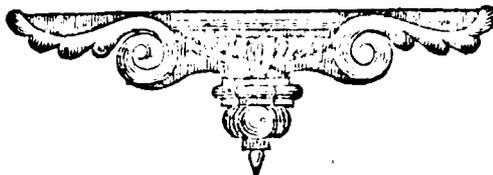
2. L'angle ABE est $=$ à \sphericalangle FBE; ce qui est impossible.

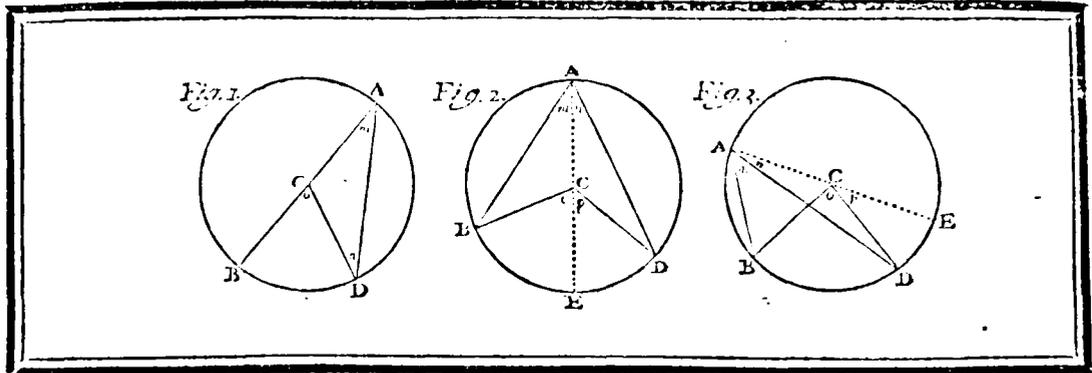
[Ax. 10. L. 1:

3. C'est pourquoi le centre C sera nécessairement dans la droite BA.

[Ax. 8. L. 1:

C. Q. F. D.





PROPOSITION XX. THEOREME XVIII.
Dans le cercle: l'angle au centre (BCD) est double de l'angle à la circonférence (BAD), quand ces angles s'appuient sur le même arc (BD).

HYPOTHESE.

- I. L'angle BCD est au centre, & \sphericalangle BAD à la \circ .
- II. Les jambes BC, CD & BA, AD de ces \sphericalangle s'appuient sur le même arc BD.

THESE.

L'angle au centre BCD est double de \sphericalangle à la \circ BAD.

DÉMONSTRATION.

C A S I.

SI le centre C, tombe sur une des jambes AB de \sphericalangle à la \circ . (Fig. 1).

Puisque dans le \triangle CAD le côté CA est = au côté CD (Def. 15. L. 1).

1. L'angle m est = à \sphericalangle n & \sphericalangle m + n double \sphericalangle m.

Mais \sphericalangle o est = à \sphericalangle m + n (Prop. 32. L. 1).

2. Donc \sphericalangle o est double de \sphericalangle m ou \sphericalangle BCD double de \sphericalangle BAD.

{ Prop. 5. L. 1.
 { Ax. 2. L. 1.

Ax. 6. L. 1.

C. Q. F. D.

C A S II.

SI le centre C tombe au dedans de \sphericalangle à la \circ (Fig. 2).

Préparation.

Tirez le diamètre ACE.

Dém. 1.

On prouvera, comme dans le premier Cas.

1. Que le \sphericalangle o est double de \sphericalangle m & \sphericalangle p double \sphericalangle n.

2. D'où il suit que \sphericalangle o + p est double de \sphericalangle m + n, ou \sphericalangle BCD double de \sphericalangle BAD. Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.

C A S III.

SI le centre C tombe au dehors de \sphericalangle à la \circ (Fig. 3).

En tirant le diamètre ACE; on démontrera encore par un raisonnement semblable à celui du premier Cas, que

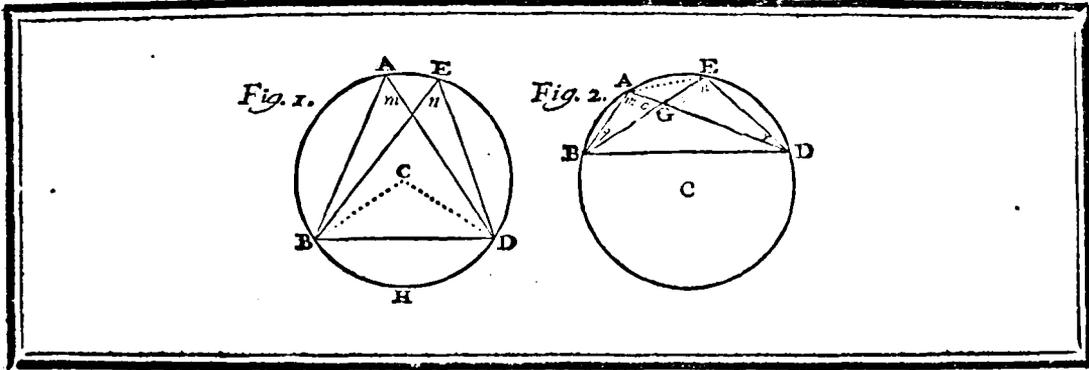
1. L'angle p est double de \sphericalangle n, & \sphericalangle o + p double de \sphericalangle m + n;

En retranchant donc d'une part \sphericalangle p, & de l'autre \sphericalangle n,

2. L'angle restant o sera double de \sphericalangle m ou \sphericalangle BCD double de \sphericalangle BAD.

Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. THEOREME XIX.
Dans le cercle, les angles (m & n), placés dans un même segment de cercle ($BAED$), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

Les $\sphericalangle m$ & n sont dans le même segment de $\odot BAED$.

THESE.

$\sphericalangle m$ est $=$ à $\sphericalangle n$.

DEMONSTRATION.

CAS I.

SI le segment $BAED$ est \succ le demi \odot (*Fig. 1*).

Préparation.

1. Cherchez le centre C du $\odot BAED$.
2. Et tirez les rayons CB, CD .

Prop. 1. L. 3.
Dem. 1.

Puisque $\sphericalangle BCD$ est double de chacun des $\sphericalangle m$ & n (*Prop. 20. L. 3*).
 1. Il s'en suit que $\sphericalangle m$ est $=$ à $\sphericalangle n$.

Ax. 7. L. 1.

CAS II.

SI le segment $BAED$ est \prec le demi \odot (*Fig. 2*).

Préparation.

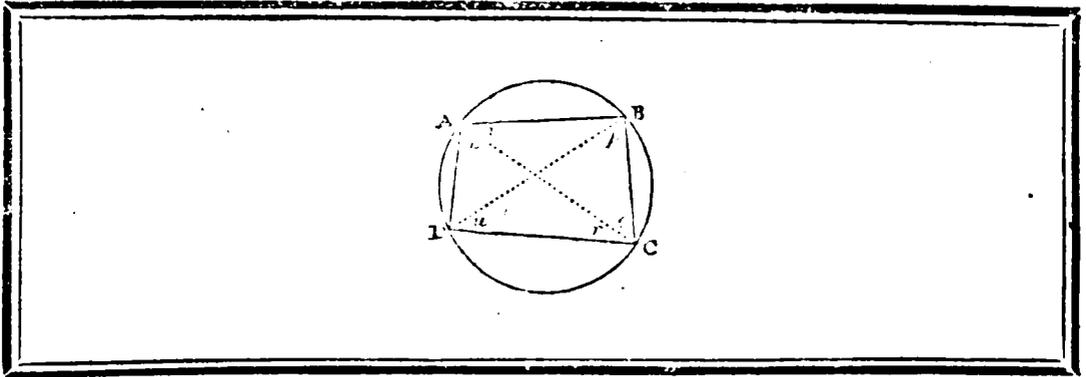
Tirez la droite AE .

Dem. 1.

1. Les trois $\sphericalangle m + o + q$ du $\triangle BAG$ sont égaux aux trois $\sphericalangle p + m + r$ du $\triangle GED$.
 Mais $\sphericalangle q$ est $=$ à $\sphericalangle r$ (*Cas 1*), & $\sphericalangle o =$ à $\sphericalangle p$ (*Prop. 15. L. 1*), en retranchant donc d'une part les $\sphericalangle q + o$ & de l'autre leurs égaux les $\sphericalangle p + r$,
 2. Les \sphericalangle restans m & n seront $=$ entr'eux.

[Prop. 32. L. 1.
& Ax. 1. L. 1.

Ax. 3. L. 1.
C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. THEOREME XX.
Les figures quadrilatères (DABC) inscrites dans un cercle: ont les angles opposés (BAD, BCD ou ABC, ADC) égaux à deux droits.

HYPOTHESE.

La figure DABC est un quadrilatère inscrit dans un \odot .

THESE.

Les \sphericalangle opposés BAD + BCD, ou ABC + ADC sont = à 2 L .

Préparation.

Tirez les diagonales AC, BD.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les \sphericalangle u & n sont des \sphericalangle à la \odot , placés dans le même segment DABC.

1. Ces \sphericalangle u & n sont = entr'eux.

Prop. 21. L. 3.

On prouvera de même, que

2. Les \sphericalangle p & m sont = entr'eux.

3. C'est pourquoi, les \sphericalangle u + p sont = aux \sphericalangle n + m ou à \sphericalangle BAD.

Ax. 2. L. 1.

Si on ajoute donc de part & d'autre \sphericalangle r + q, ou BCD;

4. Les \sphericalangle u + p + (r + q) sont = aux \sphericalangle BAD + BCD.

Ax. 2. L. 1.

Mais les trois \sphericalangle u + p + (r + q) du \triangle DBC étant = à 2 L (Prop. 32. L. 1).

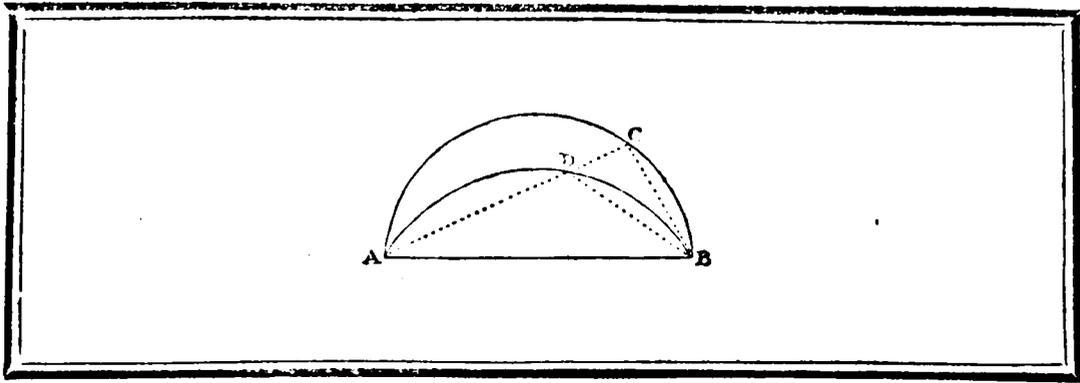
5. Les deux \sphericalangle opposés BAD + BCD du quadrilatère DABC sont aussi = à 2 L .

Ax. 1. L. 1.

On démontrera par un raisonnement semblable, que

6. Les \sphericalangle ABC + ADC sont = à 2 L .

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. THEOREME XXI.
SUR une même ligne droite (AB) & du même côté: on ne sçauroit placer deux segments de cercles (ADB, ACB) semblables & inégaux.

HYPOTHESE

Les segments semblables ADB, ACB sont placés sur une même ligne droite & du même côté.

THESE.

Ces segments ne sçauroient être semblables & inégaux.

DEMONSTRATION.

SI non.

Les segments ADB, ACB placés sur la même corde AB & du même côté feront semblables & inégaux.

Préparation.

1. Tirez une droite quelconque AC, qui coupe les segments ADB, ACB aux points D & C.
2. Tirez les droites BD, BC.

} Dem. 1.

PUISQUE les \sphericalangle BDA, BCA sont placés dans des segments semblables ADB, ACB (*Hyp. & Prep. 1 & 2*).

1. Ces \sphericalangle sont donc \equiv entr'eux.

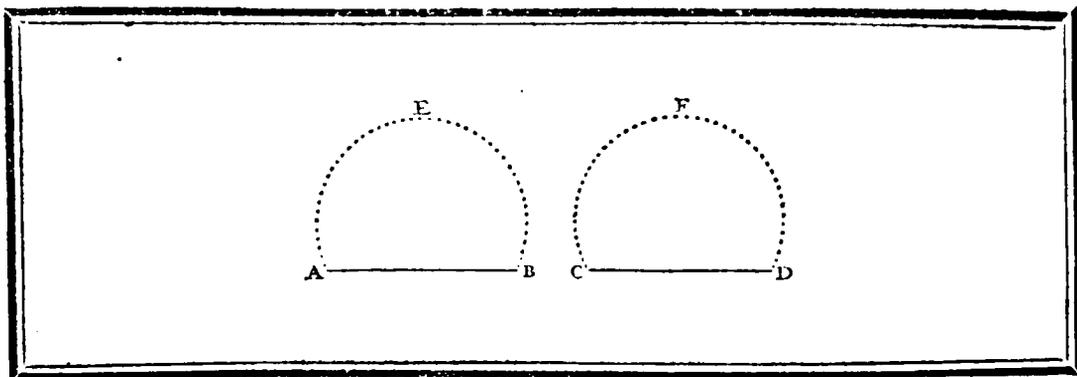
AX. 2. L. 3.

2. L'angle extérieur ADB du \triangle BDC seroit donc \equiv à son intérieur opposé BCD; ce qui est impossible.

Prop. 16. L. 1.

3. Partant, on ne sçauroit placer sur une même ligne droite AB & du même côté deux segments de \odot ADB, ACB semblables & inégaux.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV. THEOREME XXII.
Les segments de cercles semblables (AEB, CFD) foustendus par des cordes égales (AB, CD) sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. Les segments de \odot AEB, CFD sont semblables,
- II. Et ces segments sont foustendus par des cordes égales AB, CD.

THESE.

Les segments AEB, CFD sont
 = entr'eux.

SI non.

DEMONSTRATION.

Le segment AEB ne fera point = au segment CFD.

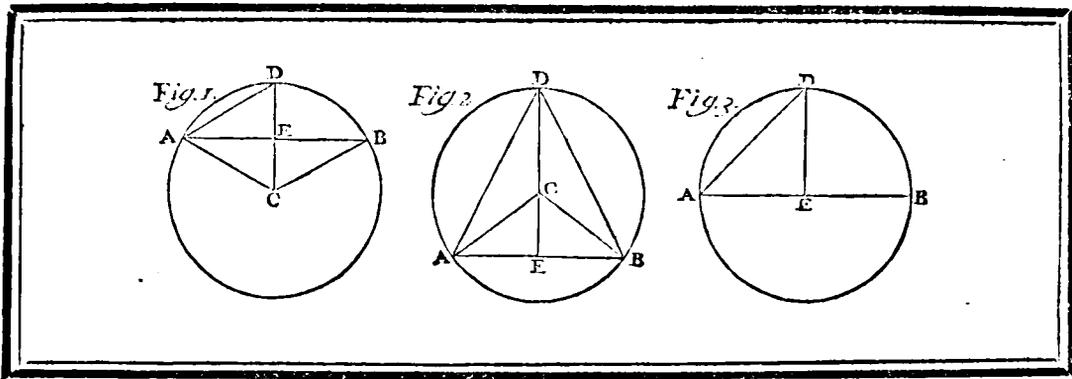
Puis donc que le segment AEB n'est point = au segment CFD (Sup), & que la corde AB est = à la corde CD. (Hyp. 2),

1. On pourra placer sur une corde AB, ou sur son égale CD, deux segments de \odot semblables & inégaux AEB, CFD; ce qui est impossible.
2. Ces segments sont donc = entr'eux.

Prop. 23. L 1.

C. Q. F. D.





U PROPOSITION XXV. PROBLEME III.

UN segment de cercle (ADB) étant donné; décrire le cercle dont il est un segment.

DONNEE

Le segment de \odot ADE.

CHERCHEE.

Le centre C du \odot , dont ADB est un segment.

Résolution.

1. Partagez la corde AB en deux également au point E.
 2. Du point E sur AB élevez la \perp ED.
 3. Tirez la droite AD.
- Et \sphericalangle ADE fera \sphericalangle , ou \sphericalangle , ou \sphericalangle DAE.

Prop. 10. L. 1.
Prop. 11. L. 1.
Dem. 1.

C A S I & II.

Si \sphericalangle ADE est ou \sphericalangle , ou \sphericalangle DAE. (Fig. 1. & 2).

4. Faites sur DA au point A, \sphericalangle DAC = à \sphericalangle ADE.
5. Prolongez DE en C (Fig. 1), & tirez BC (Fig. 1. & 2).

Prop. 23. L. 1.
Dem. 2. & 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le Δ ADC, l'angle DAC est = à \sphericalangle ADC (Ref. 4).

1. Le côté AC est = au côté DC.
Mais dans les Δ AEC, BEC, le côté AE est = au côté EB, le côté EC commun aux deux Δ & \sphericalangle compris AE C = à \sphericalangle compris BE C (Ref. 2 & Ax. 10. L. 1).
2. La base AC sera = à la base BC.
3. Partant, les trois droites AC, DC, BC, tirées d'un point C, à la \odot ADB, sont = entr'elles.
4. C'est pourquoi le point C est le centre du \odot , dont ADB est un segment.

Prop. 5. L. 1.

Prop. 4. L. 1.
Ax. 1. L. 1.

Prop. 9. L. 3.

C. Q. F. F.

C A S III.

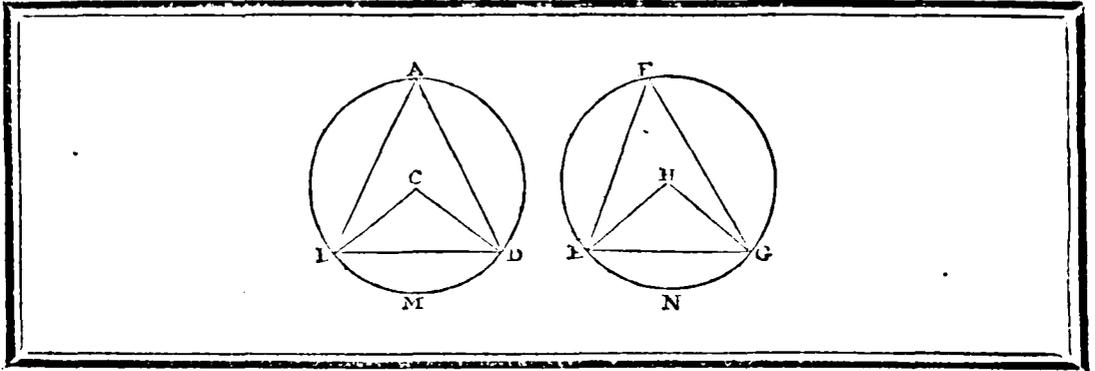
Si \sphericalangle ADE est = à \sphericalangle DAE. (Fig. 3).

1. LE côté AE est donc = au côté ED.
2. Partant, AE étant = EB (Ref. 1), les trois droites AE, ED, EB tirées d'un point E à la \odot ADB sont = entr'elles.
3. D'où il fuit que le point E est le centre du \odot dont ADB est un segment.

Prop. 5. L. 1.

Ax. 1. L. 1.
Prop. 9. L. 3.

C. Q. F. F.



D PROPOSITION XXVI. THEOREME XXIII.
 Dans les cercles égaux (BADM, EFGN): les angles égaux; tant ceux au centre (C & H), que ceux à la circonférence (A & F), s'appuyent sur des arcs égaux (BMD, ENG).

HYPOTHESE.

- I. Les \sphericalangle A, F sont des \sphericalangle à la \odot , = entr'eux.
- II. Les \sphericalangle C & H sont des \sphericalangle au centre = entr'eux.
- III. Ces \sphericalangle sont placés dans des \odot égaux BADM, EFGN.

THESE.

Les arcs BMD, ENG sur lesquels ces \sphericalangle s'appuyent sont = entr'eux.

Préparation.

Tirez les cordes BD, EG.

DEMONSTRATION.

Les deux côtés CB, CD du \triangle BCD étant = aux deux côtés HE, HG du \triangle EHG (Hyp. 3 & Ax. 1. L. 3), & \sphericalangle compris C = à \sphericalangle compris H (Hyp. 2).

1. La base BD sera = à la base EG.
Et puisque \sphericalangle A est = à \sphericalangle F (Hyp. 1).
2. Le segment BAD est semblable au segment EFG.
3. C'est pourquoi la base BD étant = à la base EG (Arg. 1) ces segments seront = entr'eux.
Si on retranche donc des \odot égaux BADM, EFGN (Hyp. 3) les segments égaux BAD, EFG (Arg. 3).
4. Les arcs restans BMD, ENG seront aussi = entr'eux.

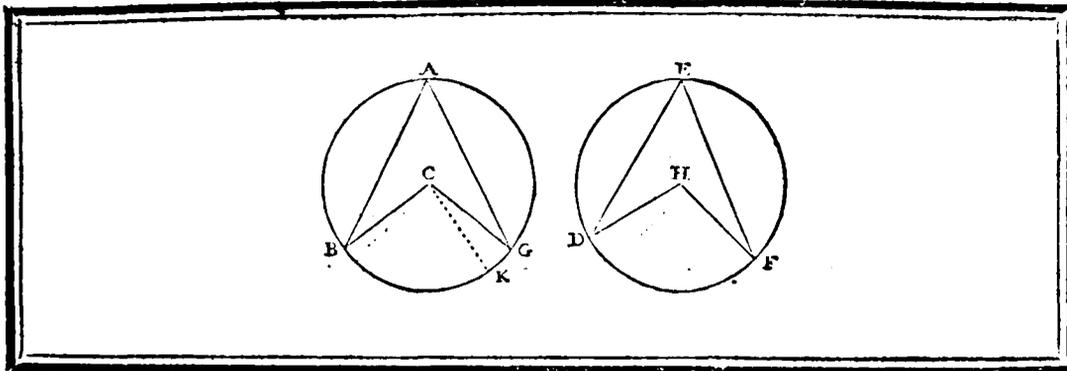
Prop. 4. L. 1.

Ax. 2. L. 3.

Prop. 24. L. 3.

Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



D PROPOSITION XXVII. THEOREME XXIV.

Dans les cercles égaux (BAG, DEF), les angles, tant ceux au centre BCG, & H, que ceux à la circonférence (A & E), qui s'appuyent sur des arcs égaux (BG, DF): sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. Les \odot BAG, DEF sont \equiv , de même que leurs arcs BG, DF.
- II. Les \sphericalangle au centre BCG & H, de même que ceux à la \odot A & E, s'appuyent sur des arcs égaux.

THESE.

- I. Les \sphericalangle au centre BCG & H sont \equiv entr'eux.
- II. Et les \sphericalangle à la \odot A & E sont aussi \equiv entr'eux.

DEMONSTRATION.

SI non.
Les \sphericalangle au centre BCG & H; seront inégaux, & l'un comme BCG sera \succ l'autre H.

Préparation.

FAITES sur BC au point C, l'angle BCK \equiv à \sphericalangle H.

1. L'arc BK est donc \equiv à l'arc DF.
Mais l'arc DF étant \equiv à l'arc BG. (Hyp. 2).
2. L'arc BK seroit aussi \equiv à l'arc BG; ce qui est impossible;
3. Partant, les \sphericalangle au centre BCG & H sont \equiv entr'eux.

Et ces \sphericalangle étant doubles des \sphericalangle à la \odot A & E (Prop. 20. L. 3).

4. Les \sphericalangle à la \odot A & E sont aussi \equiv entr'eux.

Prop. 23. L. 1.

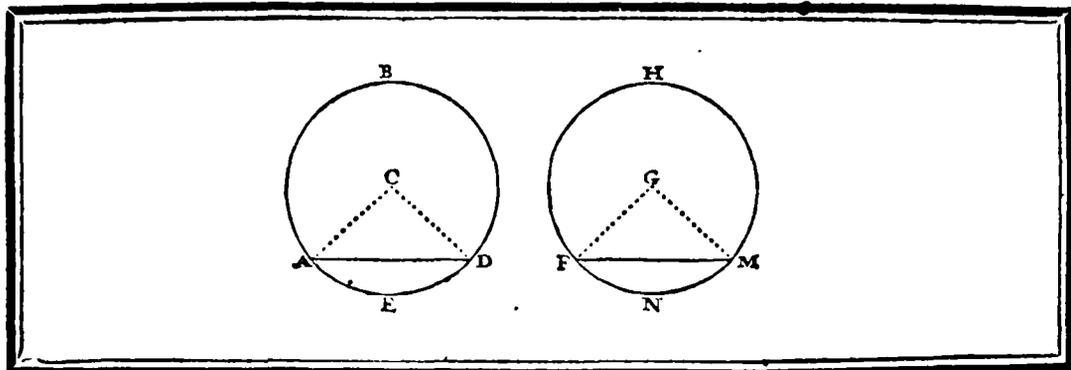
Prop. 26. L. 3.

{ Ax. 1. L. 1.
Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D. I.

Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.



D PROPOSITION XXVIII. THEOREME XXV.
 Dans les cercles égaux (ABDE, FHMN): les cordes égales (AD, FM) soutendent des arcs égaux (ABD, FHM ou AED, FNM).

HYPOTHESE.

- I. Les \odot ABDE, FHMN sont égaux.
- II. Et les cordes AD, FM sont égales.

THESE.

Les cordes AD, FM soutendent des arcs égaux ABD, FHM ou AED, FNM.

Préparation.

1. Cherchez les centres C & G des deux \odot ABDE, FHMN.
2. Tirez les rayons CA, CD item GF, GM.

Prop. 1. L. 3.
 Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les \odot ABDE, FHMN sont égaux (Hyp. 1).
1. Les côtés CA, CD, & GF, GM des \triangle ACD, FGM sont = aussi. Et les cordes AD, FM étant outre cela égales (Hyp. 2).
 2. Les \angle ACD, FGM sont = entr'eux.
 3. Partant, les arcs AED, FNM soutendus par les cordes AD, FM seront aussi = entr'eux.
 4. Et les \odot entières étant de plus égales (Hyp. 1), les arcs ABD, FHM sont aussi égaux.

Ax. 1. L. 3.

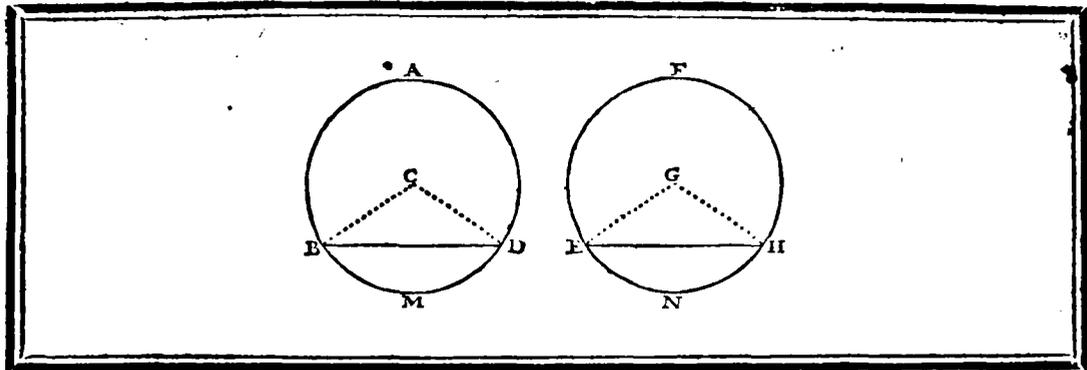
Prop. 8. L. 1.

Prop. 26. L. 3.

Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXIX. THEOREME XXVI.
Dans les cercles égaux (BADM, EFHN): les arcs égaux (BMD, ENH) sont soustendus par des cordes égales (BD, EH).

HYPOTHESE.

- I. Les \odot BADM, EFHN sont égaux.
- II. Les arcs BMD, ENH sont égaux aussi.

THESE.

Les cordes BD, EH, qui soustendent ces arcs sont = entr'elles.

Préparation.

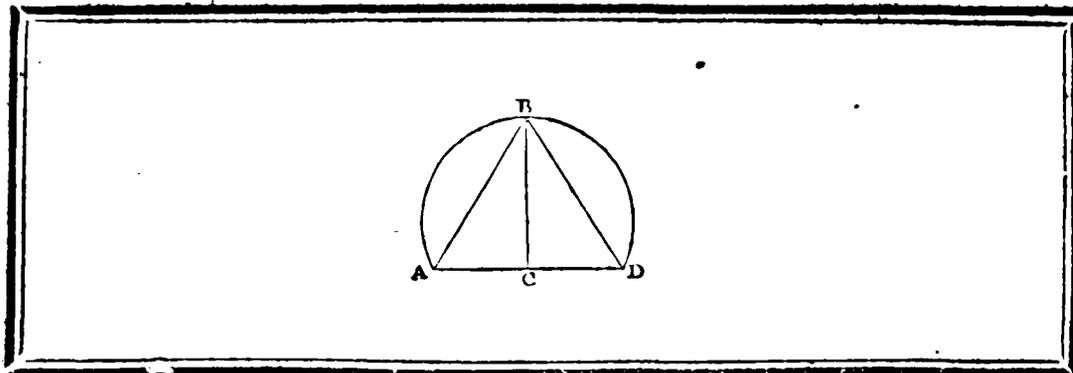
1. Cherchez les centres C & G des deux \odot BADM, EFHN. Prop. 1. L. 3.
2. Tirez les rayons CB, CD, GE, GH. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les \odot BADM, EFHN sont égaux (*Hyp. 1*).
1. Les côtés CB, CD, & GE, GH des \triangle BCD, EGH sont = entr'eux. Ax. 1. L. 3.
 Mais les arcs BMD, ENH étant aussi égaux (*Hyp. 2*).
 2. Les \sphericalangle C & G, compris par ces côtés égaux, seront = entr'eux. Prop. 27. L. 3.
 3. Partant, la corde BD est = à la corde EH. Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D.





C PROPOSITION XXX. PROBLEME IV.
Couper un arc (ABD) en deux parties égales (AB, BD).

DONNE.
L'arc ABD.

CHERCHEE.
La division de l'arc ABD en deux parties égales AB, BD.

Résolution.

1. DU point A au point D tirez la corde AD.
2. Coupez cette corde en deux également au point C.
3. Du point C élevez sur AD la \perp CB; qui, prolongée suffisamment, coupera l'arc ABD en deux également au point B.

Dem. 1.
Prop. 10. L. 1.
Prop. 11. L. 1.

Préparation.

Tirez les cordes AB, DB.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le côté AC est = au côté CD (*Ref. 2.*), CB commun aux deux Δ ABC, DBC, & \sphericalangle compris ACB = à \sphericalangle compris DCB (*Ax. 10. L. 1. & Ref. 3.*)

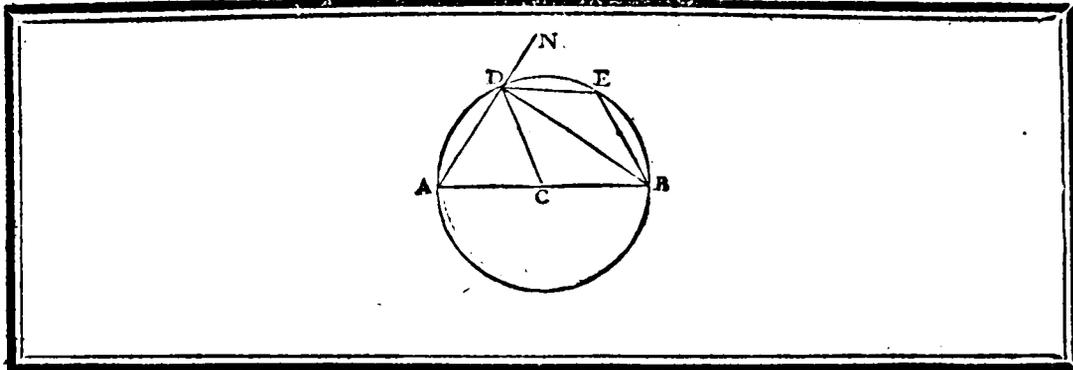
1. La base AB est = à la base DB.
2. Partant, les arcs AB & DB soutendus par les cordes égales AB, DB sont aussi = entr'eux, & l'arc entier ABD est coupé en deux également en B.

Prop. 4. L. 1.

Prop. 28. L. 3.

C. Q. F. F.





L PROPOSITION XXXI. THEOREME XXVII.

L'angle (ADB), placé dans le demi cercle (ADEB), est un droit; mais l'angle (DAB), qui est placé dans un segment (DAB) plus grand que le demi cercle, est plus petit qu'un droit; & celui (DEB), qui est placé dans un segment (DEB) plus petit que le demi cercle, est plus grand qu'un droit. Outre cela, l'angle mixtiligne (BDA) du plus grand segment, est plus grand qu'un angle droit; & celui (BDE) du plus petit segment, est moindre qu'un angle droit.

C A S I.

HYPOTHESE.

L'angle ADB est placé dans un demi \odot ADEB.

THESE.

Cet \sphericalangle ADB est un \sphericalangle .

Préparation.

1. Tirez le rayon CD,
3. Et prolongez AD en N.

Dem. 1.
Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le $\triangle ADC$ le côté CA est = au côté CD (Def. 15. L. 1).

1. L'angle CDA est = à \sphericalangle CAD.

Prop. 5. L. 1.

Derechef. dans le $\triangle CDB$; le côté CD étant = au côté CB (Def. 15. L. 1).

2. L'angle CDB est = à \sphericalangle CBD.

Prop. 5. L. 1.

3. Partant, \sphericalangle ADC est = aux \sphericalangle CAD + CBD.

Ax. 2. L. 1.

Mais \sphericalangle NDB est aussi = aux \sphericalangle CAD + CBD (Prop. 32. L. 1).

4. C'est pourquoi, cet \sphericalangle NDB est = à \sphericalangle ADB.

Ax. 1. L. 1.

5. D'où il suit que \sphericalangle ADB est un \sphericalangle .

Def. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

C A S II.

HYPOTHESE.

L'angle DAB est placé dans un segment DAB > le demi \odot .

THESE.

Cet \sphericalangle DAB est < un \sphericalangle .

DEMONSTRATION.

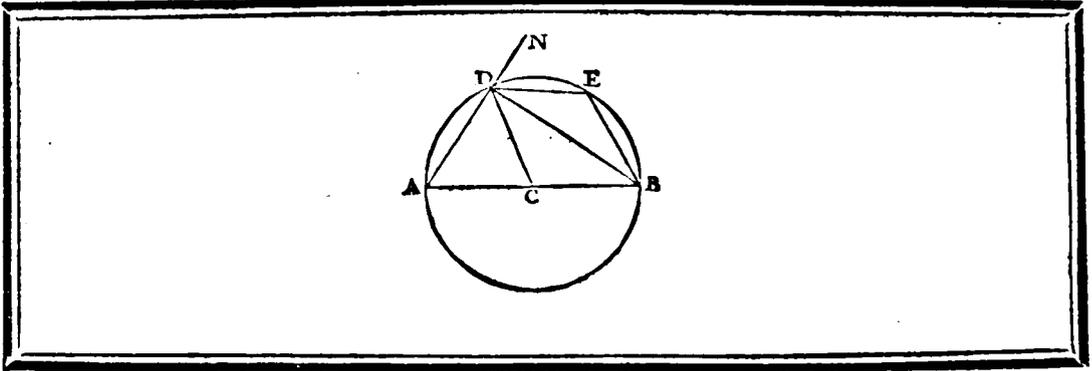
Puisque dans le $\triangle ADB$, l'angle ADB est un \sphericalangle (Cas. I).

1. L'angle DAB sera < un \sphericalangle .

Prop. 17. L. 1.

R 3

C. Q. F. D.



C A S III.

HYPOTHESE.

L'angle DEB est placé dans un segment $DEB <$ la demi \odot .

THESE.

Cet $\sphericalangle DEB$ est $>$ un L .

DEMONSTRATION.

1. Les \sphericalangle opposés $DAB + DEB$, du quadrilatere $ADEB$ sont $=$ à 2L . Prop. 22. L. 3.
 2. C'est pourquoi, $\sphericalangle DAB$ étant $<$ un L (Cas II), DEB sera nécessairement $>$ un L .

C A S IV.

HYPOTHESE.

Les \sphericalangle mixtilignes BDA , BDE , sont formés par la droite BD & les arcs DA , DE .

C. Q. F. D.

THESE.

L'angle BDA est $>$ un L , & l'angle BDE est $<$ un L .

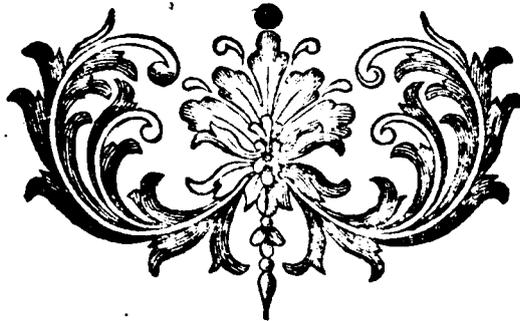
DEMONSTRATION.

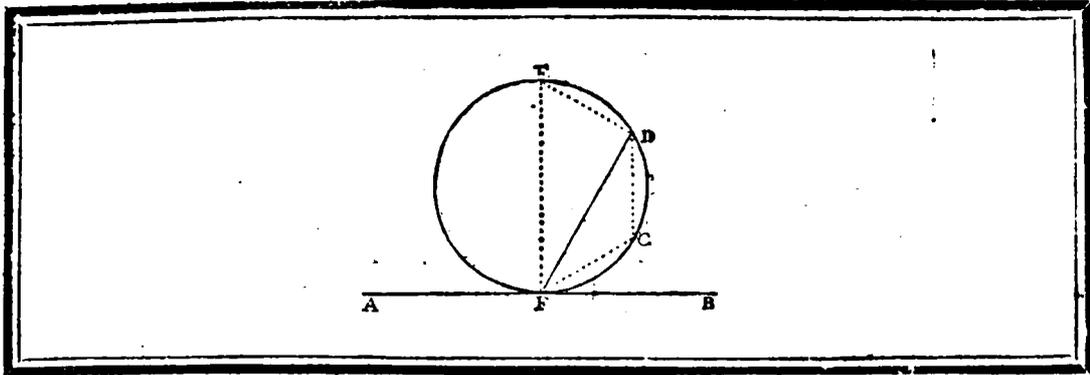
Puisque les \sphericalangle rectilignes ADB , NDB sont des L (Cas I).

1. L'angle mixtiligne BDA sera nécessairement $>$ un L , & \sphericalangle mixtiligne BDE $<$ un L .

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXXII.

THEOREME XXVIII.

SI une ligne droite (AB) touche un cercle (ECF), & que du point d'attouchement (F) on tire une corde quelconque (FD): les angles (DFB, DFA) formés par la corde & la tangente, sont égaux à ceux (FED, FCD,) qui sont placés dans les segmens alternes (FED, FCD).

HYPOTHESE.

1. La droite AB est tangente du \odot ECF.
- II. Et FD est une corde de ce \odot tirée du point d'attouchement.

THESE.

1. L'angle FED est \equiv à \sphericalangle DFB.
- II. L'angle FCD est \equiv à \sphericalangle DFA.

Préparation.

1. Sur AB, au point d'attouchement F, élevez la \perp FE. Prop. 11. L. 1.
2. Prenez dans l'arc DF un point quelconque C & tirez ED, DC, CF. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite AB touche le \odot ECF (Hyp. 1), & que FE est une \perp élevée sur AB au point d'attouchement F (Prep. 1).

1. La droite FE est un diamètre du \odot ECF. Prop. 19. L. 3.
2. Partant, \sphericalangle FDE est un \perp . Prop. 31. L. 3.
3. C'est pourquoi, les \sphericalangle DEF + DFE sont \equiv à un \perp . Prop. 32. L. 1.
- Mais \sphericalangle EFB ou \sphericalangle DFE + \sphericalangle DFB étant aussi \equiv à un \perp (Prep. 1).
4. Les \sphericalangle DEF + DFE sont \equiv aux \sphericalangle DFB + DFE. Ax. 1. L. 1.
5. D'où il suit que \sphericalangle DEF est \equiv à \sphericalangle DFB; ou \sphericalangle placé dans le segment DEF \equiv à \sphericalangle formé par la tangente BF & la corde DF. { Ax. 3. L. 1.
Prop. 21. L. 3.

C. Q. F. D. 1.

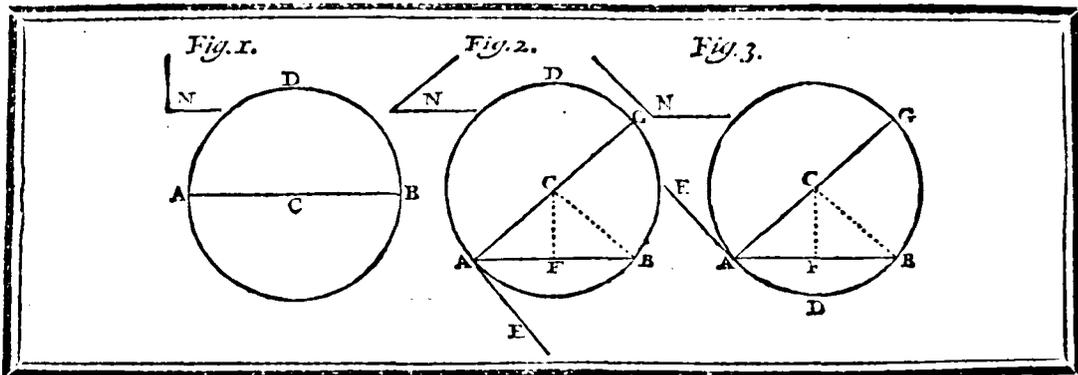
Les \sphericalangle FED + FCD étant \equiv à 2 \perp (Prop. 22. L. 3), & les \sphericalangle contigus DFB + DFA étant aussi \equiv à 2 \perp (Prop. 13. L. 1).

Ax. 1. L. 1.

6. Les \sphericalangle FED + FCD sont \equiv aux \sphericalangle DFB + DFA.
7. C'est pourquoi, \sphericalangle FED étant \equiv à \sphericalangle DFB (Arg. 5), l'angle FCD est aussi \equiv à \sphericalangle DFA; ou \sphericalangle placé dans le segment FCD. \equiv à \sphericalangle compris par la tangente AF & la corde DF.

{ Ax. 3. L. 1.
Prop. 21. L. 3.

C. Q. F. D. II.



S - PROPOSITION XXXIII. PROBLEME V.
 Sur une droite donnée (AB); décrire un segment de cercle (ADB), qui contienne un angle égal à un angle donné (N).

DONNEE
 La droite AB avec \sphericalangle N.

CHERCHEE.
 Le segment ADB décrit sur AB, qui contienne un $\sphericalangle = \text{à } \sphericalangle$ N.

C A S I. Si \sphericalangle donné est L, (Fig. 1).

DEMONSTRATION.

ON n'a qu'à décrire sur AB un demi \odot ADB.
 1. Ce demi \odot contiendra un $\sphericalangle = \text{à } \sphericalangle$ droit donné N.

Dem. 3.
 Prop. 31. L. 3.

C A S II. Si \sphericalangle donné est aigu, (Fig. 2.); ou obtus (Fig. 3).

Résolution.

1. FAites sur AB, au point A, l'angle BAE = à \sphericalangle donné N.
2. Du point A elevez sur AE la \perp AG.
3. Coupez la droite AB en deux également au point F.
4. Elevez sur AB, au point F, la \perp FC, qui coupera AG quelque part en C.
5. De ce point C comme centre, & du rayon CA, décrivez le \odot ADG;

Prop. 23. L. 1.
 Prop. 11. L. 1.
 Prop. 10. L. 1.
 Prop. 11. L. 1.
 Dem. 3.

Préparation.

Tirez la droite CB.

Dem. 1.

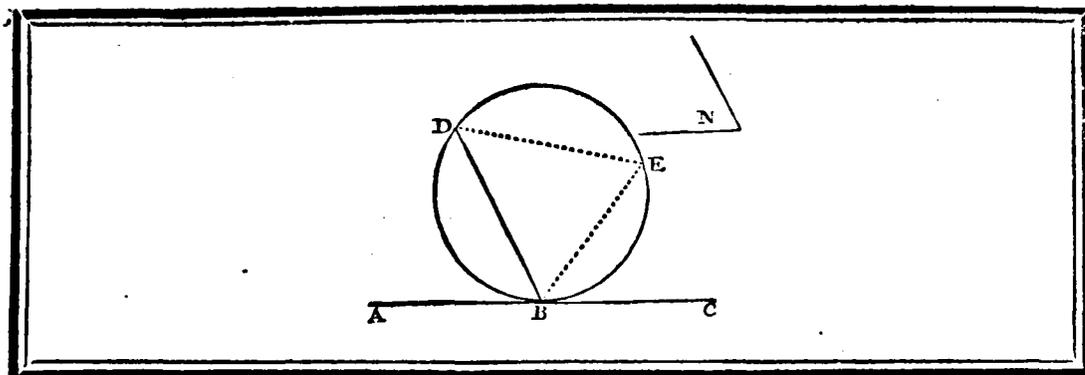
DEMONSTRATION.

Puisque dans les \triangle ACF, BCF, le côté AF est = au côté BF (Ref. 3), FC commun aux deux \triangle , & \sphericalangle compris AFC = à \sphericalangle compris BFC (Ax. 10. L. 1 & Ref. 4).

1. La base CA est = à la base CB.
2. Partant, le \odot décrit du centre C & du rayon CA, passera aussi par le point B, & ADB est un segment décrit sur AB.
 Mais la droite AE touchant le \odot ADB au point A (Ref. 2. & Prop. 16. L. 3. Coroll.) & AB étant une corde tirée de ce point d'attouchement A (Arg. 2.).
3. L'angle compris dans le segment ADB est = à \sphericalangle BAE.
4. C'est pourquoi, \sphericalangle BAE étant = à \sphericalangle donné N (Ref. 1), \sphericalangle compris dans le segment ADB décrit sur AB, est aussi = à \sphericalangle donné N.

Prop. 4. L. 1.
 Def. 15. L. 1.
 Def. 19. L. 1.
 Prop. 32. L. 3.
 Ax. 1. L. 1.

C. Q. E. F.



R PROPOSITION XXXIV. PROBLEME VI.
 Etrancher d'un cercle donné (BDE) un segment (BED), qui contienne un angle (DEB) égal à un angle rectiligne donné (N).

DONNE.
 Le \odot BDE, & \sphericalangle rectiligne N.

CERCHE.
 Le segment BED retranché de ce \odot , contenant un \sphericalangle DEB = à \sphericalangle donné N.

Résolution.

1. D'Un point quelconque A tirez au \odot BDE la tangente ABC. Prop. 17. L. 3.
2. Du point d'attouchement B, menez la corde BD, enforte qu'elle forme sur AB \sphericalangle DBA = à \sphericalangle donné N. Prop. 23. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque \sphericalangle donné N est = à \sphericalangle DBA (Ref. 2), & \sphericalangle DEB = à \sphericalangle DBA (Prop. 32. L. 3).

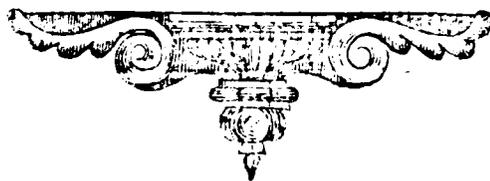
1. Les \sphericalangle DEB & N sont = entr'eux.

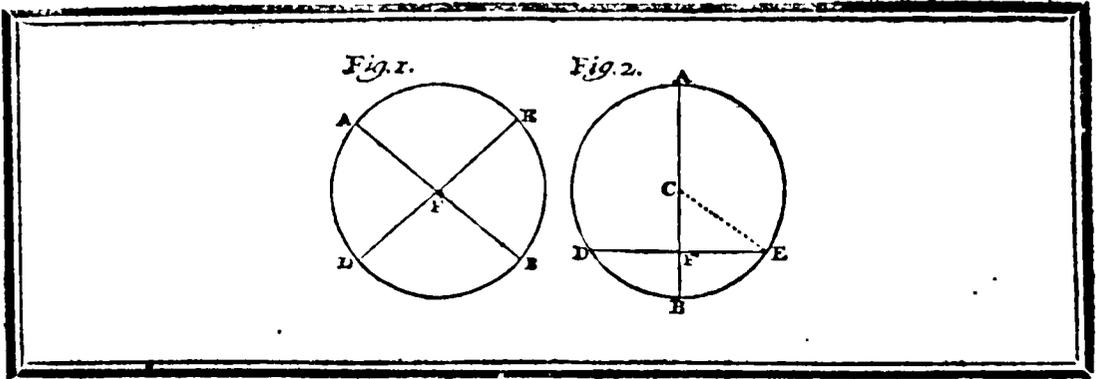
Ax. 1. L. 1.

2. On a donc retranché du \odot BDE, un segment BED, qui contient un \sphericalangle DEB = à \sphericalangle donné N.

Prop. 21. L. 3.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XXXV. THEOREME XXIX.
SI dans un cercle (DAEB) deux cordes (AB, DE) s'entrecourent: le rectangle compris des deux parties (AF, FB) de l'une, est égal au rectangle compris sous les deux parties (DF, FE) de l'autre.

HYPOTHESE.

- I. AB, DE sont deux cordes d'un même \odot DAEB,
- II. Et ces cordes s'entrecourent en un point F.

THESE.

Le Rgle $AF \cdot FB$ est = au Rgle $DF \cdot FE$.

C A S I. Si les deux cordes passent par le centre F du \odot (Fig. 1).

DEMONSTRATION.

- 1. Les droites AF, FB, DF, FE sont donc = entr'elles, Def. 15. L. 1.
- 2. Et par conséquent le Rgle $AF \cdot FB$ est = au Rgle $DF \cdot FE$. Ax. 2. L. 2.

C A S II. Si l'une des cordes AB, passant par le centre coupe l'autre DE à L (Fig. 2).

Préparation.

Tirez le rayon CE.

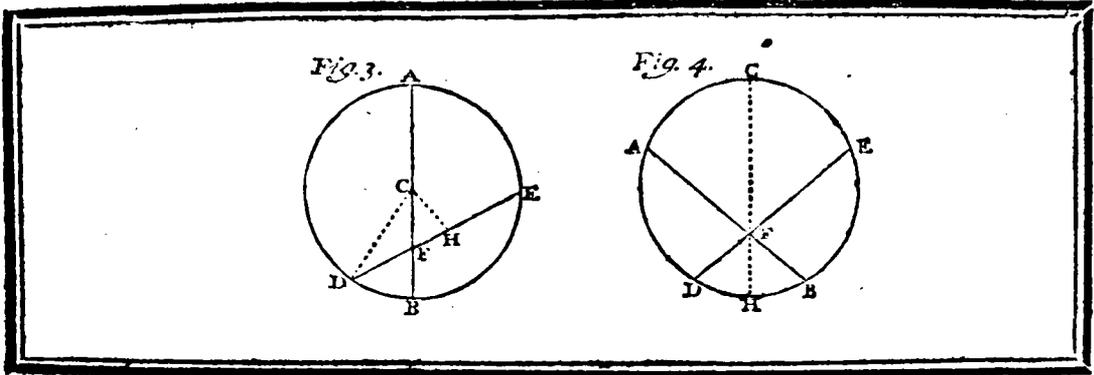
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite AB est coupée en deux également en C, & en deux inégalement en F.

- 1. Le Rgle $AF \cdot FB$ + le \square de CF est = au \square de CB, ou = au \square de CE. { Prop. 5. L. 2.
- Mais le \square de FE + le \square de CF est aussi = au \square de CE. Ax. 1. L. 1.
- 2. D'où il suit que le Rgle $AF \cdot FB$ + le \square de CF est = au \square de FE + au \square de CF.
- 3. Partant, le Rgle $AF \cdot FB$ est = au \square de FE, Ax. 1. L. 1.
- Et par la raison que DF est = à FE (Prop. 3. L. 3), ou $DF \cdot FE$ = au \square de FE Ax. 3. L. 2.
- (Ax. 2. L. 2).
- 4. Le Rgle $AF \cdot FB$ est aussi = au Rgle $DF \cdot FE$. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



C A S III. Si l'une des cordes AB, passant par le centre, coupe l'autre DE obliquement. (Fig. 3).

Préparation.

1. DU centre C abaissez sur DE la \perp CH,
2. Et tirez le rayon CD.

Prop. 12. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque DH est \equiv à HE (Prop. 1. & Prop. 3. L. 3).

1. Le Rgle DF. FE + le \square de FH est \equiv au \square de DH.

Prop. 5. L. 2.

2. C'est pourquoi, le Rgle DF. FE + le \square de FH + le \square de CH est \equiv au \square de DH + au \square de CH;

Ax. 2. L. 1.

Mais le \square de FH + le \square de CH est \equiv au \square de CF, & le \square de DH + le \square de CH \equiv au \square de CD (Prop. 47. L. 1).

3. Le Rgle DF. FE + le \square de CF est donc \equiv au \square de CD, ou au \square de CB. De plus le Rgle AF. FB + le \square de CF étant \equiv au même \square de CB (Prop. 5. L. 2).

Ax. 1. L. 1.

4. Le Rgle DF. FE + le \square de CF est aussi \equiv au Rgle AF. FB + au \square de CF,

Ax. 1. L. 1.

5. Ou, en retranchant le \square commun de CF, le Rgle DF. FE est \equiv au Rgle AF. FB.

Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.

C A S IV. Si aucune des cordes AB, DE ne passe par le centre. (Fig. 4).

Préparation.

1. Tirez par le point F le diametre GH.

Dem. 1.

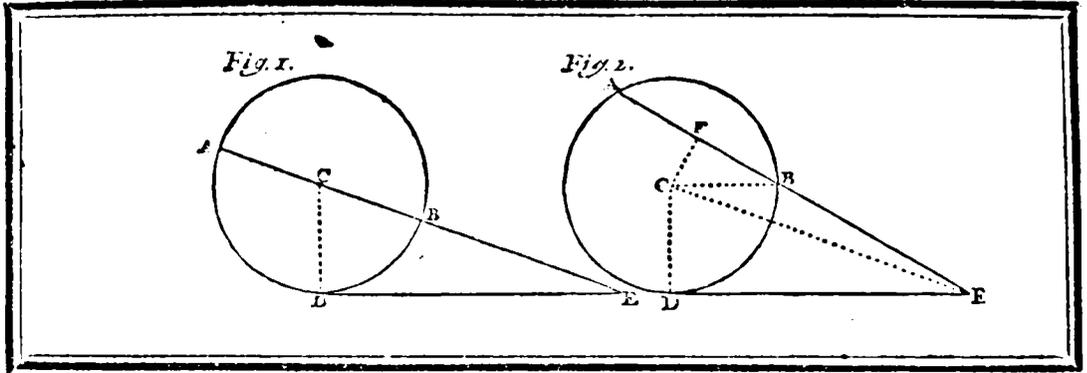
DEMONSTRATION.

Puisque chacun des Rgles AF. FB & DF. FE est \equiv au Rgle GF. FH, par le troisieme Cas ;

1. Ces Rgles AF. FB & DF. FE sont aussi \equiv entr'eux.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVI. THEOREME XXX.
SI d'un point quelconque (E) pris hors d'un cercle (ABD), on tire à ce-cercle deux lignes droites, dont l'une (DE) le touche, & l'autre (EA) le coupe: le rectangle compris de la secante entiere (AE) & de sa partie extérieure (EB) est égal au quarré de la tangente (ED).

HYPOTHESE.

1. Le point E est pris hors du \odot ABD.
2. Et de ce point on a tiré la tangente ED et la secante EA.

THESE.

Le Rgle AE . EB est = au \square de ED.

C A S I. Si la secante AE passe par le centre (Fig. 1).

Préparation.

Tirez au point d'attouchement D, le rayon CD.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

1. **L**E Rayon CD est donc \perp sur la tangente ED, Et à cause que la droite AB est coupée en deux également en C, & que la droite BE y est ajoutée directement, Prop. 18. L. 3.
2. Le Rgle AE . EB + le \square de CB est = au \square de CE. Prop. 6. L. 2.
 De plus, le \square de CE étant aussi = au \square de DE + au \square de CD (Prop. 47. L. 1), ou au \square de DE + au \square CB (Prop. 46. L. 1. Coroll. 3);
3. Le Rgle AE . EB + le \square de CB est = au \square de DE + au \square de CB. Ax. 1. L. 1.
4. Partant, le Rgle AE . EB sera = au \square de DE. Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.

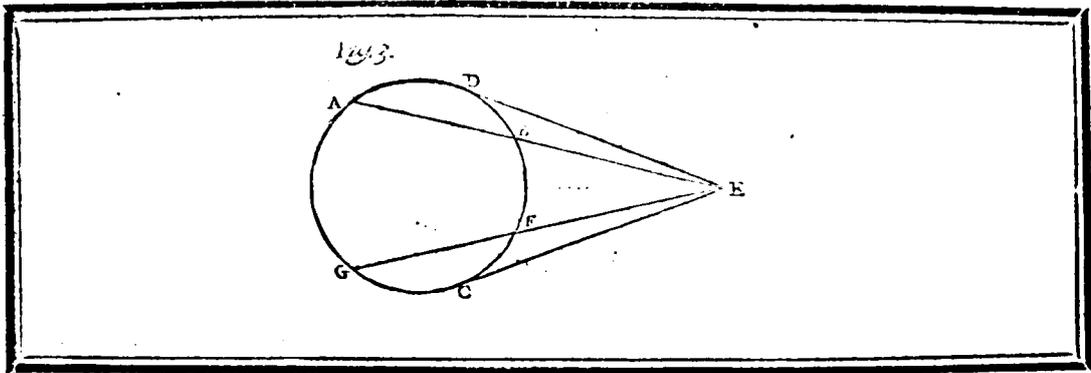
C A S II. Si la secante AE ne passe pas par le centre (Fig. 2).

Préparation.

1. **A**baisséz du centre C sur AE la \perp CF.
2. Tirez les rayons CB, CD, & la droite CE.

Prop. 12. L. 1.
 Dem. 1.

DEMON-



DEMONSTRATION.

Puisque la droite AB est coupée en deux également en F (*Prop. 1. & Prop. 3. L. 3*), & que la droite BE y est ajoutée directement,

1. Le Rgle AE. EB + le \square de FB est = au \square FE. Prop. 6. L. 2.

2. Partant, le Rgle AE. EB + le \square FB + le \square de FC est = au \square de FE + au \square de FC, ou = au \square de CE. Ax. 2. L. 1.
Prop. 47. L. 1.

Mais par la raison que le \square de DE + le \square de CD est = au \square de CE & le \square de FB + le \square de FC = au \square de CB (*Prop. 47. L. 1*), ou = au \square de CD. (*Def. 15. & Prop. 46. L. 1, Coroll. 3*).

3. Le Rgle AE. EB + le \square de CD est = au \square de DE + au \square de CD.

4. Par conséquent, le Rgle AE. EB est = au \square de DE. Ax. 3. L. 1.

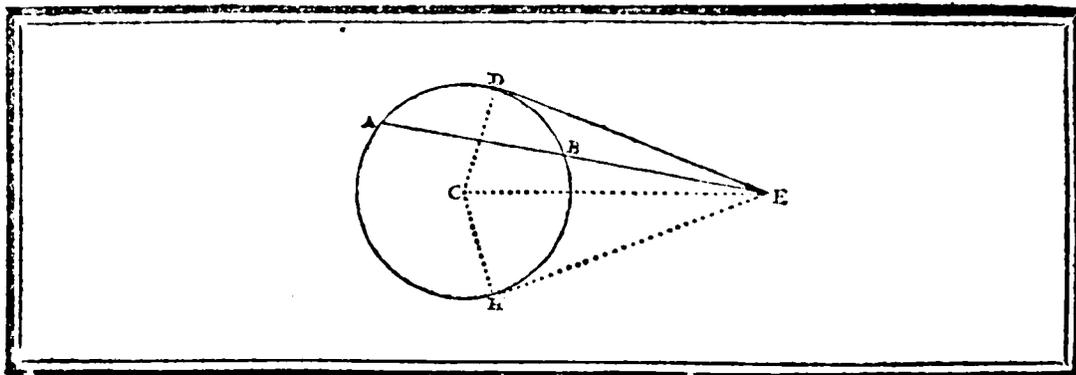
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Il est évident que si (*Fig. 3*) d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADBF), on tire plusieurs droites (AE, EG &c) qui coupent le cercle (en B & F &c): les rectangles compris des secantes entières (AE, GE), & des parties extérieures (EB, EF), sont égaux entr'eux; puisqu'en tirant du point E la tangente (ED), ces rectangles seront tous égaux au carré de la même tangente (ED).

COROLLAIRE II.

Il est aussi évident que, si d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADBF), on tire à ce cercle deux tangentes (ED, EC), elles seront égales entr'elles; puisque le carré de chacune est égal au même rectangle (AE. EB).



S I d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADH), on tire à ce cercle deux lignes droites dont l'une (AE) coupe le cercle, & l'autre (ED), se termine à sa circonférence convexe; & que le rectangle, compris de la secante entière (AE) & de la partie extérieure (EB), soit égal au carré de la droite (ED), qui se termine à la circonférence convexe: celle-ci touchera le cercle (en D).

HYPOTHESE.

- I. La droite AE coupe le \odot ADH en B,
- II. Et la droite ED se termine à sa \odot convexe.
- III. Le Rgle AE . EB est = au \square de ED.

THESE.

La droite ED touche le \odot ADH au point D.

Préparation.

1. DU point E tirez au \odot ADH la tangente EH.
2. Tirez les rayons CD, CH & la droite CE.

Prop. 17. L. 3.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le Rgle de AE . EB est = au \square de ED (Hyp. 3) & que le Rgle AE . EB est aussi = au \square de EH (Prep. 1 & Prop. 36. L. 3).

1. Le \square de ED est = au \square de EH (Ax. 1. L. 1), ou ED = EH,
Et comme de plus, dans les \triangle CDE, CHE, le côté CD est = au côté CH (Def. 15. L. 1), & CE commun aux deux \triangle .
2. L'angle CDE est = à \sphericalangle CHE.
3. C'est pourquoi, \sphericalangle CHE étant un \sphericalangle (Prep. 1 & Prop. 18. L. 3), \sphericalangle CDE est un \sphericalangle aussi,
4. Et la droite ED touche le \odot ADH au point D.

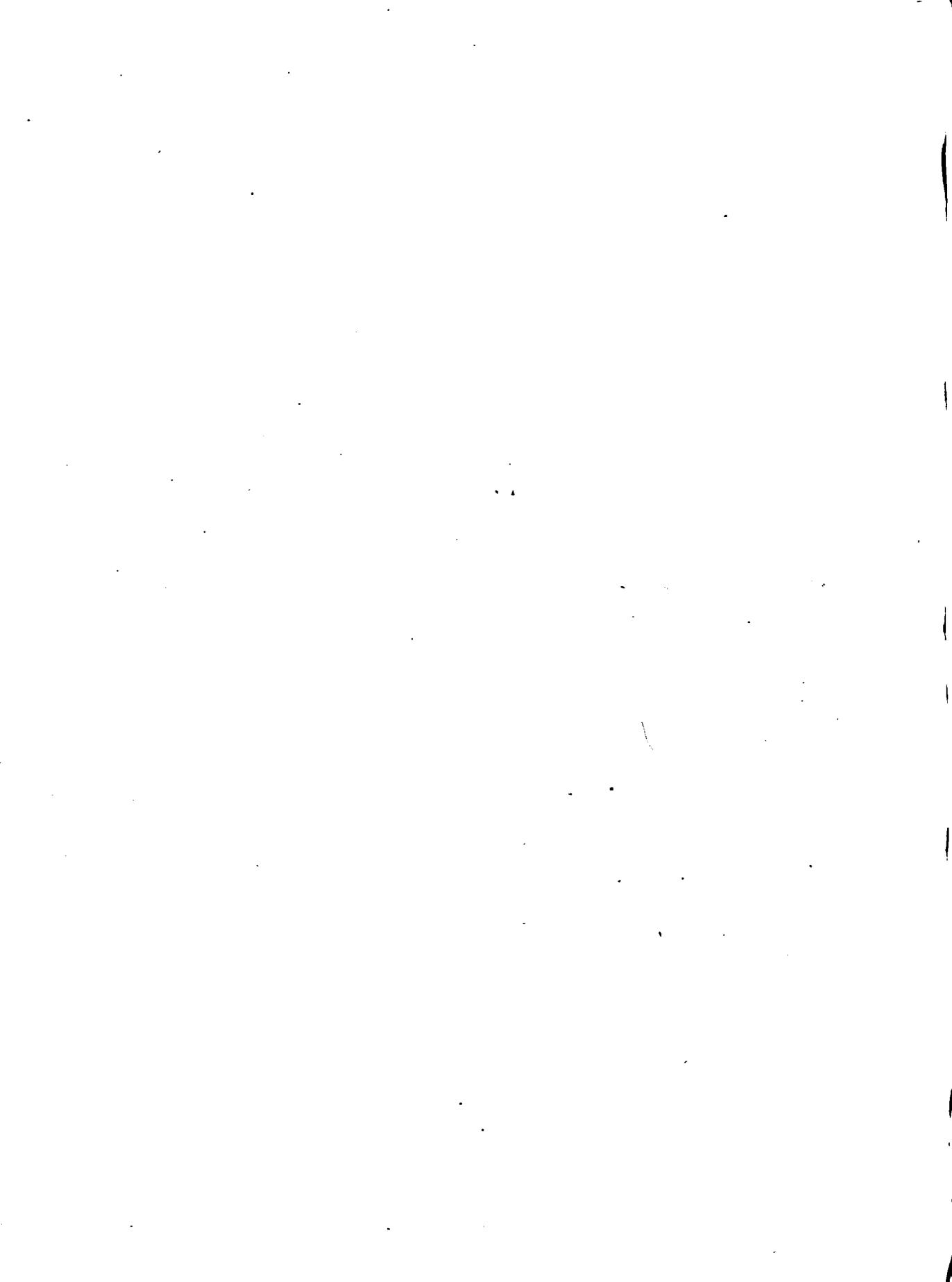
{ Prop. 46. L. 1.
{ Coroll. 3.

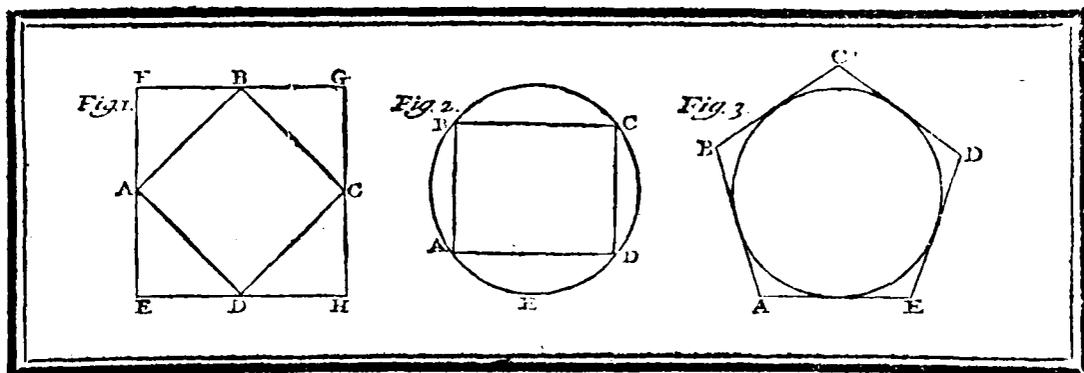
Prop. 8. L. 1.

Ax. 1. L. 1.
{ Prop. 16. L. 3.
{ Coroll. 3.

C. Q. F. D.

LES
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
LIVRE QUATRIEME.





D E F I N I T I O N S

I.

ON dit qu'une figure rectiligne (ABCD) est inscrite dans une autre figure rectiligne (EFGH), quand chacun des angles (A, B, C, D) de la figure inscrite, touche chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure dans laquelle elle est inscrite (Fig. 1).

II.

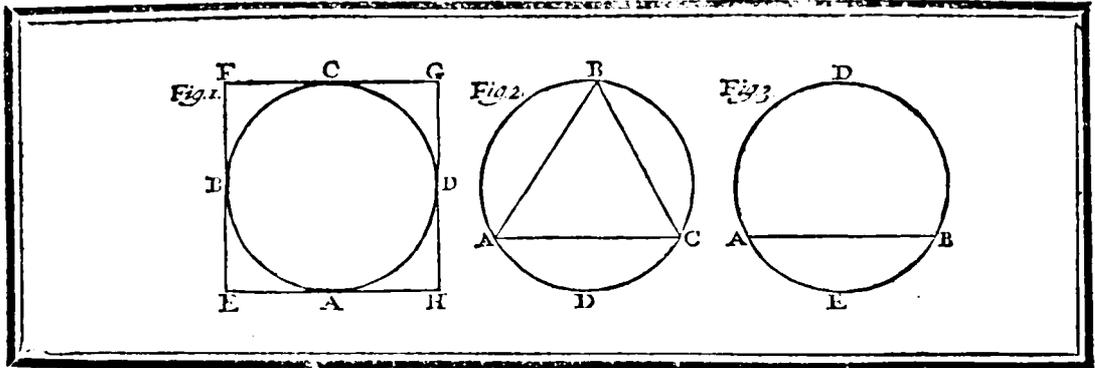
Pareillement on dit qu'une figure rectiligne (EFGH) est circonscrite à une autre figure rectiligne (ABCD); quand chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure circonscrite touche chacun des angles (A, B, C, D) de la figure à laquelle elle est circonscrite (Fig. 1).

III.

Une figure rectiligne (ABCD) est inscrite dans un cercle, quand chacun des angles (A, B, C, D) de la figure inscrite touche la circonférence du cercle (ABCDE) dans lequel elle est inscrite (Fig. 2).

IV.

Et une figure rectiligne (ABCDE) est circonscrite à un cercle, quand chacun de ses côtés (AB, BC, CD, DE, EA) touche le cercle, auquel elle est circonscrite (Fig. 3).



D E F I N I T I O N S
V.

UN cercle (ABCD) est inscrit dans une figure rectiligne (EFGH), quand sa circonférence touche chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure à laquelle il est inscrit (Fig. 1).

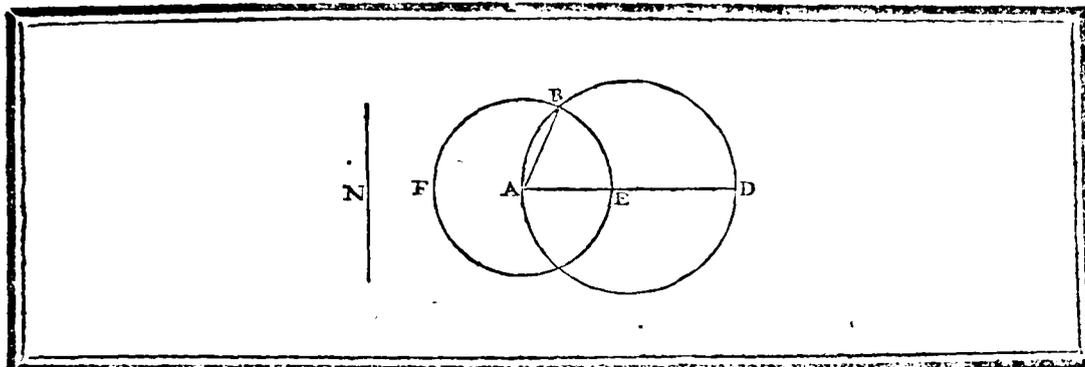
VI.

Mais un cercle (ABCD) est circonscrit à une figure rectiligne (ABC), quand la circonférence du cercle touche chacun des angles (A, B, C) de la figure à laquelle il est circonscrit (Fig. 2).

VII.

Une ligne droite (AB) est appliquée dans un cercle (ADBE), quand ses extrémités (A & B) sont dans la circonférence du cercle (Fig. 3).





PROPOSITION I. PROBLEME I.

Appliquer dans un cercle donné (ABD), une ligne droite (AB) égale à une ligne droite donnée (N), laquelle ne soit pas plus grande que le diamètre du cercle (ABD).

DONNE.
Un \odot ABD, avec une droite N, qui n'est pas $>$ le diamètre de ce \odot .

CHERCHE.
La droite AB appliquée dans le \odot ABD, & qui soit $=$ à la droite N.

Résolution.

1. Tirez le diamètre AD du \odot ABD.

Dem. 1.

C A S I.

Si AD est $=$ à N.

On aura appliqué dans le \odot donné ABD une droite AD $=$ à la donnée N. Def. 7. L. 4.

C. Q. F. F.

C A S II.

Si AD est $>$ N.

1. FAITES AE $=$ à N.

Prop. 3. L. 1.

2. Du centre A & du rayon AE décrivez le \odot EBF, & tirez AB.

Dem. 3.

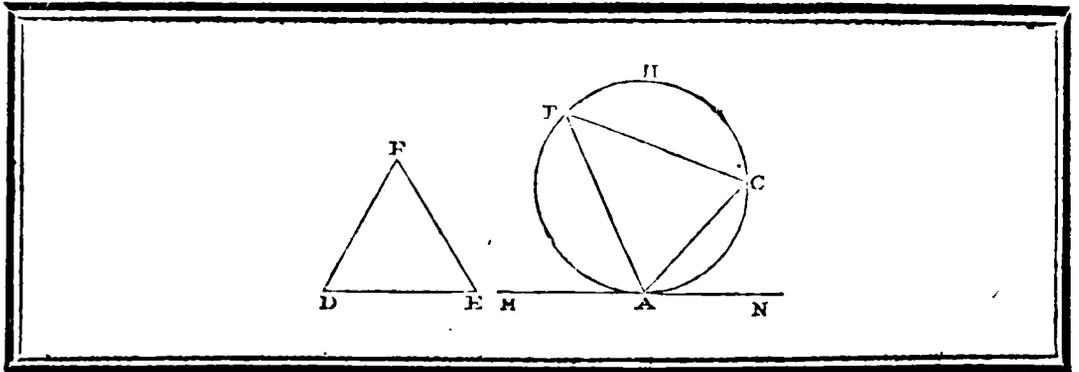
DEMONSTRATION.

Puisque AB est $=$ à AE (Def. 15. L. 1), & que la droite N est $=$ à AE (Ref. 1),

1. La droite AB, appliquée dans le \odot ABD, fera aussi $=$ à N.

{ Ax. 1. L. 1.
{ Def. 7. L. 4.

C. Q. F. F.



INSCRIRE dans un cercle donné (ABHC); un triangle (ABC) équiangle à un triangle donné (DFE).

DONNE.

Un \odot ABHC avec le \triangle DFE.

CHERCHE.

Le \triangle ABC inscrit dans le \odot ABHC, & qui soit équiangle au \triangle DFE.

Résolution.

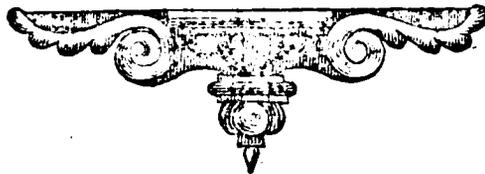
1. **T**irez d'un point quelconque M, au \odot ABHC, la tangente MN. Prop. 17. L. 3.
2. Faites sur MN, au point d'attouchement A, l'angle BAM = à \sphericalangle FED, & \sphericalangle CAN = à \sphericalangle FDE. Prop. 23. L. 1.
3. Tirez BC. Dem. 1.

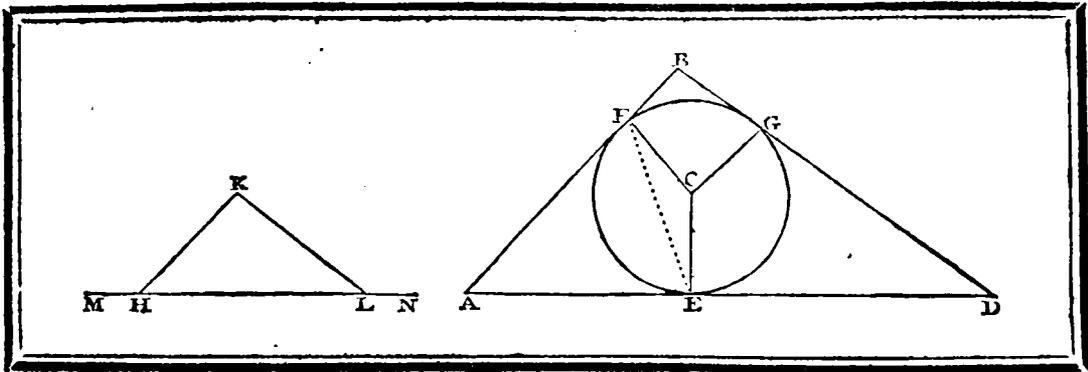
DEMONSTRATION.

Puisque \sphericalangle BCA = à \sphericalangle BAM (Prop. 32. L. 3), & \sphericalangle FED = au même \sphericalangle BAM (Ref. 2); Item \sphericalangle CBA = à \sphericalangle CAN (Prop. 32. L. 3), & \sphericalangle FDE aussi = à \sphericalangle CAN (Ref. 2).

1. Il s'ensuit que \sphericalangle BCA est = à \sphericalangle FED, & \sphericalangle CBA = à \sphericalangle FDE. Ax. 1. L. 1.
3. Partant, le troisieme \sphericalangle BAC, du \triangle ABC, est aussi = au troisieme \sphericalangle DFE du \triangle DFE, & ce \triangle ABC est inscrit dans le \odot ABHC. [Prop. 32. L. 1.
Def. 3. L. 4.]

C. Q. F. F.





C PROPOSITION III. PROBLEME III.
 Circonscire à un cercle donné (EFG) un triangle (ABD), qui soit équiangle à un triangle donné (HKL).

DONNEE.
 Le \odot EFG, avec le Δ HKL.

CHERCHE.
 Le Δ ABD circonscrit au \odot EFG, qui soit équiangle au Δ HKL.

Résolution.

1. Prolongez de part & d'autre le côté HL du Δ HKL.
2. Cherchez le centre C du \odot EFG, & tirez le rayon CE.
3. Faites sur CE, au point C, l'angle $\angle ECF = \angle KHM$, & $\angle ECG = \angle KLN$.
4. Sur CE, CF, CG élevez les \perp prolongées AD, AB, DB.

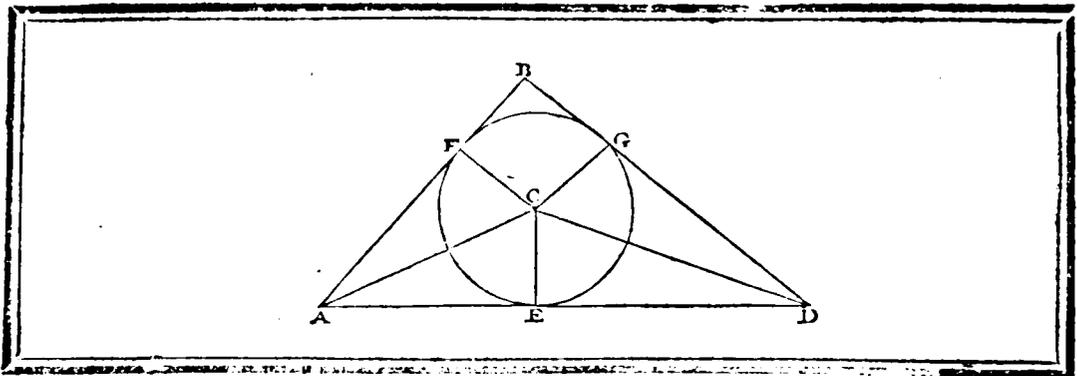
Dem. 2.
 Prop. 1. L. 3.
 Prop. 23. L. 1.
 Prop. 11. L. 1.

Préparation.

Tirez la droite FE.

DEMONSTRATION.

- Puisque les \angle CEA, CFA sont des \perp (Ref. 4),
1. Les \angle FEA + EFA sont \angle 2 \perp , & les droites AD, AB se rencontrent quelque part en A. (Ax. 8. L. 1.)
 On démontrera de la même manière, que (Ax. 11. L. 1.)
 2. Les droites AD, DB item AB, DB se rencontreront quelque part en D & B, Et par la raison que les droites AD, AB, DB sont \perp à l'extrémité E, F, G des rayons EF, CF, CG (Ref. 4),
 3. Ces droites touchent le \odot EFG; & le Δ ABD formé par ces droites est circonscrit au \odot EFG. (Prop. 16. L. 3.)
 De plus, les 4 \angle CEA + CFA + ECF + FAE du quadrilatère AFCE étant (Cor. D. 4. L. 4.)
 $= 4 \perp$ (Prop. 32. L. 1.), & les \angle CEA + CFA $= 2 \perp$ (Ref. 4),
 4. Les \angle ECF + FAE sont aussi $= 2 \perp$,
 Ax. 3. L. 1.
 5. Ou égaux aux \angle KHM + KHL, à cause que ceux-ci sont aussi $= 2 \perp$. (Ax. 1. L. 1.)
 Mais \angle ECF étant $= \angle$ KHM (Ref. 3), (Prop. 13. L. 1.)
 6. L'angle FAE est $= \angle$ KHL, & par la même raison \angle GDE $= \angle$ KHL.
 Ax. 3. L. 1.
 7. C'est pourquoi le troisième \angle FBG, du Δ ABD, est $=$ au troisième \angle HKL, du Δ HKL.
 Prop. 32. L. 1.
 8. Le Δ ABD circonscrit au \odot EFG est donc aussi équiangle au Δ donné HKL.



I PROPOSITION IV. PROBLÈME IV.
 INscrire dans un triangle donné (ABD) un cercle (EFG).

DONNE.
 Le ΔABD .

CHERCHE.
 Le $\odot EFG$ inscrit dans le ΔABD .

Résolution.

1. Coupez les $\sphericalangle BAD, BDA$ en deux également par les droites AC, DC prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C .
2. Du point C abaissez sur AD la $\perp CE$.
3. Et de ce même point C comme centre, & du rayon CE , décrivez le $\odot EFG$.

Prop. 9. L. 1.
 Prop. 12. L. 1.

Dem. 3.

Préparation.

Abaissez du point C sur AB & DB les $\perp CF, CG$.

Prop. 12. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les $\Delta AFC, ACE$, l'angle FAC est $=$ à $\sphericalangle CAE$ (Ref. 1),
 $\sphericalangle CFA = \sphericalangle CEA$ (Prop. Ref. 2 & Ax. 10. L. 1); & AC commun aux deux Δ ,

1. La droite CF est $=$ à CE .

On démontrera de même, que

2. La droite CG est $=$ à CE .

3. Partant, les droites CF, CE, CG sont $=$ entr'elles; & le \odot décrit du centre C & du rayon CE , passera aussi par les points F & G .

Et par la raison que les côtés AD, AB, DB sont \perp à l'extrémité E, F, G du rayons CE, CF, CG (Ref. 2 & Prep.),

4. Ces côtés toucheront le \odot aux points E, F, G .

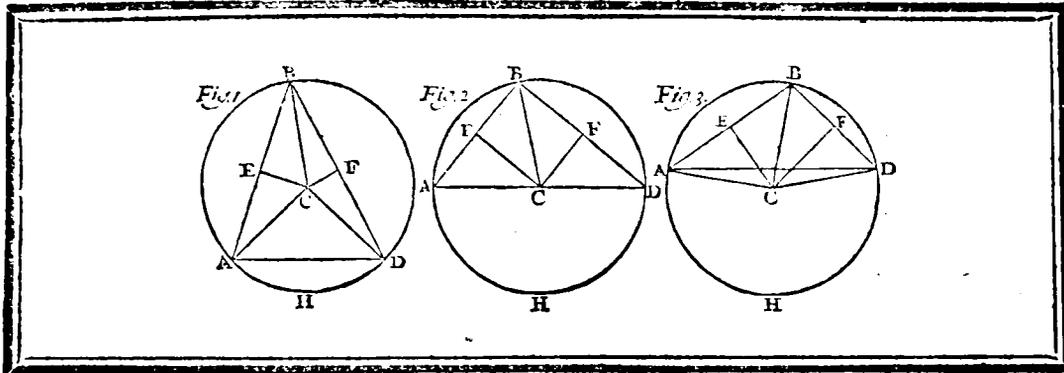
Le $\odot EFG$ est donc inscrit dans le ΔABD .

Prop. 26. L. 1.

[Ax. 1. L. 1.
 Def. 15. L. 1.

[Prop. 16. L. 3.
 Coroll.
 Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.



C PROPOSITION V. PROBLEME V.
Circonscrire un cercle (ABDH) à un triangle donné (ABD).

DONNE.
Le $\triangle ABD$.

CHERCHE.
Le $\odot ABDH$ circonscrit au $\triangle ABD$.

Résolution.

1. Partagez les côtés AB, DB en deux également, aux points E & F.
2. Sur AB, DB, aux points E & F, élevez les $\perp EC, FC$ prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C.
3. Et, soit que le point C tombe au dedans (Fig. 1), au dehors (Fig. 3), ou sur un des côtés (Fig. 2) du $\triangle ABD$, décrivez du centre C & du rayon CA le $\odot ABDH$.

Prop. 10. L. 1.

Prop. 11. L. 1.

Dem. 3.

Préparation.

Tirez les droites CD, CB.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les $\triangle AEC, BEC$, le côté AE est = au côté EB (Ref. 1), EC commun aux deux \triangle , & \sphericalangle compris AEC = à \sphericalangle compris BEC (Ref. 2. & Ax. 10. L. 1),

1. La droite CB est = à CA.
2. La droite CB est = à CD.
3. Partant, les droites CA, CB, CD sont = entr'elles; & le $\odot ABDH$ décrit du centre C & du rayon CA, passera aussi par les points B & D.
4. Ce $\odot ABDH$ est donc circonscrit au $\triangle ABD$.

Prop. 4. L. 1.

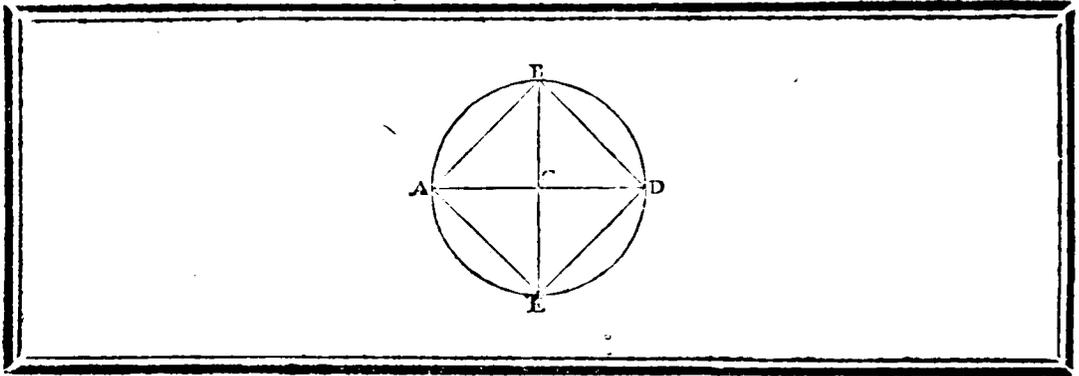
Ax. 1. L. 1.
Def. 15. L. 1.

Def. 6. L. 4.

C. Q. F. F.

C O R O L L A I R E.

SI le triangle ABD est acutangle, le point C tombe au dedans de ce triangle (Fig. 1); mais si ce triangle est obtusangle, le point C tombera au dehors (Fig. 3); enfin s'il est rectangle, le point C tombera sur un des côtés (Fig. 2).



PROPOSITION VI. PROBLEME VI.
Inscrire dans un cercle donné (ABDE); un quarré (ABDE).

DONNE.
 Le \odot ABDE.

CHERCHE.
 Le \square ABDE inscrit dans ce \odot .

Résolution.

1. **T**irez les diamètres AD, BE, enforte qu'ils se coupent à **L**.
2. Joignez leurs extrémités par les droites AB, BD, DE, EA.

Prop. II. L. I.
 Dem. I.

DEMONSTRATION.

Puis donc que dans les Δ ABC, DBC le côté AC est \equiv à CD (Ref. 1. & Def. 15. L. 1), BC commun aux deux Δ , & \sphericalangle compris BCA \equiv à \sphericalangle compris BCD (Ref. 1. & Ax. 10. L. 1),

1. La droite AB est \equiv à BD.

Prop. 4. L. I.

Par un raisonnement semblable on démontrera, que

2. La droite BD est \equiv à DE, DE \equiv à EA & EA \equiv à AB.
3. Partant, les droites AB, BD, DE, EA sont \equiv entr'elles, ou le quadrilatère ABDE est équilatère.

Ax. 1. L. 1.

Et à cause que chacun des \sphericalangle ABD, BDE, DEA, BAE est placé dans un demi \odot .

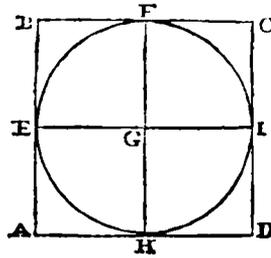
4. Ces \sphericalangle seront des **L**, & le quadrilatère équilatère ABDE est aussi rectangulaire.

5. C'est pourquoi ce quadrilatère est un quarré inscrit dans le \odot ABDE.

Prop. 31. L. 3.
 Def. 30. L. 1.
 Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.





C PROPOSITION VII. PROBLEME VII.
 Circonscire un quarré (ABCD) à un cercle donné (HEFI).

DONNE.
 Le \odot HEFI.

CHERCHE.
 Le \square ABCD circonscrit au \odot HEFI.

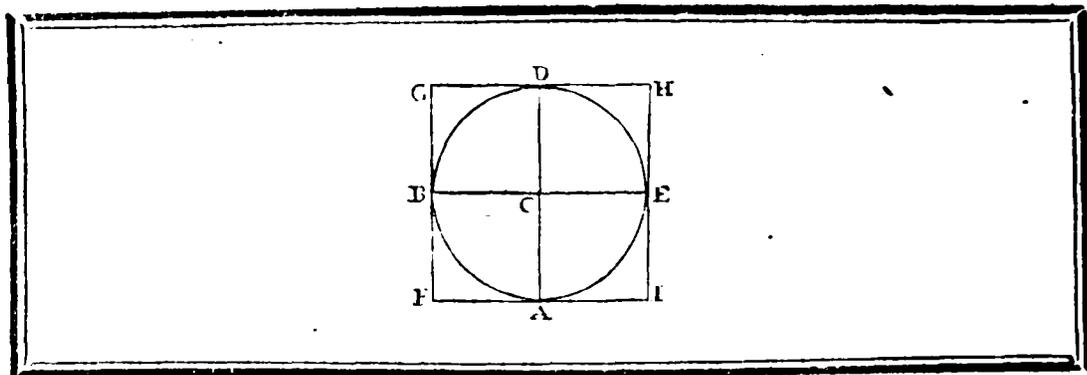
Résolution.

1. **T**irez les diamètres EI, HF en sorte qu'ils se coupent à \sphericalangle L. Prop. 11. L. 1.
2. Sur les extrémités H, E, F, I de ces diamètres, élevez les \perp AD, AB; BC, CD. Prop. 11. L. 1.

DEMONSTRATION.

1. **L**es droites DA, AB, BC, CD sont donc des tangentes du \odot HEFI. { Prop. 16. L. 3
Coroll.
2. Et la droite AD est \parallel à EI, de même que la droite BC; à cause que \sphericalangle HGE + GHA, item \sphericalangle FGE + GFB sont \equiv à 2 \sphericalangle (Ref. 1 & 2). Prop. 28. L. 1.
3. Partant AD est aussi \parallel à BC; & par la même raison AB, HF, DC sont \parallel les. Prop. 30. L. 1.
Def. 35. L. 1.
4. C'est pourquoi les quadrilatères AI, EC, AF, HC, AC sont des Pgmes. Prop. 34. L. 1.
5. D'où il suit, que les droites AD, EI, BC, item AB, HF, DC, sont \equiv entr'elles. Ax. 1. L. 1.
6. Et par la raison que EI est \equiv à HF (Def. 15. L. 1), les droites AD, BC, AB, DC sont aussi égales. Prop. 34. L. 1.
7. Mais \sphericalangle EID du Pgme AI étant un \sphericalangle (Ref. 2), L'angle A, qui lui est diagonalement opposé, est \sphericalangle aussi. Prop. 34. L. 1.
8. Les \sphericalangle B, C, D sont des \sphericalangle .
9. Par conséquent, on a circonscrit au \odot HEFI un quadrilatère ABCD équilatère (Arg. 6.) & rectangulaire (Arg. 7 & 8); ou un quarré. Def. 4. L. 1.
Def. 30. L. 1.

C. Q. F.F.



I PROPOSITION VIII. PROBLEME VIII.
 Inscrire un cercle (ABDE) dans un quarré donné (FGHI).

DONNE.
 Le \square FGHI.

CHERCHE.
 Le \odot ABDE inscrit dans le \square FGHI.

Résolution.

1. Coupez les côtés FI, FG du quarré FGHI en deux également.
2. Par les points de section A & B, tirez AD Plle à FG ou IH & BE Plle à FI ou GH.
3. Du point C, où AD, BE s'entrecourent, comme centre & du rayon CA, décrivez le \odot ABDE.

Prop. 10. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Dem. 3.

DEMONSTRATION.

Puisque les figures FE, BH, FD, AH, FC, AE, BD, CH font des Pgmcs (Ref. 2. & Def. 35. L. 1).

1. La droite FA est = à BC & FB = à AC.

Prop. 34. L. 1.

Mais les droites entières FI, FG étant égales (Def. 30. L. 1) & FA, FB étant les moitiés de ces droites (Ref. 1).

2. La droite FA est = à FB.

Ax. 7. L. 1.

3. Partant BC est aussi = à AC; & par la même raison AC est = à CE & BC = à CD.

Ax. 1. L. 1.

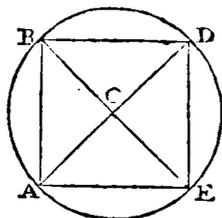
4. D'où il suit, que les droites AC, BC, CE, CD font = entr'elles, & que le \odot décrit du centre C & du rayon CA; passe aussi par les points B, D, E, Or les \sphericalangle DAF, EBG, ADH, BEI étant des \sphericalangle (Prop. 34. L. 1), comme intérieurs opposés aux \sphericalangle GFA, HGB, IHD, FIE (Def. 30. L. 1).

[Ax. 1. L. 1.
 Def. 15. L. 1.

5. Les droites FI, FG, GH, HI font des tangentes du \odot ABDE.
6. C'est pourquoi ce \odot est inscrit dans le quarré FGHI.

[Prop. 16. L. 3.
 Coroll.
 Def. 5. L. 4.]

C. Q. F. F.



C PROPOSITION IX. PROBLEME IX.
 Circonscrire un cercle (ABDE); à un quarré donné (ABDE).

DONNE.
 Le □ ABDE.

CHERCHE.
 Le ⊙ ABDE circonscrit au □ ABDE..

Résolution.

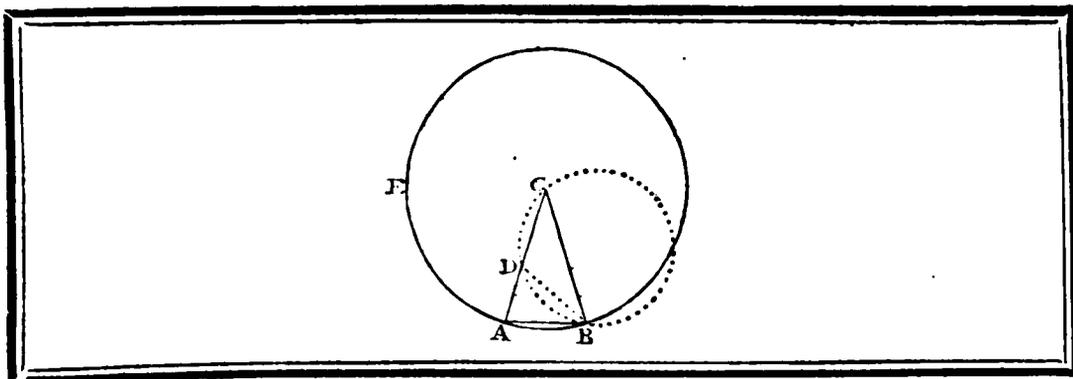
1. **T**irez les diagonales AD, BE. Dem. 1.
2. Du point C, où ces diagonales se coupent, comme centre & du rayon CA décrivez le ⊙ ABDE. Dem. 3.

DÉMONSTRATION.

Puisque dans les Δ ABE, EBD le côté AB est = au côté BD, AE = à ED (Def. 30. L. 1) & BE commun aux deux Δ.

1. L'angle ABE est = à √ EBD, & √ entier ABD est coupé en deux également par la droite BE. Prop. 8. L. 1.
 On prouvera de même que
2. Les autres √ BAE, BDE, AED sont coupés en deux également par les droites AD, BE.
 Or les √ entiers ABD, BAE étant = entr'eux (Def. 30. L. 1).
3. Leurs moitiés les √ CBA, CAB seront = aussi. Ax. 7. L. 1.
4. Partant CA est = à CB, & par la même raison CA est = à CE, & CB = à CD. Prop. 6. L. 1.
5. D'où il suit, que les droites CA, CB, CE, CD sont = entr'elles, & que le ⊙ décrit du centre C & du rayon CA, passera aussi par les points B, D, E. [Ax. 1. L. 1.
Def. 15. L. 1.
6. C'est pourquoi le ⊙ ABDE est circonscrit au quarré ABDE. Def. 6. L. 4.

C. Q. F.F.



PROPOSITION X. PROBLEME X.
Construire un triangle isoscèle (ACB); qui ait chacun des angles (CAB, CBA) sur la base (AB) double de l'angle au sommet (ACB).

DONNE.

Une ligne CA prise à volonté.

CHERCHE.

Is Δ isoscèle ACB, qui ait \sphericalangle CAB ou CBA = a 2 \sphericalangle ACB.

Résolution.

- | | |
|---|-----------------|
| 1. Tirez donc une ligne quelconque CA. | Dem. 1. |
| 2. Coupez cette ligne, en sorte que le Rgle de CA.AD soit = au \square de CD. | Prop. 11. L. 2. |
| 3. Du centre C & du rayon CA décrivez le \odot ABE. | Dem. 3. |
| 4. Appliquez dans ce \odot la droite AB = à CD, & tirez CB. | Prop. 1. L. 4. |

Préparation.

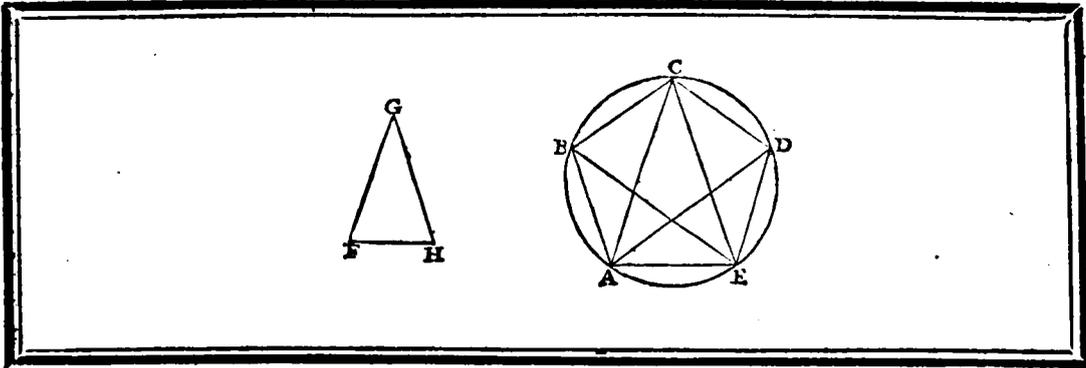
- | | |
|---|----------------|
| 1. Tirez la droite DB, | Dem. 1. |
| 2. Et circonscrivez un \odot au Δ CDB. | Prop. 5. L. 4. |

DEMONSTRATION.

Puis donc que le Rgle CA.AD est = au \square de CD (Ref. 2), & que le \square de AB est = au \square de CD (Ref. 4. & Prop. 46. Coroll. 3. L. 1).

- | | |
|--|------------------|
| 1. Le Rgle CA. AD sera aussi = au \square de AB. | Ax. 1. L. 1. |
| 2. Partant la droite AB est tangente du \odot CDB; | Prop. 37. L. 3. |
| 3. D'où il suit que \sphericalangle DBA est = à \sphericalangle BCD. | Prop. 32. L. 3. |
| En ajoutant donc de part & d'autre \sphericalangle DBC, | |
| 4 L'angle ABC sera = aux \sphericalangle BCD + DBC. | Ax. 2. L. 1. |
| Mais \sphericalangle BDA étant aussi = aux \sphericalangle BCD + DBC (Prop. 32. L. 1). | |
| 5. L'angle BDA est donc = à \sphericalangle ABC. | Ax. 1. L. 1. |
| De même, puisque CB est = à CA (Ref. 4 & Def. 15. L. 1). | |
| 6. L'angle BAC est = à \sphericalangle ABC. | Prop. 5. L. 1. |
| 7. C'est pourquoi, \sphericalangle BDA est = à \sphericalangle BAC, & DB est = à AB. | { Ax. 1. L. 1. |
| Et à cause que CD est aussi = à AB (Ref. 4). | { Prop. 6. L. 1. |
| 8. La droite DB sera = à CD, & \sphericalangle CBD = à \sphericalangle BCD. | { Ax. 1. L. 1. |
| En ajoutant de part & d'autre \sphericalangle DBA ou son égal \sphericalangle BCD (Arg. 3). | { Prop. 5. L. 1. |
| 9. Les \sphericalangle CBD + DBA ou \sphericalangle CAB est = 2 \sphericalangle BCD; Et on a construit un Δ isoscèle CAB, qui a chacun des \sphericalangle sur la base double de \sphericalangle au sommet. | Ax. 2. L. 1. |

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. PROBLEME XI.

Dans un cercle donné (ACE); inscrire un pentagone (ABCDE) équilateral & équiangle.

DONNE.
Le \odot ACE.

CHERCHE.
Le pentagone équilateral & équiangle ABCDE;
qui soit inscrit dans le \odot ACE.

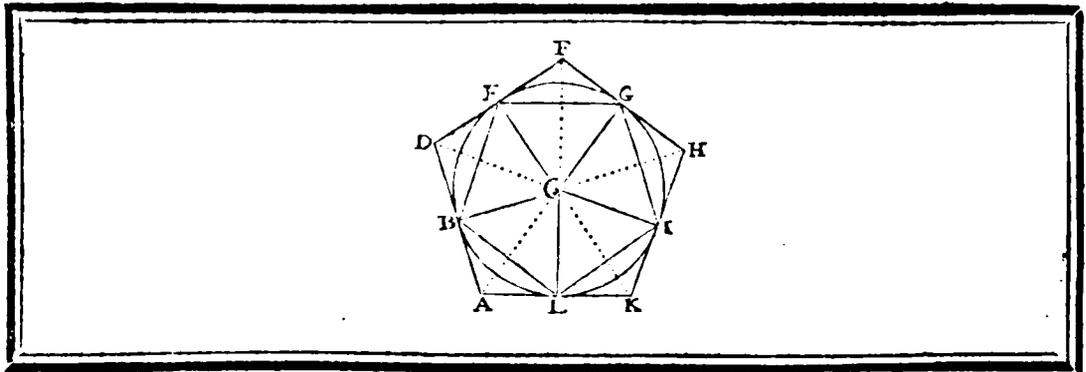
Résolution.

1. Construisez le Δ isocèle FGH, qui ait chacun des \sphericalangle à la base FH double de \sphericalangle au sommet G. Prop. 10. L. 4.
2. Inscrivez dans le \odot ACE un Δ ACE équiangle au Δ FGH. Prop. 2. L. 4.
3. Coupez les \sphericalangle à la base CAE & CEA en deux également par les droites AD, EB, Prop. 9. L. 1.
4. Et tirez les droites AB, BC, CD, DE. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque chacun des \sphericalangle CAE, CEA est double de \sphericalangle ACE. (Ref. 1. & 2), & que ces angles sont coupés en deux également (Ref. 3).
1. Les cinq \sphericalangle ACE, CAD, DAE, BEA, CEB, feront = entr'eux. Ax. 7. L. 1.
 2. D'où il suit, que les arcs AE, ED, DC, CB, BA sont = entr'eux; de même que les cordes AE, ED, DC, CB, BA. Prop. 26. L. 3.
Mais, si on ajoute de part & d'autre aux arcs égaux AE = CD (Arg. 2) l'arc ABC. Prop. 29. L. 3.
 3. L'arc entier EABC est = à l'arc entier ABCD; & \sphericalangle CDE est = à \sphericalangle VDEA. Ax. 2. L. 1.
Prop. 27. L. 3.
On démontrera de même que
 4. Chacun des \sphericalangle EAB, ABC, BCD est = à \sphericalangle CDE ou DEA.
 5. C'est pourquoi on a inscrit dans le \odot ACE, un pentagone équilateral & équiangle (Arg. 4). Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



C PROPOSITION XII. PROBLEME XII.
 Irconscire à un cercle donné (LEG) un pentagone (ADFHK) équilateral & équiangle.

DONNE.
 Le \odot LEG.

CERCHE.
 Le Pentagone équilateral & équiangle ADFHK, qui soit circonscrit au \odot LEG.

Résolution.

1. INscrivez dans le \odot LEG, un pentagone équilateral & équiangle. Prop. 11.L. 4.
2. Tirez aux points B, E, G, I, L les rayons CB, CE, CG, CI CL. Dem. 1.
3. Elevez sur les extrémités de ces rayons les \perp prolongées AD, DF, FH, HK, KA. Prop. 11.L. 1.

Préparation.

Tirez les droites CA, CD, CF, CH, CK. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AD, DF, FH, HK, KA sont \perp à l'extrémité des rayons CB, CE, CG, CI, CL (Ref. 3).

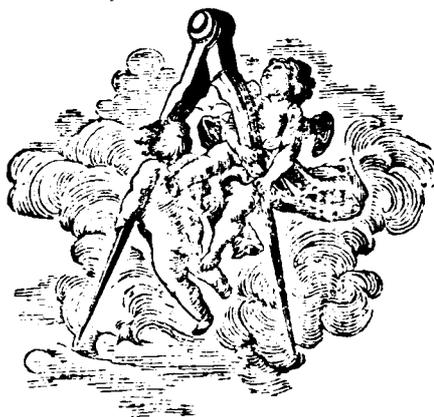
1. Ces droites toucheront le \odot au point B, E, G, I, L, Et les \sphericalangle DBE + DEB, FEG + FGE, HGI + HIG, KIL + KLI, ABL + ALB, pris deux à deux sont \sphericalangle 2L. } Prop. 16.L. 3. Coroll.
2. Les droites AD, DF, FH, HK, KA se rencontreront donc aux points D, F, H, K, A. } Ax. 8. L. 1. Rem. de Prop. 27. L. 1.

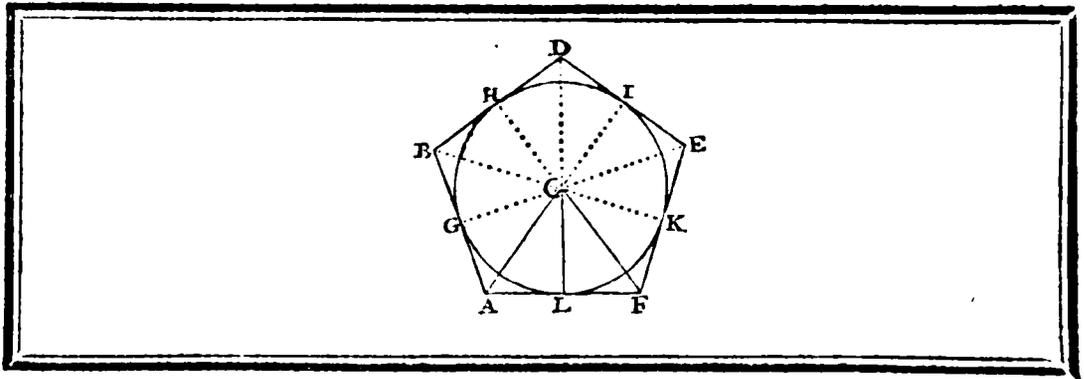
Mais, puisque dans les Δ CEF, CGF le côté FE est = au côté FG (Prop. 37. L. 3. Coroll. & Ref. 3), CE = GC (Def. 15. L. 1) & CF commun aux deux Δ ,

3 L'angle

3. L'angle CFE est \equiv à \sphericalangle CFG & \sphericalangle ECF \equiv à \sphericalangle GCF. Prop. 8. L. 1.
4. Par conséquent, \sphericalangle EFG est double de \sphericalangle CFG, & \sphericalangle ECG double de \sphericalangle FCG; par la même raison \sphericalangle GHI est double de \sphericalangle CHG & \sphericalangle GCI double de \sphericalangle GCH.
5. De plus, \sphericalangle ECG est \equiv à \sphericalangle GCI, à cause des arcs égaux EG, GI (Ref. 1). Prop. 28. L. 3.
6. Partant, \sphericalangle FCG est \equiv à \sphericalangle GCH. Ax. 7. L. 1.
- Mais les \sphericalangle CGF, CGH des \triangle CFG, CHG étant de plus égaux (Ref. 3. & Ax. 10. L. 1) & CG commun aux deux \triangle ,
7. La droite FG est \equiv à GH & \sphericalangle CFG est \equiv à \sphericalangle CHG. Prop. 26. L. 1.
8. C'est pourquoi FH est double de FG, & par la même raison DF est double de EF. Ax. 2. L. 1.
- Et puisque de plus la droite FG est \equiv à EF (Prop. 37. L. 3. Coroll.).
9. La droite FH est aussi \equiv à DF, (Ax. 6. L. 1) & les droites HK, KA, AD feront par la même raison \equiv à FH ou DF. Derechef \sphericalangle EFG ou DFH étant double de \sphericalangle CFG, l'angle GHI ou FHK double de \sphericalangle CHG & de plus \sphericalangle CFG \equiv à \sphericalangle CHG (Arg. 7).
10. Les \sphericalangle DFH, FHK feront \equiv entr'eux, & les \sphericalangle HKA, KAD, ADF font par la même raison \equiv à DFH ou FHK.
11. Partant, on a circonscrit au \odot LEG un pentagone ADFHK (Arg. 1). équilatéral (Arg. 9) & équiangle (Arg. 10). Def. 4. L. 4.

C. Q. F. F.





I PROPOSITION XIII. PROBLEME XIII.
 Nscrire dans un pentagone équilatéral & équiangle (ABDEF); un cercle (GHIKL).

DONNE.

Le Pentagone équilatéral & équiangle ABDEF.

CHERCHE.

Le \odot GHIKL inscrit dans ce pentagone.

Résolution.

1. **C**oupez les deux \sphericalangle BAF, AFE du pentagone ABDEF en deux également, par les droites prolongées CA, CF.
2. Du point C, où ces droites se joignent, abaissez sur AF la \perp CL.
3. Du point C, comme centre & du rayon CL, décrivez le \odot GHIKL.

Prop. 9. L. 1.
 Prop. 12. L. 1.
 Dem. 3.

Préparation.

1. **T**irez les droites CB, CD, CE.
2. Du point C abaissez sur AB, BD, DE, EF les \perp CG, CH, CI, CK.

Dem. 1.
 Prop. 12. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les \triangle ACF, ACB le côté AF est = au côté AB, le côté CA commun aux deux \triangle & \sphericalangle CAF = à \sphericalangle CAB (Ref. 1 & donné).

1. Il s'enfuit que \sphericalangle CFA est = à \sphericalangle CBA.

Prop. 4. L. 1.

Mais \sphericalangle AFE étant = \sphericalangle DBA & double de \sphericalangle CFA (Ref. 1).

2. Il s'enfuit que \sphericalangle DBA est aussi double de \sphericalangle CBA; ou \sphericalangle CBD = à \sphericalangle CBA.

Ax. 6. L. 1.

On démontrera de même, que

3. L'angle CDB est = à \sphericalangle CDE, & \sphericalangle CED = à \sphericalangle CEF.

On a donc dans les \triangle CBG, CBH, l'angle CBG = à \sphericalangle CBH (Arg. 2), l'angle CGB = à \sphericalangle CHB (Prep. 2 & Ax. 10. L. 1) & CB commun aux deux \triangle .

Prop. 26. L. 1.

4. Partant, la droite CG est = à CH; & par la même raison CI, CK, CL font = à CH ou à CG.

5. Le \odot décrit du centre C & du rayon CL passera donc aussi par les points G, H, I, K. Et parceque les droites AB, BD, DE, EF, FA font \perp à l'extrémité des rayons CG, CH, CI, CK, CL (Prep. 2 & Ref. 2).

Def. 15. L. 1.

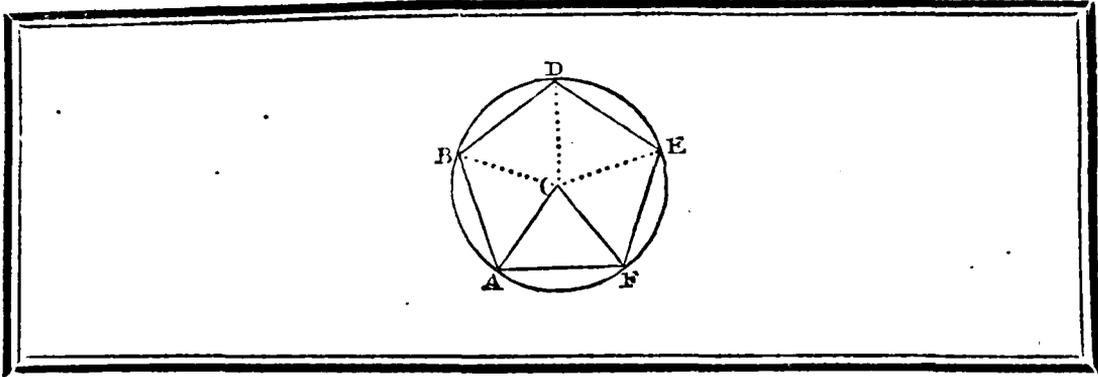
6. Ces droites toucheront le \odot GHIKL (Prop. 16. L. 3. Coroll.); & ce \odot est inscrit dans le pentagone ABDEF.

Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

Si les deux angles voisins (BAF, EFA) d'une figure équilatère & équiangulaire font coupés en deux également, & que du point (C) où les droites (AC, FC), qui les coupent en deux également se rencontrent, on tire des droites (CB, CD, CE) aux angles restants de la figure, ces droites couperont aussi les angles restants en deux également.



C PROPOSITION XIV. PROBLEME XIV.
 Circonscrire un cercle (ADF); à un pentagone (ABDEF) équiangle & équilatéral.

DONNE.

Le pentagone ABDEF équiangle & équilatéral.

CHERCHE.

Le \odot ADF circonscrit à ce pentagone.

Résolution.

1. Coupez les \sphericalangle BAF, AFE en deux également par les droites prolongées CA, CF. Prop. 9. L. 1.
2. Du point C, où ces droites se coupent, comme centre, & du rayon CA décrivez le \odot ADF. Dem. 3.

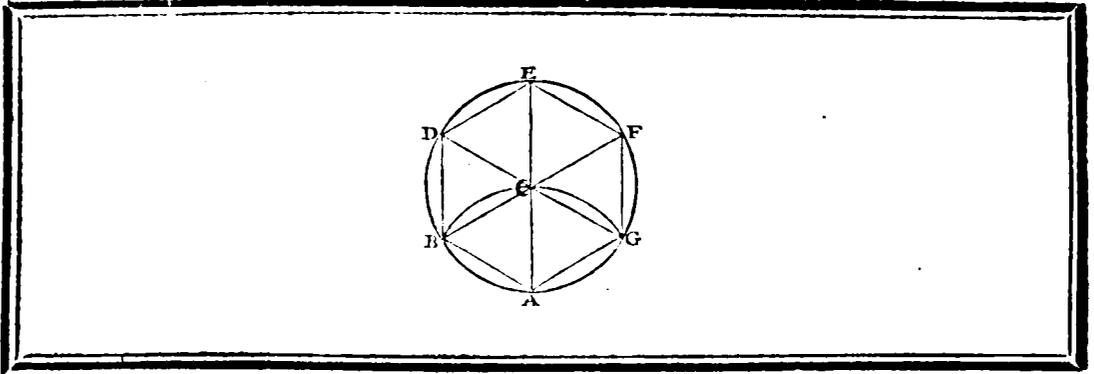
Préparation.

Tirez les droites CB, CD, CE. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

1. Les droites CB, CD, CE coupent donc en deux également les \sphericalangle ABD, BDE, DEF, Prop. 13. L. 4.
2. Et à cause que \sphericalangle BAF est = à \sphericalangle AFE, l'angle CAF sera aussi = à \sphericalangle CFA. Coroll.
3. C'est pourquoi CA est = à CF. Ax. 7. L. 1.
 On démontrera de même, que Prop. 6. L. 1.
4. Chacune des droites CB, CD, CE est = à CA ou à CF.
5. D'où il suit que le \odot décrit du centre C & du rayon CA passera aussi par les points B, D, E, F, Def. 15. L. 1.
6. Par conséquent le \odot ADF est circonscrit au pentagone donné ABDEF. Def. 6. L. 4.

C. Q. F.F.



I PROPOSITION XV. PROBLEME XV.
 INscrire un Hexagone (ABDEFG) équilateral & équiangle ; dans un cercle donné (BEG).

DONNE.
 Le \odot BEG.

CERCHE.
 L'Hexagone équilateral & équiangle ABDEFG,
 inscrit dans le \odot BEG.

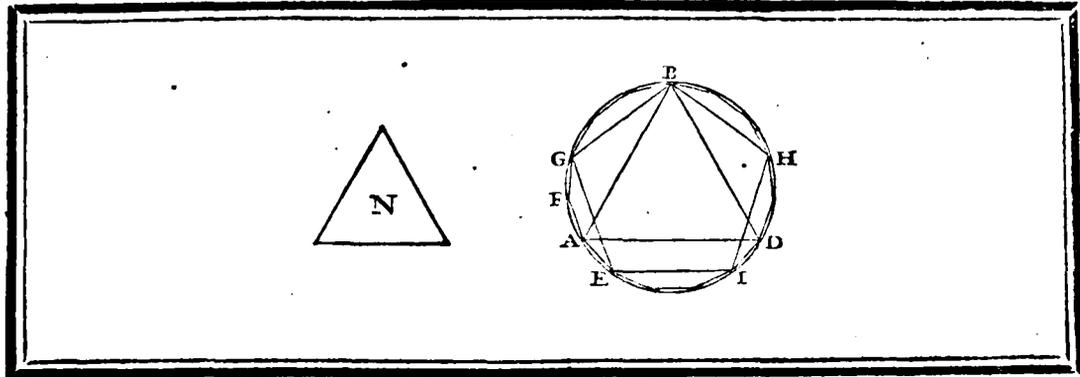
Résolution.

1. Cherchez le centre C du \odot BEG, & tirez un diamètre quelconque AE. Prop. 1. L. 3.
2. Du point A comme centre, & du rayon AC décrivez l'arc de \odot BCG. Dem. 3.
3. Tirez les rayons CG, CB prolongés en D & F. Dem. 1 & 2.
4. Tirez les droites AB, BD, DE, EF, FG, GA. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque dans le \triangle BCA, le côté BC est = au côté AC, & AB = aussi à AC (Ref. 3. & Def. 15. L. 1).
1. Ce \triangle est équilateral & équiangle. Def. 24. L. 1.
 2. C'est pourquoi, \sphericalangle BCA est = à la troisieme partie de 2 \sphericalangle , & par la même raison \sphericalangle ACG est aussi = à la troisieme partie de 2 \sphericalangle . Prop. 5. L. 1.
 3. Mais les \sphericalangle BCA + ACG + GCF étant = à 2 \sphericalangle (Prop. 13. L. 1). Prop. 32. L. 1.
 4. L'angle GCF sera aussi = à la troisieme partie de 2 \sphericalangle ; & les \sphericalangle BCA, ACG, GCF sont = entr'eux. Ax. 1. L. 1.
 5. Par conséquent, les \sphericalangle FCE, ECD, DCB, qui les égalent comme leurs opposés au sommet, sont aussi = entr'eux. Prop. 15. L. 1.
 6. Partant, les arcs BA, AG, GF, FE, ED, DB sont = entr'eux, de même que les cordes BA, AG, GF, FE, ED, DB. Prop. 26. L. 3.
 7. L'Hexagone ABDEFG, inscrit dans le \odot BEG, est donc équilateral. Prop. 29. L. 3.
 8. De plus l'arc BA étant = à l'arc ED (Arg. 5); si on ajoute l'arc commun AGFE. Ax. 2. L. 1.
 9. L'arc BAGFE sera = à l'arc AGFED. Prop. 27. L. 3.
 10. D'où il suit, que \sphericalangle EDB est = à \sphericalangle DBA; & par la même raison, chacun des \sphericalangle FED, GFE, AGF est = à \sphericalangle EDB ou à \sphericalangle DBA. Def. 3. L. 4.
 11. L'Hexagone équilateral ABDEFG, inscrit dans le \odot BEG, est donc aussi équiangle.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XVI. PROBLEME XVI.
Inscrire un quindécagone (EAFG &c.) équilateral & équiangle, dans un cercle donné (EBI).

DONNE.
 Le \odot EBI.

CERCHE.
 Le quindécagone équilateral & équiangle EAFG &c.

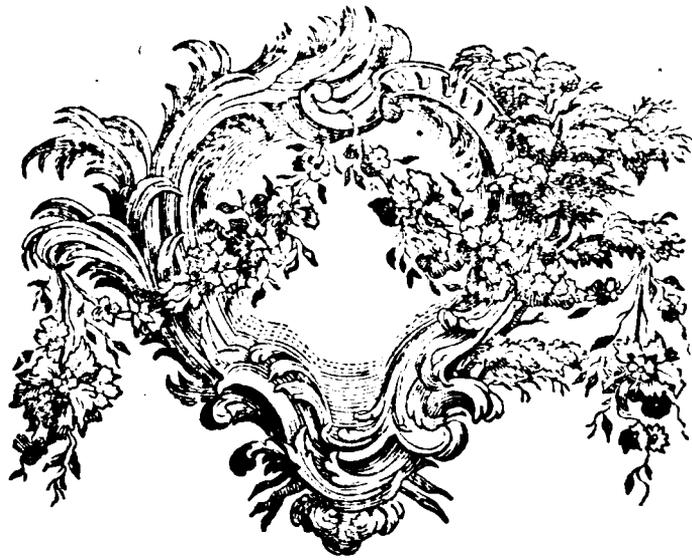
Résolution.

1. **C**onstruisez un Δ équilateral N. Prop. 1. L. 1.
2. Inscrivez dans le \odot EBI un Δ ABD équiangle au Δ équilateral N. Prop. 2. L. 4.
3. Et un pentagone équilateral & équiangle EGBHI. Prop. 11. L. 4.
4. Tirez la corde AE, & appliquez la 15 fois de suite, dans le \odot EBI. Prop. 1. L. 4.

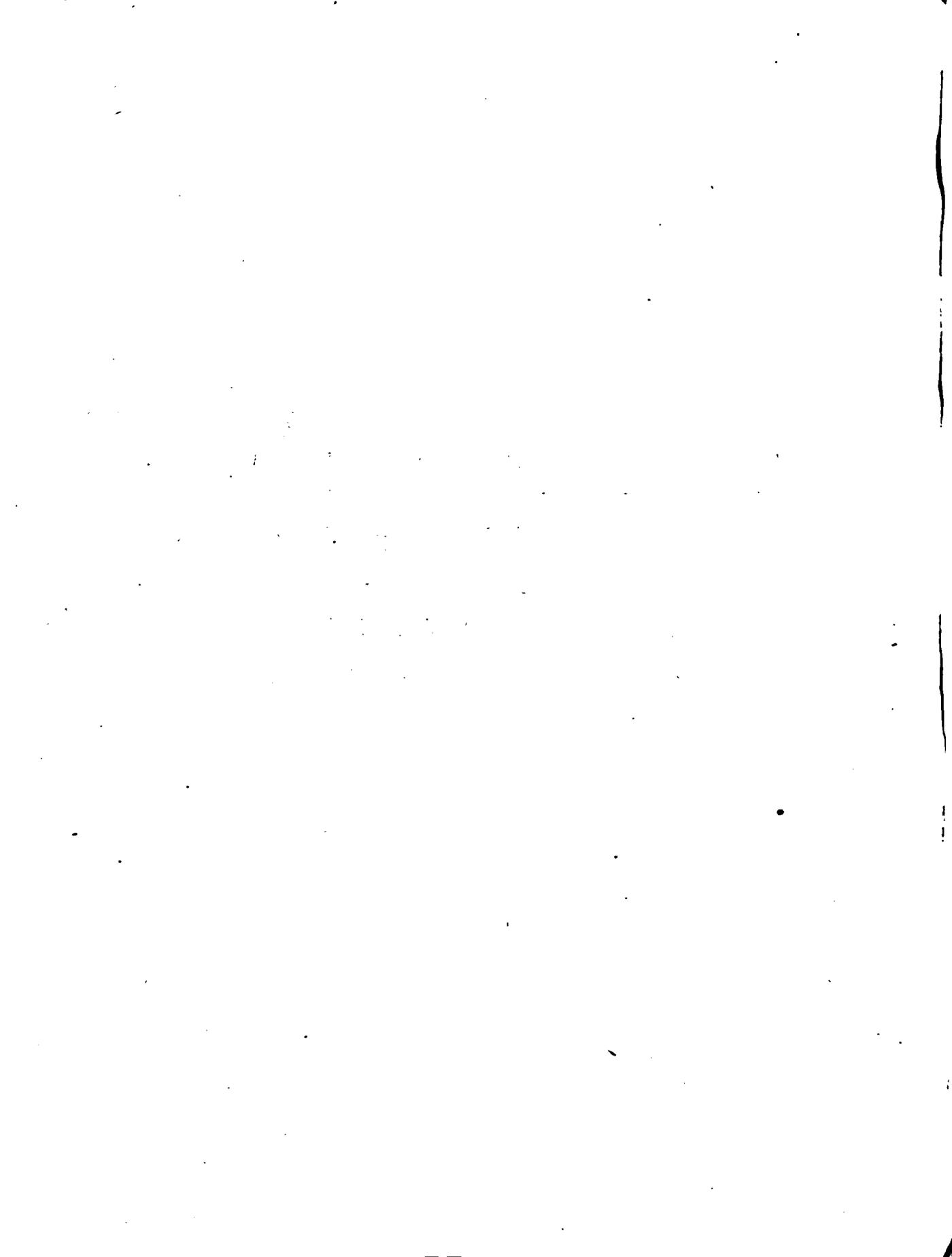
DEMONSTRATION.

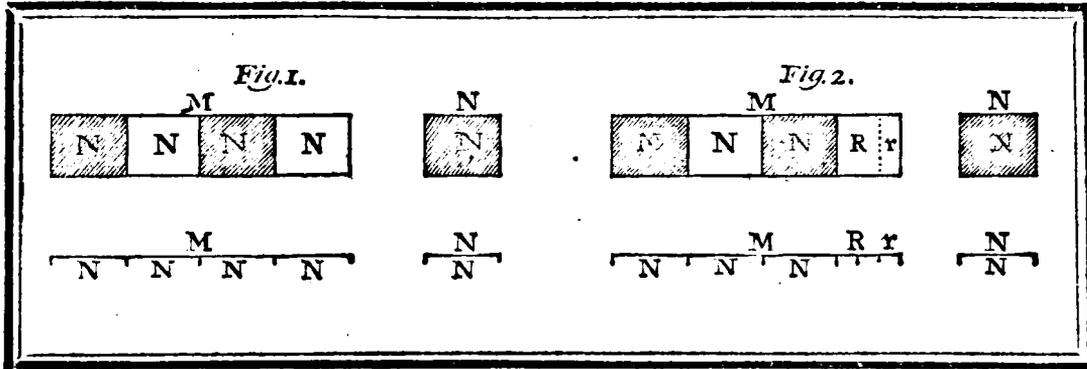
- P**uisque le Δ ABD est équiangle à un Δ équilateral N (Ref. 2).
1. Ce Δ est aussi équilateral, ou AD est \equiv à AB \equiv à BD, Prop. 6. L. 1.
 2. Et les arcs AD, AB, BD sont \equiv entr'eux, ou chacun est la troisieme partie de la \odot entiere. Prop. 28. L. 3.
 3. Derechef, à cause que le pentagone EGBHI est équilateral, (Ref. 3). Prop. 28. L. 3.
 4. Chacun des arcs EG, GB, BH, HI, IE est la cinquieme partie de la \odot entiere. Mais l'arc AB étant la troisieme partie (Arg. 2), & l'arc EG ou GB chacun la cinquieme partie de la \odot (Arg. 3).
 5. On peut appliquer dans l'arc AB cinq côtés du quindécagone, & dans chacun des arcs EG, GB trois côtés du quindécagone, ou dans l'arc EGB six côtés du quindécagone.
 6. Partant, on pourra appliquer un de ces côtés dans l'arc AE, & le quindécagone équilateral EAFG &c. sera inscrit au \odot EBI. Def. 3. L. 4.
 7. De plus, puisque chacun de ses \sphericalangle FAE s'appuye sur un arc FHE qui est \equiv à treize quinziesmes parties de la circonference, Prop. 27. L. 3.
 8. Ces angles seront tous \equiv entr'eux.
 9. On a donc inscrit dans le \odot EBI, un quindécagone EAFG, équilateral & équiangle.

C. Q. F. F.



LES
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
LIVRE CINQUIEME.





D E F I N I T I O N S.

I.

ON appelle *partie*, une moindre grandeur qui en mesure une plus grande.

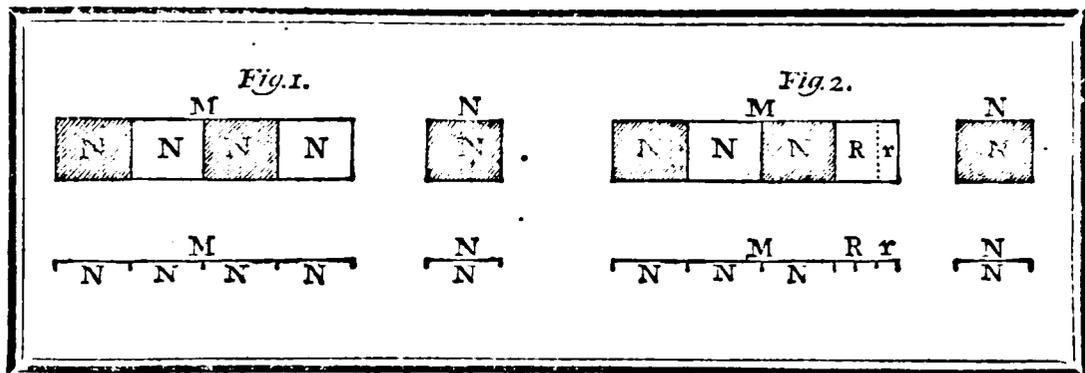
§. 1. Par l'expression mesurer une grandeur, *Euclide entend*, s'y trouver contenu un certain nombre de fois sans reste, c. à. d. une moindre grandeur *N* (Fig. 1.) en mesure une plus grande *M*, lorsque la grandeur *N* est contenue dans *M* sans reste deux, trois, quatre, & en général tant de fois qu'on voudra; ou, ce qui revient au même, lorsque la moindre grandeur *N* répétée deux, trois, quatre, & en général tant de fois qu'on voudra, produit un Tout égal à la plus grande *M*.

§. 2. Les modernes nomment ces sortes de parties, qui mesurent le Tout sans reste, des parties aliquotes; donnant le nom de parties aliquantes à celles qui ne peuvent mesurer le Tout qu'avec un reste; tandis qu'une autre quantité déterminée peut les mesurer exactement, aussi bien que le Tout.

Ainsi les nombres 2, 3, 4, 6 sont autant de parties aliquotes du nombre 12 considéré comme un Tout; attendu que chacun des nombres 2, 3, 4, 6 se trouve répété dans 12 un certain nombre de fois sans reste. Au contraire les nombres 5, 7, 9 &c. sont des parties aliquantes du même Tout 12; car ces nombres ne mesurent 12 qu'avec un reste: quoiqu'ils puissent tous être mesurés par l'unité, aussi bien que 12; ce qui réussit souvent avec d'autres nombres différens de l'unité: comme dans le cas du nombre 9, qui est commensurable au nombre 12 par le nombre 3, aussi bien que par l'unité.

De même la grandeur *N* (Fig. 2) est une partie aliquante de la grandeur *M* ($= N + N + N + R$ &c), si *N* mesure *M* en laissant un reste *R*; bien entendu néanmoins que ce reste *R* soit tel, qu'il mesure lui-même, la grandeur *N*, ou du moins, qu'une de ses parties déterminée *r* mesure ce reste *R* de même que la grandeur *N*, & par conséquent aussi toute la grandeur *M*; autrement *N* ne seroit point une partie aliquante de *M*, mais une partie incommensurable.

§. 3. On appelle en général nombre commensurable, celui qui peut résulter de l'unité, ou d'une de ses parties aliquotes répétée un nombre de fois déterminé: Ou, ce qui revient au même, celui qui peut être mesuré par l'unité, ou une de ses parties aliquotes. Ainsi les nombres



D E F I N I T I O N S .

nombre 6, 9, 17, & les fractionnaires $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ sont des nombres commensurables; puisque les premiers peuvent résulter de l'addition successive & déterminée de l'unité; & les derniers de celle des fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{7}$, parties aliquotes de l'unité.

§ 4. Conformément à cette définition, on appelle quantité commensurable, celle qui résulte de la répétition déterminée d'une quantité déterminée quelconque. Une quantité est donc commensurable, quand elle contient une de ses parties, autant de fois qu'un nombre déterminé contient l'unité.

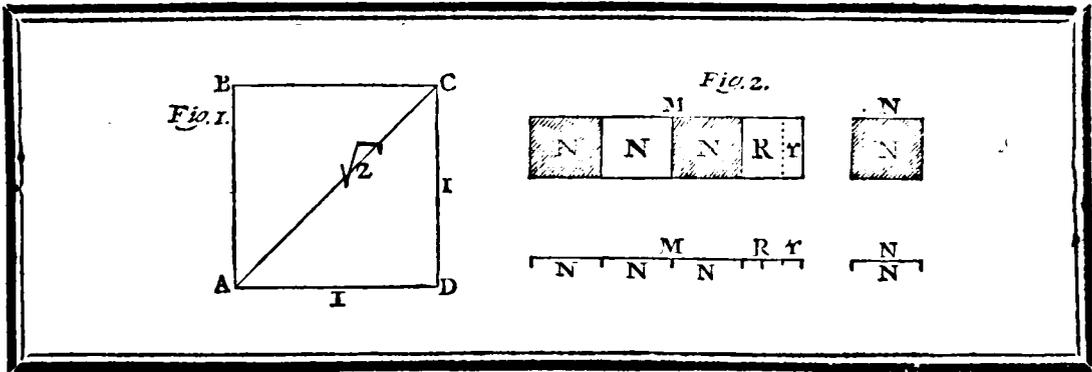
§ 5. La commensurabilité est donc quelque chose de relatif. Les grandeurs M & N sont commensurables autant qu'une mesure commune & déterminée r, qu'on est autorisé à prendre pour unité, peut les mesurer toutes les deux exactement; ou autant que ces deux grandeurs peuvent naître de la répétition déterminée de la même quantité r, quelle qu'elle puisse être.

§ 6. Il suit de cette notion des nombres commensurables, qu'ils sont tous ou des multiples les uns des autres, ou des parties aliquotes, ou bien des parties aliquantes. Car si les quantités M & N sont commensurables, N mesure M, ou M mesure N, ou un autre nombre déterminé r les mesure toutes deux. Dans le premier Cas, le nombre M est un multiple de N; dans le second Cas M est une partie aliquote de N; & dans le troisième, le plus petit des deux est une partie aliquante du plus grand. La même chose est vraie des grandeurs rationnelles en général.

§ 7. Le nombre, qui ne peut résulter de la répétition déterminée de l'unité ou d'une de ses parties aliquotes, est appelé irrationnel ou incommensurable relativement à l'unité. Et en général, les grandeurs, qui ne peuvent naître de la répétition déterminée d'une même quantité déterminée considérée comme unité, sont incommensurables entr'elles, ou irrationnelles. Ainsi la racine quarrée du nombre 2 fait un nombre incommensurable à l'unité; car

$$\sqrt{2} \text{ est } = \text{ à } 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100000} \text{ \&c. \& ainsi à l'infini.}$$

Tellement qu'il est impossible de trouver une partie aliquote, qui ajoutée à elle même un nombre de



DEFINITIONS.

de fois déterminé, reproduise l'unité, & qui ajoutée à elle même un autre nombre de fois déterminé, fasse en même tems naître la racine quarrée du nombre 2. Puis donc que la diagonale (AC) du quarré (ABCD) représente la racine quarrée du nombre deux, le côté (AD ou DC) du quarré étant pris pour unité; on voit que la diagonale d'un quarré est incommensurable à son côté (Fig. 1).

§. 8. Il suit de-là, que si deux grandeurs M & N sont incommensurables, M ne peut être ni un multiple de N, ni une partie aliquote, ni enfin une partie aliquante de ce même N. Car supposant le contraire, il arriveroit nécessairement, que les grandeurs M & N pourroient être mesurées, par une même grandeur déterminée, représentative de l'unité; ce qui repugne à l'hypothese de l'incommensurabilité (Fig. 2).

Au reste quand Euclide parle de parties dans ce Cinquieme Livre, il entend toujours des parties aliquotes, conformément à cette définition. Il n'explique les parties aliquantes que dans la IV^e Définition du VII^e Livre.

I I.

Une grandeur plus grande est nommée un multiple d'une moindre; lorsque la moindre peut mesurer la plus grande.

Ainsi le nombre 12 est dit être un multiple du nombre 4; parceque 4 mesure 12 sans reste.

Au terme de multiple repond celui de sousmultiple, qui désigne qu'une moindre grandeur est une partie aliquote d'une plus grande; ainsi 4 est un sousmultiple de 12, comme 12 est un multiple de 4.

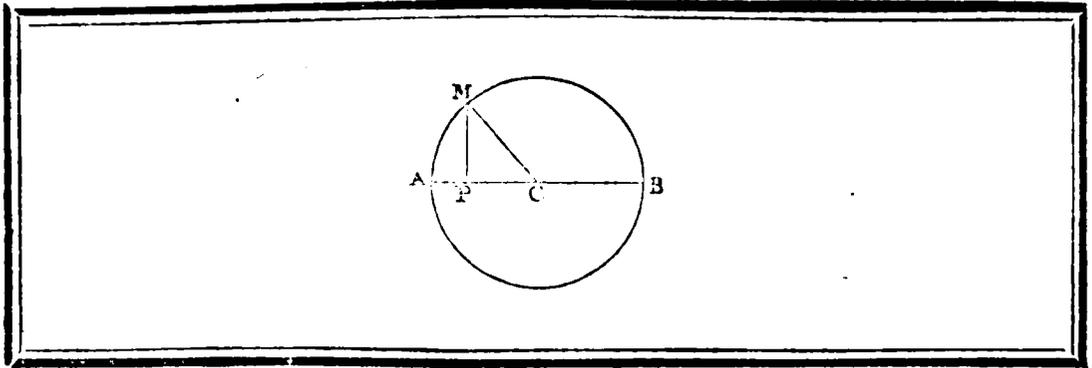
I I I.

La Raison est une certaine rélation mutuelle de deux grandeurs homogènes, comparées l'une à l'autre selon leur quantité.

Cette définition est incomplète, à moins qu'on ne soit disposé à la sauver au moyen d'une interpretation convenable du terme κατά πηλικότητα selon la quantité ou selon la quantuplicité, terme qu'Euclide n'a point défini.

Y

§. I.



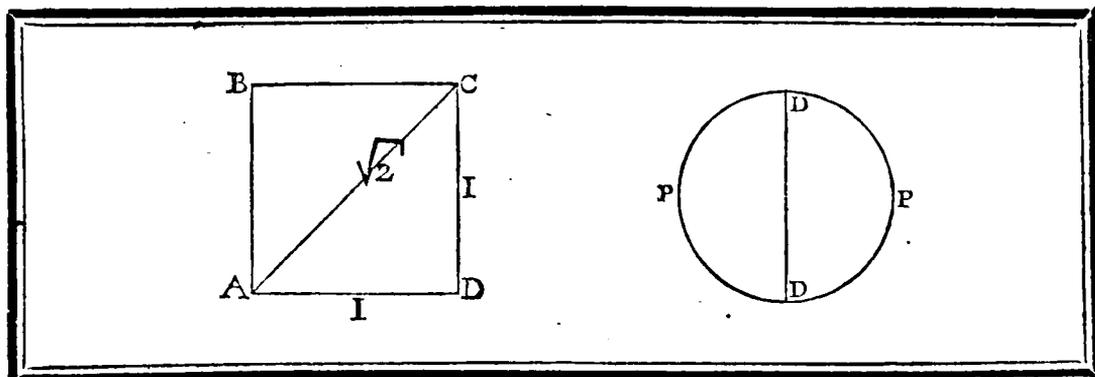
D E F I N I T I O N S .

§. 1. L'idée de la raison enveloppe sans doute une certaine relation des quantités de deux grandeurs homogènes ; mais ce caractère général ne suffit pas ; vu que les quantités de deux grandeurs homogènes sont susceptibles de plusieurs sortes de relations, différentes de celle de la raison. Ainsi ; lorsque dans un cercle $A M B$ on se représente le carré de la perpendiculaire $P M$ comme constamment égal à la différence des carrés du rayon $M C$, & de la portion du rayon $P C$, c. à. d. $\overline{P M}^2 = \overline{M C}^2$ moins $\overline{P C}^2$, on considère sans doute une certaine relation des grandeurs homogènes $P M$, $P C$. Cependant il est manifeste que cette relation n'est point une raison, attendu que la comparaison des quantités ne se fait, qu'au moyen du rayon $M C$, qui est une troisième grandeur homogène, prise hors des quantités $P M$, $P C$ qu'on compare. La même chose a lieu dans toutes les espèces de relations, qu'on représente en Algèbre par des Equations.

§. 2. Les quantités homogènes pouvant donc être rapportées les unes aux autres de plusieurs manières différentes, il faut spécifier plus particulièrement la relation qui constitue le caractère distinctif de la raison. Voici comment Mr. Leibnitz, à qui on est redevable de cette remarque, définit la raison ; La relation qui a lieu entre deux grandeurs homogènes, lorsqu'on fait servir la quantité de l'une à déterminer la quantité de l'autre, indépendamment de toute autre troisième grandeur homogène quelconque. Cette définition caractérise la raison parce qu'elle a de plus essentiel. Une raison a lieu, lorsque comparant deux grandeurs homogènes A & B , qu'on nomme termes, la quantité de l'un des termes B , prise pour mesure connue & fixée, sert à déterminer la quantité de l'autre terme homogène A . Il existe par conséquent une raison entre les grandeurs homogènes A & B , entant que la quantité du terme B , prise pour unité ou mesure, suffit à faire connoître la quantité du terme A , sans qu'il soit besoin de faire entrer dans la détermination une autre grandeur quelconque, qui ne résulte point de la comparaison des deux termes A & B . D'où l'on voit, que la raison est la plus simple de toutes les relations.

§. 3. Une raison est rationnelle ou commensurable, lorsque les termes de la raison M & N sont des grandeurs commensurables entr'elles ; & la raison est nommée incommensurable, lorsque ces mêmes termes se trouvent dans le cas de l'incommensurabilité l'une à l'égard de l'autre. (§. 6. & 7. Def. 1).

Les



DEFINITIONS.

Les raisons qui ont lieu entre les nombres 3 & 7 ou 8 & 11 &c. sont des raisons rationnelles, & au contraire celles qui subsistent entre les nombres 1 & $\sqrt{2}$, 3 & $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ & $\sqrt{5}$ sont autant de raisons incommensurables.

§. 4. L'antécédent d'une raison M à N est le premier des deux termes qu'on compare; & l'autre est nommé son conséquent.

De plus on représente la raison, qui se trouve entre deux grandeurs M & son conséquent N, en cette manière.

M : N Caractéristique qu'on énonce, la raison de l'antécédant M au conséquent N; ou simplement la raison de M à N.

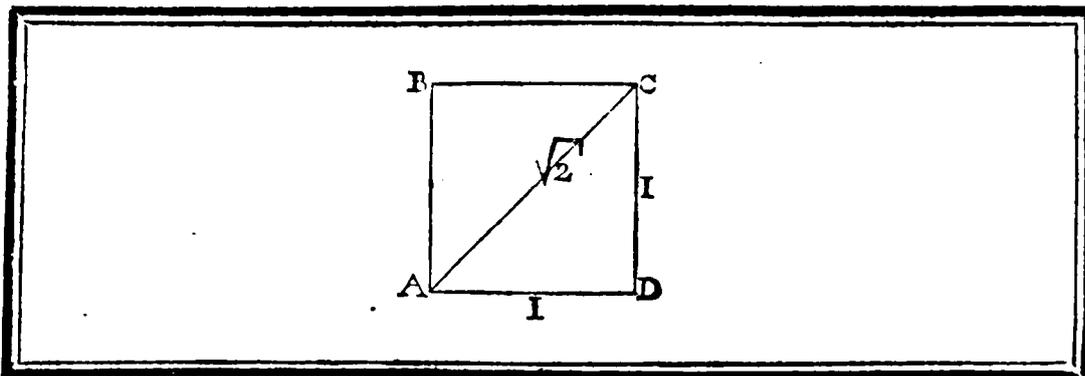
§. 5. On appelle exposant de la raison, le quotient qui résulte de la division de l'antécédent M par son conséquent homogène N. Ainsi l'exposant de la raison 6 : 2 est $\frac{6}{2} = 3$; celui de la raison 5 : 7 est $\frac{5}{7}$. On donne à ce quotient le nom d'exposant, parcequ'il expose combien de fois le conséquent contient son antécédent, ou qu'il y est contenu.

§. 6 Les raisons incommensurables ont des exposans, entant qu'on généralise la notion de la division, & qu'on soumet les quantités incommensurables à ses opérations; ce qui peut se faire. Car quoiqu'on ne puisse diviser effectivement 1 par $\sqrt{2}$; on peut cependant représenter le résultat de cette division arithmétiquement, sous la forme de la fraction $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $1 : \sqrt{2}$, (qu'on énonce un divisé par racine de deux), que la Géométrie fait exprimer par des lignes.

Ainsi elle représente l'expression $1 : \sqrt{2}$, par le rapport du côté (AB) à la diagonale (AC) du carré.

§. 7. Il y a donc des exposans rationnels & d'irracionnels, selon que les termes de la raison sont de l'un ou de l'autre genre. En général, de quelque nature que puissent être les grandeurs qui forment la raison, on représentera toujours son exposant sous la forme d'une fraction, où l'antécédent devient le numérateur & le conséquent le dénominateur.

Conformément à ce principe, l'exposant de la raison qu'il y a entre le diamètre D & la circonférence P, sera représenté par la fraction $\frac{D}{P}$ c. à. d. D divisé par P.



D E F I N I T I O N S .

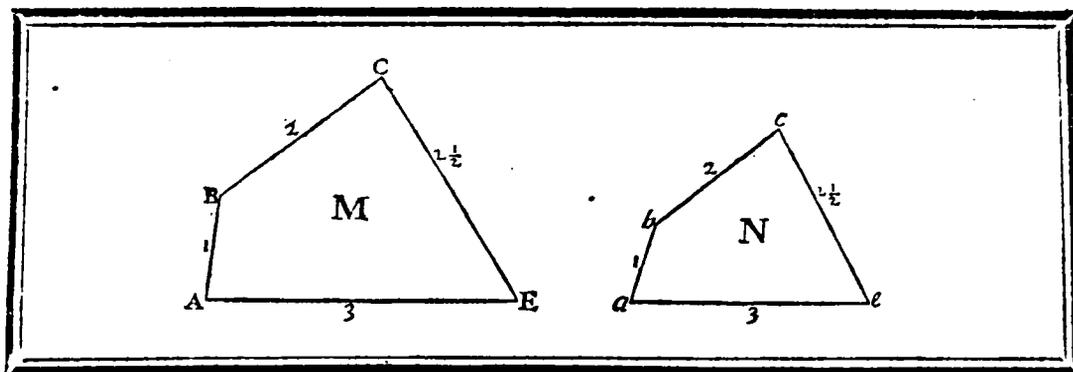
§. 8. La définition de l'exposant donne à connoître qu'il règne une correspondance intime ; ou plutôt une identité , entre les raisons & les fractions. Car les unes aussi bien que les autres supposent la division de la quantité en parties soit rationnelles , soit irrationnelles ; pourvu qu'on se forme une notion plus générale de la division , qui soit applicable aux quantités non-rationnelles. Une fraction n'est autre chose qu'une Partie qui se rapporte au Tout , comme le numérateur au dénominateur , & par-là elle représente en même tems une raison. La fraction $(\frac{2}{3})$ deux tiers par exemple , signifie deux parties d'un Tout partagé en trois parties. Or deux parties sont visiblement à trois parties (c. à. d. au Tout représenté par l'unité) comme le nombre deux est au nombre trois. Par conséquent la raison de $\frac{2}{3} : 1$ est la même que la raison $2 : 3$, & il n'y a d'autre différence , sinon que dans le premier cas la raison est exprimée par la comparaison d'une partie à l'unité , & dans le second par celle d'un nombre entier à un autre nombre entier.

De la même manière , lorsqu'on affirme que le côté (AB) du quarré est $\frac{1}{2}$ de la diagonale (AC) ; on ne dit autre chose , sinon , que le côté du quarré considéré comme partie , se rapporte à la diagonale considérée comme unité & Tout , de la même manière , que l'unité se rapporte à la racine quarrée du nombre 2.

§. 9. Cette conformité de la fraction & de la raison , a engagé Mr. Leibnitz à les représenter l'une & l'autre par le même signe ; tellement qu'en voyant $2 : 3$, on peut dire , la raison du nombre 2 au nombre 3 , ou bien la fraction deux tiers , ou ce qui revient au même , deux divisé par trois.

§. 10. Ces principes faisant voir que l'exposant d'une raison ($2 : 3$) se rapporte à l'unité de la même manière que l'antécédent (2) se rapporte à son conséquent (3) , ou bien le numérateur (2) à son dénominateur (3) ; il est clair qu'une raison est déterminée par son exposant ; & que les raisons sont égales ou les mêmes , lorsque leurs exposans sont les mêmes. Par ex. La raison de $6 : 7$ est la même que la raison de $24 : 8$; parceque l'exposant $6 : 2$ (6 divisé par 2) , est égal à l'exposant $24 : 8$ (24 divisé par 8).

§. 11. Comme les raisons qui ont les mêmes exposans sont égales ; celles qui ont des exposans différens doivent être nommées inégales : & en particulier , une raison plus grande est celle



D E F I N I T I O N S.

celle dont l'exposant est plus grand, & une raison plus petite celle dont l'exposant est moindre.

La raison de 7 : 3 est > la raison de 7 : 4 parce que sept tiers est une plus grande quantité que sept quarts.

§. 12. Deux raisons égales s'appellent une proportion. Selon Mr. Leibnitz on l'exprime au moyen du signe d'égalité, de cette manière

$$6 : 2 = 24 : 8.$$

Caractéristique qu'on peut énoncer, la raison de 6 à 2 est égale à la raison de 24 à 8 ; ou bien, 6 est à 2 comme 24 est à 8. Et puisque 6 : 2 représente aussi une fraction, la même expression peut être expliquée ainsi. L'exposant (6 divisé par 2) de la première raison est égal à l'exposant (24 divisé par 8) de la seconde raison.

§. 13. On nomme semblables des sujets dont les déterminations intrinsèques sont les mêmes, autant qu'il est possible d'en juger par ce qu'on trouve dans le sujet même, sans employer des moyens de comparaison externes.

La similitude supposant donc une parfaite identité à l'égard de toutes les déterminations qui se trouvent dans le sujet, & une abstraction totale de toutes celles qu'on ne rencontre que hors du sujet ; on ne conçoit dans les sujets semblables qu'une grandeur relative, cela veut dire, une grandeur qui se rapporte à une mesure ou unité prise dans le sujet même qu'on considère comme semblable à un autre.

Ainsi deux figures M & N sont semblables, quand elles n'offrent aucune différence, ni dans la forme des lignes qui en font les limites, ni dans leur nombre, ni dans leur inclinaison, ni enfin dans leur grandeur relative, c. à d. dans cette grandeur qu'on assigneroit à leurs différentes parties, en les rapportant à des grandeurs intrinsèques correspondantes, comme à des unités.

Par ex. Si prenant dans la figure M le côté AB pour unité on trouve

$$BC = 2, \quad CE = 2\frac{1}{2}, \quad AE = 3$$

On trouvera pareillement dans la figure N

$$bc = 2, \quad ce = 2\frac{1}{2}, \quad ae = 3$$

pourvu qu'on prenne pour unité le côté ab, qui correspond au côté AB.

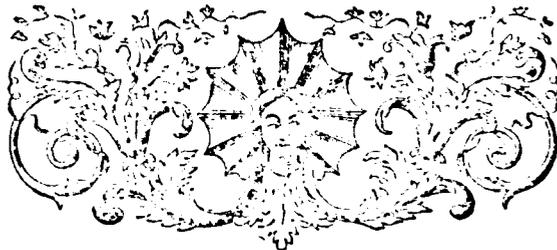
D E F I N I T I O N S .

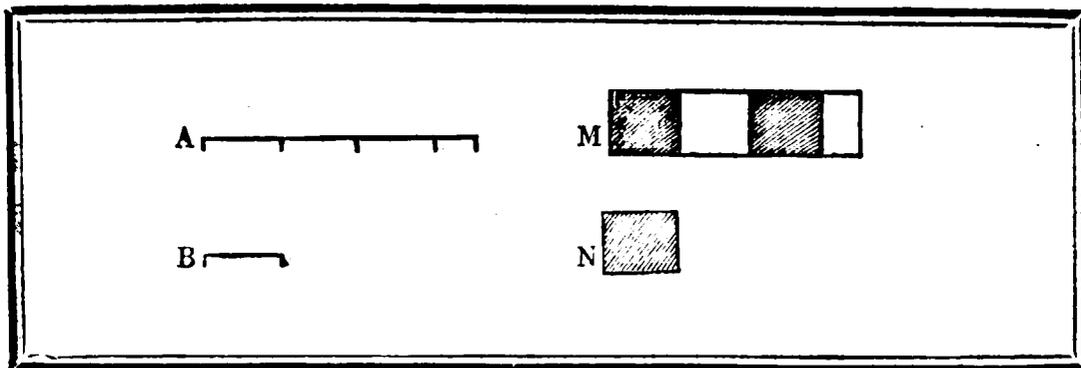
§. 14. Une raison est donc semblable à une autre raison ; lorsque leur grandeur relative est la même , ou bien lorsque leurs exposans sont identiques. Car hors des exposans ces sujets ne présentant à l'Esprit aucune autre détermination intrinsèque ; ils ne peuvent manquer d'être parfaitement semblables , aussitôt que ces exposans sont les mêmes.

§. 15. Les raisons égales sont donc en même tems des raisons semblables. Par conséquent presque la proportionalité consiste dans l'égalité des deux raisons , qui se trouvent entre le premier & le second terme , & entre le troisième & le quatrième ; on est fondé à définir la Proportion par une similitude de deux raisons.

§. 16. C'est cette égalité des exposans , que les Géomètres modernes ont embrassée comme le caractère distinctif de la proportionalité , qu'ils ont mis à la place de celui que propose Euclide dans la V. Définition de ce Livre , & dont ils déduisent avec une grande facilité toute la doctrine des proportions , au moyen de l'Arithmétique numérique & littérale ; entant que cette science si fert amplifiée aujourd'hui , manie avec la même facilité les quantités entières , fractionnaires & irrationnelles. En effet , l'Arithmétique , celle surtout qui emploie des Lettres plutôt que des nombres , est très propre à expliquer les affections générales des quantités. C'est sa nature de représenter des quantités dénuées de toutes ces déterminations particulières , qui ne doivent pas être prises en considération , & de nous montrer leurs affections & leurs rapports dans la plus grande généralité. Les lignes ne remplissent pas si bien ce but , que les caractères : néanmoins les Géomètres anciens n'ont pas laissé d'employer des lignes pour expliquer la doctrine des proportions. N'ayant aucune idée sur le calcul littéral que nous avons aujourd'hui , ne connoissant pas même les avantages d'une caractéristique numérique semblable à la nôtre , & regardant d'ailleurs l'unité comme le plus petit nombre , ils ne pouvoient guères faire autrement , que de se renfermer dans l'Arithmétique des entiers , sans pouvoir toucher à celle des fractions & des irrationnels. C'est - là , ce qui les a obligé d'expliquer par des lignes , leurs raisonnemens abstraits sur la proportionalité en général. Mais s'il se trouve quelque inconvenient dans cette méthode , elle donne l'avantage réel , qu'on peut s'instruire de la doctrine des proportions , sans savoir les regles du Calcul littéral & même l'Arithmétique ; avantage qui peut faire plaisir aux Commerçans.

C'est pour cette raison que nous n'avons pas voulu abandonner cette méthode ; contents d'avoir fait connoître la marche des Auteurs modernes , nous tâcherons de repandre au jour sur celle d'Euclide , afin qu'un lecteur médiocrement attentif puisse le suivre , sans le secours des principes d'une autre science.





D E F I N I T I O N S .

VI.

Deux grandeurs sont dites avoir une raison l'une à l'autre; lorsqu'il est possible, qu'un multiple de la plus petite, égale ou surpasse la plus grande.

§. 1. Il y a raison entre les lignes A & B; parceque la ligne B, par ex: prise trois fois & demi, égale la ligne A, & prise quatre fois, la surpasse. Il y a pareillement une raison entre les Rgles M & N; parceque le Rgle N pris trois fois & demi, égale le Rgle M, & que pris un plus grand nombre de fois, il le surpasse.

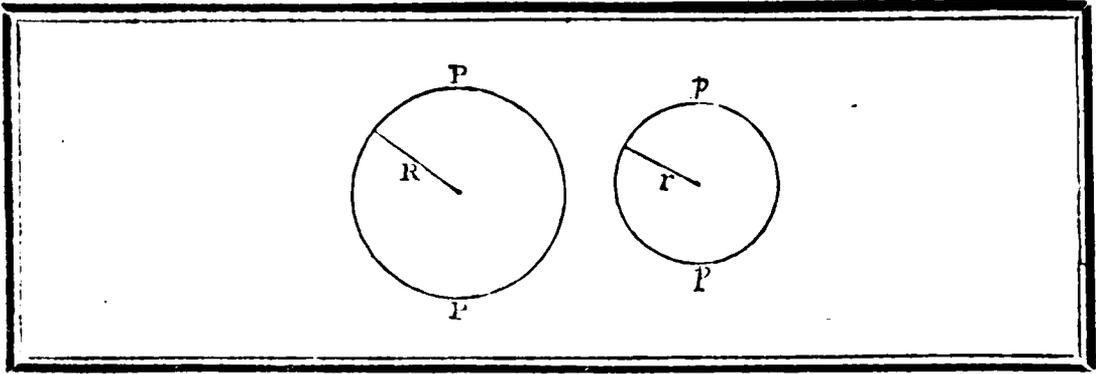
Au contraire, il n'y a pas de raison entre la ligne B & le Rgle M, attendu que la ligne B, répétée tant de fois qu'on voudra, ne peut jamais produire une grandeur qui égale ou qui surpasse le Rgle M. La raison ne peut donc avoir lieu, qu'autant qu'on compare des grandeurs homogènes ou du même genre, c. à. d. des nombres à des nombres, des lignes à des lignes, des surfaces à des surfaces, & des solides à des solides.

§. 2. En vertu de cette définition, il n'y a point de raison entre une grandeur finie & une infinie, encore qu'on les suppose de même genre. Car une grandeur conçue infinie, est conçue sans limites; par conséquent une grandeur finie répétée tant de fois que l'on voudra, (pourvu que le nombre des répétitions soit déterminé) ne peut jamais parvenir, ni à égaler, ni à surpasser une telle grandeur infinie.

V.

On dit que des grandeurs sont en même raison la première à la seconde & la troisième à la quatrième: lorsque des équimultiples quelconques de la première & de la troisième, comparés à d'autres équimultiples quelconques de la seconde & de la quatrième, chacun à chacun (c. à. d. le multiple du I terme à celui du II, & le multiple du III terme à celui du IV.) se trouvent constamment ou plus grands, ou égaux, ou plus petits, de part & d'autre, selon quelque multiplication que ce puisse être.

§. 1. Euclide voulant adoucir dans cette définition un caractère général de la proportionnalité



D E F I N I T I O N S.

de quatre grandeurs, s'arrête à celui qu'offrent les équi-multiples des antécédens, comparés à des équi-multiples des conséquens. Et il prévient des termes qu'il employera dans la suite, en disant qu'il nommera grandeurs proportionnelles ou en même raison, celles dont les équi-multiples ont une telle correspondance constante entr'eux, que les équi-multiples des antécédens, sont toujours à la fois ou plus grands, ou égaux, ou plus petits, que les équi-multiples des conséquens, comparés chacun à chacun, selon quelque multiplication que ce puisse être.

§. 2. Il suppose tacitement, qu'on lui accorde, qu'il y a en effet des grandeurs douées de cette correspondance des multiples, apparemment, parcequ'il a cru qu'on pouvoit s'en assurer aisément par la seule inspection de toutes les figures semblables. En effet, un rayon (r) par ex. étant à sa circonférence (p), comme un autre rayon (R) à la sienne (P), il est assez manifeste, que si le triple du premier rayon (r) est moindre que sa circonférence (p), le triple du second rayon (R) sera aussi moindre que la sienne (P). Item, que si le quadruple du premier rayon (r) est plus grand que sa circonférence (p): le quadruple du second rayon (R) sera aussi plus grand que la sienne (P). Et l'on voit que la même chose est vraie de tous les autres équi-multiples qu'on pourra prendre, soit des rayons, soit des circonférences. Les exemples numériques font voir pareillement, qu'il y a des grandeurs douées de la propriété énoncée dans la définition. Par ex. Les nombres 2 & 6 item 8 & 24, sont quatre grandeurs dans le cas de cette correspondance. Car si l'on multiplie les deux antécédens 2 & 8 par un même nombre quelconque M , & les deux conséquens 6 & 24, par un autre nombre quelconque N ; le multiple $2 M$ du premier antécédent, ne sauroit être $=$, ou $>$, ou $<$ que le multiple $6 N$ de son conséquent, sans que le multiple du second antécédent $8 M$, ne soit en même tems $=$, ou $>$, ou $<$ que le multiple $24 N$ de son conséquent. Car il est évident

$$\begin{array}{l}
 \text{Si } 2 M \text{ est } = \text{ à } 6 N, \\
 2 M + 2 M + 2 M + 2 M \text{ est aussi } = \text{ à } 6 N + 6 N + 6 N + 6 N. \text{ c. à. d. } 8 M = 24 N. \\
 \text{Item} \quad \text{Si } 2 M \text{ est } > 6 N, \text{ alors} \\
 2 M + 2 M + 2 M + 2 M \text{ est aussi } > 6 N + 6 N + 6 N + 6 N. \text{ c. à. d. } 8 M > 24 N. \\
 \text{\& enfin} \quad \text{Si } 2 M \text{ est } < 6 N, \text{ alors} \\
 2 M + 2 M + 2 M + 2 M \text{ est aussi } < 6 N + 6 N + 6 N + 6 N. \text{ c. à. d. } 8 M < 24 N.
 \end{array}$$

Cela

D E F I N I T I O N S.

Cela étant ainsi, on doit dire, selon Euclide, que la raison du nombre 2 au nombre 6, est la même que celle du nombre 8 au nombre 24; ou bien, que les quatre nombres 2, 6, 8, 24 sont proportionels (voyez la Def. VI).

§. 3. Au contraire les nombres 2 & 3, item 7 & 8, n'ayant pas cette propriété, ne doivent point recevoir la même dénomination. Car si l'on multiplie les antécédens par 3, & les conséquens par 2, il en résulte les quatre multiples 6, 6, 21, 16; où le multiple 6 du I antécédent est égal au multiple 6 de son conséquent; sans que 21, multiple du II antécédent, soit égal à 16 multiple de son conséquent. D'où il suit que 2 & 3, item 7 & 8, ne doivent point être appellés des nombres en même raison; ni tous les quatre, des nombres proportionels. C'est là le sens de cette Définition, qui a si fort embarrassé les Commentateurs, que plusieurs ont cru devoir lui substituer la XX du VII Livre, relative à la proportionalité des seuls nombres rationels, qui paroît plus simple: sçavoir, que quatre nombres sont proportionels, lorsque le premier est le même multiple du second, ou la même partie soit aliquote soit aliquante, que le troisième est du quatrième.

Nous allons faire quelques remarques, qui serviront à lever ces difficultés.

§. 4. On suppose qu'Euclide n'a pas jugé convenable de se servir de cette Définition de la proportionalité du VII Livre, parcequ'il avoit en vûe d'établir dans le V la doctrine générale des proportions pour toutes sortes de grandeurs, tant rationelles, qu'irrationelles, & même celles dont le rapport est jusques ici inexprimable en nombres, tel que celui du diamètre à la circonférence. En effet, personne ne doutant que la proportionalité ne puisse subsister entre des grandeurs incommensurables, & même celles dont le rapport échappe aux nombres finis, puisqu'elle a lieu entre les côtés de tous les quarrés & leurs diagonales, les diamètres de tous les cercles & leurs circonférences, l'Elémentateur auroit eu tort de fonder cette Théorie sur une Définition particulière, relative aux seules grandeurs rationelles, vû que ces sortes de grandeurs ne sont ni des multiples les uns des autres, ni des parties aliquotes, ni des parties aliquantes. Son dessein exigeant donc une propriété plus générale de la proportionalité, il lui a plu de choisir celle de la correspondance des équimultiples, comme applicable, à toutes les grandeurs proportionelles de quelque nature qu'elles puissent être; réservant la Définition citée du VII Livre pour la seule doctrine des nombres rationels, qui sont dans le cas d'être toujours ou des multiples les uns des autres, ou des parties aliquotes, ou des parties aliquantes.

§. 5. Pour ce qui est du principe de cette V Définition, on ne peut douter qu'Euclide ne l'ait tiré de la considération de la similitude & de ses propriétés, au moins si la VIII Définition est de lui, laquelle dit en propres termes que la proportion consiste dans la similitude des raisons. On ne pouvoit rencontrer plus heureusement: la notion de la similitude est la véritable source où il faut puiser les principes généraux sur la proportionalité. Il seroit aisé de le faire voir, si c'étoit ici le lieu de développer cette notion dans toute son étendue. Nous nous dispensons d'entrer dans ce détail. On sent assez, par la seule idée confuse de la similitude, que les proportions résultent de la comparaison des grandeurs correspondantes qui résident dans les figures semblables, ou plus généralement, dans les Sujets, dans

D E F I N I T I O N S .

les Etres semblables. Il y a proportion entre les côtés de tous les quarrés & leurs diagonales ; entre tous les diamètres & leurs circonférences : pourquoi ? Sans doute , parceque tous les quarrés & tous les cercles sont des figures semblables. De même il y a proportion entre les quatre termes de deux raisons , parceque ces raisons forment deux sujets semblables , où les antécédens & les conséquens se correspondent , comme dans le cas particulier de deux cercles , les rayons correspondent aux circonférences ; ou dans celui de deux quarrés , les côtés aux diagonales.

§. 6. Si Euclide avoit eu une notion distincte de la similitude , & qu'il eût voulu remonter aux premières sources métaphysiques pour en déduire la doctrine de la proportionalité , il auroit pu se contenter de la Définition VIII , qui fait consister la proportion dans la similitude des raisons. En suivant cette route , les V & VI Définitions devoient des axiomes , ou des théorèmes préliminaires , démontrables de quelques vérités générales plus simples , admises comme notions communes. Ce eût été sans doute la véritable manière de traiter ce sujet ; la doctrine des proportions étant plus étendue que la Géométrie , indépendante des principes de cette science , & intimement liée aux vérités universelles qui découlent de la nature de l'Etre considéré dans toute sa généralité.

§. 7. Mais ce Géomètre n'a point fait usage du principe qu'il avoit entre les mains , non plus que les Auteurs qui ont manié le même sujet après lui. Il a pris le parti de former du caractère de la correspondance des équi-multiples , une Définition de nom , comme il étoit en droit de le faire , puisqu'en Logique il est permis de donner à une chose douée d'une certaine propriété , un certain nom : & ce parti a produit deux inconvéniens , 1°. Qu'on trouve à la tête de ce V Livre deux Définitions de la proportionalité , la V & la VI , qui peuvent passer pour une seule , & la VIII , ce qui est contraire à la précision de la méthode , qui n'en admet qu'une. 2°. Que la V Définition étant purement nominale , on n'en peut raisonner avec sûreté , qu'autant qu'on suppose la possibilité de la chose définie , c. à. d. autant qu'on suppose qu'il y a effectivement des choses douées du caractère énoncé dans la Définition. A la rigueur , cette possibilité de la chose définie doit être démontrée en Géométrie. Euclide lui-même en donne l'exemple. Il ne raisonne point des Définitions nominales , du triangle équilatéral , par ex. , ou du quarré , avant qu'il ait fait voir la possibilité de ces figures , en donnant leur construction. Conformément à cette maxime , avant de se servir de la Définition V , il auroit dû faire voir qu'il est possible qu'il y ait des grandeurs telles , que les équi-multiples des antécédens , comparés aux équi-multiples des conséquens , soient toujours ou égaux , ou plus grands , ou plus petits : & dès-lors ayant satisfait aux loix de sa propre méthode , il auroit prévenu toutes les difficultés , que cette petite omission fait naître dans l'esprit de ceux qui ne connoissent pas assez les règles relatives à cette matière.

§. 8. Au reste , si l'on adopte comme première notion de la proportionalité la VIII Définition de ce Livre , ou ce qui revient au même , si avec la plupart des Auteurs modernes on la fait consister dans l'identité des exposans de deux raisons (R : P & r : p) quel'on compare , on peut se convaincre aisément , même sans calcul , que l'inverse de la proposition contenue dans la V Définition :

D E F I N I T I O N S.

inition, découle de cette notion de la proportionalité, à sçavoir, si quatre grandeurs R & P , r & p , sont proportionnelles, les équimultiples de la I & de la III sont constamment ou égaux, ou plus grands, ou plus petits, que d'autres équimultiples de la II & de la IV, comparés chacun à chacun.

Car les deux raisons $R : P$ & $r : p$ étant semblables, en vertu de cette Définition, il suit que R se rapporte à P considéré comme Tout ou comme partie, de la même manière que r se rapporte à p considéré pareillement ou comme Tout ou comme partie; tellement que les moindres termes, R & r par exemple, sont des parties semblables des plus grands P & p . Les deux raisons $R : P$ & $r : p$ forment donc deux sujets semblables, de la même manière que deux circonférences, & deux rayons tirés à ces circonférences, forment deux figures semblables.

§. 9. Mais puisque la diversité & la dissimilitude, ne peuvent s'introduire: où l'on ne suppose que des principes d'identité & de similitude, on ne peut refuser de recevoir au nombre des axiomes évidens par les notions communes, cette vérité, que des opérations semblables, faites semblablement, sur des Sujets semblables, doivent produire des résultats semblables. Par conséquent, si on multiplie les antécédens (R & r) des deux raisons semblables, par le même nombre m , & les conséquens P & p par le même nombre n , les résultats ne peuvent manquer de rester dans le même cas de similitude; & la comparaison des équimultiples des antécédens aux équimultiples des conséquens, doit toujours conduire aux mêmes rapports d'égalité, de majorité, ou de minorité, selon quelque multiplication que ce puisse être. Car d'abord les raisons $R : P$, & $r : p$ sont semblables par l'hypothèse, & les opérations qui produisent les équimultiples de chaque couple de termes, sont semblables, puisqu'on les multiplie par le même nombre. De plus, entant que ces équimultiples sont formés des termes correspondans c. à. d. des antécédens & des conséquens, les opérations se font semblablement dans des Sujets semblables. Par conséquent les résultats doivent rester dans cet état de similitude, tellement que ce que le premier antécédent est devenu comparativement à son conséquent, le second antécédent le soit devenu comparativement au sien. D'où il suit que, s'il y a une égalité entre le multiple du premier antécédent & celui de son conséquent, la même égalité aura lieu entre l'équimultiple du second antécédent & celui de son conséquent, comme on l'a fait voir pour le cas particulier du §. 2.

§. 10. Au reste, cette proposition n'est qu'un cas particulier, de cette autre plus générale, qui pourroit se démontrer des mêmes principes, sçavoir, si quatre grandeurs A , B , C , D , sont en proportion, & que quatre autres a , b , c , d , le soient pareillement, les produits Aa , Bb , Cc , Dd , résultant de la multiplication des termes correspondans, seront aussi en proportion.

Car 1^o. la raison $A : B$ est semblable à la raison $C : D$. 2^o. Les termes A & a , B & b , C & c , D & d , se correspondent semblablement dans les deux proportions; 3^o. Les produits Aa , Bb , Cc , Dd résultent semblablement de la même opération. Par conséquent la raison entre le premier produit Aa & le second Bb , doit nécessairement se trouver semblable à celle qui a lieu entre le troisième produit Cc , & le quatrième Dd ; ou bien ces qua-

D E F I N I T I O N S .

tre produits doivent être en proportion. Si on suppose $a = c$ & $b = d$, on tombe dans le cas particulier qu'on a traité dans le §. précédent. (Voyez App. Prop. 3).

§. 11. On déduit des mêmes principes la liaison qui règne entre les vérités contenues dans les V & VIII Définitions; à sçavoir,

Que deux raisons $R : P$ & $r : p$ sont semblables, si les équimultiples de leurs antécédens (mR & mr) correspondent tellement aux équimultiples (nP & np) de leurs conséquens, chacun à chacun, qu'il y ait toujours de part & d'autre ou égalité, * ou majorité, ou minorité, selon quelque multiplication que ce puisse être.

Car puisque mR est $=, >$, ou $< nP$, selon que mr est $=, >$, ou $< np$; il est clair que mR est comparativement à nP , ce que mr est comparativement à np . Et d'autant que cette correspondance est constante, la raison de $mR : nP$ doit être semblable à la raison de $mr : np$. Or qui ne sent la vérité de ce principe, que, lorsque les mêmes opérations, faites semblablement, ne produisent aucune différence dans deux sujets sur lesquels elles se font, ces sujets doivent être semblables? Par conséquent, puisque dans ce cas la multiplication des deux antécédens par un même nombre, aussi bien que celle des deux conséquens par un autre même nombre, constituent des opérations identiques faites semblablement, il faut bien que la raison $R : P$ soit semblable à la raison de $r : p$. Autrement il n'auroit de la diversité dans les résultats des deux multiplications faites semblablement; ce qui est contraire à la supposition.

Ce sont là à peu près les principes généraux, qui peuvent servir à réduire aux notions communes les vérités contenues dans ces Définitions. Il ne nous est pas permis d'approfondir davantage cette matière en ce lieu; il faudroit composer un Traité en forme sur la similitude, ce qui nous écarteroit trop de la route qu'Euclide a suivie:

§. 12. Remarquez encore que ce qui est vrai de la correspondance des multiples, est vrai par rapport à celle des sousmultiples, des Puissances semblables, des Radicaux semblables &c. Mais il paroît assez qu'Euclide n'a pas voulu embrasser cette généralité, pour ne pas s'éloigner de la clarté des notions communes: & en particulier on peut croire qu'il a préféré l'usage des multiples à celui des sousmultiples, parcequ'il n'auroit pu prescrire de prendre des sousmultiples, sans montrer auparavant comment on doit partager une grandeur en parties égales; au lieu que la formation des multiples n'auroit pas besoin d'un pareil principe. Ce Géomètre étoit en droit de demander qu'on pût doubler, tripler &c. ou prendre tel multiple qu'on voudroit d'une grandeur, au lieu qu'il devoit apprendre par la résolution d'un problème, comment on peut retrancher une partie aliquote quelconque d'une ligne donnée: & la résolution de ce problème supposant la doctrine de la similitude, elle ne pouvoit être donnée que dans la IX Prop. du VI Livre.

VI.

On nommera proportionnelles, les grandeurs qui sont en même raison.

VII.

* A la rigueur, le seul cas de l'égalité pourroit suffire. Car si $mR = nP$ & $mr = np$ on en peut déduire que $n : m = R : P = r : p$. (Voyez Append. Prop. 4).

D E F I N I T I O N S.

VII.

Mais si dans cette comparaison des équi-multiples, le multiple de la première surpasse le multiple de la seconde, sans que le multiple de la troisième surpasse le multiple de la quatrième, on dira que la raison de la première à la seconde, est plus grande que la raison de la troisième à la quatrième.

§. 1. Comme il y a des raisons égales, il doit y en avoir d'inégales; & par conséquent de plus grandes & de plus petites.

Lorsqu'on juge de la raison par son exposant, on dit qu'une plus grande raison est celle qui a un plus grand exposant, ou bien qu'une raison $A : B$ est $>$ qu'une autre $a : b$, lorsque l'antécédent de la première A contient plus de fois son conséquent B ; que l'antécédent a de la seconde ne contient le sien b ; ou bien encore, lorsque l'antécédent de la première raison est une plus grande partie de son conséquent, que l'antécédent de la seconde ne l'est du sien.

Ainsi la raison de $12 : 3$ est $>$ la raison de $8 : 4$, parceque l'antécédent 12 contient son conséquent 3 , quatre fois; au lieu que l'antécédent 8 , ne contient son conséquent 4 , que deux fois. Tout au contraire

la raison de $3 : 12$ est $<$ la raison de $4 : 8$.

Parceque l'antécédent 4 est la moitié de son conséquent 8 , au lieu que l'antécédent 3 n'est que le quart de son conséquent 12 . La même chose est manifeste par les exposans. Ainsi

$12 : 3 > 8 : 4$, c. à d. 12 divisé par 3 est $>$ 8 divisé par 4 , ou bien trois, exposant de la première raison est $>$ deux, exposant de la seconde raison. De même

$3 : 12 < 4 : 8$ parceque $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}$.

§. 2. Le principe des exposans est donc très commode pour distinguer immédiatement si une raison est égale à une autre raison, ou si elle est plus grande, ou moindre. Cependant l'Auteur de ces Élémens, qui n'a pas fait usage de la doctrine des exposans, nous propose un autre caractère de la majorité des raisons. Selon lui, une raison est plus grande, lorsqu'un certain multiple du premier antécédent, peut surpasser le multiple du conséquent, sans qu'un pareil multiple du second antécédent surpasse le multiple de son conséquent.

Les raisons $3 : 2$ & $11 : 9$ sont dans ce cas. Car si on multiplie les antécédens par 9 & les conséquens par 13 , il en résulte $27, 26$; $99, 117$;

$$\begin{array}{r} 3 : 2 \quad ; \quad 11 : 9 \\ 9 \quad 13 \quad \quad 9 \quad 13 \\ \hline 27 : 26 \quad ; \quad 99 : 117 \end{array}$$

D E F I N I T I O N S.

où la correspondance des multiples ne se soutient pas, le premier antécédent 27 se trouvant plus grand que son conséquent 26, pendant que le second antécédent 99 est moindre que son conséquent 117.

§. 3. Pour reconnoître aussitôt l'inégalité de deux raisons $A : B$ & $C : D$. par ce caractère de la non-correspondance des multiples, on choisira pour multiplicateurs les deux termes de l'une des deux raisons, par ex: $C : D$, & on multipliera les antécédens A & C , par le conséquent D de la raison choisie $C : D$; & les deux conséquens B & D , par l'antécédent C de la même raison, en cette manière:

$$\begin{array}{r} A : B ; C : D \\ D : C ; D : C \\ \hline A.D : B.C ; C.D : D.C \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 : 5 ; 7 : 9 \\ 9 : 7 ; 9 : 7 \\ \hline 27 : 35 ; 63 : 63 \end{array}$$

Cela fait, les deux produits $C.D$ & $D.C$ se trouveront égaux, pendant que les deux autres $A.D$ & $B.C$ sont inégaux. Et en particulier, le multiple d'un des antécédens est plus grand que celui de son conséquent, pendant que le multiple de l'autre est égal au sien, si l'on choisit pour multiplicateurs les termes de la plus petite raison. Au contraire, le multiple de l'antécédent est moindre que celui de son conséquent, pendant que les autres sont égaux, si l'on prend pour multiplicateurs les termes de la plus grande raison.

Par ex. La raison de $7 : 5$ est $>$ la raison de $11 : 9$, Si l'on multiplie donc les antécédens 7 & 11 , par 9 , conséquent de la plus petite raison; & les conséquens 5 & 9 , par 11 antécédent de la même raison;

$$\begin{array}{r} 7 : 5 ; 11 : 9 \\ 9 : 11 ; 9 : 11 \\ \hline \end{array}$$

il en résulte ces quatre nombres, $63 : 55 ; 99 : 99$ où 63 est $>$ 55 pendant que 99 est $= 99$.

§. 4. Au contraire, si l'on multiplie les deux antécédens par 5 & les deux conséquens par 7 , termes de la plus grande raison,

$$\begin{array}{r} 7 : 5 ; 11 : 9 \\ 5 : 7 ; 5 : 7 \\ \hline \end{array}$$

les produits sont $35 : 35 ; 55 : 63$ où 35 est $= 35$, pendant que 55 est $<$ 63 .

§. 5. Si l'on veut avoir des multiplicateurs, qui produisent quatre multiples tels que le premier soit plus grand que le second, pendant que le troisième est moindre que le quatrième, il faut prendre pour multiplicateurs les termes d'une raison moyenne entre les deux raisons proposées, & multiplier les antécédens par le conséquent de cette raison moyenne, & les conséquens par son antécédent.

Par ex: L'exposant de la raison $7 : 5$. est $\frac{7}{5}$, & celui de la raison $11 : 9$ est $\frac{11}{9}$, ou bien $\frac{12}{9} = \frac{6\frac{1}{2}}{5}$ (en multipliant & réduisant par 5). Par conséquent il faut prendre une raison $<$ celle de $7 : 5$ & $>$ celle de $6\frac{1}{2} : 5$. Or il est évident que tous les nombres assignables entre les

limi-

D E F I N I T I O N S .

limites $6\frac{1}{2}$ & 7 fournissent une telle raison, en les comparant au nombre 5. Qu'on s'arrête par ex: à la raison de $6\frac{1}{2} : 5$, ou $6\frac{1}{2} : 5$, qui se réduit à la raison de 13 : 10, on a deux multiplicateurs satisfaisans à la question. Car le premier produit 35, est > le second produit $31\frac{1}{2}$, pendant que le troisième 55 est < le quatrième 57; voici le calcul;

$$\begin{array}{cccc} 7 & : & 5 & ; & 11 & ; & 9 \\ 5 & & 6\frac{1}{2} & & 5 & & 6\frac{1}{2} \\ \hline 35 & : & 31\frac{1}{2} & ; & 55 & : & 57 \end{array}$$

VIII.

La proportion est une similitude des raisons. (Voyez Def. V §. 5 & 6).

IX.

La proportion consiste au moins en trois termes.

§. 1. La proportion consistant dans l'égalité de deux raisons, & chaque raison ayant deux termes, la proportion a proprement quatre termes, dont le premier & le quatrième sont appellés extrêmes, & le second & le troisième moyens. On regarde ces quatre termes comme n'en faisant que trois, quand le conséquent de la première raison tient en même tems lieu de l'antécédent de la seconde raison. C'est pour cela qu'on distingue les proportions en discrètes & en continues. Une proportion est discrète, lorsque les deux termes moyens sont inégaux, & elle est nommée continue, quand ces mêmes termes sont égaux.

Ainsi cette proportion $2 : 4 = 5 : 10$ est discrète, parceque les deux termes moyens 4 & 5 sont inégaux. Au contraire la proportion $2 : 4 = 4 : 8$ est du nombre des continues, à cause de l'égalité des termes moyens 4 & 4.

§. 2. Une suite de grandeurs en proportion continue, forme une progression Géométrique. Tels sont les nombres

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \text{\&c.}$$

De même

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \text{\&c.}$$

Dans ces deux suites il règne partout la même raison entre les deux termes qui se succèdent immédiatement, c. à. d.

$$\begin{array}{l} 1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 \text{ ou} \\ 1 : 3 = 3 : 9 = 9 : 27 = 27 : 81 \text{ \&c.} \end{array}$$

§. 3. On appelle termes équidistans d'une progression, deux termes qui se trouvent séparés par un même nombre d'autres termes. Ainsi dans la première de ces progressions, les termes 1 & 8, 8 & 64 sont équidistans, parceque de part & d'autre ils se trouvent séparés par deux termes intermédiaires.

§. 4. Cette

D E F I N I T I O N S .

§. 4. Cette Définition fait voir, qu'entre les termes équidistans, il se trouve toujours le même nombre de raisons égales, ou bien, que pour arriver de l'un des équidistans 1, à l'autre 8, il faut toujours passer par trois raisons égales 1 : 2, 2 : 4, 4 : 8; comme pour arriver du terme 8 à l'équidistant 64, il faut passer par les trois raisons 8 : 16, 16 : 32, 32 : 64 égales entr'elles & à chacune des trois précédentes. On démontrera en son lieu, que tous les termes équidistans d'une progression Géométrique sont en même raison. (Voyez l'Appendice de ce V Livre Prop. VI).

§. 5. On peut appeller raison primordiale d'une progression, celle qui se trouve entre les deux termes avec lesquels on a commencé à former la progression, ou qu'on regarde comme ayant servi à la commencer. Par exemple. Si on part de la raison de 1 : 2, pour faire comme 1 est à 2 ainsi 2 est à 4; & comme 2 est à 4 ainsi 4 est à 8 &c. on détermine la progression des nombres 1, 2, 4, 8, 16 &c. par les deux premiers termes 1 & 2 choisis arbitrairement; c'est donc cette raison qui se trouve entre ces deux premiers termes arbitraires 1 & 2, qu'on peut appeller la raison primordiale de cette progression.

Si l'on vouloit commencer la progression par les termes 1 & 4, par exemple, on formeroit d'abord la progression,

1, 4, 16, 64, 256, &c.

puis prenant les moyennes proportionnelles 2, 8, 32, 128 &c. entre chaque deux termes, qui se suivent immédiatement, on trouveroit la même progression.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 &c.

où il n'y a d'autre différence, sinon que dans ce dernier cas, on regarde la progression comme née de la raison primordiale 1 : 4. On pourroit prendre pour raison primordiale de cette même progression, telle autre raison qu'on voudroit; puisqu'au moyen de la Composition & Décomposition des raisons, dont il sera traité à la fin de ce Livre, on peut toujours, d'une raison primordiale quelconque, remonter ou descendre à toutes les autres raisons possibles.

X.

Si trois grandeurs sont proportionnelles, on dit que la première est à la troisième en raison doublée de la première à la seconde.

XI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, on dit que la première est à la quatrième en raison triplée de la première à la seconde. On dira de même qu'une raison est quadruplée, quintuplée, sextuplée &c. en augmentant d'une unité la dénomination de la raison, à mesure que la proportion sera poussée plus loin d'un terme.

§. 1. Par des grandeurs proportionnelles, il faut entendre des grandeurs en proportion continue (Def. IX. § 1), qui constituent une progression Géométrique, où les termes équidistans sont en même

D E F I N I T I O N S .

même raison. Toutes les raisons pouvant être considérées comme dérivées d'une raison primordiale quelconque, il a paru convenable aux Géomètres, de donner à ces raisons dérivées des dénominations qui indiquent leur dérivation de la raison primordiale. Ainsi, puisqu'on arrive au conséquent 4 de la raison 1:4, en passant par les deux raisons 1:2, & 2:4, on nomme cette raison de 1:4, une raison doublée de la raison primordiale de 1:2. Pareillement, comme partant de la même raison primordiale 1:2, on ne parvient au conséquent 64, de la raison dérivée 1:64, qu'en passant par les six raisons intermédiaires égales

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 = 32 : 64.$$

la raison de 1:64, est appelée une raison sextuplée de la raison primordiale 1:2.

Une raison A : B devient donc doublée, triplée, quadruplée, & en général multipliée d'une raison primordiale donnée a : b, selon le nombre des raisons intermédiaires toutes égales à la raison primordiale a : b, qui sont interposées entre les termes A & B.

§. 2. Pareillement, si entre les deux termes (1 & 64) d'une raison prise comme primordiale, on place un ou plusieurs termes (2, 4, 8, 16, 32), en sorte que ces termes moyens forment avec les extrêmes (1 & 64) appartenans à la primordiale, une progression continue, les raisons intermédiaires qui subsistent entre le premier terme (1) & chacun des moyens (2, 4, 8 &c.), sont appelées des raisons sousmultipliées de la raison primordiale des extrêmes. En particulier, quand il n'y a que deux raisons intermédiaires égales, on nomme l'une & l'autre sousdoublée de la raison des extrêmes; quand il y en a trois, chacune est appelée soustriplée de la même raison; & ainsi de suite à l'infini. Si par exemple on place entre les termes 1 & 64, le terme 8, on a deux raisons intermédiaires égales 1:8, & 8:64 entre celles des termes extrêmes; dont chacune est nommée sousdoublée de la raison de 1 à 64. Si entre les mêmes extrêmes 1 & 64, on place les deux moyens 4, & 16, il en résulte trois raisons intermédiaires égales 1:4=4:16=16:64, dont chacune est nommée soustriplée de la raison des extrêmes de 1 à 64.

Ainsi on voit en général que pour avoir une raison, sousquadruplée par ex., il faut établir entre les termes de la raison primordiale trois termes moyens en proportion continue; & que pour en avoir une sousquintuplée de la même raison, il est besoin d'en établir quatre, & de même à l'infini, toujours un terme de moins que n'est le nombre des raisons intermédiaires qui doivent être interposées.

§. 3. Au reste ces dénominations tirent leur origine de l'analogie qu'on remarque entre la manière selon laquelle une grandeur étendue résulte d'une autre grandeur étendue de même genre, & celle selon laquelle une raison peut naître d'une autre raison primordiale. On considère les raisons comme des quantités d'une espèce particulière, & toutes comme homogènes & comparables entr'elles; Car dans la contemplation des raisons, l'esprit ne s'arrête qu'à la relation, à la quantuplicité des termes, sans faire attention à ce qui peut leur convenir comme grandeurs d'une telle ou telle autre espèce. C'est pour cela qu'on se représente les raisons comme égales, & inégales, & comme étant susceptibles d'une multiplicité, & d'une sousmultiplicité les unes à l'égard des autres; Et on les conçoit ainsi, afin que d'une raison quelconque il puisse naître toutes les autres raisons, par la voye d'une composition & résolution propre à cette espèce

D E F I N I T I O N S.

de quantités, de la même manière que d'une ligne, ou d'une surface multipliée ou divisée convenablement, on peut faire résulter toutes les lignes & toutes les surfaces à l'infini.

Ces idées seront mieux développées dans l'Appendice de ce Livre.

X I I.

On dit que les antécédens sont homologues (ou correspondans) aux antécédens, & les conséquens aux conséquens.

On a vu que les raisons qui forment une proportion, sont des sujets semblables. Or les antécédens & les conséquens ayant la même relation dans les deux raisons, ces termes doivent être considérés comme des parties semblables de deux Touts semblables. C'est pour cela qu'il faut toujours les comparer dans le même ordre, afin que cette similitude ou correspondance ne soit jamais troublée.

X I I I.

On appelle raison alterne la comparaison de l'antécédent de la première raison à l'antécédent de la seconde, & du conséquent de la première raison au conséquent de la seconde.

$$\text{Si } A : B = C : D \left\{ \begin{array}{l} \text{on peut inférer} \\ 4 : 5 = 16 : 20 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A : C = B : D \\ 4 : 16 = 5 : 20. \end{array} \right.$$

Quand on dispose la proportion de cette manière, on dit communément qu'on le fait en alternant, ou alternando.

X I V.

Mais lorsqu'on change les conséquens en antécédens & les antécédens en conséquens dans le même ordre, on dit que la comparaison des termes se fait par inversion de raison, ou invertendo.

$$A : B = C : D \left\{ \begin{array}{l} \text{Donc invertendo} \\ 3 : 9 = 4 : 12 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} B : A = D : C \\ 9 : 3 = 12 : 4. \end{array} \right.$$

X V.

Mais la comparaison se fait par composition, ou componendo, quand on compare la somme des conséquens & antécédens à leurs conséquens respectifs.

$$A : B = C : D. \left\{ \begin{array}{l} \text{Donc compo-} \\ \text{-3 : 9 = 4 : 12.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{nendo} \\ A + B : B = C + D : D. \\ 3 + 9 : 9 = 4 + 12 : 12. \end{array} \right.$$

X V I.

On procède par division de raison, ou dividendo, lorsque l'excès, dont l'antécédent surpasse son conséquent, est comparé au conséquent.

Si.

DEFINITIONS.

$$\text{Si } A : B = C : D \left\{ \begin{array}{l} \text{on peut faire dividendo} \\ 9 : 3 = 12 : 4. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A - B : B = C - D : D. \\ 9 - 3 : 3 = 12 - 4 : 4. \end{array} \right.$$

XVII.

Et l'on va par *conversion de raison*, ou *convertendo*, quand on compare l'antécédent à l'excès dont ce même antécédent surpasse son conséquent.

$$\text{Si } A : B = C : D \left\{ \begin{array}{l} \text{il s'ensuit convertendo} \\ 9 : 3 = 12 : 4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A : A - B = C : C - D. \\ 9 : 9 - 3 = 12 : 12 - 4. \end{array} \right.$$

XVIII.

On argumente par *égalité de raison*, ou *ex æquo*, lorsque comparant deux suites de grandeurs de même nombre, telles que les raisons de la première soient égales aux raisons de la seconde, chacune à chacune (soit que la comparaison se fasse dans le même ordre, soit dans un ordre renversé), on conclut que les extrêmes des deux suites sont en proportion.

Le sens de cette Définition est celui-ci; Si A, B, C, D est une suite de quatre grandeurs, & a, b, c, d une suite de quatre autres grandeurs, tellement que

$$\left. \begin{array}{l} A : B = a : b \\ B : C = b : c \\ C : D = c : d \end{array} \right\} \text{ou dans un ordre renversé} \left\{ \begin{array}{l} A : B = c : d \\ B : C = b : c \\ C : D = a : b \end{array} \right.$$

Dans l'un & l'autre cas il est permis d'inférer *ex æquo*, que la raison de la I suite des extrêmes A : D est égale à la raison des extrêmes a : d de la II suite; ou bien que A : D = a : d.

I. A, B, C, D	15,	3,	45,	9
II. a, b, c, d	10,	2,	30,	6
A : D = a : d	15 :	9,	=	10 : 6

XIX.

L'Égalité de raison est appelée *ordonnée* lorsque les raisons de la première suite sont égales aux raisons de la seconde suite chacune à chacune, dans le même ordre direct.

Soit par ex. $A : B = a : b$
 $B : C = b : c$
 $C : D = c : d$

Ici les raisons sont égales chacune à chacune, dans le même ordre direct, puisque dans l'une & dans l'autre suite on va de la première grandeur vers la dernière. Si l'on conclut donc que les extrêmes sont proportionels, ou bien que A : D = a : d, on dit qu'on argumente par *égalité ordonnée* ou *directe*, autrement *ex æquo ordinata*.

DEFINITIONS.

XX.

Au contraire, l'égalité de raison est appelée *renversée* ou *troublée*, dans le second cas, c. à d. lorsque les raisons de la première suite sont égales à celles de la seconde suite chacune à chacune; en prenant ces dernières dans un ordre renversé.

§. 1. Soient encore les deux suites de grandeurs

$$\left. \begin{array}{l} A, B, C, D \\ a, b, c, d. \end{array} \right\} \text{ où l'on suppose } \left\{ \begin{array}{l} A : B = c : d \\ B : C = b : c \\ C : D = a : b \end{array} \right.$$

Ici les raisons de la I suite sont égales aux raisons de la II suite, chacune à chacune, mais dans un ordre renversé, tellement que la raison entre la première & la seconde grandeur de la I suite, est égale à la raison entre la pénultième & la dernière grandeur de la II suite &c. & ainsi de même en avançant dans la première & en rétrogradant dans la seconde. Si l'on conclut donc que

$$A : D = a : d,$$

on nomme cette analogie *ex æquo inversè* ou *perturbatè*.

§. 2. Les commençans n'auront pas de peine à distinguer le cas de l'égalité ordonnée ou directe, de celui de l'égalité troublée ou renversée, s'ils se souviennent que lorsque deux termes se retrouvent dans deux proportions, & qu'ils y occupent indifféremment ou la première & la troisième, ou la seconde & la quatrième place, c'est toujours le cas de l'égalité ordonnée; par ex.

$$\begin{array}{l} A : B = a : b \quad B : A = b : a \quad A : B = a : b \\ B : C = b : c \quad \text{ou} \quad B : C = b : c \quad \text{ou} \quad C : B = c : b \\ \hline A : C = a : c. \quad A : C = a : c. \quad A : C = a : c. \end{array}$$

On a toujours deux proportions qui ont de commun les deux termes B & b, occupants la première & la troisième, ou la seconde & la quatrième place; par conséquent, les deux autres termes A & C sont proportionels aux deux autres a & c, en les prenant dans le même ordre.

§. 3. Au contraire, lorsque les deux termes, qui sont communs aux deux proportions, ou sont les moyens ou les extrêmes, c'est le cas de l'égalité troublée; par ex: si

$$\begin{array}{l} A : B = b : c \quad B : A = c : b \quad A : B = b : c. \\ B : C = a : b \quad \text{ou bien} \quad B : C = a : b \quad \text{ou} \quad C : B = b : a. \\ \hline A : C = a : c \quad A : C = a : c \quad A : C = a : c. \end{array}$$

Dans ces trois cas les termes B & b, qui se retrouvent dans les deux proportions, y sont ou les extrêmes ou les moyens; par conséquent les autres termes sont en proportion, tellement que les deux termes, qui viennent de la même proportion A & C ou a & c, demeurent extrêmes ou moyens. Ou, ce qui revient au même, les quatre autres termes différens A, C & a, c sont proportionels comparés dans un ordre renversé, en ce que la comparaison descend de la I proportion dans la II, & remonte aussitôt de la II à la I.

Ce sont les dénominations qu'on donne aux différentes manières de conclure par analogie, présentement l'Auteur va démontrer qu'elles sont légitimes.

D E M A N D E S .**I.**

ON demande qu'on puisse doubler , tripler , quadrupler une grandeur donnée quelconque, ou en général qu'on puisse en prendre tel multiple qu'on voudra.

II.

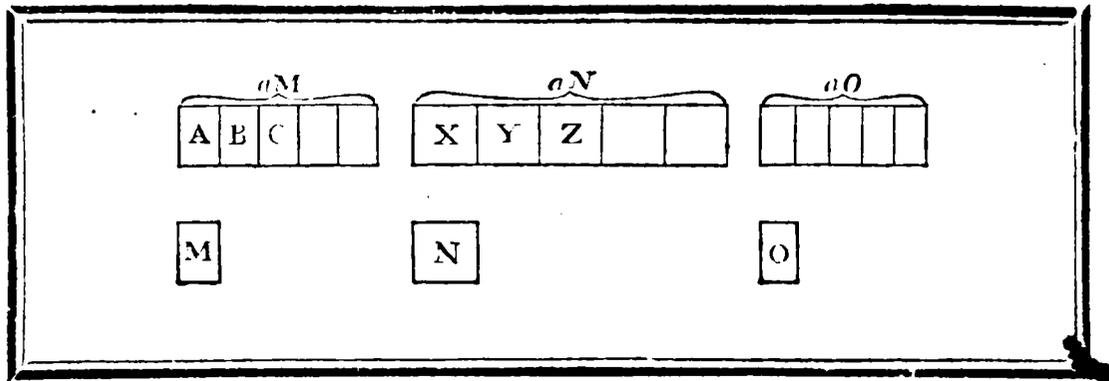
Que dans une grandeur plus grande, on puisse prendre une ou plusieurs parties égales à une moindre grandeur de même genre.

A B B R E V I A T I O N S .

Gdr. Grandeur.

Equimult. . . . Equimultiple.





S I plusieurs grandeurs ($a M, a N, a O$) sont équimultiples d'un pareil nombre d'autres grandeurs (M, N, O &c), chacune de chacune, la somme ($a M + a N + a O$ &c) des premières fera autant multiple de la somme ($M + N + O$ &c) des secondes, qu'une des premières ($a M$) est multiple de sa correspondante (M).

HYPOTHESE.

$a M$ } sont des
 $a N$ } équimultiples
 $a O$ } de

M chacune
 N de
 O chacune.

THESE.

$a M + a N + a O$ est autant multiple de
 $M + N + O$ que $a M$ l'est de M , ou
 $a N$ de N &c.

Préparation.

La Gdr. $a M$ étant autant multiple de M , que $a N$ l'est de N (*Hyp.*), on peut prendre dans $a N$ autant de grandeurs X, Y, Z &c. chacune égale à sa correspondante N , qu'on en peut prendre dans $a M$, comme A, B, C , &c. chacune égale à sa correspondante M .

Faites donc

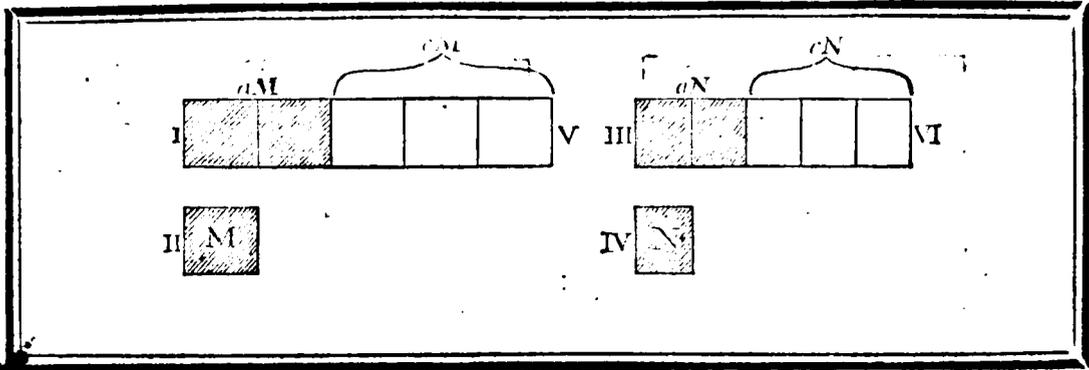
A	} égale chacune à M &	X	} égale chacune à N .
B		Y	
C		Z	

Dem. 2.

DEMONSTRATION.

- P**uisque $a M$ est autant multiple de M , que $a N$ l'est de N . (*Hyp.*),
1. La gdr. $a M$ doit contenir autant de grandeurs A, B, C &c. égales chacune à M , que $a N$ en contient d'égales à N , comme X, Y, Z &c.
 Mais $A = M$ & $X = N$ (*Prép.*),
 2. Donc $A + X = M + N$. Ax. 2. L. 1.
 De même $B = M$ & $Y = N$ (*Prép.*),
 3. Il s'ensuit que $B + Y = M + N$. Ax. 2. L. 1.
 Derechef, puisque $C = M$ & $Z = N$ (*Prép.*),
 4. On aura $C + Z = M + N$. Ax. 2. L. 1.
 Par conséquent il se trouve dans $a M$ autant de grandeurs $= M$,
 qu'il s'en trouve dans $a M + a N = M + N$.
 5. D'où il s'ensuit que $a M + a N$ est autant multiple de $M + N$, que $a M$ l'est de M ,
 ou que $a N$ l'est de N , & par la même raison $a M + a N + a O$ autant multiple
 de $M + N + O$, que $a M$ l'est de M ou $a N$ de N &c.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. THEOREME II.
SI la premiere grandeur (aM) est multiple de la seconde (M), autant que la troisieme (aN) l'est de la quatrieme (N); & que la cinquieme (cM) soit encore multiple de la seconde (M), autant que la sixieme (cN) l'est de la quatrieme (N): la grandeur ($aM + cM$) composée de la premiere & cinquieme, est multiple de la seconde (M), autant que la grandeur ($aN + cN$) composée de la troisieme & sixieme l'est de la quatrieme (N).

HYPOTHESE.

aM
 &
 aN] de même que cM
 &
 cN] sont des équimult. de M & N chacune.

THESE.

$aM + cM$ est autant multiple de M que $aN + cN$ l'est de N .

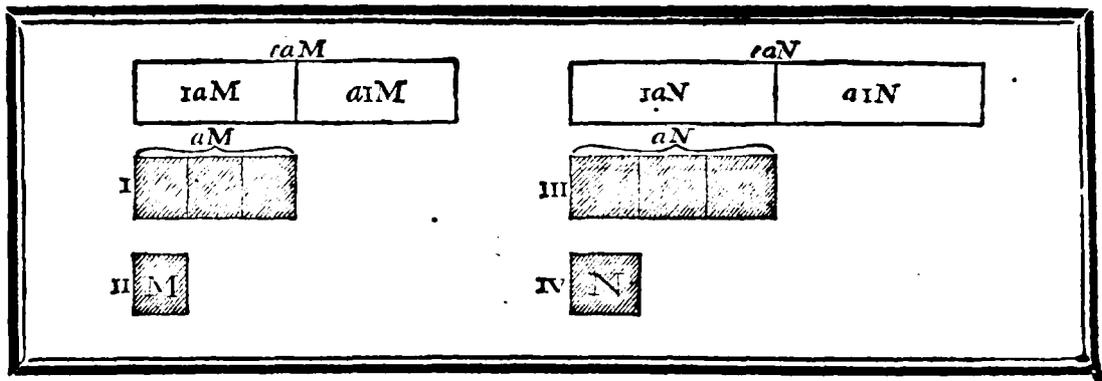
DEMONSTRATION.

- P**uisque aM est autant multiple de M , que aN l'est de N (*Hyp.*),
1. La grandeur aM contient M le même nombre de fois que aN contient N .
 De même, puisque cM est autant multiple de M , que cN l'est de N (*Hyp.*),
 2. La grandeur cM contient M le même nombre de fois que cN contient N .
 3. Partant la grandeur entiere $aM + cM$ contient M le même nombre de fois que la grandeur entiere $aN + cN$ contient N .
 4. Par conséquent $aM + cM$ est autant multiple de M , que $aN + cN$ l'est de N .

AX. 2. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION III. THEOREME III.
SI la premiere grandeur ($a M$) est multiple de la seconde M , autant que la troisieme ($a N$) l'est de la quatrieme (N), & qu'on prenne des equimultiples ($ea M$, $ea N$) de la premiere ($a M$) & de la troisieme ($a N$): ces deux dernieres grandeurs ($ea M$, $ea N$) feront également multiples de la seconde (M) & de la quatrieme (N).

HYPOTHESE.

1. $a M$ } sont deux $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ chacune} \\ \& \text{ de} \\ a N \end{array} \right.$ equimultiples de $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ chacune} \\ N \text{ chacune.} \end{array} \right.$
 2. $ea M$ } sont deux $\left\{ \begin{array}{l} a M \text{ chacune} \\ \& \text{ de} \\ ea N \end{array} \right.$ equimultiples de $\left\{ \begin{array}{l} a M \text{ chacune.} \\ a N \text{ chacune.} \end{array} \right.$

THESE.

$ea M$ est autant multiple de M , que $ea N$ l'est de N .

Préparation.

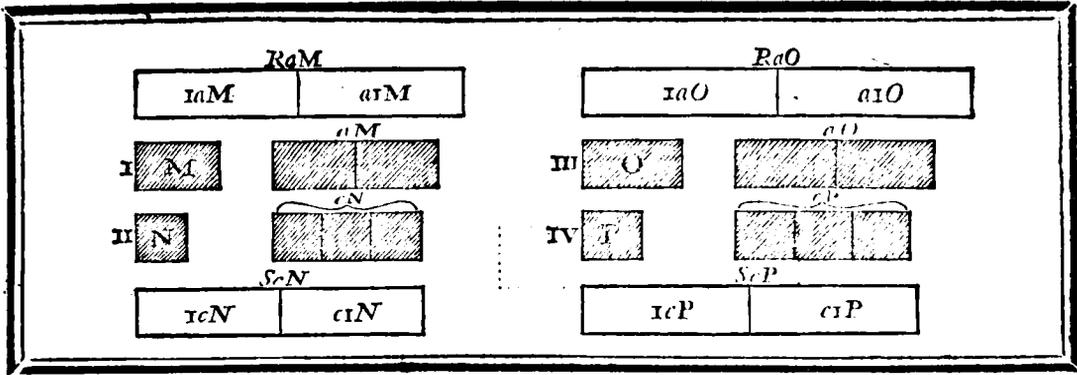
Partagez donc $ea M$ en ses parties $1a M$, $a1 M$ &c. chacune $= a M$.
 & $ea N$ en ses parties $1a N$, $a1 N$ &c. chacune $= a N$.

DEMONSTRATION.

- P**uisque $ea M$ est autant multiple de $a M$, que $ea N$ l'est de $a N$ (Hyp. 2),
 1. Il se trouve dans $ea M$ autant de grandeurs $= a M$,
 qu'il s'en trouve dans $ea N$ $= a N$.
 2. Le nombre des parties $1a M$, $a1 M$ &c. dans $ea M$, est donc égal au nombre des parties $1a N$, $a1 N$ &c. dans $ea N$.
 Mais par la raison que $a M$ est autant multiple de M , que $a N$ l'est de N , & que $1a M = a M$, $1a N = a N$,
 3. La grandeur $1a M$ est autant multiple de M que $1a N$ l'est de N .
 4. Et par la même raison $a1 M$ est autant multiple de M , que $a1 N$ l'est de N .
 Puis donc que la I gdr $1a M$ est autant multiple de la II^e gdr M ,
 que la III gdr $1a N$ l'est de la IV^e gdr N ,
 & que la V gdr $a1 M$ est autant multiple de la II^e gdr M ,
 que la VI gdr $a1 N$ l'est de la IV^e gdr N ,
 5. Il s'en suit que la grandeur $ea M$, composée de la I. & V gdr $1a M + a1 M$, est autant multiple de la II gdr M , que la grandeur $ea N$, composée de la III & VI gdr $1a N + a1 N$, l'est de la IV gdr N .

Prop. 2. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.
Si quatre grandeurs (M, N, O, P) sont proportionnelles: les équi-multiples (aM, aO) de la première (M) & de la troisième (O), comparés, chacun à chacun, à des équi-multiples (cN, cP) de la seconde (N) & de la quatrième (P), seront en même raison, selon quelque multiplication que ce puisse être.

HYPOTHESE.

1. $M : N = O : P$.

II. $\left\{ \begin{matrix} aM \\ aO \end{matrix} \right\}$ sont des équi-mult. de $\left\{ \begin{matrix} M \\ O \end{matrix} \right\}$ & $\left\{ \begin{matrix} cN \\ cP \end{matrix} \right\}$ sont des équi-mult. de $\left\{ \begin{matrix} N \\ P \end{matrix} \right\}$.

THESE.

$aM : cN = aO : cP$.

Préparation.

1. Prenez RaM, RaO équi-multiples de aM & de aO.
2. De même ScN, ScP équi-multiples de cN & de cP.

} Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puis donc que aM est autant multiple de M, que aO l'est de O (Hyp. 2), & que les grandeurs RaM, RaO sont des équi-multiples des grandeurs aM, aO (Prep. 1),
 1. La grandeur RaM est autant multiple de M, que la grandeur RaO l'est de O.
 2. Par la même raison; la grandeur ScN est autant multiple de N, que ScP l'est de P.

Prop. 3. L. 5.

Et d'autant que $M : N = O : P$ (Hyp. 1), & que RaM, RaO sont des équi-multiples quelconques du I terme M & du III O; & ScN, ScP des équi-multiples quelconques du II terme N & du IV P (Arg. 1 & 2),

3. Si RaM est $>$, $=$ ou $<$ ScN, pareillement RaO sera $>$, $=$ ou $<$ ScP.
 Mais les grandeurs RaM & RaO sont des équi-multiples quelconques des grandeurs aM & aO, & les grandeurs ScN, ScP des équi-multiples quelconques des grandeurs cN, & cP (Prep. 1 & 2).
4. Partant, la raison, de aM à cN est égale à la raison de aO à cP; ou $aM : cN = aO : cP$.

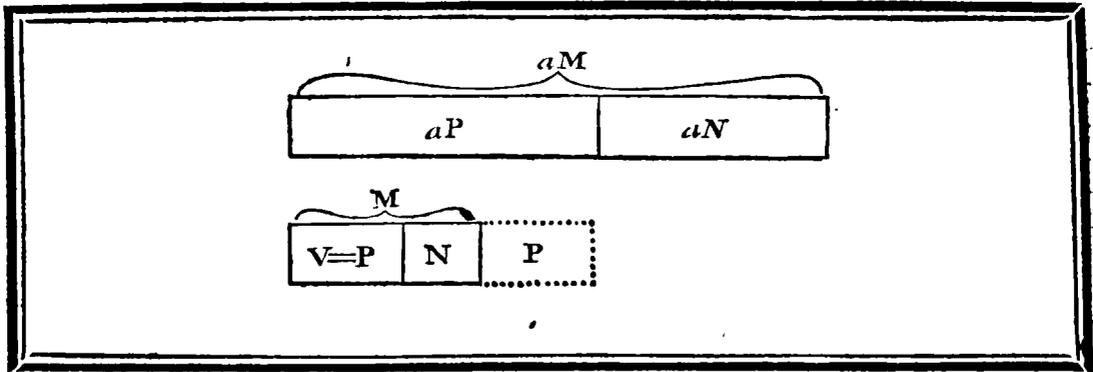
Def. 5. L. 5.

Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

IL s'en suit de l'Arg. 3, que, selon que ScN est $>$, $=$, ou $<$ RaM; pareillement ScP sera $>$, $=$ ou $<$ RaO; c'est pourquoi $cN : aM = cP : aO$ (Def. 5. L. 5).
 Donc, si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le sont aussi par inversion de raison, ou *invertendo*.



S I une grandeur (aM) est autant multiple d'une autre grandeur (M), que la retranchée (aN) l'est de la retranchée (N), le reste (aP) fera autant multiple du reste (V), que la grandeur entière (aM), l'est de la grandeur entière (M).

HYPOTHESE.

- 1. Les gdrs. aM & M sont deux Tous,
- 2. les gdrs. aN & N leurs parties retranchées & les gdrs. aP & V les restes.
- 3. aM est multiple de M , autant que aN l'est de N .

THESE.

aP est autant multiple de V , que aM l'est de M .

Préparation.

Prenez une grandeur P telle, que aP soit autant multiple de P , que aN l'est de N , ou aM de M .

Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

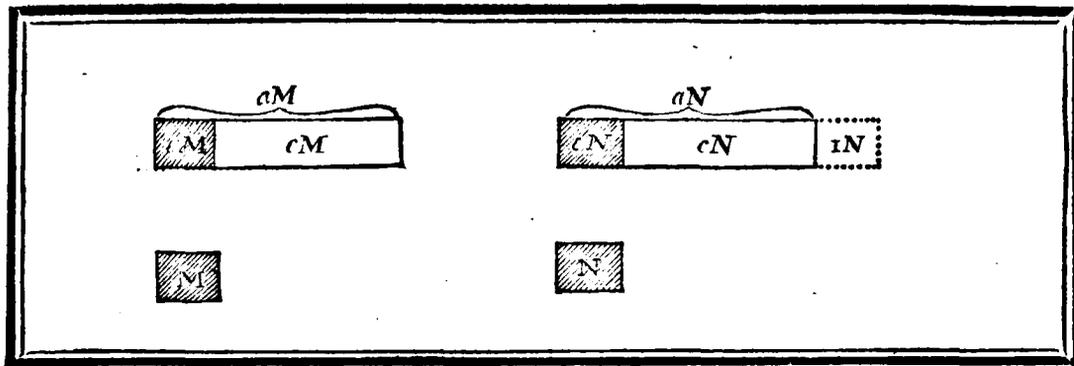
- 1. Puis donc que aN est autant multiple de N , que aP l'est de P (Prep.), la somme $aN + aP$, ou aM , des premières, est autant multiple de la somme $N + P$ des dernières, que aN l'est de N .
Mais aM est autant multiple de M , ou de $N + V$, que aN l'est de N (Hyp. 2);
- 2. Partant, la même gdr. aM est equimultiple des gdrs. $N + P$, & $N + V$.
- 3. Par conséquent, $N + P = N + V$.
Et retranchant la gdr. commune N ,
- 4. Il s'ensuit que la gdr. P est $=$ a la gdr. V .
- 5. Partant, aP étant autant multiple de P , que aM l'est de M (Prep.), le même aP est autant multiple de V , que aM l'est de M .

Prop. 1. L. 5.

Ax. 7. L. 1.

Ax. 3. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. THEOREME VI.
Si deux grandeurs (aM, aN) sont équi-multiples de deux autres grandeurs (M & N), chacune de chacune, & les retranchées (cM & cN) équi-multiples des mêmes grandeurs, les restes (eM & eN) seront respectivement ou égaux à ces grandeurs (M & N), ou ils en seront des équi-multiples.

HYPOTHESE.

1. $\left\{ \begin{array}{l} aM \text{ \& } aN \text{ sont deux Touts,} \\ cM \text{ \& } cN \text{ leurs parties retranchées.} \\ eM \text{ \& } eN \text{ leurs restes.} \end{array} \right.$

- II. $\left\{ \begin{array}{l} aM \text{ \& } cM \\ eM \text{ \& } cN \\ aN \text{ \& } eN \end{array} \right\}$ sont des équi-mult. de $\left\{ \begin{array}{l} M \\ e \\ N \end{array} \right\}$

THESE.

- I. Si $eM = M$, eN sera $= N$.
 II. Si eM est multiple de M , eN sera équi-multiple de N .

C A S I. Si eM est $= M$.

Préparation.

Faites $iN = N$.

Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque cM est autant multiple de M , que cN l'est de N (*Hyp. 2*), & que $eM = M$ (*Sup. 1*), & $iN = N$ (*Prep.*),

1. La gdr. $cM + eM$, ou aM , sera autant multiple de M , que $cN + iN$ l'est de N .

Or aM étant autant multiple de M , que aN , ou $eN + cN$ l'est de N (*Hyp. 2*).

2. Les deux gdrs. $cN + iN$ & $eN + cN$ sont équi-multiples de la même gdr. N .

3. C'est pourquoi la gdr. $cN + iN = eN + cN$.

Ax. 6. L. 1.

Retranchant donc la gdr. commune cN ,

4. Il suit que iN est $= eN$.

Ax. 3. L. 1.

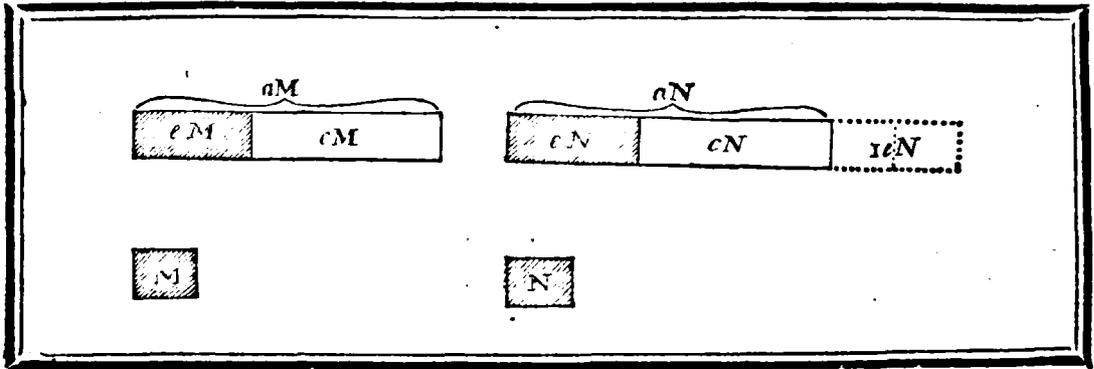
Mais iN est $= N$ (*Prep.*);

5. Partant, eN est $= N$.

Ax. 1. L. 1.

6. Donc si eM est $= M$, eN est $= N$.

C. Q. F. D. 1.



C A S II. Si eM est multiple de M .

Préparation.

Prenez ieN autant multiple de N , que eM l'est de M .

Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque eM est autant multiple de M , que ieN l'est de N (*Prep.*), & que cM est autant multiple de M , que cN l'est de N (*Hyp. 2*),

1. La grandeur $eM + cM$, ou aM , sera autant multiple de M , que $ieN + cN$ l'est de N .

Prop. 2. L. 5.

Mais aM étant autant multiple de M , que aN , ou $eN + cN$, l'est de N (*Hyp. 2*),

2. Les deux gdrs. $ieN + cN$ & $eN + cN$ sont donc équimultiples de la même gdr. N .

3. Par conséquent, $ieN + cN$ est $= eN + cN$.

Ax. 6. L. 1.

En retranchant donc la gdr. commune cN ,

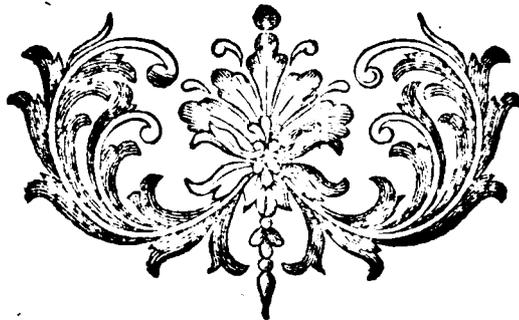
4. Il suit que la grandeur ieN est $= eN$.

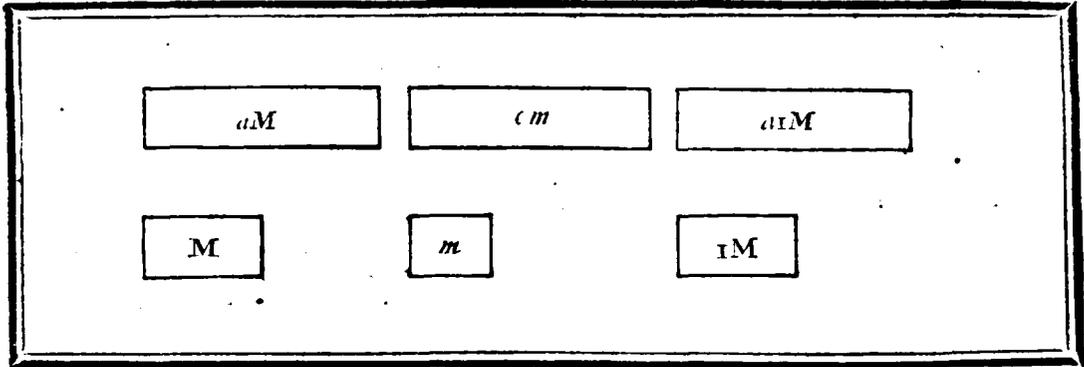
Ax. 3. L. 1.

Or ieN est autant multiple de N , que eM l'est de M (*Prep.*);

5. Donc, si eM est multiple de M , eN sera équimultiple de N .

C. Q. F. D. 11.





PROPOSITION VII. THEOREME VII.
LEs grandeurs égales (M & IM), ont même raison à une même grandeur (m); & une même grandeur (m) a même raison à des grandeurs égales (M & IM).

HYPOTHESE.

M & IM sont deux gdrs. égales, & m en est une troisieme.

THESE.

I. $M : m = IM : m$.
 II. $m : M = m : IM$.

Préparation.

1. Prenez aM & aIM équimultiples de M & de IM .
2. Et em un multiple quelconque de m .

} Dem. I. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque aM & aIM sont des équimult. de M & de IM (*Prep. I*), & que $M = IM$ (*Hyp.*),

1. La gdr aM est $= aIM$.
2. Donc, si aM est $> =$, ou $< em$; aIM sera pareillement $> =$, ou $< em$.
 Mais aM & aIM sont des équimult. du I terme M & du III terme IM , comme em & em en sont du II terme m & du IV terme m ;
3. Partant $M : m = IM : m$.

Ax. 6. L. L.

Def. 5. L. 5.

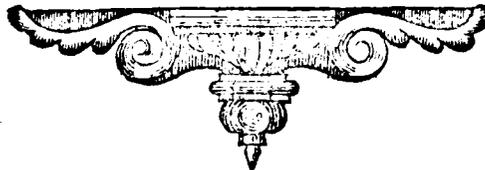
C. Q. F. D. I.

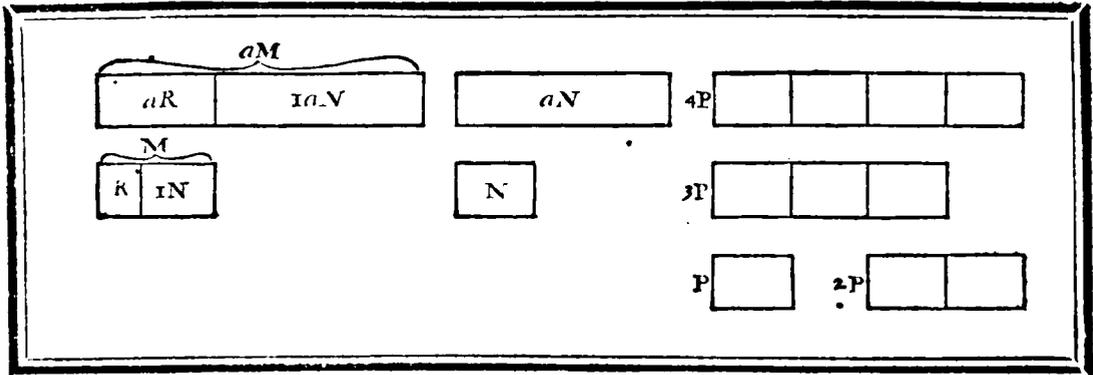
Et puisque $aM = aIM$ (*Arg. I*),

4. Il suit encore que, si em est $> =$, ou $< aM$, le même em doit en même tems être $> =$, ou $< aIM$.
5. Donc, $m : M = m : IM$.

Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. II.





PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.

SI deux grandeurs (M & N) sont inégales, la plus grande (M) aura une plus grande raison à une même grandeur (P), que la plus petite (N); & au contraire la même grandeur (P) aura une plus grande raison à la plus petite (N), qu'à la plus grande (M).

HYPOTHESE.

- I. $M > N$.
- II. P est une gdr. quelconque.

THESE.

- I. $M : P > N : P$.
- II. $P : N > P : M$.

I. Préparation.

1. Rétranchez de la plus grande M la partie 1 N = à la plus petite N; Et le reste R sera ou $<$, ou $>$ ou enfin = N; Supposez premierement que ce reste soit $<$ N.
2. De ce reste R prenez un multiple $aR > P$,
3. Autant que aR est multiple de R, prenez $1aN$ & aN multiples de 1 N & de N.
4. Faites la gdr. 2 P double de P; la gdr 3 P triple de P; & ainsi de suite jusques à ce que vous soyez parvenu au premier multiple de P, qui surpasse aN , que vous supposerez être 4 P.

Dem. I. L. 5.

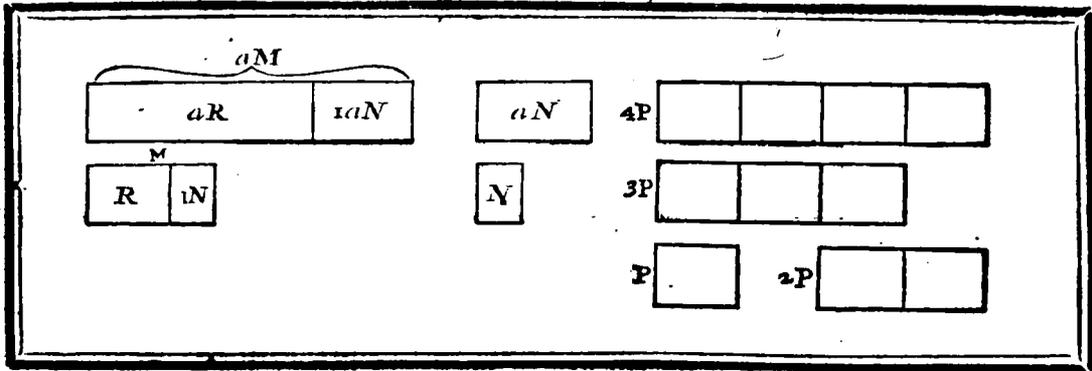
DEMONSTRATION.

- Puisque 4 P est le premier des multiples de P, qui est $> aN$ (Prep. 4),
1. Le multiple précédent 3 P n'est pas $> aN$; Ou bien aN n'est pas $<$ 3 P. De plus aR & $1aN$ étant équimult. de R & de 1 N (Prep. 3),
 2. La gdr. $aR + 1aN$, ou aM est autant multiple de $R + 1N$, ou M que aR l'est de R, Prop. I. L. 5. Ou bien que aN de N. (Prep. 3).
 3. Donc aM & aN sont des équimult. de M & de N. D'ailleurs; aN & $1aN$ étant des équimult. des gdrs. égales N & 1 N (Prep. 3 & I),
 4. La gdr. aN est = $1aN$. Ax. 6. L. 1.
Mais aN n'est pas $<$ 3 P (Arg. 1);
 5. Partant $1aN$ n'est pas non plus $<$ 3 P. Or aR est $>$ P. (Prep. 2).
 6. Donc, en ajoutant, $aR + 1aN$, ou $aM > 4P$. Puis donc que aM est $>$ 4 P, & $aN <$ 4 P (Prep. 4); & que aM & aN sont des équimult. des antécédens M & N, & 4 P & 4 P d'autres équimult. des conséquens P & P (Arg. 3 & Prep. 4).
 7. Il suit que $M : P > N : P$. Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

- De plus, comme on vient d'établir que aN est $<$ 4 P (Prep. 4), & $aM >$ 4 P (Arg. 6),
8. Il est évident que la gdr. 4 P est $>$ aN , & que la même gdr. 4 P est $<$ aM . Or 4 P & 4 P étant des équimult. des antécédens P & P; & aN & aM d'autres équimult. des conséquens N & M,
 9. Il suit que $P : N > P : M$. Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D. II.



II. Préparation.

Si on suppose en second lieu $R > 1N$ ou N .

5. Prenez de $1N$ un multiple $1aN > P$.
6. Et autant que $1aN$ est multiple de $1N$, prenez aR multiple de R , item aN multiple de N . } Dem. I. L. 5.
7. Prenez encore $4P$ pour le premier multiple de $P > aR$; ainsi le multiple précédent $3P$ ne fera pas $> aR$, ou bien aR ne fera pas $< 3P$.

DEMONSTRATION.

D'Abord on prouvera, comme dans le raisonnement précédent (*Arg. I. 2 & 3*), que

1. Les gdrs. aM & aN sont équivult. des gdrs. M & N .
 • De plus, aR & aN étant des équivult. de R & de N (*Prep. 6*), & R étant $> N$ (*Sup.*),
2. Il s'enfuit que aR est $> aN$.
 Maintenant aR n'étant pas $< 3P$ (*Prep. 7*),
 Et la gdr. $1aN$ étant $> P$ (*Prep. 5*),
3. On aura, en ajoutant $aR + 1aN$, ou $aM > 4P$.
 Mais aR étant $< 4P$ (*Prep. 7*), & ce même aR étant $> aN$ (*Arg. 2*),
4. A plus forte raison aN est $< 4P$.
 Or aM & aN sont des équivult. des antécédens M & N (*Arg. 1*), & $4P$ & $4P$ d'autres équivult. des conséquens; P & P & de plus $aM > 4P$; & $aN < 4P$ (*Arg. 3 & 4*).
5. Parconsequent $M : P > N : P$. Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

De plus, sans changer de préparation, on démontre comme dans le cas précédent (*Arg. 8 & 9*), que

6. La raison de $P : N$ est $>$ a raison de $P : M$.

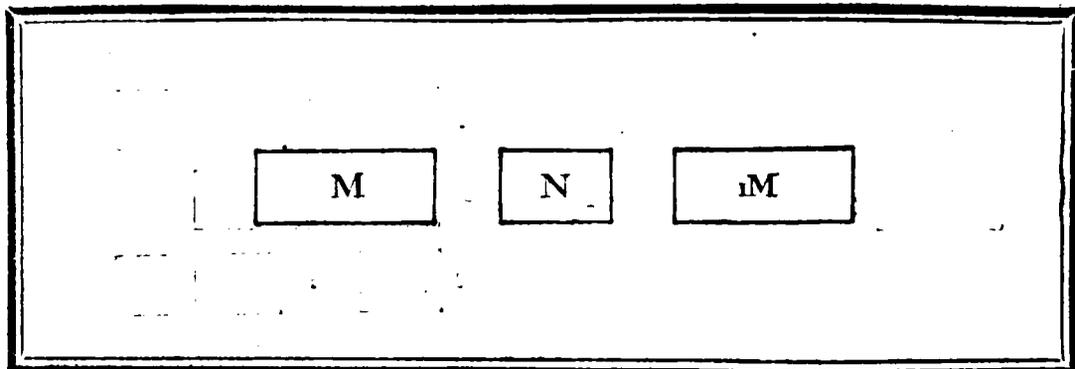
C. Q. F. D. II.

III.

Et en appliquant la même préparation & le même raisonnement au dernier Cas lorsque $R = 1N$,

7. On achevera la démonstration comme dans les deux Cas précédens.

C. Q. F. D. I & II.



PROPOSITION IX. THEOREME IX.
LEs grandeurs (M & i M) qui sont en même raison à une même grandeur (N) : sont égales entr'elles. Et celles (M & i M) auxquelles une même grandeur (N) a même raison : sont aussi égales entr'elles.

HYPOTHESE.
 $M : N = iM : N.$

THESE.
 La gdr. M = i M.

DEMONSTRATION.

I.

Sinon, les deux gdrs. M & i M sont inégales.

1. **L**Es deux gdrs. M & i M n'ont donc pas même raison à la même gdr. N. Prop. 8. L. 5. Mais elles ont même raison à cette même gdr. N (Hyp.);
2. La gdr. M est donc = à la gdr. i M.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.
 $N : M = N : iM.$

THESE.
 La gdr. M = i M.

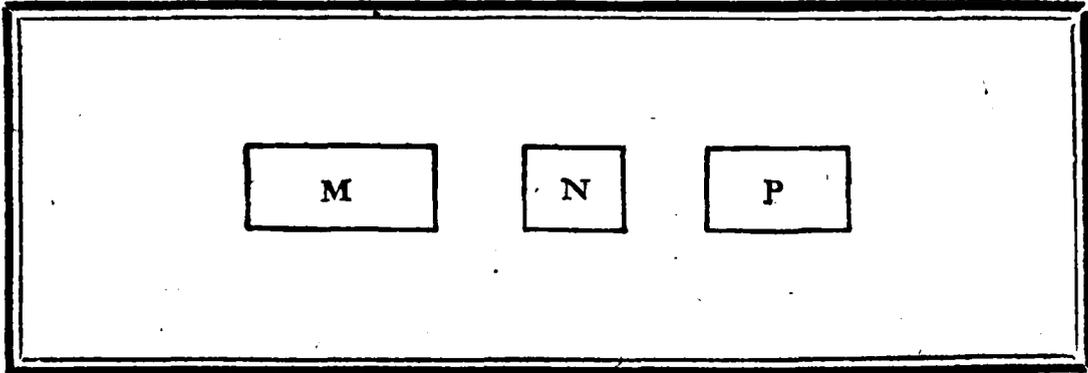
DEMONSTRATION.

II.

Sinon, les deux gdrs. M & i M sont inégales.

1. **L**A même gdr. N n'a donc pas même raison aux deux gdrs. M & i M. Prop. 8. L. 5. Or elle a même raison à ces deux gdrs. (Hyp.);
2. Donc la gdr. M est = à la gdr. i M.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. THEOREME X.
DES deux grandeurs (M & P), celle (M) qui a plus grande raison à une même (N), est la plus grande. Au contraire, celle (P) à laquelle une même grandeur (N) a plus grande raison, est la plus petite.

HYPOTHESE.
 $M : N \text{ est } > P : N.$

THESE.
La gdr. M est > P.

DEMONSTRATION.

I.

Sinon; M est = P, ou < P.

C A S I. Si M est = P.

1. **L**ES deux gdrs. M & P auroient donc même raison à la même gdr. N. Prop. 7. L. 5.
 Or elles n'ont point même raison à la même gdr. N (*Hyp.*);
2. La gdr. M n'est donc point = à la gdr. P.

C A S II. Si M est < P.

3. **L**A raison de M : N feroit < la raison P : N. Prop. 8. L. 5.
 Or la raison de M : N n'est pas < la raison P : N (*Hyp.*);
4. Donc la gdr. M n'est pas < la gdr. P.
 Mais M n'étant pas non plus = P (*Arg. 2*),
5. Il reste donc que M soit > P.

C. Q. F. D. I.

HYPOTHESE.
 $N : P > N : M.$

THESE
La gdr. P est < M.

DEMONSTRATION.

II.

Sinon; P est =, ou > M.

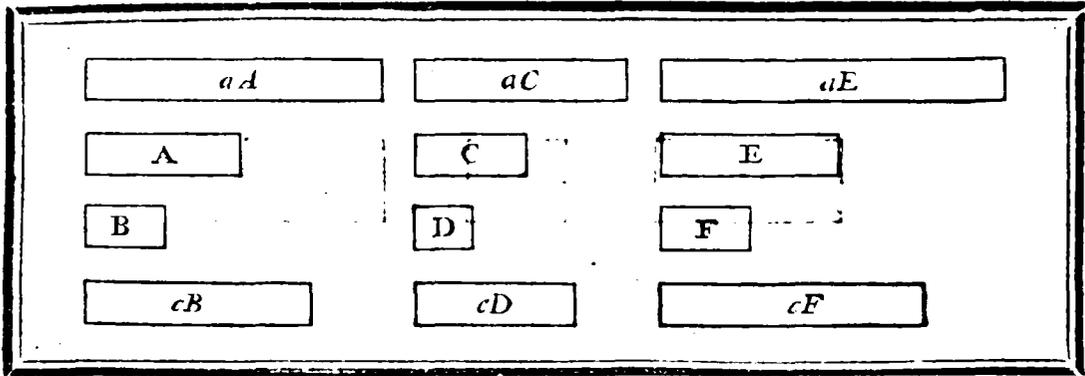
C A S I. Si P est = M.

1. **L**A raison N : M devroit être = à la raison de N : P. Prop. 7. L. 5.
2. Ce qui étant contraire à l'hypothèse, P ne fera pas = M.

C A S II. Si P est > M.

3. **L**A raison N : M devient > la raison N : P. Prop. 8. L. 5;
4. Ce qui étant encore contraire à l'hypothèse, P ne fera pas > M.
 Mais P n'est pas non plus = M (*Arg. 2*);
5. Il reste donc que P soit < M.

C. Q. F. D. II.



L PROPOSITION XI. THEOREME XI.
 Les raisons (A : B & E : F) qui sont égales à une même troisième raison (C : D),
 sont égales entr'elles.

HYPOTHESE.

THESE.

Les raisons $\left\{ \begin{array}{l} A : B \\ E : F \end{array} \right.$ sont = à la même raison C : D.

A : B = E : F.

Préparation.

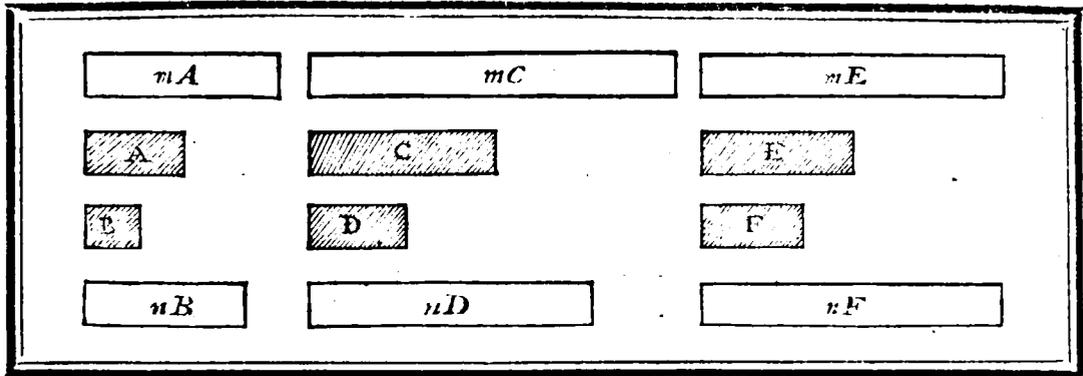
1. Prenez des équimultiples quelconques aA , aC , aE des trois antécédens A, C, E.
 2. Et d'autres équimultiples quelconques cB , cD , cF des trois conséquens B, D, F.
- } Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque $A : B = C : D$ (Hyp);

1. Si le multiple aA est $>$, =, ou $<$ le multiple cB ; l'équimultiple aC est pareillement $>$, =, ou $<$ l'équimultiple cD . Def. 5. L. 5.
 De même puisque $C : D = E : F$ (Hyp).
2. Si le multiple aC est $>$, = ou $<$ le multiple cD ; l'équimultiple aE fera pareillement $>$, =, ou $<$ l'équimultiple cF . Def. 5. L. 5.
3. Par conséquent si le multiple aA est $>$, = ou $<$, le multiple cB ; l'équimultiple aE est pareillement $>$, =, ou $<$ l'équimultiple cF .
4. Partant, $A : B = E : F$. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XII. THEOREME XII.
Si plusieurs grandeurs (A, B, C, D, E, F, &c.) sont en proportion (ou bien si plusieurs raisons sont égales): la somme de tous les antécédens (A+C+E &c.) est à la somme de tous les conséquens (B+D+F &c.), comme un antécédent est à son conséquent.

HYPOTHESE.
 Les gdrs. A, B, C, D, E, F sont proportionnelles
 ou $A : B = C : D = E : F$ &c.

THESE.
 $A + C + E : B + D + F = A : B.$

Préparation.

- | | |
|---|-----------------|
| 1. Prenez les équimultiples mA , mC , mE des antécédens
A, C, E;
2. De même les équimultiples nB , nD , nF des conséquens
B, D, F. | } Dem. 1. L. 5. |
|---|-----------------|

DEMONSTRATION.

Puis donc que $A : B = C : D = E : F$ (Hyp.);

1. Si mA est $>$, $=$, ou $<$ nB , mC est pareillement $>$, $=$, ou $<$ nD ; & de même mE est $>$, $=$ ou $<$ nF . Def. 5. L. 5.

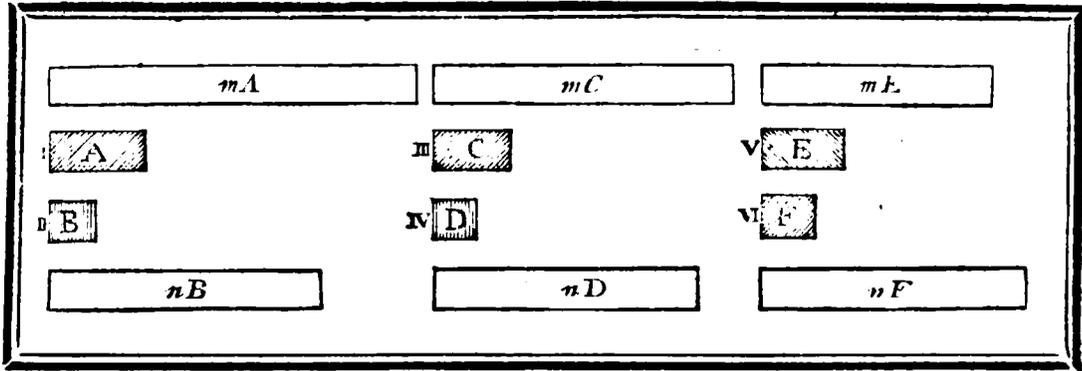
En ajoutant donc de part & d'autre les gdrs. $>$, $=$ ou $<$.

2. Les gdrs. $mA + mC + mE$ seront constamment $>$, $=$, ou $<$ les gdrs. $nB + nD + nF$, selon que mA est $>$, $=$, ou $<$ nB .

Or les gdrs. $mA + mC + mE$ & mA sont des équimultiples des gdrs. $A + C + E$ & A (Prep. 1 & Prop. 1. L. 5); item les gdrs. $nB + nD + nF$ & nB sont des équimultiples des gdrs. $B + D + F$ & B (Prep. 2 & Prop. 1. L. 5);

3. Partant $A + C + E : B + D + F = A : B.$

Def. 5. L. 5.
 C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII. THEOREME XIII.
SI la premiere grandeur (A) a même raison à la seconde (B), que la troisieme (C) à la quatrieme (D); mais que la troisieme (C) ait plus grande raison à la quatrieme (D), que la cinquieme (E) à la sixieme (F): la raison de la premiere (A) à la seconde (B) fera aussi plus grande, que la raison de la cinquieme (E) à la sixieme (F).

HYPOTHESE.

- I. $A : B = C : D.$
- II. $C : D > E : F.$

THESE.

$$A : B > E : F.$$

Préparation.

1. La raison de $C : D$ étant $>$ la raison de $E : F$ (Hyp. 2), prenez des équimult. mC & mE des antécédens C & E ; & pareillement d'autres équimultiples nD & nF des conséquens D & F , tellement que mC soit $>$ nD sans que mE soit $>$ nF ;
2. Prenez $m A$ autant multiple de A que mC l'est de C .
3. De même $n B$ autant multiple de B que nD l'est de D .

Dem. 1. L. 5.
 Def. 7. L. 5.
 5. 5.
 Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puis donc que $A : B = C : D$ (Hyp. 1), & que $m A$, $m C$ sont des équimultiples des antécédens & $n B$, $n D$ des équimultiples des conséquens (Prep. 2 & 3),

1. La gdr. $m A$ fera $>$, $=$, ou $<$ $n B$; selon que $m C$ sera $>$, $=$, ou $<$ $n D$.
 Or $m C$ est $>$ $n D$ (Prep. 1);

Def. 5. L. 5.

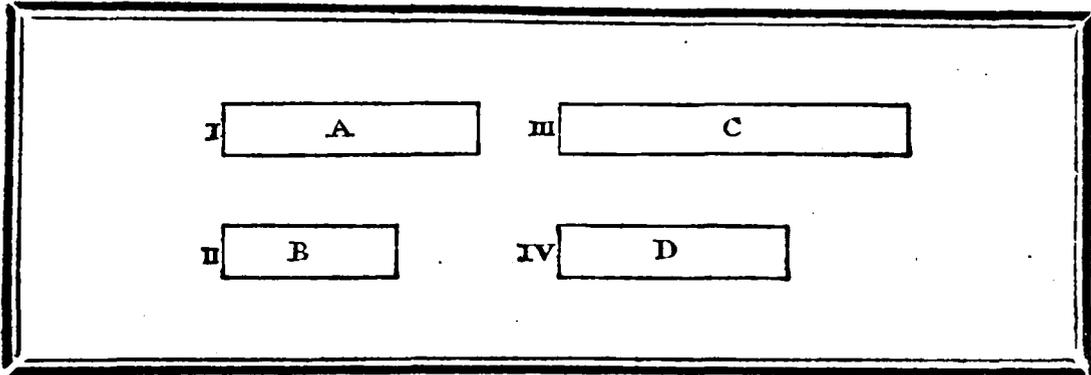
2. Donc $m A$ est aussi $>$ $n B$.

Mais en même teins $m E$ n'est pas $>$ $n F$ (Prep. 1), & les gdrs. $m A$ & $m E$ sont des équimultiples des antécédens A & E , & $n B$, $n F$ des équimultiples des conséquens B & F (Prep. 1 & 2),

3. Partant la raison $A : B$ est $>$ la raison $E : F$.

Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D.



S . PROPOSITION XIV. THEOREME XIV.
 SI quatre grandeurs (A, B, C, D) sont proportionelles: selon que la premiere (A) fera plus grande, égale, ou moindre, que la troisieme (C), la seconde (B) fera aussi plus grande, égale, ou moindre que la quatrieme (D).

HYPOTHESE.

- I. $A : B = C : D$.
- II. A est $>$, = ou $<$ C.

THESE.

- Se'on que A est $>$, = ou $<$ C.
- B fera $>$, = ou $<$ D.

C A S I. Si A est $>$ C.

DEMONSTRATION.

1. LA raison de $A : B$ est donc $>$ la raison $C : B$.
2. Donc la raison de $C : D$ est $>$ la raison $C : B$.
3. D'où il suit, que D est $<$ B ou $B >$ D.

Prop. 8. L. 5:

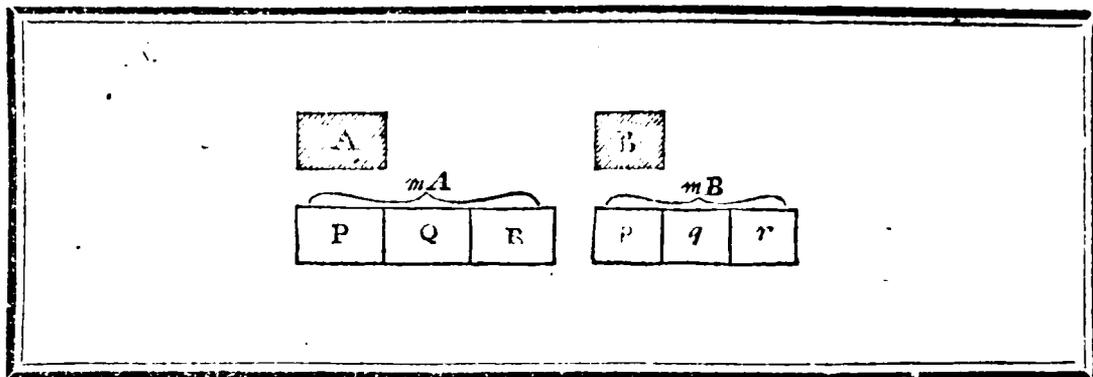
Prop. 13. L. 5.

Prop. 10. L. 5.

- On démontrera de la même maniere pour les deux autres cas; si $A = C$, que B fera $= D$; & si A est $<$ C, que B fera $<$ D.
4. Par conséquent, selon que A est $>$, =, ou $<$ C, pareillement B est $>$, =, ou $<$ D.

C. Q. F. D.





L E S P A R T I E S (A & B) S O N T E N M Ê M E R A I S O N Q U E L E U R S É Q U I M U L T I P L E S ($m A$ & $m B$).

HYPOTHESE

Les gdrs. $m A$ & $m B$ sont des équimults. des gdrs. A & B .

THESE.

$$A : B = m A : m B.$$

Préparation.

1. Divisez $m A$ en ces parties P, Q, R chacune $= A$.
2. Et $m B$ en ces parties p, q, r chacune $= B$.

} Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

P U I S Q U E les gdrs. $m A, m B$ sont équimultiples des gdrs. A & B (*Hyp.*).

1. Le nombre des parties P, Q, R &c. est $=$ au nombre des parties p, q, r &c.

Et d'autant que $P = Q = R$ (*Prep. 1*), & $p = q = r$ (*Prep. 2*),

2. La gdr. $P : p = Q : q = R : r$ &c.

3. C'est pourquoi $P + Q + R$, ou $m A : p + q + r$ ou $m B = P : p$.

Mais à cause que $P = A$ & $p = B$ (*Prep. 1 & 2*),

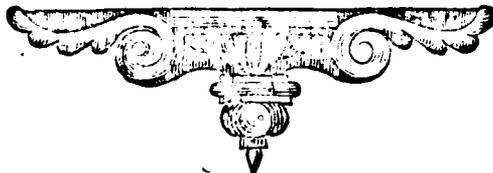
4. La gdr. $P : p = A : B$.

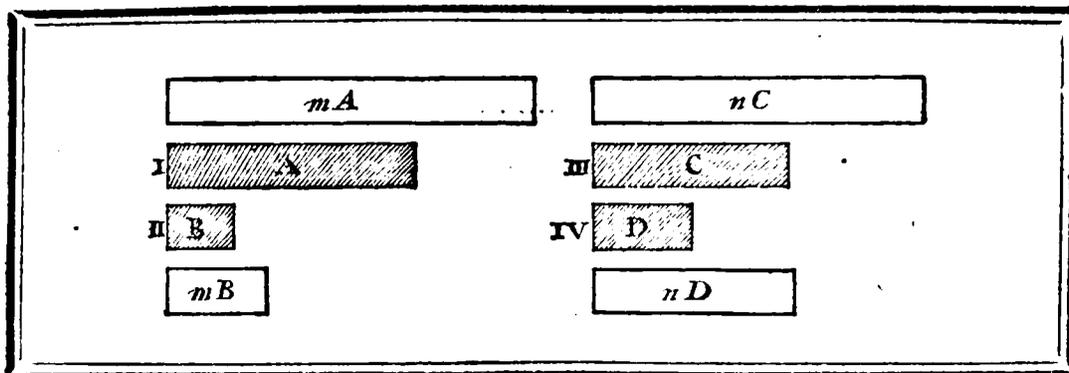
5. Partant $A : B = m A : m B$.

{ Prop. 7. L. 5.
Prop. 11. L. 5.
Prop. 12. L. 5.

Prop. 7. L. 5.
Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.





S I quatre grandeurs (A, B, C, D) sont en proportion, elles le seront encore en raison alterne.

HYPOTHESE.

$$A : B = C : D.$$

THESE.

$$A : C = B : D.$$

Préparation.

1. Prenez des équimult. quelconques $m A$, & $m B$ des termes A & B de la premiere raison.
 2. Prenez d'autres équimult. quelconques $n C$, $n D$ des termes C & D de la seconde raison.
- } Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puis donc que A & B sont des parties des équimult. $m A$ & $m B$ (*Prep. 1*),

1. On aura $A : B = m A : m B$. Prop. 15. L. 5.
- Mais $A : B = C : D$ (*Hyp.*);
2. Donc $C : D = m A : m B$. Prop. 11. L. 5.
3. De même $C : D = n C : n D$. Prop. 15. L. 5.
4. Partant $m A : m B = n C : n D$. Prop. 11. L. 5.
5. C'est pourquoi, selon que $m A$ est $>$, $=$, ou $<$ $n C$, pareillement $m B$ sera $>$, $=$, ou $<$ $n D$. Prop. 14. L. 5.
- Or $m A$ & $m B$ étant des équimult. des termes A & B pris comme antécédens (*Prep. 1*), & $n C$, $n D$ étant d'autres équimultiples des termes C & D considérés comme conséquens (*Prep. 2*),
6. Partant $A : C = B : D$. Def. 5. L. 5.

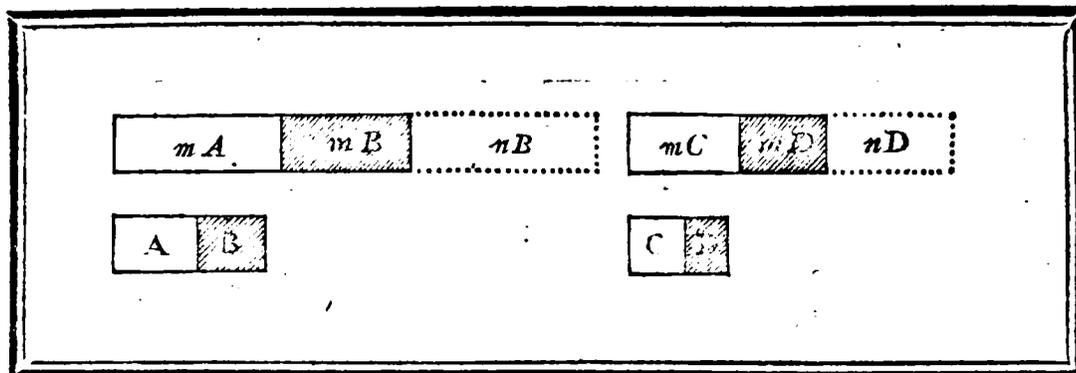
C. Q. F.D.

Remarque.

IL suit de cette proposition, que si quatre grandeurs sont proportionnelles, selon que la premiere est plus grande, égale, ou moindre que la seconde, la troisieme est de même plus grande, égale, ou moindre que la quatrieme.

- Car puisque $A : B = C : D$ (*Hyp.*),
1. On aura $A : C = B : D$. Prop. 16. L. 5.
 2. Donc, selon que A & $>$ $=$ ou $<$ B, C fera pareillement $>$, $=$ ou $<$ D. Prop. 14. L. 5.

C. Q. F.D.



S PROPOSITION XVII. THEOREME XVII.
 Si les grandeurs composées ($A + B$ & $C + D$ comparées à leurs parties B & D)
 sont proportionnelles : les grandeurs divisées le seront aussi.

HYPOTHESE.

$$A + B : B = C + D : D$$

THESE.

$$A : B = C : D.$$

Préparation.

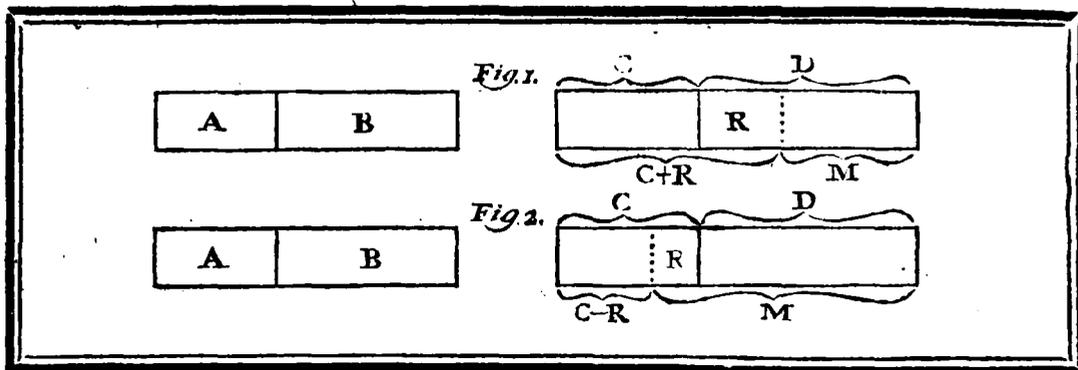
1. Prenez des équimult. quelconques $m A$, $m B$, $m C$, $m D$ des grandeurs A , B , C , D .
2. Prenez encore des équimult. quelconques $n B$, $n D$ des grandeurs B & D .

Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

1. La gdr. entière $m A + m B$ est donc autant multiple de la gdr. $A + B$, que $m A$ l'est de A , ou $m C$ de C . Prop. 1. L. 5.
2. De même, la gdr. entière $m C + m D$ est autant multiple de la gdr. $C + D$, que $m C$ l'est de C . Prop. 1. L. 5.
3. Par conséquent $m A + m B$ est multiple de $A + B$, autant que $m C + m D$ l'est de $C + D$.
4. On voit aussi que les gdrs. entières $m B + n B$, $m D + n D$ sont équimult. des gdrs B & D . Prop. 2. L. 5.
 Or $A + B : B = C + D : D$ (Hyp.), & $m A + m B$, $m C + m D$ sont équimult. des antécédens $A + B$ & $C + D$ (Arg. 3); item $m B + n B$, $m D + n D$ sont équimult. des conséquens B & D (Arg. 4.);
5. Par conséquent, si $m A + m B$ est \rangle , $=$, ou \langle $m B + n B$; $m C + m D$ est aussi \rangle , $=$, ou \langle $m D + n D$.
 Mais, si $m A + m B$ est \rangle , $=$, ou \langle $m B + n B$; en retranchant la partie commune $m B$, } Def. 5. L. 5.
 5. 8 & 9.
6. Le reste $m A$ est encore \rangle , $=$, ou \langle le reste $n B$.
 De même, si $m C + m D$ est \rangle , $=$, ou \langle $m D + n D$; en retranchant la partie commune $m D$,
7. Le reste $m C$ est encore \rangle , $=$, ou \langle le reste $n D$.
8. C'est pourquoi, si $m A$ est \rangle , $=$, ou \langle $n B$; $m C$ est pareillement \rangle , $=$, ou \langle $n D$.
 Mais $m A$ & $m C$ sont des équimult. de A & de C pris comme antécédens (Prop. 1); & $n B$, $n D$ des équimult. de B & D considérés comme conséquens (Prop. 2);
9. Partant $A : B = C : D$.

C. Q. F.D. Def. 5. L. 5.



S PROPOSITION XVIII. THEOREME XVIII.
 SI des grandeurs divisées sont proportionelles ($A : B = C : D$), elles seront encore proportionelles en composant ($A + B : B = C + D : D$).

HYPOTHESE.
 $A : B = C : D :$

THESE.
 $A + B : B = C + D : D.$

DEMONSTRATION.

Sinon, $A + B : B = C + D : D$; autre gdr. $M < \text{ou} > D$.

C A S I. Soit d'abord $M < D$, ou $M + R = D$ (Fig. 1).

Puis donc que $A + B : B = C + D : M$, ou $A + B : B = C + M + R : M$.

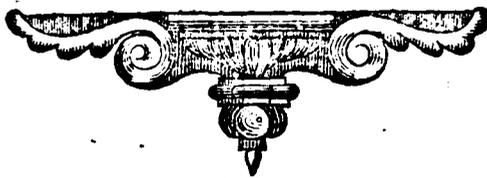
1. On aura dividendo $A : B = C + R : M$. Prop. 17. L. 5.
- Mais $A : B = C : D$. (Hyp.); Prop. 11. L. 5.
2. Partant $C + R : M = C : D$.
- Or $C + R$ est $> C$ (Ax. 8. L. 1); Prop. 14. L. 5.
3. Donc M est $> D$, & la supposition que M soit $< D$, est impossible.

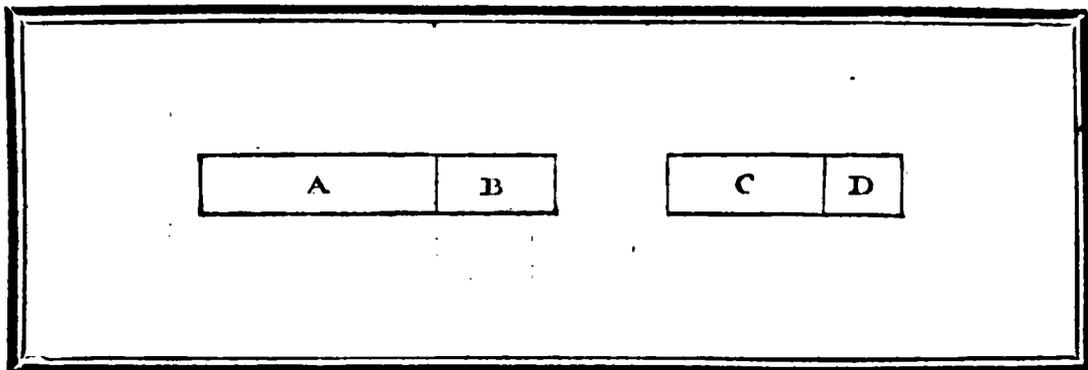
C A S II. Soit ensuite $M > D$, ou $M = D + R$ (Fig. 2).

Puis donc que $A + B : B = C + D : M$, ou $A + B : B = C + D : D + R$.

4. On aura dividendo $A : B = C - R : D + R$. Prop. 17. L. 5.
- Mais $A : B = C : D$. (Hyp.). Prop. 11. L. 5.
6. Partant $C - R : M = C : D$.
- Or $C - R$ est $< C$ (Ax. 8. L. 1); Prop. 14. L. 5.
7. La gdr. M est donc $< D$, & la supposition que M soit $> D$, est impossible.
- La gdr. M ne pouvant donc être ni $< D$ (Arg. 3), ni $> D$ (Arg. 7),
8. Il s'enfuit que M est $= D$; & que $A + B : B = C + D : D$.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIX. THEOREME XIX.
Si le Tout ($A+B$) est au Tout ($C+D$), comme le retranché (A) est au retranché (C), le reste (B) sera aussi au reste (D), comme le Tout ($A+B$) est au Tout ($C+D$).

HYPOTHESE.
 $A+B : C+D = A : C$.

THESE.
 $B : D = A+B : C+D$.

DEMONSTRATION.

Puisque

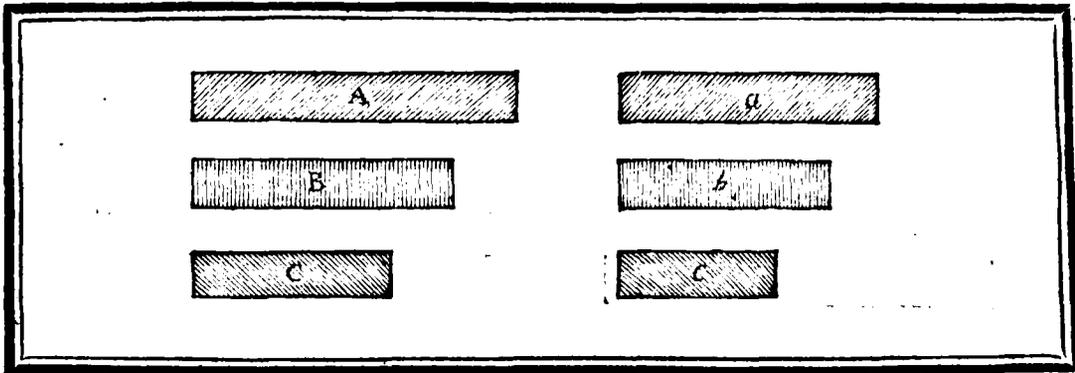
	$A+B : C+D =$	$A : C$	(Hyp.).	
1. Donc alternando	$A+B :$	$A = C+D :$	C	Prop. 16. L. 5.
2. Puis dividendo	$B :$	$A =$	$D : C$	Prop. 17. L. 5.
3. Et alternant de nouveau	$B :$	$D =$	$A : C$	Prop. 16. L. 5.
Mais d'autant que	$A+B : C+D =$	$A : C$	(Hyp.).	
4. Il s'uit que	$B :$	$D = A+B :$	$C+D$	Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E .

Si des grandeurs, composées sont proportionnelles, c. à d. que $A+B : A = C+D : C$
 On peut inférer par *conversion de raison* $A+B : B = C+D : D$ (Def. 17. L. 5).
 Car d'abord $A+B : C+D = A : C$ (Hyp. & Prop. 14).
 C'est pourquoi $A+B : C+D = B : D$ (Prop. 19).
 Donc $A+B : B = C+D : D$ (Prop. 14).





PROPOSITION XX. THEOREME XX.
 S'il y a une suite de trois grandeurs (A, B, C) d'un côté, & une suite de trois autres grandeurs (a, b, c) de l'autre, telles que les raisons de la première suite soient égales aux raisons de la seconde suite, chacune à chacune, prises dans le même ordre direct, il sera vrai, par égalité de raison, que selon que la première grandeur (A) est plus grande, égale, ou moindre que la troisième (C) dans une des suites, de même dans l'autre, la première grandeur (a) sera aussi plus grande, égale, ou moindre que la troisième (c).

HYPOTHESE.
 I. $A : B = a : b.$
 II. $B : C = b : c.$

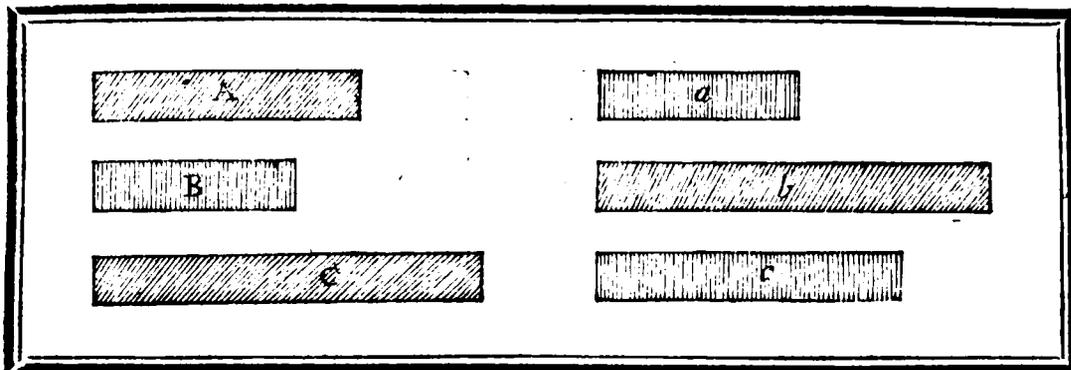
THESE.
 Selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C,
 a est aussi $>$, $=$, ou $<$ c.

DEMONSTRATION.

CAS I. Soit $A > C.$

- P**uis donc que A est $>$ C
1. La Raison $A : B$ est $>$ $C : B.$ Prop. 8. L. 5.
 - Mais $A : B = a : b.$ (Hyp. 1).
 - & $C : B = c : b.$ (Hyp. 2 & Prop. 4. L. 5 Coroll.).
 2. Donc la raison $a : b$ est $>$ $c : b.$ Prop. 13. L. 5.
 3. Partant a est aussi $>$ $c.$ Prop. 10. L. 5.
 4. On prouvera de la même manière, si A est $= C$, qu'aussi a est $= c$; & encore de même; si A est $<$ C , qu'aussi a est $<$ $c.$
 5. Partant, selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C , a sera aussi $>$, $=$, ou $<$ $c.$

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. THEOREME XXI.
 S'il y a une suite de trois grandeurs (A, B, C) d'un côté, & une suite de trois autres grandeurs (a, b, c) de l'autre, telles que les raisons de la première suite soient égales à celles de la seconde suite, chacune à chacune, dans un ordre troublé, il sera vrai, par égalité de raison, que selon que la première grandeur (A) est plus grande, égale, ou moindre que la troisième (C) dans une des suites, de même dans l'autre la première grandeur (a) sera aussi plus grande, égale, ou moindre que la troisième (c).

HYPOTHESE.

- I. $A : B = b : c.$
- II. $B : C = a : b.$

THESE.

Selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C.
 a est aussi $>$, $=$, ou $<$ c.

DEMONSTRATION.

CAS I. Soit $A > C.$

Puis donc que

1. La raison de
 Mais

& invertendo

2. Partant, la raison

3. Et de-là

4. On démontrera de-la même manière, si $A = C$, qu'aussi $a = c$; & encore de même, si $A < C$, qu'aussi $a < c$.

5. Partant, selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C, a sera aussi $>$, $=$, ou $<$ c.

A est $>$ C

$A : B > C : B.$

$A : B = b : c$ (Hyp. 1).

$C : B = b : a$ (Hyp. 2. & Prop. 4. L. 5. Coroll.).

$b : c > b : a.$

c est $<$ a, ou $a >$ c.

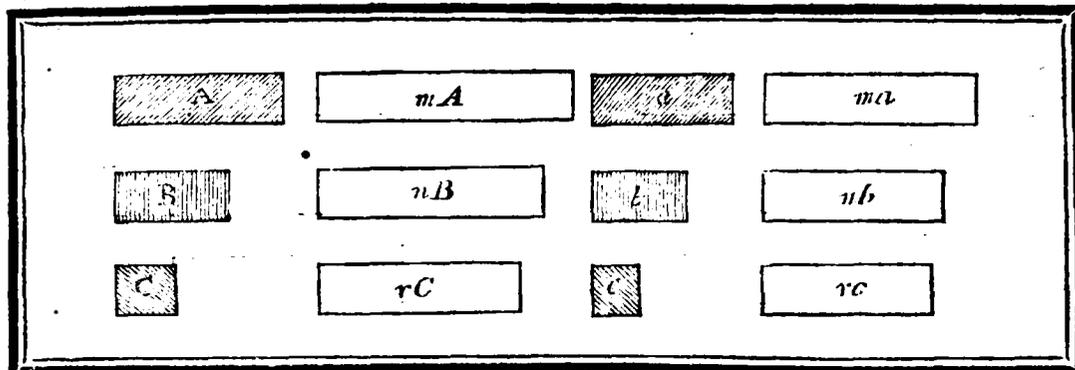
Prop. 8. L. 5.

Prop. 13. L. 5.

Prop. 10. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXII. THEOREME XXII.

Si l y a deux suites de grandeurs (A, B, C &c. a, b, c &c.) de même nombre de part & d'autre, telles que les raisons de l'une soient égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, prises dans un ordre direct, les extrêmes feront proportionnelles par égalité de raison ordonnée, ou *ex æquo ordinatè*.

HYPOTHESE.

- I. $A : B = a : b$.
- II. $B : C = b : c$.

THESE.

$A : C = a : c$.

Préparation.

1. Prenez mA & ma équimult. de A & a.
2. De même nB & nb autres équimult. de B & b.
3. Enfin rC & rc équimult. de C & c.

} Dem. I. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque $A : B = a : b$ (Hyp. 1).

I. On aura $mA : nB = ma : nb$

Prop. 4. L. 5.

De même $B : C = b : c$ (Hyp. 2).

Prop. 4. L. 5.

2. Par conséquent $nB : rC = nb : rc$.

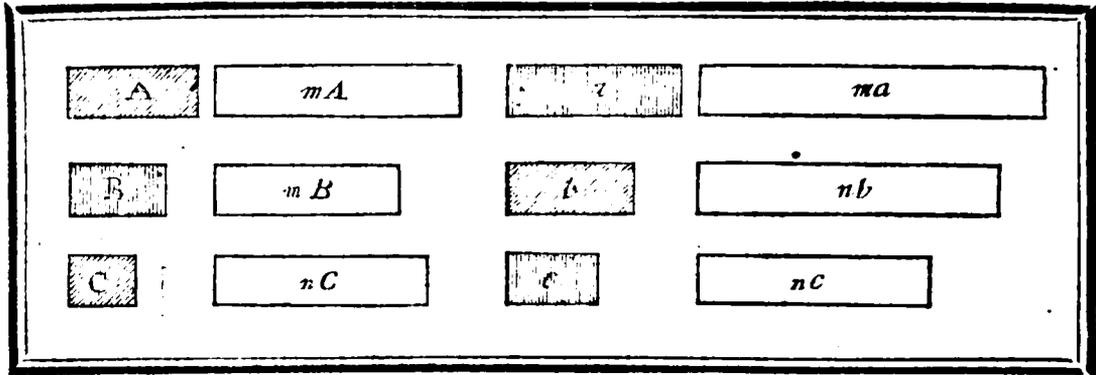
3. Donc mA, nB, rC & ma, nb, rc forment deux suites de grandeurs, telles que les raisons de l'une sont égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre direct.

4. Partant, par égalité de raison, selon que la première mA d'une des suites est $>$, $=$, ou $<$ que la troisième rC , de même la première ma de l'autre suite sera $>$, $=$, ou $<$ que la troisième rc .

Prop. 20. L. 5.
Def. 5. L. 5.

5. D'où il suit que $A : C = a : c$.

C. Q. F. D.



S PROPOSITION XXIII. THEOREME XXIII.
 S'il y a deux suites de grandeurs (A, B, C & a, b, c &c) de même nombre de part & d'autre, telles que les raisons de l'une soient égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre renversé ou troublé, les extrêmes feront proportionelles par égalité de raison troublée, ou *ex æquo perturbatè*.

HYPOTHESE.

- I. $A : B = b : c.$
- II. $B : C = a : b.$

THESE.

$A : C = a : c.$

Préparation.

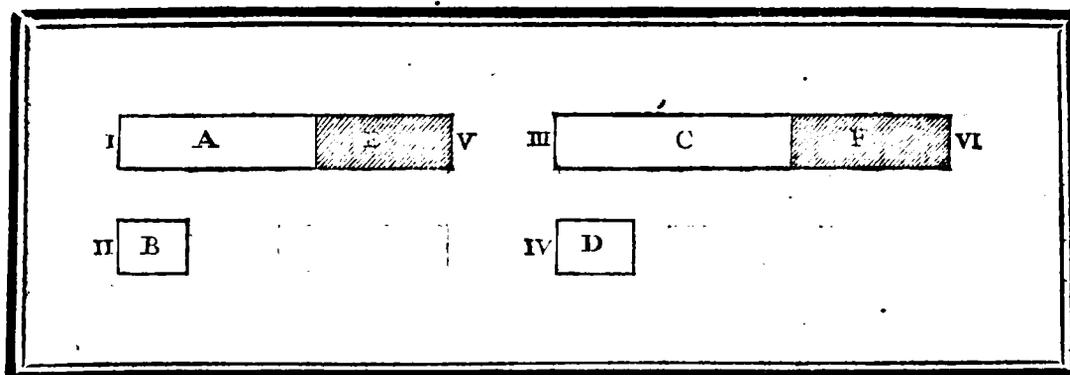
- 1. Prenez mA, mB, ma équimult. des gdrs. A, B, a.
- 2. De même nC, nb, nc autres équimult. des gdrs. C, b, c.

} Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

- P**uisque mA & mB sont des équimult. de A & de B (Prep. 1).
 1. On aura $A : B = mA : mB.$ Prop. 15. L. 5.
 2. Par la même raison $b : c = nb : nc.$
 Mais $A : B = b : c.$ (Hyp. 1).
 3. Donc $mA : mB = nb : nc.$ Prop. 11. L. 5.
 Et à cause que $B : C = a : b.$ (Hyp. 2).
 4. On aura $mB : nC = ma : nb.$ Prop. 4. L. 5.
 5. D'où il suit que $mA, mB, nC,$ & ma, mb, nc forment deux suites de gdrs. telles que les raisons de l'une sont égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre renversé.
 6. Partant, par égalité de raison, selon que la première mA de l'une des suites est $>, =$ ou $<$ que la troisième $nC,$ de même la première ma de l'autre suite sera $>, =,$ ou $<$ que la troisième $nc.$ Prop. 21. L. 5.
 7. C'est pourquoi $A : C = a : c.$ Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV. THEOREME XXIV.
Si quatre grandeurs (A, B, C, D) sont proportionelles, & qu'une cinquieme (E) soit à la seconde (B), comme une sixieme (F) est à la quatrieme (D), la composée (A+E) de la premiere & de la cinquieme sera à la seconde (B), comme la composée (C+F) de la troisieme & de la sixieme sera à la quatrieme (D).

HYPOTHESE.

- I. $A : B = C : D.$
- II. $E : B = F : D.$

THESE.

$A + E : B = C + F : D.$

DEMONSTRATION.

Puisque

1. Il suit par inversion.

Et d'autant que

2. Par égalité ordonnée

3. Donc par composition

Mais à cause que

4. Il suit encore par

égalité ordonnée que

$E : B = F : D$ (Hyp. 2).

$B : E = D : F.$

$A : B = C : D$ (Hyp. 1).

$A : E = C : F.$

$A + E : E = C + F : F.$

$E : B = F : D$ (Hyp. 2).

$A + E : B = C + F : D.$

[Prop. 4. L. 5.
Coroll.

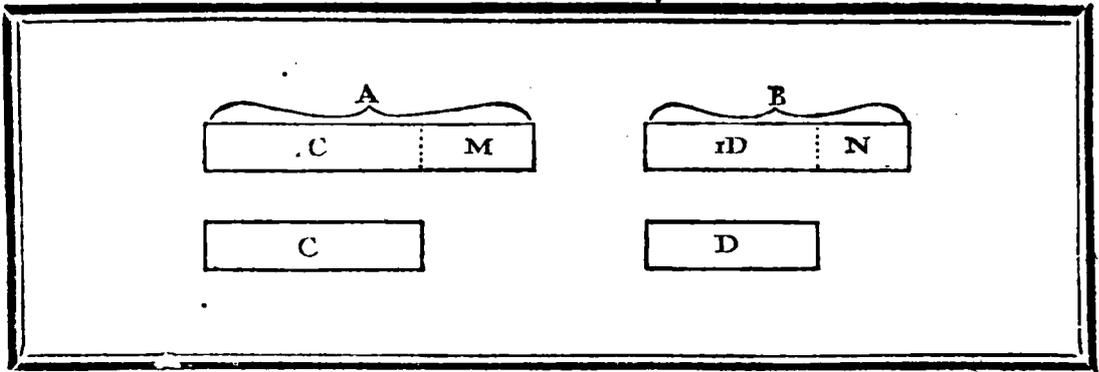
Prop. 22. L. 5.

Prop. 18. L. 5.

Prop. 22. L. 5.

C. Q. F. D.





S I quatre grandeurs (A, B, C, D) sont proportionnelles, la somme de la plus grande (A) & de la plus petite (D) excède la somme des deux autres (B & C).

HYPOTHESE.

1. $A : B = C : D$.
- 1 L. A est le plus grand terme & par conséquent (*) D le plus petit.

THESE.

$$A + D > B + C.$$

Préparation.

Faites $IC = C$ & $ID = D$.

DEMONSTRATION.

Puis donc que $A : B = C : D$ (Hyp. 1), & que $C = IC$ & $D = ID$ (Prep.).

1. Il suit que $A : B = IC : ID$. Prop. 7. L. 5.
2. C'est pourquoi $A : B = M : N$. Prop. 19. L. 5.
3. La gdr. A étant $> B$ (Hyp. 2). Prop. 16. L. 5.
3. La gdr. M est aussi $> N$. Rem.
- De plus, à cause que $C = IC$ & $D = ID$ (Prep. 1 & 2).
4. Il s'ensuit que $IC + D = ID + C$. Ax. 2. L. 1.
- Et comme M est $> N$ (Arg. 3).
5. Il s'ensuit de plus que $IC + D + M > ID + C + N$, c. à. d. que $A + D$ est $> B + C$. Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.

(*) L'Auteur suppose la conséquence de cette Hypothèse suffisamment évidente par les vérités précédentes. Car, puisque $A : B = C : D$ (Hyp. 1), & que $A > C$ (Hyp. 2), B est $> D$ (Prop. 14. L. 5). De même A étant $> B$ (Hyp. 2), C est $> D$ (Rem. de Prop. 16. L. 5); Partant D est le plus petit des IV termes.

A P P E N D I C E .

D E L A

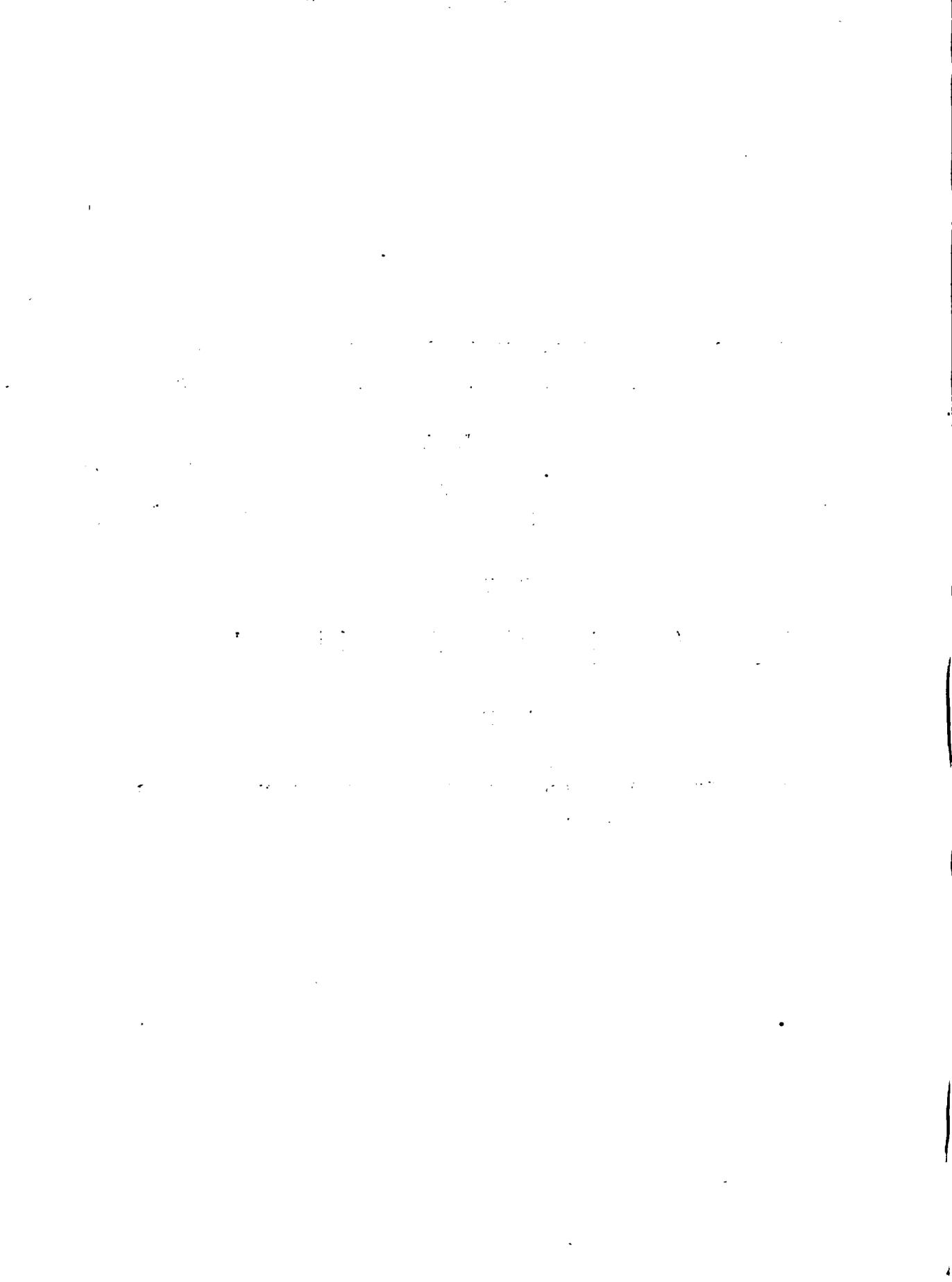
COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION

D E S

R A I S O N S

E T D E S

L O G A R I T H M E S .



A P P E N D I C E.

De la Composition & Décomposition des Raisons & des Logarithmes.

DEFINITION I.

MULTIPLIER, dans un sens général, n'est autre chose que trouver une grandeur P , qui soit à une grandeur homogène F , dans la raison donnée d'une autre grandeur quelconque f , à une unité homogène.

§. 1. Pour peu qu'on se rende attentif à ce qui se passe dans la multiplication numérique, on trouvera qu'il y est question de résoudre ce Problème général. Une raison $1: f$ étant donnée, avec une grandeur quelconque F , trouver une autre grandeur de même genre P , telle que $1: f = F: P$?

Par ex. en multipliant 5 par 3, on cherche un PRODUIT 15, qui contienne le FACTEUR 5 trois fois, comme l'autre FACTEUR 3 contient l'unité sous entendue trois fois. La multiplication des nombres rationels s'achève donc arithmétiquement, en répétant l'un des Facteurs autant de fois que l'unité se trouve répétée dans l'autre. Mais ce caractère de l'addition répétée, qui fixe suffisamment la nature de la multiplication numérique rationnelle, n'étant guères applicable à l'idée de cette opération prise dans un sens plus général, c. à. d. entant qu'elle manie les grandeurs non-rationnelles, on est obligé, pour la définir, de se servir du caractère plus étendu de la proportionalité, en la regardant, comme la manière de trouver une IV proportionnelle à l'unité & aux deux Facteurs.

§. 2. On reconnoit sans peine que multiplier, & trouver une IV proportionnelle à trois termes donnés, sont des opérations analogues, ou plutôt identiques. Il y a cette différence, que, dans la première, on regarde le premier terme comme une unité homogène à un des Facteurs f ; ce qui dispense de faire mention de la division du produit par le premier terme; au-lieu que dans la dernière, on envisage souvent le premier terme comme une grandeur quelconque; ce qui oblige de faire succéder à la multiplication des termes moyens, la division du Produit par le premier. Au reste la raison ne subsistant qu'entre grandeurs de même genre, il est clair que l'unité 1 & l'un des deux Facteurs f doivent nécessairement être homogènes; au-lieu qu'il n'est pas absolument nécessaire que les Facteurs f & F le soient. Ces deux Facteurs peuvent être hétérogènes, comme une ligne & un plan; un plan & un solide &c; tellement que leur produit ne soit néanmoins qu'un plan ou un solide, c. à. d. une quantité homogène au second Facteur F . Car les deux premiers termes, 1 & f ne doivent être considérés que comme une simple raison, où l'on fait abstraction de la quantité spécifique & absolue des termes. A la vérité on dit communément, qu'une ligne multipliée par une ligne fait naître un plan; & qu'un plan multiplié par une ligne produit un solide; mais ces expressions n'étant pas tout à fait justes, elles ne doivent pas être prises au pied de la lettre. Euclide démontre dans la Proposition XII du VI Livre, qu'une ligne multipliée par une ligne produit une ligne; & il prouve, Proposition XXIII, que les plans des parallelogrammes semblables, sont comme les produits de leurs côtés homologues. De sorte que la multiplication d'une ligne par une autre, ne produit pas un plan, mais un nombre, ou une quantité, qui suit la raison du plan.

D E F I N I T I O N II.

DIVISER, dans un sens général, une grandeur D par une autre d , c'est trouver une grandeur Q , qui se rapporte à l'unité, de la même manière que D se rapporte à une grandeur homogène d .

On nomme la gdr. d , le DIVISEUR ; la gdr. D , le DIVIDENDE, & la gdr. Q , le QUOTIENT. Par conséquent Diviser le Dividende D par le Diviseur d , c'est trouver un Quotient Q , qui par son rapport à l'unité 1 , indique la raison du Dividende au Diviseur.

Par ex. en divisant 6 par 2 , on a pour Quotient 3 , qui contenant l'unité trois fois, indique que le Dividende 6 contient le Diviseur 2 , trois fois. D'où l'on voit qu'en général

Le Divif. 2 est au Divid. 6 , comme l'unité 1 est au quotient 3 .

La Définition avertit assez que le Dividende & le Diviseur doivent être des grandeurs de même genre ; & que l'unité & le Quotient doivent être dans le même cas. Car dans cette opération la raison de d à D est donnée, & on demande qu'on l'exprime par la raison de l'unité à Q ; il faut donc que les termes appartenants à la même raison soient de même genre.

La division se réduit donc à trouver une quatrième proportionnelle au Diviseur, au Dividende, & à l'unité.

D E M A N D E I.

ON demande qu'on puisse multiplier & diviser des grandeurs conformément aux Définitions I & II.

On se contente ici de demander qu'on puisse trouver une quatrième proportionnelle à l'unité & à deux autres grandeurs données, ce qui s'appelle multiplier ; qu'on puisse trouver une quatrième proportionnelle à deux grandeurs données & à l'unité, ce qui s'appelle diviser ? On se contente, dis-je, de demander ces vérités de pratique, parceque ce n'est pas ici le lieu d'enseigner les règles de l'effection, réservée aux sciences qui traitent des grandeurs particulières qu'on propose à multiplier ou à diviser. L'Arithmétique exécute ces opérations par des chiffres ; la Géométrie par des constructions linéaires ; & l'Algèbre, comme la science des grandeurs en général, ne les exécute souvent point, se contentant de les indiquer par des caractères convenables : & comme ces caractères sont d'un grand usage, nous nous en servirons, après en avoir expliqué la signification.

H Y P O T H E S E I.

ON représente le produit de deux Facteurs f & F , par l'expression fF , qui dénote par conséquent une grandeur telle que $1 : f = F : fF$ (Def. I). De même le produit de la grandeur m par fF , est représenté par l'expression mfF ; signifiant $1 : m = fF : mfF$, & ainsi des autres.

COROL.

C O R O L L A I R E I.

LA transposition des Lettres ne change point la valeur du produit, c. a. d. $fF = Ff$.

Car	$1 : f = F : fF,$	} (Hyp. 1 & Def. 1).	
Et	$1 : F = f : Ff.$		
Donc alternando	$1 : f = F : Ff.$		Prop. 16. L. 5.
Partant	$F : fF = F : Ff.$		Prop. 11. L. 5.
Mais	$F = F$		
Donc	$fF = Ff.$		Prop. 14. L. 5.

C O R O L L A I R E II.

Lorsqu'on multiplie deux Facteurs égaux r & r ; le produit rr est appelé un QUARRÉ, & le Facteur r sa RACINE. Par conséquent l'unité 1 est à la racine r , comme cette racine r est au carré rr . c. à. d. $1 : r = r : rr.$ (Def. 1).

En multipliant de la même manière le carré rr par la racine r , on trouve le cube rrr . Partant

$$1 : r = rr : rrr. \text{ (Def. 1).}$$

De même, en multipliant le Cube rrr par la racine r , le produit $rrrr$ est appelé un QUARRÉ-QUARRÉ. Donc

$$1 : r = rrr : rrrr. \text{ (Def. 1).}$$

Et ainsi des autres produits à l'infini, auxquels on donne le nom de PUISSANCES. On les nomme première, seconde, troisième, &c, puissance; selon que dans l'expression la lettre (r) désignant la racine, est répétée une, deux, trois &c fois. On les marque aussi de cette manière r^1, r^2, r^3 , caractéristique d'un usage fort étendu, qui a son fondement dans la composition & décomposition des raisons, comme nous l'expliquerons dans la suite.

C O R O L L A I R E III.

Puisque toutes les raisons sont égales à la raison $1 : r$, il s'ensuit que

$$1 : r^1 = r^1 : r^2 = r^2 : r^3 = r^3 : r^4 \text{ \&c.} \quad \text{Prop. 11. L. 5.}$$

c. à. d. toutes les raisons entre les Puissances successives sont des raisons égales & continues. Ou ce qui est la même chose; La suite des Puissances

$$1, r, r^2, r^3, r^4 \text{ \&c.}$$

forme une Progression Géométrique:

} Def. 9. L. 5.
} §. 2.

H Y P O T H E S E II.

LE quotient Q , qui résulte de la Division de la grandeur D par une autre d , sera représenté par le caractère $\frac{D}{d}$; ou $D : d$ tellement que $d : D = 1 : \frac{D}{d}$ (Def. 2).

Les autres caractères plus composés auront la même signification. Ainsi $\frac{D}{ad}$, représentera le Quotient qui vient en divisant la grandeur $\frac{D}{a}$ par a ; de manière que

$$a : \frac{D}{a} = 1 : \frac{D}{ad}.$$

DEFI.

D E F I N I T I O N III.

LEs produits, comme $m A$, $m B$, qui résultent de la multiplication de deux grandeurs A & B , par un même Facteur m , seront nommés des EQUIPRODUITS.

Il ne faut pas confondre les Equimultiples avec les Equiproduits. Lorsque le Facteur m est un nombre entier & rationnel quelconque (par exemp. 7), les quantités $m A$, $m B$ (c. à. d. $7 A$, $7 B$) sont des Equimultiples de A & de B ; mais lorsque la grandeur m représente une grandeur non-rationnelle quelconque comme une racine numérique sourde, ou une circonférence de cercles, ou toute autre grandeur de l'espèce de celles qu'on nomme transcendante, les quantités $m A$ & $m B$ ne sont plus des Equimultiples, mais des Equiproduits des grandeurs A & B .

P R O P O S I T I O N I.

LEs Equiproduits $m A$ & $m B$ sont comme les Facteurs A & B .

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque $m A$ est un produit de A par m ; & $m B$ un produit de B par m ; on peut inférer

$$\left. \begin{array}{l} I : m = A : m A \\ I : m = B : m B \end{array} \right\} \text{Def. 1.}$$

$$\text{Partant } A : m A = B : m B \quad \text{Prop. 11. L. 5.}$$

Donc alternando $A : B = m A : m B$ Prop. 16. L. 5.

Ou ce qui est la même chose $m A : m B = A : B$.

C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N II.

SI quatre grandeurs A , B , C , D , sont en proportion, les Equiproduits $m A$ & $m C$ des antécédens, comparés à d'autres Equiproduits $n B$, $n D$ des conséquens, chacun à chacun, sont encore en proportion.

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque $m A$ & $m C$ sont des Equiproduits de A & C (Hyp.).

On aura $A : C = m A : m C$.

Derechef $n B$ & $n D$ étant des Equiproduits de B & D (Hyp.).

On aura $B : D = n B : n D$.

Mais $A : C = B : D$ (Hyp. & Prop. 16. L. 5).

Partant $m A : m C = n B : n D$.

Et alternando $m A : n B = m C : n D$.

} Prop. 1.

Prop. 11. L. 5.

Prop. 16. L. 5.

C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N III.

SI quatre grandeurs A , B , C , D sont en proportion, & que quatre autres a , b , c , d le soient aussi, les produits $a A$, $b B$, $c C$, $d D$, qui résultent en multipliant chacune par chacune, sont encore en proportion.

D E M O N S T R A T I O N .

Car puisque $A : B = C : D$, prenant les Equiproduits aA & aC des antécédens ; item les Equiproduits bB & bD des conséquens ,
on aura $aA : bB = aC : bD$. Prop. 2.

De même, puisque $a : b = c : d$; si on prend les Equiproduits aC & cC des antécédens, & les Equiproduits bD & dD des conséquens
on aura $aC : bD = cC : dD$. Prop. 2.
Partant $aA : bB = cC : dD$. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E .

SI quatre grandeurs A, B, C, D sont en proportion, leurs Quarrés, leurs Cubes, & leurs Puissances quelconques de même dénomination, sont encore en proportion.

P R O P O S I T I O N I V .

SI quatre grandeurs A, B, C, D sont en proportion, le produit AD des extrêmes, est toujours égal au produit BC des moyens.

D E M O N S T R A T I O N .

Puisque $A : B = C : D$, (Hyp).
Et $D : C = D : C$,
Il suit que $AD : BC = CD : DC$,
Mais $CD = DC$ (Hyp. 1. Coroll. 1).
Partant $AD = BC$.

Prop. 3.

(Prop. 16. L. 5.
Rem.

C. Q. F. D.

D E F I N I T I O N I V .

ON appelle RAISON D'ÉGALITÉ, celle où les deux termes sont égaux entr'eux, Et RAISON D'INEGALITÉ lorsque ces termes sont inégaux.

En particulier on nomme Raison de plus grande inégalité, lorsque l'antécédent est plus grand que son conséquent. Au contraire Raison de moindre inégalité, lorsque l'antécédent est moindre que son conséquent.

C O R O L L A I R E .

LE conséquent devenant l'unité, les raisons $B : 1, C : 1$ &c, sont des raisons de plus grande inégalité, lorsque les antécédens B & C sont $>$ que l'unité. Et par conséquent ces mêmes raisons renversées $1 : B, 1 : C$ seront des raisons de moindre inégalité.

DEFI-

D E F I N I T I O N V.

QUand on renverse les termes d'une raison, tellement que l'antécédent devienne conséquent, & le conséquent antécédent, cette seconde raison est appelée la R É C I P R O Q U E de la première qu'on nomme D I R E C T E.

Par ex. La raison directe 3 : 1 a pour réciproque la raison 1 : 3. De même prenant B : A pour directe, sa réciproque est A : B. En général la grandeur $\frac{1}{A}$ est la réciproque de la grandeur A. Car une grandeur A se rapportant naturellement à l'unité comme conséquent, A est autant que $\frac{1}{A}$.

C O R O L L A I R E.

SI la directe, par ex. 3 : 2, est une raison de plus grande inégalité, sa réciproque 2 : 3 sera nécessairement une raison de moindre inégalité.

D E F I N I T I O N VI.

ON dit qu'une RAISON M : N est COMPOSÉE DE DEUX OU DE PLUSIEURS RAISONS COMPOSANTES A : B, C : D, E : F, &c. lorsqu'elle est égale à la raison qui se trouve entre le produit ACE de tous les antécédens, comparé au produit BDF de tous les conséquens.

Par ex. soient les raisons simples 5 : 2, 2 : 3, 3 : 7 &c. on dira que la raison de 5 : 7 est une raison composée des trois proposées. Car le produit de leurs antécédens est 30, & celui de leurs conséquens 42,

$$\text{Or} \quad 5 : 7 = 30 : 42.$$

H Y P O T H E S E III.

L'Analogie qui règne entre la composition des raisons, & celle des grandeurs, conduit à indiquer la composition des raisons directes, comme l'addition des grandeurs positives, par le signe +.

Ainsi l'expression $\overline{A : B + C : D}$, ou simplement $A : B + C : D$ désigne que la première raison A : B doit être composée avec la seconde C : D, selon la définition précédente.

Mais lorsqu'une raison doit entrer dans la composition réciproquement (Def. 5), tellement que son antécédent multiplie le produit des conséquens, & son conséquent celui des antécédens, on fait précéder une telle raison par le signe —.

Ainsi $\overline{A : B + C : D} - \overline{E : F}$ dénote que les raisons A : B, & C : D doivent être composées avec la réciproque de la raison E : F, c. à. d. avec la raison F : E ; d'où résulte la raison ACF : BDE.

C'est pourquoi les Auteurs voulant exprimer une raison composée par les composantes ont coutume de se servir de l'expression suivante

$$AC : BD = \overline{A : B + C : D} \text{ item } ACF : BDE = \overline{A : B + C : D} - \overline{E : F}.$$

Et

Et il en est de même des autres exemples. On va expliquer le fondement de cette signification du signe — .

P R O P O S I T I O N V.

S'Il y a une suite d'autant de grandeurs A, B, C, D &c. qu'on voudra: la raison de la première A à la dernière D, est composée de toutes les raisons intermédiaires A : B, B : C, C : D.

D E M O N S T R A T I O N.

CAr composant la raison A : B avec la raison B : C, il en résulte la raison A B : C B. Def. 6.
 Mais les termes AB : BC sont des Equiproduits des Facteurs A & C (Def. 3); Prop. 1.
 Partant A : C = AB : BC. Def. 6.
 De même, composant les trois raisons A : B, B : C, C : D, on parvient à la raison ABC : BCD. Prop. 1.
 Mais ces termes sont des Equiproduits des Facteurs A & D (Def. 3); C. Q. F. D.
 Partant A : D = ABC : BCD.

C O R O L L A I R E I.

SI les raisons composantes ne sont pas continues, c. à. d. telles que le conséquent de la précédente devienne l'antécédent de la suivante; on peut les rendre telles en cherchant successivement des IV^{èmes}. proportionnelles à chacune des raisons données (hormis la 1^{re}.) & au conséquent de celle qui la précède.

Par ex. soient les composantes $\overline{A : B}$, + $\overline{C : D}$ + $\overline{E : F}$, on les rendra continues, en faisant,
 $C : D = B : Q$
 $E : F = Q : S$.

Car en mettant les raisons B : Q, item Q : S à la place de leurs égales C : D, & E : F; on a les raisons composantes A : B, B : Q, Q : S qui sont continues.

C O R O L L A I R E II.

UNe raison d'égalité A : A ne produit aucun changement dans la composition des raisons. Car si on compose la raison A : A avec la raison B : C; on trouve la raison A B : A C, égale à la raison de B : C, (Prop. 1). Vérité qui fournit le principe d'Analogie suivant: de même que Zéro ne produit aucun changement dans la composition des grandeurs, la raison d'égalité n'en produit aucun dans la composition des raisons.

C O R O L L A I R E III.

Une raison directe $A : B$, composée avec sa réciproque $B : A$, produit une raison d'égalité, vu que les termes AB & BA de la composée sont égaux (Def. 4 & Cor. 1. Hyp. 1).

C O R O L L A I R E IV.

Puis donc que la composée $AB : BA$, comme raison d'égalité (Cor. 3), équivaut à Zéro en matière de composition des raisons (Cor. 2); les composantes $A : B$ & $B : A$ doivent être considérées comme d'une nature contraire relativement à cette même composition. Car la directe $A : B$, comme une raison d'inégalité, produisant un changement dans la composition, sa réciproque anéantit ce changement, en ramenant la composée à la première valeur.

Par ex. Composant la directe $A : B$ avec la raison $M : N$, la composée $AM : BM$ cesse d'être égale à la primitive $M : N$. Mais en continuant la composition avec la réciproque $B : A$, ce changement est redétruit; attendu que la composée $BAM : BAN$ redvient égale à la primitive $M : N$ (Prop. 1).

H Y P O T H E S E IV.

Puisque dans la composition des raisons, on est obligé de regarder la raison d'égalité (p. ex. $A : A$ ou $AB : BA$) comme équivalente à Zéro (Coroll. 2); on représente sa nature, (ou son effet dans cette composition), par l'expression $A : A = 0$ ou $AB : BA = 0$.

C O R O L L A I R E.

Et d'autant qu'une raison directe $A : B$, composée avec sa réciproque $B : A$ produit une raison d'égalité $AB : BA$ équivalente à Zéro en cette espèce de composition (Prop. 5. Coroll. 3. Dem. 2.) il s'ensuit que $\overline{A : B} + B : A = 0$ (Hyp. 3. & 4). D'où l'on déduit, (en ajoutant de part & d'autre $-\overline{B : A}$)

$$\overline{A : B} = -\overline{B : A}.$$

Ce qui fait voir qu'une raison négative $-\overline{B : A}$ est équivalente à la réciproque $A : B$ de celle qui se trouve affectée du signe $-$. Ou bien, que si on fait précéder une raison quelconque $B : A$ du signe $-$, que l'expression négative qui en résulte dénote la réciproque de cette raison. C'est en cette manière que les signes $+$ & $-$ mis au devant d'une même raison, expriment leur nature contraire (Prop. 5 Coroll. 4). Et cela fait comprendre pourquoi les raisons négatives doivent entrer réciproquement dans la composition (Hyp. 3).

R E M A R Q U E.

Les Commencans doivent se mettre au fait de la correspondance qui règne entre la composition des raisons & celle des grandeurs, & faire attention à la manière de la représenter par les Caractères $+$, $-$, 0 , pour qu'ils ne se trouvent point arrêtés dans les écrits de plusieurs Auteurs célèbres qui en font usage. Cette correspondance est manifeste; car comme dans la

Com-

composition des grandeurs les positives augmentent la somme, que les négatives diminuent, & que celles qui sont égales à Zéro n'altèrent point; de même dans la composition des raisons, celles de plus grande inégalité augmentent la composée, celles de moindre inégalité la diminuent, & celles d'égalité n'y font aucun changement. Ce principe fait voir qu'on peut se servir utilement des signes +, —, o dans les deux espèces de composition, pourvu qu'on les explique conformément aux principes de chacune.

P R O P O S I T I O N VI.

Dans toute Progression Géométrique, les termes équidistans sont proportionels; ou bien leurs raisons sont égales.

D E M O N S T R A T I O N.

Que les grandeurs A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, &c, représentent les termes d'une Progression Géométrique, où les termes B & E, item F & I, soient des termes équidistans. On a donc en vertu de l'égalité & continuité des raisons qui règne dans les Progressions Géométriques,

$$\left. \begin{array}{l} B : C = F : G \\ C : D = G : H \\ D : E = H : I \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Def. 9. L. 5.} \\ \text{\S. 2.} \end{array}$$

Donc

$$\underline{B : E = F : I} \quad \text{Prop. 22. L. 5.}$$

C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N VII.

Dans une Progression Géométrique A, B, C, D, E, F, G, &c, deux termes quelconques sont entr'eux, comme les Puissances de deux autres termes, qui se suivent immédiatement, exprimées par le nombre des raisons égales, interposées entre les deux termes qu'on compare.

D E M O N S T R A T I O N.

Soient les deux termes qu'on compare C & G, entre lesquels il se trouve quatre raisons égales, à sçavoir, les raisons C : D, D : E, E : F, F : G. je dis que

$$\left. \begin{array}{l} C : G = C^4 : D^4 \\ C : D = C : D \\ D : E = C : D \\ E : F = C : D \\ F : G = C : D \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Def. 9. L. 5.} \\ \text{\S. 2.} \end{array}$$

Car

Donc
Mais

$$\underline{CDEF : DEFG = C^4 : D^4.}$$

$$CDEF : DEFG = C : G.$$

Prop. 3.
Prop. 1.

Et

Partant	$C : G = C^4 : D^4$	Prop. 11. L. 5.
Et puis que	$A : B = C : D$ (Def. 9. L. 5. & § 2.)	
On aura	$A^4 : B^4 = C^4 : D^4$	Prop. 3.
Partant	$C : G = A^4 : B^4$	Prop. 11. L. 5.

Ou en général, comme la puissance IV^{me} d'un terme quelconque est à la même puissance du terme suivant.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E I.

Puisque la suite des Puissances 1. R, RR, RRR, &c. commençant par l'unité, forme une Progression Géométrique (Hyp. 1. Cor. 3), il est manifeste qu'entre l'unité & la première puissance R il n'y a qu'une raison. Mais qu'il y en a deux égales entre l'unité & le quarré RR; qu'il y en a trois entre l'unité & le cube RRR & ainsi de suite. C'est pourquoi on marque ces puissances avec les chiffres 1, 2, 3, 4 &c. nommés, EXPOSANS, de cette manière R^1, R^2, R^3, R^4 &c. Où ces exposans dénotent la multiplicité de la raison primordiale 1 : R; c. à d. combien de fois cette raison doit être continuée, avant qu'on arrive au terme dont on considère l'exposant.

C O R O L L A I R E II.

Toutes les puissances de l'unité à l'infini sont égales à l'unité.

Car expliquant r par 1. $1 : 1 = 1 : 1^2$ (Hyp. 1. Coroll. 2).

Or $1 = 1$

Donc $1 = 1^2$

De même $1 : 1 = 1^2 : 1^3$ (Hyp. 1. Coroll. 2).

Or $1 = 1^2$

Donc $1 = 1^3$

Et ainsi de même des autres puissances à l'infini.

Prop. 14. L. 5.

Prop. 14. L. 5.

C O R O L L A I R E III.

Lorsque deux ou plusieurs raisons sont exprimées par une même primordiale (R : 1) ayant pour conséquent l'unité; leur composition s'exécutera par la simple addition des Exposans des antécédens, c. à d. de leurs exposans de multiplicité. Car supposons qu'il faille composer la raison $R^3 : 1$

avec la raison $R^2 : 1$, la composée sera $= R^3 : 1 + R^2 : 1$, (Def. 6. & Hyp. 3).

Mais $\frac{R^3 : 1}{R^2 : 1} = \frac{R : 1 + R : 1 + R : 1}{R : 1 + R : 1}$ (Def. 6.)

& $\frac{R^2 : 1}{R^2 : 1} = \frac{R : 1 + R : 1}{R : 1 + R : 1}$ (Def. 6.)

Partant $\frac{R^3 : 1 + R^2 : 1}{R^2 : 1} = \frac{R : 1 + R : 1 + R : 1 + R : 1 + R : 1 + R : 1}{R : 1 + R : 1}$
 $= \frac{R^5 : 1}{R^2 : 1}$

Def. 6.

Mais $\frac{R^5 : 1}{R^2 : 1} = R^{3+2} : 1$

Par conséquent l'Exposant de multiplicité de la composée est la somme des Exposans des composantes.

DEFI.

D E F I N I T I O N. IX.

U Ne grandeur R est considérée comme la RACINE d'une autre grandeur E, lorsqu'un de ses produits successifs $R^2, R^3, \text{ ou } R^4; \&c.$ devient égal à la grandeur proposée E. En particulier on nomme R la RACINE QUARRÉE de E, lorsque $R R \text{ ou } R^2 = E$; & la RACINE CUBIQUE, quand $R R R \text{ ou } R^3 = E$; & ainsi de suite.

On marque la racine par le signe $\sqrt{\quad}$; & l'ordre des racines par les chiffres 2, 3, 4, &c. nommés EXPOSANS RADICAUX. Ainsi $\sqrt[2]{E}, \sqrt[3]{E}, \sqrt[4]{E}$, dénotent successivement la racine quarrée, cubique, quarré-quarrée de E; & ainsi de suite à l'infini.

D E M A N D E II.

Q U'on puisse trouver les racines quarrées, cubiques, & toutes les autres racines des grandeurs déterminées.

L'Arithmétique détermine ces racines ou exactement, ou à peu près, par ses opérations. L'Algèbre abrège ces opérations au moyen de ses formules générales. Et la Géométrie assigne un certain nombre de ces racines, par des constructions linéaires. On suppose donc que l'extraction effective des racines est possible, afin de pouvoir établir les vérités Théorétiques qui en dépendent.

P R O P O S I T I O N. VIII.

L A racine d'une grandeur E, exprimée par un Exposant radical déterminé, est égale à la première moyenne proportionnelle entre l'unité & la grandeur E; si l'on prend autant de ces moyennes proportionnelles, que l'Exposant radical contient d'unités, moins une.

D E M O N S T R A T I O N.

S Upposons pour fixer les idées, qu'il soit question de la racine quatrième de E, que nous nommerons R; je dis, que prenant entre 1 & E, quatre moyennes proportionnelles moins une, c. à. d. trois, que nous nommerons R, S, T; la première R est égale à la racine quatrième de E.

Car, puisque les grandeurs 1, R, S, T, E, sont en proportion continue,

$$1 : E = 1^4 : R^4$$

Mais

$$1 = 1^4$$

Partant

$$E = R^4$$

Ou

$$\sqrt[4]{E} = R \quad (\text{Def. 9.})$$

Prop. 7.
Prop. 7.
Coroll. 2.
Prop. 14. L. 5.

Et comme le même raisonnement est applicable à tous les Cas, l'énoncé de la Proposition se soutient dans toute sa généralité.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E I.

L'Interposition des moyennes proportionnelles R, S, T, résout la raison de 1 : E, en autant de raisons égales à celle de 1 : R, que l'Exposant radical contient d'unités. Par ex. dans ce cas, les

trois moyennes proportionnelles R, S, T , résolvent la raison de $1 : E$, en ces quatre raisons égales, $1 : R = R : S = S : T = T : E$.

C'est pourquoi si l'on considère la raison de $1 : E$, ou de $1 : E^1$ comme primordiale, & celle de $1 : R$ comme une de ses dérivées; cette raison de $1 : R$ est sousquadruplée de la raison entière $1 : E$, ou elle est $\frac{1}{4}$ des composantes. Celle de $1 : S = 1 : \kappa + R : \bar{S}$ (Def. 6) en est $\frac{3}{4}$, celle de $1 : T = 1 : R + R : S + S : T$ en est $\frac{3}{4}$, enfin celle de $1 : E = 1 : R + R : S + S : T + T : E$ en est $\frac{4}{4}$ ou 1 , c. à. d. elle est égale à la raison entière.

C O R O L L A I R E II.

SI l'on veut donc exprimer les racines analogiquement à la Caractéristique des puissances; il faut regarder R comme $= E^{\frac{1}{4}}$; où la puissance fractionnaire $\frac{1}{4}$ marque que la raison de $1 : E^{\frac{1}{4}}$ est une des quatre raisons égales interposées entre la raison $1 : E$. Ce qui s'accorde avec les principes antérieurs. Car supposant que $E^{\frac{1}{4}}$ dénote la première des trois moyennes proportionnelles entre 1 & E , ou ce qui est la même chose, la racine quatrième de E .

On a $1 : E^1 = 1^4 : E^{(1)^4}$ Prop. 7.

Mais $1 = 1^4$ (Prop. 7. Coroll. 2) & $E^1 = E^{(1)^4}$. Car $(1)^4 = 1$.

Par conséquent $1 : E^1 = 1 : E^1$. Ce qui est vrai, les expressions étant identiques.

De la même manière qu'on exprime R par $E^{\frac{1}{4}}$, on doit exprimer S par $E^{\frac{3}{4}}$; T par $E^{\frac{3}{4}}$; E par $E^{\frac{4}{4}} = E^1$.

C O R O L L A I R E III.

IL suit de ces principes, que les expressions $\sqrt[2]{E}$ & $E^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{E}$ & $E^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{E^3}$ ou $E^{\frac{3}{5}}$; &c. sont identiques. Cependant les dernières sont plus expressives que les premières, en ce qu'elles représentent ces grandeurs comme appartenantes à l'ordre des puissances, ou comme des termes d'autant de raisons dérivées par la voye de l'interposition & de la continuation, c. à. d. de la résolution & de la composition d'une même raison primordiale, ce qui fait leur caractère essentiel.

C O R O L L A I R E IV.

ON voit ce qu'il faut faire pour la résolution des raisons, (comme $1 : R^3$, ou $R^3 : 1$, ayant pour antécédent, ou pour conséquent l'unité) lorsqu'il est question d'en dériver une sousmultipliée quelconque selon un Exposant donné, par ex. 5. On divisera par cet Exposant 5 l'Exposant de multiplicité 3 de la raison proposée, le quotient $\frac{3}{5}$ sera l'Exposant de la sousmultipliée $1 : R^{\frac{3}{5}}$ qu'on cherche.

COROL-

C O R O L L A I R E V.

SI l'on continue la Progression Géométrique A, B, C, D, &c. ou $1 R^1, R^2, R^3,$

d, c, b,	A, B, C, D, &c.
$\frac{1}{R^3} \frac{1}{R^2} \frac{1}{R^1}$	1 R ¹ R ² R ³ , &c.

de l'autre côté de l'unité pour avoir les termes b, c, d, &c. ou $\frac{1}{R^1} \frac{1}{R^2} \frac{1}{R^3} \text{ \&c.}$ On commence cette partie de la progression par la réciproque de la raison $1 : R$, c. à d. par la raison $R : 1$ en faisant $R : 1 = 1 : \frac{1}{R^1}$ Item $R : 1 = \frac{1}{R^1} : \frac{1}{R^2} \text{ \&c.}$ ainsi de suite ; tellement que les termes $\frac{1}{R^1}, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^3} \text{ \&c.}$ deviennent les réciproques des termes équidistans de l'unité $R^1, R^2, R^3, \text{ \&c.}$ Ce qui montre que les raisons $A : b, A : c, A : d,$ sont les réciproques des raisons $A : B, A : C, A : D \text{ \&c.}$ Cette vérité est manifeste : car la directe $A : C$ ou $1 : R^2$ a pour sa réciproque $R^2 : 1$ & celle-ci est égale à la raison de $1 : \frac{1}{R^2}$ (Prop. 6) ; & l'on voit que ce même raisonnement s'applique à tous les autres cas.

C O R O L L A I R E VI.

Puisque les raisons dérivées se composent par la simple addition de leurs Exposans de multiplicité & que les directes, & leurs réciproques sont d'un effet contraire dans la composition des raisons, tellement qu'elles s'entredétruisent, il est de l'ordre analogique de donner à ces réciproques des Exposans de multiplicité négatifs ; afin qu'étant ajoutés dans la composition aux Exposans positifs, ils anéantissent ceux de leurs directes. Par ex. s'il faut composer, la raison $R^5 : 1$ avec la raison $1 : R^2$; on trouve la composée $R^5 : R^2 = R^3 : 1$ (Prop. 5). Mais en donnant à la raison $1 : R^2$ cette forme $R^{-2} : 1$, & en la composant ensuite avec la raison $R^5 : 1$, on trouve la composée $R^{5-2} : 1$ égale à la raison de $R^3 : 1$.

C O R O L L A I R E VII.

IL suit de là que les expressions $\frac{1}{R^1} \text{ \& } R^{-1}, \frac{1}{R^2} \text{ \& } R^{-2}, \frac{1}{R^3} \text{ \& } R^{-3},$ & toutes les autres semblables sont identiques : & par conséquent que $\frac{1}{R^2} : 1.$ designe la même chose que $1 : R^2$ c. à d. la réciproque de la raison $R^2 : 1$.

C O R O L L A I R E VIII.

ET d'autant que la raison d'égalité ne produit ni augmentation ni diminution dans la composition des raisons (Prop. 5 Cor. 2), il est de l'ordre analogique de lui assigner Zéro pour Exposant de

de sa multiplicité. Ainsi lorsqu'on compose les raisons directes $R^2 : 1$ & $R^3 : 1$ &c, avec leurs réciproques $R^{-2} : 1$ & $R^{-3} : 1$ &c. On trouve toujours les raisons $R^0 : 1$, $R^0 : 1$ &c, désignant la raison d'égalité, $1 : 1$. D'où il suit que le caractère R^0 représente constamment l'unité, quelle que puisse être la valeur de R .

C O R O L L A I R E IX.

Puisque la raison $1 : R^3$ est composée des raisons $\overline{1 : R} + \overline{1 : R} + \overline{1 : R}$. (Def. 6 & Hyp. 3.), Et celle de $1 : R^{-3}$, des raisons $1 : R^{-1}$, $+ 1 : R^{-1}$ $+ 1 : R^{-1}$ & ainsi des autres: On voit qu'en général les raisons exprimées par une même primordiale $1 : R$, se composent par la simple addition des Exposans, soit affirmatifs, soit négatifs; & dans l'un ou l'autre cas, soit entiers, ou fractionnaires, c. à. d. potentiels ou radicaux.

C O R O L L A I R E X.

Si on suppose qu'une raison donnée $\overline{f : 1}$ soit exprimée par une raison $R^{\frac{m}{n}} : 1$ dérivée de la primordiale $R : 1$, & une autre $f : 1$, de même par une autre dérivée $R^{\frac{p}{q}} : 1$.

Il est clair que la composée $fF : 1 = R^{\frac{m}{n}} : 1 + R^{\frac{p}{q}} : 1$. sera exprimée par la raison $R^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} : 1$: où l'Exposant de R est la somme des Exposans des composantes $R^{\frac{m}{n}} : 1$. & $R^{\frac{p}{q}} : 1$.

P R O P O S I T I O N IX.

Une raison primordiale $1 : R$ peut être décomposée à l'infini par la voye de l'interposition, & composée à l'infini par la voye de la continuation.

D E M O N S T R A T I O N.

Entre les deux termes 1 & R de la raison donnée, on peut prendre une moyenne proportionnelle $R^{\frac{1}{2}}$, qui résout la raison donnée dans les deux raisons égales $1 : R^{\frac{1}{2}}$, & $R^{\frac{1}{2}} : R^1$ (Prop. 8).

Chacune de ces deux raisons pouvant de même être résolue par l'interposition des moyennes proportionnelles $Q = R^{\frac{1}{4}}$ & $S = R^{\frac{3}{4}}$ (Cor. 1. Prop. 8) en deux raisons égales, la raison entière $1 : R$ se trouvera décomposée en quatre raisons continues & égales $1 : Q : R^{\frac{1}{2}} : S : R$; ou bien $1 : R^{\frac{1}{4}} : R^{\frac{2}{4}} : R^{\frac{3}{4}} : R^1$.

Et comme par l'interposition de quatre autres moyennes proportionnelles, chacune de ces raisons peut-être résolue en deux autres, d'où naîtra par rapport à la raison entière $1 : R$, une résolution en huit raisons égales; & cette interposition pouvant être répétée à l'infini, il est manifeste que toute raison donnée peut être résolue en une infinité de raisons continues & égales, par l'interposition d'une infinité de moyennes proportionnelles.

De même, en formant des termes 1 & R une Progression Géométrique $1, R^1, R^2, R^3, R^4,$

R^4 , &c; on trouve les raisons composées $1 : R^2$, $1 : R^3$, $1 : R^4$ &c. doublées, triplées, quadruplées, &c. de la raison donnée $1 : R$. Et comme cette continuation peut être poussée à l'infini, & que chacune de ces raisons multipliées, peut-être composée avec chacune des raisons sousmultipliées $1 : Q$, $1 : R^{\frac{1}{2}}$ &c; il est clair que cette composition des raisons va à l'infini.

C. Q. F. D.

R E M A R Q U E.

Les raisons $1 : R^1$, $R^1 : R^2$, $R^2 : R^3$, &c. étant égales, la résolution $1 : Q$, $Q : R^{\frac{1}{2}}$, $R^{\frac{1}{2}} : S$, $S : R^1$ &c. de la première, est en même tems la résolution de toutes les autres. Si on compose donc une des multipliées, par ex. la doublée, $1 : R^2$, avec une des sousmultipliées; comme par ex. avec la sousdoublée $1 : R^{\frac{1}{2}}$, on trouvera la raison composée $1 : R^{\frac{3}{2}}$; moyenne entre la doublée & la triplée; où le conséquent $R^{\frac{3}{2}}$ est la moyenne proportionnelle entre R^2 , & R^3 . Il en est de même de toutes les autres compositions.

De plus, les raisons $R^2 : 1$, $R^3 : 1$ &c. étant les réciproques des directes multipliées $1 : R^2$, $1 : R^3$; &c. de même que les raisons $R^{\frac{1}{2}} : 1$ & $R^{\frac{1}{3}} : 1$ &c. sont les réciproques des directes sousmultipliées $1 : R^{\frac{1}{2}}$, $1 : R^{\frac{1}{3}}$ &c; On voit que la résolution & composition de la raison $1 : R$, donne les dérivées de sa réciproque $R : 1$, en renversant les termes.

P R O P O S I T I O N X.

LA moyenne proportionnelle R , entre deux termes M & N , est plus grande que le moindre terme M , & plus petite que le plus grand N .

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque $M : R = R : N$. (Hyp.)
 Il s'ensuit que $M^2 : R^2$ ou $RR : NN = M : N$.
 Mais M est $< N$ (Hyp.)
 Donc M^2 est $< R^2$ & RR est $< NN$
 D'où il suit que M est $< R$ & que R est $< N$.

Prop. 7.

[Prop. 16. L. 5.
 Rem.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E I.

SI l'on place entre M & R une autre moyenne proportionnelle Q ; M est $< Q$, & Q est $< R$. Et si l'on en place une autre nouvelle S , entre R & B , il suit encore que $R < S$ & que S est $< B$. Partant $M < Q, Q < R, R < S, S < N$. c. a. d. les moyennes proportionnelles croissent successivement depuis le moindre terme M , jusqu'au plus grand N .

C O R O L L A I R E II.

Puisqu'on peut prendre une infinité de moyennes proportionnelles a, b, c, d , &c. entre M & N , il est clair que les termes $M a, b, c, d, \dots$ & N passeront successivement par tous les degrés de grandeurs depuis M jusqu'à N .

C O R O L L A I R E III.

Par conséquent toute grandeur quelconque $K > M$ & $< N$, sera égale à quelqu'une des moyennes proportionnelles a, b, c, d , &c. prises entre M & N .

P R O P O S I T I O N XI.

Toute raison $1 : K$ peut être considérée comme une dérivée de quelque primordiale $1 : B$ (supposant $K \& B > 1$.)

D E M O N S T R A T I O N.

D'Abord si K est $=$ à B , ou à une des Puissances de B , la vérité est manifeste. Puisqu'en ce cas, K devient $=$ à B^1 ou B^2 ou B^3 &c. Si K est $< B$, cette grandeur K sera $=$ à l'une des moyennes proportionnelles $B^{\frac{n}{m}}$, qu'on pourra prendre à l'infini entre 1 & B .

(Prop. 10. Coroll. 3.) * Par conséquent la raison $1 : K$ sera $=$ à la raison $1 : B^{\frac{n}{m}}$. Mais cette dernière raison, est une raison dérivée de la Primordiale $1 : B$. Donc aussi en ce cas une raison peut être considérée comme dérivée d'une même Primordiale. Si K est $> B$, la gdr. K tombera entre deux termes quelconques comme B^3 & B^4 , Par conséquent parmi les moyennes proportionnelles de cette raison $B^3 : B^4$, ** il y en aura une $B^{\frac{x}{y}} =$ à K . (Prop. 10. Cor. 3.)

Partant la raison $1 : K$ sera $=$ à la raison $1 : B^{\frac{x}{y}}$. Mais cette dernière raison est une dérivée de la Primordiale $1 : B$. (Prop. 8. Coroll. 1.)
Donc la vérité de la proposition est encore manifeste dans ce cas.

C. Q. F. D.

DEFI-

* En prenant 1 & B à la place de les gdrs. M & N du (Coroll. 3. Prop. 10.)

** En prenant B^3 & B^4 au lieu des gdrs M & N du même Coroll.

D E F I N I T I O N X.

LA suite de toutes les raisons possibles, tant directes, que réciproques, considérées comme ayant été dérivées d'une même raison Primordiale, peut être nommée un **SYSTÈME DE RAISONS.**

C O R O L L A I R E.

Toutes les raisons $A : B, C : D$ &c. peuvent donc être exprimées, par une même Primordiale $I : R$, tellement que $A : B = I : R^{\frac{m}{n}}$ & $C : D = I : R^{\frac{x}{y}}$. Par conséquent, au lieu de faire les opérations de composition, ou de résolution, sur les raisons $A : B, C : D$, &c. on peut les faire sur leurs égales, $I : R^{\frac{m}{n}}$ & $I : R^{\frac{x}{y}}$.

R E M A R Q U E.

LA Primordiale est arbitraire, mais aussitôt qu'on la détermine, tout le Système de raisons qui en dépend est déterminé. Comme chaque raison peut être prise pour Primordiale, il est clair qu'on peut imaginer une infinité de ces Systèmes.

D E F I N I T I O N XI.

Lorsqu'après avoir établi un Système de raisons, on fait correspondre à la Primordiale, $(I : R)$, une quantité arbitraire quelconque L ; & qu'ensuite on fait pareillement correspondre aux autres dérivées (multipliées ou sousmultipliées &c.) de la Primordiale, d'autres quantités multiples ou sousmultiples de l'arbitraire L ; tellement que de quelque manière que les dérivées augmentent ou diminuent, par la voye de la composition ou résolution des raisons, leurs quantités correspondantes augmentent ou diminuent pareillement selon la composition ou résolution des grandeurs; alors ces quantités, analogues en cette manière aux grandeurs des raisons, sont nommées leurs **MESURES**, ou leurs **LOGARITHMES**; Et toute la suite de ces Mesures ou Logarithmes appartenant à un même Système de raisons, s'appelle un **SYSTÈME DE LOGARITHMES.**

C O R O L L A I R E I.

Les Logarithmes étant destinés à ramener la composition & résolution des raisons, laquelle s'exécute par la multiplication ou division des termes, à la composition & résolution des grandeurs, qui s'effectue au moyen de l'addition & de la soustraction; ou bien, le but de l'institution des Logarithmes étant d'indiquer, par leur rapport au Logarithme Primordial, la multiplicité ou sousmultiplicité de leurs raisons correspondantes, relativement à la raison Primordiale; il est clair, que les raisons égales doivent avoir des Logarithmes égaux; & qu'en composant une raison $I : R^2$ de deux raisons égales $I : R + I : R$, il faut composer son Logarithme de deux Logarithmes égaux $I L$ & $I L$, pour avoir le Logarithme $2L$ de la com-

posée $1 : R^2$. Et que pareillement en résolvant la raison $1 : R$ en deux ou plusieurs autres égales p. ex. $1 : R^{\frac{1}{2}}$ & $R^{\frac{1}{2}} : R$, il faut aussi résoudre son Logarithme L , en deux autres égaux, $\frac{1}{2}L$ & $\frac{1}{2}L$, pour avoir le Logarithme de chacune.

Et en général, comme l'exposant de multiplicité ou de sousmultiplicité, p. ex. 2 ou $\frac{1}{2}$ d'une raison composée $1 : R^2$ ou $1 : R^{\frac{1}{2}}$ est multiple ou sous multiple de l'exposant de multiplicité 1 de la Primordiale $1 : R^1$: ainsi le Logarithme $2L$ ou $\frac{1}{2}L$ de la composée, est multiple ou sousmultiple du Logarithme L de cette même Primordiale. D'où l'on voit, qu'on trouve les Logarithmes dérivés, en multipliant le Logarithme Primordial L par les exposans de multiplicité des raisons dérivées auxquelles ils doivent appartenir.

C O R O L L A I R E II.

LE Logarithme Primordial L étant arbitraire, on peut supposer $L = + 1$. Et en ces cas les exposans de multiplicité des raisons dérivées deviennent eux mêmes les Logarithmes de ces raisons. Mais si on fait $L = - 1$ ces mêmes exposans, pris avec leurs signes contraires, se changent en Logarithmes.

C O R O L L A I R E III.

LA raison d'égalité $1 : 1$ ou $1 : R^0$ &c. (Prop. 8. Cor. 8.) ne produisant ni augmentation, ni diminution dans la composition des raisons, il est de l'ordre analogique de lui assigner Zéro pour Logarithme, attendu que Zéro ajouté ou retranché des grandeurs, n'y produit aucun changement.

C O R O L L A I R E IV.

Puis donc que de la composition d'une raison directe $1 : R$ avec sa réciproque $R : 1$, il résulte une raison d'égalité, $R : R$, dont le Logarithme est égal à Zéro (Cor. 3.); il s'ensuit que leurs Logarithmes doivent avoir des signes contraires, tellement que si celui de la directe $1 : R$ est positif, celui de sa réciproque $R : 1$ soit négatif, afin que s'entredétruisant il en résulte Zéro, qui est le Logarithme de la raison d'égalité provenue de leur composition.

D'où l'on voit, que le Logarithme d'une raison réciproque est égal au Logarithme de sa directe pris négativement.

C'est-à-dire

$$\text{Log. } \overline{R : 1} = - \text{Log. } \overline{1 : R}$$

Car puisque

$$\overline{R : R} = \overline{1 : R} + \overline{R : 1}$$

Def. 6.

Il s'ensuit

$$\text{Log. } \overline{R : R} = \text{Log. } \overline{1 : R} + \text{Log. } \overline{R : 1}$$

{ Def. 11.
Coroll. 1.

Or

$$\text{Log. } \overline{R : R} = 0.$$

Donc $\text{Log. } \overline{1 : R} + \text{Log. } \overline{R : 1} = 0$. & ajoutant départ & d'autre $-\text{Log. } \overline{1 : R}$.

On a

$$\text{Log. } \overline{R : 1} = - \text{Log. } \overline{1 : R}.$$

Ar. 2. L. 1.

COROL.

C O R O L L A I R E V.

LE Logarithme d'une raison composée de directes & de réciproques, est donc l'aggrégat des Logarithmes, soit positifs soit négatifs des composantes.

Par exempl. la raison $\overline{AB : DE} = \overline{A : D} + \overline{B : E}$.

Partant $\text{Log. } \overline{AB : DE} = \text{Log. } \overline{A : D} + \text{Log. } \overline{B : E}$.

{ Def. II.
Coroll. I.

Derechef en réduisant la décomposition à l'unité:

Puisque la raison $\overline{AB : DE} = \overline{A : 1} + \overline{B : 1} + \overline{1 : D} + \overline{1 : E}$

Il s'ensuit que $\text{Log. } \overline{AB : DE} = \text{Log. } \overline{A : 1} + \text{Log. } \overline{B : 1} + \text{Log. } \overline{1 : D} + \text{Log. } \overline{1 : E}$. { Def. II.
Cor. I.

Mais d'autant que les Logarithmes des réciproques sont égaux à ceux de leurs directes pris négativement.

On aura $\text{Log. } \overline{1 : D} = -\text{Log. } \overline{D : 1}$, & $\text{Log. } \overline{1 : E} = -\text{Log. } \overline{E : 1}$ Def. II. Cor. 4.

Par conséquent $\text{Log. } \overline{AB : DE} = \text{Log. } \overline{A : 1} + \text{Log. } \overline{B : 1} - \text{Log. } \overline{D : 1} - \text{Log. } \overline{E : 1}$.

C O R O L L A I R E VI.

SI l'on se détermine une fois à donner à une Primordiale de plus grande inégalité $R : 1$, & à toutes ses dérivées $R^2 : 1$, $R^3 : 1$ &c. $R^{\frac{1}{2}} : 1$, $R^{\frac{1}{3}} : 1$ &c. l'unité pour conséquent, les Logarithmes de ces raisons pourront être apellés les Logarithmes des quantités ou nombres R , R^2 , R^3 , $R^{\frac{1}{2}}$, $R^{\frac{1}{3}}$ &c. en supprimant l'unité, leur commun conséquent, comme devant être sous entendu, parce que tout nombre est essentiellement relatif à l'unité. Par ex. si on suppose que la Primordiale soit la raison de $10 : 1$, & son Logarithme correspondant L ; celui de sa doublée $100 : 1$, sera $2L$, & celui de sa triplée $1000 : 1$ sera $3L$ &c. (Def. II. Coroll. I.). On peut donc dire que $1L$ est le Logarithme de 10 , que $2L$ est celui de 100 , & $3L$ celui de 1000 &c. vû que les nombres 10 , 100 , 1000 &c. se rapportent tous à l'unité, & expriment tacitement les raisons de $10 : 1$, $100 : 1$, $1000 : 1$ &c.

Ainsi dans le Système ordonné de cette manière, le Logarithme d'un nombre quelconque N , n'est autre chose que le Logarithme de la raison de $N : 1$.

R E M A R Q U E.

ON peut choisir une grandeur quelconque L , d'un genre quelconque, pour être la mesure de la Primordiale, (comme un nombre, une ligne, une surface, un solide &c.) & en dériver les mesures des autres raisons, en restant toujours dans le même Système & dans le même genre de grandeurs. L'analogie subsiste, pourvû que les mesures soient entr'elles comme les nombres qui expriment la multiplicité des raisons.

Quand on assigne à la Primordiale pour mesure de sa raison, un nombre toutes les autres mesures deviennent numériques, & prennent proprement le nom de Logarithmes terme: qui veut dire Nombres des Raisons, en grec αριθμοι λογων.

P R O P O S I T I O N XII.

LE Logarithme du Produit $f F$ est égal à la somme des Logarithmes des Facteurs f & F .

D E M O N S T R A T I O N.

LE Logarithme du Produit $f F$ est proprement celui de la raison $f F : 1$.
Mais cette raison est composée de la raison $f : 1$ & $F : 1$.

c. a. d. $\overline{f F : 1} = \overline{f : 1} + \overline{F : 1}$.

Def. 6.

Partant les Logarithmes réduisant la composition des raisons à celle des grandeurs,

Il s'ensuit que $\text{Log. } \overline{f F : 1} = \text{Log. } \overline{f : 1} + \text{Log. } \overline{F : 1}$.

} Def. 11.
Coroll. 1.

Or l'unité étant sousentendue comme conséquent, en prononçant les nombres, on peut la supprimer.

Partant $\text{Log. } f F = \text{Log. } f + \text{Log. } F$.

} Def. 11.
Coroll. 6.

C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N XIII.

LE Logarithme du quotient $\frac{M}{N}$ est égal au Logarithme du Dividende moins le Logarithme du Diviseur.

D E M O N S T R A T I O N.

LE Logarithme du nombre $\frac{M}{N}$ est proprement le Logarithme de la raison

$$\overline{\frac{M}{N} : 1} = \overline{M : N}.$$

Def. 2.

Or cette raison est composée de la raison $M : 1$ & de la raison $1 : N$

c. à. d. $\overline{\frac{M}{N} : 1} = \overline{M : 1} + \overline{1 : N}$,

Def. 6.

Par conséquent les Logarithmes représentant la composition des raisons par celle des grandeurs; (Def. 11. Coroll. 1.)

Il suit que le $\text{Log. } \overline{\frac{M}{N} : 1}$ ou $\text{Log. } \overline{M : N} = \text{Log. } \overline{M : 1} + \text{Log. } \overline{1 : N}$

Mais le $\text{Log. } \overline{1 : N}$ est $= - \text{Log. } \overline{N : 1}$ (Def. 11. Coroll. 4.)

Partant le $\text{Log. } \overline{\frac{M}{N} : 1} = \text{Log. } \overline{M : 1} - \text{Log. } \overline{N : 1}$,

Et en supprimant les unités qui sont les conséquens,

On aura $\text{Log. } \frac{M}{N} = \text{Log. } M - \text{Log. } N$.

Def. 11. Cor. 5.

C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N XIV.

LE Logarithme d'une Puissance est égal au Logarithme de la racine de cette Puissance, multiplié par l'exposant potentiel. Et réciproquement; le Logarithme de la racine est égal à celui de la Puissance, divisé par l'exposant radical.

D E M O N S T R A T I O N.

LE Logarithme d'une Puissance quelconque, comme R^3 , est proprement le Logarithme de la Raison $R^3 : 1$. (Def. II. Cor. I.)

Mais $R^3 : 1 = \sqrt[3]{R : 1} + \sqrt[3]{R : 1} + \sqrt[3]{R : 1} = 3 \sqrt[3]{R : 1}$ Def. 6.

Partant $\text{Log. } R^3 : 1 = \text{Log. } \sqrt[3]{R : 1} + \text{Log. } \sqrt[3]{R : 1} + \text{Log. } \sqrt[3]{R : 1} = 3. \text{Log. } \sqrt[3]{R : 1}$ } Def. II.
Coroll. I.

Par conséquent en supprimant l'unité

$\text{Log. } R^3 = 3 \text{Log. } R.$ } Def. II.
Coroll. 6.

Mais le facteur 3 est l'exposant potentiel de R.

Donc, le Logarithme d'une Puissance, est égal au Logarithme de la racine de cette Puissance, multiplié par l'exposant potentiel.

C. Q. F. D. 1^o.

Puis donc que $\text{Log. } R^3 = 3 \text{Log. } R$

Il s'en suit que $\frac{1}{3} \text{Log. } R^3 = \text{Log. } R$

Mais le Diviseur 3 est l'exposant radical de la racine cubique de la Grandeur R^3 .

Donc le Logarithme de la racine est égal à celui de la Puissance divisé par l'exposant radical.

C. Q. F. D. 2^o.

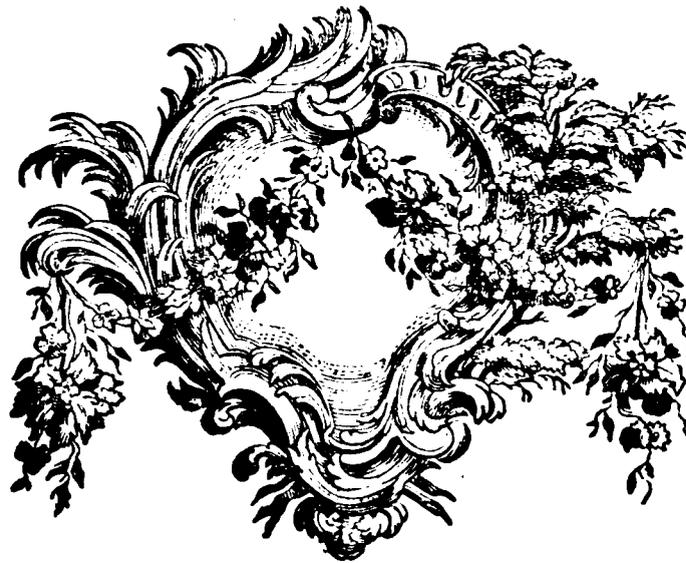
R E M A R Q U E.

ON a calculé les Logarithmes de tous les nombres naturels, depuis l'unité jusqu'à dix mille, & même jusqu'à cent mille, & on les a réduits en Tables. On y a choisi pour raison Primordiale celle de 10 : 1, à laquelle on a donné l'unité pour Logarithme, par conséquent la raison doublée 100 : 1, ou simplement le nombre 100 a dû recevoir 2 pour Logarithme; & de même la triplée 1000 : 1, ou le nombre 1000, a dû avoir 3 pour le sien; & ainsi de même des autres Puissances du nombre 10.

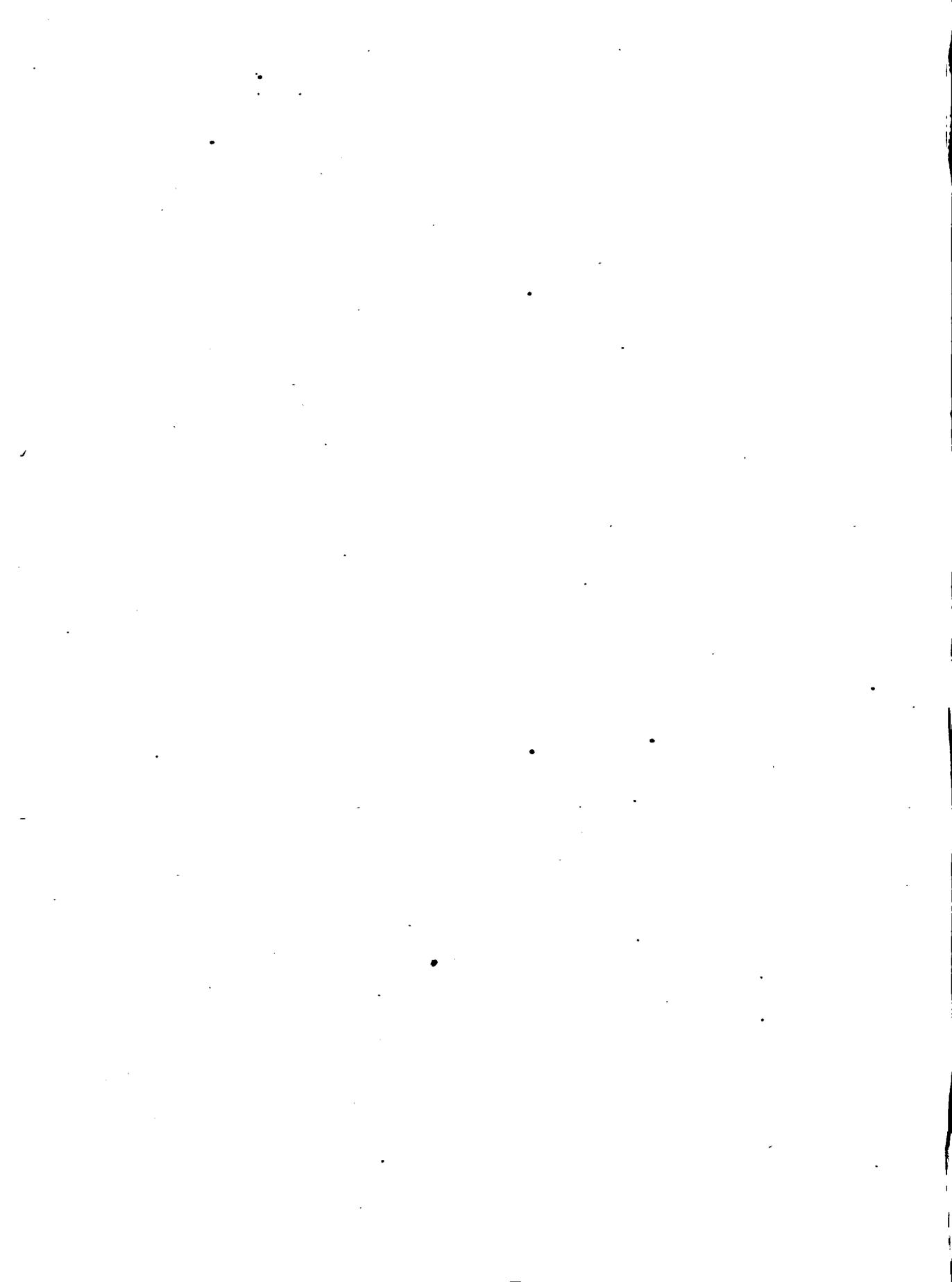
Cherchant ensuite successivement un grand nombre de moyennes proportionnelles entre 10 & 1, on est parvenu à résoudre la raison Primordiale 10 : 1 en plusieurs raisons moyennes, & on a trouvé leurs Logarithmes correspondants en prenant la moitié de la somme des Logarithmes des deux termes extrêmes. De tous ces Logarithmes on n'a rapporté dans la Table que ceux des nombres entiers, compris entre 1 & 10. On a fait la même chose avec les raisons de 100 : 1, de 1000 : 1 &c. en se contentant de ne ranger dans la Table que les Logarithmes des nombres entiers selon leur suite naturelle.

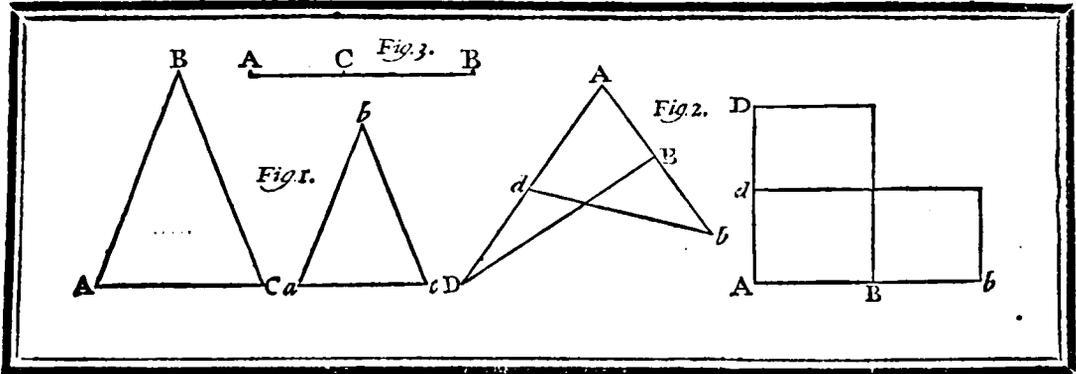
Une

Une explication plus détaillée des adresses de calcul relatives à la Logarithmo-technie, ou construction de la Table des Logarithmes, n'entre pas dans le Plan que nous nous sommes proposés de suivre: les Commençans trouveront ce détail dans tous les Auteurs, & il n'auront pas de peine à l'entendre & à acquérir la pratique du calcul Logarithmique, pour peu qu'ils se soient rendu familiers avec les principes que nous venons d'établir.



L E S
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
L I V R E S I X I E M E.





D E F I N I T I O N S.

I.

ON nomme *figures semblables* (Fig. 1.) celles (ABC, abc), qui ont les angles (A, B, C, & a, b, c,) égaux chacun à chacun, & les côtés (AB, AC, BC & ab, ac, bc,) comprenant ces angles égaux proportionels (c. à. d. $AB : AC = ab : ac$, item $AB : BC = ab : bc$, & $AC : BC = ac : bc$).

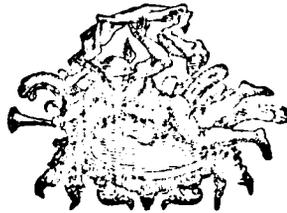
II.

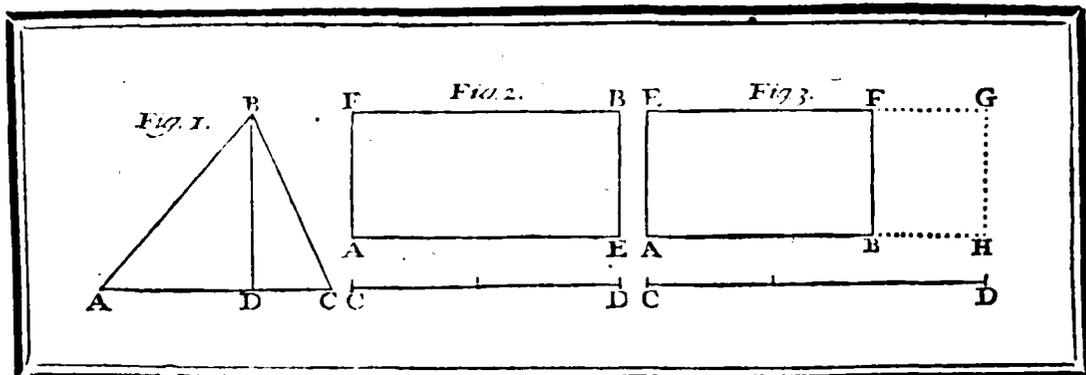
Les figures (DAB, dAb) sont réciproques (Fig. 2.) quand les antécédens (AD, Ab) & les conséquens (Ad, AB) des raisons se trouvent dans l'une & l'autre figure (c. à. d. $AD : Ad = Ab : AB$).

Ou les figures (DAB, dAb) sont réciproques; quand les deux côtés (AD, AB & Ad, Ab) dans chacune de ces figures, environnant un même angle (A) ou des angles égaux, deviennent les extrêmes ou les moyens (Voy. Def. 9. §. 1. L. 5.) d'une même proportion (c. à. d. si $AD : Ad = Ab : AB$).

III.

Une ligne droite (AB) est dite être divisée en moyenne & extrême raison, (Fig. 3.) quand la droite entière (AB) est à la plus grande partie (BC), comme cette plus grande partie (BC) est à la plus petite (AC).





D E F I N I T I O N S .

I V .

LA hauteur d'une figure (ABC) (Fig. 1.) est la perpendiculaire (BD) abaissée du sommet (B) sur la base (AC).

R E M A R Q U E

IL suit de cette Définition que si deux figures, placées sur une même droite, ont la même hauteur, elles seront aussi entre les mêmes Parallèles; puisque par la nature des Parallèles les perpendiculaires abaissées de l'une à l'autre sont toujours égales.

V .

Une raison (AB.BC.CD:DE.EF.FG) est composée de plusieurs autres ($\overline{AB:DE} + BC:EF + CD:FG$), lorsque ses termes résultent de la multiplication des termes de ces raisons composantes (Voy. Def. 6. de l'Append.).

V I .

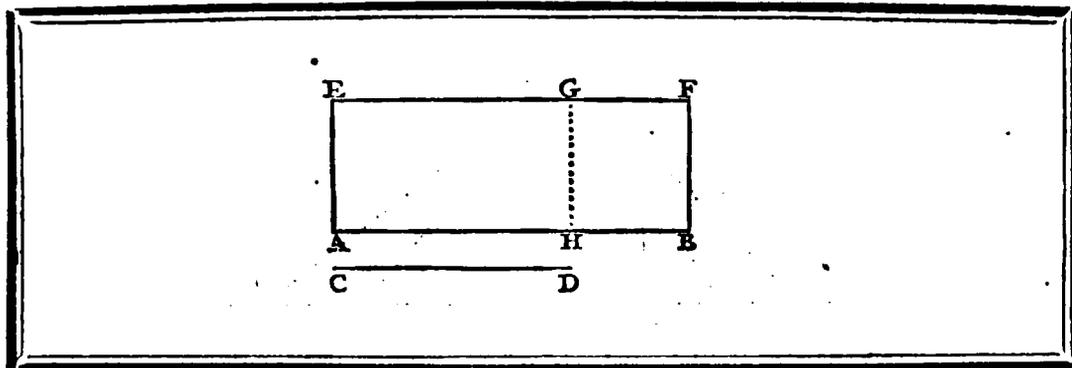
ON dit qu'un Parallélogramme (AB) (Fig. 2.) est appliqué à quelque ligne droite (CD), quand il a pour base ou pour côté cette ligne droite proposée (CD).

V I I .

UN Parallélogramme défaillant (AF) (Fig. 3.) est celui dont la base (AB) est plus petite que la ligne proposée (CD) à laquelle il est dit être appliqué.

V I I I .

Mais le défaut d'un Parallélogramme défaillant (AF) (Fig. 3.) est un Parallélogramme (BG) compris du reste de la droite proposée (CD) & de l'autre côté (BF) du Parallélogramme défaillant.



D E F I N I T I O N S.

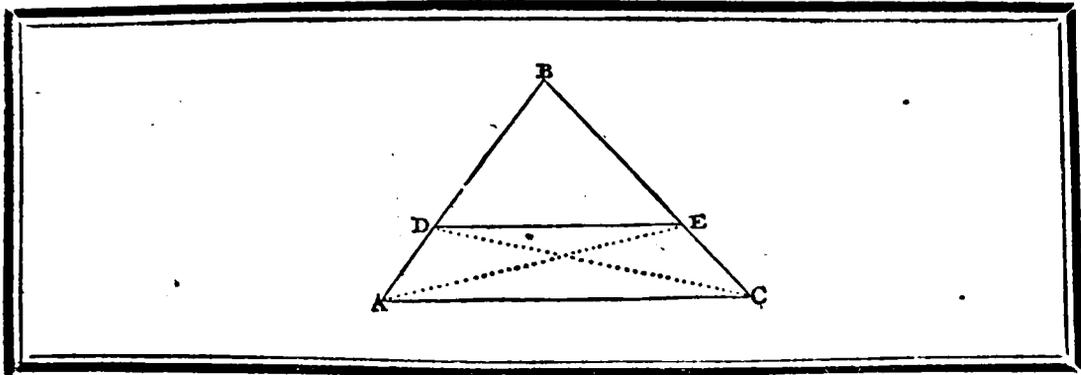
I X.

UN *Parallélogramme excédant* (AF) est celui dont la base (AB) est plus grande que la ligne proposée (CD), à laquelle il est dit être appliqué.

X.

ET l'*excès d'un Parallélogramme excédant* (AF) est un *Parallélogramme* (HF) compris du surplus, dont la base AB surpasse la droite proposée (CD), & de l'autre côté (BF) du *Parallélogramme excédant*.





PROPOSITION II. THEOREME II.
SI une ligne droite (DE) est tirée parallèlement à un côté (AC) d'un Triangle (ABC): elle coupera les deux autres côtés (AB, BC) proportionnellement (c. à. d. que $AD : DB = CE : EB$); & réciproquement, si une ligne droite (DE) coupe proportionnellement les deux côtés (AB, BC), elle sera parallèle au troisieme côté (AC).

HYPOTHESE.
 La droite DE est Plle à AC.

THESE.
 $AD : DB = CE : EB$.

Préparation.

Tirez les droites AE, CD.

Dem. i. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

Puis donc que DE est Plle à AC (*Hyp.*)

1. Le $\triangle DAE$ est \equiv au $\triangle ECD$.

Prop. 37. L. 1.

2. Partant $\triangle DAE : \triangle DBE = \triangle ECD : \triangle DBE$.

Prop. 7. L. 5.

Mais le $\triangle DAE : \triangle DBE = AD : DB$,
 & le $\triangle ECD : \triangle DBE = CE : EB$ (*Prop. 1. L. 6*).

3. Donc $AD : DB = CE : EB$.

Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. 1.

HYPOTHESE.
 $AD : DB = CE : EB$.

THESE.
 La droite DE est Plle à AC.

II. DEMONSTRATION.

Puisque les $\triangle DAE, DBE$ sont entre les mêmes Plls, de même que les $\triangle ECD, DBE$,

1. On aura le $\triangle DAE : \triangle DBE = AD : DB$,
 & le $\triangle ECD : \triangle DBE = CE : EB$.

Prop. 1. L. 6.

Mais $AD : DB = CE : EB$ (*Hyp.*),

2. Donc le $\triangle DAE : \triangle DBE = \triangle ECD : \triangle DBE$.

Prop. 11. L. 5.

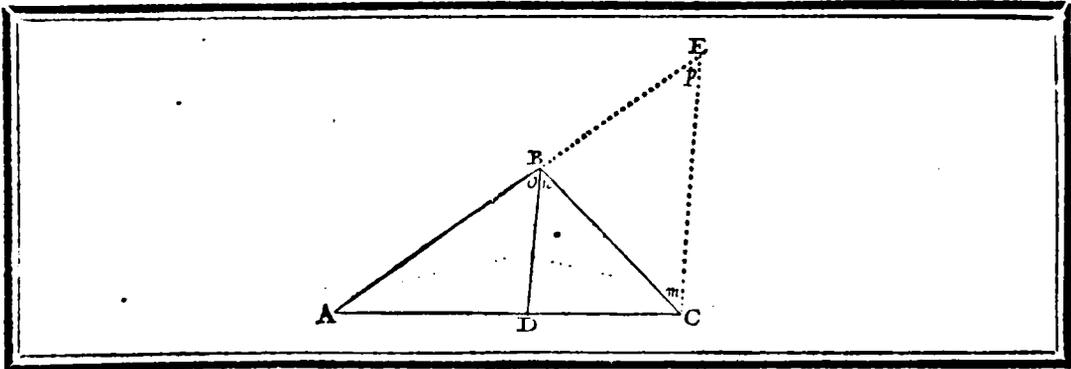
3. C'est pourquoi le $\triangle DAE$ est \equiv au $\triangle ECD$.

Prop. 9. L. 5.

4. Partant la droite DE est Plle à AC.

Prop. 39. L. 1.

C. Q. F. D. 11.



S PROPOSITION III. THEOREME III.
 SI l'angle (B) d'un triangle (ABC) est partagé en deux également par une ligne droite (BD) qui coupe la base du triangle en (D), les segmens de la base (AD, DC) seront proportionels aux deux côtés (AB, BC) du triangle. Et réciproquement, si les segmens de la base (AD, DC) sont proportionels aux deux côtés (AB, BC) du triangle (ABC), la ligne droite (BD) tirée du sommet (B) du triangle au point de section (D), coupera aussi l'angle au sommet (ABC) en deux également.

HYPOTHESE.

La droite BD coupe \sphericalangle ABC en deux également ou $\sphericalangle o = \sphericalangle n$.

THESE.

$AD : DC = AB : BC$.

Préparation.

1. Par le point C tirez CE Plle à DB.
2. Prolongez AB jusqu'à ce qu'elle rencontre CE en E.

Prop. 31. L. 1.
 Dem. 2. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

- P**uisque les droites DB, CE sont Plls (Prep. 1);
1. Il s'enfuit que $AD : DC = AB : BE$.
 2. Et que $\sphericalangle n = \sphericalangle a$ & $\sphericalangle o = \sphericalangle p$.
 Mais, $\sphericalangle o$ étant $=$ à $\sphericalangle n$ (Hyp.).
 3. L'angle m est aussi $=$ à $\sphericalangle p$, & $BC = BE$.
 4. C'est pourquoi $AD : DC =$ ou $AB : BC$

Prop. 2. L. 6.
 Prop. 29. L. 1.

{ Ax. 1. L. 1.
 Prop. 6. L. 1.
 Pr. 7. & 11. L. 5.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.

$AD : DC = AB : BC$.

THESE.

La droite BD coupe \sphericalangle ABC en deux également ou $\sphericalangle o = \sphericalangle n$.

II. DEMONSTRATION.

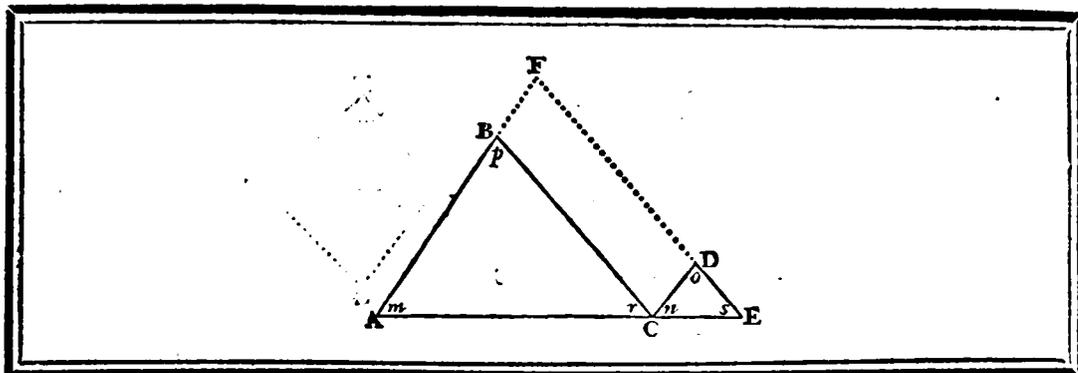
- P**uisque les droites DB, CE sont Plls (Prep. 1),
1. Il s'enfuit que $AD : DC = AB : BE$.
 Mais $AD : DC = AB : BC$ (Hyp.);
 2. C'est pourquoi $AB : BE = AB : BC$.
 3. Par conséquent, $BE = BC$, & $\sphericalangle m = \sphericalangle p$.
 Mais $\sphericalangle m$ est aussi $=$ à $\sphericalangle n$, & $\sphericalangle p = \sphericalangle o$ (Prop. 29. L. 1).
 4. Partant $\sphericalangle n$ est $=$ à $\sphericalangle o$, ou la droite BD coupe \sphericalangle ABC en deux également.

Prop. 2. L. 6.

Prop. 11. L. 5.
 Prop. 9. L. 5.
 Prop. 5. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.
Les triangles équiangles (ABC, CDE) ont les côtés ($AC, AB \& CE, CD \& c$), qui comprennent des angles égaux ($m \& n \& c$), proportionels; & les côtés ($AB, CD \& c$) opposés aux angles égaux ($r \& s \& c$), sont homologues.

HYPOTHESE.

Les $\Delta ABC, CDE$ sont équiangles;
 ou $\forall m \equiv \grave{a} \forall n, \forall r \equiv \grave{a} \forall s,$
 & $\forall p \equiv \grave{a} \forall o.$

THESE.

I. $\begin{cases} AB : AC \equiv CD : CE. \\ AC : BC \equiv CE : DE. \\ AB : BC \equiv CD : DE. \end{cases}$
 II. Les côtés $\begin{cases} AB, CD \\ AC, CE \\ BC, DE \end{cases}$ opposés aux \forall égaux, sont homologues.

Préparation.

1. Placez les $\Delta ABC, CDE$, enforte que les bafes AC, CE se rencontrent directement.
2. Prolongez les côtés AB, DE indéfiniment en F . Dem. 2. L. 1.

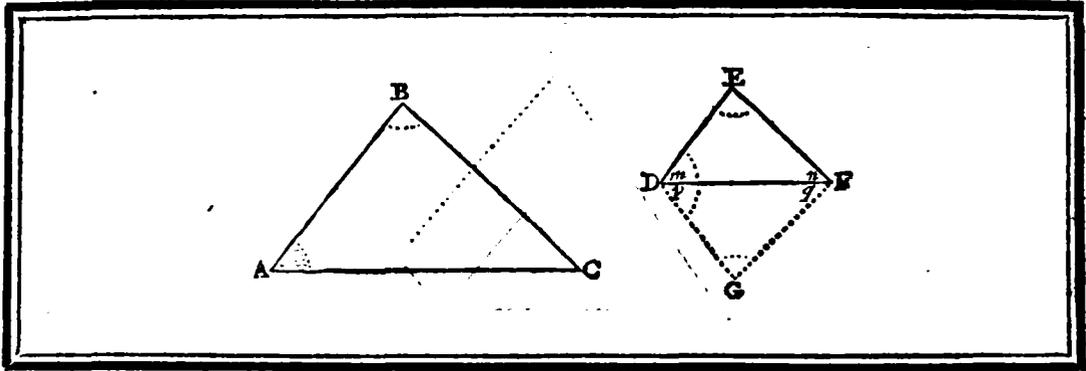
DEMONSTRATION.

- P**uisque les $\forall m + r$ du ΔABC sont $\lt 2L$ (Prop. 17. L. 1), & que $\forall r$ est $\equiv \grave{a} \forall s$ (Hyp),
1. Les $\forall m + s$ sont aussi $\lt 2L$, & AB, DE se rencontreront quelque part en F . } Prop. 27. L. 1.
Rem.
 2. Mais $\forall m$ étant $\equiv \grave{a} \forall n \& \forall r \equiv \grave{a} \forall s$ (Hyp),
 3. Les droites AF, CD item BC, FE sont Pilles,
 4. Et le quadrilatère CF est un Pgame.
 5. Partant les côtés opposés BC, FD ; item CD, BF sont \equiv entr'eux. } Prop. 28. L. 1.
Def. 35. L. 1.
Prop. 34. L. 1.
 6. Or BC étant Pille au côté FE du ΔFAE (Arg. 2),
 7. Donc $AB : BF \equiv AC : CE.$ } Prop. 2. L. 6.
 8. Ou alternando $AB : AC \equiv BF : CE.$ } Prop. 16. L. 5.
 9. Ou bien $AB : AC \equiv CD : CE$; parce que CD est $\equiv \grave{a} BF$ (Arg. 4). } Prop. 7. L. 5.
 10. Pareillement CD étant Pille au côté AF du ΔFEA ; on prouvera de même
 11. Que $AC : BC \equiv CE : DE.$ } Prop. 22. L. 5.
 12. Parconséquent $AB : BC \equiv CD : DE.$ } C. Q. F. D. 1.

Or les côtés AB, CD , item $AC, CE \& BC, DE$, sont opposés aux \forall égaux $r \& s$, item $p \& o$, & $m \& n$.

10. Partant les côtés $AB, CD; AC, CE; BC, DE$ opposés aux \forall égaux, sont homologues. } Def. 12. L. 5.
C. Q. F. D. II.

Coroll. Les triangles équiangles sont donc aussi semblables. (Def. 1. L. 6).



S PROPOSITION V. THEOREME V.
 SI deux triangles (ABC, DEF) ont les côtés proportionels, ces triangles seront équiangles; & les angles (A & m, C & n & c) opposés aux côtés homologues, (BC, EF & AB, DE &c) seront égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

Les $\Delta ABC, DEF$ ont les côtés proportionels, c. à. d.

- I. $\left\{ \begin{array}{l} AB : AC = DE : DF. \\ AB : BC = DE : EF. \\ AC : BC = DF : EF. \end{array} \right.$
- II. Les côtés BC, EF, AB, DE, AC, DF. sont homologues.

THESE.

- I. Les $\Delta ABC, DEF$ sont équiangles.
- II. Les \sphericalangle opposés aux côtés homologues sont égaux; ou $\sphericalangle A = \sphericalangle m$, $\sphericalangle C = \sphericalangle n$, & $\sphericalangle B = \sphericalangle e$.

Préparation.

1. Faites sur la droite DF au point D, $\sphericalangle p = \sphericalangle A$; Et au point F, $\sphericalangle q = \sphericalangle C$.
2. Prolongez les côtés DG, FG jusques à ce qu'ils se rencontrent en G.

Prop. 23. L. 1.
 Prop. 27. L. 1.
 Rem.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les Δ équiangles ABC, DGF, (Prop. I. & Prop. 32. L. 1), & spécialement $\sphericalangle C = \sphericalangle q$ & $\sphericalangle B = \sphericalangle g$.

1. Mais $AB : AC = DG : DF$.
2. Donc $DG : DF = DE : DF$. Et DG est $=$ à DE.

Prop. 4. L. 6.
 Prop. 11. L. 5.
 Prop. 9. L. 5.

Par un même raisonnement on prouvera que la droite GF est $=$ à EF.

3. Puis donc que dans les deux $\Delta DEF, DGF$ les deux côtés DE, EF sont $=$ aux deux côtés DG, GF (Arg. 2 & 3), & que la base DF est commune aux deux Δ ,

4. Les $\sphericalangle n$ & m sont $=$ aux $\sphericalangle q$ & p chacun à chacun,
5. Et les $\Delta DEF, DGF$ sont équiangles.

Prop. 8. L. 1;

Mais le ΔDGF est équiangle au ΔABC (Prop. 1 & Prop. 32. L. 1);

6. Il s'enfuit donc que les $\Delta ABC, DEF$ seront aussi équiangles.

Ax. 1. L. 1.

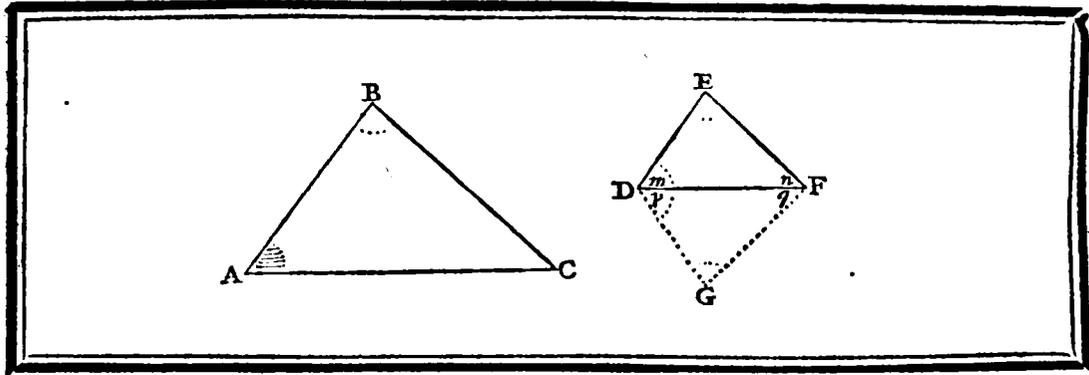
C. Q. F. D. I.

7. De plus, les $\sphericalangle A, C, \& B$ opposés aux côtés BC, AB, AC, étant égaux chacun à chacun aux $\sphericalangle m, n$ & E opposés aux côtés EF, DE, DF; homologues aux côtés BC, AB, AC chacun à chacun, parceque les uns & les autres de ces \sphericalangle , sont égaux chacun à chacun aux $\sphericalangle p, q, G$ (Prop. 1. Prop. 32. L. 1 & Arg. 4),

8. Il s'enfuit, que les $\sphericalangle A, m$; item C, n ; & B, E opposés aux côtés homologues sont égaux.

C. Q. F. D. II.

Coroll. Ces triangles sont donc aussi semblables (Def. 1. L. 6.).



PROPOSITION VI. THEOREME VI.
SI deux triangles (ABC, DEF) ont un angle (A) égal à un angle (m), & les côtés (BA, AC & ED, DF), qui comprennent ces angles, proportionels: les triangles sont équiangles; & les angles (C & n item B & E) opposés aux côtés homologues, (BA, ED item AC, DF) sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. $\sphericalangle A = \sphericalangle m$.
- II. $BA : AC = ED : DF$.
- III. BA, ED; AC, DF sont homologues.

THESE.

- I. Les $\Delta ABC, DEF$ sont équiangles.
- II. Les $\sphericalangle C$ & n , item les $\sphericalangle B$ & E sont = entr'eux.

Préparation.

1. Faites sur la droite DF au point D, $\sphericalangle p = \sphericalangle A$, ou $= \sphericalangle m$, & au point F, $\sphericalangle q = \sphericalangle C$. Prop. 23. L. 1.
2. Prolongez les côtés DG, FG jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en G. Prop. 27. L. 1. Rem.

DEMONSTRATION.

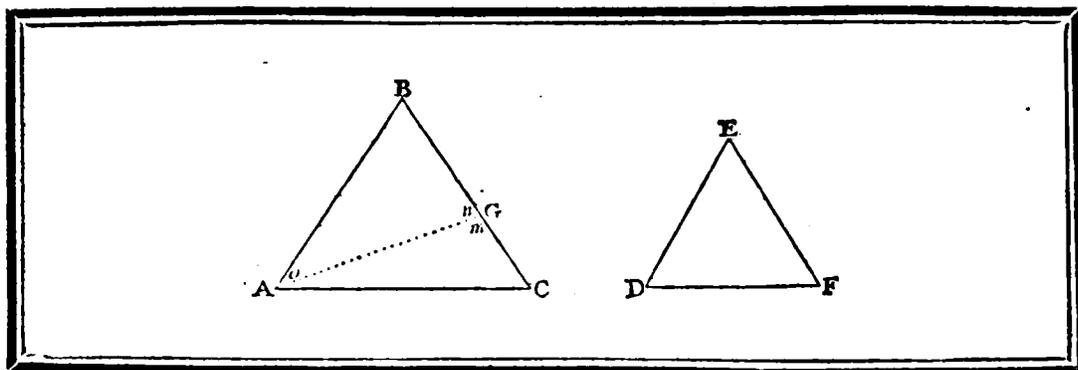
Puisque les $\Delta ABC, DGF$ sont équiangles (*Prep. 1. & Prop. 32. L. 1*), & spécialement $\sphericalangle C = \sphericalangle q$ & $\sphericalangle B = \sphericalangle G$.

1. Or $BA : AC = GD : DF$. Prop. 4. L. 6.
2. Or $BA : AC = ED : DF$ (*Hyp. 2*), Prop. 11. L. 5.
3. D'où il suit que $GD = ED$. Prop. 9. L. 5.
4. Les deux $\Delta DEF, DGF$ ayant donc deux côtés ED, DF = à deux côtés GD, DF (*Arg. 3*) & \sphericalangle compris $m = \sphericalangle$ compris p (*Prep. 1*), Prop. 4. L. 1.
5. Mais les $\Delta ABC, DGF$ étant aussi équiangles (*Prep. 1 & Prop. 32. L. 1*), Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D. I.

6. De plus, chacun des angles C & n étant $= \sphericalangle q$ (*Prep. 1 & Arg. 4*), Ax. 1. L. 1.
7. L'angle C est $= \sphericalangle n$. Prop. 32. L. 1.
7. Partant, $\sphericalangle A$ étant $= \sphericalangle m$ (*Hyp. 1*), l'angle B est aussi $= \sphericalangle E$.
 Et les côtés BA, ED & AC, DF opposés à ces angles, étant homologues (*Hyp. 3. & Def. 12. L. 5*),
8. Il s'enfuit que les $\sphericalangle C$ & n , item B & E opposés à ces côtés homologues, sont = entr'eux. C. Q. F. D. II.

Coroll. Ces triangles sont donc aussi semblables entr'eux (*Prop. 4. L. 6. Coroll.*).



S I deux triangles (ABC, DEF) ont un angle (B) égal à un angle (E), & les côtés (BA, AC & ED, DF) qui comprennent deux autres angles (A & D), proportionnels; les angles restans (C & F) étant l'un & l'autre, ou aigus, ou obtus, les triangles feront équiangles, & les angles (A & D) autour desquels les côtés sont proportionnels feront égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. $\sphericalangle B$ est \equiv à $\sphericalangle E$.
- II. $BA : AC = ED : DF$.
- III. Les $\sphericalangle C$ & F sont l'un & l'autre, ou aigus, ou obtus.

THESE.

Les $\Delta ABC, DEF$ sont équiangles, & les $\sphericalangle BAC$ & D sont \equiv entr'eux.

DEMONSTRATION.

Si non les $\sphericalangle BAC$ & D sont inégaux; & l'un comme BAC est $>$ l'autre D .

Préparation.

Faites donc sur AB , au point A , $\sphericalangle o =$ à $\sphericalangle D$.

Prop. 23. L. 1.

C A S I. Si les $\sphericalangle C$ & F sont l'un & l'autre aigus.

PUIS donc que $\sphericalangle o$ est \equiv à $\sphericalangle D$ (*Prep.*) & $\sphericalangle B =$ à $\sphericalangle E$ (*Hyp. 1*),

1. Il s'enfuit que $\sphericalangle n$ est \equiv à $\sphericalangle F$; & que les $\Delta ABG, DEF$ sont équiangles. Prop. 32. L. 1.
2. Partant $BA : AG = ED : DF$. Prop. 4. L. 6.
- Mais $BA : AC = ED : DF$ (*Hyp. 2*).
3. Par conséquent $BA : AG = BA : AC$; Prop. 11. L. 5.
4. D'où il suit que AG est \equiv à AC . Prop. 9. L. 5.
5. C'est pourquoi $\sphericalangle C$ est \equiv à $\sphericalangle m$. Prop. 5. L. 1.
Et à cause que dans ce Cas $\sphericalangle C$ est $<$ L .
6. L'angle m sera aussi $<$ L ; & $\sphericalangle n$ qui lui est contigu $>$ L . Prop. 13. L. 1.
Mais cet $\sphericalangle n$ étant \equiv à $\sphericalangle F$ (*Arg. 1*), qui est dans ce Cas $<$ L ,
7. Ce même $\sphericalangle n$ seroit aussi $<$ L ; ce qui est impossible.
8. Les $\sphericalangle BAC$ & D sont donc \equiv entr'eux, & le troisieme $\sphericalangle C$ est \equiv à $\sphericalangle F$; ou les $\Delta ABC, DEF$ sont équiangles. Prop. 32. L. 1.

C. Q. E. D.

C A S II. Si les $\sphericalangle C$ & F sont l'un & l'autre obtus.

Par le même raisonnement (*Arg. 1. jusqu'à 5*) du premier Cas, on prouvera que

1. L'angle C est $=$ à $\sphericalangle m$.

2. Donc $\sphericalangle m$ est aussi $> 2L$, & les $\sphericalangle C + m$ seront $> 2L$; ce qui est impossible. Prop. 17. L. 1.

3. Partant, les $\sphericalangle BAC$ & D sont $=$ entr'eux, & le troisième $\sphericalangle C$ est $=$ à $\sphericalangle F$,
ou les $\triangle ABC$, DEF sont équiangles. Prop. 32. L. 1.

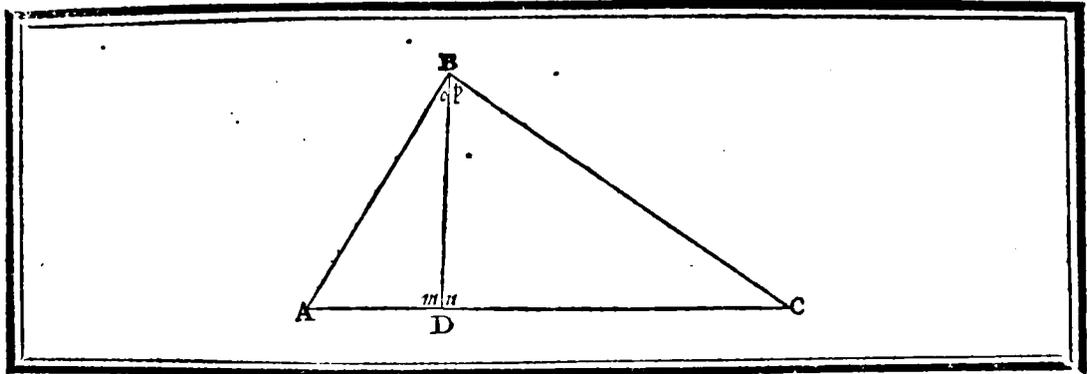
C. Q. F. D.

Remarque.

Si les $\sphericalangle C$ & F sont l'un & l'autre droits, les $\triangle ABC$ & DEF sont équiangles
(*Hyp. 1 & Prop. 32. L. 2*).

Coroll. Ces sortes de triangles sont donc aussi semblables entr'eux (Prop. 4. L. 6. Coroll.).





S I de l'angle droit (ABC) d'un triangle rectangle (ABC) on abaisse sur l'hypotenuse (AC) une perpendiculaire (BD): elle partagera ce triangle en deux autres (ADB, BDC) semblables entr'eux, & semblables au triangle total (ABC).

HYPOTHESE.

- I. Le ΔABC est Rgle en B.
- II. BD est \perp sur AC .

THESE.

Les $\Delta ADB, BDC$ sont semblables entr'eux, & chacun est aussi semblable au Δ total ABC .

DEMONSTRATION.

P uisque dans les deux Δ Rgles ADB, ABC , l'angle m est $=$ à $\angle ABC$ (Ax. 10. L. 1), & $\angle A$ commun aux deux Δ ,

1. L'angle o est $=$ à $\angle C$, & les deux $\Delta ABC, ADB$ sont équiangles.

2. Partant ces deux Δ sont aussi semblables.

On démontrera par un même raisonnement, que

3. Le ΔBDC est semblable au ΔABC .

De même, dans les deux Δ Rgles ADB, BDC l'angle m étant $=$ à $\angle n$ (Ax. 10. L. 1), & $\angle o =$ à $\angle C$ (Arg. 1),

4. L'angle A est $=$ à $\angle p$, & les deux $\Delta ADB, BDC$ sont équiangles.

5. D'où il suit que ces Δ sont semblables.

6. La $\perp BD$ partage donc le ΔABC en deux $\Delta ADB, BDC$ semblables entr'eux (Arg. 5), & semblables chacun au Δ total ABC (Arg. 2 & 3).

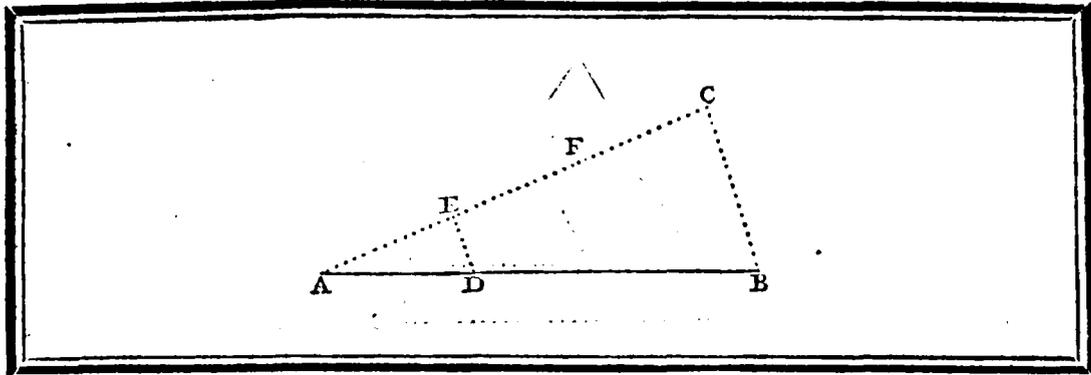
Prop. 32. L. 1.
Prop. 4. L. 6.
Coroll.

Prop. 32. L. 1.
Prop. 4. L. 6.
Coroll.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E.

I L est manifeste que cette perpendiculaire BD , abaissée du sommet de l'angle droit sur la base, est une moyenne proportionnelle entre les deux segments AD & DC de cette base; car les triangles ADB, BDC étant équiangles, on aura $AD:DB = DB:DC$ (Prop. 4. L. 6). De même, chaque côté AB ou BC du triangle ABC est une moyenne proportionnelle entre la base AC & le segment AD ou DC adjacent à ce côté. Car puisque chacun des triangles ADB, BDC est équiangle au Δ total ABC , on aura $AC:AB = AB:AD$, & $AC:BC = BC:DC$ (Prop. 4. L. 6).



R PROPOSITION IX. PROBLEME I.
 Etrancher d'une ligne droite donnée (AB), une partie demandée quelconque.
 (par ex. la troisième partie).

DONNEE.
 La droite AB.

CHERCHEE.
 La droite retranchée AD qui soit
 la troisième partie de AB.

Résolution.

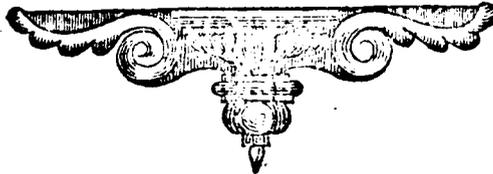
1. Tirez du point A une droite indéfinie AC, qui forme avec AB un angle quelconque BAC. Dem. 1. L. 1.
2. Prenez sur AC trois parties égales AE, EF, FC de longueur arbitraire. Prop. 3. L. 12.
3. Joignez CB. Dem. 1. L. 1.
4. Et par E, tirez ED Plle à CB, qui coupera la droite AB de manière que AD en fera la troisième partie. Prop. 31. L. 1.

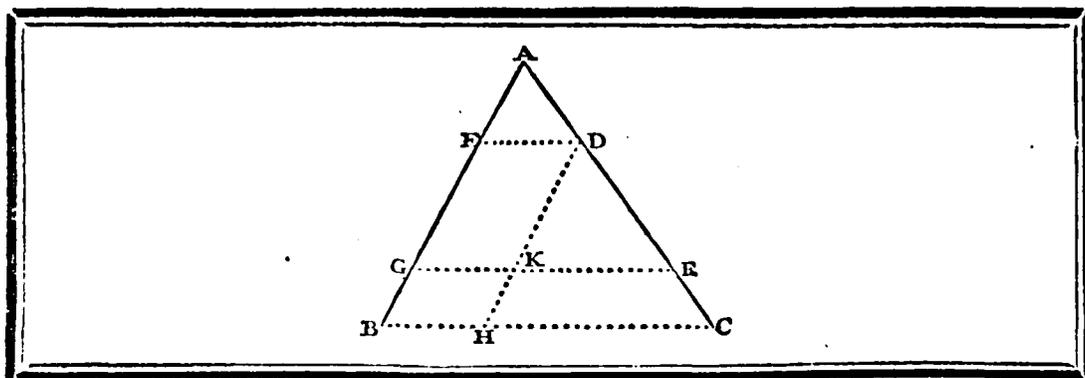
DEMONSTRATION.

- P**uisque ED est Plle au côté CB du $\triangle CAB$ (Prop. 4),
1. $CE : EA = BD : DA$. Prop. 2. L. 6.
 - Or CE est double de EA (Ref. 2);
 2. Partant BD est aussi double de DA.
 3. Par conséquent AB est triple de AD.
 4. La droite retranchée AD est donc la troisième partie de AB.

Def. 8. L. 5.

C. Q. F. F.





C PROPOSITION X. PROBLEME II.
 Couper une droite donnée entière (AB), semblablement à une droite donnée (AC) coupée en tant de points (D, E &c) que l'on voudra.

DONNEE.

- I. La droite entière AB,
- II. Et la droite AC coupée aux points D & E &c.

CHERCHEE.

Couper AB semblablement à AC aux points F & G, enforte que
 $AF : FG = AD : DE$ & que
 $FG : GB = DE : EC$.

Résolution.

1. Joignez les droites données AB, AC sous un angle quelconque BAC.
2. Tirez CB, & des points D & E, les droites DF, EG Plls à CB, item DH Plle à AB.

Dem. 1. L. 1.
 Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque DF est Plle au côté EG du ΔAGE (Ref. 2. & Prop. 30. L. 1), & KE Plle au côté HC du ΔDHC (Ref. 2),

1. $AF : FG = AD : DE$
 Et $DK : KH = DE : EC$.

Prop. 7. L. 6.

Mais les figures KF, HG étant des Pgmcs (Ref. 2. & Def. 35. L. 1).

2. Il s'enfuit que FG est = à DK, & GB = KH.

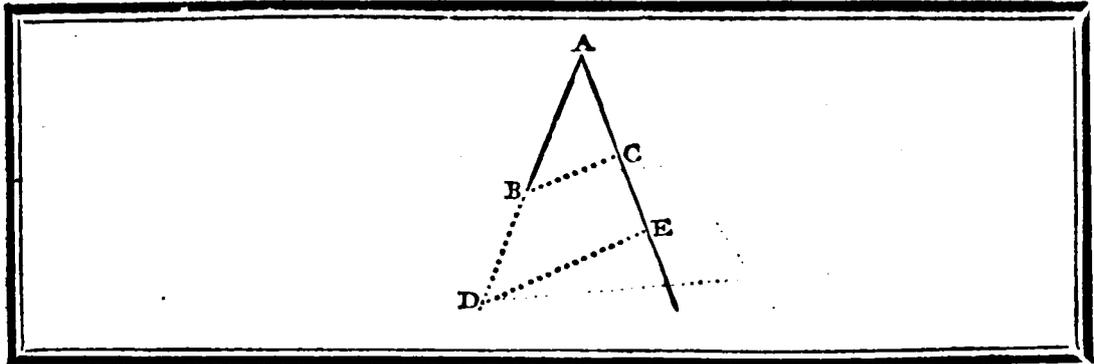
Prop. 34. L. 1.

3. Donc $FG : GB = DE : EC$.

Pr. 7 & 11 L. 5.

4. Partant la droite donnée AB est coupée semblablement à AC aux points F & G; enforte que $AF : FG = AD : DE$ & $FG : GB = DE : EC$.

C. Q. F. F.



TROISIEME PROPOSITION XI. PROBLEME III.
 Trouver une troisième proportionnelle (CE) à deux lignes droites données (AB, AC).

DONNEE.
 Les deux droites AB, AC.

CHERCHEE.
 La droite CE, troisième proportionnelle aux deux droites AB, AC, c. à d. telle que $AB : AC = AC : CE$.

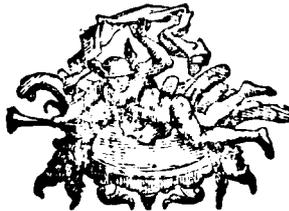
Résolution.

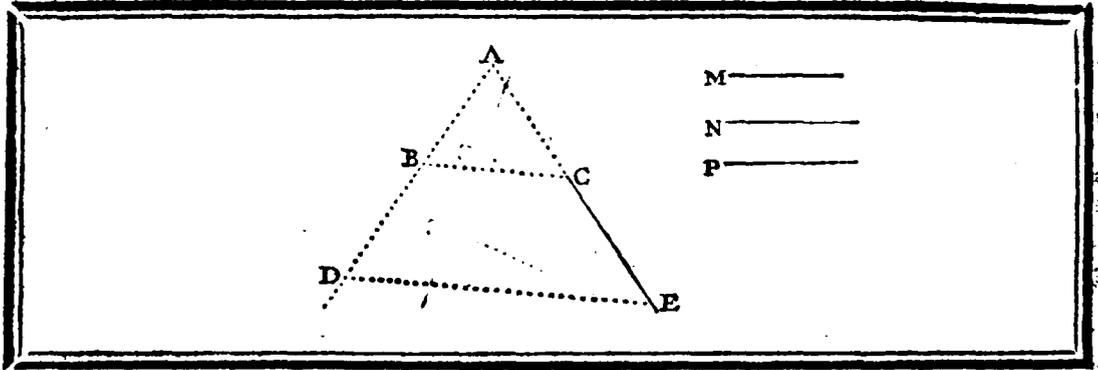
1. Joignez les deux droites AB, AC, en un \sphericalangle quelconque BAC. Prop. 3. L. 1.
2. Prolongez les, & faites $BD = AC$. Dem. 1. L. 1.
3. Joignez BC, Prop. 31. L. 1.
4. Et par l'extrémité D de la droite AD, tirez DE Plle à BC.

DEMONSTRATION.

Puis donc que BC est Plle à DE (Ref. 4),
 1. $AB : BD = AC : CE$. Prop. 2. L. 6.
 Mais BD est $= AC$ (Ref. 2);
 2. Partant $AB : AC = AC : CE$. Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. F.





TROISIÈME PROPOSITION XII. PROBLEME IV.
 Trouver une quatrième proportionnelle (CE) à trois lignes droites données (M, N, P).

DONNER.
 Les trois droites M, N, P.

CHERCHER.
 La droite CE, quatrième proportionnelle
 à M, N, P, c. à. d. telle que
 $M : N = P : CE$.

Résolution.

1. Menez les deux droites AD, AE, formant un ∇ quelconque DAE. Prop. 3. L. 1.
2. Faites $AB = M$; $BD = N$; $AC = P$. Dem. 1. L. 1.
3. Joignez BC. Prop. 31. L. 1.
4. Par l'extrémité D de la droite AD, tirez DE Plle à BC.

DEMONSTRATION.

Puis donc que BC est Plle à DE (Ref. 4),

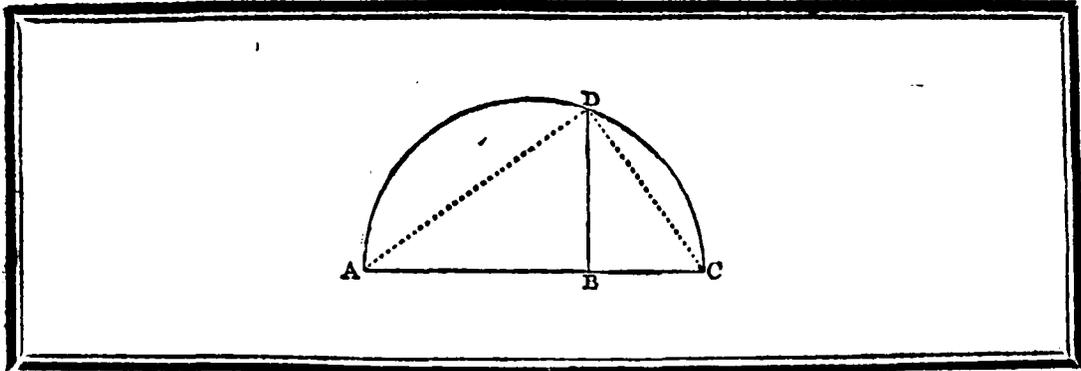
1. $AB : BD = AC : CE$, Prop. 2. L. 6.

Or $AB = M$, $BD = N$, & $AC = P$ (Ref. 2);

2. Partant $M : N = P : CE$. Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. E.





T PROPOSITION XIII. PROBLEME V.
 Trouver une moyenne proportionnelle (BD); entre deux lignes droites données (AB, BC).

DONNEE.
 Les deux droites AB, BC.

CHERCHEE.
 La droite BD, moyenne proportionnelle entre AB & BC, c. à d.
 telle que $AB : BD = BD : BC$.

Résolution.

1. Joignez les deux droites AB, BC en une même droite AC.
2. Décrivez sur AC le demi \odot ADC. Dem. 3.
3. Sur AC, au point B, élevez la \perp BD, jusqu'à la \odot en D. Prop. 11. L. 1.

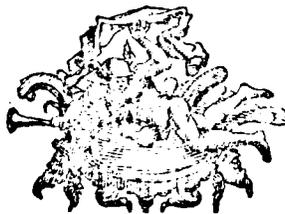
Préparation.

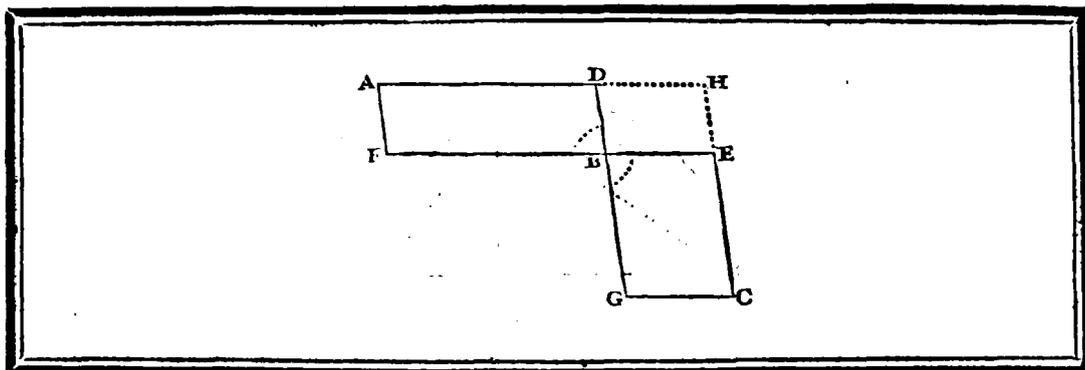
Joignez AD, & CD. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uis donc que \sphericalangle ADC se trouve dans un demi cercle (*Ref. 2, & Prep.*),
1. C'est un angle droit. Prop. 31. L. 3.
 2. C'est pourquoi le \triangle ADC est rectangle en D, & BD est une \perp abaissée du sommet D de l'angle droit, à la base AC (*Ref. 3*). Prop. 8. L. 6.
 3. Par conséquent $AB : BD = BD : BC$. Coroll.

C. Q. F. F.





D PROPOSITION XIV. THEOREME IX.
 Dans les Parallélogrammes égaux (AB, BC), qui ont un angle (FBD) égal à un angle (GBE), les côtés (FB, BD & GB, EB), alentour de ces angles égaux, sont réciproquement proportionels (c. à. d. $FB:BE = GB:BD$). Et les Parallélogrammes, qui ont un angle (FBD) égal à un angle (GBE), & les côtés (FB, BD & GB, BE), alentour de ces angles égaux, réciproquement proportionels, sont égaux.

HYPOTHESE.
 I. Le Pgme AB est = au Pgme BC.
 II. $\angle FBD$ est = à $\angle GBE$.

THESE.
 $FB : BE = GB : BD$.

Préparation.

1. Disposez les deux Pgmes AB, BC, tellement que les côtés FB, BE ne forment qu'une même ligne droite FE.
2. Achevez le Pgme DE, en prolongeant AD & CE en H. Dem. 2.L. 1:

I. DEMONSTRATION.

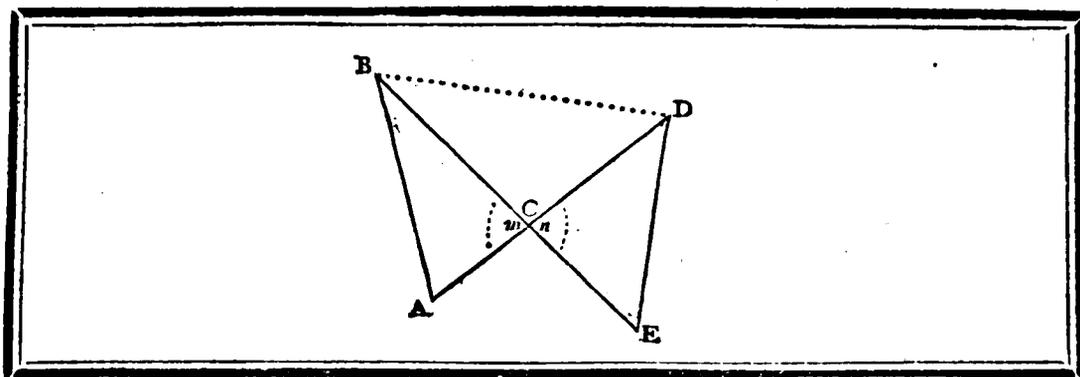
- Puisque les $\angle FBD, GBE$ sont égaux (*Hyp. 2*); & que les droites FB, BE ne forment qu'une même droite FE (*Prep. 1*),
1. Les droites GB, BD ne formeront aussi qu'une même droite GD: Prop. 14.L. 1.
 Mais le Pgme AB étant = au Pgme BC (*Hyp. 1*),
 2. Le Pgme AB : Pgme DE = Pgme BC : Pgme DE: Prop. 7. L. 5.
 Or les Pgmes AB, DE item BC, DE ont la même hauteur (*Prep. 2. Arg. 1 & Def. 4. L. 6. Rem.*);
 3. C'est pourquoi le Pgme AB : Pgme DE = FB : BE } Prop. 1. L. 6.
 & le Pgme BC : Pgme DE = GB : BD } Prop. 11. L. 5.
 4. Partant $FB : BE = GB : BD$. (*Arg. 2.*) C. Q. F. D.

HYPOTHESE.
 I. $FB : BE = GB : BD$.
 II. $\angle FBD$ est = à $\angle GBE$.

THESE.
 Le Pgme AB est = au Pgme BC.

II. DEMONSTRATION.

1. ON démontrera comme auparavant que les droites GB, BD ne forment qu'une même droite GD.
 Or les Pgmes AB, DE item BC, DE ont la même hauteur (*Prep. 2. Arg. 1 & Def. 4. L. 6. Remarque*).
 2. Partant le Pgme AB : Pgme DE = FB : BE. } Prop. 1. L. 6.
 & le Pgme BC : Pgme DE = GB : BD
 - Or $FB : BE = GB : BD$ (*Hyp. 1*).
 3. C'est pourquoi le Pgme AB : Pgme DE = Pgme BC : Pgme DE. Prop. 11. L. 5.
 4. Partant le Pgme AB est = au Pgme BC. Prop. 9. L. 5.
- C. Q. F. D.**



PROPOSITION XV. THEOREME X.
SI deux triangles égaux (ACB, ECD) ont un angle (m) égal à un angle (n): les côtés (AC, CB, & EC, CD), alentour de ces angles égaux, sont réciproquement proportionels. Et si deux triangles (ACB, ECD) ont un angle (m) égal à un angle (n), & les côtés (AC, CB, & EC, CD), alentour de ces angles égaux, réciproquement proportionels, ces triangles sont égaux.

C A S I

HYPOTHESE.

- I. Le ΔACB est \equiv au ΔECD .
- II. $\forall m$ est \equiv à $\forall n$.

THESE.

Les côtés AC, CB, & EC, CD, sont réciproquement proportionels, ou $AC : CD = EC : CB$.

Préparation.

1. Disposez les deux $\Delta ACB, ECD$, enforte que les côtés AC, CD; ne forment qu'une même droite AD.
2. Tirez la droite BD.

Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque $\forall m = \forall n$ (Hyp. 2), & que les droites AC, CD, ne forment qu'une même droite AD (Prep. 1),

1. Les lignes EC, CB, ne formeront aussi qu'une même droite EB.

Prop. 14. L. 1.

Mais le ΔACB étant \equiv au ΔECD (Hyp. 1),

2. Le $\Delta ACB : \Delta CBD = \Delta ECD : \Delta CBD$.

Prop. 7. L. 5.

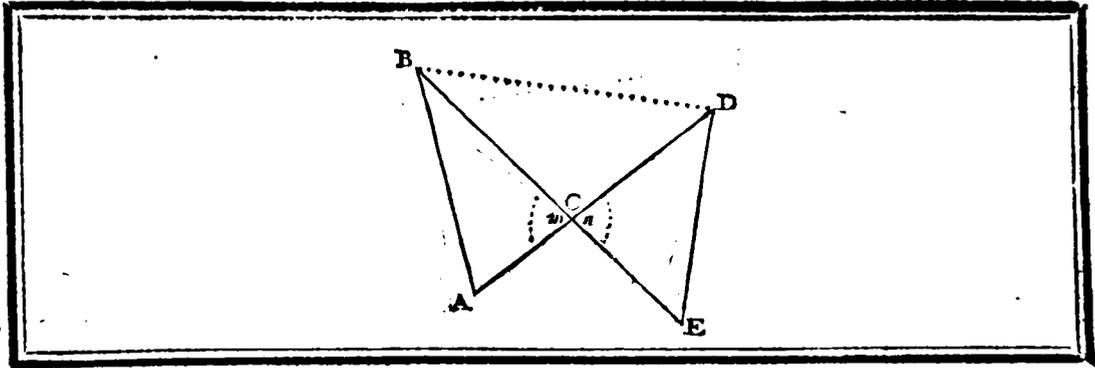
Or les $\Delta ACB, CBD$, item $\Delta ECD, CBD$, ont la même hauteur (Prep. 2 Arg. 1 & Def. L. 6. Rem.);

3. C'est pourquoi le $\Delta ACB : \Delta CBD = AC : CD$.
 & le $\Delta ECD : \Delta CBD = EC : CB$.

Prop. 1. L. 6.

4. Partant $AC : CD = EC : CB$. (Arg. 2 & Prop. 11. L. 5.)

C. Q. F. D.



C A S II.

HYPOTHESE

- I. $AC : CD = EC : CB.$
- II. Et $\sphericalangle m = \sphericalangle n.$

T H E S E .

Le $\triangle ACB$, est = au $\triangle ECD.$

Préparation.

- 1. Disposez les deux $\triangle ACB, ECD,$ en sorte que les côtés AC, CD ne forment qu'une même droite $AD.$
- 2. Tirez la droite $BD.$

D E M O N S T R A T I O N .

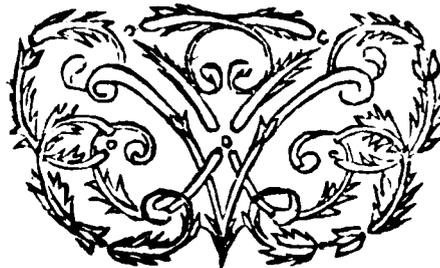
- 1. **O**N démontrera, comme dans le premier Cas, que EC, CB ne forment qu'une même droite $EB.$
Et puisque les $\triangle ACB, CBD,$ item les $\triangle ECD, CBD,$ ont la même hauteur (*Prep. 2 Arg. 1. & Def. 4. L. 6 Rem.*).
- 2. Le $\triangle ACB : \triangle CBD = AC : CD,$
De même le $\triangle ECD : \triangle CBD = EC : CB.$ }
Or $AC : CD = EC : CB$ (*Hyp. 1*);
- 3. C'est pourquoi $\triangle ACB : \triangle CBD = \triangle ECD : \triangle CBD.$
- 4. D'où il suit que le $\triangle ACB$ est = au $\triangle ECD.$

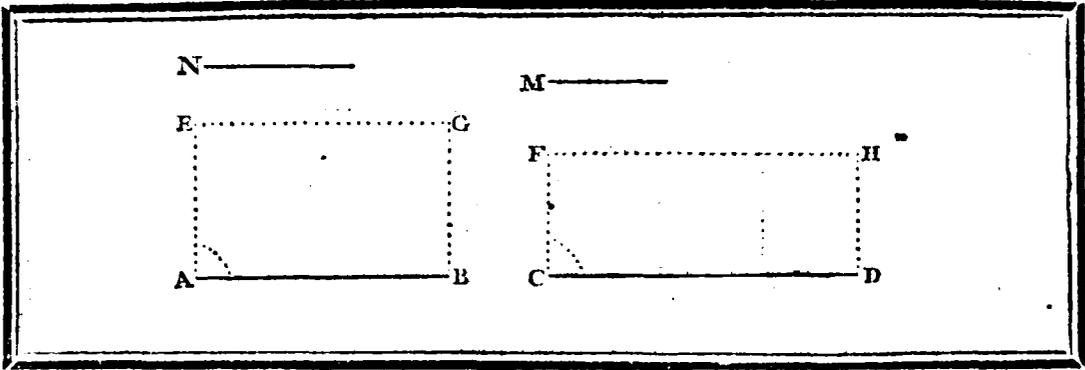
Prop. 1. L. 6.

Prop. 11. L. 5.

Prop. 9. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XVI. THEOREME XI.
Si quatre lignes droites (AB, CD, M, N) sont proportionnelles, le rectangle des extrêmes (AB.N) est égal à celui des moyennes (CD.M). Et si le rectangle des extrêmes (AB.N) est égal au rectangle des moyennes (CD.M), les quatre droites (AB, CD, M, N,) sont proportionnelles.

HYPOTHESE.
 $AB : CD = M : N.$

THESE.
 Le Rgle AB . N = au Rgle CD . M.

Préparation.

1. Sur les extrémités A & C, des droites AB, CD, élevez les \perp AE, CF. Prop. 11. L. 1.
2. Faites $AE = N$, & $CF = M$. Prop. 3. L. 1.
3. Achevez les Rgles EB, FD. Prop. 31. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

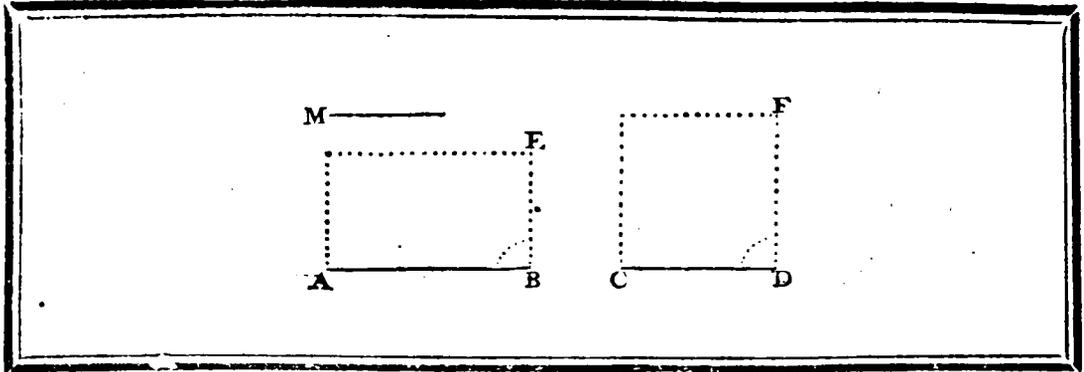
- P**uis donc que $AB : CD = M : N$ (Hyp) : & que $M = CF$ & $N = AE$ (Prep. 2),
1. $AB : CD = CF : AE$. Pr. 7 & 11 L. 5.
 2. Les côtes des Rgles EB, FD, alentour des \sphericalangle égaux A & C, sont donc réciproques. Def. 2. L. 6.
 3. Par conséquent le Rgle EB = au Rgle FD, ou le Rgle sous AB . AE = Rgle sous CD . CF. Prop. 14. L. 6.
 - Partant AE étant = N & CF = M (Prep. 2), Def. 1. L. 2.
 4. Le Rgle sous AB . N est aussi = Rgle sous CD . M. Ax. 2. L. 2.

HYPOTHESE.
 Le Rgle AB . N est = au Rgle CD . M.

C. Q. F. D. I.
THESE.
 $AB : CD = M : N.$

II. DEMONSTRATION.

- P**uisque le Rgle AB . N est = au Rgle CD . M (Hyp. 1) : & que $AE = N$, & $CF = M$ (Prep. 2),
1. Le Rgle sous AB . AE est = au Rgle sous CD . CF. Ax. 2. L. 2.
 - Or ces côtes environnent les \sphericalangle égaux EAB, FCD (Prep. 1. & Ax. 11. L. 1.), Prop. 14. L. 6.
 2. $AB : CD = CF : AE$.
 - Et d'autant que $CF = M$ & $AE = N$ (Prep. 2), Pr. 7 & 11. L. 5.
 3. $AB : CD = M : N$. C. Q. F. D. II.



S I trois lignes droites (AB, CD, M) sont proportionnelles, le rectangle (AB.M) des deux extrêmes est égal au carré de la moyenne (CD). Et si le rectangle des deux extrêmes (AB.M) est égal au carré de la moyenne (CD), les trois droites (AB, CD, M) sont proportionnelles.

HYPOTHESE.

$AB : CD = CD : M.$

THESE.

Le Rgle AB.M est = au \square de CD.

Préparation.

1. Sur les extrémités B & D des droites AB, CD, élevez les \perp BE, DF. Prop. 11. L. 1.
2. Faites BE = a M, & DF = DC. Prop. 3. L. 1.
3. Achevez les Rgles EA, FC. Prop. 31. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

- P** uisque $AB : CD = CD : M$ (Hyp.), que $CD = DF$ & $M = BE$ (Prep. 2). Pr. 7 & 11. L. 5.
 1. $AB : CD = DF : BE.$
 Les côtés des Rgles EA, FC, alentour des angles égaux B & D, sont donc réciproques. Def. 2. L. 6.
 2. Partant le Rgle EA est = au Rgle FC, ou le Rgle sous AB. BE = Rgle sous CD. DF. Prop. 14. L. 6. Def. 1. L. 2.
 3. C'est pourquoi BE étant = M & DF = CD (Prep. 2.), le Rgle AB.M est aussi = au \square de CD. Ax. 2. L. 2.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.

Le Rgle AB.M est = au \square de CD.

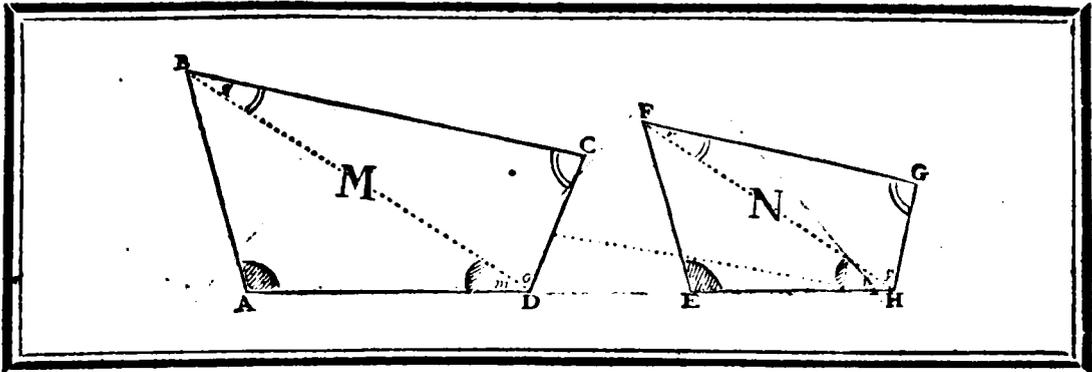
THESE.

$AB : CD = CD : M.$

II. DEMONSTRATION.

- P** uisque le Rgle sous AB.M est = au \square de CD (Hyp.), & que BE est = M, & DF = CD (Prep. 2),
 1. Le Rgle sous AB. BE est = au Rgle sous CD. DF. Ax. 2. L. 2.
 Or ces côtés environnent les \sphericalangle égaux EBA, FDC; (Ax. 10. L. 1 & Pr. 1.)
 2. Donc $AB : CD = DF : BE,$ Prop. 14. L. 6.
 Et par la raison que DF = CD & BE = M (Prep. 2),
 3. $AB : CD = CD : M.$ Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII. PROBLEME VI.
D'Une ligne droite donnée (AD), décrire une figure rectiligne (M) semblable à une autre figure rectiligne donnée (N) & semblablement posée.

DONNEE.

1. La droite AD.
2. La Rectiligne N.

CHERCHEE.

Le Rectiligne M, semblable au Rectiligne N & semblablement posé.

Résolution.

1. Joignez HF.
2. Sur AD, aux points A & D, faites $\sphericalangle A = \sphericalangle E$ & $\sphericalangle m = \sphericalangle n$; c'est pourquoi le troisieme $\sphericalangle ABD$ sera = au troisieme $\sphericalangle EFH$.
3. Sur DB, au point D, faites $\sphericalangle o = \sphericalangle p$ & au point B, $\sphericalangle q = \sphericalangle r$. Par conséquent le troisieme $\sphericalangle C$ sera = au troisieme $\sphericalangle G$.

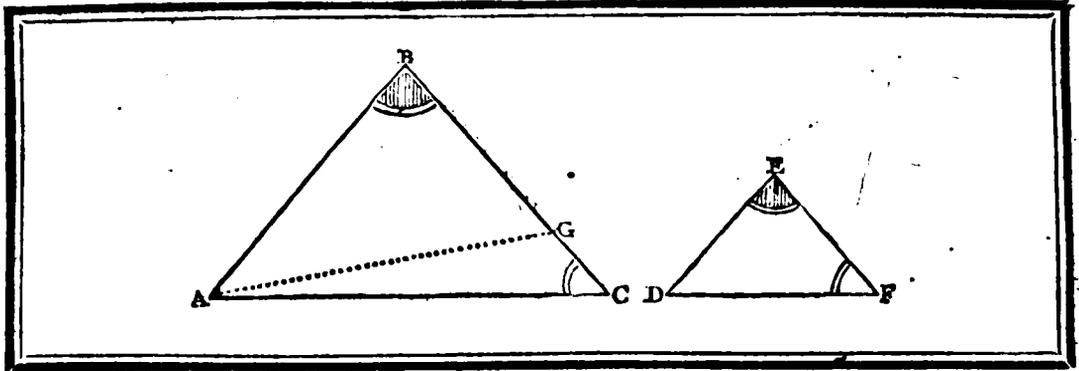
Dem. 1. L. 1.
 Prop. 23. & 32
 L. 1. &
 Remarq. de
 Prop. 27. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puis donc que le ΔABD est équiangle au ΔEFH , & le ΔDBC équiangle au ΔHFG (Ref. 2 & 3),

1. $BD : FH = BA : FE = AD : EH$ } Prop. 4. L. 6.
 & $BD : FH = DC : HG = CB : GF$ } Prop. 11. L. 5.
2. Partant $BA : FE = AD : EH = DC : HG = CB : GF$.
3. L'angle entier $m + o$ est = à l'angle entier $n + p$. Ax. 2. L. 1.
4. Par la même raison $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFG$.
 De plus $\sphericalangle A = \sphericalangle E$ (Ref. 2), & $\sphericalangle C = \sphericalangle G$ (Ref. 3).
5. C'est pourquoi le Rectilig. M est équiangle au Rectilig. N, & leurs côtés alentour des angles égaux sont proportionels.
6. Le Rectilig. M, construit sur la donnée AD, est donc semblable au Rectilig. EG, & il est semblablement posé. Def. 1. L. 6.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIX. THEOREME XIII.
Les triangles semblables (ABC , DEF) sont entr'eux en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques (CB , FE ou AC , DF &c.).

HYPOTHESE.

Les triangles ABC , DEF sont semblables, de manière que $\sphericalangle C = \sphericalangle F$, & les côtés AC , DF item CB , FE sont homologues.

THESE.

Le ΔABC est au ΔDEF en raison doublée de CB à FE
 c. à d. comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.

Préparation.

Prenez à CB , FE la troisième proportionnelle CG , & tirez AG . { Prop. II. L. 6.
Dem. I. L. 1.

DEMONSTRATION.

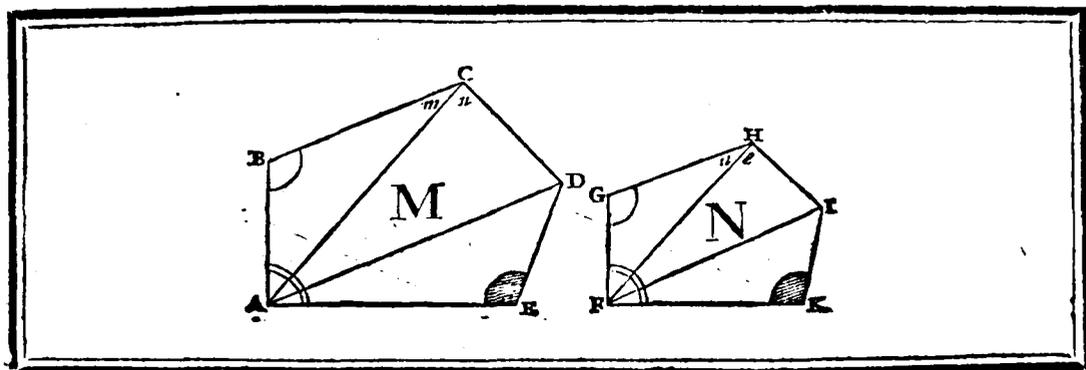
- P**uis donc que $AC : CB = DF : FE$ (*Hyp. & Def. I. L. 6.*),
1. En alternant $AC : DF = CB : FE$. Prop. 16. L. 5.
 - Mais $CB : FE = FE : CG$ (*Prep.*);
 2. Par conséquent $AC : DF = FE : CG$. Prop. 11. L. 5.
 3. Les côtés des ΔAGC , DEF alentour des \sphericalangle égaux C & F (*Hyp.*), sont donc réciproques. (*Def. 2. L. 6.*)
 4. Partant le ΔAGC est $=$ au ΔDEF . Prop. 15. L. 6.
 - Or les ΔABC , AGC ayant la même hauteur,
 5. Le $\Delta ABC : \Delta AGC = CB : CG$. Prop. 1. L. 6.
 6. Partant le $\Delta ABC : \Delta DEF = CB : CG$. Prop. 7. L. 5.
 - Mais, puisque $CB : FE = FE : CG$ (*Prep.*),
 7. $CB : CG$ en raison doublée de CB à FE ou comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.
 8. Par conséquent le $\Delta ABC : \Delta DEF$ en raison doublée de CB à FE , ou comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.
- Def. 10. L. 5.
Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E .

Lorsque trois lignes (CB , FE , CG) sont proportionnelles, la première est toujours à la troisième, comme le Δ fait de la première est à un Δ semblable fait de la seconde, en le supposant semblablement posé.

* Voyez *Append.* Prop. VII. & *Hyp.* 1, Cor. 2 item Cor. 2. de la Prop. suivante.



PROPOSITION XX. THEOREME XIV.
LEs Polygones semblables (M & N) peuvent être divisés par des diagonales (AC, AD; FH, FI) tirées semblablement, en un même nombre de triangles (ABC, ACD, ADE, & FGH, FHI, FIK) semblables entr'eux & proportionels à leurs Touts; de plus les Polygones (M & N) sont en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques (AB, FG; ou BC, GH &c).

HYPOTHESE.

Le Polygone M est semblable au Polygone N; tellement que les \sphericalangle A, B, C &c, sont \equiv aux \sphericalangle F, G, H &c, chacun à chacun, & les côtés AB, FG; ou BC, GH &c, homologues.

THESE.

- Par des Diagonales tirées semblablement
- I. On peut diviser ces Polygones en un même nombre de triangles semblables.
 - II. Proportionels à leurs Touts.
 - III. Et le Polyg. M: Polyg. N en raison doublée des côtés homologues AB, FG; ou comme $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$.

Préparation.

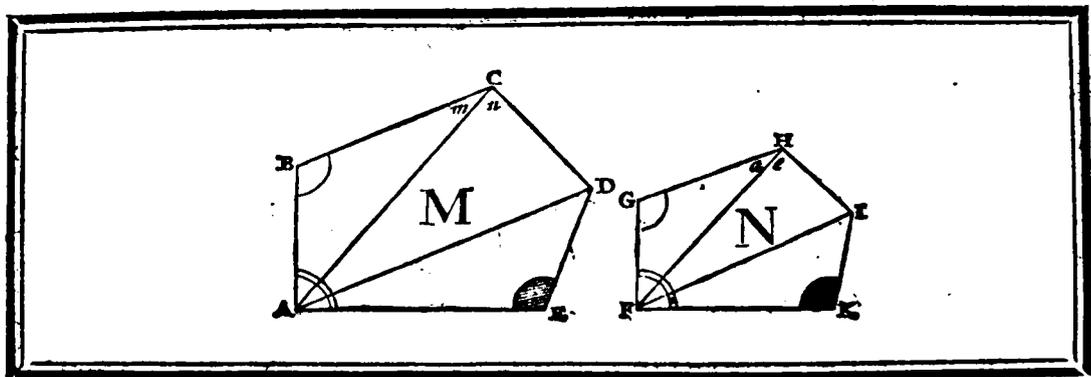
Tirez AC, FH, de même AD, FI semblablement, c. à. d. des \sphericalangle égaux A & F, aux \sphericalangle égaux C & H, item D & I.

Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uis donc que $\sphericalangle B = \sphericalangle G$ & $AB:BC = FG:GH$ (Hyp. & Def. 1. L. 6),
1. Le $\triangle ABC$ est équiangle au $\triangle FGH$, Prop. 6. L. 6.
 2. C'est pourquoi ces \triangle sont semblables, & $\sphericalangle m = \sphericalangle a$. Prop. 4. L. 6.
 - Or \sphericalangle entier $m + n$ est \equiv à \sphericalangle entier $a + e$ (Hyp.); Coroll.
 3. Partant $\sphericalangle n$ est \equiv $\sphericalangle e$. Ax. 3. L. 1.
 - Puis donc que par la siml. des $\triangle ABC$ & FGH (Arg. 2), Def. 1. L. 6.
$$\left. \begin{array}{l} AC : BC = FH : GH. \\ BC : CD = GH : HI. \\ AC : CD = FH : HI. \end{array} \right\}$$
 - & par la siml. des Polyg. M & N Prop. 12. L. 5.
 4. Il suit par égalité de raison, que a. a. d. les côtés alentour des \sphericalangle égaux n & e sont proportionels.
 5. Le $\triangle ACD$ est donc équiangle au $\triangle FHI$; Prop. 6. L. 6.
 - Et par conséquent il lui est semblable. Prop. 4. L. 6.
 6. Par la même raison, tous les autres $\triangle ADE$, FIK &c, sont semblables. Coroll.
 7. Les Polyg. semblables peuvent donc être divisés dans le même nombre de \triangle semblables, par des diagonales tirées semblablement.

C. Q. F. D. 1.



De même, parceque les ΔABC , ΔFGH sont semblables (*Arg. 2*),

6. Le $\Delta ABC : \Delta FGH = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; * } Prop. 19. L. 6.
 De même le $\Delta ACD : \Delta FHI = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$. * }
 7. Donc le $\Delta ABC : \Delta FGH = \Delta ACD : \Delta FHI$. Prop. 11. L. 5.
 On démontrera de même que,
 8. Le $\Delta ADE : \Delta FIK = \Delta ACD : \Delta FHI$.
 9. C'est pourquoi $\Delta ABC : \Delta FGH = \Delta ACD : \Delta FHI = \Delta ADE : \Delta FIK$. Prop. 11. L. 5.
 10. Comparant donc la somme des Antécédens à celle des Conséquens,
 le $\Delta ABC + \Delta ACD$ &c. $\Delta FGH + \Delta FHI$ &c. = $\Delta ABC : \Delta FGH$, &c. Prop. 12. L. 5.
 c. à. d. le Polyg. M : Polyg. N = $\Delta ABC : \Delta FGH = \Delta ACD : \Delta FHI$ &c. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. II.

Puis donc que le $\Delta ABG : \Delta FGH = \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$ * (*Prop. 19. L. 6.*),

11. Le Polyg. M : Polyg. N = $\overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$. * Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. III.

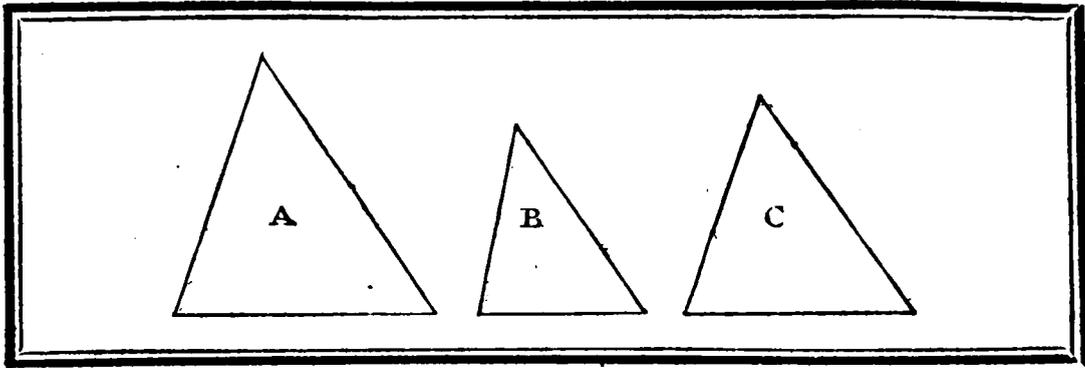
C O R O L L A I R E I.

Puisqu'on peut appliquer cette Démonstration aux Quadrilatères, & qu'on vient de prouver la même vérité des Triangles (*Prop. 19*), il est clair qu'en général toutes les Figures rectilignes semblables sont entr'elles en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques. C'est pourquoi prenant aux côtés homologues AB, FG une III^e proportionnelle X; puisqu' AB est à X, en raison doublée de AB : FG; & qu'un Rectiligne M est à un autre Rectiligne semblable N, en raison doublée des mêmes côtés AB : FG, on voit que si trois lignes sont proportionnelles, la première est à la troisième, comme le Rectiligne décrit de la première est au Rectiligne décrit de la seconde, semblablement &c. en une position semblable (*Prop. 11. L. 5*).

C O R O L L A I R E II.

EN particulier, tous les Quarrés étant semblables (*Def. 30. L. 1 & Def. 1. L. 6*), deux Rectilignes semblables quelconques M & N, sont toujours en raison des Quarrés de leurs côtés homologues AB, CD. Car de part & d'autre ces Figures sont en raison doublée de ces mêmes côtés.

* C'est pourquoi l'expression $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, désigne également la raison des Quarrés Géométriques des lignes AB &c. CD, &c. la raison de leurs Quarrés Arithmétiques ou Algébriques (entendus selon Hyp. 1. Coroll. 2 de l'Append.). ou enfin la raison doublée de ces mêmes lignes; puisqu'il n'est qu'une seule &c. même raison.



PROPOSITION XXI. THEOREME XV.
LEs figures rectilignes A, C, semblables à une même (B), sont semblables entr'elles.

HYPOTHESE.

Les Figures rectilignes A et C sont semblables à la Figure B.

THESE.

La Figure rectiligne A est semblable à la Figure rectiligne C.

DEMONSTRATION.

Puis donc que chacune des figures A et C est semblable à la figure B (Hyp.),

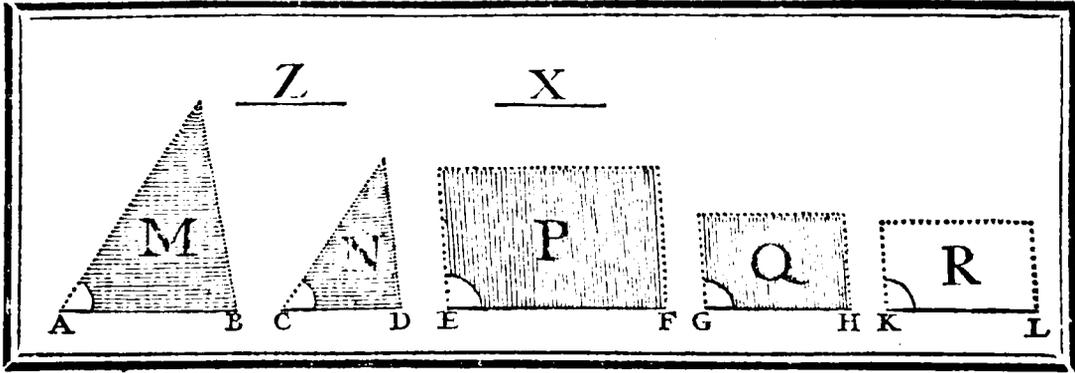
1. Chacune de ces figures sera aussi équiangle à la figure B, & aura les côtés alentour des \sphericalangle égaux, proportionels aux côtés de la figure B.
2. Par conséquent ces figures A et C seront aussi équiangles entr'elles, & leurs côtés alentour des \sphericalangle égaux, seront proportionels.
3. Partant les figures A et C, sont semblables.

Def. 1. L. 6.

{ Ax. 1. L. 1.
 Prop. 11. L. 5.
 Def. 1. L. 6.

C. Q. F. D.





S PROPOSITION XXII. THEOREME XVI.
 SI quatre lignes droites (AB, CD, EF, GH) sont proportionelles, les figures rectilignes semblables & semblablement posées (M, N, item P, Q), décrites de ces lignes, seront proportionelles. Et si les figures rectilignes semblables & semblablement posées (M, N, P, Q), décrites de ces lignes, sont proportionelles, ces droites (AB, CD, EF, GH) seront elles mêmes proportionelles.

HYPOTHESE.

- I. $AB : CD = EF : GH.$
- II. Les Figures M & N, décrites des lignes AB, CD, item les Fig. P & Q décrites des lignes EF, GH, sont semblables, & semblablement posées.

THESE.

$$M : N = P : Q.$$

Préparation.

Prenez aux lignes AB, CD la III^{me} proportionelle Z.
 Et aux lignes EF, GH la III^{me} proportionelle X.

Prop. 11.L. 6.

DEMONSTRATION.

- P**uisque $AB : CD = EF : GH$ (Hyp. 1),
 & $CD : Z = GH : X$ (Hyp. 1. Prep. & Prop. 11.L. 5),
 1. $AB : Z = EF : X$ Prop. 22.L. 5.
 Or à cause de la similitude des figures M & N, P & Q, & de leur description semblable des droites AB & CD, item EF & GH (Hyp. 2.);
 2. $AB : Z = M : N$ }
 & $EF : X = P : Q$ } Prop. 20.L 6.
 3. C'est pourquoi $M : N = P : Q$ (Arg. 1). Coroll. 2.
 Prop. 11.L. 5.

C. Q. F. D.

II.

HYPOTHESE.

1. $M : N = P : Q$
 11. Ces Figures sont semblables, & décrites en des positions semblables des droites AB, CD , item EF, GH .

THESE.

$AB : CD = EF \text{ } \tau \text{ } GH$.

Préparation.

1. Aux lignes AB, CD, EF prenez la IV^{te}. proportionelle KL . Prop. 12. L. 6.
 2. De cette KL décrivez la Figure rectil. R , semblable & semblablement posée, aux Figures P ou Q . Prop. 18. L. 6.

DEMONSTRATION.

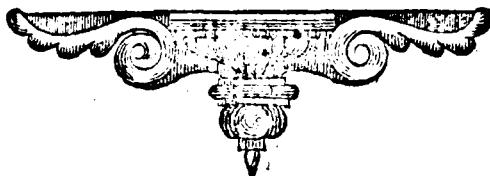
Puisque $AB : CD = EF : KL$ (Prep. 1); & qu'on a décrit de ces droites, les Fig. M & N , item P & R semblables chacune à chacune, & en des positions semblables (Hyp. 2 & Prep. 2),

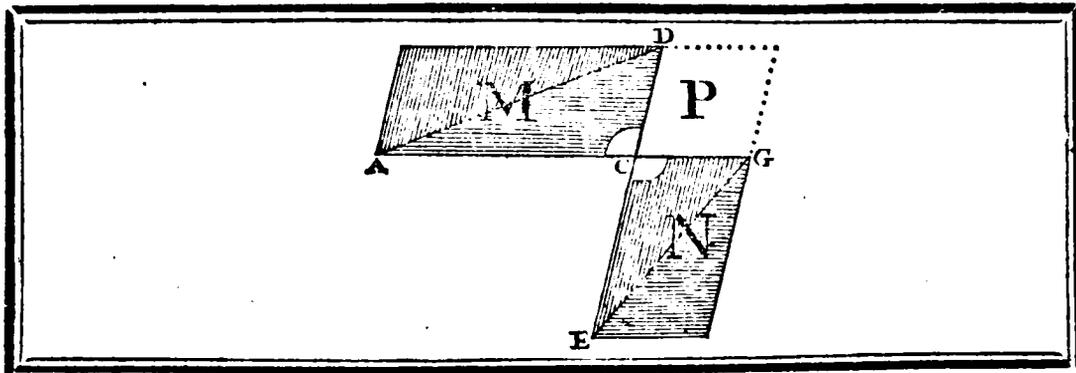
1. Or $M : N = P : R$ (Partie I de cette Propos.).
 2. Partant $M : N = P : Q$ (Hyp. 1). Prop. 11. L. 5.
 3. C'est pourquoi $R = Q$. Prop. 9. L. 5.
 De plus, ces mêmes figures égales, sont aussi semblables & décrites semblablement des droites GH, KL (Prep. 2).
 4. Partant $GH = KL$ *.
 Puis donc que $AB : CD = EF : KL$ (Prep. 1), & que $GH = KL$ (Arg. 4),
 5. $AB : CD = EF : GH$. Prop. 7. L. 5.
 C. Q. F. D. 11.

* L E M M E.

Les Rectilignes (Q & R) égaux & semblables ont leurs côtés homologues (GH & KL) égaux.

- Car à cause de leur similitude
 1. $Q : R = \square \text{ de } GH : \square \text{ de } KL$. Prop. 20. L. 6.
 Or Q étant $=$ à R (Arg. 3), Coroll. 2.
 2. Le \square de GH est $=$ au \square de KL . Prop. 16. L. 5.
 Par conséquent $GH = KL$. Rem.
 Prop. 46. L. 11.
 Coroll. 3.
 C. Q. F. D.





L PROPOSITION XXIII. THEOREME XVII.
 Les Parallélogrammès équiangles (M & N) sont entr'eux en raison composée des raisons de leurs côtés (AC, CD & EC, CG) alentour des angles égaux.

HYPOTHESE.

Les Pgrs M & N sont équiangles;
 si bien que $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ECG$.

THESE.

Pgr M : Pgr N = AC . CD : EC . CG.

Préparation.

1. Disposez AC & CG en une même droite AG;
 cela fait, EC & CD formeront aussi une même droite ED.
2. Achevez le Pgr P.

Prop. 14. L. 1.
 Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les Pgrs M, P, N, forment une suite de trois grandeurs,
 1. La raison de la première M à la dernière N, se trouve composée des deux raisons intermédiaires $M : P$ & $P : N$.

} Prop. 5. &
 Hyp. 3. App.

c. à d. la raison $M : N = M : P + P : N$.
 Or à cause que $AC : CG = M : P$,
 & $DC : CE = P : N$.

Prop. 1. L. 6.

2. La raison des côtés AC : CG est la même que celle des Pgrs M : P; & la raison des côtés DC : CE, la même que celle des Pgrs P : N.
 Puis donc que la raison de M : N se trouve composée des raisons M : P & P : N (Arg. 1),

3. Cette même raison se trouve composée de leurs égales; des raisons AC : CG, & CD : EC, des côtés alentour des angles égaux ACD, ECG. Prop. 3. App.

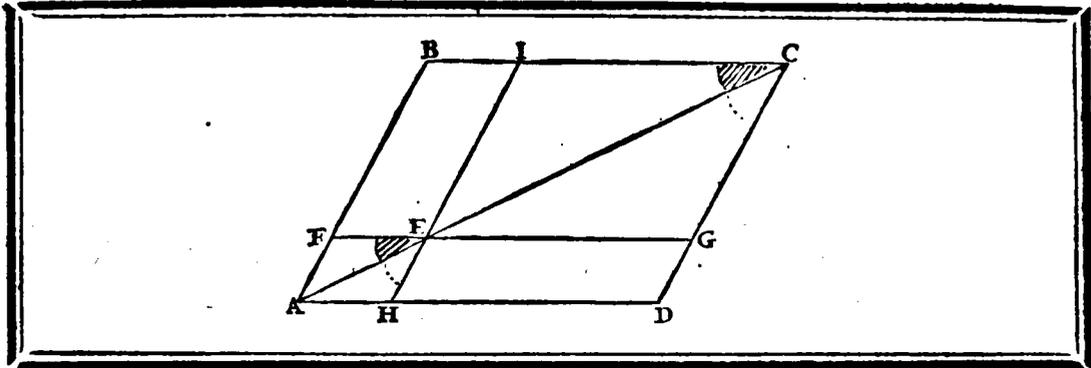
4. Par conséquent $M : N = AC . CG : EC . CG$.

} Def. 5. L. 6.
 Def. 6. App.

C. Q. F. D.

Coroll. I. Les Pgrs équiangles sont donc comme les produits qui résultent de la multiplication de leurs côtés alentour des angles égaux. (Déf. 1 & 6. App.).

Coroll. II. Les mêmes vérités conviennent aux Triangles (ACD, ECG) qui ont un Angle (ACD) égal à un angle (ECG). Car les Diagonales (AD, EG) partagent les Pgrs en deux également (Prop. 34. L. 1).



EN tout Parallélogramme (BD), les Parallélogrammes (FH, IG) alentour de la diagonale (AC) sont semblables & au Tout & entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. BD est un Pgr.
- II. FH, IG sont des Pgrs alentour de la diagonale AC.

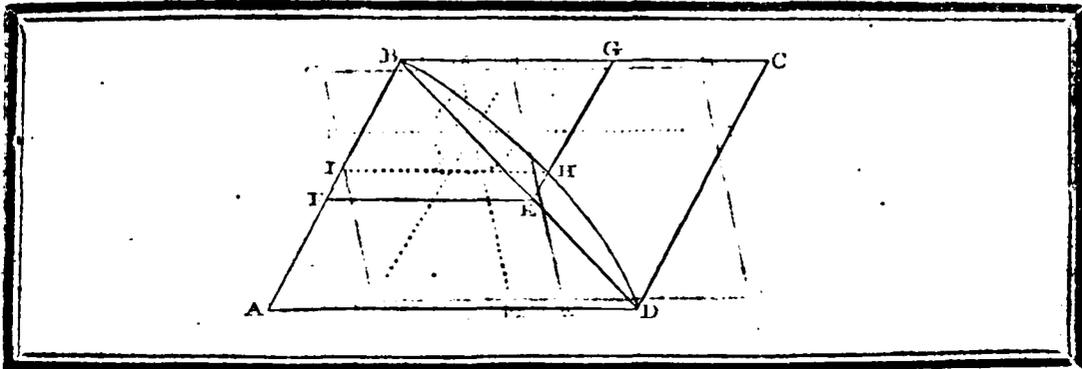
THESE.

- I. Les Pgrs AFEH, EICG sont semblables au Pgr ABCD,
- II. Et semblables entr'eux.

DEMONSTRATION.

- P**uisque FE est Plle à BC (Hyp. 1. & 2. 6^e Prop. 30. L. 1.),
- 1. Le Δ AFE est équiangle au Δ ABC, selon l'ordre des lettres. De même, parceque HE est Plle à DC,
 - 2. Le Δ AHE est équiangle au Δ ADC, selon l'ordre des lettres.
 - 3. Le Pgr AFEH est donc aussi equiang. au Pgr ABCD, selon l'ordre des lettres.
- Et à cause que dans les Δ AHE, ADC, les \sphericalangle AHE & D sont égaux (Arg. 2), comme dans les Δ AFE, ABC, les \sphericalangle AFE & B (Arg. 1),
- 4. $AH : HE = AD : DC$ Prop. 4 L. 6.
& $AF : FE = AB : BC$
 - De plus, à cause que les \sphericalangle AEH, ACD ; item FEA, BCA sont égaux (Arg. 1 & 2)
 - 5. $HE : AE = DC : AC$ Prop. 4 L. 6.
& $AE : EF = AC : CB$
 - 6. Donc par égalité $HE : EF = DC : CB$. Prop. 22 L. 5.
Et encore, à cause que les \sphericalangle EAH, EFA sont communs, de part & d'autre, aux deux triangles AHE, ADC & AFE, ABC,
 - 7. $HA : EA = DA : CA$ Prop. 4 L. 6.
& $EA : AF = CA : AB$
 - 8. Donc par égalité $HA : AF = DA : AB$ Prop. 22 L. 5.
 - 9. C'est pourquoi les Pgrs AFEH, ABCD, ont leurs angles égaux, chacun à chacun, dans l'ordre des lettres (Arg. 3); & les côtés alentour des angles égaux, proportionels (Arg. 4. 6. 8.).
 - 10. Par conséquent ces Pgrs sont semblables. Def. 1. L. 6.
 - 11. On démontre de la même manière, que les Pgrs EICG, ABCD sont semblables.
- C. Q. F. D. I. Prop. 21. L. 6.

C. Q. F. D. II.



S I d'un Parallélogramme (AC) on retranche un Parallélogramme (FG), semblable & semblablement posé au Parallélogramme entier (AC), ayant un angle (FBG) commun avec lui: le Parallélogramme (FG) est placé alentour de la diagonale (BD) du Parallélogramme entier (AC).

HYPOTHESE

- I. AC est un Pgr, dont BD est la diagonale.
- II. FG est un Pgr semblable à AC, & ayant un \sphericalangle FBG commun avec AC.

THESE.

Le Pgr FG est placé alentour de la diagonale BD du Pgr AC.

DEMONSTRATION.

Si non. Soit une autre ligne BHD, différente de BED, la diagonale du Pgr AC, coupant le côté GE en un point H.

Préparation.

Par ce point H tirez HI Plle à CB ou DA.

Prop. 31. L. 1.

L Es Pgrs AC, IG étant donc placés alentour de la même diagonale BHD, & \sphericalangle FBG étant commun aux deux Pgrs (*Sup. & 2^e Prop.*),

1. Le Pgr AC est semblable au Pgr IG.

Prop. 24. L. 6.
Def. 1. L. 6.

2. Partant $CB : BA = GB : BI$.

Mais les Pgrs AC & FG étant aussi semblables, & \sphericalangle B commun aux deux Pgrs (*Hyp. 2*),

3. On aura $CB : BA = GB : BF$.

Def. 1. L. 6.

4. Par conséquent $GB : BI = GB : BF$.

Prop. 11. L. 5.

5. Donc $BI = BF$.

Prop. 14. L. 5.

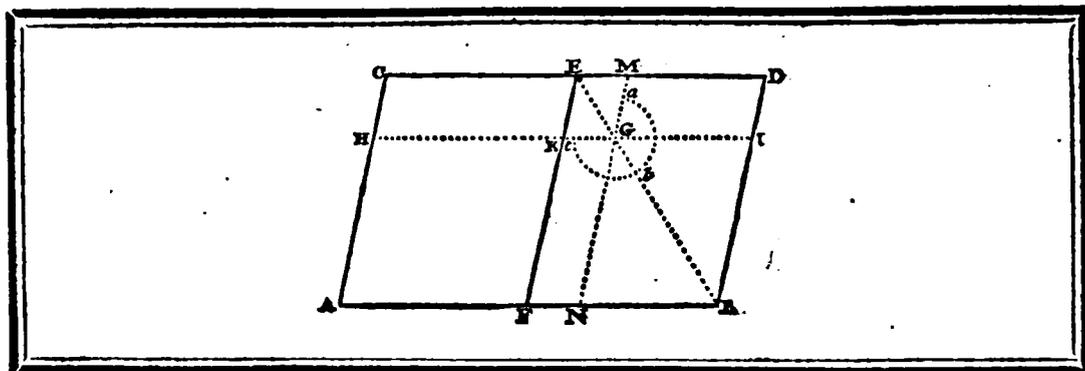
6. Ce qui est impossible.

Ax. 8. L. 1.

7. Ainsi toute ligne BHD, différente de la ligne BED, n'est point la diagonale du Pgr AC.

8. Partant, la ligne BED est la véritable diagonale, & le Pgr FG est placé alentour d'elle.

C. Q. F. D.



D PROPOSITION XXVII. THEOREME XX.
 DE tous les Parallélogrammes (AG) appliqués selon une même ligne droite (AB), & défailans de Parallélogrammes (NI) semblables & semblablement posés, à un autre Parallélogramme (FD) décrit de la moitié (FB) de la ligne entière (AB); Le plus grand est le Parallélogramme (AE) appliqué à l'autre moitié (AF), & semblable à son défaut (FD).

HYPOTHESE.

- I. AE est un Pgr appliqué à la moitié AF, de la droite AB.
- II. Lequel est semblable & semblablement posé à son défaut, le Pgr FD, déjà décrit de l'autre moitié FB.

THESE:

AE est le plus grand de tous les Pgrs, tel que AG, applicables selon AB, ayant leurs défauts, tel que NI, semblables & semblablement posés au Pgr FD, défaut de AE, décrit de FB moitié de AB.

Préparation.

1. Tirez la Diagonale BE.
2. Et par un point quelconque G, pris dans BE, tirez IH MNP lles à BA, AC.
 Afin d'avoir un Pgr quelconque AG, appliqué selon AB, défailant d'un Pgr NI, semblable au Pgr FD & semblablement posé.

Dem. 1. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Prop. 16. L. 6.

DEMONSTRATION.

CAS I. Lorsque le point N tombe dans la moitié FB.

Puisque le Pgr GD est = au Pgr GF (Prop. 43. L. 1); en ajoutant le Pgr commun NI,

1. Le Pgr ND sera = au Pgr FI.

Ax. 2. L. 1.

Mais à cause que le Pgr AK est aussi = au Pgr FI (Prop. 36. L. 1),

2. Le Pgr ND est = au Pgr AK.

Ax. 1. L. 1.

Si l'on ajoute donc de part & d'autre le Pgr FG.

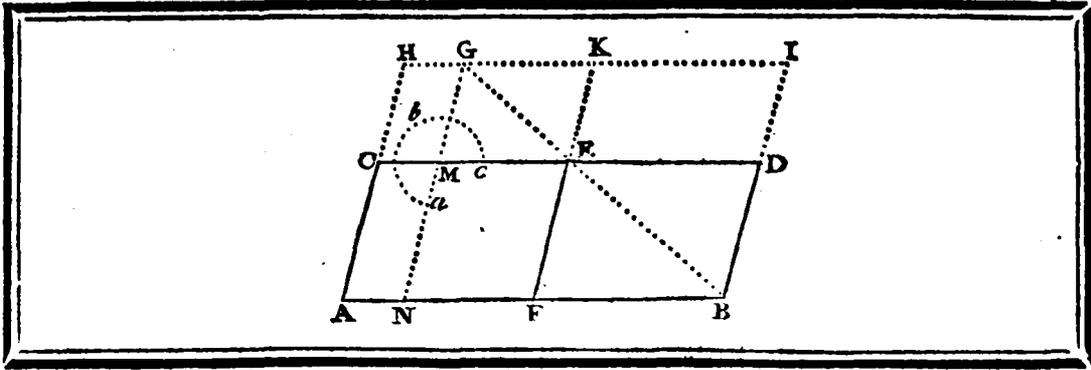
3. Le Gnomon abc est = au Pgr AG,

Ax. 2. L. 1.

4. Partant le Pgr entier FD, ou son égal le Pgr AE (Hyp. 2), est > Pgr AG.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS II Lorsque le point N tombe dans la moitié AF.

Le Pgr NE étant = au Pgr IE (*Prop. 43. L. 1*), si l'on ajoute de part & d'autre le Pgr commun FD,

1. Le Pgr ND sera = au Pgr FI;
Mais à cause que le Pgr AK est aussi = au Pgr FI (*Prop. 36. L. 1*),
2. Le Pgr ND sera = au Pgr AK.
Si l'on rétranche donc de part & d'autre le Pgr commun FM,
3. Reste le Pgr FD = au Gnomon *abc*.
Or le Pgr FD est = au Pgr AE;
4. C'est pourquoi le Pgr AE = au Gnomon *abc*.
5. Par conséquent le Pgr AE > que le Pgr AG.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

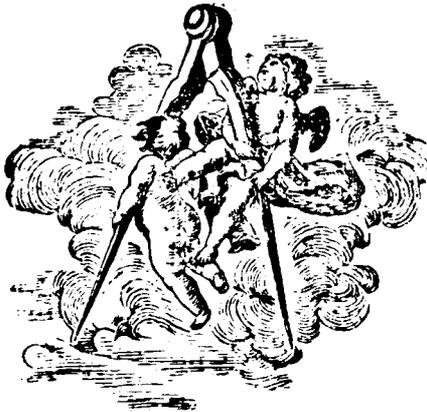
Ax. 3. L. 1.

Prop. 36. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



DEMONSTRATION.

- L**E Pgr KN étant donc égal & semblable au Pgr X (Ref. 4, 5 & 6); qui est lui-même semblable au Pgr ED (Ref. 4),
1. Le Pgr KN est semblable au Pgr ED. Prop. 21. L. 6.
 2. C'est pourquoi ces deux Pgrs KN, ED, sont alentour de la même diagonale. Prop. 26. L. 6.
Tirez cette diagonale FGB, & achevez de décrire la figure.
 3. Il est semblable au Pgr ED. Prop. 24. L. 6.
 4. Par conséquent semblable au Pgr T (Ref. 2.). Prop. 21. L. 6.
Or le Pgr DG étant = au Pgr EG (Prop. 43. L. 1), si l'on ajoute de part & d'autre ce Pgr commun MI,
 5. Le Pgr MD sera = au Pgr EI. Ax. 2. L. 1.
 6. Le Pgr MD est = au Pgr AK. Ax. 1. L. 1.
Mais le Pgr AK étant aussi = au Pgr EI (Prop. 36. L. 1),
Et ajoutant de plus le Pgr commun EG, de part & d'autre,
 7. Le Gnomon abc fera = au Pgr AG. Ax. 2. L. 1.
Or le Pgr ED étant = aux figures V & X prises ensemble, (Ref. 4) ou V & KN, puisque X est = KN, (Ref. 5 & 6); si l'on ôte le commun KN, de part & d'autre
 8. Reste le Gnomon abc = à V. Ax. 3. L. 1.
 9. Partant le Pgr AG est = à V. (Arg. 7). Ax. 1. L. 1.
Or ce Pgr AG a pour défaut le Pgr MI, semblable au Pgr donné T (Arg. 4);
 10. On a donc appliqué selon AB, un Pgr AG = à V, défailant d'un Pgr MI semblable au Pgr T. Def. 8. L. 6.

C. Q. F. F.

Remarque:

Divers Editeurs de Nouveaux Elémens d'Euclide, ont omis cette Proposition & la suivante, comme inutiles, parcequ'ils n'en connoissoient pas l'usage. Elles sont cependant essentiellement nécessaires pour l'Analyse des Anciens, en ce qu'elles correspondent à la résolution algébrique des égalités du second Degré; où le 1^{er} terme peut être affecté d'une quantité quelconque; le dernier étant un rectangle quelconque.

Cette XXVIII. Proposition répond au cas, où le dernier terme de l'égalité réduite à zéro, devient positif.

Car réduisant l'espace donné V en un Pgr équiangle au Pgr T; posez $V = nl$; la raison des côtés QP, PR du Pgr X (ou T), $m : n$; de plus $AB = a$, $AM = x$, & $MB = a - x$.

Partant, à cause que le défaut MI, doit être semblable au Pgr T ou au Pgr X,

$$QP : PR = : BM : MG \text{ (Def. 1. L. 6)}$$

$$m : n = : a - x : \frac{n}{m}(a - x)$$

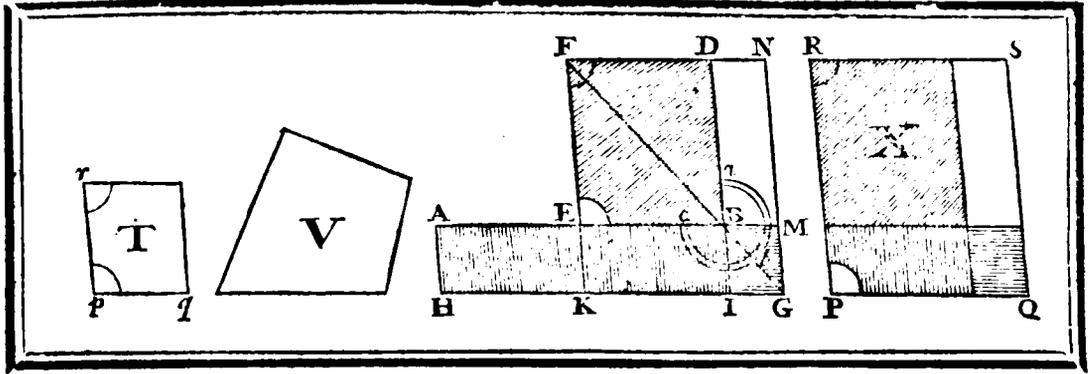
Et, d'autant que le Pgr GA (= MA.MG) doit être égal à l'espace donné V (= nl), On arrive à l'égalité suivante (Prop. 23. L. 6).

$$\frac{n}{m}(a - x) x = V \text{ ou } nl$$

Qui se réduit à cette autre, $\frac{n}{m} x x - \frac{n}{m} a x + V = 0$

Ou bien, en mettant pour V sa valeur, & multipliant par m, puis divisant par n.

$$x x - a x + m l = 0.$$



S PROPOSITION XXIX. PROBLEME IX.
 Selon une droite donnée (AB), appliquer un Parallélogramme (AG), égal à un Rectiligne donné (V), excédant d'un Parallélogramme (MI), semblable à un Parallélogramme donné (T).

DONNEE.

- I. La droite AB, & le Pgr T.
- II. Le Rectiligne V.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr AG, appliqué selon AB, égal au Rectil. V, & ayant pour excès un Pgr MI, semblable à T.

Résolution.

1. Coupez AB en deux également, en E. Prop. 10. L. 1.
2. De la moitié EB, décrivez un Pgr ED, semblable au Pgr T, & semblablement posé. } Prop. 18. L. 6.
3. Décrivez un Pgr X (ou PS) = V + ED, semblable & semblablement posé au Pgr T; & par conséquent semblable au Pgr ED (Ref. 2. Prop. 21. L. 6): & soient les côtés RS, FD; RP, FE homologues.
4. Puis donc que X, (comme = V + ED), est > ED; le côté RS est > que FD, & le côté RP > que FE. C'est pourquoi après avoir prolongé FD & FE, faites FN = RS & FK = RP; & achevez le Pgr FKN, qui sera égal & semblable au Pgr X. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

- L**E Pgr KN étant donc égal & semblable au Pgr X, qui est lui même semblable au Pgr ED (Ref. 3),
1. Le Pgr KN est semblable au Pgr ED. Prop. 21. L. 6.
 2. C'est pourquoi ces deux Pgrs KN, ED, sont alentour d'une même diagonale. Tirez cette diagonale FBG, & achevez de décrire la figure. Prop. 26. L. 6.
 Puis donc que X est = V + ED, & que X = au Pgr KN (Ref. 3 & 4),
 3. Le Pgr KN = V + ED. Ax. 1. L. 1.
 Otant donc de part & d'autre le Pgr commun ED,
 4. Reste le Gnomon abc = au Rectil. V. Ax. 3. L. 1.
 Or, à cause que AE = EB (Ref. 1),
 5. Le Pgr AK = au Pgr EI. Prop. 36. L. 1.
 6. Et par cette raison ce Pgr AK est = au Pgr NB. Prop. 43. L. 1.

Ajoutant

- Ajoutant donc de part & d'autre le Pgr commun MK,
7. Résulte le Pgr AG = au Gnomon abc. Ax. 2. L. 1.
 Or le Gnomon abc est = au Rectil. V (Arg. 4);
8. Partant le Pgr AG est = au Rectil. V. Ax. 1. L. 1.
 Puis donc que ce Pgr AG a pour excès le Pgr MI, semblable au Pgr ED
 (Prop. 24. L. 6); & par conséquent semblable au Pgr T (Ref. 2. Prop. 21. L. 6),
9. On a appliqué selon AB, un Pgr AG = au Rectil. V, ayant pour excès un
 Pgr MI, semblable au Pgr T.

C. Q. F. F.

Remarque.

SI, comme dans le cas précédent, on fait AB = a; l'espace donné V (reduit à un Pgr équiang. au Pgr T) = nl; la raison des côtés QP, PR du Pgr X (qui est celle des côtés du Pgr T) m : n; de plus AM = x & par conséquent MB = x - a. L'on arrive à une égalité de la même espèce.

Car, à cause que le défaut MI doit être semblable au Pgr T ou X, on a comme auparavant cette Analogie

$$QP : PR = MB : MG \text{ (Def. 1. L. 6).}$$

$$m : n = x - a : \frac{n}{m}(x - a)$$

Et d'autant que le Pgr AG (= AM . MG), doit être égal à l'espace donné V (= nl), on a l'égalité suivante

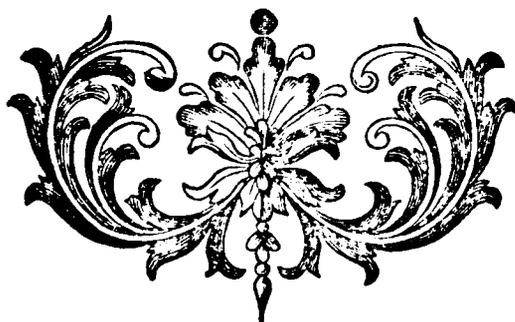
$$\frac{n}{m}(x - a)x = V. \text{ (Prop. 23. L. 6).}$$

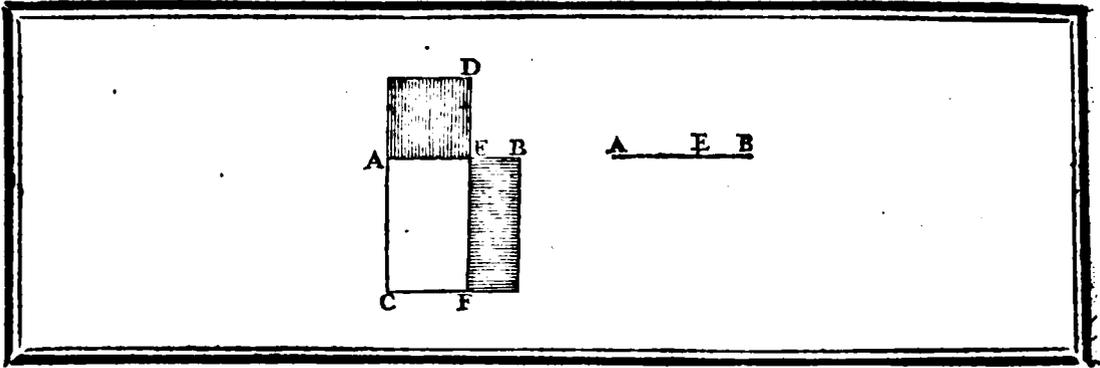
Qui se réduit à celle-ci. $\frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax - V = 0.$

Ou bien, en mettant pour V sa valeur nl, puis multipliant par m & divisant par n

$$xx - ax - ml = 0.$$

D'où l'on voit, que la Prop. XXIX regarde le cas, où le dernier terme de l'égalité réduite à zero, est négatif.





C PROPOSITION XXX. PROBLEME X.
Couper une droite donnée (AB) en extrême & moyenne raison (en E).

DONNEE.
La droite AB.

CERCHEE.
Le point E, tel que AB soit coupé en extrême & moyenne raison; de manière que
 $BA : AE = AE : BE.$

Résolution.

1. De la droite AB décrivez un carré BC. Prop. 46. L. 1.
2. Appliquez au côté CA, un Pgr CD = au carré BC, dont l'excès AD soit semblable à BC; qui fera par conséquent un carré. Prop. 29. L. 6.

DEMONSTRATION.

- P**uis donc que $BC = CD$ (Ref. 2.); si l'on ôte le Rgle commun CE,
1. Reste $BF = AD.$ Ax. 3. L. 1.
Mais BF est aussi équiangle avec AD (Prop. 15. L. 1);
2. Leurs côtés FE, EB; ED, AE alentour des angles égaux, sont donc réciproquement proportionels, c. à. d. $FE : ED = AE : EB.$ Prop. 14. L. 6.
Or FE est = CA (Prop. 34. L. 1), ou = à BA, & ED = AE (Def. 30. L. 1).
3. C'est pourquoi $BA : AE = AE : EB.$ Pr. 7. & 11. L. 5.
Mais parceque BA est \gt AE (Ax. 8. L. 1.),
4. La droite AE est \gt EB. Prop. 14. L. 5.
5. Partant la droite AB est coupée en extrême & moyenne raison en E; tellement que AE en est le plus grand segment. Def. 3. L. 6.

C. Q. F. F.

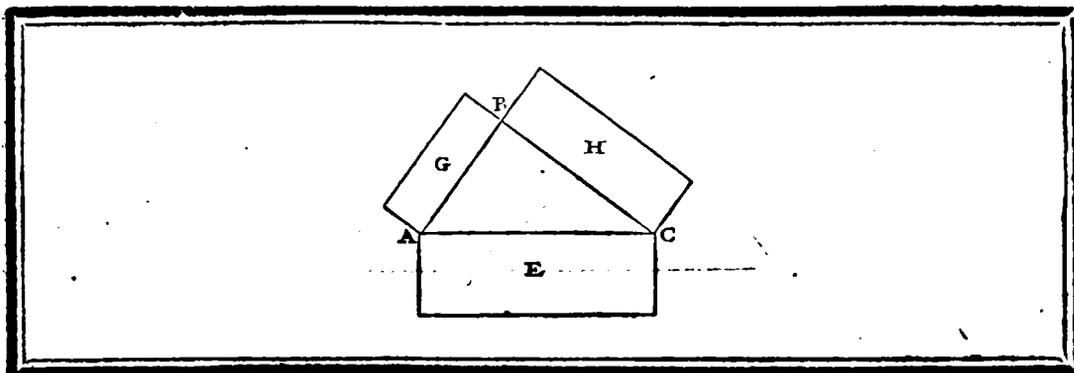
Autrement.

Partagez BA en E, enforte que le Rgle AB. BE. soit = au \square de AE. Prop. 11. L. 2.

DEMONSTRATION.

- P**uis donc que BA. BE est = au \square de AE (Ref.),
1. $BA : AE = AE : BE.$ Prop. 17. L. 6.
Et parceque BA est \gt AE (Ax. 8. L. 1.).
2. La droite AE est \gt BE Prop. 14. L. 5.
3. Partant la droite AB est coupée en extrême & moyenne raison en E. Def. 3. L. 6.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXI. THEOREME XXI.

Dans tout triangle rectangle (ABC), la figure (E) décrite de l'hypotenuse (AC) est égale à la somme des figures semblables & semblablement posées (G & H), décrites des deux côtés (AB, BC) alentour de l'angle droit.

HYPOTHESE.

- I. ABC est un Δ Rgle en B.
- II. La figure E est décrite de l'hypotenuse AC de ce Δ .
- III. Et les figures G & H sont semblables à E & décrites semblablement des deux autres côtés AB, BC.

THESE.

La figure E est = aux figures G + H.

DEMONSTRATION.

Puis donc que les figures E, G, H sont semblables & décrites semblablement des côtés homologues AC, AB, BC (Hyp. 3),

1. $G : E = \square \text{ de } AB : \square \text{ de } AC.$
Et $H : E = \square \text{ de } BC : \square \text{ de } AC.$
2. Partant $G + H : E = \square \text{ de } AB + \square \text{ de } BC : \square \text{ de } AC.$
Or à cause que le Δ ABC est rectangle en B (Hyp. 1),
3. Le $\square \text{ de } AB + \square \text{ de } BC$ est = au $\square \text{ de } AC.$
4. Donc la figure E est = aux figures G + H.

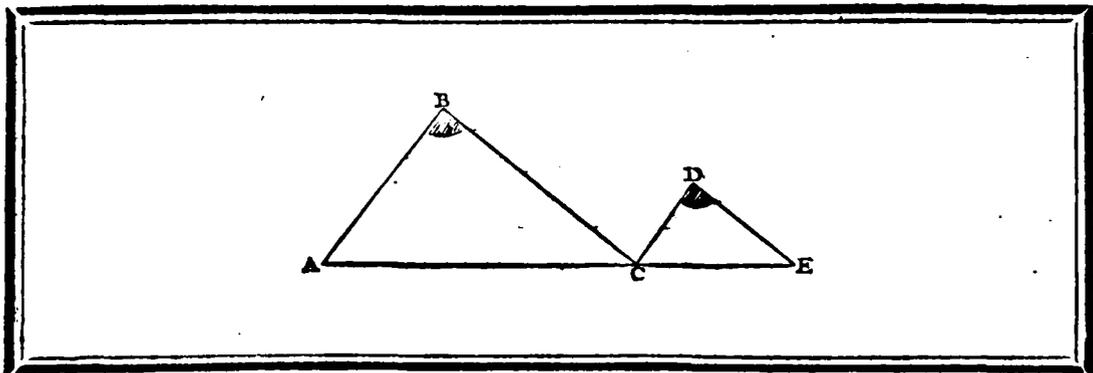
{ Prop. 20. L. 6.
Coroll. 2.
Prop. 24. L. 5.

Prop. 47. L. 1.

{ Prop. 16. L. 5.
Rem.

C. Q. F. D.





S PROPOSITION XXXII. THEOREME XXII.
 Si deux triangles (ABC, CDE), qui ont deux côtés (AB, BC) proportionnels à deux côtés (CD, DE), s'entretouchent (en C), de manière que leurs côtés homologues (AB, CD, BC, DE) soient Parallèles, les deux autres côtés (AC, CE) se rencontreront directement.

HYPOTHESE.

- I. $AB : BC = CD : DE$.
- II. Les $\Delta ABC, CDE$ s'entretouchent en C.
- III. De manière que AB est Plle à CD, & BC Plle à DE.

THESE.

Les deux autres côtés AC, CE de ces Δ , se rencontrent directement, ou ils ne forment qu'une même droite AE.

DEMONSTRATION.

Puisque les Plls AB, CD sont coupées par la droite BC, & les Plls BC, DE par la droite DC (Hyp. 2),

1. L'angle B est $=$ à $\sphericalangle BCD$ & $\sphericalangle D$ est aussi $=$ à $\sphericalangle BCD$.

2. Partant $\sphericalangle B$ est $=$ à $\sphericalangle D$.

Et comme de plus $AB : BC = CD : DE$ (Hyp. 1),

3. Les $\Delta ABC, CDE$ sont équiangles.

4. Donc l'angle A est $=$ à $\sphericalangle DCE$, comme opposés aux côtés homologues BC, DE.

Ajoutant donc de part & d'autre $\sphericalangle B$, ou son $=$ $\sphericalangle BCD$ (Arg. 1), avec \sphericalangle commun BCA,

5. Les $\sphericalangle A + B + BCA$ seront $=$ aux $\sphericalangle DCE + BCD + BCA$.

Or les $\sphericalangle A + B + BCA$ sont $=$ à 2L (Prop. 32. L. 1),

6. Par conséquent les $\sphericalangle DCE + BCD + BCA$ sont aussi $=$ à 2L .

7. D'où il suit que les droites AC, CE se rencontrent directement, ou qu'elles ne forment qu'une même ligne droite AE.

Prop. 29. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

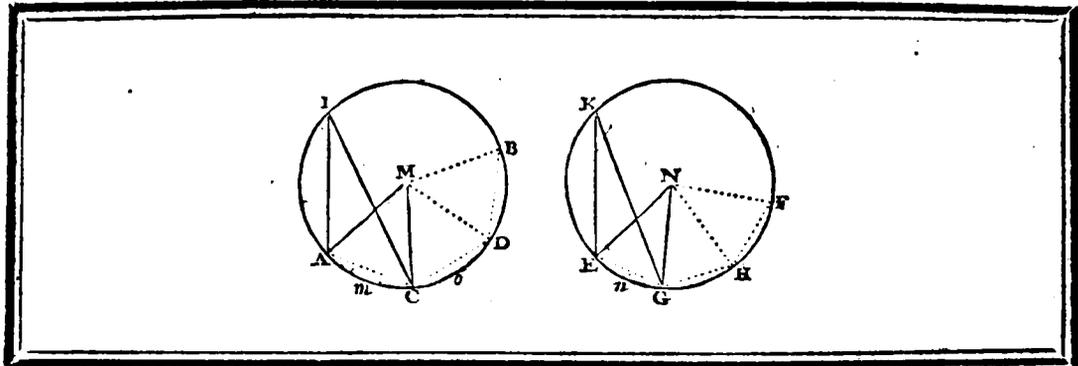
Prop. 6. L. 6.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

Prop. 14. L. 1.

C. Q. F. D.



D PROPOSITION XXXIII. THEOREME XXIII.
 Dans les cercles égaux (AIBC, EKFG), les angles, soit aux centres soit aux circonférences (AMC, ENG ou AIC, EKG), de même que les secteurs (AMCm, EN Gn), sont en raison des arcs (AmC, EnG) sur lesquels ils appuyent.

HYPOTHESE.

- I. Les \odot AIBC, EKFG sont = entr'eux.
- II. Les \sphericalangle aux centres AMC, ENG, & les \sphericalangle aux \odot AIC, EKG appuyent sur les arcs AmC, EnG.

THESE.

- I. $\sphericalangle AMC : \sphericalangle ENG = AmC : EnG$.
- II. $\sphericalangle AIC : \sphericalangle EKG = AmC : EnG$.
- III. Sect. AMCm : Sect. EN Gn = AmC : EnG.

Préparation:

- 1. Joignez les cordes AC, EG.
- 2. Appliquez dans la \odot AIBC, les cordes CD, DB &c, chacune = à AC, & dans la \odot EKFG un pareil nombre de cordes, GH, HF &c, chacune = à EG.
- 3. Tirez MD, MB &c, item NH, NF &c.

Dem. 1. L. 1.

Prop. 1. L. 4.
 Dem. 1. L. 1:

DEMONSTRATION.

Puisque d'un côté les cordes AC, CD, DB, & de l'autre les cordes EG, GH, HF sont = entr'elles (Prép. 2),

- 1. Les arcs AmC, CoD, DB sont tous égaux d'un côté; comme les arcs EnG, GH, HF le sont de l'autre.
- 2. Partant les \sphericalangle AMC, CMD, DMB &c; item ENG, GNH, HNF &c, sont aussi = entr'eux, d'un côté & de l'autre.
- 3. C'est pourquoi \sphericalangle AMB & l'arc ACDB, sont des équi-multiples de \sphericalangle AMC & de l'arc AmC.
- 4. Et par la même raison \sphericalangle ENF & l'arc EGHF sont des équi-multiples de \sphericalangle ENG & de l'arc EnG.

Prop. 28. L. 3.

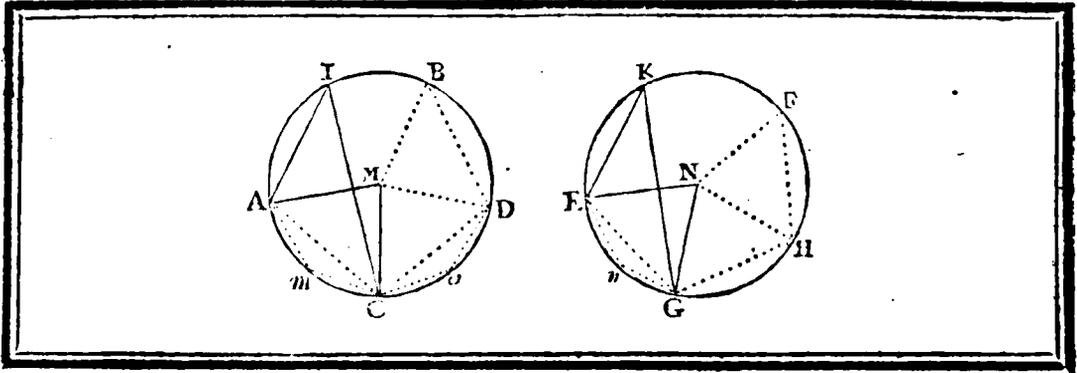
Prop. 27. L. 3.

Mais à cause de l'égalité des deux \odot AIBC, EKFG (Hyp. 1), Selon que l'arc ACDB est \sphericalangle , = ou \sphericalangle que l'arc EGHF; \sphericalangle AMB est aussi \sphericalangle ou \sphericalangle que \sphericalangle ENF.

- 5. C'est pourquoi $\sphericalangle AMC : \sphericalangle ENG = AmC : EnG$.

Prop. 27. L. 3.
 Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. L.



De plus, $\sphericalangle AMC$ étant double de $\sphericalangle AIC$, & $\sphericalangle ENG$ double de $\sphericalangle EKG$
(*Prop.* 20. *L.* 3),

6. Il s'enfuit que $\sphericalangle AMC : \sphericalangle ENG = \sphericalangle AIC : \sphericalangle EKG$.

7. Partant $\sphericalangle AIC : \sphericalangle EKG = AmC : EnG$.

Prop. 15. *L.* 5.

Prop. 11. *L.* 5.

C. Q. F. D. 11.

PREP. 4. Dans les arcs AC, CD, prenez les points *m* & *o*; & joignez *Am*, *Cm*; *Co*, *Do* &c.

Puis donc que les deux côtés *AM*, *MC* sont = aux deux côtés *CM*, *MD*
(*Def.* 15. *L.* 1.), & que les \sphericalangle compris *AMC*, *CMD* sont égaux (*Arg.* 2),

Dem. 1. *L.* 1.

8. La base *AC* est = à la base *CD*, & le $\triangle AMC$ = au $\triangle CMD$.

Prop. 4. *L.* 1.

De plus, par la raison que l'arc *AmC* est = *CoD* (*Arg.* 1),

9. Le complément *AIBDC* du premier est = au complément *CAIBD* du second.

Ax. 3. *L.* 1.

10. C'est pourquoi $\sphericalangle AmC$ est = $\sphericalangle CoD$.

Prop. 27. *L.* 3.

11. Le Segment *AmC* est donc semblable au Segment *CoD*

Ax. 2. *L.* 3.

Et ils sont outre cela soutendus par des cordes égales (*Arg.* 8).

12. Par cette raison le Segment *AmC* est = au Segment *CoD*.

Prop. 24. *L.* 3.

Or comme le $\triangle AMC$ est aussi = au $\triangle CMD$ (*Arg.* 8),

13. Le Secteur *AMCm* est = au Secteur *CMDo*.

Ax. 2. *L.* 2.

De la même manière, le Secteur *DMB* est égal à chacun des deux précédens *AMCm*, *CMDo*.

14. Les trois Secteurs *AMC*, *CMD*, *DMB* sont donc égaux entr'eux.

15. On démontre de même, que les trois Secteurs *ENG*, *GNH*, *GNF* sont = entr'eux.

16. C'est pourquoi le Sect. *AMBDC* & l'arc *ACDB* sont d'un côté des équimultiples du Sect. *AMCm* & de l'arc *AmC*; comme de l'autre côté, le Sect. *ENFHG*, & l'arc *EGHF* sont des équimultiples du Sect. *ENGn*, & de l'arc *EnG*.

Or à cause que les \odot *AIBC*, *EKFG* sont égaux (*Hyp.* 1),

Selon que l'arc *ACDB* est \sphericalangle , = ou \sphericalleftarrow que l'arc *EGHF*: (*)

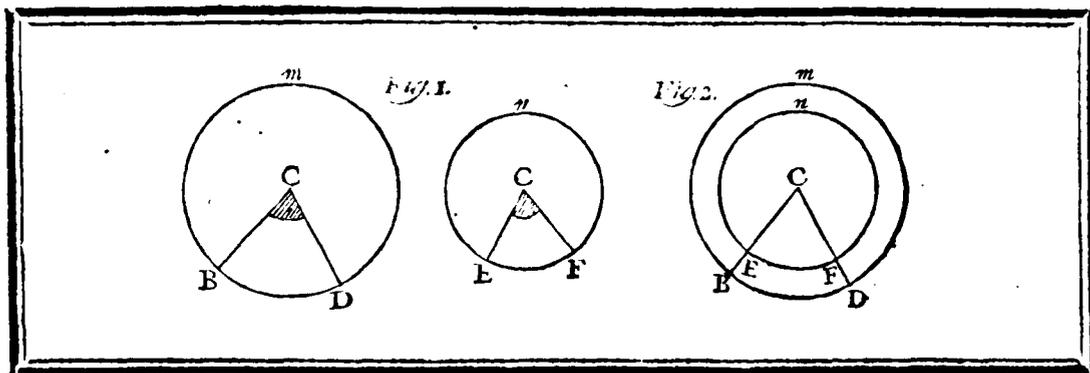
le Sect. *AMBDC* est aussi \sphericalangle , = ou \sphericalleftarrow que le Sect. *ENFHG*.

17. Partant Sect. *AMC* : Sect. *ENG* = *AmC* : *EnG*.

Def. 5. *L.* 5.

C. Q. F. D. III.

(*) La preuve se trouve dans les raisonnemens de cette III partie de la Démonstration, jusqu'à *Arg.* 12 inclusivement. On n'a qu'à supposer l'arc *AmC* = à l'arc *EnG*. Car par là $\sphericalangle AMC$ est = à $\sphericalangle ENG$ (*Prop.* 27. *L.* 3) item *AC* = *EG* (*Prop.* 4. *L.* 1). D'où l'on tire comme précédemment, que le Sect. *AMCm* est = au Sect. *ENGn*. Partant, si l'arc *AmC* est \sphericalangle ou \sphericalleftarrow l'arc *EnG*, le Sect. *AMCm* est aussi \sphericalangle ou \sphericalleftarrow Sect. *ENGn*.



C O R O L L A I R E I.

L'angle au centre, est à 4 angles droits, comme l'arc sur lequel il appuye, est à la circonférence Car (Fig. 1) $\sphericalangle BCD : \sphericalangle = BD : \frac{1}{4} \text{ un quart de } \circ$.

C'est pourquoi, quadruplant les conséquens,

$$\sphericalangle BCD : 4 \sphericalangle = BD : \circ.$$

Prop. 15. L. 5.

C O R O L L A I R E II.

Les arcs EF, BD de cercles inégaux, sont semblables, s'ils soutiennent des angles égaux C & C, soit aux centres, soit aux circonférences (Fig. 2).

Car $EF : \circ E n F = \sphericalangle ECF : 4 \sphericalangle$

Mais $\sphericalangle BCD$ ou $\sphericalangle ECF : 4 \sphericalangle = BD : \circ B m D$ } (Corol. I);

Partant $EF : \circ E n F = BD : \circ B m D$.

Prop. 11. L. 5.

Les arcs EF, BD sont donc semblables.

C O R O L L A I R E III.

Deux rayons CB, CD retranchent de circonférences concentriques, des arcs semblables EF, BD (Fig. 2).

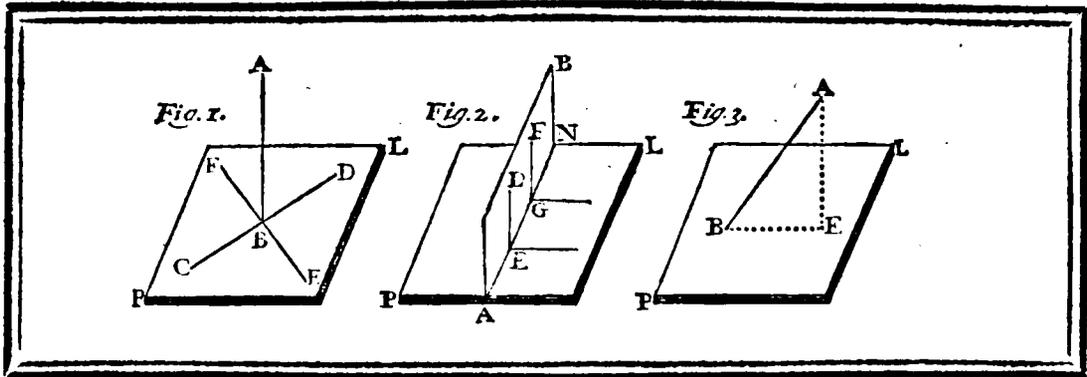
Rémarque.

C'est en vertu de la proportionalité, établie dans le Coroll. I, qu'un arc de cercle (BD) est appelé la MESURE de son angle Correspondant (BCD); c. à d. de l'angle au centre, soutenu par cet arc; la circonférence circulaire étant la seule ligne courbe, où les arcs augmentent ou diminuent, dans la raison des angles correspondans, alentour d'un même point.

On conçoit tout cercle divisé en 360 parties égales, qu'on appelle DE'GRE'S; & chacun de ces degrés en 60 autres parties égales, qu'on nomme MINUTES; & chaque minute encore en 60 autres parties égales, dites SECONDES &c. En conséquence de cette hypothèse. & de la correspondance établie entre les arcs & les angles, on est obligé de concevoir la totalité des angles, qui peuvent entourer un point dans un même plan (c. à d. la somme de 4 \sphericalangle); comme partagée en 360 parties égales. Tellement que l'angle d'un degré n'est autre chose que la 360^{ème} partie de 4 \sphericalangle , ou la 90^{ème} d'un \sphericalangle ; d'une amplitude par conséquent à pouvoir être soutenu par la 360^{ème} partie d'une circonférence.



LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE ONZIEME.



DEFINITIONS.

I.
ON nomme *Corps* ou *Solide* ce qui est étendu en Longueur, Largeur & Profondeur.

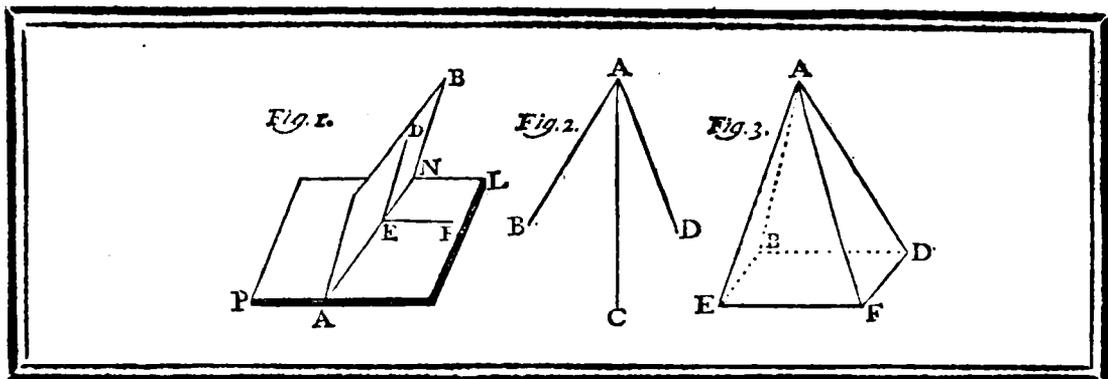
II.
Les termes, ou *Extremitez* d'un Solide sont des Superficies.

III.
Une ligne droite (AB) est perpendiculaire à un Plan (PL) (Fig. 1.) si elle est perpendiculaire à toutes les lignes (CD & FE) qu'elle rencontre dans ce Plan. c. à. d. Que la ligne AB sera perpendiculaire au Plan PL, si elle est perpendiculaire aux lignes CD & FE; lesquelles étant tirées dans le Plan PL, passent par le point B, de sorte que les Angles ABC, ABD, ABE & ABF soient droits.

IV.
Un Plan (AB Fig. 2.) est perpendiculaire à un autre (PL), si les lignes (DE & FG) menées dans un des Plans (comme dans AB) perpendiculairement à la Section commune (AN) des Plans, sont aussi perpendiculaires à l'autre Plan (PL).

On nomme Section commune des Plans une ligne qui est dans les deux Plans: comme la ligne AN, qui est aussi bien dans le Plan AB que dans le Plan PL. Si donc les lignes DE & FG tirées perpendiculairement sur AN dans le Plan AB, sont aussi perpendiculaires au Plan PL: le Plan AB sera perpendiculaire au Plan PL.

V.
L'inclinaison d'une ligne (AB) à un Plan, (Fig. 3.) est l'angle aigu (ABE) compris de la droite (AB) & d'une autre (BE) tirée dans le Plan (PL) du point B, à l'extrémité (E) de la perpendiculaire AE abaissée du point élevé (A) de la droite (AB) sur ce Plan PL.



DEFINITIONS.

V I.
UN Plan (AB) (Fig. 1.) est incliné à un autre (PL); lorsque les lignes droites ED & EF tirées dans chacun des Plans (c. a. d. DE dans le Plan AB, & EF dans le Plan PL) d'un même point E, perpendiculairement à leur Section commune AN, forment un angle aigu DEF.

V I I.
 Les Plans sont semblablement inclinés, lorsque leurs angles d'Inclinaison sont égaux.

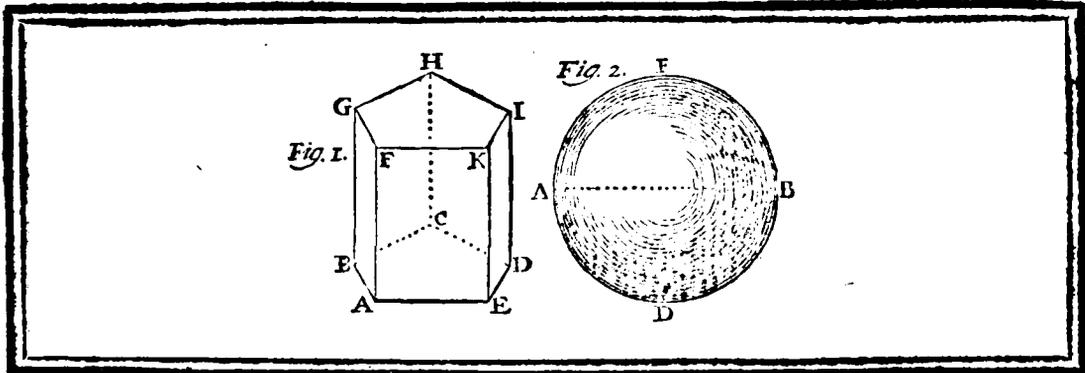
V I I I.
 Les Plans sont Paralleles, lorsqu'étant prolongés à l'infini, de part & d'autre, ils ne se rencontrent jamais.

I X.
 Les Solides ou Corps sont semblables; lorsqu'ils sont terminés par un pareil nombre de surfaces, semblables & homologues.

X.
 Les Solides sont semblables & égaux; lorsqu'ils sont terminés par un même nombre de surfaces semblables & égales.

X I.
 Un Angle Solide est l'inclinaison de plus de deux lignes droites qui se rencontrent en un point A (Fig. 2.) & ne sont point dans un même Plan: ou plutôt un Angle Solide (A) est un Angle formé par plus de deux Angles plans (BAC, CAD & BAD) qui ont tous le même point (A) pour sommet, & ne sont point dans le même Plan.

X I I.
 La Pyramide (EBADF) (Fig. 3.) est un solide terminé par plus de deux Plans triangulaires (BAD, BAE &c.) qui ont tous un même sommet (A), & dont les bazes (savoit les lignes EB, BD, &c.) sont dans le même Plan (EBDF).



DEFINITIONS.

XIII.

LE *Prisme* est un solide (AHE) (Fig. 1.) dont deux Plans opposés (savoir GHIKF & BCDA) sont égaux semblables & parallèles; & dont les autres côtés (comme GA, AK, KD &c.) sont des Parallelogrammes. Si les Plans opposés & parallèles sont des Triangles, le *Prisme* est nommé *triangulaire*. (& ce n'est que de ces *Prismes* qu'Euclide parle dans le XI. & XII. Livre.) Si les Plans opposés sont des Polygones on le nommera un *Prisme-Polygone*.

XIV.

La *Sphère* est un solide (AFBD) (Fig. 2.) dont la superficie est décrite par la circonférence d'un demi Cercle (AFB) faisant un tour entier sur son Diamètre immobile (AB).

XV.

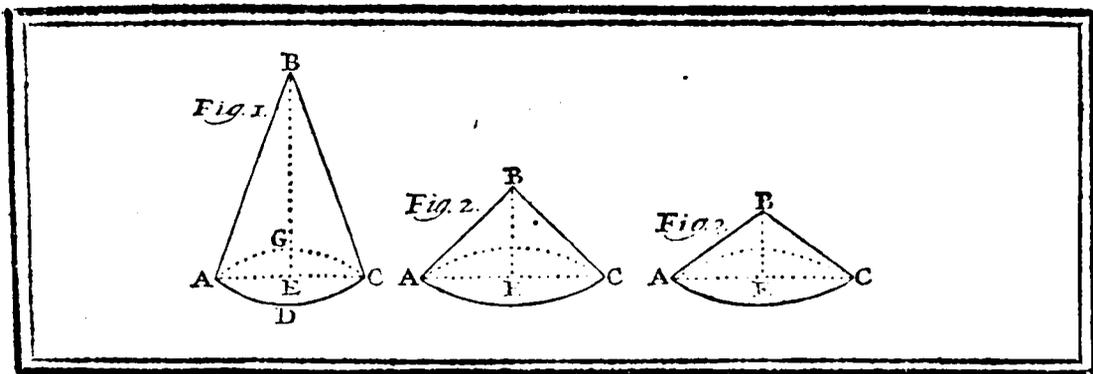
L'*Axe de la Sphère* est le Diamètre immobile AB à l'entour duquel le demi Cercle à tourné, lorsqu'il a décrit la superficie de la Sphère.

XVI.

Le *Centre de la Sphère* est le même que celui du demi Cercle, qui a décrit sa superficie.

XVII.

On nomme *Diamètre de la Sphère*, une ligne droite quelconque passant par le centre, & terminée de part & d'autre par la superficie de la Sphère.



D E F I N I T I O N S .

X V I I I .

LE Cone est un solide, (ABCD) (Fig. 1 2 & 3.) dont les deux superficies sont décrites par l'Hypothénuse (AB) & un côté (AE) d'un triangle rectangle (ABE), le côté (BE) demeurant immobile, & le triangle faisant un tour entier sur ce côté.

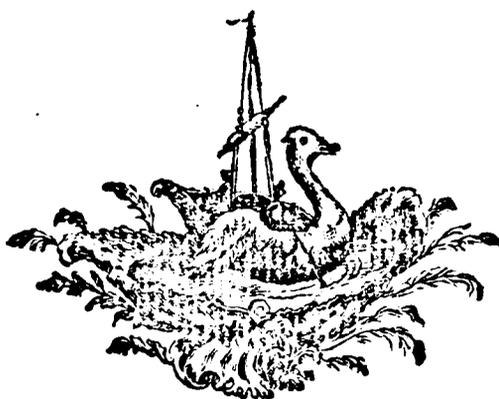
Si le côté immobile (BE) du triangle (ABE) (Fig. 2.) est égal à l'autre côté (AE) comprenant l'angle droit, le Cone sera nommé Rectangle; Si BE est plus petit que AE (Fig. 3.) il sera Amblygone; & Oxygone si BE est plus grand que AE (Fig. 1.)

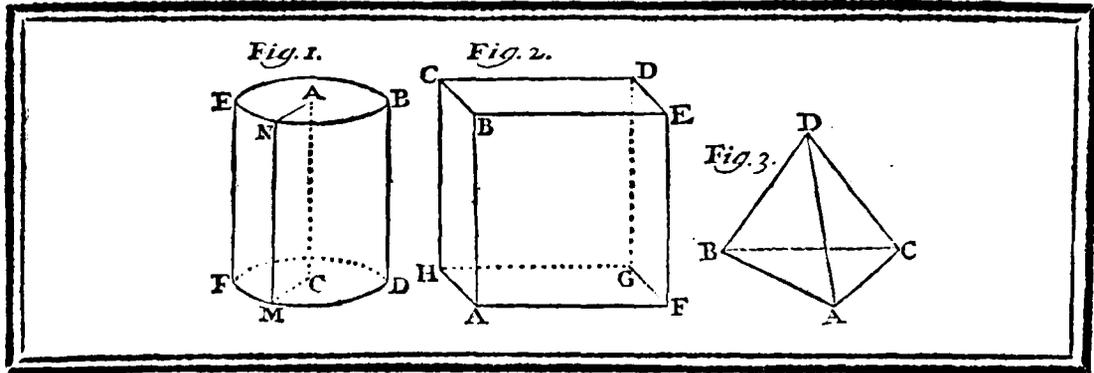
X I X .

L'axe du Cone est la ligne immobile (BE) sur laquelle le triangle ABE a tourné lorsqu'il a décrit la superficie du Cone.

X X .

La baze du Cone est le Cercle (AGCD) (Fig. 1.) décrit par le côté mobile AE.





DEFINITIONS.

XXI.

LE *Cylindre* est un solide (EBDF Fig. 1.) dont les trois superficies sont décrites par les trois cotés (AN, NM & MC) d'un Parallelogramme Rectangle (ANMC), le coté (AC) demeurant immobile, & le Parallelogramme faisant un tour entier sur ce côté.

XXII.

L'*Axe du Cylindre* est le coté immobile AC, à l'entour duquel le Parallelogramme s'est mû, lorsqu'il a décrit les superficies du Cylindre.

XXIII.

Les *bases du Cylindre* (savoit ENB & FMD) sont des Cercles décrits par les deux cotés opposez (NA, MC) mûs à l'entour des points A & C.

XXIV.

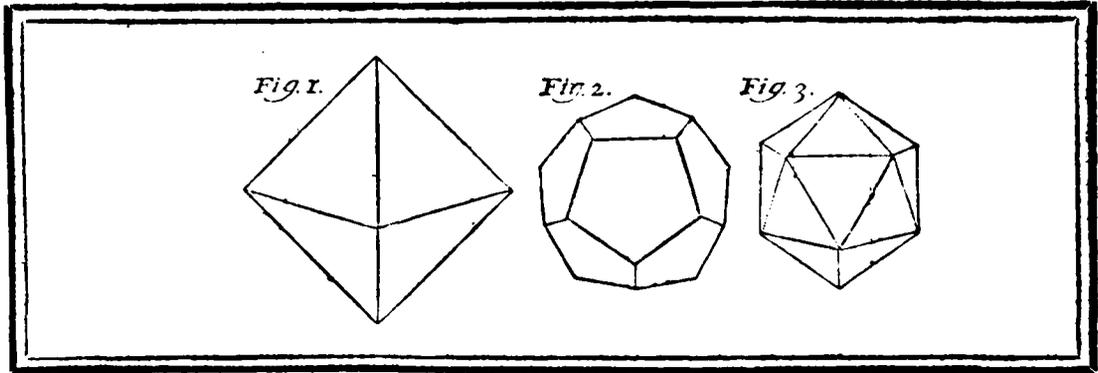
Les *Cones & les Cylindres semblables*, sont ceux dont les Axes, & les Diamètres de leurs Bases, sont proportionels.

XXV.

Le *Cube ou Exaëdre* (Fig. 2.) est un solide terminé par six quarez égaux.

XXVI.

Le *Tétraëdre* est une Pyramide (BDCA Fig. 3.) terminée par quatre triangles équilatéraux & égaux (savoit les \triangle BDC, BAD, ADC & BAC).



DEFINITIONS.

XXVII.

L'*Octaèdre* (Fig. 1.) est un solide terminé par huit triangles équilatéraux & égaux.

XXVIII.

Le Dodecaèdre (Fig. 2.) est un solide terminé par douze Pentagones équilatéraux & égaux.

XXIX.

L'Icosaèdre (Fig. 3.) est un solide terminé par vingt triangles équilatéraux & égaux.

XXX.

Le Parallelepipède est un solide terminé par six Plans quadrilatères, desquels les opposés sont parallèles.

XXXI.

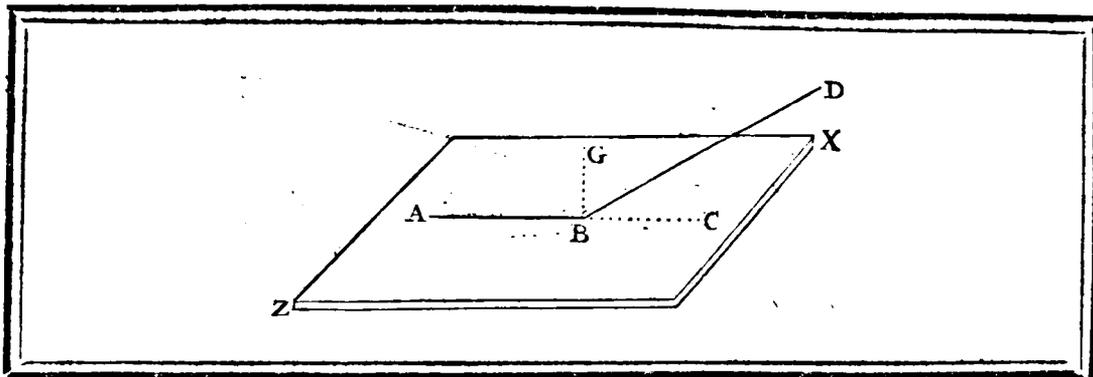
Un Solide est nommé Inscrit dans un Solide, lorsque tous les angles du solide inscrit touchent les angles, les côtés, ou les Plans du solide dans lequel il est inscrit.

XXXII.

Un Solide est nommé Circonscrit autour d'un Solide, lorsque les angles, les côtés ou les Plans du solide circonscrit touchent tous les angles du solide inscrit.

EXPLICATION DES SIGNES.

S - - - - - Semblable.
 ☐ - - - - - Parallelepipède.



PROPOSITION. I. THEOREME I.

SI une partie (AB) d'une ligne droite est dans un Plan (ZX); l'autre partie sera dans le même Plan.

HYPOTHESE.

AB est une partie d'une droite située dans le Plan ZX.

THÈSE.

L'autre partie de la droite (comme BC) sera dans le même Plan ZX.

DEMONSTRATION.

SI non.

Elle sera hors du Plan comme est BD.

Préparation.

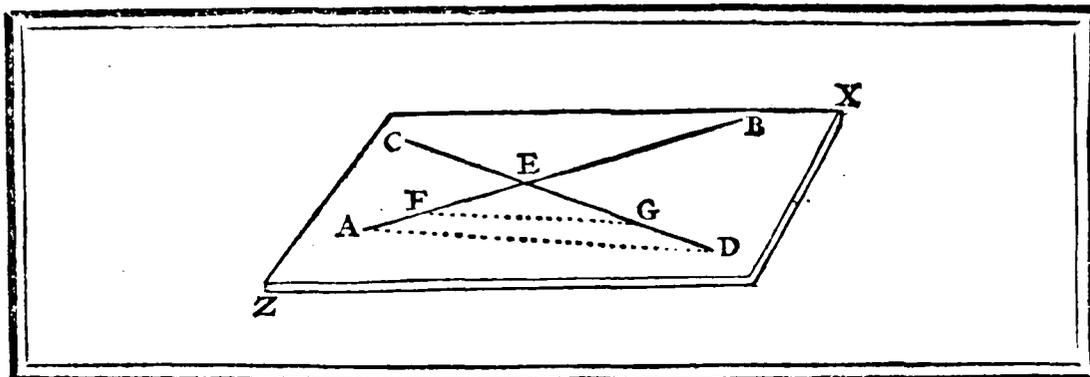
1. **S**ur AB au point B élevez dans le Plan ZX la \perp GB. Prop. 11. L. 1.
2. Sur BG au même point B dans le Plan ZX élevez la \perp BC.

Puisque \sphericalangle ABG est un L, de même que \sphericalangle GBC & qu'ils concourent dans le même point B.

1. Les lignes AB & BC font une même droite AC. Prop. 14. L. 1.
Cependant la ligne BD est une partie de la droite située hors du Plan (*Sup.*).
2. Donc les lignes BD & BC ont une partie Commune AB.
3. Ce qui est impossible.
4. Donc BD ne peut-être une partie d'une droite avec AB (*Arg. 1*)
Et comme la même démonstration a lieu pour toutes les parties différentes de BC il s'enfuit.
5. Que toutes les parties d'une droite font dans le même Plan.

C. Q. F. D.

Pp



PROPOSITION II.

THEOREME II.

SI deux lignes se coupent en E; elles sont dans le même Plan (ZX) & toutes les parties d'un triangle (EAD) sont dans le même Plan (ZX).

HYPOTHESE.

- I. AB , & CD , se coupent en E .
- II. EAD est un \triangle .

THESE.

- I. AB , & CD , sont dans le même Plan.
- II. tout le $\triangle EAD$ est dans le Plan ZX .

DEMONSTRATION.

SI non.

Les lignes AB & CD ne sont point dans le même Plan de même qu'une partie du $\triangle EAD$. comme $AFGD$.

Preparation.

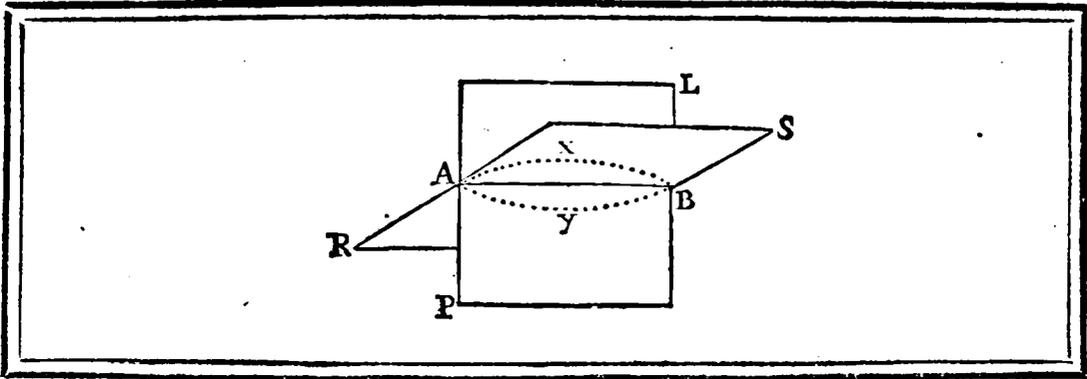
Tirez CF .

PUISQUE la partie $AFGD$ du $\triangle EAD$ n'est point dans le même Plan (ZX) avec EFG . (*Sup.*)

1. Il s'en suit que la partie GD de la ligne CD est dans un Plan different que l'autre partie CG de la même droite; & que la partie AF de la droite AB , est dans un Plan different que son autre partie FB . de même pour $AFGD$ & FEG .
2. Ce qui est impossible.
3. Les parties des deux lignes & du \triangle ne pouvant être situées dans des Plans differens.
4. Sont donc dans le même Plan.

Prop. I. L. II.

C. Q. F. D. I. & II.



PROPOSITION III.

THEOREME III.

SI deux Plans (RS & PL) s'entre-coupent; leur commune Section fera une ligne droite (AB).

HYPOTHESE.
RS & PL sont deux Plans
qui s'entre coupent.

THESE.
Leur commune Section AB est
une seule droite.

DEMONSTRATION.

SI non.

La Section formera deux droites differentes.

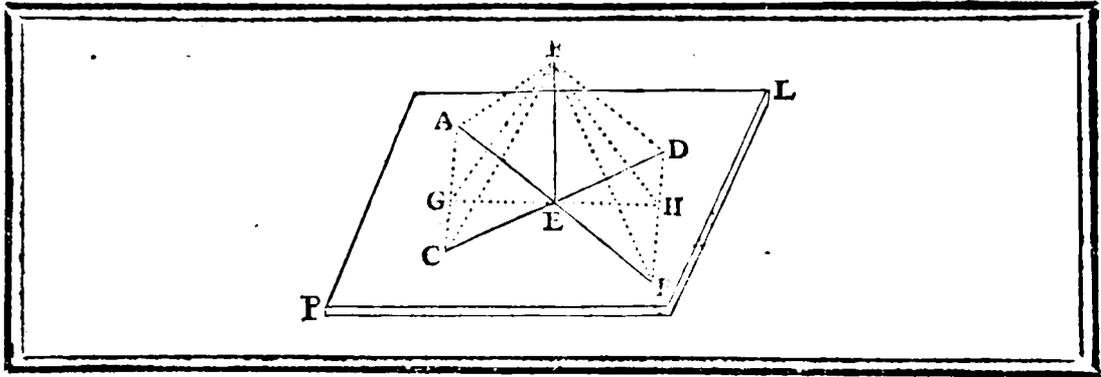
Comme Ax B pour le Plan RS; & Ay B pour le Plan PL.

PUisque les droites differentes Ax B & Ay B ont les mêmes extremités A & B.

1. Ces droites Ax B & Ay B renferment l'espace Ax By.
2. Ce qui est impossible.
3. Partant la Section des Plans PL & RS ne forme point deux droites differentes Ax B & Ay B.
4. Donc leur Section commune, fera une même droite AB.

AX. 12. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

SI deux lignes droites (AB & CD) s'entre-coupent, & qu'au point (E) de leur Section on eleve une perpendiculaire (EF) sur ces lignes (AB & CD): Elle fera aussi perpendiculaire sur le Plan (PL) passant par ces lignes (AB & CD).

HYPOTHESE.

- I. AB & CD sont des droites situées dans le Plan PL .
- II. Elles s'entre-coupent en E .
- III. EF est \perp sur ces lignes au point E .

THESE.

EF est \perp sur le Plan PL .

Preparation.

1. Prenez EC à volonté, & faites EB , ED & AE chacune égale à EC .
2. Joignez les points A , & C . Item B & D .
3. Tirez par le point E dans le même Plan PL , la droite GH qui sera terminée par les droites AC & BD aux points G & H .
4. Tirez AF , GF , CF , DF , HF & BF .

DEMONSTRATION.

Les $\triangle AEF$, CEF , BEF , & DEF , ont le coté EF commun.

Les cotés AE , CE , BE , & DE égaux. (*Prép. 1.*) & les \sphericalangle contigus AEF , CEF , BEF & DEF égaux. (*Hyp. 3.*)

1. Partant les bazes AF , CF , BF & DF sont égales. Prop. 4. L. 1.

Dans les $\triangle AEC$ & DEB , les cotés AE , CE , ED & EB sont = (*Prép. 1.*) & les \sphericalangle AEC & DEB aussi égaux. Prop. 15. L. 1.

2. Donc $AC = BD$

3. Et $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EBD$ }

Les $\triangle GAE$ & EBH ont $\sphericalangle AEG = \sphericalangle HEB$. Prop. 4. L. 1.

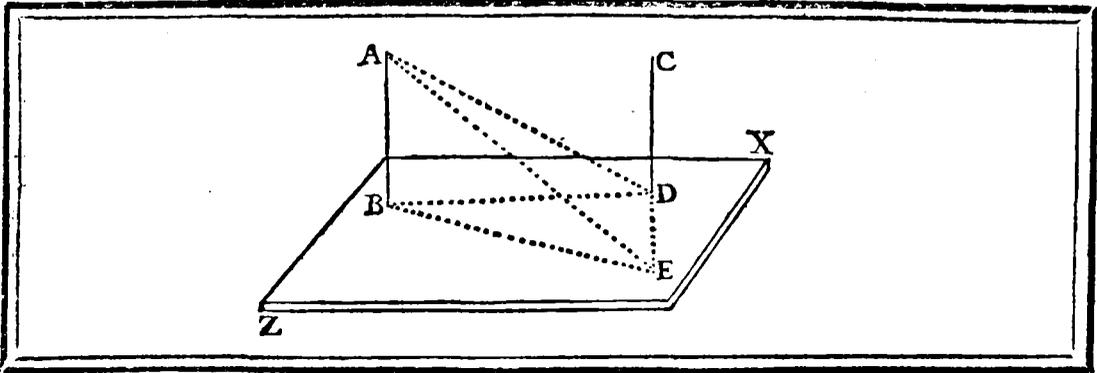
$\sphericalangle EAG = \sphericalangle EBH$ (*Arg. 3.*) & $AE = EB$. (*Prép. 1.*) Prop. 15. L. 1.

4. Par-

4. Partant les cotés GA & GE font égaux aux cotés HB & EH. Prop. 26. L. 1.
 Dans les $\triangle AFC$ & FDB , les trois cotés AF, FC & AC du premier font égaux aux trois cotés FB, FD & DB du second. (Arg. 1 & 2.)
5. Donc les trois \sphericalangle du $\triangle AFC$ font égaux aux trois \sphericalangle du $\triangle FDB$ chacun a chacun, *c. a. d.* $\sphericalangle FAG = \sphericalangle FBH$ &c. Prop. 8. L. 1.
 Les \sphericalangle GAF & HBF ont les deux cotés AF & AG; = aux deux cotés FB & BH. (Arg. 1 & 4.)
 De plus $\sphericalangle FAG = \sphericalangle FBH$. (Arg. 5.)
6. Donc $GF = FH$. Prop. 4. L. 1.
 Enfin dans les $\triangle GFE$ & FEH , les cotés GF, GE & FE font égaux aux cotés FH, EH, & EF. (Arg. 4 & 6.)
7. Partant les trois angles du $\triangle GFE$ font = aux trois angles du $\triangle FEH$, chacun a chacun *c. a. d.* $\sphericalangle FEG = \sphericalangle FEH$, &c. Prop. 8. L. 1.
 Or ces angles FEG & FEH font formés par la droite EF tombant sur GH (parce que GE & EH n'est qu'une même droite *Prép.* 3.)
8. Donc ces angles FEG & FEH font \perp , & FE \perp sur GH. { Prop. 13. L. 1.
 Def. 10. L. 1.
- Mais HG est dans le même Plan, que les lignes AB & CD. (*Prép.* 3.)
 Et EF est \perp sur ces lignes, par (*PHyp.* 3.)
9. Partant EF est \perp sur le Plan PL. Def. 3. L. 11.

C. Q. F. D.





PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

SI deux lignes droites (AB & CD) sont perpendiculaires sur un Plan (ZX); Elles sont Paralleles.

HYPOTHESE.
AB & CD sont \perp sur le Plan ZX.

THESE.
AB & CD sont paralleles.

Préparation.

1. Joignez les points B & D dans le Plan ZX.
2. Sur BD au point D dans ce même Plan, élevez la \perp DE.
3. Faites $DE = AB$.
4. Tirez AD, AE & BE.

Prop. II. L. I.
 Prop. 3. L. I.

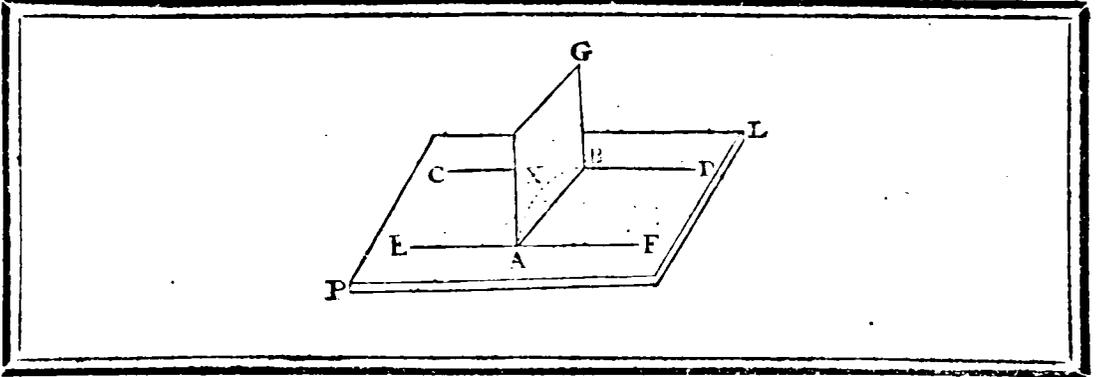
DEMONSTRATION.

Puisque dans les Δ ABD & BDE, le coté DE est $= AB$ (Prép. 3.) que BD est commun, & que les \sphericalangle ABD & BDE sont \perp (Hyp., Prép. 2. & Def. 3. II.)

1. Le coté AD est $= BE$.
 Dans les \sphericalangle ABE & ADE, le coté AE est commun, AB est $= DE$, & BE $= AD$ (Prép. 3. & Arg. 1.) Prop. 4. L. I.
2. Partant \sphericalangle ABE est $= \sphericalangle$ ADE.
 Or \sphericalangle ABE est \perp . Prop. 8. L. I.
3. Donc \sphericalangle ADE est aussi \perp .
 Mais \sphericalangle CDE est \perp . Def. 3. L. II.
4. Partant DE est \perp sur CD, DA & DB. (Hyp. Prép. 2. & Arg. 3.) Ax. 1. L. I.
5. Donc ces lignes CD, DA & DB sont dans le même Plan, *c. a. d.* Def. 3. L. II.
6. De même AB est aussi dans le même Plan qui passe par DA, & DB. Prop. 5. L. II.
7. Donc AB & CD sont dans le même Plan. Prop. 2. L. II.
8. Or les \sphericalangle intérieurs ABD & BDC sont des \sphericalangle droits (par l'Hyp.). Prop. 28. L. I.

Par conséquent AB est parallele à CD.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. THEOREME VII.

Sil'on joint deux points (A & B) situés dans deux Paralleles (DC & FE) par une droite (AB); Elle sera dans le même Plan (PL) que les Paralleles.

HYPOTHESE.

- I. A & B sont deux points pris à volonté dans les Paralleles EF & CD.
- II. AB est la droite qui joint ces points.

THÈSE.

AB est dans le même Plan PL que les Piles CD & EF.

DEMONSTRATION.

Si non.

Elle sera dans un Plan différent AG, comme est la ligne Ax B.

Puisque Ax B est dans le Plan AG, différent du Plan PL, & que ses extrémités A & B sont dans les lignes CD & EF, situées dans Plan PL.

1. La ligne Ax B sera commune aux deux Plans, c. a. d. Ax B est la commune Section des deux Plans AG & PL.

Mais AB est aussi une droite ayant les mêmes extrémités A & B par (Hyp. II.).

2. Partant AB & Ax B sont deux droites différentes ayant les mêmes extrémités.

3. Ce qui est impossible.

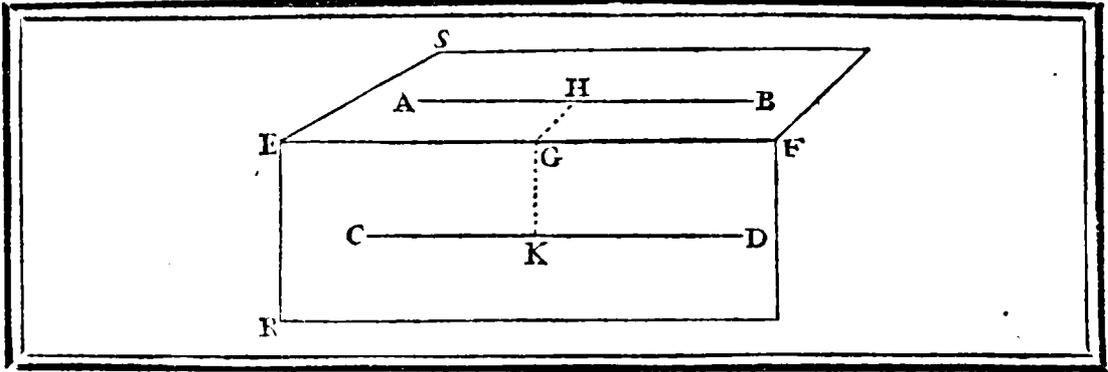
4. C'est pourquoi la ligne droite (AB) qui joint les points A & B n'est point dans un Plan AG différent de celui où les Paralleles CD & EF se trouvent.

5. Donc AB est dans le même Plan PL que les Piles CD & EF.

Prop. 3. L. II.

Ax, 12. L. I.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Les lignes (AB & CD) qui sont parallèles à une même ligne (EF) quoique situées dans les Plans différents (SF & RF); sont parallèles entr'elles.

HYPOTHESE.

I. AB est dans le Plan SF, & CD dans le Plan RF.

II. AB & CD sont chacun Plle EF.

THESE.

AB est Plle CD.

Préparation.

1. D'Un point H de la ligne AB dans le Plan FS abaissez une \perp HG sur EF.
2. Du Point G dans le Plan RF abaissez la \perp GK sur CD.

Prop. II. L. I.

DEMONSTRATION.

Puisque EG ou EF est \perp sur GH & GK (Prép. 1. & 2.)

1. EG fera \perp sur le Plan qui passe par ces lignes.

Prop. 4. L. II.

Or AB est Plle EF (Hyp. 2.)

2. Donc AB est \perp sur le Plan qui passe par ces lignes HG & GK.

Prop. 8. L. II.

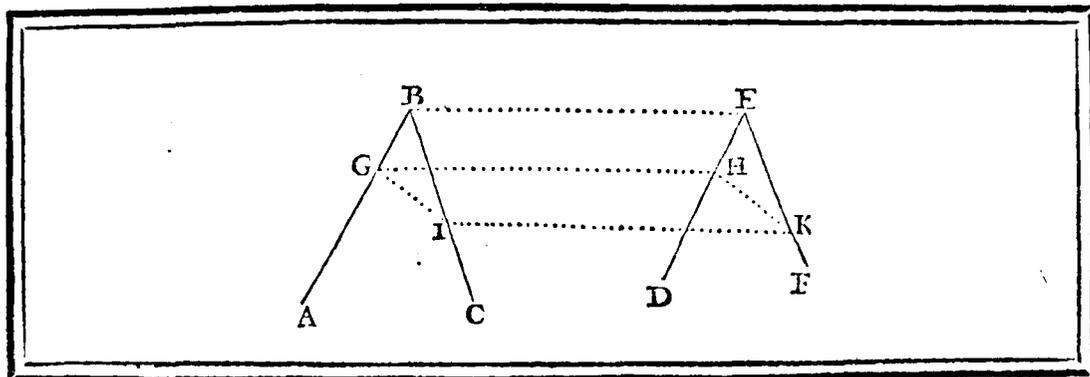
3. De la même manière CD est aussi \perp sur ce même Plan.

Les lignes AB & CD étant donc \perp sur un même Plan. (Arg. 2 & 3.)

4. Elles sont parallèles entr'elles.

Prop. 6. L. II.

C. Q. F. D.



PROPOSITION X. THEOREME X.

SI deux lignes droites (AB & BC) qui se touchent (en B), sont paralleles à deux autres lignes (DE & EF) situées dans un autre Plan, & qui se touchent en E; Elles formeront des angles égaux. (ABC & DEF.).

HYPOTHESE.

AB & CD se touchent en B, dans un Plan
différent de celui où DE & EF sont,
qui se touchent aussi en E.

THESE.

$\sphericalangle ABC \text{ est } = \sphericalangle DEF.$

Préparation.

1. Coupez à volonté des droites AB & BC, les parties BG & BI,
2. Faites HE = BG, & EK = BI.
3. Joignez les points BE, GH, GI, HK & IK.

Prop. 3. L. 1.
Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

LA ligne BG étant égale & parallele à HE (Prép. 2. & Hyp.).

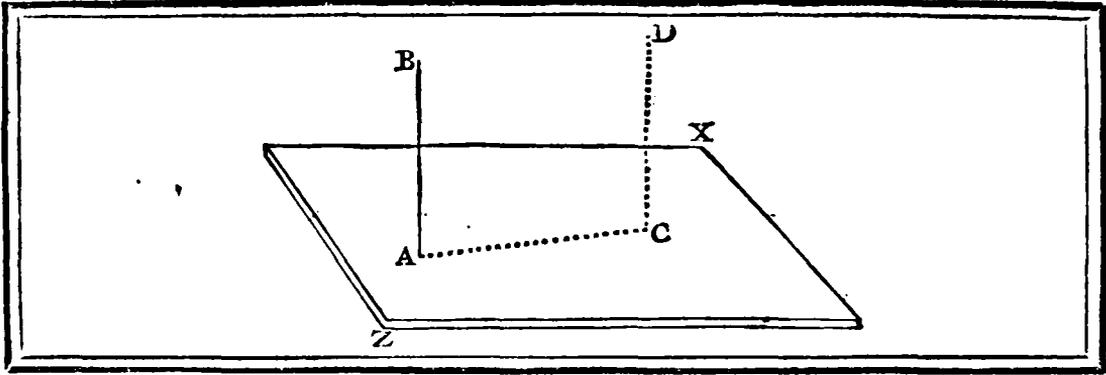
1. GH fera = & Plle à BE.
2. De la même manière IK est = & Plle à BE.
3. Partant GH est = & Plle à IK.
4. Donc GI est = & Plle à KH.

Prop. 33. L. 1.
Prop. 9. L. 1.
Ax. 1. L. 1.
Prop. 33. L. 1.

- Et puisque dans les $\triangle GBI$ & $\triangle HEK$ les trois cotés BG, BI, & GI du premier, sont égaux aux trois cotés HE, EK & HK du dernier, chacun à chacun (Prép. 2. & Arg. 4.).
5. L'Angle GBI ou ABC est = $\sphericalangle HEK$ ou DEF.

Prop. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XII. PROBLEME II.

D Un point donné (A) dans un Plan (XZ), élever une perpendiculaire BA.

DONNEES.
Un point A dans le
Plan XZ.

CHERCHEE.
La droite BA élevée du point A
⊥ sur le Plan XZ.

Resolution.

1. Prenez à volonté un point D hors du Plan XZ.
2. De ce point D, descendez la ⊥ DC sur ce Plan.
3. Joignez les points A & C.
4. Du point A tirez AB Plle à DC.

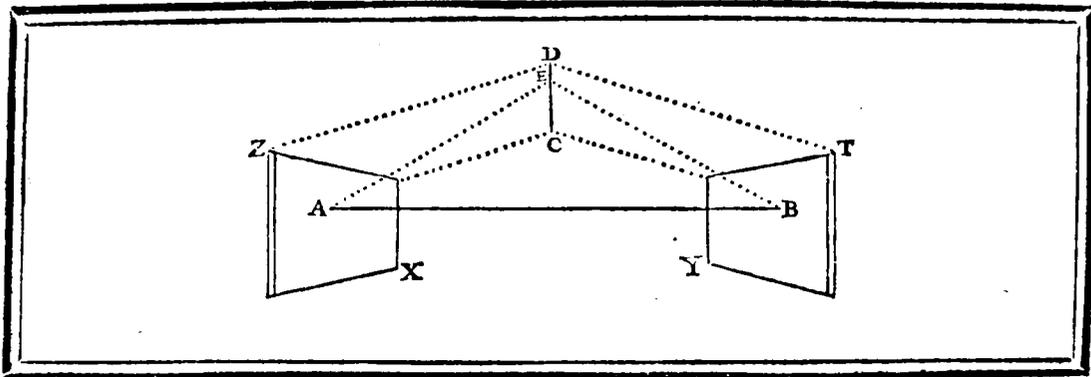
Prop. II. L. II.
Dem. I. L. I.
Prop. 31. L. I.

DEMONSTRATION.

Puisque la ligne AB est Plle à DC (Ref. 4.)
& que DC est ⊥ sur le Plan XZ. (Ref. 2.).
1. AB fera aussi ⊥ sur le même Plan XZ.

Prop. 8. L. II.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIV. THEOREME XII.

Les Plans (XZ & TY) sur lesquels une même ligne (AB) est perpendiculaire; sont paralleles.

HYPOTHESE.
AB est \perp sur les Plans XZ & TY.

THESE.
Le Plan XZ est Palle au Plan TY.

DEMONSTRATION.

SI non.

Les Plans XZ & TY, prolongez se couperont quelque part. Def. 8.L. II.

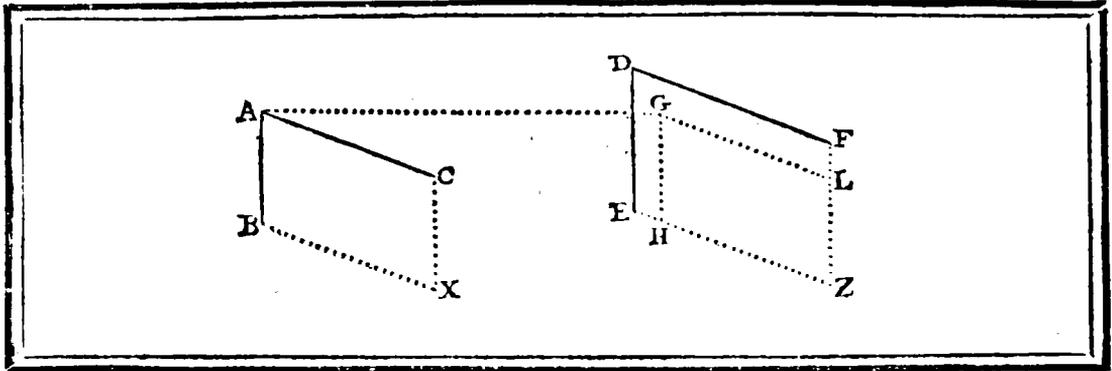
Préparation.

1. Prolongez les Plans XZ & TY jusqu'à ce qu'ils se coupent en DC.
2. Prenez un point E dans la ligne de section DC.
3. Tiréz EA & EB.

Puisque AB est \perp sur le Plan TY, (*Hyp.*) & que EB est dans ce Plan (*Prép. 3.*)

1. \forall ABE est un \perp . Def. 3.L. II.
2. De même \forall BAE est \perp .
3. Partant le Δ BAE à deux \forall droits.
4. Ce qui est impossible. Prop. 17.L. II.
5. D'où il suit que les lignes AE & EB ne se rencontrent point non plus que les Plans TY & XZ. Prop. 1.L. II.
6. Donc ces Plans TY & XZ, sont paralleles. Def. 8.L. II.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. THEOREME XIII.

SI deux lignes (AB & AC) situées dans un Plan (AX) & s'entre touchant (en A) sont parallèles, à deux autres lignes (DE & DF), s'entre touchant & situées dans un autre Plan (DZ); ces Plans (AX & DZ) feront parallèles.

HYPOTHESE.

AB & AC situées dans le Plan AX & qui se touchent en A , sont parallèles à DE & DF qui se touchent en D , & qui sont situées dans le Plan DZ .

THESE.

Le Plan AX dans lequel les lignes AB & AC se touchent est parallèle au Plan DZ ou les lignes DE & DF se touchent.

Préparation.

1. DU point A abaissez la \perp AG sur le Plan DZ .
2. Tirez GH Plle à DE , & GL Plle à DF .

Prop. II. L. II.
Prop. 31. L. I.

DEMONSTRATION.

- Puisque les lignes GH & GL sont Plle à DE & DF . (Prép. 2.).
1. Ils seront aussi Plle à AB & AC .
Et GL étant Plle à AC .
 2. Les \sphericalangle CAG + AGL sont = 2 L .
Mais \sphericalangle AGL est L . (Prép. 1.).
 3. Partant \sphericalangle CAG est aussi L .
 4. De la même manière on démontrera que \sphericalangle BAG est L .
 5. Donc GA est \perp sur le Plan AX .
Or le même GA est aussi \perp sur le Plan DZ . (Prép. 1.).
 6. C'est pourquoi le Plan AX est Plle au Plan DZ .

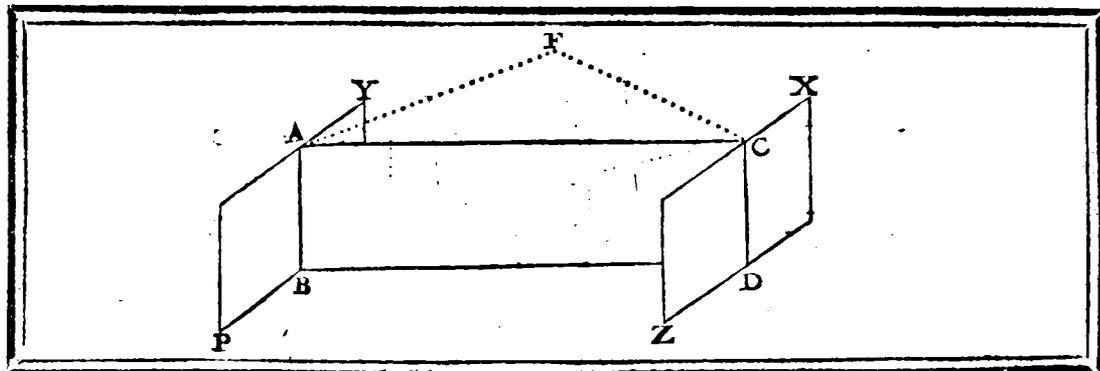
Prop 9. L. II.

Prop. 29. L. I.

Prop. 4. L. II.

Prop 14. L II.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI. THEOREME XIV.

SI deux Plans paralleles (ZX & YP) sont coupez par un autre Plan, ($ABDC$) les lignes de commune Section (CD & AB) seront paralleles.

HYPOTHESE.

- I. Les Plans ZX & YP sont Plle
- II. Ils sont coupez par le Plan $ABCD$.

THESE.

Les lignes de commune Section CD & AB sont Plle.

DEMONSTRATION.

SI non.

Les lignes AB & CD étant prolongées doivent se couper quelque part.

Preparation.

Prolongez les donc jusqu'à ce qu'elles se coupent en F .

Dem. 2. L. 1.

Puisque les droites BAF & DCF , se rencontrent en F .

1. Les Plans PY & ZX , dans lesquels ces lignes se trouvent, se rencontreront aussi: (Puisque BAF est entièrement dans le Plan PY , & DCF entièrement dans le Plan ZX).

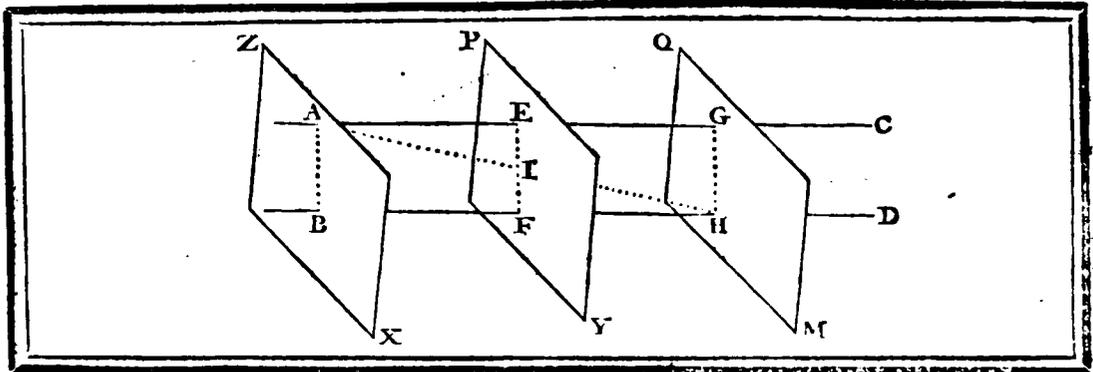
Prop. 1. L. II.

2. Ce qui est impossible. (*Hyp. 1.*)
3. Partant AB & CD ne se rencontrent point.
4. Donc AB & CD sont paralleles.

Def. 35. L. 1.

C. Q. F. D.

Rr



PROPOSITION XVII. THEOREME. XV.

SI deux lignes droites (AC & BD) sont coupées par des Plans paralleles (XZ, PY & QM): Elles feront coupées proportionnellement. (c. a. d., que $AE:EF = BF:FH$ &c.).

HYPOTHESE.

- I. AC & BD sont deux droites.
- II. Coupées par les Plans Piles XZ; PY & QM.

THESE.

$$AE:EG = BF:FH.$$

Préparation.

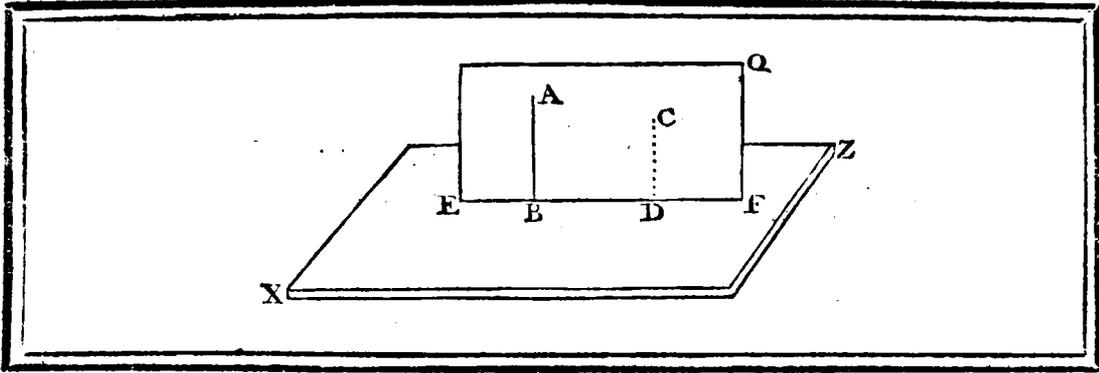
1. Joignez les points A & B, Item G & H
2. Tirez AH qui passera par le point I, au travers du Plan PY. } Dem. I. L. I.
3. Tirez EI & IF.

DEMONSTRATION.

Puisque les Plans Piles ZX & PY sont coupés par le Plan du $\triangle ABH$.

1. AB est Pile à IF. Prop. 16. L. II.
2. De la même manière EI est Pile à GH.
3. Partant $AI:IH = BF:FH$ }
4. Et $AI:IH = AE:EG$ } Prop. 2. L. 6.
5. Donc $AE:EG = BF:FH$. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION. XVIII. THEOREME XVI.

SI une droite (AB) est perpendiculaire à un Plan (ZX): Tous les Plans (comme QE) qui passent par cette ligne (AB) feront perpendiculaire sur le même Plan (ZX).

HYPOTHESE.

AB est \perp sur le Plan ZX.

THÈSE.

Tous les Plans (comme QE),
passant par la \perp AB,
sont \perp sur le Plan ZX.

Préparation.

1. F Aites passer le Plan QE, par la ligne AB, qui coupera le Plan ZX en EF.
2. Prenez dans cette droite EF, un point D, à volonté.
3. De ce point D, tirez dans le Plan QE, la ligne DC Plle à AB.

Prop. 3. L. I.

Prop. 31. L. I.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite AB est \perp sur le Plan ZX, & que DC est Plle à AB.
(Hyp. & Prép. 3.).

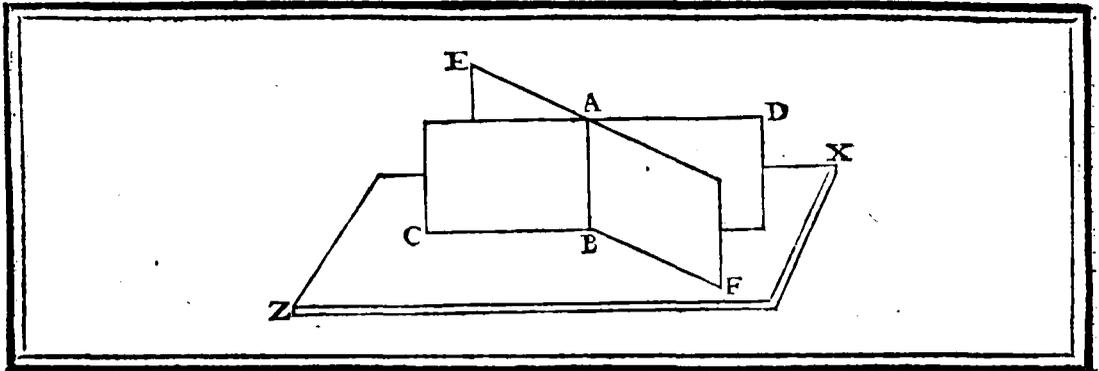
1. Le ligne DC est \perp sur le Plan ZX.
2. Partant CD est aussi \perp sur la ligne de section commune EF.
3. Donc le Plan EQ dans lequel les lignes AB & CD se trouvent, est \perp sur le Plan SX.
& comme la même Demonstration à lieu pour tout autre Plan passant par la \perp AB. On peut conclure.
4. Que tous les Plans passant par cette ligne sont perpendiculaire sur le Plan ZX.

Prop. 8. L. II.

Def. 3. L. II.

Def. 4. L. II.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIX. THEOREME XVII.

Si deux Plans (CD & EF) qui insistent perpendiculairement sur un Plan (ZX) s'entre-courent; la ligne de commune Section (AB) sera aussi perpendiculaire sur le même Plan (ZX).

HYPOTHESE.

- I. Les Plans CD & EF sont \perp sur le Plan ZX.
- II. Ils s'entre-courent en AB.

THESE.

La commune Section AB est \perp sur le Plan ZX.

DEMONSTRATION.

Puisque CB, section commune du Plan CD avec le Plan XZ, est aussi dans le Plan ZX.

1. On peut élever du point B une \perp , sur CB (Par le 11^e Prop. de ce Livre) qui sera dans le Plan CD. (Hyp. 1.)
Et comme la ligne FB section commune des Plans FE & XZ, est aussi dans le Plan XZ.
2. On peut aussi du même point B & du même coté que la précédente élever encore une \perp qui tombera dans le Plan FE.
Mais du point B on ne peut élever qu'une \perp .
3. Partant ces perpendiculaires doivent coïncider; c'est-à-dire, que ces deux lignes ne doivent faire qu'une seule qui soit commune aux deux Plans.
Or ces Plans n'ont de commun que la ligne AB. (Hyp. 2.).
4. Donc AB est perpendiculaire sur le Plan XZ.

Prop. 3. L. II.

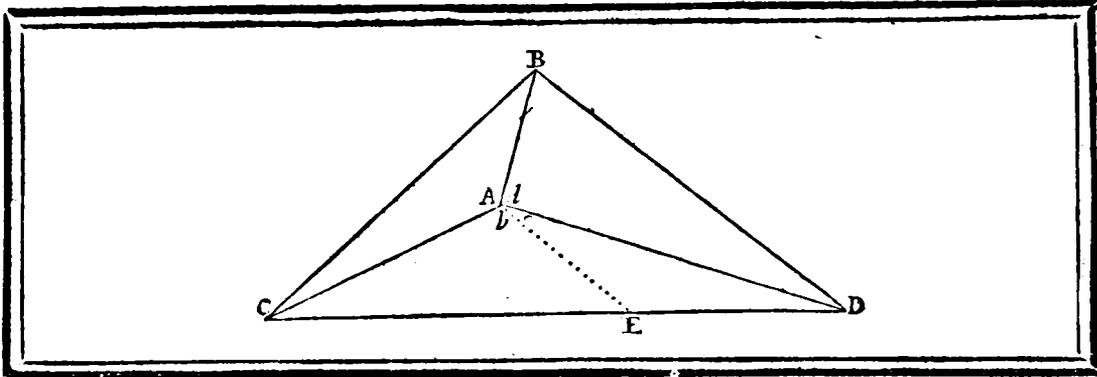
Prop. 18. L. II.

Prop. 3. L. II.

Prop. 18. L. II.

Prop. 13. L. II.

C. Q. E. D.



PROPOSITION XX. THEOREME XVIII.

SI trois angles-plans (CAB, BAD & DAC) forment un angle solide A: deux de ces angles (comme BAD & CAB) pris comme l'on voudra seront plus grand que le troisième (CAD).

HYPOTHESE.

Les trois \sphericalangle plans CAB, d , & $c+b$
forment \sphericalangle solide A.

THESE.

\sphericalangle CAB + d > \sphericalangle b+c

DEMONSTRATION.

CAS I.

Lorsque les trois angles CAB, d , & $c+b$ sont égaux.

Puisque les \sphericalangle CAB, d & $c+b$ sont égaux.
I. Il s'enfuit que \sphericalangle CAB + d seront > \sphericalangle c+b.

Ax. 4. L. 1.
C. Q. F. D.

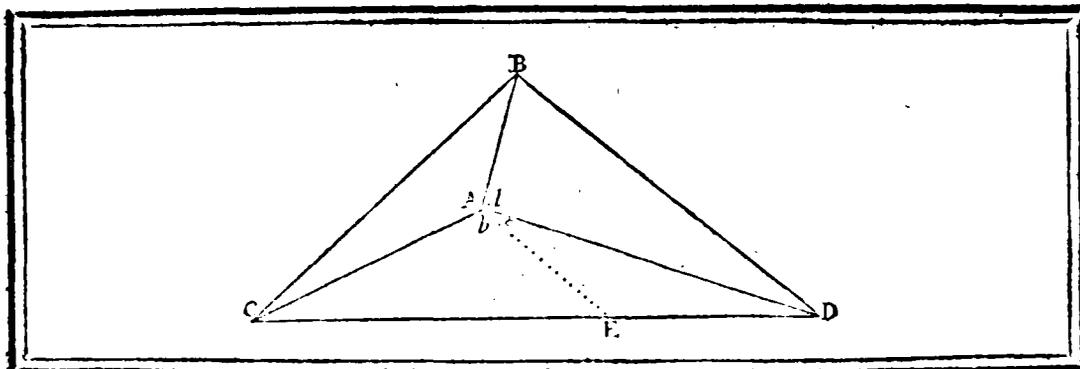
CAS II.

Lorsque des trois angles CAB, d & $c+b$, deux comme CAB & d sont égaux, & que le troisième $c+b$ est plus petit que chacun d'eux.

Puisque \sphericalangle CAB est > que \sphericalangle c+b.
I. \sphericalangle CAB + \sphericalangle d seront beaucoup > \sphericalangle c+b

Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS III.

Lorsque les trois angles sont inégaux, & que $b + c$ est $>$ que CAB ou d .

Préparation.

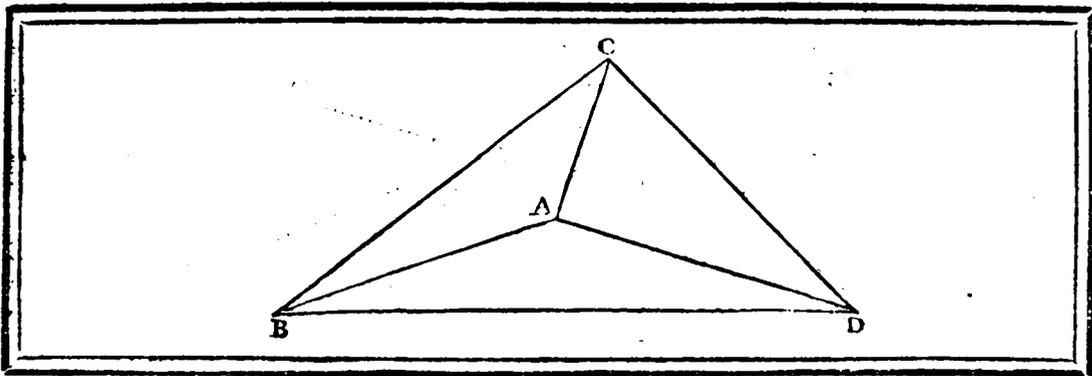
1. Avec AC au point A faites $\sphericalangle b = \sphericalangle CAB$ dans le Plan CAD. Prop. 23. L. 1.
2. Faites $AE = AB$. Prop. 3. L. 1.
3. Du point C par E tirez la droite CED } Dem. 1. L. 1.
4. Des points C & D tirez CB & BD. }

Les $\triangle BCA$ & CAE ont les cotés AB & AE égaux. (*Prép. 2.*)
Le coté CA commun, & $\sphericalangle b = \sphericalangle CAB$ (*Prép. 1.*).

1. Partant le coté BC est = au coté CE. Prop. 4. L. 1.
Or dans le $\triangle CBD$ * les cotés $CB + BD$ sont $>$ CD. Prop. 20. L. 1.
Si donc on retranche de $CB + BD$ la partie CB, & de CD, la partie égale à CE.
2. Le reste savoir BD, fera $>$ ED. Ax. 5. L. 1.
Dans les $\triangle BAD$ & EAD , les cotés AB & AE sont égaux, (*Prép. 2.*) & AD commun.
Mais la base BD $>$ que la base ED. (*Arg. 2.*)
3. Donc $\sphericalangle d$ est $>$ $\sphericalangle c$. Prop. 25. L. 1:
Si donc on ajoute d'un coté $\sphericalangle CAB$, & de l'autre son égal b.
4. $\sphericalangle CAB + d$ feront $>$ $\sphericalangle b + c$ ou CAD. Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.

* Il est aisé à démontrer que les lignes CB, CD, & BD, sont dans le même Plan CBD par la Prop. 2. L. 11. & par conséquent qu'elles forment un $\triangle CBD$.



PROPOSITION XXI. THEOREME XIX.

Tous les angles-plan (BAC, CAD & DAB) qui forment un angle solide (A) : sont moindre que quatre angles droits.

HYPOTHESE.
Les \sphericalangle BAC, CAD & DAB
forment \sphericalangle solide A.

THESE.
Les \sphericalangle plan BAC + CAD + DAB sont $< 4 \text{ L}$

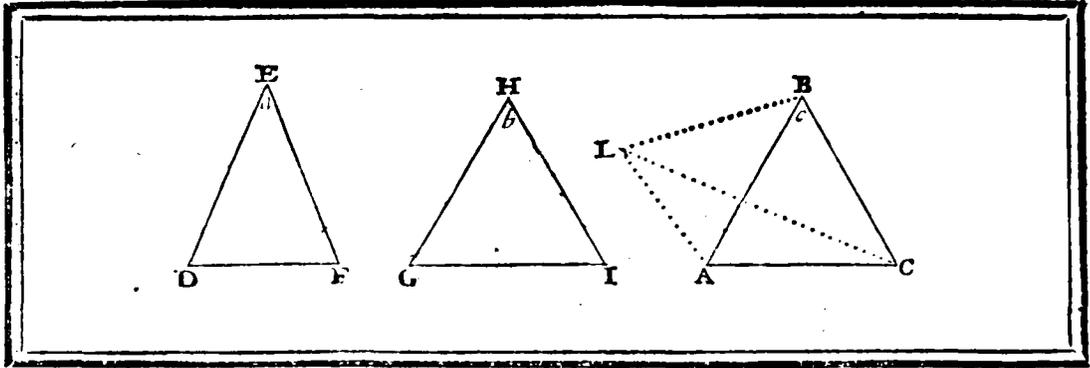
Préparation.

1. **S**ur les cotés BA, AC, & AD prenez les trois points B, C & D.
2. Tirez BC, BD & CD. Dem. 1. L. 11.
3. Faites passer par ces lignes un Plan BCD, qui formera avec les Plans BAC, CAD & BAD, trois \sphericalangle solides; Savoir \sphericalangle solide B; formé par les \sphericalangle plan CBA, ABD & CBD. \sphericalangle solide C; formé par les \sphericalangle plan BCA, ACD & BCD; & enfin \sphericalangle solide D; formé par les \sphericalangle plan CDA, ADB & BDC. Def. 11. L. 11.

DEMONSTRATION.

- P**uisque \sphericalangle solide D, est formé par les \sphericalangle plan CDA, ADB & BDC, —
1. Les \sphericalangle CDA + ADB sont $> \sphericalangle$ BDC. Prop. 20. L. 11.
 2. De la même manière \sphericalangle ABD + ABC sont $> \sphericalangle$ DBC.
 3. Et \sphericalangle ACB + ACD $> \sphericalangle$ BCD. Prop. 20. L. 11.
 4. Partant les six \sphericalangle plan CDA + ADB + ABD + ABC + ACB + ACD sont $>$ que les trois \sphericalangle plan BDC + DBC + BCD. Prop. 32. L. 1.
Or ces trois \sphericalangle plan BDC + DBC + BCD sont = 2. L.
 5. Donc les six \sphericalangle plan CDA + ADB + ABD + &c. sont $> 2 \text{ L}$.
(Arg. 4.).
Mais les neuf \sphericalangle des Δ BCA, CAD & DAB savoir les six mentionnez (Arg. 5.). & les trois \sphericalangle restans BAC, CAD & DAB sont ensemble égaux six L. Prop. 32. L. 1.
 - Si donc on en retranche les six \sphericalangle nommez CDA + ADB + ABD + ABC + ACB + ACD qui sont ensemble $> 2 \text{ L}$. (Arg. 5.).
 6. Le reste savoir les \sphericalangle plan BAC + CAD + DAB seront $<$ quatre L.
Mais ces \sphericalangle plan BAC, CAD, & DAB forment \sphericalangle solide A.
 7. Partant les \sphericalangle plan forment \sphericalangle solide A sont moindre que quatre droits.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. THEOREME XX.

Si l'y a trois angles-plan, deux desquels pris comme l'on voudra soyent plus grand que le troisieme, & que les cotés qui comprennent ces angles soyent des droites égales. Il sera possible de construire un triangle des trois lignes (DF, GI, & AC,) qui soutiennent ces angles.

HYPOTHESE.

- I. Des trois \sphericalangle donnez $a, b, \& c$, deux quelconques sont $>$ que le troisieme, comme $b + a > c$, ou $a + c > b$, ou $b + c > a$.
- II. Les cotés $HG, HI, DE, EF, AB \& BC$ qui comprennent ces \sphericalangle , sont égaux.

THESE.

Des droites $GI, DF \& AC$ qui soutiennent les \sphericalangle , on peut construire un Δ .

DEMONSTRATION.

Les trois angles donnez, $a, b \& c$ sont ou égaux, ou inégaux.
CAS I. Si les $\sphericalangle a, b \& c$ sont égaux.

Puisque les cotés qui comprennent les angles, sont égaux. (Hyp. 2.).

1. Les $\Delta DEF, GHI \& ABC$ sont égaux. Prop. 4. L. 1.
 2. Donc $DF = GI = AC$.
 3. Partant $DF + AC > GI$. Ax. 4. L. 1.
 4. Donc on peut construire un Δ de ces trois lignes $DF, AC \& GI$. Prop. 22. L. 1.
- C. Q. F. D.

CAS II. Si les angles donnez $a, b, \& c$ sont inégaux.

Préparation.

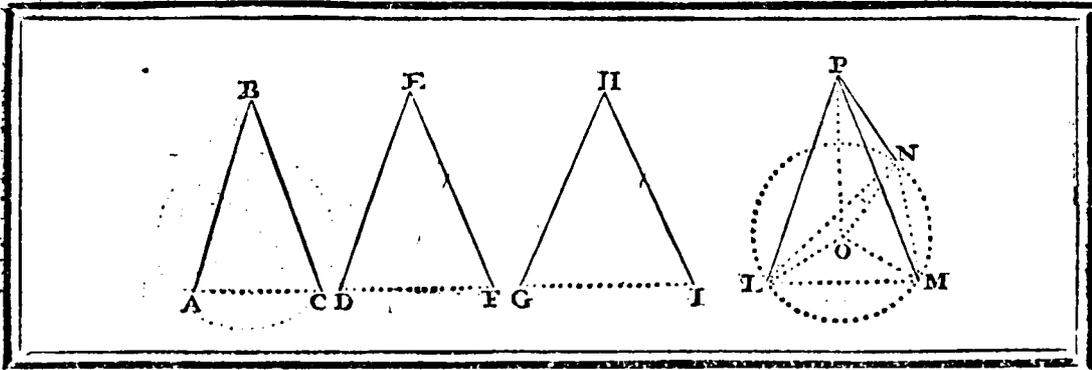
1. Au sommet d'un des \sphericalangle comme en B , faites $\sphericalangle ABL = \sphericalangle a$. Prop. 23. L. 1.
2. Faites $BL = DE$. Prop. 3. L. 1.
3. Tirez $LC \& LA$. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les deux angles $a + c$ sont $> b$ (Hyp. 1.) & que $LB = HG = BC = HI$. (Prép. 2. & Hyp. 2.).

1. La baze LC fera $> GI$. Prop. 24. L. 1.
 Or $LC < LA + AC$. Prop. 25. L. 1.
2. Donc a plus forte raison $GI < LA + AC$.
3. Mais $LA = DF$. (Prép. 1. & Prop. 4. L. 1.)
3. Donc $GI < DF + AC$. Ax. 1. L. 1.
4. Partant on peut construire un Δ des trois lignes $DF, AC \& GI$.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. PROBLEME III.

ETant donnés trois angles-plan (ABC, DEF & GHI) deux desquels pris comme l'on voudra soyent toujours plus grand que le troisieme, & dont la somme ($\sphericalangle ABC + \sphericalangle DEF + \sphericalangle GHI$) est moindre que quatre angles droits: en faire un angle solide (P).

DONNEES.

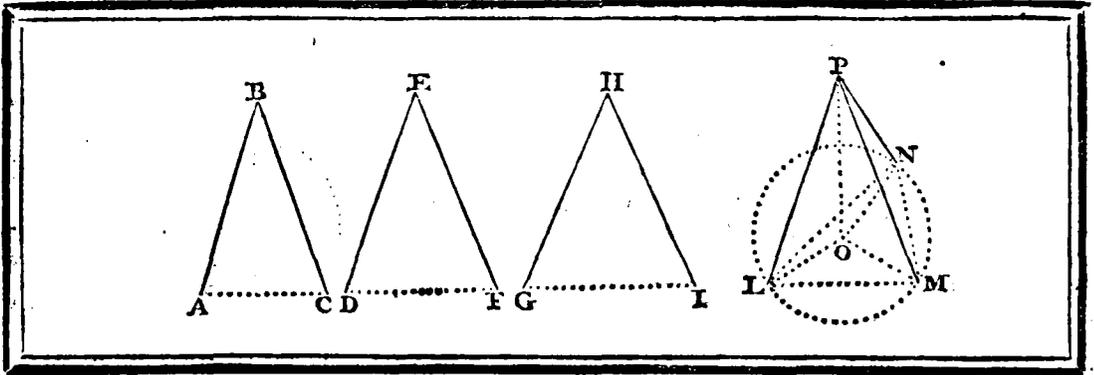
- I. Trois $\sphericalangle ABC, DEF$ & GHI , deux desquels pris comme l'on voudra sont toujours plus grand que le troisieme, comme $\sphericalangle B + E > H, B + H > E$, & $E + H > B$.
- II. $\sphericalangle B + E + H <$ quatre \sphericalangle .

CHERCHEE.

Des trois $\sphericalangle B, E$ & H faire un \sphericalangle solide P.

Resolution.

1. Prenez AB à volonté, & faites les cotés BC, DE, EF, GH & HI égaux entr'eux & à AB. Prop. 3. L. 1.
2. Tiréz les bazes AC, DF, & GI. Dem. 1. L. 1.
3. De ces trois bazes AC, DF, & GI faites un $\triangle LMN$ de façon que NM soit = GI, NL = AC, & LM = DF. Prop. 22. L. 1.
4. Inscrivez le $\triangle LMN$ dans un Cercle LMN. Prop. 22. L. 11.
5. Du centre O, aux $\sphericalangle L, M$ & N , tiréz les droites LO, ON & OM. Prop. 5. L. 4.
6. Du point O, élevez la $\perp OP$, sur le Plan du cercle LMN. Prop. 12. L. 11.
7. Coupéz OP de façon que le carré sur le rayon LO, plus le carré sur PO soyent égaux au carré sur AB.
8. Tiréz les droites LP, PN & PM.



DEMONSTRATION.

Puisque PO est \perp sur le Plan du \odot LMN. (Ref. 6.).

1. Le \triangle POL sera Rectangle en O, (Ref. 5. & 8.).
2. Partant le \square sur PO + le \square sur OL est = au \square sur LP.
Mais ces quarez sur PO & LO font = \square AB. (Ref. 7.).
3. Donc \square AB est = au \square LP & AB = LP.
4. De la même manière PN & PM sont chacun = à AB.

Prop. 47. L. 1.
Ax. 1.
Prop. 46. L. 1.
Corol. 3.

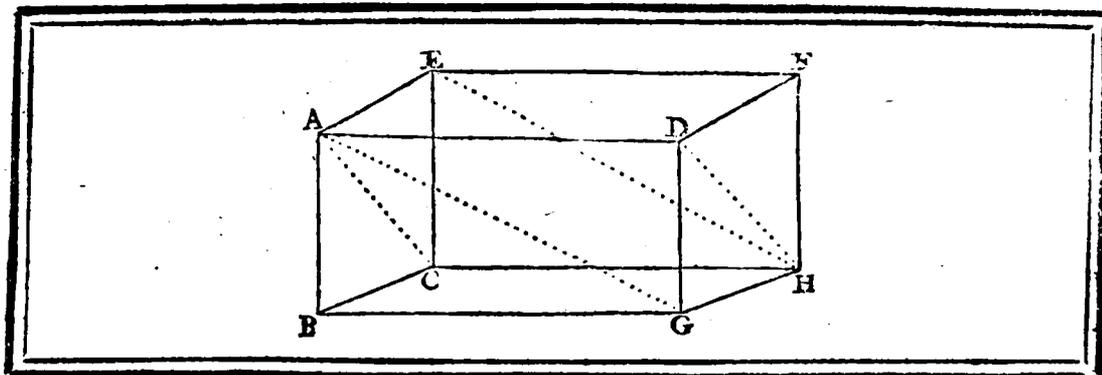
Or NM est à = GI, NL = AC, & LM = DF. (Ref. 3.)

5. Partant \triangle NMP est = au \triangle GHI, \triangle NPL = \triangle ABC, \triangle LPM } Prop. 8. L. 1.
= \triangle DEF. \sphericalangle NPM = H, \sphericalangle LPN = B, & \sphericalangle LPM = \sphericalangle E.

Mais ces trois \sphericalangle NPM, LPN & LPM forment \sphericalangle solide P.
6. Donc on a construit un \sphericalangle solide P, des trois donnés B, E & H.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XXIV. THEOREME XXI.

Dans tout Paralelipipede (AH): Les Plans opposés (BD & CF, Item BE & FG, Item AF & BH) sont des paralelogrammes semblables & égaux, chacun à chacun; (c. a. d. le Pgr. AG est égal & semblable au Pgr. EH &c.).

HYPOTHESE.

Dans le \square donné BF le Plan BD est opposé à CF. BE & FG & AF & BH.

THESE.

Les plans opposés BD, CF, Item BE & FG, Item AF & BH sont des Pgr. égaux & ∞ chacun à chacun.

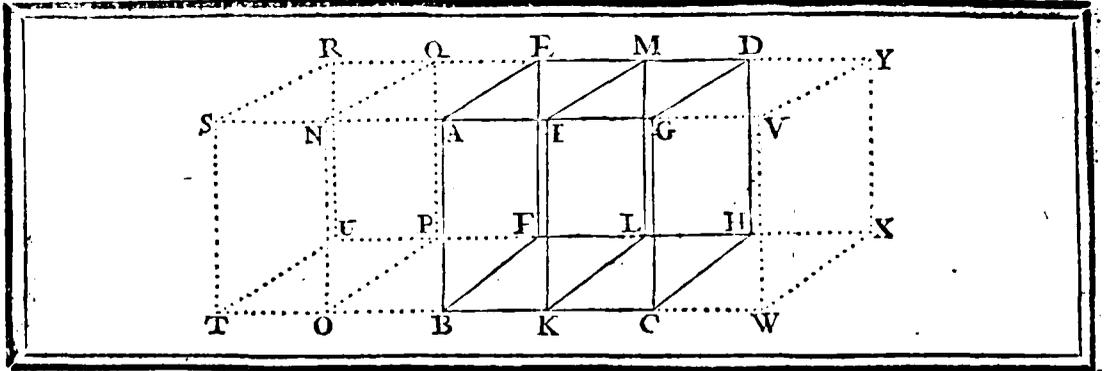
Préparation.

1. Tiréz les diagonales opposés EH & AG. Item AC & DH.

DEMONSTRATION.

Puisque les Plans Pile BD & CF sont coupés par le Plan ABCE.

1. La ligne BA est Pile à EC. Prop. 16. L. II.
2. De la même manière CH est Pile à GB.
Et les même Plans Pile BD & CF étant aussi coupés par le Plan DGHF.
3. La ligne DG fera Pile à FH.
4. De même AE est Pile à BC & DF Pile à GH.
Et puitque ces lignes Piles (Arg. 1. 2. & 4.) sont les opposés des quadrilatères AE CB & DF HG.
5. Ces quadrilatères AE CB & DF HG sont des Paralelogrammes. Def. 35. L. 1.
6. De la même façon les autres Plans opposés BD & CF, Item AF & BH sont des Paralelogrammes.
Et comme AB & BG sont Pile à EC & CH, chacun à chacun. (Arg. 1. & 2.)
7. \forall ABG est = \forall ECH. Prop. 10. L. II.
Or AB est = à EC & BG = CH. Prop. 34. L. I.
8. Donc le Δ ABG est = & ∞ au Δ ECH. { Prop. 4. L. 1.
Mais le Pgr. BD est le double du Δ ABG } (Prop. 41. L. 1.). { Prop. 4. L. 6.
Et le Pgr. CF le double du Δ ECH. }
9. Or ces Pgr. ont chacun un \forall commun avec les Δ équiangles.
10. Partant les Pgr. BD & CF sont égaux & ∞ . Def. 1. L. 6.
11. De la même manière on démontrera que le Pgr. BD est = & ∞ Pgr. CF, & Pgr. AF = & ∞ Pgr. BH.
11. Donc les Plans opposés d'un \square sont des Pgr. ∞ & égaux.



PROPOSITION XXV. THEOREME XXII.

Si un parallépipède (BEDC) est coupé par un Plan (KIML) parallèle aux Plans opposés (AEFB & CGDH) : Les deux parallépipèdes provenant (savoit les \square BEMK & KMDC) seront entr'eux comme leurs bases (BFLK & KLHC).

HYPOTHESE.

Le \square BEDC est coupé en deux \square BEMK & MC, par un Plan KIML, Pllé aux Plans opposés BE & CD.

T H E S E.

Le \square BEM : \square MC = base BL : base LC.

Préparation.

1. Prolongez BC de part & d'autre, de même que FH. Dem. 2. L. 1.
2. Prenez sur le prolongement de BC plusieurs lignes égales à BK Et CK : comme BO & TO chacune = à BK, & CW = KC. Prop. 3. L. 1.
3. Par ces points T, O, & W. tirez des droites TU, OP & WX Pllé à BF ou CH, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre Pllé prolongée dans les points U, P & X. Prop. 31. L. 1.
4. Par les lignes TU, OP, & WX faites passer des Plans TR, OQ & WY, Pllé aux Plans BE & CD, qui rencontreront le Plan de la base supérieure. AE DG, en SR, NQ & VY.

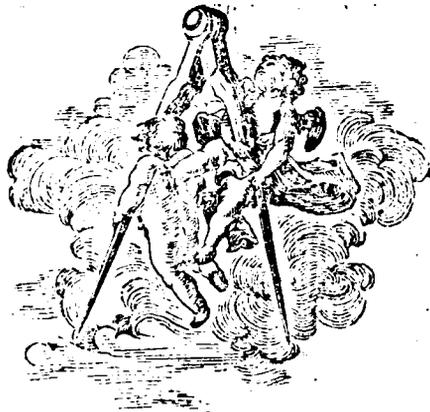
DEMONSTRATION.

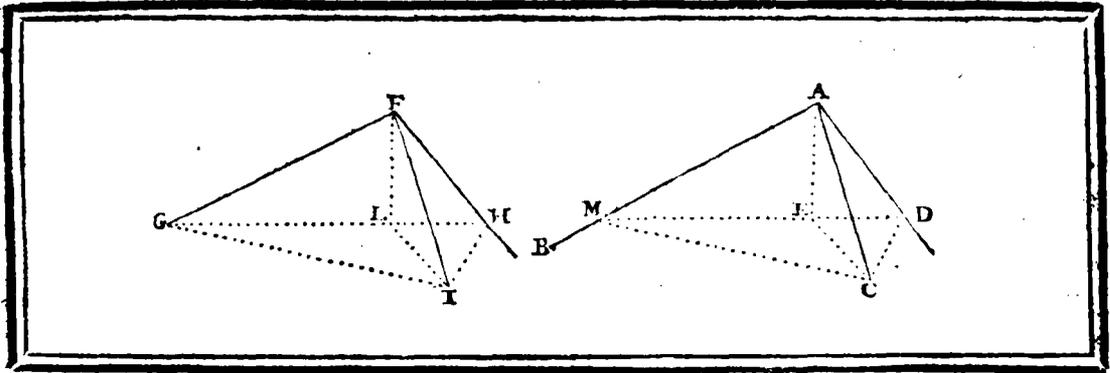
Puisque les lignes BO & TO, sont chacune = à BK & CW = KC (Prép. 2.) & que les lignes OP, TU & WX Pllés à BF ou CH, rencontrent le prolongement de FH, dans les points, P, U & X. (Prép. 3.)

1. Les

1. Les Pgr. TP & BP sont = au Pgr. BL; & Pgr. CX = Pgr. KH. Prop. 35. L. 1.
Les Plans AR ou A Q & TF ou OF étant Piles; & le Plan NP Pile au Plan AF; de plus les lignes SA & RE étant Pile aux lignes BT ou FU, qui sont les prolongements des Piles AI, BK, FL, & EM.
2. Le solide provenant OQEB sera un \square égal & ∞ au \square BEMK. Def. 10. L. 11.
3. De la même manière on prouvera que le solide TRQO est égal & ∞ \square BEMK; Item que le solide CDYW est ∞ & = \square KMDC.
Or il y a autant de \square : OQEB, &c. égaux, qu'il y a de Pgr. égaux OF, TP &c. & ces \square : forment ensemble le \square TE: de plus il y a autant de Pgr. OF &c. égaux, qu'on a pris de parties égales, chacune à la ligne BK, qui font ensemble la toute TB.
4. Partant le \square TE est autant multiple du \square BEMK que les parties (TO, OB) de la ligne TB pris ensemble sont multiples de la ligne BK.
5. De même le \square CDYW est autant multiple du \square KMDC que la ligne WC l'est de la ligne KC.
6. Donc selon que le \square TREB fera \rangle = ou \langle que le \square BEMK, la ligne TB fera \rangle = ou \langle que la ligne BK.
& selon que le \square CDYW fera \rangle = ou \langle \square KMDC, la ligne CW fera \rangle = ou \langle que la ligne KC.
7. Partant le \square BEMK : \square KMDC = BK : KC. Def. 5. L. 5.
Or BK : KC = baze BL : baze KH. Prop. 1. L. 6.
8. Donc \square BEMK : \square KMDC = baze BL : baze KH. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXVI. PROBLEME IV.

D'Un point (A) sur une droite donnée (AB), faire un angle solide (AB) : égal à un angle solide donné (F).

DONNES.

- I. Un point A, dans une droite AB
 H. Un angle solide F.

CERCHEES.

- Au point A un angle solide =
 à l'angle solide F.

Resolution.

1. D'Un point I pris à volonté sur une des lignes de section autour de \sphericalangle solide F, descendez une \perp IL sur le Plan opposé GFH. Prop. 11. L. 11.
2. Tiréz LF, LG, LH, HI & GI dans les Plans qui forment \sphericalangle solide. Dem. 1. L. 1.
3. Sur la droite donnée AB, prenez $AM = FG$. Prop. 3. L. 1.
4. Faites au point A, un \sphericalangle plan $MAD = \sphericalangle$ plan GFH. Prop. 23. L. 1.
5. Coupéz $AD = FH$. Prop. 3. L. 1.
6. Sur le même Plan MAD, faites un \sphericalangle plan MAE égal à \sphericalangle plan GFL. Prop. 23. L. 1.
7. Coupéz $AE = FL$. Prop. 3. L. 1.
8. Du point E, sur le Plan MAD élevez la \perp EC. Prop. 12. L. 11.
9. Faites $EC = LI$. Prop. 3. L. 1.
10. Tiréz AC. Dem. 1. L. 1.

Préparation.

Tiréz ME, ED, CD, & CM, dans Plans MAD, CAD & MAC.

DEMON-

DEMONSTRATION.

Puisque dans les $\triangle GFH$ & MAD , les cotés FG & FH sont égaux aux cotés AM & AD chacun à chacun. (*Ref. 3 & 5.*) & que $\sphericalangle GFH$ est $=$ à $\sphericalangle MAD$. (*Ref. 4.*)

1. GH fera $=$ à MD .

Prop. 4. L. 1.

2. De la même manière dans les $\triangle GFL$ & AME , GL est $=$ à ME
Si donc on retranche GL de GH & ME de MD .

Prop. 4. L. 1.

3. LH fera $=$ à ED .

Ax. 3. L. 1.

Et comme dans les $\triangle LHI$, & EDC , ED est $=$ à LH , $LI = EC$
& les $\sphericalangle DEC$ & HLI , des $\sphericalangle L$. (*Arg. 3. Ref. 9. & Def. 3. L. 11.*)

4. IH fera $=$ à CD .

Prop. 4. L. 1.

De même dans les $\triangle FLI$ & AEC ; LI est $=$ à EC , & $LF = AE$,
de plus $\sphericalangle FLI$ & $\sphericalangle AEC$. L. (*Ref. 7 & 9. & Def. 3. L. 11.*)

5. Donc $FI = AC$.

Prop. 4. L. 1.

6. De la même manière on démontrera que $GI = MC$.

Puis donc que les trois cotés HI , FI & FH du $\triangle IFH$, sont égaux
aux trois cotés DC , AC & AD , du $\triangle CAD$. (*Arg. 4 & 5.*)

7. $\sphericalangle IFH$ fera $=$ à $\sphericalangle CAD$.

Prop. 8. L. 1.

8. De même $\triangle GFI$ est $=$ au $\triangle MAC$, & $\sphericalangle GFI = \sphericalangle MAC$.

L'Angle plan GFH étant donc $=$ à \sphericalangle plan MAD . (*Ref. 4.*)

L'Angle plan $IFH =$ à \sphericalangle plan CAD (*Arg. 7.*)

Et l'angle plan $GFI =$ à \sphericalangle plan MAC (*Arg. 8.*)

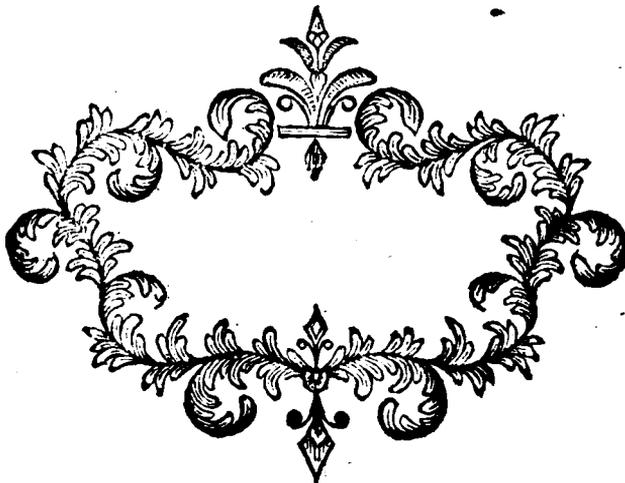
De plus les \sphericalangle plan GFH , IFH & GFI , forment l' \sphericalangle solide F .

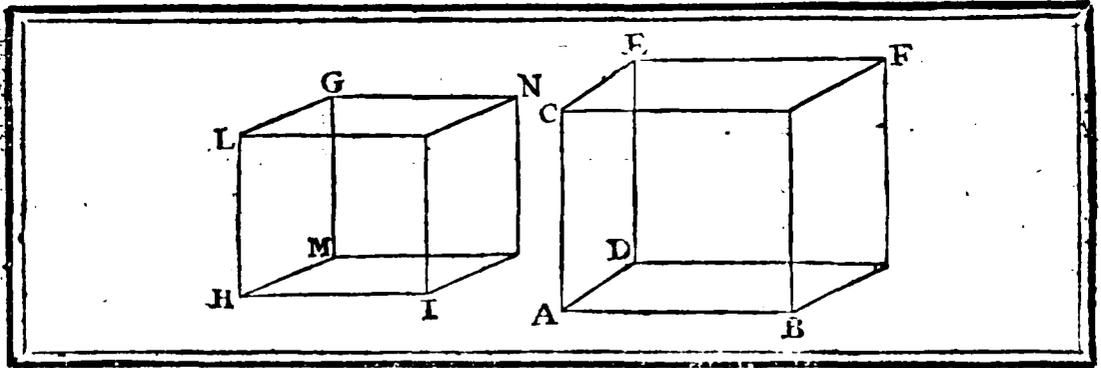
Et les \sphericalangle plan MAD , CAD & MAC forment l' \sphericalangle solide A .

9. Donc l'angle solide A est $=$ à \sphericalangle solide F .

Def. 9. L. 11.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XXVII. PROBLEME V.

Sur une ligne droite donnée (AB) : décrire un parallépipède (AF), semblable & semblablement posé, à un parallépipède donné. (HN).

DONNEES.

- I. La droite AB.
- II. Le \square HN.

CHERCHEES.

Sur AB faire un \square AF, \square & semblablement posé à un \square HN.

Resolution.

1. AU point A de la ligne AB faites un \sphericalangle solide CADB, = à \sphericalangle solide H, ou LHMI. Prop. 26. L. II.
2. Coupéz AC de façon que $HI : HL = AB : AC$ Prop. 12. L. 6.
- 3- Item AD de façon que $HL : HM = AC : AD$ Prop. 31. L. I.
4. Achevez les Pgr. AE, BD & BC.
5. Achevez le \square AB.

DEMONSTRATION.

Les trois Pgr. AE, BD, & BC sont \sphericalangle , & semblablement posés aux trois Pgr. HG, MI & LI du \square HN, chacun à chacun (Ref. L. 2. 3 & 4. & Def. 1. L. 6.)

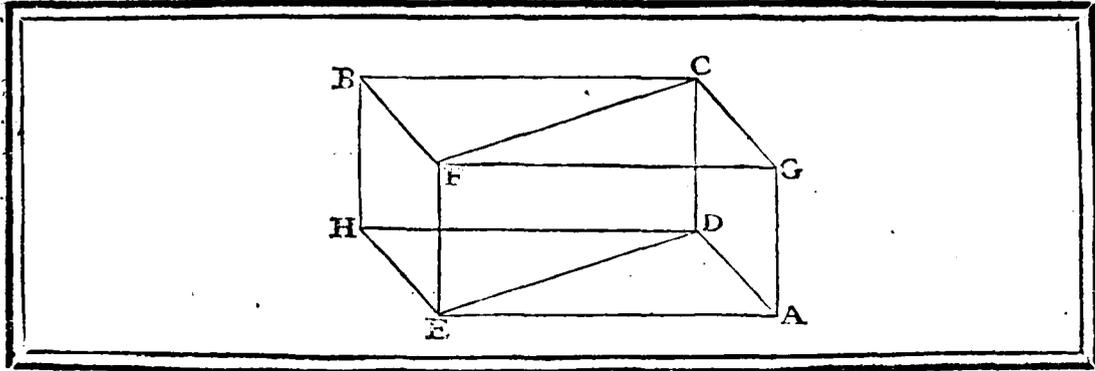
Prop. 24. L. II.

Et leurs opposés le sont de même.

1. Partant les six Plans ou Pgrs qui forment le \square AF, sont \sphericalangle , & semblablement posés aux six Plans ou Pgr. qui forment le \square donné HN.
2. Donc le \square AF construit sur AB, est semblable & semblablement posé au \square donné HN.

Def. 9. L. II.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVIII THEOREME XXIII.

UN parallepipéde (AB) coupé par un Plan (FCDE) passant par les diagonales (FC & ED) des Plans opposés (BG & AH): est coupé en deux également.

HYPOTHESE.

Le \square AB est coupé par un Plan FD passant par les diagonales FC & ED, des Plans opposés BG & AH.

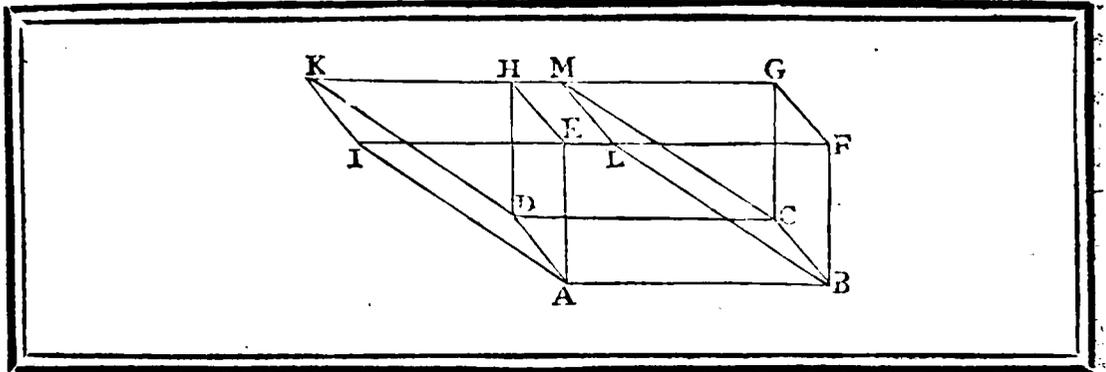
THÈSE.

Le Plan FD coupe le \square AB en deux également.

DEMONSTRATION.

- Puisque le Plan FA est un Pgr.
1. Les cotés EF & GA, sont égaux & Plles } - - - Prop. 24. L. II.
 2. De même CD & GA sont égaux & Plles } - - - Prop. 33. L. I.
 3. Partant EF est = & Plle à CD. - - - Prop. 9. L. II.
 4. Donc ED = & Plle à FC. - - - Ax. I. L. I.
 5. D'où il s'enfuit que FCDE est un Pgr. Prop. 33. L. I.
 6. Mais le Pgr. BCGF est = & Plle au Pgr. HDAE. Def. 35. L. I.
 7. Partant les \triangle BCF & FGC sont = & ∞ aux \triangle HDE & EDA. Prop. 24. L. II.
 8. De plus les Pgr. FEAG & GADC, sont = & ∞ aux Pgr. BHDC, Prop. 34. L. I.
 9. & BHEF, chacun à chacun. Prop. 4. L. 6.
 10. Donc tous les Plans qui forment le prisme BFD sont égaux & ∞ à tous les Plans qui forment le prisme DFG. Prop. 24. L. II.
 11. Donc le prisme BFD ou BHEDCF est égal & ∞ au prisme DFG ou DEFCA. Def. 10. L. II.
 12. Partant le Plan FCDE, coupe le \square AB en deux également.

C. Q. F. D.



PROPOSITION. XXIX. THEOREME XXIV.

Les paralelipipèdes (HB & KB) placés sur la même baze BD, ayant même hauteur (AE) & desquels les lignes insistantes (AE, AI, &c.) sont dans la même direction (IF, GK) : sont égaux.

HYPOTHESE.

- I. Les \square KB & HB, ont la même baze BD.
- II. Ils ont la même hauteur AE.
- III. Les lignes insistantes AE, AI &c. sont dans la même direction IF & KG.

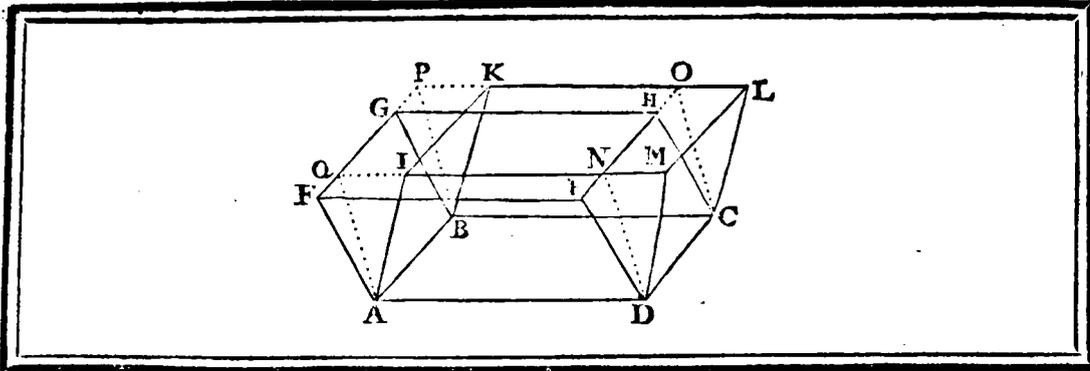
THESE.

\square HB est = \square KB.

DEMONSTRATION.

Puisque les Pgr. KC ou KMCD, & HC ou HGCD, ont la même baze DC, & qu'il sont dans la même direction de KG qui est Pile à DC. (Hyp. 3.).

- 1. Le Pgr. KC est = au Pgr. HC. Prop. 35. L. I.
- Si donc on retranche de ces Pgr. égaux le trapéze commun HMCD.
- 2. Les restes, savoir les \triangle KHD & MGC seront égaux. Ax. 3. L. I.
- 3. De la même manière \triangle IEA est = au \triangle LFB.
- 4. Le Pgr. KE ou KHEI, est aussi = au Pgr. MF ou MGFL. (Puisqu'il sont chacun = au Pgr. DCBA, moins le Pgr. HMLE. Def. 30. & Prop. 24. L. II.).
- Or le Plan GB ou CF est = au Plan HA ou DE, & le Plan MB, ou LC est = au Plan KA ou ID. Prop. 24. L. II. Def. 10. L. II.
- 5. Partant le prisme HAKD est = au prisme GBMC. Prop. 24. L. II. Def. 10. L. II.
- Si donc on ajoute à ces prismes égaux, la partie HMCBLEAD.
- 6. Le prisme HAKD + partie HMCBLEAD est = prisme GBMC + partie HMCBLEAD. Ax. 2. L. I.
- Or prisme HAKD + partie HMCBLEAD est = au \square KB. Ax. 1. L. 2.
- Et prisme GBMC + partie HMCBLEAD est = au \square HB. Ax. 1. L. 1.
- 7. Donc le \square KB est égal au \square HB. C. Q. F. D.



PROPOSITION XX X. THEOREME XXV.

Les parallepipèdes (FGHEDCBA & IMLKBCA) placés sur la même baze (ABCD), ayant même hauteur, & desquels les lignes insistantes (FA, AI &c.) ne font point dans la même direction : sont égaux.

HYPOTHESE.

- I. Les \square HA & LA sont placés sur la même baze AC.
- II. Ils ont la même hauteur.
- III. Les lignes insistantes AF & AI, ne font point dans la même direction.

THESE.

\square FHC est = \square ILCA.

Préparation.

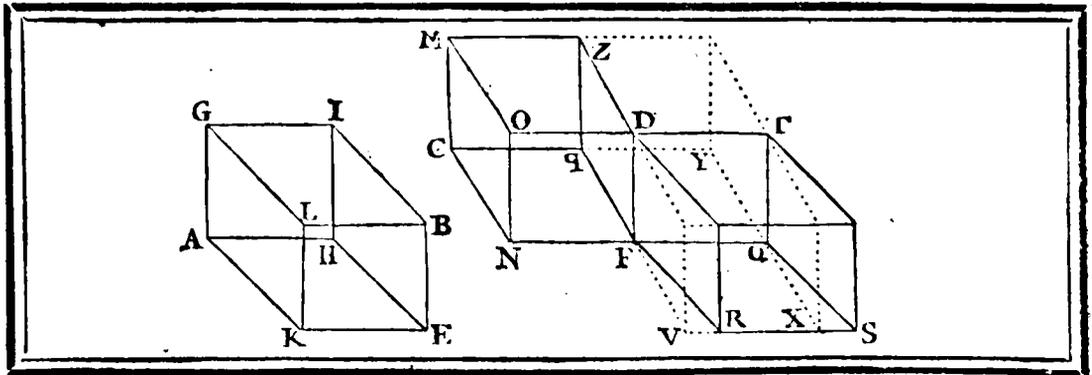
- 1. Prolongez LK & FG vers P, jusqu'à ce qu'elles s'y rencontrent. } Dem. 2. L. 1.
- 2. Prolongez IM, jusqu'à ce qu'elle rencontre FG en Q.
- 3. Et EH jusqu'en O.
- 4. Tiréz QA, PB, OC & ND. } Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les \square FHCA & QOCA ont la même baze ABCD & que leurs lignes insistantes AF, AQ; ED, DN; BG, BP; & HC, CO; sont dans les directions FP & EO.

- 1. Le \square FHCA est égal au \square QOCA. } Prop. 29. L. II.
- 2. De la même manière le \square QOCA est = au \square ILCA.
- 3. Partant le \square FHCA est égal au \square ILCA. } Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXI. THEOREME XXVI.

Les parallepipèdes (KI & NZ) dont les bases (KH & Nq) sont égales & qui ont la même hauteur: font égaux.

HYPOTHESE.

- I. Les \square KI & NZ, ont leurs bases KH & Nq, égales.
- II. Ils ont la même hauteur.

THESE.

Le \square KI est = au \square NZ.

DEMONSTRATION.

CAS I.

SI les lignes insistantes AG, &c. du \square KI; & les insistantes CM &c. du \square NZ, sont \perp sur leurs bases, ou si les inclinai- fens des insistantes AG, & MC sont les mêmes.

Préparation.

1. Prolongez NF, & faites FQ = AH.
2. Au point F sur FQ, faites \sphericalangle plan QFR = \sphericalangle plan HAK.
3. Faites FR = AK.
4. Achevez le Pgr. FQSR.
5. Achevez de même avec les lignes FQ & FD; Item FR & FD, les Pgr. QTDF & DFR.
6. Achevez le \square DS.
7. Prolongez les droites Fq & RS, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en V.
8. Par le point Q, tirez XQY, Plle à Vq.
9. Prolongez Cq, jusqu'à ce qu'elle rencontre XY, au point Y.
10. Achevez les \square ZQ, & VDTX.

{ Dem. 1 L. 1.
 Prop. 3. L. 1.
 Prop. 23. L. 1.
 Prop. 31. L. 1.
 Prop. 31. L. 1.
 Dem. 2. L. 1.
 Prop. 31. L. 1.

Puisque les lignes FQ & FR sont = à AH & AK. (Prép. 1 & 3.)
 Et que l' \sphericalangle QFR, est = à \sphericalangle HAK. (Prép. 2.)

1. Le Pgr. FS est = & ∞ au Pgr. KH.
2. De la même manière on démontrera que les Pgr. FT & DR sont égaux & ∞ aux Pgr. AI, & AL.

{ Prop. 36. L. 1.
 Def. 1. L. 6.

Puis.

Puis donc que les trois Pgr. FS, FT, & DR, du \square DS sont = & ∞ aux trois Pgr. AE, AI, & AL, du \square KI. (Arg. 1 & 2.)

Et que les Pgr. restans du \square DS, de même ceux du \square KI sont égaux, & ∞ aux précédents; chacun à chacun.

Prop. 24. L. II.
Def. 10. L. II.

3. Le \square DS, sera égal & ∞ au \square KI.

Les \square DX & DS, ont la même baze DQ, & leurs lignes insistantes FV & FR, &c. sont dans les mêmes directions: Pile VS, &c.

Prop. 29. L. II.

4. Partant \square DS est = au \square DX.

Or le \square DS est = au \square KI. (Arg. 3.)

5. Donc le \square DX est aussi = au \square KI.

Ax. 1. L. 1.

Le \square MQ * est coupé par le Plan FZ, Pile au Plan MN.

6. Partant baze Nq : baze qQ = \square MF : \square ZQ.

Prop. 25. L. II.

Le \square ZX est coupé par le Plan DQ, Pile au Plan ZY.

7. Partant baze FX : baze qQ = \square DX : \square ZQ.

Prop. 25. L. II.
Prop. 35. L. 1.

Or le Pgr. FX est = au Pgr. FS.

Et Pgr. FS est = au Pgr. HK. (Arg. 1.)

8. Partant le Pgr. FX est = au Pgr. HK.

Ax. 1. L. 1.

Or la baze HK est = à la baze qN. (Hyp. 1.)

9. Donc baze qN = à la baze FX.

Mais baze qN : baze qQ = \square MF : \square ZQ. (Arg. 6.)

Et baze qQ : baze FX = \square ZQ : \square DX, (Conv. Arg. 7.)

10. Part. baze qN : baze FX = \square MF : \square DX.

Prop. 22. L. 5.

Or baze qN est = à la baze FX. (Arg. 9.)

11. Partant le \square MF est = au \square DX.

Prop. 14. L. 5.

Mais les \square DX & KI sont égaux. (Arg. 5.)

12. Donc le \square MF est = au \square KI.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.

C A S I I.

SI les angles d'inclinaison des lignes insistantes AG, &c. du \square KI ne sont pas égaux aux angles d'inclinaison des insistantes CM, &c. du \square MF.

Sur la baze KI, faites un \square , ayant les lignes insistantes, ou \perp : ou également inclinés que les insistantes du \square MF, & dans la même direction que celles de KI.

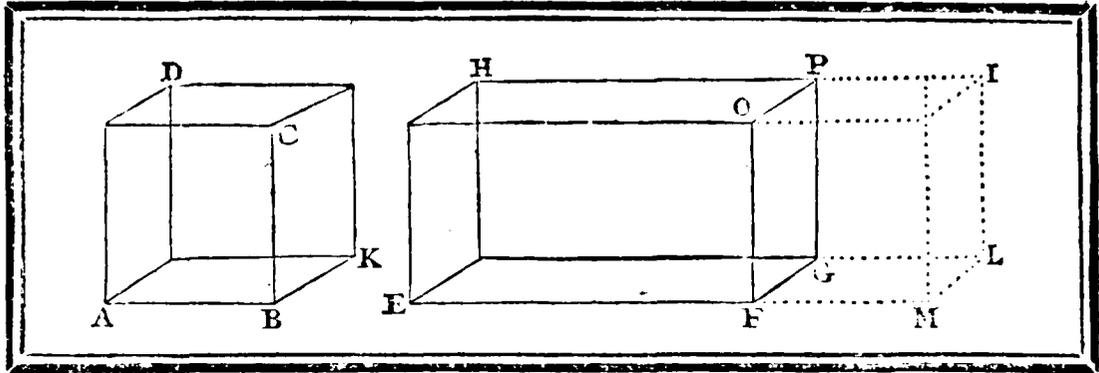
Et par conséquent qui lui sera égal, (par la Prop. 30. L. II.).

Le reste de la construction & de la démonstration sont les mêmes que dans le Cas précédent.

C O R O L L A I R E.

LES parallépipèdes égaux qui ont même hauteur; ont des bazes égales.

* Il est aisé à démontrer que MQ, est un \square , par la Prép. 7. 8. 9 & 10.



PROPOSITION XXXII. THEOREME XXVII.

Les parallepipèdes (BD & EP) dont les hauteurs (BC & FO) sont égales: sont entr'eux comme leurs bases (AK & EG).

HYPOTHESE.
Les hauteurs BC & FO, des \square BD & EP, sont égales.

THESE.
 \square BD : \square EP = base AK : base EG.

Préparation.

1. Prolongez EF en M.
2. Faites sur FG avec FM, le Pgr. FL = Pgr. KA, qui sera dans la même direction avec le Pgr. EG de sorte que les Pgr. EG, & FL, fassent ensemble le Pgr. EL.
3. Achevez le \square FI.

Dem. 2. L. I.

Prop. 44. L. I.

DEMONSTRATION.

Puisque la base FL du \square FI, est = à la base AK du \square BD (Prép. 2.)

1. Le \square FI est = au \square BD.
2. Partant \square FI : \square EP = \square BD : \square EP.
Mais \square FI : \square EP = base FL : base EG.
Et base FL est = à la base AK. (Prép. 2.)
3. Donc \square BD : \square EP = base AK : base EG.

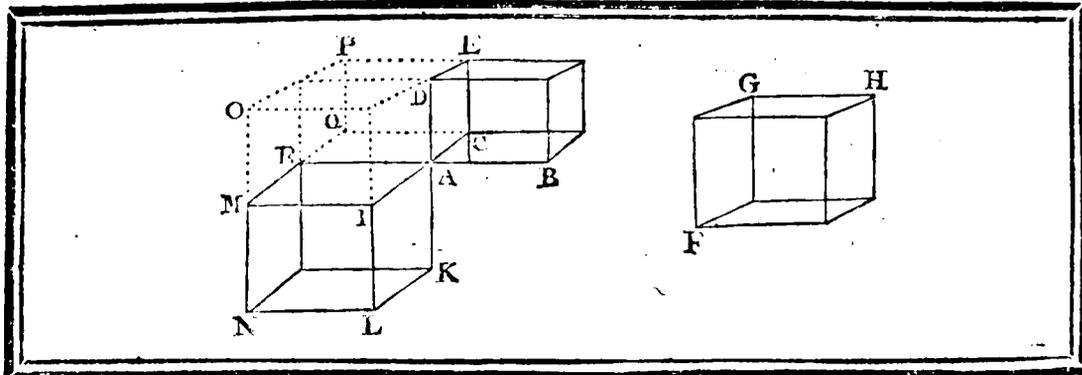
Prop. 31. L. II.

Prop. 7. L. 5.

Prop. 25. L. II.

{ Prop. 11 & 7.
L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIII. THEOREME XXVIII.

Les paralelipèdes semblables (EB & FH) : font entr'eux en raison triplée de leurs cotés homologues (AB & GH).

HYPOTHESE.

Les ☐ EB & FH sont ☐, & les cotés AB & GH sont homologues.

THESE.

Le ☐ EB est au ☐ FH en raison triplée de AB à GH, ou comme $AB^3 : GH^3$.

Préparation.

1. Prolongez AB & faites AR = GH.
2. Sur AR construisez le ☐ RL égal & ☐ au ☐ FH, de façon que les lignes AC & AI, Item DA & AK se rencontrent directement.
3. Achevez le ☐ AO, de façon qu'il fasse un même ☐ OK avec le ☐ RL.
4. Achevez de même le ☐ AP, qu'il fasse avec OA, le ☐ OC, & avec EB le ☐ PB.

{ Dem. 2. L. 1.
Prop. 3. L. 1.

Prop. 27. L. 11.

DEMONSTRATION.

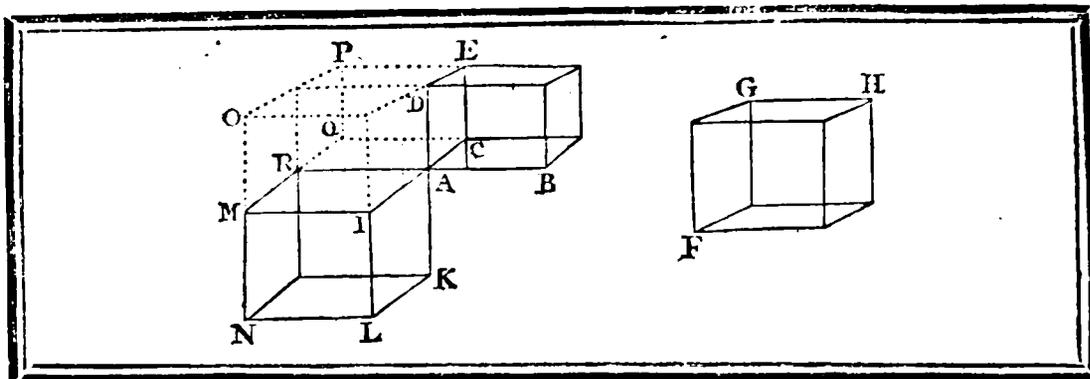
Puisque les ☐ EB & RL, font ☐. (Prép. 2.)

1. Le Pgr. AM est ☐ au Pgr. CB.
2. Partant AB : AC = AR : AI.
3. Et alternant AB : AR = AC : AI.
4. De même AB : AD = AR : AK.
5. Et alternant AB : AR = AD : AK.
Et comme AR est = à GH. (Prép. 1.).
6. Les trois raisons AB à AR, AC à AI, & AD à AK, font égales entr'elles, & égales à la raison de AB à GH.
Or le ☐ PB est coupé par le Plan Pile AE. (Prép. 4.).
7. Partant la baze CB : baze QA = ☐ BE : ☐ AP.
Et baze CB : baze QA = AB : AR.
8. Donc AB : AR = ☐ BE : ☐ AP.

Def. 9. L. 11.
Def. 1. L. 6.
Prop. 16. L. 5.
Def. 1. L. 6.
Prop. 16. L. 5.

Prop. 25. L. 11.
Prop. 1. L. 6.
Prop. 11. L. 5.

Le ☐

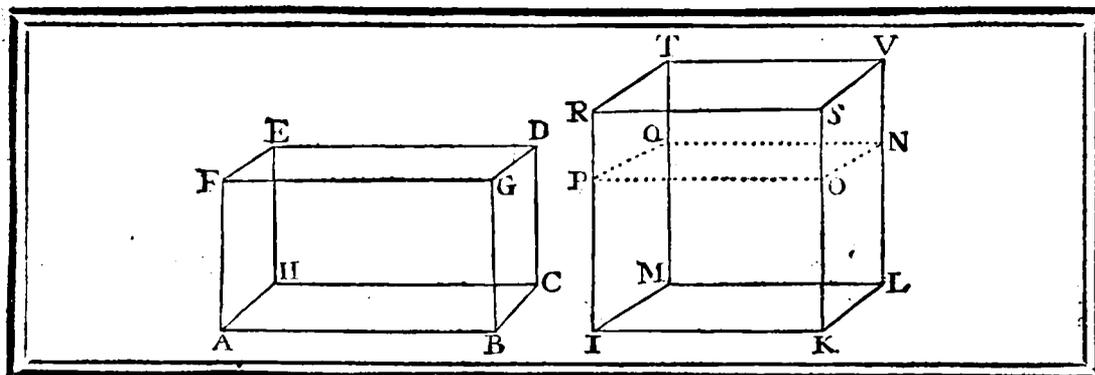


- Le \square OC est coupé par le Plan Pile RD. (*Prép. 4.*)
 9. Partant base RC : base AM = \square AP : \square OA.
 Et base RC : base AM = AC : AI.
 10. Donc AC : AI = \square AP : \square OA.
 Enfin le \square OK étant coupé par le Plan Pile AM. (*Prép. 4.*)
 11. On démontrera de même que AD : AK = \square AO : \square AN.
 Or les trois raisons, de AB à AR, AC à AI, & AD à AK sont égales à la raison de AB à GH. (*Arg. 6.*)
 12. Partant les quatre \square BE, AP, AO, & AN, forment une suite de grandeurs entre lesquels regne une même raison (*de AB : GH*).
 13. Donc ils sont proportionels.
 14. Partant le \square BE est au \square AN, en raison triplée de AB à GH.
 Or le \square AN est = & ∞ au \square FH. (*Prép. 2.*)
 15. Donc le \square BE est au \square FH, en raison triplée de AB à GH. (ou comme AB³ : GH³ *Ap. Prop. 7.*)

Prop. 25. L. VI.
 Prop. 1. L. 6.
 Prop. 11. L. 5.

Prop. 11. L. 5.
 Def. 6. L. 5.
 Def. 11. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIV. THEOREME XXIX.

Les parallepipèdes égaux (AD & IV) ont leurs bazes (Pgr. AC & Pgr. IL) & leurs hauteurs (GB & IR) reciproquement proportionelles. Et les parallepipèdes (AD & IV) dont les bazes (Pgr. AC & Pgr. IL) & les hauteurs (GB & IR) sont reciproquement proportionelles: sont égaux.

HYPOTHESE.
 $\square AD \text{ est } = \square IV.$

THESE.
 Baze AC : Baze IL = hauteur IR : hauteur GB.

I. DEMONSTRATION.

Les parallepipèdes donnés peuvent être.

- I. De même hauteur
 - II. De différente hauteur
 - III. Ayant des inclinaisons différentes: comme si l'un étoit \perp sur sa baze, & l'autre oblique.
- } & également incliné sur leur bazes.

CAS I.

Lorsque les \square : ont la même hauteur, *e. a. d.* IR = GB.

Puisque les \square : donnés sont égaux & qu'ils ont la même hauteur.

- 1. Leurs bazes sont égales. (*Corollaire de la Prop. 31. L. 11.*).
- 2. Donc baze AC : baze IL = hauteur IR : hauteur GB.

Def. 6. L. 5.

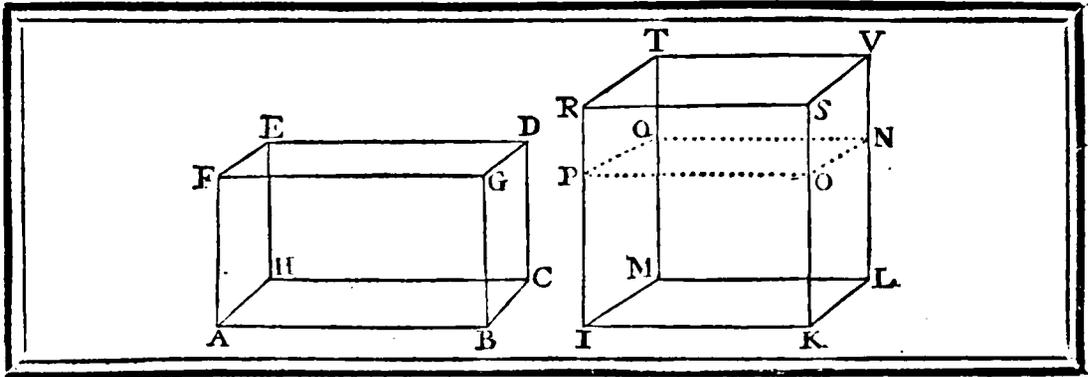
C. Q. F. D. I.

CAS II.

Lorsque IR est $>$ GB.

Vv

Prépa-



I. Préparation.

1. Coupez de la hauteur RI la partie PI = à la hauteur BG.
2. Par le point P, faites passer le Plan PONQ, Pile à la baze IL.

Puisque les paralelipipedes AD & IN ont la même hauteur. (1. Prép. 1.).

1. Le \square AD : \square IN = baze AC : baze IL. Prop. 32. L. 11.
Or \square AD est = au \square IV. (Hyp.).
2. Donc \square AD : \square IN = \square IV : \square IN. Prop. 7. L. 5.
3. Partant \square IV : \square IN = baze AC : baze IL. Prop. 11. L. 3.
Le \square IV est coupé par le Plan PONQ. (1. Prép. 2.).
4. Donc \square PV : \square IN = baze PS : baze KP. Prop. 25. L. 11.
5. Donc en composant \square IV : \square IN = baze KR : baze KP. Prop. 18. L. 5.
Mais baze KR : baze KP = RI : PI. Prop. 1. L. 6.
6. C'est pourquoi \square IV : \square IN = RI : PI. Prop. 11. L. 5.
Or \square IV : \square IN = baze AC : baze IL. (Arg. 3.)
Et PI = GB. (1. Prép. 1.).
7. Partant baze AC : baze IL = IR : BG. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. II.

CAS III.

Lorsque le \square IV à un inclinaison differente que le \square AD.

II. Préparation.

Construisez un \square de même hauteur que le \square IV, ayant la même inclinaison que le \square AD.

Puisque le \square construit à la même baze & la même hauteur que l'oblique (II Prép.)

1. Ce \square fera égal au \square donné IV. Prop. 31. L. 11.
Or ce \square construit est en raison reciproque de sa baze & de sa hauteur avec le \square AD. (Cas II.).
2. Donc le \square IV fera aussi en raison reciproque avec le \square AD. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. III.
HYPO-

HYPOTHESE.

Baze IL : baze AC = hauteur GB : hauteur IR.

THESE.

$\square AD$ est = $\square IV$.

II. DEMONSTRATION.

La Préparation est la même que pour le Cas II, precedent.

- P**uisque les $\square IN$ & $\square AD$ ont la même hauteur (1. Prép. 1.).
1. Le $\square IN$: $\square AD$ = baze IL : baze AC. Prop. 32. L. II.
Or baze IL : baze AC = hauteur GB : hauteur IR (Hyp.).
 2. Donc $\square IN$: $\square AD$ = hauteur GB : hauteur IR. Prop. II. L. 5.
Et comme PI est = BG (1. Prép. 1.).
 3. Le $\square IN$: $\square AD$ = hauteur PI : hauteur IR. Prop. 7. L. 5.
Mais PI : IR = Pgr. PK : Pgr. KR. Prop. 1. L. 6.
Et Pgr. KP : Pgr. KR = $\square IN$: $\square IV$. Prop. 32. L. II.
 4. Donc le $\square IN$: $\square AD$ = $\square IN$: $\square IV$. Prop. II. L. 5.
Or le $\square IN$ est égal à lui même & il est le premier & troisieme terme de la proportion.
 5. Partant le $\square AD$ est = au $\square IV$. Prop. 14. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Les Demonstrations pour le premier & le troisieme Cas dans cette Hypothese, sont les mêmes, c'est pourquoi nous les omettons.

REMARQUE I.

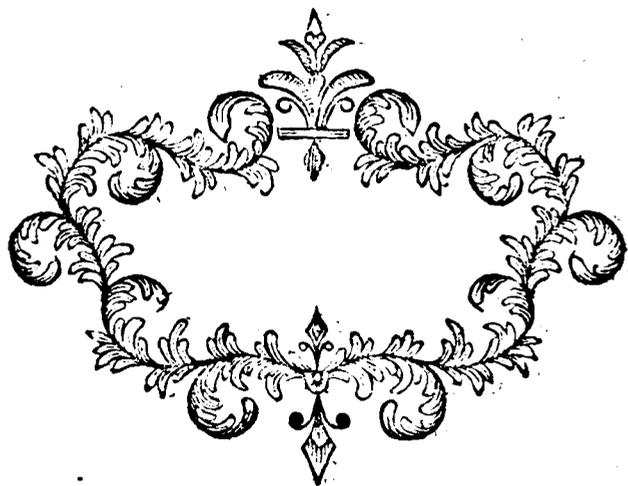
CE qui vient d'être Démontré dans les Propositions 25, 29, 30, 31, 32, 33 & 34. au sujet des paralelipipèdes; est aussi vrai, par rapport aux prismes triangulaires; puisque un tel prisme est la moitié de son paralelipipède: par la Proposition 28. de ce Livre, d'où l'on peut conclure.

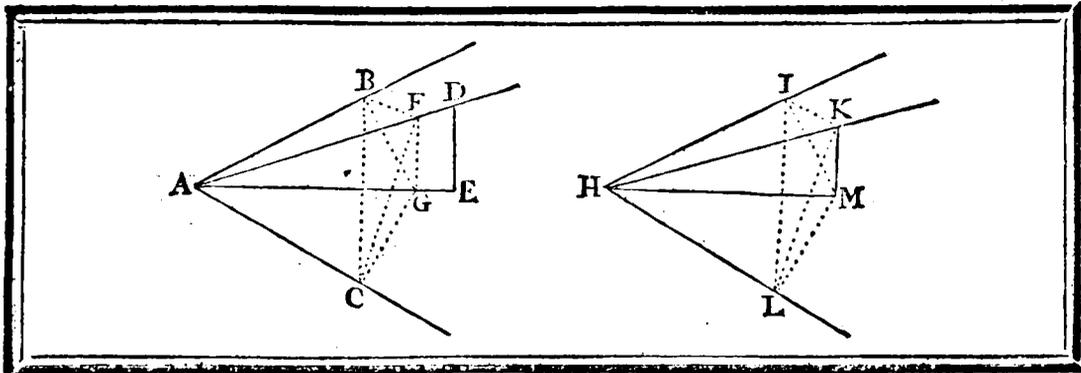
- I. Si un prisme triangulaire est coupé par un Plan Plle aux plans opposés: les deux prismes provenant, seront entr'eux comme les parties du Pgr. qui sert pour baze à tout le prisme.
- II. Les prismes triangulaires qui ont même baze, ou bazes égales & dont les hauteurs sont égales: sont égaux.
- III. Les prismes triangulaires qui ont même hauteur: sont entr'eux comme leurs bazes.
- IV. Les prismes triangulaires semblables: sont entr'eux en raison triplée de leurs cotés homologues.
- V. Les prismes triangulaires égaux: ont leurs bazes, & hauteurs reciproquement proportionelles. & les prismes triangulaires dont les bazes & les hauteurs, sont reciproquement proportionelles: sont égaux.

R E M A R Q U E I I.

LES mêmes propriétés conviennent aux prismes dont les Plans opposés Plle sont des polygones quelconques. Puisqu'il a été démontré (Proposition 20. Livre 6.) qu'on peut diviser ces polygones opposés semblables, dans un pareil nombre de triangles semblables; si donc on fait passer des Plans par les diagonales homologues qui forment ces triangles & qui sont Plle chacun à chacun: ces Plans diviseront les prismes polygones, en autant de prismes triangulaires, qu'il y a de triangles dans leurs Plans opposés Plle.

Or ces prismes triangulaires partielles étant dans le Cas des précédents de la première Remarque. On peut conclure par la (Proposition 12. Livre 5.) que les mêmes propriétés conviennent aux prismes-polygones.





PROPOSITION XXXV. THEOREME XXX.

SI deux angles plan (BAC & IHL) sont égaux, & que de leurs sommets (A & H) on ait élevé hors de leurs Plans des lignes (AD & HK) qui fassent avec leurs cotés respectifs (savoir AD avec AB & AC; HK avec IH & HL) des angles égaux ($\angle BAD = \angle IHK$ & $\angle DAC = \angle KHL$), que de deux points (D & K) pris à volonté dans ces lignes élevées (AD & HK) on abaisse des perpendiculaires (DE & KM) sur les Plans des angles donnés (BAC & IHL), & enfin que des points (E & M) où les perpendiculaires touchent ces Plans, on tire des droites (AE & HM) aux sommets (A & H) de ces angles donnés: ces droites (AE & HM) feront avec les lignes élevées (AD & HK) des angles (DAE & KHM) qui seront égaux.

HYPOTHESE.

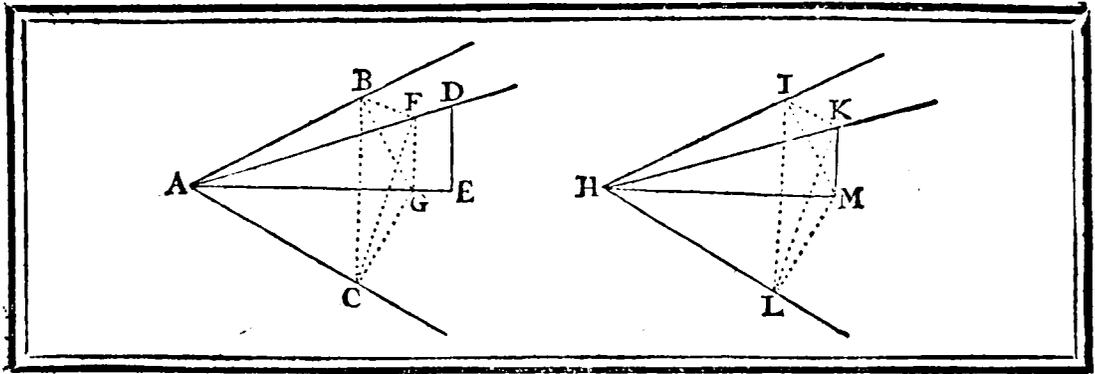
- I. Au dessus les Plans des \angle égaux BAC & IHL, & aux sommets A & H, on a élevé des droites AD & HK faisant les \angle BAD & DAC égaux aux \angle IHK & KHL, chacun à chacun.
- II. De deux points D & K, pris dans ces droites AD & HK, on a abaissés des \perp : DE & KM, sur les Plans BAC & IHL.
- III. Des points E & M où les \perp touchent ces Plans, on a tirés des droites AE & MH aux sommets A & H.

THESE.

$\angle DAE \text{ est } = \angle KHM.$

Préparation.

1. FAITES $AF = HK$. Prop. 3. L. 1.
2. Tirez FG, \perp à DE, jusqu'à la rencontre du Plan BAC, & G. Prop. 31. L. 1.
3. Du point G, dans le Plan BAC, tirez CG, \perp sur AC; & GB, \perp sur AB. Prop. 12. L. 1.
4. Du point K dans le Plan IHL, tirez IM, \perp sur HI; & ML \perp sur HL. Prop. 12. L. 1.
5. Tirez BF, BC & FC; Item IK, IL & LK. Dem. 1. L. 12.



DEMONSTRATION.

Puisque FG est Plle à DE qui est \perp sur le Plan BAC, (Hyp. III.)

1. La ligne GF est \perp sur le même Plan BAC.
Et les \sphericalangle FGB, FGA. & FGC sont \perp . Prop. 8. L. II.
Def. 3. L. II.
2. Partant le \square sur AF est = aux \square sur FG + \square sur GA.
Mais le \square sur AG est = \square AB + \square BG. (Prép. 3.) & Prop. 47. L. I.
Prop. 47. L. I.
3. Donc le \square sur AF est = \square FG + \square AB + \square BG.
Or le \square GB + \square FG sont = au \square BF. (Prép. 3.) Ax. 1. L. I.
Prop. 47. L. I.
4. Partant le \square sur AF est aussi = \square BF + \square AB.
5. Donc \sphericalangle ABF, est \perp . Prop. 48. L. I.
6. De la même manière on démontrera que \sphericalangle FCA, est \perp .
7. Item que les \sphericalangle KIH & KLH, sont \perp .
Dans les \triangle FCA & KLH; la ligne HK est = AF, (Prép. 1.) les \sphericalangle ACF & KLH, sont \perp , (Arg. 6. & 7.) & les \sphericalangle FAC & KHL, égaux (par Hyp. 1.).
8. Donc les cotés AC & CF sont égaux aux cotés HL & LK, chacun à chacun. Prop. 26. L. I.
9. De la même façon AB est = à HI, & BF = IK.
10. Partant dans les \triangle BAC & IHL; les bazes BC & IL sont égales, & les \sphericalangle ACB & ABC = aux \sphericalangle HLI & HIL, chacun à chacun. Prop. 4. L. I.
Si donc on retranche ces \sphericalangle égaux, des quatres angles droits ACG, ABG, HLM & HIM.
11. Les angles restants seront égaux, savoir \sphericalangle BCG = \sphericalangle ILM & \sphericalangle CBG = \sphericalangle LIM. Ax. 5. L. I.
Puis donc que les \triangle GBC & IML ont les bazes BC & IL égales, (Arg. 10.).
12. Et que les \sphericalangle sur ces bazes sont égaux, chacun à chacun, (Arg. 11.).
12. Les cotés BG & CG seront égaux aux cotés IM & ML. Prop. 26. L. I.
Dans les \triangle BAG & HIM, le coté AB est = à HI, (Arg. 9.) BG = IM, (Arg. 12.) & les \sphericalangle compris ABG & HIM des \perp . (Prép. 3 & 4.).
13. Partant AG = HM. Prop. 4. L. I.
Or le \square sur AF (= \square AG + \square GF Arg. 2.) est = au \square sur HK (= \square HM + \square KM Hyp. 1. & Prop. 47. L. I.). parce que AF est = HK. (Prép. 1.).
Si donc on retranche du \square AF le \square GA, & du \square HK le \square HM qui sont égaux. (Arg. 13. & Prop. 46. L. I. Corol. 3.).

14. Lc

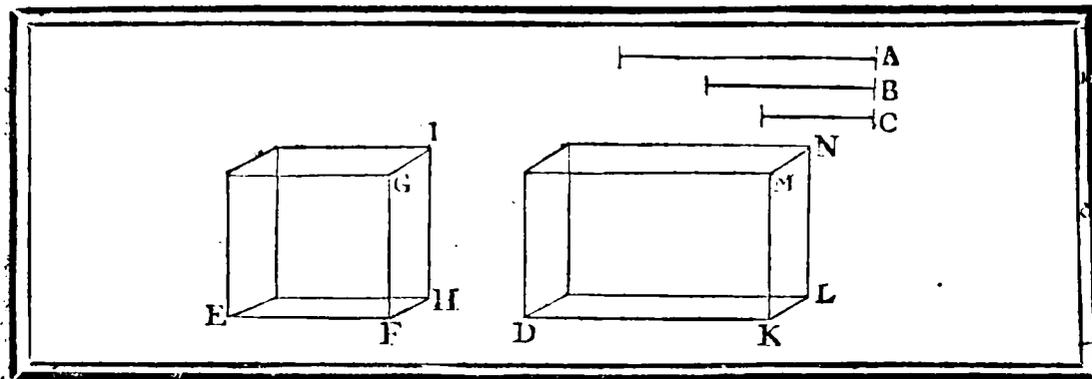
14. Le reste savoir le \square sur GF, sera $=$ au \square sur KM. Ax. 3. L. 1.
 15. Partant $GF = KM$. (*Corol. 3. de la Prop. 46. L. 1.*)
 Enfin puisque dans les deux \sphericalangle AGF & HKM les trois cotés AF, AG & FG sont $=$ aux cotés HK, HM, & KM, chacun à chacun. (*Prép. 1. & Arg. 13 & 15.*)
 16. L'Angle FAG ou DAE est $=$ à l'angle KHM. Prop. 8. L. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Si aux sommets A & H de deux angles-plan égaux BAC & IHL, on a élevé des droites égales AF & HK; faisant avec les cotés respectifs des angles BAF & FAC égaux aux \sphericalangle IHK & KHL, chacun à chacun, & qu'on abaisse de ces points F & K (de ces lignes élevées) des perpendiculaires FG & KM sur les Plans BAC & IHL: ces \perp , FG & KM seront égales. (*Arg. 15.*)





PROPOSITION XXXVI. THEOREME XXXI.

SI trois lignes droites (A, B & C) sont en proportion: le paralelipipède (DN) construit de ces trois lignes, sera égal au paralelipipède équiangle (EI) construit avec la moyenne (B).

HYPOTHESE.

- I. Les trois droites A, B & C sont en proportion
c: a: d: $A : B = B : C$.
- II. Le \square DN, est construit de ces trois lignes
c: a: d: $DK = A, MK = B, \& KL = C$.
- III. Le \square équiangle EI, est construit de la moyenne B, c: a: d: $EF = FG = FH = B$.

THESE.

Le \square EI est = au \square DN.

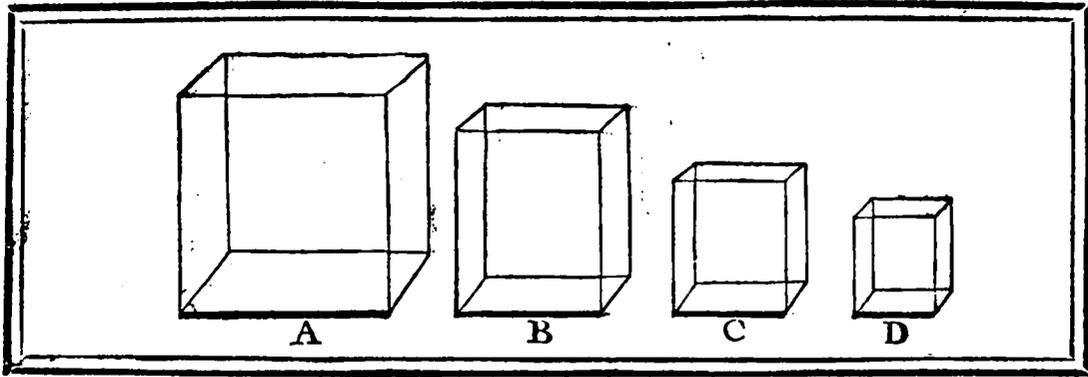
DEMONSTRATION.

Puisque $DK : EF = EF$ ou $FH : KL$. (Hyp. 2.)

Et que \forall plan EFH est = \forall plan DKL. (Hyp. 3.).

- 1. Le Pgr. DL, base du \square DN est = au Pgr. EH, base du \square EI. Prof. 14. L. 6.
De plus les \forall plan GFE & GFH, compris de l'élevée FG, & des cotés EF & FH, étant égaux aux \forall plan MKD & MKL, compris de l'élevée KM & de DK & KL, chacun à chacun. (Hyp. 3.) & que FG est = KM. (Hyp. 2 & 3.).
- 2. La perpendiculaire abaissée du point G, sur la base EH, sera égal à la perpendiculaire abaissée du point M, sur la base DL. (Cor. de la Prop. 35. L. 11.)
- 3. Partant le \square EI aura la même hauteur que le \square DN. Def. 4. L. 6.
Or la base EH du \square EI est = à la base DL du \square DN (Arg. 1.).
- 4. Donc le \square EI est = au \square DN. Prop. 31. L. 11.

C. Q. F. D.



PROPOSITION. XXXVII. THEOREME XXXII.

SI quatre lignes droites (A, B, C & D) sont proportionelles (c. a. d. que $A : B = C : D$) : Les paralelipipedes semblables & semblablement construits sur les deux premieres (A & B), seront proportionels aux paralelipipedes semblables & semblablement construits sur les deux dernieres (C & D). Et si deux paralelipipedes semblables & semblablement posés sur deux lignes (A & B); sont proportionels à deux autres paralelipipedes, aussi semblables & semblablement posés sur deux autres droites (C & D) : les cotés homologues (A & B) des premiers, seront proportionels aux cotés homologues (C & D) des derniers.

HYPOTHESE.

- I. $A : B = C : D$.
- II. Sur A & B on a construits des ☐.
- III. Item sur C & D.

THESE.

☐ A : ☐ B = ☐ C : ☐ D.

DEMONSTRATION.

Puisque le ☐ A est ☐ B. (Hyp. 2.).

1. Le ☐ sur A : ☐ sur B = $A^3 : B^3$ *. Prop. 33. L. 11.

2. De même le ☐ sur C : ☐ sur D = $C^3 : D^3$.

Mais la raison de A à B étant égale à la raison de C à D. (Hyp. 1.).

3. Il s'ensuit que trois fois la raison de A à B est égale à trois fois la raison

de C à D. c. a. d. que $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$.

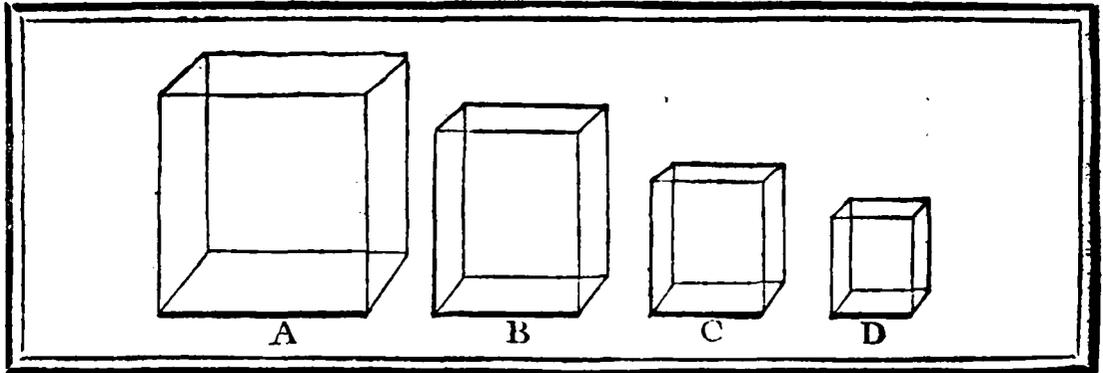
Ax. 6. L. 1.

4. Partant le ☐ sur A : ☐ sur B = ☐ sur C : ☐ sur D.

Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

* Voyez Append. Prop. 7. & Hyp. 1. Cor. 2.



HYPOTHESE.

- I. Le \square sur A est \propto au \square sur B.
 II. Item le \square sur C est \propto au \square sur D.
 III. Le \square sur A : \square sur B = \square sur C : \square sur D.

THESE.

$$A : B = C : D.$$

II. DEMONSTRATION.

Puisque le \square sur A est \propto au \square sur B (Hyp. 1.)

1. Le \square sur A : \square sur B = $A^3 : B^3$.

Prop. 33. L. II.

De même le \square sur C est \propto au \square sur D. (Hyp. 2.)

2. Le \square sur C : \square sur D = $C^3 : D^3$.

Prop. 33. L. II.

Or le \square sur A : \square sur B = \square sur C : \square sur D. (Hyp. 3.)

3. Donc $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$.

Prop. 11. L. 5.

4. Partant $A : B = C : D$.

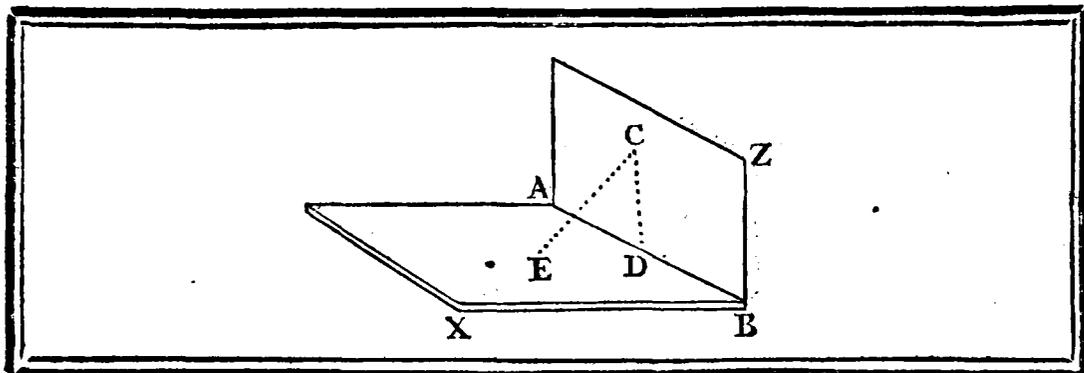
Ax. 7. L. I.

C. Q. F. D. II.

REMARQUE.

I. Puisque le prisme triangulaire est la moitié de son parallépipède (par la Proposition 28. de ce Livre.) Il s'ensuit (par Ax. 7. L. 1.) que la même vérité à lieu pour les prismes triangulaires semblables.

II. On peut aussi l'appliquer aux prismes-polygones semblables; puisqu'ils peuvent être divisés par des Plans en prismes triangulaire partielles, (par la Remarque 2. de la Proposition 34. de ce Livre).



PROPOSITION XXXVIII. THEOREME XXXIII.

SI deux Plans (AZ & AX) sont perpendiculaires l'un à l'autre: toute ligne perpendiculaire (CD) tirée d'un point (C) quelconque de l'un de ces Plans (AZ) à l'autre (AX) passera par leur commune section (AB).

HYPOTHESE.

Le Plan AZ est \perp à l'autre Plan AX.

THESE.

La ligne CD abaissée d'un point C, situé dans le Plan AZ \perp sur le Plan AX, passe par la commune section AB.

DEMONSTRATION.

SI non.

On peut mener une \perp comme CE, qui ne passe point par la commune section AB.

Préparation.

DU point C, abaissez dans le Plan AZ sur la ligne AB, une \perp CD.

Prop. 12. L. 1.

Puisque CD est \perp sur la commune section AB. (Prép.).

1. CD fera \perp sur le Plan AX.

Def. 4. L. 12.

Mais EC est \perp sur le même Plan. (par la Sup.).

2. Donc on a mené d'un même point C deux perpendiculaires EC & CD au Plan AX.

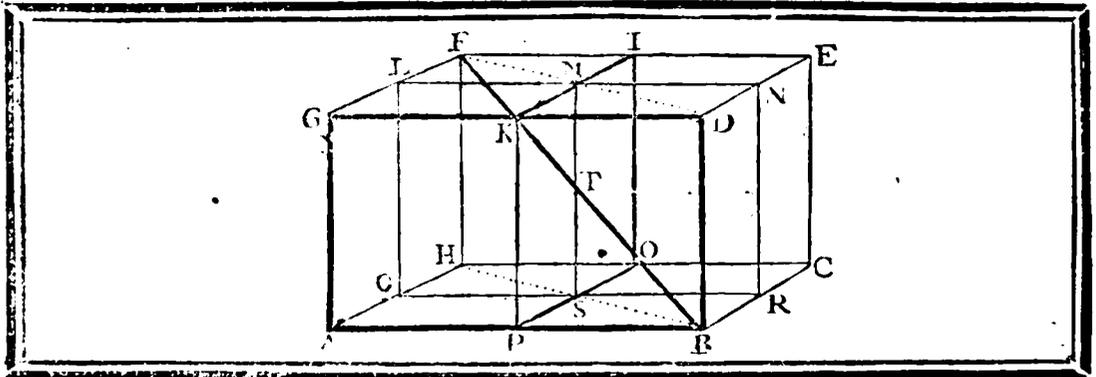
3. Ce qui est impossible.

Prop. 13. L. 12.

4. Partant EC n'est point \perp sur AX.

5. Par conséquent la perpendiculaire CD abaissée d'un point C, quelconque du Plan AZ sur le Plan AX (qui y est perpendiculaire) passe par leur commune section AB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIX. THEOREME XXXIV.

SI dans un parallepipède (AE) on divise en deux également les cotés (GD, AB; GF, AH; FE, HC; ED & BC) des Plans opposés, (FA & EB, Item FC & GB) & que par les points de section (K, P, O, I, & L, Q, R, N) l'on fait passer des Plans (IP & LR) : la ligne de commune section (MS) de ces Plans, & le diamètre (FB) du parallepipède (AE) se diviseront mutuellement en deux au point T.

HYPOTHESE.

- I. Dans le \square AE, dont le diamètre est FB; les cotés DG, AB, &c. sont coupés en deux également aux points K, P, &c.
- II. On a fait passer les Plans KO & LR par les points, K, P, O, I, & L, Q, R, N.

THÈSE.

La ligne de commune section de ces Plans qui est MS, & le diamètre FB, se divisent mutuellement en deux au point T.

Préparation.

Tirez SB, SH, FM & MD.

Dem. I. L. I.

DEMONSTRATION.

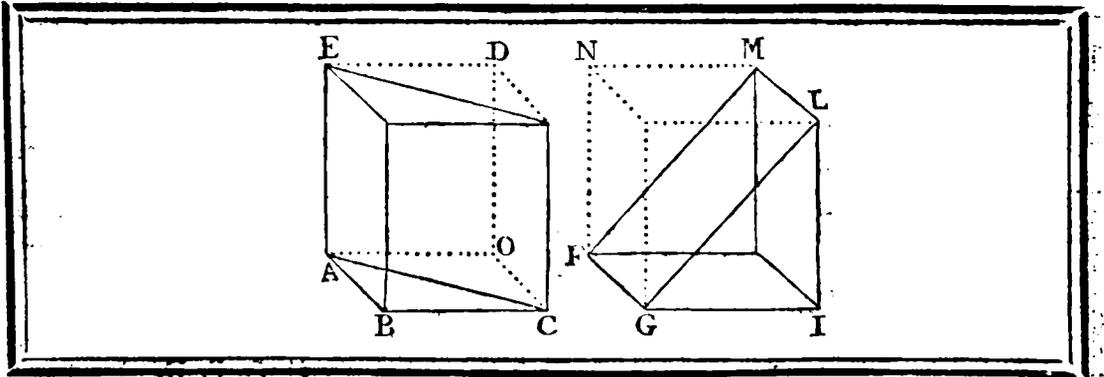
- LES cotés HQ & SQ étant égaux aux cotés BR & SR. (Hyp. I.) & Et \sphericalangle HQS = \sphericalangle SRB. Prop. 34. L. I.
Prop. 29. L. I.
1. La baze HS du \triangle HSQ fera = à la baze SB du \triangle BSR, & \sphericalangle HSQ = \sphericalangle RSB. Prop. 4. L. I.
Prop. 13. L. I.
 2. Or les \sphericalangle RSH & HSQ sont ensemble = $2\angle$. Ax. I. L. I.
 3. Partant \sphericalangle RSH + \sphericalangle RSB = $2\angle$. Prop. 14. L. I.
 4. D'où il suit que HSB est une droite.
 5. On prouvera de même que FD est une droite. Prop. 34. L. I.
- De plus BD étant = & Plle à AG, & AG = & Plle à FH. Prop. 9. L. II.
Ax. I. L. I.

6. Et

6. Et par consequent FD est $=$ & Plle à HB . Prop. 33. L. 1.
7. D'où il suit que FB & MS , sont dans le même Plan $FDBH$. Prop. 7. L. 11.
- Or dans les $\triangle FMT$, & TSB ; les cotés FM & SB , sont égaux.
 (parce que le $\triangle FMI$ est $=$ & ∞ $\triangle HSO$, & que HS est $=$ SB ,
 par *Arg. 1.*) de plus $\sphericalangle STB = \sphericalangle FTM$ & $\sphericalangle FMT = \sphericalangle TSB$. { Prop. 15. L. 1.
Prop. 29. L. 1.
8. Donc $MT = TS$ & $FT = TB$ (*Prop. 26. L. 1.*), c. a. d. que la ligne
 de commune section des Plans KO & LR qui est MS , & le diametre
 du paralelipéde qui est FB , se coupent mutuellement en deux au
 point T .

C. Q. F. D.





PROPOSITION XL. THEOREME XXXV.

SI deux prismes (FL & EC) ont la même hauteur (LI & AE), mais que la base de l'un (comme de FL) est un parallelogramme (FI), qui est le double de la base triangulaire (ABC) de l'autre (EC): le premier prisme (LF) fera égal au second (EC).

HYPOTHESE.

- I. Dans les prismes FL & EC; la hauteur LI est = à la hauteur AE.
- II. La base du prisme LF est un Pgr. FI, & la base du prisme EC un Δ ABC.
- III. Le Pgr. FI est le double du Δ ABC.

THESE.

Le prisme FL est = au prisme EC.

Préparation.

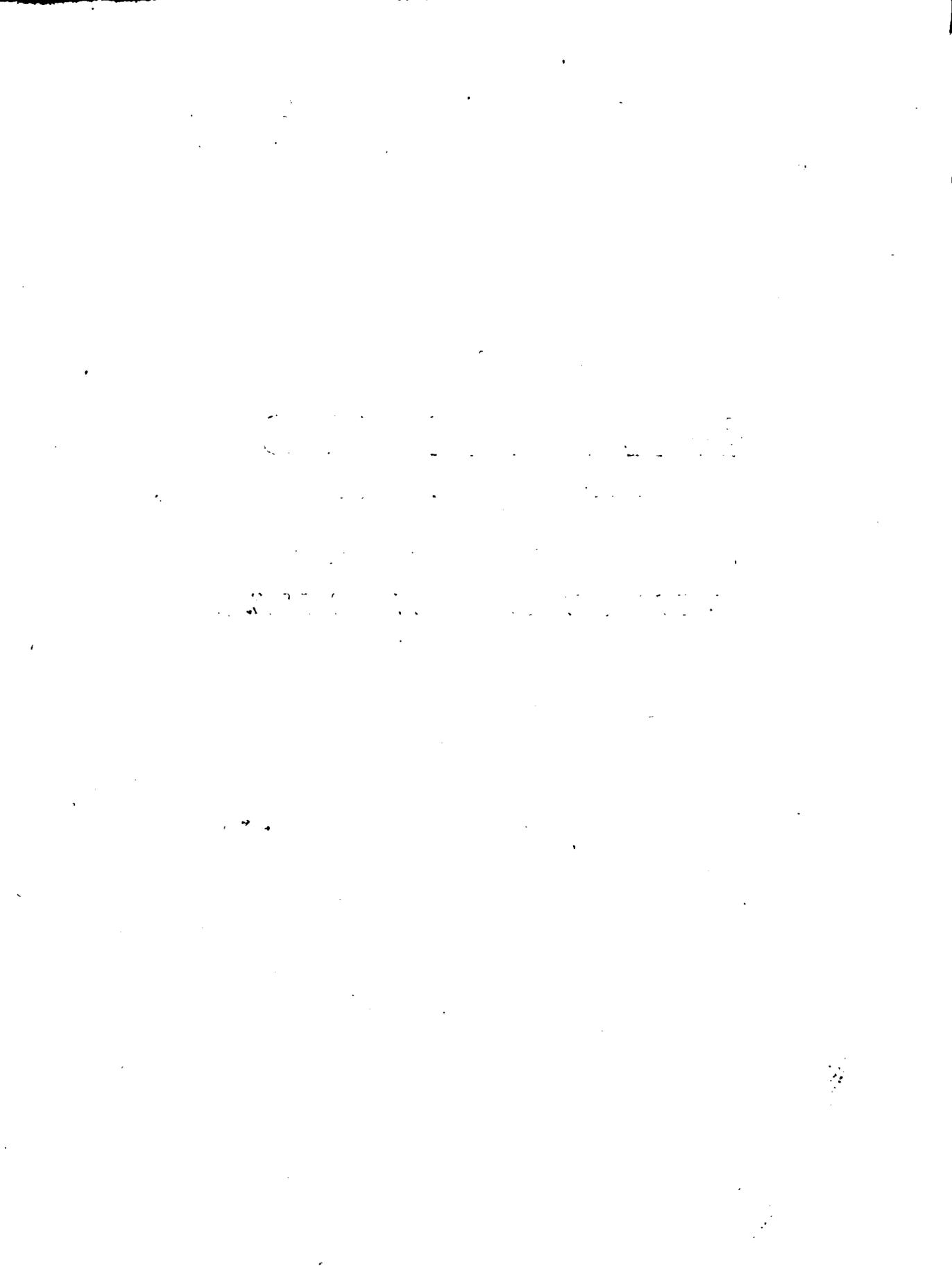
ACHEVEZ les \square : NI & BD.

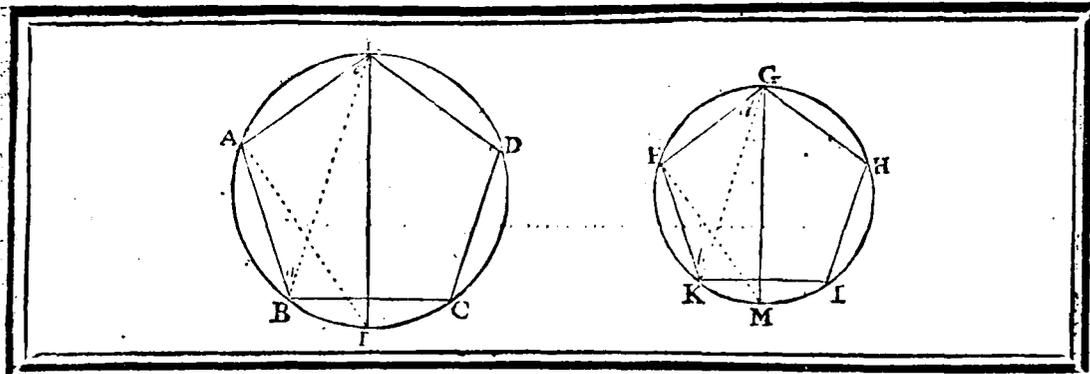
DEMONSTRATION.

- Puisque le Pgr. FI, base du prisme FL, est le double du Δ ABC; base du prisme EC. (Hyp. 2 & 3).
 Et que le Pgr. BO est aussi le double du Δ ABC. Prop. 41. L. 1.
1. Le Pgr. FI est = au Pgr. BO. Prop. 31. L. 11.
- De plus la hauteur LI étant = à la hauteur AE (Hyp. 1.).
2. Le \square BD est = au \square NI. Prop. 28. L. 11.
- Le prisme donné LF est la moitié du \square ND. }
 Et le prisme EC, est la moitié du \square BD. } Ax. 7. L. 1.
3. Partant le prisme FL est = au prisme EC.

C. Q. F. D.

LES
ELEMENS
D'EUCLIDE,
LIVRE DOUZIEME.





PROPOSITION. I. THEOREME I.

Les polygones semblables (ABCDE & FGHK) inscrits dans des cercles: sont entr'eux comme les quarrés décrits sur les diamètres (EL & GM) de ces mêmes cercles.

HYPOTHESE.

I. Les polygones ABCDE & FGHK sont ∞.

II. Ils sont inscrits dans des cercles.

THESE.

polygone ACE : polygone FKH = le □ sur le diamètre EL est au □ sur le diamètre GM ou comme diamètre EL² : diamètre GM².*

Préparation.

1. Dans le ⊙ ACD, tirez AL & BE. Item le diam. EL
 2. Dans le ⊙ FMH tirez les lignes homologues FM & GK. Item le diamètre GM.
- } Dem. I. L. 1.

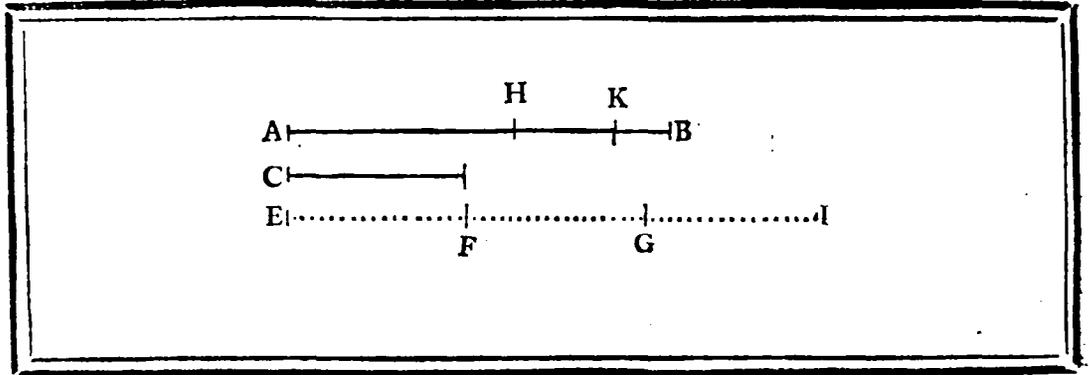
DEMONSTRATION.

Puisque les polygones ABCDE & FGHK sont ∞ (Hyp. I.) que l'angle A ou EAB est = à ∠ GFK & que AE : AB = FG : FK (Def. I. L. 6.).

1. Le ∆ ABE est équiangle au ∆ FGK. Prop. 6. L. 6.
2. C'est pourquoi ∆ ABE est ∞ ∆ GFK, & ∠ a = ∠ b, item ∠ c = ∠ d. Prop. 21. L. 3.
Mais ∠ ELA est = à ∠ EBA ou a, & ∠ GMF = ∠ GKF ou b.
3. Partant ∠ ELA est = à ∠ GME. Ax. I. L. 1.
4. De même ∠ EAL = ∠ GFM. Prop. 31. L. 3.
Et puisque dans les deux ∆ ALE & GFM, les deux ∠ ELA & EAL du premier sont égaux aux deux ∠ GMF & GFM du second (Arg. 3. & 4.)
5. Letroisieme ∠ AEL du ∆ EAL sera = au troisieme ∠ FGM du ∆ FMG. Prop. 32. L. 1.
6. Donc EL : AE = GM : GF. Prop. 4. L. 6.
7. Et alternant EL : GM = AE : GF. Prop. 16. L. 5.
Or AE & GF sont des cotés homologues des polygones ADB & FHK. De plus EL & GM sont les diametres des cercles ou ces polygones sont inscrits.
8. C'est pourquoi polygone ABCDE : polygone FKHG = EL² : GM².* Prop. 22. L. 6.

C. Q. F. D.

* Voyez Ap. Prop. 7.



L E M M E .

SI deux grandeurs (AB & C) sont inégales, & qu'on retranche de la plus grande (AB) plus que la moitié (savoir AH), & du reste (HB) encore plus que la moitié (savoir HK), & qu'on continue ainsi de suite: on parviendra à avoir un reste (KB), qui sera plus petit que la moindre grandeur C .

Préparation.

1. Prenez un multiple EI de la moindre C , qui surpasse AB , & qui soit $\succ 2C$.
2. Retranchez de AB , la partie $HA \succ \frac{1}{2} AB$.
3. Du reste HB , retranchez $HK \succ \frac{1}{2} HB$.
4. Continuez à retrancher plus de la moitié de ces restes consécutifs, jusqu'à ce que le nombre de fois soit égal au nombre de fois que C est contenu dans son multiple EI .

Dem. 1. L. 5.

Dem. 2. L. 5.

Dem. 2. L. 5.

D E M O N S T R A T I O N .

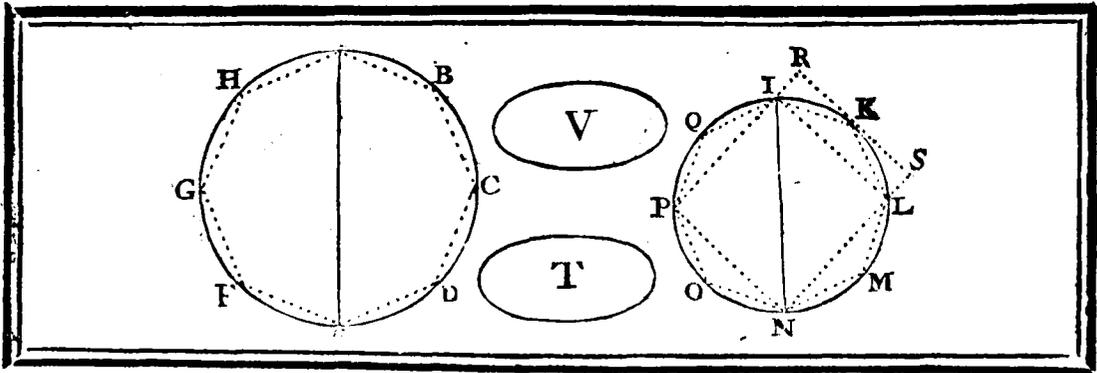
LA grandeur EI est un multiple plus grand que deux fois la moindre grandeur C . (*Prép. 1.*)

Si donc on en retranche une grandeur $GI \equiv C$.

1. Le reste savoir EG sera \succ que la moitié de EI .
Or EI est $\succ AB$. (*Prép. 1.*)
2. Partant la moitié de EI est \succ que la moitié de AB .
3. Donc GE sera beaucoup \succ que la moitié de AB .
Cependant HB est \prec que la moitié de AB . (*Prép. 2.*)
4. Donc GE est à plus forte raison encore $\succ HB$.
5. C'est pourquoi EF , moitié de EG , est \succ que la moitié de HB .
Et KB est $\prec \frac{1}{2} HB$. (*Prép. 3.*)
6. Partant EF est encore beaucoup $\succ KB$.
Et comme on peut continuer ce même raisonnement jusqu'à ce qu'on parvienne à une partie (EF) du multiple de la grandeur C , qui soit égale à C . (*Prép. 4.*)
7. Il s'ensuit que la grandeur C sera \succ que la partie restante (KB) de la plus grande AB .

Prop. 19. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. THEOREME II.

Les cercles (AFD & ILP), sont entr'eux comme les quarez décrits sur leurs diamètres (AE & IN).

HYPOTHESE.

Dans les cercles AFD & ILP on a tiré les diamètres AE & IN.

THESE.

$$\odot AFD : \odot ILP = \overline{AE}^2 : \overline{IN}^2.$$

DEMONSTRATION.

Si non.

\overline{AE}^2 est à \overline{IN}^2 comme le $\odot AFD$ est à une grandeur T (qui est < ou > que le $\odot ILP$.)

I. Supposition.

Soit T < $\odot ILP$ de la grandeur V. c. à. d. $T + V = \odot ILP$.

I. Préparation.

1. Dans le $\odot ILP$ décrivez le $\square ILNP$.
2. Divisez les arcs IL, LN, NP, & PI en deux, aux points K, M, O & Q.
3. Tirez les lignes IK, KL, LM, MN, NO, OP, PQ & QI.
4. Par le point K, tirez SR Pile à LI.
5. Prolongez NL & PI, jusqu'en R & S, qui formeront le Rgle SRIL.
6. Inscrivez dans le $\odot ADF$ un polygone ∞ au polygone du $\odot ILP$.

Prop. 6. L. 4.

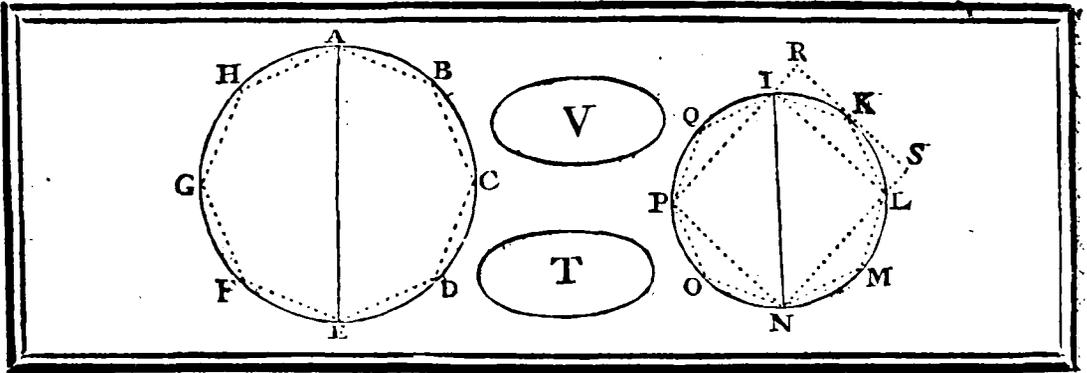
Prop. 30. L. 3.

Dem. 1. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Y y 2

Puisque



Puisque le quarré circonscrit au cercle ILP est plus grand que ce cercle même.

1. La moitié de ce quarré fera \gt que la moitié du \odot ILP.
Mais le quarré inscrit ILNP est $=$ à la moitié du quarré circonscrit*.
2. Donc le \square LIPN est \gt que la moitié du \odot ILP.
Le Rgle SI est \gt que le segment LKI. (*Prép. 5. & Ax. 8. L. 1.*)
3. Partant la moitié du Rgle SI est \gt la moitié du segment LKI.
Le \triangle LKI est $=$ à la moitié du Rgle SI.
4. Donc le \triangle LKI est \gt que la moitié du segment LKI.
5. On prouvera de même que tous les \triangle LMN, NOP, &c. sont chacun plus grand que la moitié du segment dans lesquels ils sont placés.
6. C'est pourquoi la somme de tous ces triangles fera plus grand que la somme de la moitié de tous les segments.
Si on continuoit à diviser les segments KI, IL &c. de même que les segments provenant de ces divisions.
On prouveroit de même.
7. Que les triangles provenant des droites qu'on tireroit dans ces segments, sont ensemble plus grands, que la moitié des segments dans lesquels ces triangles insistent.
Si donc on retranche du cercle ILP, plus que la moitié à savoir le \square ILNP, & que des segments restant (LKI, IQP, &c.), on retranche encore plus que la moitié, & ainsi de suite.
8. On parviendra à avoir pour reste des segments dont la somme sera moindre que V.
Or le \odot ILP est $=$ T + V. (*par la 1. Sup.*).
Retranchant donc du \odot ILP ces segments LKI, &c.
Et de T + V la grandeur V, (qui est plus grand que ces segments):
9. Le reste savoir le polygone IKLMNOPQ fera \gt T.
Or le polygone ADFK : polygone FLOQ $=$ \square sur AE : \square sur IN.

Ax. 8. L. 1.
Prop. 19. L. 5.
Ax. 1. L. 1.
Prop. 19. L. 5.
Prop. 41. L. 1.
Prop. 19. L. 5.

{ Lemme de
Prop. 2. L. 12.

Ax. 5. L. 1.
Prop. 1. L. 12.

Et

* Ce qui est évident puisque le costé de quarré circonscrit est égal au diamètre, & que le quarré du diamètre est $=$ \square LI + \square LN (Prop. 47. L. 1.) mais IL est $=$ à LN. (Def. 30. L. 1.) p. rtant le \square circonscrit est $=$ \square LI + \square LI $=$ 2 \square LI.

Et le \square sur AE : \square sur $IN = \odot ACEG : T$. (Sup.).

10. Donc le polygone $ADFH$: polygone $ILOQ = \odot ACEG : T$.

Prop. II. L. 5.

Mais le polygone $ADFH$ est $<$ $\odot ACEG$.

Ax. 8. L. 1.

11. Partant le polygone $ILOQ$ est $<$ T .

Prop. 14. L. 5.

Or le polygone $ILOQ$ est $>$ que T . (Arg. 9.).

12. Donc T seroit $>$ & $<$ que le polygone $ILOQ$. (Arg. 9 & 11.)

13. Ce qui est impossible.

14. Donc T n'est pas $<$ que le cercle ILP .

15. D'où il suit qu'il n'est pas possible que le carré du diamètre (AE) d'un cercle ($ACEG$), soit au carré du diamètre (IN) d'un autre cercle (ILP), comme le premier cercle ($ACEG$) à une grandeur moindre que le second cercle (ILP).*

II. Supposition.

Soit l'espace ou grandeur $T >$ que le cercle ILP .

II. Préparation.

Prenez une grandeur ou espace V , de manière que
 $T : \odot ACEG = \odot ILP : V$.

Puisque le \square sur AE : \square sur $IN = \odot ACEG : T$.

16. On aura *invers.* $T : \odot ACEG = \square$ sur $IN : \square$ sur AE .

{ Prop. 4. D. 5.
 { Corol.

Or $T : \odot ACEG = \odot ILP : V$. (II. Prép.).

De plus T est $>$ $\odot ILP$. (II. Sup.).

17. Partant le $\odot ACEG$ est aussi $>$ V .

Prop. 14. L. 5.

De plus $T : \odot ACEG = \square$ sur $IN : \square$ sur AE (Arg. 16.).

Et $T : \odot ACEG = \odot ILP : V$. (II. Prép.).

18. Donc le \square sur $IN : \square$ sur $AE = \odot ILP : V$.

Prop. 11. L. 5.

Mais $V <$ $\odot ACEG$. (Arg. 17.).

Et il est démontré (Arg. 15.) qu'il n'est pas possible que le carré du diamètre (IN) d'un cercle (ILP), soit au carré du diamètre d'un autre cercle ($ACEG$); comme ce premier cercle (ILP) à une grandeur moindre que le second ($ACEG$).

19. Partant V n'est pas $<$ que le cercle ILP .

20. Donc T n'est pas $>$ que le $\odot ILP$.

L'espace ou grandeur T n'étant donc ni $<$ ni $>$ que le cercle ILP . (Arg. 14 & 19.).

21. T sera égal à ce cercle ILP .

22. Par conséquent le $\odot ACEG : \odot ILP = \square$ sur $AE : \square$ sur IN

Prop. 7. L. 5.

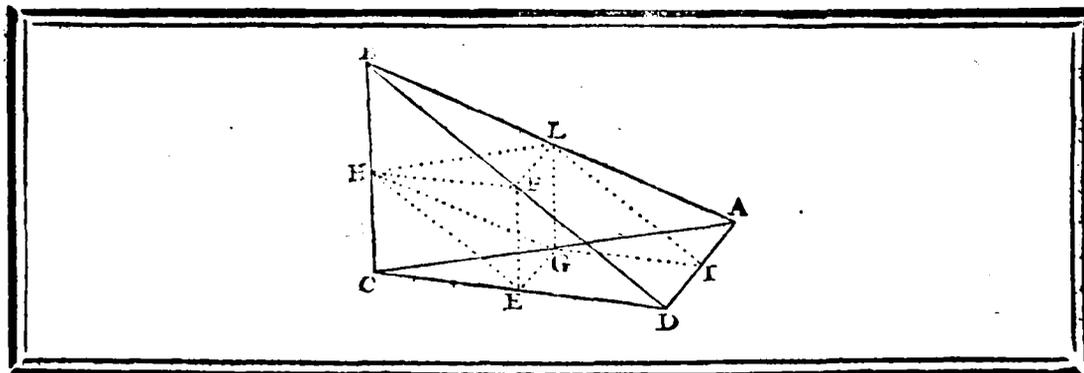
C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Les cercles sont entr'eux comme les polygones semblables qui y sont décrits.

(Prop. 1. L. 12. & Prop. 11. L. 5.)

* Il est aisé à remarquer que la même conclusion à lieu, lorsqu'on supposeroit que le $\odot ILP$ est le premier; de même que son diamètre IN ; & le $\odot ACEG$ avec son diamètre AE le second.



PROPOSITION III. THEOREME III.

Toute pyramide (ABCD) ayant pour baze un triangle (ACD): peut être divisée * en deux prismes égaux & semblables, (IDEFLG & GLFHCE) & en deux pyramides (LGIA & LFHB) semblables & égales entr'elles, & semblables à la grande pyramide; de plus les deux prismes pris ensemble seront plus grands que la moitié de toute la pyramide (ABCD).

HYPOTHESE.
ABCD est une pyramide dont la baze ADC est un Δ.

THESE.
 I. La partie du corps IDEFLG est un prisme = \cong à la partie GLFHCE.
 II. La partie ALGI est une pyramide = \cong à la partie BLFH.
 III. Ces pyramides ALGI & BLFH sont \cong à la pyramide ABCD.
 IV. Les prismes IDEFLG & GLFHCE sont ensemble $>$ que la moitié de la pyramide ABCD.

I. Préparation.

1. Coupez tous les cotés de la pyramide ABCD en deux également aux points L, F, H, E, G & I. Prop. 10. L. 1.
2. Tirez les lignes LF, FH, FE, GE, GI, & IL, item LG & LH. Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le Δ BCD les cotés BD & BC sont divisés en deux aux points F & H. (Prép. 1.)

1. $BH : HC = BF : DF.$ Prop. 19. L. 3.
2. Partant FH est Plle à DC. Prop. 2. L. 6.
3. De même FE est Plle à BC. Def. 35. L. 1.
4. Donc FECH est un Pgr. 5. On

* En coupant le Corps par des Plans.

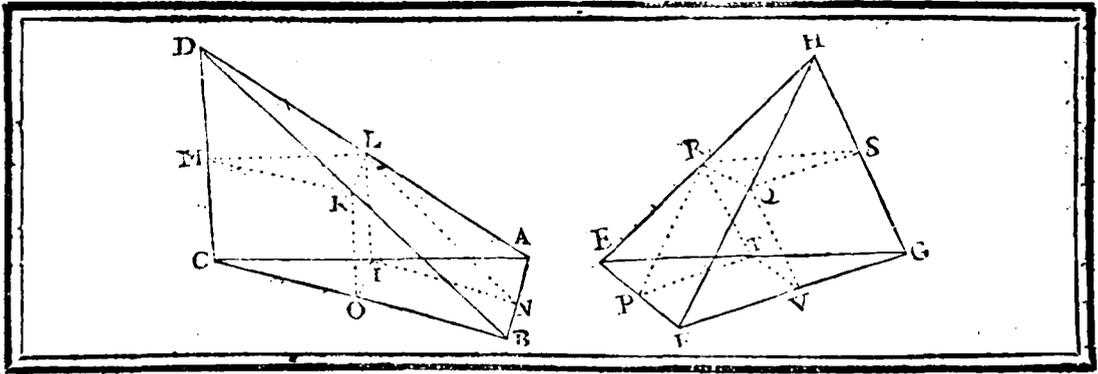
5. On prouvera de même que LFEG & LGCH sont des Pgr.
 Et comme FH & HL sont Plles à EC & GC. (*Arg.* 2 & 5).
6. Les Plans passant par LFH & ECG seront Plle. Prop. 15. L. II.
7. Donc LGECHF sera un prisme. Def. 13. L. II.
8. Pareillement LFEDIG fera aussi un prisme. }
 Or ces deux prismes ont la même hauteur LG & le Pgr. GIDE qui est la baze du prisme LD est le double du Δ CEG, baze du prisme LC. Prop. 41. L. I. Prop. 40. L. II.
9. Donc le prisme LD est égal au prisme LC. C. Q. F. D. I.

- P**uisque le coté BD est coupé en deux en F, que FE & DE sont Plles BC & FH. (*Prép.* 1. & *Arg.* 2 & 3.).
10. Le Δ FDE est = & ∞ Δ BFH. } Prop. 26. L. I. Pr. p. 7. L. 6.
11. Les Δ FED & ILG sont aussi égaux. Def. 13. L. II.
12. Donc Δ BFH = Δ LIG. Ax. 1. L. I.
- Et comme les autres cotés de la pyramide ABCD sont divisés en deux. Il est aisé de prouver que
13. Δ BLF est = à Δ LAI, Δ BLH = Δ AGL & Δ LFH = Δ AGI.
14. D'où il suit que ces parties BLHF & ALGI sont des pyramides, qui sont ∞ & égaux. Def. 10. L. II.
- C. Q. F. D. II.

- L**A ligne FH, est Plle à DC. (*Arg.* 2.).
15. Donc Δ BFH est ∞ Δ BDC. Prop. 2. L. 6.
- De même tous les triangles qui forment les pyramides BLHF & ALGI sont ∞ à tous les triangles de la grande ABCD.
16. Donc les pyramides BLHF & ALGI sont ∞ à la pyramide ABCD. C. Q. F. D. III.

II. Préparation.

- T**irez GH & EH.
- La ligne BH étant = à HC. (*I. Prép.* 1.). FH = EC (*Arg.* 4.) & \sphericalangle ECH = \sphericalangle FHB (*Prop.* 29. L. I.)
17. Partant le Δ ECH est = au Δ BFH. Prop. 4. L. I.
18. Item les Δ HGC & GEC sont égaux & ∞ aux Δ BLH & LHF, } Prop. 4. L. I. Def. 13. L. II.
19. Donc la pyramide LFHB est = à la pyramide HGEC. Def. 10. L. II.
- Or la pyramide ECHG n'est qu'une partie du prisme ECHFLG.
20. Donc le prisme ECHFLG est \succ que la pyramide ECHG. Ax. 8. L. I.
21. Partant ce prisme ECHFLG est aussi \succ que la pyramide LFHB. Prop. 7. L. 5.
- Le prisme LGECHF est = au prisme EFLGID, & la pyramide LFHB = à la pyramide AIGL. (*Arg.* 9 & 14.).
22. Donc le prisme EFLGID est aussi \succ pyramide AIGL.
23. Les deux prismes ECHFLG & EFLGID pris ensemble feront donc \succ que les deux pyramides BLFH & LAIG prises ensemble. Ax. 4. L. I.
24. D'où il suit que les deux prismes ECHFLG & EFLGID pris ensemble font donc \succ que la moitié de la pyramide donnée ABCD. C. Q. F. D. IV.



PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

S'il y a deux pyramides ($ABCD$ & $EFGH$) de même hauteur ayant des bases (ABC & EFG) triangulaires; & que chacune d'elles soit divisée en deux pyramides égales & semblables entr'elles, & semblables à leur tout, (savoit les pyramides $DLKM$ & $ANIL$, pour la pyramide $ABCD$; & $HRQP$, & $REPT$ pour la pyramide $EFGH$), & en deux prismes égaux (savoit LB & LC pour $ABCD$; & RF & RG pour $EFGH$) & que semblablement les quatre pyramides ($LDKM$, $LINA$, $RQSH$, & $RTPE$) provenues de cette première division soyent de rechef divisées; & qu'on continue cette division ainsi de suite: la base (ABC) de l'une des pyramides données ($ABCD$) sera à la base (EFG) de l'autre pyramide ($EFGH$) comme la somme de tous les prismes qui sont contenus dans la première pyramide ($ABCD$) est à la somme de tous les prismes qui sont contenus dans la seconde ($EFGH$) étant égaux en multitude.

HYPOTHESE.

- I. Les pyramides triangulaires $ABCD$ & $EFGH$, ont des hauteurs égales.
- II. Elles sont coupées chacune en deux prismes égaux LB & LC ; item RF & RG ; & en deux pyramides égales & semblables entr'elles & semblable aux grandes pyramides dont elles font partie.
- III. Ces pyramides provenues $LDKM$, $LINA$, $RTPE$ & $RQSH$, sont supposées être divisées de même que les grandes; & ainsi de suite.

THESE.

La somme de tous les prismes contenus dans la pyramide $ABCD$ est à la somme de ceux qui sont dans la pyramide $EFGH$ tant égaux en multitude; comme la base ABC de la pyramide $ABCD$ est à la base EFG , de la pyramide $EFGH$.

DEMONSTRATION.

Puisque les pyramides $ABCD$ & $EFGH$ ont des hauteurs égales & que les prismes LB , LC , RF & RG ont chacun la moitié de cette hauteur. (*Hyp. 1. & Prop. 3. L. 12.*)

1. Ces prismes LB , LC , RF & RG ont la même hauteur.
2. Les lignes BC & FG sont coupées en deux aux points O , & V .

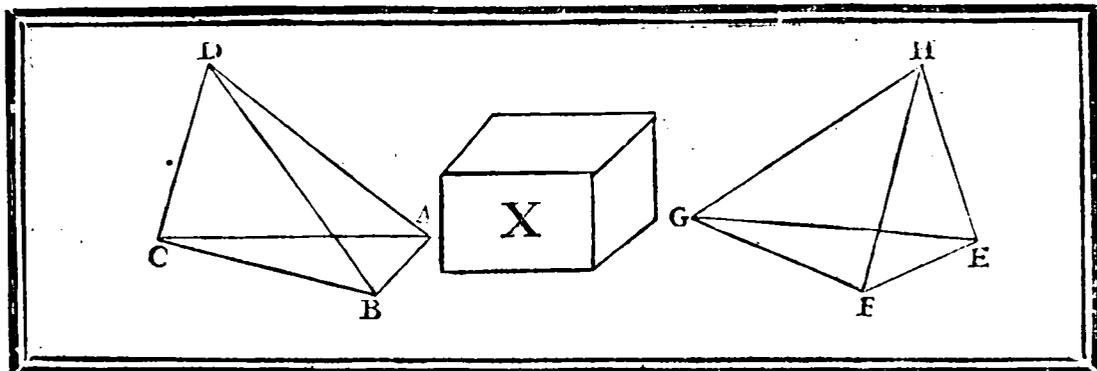
Ax. 7. L. 1.
Prop. 3. L. 12.

2. Donc

2. Donc $CB : CO = GF : GV$. { Prop. 19 L. 5.
 3. Partant $\triangle ABC : \triangle IOC = \triangle EFG : \triangle TVG$. { Prop. 16. L. 5.
 4. Et Alt. $\triangle ABC : \triangle EFG = \triangle IOC : \triangle TVG$. { Prop. 22. L. 6.
 5. De plus baze $IOC : baze TVG =$ prisme $LKMCOI : pr. RQSGVT$. { Prop. 16. L. 5.
{ Co. III Rem. de
{ Prop. 34. L. 11.
 6. Et prisme $LKOBNI : prisme LKMCOI =$ prisme $RQVFPT : prisme RQSGVT$, (car ils ont la même hauteur, (*Arg. 1.*) & ils sont égaux deux à deux (*Hyp. II.*). Prop. 7. L. 5.
 7. Partant prisme $LB +$ prisme $LC : prisme LC =$ prisme $RF +$ prisme $RG : prisme RG$. Prop. 18. L. 5.
 8. Et Alt. prisme $LB +$ prisme $LC : prisme RF +$ prisme $RG =$ prisme $LC : prisme RG$. Prop. 16. L. 5.
 Mais prisme $LC : prisme RG =$ baze $IOC : baze TVG$. (*Arg. 5.*)
 Et baze $IOC : baze TVG =$ baze $ABC : baze EFG$ (*Arg. 4.*)
 9. Donc le prisme $LB +$ pr. $LC : pr. RF +$ pr. $RG =$ baze $ABC : baze EFG$. Prop. 11. L. 5.
 Si les pyramides restans $LKMD$ & $LINA$, item $RQSH$ & $EPTR$ sont divisées de la même manière que les pyramides $ABCD$ & $EFGH$, on prouvera de même que
 10. Les quatres prismes provenant des premieres pyramides $LKMD$ & $ANIL$ auront la même raison aux quatres prismes provenant des dernières $RQSH$ & $EPTR$, que les bazes LKM & ANI ont aux bazes RQS & EPT . (*par Hyp. III. & Arg. 9.*)
 Et dans la précédente il est démontré que les bazes LKM & ANI , sont chacun $= IOC$, item RQS & EPT chacun $= TVG$.
 De plus $\triangle ABC : \triangle EFG = \triangle IOC : \triangle TVG$, (*Arg. 4.*)
 11. C'est pourquoi la somme de tous les prismes contenus dans la pyramide ABC est à la somme de tous les prismes contenus dans la pyramide $EFGH$ comme la baze ABC est à la baze EFG . Prop. 12. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION V. THEOREME V.

Les pyramides (ABCD & EFGH) dont les bases (ABC & EFG) sont des triangles, & qui ont la même hauteur : font entr'eux comme leurs bases (ABC & EFG).

HYPOTHESE.

I. Les pyramides ABCD & EFGH ont pour bases les Δ ABC & EFG.

II. Ils ont même hauteur.

THESE.

Pyramide ABCD : pyramide EFGH = base ABC : base EFG.

DEMONSTRATION.

Si non.

Pyramide ABCD : pyramide EFGH $>$ base ABC : base EFG.

Préparation.

1. Prenez un solide X qui soit $<$ que la pyramide ABCD, de façon que X : pyramide EFGH = base ABC : base EFG.
2. Divisez les pyramides ABCD & EFGH, selon la Prop. 3. L. 12.

Puisque les deux prismes provenus de la première division sont $>$ que la moitié de la pyramide ABCD ; & que les quatre suivans provenus de la seconde division font encore $>$ que les moitiés des pyramides de la première division, & qu'on peut le continuer ainsi de suite (par la Prop. 3. L. 11.).

1. Il est évident que la somme de tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD fera plus grand que le solide X qui a été pris moindre que la pyramide ABCD.

{ Lemme. de
Or Prop. 2. L. 12.

Or tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD, sont à tous les prismes contenus dans la pyramide EFGH, comme la baze ABC est à la baze EFG.

Prop. 4. L. 12.

Et le solide X : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG. (Prép. 1.)

2. Partant tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD sont à tous les prismes contenus dans la pyramide EFGH, comme le solide X est à la pyramide EFGH.

Prop. 11. L. 5.

Or tous les prismes contenus dans la pyramide ABCD sont plus grand que le solide X. (Arg. 1.)

3. Donc tous les prismes contenus dans la pyramide EFGH sont plus grand que la pyramide EFGH même.

Prop. 14. L. 5.

4. Ce qui est impossible.

Ax. 8. L. 1.

5. Partant aucun solide (comme X) qui est moindre que la pyramide ABCD, ne peut avoir la même raison à la pyramide EFGH, qu'à la baze ABC à la baze EFG.

Et comme la même Demonstration a lieu pour tout autre solide plus grand que la pyramide ABCD.

6. Il s'enfuit que la pyramide ABCD : pyramide EFGH = baze ABC : baze EFG.

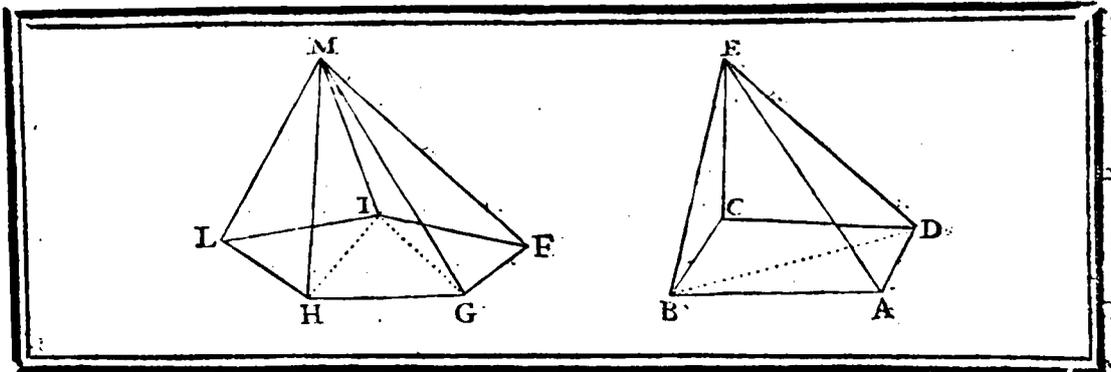
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

LEs pyramides qui ont même hauteur, & pour bazes des triangles égaux : sont égales (Prop. 14 & 16. L. 5.).

COROLLAIRE II.

LEs pyramides égales qui ont des bazes triangulaires égales : ont la même hauteur.



PROPOSITION VI. THEOREME VI.

Les pyramides (FGLIM & ABCDE) dont les bases (FGHLI & ABCD) sont des polygones & qui ont même hauteur: sont entr'eux comme leurs bases.

HYPOTHESE.
 I. Les pyramides FGLIM & ABCD, ont pour bases des polygones.
 II. Ils ont même hauteur.

THESE.
 Pyramide MFGHLI : pyramide ABCDE = base FILHG : base ABCD.

Préparation.

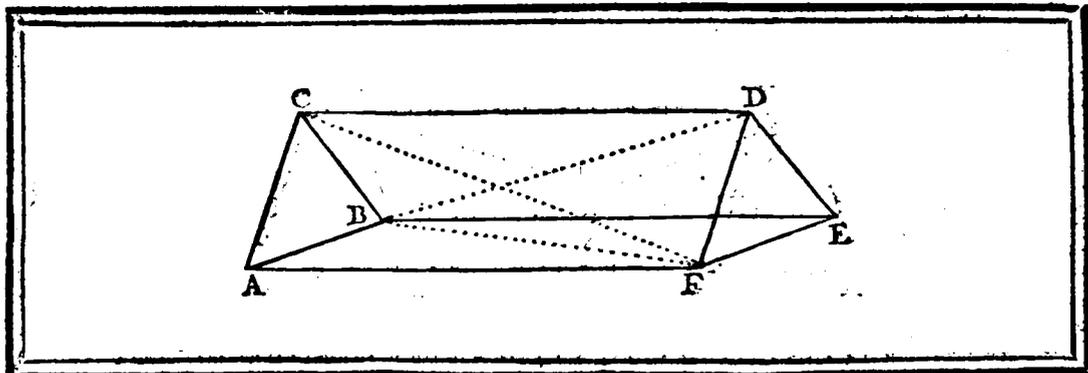
1. Divisez les bases FILHG & ABCD en triangles par les lignes GI & IH, item DB.
2. Supposé qu'il passe des Plans par ces lignes, & par les sommets des pyramides ou ces lignes de division se trouvent, qui diviseront chacune de ces pyramides en autant de pyramides partielles que chaque base contient de triangles.

DEMONSTRATION.

Puisque les pyramides triangulaires ILHM & ABDE ont même hauteur, (Hyp. II. & Prép. 2.).

1. La pyramide IHLM : pyramide ABDE = base HIL : base ABD. } Prop. 5. L. 12.
2. De même pyr. GIHM : pyramide ABDE = base HIG : base ABD. }
3. Partant pyramide IHLM + pyramide GIHM : pyramide ABDE = base HIL + base HIG : base ABD. Prop. 24. L. 5.
4. De plus pyramide FIGM : pyramide ABDE = base FIG : base ABD. Prop. 5. L. 12.
5. Donc pyramide IHLM + pyram. GIHM + pyram. FIGM : pyram. ABDE = base HIL + base HIG + base FIG : base ABD. Prop. 24. L. 5.
- Mais pyramide IHLM + pyramide GIHM + pyramide FIGM sont = à la pyramide MFGHLI, & base HIL + base HIG + base FIG = base FILHG. } Ax. 1. L. 2.
6. Partant pyramide MFGHLI : pyramide ABDE = base FILHG : base ABD. Prop. 7. L. 5.
- On prouvera de même que
7. Pyramide MFGHLI : pyramide BDCE = base FILHG : base BDC.
8. Donc pyramide MFGHLI : pyramide ABCDE = base FILHG : base ADCB. Prop. 24. L.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. THEOREME VII

Tout prisme triangulaire (ADE) : peut être divisé (par des Plans passant par les Δ BCF & BDF) en trois pyramides égales (ACBF, BDEF & DCBF) ayant des Bases triangulaires.

HYPOTHESE:
Le prisme donné AE est triangulaire.

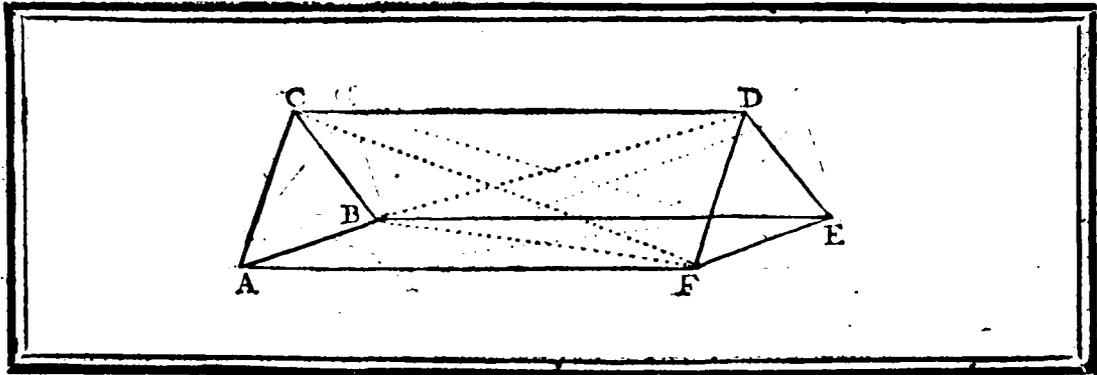
THESE.
Le prisme ADE peut être divisé en trois pyramides triangulaires égales ACBF, BDEF & DCBF.

Préparation.

1. Tirez dans le Pgr DA une diagonale CF à volonté.
 2. Du point F & dans le Pgr. AE tirez la diagonale BF.
 3. Du point B & dans le Pgr. CE tirez la diagonale BD.
 4. Par CF & BF faites passer un Plan, item par BF & BD.
- } Dem. 1. L. 1.

DÉMONSTRATION.

- P**uisque AD est un Pgr coupé par la diagonale CF. (Prép. 1.).
1. Le Δ ACF base de la pyramide ABCF est = au Δ CFD base de la pyramide BCFD. Prop. 34. L. 1.
 - Or ces pyramides ABCF & BCFD, ont leurs sommets au point B.
 2. Donc la pyramide ABCF est = à la pyramide BCFD. { Prop. 5. L. 12.
Corol. 1.
 - De même le Pgr EC est coupé par sa diagonale BD. (Prép. 3.).
 3. Donc le Δ CBD base de la pyramide BCFD est = au Δ BDE, base de la pyramide DEF.
 - Et ces pyramide BCFB, ont leurs sommets au point F. Prop. 34. L. 1.
 4. Partant la pyramide BCFD est = à la pyramide BDEF. { Prop. 5. L. 12.
Corol. 1.
 - Or la pyramide ABCF est aussi = à la pyramide BCFD (Arg. 2).
 5. Donc les pyramides ABCF, BCFD & BDEF sont égaux. Ax. 1. L. 1.



6. Partant le prisme triangulaire (ADE) peut être divisé en trois pyramides triangulaires égaux.

C. Q. F. D.

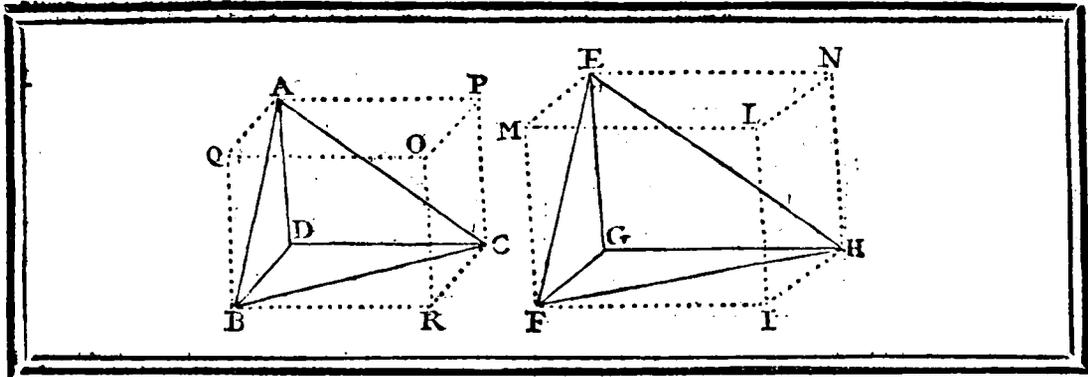
COROLLAIRE I.

LE prisme triangulaire est le triple d'une pyramide qui a la même baze & la même hauteur.

COROLLAIRE II.

LA pyramide dont la baze est un polygone est le tiers d'un prisme qui a la même baze & la même hauteur. (Puisqu'elle peut être divisée en autant de pyramides partielles que le polygone contient de triangles.)





PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.

Les pyramides semblables (ABCD & EFGH) ayant des bases triangulaires (BDC & FGH): sont entr'elles en raison triplée de leurs cotés homologues:

HYPOTHESE.

Les pyramides \propto ABCD & EFGH, ont des bases triangulaires BDC & FGH, dont les cotés homologues sont BD & FG, &c.

THESE.

La pyramide ABCD est à la pyramide EFGH, en raison triplée de BD à FG, c. a. d. comme $DB^3 : FG^3$.

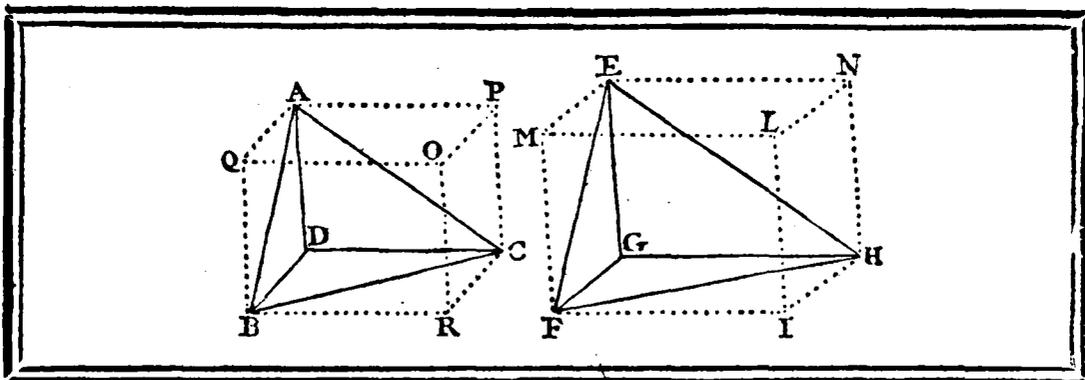
Préparation.

1. Prolongez les Plans des Δ BDC, ABD & ADC; & achèvez les Pgr. DR, DQ & DP. Prop. 31. L. 1.
2. Tirez PO & OQ Plle à AQ & AP, & prolongez les jusqu'en O. Prop. 31. L. 1.
3. Joignez les points O & R; & QC fera un \square qui aura la même hauteur que la pyramide ABCD.
4. Construisez de la même manière le \square MH.
5. Enfin joignez les points Q & P, item M & N, homologues aux points B & C; item E & H.

DEMONSTRATION.

- Puisque les pyramides ABCD & EFGH sont \propto . (Hyp.)
1. Tous les Plans triangulaire qui forment la pyramide ABCD sont \propto à tous les Plans triangulaire qui forment la pyramide EFGH, chacun à chacun. Def. 9. L. 11.
 2. Partant AD : BD = EG : GF, &c. Def. 1. L. 6.
 3. Et \forall plan ADB est = à \forall plan EGF. Prop. 5. L. 6.
 4. Donc le Pgr. DQ est \propto ad Pgr. MG. Def. 1. L. 6.
 5. De la même manière les Pgr. DR, & GI item DP, & GN sont \propto ; de même que leurs opposés AO, EL & QR, MI. Prop. 24. L. 11.

6. Par-

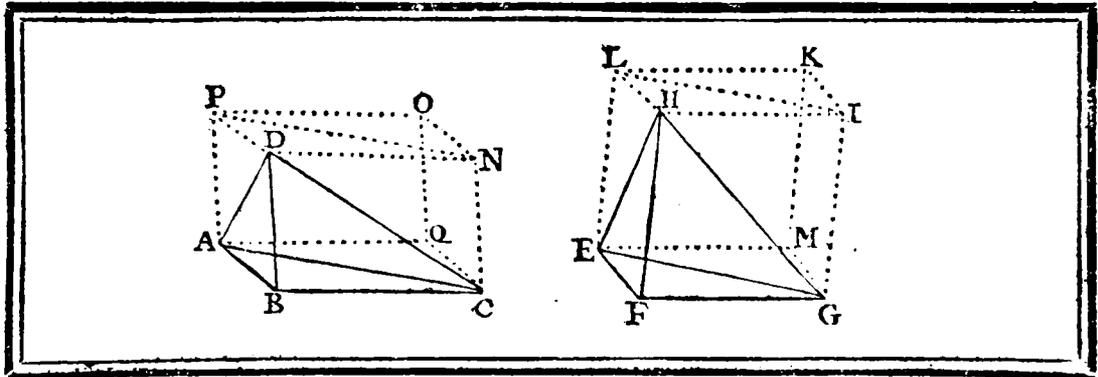


6. Partant AR & EI sont des \square ω . Def. 9. L. 11.
 7. Donc \square AR : \square EI = \overline{DB}^3 : \overline{FG}^3 . Prop. 33. L. 11.
 Et puisque les lignes QP & BC, item MN & FH sont des diagonales
 semblablement tirés dans les Pgr. égaux & Plle OA & RD; item EL
 & IG, (*Prép. 5.*)
 8. Les parties BQAPCD & FMENHG feront des prismes ω : & cha- { Def. 9. L. 11.
 cun égal à la moitié de son \square . { Prop. 28. L. 11.
 9. Partant le prisme BQPC : prisme FNMH = \overline{BD}^3 : \overline{FG}^3 . { Prop. 15. L. 5.
{ Prop. 34. L. 11.
{ Rem. 1.
 Or la pyramide ABCD est le tiers du prisme BQPC, & la pyramide { Prop. 7. L. 12.
 EFGH, le tiers du prisme FMNH. { Cor. 1.
 10. Donc la pyramide ABCD : pyramide EFGH = \overline{BD}^3 : \overline{FG}^3 . Prop. 15. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE

LEs pyramides semblables dont les bases sont des polygones sont entr'elles en raison triplée de leurs cotés homologues, (parce qu'elles peuvent être divisées en des pyramides partielles, triangulaires, & semblables deux à deux).



PROPOSITION IX. THEOREME IX.

Dans les pyramides triangulaires égales (ABCD & EFGH): les bazes (ABC & EFG) & les hauteurs (BD & FH) sont reciproquement proportionnelles, (c. a. d. baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD,). Et les pyramides triangulaires (ABCD & EFGH) dont les bazes (ABC & EFG) & les hauteurs (BD & FH) sont reciproquement proportionnelles: sont égales.

HYPOTHESE.

- I. Les pyramides ABCD & EFGH sont triangulaires.
- II. La pyramide ABCD est = à la pyramide EFGH.

THESE.

Baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD.

Préparation.

Achevez les \square : BO & FK ayant même hauteur avec les pyramides ABCD & EFGH; de même que dans la préparation de la précédente, comme aussi les prismes BAPNC & FELIG.

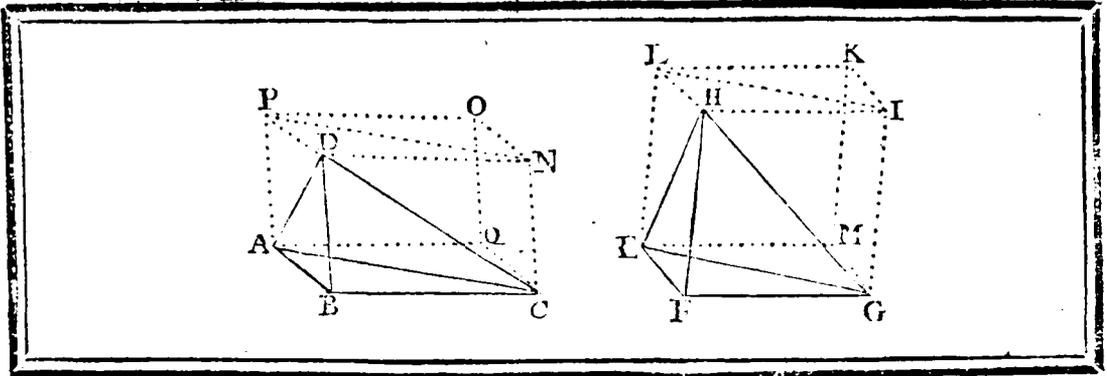
I. DEMONSTRATION.

Puisque les prismes PNB & LIF, ont la même baze & la même hauteur que les pyramides données ABCD & EFGH. (Prép.).

1. Chaque prisme sera le triple de sa pyramide (c. a. d. le prisme PNB le triple de la pyramide ABCD, & le prisme LIF le triple de la pyramide EFGH). { Prop. 7. L. 12.
Cor. 1.
2. Partant le prisme PNB est = au prisme LIF. Ax. 6. L. 1.
Or le \square BO est le double du prisme PNB, & le \square FK le double prisme LIF. Prop. 28. L. 11.
3. Donc le \square BO est = au \square FK. Ax. 6. L. 1.
Mais les \square : égaux (BO & FK) ont leurs bazes & leurs hauteurs reciproquement proportionnelles (c. a. d. baze BQ : baze FM = hauteur FH : hauteur BD.) Prop. 34. L. 11.
Et ces \square : sont chacun le sextuple de leurs pyramides (c. a. d. que le \square BO est = six pyramides ABCD, & le \square K = six pyramides EFGH. Arg. 1 & 3.).

Aaa

De



De plus la baze de la pyramide ABCD est la moitié de la baze du \equiv BO. } Prop. 41. L. 1.
 Et la baze de la pyramide EFGH est la moitié de la baze du \equiv FK. }
 4. Partant baze ABC : baze EFG = hauteur FH : hauteur BD. } Prop. 15. L. 5.
 } Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.

- I. Les pyramides ABCD & EFGH sont triangulaires.
- II. Baze Δ EC : baze Δ EFG = hauteur FH : hauteur BD.

T H E S E .

La pyramide triangulaire ABCD est \equiv à la pyramide triangulaire EFGH.

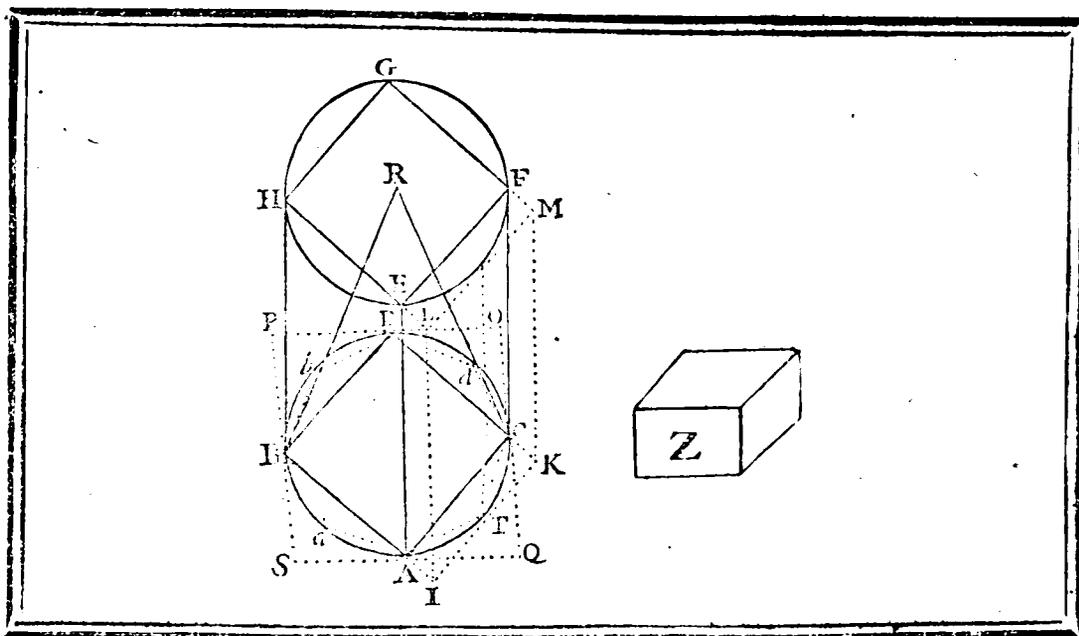
II. DEMONSTRATION.

- Puisque le Δ ABC : Δ EFG = FH : BD. (Hyp. 2.).
 Et que Pgr. BQ est le double du Δ ABC, item le Pgr. FM le double du Δ EFG.
- 1. Il s'enfuit que Pgr. BQ : Pgr. FM = FH : BD. Prop 41. L. 1.
Prop. 15. L. 5.
 - Or le \equiv BO a pour baze le Pgr. BQ, & pour hauteur BD } (Prép.)
 Et le \equiv FK a pour baze le Pgr. FM, & pour hauteur FH }
 - 2. Partant le \equiv BO est \equiv au \equiv FK. Prop. 34. L. 11.
 - Mais les \equiv BO & FK sont chacun le double des prismes PNB, & LIF. Prop. 28. L. 11.
 - Et ces prismes PNB & LIF sont chacun le triple de leurs pyramides ABCD, & EFGH. Prop. 7. L. 12.
Corol. 1.
 - 3. Donc la pyramide triangulaire ABCD est \equiv à la pyramide triangulaire EFGH. Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.

C O R O L L A I R E .

Les pyramides-polygones égales : ont leurs bazes & hauteurs reciproquement proportionelles. Et les pyramides-polygones, dont les bazes & les hauteurs sont reciproquement proportionelles : sont égales.



PROPOSITION X. THEOREME X.

LE Cone (BRC) est le tiers du Cylindre (HGFEABDC) qui a la même base (BDCA) & la même hauteur (BH).

HYPOTHESE.

Le cone BRC & le cylindre HGFEABDC, ont la même base BDCA, & la même hauteur BH.

THESE.

Le Cone BRC est égal au tiers du cylindre HFCABD.

DEMONSTRATION.

SI non.

Le Cone fera < ou > que le tiers du Cylindre d'une partie = Z.

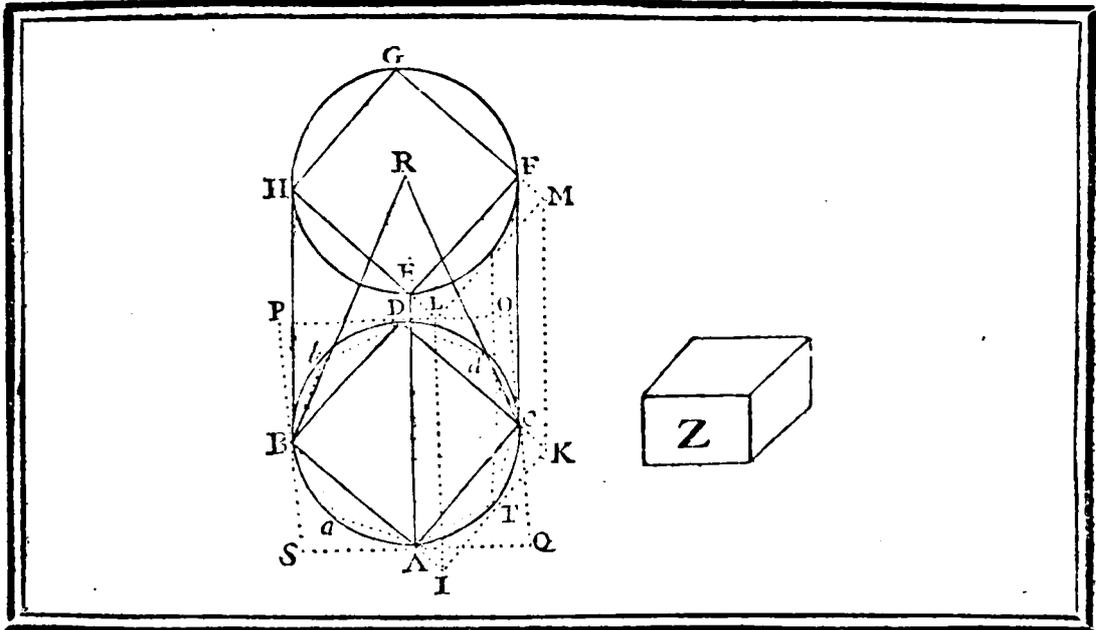
I. Supposition.

Soit un tiers du cylindre HC = cone BRC + Z.

I. Préparation.

1. Dans la base ABDC du cone & du cylindre, inscrivez le \square ABDC. Prop. 6. L. 4.
2. Autour de la même base faites le \square PQQS. Prop. 7. L. 4.
3. Elevez sur ces quarrés deux \square (dont le premier est le \square FHBC qui est construit sur le \square inscrit, & le second, construit sur le \square circonscrit, touchera la base supérieure avec ces Plans Piles, dans les points H, G, F, & E,) * ayant la même hauteur que le cylindre & le cone, 4. Divi-

* Nous supprimons une partie de la Préparation dans la Figure pour éviter la confusion.



4. Divisez les arcs ATC, CdD, DbB & BaA , en deux, dans les points T, d, b , & a . Prop 30. L. 3.
5. Tirez AT , & TC &c. Dem. 1. L. 1.
6. Par le point T , tirez la tangente ITK . (par la Prop. 17. L. 3.) qui coupera BA & DC prolongées, dans les points I & K , & qui achevera le Pgr. AK .
7. Sur le Pgr. AK , faites le $\square ALFK$, & sur les $\triangle AIT, TAC$ & TCK les prismes ETI, ETF & TFK , ayant tous la même hauteur que le cylindre & le cone.
8. Faites de même pour les autres segments AaB, BbD &c.

Puisque le carré $POQS$ est circonscrit au \odot , & que le carré $BDCA$ y est inscrit (*Prép. 1 & 2.*).

1. Le $\square POQS$ est le double du $\square BDCA$. *
Mais les \square construits sur ces carrés, ont la même hauteur (*Prép. 3.*).
2. Donc le \square sur $POQS$ est le double du \square sur $BDCA$.
Or le \square sur $POQS$ est \succ que le cylindre donné. Prop. 32. L. 12.
Ax. 8. L. 1.
3. Donc le \square sur $BDCA$ est \succ que la moitié du même cylindre. Prop. 19. L. 5.
Et comme le $\triangle TAC$ est la moitié du Pgr. AK . Prop. 41. L. 1.
4. Le prisme ETF , construit sur ce $\triangle TAC$, sera la moitié du \square sur le Pgr. AK . Prop. 28. L. 11.
Le \square construit sur le Pgr. AK est \succ que l'élément du cylindre qui a pour baze le segment ATC . Prop. 34. L. 11.
Rem. 1. Cor. 3.
Ax. 8. L. 1.
5. Partant le prisme ETF construit sur le $\triangle TAC$ est \succ que la moitié de l'élément du cylindre qui a pour baze le segment ATC . Prop. 19. L. 5.

* Voyez la Note sous la Demonstration de la seconde Prop. L. 12. 6. De

6. De même tous les autres prismes construits de la même manière, seront \succ que la moitié des parties ou élemens de cylindre qui leurs correspondent. On peut donc retrancher de tout le cylindre, plus que la moitié (savoit le \square sur le \square BDCA,) & de ces élemens restans (savoit CFEAT. &c.) encore plus que la moitié; (qui sont les prismes ETF &c.) & ainsi de suite.
7. Jusq'à ce qu'il reste enfin plusieurs élemens du cylindre qui seront { Lem. de ensemble plus petit que Z. Prop. 2. L. 12.
Mais le cylindre est égal à trois fois le cone BRC + Z. (Sup.). Si donc on retranche du cylindre entier ces élemens trouvés (Arg. 7.); & de trois fois le cone BRC + Z, la grandeur Z.
8. Le prisme restant (savoit celui qui a pour baze le polygone AaBbDdCT) fera \succ que le triple du cone. Ax. 4. L. 1.
Cependant ce prisme est le triple de la pyramide qui a la même baze { Prop. 7. L. 12. & la même hauteur (& qui est la pyramide TA a Bb Dd CTR). { Corol. 2.
9. Partant la pyramide ABDCR est \succ que le cone donné. Ax. 7. L. 1.
Or la baze du cone est le \odot dans lequel ce polygone ABDC est inscrit, (& qui par consequent est \succ que ce polygone) & ce cone à la même hauteur que la pyramide.
10. Donc la partie est \succ que son tout.
11. Ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
12. Partant le cone donné n'est pas \prec que le tiers du cylindre.

II. Supposition.

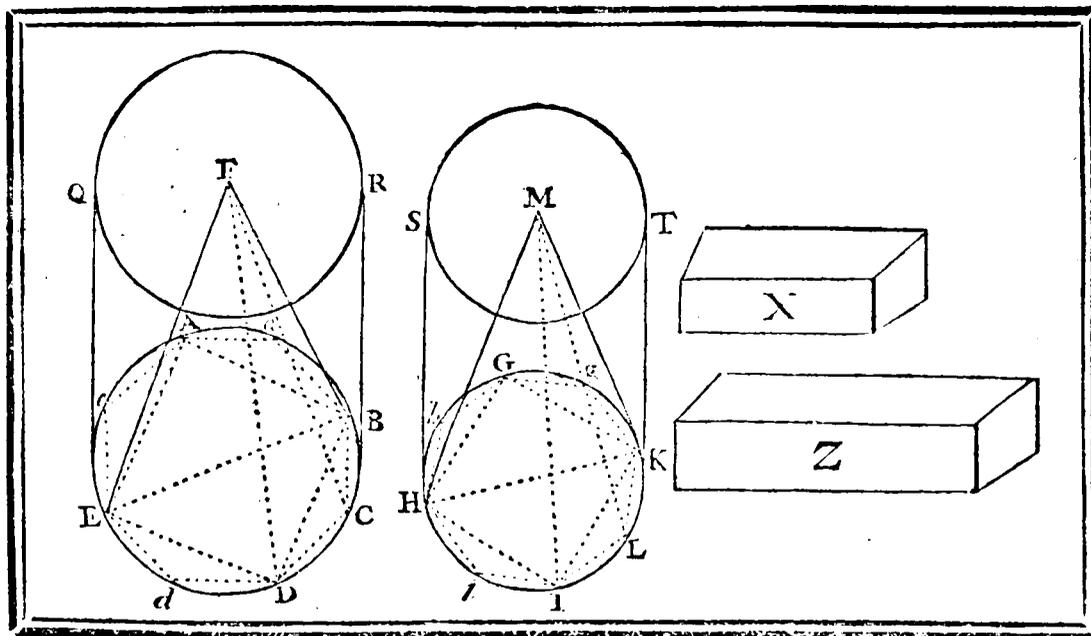
SOit le cone donné \succ que le tiers du cylindre de la grandeur Z.
c. a. d. que le cone est = au tiers du cylindre + Z.

II. Préparation.

Divisez le cone donné en pyramides partielles, comme on a divisé le cylindre en prismes dans la première Supposition.

- SI l'on retranche du cone donné la pyramide qui a pour baze le \square ABDC, (qui est plus grand que la moitié de toute la baze du cone donné puisqu'il est la moitié du quarré circonscrit par l'Arg. 1. & que ce dernier \square est \succ que la baze du cone par l'Ax. 8. L. 1.) & des segmens restans, les pyramides correspondans à ces segmens, (ainsi qu'on l'a fait pour le cylindre dans l'Arg. 7.).
13. Il restera plusieurs élemens de cone dont la somme fera \prec Z. { Lemme de Prop. 2. L. 12.
Si donc on retranche du cone ces élemens qui sont \prec Z, & du cylindre + Z, la grandeur Z.
14. Le reste savoir la pyramide AaBbDdCTR sera égal au tiers du cylindre. Ax. 5. L. 1.
Mais la pyramide AaBbDdCTR est égal au tiers du prisme qui a { Prop. 7. L. 12. pour baze le même polygone AaBbDdCT, & la même hauteur. { Cor. 2.
15. Donc le cylindre donné, est égal & ce prisme. Ax. 6. L. 1.
Or la baze du cylindre donné est \succ que la baze du prisme puisque cette seconde est inscrite dans la première (I. Prép. 4 & 5.).
16. Donc la partie égal au tout.
17. Ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
18. Donc le tiers du cylindre n'est pas \prec que le cone.
Et on a démontré (Arg. 12.) que le tiers du cylindre n'est pas \succ que le cone.
19. Partant le cone est le tiers du cylindre qui a la même baze & la même hauteur.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. THEOREME XI.

Les cones (EABDF & HGKIM) & les cylindres (QRBE & STKH) qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

HYPOTHESE.

Les cones EABDF & HGKIM, de même que les cylindres QRBE & STKH ont la même hauteur.

THESE.

- I. Cone EFB : cone HMK = base EABD : base HGKI.
- II. Cylindre QRBE : cylindre STKH = base EABD : base HGKI.

Si non.

DEMONSTRATION.

Le cone EFB : Z (qui est < ou > que le cone HMK) = base EABD : base HGKI.

I. Supposition.

Soit Z < que le cone HMK d'une grandeur = X, c. a. d. que le cone HMK est = Z + X.

I. Préparation.

1. Dans le \odot GHIK qui est la base du cone HMK; inscrivez le \square GHIK.
2. Divisez le cone en pyramides partielles, (comme dans la Prép. de la II. Supposition de la précédente.).
3. Tirez dans les bases des deux cones EFB & HMK, les diamètres EB & HK.
4. Dans le \odot EABD base du cone EFB, inscrivez un polygone ∞ au polygone Hb Gg KLIH, & divisez le comme le cone HMK.

Prop. 6. L. 4.

Puis qu'on a divisé le cone HMK en pyramide partielles (Prép. 2.).

Si on retranchoit de ce cone ces pyramides partielles (ainsi qu'on a fait dans Arg. 13. de la précédente).

1. On parviendroit à avoir des élémens dont la somme seroit < X.

{ Lem. de Prop. 2. L. 12.

Si donc on retranche ces élémens du cone HMK, & des grandeurs Z + X, la grandeur X.

2. L. a

2. La pyramide restante $Hb Gg KLIi M$ fera $\sphericalangle Z$.
 Or les polygones inscrits dans les \odot , $EABD$ & $HGKI$ font ∞ (Prép. 4.)
3. Donc $\odot AEDB : \odot GHK =$ polygone $Cdea : polygone ibgL$. { Prop. 2. L. 12.
 Corol.
 Mais $\odot AEDB : \odot GHK =$ cone $EFB : Z$. (Sup.).
 Et pyramide $Dd Ee Aa BCF : pyramide Hb Gg KLIi M =$ polygone
 $Cdea : polygone ibgL$. Prop. 6. L. 11.
4. Partant pyramide $Dd Ee Aa BCF : pyramide Hb Gg KLIi M =$ cone
 $EFB : Z$. Prop. 11. L. 5.
 Or la pyramide $Dd Ee Aa BCF$ est \sphericalangle cone EFB . Ax. 8 L. 1.
 5. Donc la pyramide $Hb Gg KLIi M$ est $\sphericalangle Z$. Prop. 14. L. 5.
 6. Mais ce pyramide est \sphericalangle que Z . (Arg. 2.).
 7. Donc elle seroit \sphericalangle & \sphericalleftarrow que Z . (Arg. 2 & 6.).
 8. Ce qui est impossible.
 9. Donc la Supposition que Z est \sphericalleftarrow que le cone HMK est fausse.
 10. Partant il est impossible que la baze du cone EFB est à la baze du cone
 EFB (les cones ayant même hauteur,) comme le cone EFB à une
 grandeur $Z \sphericalleftarrow$ que le cone HMK .

II. Supposition.

SI Z est \sphericalrightarrow que le cone HMK .

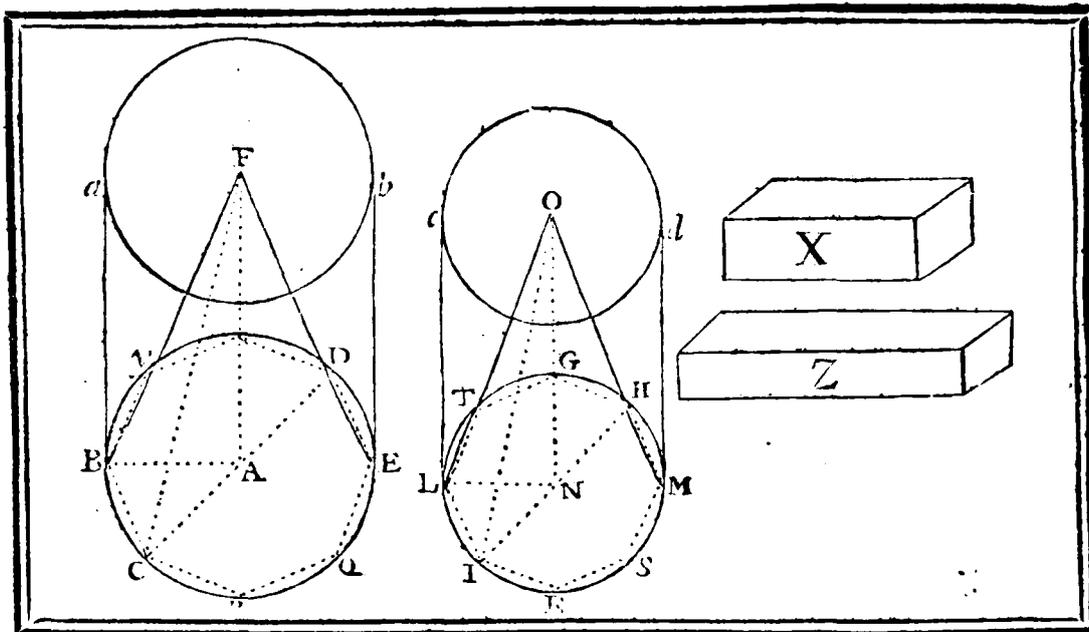
II. Préparation.

PREnez une grandeur X de façon que $Z : cone EFB = cone$
 $HMK : X$.

11. Puis donc que Z est \sphericalrightarrow que le cone HMK . (I. Sup.). Prop. 14. L. 5.
 Le cone EFB est $\sphericalrightarrow X$.
 Or cone $EFB : Z =$ baze $EABD : baze HGKI$. (Sup.).
12. Donc baze $HGKI : baze EABD = Z : cone EFB$. { Prop. 4. L. 5.
 Corol.
 Mais $Z : cone EFB = cone HMK : X$. (II. Prép.).
13. Partant baze $HGKI : baze EABD = cone HMK : X$. Prop. 13. L. 5.
 Or il est démontré (Arg. 10.) qu'il est impossible que la baze d'un cone
 soit à la baze d'un autre cone, ayant même hauteur comme le premier
 cone est à une grandeur \sphericalleftarrow que le second.
14. Donc X n'est pas \sphericalleftarrow que le cone EFB
 Mais X est \sphericalleftarrow que le cone EFB (Arg. 10.).
15. Partant X seroit \sphericalleftarrow que ce cone & ne le seroit pas. (Arg. 11. & 14).
 16. Ce qui est impossible.
 17. D'où il suit que la supposition que Z est \sphericalrightarrow que le cone HMK est fausse.
 La grandeur Z ne pouvant donc être ni \sphericalleftarrow ni \sphericalrightarrow que le cone HMK ,
 (Arg. 9 & 17.).
18. Il fera égal au cone HMK .
 19. Donc le cone $EFB : cone HMK = baze EABD : baze HGKI$. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

- PUisque le cone EFB est le tiers du cylindre $QRBE$. Prop. 10. L. 12.
 Et que le cone HMK est le tiers du cylindre $HSTK$.
 20. Le cyl. $QRBE : cyl. HSTK = baze EABD : baze HGKI$. Prop. 15. L. 5.
 C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XII. THEOREME XII.

Les cones (BFE & LOM) de même que les cylindres (Babe & LcdM) semblables: sont entr'eux en raison triplée des diamètres (CD & IH) de leurs bases (ByDEP & LTHMR).

HYPOTHESE.

Les cones BFE & LOM, de même que les cylindres Babe & LcdM, sont ∞.

THESE.

- I. Le cone BFE est au cone LOM en raison triplée de CD à IH; ou comme $CD^3 : IH^3$
- II. Le cylindre Babe est au cylindre LcdM, en raison triplée de CD à IH; ou comme $CD^3 : IH^3$. *

DEMONSTRATION.

Si non,

Le cone BFE est à une grandeur Z (qui est < ou > que le cone LOM) comme $CD^3 : IH^3$.

I. Supposition.

Soit Z < que le cone LOM de la grandeur X, c. a. d. le cone LOM = Z + X.

I. Prép.

* Voyez Appendice, Prop. VII.

I. Préparation.

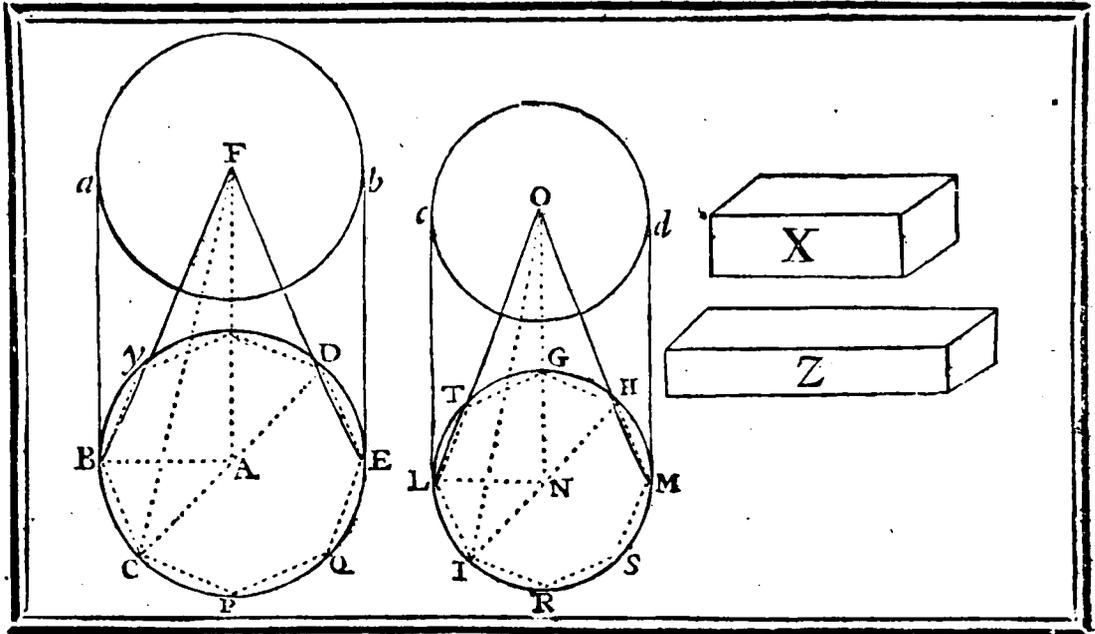
1. Divisez le cone LOM en pyramides partielles, ainsi que dans la Prop. precedente.
2. Inscrivez dans la baze du cone BFE un pol. ∞ au pol. de la baze du cone LOM.
3. Dans les deux cones tirez les diamètres homologues IH & CD, item les rayons LN & BA.

Puisqu'on a divisé le cone LOM en pyramides partielles.

Si on retranchoit de ce cone ces pyramides partielles (ainsi que dans l'Arg. 1. de la precedente).

1. On parviendroit a des élémens dont la somme feroit $<$ que X. { Lemme de Prop. 2. L. 12.
Si donc on retranche du cone LOM, ses élémens, & de la grandeur $Z + X$, la partie X.
2. Le reste feroit la pyramide LTGHMSRIO fera $>$ Z. Ax. 4. L. 1.
Mais les cones ∞ ont leurs axes & les diamètres de leurs bazes proportionels. Def. 24. L. 11.
Et les cones BFE & LOM sont ∞ . (Hyp.).
3. Partant $CD : HI = FA : ON$. Prop. 15. L. 5.
Or $CD : HI = CA : IN$. Prop. 11. L. 5.
4. Donc $CA : IN = FA : ON$. Prop. 16. L. 5.
5. Et Alt: $CA : FA = IN : ON$.
Les Δ FAC & ION, ont \sphericalangle CAF = \sphericalangle ION. (Prép. 3.) & les cotés CA, AF, item IN & ON, à l'entour de ces angles égaux proportionels. (Arg. 5.).
6. Partant le Δ FAC est ∞ Δ ION. Def. 1. L. 6.
7. Et par consequent $CF : CA = IO : IN$. Prop. 4. L. 6.
8. De même le Δ BCA est ∞ au Δ LIN (car \sphericalangle BAC est = \sphericalangle LNI. (Prép. 3.)
9. Donc $CA : BC = IN : IL$. Prop. 4. L. 6.
Or $CF : CA = IO : IN$. (Arg. 7.)
10. Partant $CF : BC = IO : IL$. Prop. 22. L. 5.
Dans les Δ CAF & BAF, le coté CA est = à BA (Def. 15. L. 1.) AF est commun & \sphericalangle CAF = \sphericalangle BAF. (Prép. 3.)
11. Donc la baze BF est = à baze CF. Prop. 4. L. 1.
12. De la même manière LO est = à OI.
Or $CF : BC = OI : IL$. (Arg. 10.)
13. Donc $BF : BC = LO : IL$. Prop. 7. L. 5.
14. Et invert. $BC : BF = IL : OL$. { Prop. 4. L. 5. Cor.
15. Partant les trois cotés du Δ BFC sont proportionels aux trois cotés du Δ LOI.
16. D'où il suit que ces Δ BFC & IOI sont ∞ . Prop. 5. L. 6.
17. De la même manière on démontrera que tous les triangles qui forment la pyramide BDQF sont ∞ à tous les triangles qui forment la pyramide LHSO, chacun à chacun.

Et



- Et comme les bases de ces pyramides sont des polygones ∞ . (Prép. 2.).
18. La pyramide BDQF est ∞ à la pyramide LHSO. Def. 9. L. 11.
 Mais ces pyramides étant ∞ .
19. La pyramide BDQF : pyramide LHSO = \overline{CB}^3 : \overline{IL}^3 . { Prop. 8. L. 12.
Corol.
 Or CA : BC = IN : IL. (Arg. 9.).
20. Donc invert. BC : CA = IL : IN. { Prop. 4. L. 5.
Corol.
21. Et alternant BC : LI = CA : IN. { Prop. 16. L. 5.
22. Partant BC : LI = CD : IH. { Prop. 15. L. 5.
Prop. 11. L. 5.
23. Donc trois fois la raison de BC à LI est égal à trois fois la raison de CD à IH. (c. a. d.) \overline{BC}^3 : $\overline{LI}^3 = \overline{CD}^3$: \overline{IH}^3 *
 Mais \overline{CB}^3 : $\overline{IL}^3 =$ pyramide BDQF : pyramide LHSO. (Arg. 19.)
24. Partant pyramide BDQF : pyramide LHSO = \overline{CD}^3 : \overline{IH}^3 . Prop. 11. L. 5.
 Or le cone BFE : Z = \overline{CD}^3 : \overline{IH}^3 . (Sup.).
25. Donc la pyr. BDQF : pyr. LHSO = cone BFE : Z. { Prop. 11. L. 5.
Ax. 8. L. 1.
 Mais la pyr. BDQF étant \angle cone BFE.
26. La pyr. LHSO fera aussi \angle Z. Prop. 14. L. 5.
 Or la pyr. LHS est \succ Z. (Arg. 2.).
27. Partant la pyr. LHSO seroit \angle & \succ Z. (Arg. 2 & 26.).
28. Ce qui est impossible.
29. Donc la supposition que Z est \angle que le cone LOM ou LTGHMSRIO, est fausse.
30. D'où

* Voyez Append. Prop. VII.

30. D'où il suit qu'il est impossible qu'un cone BFE est à une grandeur moindre que le cone LOM, en raison triplée du diamètre CD au diamètre IH.

II. Supposition.

Soit Z > que le cone LOM.

II. Préparation.

Prenez une grandeur X, de façon que Z : cone BFE = cone LOM : X.

Puisque Z est > que le cone LOM. (II. Supp.).

31. Le cone BFE fera > X.

Prop. 14. L. 5.

Mais $CD^3 : IH^3 = \text{cone BFE} : Z$ (par la Sup.).

32. Donc invert. $IH^3 : CD^3 = Z : \text{cone BFE}$.

{ Prop. 4. L. 5.
Corol.

Or Z : cone BFE = cone LOM : X. (II. Prép.).

33. Partant $IH^3 : CD^3 = \text{cone LOM} : X$.

Prop. 11. L. 5.

Et il est démontré (Arg. 30.) qu'il est impossible qu'un cone est à une grandeur moindre qu'un autre cone en raison triplée des diamètres de leur bases.

34. Donc X n'est pas < que le cone BFE.

Cependant X est < que le même cone (Arg. 31.),

35. D'où il suit que X seroit < que le cone & ne le seroit point en même tems.

36. Ce qui est impossible.

37. Donc la supposition que Z est > que le cone LOM, est fautive.

La grandeur Z n'étant donc ni < ni > que le cone LOM. (Arg. 29 & 37.).

38. Il lui fera égal.

39. Partant le cone BFE : cone LOM = $CD^3 : IH^3$.

Prop. 7. L. 5.
C. Q. F. D. I.

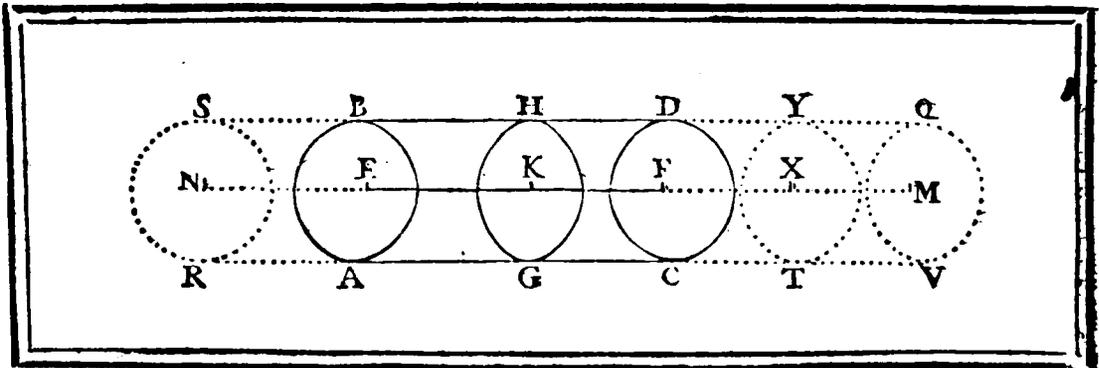
Le cylindre BabE, étant le triple de cone BFE. }
Et le cylindre LedM le triple du cone LOM. }

Prop. 10. L. 12.

40. Le cylindre BabE : cylindre LedM = $CD^3 : IH^3$.

Prop. 15. L. 5.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XIII. THEOREME XIII.

SI un cylindre (ABDC) est coupé par un Plan (HG) parallèle aux Plans opposés (BA & DC): les cylindres provenants (ABHG & GHDC) seront entr'eux comme leurs axes (EK & KF). (c. a. d. que le cylindre ABHG : cylindre GHDC = axe EK : axe KF.)

HYPOTHESE.

Le cylindre AD est coupé par un Plan HG
Pllé aux Plans opposés AB & DC.

THÈSE.

Cylindre AH : cylindre HC = axe
EK : axe KF.

Préparation.

1. Prolongez l'axe EF du cylindre ABDC de part & d'autre vers N & M. Dem. 2. L. 1.
2. Sur l'axe prolongé NM, prenez plusieurs parties égales à EK & FK; comme EN = EK, & FX &c. chacune = FK. Prop. 3. L. 1.
3. Par ces points N, X & M, faites passer des Plans SR, TY & VQ Pllé aux Plans opposés BA & DC.
4. Sur ces Plans Pllé décrivez des points N, X & M, des \odot SR, TY & VQ chacun égal aux \odot opposés BA & DC. Dem. 3. L. 2.
5. Achevez les cylindres SA, CY, & TQ.

DEMONSTRATION.

Puisque les axes FX, & XM des cylindres DT & TQ sont égaux à l'axe FK, du cylindre GD. (Prép. 2.).

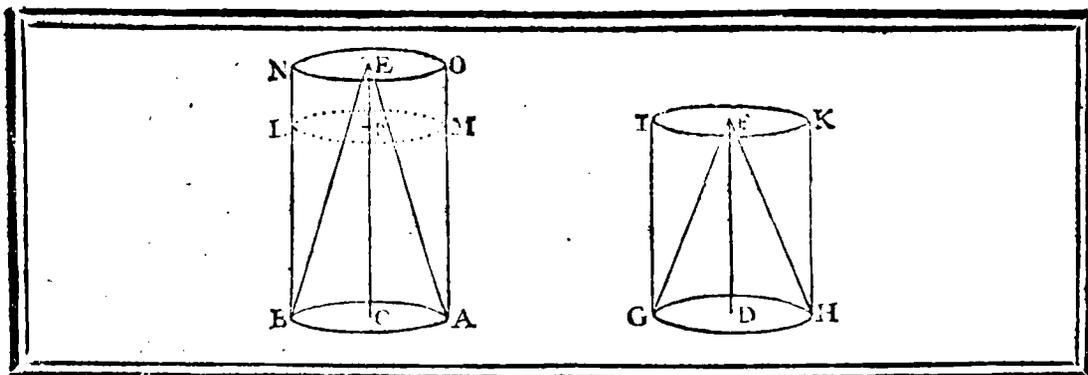
1. Ces cylindres DT, TQ & GD, seront entr'eux comme leurs bazes. Prop. 11. L. 12.
Mais ces bazes sont égaux. (Prép. 4.).
2. Donc ces cylindres TD, TQ & GD sont aussi égaux. Prop. 14. L. 3.
Or il y a autant de cylindres CY, TQ &c. qui sont égaux, (& qui forment ensemble la toute GQ) qu'il y a de parties FX, XM &c. égaux à l'axe KF (& ils forment ensemble la toute MK).

3. Par-

3. Partant le cylindre GQ ou $GHQV$ est autant multiple du cylindre $GHDC$, que l'axe, KM l'est de l'axe KF .
4. De la même manière, on démontrera que le cylindre $RSHG$ est autant multiple du cylindre $ABHG$, que l'axe NK , l'est de l'axe EK .
5. Donc selon que le cylindre $GHQV$ est $> =$ ou $<$ que le cylindre $GHDC$, l'axe KM fera $> =$ ou $<$ que l'axe KF .
Et selon que le cylindre $RSHG$ est $> =$ ou $<$ que le cylindre $ABHG$ l'axe NK fera $> =$ ou $<$ que l'axe EK .
6. Partant le cylindre $ABHG$: cylindre $GHDC =$ axe EK : axe KF . Def. 5. L. 3.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIV. THEOREME XIV.

LEs cylindres (NO AB & IKHG), & les cones (BEA & GFH) qui ont des bazes égales (BA & GH): font entr'eux comme leurs hauteurs (CE & DF).

HYPOTHESE.

Les cylindres NOAB & GIKH, item les cones BEA & GFH, ont des bazes égales.

THESE.

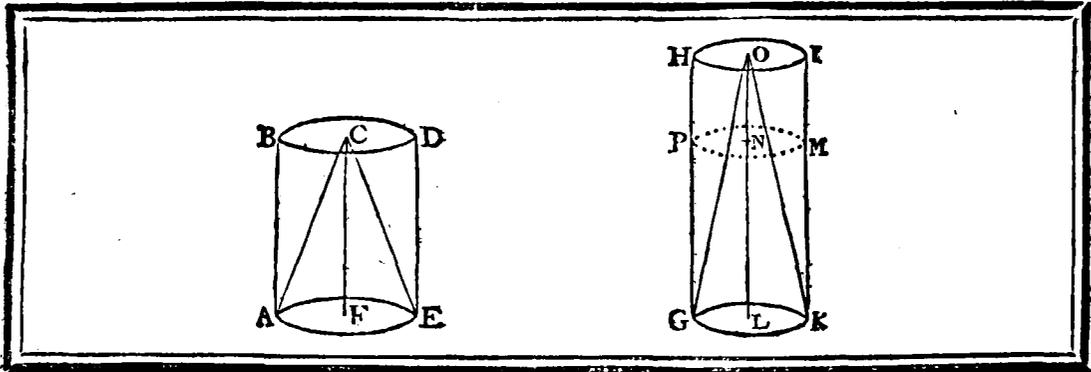
I. Cylindre NOAB : cylindre IKHG
= hauteur CE : hauteur DF.
II Cone BEA : cone GFH = hauteur CE : hauteur DF.

Préparation.

1. Sur l'axe du plus grand cylindre AONB, prenez la partie PC d'égale hauteur qu'est le cylindre GIKH.
2. Par le point P : faites passer un Plan LM, Plle à la baze BA, qui coupera le cylindre AONB en deux cylindres, qui sont BAML & LMON.

DEMONSTRATION.

- P**uisque le cylindre BNOA est coupé par un Plan Plle à sa baze (Prép. 2.)
1. Le cylindre NOML : cylindre LMAB = PE : PC. Prop. 13. L. 12.
 2. Partant le cylindre NOML + LMAB : cylindre LMAB = PE + PC : PC. Prop. 18. L. 5.
Mais le cylindre NOML + LMAB est = au cylindre BNOA, & PE + PC = EC. Ax. 1. L. 1.
De plus le cylindre LMAB est = au cylindre IGHK,* & PC = DF. (Prép. 1.).
 3. Donc le cylindre BNOA : cylindre IGHK = hauteur EC : hauteur DF. Prop. 7. L. 5.
C. Q. F. D. I.
- Le cone BEA est le tiers du cylindre BNOA. }
Et le cone GFH le tiers du cylindre IGHK. } Prop. 10. L. 12.
4. Partant le cone BEA : cone GFH = hauteur EC : hauteur DF. Prop. 15. L. 5.
C. Q. F. D. II.
- * Les cylindres LMAB & IGHK sont égaux, par l'Hyp. & Prép. 1. & 2.



PROPOSITION XV. THEOREME XV.

Les bazes (AE & GK) & les hauteurs (CF & OL) des cylindres (ABDE & GHK) & des cones (ACE & GOK) égaux : sont reciproquement proportionels (c. a. d. que le baze AE : baze GK = haut. LO : haut. CF.). Et les cylindres & cones dont les bazes & les hauteurs sont reciproquement proportionels : sont égaux.

HYPOTHESE.

- I. Les cylindres ABDE & GHK sont égaux.
- II. Les cones AEC & GOK sont égaux.

THESE.

Baze AE : baze GK = hauteur LO : hauteur CE.

Préparation.

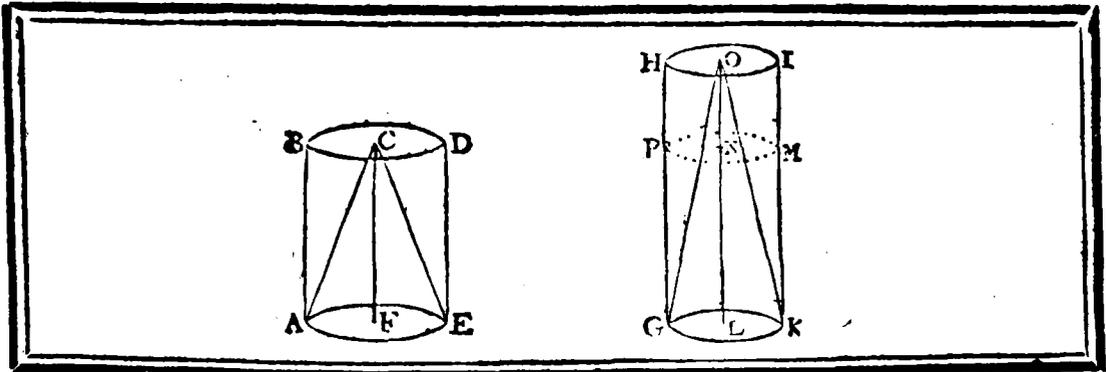
1. DU plus grand LO, coupez la hauteur LN = à la hauteur CF. Prop. 3. L. 1.
2. Par le point N, faites passer un Plan PM Plie aux Plan opposés du cylindre HIKG.

I. DEMONSTRATION.

- Puisque les cylindres GHK & PMKG ont la même baze.
1. Le cylindre GHK : cylindre PMKG = hauteur LO : hauteur LN. Prop. 14. L. 12. Mais les cylindres ABDE & GHK sont égaux. (Hyp. 1.).
 2. Partant le cylindre ABDE : cylindre PMKG = hauteur LO hauteur LN. Prop. 7. L. 5. De plus les cylindres ABDE & PMKG ont la même hauteur (Prép. 1.).
 3. Donc le cylindre ABDE : cylindre PMKG = baze AE : baze GK. Prop. 11. L. 12. Or le cylindre ABDE : cylindre PMKG = hauteur LO : hauteur LN. (Arg. 2.). Et la hauteur LN est = à la hauteur CF. (Prép. 1.)
 4. D'où il suit que la baze AE : baze GK = hauteur LO : hauteur CF. { Prop. 11. L. 5. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D.

Hypo-



HYPOTHESE.

Baze GK : baze AE = hauteur
CF : hauteur LO.

THESE.

- I. Le cylindre ABDE est = au cylindre GHIK.
- II. Le cone ACE est = au cone GOK.

II. DEMONSTRATION.

- P**uisque les cylindres GPMK & ABDE, ont la même hauteur (*Prép. 2.*)
1. Le cylindre GPMK : cylindre ABDE = baze GK : baze AE. Prop. 11. L. 12.
Or la baze GK : baze AE = hauteur CF : hauteur LO (*Hyp.*).
 2. Partant le cylindre GPMK : cylindre ABDE = hauteur CF : haut. LO. Prop. 11. L. 5.
De plus les cylindres GPMK & HIKG, ont la même baze.
 3. Donc le cylindre GPMK : cylindre HIKG = hauteur LN : haut. LO. Prop. 14. L. 12.
Mais la hauteur LN est = à la hauteur CF. (*Prép. 1.*)
 4. D'où il suit que le cylindre GPMK : cylindre GHIK = hauteur
CF : hauteur LO. Prop. 7. L. 5.
Cependant le cylindre GPMK : cylindre ABDE = hauteur CF : hauteur LO. (*Arg. 2.*).
 5. Donc le cylindre GPMK : cylindre ABDE = cylindre GPMK : cylindre GHIK. Prop. 11. L. 5.
 6. Et par conséquent le cylindre ABDE est = au cylindre GHIK. Prop. 14. L. 5.

C. Q. F. D. I.

Les cones ACE & GOK étant chacun le tiers des cylindres ABDE & GHIK.

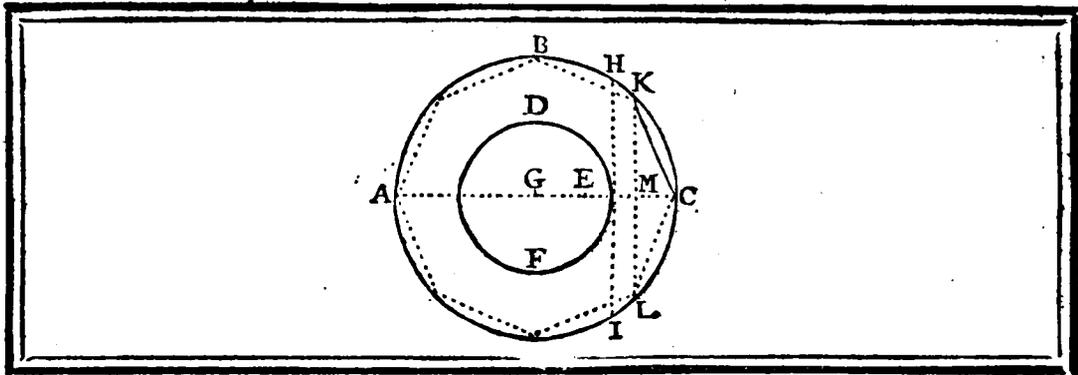
Prop. 10. L. 12.

Et ces cylindres étant égaux (*Arg. 6.*).

1. Le cone ACE est = au cone GOK.

Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVI. PROBLEME I.

Deux cercles inégaux (ABCI & DEF) étant donnés ayant un même centre (G): inscrire au plus grand (ABCI) un polygone regulier dont les cotés foyent un nombre pair, & ne touchent point le plus petit cercle (DEF).

DONNEES

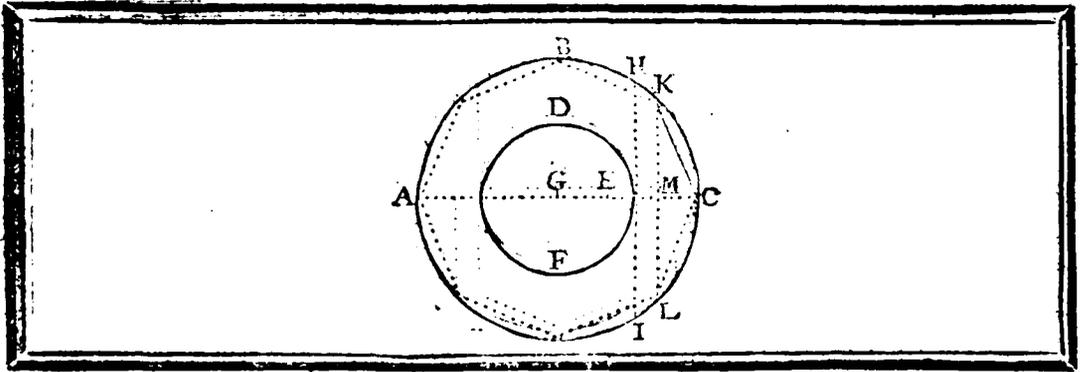
Deux \odot ABCI & DEF inégaux, ayant le même centre G.

C H E R C H E E.

Inscrire dans le plus grand \odot ABCI, un polygone regulier, d'un nombre pair de cotés, lesquels ne touchent point le plus petit \odot DEF.

Resolution.

1. Tirez le diamètre AC dans le plus grand \odot ABCI, qui coupera la \odot du \odot DEF au point E.
2. Par le point E, tirez la tangente HEI au \odot DEF, & prolongez la jusqu'à ce qu'elle rencontre la \odot concave du \odot ABCI aux points H & I. { Prop. 16. L. 3.
Dem. 2. L. 1.
Prop. 30. L. 3.
3. Coupez la demi \odot ABC en deux au point B.
4. Divisez encore le demi arc BC en deux également; & continuez cette division des moitez jusqu'à ce que l'arc KC soit plus petit que l'arc HC (par le Lem. de la seconde Proposition de ce Livre.).
5. Tirez la corde KC, & appliquez - le autant de fois qu'il est possible dans la \odot du \odot ABCI. { Prop. 1. L. 4.
Dem. 1. L. 1.



Préparation.

DU point K, abaissez la \perp KM sur le diamètre AC, & prolongez-là jusqu'à la rencontre de la \odot en L. { Prop. 11. L. 1.
Dem. 1 L. 1.

DEMONSTRATION.

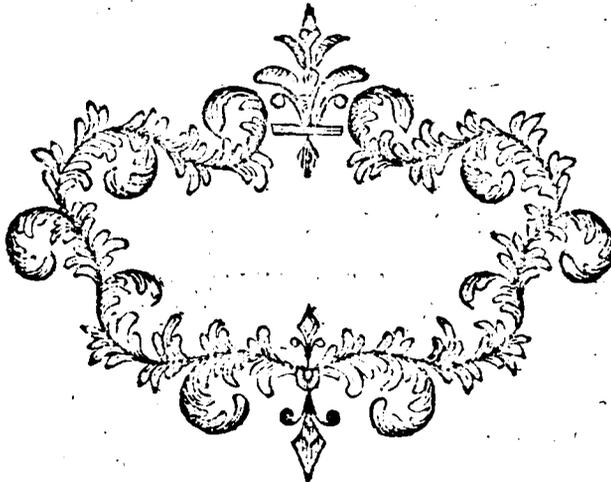
Puisque la demi \odot ABC, est divisé en deux au point B. (Ref. 3.).
Et qu'on a continué à prendre la moitié des moitiés jusqu'à l'arc KC.
(Ref. 4.).

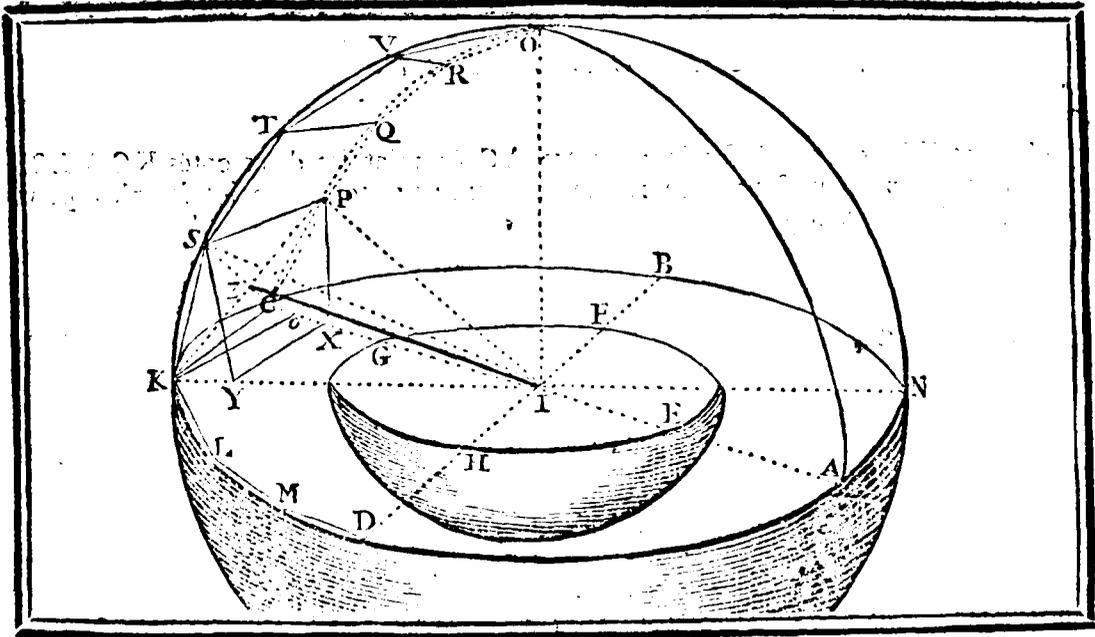
1. Il s'en suit que cet arc KC mesurera la \odot , un nombre pair de fois sans reste (puisqu'il mesure la demi \odot Ref. 3. & 4.).
2. Partant la ligne KC (corde de l'arc KC) fera le coté d'un polygone régulier inscrit au \odot , ayant le nombre de ses cotés pair.
De plus les deux \sphericalangle HEM & KME, étant deux \sphericalangle . (Ref. 2. & Frép.).
3. La ligne KM ou KL est \perp lle à HE ou HI. Prop. 28. L. 1.
Or la ligne HI est tangente du \odot DEF en E (Ref. 2.).
4. Partant KL ne touche point le \odot DEF. Def. 35. L. 1.
Mais KC est $<$ KL, (Prop. 15. L. 3.) puisque KC est plus éloigné du centre que KL (Prép.).
5. Donc a plus forte raison KC ne pourra toucher le \odot DEF. Prop. 15. L. 1.
Et comme les autres cotés du polygone inscrit dans le \odot ABCI sont chacun $=$ à KC. (Ref. 5.).
6. On démontrera de même qu'ils ne touchent point le \odot DEF.
7. Partant on a inscrit au \odot ABCI, un polygone, ayant le nombre de cotés pair, lesquels ne touchent point le \odot DEF.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

LA ligne KL , qui est \perp sur le diamètre AC & joint les deux cotés KC & LC , du polygone qui aboutissent à ce même diamètre: ne touche point le plus petit cercle DEF (*Arg. 4.*)





PROPOSITION XVII. PROBLEME II.

ETant donnés deux sphères (KON & GFEH), ayant un même centre (I): inscrire dans le plus grand (KON) un polyèdre (KCSPTQVRO &c.) dont les Plans ne touchent point la petite sphère (GFEH).

DONNEES.

Deux sphères concentriques KON
& GFEH.

CHERCHEES.

- I. Inscire dans la plus grande sphère KON un polyèdre KPTRVO &c.
- II. Les Plans de ce polyèdre inscrit ne doivent point toucher la petite sphère GFEH.

Resolution.

1. Coupez les deux sphères par un Plan KBND passant par leur centre commun.
2. Tirez dans le \odot ABCD, les diamètres AC & BD, se coupant en angle droit. Dem. 1. L. 1.
Prop. 12. L. 1.
3. Dans ce plus grand \odot ABCD, inscrivez le polygone CKLMD &c. de façon, qu'il ne touche point le petit \odot GFEH. Prop. 16. L. 12.
4. Tirez le diamètre KIN.
5. Du centre I, sur le Plan du \odot ABCD, élevez la \perp IO, & prolongez la jusqu'à la superficie concave de la grande sphère en O. Prop. 12 L. 12.
Dem. 2. L. 1.
6. Par IO & les diamètres AC, BD & KN, faites passer les Plans AOC, BOD & KON. *
7. Divi-

* On a supprimé une partie de la Resolution &c. dans la fig. pour éviter la confusion.

7. Divisez les arcs AOC & KON, en un nombre égal de parties dans les points P, Q, R, S, T, & V, &c. de façon que chacune de ces parties soit égale à CK.
8. Tirez les droites SP, TQ, VR.

I. Préparation. *

1. Des points P & S, abaissez les \perp PX & SY, sur le Plan du \odot ABCD. Prop. 12. L. 12.
2. Tirez YX.

DEMONSTRATION.

- Puisque les Plans KON & COA passent par la ligne IO, (Ref. 6.).
Et que IO est \perp sur le Plan du \odot ABCD. (Ref. 5.).
1. Ces Plans KON & COA, sont \perp sur le Plan de ce \odot . Prop. 18. L. 11.
Or les points P & S sont dans ces Plans COA & KON.
Et on a abaissé de ces points les \perp PX & SY (1. Prép. 1.).
 2. Partant les points Y & X sont dans les lignes KN & CA. Prop. 38. L. 11.
Dans les Δ CXP & KYS; \sphericalangle PXC est $=$ \sphericalangle SYK (1. Prép. 1.) de plus
 \sphericalangle PCX $=$ SKY, (Prop. 27. L. 3.) & CP $=$ KS (Ref. 7.).
 3. Donc les cotés PX & XC, sont égaux aux cotés SY & YK. Prop. 26. L. 1.
Or les rayons KI & CI sont égaux. Def. 15. L. 1.
Si donc on en retranche les égales XC & YK.
 4. Les restes, savoir IX & YI seront égaux. Ax. 3. L. 1.
 5. Partant IX : XC $=$ IY : YK. Prop. 7. L. 5.
 6. D'où il suit que XY est Plle à KC. Prop. 2. L. 6.
Mais PX qui est $=$ à SY (Arg. 3.) est aussi \perp sur le même Plan avec SY (1. Prép. 1.).
 7. Donc PX est aussi Plle à YS. Prop. 6. L. 11.
 8. De la même manière SP est $=$ & Plle à XY. Prop. 33. L. 1.
Mais XY est Plle à KC (Arg. 6.).
 9. Donc SP est aussi Plle à KC. Prop. 9. L. 11.
 10. Partant les cotés du quadrilatère KSPC sont dans le même Plan. Prop. 7. L. 11.
 11. De la même manière on démontrera que les cotés des quadrilatères TQPS, VRQF, & du Δ ROV, sont chacun dans le même Plan.
 12. Et comme on peut démontrer de cette façon que toute la sphère est entourée de pareils quadrilatères & triangles.
 13. On a par conséquent inscrit dans le plus grande sphère un polyédre RPCKTVO, &c.

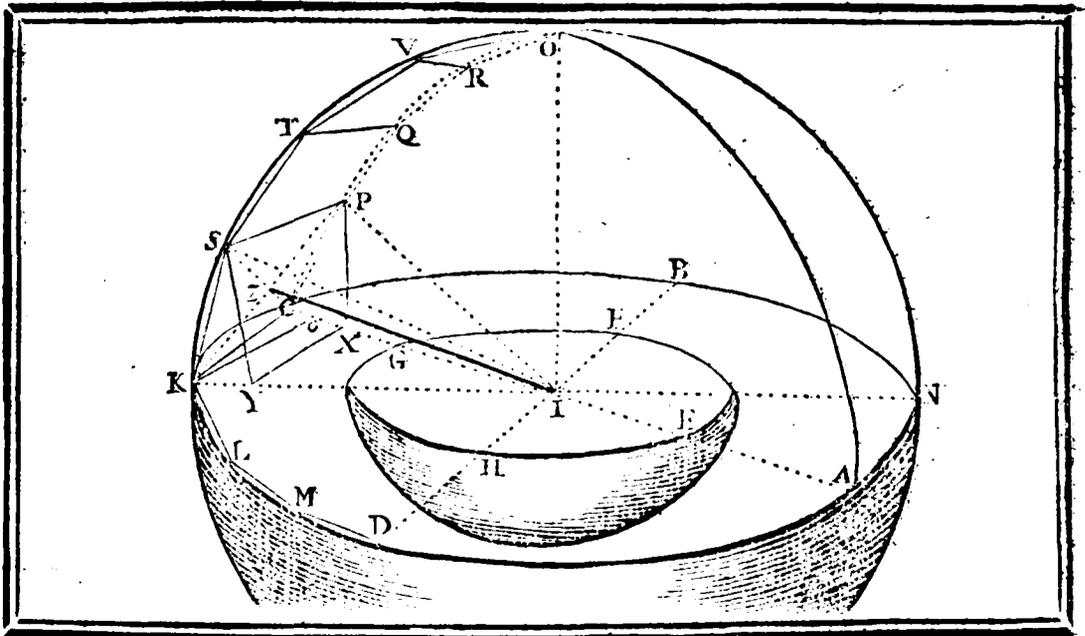
C. Q. F. F. 1.

II. Préparation.

1. Du centre I, abaissez sur le Plan KSPC, la \perp IZ. Prop. 11. L. 11.
2. Joignez les points ZP, ZC, ZS & ZK, item SI & PI. Dem. 1. L. 1.
3. Du point K & dans le Plan ABCD, abaissez la \perp Ko sur le diamètre CA. Prop. 12. L. 8.

Puis-

* On a partagé la Préparation ainsi que la Démonstration, en deux parties.



Puisque dans le ΔKCI , la ligne YX est Plle à KC . (*Arg. 6.*)

14. $IC : CK = IX : XY$.

Mais IC est $> IX$.

15. Donc $CK > XY$.

Or PS est $=$ à XY (*Arg. 8.*).

16. D'où il suit que CK est aussi $> PS$.

17. De la même manière on démontrera que SP est $\setminus TQ$, & $TQ \setminus VR$.

Les $\sphericalangle IZP, IZC, IZK$ & IZS sont des $\sphericalangle L$. (*11. Prép. 1. & Def. 3. L. 11.*)

Et IC est $= IP = IS = IK$.

De plus IZ est commun aux quatres $\Delta IZP, IZC, IZK$ & IZS .

18. Donc $ZP = ZC = ZK = ZS$.

19. Partant le \odot décrit du centre Z , avec le rayon ZP , passera par les points K, S , & C , & le quadrilatère $KSPC$ sera inscrit dans un \odot .

Mais si les quatres cotés du quadrilatère étoit égaux; les arcs, qui les soutendent le seroit aussi, & seroit chacun le quart de la \odot . (*Prop. 28. L. 3.*)

Or KS, CK & CP , sont égaux (*Ref. 7.*) & CK est $\setminus SP$ (*Arg. 16.*)

20. D'où il est évident que les trois cotés KS, CK & CP sous tendent plus que les trois quarts de la \odot ; & CK (qui est $=$ à KS & CP) en soutient, par conséquent plus que le quart.

21. Partant l' \sphericalangle du centre qui est $\sphericalangle CZK$ est $> L$.

22. D'où il suit que le \square sur KC est $>$ que \square sur ZC + le \square sur ZK .

Mais le \square sur ZC est $=$ au \square sur ZK (*Prop. 46. L. 1. Cor. 3.*), puisque ZC est $=$ à ZK (*Arg. 18.*).

23. Donc le \square sur KC est $>$ que le double du \square sur ZC .

L'Angle AIK est $\setminus L$ (puisque'il est $= \sphericalangle AID + \sphericalangle DIK$ & que l' $\sphericalangle DIA$ est L *Ref. 2.*),

De

Prop. 2. L. 6.
Ax. 8. L. 1.
Prop. 14. L. 5.

Prop. 7. L. 5.

Def. 16. L. 11.
Def. 15. L. 1.

Prop. 47. L. 2.
Prop. 46. L. 1.
Cor. 3.

Def. 3. L. 4.

Prop. 33. L. 6.

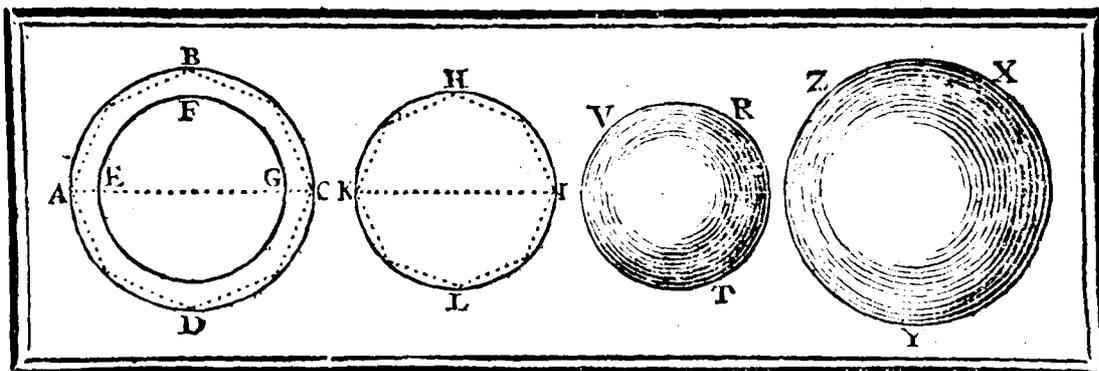
Prop. 12. L. 2.

- De plus $P \forall AIK$ est $=$ à $\forall ICK + \forall IKC$. Prop. 32. L. 1.
24. Partant $P \forall ICK + \forall IKC$ sont $>$ qu'un angle L .
Or $P \forall ICK$ est $=$ à $P \forall CKI$ (Prop. 5. L. 1.) car KI est $=$ à CI (Def. 15. L. 1.)
25. Donc $2 \forall ICK$ sont $>$ qu'un angle L , & $\forall ICK > \frac{1}{2}$ angle L . Ax. 7. L. 1.
26. C'est pourquoi dans le ΔCoK , $P \forall CKo$ est $< \frac{1}{2} L$.
Mais $P \forall ICK$ est $> \frac{1}{2} L$. (Arg. 25.) Prop. 19. L. 1.
27. D'où il suit que dans le ΔCoK , le coté Ko , opposé à $P \forall KCo$ ou KCI , est $>$ que le coté Co , opposé à $\forall CKo$.
28. Partant il est évident que le \square sur KC (qui est $=$ au \square sur $Ko +$ au \square sur Co par la Prop. 47. L. 1.) est $<$ que deux fois le \square sur Ko .
Et il est demontre (Arg. 23.) que le \square sur KC est $>$ que le double du \square sur ZC .
29. C'est pourquoi le double du \square sur Ko fera $>$ que le double du \square sur ZC .
30. Partant le \square sur Ko est $>$ que le \square sur ZC .
Mais le \square sur IC est $=$ au \square sur $IZ +$ le \square sur ZC .
Et le \square sur IK ($=$ au \square sur IC . Def. 15. L. 1. & Prop. 46. L. 1. & Prop. 47. L. 1. Corol. 3.) est égal au \square sur $Io +$ au \square sur Ko . } Prop. 47. L. 1.
31. Donc le \square sur $IZ +$ le \square sur ZC sont $=$ au \square sur $Io +$ le \square sur Ko . Ax. 1. L. 1.
Si donc on retranche d'un coté le \square sur ZC & de l'autre le \square sur Ko .
(qui sont inégaux par l'Arg. 30.)
32. Le reste savoir le \square sur IZ sera $>$ que le \square sur Io . Ax. 5. L. 1.
33. Partant IZ est $> Io$.
Or la ligne Ko (qui est \perp sur le diamètre AC , 11. Prép. 3.) est au-delà de la sphère $EF GH$, & ne peut la toucher (Prop. 16. L. 12. Corol.) c. a. d. que Io est $> IG$.
Et Io est $< IZ$. (Arg. 33.)
34. Donc a plus forte raison IZ (qui est beaucoup $> IG$) ne touche point la superficie de la sphère $EF GH$.
35. C'est pourquoi le Plan $KSPC$, dans lequel Z est le point le plus proche du centre I , ne peut non plus toucher cette sphère $EF GH$.
36. De la même manière on démontrera, que tous les autres Plans qui forment le polyèdre ne touchent point non plus la sphère $EF GH$.
37. Partant on a décrit dans la plus grande sphère KON , un polyèdre $KPTRVO$ &c. dont les Plans ne touchent point la petite sphère $EF GH$.

C. Q. F. F. II.

COROLLAIRE.

Si dans deux sphères on décrit deux polyèdres semblables: ces polyèdres seront entr'eux en raison triplée des diamètres des sphères dans lesquels ils se trouvent, car ses polyèdres étant \sim , sont terminés par un pareil nombre de Plans \sim chacun à chacun (Def. 9. L. 11.). Partant chaque polyèdre peut se diviser en des pyramides ayant tous leurs sommets au centre de la sphère & pour baze les Plans du polyèdre; de plus tous les pyramides du premier polyèdre sont \sim à tous les pyramides contenues dans le second polyèdre chacun à chacun; elles sont donc l'une à l'autre (savoir les pyramides du premier polyèdre aux pyramides du second) en raison triplée de leurs cotés homologues à savoir des demi diamètres de leurs sphères, (par le Corol. de la Prop. 8. L. 12.), d'où il suit (par la douzieme du cinquieme Livre) que toutes les pyramides composant le premier polyèdre sont à toutes les pyramides composant le second polyèdre en raison triplée des demi diamètres de leurs sphères, & (par les Prop. 11 & 15. L. 5.) que le premier polyèdre est au second en raison triplée des diamètres de leurs sphères.



PROPOSITION XVIII. THEOREME XVI.

Les sphères (ABCD & HILK): sont entr'eux en raison triplée de leurs diamètres (AC & KI).

HYPOTHESE.

AC est le diamètre de la sphère ABCD,
& KI, le diamètre de la sphère HILK.

THESE.

Sphère ABCD : sphère HILK = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$. *

DEMONSTRATION.

Si non.

Une sphère < ou > que la sphère ABCD sera à la sphère HILK = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$.

I. Supposition.

Soit la sphère VRT < que la sphère ABCD, de façon que la sphère VRT : sphère HILK = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$.

Préparation.

1. Placez la sphère VRT autour du centre de la sphère ABCD, comme est EFG, (qui est = à la sphère VRT).
2. Dans la grande ABCD. inscrivez un polyèdre, de façon qu'il ne touche point la sphère EFG.
3. Dans la sphère HILK inscrivez un polyèdre ∞ au précédent.

Prop. 17. L. 12.

Puisque les polyèdres ABCD & KHIL sont ∞ (1. Prép. 1 & 2.).

1. Le polyèdre ABCD : polyèdre KHIL = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$.

{ Prop. 17. L. 12.
Et Corol.

* Voyez Append. Prop. VII.

Et comme la sphère VRT : sphère HILK = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$. (I. Sup.).

De plus que la sphère VRT est = à la sphère EFG (Prép.).

2. On peut conclure (invertendo) que la sphère HILK : sphère EFG = $\left\{ \begin{array}{l} \text{Prop. 4. L. 5.} \\ \text{Corol.} \\ \text{Prop. 7. L. 5.} \\ \text{Prop. 11. L. 5.} \\ \text{Ax. 8. L. 1.} \\ \text{Prop. 14. L. 5.} \end{array} \right.$
3. D'où il suit que la sphère HILK : sphère EFG = pol. KHIL : pol. ABCD.
4. Or la sphère HILK est > que le polyèdre KHIL.
4. Donc la sphère EFG (ou son égale VRT) est aussi > que le polyèdre ABCD.

Mais la sphère EFG est contenue dans le polyèdre ABCD (Prép. 2.).

5. Partant la partie seroit > que son tout.

6. Ce qui est impossible.

7. D'où il suit qu'il n'est pas possible que le cube du diamètre (AC ; ou \overline{AC}^3) d'une sphère (ABCD) est au cube du diamètre (KI ; ou \overline{KI}^3) d'une autre sphère (HILK) comme une sphère VRT (qui est moindre que la première sphère ABCD Sup.), est à cette seconde HILK.

II. Supposition.

Soit la sphère ZXY > que la sphère ABCD, de façon que la sphère ZXY : sphère HILK = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$.

II. Préparation.

Prenez une sphère VRT, de manière que la sphère ABCD : sphère VRT = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$.

Puisque la sphère XZY : sphère HILK = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$ (II. Sup.).

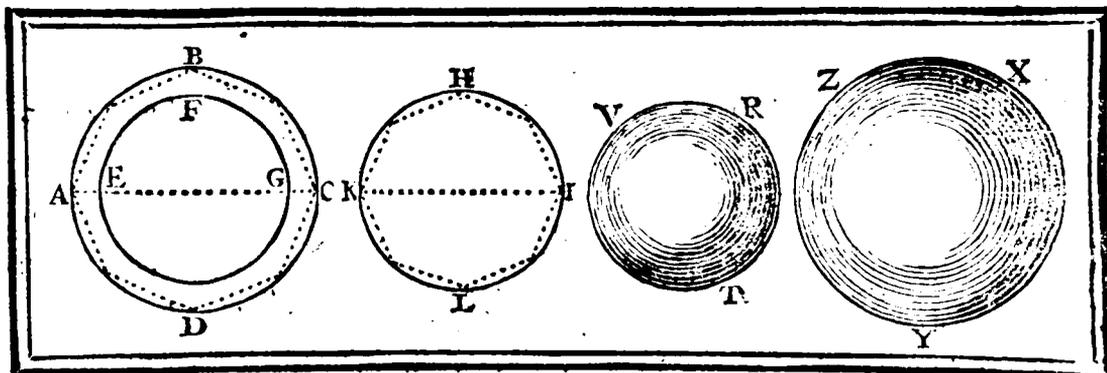
Et que la sphère ABCD : sphère VRT = $\overline{AC}^3 : \overline{KI}^3$ (II. Prép.).

8. La sphère XZY : sphère HILK = sphère ABCD : sphère VRT. Prop. 11. L. 5.
- Or la sphère XZY est > que la sphère ABCD. (II. Sup.).
9. Partant la sphère HILK est aussi > que la sphère VRT. Prop. 14. L. 5.

Mais il est démontré (Arg. 7.) qu'il est impossible que le cube du diamètre (AC ; ou \overline{AC}^3) d'une sphère (ABCD) est au cube du diamètre (KI ; ou \overline{KI}^3) d'une autre sphère (HILK) ; comme une sphère ABCD est à une sphère moindre que HILK.

10. Donc la sphère VRT n'est pas < que la sphère HILK, (comme on l'avoit prouvé Arg. 9.).

11. Partant la sphère XZY n'est pas > que la sphère ABCD (ainsi qu'on l'avoit supposée).



La sphère supposée ne pouvant donc être ni < ni > que la sphère-
ABCD.

12. Elle la fera égale.

13. D'où il suit que la sphère ABCD: sphère HILK = \overline{AC} : \overline{KI} Prop. 7. L. 5.

COROLLAIRE.

Les sphères sont entr'eux comme les polyèdres semblables qui y sont inscrits, (Cor. de la Prop. 17. L. 12. & Prop. 11. L. 5.).

R I N.

