

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

23.9 - 21

E L E M E N S
D E
G E O M E T R I E.

0780-71

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION

500 FIFTH AVENUE NEW YORK 10017

E L E M E N S
D E
G E O M E T R I E,
C O N T E N A N T
L E S S I X P R E M I E R S L I V R E S
D' E U C L I D E,

MIS DANS UN NOUVEL ORDRE, ET À LA PORTÉE DE LA
JEUNESSE SOUS LES DIRECTIONS
DE MR. LE PROFESSEUR KOENIG,
ET REVUS
PAR MR. A. KUYPERS.



A L A H A T E,
Chez HENRI SCHEURLEER, F. Z..
M. D. CC. LVIII

U S N I T I O N

IN

THE STATE OF

NEW YORK

County of

INCORPORATED

under the laws of the State of New York

and is a corporation of the State of New York

and is a corporation of the State of New York



NEW YORK

NEW YORK

NEW YORK

A V I S D U LIBRAIRE

JE publiai en 1754 un projet de Souscription pour une nouvelle Edition des **ELEMENS D'EUCLIDE**. J'y promettois d'en délivrer des Exemplaires complets vers la fin de 1755. Les Souscripteurs ont eu sans doute lieu de se plaindre des délais que j'ai été forcé de mettre à l'exécution de mes promesses. J'en rougirois moi-même, si je n'étois persuadé que le Public, suffisamment instruit des raisons qui m'ont empêché & qui m'ont presque mis dans l'impossibilité de remplir mes engagements, voudra bien se prêter à excuser cette faute, involontaire de ma part.

Pour remplir mes promesses, du moins autant qu'il m'est possible, j'offre ici les six premiers Livres d'**EUCLIDE** qui forment la Première Partie de mon Ouvrage. Je me propose de mettre la dernière main à mon Edition en publiant, le plutôt qu'il me sera possible, les Onzième & Douzième Livres. Cette Entreprise seroit même achevée, si une circonstance imprevue, mais prête à être décidée, n'avoit suspendu sa consommation.

Le Public peut être persuadé que le respect qu'il mérite de ma part, & que l'honneur de ma presse me font voir avec peine que je ne puisse fixer le tems où je ferai paroître ces deux Livres.

Il ne tiendra pas à moi d'abréger l'intervale que je suis obli-

vj A V I S D U L I B R A I R E.

gé de mettre à l'impatience des Amateurs de la GÉOMETRIE;
& je ne négligerai rien pour compléter mon Edition. Mais
j'espère qu'en attendant, le Public, instruit de mes peines & de
mes travaux, rendra justice à mon zele, & voudra bien pour le
present se contenter de la Première Partie de cette Edition
des ELEMENS D'EUCLIDE, une des plus parfaites qui aient
paru jusqu'à present.



AVR.

AVERTISSEMENT

SUR CETTE

NOUVELLE EDITION.

LE Siècle des Mathématiques commence à renaître: on voit depuis quelque tems paroître, presque tous les jours, de nouveaux Traités de Géometrie. Nous ne chercherons point à déprimer ces Productions; elles ont certainement leur mérite. Mais les Auteurs de ces Traités donneront, avec nous, la préférence aux **ELEMENS D'EUCLIDE**: ce sont de ces Chefs-d'œuvres qu'on peut imiter, mais qu'il est impossible de surpasser.

Il seroit donc inutile de chercher à affurer à **EUCLIDE**, une supériorité que personne ne lui dispute. Notre unique but doit être d'indiquer ici les avantages de cette nouvelle Edition sur celles qui l'ont précédée.

1°. On a conservé, avec toute l'attention possible, toutes les Propositions & les Démonstrations d'**EUCLIDE**, qu'on a laissées dans le même ordre où elles se trouvent dans les meilleures Editions.

2°. Comme ce fameux Géometre avoit l'esprit Philosophique & que tous ses raisonnemens se suivent, on en a conservé, autant qu'il a été possible, la forme, la liaison & toute l'exactitude.

3°. Après avoir exposé, avec toute la clarté & la précision possible, les parties essentielles de ses Propositions, on a développé le sens de ses raisonnemens, & on l'a exposé dans un si beau jour, que l'œil tant soit peu attentif peut l'appercevoir. Pour rendre ces **Elemens** encore plus faciles, on a distingué en plusieurs Articles séparés, les différentes opérations & les raisonnemens essentiels à une bonne Démonstration.

4°. Pour faire quelques progrès dans l'étude des Mathématiques, il faut s'appliquer à découvrir la liaison & le rapport qu'il y a entre les Propositions; se former une juste idée du nombre & des qualités des argumens qui servent à établir une nouvelle vérité; connoître, en un mot, toutes les parties intrinsèques d'une Démonstration.

Or comme il est impossible d'acquiescer ces connoissances, sans savoir ce qui entre dans la composition d'un Théorème & d'un Problème. 1°. On a distingué la

vij. AVERTISSEMENT SUR CETTE NOUVELLE EDITION.

la Préparation & la Démonstration. 2°. Après avoir énoncé la Proposition, on a fait connoître sous le nom d'*Hypothese* les choses qu'on suppose dans cette Proposition, & sous celui de *These* celles qu'on y affirme. 3°. On a rangé dans des Articles séparés, toutes les opérations nécessaires pour faire servir des vérités connues à la preuve d'une vérité inconnue. 4°. On s'est particulièrement attaché à suivre, dans la Démonstration, la méthode qu'on s'étoit prescrite, c'est-à-dire, qu'on a eu soin de faire connoître, comme il est dit dans le *Projet*, par des citations de divers fondemens de chaque Proposition relative à la figure, laquelle est la *Mineure* de l'argument. Une Citation marginale rappelle aussi la vérité déjà démontrée, qui en est la *Majeure*. En un mot on n'a rien négligé pour fixer l'attention des Commencans, pour leur faire connoître la chaîne des raisonnemens Géométriques & pour leur apprendre à en suivre le fil.

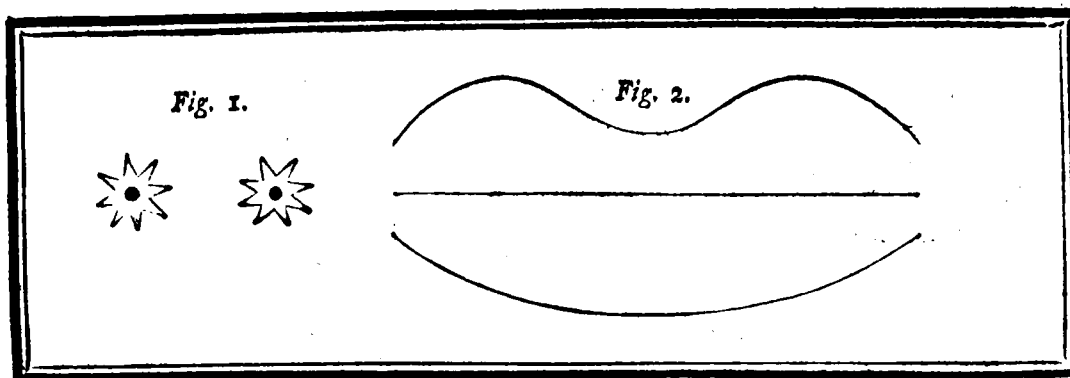
5°. Les Géomètres modernes se servent ordinairement des parties aliquotes dans leurs Démonstrations touchant les raisons & proportions des grandeurs en général. Comme cette méthode leur paroît plus facile que celle des équimultiples, ils sont surpris qu'EUCLIDE, ce fameux Géometre, ait eu recours, dans les Démonstrations de la plupart de ses Livres, à ces équimultiples, au lieu d'avoir fait usage des parties aliquotes. On explique fort au long, dans les Définitions du cinquième Livre, les raisons qui l'ont engagé à en agir ainsi.

6°. On découvre, dans un Appendice que Mr. Koenig y a joint, la méthode de trouver les Logarithmes par le seul moyen des proportions arithmétiques & démontrées dans le cinquième Livre.

7°. La beauté de l'impression, l'ordonnance & la régularité des figures & l'attention qu'on a eue de prévenir jusqu'aux moindres petites fautes soit dans les calculs, soit dans les Lettres, soit dans les chiffres, soit dans les citations marginales &c. relèvent encore le mérite de cette Edition qui ne peut manquer d'être favorablement reçue du Public.

L E S
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
L I V R E P R E M I E R.

Q 11 11 11 11 11 11
11 11 11 11 11 11
11 11 11 11 11 11
11 11 11 11 11 11



DEFINITIONS.

I.

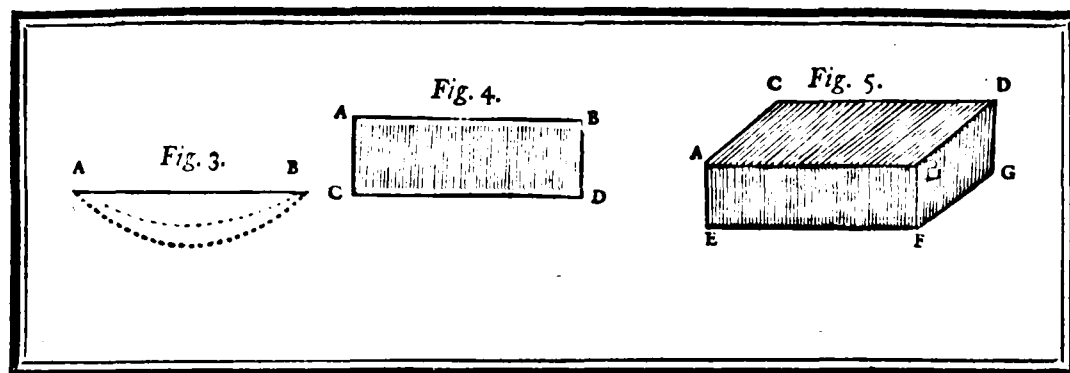
LE Point est une marque sans parties. Fig. 1.

Dans cette définition, aussi bien que dans la seconde & la cinquième, Euclide explique simplement la manière de concevoir les premiers objets de la Géométrie, le point, la ligne, & la surface; il ne démontre pas qu'il y ait de tels objets dans la classe des êtres réels. Ces notions, quoique très utiles en Géométrie, ne sont que des abstractions, qu'il faut éviter de réaliser, en se les représentant comme ayant une existence effective hors de l'esprit, où elles ont pris naissance. Il n'existe pas de points mathématiques dans la nature, (du moins ce qu'Euclide en dit ne le prouve pas); mais il existe des choses étendues, qu'on est en droit de traiter comme de simples marques non-étendues, toutes les fois qu'on ne veut pas les considérer comme ayant des parties, mais simplement comme limites de quelque autre étendue. Ainsi, lorsqu'il est question de mesurer la distance de deux astres, l'Astronome procède comme si ces astres n'étoient que des points sans parties: & il a raison; puisqu'il ne veut point connoître leur étendue, mais celle de la distance qui les sépare, & dont il les envisage comme les termes. Il en est de même des autres notions de cette espèce. On se représente sous l'image d'une ligne, ou bien d'une longueur sans largeur, toute étendue dont la seule longueur nous intéresse, quelle que puisse être sa largeur & sa profondeur, ou ses autres qualités. L'imagination, toujours disposée à transformer en réalités ce qui n'en a point, forme de ces abstractions une classe d'êtres qui paroissent avoir de l'existence hors de l'entendement. Il est très permis au Géomètre d'adopter ces êtres, entant qu'ils peuvent lui servir à faire entendre facilement ce qu'il veut proposer sur les différentes manières d'envisager l'étendue; mais il ne lui est nullement permis de se faire illusion sur leur origine & leur véritable usage.

II.

La Ligne est une longueur sans largeur. Fig. 2.

A



D E F I N I T I O N S.

III.

LEs Extrémités de la Ligne sont des points (A, B,). Fig. 3.

IV.

La Ligne Droite est celle qui est également située entre ses extrémités (A, B,). Fig. 3.

Cette définition est imparfaite, puisqu'elle n'offre aucune marque essentielle de la ligne droite; aussi Euclide n'en a-t'il rien pu tirer; elle ne se trouve plus citée dans le corps de l'ouvrage. Il est obligé d'avoir recours à d'autres principes (par exemp. à l'axiome 12.), toutes les fois qu'il a besoin d'employer des vérités qui dépendent d'une définition parfaite de la ligne droite.

V.

La Superficie, ou Surface, est une étendue ayant de la longueur & de la largeur sans profondeur. Fig. 4.

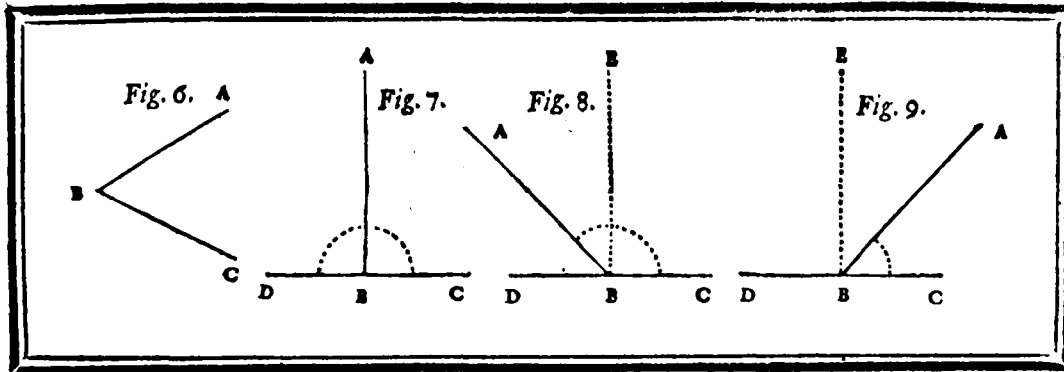
VI.

Les Extrémités de la Superficie sont des lignes (AB, CD, AC, BD,). Fig. 4.

VII.

On nomme Superficie Plane, ou simplement un Plan (AD), celle qui est également située entre ses extrémités. (AB, CD, AC, BD). Fig. 5.

Cette définition est encore dans le cas de la quatrième.



D E F I N I T I O N S.

V I I I.

L' *Angle Plan* est l'inclinaison mutuelle de deux lignes (AB, BC,) qui se rencontrent, & qui se trouvent situées dans un même plan. *Fig. 6.*

I X.

L'Angle est nommé *Rectiligne*, si les lignes, entre lesquelles il est compris, sont droites. *Fig. 6.*

X.

Quand une ligne droite (AB), tombant sur une autre ligne droite (CD), fait les angles contigus (ABD, ABC) égaux entr'eux, ces angles sont appelés *Angles Droits*. La ligne (AB), qui tombe de cette manière sur l'autre (CD), est appelée *Perpendiculaire*. *Fig. 7.*

X I.

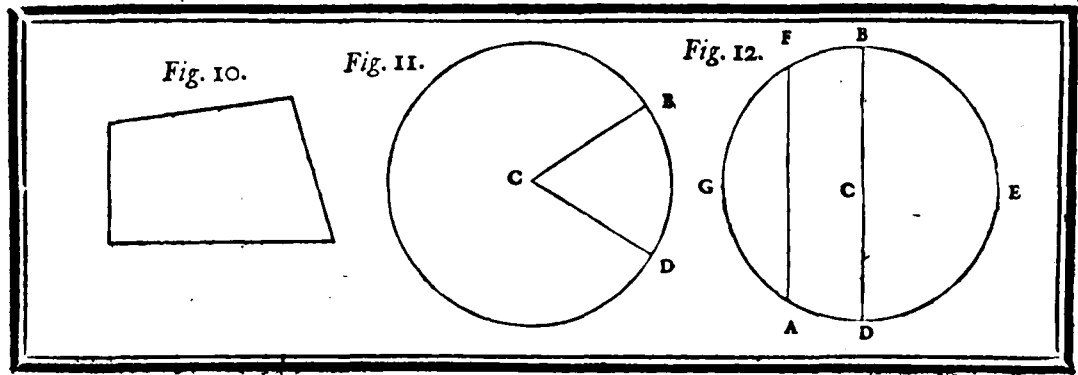
L'Angle *Obtus* (ABC) est un angle plus grand qu'un angle droit (EBC). *Fig. 8.*

X I I.

L'Angle *Aigu* (ABC) est un angle plus petit qu'un angle droit (EBC). *Fig. 9.*

X I I I.

On nomme *Terme* l'extrémité de quelque étendue.



D E F I N I T I O N S.

XIV.

Une *Figure* est une étendue limitée d'un ou de plusieurs termes. *Fig. 10.*

XV.

Le *Cercle* est une figure plane terminée par une seule ligne, ayant la propriété que toutes les lignes droites (CB, CD,) tirées d'un même point (C) à cette seule ligne, nommée *Circonférence*, sont égales entr'elles. *Fig. 11.*

XVI.

On nomme ce point (C) *Centre*, & les droites (CB, CD,) tirées du centre à la circonférence, des *Rayons*. *Fig. 11.*

XVII.

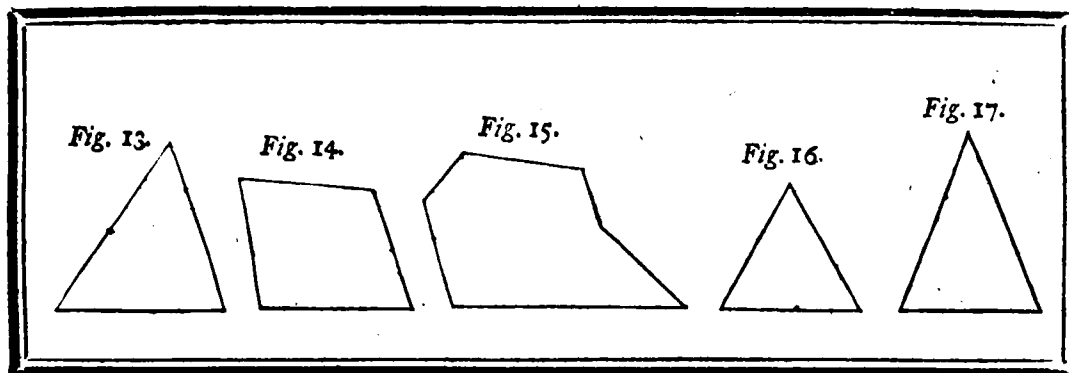
On nomme *Diamètre* du cercle toute droite (DB) tirée par le centre, & terminée à la circonférence de part & d'autre (*Fig. 12*). Un diamètre partage le cercle en deux parties égales.

XVIII.

Le *Demi-cercle* est une figure plane (DEB) terminée par le diamètre (DB) & par la demi-circonférence (DEB), c. a. d. cette portion de la circonférence (DEB) qui aboutit de part & d'autre à ce diamètre (DB). *Fig. 12.*

XIX.

Un *Segment de cercle* est une figure comprise d'une ligne droite (AF), nommée *Corde*, & d'une partie de la circonférence (AGF ou AEF) qu'on appelle *Arc*. *Fig. 12.*



D E F I N I T I O N S.

X X.

ON appelle en général *Figures Rectilignes*, toutes celles qui sont terminées par des lignes droites. Fig. 13. 14. 15. 16. 17.

X X I.

Et en particulier *Figures Trilatères*, ou figures à trois côtés, celles qui sont comprises de trois lignes droites. Fig. 13. 16. 17.

X X I I.

De même *Figures Quadrilatères*, ou Figures à quatre côtés, toutes celles qui sont comprises de quatre lignes droites. Fig. 14.

X X I I I.

Et généralement *Figures Multilatères*, ou figures à plusieurs côtés, toutes celles qui se trouvent terminées par plus de quatre lignes droites. Fig. 15.

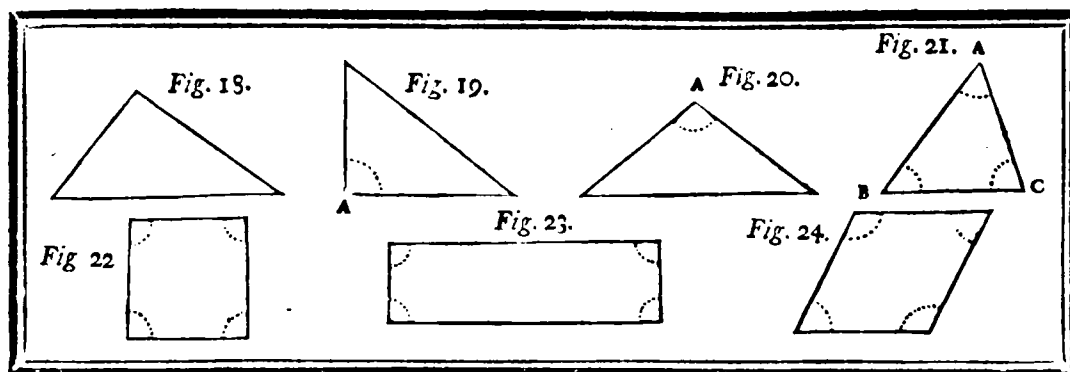
X X I V.

Pour ce qui est des figures trilatères en particulier :

On nomme *Triangle Equilatéral*, celui dont les trois côtés sont égaux entr'eux. Fig. 16.

X X V.

Mais s'il n'y a que deux côtés égaux entr'eux, le *Triangle* est *Isoscèle*. Fig. 17.



D E F I N I T I O N S

X X V I.

ET lorsque les trois côtés sont inégaux entr'eux, le *Triangle* est *Scalene*. Fig. 18.

X X V I I.

Pareillement; parmi ces mêmes figures trilatères:

On nomme *Triangle Rectangle*, un Triangle qui a un angle droit. Fig. 19.

X X V I I I.

Et *Triangle Amblygone*, ou *Obtus-angle*, un Triangle qui a un angle obtus (A). Fig. 20.

X X I X.

Enfin, on appelle *Triangle Oxygone*, ou *Acutangle*, un Triangle qui a les trois angles aigus (A, B, C,). Fig. 21.

X X X.

De la même maniere dans l'espece des figures quadrilatères:

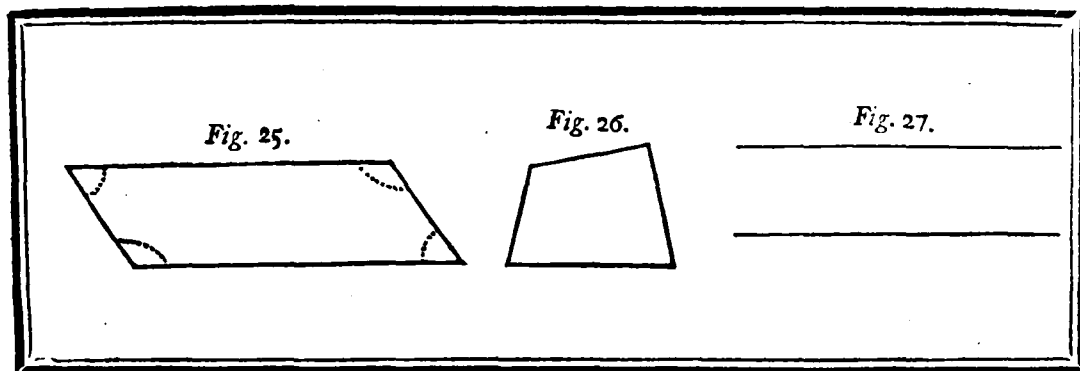
On nomme *Quarré*, celle qui est quadrilatère, équilatérale & rectangulaire. Fig. 22.

X X X I.

Et on entend par *Rectangle*, une figure quadrilatère, rectangulaire, non-équilatérale. Fig. 23.

X X X I I.

Par *Rbombe*, une figure quadrilatère, équilatérale, non-rectangulaire. Fig. 24.



DEFINITIONS.

XXXIII.

ET par *Rhomboïde*, une figure quadrilatère, ayant les angles & les côtés opposés égaux entr'eux, mais ni équilatérale, ni équiangulaire. *Fig. 25.*

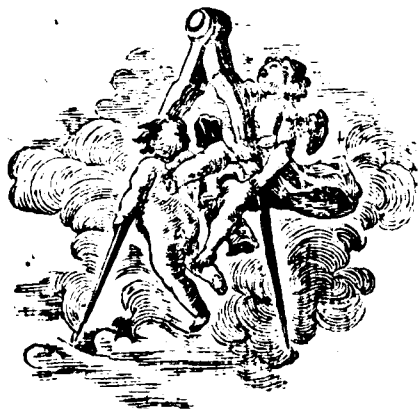
XXXIV.

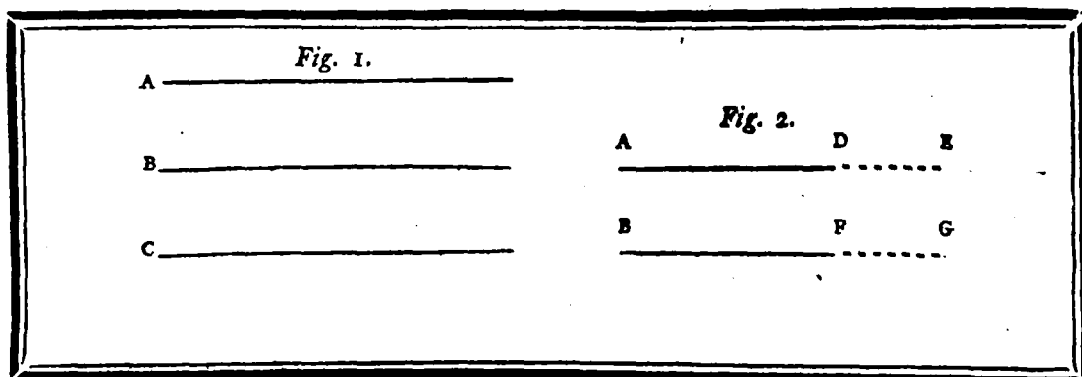
Toute autre Figure quadrilatère est appelée. *Trapezé. Fig. 26.*

XXXV.

Enfin on nomme *Lignes Paralleles*, des lignes droites situées dans un même plan, qui, quoique prolongées à l'infini de part & d'autre, ne se rencontrent jamais. *Fig. 27.*

C'est pour cela qu'on designe par le terme de parallélogramme, toute Figure Quadrilatère dont les côtés opposés sont paralleles. Fig. 25.





D E M A N D E S

I.

ON demande que d'un point à un autre point on puisse mener une ligne droite.

I I.

Qu'on puisse prolonger une ligne droite quelconque à l'infini.

I I I.

Que d'un centre quelconque & d'un rayon quelconque, on puisse décrire un cercle.

A X I O M E S

O U

N O T I O N S C O M M U N E S.

I.

Deux grandeurs égales à une même troisième sont égales entr'elles.

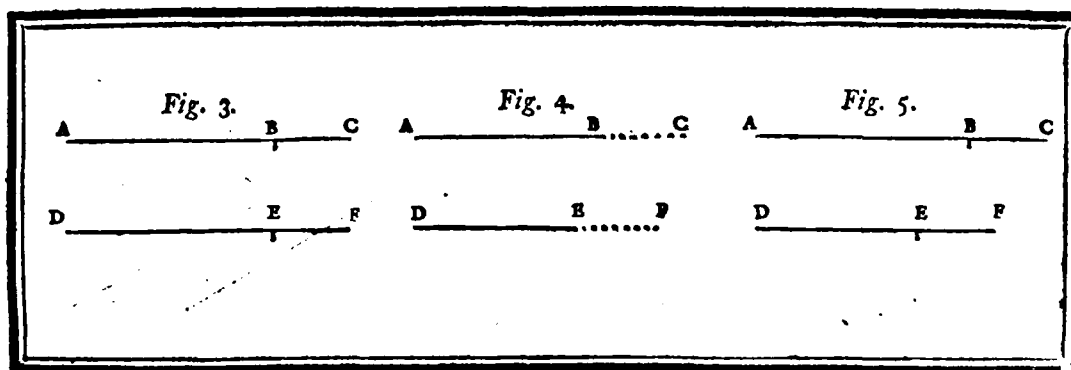
Si la ligne *A* est égale à la ligne *B*, & la ligne *C* égale à la même ligne *B*; la ligne *A* sera égale à la ligne *C*. Fig. 1.

I I.

Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les Touts seront égaux.

Si à la ligne *AD* on ajoute la partie *DE*, & qu'à la ligne *BF*, qui est égale à la ligne *AD*, on ajoute la partie *FG*, égale à la partie *DE*; les Touts *AE*, *BG*, seront égaux entr'eux. Fig. 2.

Si



A X I O M E S.

I I I.

Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales; les restes sont égaux.

Si de la ligne entière AC, on retranche la partie BC, & de la ligne entière DF, égale à AC, on retranche la partie EF, égale à BC; les restes AB, DE, seront égaux. Fig. 3.

I V.

Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales; les tous sont inégaux.

Si à la ligne AB, on ajoute la partie BC, & qu'à la ligne DE, plus petite que AB, on ajoute la partie EF, égale à la partie BC; les tous AC, DF, seront inégaux. Fig. 4.

V.

Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales; les restes sont inégaux.

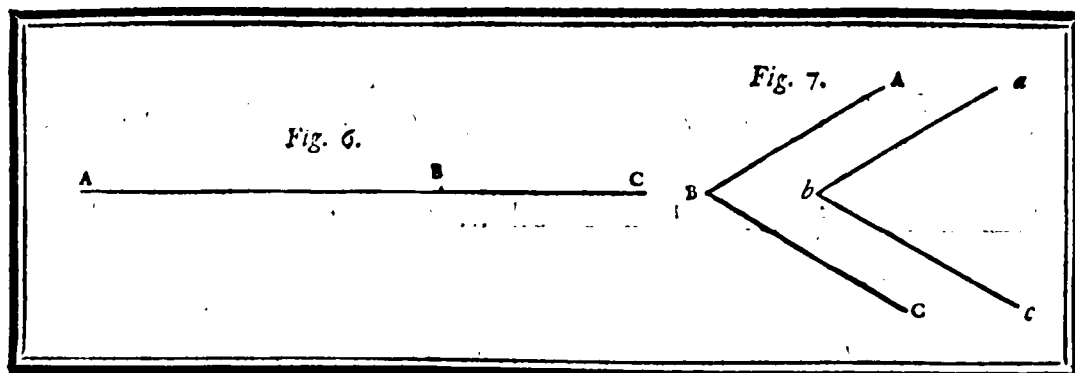
Si de la ligne AC, on retranche la partie BC, & de la ligne DF plus petite que AC, on retranche la partie EF, égale à BC; les restes AB, DE, sont inégaux. Fig. 5.

V I.

Les grandeurs doubles, ou également multiples d'une même grandeur; sont égales entr'elles.

V I I.

Les grandeurs égales à la moitié, ou également sousmultiples d'une même grandeur, sont égales entr'elles.



A X I O M E S .

VIII.

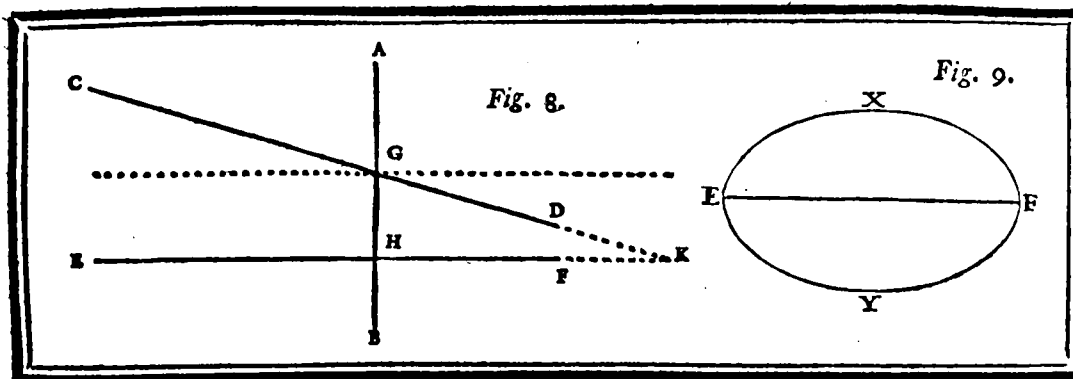
LE Tout est plus grand que sa partie.

Toute la ligne AC est plus grande que sa partie BC . Fig. 6.

IX.

Les grandeurs (c. à d. les étendues limitées), qui conviennent; sont égales & semblables. Et réciproquement; les grandeurs égales & semblables conviennent.

Cet axiome est appelé le principe de la congruence; & il tient par une liaison intime au grand principe de la similitude, dont il fera question au commencement du VI Livre. Ces deux principes sont les grandes sources d'invention en Géométrie. Pour ce qui est de la notion de la congruence, elle renferme la notion des termes, & la notion de la possibilité de leur coïncidence. Deux étendues limitées conviennent, entant que leurs limites peuvent coïncider parfaitement; entant qu'elles peuvent être renfermées dans les mêmes bornes. Euclide regarde le principe de la congruence comme une notion commune: il y est autorisé par l'usage où tous les hommes sont, d'examiner l'égalité des choses qui doivent avoir cette propriété, en les ajustant les unes sur les autres, ou en les renfermant entre les mêmes bornes, de manière que l'œil puisse juger de la coïncidence de leurs limites. On auroit tort de s'imaginer, qu'une telle maxime ne peut conduire qu'à une pratique de tâtonnement, incompatible avec la précision de la Géométrie. Euclide sait faire de cette maxime un principe très scientifique. Il ne suppose sur la congruence, qu'un fort petit nombre de vérités simples, desquelles il démontre rigoureusement, les vérités plus composées qui en dépendent. Voici ces vérités simples.



A X I O M E S.

1. **T**ous les points conviennent.

2. Les lignes droites égales entr'elles conviennent. Et réciproquement; les lignes droites dont les extrémités conviennent; sont égales.

3. Si dans deux angles égaux (ABC , abc ,) les sommets, (B & b ,) conviennent, & une des jambes (BA) à une des jambes (ba); l'autre jambe (BC) conviendra aussi à l'autre jambe (bc). Item, tous les angles dont les jambes conviennent; sont égaux, Fig. 7.

Euclide n'a pas énoncé séparément, ces axiomes particuliers subordonnés à l'axiome général, mais il n'en fait pas moins usage; comme il est aisé de s'en convaincre par l'analyse de plusieurs de ses démonstrations.

X.

Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

XI.

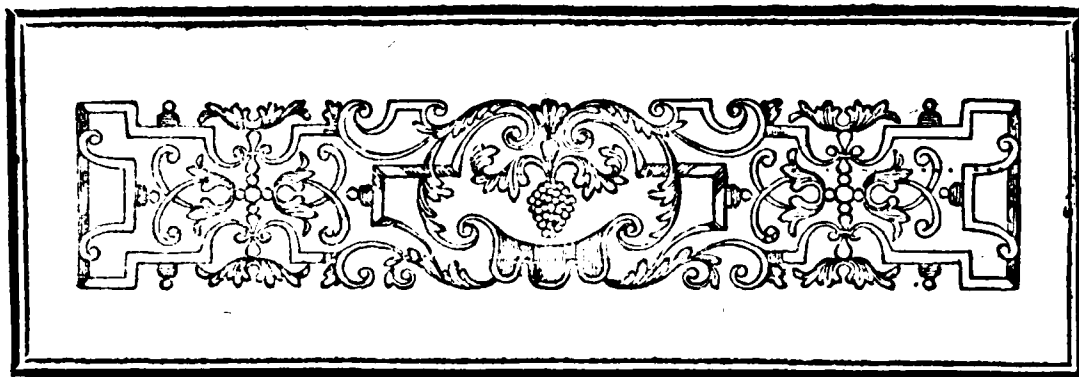
Si une ligne droite (AB) coupe deux autres lignes droites (CD , EF ,) situées sur un même plan, enforte qu'elle fasse les angles intérieurs (DGH , FHG ,) du même côté, moindres que deux droits; ces deux lignes (CD , EF) prolongées à l'infini se rencontreront du côté (K), où les deux angles sont moindres que deux droits. Fig. 8.

Cette vérité n'est pas assez simple, pour pouvoir être reçue au nombre des axiomes. Elle est une suite de la XXVII proposition du premier Livre; ce n'est que là où elle pourra être établie convenablement.

XII.

Il est impossible, que deux lignes droites puissent renfermer un espace.

Si les deux lignes EF & EXE renferment un espace, ces deux lignes ne peuvent être toutes les deux des lignes droites, il faut absolument que l'une du moins comme EXF soit un ligne courbe.



EXPLICATION DES SIGNES.

$\perp$ Perpendiculaire

$<$ Plus grand que

$>$ Plus petit que.

$+$ Plus

$-$ Moins

$\angle$ Angle

$\angle$ Angle droit

$\triangle$ Triangle

$=$ Egal

$\square$ Quarré

$\odot$ Cercle

$\bigcirc$ Circonférence

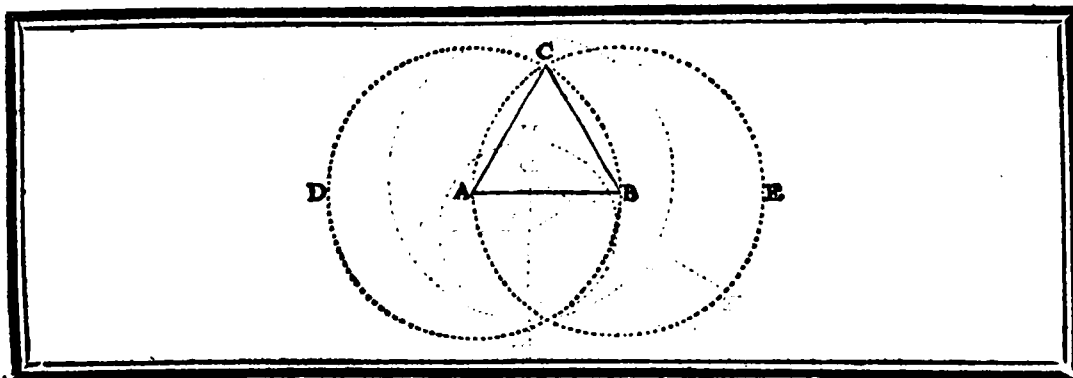
A B R E V I A T I O N S.

Plle. . . . Parallele.

Pgr. . . . Parallélogramme.

Rgle. . . . Rectangle.





PROPOSITION I. PROBLEME I.
SUR une droite donnée & terminée (AB); construire un triangle équilatéral (ABC).

DONNEE

La droite terminée AB.

CHERCHEE.

La construction d'un Δ équilatéral sur la droite terminée AB.

Résolution.

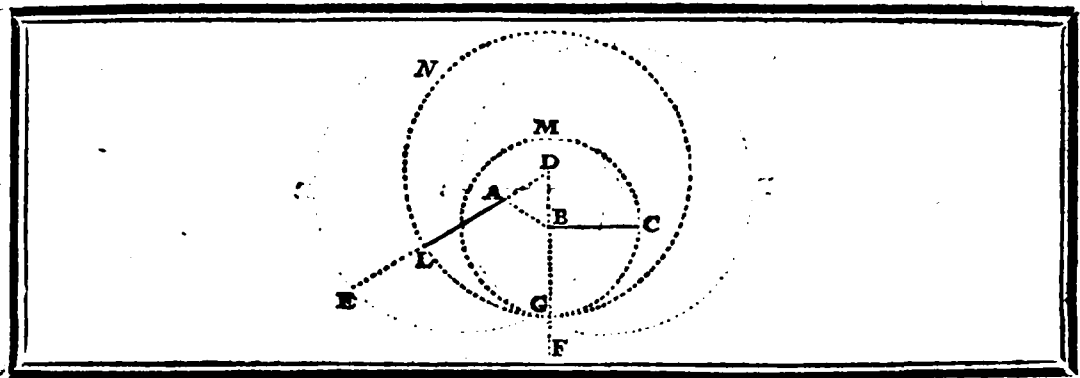
1. Du point A comme centre & du rayon AB decrivez le cercle BCD. Dem. 3.
2. Du point B comme centre & du rayon BA decrivez le cercle ACE. Dem. 3.
3. Marquez le point d'intersection C.
4. Du point A au point C tirez la droite AC. Dem. 1.
5. Du point B au point C tirez la droite BC. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le point A est le centre du $\odot$ BCD (Ref. 1), & que les lignes AB, AC sont tirées du centre A à la $\odot$ BCD (Ref. 4).

1. Ces deux lignes AB, AC sont des rayons d'un même $\odot$. D. 16. L. 1.
2. Par conséquent, la ligne AC est $\equiv$ à la ligne AB. D. 15. L. 1.
- De même, puisque le point B est le centre du $\odot$ ACE (Ref. 2), & que les lignes BA, BC, sont tirées du centre B à la $\odot$ ACE (Ref. 5).
3. Ces deux lignes sont encore des rayons d'un même cercle ACE. D. 16. L. 1.
4. Partant, la ligne BC est aussi $\equiv$ à la même ligne AB. D. 15. L. 1.
5. Les lignes AC, BC sont donc $\equiv$ à une même troisième AB. (Arg. 2. & 4.)
- Or si deux grandeurs sont égales à une même troisième elles sont égales entr'elles. Ax. 1.
6. La ligne AC est donc $\equiv$ à la ligne BC. Mais chacune de ces deux lignes $\equiv$ entr'elles (Arg. 6.) est aussi $\equiv$ à la ligne AB, (Arg. 5).
7. Donc les trois lignes AB, BC, AC, qui forment les trois côtés du Δ ABC, sont toutes les trois $\equiv$ entr'elles.
8. Partant, le Δ ABC construit sur la droite donnée & terminée AB, est un triangle équilatéral. D. 24. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION II. PROBLEME II.
D'Un point donné (A); mener une droite (AL), égale à une autre droite donnée (BC).

DONNEES

1. Le Point A.
2. La droite BC.

CHERCHEZ.

$AL = BC.$

Résolution.

1. Du point A au point B tirez la droite AB.
2. Sur cette droite AB construisez le Δ équilatéral ADB.
3. Prolongez à l'infini les côtés DA & DB de ce Δ .
4. Du point B comme centre, & de la droite BC comme rayon décrivez le $\odot$ CGM.
5. Item; du point D comme centre, & de la droite DG comme rayon décrivez le $\odot$ GLN, qui coupe la droite prolongée DA quelque part en L.

Dem. 1.
P. 1. L. 1.
Dem. 2.

Dem. 3.

Dem. 3.

DEMONSTRATION.

Puisque les lignes BC & BG sont menées du centre B à la $\odot$ CGM. (Ref. 4.)

1. Ces deux lignes sont des rayons d'un même $\odot$ CGM.
2. Par conséquent, $BC = BG$.

D. 16. L. 1.
D. 15. L. 1.

De même; les lignes DG & DL étant tirées du centre D à la $\odot$ GLN (Ref. 5.)

3. Ces lignes sont aussi des rayons d'un même $\odot$ GLN.

D. 16. L. 1.
D. 15. L. 1.

4. Et par la même raison, $DG = DL$.

Or les lignes DA & DB, étant des côtés d'un Δ équilatéral ADB (Ref. 2.)

5. La ligne DA est $=$ à la ligne DB.

D. 24. L. 1.

Retranchant donc des lignes égales DG, DL (Arg. 4.), leurs parties égales DB, DA (Arg. 5.)

6. La ligne restante AL est $=$ à la ligne restante BG.

Arg. 3.

Puisque la ligne AL est donc $=$ à la ligne BG (Arg. 6.) & que la ligne BC est aussi $=$ à la même ligne BG (Arg. 2.)

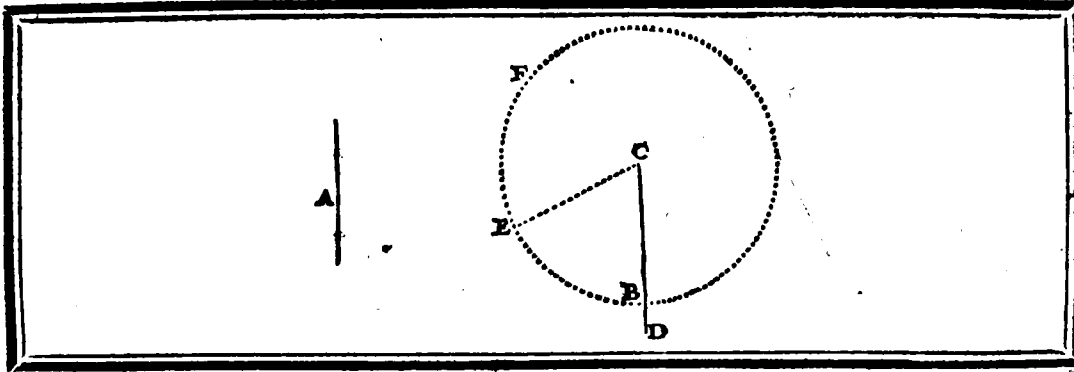
7. La ligne AL est $=$ à la ligne BC.

Arg. 1.

Mais il est manifeste, que cette ligne AL, est une ligne menée du point donné A (Ref. 3.)

8. Partant on a mené du point donné A, une droite AL, égale à la droite donnée BC.

C. Q. F. F.



PROPOSITION III. PROBLEME III.

Deux droites inégales (A & CD) étant données; retrancher de la plus grande (CD,) une partie (CB) égale à la plus petite A.

DONNER.

La ligne $CD > \text{ligne } A$.

CHERCHER.

De CD retrancher $CB = A$.

Résolution.

1. Du point C menez la droite $CE =$ à la donnée A. P. 2. L. 1.
2. Du centre C & du rayon CE décrivez le $\odot$ CEB; qui coupe Dem. 3.
la plus grande CD en B.

DEMONSTRATION.

Les droites CB CE, étant menées du centre C à la $\odot$ BEF (Ref. 2.)

1. Elles font des rayons, d'un même $\odot$ BEF.

2. Partant, $CB = CE$.

D-16. L. 1.

D. 15. L. 1.

Or la droite A étant $=$ à la droite CE (Ref. 1.); & la droite CB étant $=$ à la même droite CE (Arg. 2.)

3. La droite A est $=$ à la droite CB.

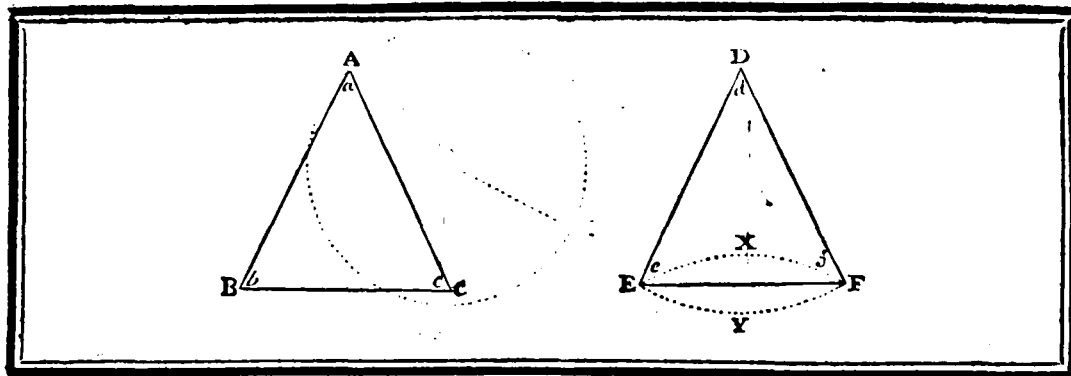
Ax. 1.

Mais la droite CB, fait partie de la droite entière CD.

4. Partant, on a retranché de la plus grande CD, une partie CB $=$ à la plus petite donnée A.

C. Q. F. F.





PROPOSITION IV. THEOREME. I.

SI deux triangles (BAC, EDF), ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun; (c. à. d. $AB = DE$, & $AC = DF$), & de plus, l'angle compris (a) égal à l'angle compris (d): ils auront aussi la base (BC), égale à la base (EF); & les deux autres angles (b & c) égaux aux deux autres angles (e & f), chacun à chacun de ceux qui se trouvent opposés à des côtés égaux; & le triangle entier (BAC) sera égal au triangle entier (EDF).

HYPOTHESE.

- I. $AB = DE$.
- II. $AC = DF$.
- III. $\angle a = \angle d$.

THESE.

- I. $BC = EF$.
- II. $\angle b = \angle e$ & $\angle c = \angle f$.
- III. $\triangle BAC = \triangle EDF$.

Préparation.

- Imaginez que le $\triangle BAC$ soit posé sur le $\triangle EDF$; de manière que
1. Le sommet A tombe sur le sommet D.
 2. Et que le côté AB tombe sur le côté DE.

DEMONSTRATION.

Puisque la ligne AB est $=$ à la ligne DE (Hyp. 1), que le point A tombe sur le point D (Prep. 1), & la ligne AB sur la ligne DE (Prep. 2).

1. Le point B tombera nécessairement sur le point E.
De même; puisque $\angle a = \angle d$ (Hyp. 3), que le sommet A tombe sur le sommet D (Prep. 1) & la jambe AB sur la jambe DE (Prep. 2.)
2. La jambe AC tombera nécessairement sur la jambe DF .
De plus, à cause que cette jambe AC est $=$ à la jambe DF .
3. Il faut, que le point C tombe aussi sur le point F.
4. C'est pourquoi les extrémités B & C de la base BC , conviennent aux extrémités E & F de la base EF .
5. Et par conséquent, la base entière BC convient à la base entière EF .
Car si la base BC ne convenoit pas à la base EF , nonobstant que les extrémités B & C de la base BC , conviennent aux extrémités E & F de la base EF ; deux lignes droites renfermeroient un espace (EXF , ou EYF); ce qui est impossible.

Puis donc que la base BC convient à la base EF . (Arg. 5.)

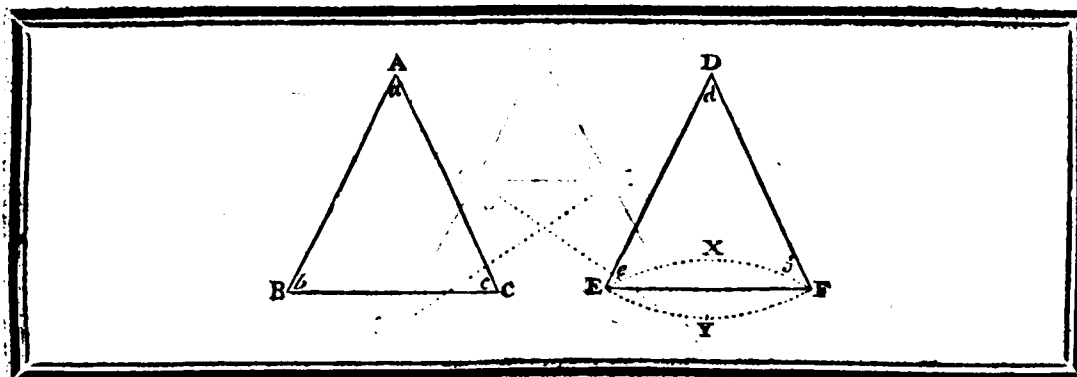
Ax. 9.

Ax. 9.

Ax. 9.

Ax. 12.

6. Cette



6. Cette base BC sera $\equiv$ la base EF .

C. Q. F. D. I.

Ax. 9.

D'après, la base BC convenant à la base EF (Arg. 5), & les deux autres côtés AB , AC du $\triangle BAC$ convenant aux deux autres côtés DE , DF du $\triangle EDF$ (Prep. 2, Arg. 2.)

7. Ces deux $\triangle BAC$, EDF sont nécessairement égaux entr'eux.

C. Q. F. D. III.

Ax. 9.

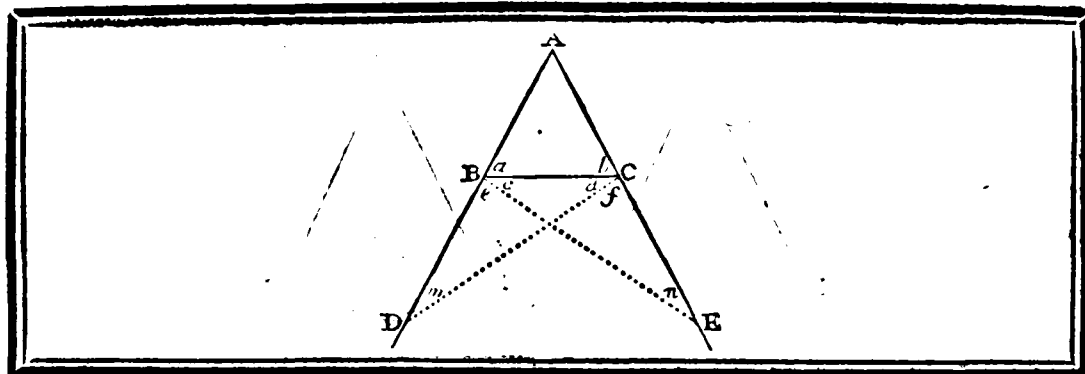
Enfin, puisque les $\angle b$ & $\angle e$ opposés aux côtés égaux AC , DF (Hyp 2); Item, les $\angle c$ & $\angle f$ opposés aux côtés égaux AB , DE (Hyp. 1), conviennent & par leurs sommets & par leurs jambes. (Arg. 1. 2. 3. 5.)

8. Il s'en suit, que les $\angle b$ & $\angle e$ de même que les $\angle c$ & $\angle f$, opposés à des côtés égaux, sont égaux entr'eux.

Ax. 9.

C. Q. F. D. II.





PROPOSITION V. THEOREME II.
Dans tout triangle isocèle (BAC): les angles (a & b) sur la base (BC) sont égaux entr'eux, & les côtés égaux (AB, AC) étant prolongés: les angles ($c+e$, & $d+f$) sous la base (BC) sont aussi égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. Le $\triangle BAC$ est isocèle.
- II. AB & AC sont prolongés indéfiniment.

THÈSE.

- I. $\angle a$ & $\angle b$ sur la base sont = entr'eux.
- II. $\angle c+e$ & $\angle d+f$ sous la base sont aussi = entr'eux.

Préparation.

1. Sur le côté prolongé AB prenez un point quelconque D.
2. Faites $AE = AD$.
3. Par les points B & E, item C & D, tirez les droites BE, CD.

Prop. 3. L. 1.

Dém. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le $\triangle DAC$ les deux côtés AD, AC sont égaux aux deux côtés AE, AB du $\triangle EAB$ chacun à chacun (Prep. 2. Hyp. 1); & que $\angle A$ compris entre ces côtés égaux est commun aux deux $\triangle$.

1. La base DC est = à la base BE; & les deux autres $\angle m$ & $b+d$ du $\triangle DAC$, sont égaux aux deux autres $\angle n$ & $a+c$ du $\triangle EAB$ chacun à chacun de ceux qui sont opposés à des côtés égaux.

Prop. 4. L. 1.

De plus la ligne entière AD étant = à la ligne entière AE (Prep. 2), & la partie AB = à la partie AC (Hyp. 1); en retranchant $\angle c$.

2. Les lignes restantes BD, CE sont aussi = entr'elles.

Ax. 3.

Derechef, puisque dans le $\triangle DBC$ les côtés DB, DC sont égaux aux côtés CE, EB du $\triangle ECB$ chacun à chacun (Arg. 2. & 1.) & qu'outre cela $\angle$ compris m est égal à $\angle$ compris n (Arg. 1.).

3. Les deux autres $\angle$ sont = aux deux autres $\angle$ opposés à des côtés égaux, chacun à chacun c. à d. $\angle c+e = \angle d+f$ & $\angle d = \angle c$.

Prop. 4. L. 1.

Les $\angle$ entiers $a+c$ & $b+d$ étant donc = entr'eux, & leurs parties $\angle c$ & $\angle d$ l'étant de même (Arg. 1 & 3.); en retranchant $\angle c$.

4. Les $\angle$ restants a & b sont aussi = entr'eux.

Ax. 3.

Mais ces $\angle$ sont les deux $\angle$ sur la base BC.

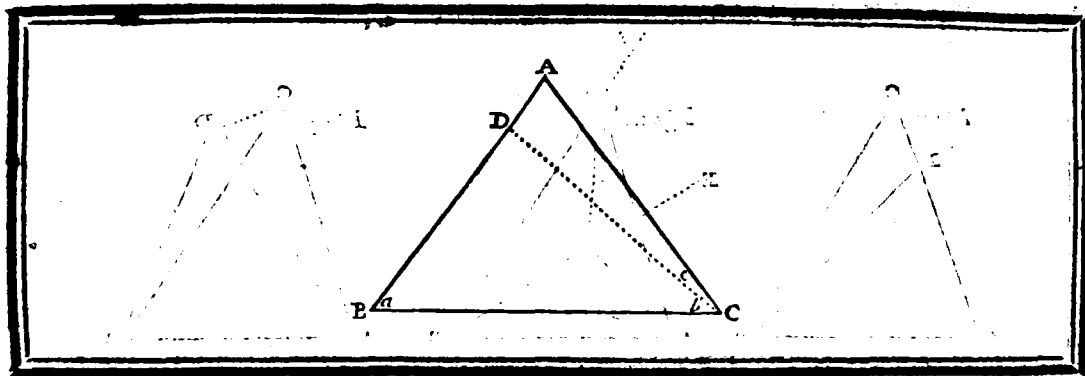
5. Donc $\angle a$ & $\angle b$ sur la base BC sont = entr'eux.

C. Q. F. D. I.

De plus, puisque $\angle c+e$ est = $\angle d+f$ (Arg. 3.) sont les $\angle$ sous la base.

6. Il est clair que les $\angle c+e$ & $\angle d+f$ sous la base sont aussi = entr'eux.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION VI. THEOREME III.
Si un triangle (ABC) a deux angles (a & $b + c$) égaux entr'eux: les côtés opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

Dans le $\triangle ACB$, $\forall a = \forall b + c$.

THESE.

Le côté $CA =$ au côté BA .

DEMONSTRATION.

Si non,

1. Les côtés CA , BA seront nécessairement inégaux. N. C.
2. Par conséquent l'un, comme AB , fera $>$ l'autre AC . N. C.

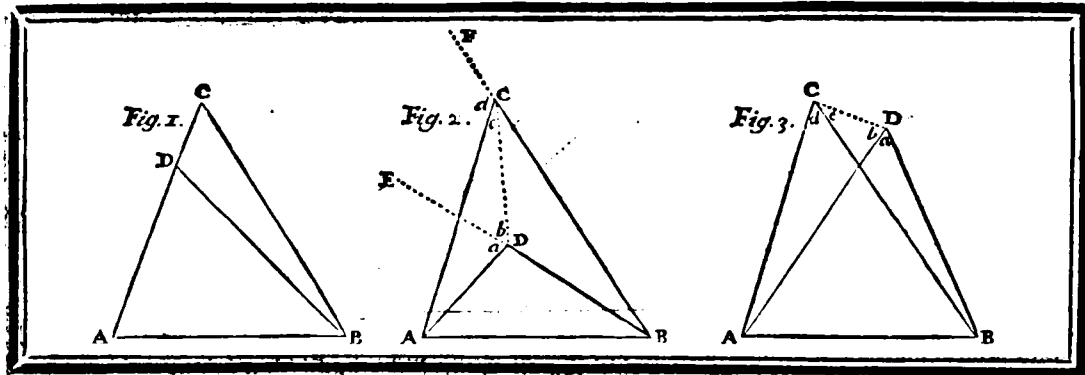
Préparation.

1. Retranchez donc du $>$ côté BA , une partie égale au $<$ côté CA . P. 3. L. 1.
2. Menez du point C au point D la droite CD . Dem. 1.

Dans les $\triangle ACB$, DBC le côté $BD =$ au côté CA (*Prep. 1*), le côté BC est commun aux deux $\triangle$, & $\forall$ compris $a = \forall$ compris $b + c$ (*Hyp.*)

1. Partant deux $\triangle ACB$, DBC ont deux côtés $=$ à deux côtés chacun à chacun, & $\forall$ compris $a = \forall$ compris $b + c$.
2. C'est pourquoi le $\triangle ACB$ est $=$ au $\triangle DBC$. P. 4. L. 1.
 Mais le $\triangle ACB$ étant le tout, & le $\triangle DBC$ sa partie.
3. Il s'enfuivroit que le tout seroit $=$ à sa partie.
4. Ce qui est impossible. Ax. 8.
 Les côtés CA , BA , opposés aux $\forall$ égaux a & $b + c$, ne pouvant donc être inégaux.
5. Ces côtés sont égaux entr'eux, ou $AC = AB$. N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. THEOREME IV.

Des extrémités (A & B) d'une ligne droite (AB), desquelles on a mené à un même point (C), deux droites (AC, BC); on ne peut mener à quelq'autre point (D), situé du même côté de cette ligne, deux autres droites (AD, BD), égales aux deux premières chacune à chacune.

HYPOTHESE.

1. AC, BC, item AD, BD sont des droites;
2. tirées des mêmes points A & B;
3. à deux points differens D & C, situés du même côté par rapport à la ligne AB.

THESE.

Il est impossible que AC soit $= AD$,
& $BC = BD$.

DEMONSTRATION.

Si non.

Il y a du même côté de la ligne AB un point D tel, que
 AC soit $= AD$, & $BC = BD$. Par conséquent ce point
se trouvera

Cas 1. Ou sur un des côtés AC, ou BC. Fig. 1.

Cas 2. Ou dans le $\triangle ACB$. Fig. 2.

Cas 3. Ou hors du $\triangle ACB$. Fig. 3.

CAS. I. Si on suppose le point D sur un des côtés, comme sur le côté AC. Fig. 1.

Puis donc qu'on suppose, que le point D est un point dans AC différent du point C.

1. La ligne AD est ou $>$ ou $<$ la ligne AC.

2. Partant il est impossible que AD soit $= AC$.

N. G.

C. Q. F. D.

CAS. II. Si on suppose le point D au dedans du $\triangle ACB$. Fig. 2.

Préparation.

1. Du point D au point C tirez la droite DC.
2. Prolongez à discrétion BD en E & BC en F.

Dem. 1.

Dem. 2.

Puisque AC est supposée = AD.

1. Le $\triangle CAD$ sera un $\triangle$ isoscèle. D. 25. L. 1.
P. 5. L. 1.
2. Par conséquent les $\angle$ sur la base $a + b$ & c seront égaux entr'eux.
De même BC étant supposée = BD.
3. Le $\triangle CBD$ sera aussi un $\triangle$ isoscèle. D. 25. L. 1.
P. 5. L. 1.
4. Et à cause de cela les $\angle$ sous la base, b & $c + d$, seront aussi égaux entr'eux.
C'est pourquoi, si on ôte de $\angle c + d$ sa partie $\angle d$.
5. $\angle b$ sera $> \angle c$. N. C.
Et si au même $\angle b$, on ajoute ensuite $\angle a$.
6. $\angle$ entier $a + b$ sera à plus forte raison $> \angle c$. N. C.
7. Partant $\angle a + b$ & $\angle c$ ne sont point égaux. N. C.
Mais on a démontré qu'en vertu de la supposition de ce cas, $\angle a + b$ & $\angle c$ doivent être égaux (Arg. 2).
8. D'où il suit que cette supposition ne sçauroit avoir lieu, à moins que ces $\angle$ ne soient à la fois égaux & inégaux.
9. Ce qui est impossible. N. C.
10. Partant, la supposition, qui fait $AC = AD$ & $BC = BD$, est impossible elle-même.

G. Q. F. D.

GAS III. Si on suppose le point D hors du $\triangle ACB$. Fig. 3.

Préparation.

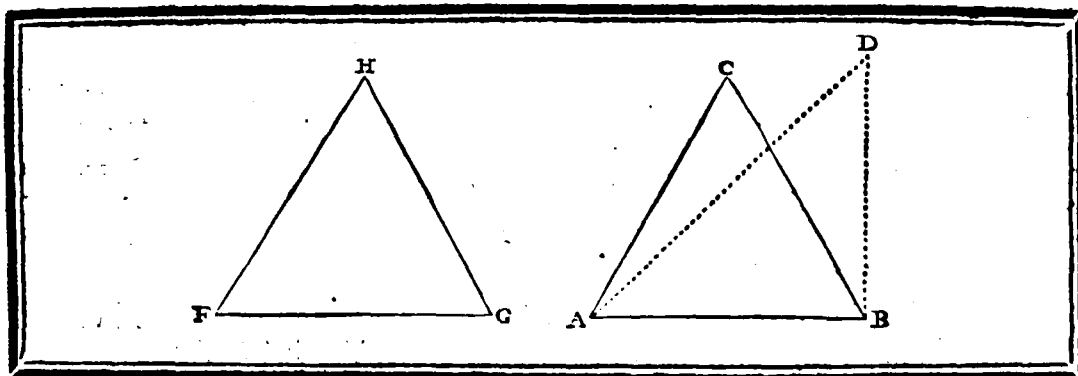
Du point D au point C tirez donc la droite DC.

Dem. 1^{re}.

Puisqu'on suppose $AC = AD$

1. Le $\triangle CAD$ sera un $\triangle$ isoscèle. D. 25. L. 1.
P. 5. L. 1.
2. Par conséquent $\angle b$ & $\angle d + c$ sur la base sont égaux entr'eux.
Derechef, puisqu'on suppose aussi $BC = BD$;
3. Le $\triangle CBD$ sera aussi un $\triangle$ isoscèle. D. 25. L. 1.
P. 5. L. 1.
4. Par conséquent $\angle c$ & $\angle b + a$ sur la base seront aussi égaux entr'eux.
Orant donc du dernier de ces $\angle b + a$ sa partie $\angle a$.
5. L' $\angle c$ sera $> \angle$ restant b . N. C.
Si à ce même $\angle c$ on ajoute donc $\angle d$.
6. L' $\angle$ entier $c + d$ sera à plus forte raison $> \angle b$. N. C.
7. Partant, $\angle c + d$ & $\angle b$ ne sont point égaux entr'eux.
Or, on vient de prouver, qu'en vertu de la supposition de ce cas, $\angle d + c$ & $\angle b$ sont égaux entr'eux (Arg. 2).
8. D'où il suit encore que cette supposition ne sçauroit avoir lieu, à moins que ces angles ne soient à la fois égaux & inégaux.
9. Ce qui est impossible. N. C.
10. Partant, la supposition, qui fait $AC = AD$ & $BC = BD$ est impossible.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. THEOREME. V.
Tous les triangles, (FHG , ACB), qui ont les trois côtés (FH , HG , GF) égaux aux trois côtés (AC , CB , BA) chacun à chacun : sont égaux entr'eux, & les angles compris par des côtés égaux, sont aussi égaux chacun à chacun.

HYPOTHESE.

- I. $FH = AC$.
- II. $HG = CB$.
- III. $GF = BA$.

THESE.

$$\Delta FHG = \Delta ACB, \text{ et } \begin{cases} \angle F = \angle A, \\ \angle G = \angle B \\ \angle H = \angle C \end{cases}$$

Préparation.

Qu'on s'imagine, que le ΔFHG soit posé sur le ΔACB , enforte

1. Que le point F convienne au point A .
2. Et la base FG à la base AB .

DEMONSTRATION.

Puis donc que le point F convient au point A (*Prep. 1*) & la ligne FG à la ligne AB (*Prep. 2*), & que ces lignes sont égales (*Hyp. 3*).

1. Il faut que le point G convienne au point B .

Ax. 9.

Les points extrêmes F & G du côté FG , convenant donc aux points extrêmes A & B du côté AB , (*Prep. 1. Arg. 1.*); & les droites FH , GH étant égales aux droites AC , BC , chacune à chacune.

2. Les droites FH , GH , conviendront nécessairement aux droites AC , BC , chacune à chacune.

Si non; on pourroit tirer des extrémités A & B , d'une ligne AB , à deux points différens C & D , & du même côté, deux droites AC , BC égales à deux autres droites AD , BD chacune à chacune. Ce qui est impossible.

P. 7. L. 1.

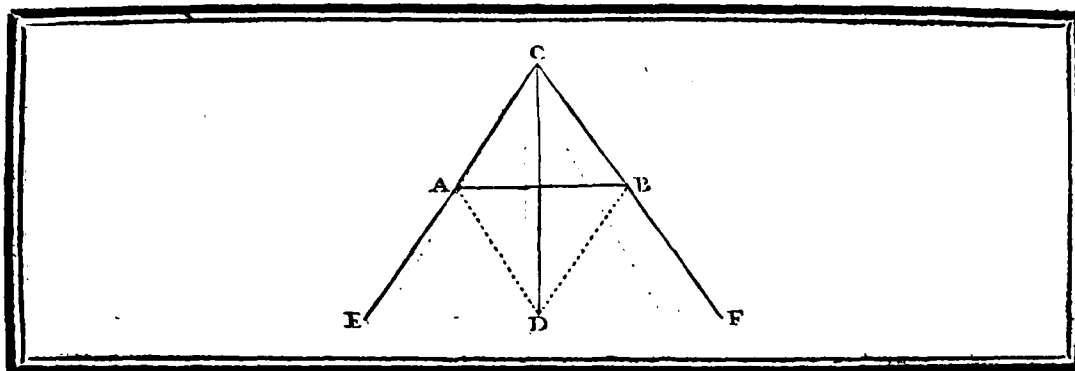
3. Ces côtés conviennent donc.

4. Mais la base FG convenant à la base AB (*Prep. 2.*), le côté FH au côté AC & le côté GH au côté BC (*Arg. 2.*)

5. Il suit que les ΔACB , FGH sont égaux entr'eux; aussi bien que leurs $\angle$ compris par des côtés égaux chacun à chacun.

Ax. 9.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IX. PROBLEME IV.
UN angle rectiligne (ECF) étant donné; le couper en deux parties égales (ECD, FCD).

DONNE
 ∠ rectiligne ECF.

CHERCHE.
 $\angle ECD = \angle FCD$.

Résolution.

1. Prenez CA de longueur arbitraire.
2. Faites $CB = CA$.
3. Du point A au point B tirez la droite AB.
4. Sur la droite AB construisez le Δ équilatéral ADB.
5. Du point C au point D tirez la droite CD.

P. 3. L. 1.

Dem. 1.

P. 1. L. 1.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

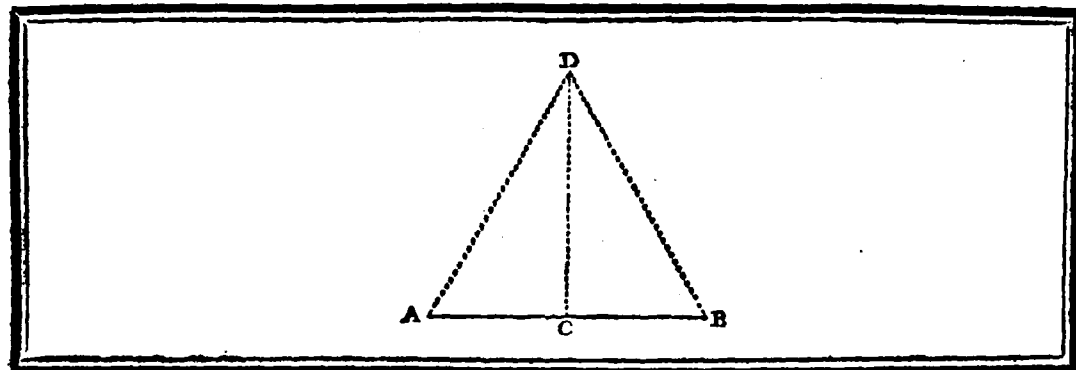
Puisque $AC = CB$ (Ref. 2), $DA = DB$ (Ref. 4), & le côté DC commun aux deux Δ CAD, CBD;

1. Ces deux Δ ont les trois côtés égaux chacun à chacun.
2. Partant les $\angle$ FCD, ECD, compris par les côtés égaux CA, CD; & CB, CD sont égaux entr'eux.

P. 8. L. 1.

C. Q. F. F.





PROPOSITION X. PROBLEME V.
Couper en deux parties égales, (AC, CB) une ligne donnée & terminée (AB).

DONNEE.

La droite terminée AB

CHERCHEE.

$AC = BC$.

Résolution.

1. Sur la droite AB construisez le Δ équilatéral ADB.
2. Coupez en deux parties égales $\angle$ ADB par la droite DC.

P. 1. L. 1.

P. 9. L. 1.

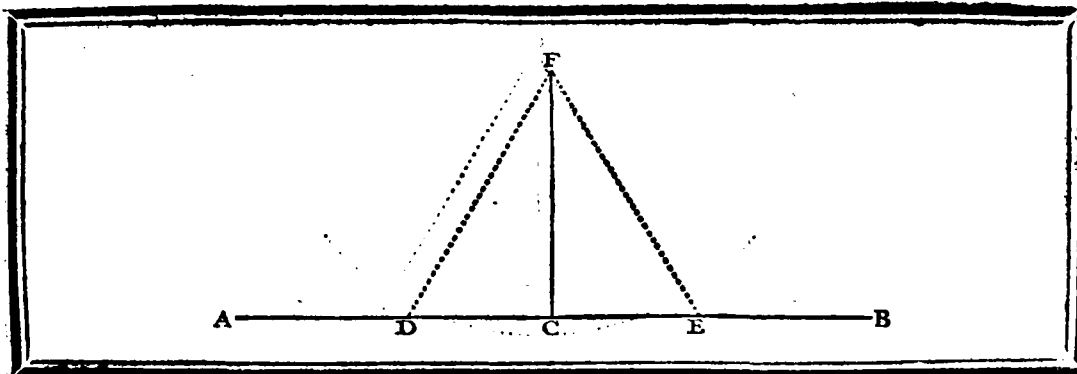
DEMONSTRATION.

- Puisque $AD = BD$ (Ref. 1.), que le côté DC est commun aux deux Δ ADC, BDC & $\angle$ compris ADC = $\angle$ compris BDC (Ref. 2).
1. Ces deux Δ ADC, BDC, ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun ; & $\angle$ compris ADC = $\angle$ compris BDC (Ref. 2).
 2. Partant, la base AC = à la base BC.

P. 4. L. 1.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XLV PROBLÈME VI.

D'un point quelconque (C), dans une droite indéfinie (AB), élever une perpendiculaire (CF) sur cette droite.

DONNÉE.

La droite indéfinie AB & le point C dans cette droite.

CHERCHER.

La droite CF élevée du point C $\perp$ sur AB.

Résolution.

1. DE part & d'autre du point C, prenez les droites CD, CE = entr'elles.
2. Sur la droite DE construisez le Δ équilatéral DFE.
3. Du point F au point C tirez la droite FC.

Prop. 3. L. 1.

Prop. 1. L. 1.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

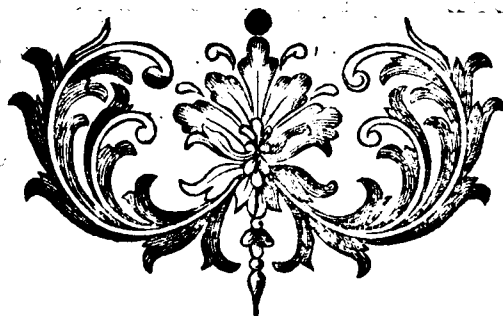
Puisque CD est = à CE (Ref. 1), FD = FE (Ref. 2), & que le côté CF est commun aux deux Δ DFC, EFC.

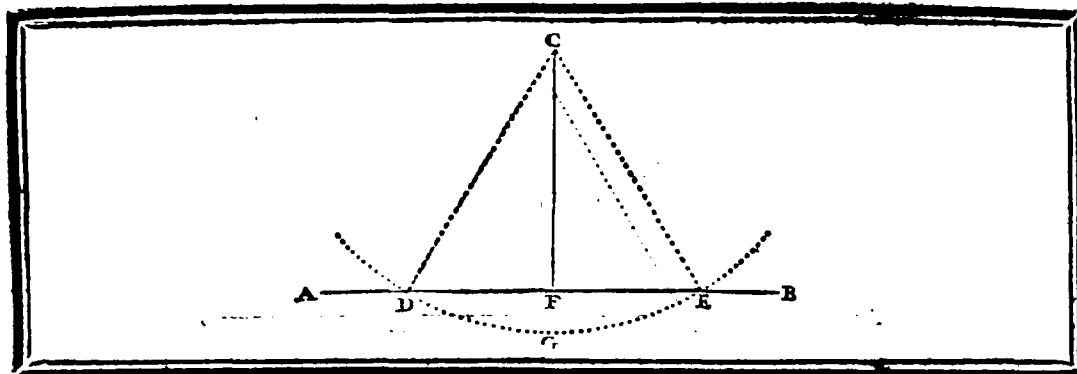
1. Il est évident que ces deux Δ ont les trois côtés égaux aux trois côtés chacun à chacun.
2. Par conséquent, les $\angle$ contigus FCD, FCE (compris par les côtés égaux FC, CD, item FC, CE) sont égaux entr'eux.
Mais c'est la droite FC qui tombant sur AB, forme ces $\angle$ contigus = entr'eux.
2. Partant, la droite FC est $\perp$ sur AB.

Prop. 8. L. 1.

Def. 10. L. 1.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XII. PROBLEME VII.

D'un point donné (C), hors d'une ligne droite indéfinie (AB); abaisser sur cette droite une ligne perpendiculaire (CF).

DONNÉE

La droite indéfinie AB et
le point C hors de cette droite.

CHERCHEE.

La droite CF abaissée du point C $\perp$ sur AB.

Résolution.

1. **D**E l'autre côté de la droite AB, par rapport au point donné C, prenez un point quelconque G.
2. Du point C comme centre, & du rayon CG, décrivez un arc de $\odot$ DGE, qui coupe la ligne indéfinie AB en deux points D & E.
3. Coupez la ligne DE en deux parties égales, au point F.
4. Du point C au point F tirez la droite CF.

Dem. 3.
P. 10. L. 1.
Dem. 1.

Préparation.

Du point C aux points D & E tirez les droites CD & CE.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les lignes CD, CE, sont tirées du centre C à la $\odot$ DGE (Ref. 2. & Prep.),

1. Ces lignes sont des rayons d'un même $\odot$.

2. Partant, la ligne CD est = à la ligne CE.

Puis donc que CD est = à CE (Arg. 2), DF = FE (Ref. 3) & que le côté CF est commun aux deux $\triangle$ DCF, ECF

3. Ces deux $\triangle$ ont les trois côtés égaux aux trois côtés chacun à chacun.

4. Partant, les $\angle$ CFD, CFE, compris par les côtés égaux FC, FD, & FC, FE sont = entr'eux.

Mais ces deux $\angle$ CFD, CFE = entr'eux (Arg. 4), sont des $\angle$ contigus formés par la ligne CF qui tombe sur la ligne AB,

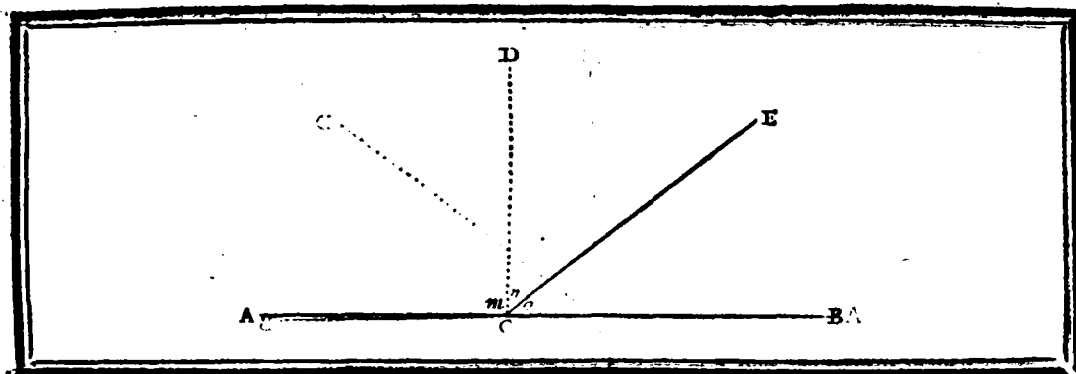
5. Partant, chacun de ces deux $\angle$ CFD, CFE, est un $\angle$, & la ligne CF est $\perp$ sur la ligne AB.

D. 16. L. 1.
D. 15. L. 1.

P. 8. L. 1.

D. 10. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIII. THEOREME VI.
Si une ligne droite (EC) tombe sur une autre ligne droite (AB): elle fait ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

HYPOTHESE

EC est une droite tombant sur AB, au point C.

THESE

- I. Ou chacun des $\angle ACE, ECB$ est un $\angle$.
 II. Ou leur somme est $\equiv$ à deux $\angle$.

SUP. I. Si $\angle ACE \equiv \angle ECB$

DEMONSTRATION.

Puisque les angles contigus ACE, ECB, formés par les droites CE & AB sont égaux entr'eux (*Sup.*).

1. Il s'en suit que chacun d'eux est un $\angle$.

D. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

SUP. II. Si $\angle ACE$ n'est pas $\equiv$ à $\angle ECB$.

Préparation.

Du point de rencontre C élevez sur AB la $\perp$ CD.

P. 11. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque DC est $\perp$ sur AB (*Prep.*).

1. Les deux $\angle DCA$ & $\angle DCB$ sont des $\angle$.

D. 10. L. 1.

Mais comme $\angle DCB \equiv$ aux deux $\angle n + o$; si on ajoute de part & d'autre $\angle DCA$ ou $\angle m$.

2. Les deux $\angle DCA + \angle DCB$ sont $\equiv$ aux trois $\angle m + n + o$.

Ax. 1.

Derechef, puisque $\angle ECA \equiv$ aux deux $\angle m + n$, si on ajoute de part & d'autre $\angle ECB$ ou $\angle o$.

3. Les deux $\angle ECA, ECB$ sont aussi $\equiv$ à ces mêmes trois $\angle m + n + o$.

Ax. 2.

4. Par conséquent, les deux $\angle ECA$ & $\angle ECB$ sont $\equiv$ aux deux $\angle DCA$ & $\angle DCB$.

Ax. 1.

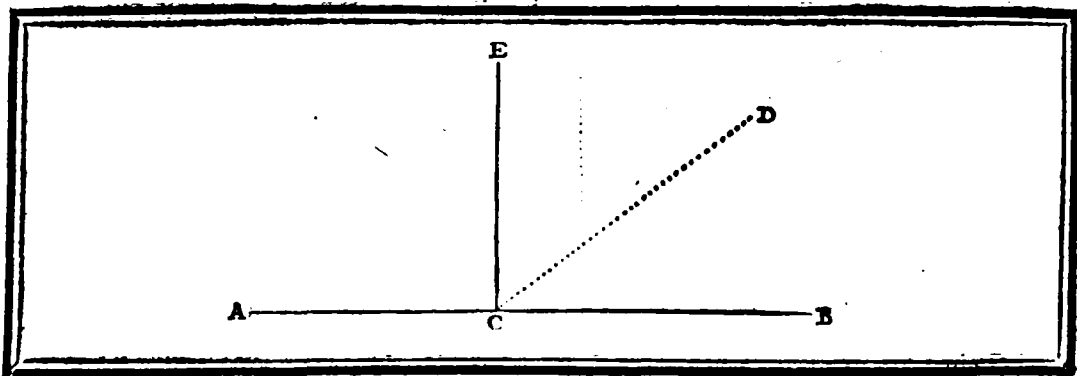
Mais les deux $\angle DCA$ & $\angle DCB$ étant deux $\angle$ (*Arg. 1*).

5. Il est évident, que la somme des deux $\angle ECA$ & $\angle ECB$ est aussi $\equiv$ à deux $\angle$.

Ax. 1.

D 2

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. THEOREME VII.

SI deux droites (AC, BC) rencontrent de part & d'autre une droite (EC), en un même point (C), faisant avec cette droite (EC) la somme des deux angles contigus (ACE, ECB) égale à deux angles droits: ces deux lignes droites (AC, BC) se rencontreront directement.

HYPOTHESE.

1. Les deux lignes AC, BC se rencontrent au point C.

11. Les $\angle$ contigus ACE + ECB sont = à deux $\angle$.

THESE.

Les lignes AC, BC, se rencontrant directement

c. à. d. elles ne forment qu'une même ligne droite AB.

DEMONSTRATION.

Si non.

On pourra prolonger AC quelque part de C, en D, en sorte que le prolongement DC ne fasse avec AC, qu'une même ligne droite ACD.

Dem. 1.

Préparation.

Prolongez donc AC, de C en D.

Dem. 2.

Puis donc que la ligne ACD est une ligne droite sur laquelle tombe la ligne EC.

1. Il s'ensuit, que la somme des $\angle$ contigus ACE + ECD est = à deux $\angle$.

P. 13. L. 1.

Mais les $\angle$ ACE + ECB étant aussi = à deux $\angle$ (Hyp. 2).

2. Les deux $\angle$ ACE + ECB sont donc = aux deux $\angle$ ACE + ECD.

Ax. 1.

Otant donc de part & d'autre $\angle$ commun ACE.

3. Les $\angle$ restans ECB & ECD seront égaux entr'eux.

Ax. 3.

Mais $\angle$ ECB étant le tout, & $\angle$ ECD sa partie,

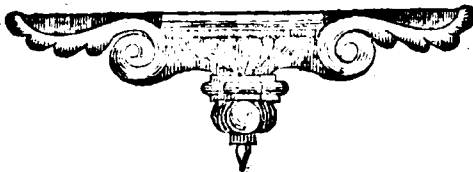
4. Il s'ensuit, que le tout est égal à sa partie.

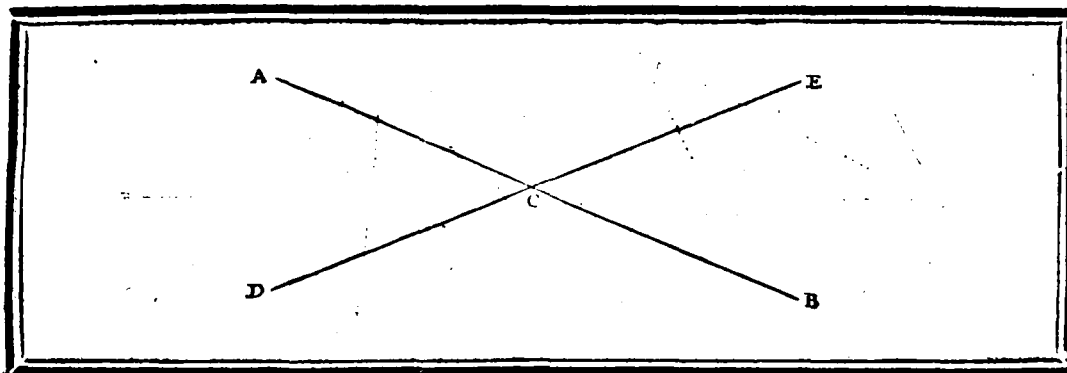
Ax. 8.

5. Ce qui est impossible.

6. Partant, les lignes AC & BC se rencontrent directement; ou ne forment qu'une même ligne droite AB.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XV. THEOREME VIII.

Si deux lignes droites (AB, DE) s'entre-coupent (en C): les angles (ECA, DCB & ACD, BCE), opposés au sommet (C), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

AB, DE sont des lignes droites,
qui s'entre-coupent au point C.

THESE.

- I. $\angle ECA = \angle DCB$.
- II. $\angle ACD = \angle BCE$.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite AC tombe sur la droite DE (Hyp.),

1. La somme des deux $\angle$ contigus ECA + ACD est = à deux $\angle$.

Prop. 13. L. 1.

Derechef, puisque la droite DC tombe sur la droite AB (Hyp.),

2. La somme des $\angle$ contigus ACD + DCB est aussi = à deux $\angle$.

Prop. 13. L. 1.

3. Par conséquent, les $\angle$ ECA + ACD sont égaux aux $\angle$ ACD + DCB. Ax. 1.

Retranchant donc de ces sommes égales (Arg. 3), $\angle$ ACD, qui leur est commun,

4. Les $\angle$ restans ECA, DCB, opposés au sommet C, sont = entr'eux.

Ax. 3.

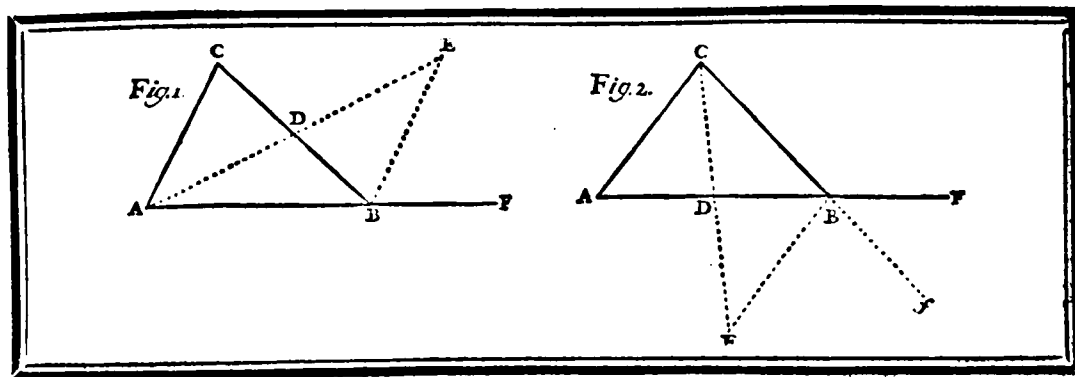
C. Q. F. D. I.

Par un raisonnement semblable on prouvera

5. Que $\angle$ ACD est = à $\angle$ BCE qui lui est opposé au sommet.

C. Q. F. D. II.





PROPOSITION XVI. THEOREME IX.
EN tout triangle (ACB), dont un des côtés (comme AB) est prolongé, l'angle extérieur (CBF) est plus grand que chacun des intérieurs opposés (ACB, CAB).

HYPOTHESE.

- I. ACB est un Δ .
- II. $\angle CBF$ est un $\angle$ extérieur formé par le côté prolongé AB.
- III. Les $\angle ACB$ & CAB sont intérieurement opposés.

THESE.

$\angle$ extérieur $CBF >$ que $\angle$ intérieur opposé ACB , ou CAB .

Préparation.

1. Partagez CB en deux également au point D (Fig. 1).
2. Du point A au point D tirez la ligne AD & prolongez la indéfiniment en E.
3. Faites $DE = DA$.
4. Du point B au point E tirez la droite BE.

P. 10. L. 1.

Dem. 1.

Prop. 3. L. 1.

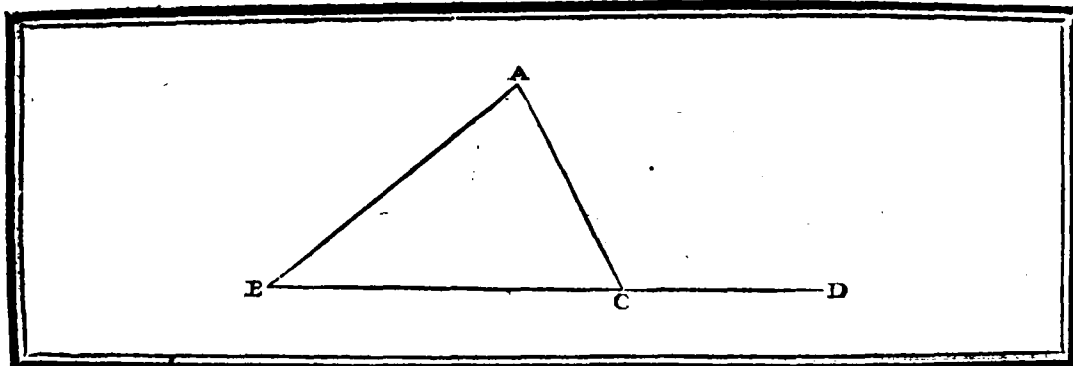
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

LEs droites AE, BC (Fig. 1) s'entre-coupent au point D. (Prep. 2).

1. Par conséquent, les $\angle$ opposés au sommet CDA, BDE sont $=$ entr'eux. Puis donc que dans les ΔACD , DEB, le côté CD est $=$ au côté DB (Pr. 1), $AD = DE$ (Prep. 3) & $\angle$ compris CDA est $=$ à $\angle$ compris BDE. (Arg. 1). Prop. 15. L. 1.
2. Il suit que les autres $\angle$ sont $=$ aux autres $\angle$, chacun à chacun de ceux qui sont opposés à des côtés égaux. Prop. 4. L. 1.
3. Or les $\angle ACD$, DBE sont opposés aux côtés égaux AD, DE (Prep. 3). Donc $\angle ACD$ est $=$ à $\angle DBE$. Or $\angle CBF$ étant le tout, & $\angle DBE$ sa partie.
4. Il s'ensuit que $\angle CBF > \angle DBE$. Ax. 8.
5. Partant, $\angle$ extérieur CBF est aussi $>$ $\angle$ intérieur ACB. N. C.
- De la même manière, en partageant le côté AB en deux également, au point D (Fig. 2), on prouvera par un raisonnement semblable,
6. Que $\angle$ extérieur ABF est $>$ $\angle$ intérieur CAB.
7. Mais cet $\angle ABF$ est opposé au sommet à $\angle CBF$. Prop. 15. L. 1.
8. D'où il suit que $\angle ABF = \angle CBF$. N. C.
8. Partant, il est encore vrai que $\angle$ extérieur $CBF >$ $\angle$ intérieur CAB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. THEOREME. X.
EN tout triangle (BAC), deux angles quelconques (comme ABC, ACB) sont moindres que deux droits.

HYPOTHESE.
 ABC est un Δ .

THESE.
 Les $\angle ABC + \angle ACB$ sont $<$ deux $\angle$.

Préparation.

Prolongez le côté BC (sur lequel les deux $\angle$ ABC, ACB sont placés) en D.

Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puisque $\angle ACD$ est un $\angle$ extérieur du Δ BAC.

1. Il est $>$ que son intérieur opposé ABC.

Prop. 16. L. 1.

Puis donc que $\angle ACD$ est $>$ $\angle ABC$; si on ajoute de part & d'autre $\angle ACB$,

2. Les $\angle ACD + \angle ACB$ seront $>$ que les $\angle ABC + \angle ACB$.

Ax. 4.

Mais les $\angle ACD + \angle ACB$ sont des $\angle$ contigus, formés par la droite AC, qui tombe sur BD (*Prep.*).

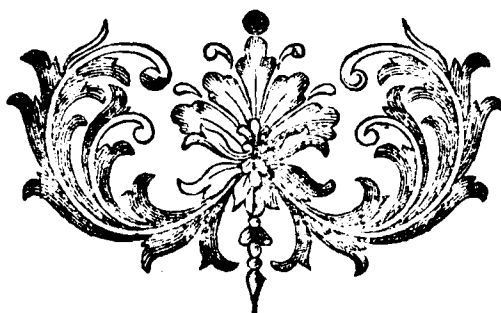
3. Par conséquent, ces $\angle ACD + \angle ACB$ sont $=$ à deux $\angle$.

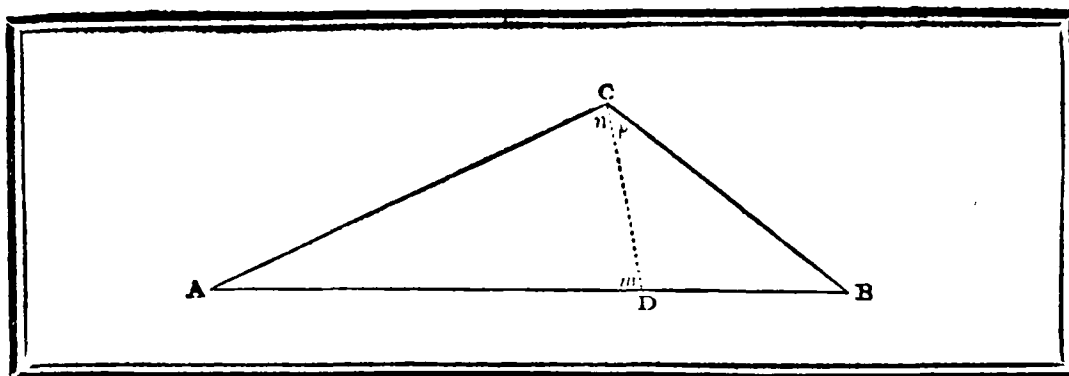
Prop. 13. L. 1.

Or les $\angle ACD + \angle ACB$ étant $=$ à deux $\angle$ (*Arg. 3*) & ces mêmes $\angle$ étant $>$ que les $\angle ABC + \angle ACB$ (*Arg. 2*).

4. Il s'enfuit que les $\angle ABC + \angle ACB$ sont $<$ deux $\angle$.

N. C.
C. Q. F. D.





PROPOSITION XVIII. THEOREME XI.
Dans tout triangle (ACB); les plus grands côtés sont opposés aux plus grands angles.

HYPOTHESE.

ACB est un Δ , ou AB est un côté $>$ AC.

THESE.

$\angle ACB$, opposé au $>$ côté AB, est plus grand que $\angle ABC$ opposé au moindre côté AC.

Préparation.

Puisque le côté AB $>$ AC (*Hyp.*).

1. Faites $AD = AC$.
2. Du point C au point D tirez la droite CD.

Prop. 3. L. 1.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le côté AD est $=$ au côté AC (*Prep. 1*).

1. Le ΔACD est isoscèle.

D. 25. L. 1.

2. Partant, les $\angle m$ & n sur la base CD sont $=$ entr'eux.

Prop. 5. L. 1.

Or $\angle m$ étant un $\angle$ extérieur du ΔDCB .

3. Il s'ensuit, qu'il est $>$ $\angle$ intérieur opposé DBC.

Prop. 16. L. 1.

Mais $\angle m$ est $=$ à $\angle n$ (*Arg. 2*).

4. Donc $\angle n$ est aussi $>$ $\angle DBC$.

N. C.

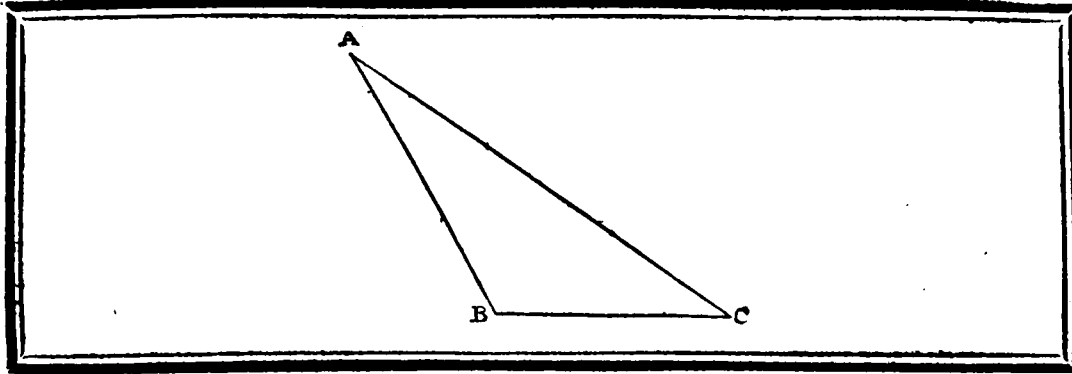
Et si à $\angle n$ on ajoute encore $\angle p$.

5. $\angle n + p$, ou $\angle ACB$, opposé au plus grand côté AB, sera à plus forte raison $>$ $\angle DBC$, ou $\angle ABC$ opposé au moindre côté AC.

N. C.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIX. THEOREME XII.

EN tout triangle (BAC), les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés.

HYPOTHESE.

Dans le $\triangle BAC$, $\angle C$ est $> \angle A$.

THESE.

Le côté AB opposé à $\angle C$ est $>$ le côté CB opposé à $\angle A$.

DEMONSTRATION.

SI non.

Le côté AB est ou égal, ou plus petit que le côté CB.

N. C.

CAS. I. Supposé que AB soit $=$ CB.

Puis donc que le côté AB est $=$ au côté CB (Sup. 1).

1. Le $\triangle BAC$ est isocèle.

2. Partant, les $\angle C$ & A sur la base sont $=$ entr'eux.

Or ces $\angle C$ & A ne sont pas $=$ entr'eux (Hyp).

3. Donc les côtés AB & CB ne sont point $=$ entr'eux non plus.

Def. 25. L. 1.

Prop. 5. L. 1.

CAS. II. Supposé que AB soit $<$ CB.

Puis donc que le côté AB est $<$ le côté CB (Sup. 2).

1. Il s'ensuit que $\angle C$, opposé au plus petit côté AB, est $<$ $\angle A$ opposé au plus grand côté CB.

Or $\angle C$ n'est pas $<$ $\angle A$ (Hyp).

2. Par conséquent le côté AB ne sauroit être $<$ le côté CB.

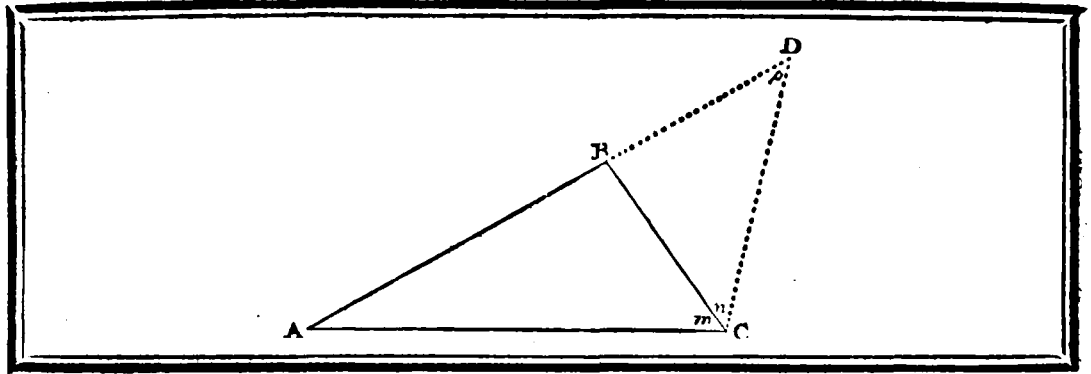
Le côté AB n'étant donc ni $=$ au côté CB (Cas. 1.); ni $<$ le côté CB (Cas. 2).

3. Il s'ensuit, que ce côté AB est $>$ le côté CB.

Prop. 18. L. 1.

N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XX. THEOREME XIII.
EN tout triangle (ABC): deux côtés quelconques (AB, BC) sont plus grands que le troisième (AC).

HYPOTHESE.
 ABC est un Δ .

THESE.
 Deux côtés quelconques, comme $AB + BC$,
 sont $>$ le troisième AC.

Préparation.

1. Prolongez un des deux côtés, comme AB, à l'infini.
2. Faites $BD = BC$.
3. Du point C au point D tirez la droite CD.

Dem. 2.
 Prop. 3. L. 1.
 Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le ΔBDC le côté BD est $=$ au côté BC (Prep. 2).

1. Ce triangle est isoscele.

2. Par conséquent, les $\angle$ sur la base n & p sont $=$ entr'eux.

Or $\angle m + n$ étant le tout & $\angle n$ sa partie.

3. Il s'enfuit, que $\angle m + n$ est $>$ $\angle n$.

Mais $\angle m + n$ étant $>$ $\angle n$ (Arg. 3) & cet $\angle n$ étant $=$ à $\angle p$ (Arg. 2).

4. Il est évident, que $\angle m + n$ est $>$ $\angle p$.

Puis donc que dans le ΔADC , $\angle m + n$ est $>$ $\angle p$ (Arg. 4).

5. Le côté AD opposé au plus grand $\angle m + n$ est aussi $>$ le côté AC opposé au plus petit $\angle p$.

Mais à cause que la droite BD est $=$ à la droite BC (Prep. 2); si on ajoute de part & d'autre le côté AB,

6. Il s'enfuit, que $AB + BD$, ou AD est $=$ à la somme des deux côtés. $AB + BC$.

Mais AD est $>$ le côté AC (Arg. 5).

7. Partant, la somme des deux côtés $AB + BC$ est aussi $>$ le troisième côté AC.

Def. 25. L. 1.
 Prop. 5. L. 1.

Ax. 8.

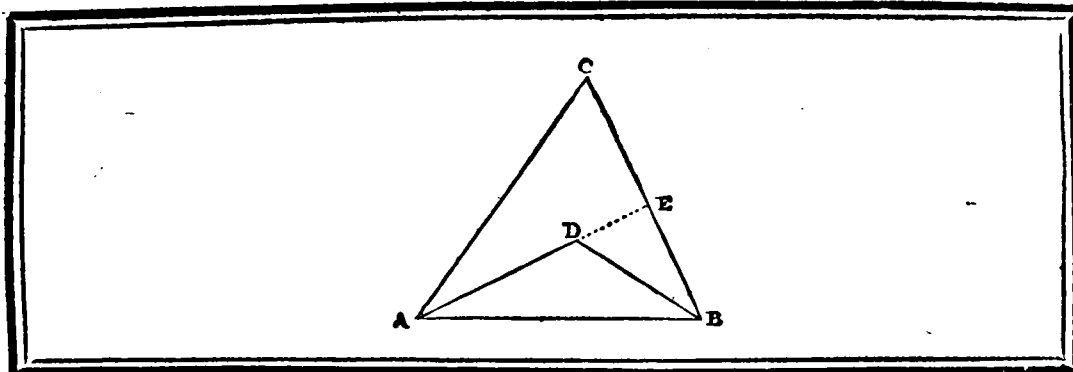
N. C.

Prop. 19. L. 1.

Ax. 2.

N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. THEOREME XIV.

SI des extrémités (A & B) d'un côté (AB) de quelque triangle (ACB), on tire à un point quelconque (D), pris au dedans de ce triangle, deux lignes droites (DA, DB): ces deux droites seront plus petites que les deux côtés (CA, CB) de ce triangle; mais elles comprendront un plus grand angle (ADB).

HYPOTHESE.

DA, DB sont deux droites tirées, des points A & B au point D, pris au dedans du $\triangle ACB$.

THESE.

- I. $DA + DB < CA + CB$.
- II. $\angle ADB > \angle C$.

Préparation.

Prolongez la droite DA, jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté CB en E. Dem. 2.

DEMONSTRATION.

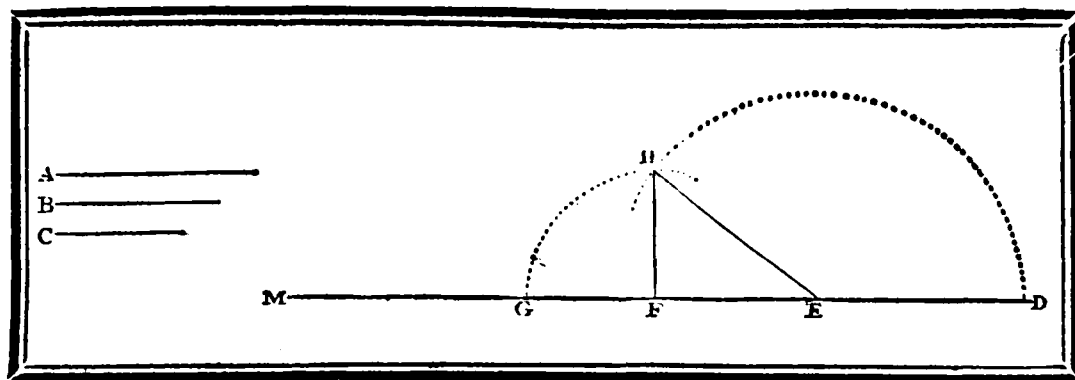
- P**uisque la figure ACE est un $\triangle$ (Def. 21. L. 1).
1. Les deux côtés CA + CE sont $>$ le troisième AE. Prop. 20. L. 1.
 - Si on ajoute de part & d'autre la ligne EB,
 2. Les côtés CA + CB (c. à d. CA + CE + EB) sont $>$ les lignes AE + EB. Ax. 4.
 - Derechef, la figure DEB étant aussi un $\triangle$ (Def. 21. L. 1).
 3. Les deux côtés EB + ED sont $>$ le troisième DB. Prop. 20. L. 1.
 - Si on ajoute donc de part & d'autre, la partie commune DA;
 4. Les lignes AE + EB (c. à d. EB + ED + DA) sont $>$ les lignes DA + DB. Ax. 4.
 - Mais on a prouvé, que les côtés CA + CB sont $>$ les lignes AE + EB (Arg. 2).
 5. Partant, à plus forte raison les côtés CA + CB seront $>$ les lignes DA + DB. N. C.

C. Q. F. D. I.

De même; puisque $\angle ADB$ est un $\angle$ extérieur du $\triangle DEB$ (Prep.) & que $\angle DEB$ est son intérieur opposé,

1. Il suit, que $\angle ADB$ est $>$ $\angle DEB$. Prop. 16. L. 1.
2. Par la même raison; $\angle DEB$ est $>$ $\angle C$.
- Or puisque $\angle ADB >$ $\angle DEB$ (Arg. 1), & que $\angle DEB$ est $>$ $\angle C$ (Arg. 2).
3. Il est évident, que $\angle ADB$ est à plus forte raison $>$ $\angle C$. N. C.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXII. PROBLEME VIII.
DE trois lignes droites, égales à trois autres droites données (A, B, C), construire un triangle (FHE); en supposant que deux quelconques de ces droites données soient plus grandes que la troisième.

DONNEES.

Les lignes droites A, B, C telles que
 $A+B > C, A+C > B, C+B > A.$

CHERCHEE.

La construction d'un $\triangle FHE$, tel que
 $EH = A, FE = B, \text{ \& } FH = C.$

Résolution.

1. **T**irez la droite indéterminée DM.
2. Faites $ED =$ à la donnée A, $FE =$ à la donnée B, & $FG =$ à la donnée C.
3. Du point E comme centre & du rayon ED décrivez le $\odot DH$.
4. Du point F comme centre & du rayon FG décrivez le $\odot GH$.
5. Des points E & F, au point d'intersection H, tirez les droites EH, FH.

Dem. 1.

Prop. 3. L. 1.

Dem. 3.

Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Les droites ED, EH étant tirées du centre E à la $\odot DH$ (Ref. 3 & 5).

1. Ces deux droites ED, EH sont des rayons d'un même $\odot DH$.
2. Par conséquent, la droite ED est $=$ à la droite EH.
 Puis donc que ED est $=$ à EH (Arg. 2) & que la droite donnée A est aussi $=$ à la même ligne ED (Ref. 2).
3. Il s'ensuit, que EH est $=$ à la donnée A.
4. La ligne FH est $=$ à la donnée C.
 Or le côté EH étant $=$ à la donnée A (Arg. 3), le côté FH $=$ à la donnée C (Arg. 4), & enfin le côté FE $=$ à la donnée B (Ref. 2).
5. Il est évident, que les trois côtés EH, FE, FH du $\triangle FHE$, que l'on vient de construire, sont $=$ aux trois droites données A, B, C.

Def. 16. L. 1.

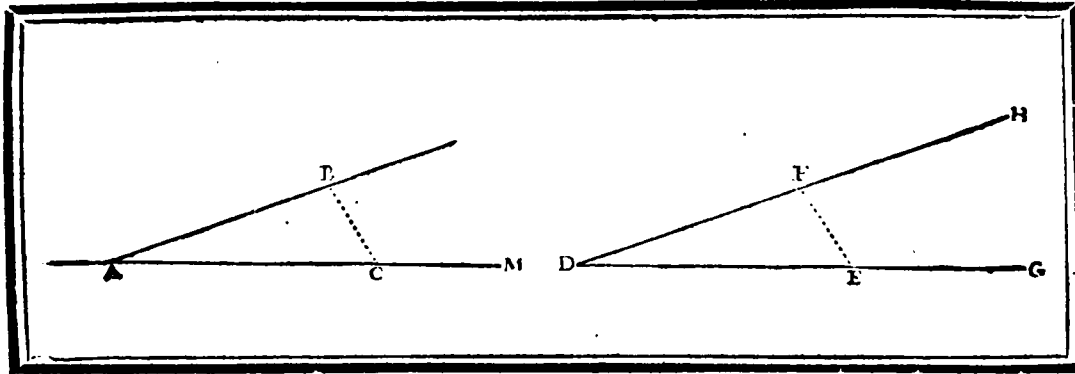
Def. 15. L. 1.

Ax. 1.

C. Q. F. F.

R E M A R Q U E.

La condition ajoutée, que deux des données quelconques soient plus grandes que la troisième, est essentielle, en vertu de la XX Prop. du 1 Livre; sans cette condition les cercles décrits des centres E & F ne sçauroient s'entre-couper, défaut qui rendroit la construction impossible.



U PROPOSITION XXIII. PROBLEME IX.
 Ne droite indéterminée (AM) étant donnée, avec un des points (A); décrire sur cette droite & à ce point un angle rectiligne (BAC), égal à un autre angle rectiligne donné (HDG).

DONNÉE.

1. La droite indéterminée AM,
- II. Le point A dans la droite AM.
- III. L'angle rectiligne HDG.

CHERCHÉE.

Un angle BAC décrit sur AM;
 au point A = à $\angle$ HDG.

Résolution.

1. Sur les jambes DG, DH, de l'angle donné HDG, prenez deux points quelconques E & F.
2. Du point E au point F tirez la droite EF.
3. Sur la droite indéterminée AM & au point A, construisez un $\triangle ABC$, dont les trois côtés soient égaux aux trois côtés du $\triangle DFE$.

Dem. 1.

Prop. 22. L. I.

DÉMONSTRATION.

Puisque les trois côtés AB, AC, BC du $\triangle ABC$ sont = aux trois côtés DF, DE, FE du $\triangle DFE$ chacun à chacun (Ref. 3).

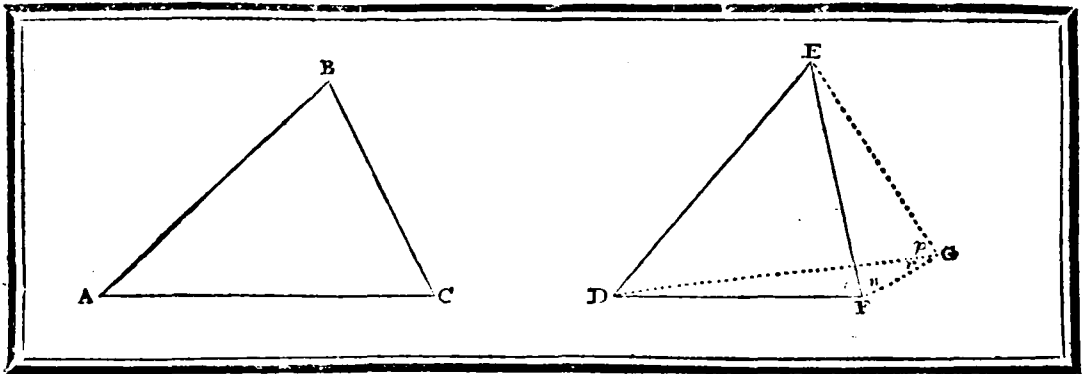
1. Il s'ensuit, que les $\angle$ BAC & HDG, opposés aux côtés égaux BC, FE, sont = entr'eux.

Prop. 8. L. 1.

Mais $\angle$ BAC étant = à $\angle$ donné HDG, & se trouvant décrit outre cela sur la droite donnée AM au point donné A (Ref. 3).

2. Il s'ensuit, qu'on a décrit sur une droite donnée AM, & à son point donné A, un $\angle$ rectiligne BAC = à un autre $\angle$ rectiligne donné HDG.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXIV. THEOREME XV.

Si deux triangles (ABC , DEF), ont deux côtés (BA , BC) égaux à deux côtés (ED , EF) chacun à chacun; mais l'angle compris (B) plus grand que l'angle compris (DEF): la base (AC) opposée au plus grand angle, sera aussi plus grande que la base (DF) opposée au plus petit angle.

HYPOTHESE.

- I. $BA = ED$
- II. $BC = EF$.
- III. $\angle B > \angle DEF$.

THESE.

La base AC est $>$ la base DF .

Préparation.

1. Sur la ligne DE au point E décrivez $\angle DEG = \angle B$ donné B .
2. Faites $EG = BC$ ou à EF .
3. Des points D & F au point G tirez les droites DG , FG .

Prop. 23. L. 1.
Prop. 3. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le $\triangle ABC$ les côtés BA , BC sont $=$ aux côtés ED , EG du $\triangle DEG$ (Hyp. 1. Prep. 2) & $\angle B = \angle DEG$ (Prep. 1).

1. Il suit, que la base AC est $=$ à la base DG .
Derechef; puisque EG est $=$ au côté EF (Prep. 2, Hyp. 2).
2. Le $\triangle FEG$ est un $\triangle$ isocèle.
3. Partant, $\angle m = \angle r + p$.
Puis donc que $\angle m = \angle r + p$ (Arg. 3); si on retranche du dernier sa partie p ,
4. L'angle m sera $>$ $\angle r$.
Et si à $\angle m$ on ajoute encore $\angle n$;
5. L'angle entier $m + n$ sera beaucoup $>$ $\angle r$.
6. Par conséquent, le côté DG , opposé au plus grand $\angle m + n$, est $>$ le côté DF opposé au plus petit $\angle r$.
Or la droite DG étant $>$ DF (Arg. 6) & cette même droite DG étant $=$ à la base AC (Arg. 1).
7. Il est évident, que la base AC est aussi $>$ la base DF .

Prop. 5. L. 1.

Def. 25. L. 1.

Prop. 5. L. 1.

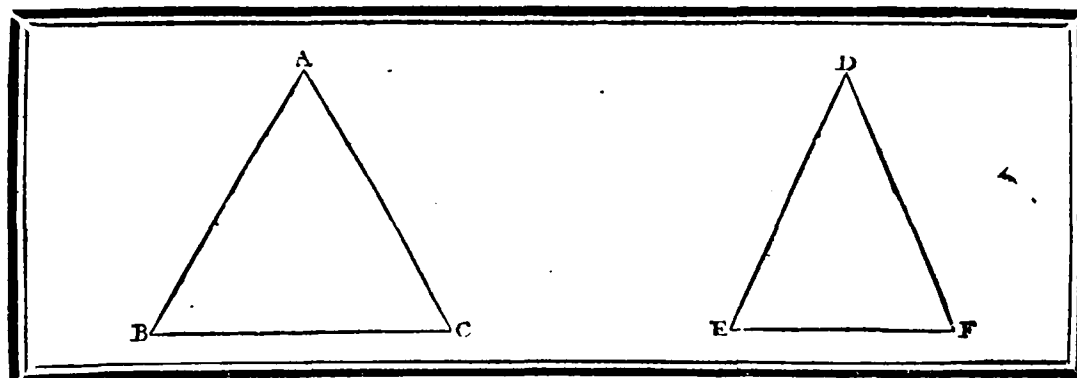
N. C.

N. C.

Prop. 19. L. 1.

N. C.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXV. THEOREME XVI.

SI deux triangles (BAC, EDF), ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun, mais la base (BC) plus grande que la base (EF): l'angle (BAC) opposé à la plus grande base (BC), fera aussi plus grand que l'angle (D) opposé à la plus petite base (EF).

HYPOTHESE.

- I. $AB = DE$.
- II. $AC = DF$.
- III. $BC > EF$.

THESE.

L'angle A opposé à la plus grande base BC est $> \angle D$ opposé à la plus petite base EF.

DEMONSTRATION.

SI non.

L'angle A est ou égal ou plus petit que l'angle D.

N. C.

CAS. I. Supposé que $\angle A$ soit $= \angle D$.

Puisque $\angle A$ est $= \angle D$ (Sup. 1) & que les côtés AB, AC & DE, DF, qui comprennent ces $\angle$, sont égaux chacun à chacun (Hyp. 1 & 2).

1. La base BC est $=$ à la base EF.

Prop. 4. L. 1.

Mais la base BC n'est point $=$ à la base EF (Hyp. 3).

2. Donc $\angle A$ ne peut point être $= \angle D$.

CAS. II. Supposé que $\angle A$ soit $< \angle D$.

Puisque $\angle A$ est $< \angle D$ (Sup. 2) & que les côtés AB, AC & DE, DF, qui comprennent ces $\angle$, sont égaux chacun à chacun (Hyp. 1 & 2).

1. La base BC est $<$ la base EF.

Prop. 24. L. 1.

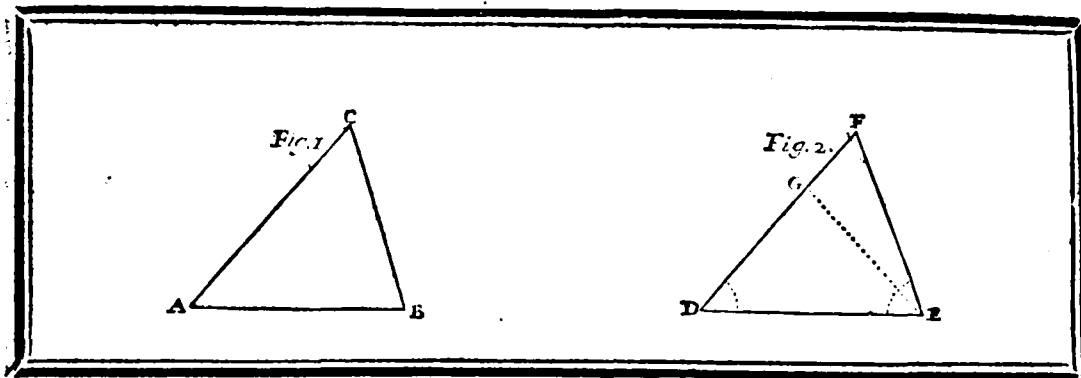
Or la base BC n'est pas $<$ que la base EF (Hyp. 3).

2. Donc $\angle A$ n'est pas $< \angle D$.

Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal non plus (Cas 1).

3. Par conséquent $\angle A$, qui est opposé à la plus grande base BC, est $> \angle D$, qui est opposé à la plus petite base EF.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVI. THEOREME XVII.

SI deux triangles (ACB, DFE), ont deux angles (A & B) égaux à deux angles (D & FED) chacun à chacun, & un côté égal à un côté; soit, que ce côté, (comme AB & DE) soit adjacent aux deux angles égaux; soit, qu'il se trouve opposé (comme AC & DF) à un de ces angles: ils auront aussi les deux autres côtés (AC, BC ou AB, BC) égaux aux deux autres côtés (DF, EF ou DE, EF) chacun à chacun, & le troisième angle (C) égal au troisième angle (F).

CAS. I.

HYPOTHESE

- I. $\angle A = \angle D$.
- II. $\angle B = \angle FED$.
- III. $AB = DE$.

Lorsque les côtés égaux AB, DE
sont adjacens aux angles égaux A & D,
item B & FED, (Fig. 1 & 2).

THESE.

- I. $AC = DF$.
- II. $BC = EF$.
- III. $\angle C = \angle F$.

DEMONSTRATION.

SI non.

Les côtés sont inégaux, & l'un, comme DF, sera $>$ l'autre AC.

Préparation.

1. Retranchez donc du plus grand côté DF une partie DG $=$ à AC.
2. Du point G au point E tirez la droite GE.

Prop. 3. L. I.
Dem. 1.

Puis donc que dans les $\triangle ACB$, DGE le côté AC est $=$ au côté DG (Prop. 1),
AB $=$ DE (Hyp. 3) & que $\angle$ compris A est $=$ à $\angle$ compris D (Hyp. 1).

1. Les $\angle$ B & GED, opposés aux côtés égaux AC & DG, sont $=$ entr'eux.
Mais $\angle$ B étant $=$ à $\angle$ FED (Arg. 1) & ce même $\angle$ B étant aussi $=$ à
 $\angle$ FED (Hyp. 2).

Prop. 4. L. I.

2. Il s'enfuit, que $\angle$ GED est $=$ à $\angle$ FED.
Or $\angle$ FED étant le tout & $\angle$ GED sa partie.

Ax. 1.

3. Le tout seroit $=$ à sa partie.
4. Ce qui est impossible.
5. Les côtés AC, DF ne sont donc point inégaux.
6. Partant, il sont égaux, ou $AC = DF$.

Ax. 8.

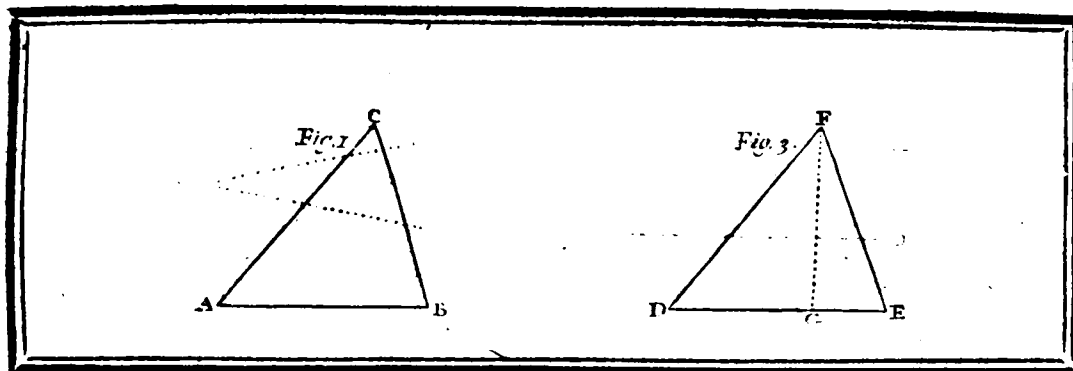
N. C.

C Q. F. D. I.

- Puis donc que dans les $\triangle ACB$, DFE, le côté AC est $=$ au côté DF
(Arg. 6), AB $=$ DE (Hyp. 3), & que $\angle$ compris A est $=$ à $\angle$ compris D (Hyp. 1).
7. Le troisième côté BC est aussi $=$ au troisième côté EF, & les $\angle$ C & F opposés aux côtés égaux AB, DE sont aussi $=$ entr'eux.

Prop. 4. L. I.

C. Q. F. D. II. & III.



CAS. II.

HYPOTHESE.

- I. $\angle A = \angle D$.
- II. $\angle B = \angle E$.
- III. $AC = DF$.

Lorsque les côtés égaux AC, DF se trouvent opposés aux angles égaux $B \& E$ (Fig. 1 & 3).

THESE.

- I. $AB = DE$.
- II. $BC = EF$.
- III. $\angle C = \angle F$.

DEMONSTRATION.

Si non.

Les côtés AB, DE sont inégaux: & l'un, comme DE , sera $>$ l'autre AB .

Préparation.

- 1. Retranchez donc du plus grand côté DE une partie $DG = AB$.
- 2. Du point G au point F tirez la droite GF .

Prop. 3. L. I.
Dem. 1.

Puis donc que dans les $\triangle ACB, DFG$ le côté AC est $=$ au côté DF (Hyp. 3), $AB = DG$ (Prep. 1) & que $\angle$ compris A est $=$ à $\angle$ compris D (Hyp. 1).

- 1. Les autres $\angle B \& DGF$, opposés aux côtés égaux AC, DF , sont $=$ entr'eux. L'angle B étant donc $= \angle DGF$ (Arg. 1) & ce même $\angle B$ étant aussi égal à $\angle E$ (Hyp. 2).

Prop. 4. L. I.

- 2. Il s'ensuit, que $\angle E$ est $=$ à $\angle DGF$.

Ax. 1.

Mais l'angle DGF est un $\angle$ extérieur du $\triangle GFE$ & $\angle E$ est son intérieur opposé.

- 3. Donc $\angle$ extérieur seroit égal à son intérieur opposé.

Prop. 16. L. I.

- 4. Ce qui est impossible.

- 5. Partant, les côtés AB, DE ne sont point inégaux.

N. C.

- 6. Ils sont donc égaux, ou $AB = DE$.

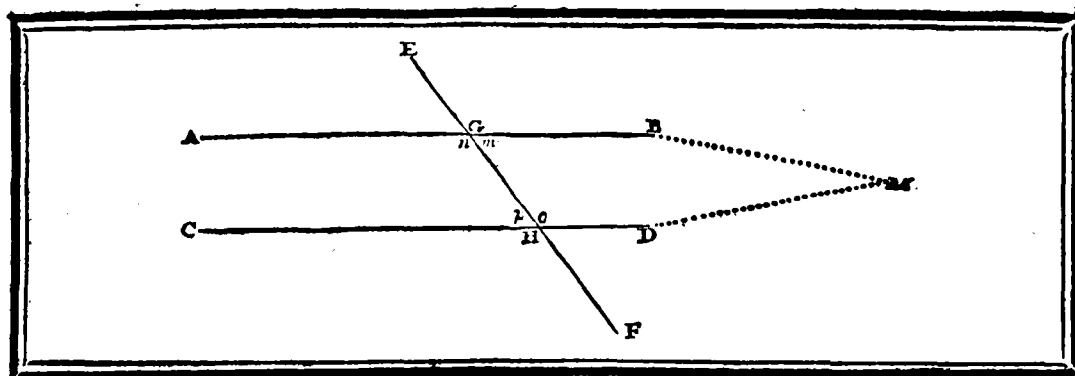
C. Q. F. D. I.

Puis donc que dans les $\triangle ACB, DFE$ le côté AC est $=$ au côté DF (Hyp. 3), $AB = DE$ (Arg. 6) & que $\angle$ compris A est $=$ à $\angle$ compris D (Hyp. 1).

- 7. Il est évident, que le troisième côté BC est $=$ au troisième côté EF & que les $\angle C \& F$, opposés aux côtés égaux AB, DE , sont $=$ entr'eux.

Prop. 4. L. I.

C. Q. F. D. II. & III.



PROPOSITION XXVII. THEOREME XVIII.
SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (AB, CD) situées dans un même plan, fait les angles alternes (m & p ou n & o) égaux entr'eux: ces deux lignes (AB, CD) sont parallèles.

HYPOTHESE.

1. AB, CD sont deux lignes droites, situées dans un même plan,
2. La ligne EF les coupe tellement que $\angle m = \angle p$ ou $\angle n = \angle o$.

THESE.

Les lignes AB, CD sont Plles.

DEMONSTRATION.

SI non.

Les droites AB, CD prolongées doivent se couper quelque part.

D. 35. L. 1.

Préparation.

Prolongez les donc jusqu'à ce qu'elles se coupent en M.

Dcm. 2.

Puis donc que $\angle n$ est un angle extérieur du $\triangle GMH$, & $\angle o$ son intérieur opposé;

1. L'angle n est $> \angle o$.

Prop. 16. L. 1.

Mais $\angle n$ est $=$ à $\angle o$ (Hyp. 2).

2. Cet $\angle n$ n'est donc point $> \angle o$.

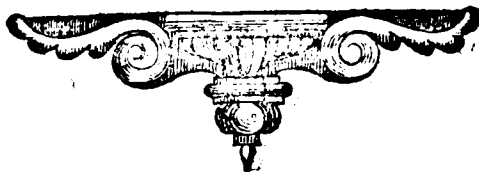
N. C.

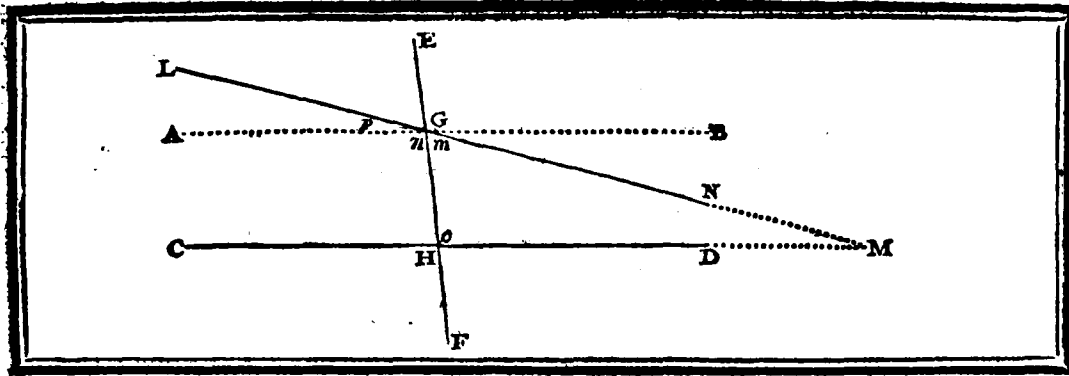
3. Partant il est impossible que les droites AB, CD s'entrecoupent en un point comme M.

4. D'où il suit qu'elles sont des droites Plles.

Def. 35. L. 1.

C. Q. F.D.





R É M A R Q U E.

SI on reçoit au nombre des axiomes, la proposition qu'Euclide suppose comme évidente par elle-même, * à sçavoir, qu'une ligne droite (EF), qui coupe une de deux parallèles (comme AB), en coupera nécessairement l'autre (CD) aussi, pourvu que cette ligne coupante (EF) soit prolongée suffisamment : on peut démontrer sans peine l'axiome XI, dont la vérité est un peu éloignée des notions communes, & qui sert cependant de fondement à la Proposition XXIX. Voici de quelle manière cela se peut faire.

L E M M E.

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (LN, CD) situées dans un même plan, fait les angles alternes ($p + n$ & o) inégaux entr'eux : ces deux lignes (LN & CD), prolongées suffisamment, s'il est nécessaire, se rencontreront quelque part (en M), du côté où se trouve le plus petit des angles alternes (o).

Préparation.

Car puisqu'on suppose $\forall p + n > \forall o$.

1. On peut décrire dans le plus grand $\forall p + n$, sur la droite EF au point G, l'angle $n = \forall o$,
2. Et prolonger AG à volonté en B.

Prop. 23. L. 1.
Dem. 1.

D É M O N S T R A T I O N.

Puis donc que les deux lignes AB, CD sont coupées par une troisième EF, en sorte que les $\forall$ alternes n & o sont $=$ entr'eux (Prép. 1).

1. Ces deux lignes AB, CD sont Plles.
- Mais la ligne LN coupe une des deux Plles, à sçavoir AB en G.
2. Donc, si on la prolonge suffisamment, elle coupera aussi l'autre CD quelque part en M, du côté où se trouve le plus petit des $\forall$ alternes o .

Prop. 27. L. 1.

Ax. Sup.

C. Q. F. D.

Corollaire.

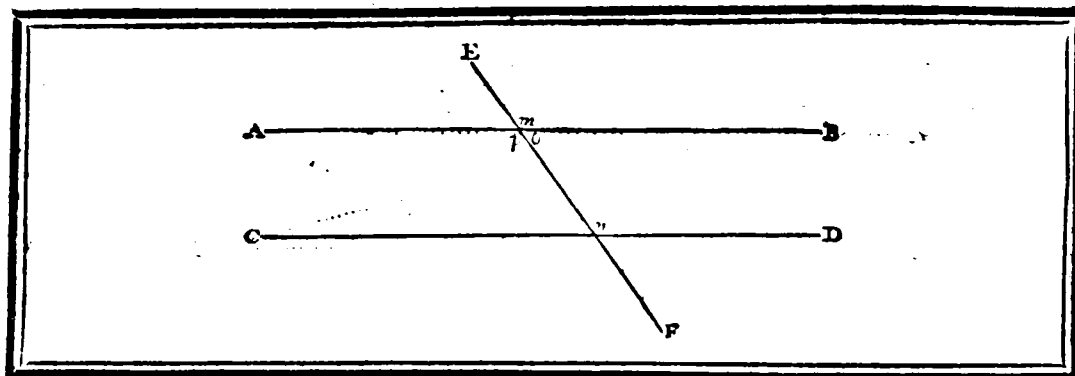
Lorsque $\forall o < \forall p + n$, les deux angles intérieurs $o + m$ sont nécessairement $<$ deux L ; vu que les deux angles $p + n$ & m sont égaux à deux L . Par conséquent, lorsque les deux $\forall$ intérieurs sont $<$ deux L ; les lignes LN, CD, qui forment ces angles avec EF, se rencontreront quelque part du côté de la ligne EF, où ces angles se trouvent placés, pourvu qu'on les prolonge suffisamment.

P. 13. L. 1.

Len.

C. Q. F. D.

* Voyez la Prép. des Propositions XXX, XXXVII & de plusieurs autres.



PROPOSITION XXVIII. THEOREME XIX.

SI une ligne droite (EF), tombant sur deux autres lignes droites (AB, CD) situées dans un même plan, fait l'angle extérieur (*m*) égal à son intérieur (*n*) opposé du même côté; ou bien les deux intérieurs (*o* + *n*) du même côté égaux à deux droits: ces deux lignes (AB, CD) sont parallèles entr'elles.

C A S. I.

HYPOTHESE.

$\angle m = \angle n$.

THESE.

AB, CD sont des lignes Plles.

DEMONSTRATION.

Puisque les $\angle m$ & p sont des $\angle$ opposés au sommet.

1. Ils sont = entr'eux.

L'angle *p* étant donc = à $\angle m$ (Arg. 1) & $\angle n$ étant = au même $\angle m$ (Hyp.).

Prop. 15. L. 1.

2. Il est évident que $\angle p$ est aussi = à $\angle n$.

Ax. 1.

Mais les $\angle$ égaux *p* & *n* (Arg. 2), sont en même tems des $\angle$ alternes.

3. Par conséquent, les droites AB, CD sont Plles.

Prop. 27. L. 1.

C A S. II.

HYPOTHESE.

Les $\angle o + n$ sont = à 2 L.

THESE.

AB, CD sont des lignes Plles.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite EF, tombant sur la droite AB, forme avec elles les $\angle$ conjugués *o* & *p*.

1. Ces $\angle o + p$ sont = à deux L.

Prop. 13. L. 1.

Les $\angle o + p$ étant donc = à deux L. (Arg. 1) & les $\angle o + n$ étant aussi = à deux L. (Hyp.).

2. Il s'enfuit que les $\angle o + p$ sont = aux $\angle o + n$.

Ax. 1.

Et si on retranche de part & d'autre l'angle commun *o*;

3. Les $\angle$ restans *p* & *n* seront = entr'eux.

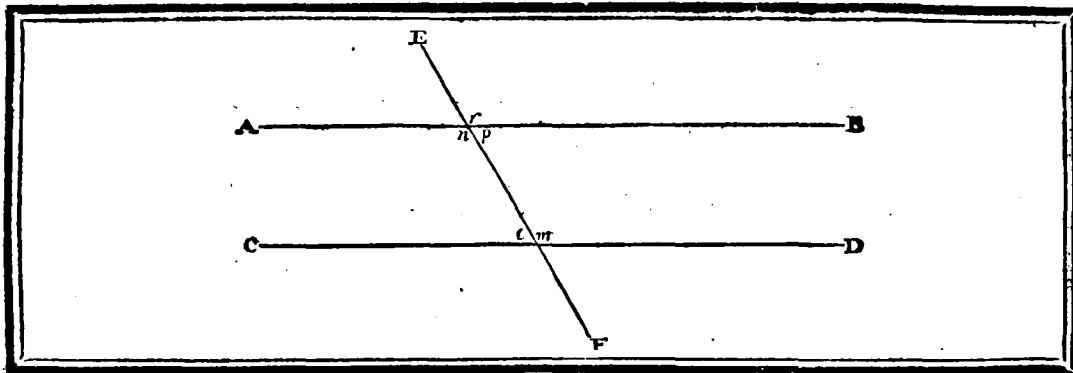
Ax. 3.

Or ces $\angle$ égaux *p* & *n* (Arg. 3), sont en même tems des $\angle$ alternes.

4. Par conséquent, les droites AB, CD sont Plles.

Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIX. THEOREME XX.
 Une ligne droite (EF), tombant sur deux autres droites parallèles (AB, CD), fait les angles alternes (n & m) égaux; de plus l'angle extérieur (r) égal à son intérieur opposé du même côté (m); & enfin les deux intérieurs opposés du même côté ($p + m$) égaux à deux droits.

HYPOTHESE.

*AB, CD sont deux lignes Plles.,
 coupées par une même droite EF.*

THESE.

- I. $\forall n = \forall m$.
- II. $\forall r = \forall m$.
- III. Les $\forall p + m = \text{à } 2 \text{ L.}$

DEMONSTRATION.

SI non.

Les $\forall m$ & n sont inégaux,
 Et l'un comme $\forall m$ sera $\angle$ l'autre $\forall n$.

N. C.

Puis donc que $\forall m < \forall n$; si on ajoute de part & d'autre $\forall$ commun p .

1. Les $\forall m + p$ seront $\angle$ les $\forall n + p$.
 Mais à cause que $\forall n$ & $\forall p$ sont des $\forall$ contigus, formés par la droite EF, qui tombe sur AB.
2. Ces $\forall n + p$ sont $=$ à deux L.
3. Partant, les $\forall m + p$ (moindres que les $\forall n + p$) sont aussi $\angle$ deux L.
4. D'où il suit que les lignes AB, CD ne sont pas Plles.
 Mais les droites AB, CD sont Plles (Hyp.)
5. Par conséquent, les $\forall m$ & n ne sont point inégaux.
6. Ils sont donc égaux, ou $\forall n = \forall m$.

Ax. 4.

Prop. 13. L. 1.

N. C.

Corol. du Lem

Prop. 27. L. 1.

N. C.

C. Q. F. D. I.

De plus, $\forall r$ & $\forall n$ étant opposés au sommet.

7. Ces angles sont $=$ entr'eux.
 Mais $\forall m$ étant $=$ à $\forall n$ (Arg. 6) & $\forall r$ étant $=$ au même $\forall n$ (Arg. 7).
8. Il s'ensuit, que $\forall r$ est $=$ à $\forall m$.

Prop. 15. L. 1.

Ax. 1.

C. Q. F. D. II.

De même; $\forall n$ étant $=$ à $\forall m$ (Arg. 6); si on ajoute $\forall$ commun p .

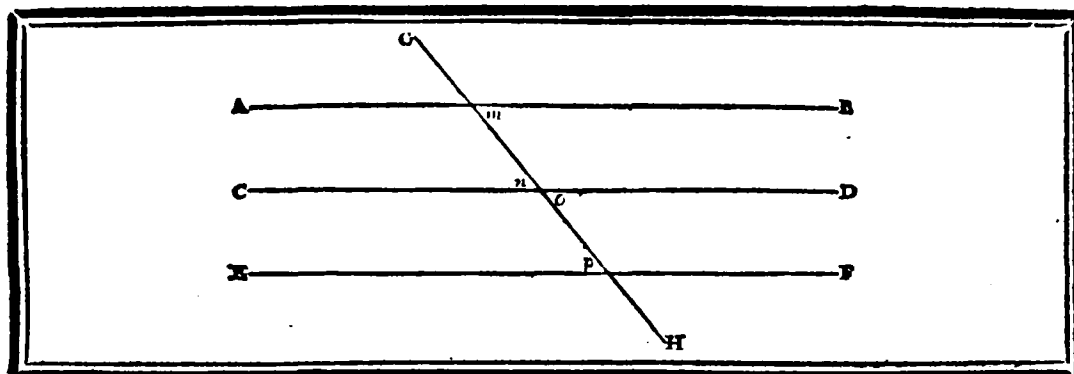
9. Les $\forall n + p$ seront $=$ aux $\forall m + p$.
 Mais les $\forall n + p$ sont $=$ à deux L. (Arg. 2).
10. D'où il suit que les $\forall m + p$ sont aussi $=$ à deux L.

Ax. 2.

Ax. 3.

C. Q. F. D. III.

E 3.



PROPOSITION XXX. THEOREME XXI.
Les lignes droites (AB, EF), parallèles à une même droite (CD), sont parallèles entr'elles.

HYPOTHESE.

AB, EF sont des droites Plles à CD.

THESE.

Les droites AB, EF sont Plles entr'elles.

Préparation.

Tirez la droite GH qui coupe les trois lignes AB, CD, EF.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB, CD sont deux Plles (*Hyp.*) coupées par une même droite GH (*Prep.*).

1. Les $\angle$ alternes m & n sont $\equiv$ entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

De même, puisque les droites CD, EF sont deux Plles (*Hyp.*) coupées par une même droite GH (*Prep.*).

2. L'angle extérieur n est $\equiv$ à son intérieur p opposé du même côté.

Prop. 29. L. 1.

Mais $\angle n$ étant $\equiv$ à $\angle m$ (*Arg. 1*), & le même $\angle n$ étant aussi $\equiv$ à $\angle p$ (*Arg. 2*).

3. Les $\angle m$ & p seront $\equiv$ entr'eux.

Ax. 1.

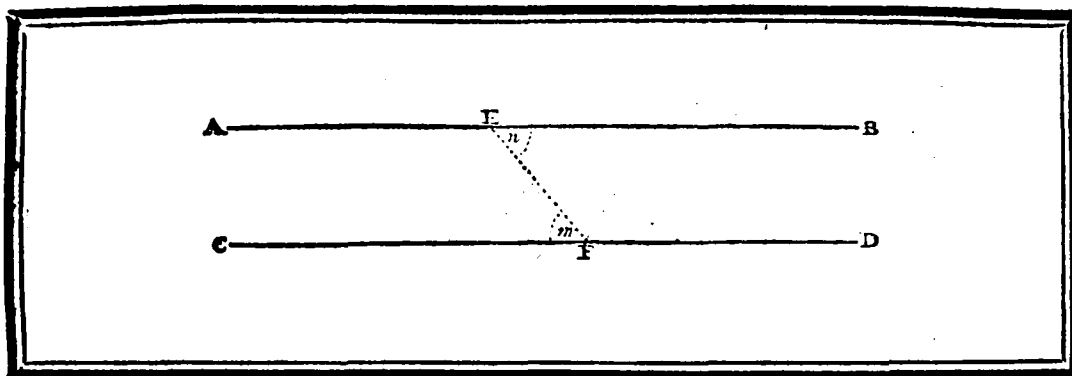
Or ces $\angle$ égaux m & p (*Arg. 3*), sont des $\angle$ alternes, formés par les deux droites AB, EF, qui sont coupées par la droite GH.

4. Par conséquent, ces droites AB, EF sont Plles.

Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXXI. PROBLEME X.
 Par un point donné (E), tirer une ligne droite (AB) parallèle à une autre droite donnée (CD).

DONNEE

La droite CD avec le point E.

CHERCHEE.

La droite AB Plle à CD & passant par le point E.

Résolution.

1. Dans la droite donnée CD prenez un point quelconque F.
2. Du point F au point E tirez la droite FE.
3. Sur la droite FE au point E, dans le plan où se trouvent les lignes CD, FE, construisez un $\angle n = \angle m$,
4. Et prolongez la jambe EB.

Dem. 1.

Prop. 23. L. 1.

Dem. 2.

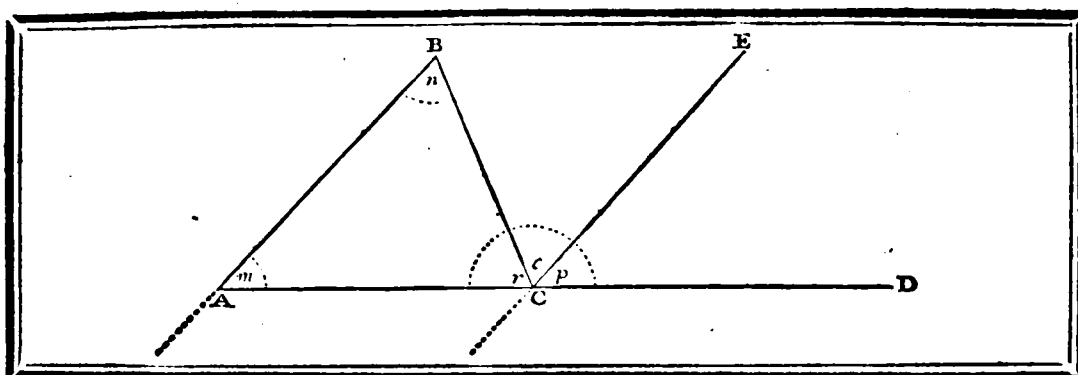
DEMONSTRATION.

Puisque les $\angle$ alternes m & n , formés par la droite EF, qui coupe les deux lignes AB, CD, sont = entr'eux (Ref. 3).
 Les droites AB, CD sont Plls.

Prop. 27. L. 1.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XXXII. THEOREME XXII.

EN tout triangle (ABC), un des côtés (comme AC) étant prolongé: l'angle extérieur ($o + p$) est égal à la somme des deux intérieurs opposés ($n + m$); & les trois angles du triangle ($n + m + r$) sont égaux à deux droits.

HYPOTHESE.

ABC est un Δ , dont un des côtés AC est prolongé indéfiniment en D .

THESE.

1. $\forall o + p$ est = aux $\forall m + n$.
11. Les $\forall n + m + r$ sont = à 2 $\angle$.

Préparation.

Par le point C tirez la droite CE Plle à la droite AB .

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB , CE sont deux Plles (*Prep.*) coupées par une même droite BC ,

1. Les $\forall$ alternes n & o sont = entr'eux.
De même; puisque les droites AB , CE sont deux Plles (*Prep.*) coupées par une même droite AD ,
2. L'angle extérieur p est = à son intérieur m opposé du même côté.
L'angle o étant donc = à $\forall n$ (*Arg. 1*) & $\forall p = \forall m$ (*Arg. 2*).
3. L'angle $o + p$ est = aux angles n & m pris ensemble.

Prop. 29. L. 1.

Prop. 29. L. 1.

Ax. 2.

C. Q. F. D. 1.

Puis donc que $\forall o + p$ est = aux $\forall n + m$ (*Arg. 3*); si on ajoute de part & d'autre l'angle commun r ,

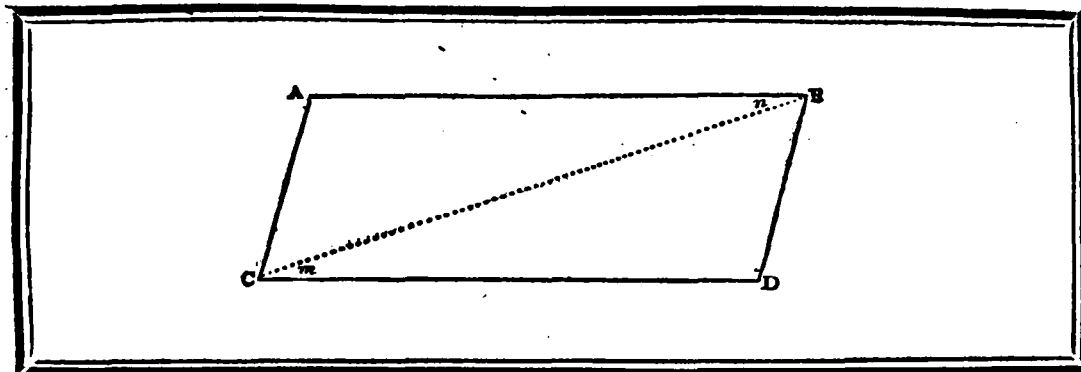
4. Les $\forall o + p + r$ seront = aux trois $\forall n + m + r$ du ΔABC .
Mais ces $\forall o + p + r$ sont des $\forall$ contigus, formés par la ligne BC , qui rencontre AD au même point C .
5. Par conséquent, les $\forall o + p + r$ sont = à deux $\angle$.
6. Partant, les trois $\forall n + m + r$, qui sont = aux $\forall o + p + r$ (*Arg. 4*), sont aussi = à deux $\angle$.

Ax. 2.

Prop. 13. L. 1.

Ax. 1.

C. Q. F. D. 11.



PROPOSITION XXXIII. THEOREME XXIII.

LEs droites (AC, BD), qui joignent de même part les extrémités (A, C & B, D) de deux autres droites (AB, CD) égales & parallèles : sont aussi égales & parallèles entr'elles.

HYPOTHESE.

AC, BD sont deux droites, qui joignent de même part les extrémités de deux autres droites = & Plls AB, CD.

THESE.

- I. Les droites AC, BD sont égales,
- II. Et ces droites AC, BD sont Plls.

Préparation.

Du point B au point C tirez la droite BC.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB, CD sont deux Plls (Hyp.), coupées par une même droite BC (Prep.).

1. Les $\angle$ alternes n & m sont = entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

Puis donc que dans les deux $\triangle$ CAB, BDC le côté CD est = au côté AB (Hyp.), le côté BC commun aux deux $\triangle$ & $\angle$ compris m = à $\angle$ compris n (Arg. 1).

2. Il s'en suit, que la base AC est = à la base BD;

C. Q. F. D. I.

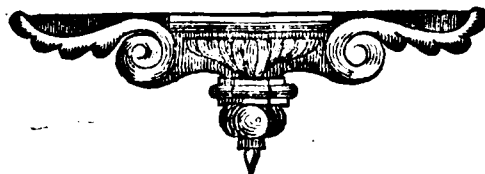
Prop. 4. L. 1.

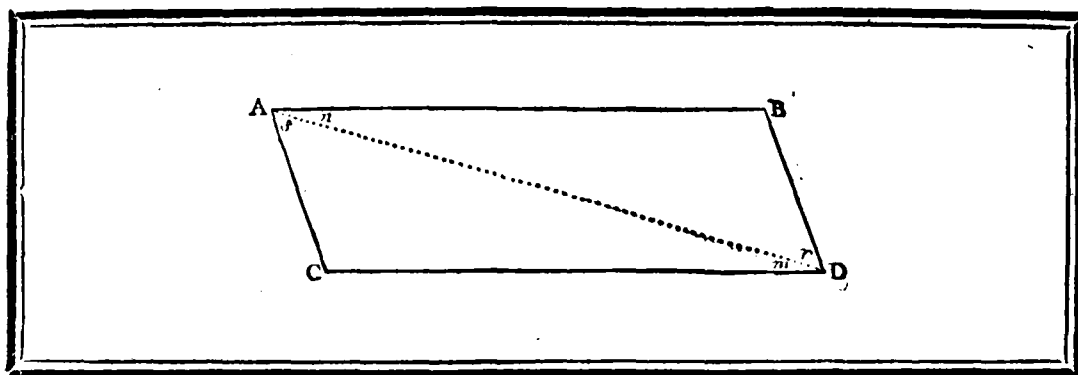
3. Item, que les $\angle$ ACB, DBC qui sont opposés aux côtés égaux AB, CD, sont aussi = entr'eux.

Or ces $\angle$ égaux ACB, DBC (Arg. 3) sont des $\angle$ alternes formés par les droites AC, BD coupées par la droite BC.

5. Par conséquent, les droites AC, BD sont Plls.

C. Q. F. D. II. Prop. 27. L. 1.





PROPOSITION XXXIV. THEOREME XXIV.

EN tout parallélogramme (BC), les côtés opposés (AC, BD item CD, AB) & les angles opposés (B, C item $m + r$, $n + s$) sont égaux entr'eux & la diagonale (AD) le coupe en deux également.

HYPOTHESE.

- I. BC est un Pgr.
- II. AD est la diagonale de ce Pgr.

THESE.

- I. Les côtés AC, BD item CD, AB sont = entr'eux,
& $\angle C = \angle B$.
- II. $\angle m + r = \angle n + s$.
- III. Les $\triangle CAD$, BDA formés par la diagonale sont = entr'eux.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AB, CD sont deux Ples (Hyp. 1) coupées par une même droite AD (Hyp. 2).

1. Les $\angle$ alternes m & n sont = entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

Derechef, puisque les droites AC, BD sont deux Ples (Hyp. 1) coupées par une même droite AD (Hyp. 2).

2. Les $\angle$ alternes r & s sont = entr'eux.

Prop. 29. L. 1.

Mais les $\triangle CAD$, BDA ont deux $\angle$ m & s = à deux $\angle$ n & r (Arg. 1 & 2), & le côté AD adjacent à ces $\angle$ égaux est commun aux deux $\triangle$.

3. Partant, les côtés AC & BD, opposés aux $\angle$ égaux m & n , item les côtés CD, AB, opposés aux $\angle$ égaux s & r sont = entr'eux & le troisième $\angle$ C est = au troisième $\angle$ B.

Prop. 26. L. 1.

C. Q. F. D. I.

Or $\angle m$ étant = à $\angle n$ (Arg. 1) & $\angle r = \angle s$ (Arg. 2);

4. L'angle entier $m + r$ est = à l'angle entier $n + s$.

Ax. 2.

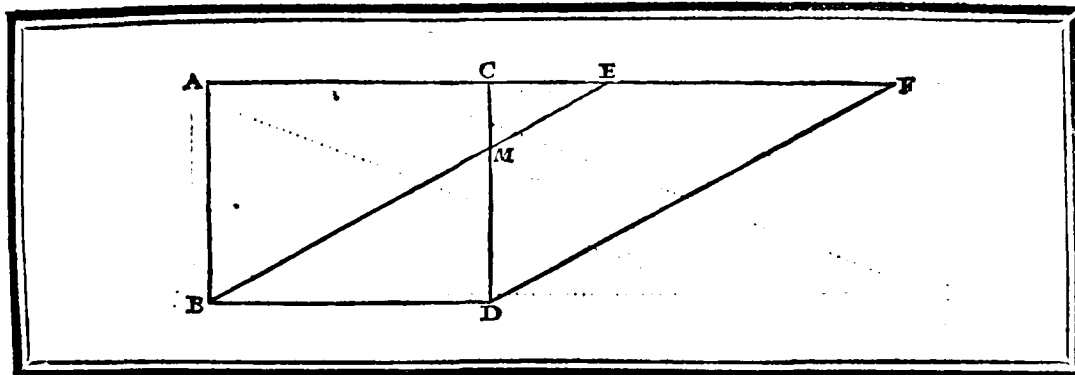
C. Q. F. D. II.

Enfin, puisque dans les $\triangle CAD$, BDA le côté CD est = au côté AB (Arg. 3), le côté AD commun aux deux $\triangle$ & $\angle$ compris m = à $\angle$ compris n (Arg. 1).

5. Ces deux $\triangle CAD$, BDA , formés par la diagonale AD sont = entr'eux.

Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D. III.



PROPOSITION XXXV. THEOREME XXV.
LEs parallélogrammes (AD, ED) placés sur la même base (BD) & entre les mêmes parallèles (AF, BD): sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE

1. AD & ED sont deux Pgrs,
- II. Et ces deux Pgrs sont placés sur la même base BD & entre les mêmes Plles AF, BD.

THESE.

Le Pgr AD est = au Pgr ED.

DEMONSTRATION.

Puisque la figure AD est un Pgr (Hyp. I).

1. Les côtés opposés AC, BD & AB, CD sont = entr'eux.

Prop. 34. L. 1.

De même; puisque la figure ED est un Pgr (Hyp. I).

2. Les côtés opposés EF, BD & BE, DF sont = entr'eux.

Prop. 34. L. 1.

Or la droite AC étant = à la droite BD (Arg. 1) & la droite EF étant aussi = à la même droite BD (Arg. 2).

3. Il s'ensuit, que la droite AC est = à la droite EF.

Ax. 1.

Puis donc que AC est = à EF (Arg. 3); si on ajoute de part & d'autre la droite commune CE.

4. La droite AE est nécessairement = à la droite CF.

Ax. 2.

Dans les $\triangle ABE$, CDF le côté AB est donc = au côté CD (Arg. 1), le côté BE est = au côté DF (Arg. 2) & la base AE est = à la base CF (Arg. 4).

5. Par conséquent, le $\triangle ABE$ est = au $\triangle CDF$.

Prop. 8. L. 1.

Retranchant donc de ces $\triangle$ égaux ABE, CDF (Arg. 5) leur partie commune CME;

6. Les trapezes restans ABMC, MD FE sont = entr'eux.

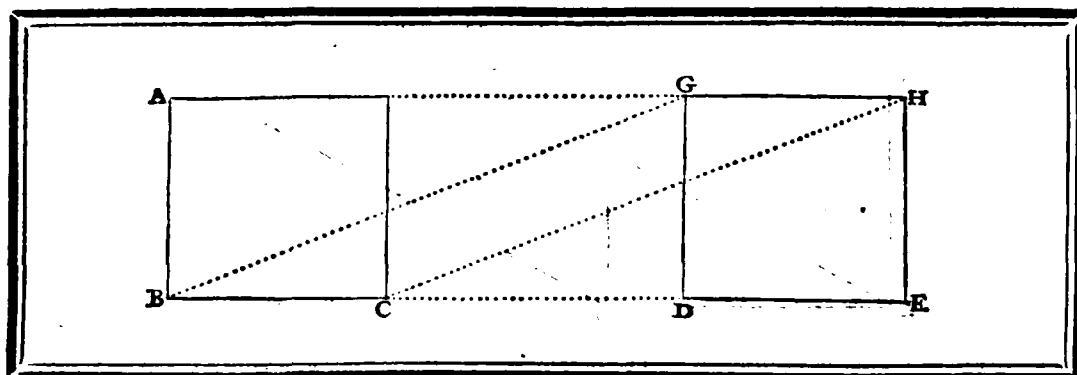
Ax. 3.

Ajoutant enfin à ces trapezes égaux ABMC, MD FE (Arg. 6) la partie commune MBD,

7. Les Pgrs AD & ED seront = entr'eux.

Ax. 2.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVI. THEOREME XXVI.
Les parallélogrammes (AC, GE), placés sur des bases égales (BC, DE) & entre les mêmes parallèles (AH, BE), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

1. AC, GE sont deux Pgrs.
2. Et ces deux Pgrs sont placés sur des bases égales BC, DE & entre les mêmes Plles AH, BE.

THESE.

Le Pgr AC est = au Pgr GE.

Préparation.

1. Du point B au point G tirez la droite BG.
2. Du point C au point H tirez la droite CH.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque la figure GE est un Pgr (Hyp. 1).
1. Les côtés opposés DE, GH sont = entr'eux.
 Or la droite BC est = à DE (Hyp. 2) & GH est = à la même droite DE (Arg. 1).
 2. Donc BC est = à GH.
 Mais puisque BC est = à GH (Arg. 2) : & que ces droites sont outre cela des Plles (Hyp. 2), dont les extrémités sont jointes par les droites GB, HC (Prep. 1 & 2).
 3. Il est évident, que ces droites GB, HC sont = & Plles.
 4. Partant, la figure GC est un Pgr.
 De plus, les Pgrs AC, GC étant placés sur la même base BC, & entre les mêmes Plles AH, BE (Hyp. 2).
 5. Ces Pgrs AC, GC sont = entr'eux.
 Par un raisonnement semblable on prouvera,
 6. Que le Pgr GC est = au Pgr GE.
 Puis donc que le Pgr AC est = au Pgr GC (Arg. 5), & que le Pgr GE est = au même Pgr GC (Arg. 6).
 7. Il s'ensuit que le Pgr AC est = au Pgr GE.

Prop. 34. L. 1.

Ax. 1.

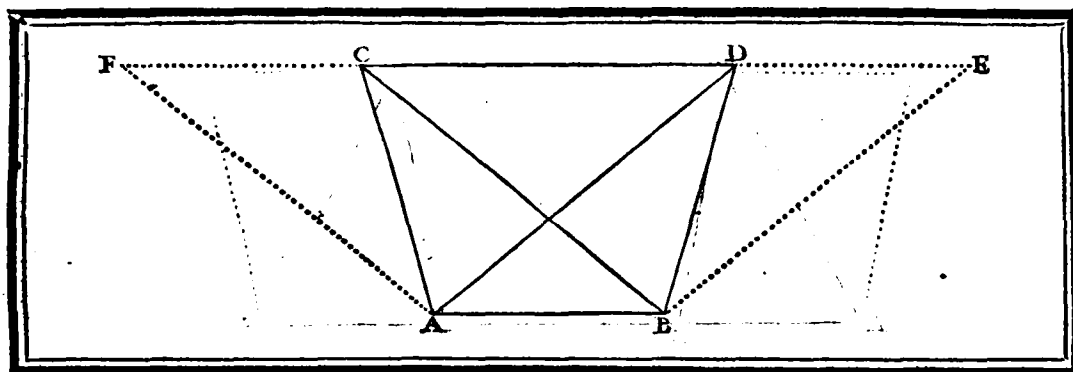
Prop. 33. L. 1.

Def. 35. L. 1.

Prop. 35. L. 1.

Ax. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVII. THEOREME XXVII.
Les triangles (ACB, ADB), placés sur une même base (AB) & entre les mêmes parallèles (AB, CD), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

1. ACB, ADB sont deux Δ ,
- II. Et ces deux Δ sont placés sur la même base AB & entre les mêmes Plles AB, CD.

THESE.

Le Δ ACB est = au Δ ADB.

Préparation.

1. Prolongez la droite CD de part & d'autre à l'infini.
2. Par les points A & B tirez les droites AF, BE Plles aux côtés BC, AD; qui rencontreront la prolongée CD quelque part en F & en E (*Rem. de la Prop. XXVII*).

Dem. 2.

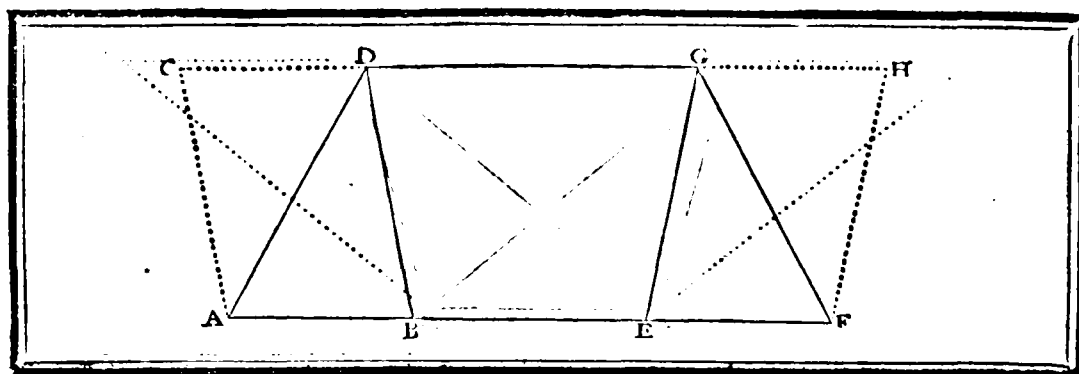
Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans la figure BF les côtés opposés AB, FC & AF, BC sont Plles (*Hyp. 2: & Prep. 2*).

1. La figure BF est un Pgr. Def. 35. L. 1.
- Par un raisonnement semblable on prouvera,
2. Que la figure AE est un Pgr.
 Mais les Pgrs BF, AE, sont placés sur la même base AB & entre les mêmes Plles AB, FE (*Hyp. 2. & Prep. 1*).
3. Par conséquent, le Pgr BF est = au Pgr AE. Prop. 35. L. 1.
- Or les droites AC, BD sont des diagonales des Pgrs BF, AE (*Prep. 1 & 2*).
4. C'est pourquoi ces diagonales AC, BD partagent les Pgrs BF, AE en deux également. Prop. 34. L. 1.
5. Partant, le Δ ACB est la moitié du Pgr BF & le Δ ADB la moitié du Pgr AE.
- Puis donc que les Pgrs entiers, BF, AE sont égaux entr'eux (*Arg. 3*), & que les Δ ACB, ADB sont les moitiés de ces Pgrs (*Arg. 5*).
6. Il est évident que les Δ ACB, ADB sont aussi égaux entr'eux. Ax. 7.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVIII. THEOREME XXVIII.

LEs triangles (ADB, EGF), placés sur des bases égales (AB, EF) & entre les mêmes parallèles (AF, DG), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

1. ADB, EGF sont deux Δ .
- II. Et ces deux Δ sont placés sur des bases $= AB, EF$, & entre les mêmes Plles AF, DG .

THESE.

Le ΔADB est $=$ au ΔEGF .

Préparation.

1. Prolongez la droite DG de part & d'autre à l'infini.
2. Par les points A & F tirez les droites AC, FH Plles aux côtés BD, EG ; qui rencontreront la prolongée DG quelque part en C & en H (Rem. de la Prop. XXVII).

Dem. 2.

Prop. 31. L. I.

DEMONSTRATION.

Puisque dans la figure BC les côtés opposés AB, CD & AC, BD sont Plles (Hyp. 2 & Prep. 2);

1. La figure BC est un Pgr.

Par un raisonnement semblable on prouvera,

2. Que la figure EH est un Pgr.

Mais les Pgrs BC, EH (Arg. 1 & 2) sont placés sur des bases $= AB, EF$ & entre les mêmes Plles AF, CH (Hyp. 2).

3. Par conséquent, le Pgr BC est $=$ au Pgr EH .

Or les droites AD, EG étant des diagonales des Pgrs BC, EH (Prep. 1. & 2).

4. Ces droites AD, EG partagent les Pgrs BC, EH en deux également.

5. Partant, le ΔADB est la moitié du Pgr BC , & le ΔEGF la moitié du Pgr EH .

Puis donc que les Pgrs entiers BC, EH sont $=$ entr'eux (Arg. 3) & que les $\Delta ADB, EGF$ sont leurs moitiés de ces Pgrs (Arg. 5).

6. Il s'ensuit que ces $\Delta ADB, EGF$ sont aussi $=$ entr'eux.

Def. 35. L. I.

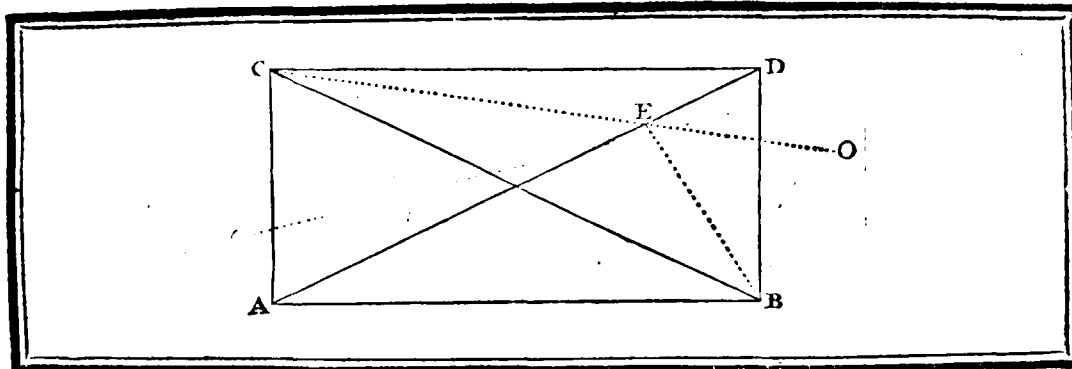
Prop. 36. L. I.

Prop. 34. L. I.

Ax. 7.

Q. E. D.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIX. (THEOREME XXIX.)
Les triangles égaux ($\triangle ACB$, $\triangle ADB$), placés sur une même base (AB) & du même côté, sont entre les memes paralleles (AB , CD).

HYPOTHESE.

1. Les $\triangle ACB$, $\triangle ADB$ sont égaux,
11. Et ces $\triangle$ sont placés sur la même base AB .

THESE. I

Les $\triangle ACB$, $\triangle ADB$ sont entre les memes Plles AB , CD .

DEMONSTRATION.

SI non.

Les droites AB , CD ne sont pas Plles, & on pourra tirer par le point C quelque autre droite CO Plle à AB .

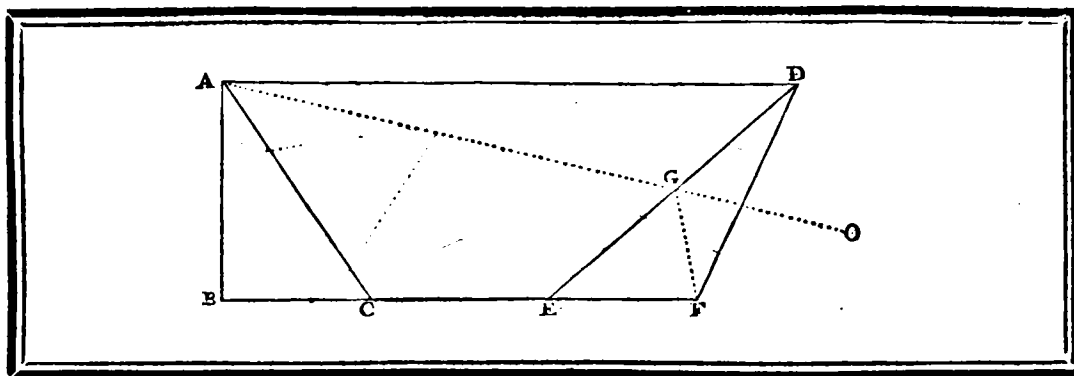
Préparation.

1. **T**irez donc par le point C la droite CO Plle à AB ; laquelle coupera la droite AD quelque part en E (*Rem. de la Prop. XXV II*). Prop. 31. L. 1.
2. Du point B au point d'intersection E tirez la droite BE . Dem. 1

Puisque les deux $\triangle ACB$, $\triangle AEB$ sont sur la même base AB (*Hyp. 2*) & entre les memes Plles AB , CO (*Prep. 1*).

1. Le $\triangle ACB$ est $=$ au $\triangle AEB$. Prop. 37. L. 1.
 Or le $\triangle ADB$ étant $=$ au $\triangle ACB$ (*Hyp. 1*) & le $\triangle AEB$ étant $=$ au même $\triangle ACB$ (*Arg. 1*).
2. Le $\triangle ADB$ est $=$ au $\triangle AEB$. Ax. 1.
 Mais le $\triangle ADB$ étant le tout & le $\triangle AEB$ sa partie,
3. Il s'enfuit que le tout est égal à sa partie,
4. Ce qui est impossible. Ax. 2.
5. Partant, la droite CO n'est pas Plle à AB .
 On prouvera de même, que nulle autre droite, hormis la seule CD ne peut-être Plle à AB .
6. Par conséquent, la droite CD , tirée par les sommets des $\triangle ACB$, $\triangle ADB$, est Plle à la base AB .

C. Q. F. D.



PROPOSITION XL. THEOREME XXX.
Les triangles égaux ($\triangle BAC, EDF$), placés sur des bases égales (BC, EF) & du même côté, sont entre les mêmes parallèles (BF, AD).

HYPOTHESE.

1. Les $\triangle BAC, EDF$, sont égaux,
11. Et ces $\triangle$ sont placés sur des bases $\equiv BC, EF$.

THESE.

Les $\triangle BAC, EDF$ sont entre les mêmes Piles BF, AD .

DEMONSTRATION.

Si non.

Les droites BF, AD ne sont pas Piles, & on pourra tirer par le point A quelque autre droite AO Pile à BF .

Préparation.

1. **T**irez donc par le point A la droite AO Pile à BF ; laquelle coupera la droite ED quelque part en G (*Rem. de la Prop. XXVII*).
2. Du point F au point d'intersection G tirez la droite FG .

Prop. 31. L. 1

Dcm. 1.

Puisque les $\triangle BAC, EGF$ sont placés sur des bases égales BC, EF (*Hyp. 2*), & entre les mêmes Piles BF, AO (*Prep. 1*).

1. Le $\triangle BAC$ est $\equiv$ au $\triangle EGF$.

Prop. 38. L. 1.

Or le $\triangle EDF$ est $\equiv$ au $\triangle BAC$ (*Hyp. 1*), & le $\triangle EGF$ est $\equiv$ au même $\triangle BAC$ (*Arg. 1*).

2. C'est pourquoi le $\triangle EDF$ est $\equiv$ au $\triangle EGF$.

Ax. 1.

Mais le $\triangle EDF$ étant le tout, & le $\triangle EGF$ sa partie,

3. Il s'ensuit que le tout est égal à sa partie.

4. Ce qui est impossible.

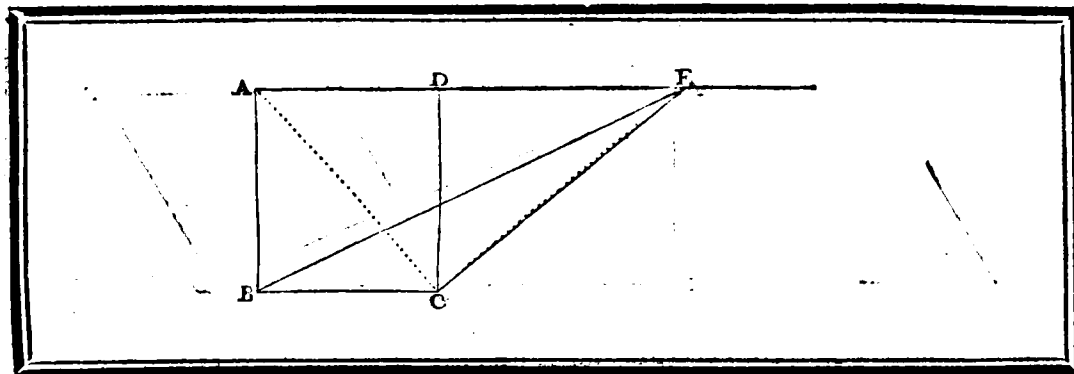
Ax. 8.

5. Partant AO n'est pas Pile à BF .

On prouvera de même que nulle autre droite, hormis la seule AD ne peut être Pile à BF .

6. Par conséquent, la droite AD , tirée par les sommets des $\triangle BAC, EDF$, est Pile à la droite BF .

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLI. THEOREME XXXI.

SI un parallélogramme (BD) & un triangle (BEC) sont placés sur une même base (BC), & entre les mêmes parallèles (BC, AE): le parallélogramme sera double du triangle.

HYPOTHESE.

1. BD est un Pgr, & BEC un Δ .
11. Ces figures sont placées sur la même base BC, & entre les mêmes Plls BC, AE.

THESE.

Le Pgr BD est double du Δ BEC.

Préparation.

Du point A au point C tirez la droite AC.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les Δ BAC, BEC sont placés sur une même base BC & entre les mêmes Plls BC, AE (Hyp. 2).

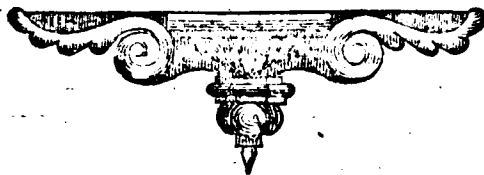
1. Le Δ BAC est $\equiv$ au Δ BEC.
Or la droite AC étant la diagonale du Pgr BD (Prep. 1)
2. Cette diagonale partage le Pgr en deux également.
3. Partant, le Pgr BD est double du Δ BAC.
Mais ce Δ BAC étant $\equiv$ au Δ BEC (Arg. 1).
4. Le Pgr BD est aussi double du Δ BEC.

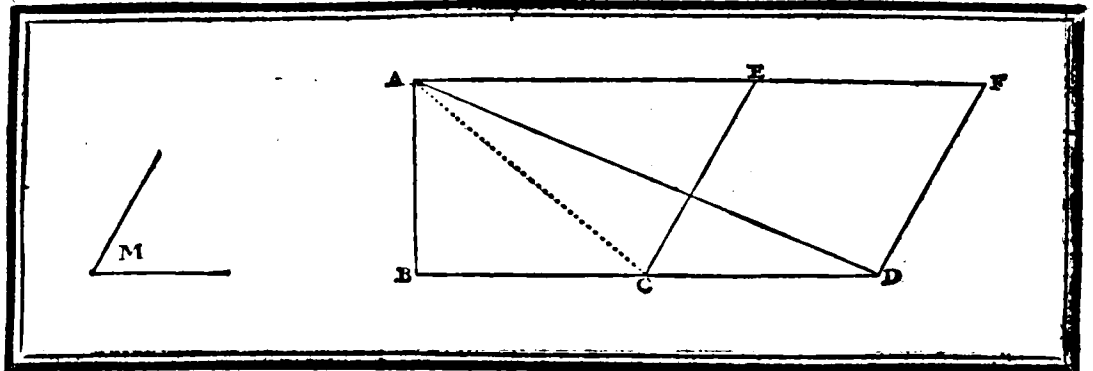
Prop. 37. L. 1.

Prop. 34. L. 1.

Ax. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XLII. PROBLEME XI.
Construire un parallélogramme (ED), égal à un triangle donné (BAD); & qui ait un angle (DCE) égal à un angle rectiligne donné (M).

DONNEES.

- I. Le $\triangle BAD$,
 II. Et $\angle$ rectiligne M.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr $\equiv$ au $\triangle BAD$;
 & qui ait un $\angle DCE \equiv$ à $\angle$ donné M.

Résolution.

1. Coupez la base BD en deux parties égales, au point C. Prop. 10. L. 1.
2. Sur la droite BD au point C construisez un $\angle DCE \equiv$ à $\angle$ donné M. Prop. 23. L. 1.
3. Par le point A tirez la droite AF Plle à BD. Prop. 31. L. 1.
4. Prolongez la jambe CE de l'angle DCE, jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite AF en un point E. (Rem. de la Prop. XXVII). Dem. 2.
5. Par le point D tirez DF Plle à CE, & prolongez la jusqu'à ce qu'elle rencontre AF en un point F (Rem. de la Prop. XXVII). Prop. 31. L. 1.
Dem. 2.

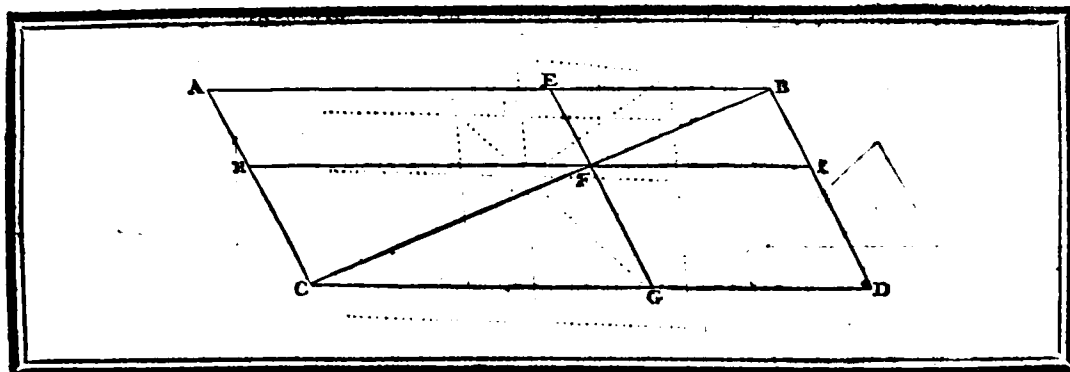
Préparation.

Du point A au point C tirez la droite AC.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les $\triangle BAC$, $\triangle CAD$ sont placés sur des bases égales BC, CD (Ref. 1) & entre les mêmes Plls BD, AF (Ref. 3).
1. Le $\triangle BAC$ est $\equiv$ au $\triangle CAD$. Prop. 38. L. 1.
 2. Partant, le $\triangle BAD$ est double du $\triangle CAD$. N. C.
 3. Mais dans la figure ED les côtés CD, EF & CE, DF sont Plls (Ref. 3 & 5). Def. 35. L. 1.
 4. Par conséquent, ED est un Pgr. Prop. 41. L. 1.
 5. Or ce Pgr ED & le $\triangle CAD$ sont placés sur une même base CD, & entre les mêmes Plls BD, AF (Ref. 1. 3 & Prep.). Ax. 6.
 6. D'où il suit, que le Pgr ED est double du $\triangle CAD$. Prop. 41. L. 1.
 7. Puis donc que le Pgr ED est double du $\triangle CAD$ (Arg. 4) & que le $\triangle BAD$ est aussi double du même $\triangle CAD$ (Arg. 2).
 8. Il est évident, que le Pgr ED est $\equiv$ au $\triangle BAD$, Ax. 6.
 9. Et comme son angle DCE est outre cela $\equiv$ à $\angle$ donné M (Ref. 2).
 10. Ce Pgr ED est $\equiv$ au $\triangle$ donné BAD; & a un $\angle DCE \equiv$ à $\angle$ donné M.



PROPOSITION XLIII. THEOREME XXXII.

EN tout parallélogramme (AD): les complémens (AF, FD) des parallélogrammes (HG, EI) alentour de la diagonale (BC) sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE

1. AD est un Pgr, dont BC est la diagonale.
2. HG, EI sont des Pgrs alentour de la diagonale.

THESE.

Les Pgrs AF, FD qui sont les complémens des Pgrs HG, EI sont = entr'eux.

DEMONSTRATION.

PUISQUE AD est un Pgr, dont BC est la diagonale (Hyp. 1).

1. Cette diagonale partage le Pgr en deux également.
2. Partant, le $\triangle CAB$ est = au $\triangle BDC$.
- De même; EI étant un Pgr, dont BF est la diagonale (Hyp. 2).
3. Elle partage aussi le Pgr en deux également.
4. C'est pourquoi, le $\triangle FEB$ est = au $\triangle BIF$.
- Enfin, HG est un Pgr, dont FC est la diagonale (Hyp. 2),
5. Qui par conséquent, le partage aussi en deux également.
6. Partant, le $\triangle CHF$ est = au $\triangle FGC$.

Prop. 34. L. 1.

Prop. 34. L. 1.

Prop. 34. L. 1.

Puis donc que le $\triangle FEB$ est = au $\triangle BIF$ (Arg. 4) & le $\triangle CHF$ = au $\triangle FGC$ (Arg. 6).

7. Le $\triangle FEB$ avec le $\triangle CHF$ est = aux $\triangle BIF$ & $\triangle FGC$ pris ensemble.

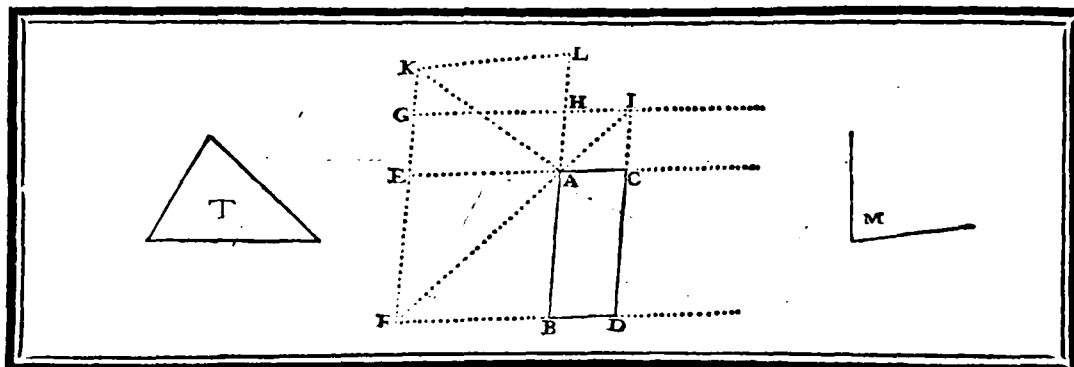
Ax. 2.

Mais les $\triangle$ entiers CAB, BDC étant = entr'eux (Arg. 2); si on retranche de part & d'autre les $\triangle FEB + CHF$ & les $\triangle BIF + FGC$ qui leurs sont égaux (Arg. 7).

8. Les Pgrs restans AF, FD, qui sont les complémens des Pgrs HG, EI, seront aussi = entr'eux.

Ax. 3.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XLIV. PROBLEME XII.
Sur une ligne droite donnée (AB); construire un parallélogramme (BC) égal à un triangle donné (T); & qui ait un angle (BAC) égal à un angle rectiligne donné (M).

DONNEES

- I. La droite AB.
- II. Le Δ T,
- III. Et $\angle$ rectiligne M.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr sur la droite
 AB = au Δ T; & qui ait un $\angle$
 BAC = à $\angle$ donné M.

Résolution.

1. Prolongez la droite AB indéfiniment.
2. Faites AL = à un des côtés du Δ donné T.
3. Et construisez le Δ AKL = au Δ donné T.
4. Décrivez ensuite le Pgr EH = au Δ AKL; qui ait un $\angle$ HAE = à $\angle$ donné M.
5. Par le point B tirez une droite BF Plle à EA ou GH.
6. Prolongez GH indéfiniment; de même GE, jusqu'à ce qu'elle rencontre BF en F (Rem. de la Prop. XXVII).
7. Par les points F & A tirez la droite FA, qui prolongée coupera GH quelque part en I (Rem. de la Prop. XXVII).
8. Par le point de rencontre I tirez la droite ID Plle à HB ou GF,
9. Et prolongez FB, EA, jusqu'à ce qu'elles rencontrent ID aux points D & C (Rem. de la Prop. XXVII).

Dem. 2.
 Prop. 3. L. 1.
 Prop. 22. L. 1.
 Prop. 42. L. 1.
 Prop. 31. L. 1.
 Dem. 2.
 Dem. 1.
 Prop. 31. L. 1.
 Dem. 2.

DÉMONSTRATION.

Puisque dans la figure DG les côtés opposés GI, FD & GF, ID sont Plles (Ref. 5. 6. 8. & 9).
 1. La figure DG est un Pgr.

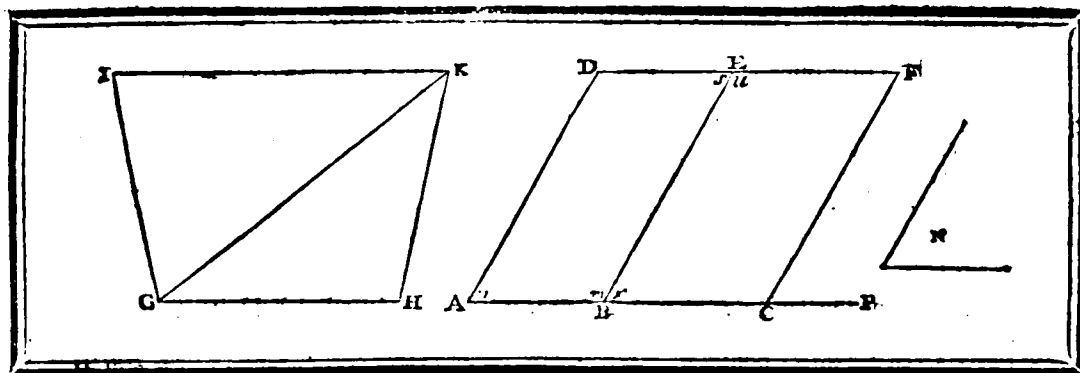
Derechef,

Def. 35. L. 1.

- Derechef, les côtés opposés EA, FB & EF, AB; item HI, AC & HA, IC, des figures EB, HC, étant Plles (Ref. 5. 6. 8. & 9).
2. Ces figures EB, HC sont des Pgrs. Def. 35. L. 1.
Mais la droite FI est la diagonale du Pgr DG (Ref. 7) & EB, HC sont des Pgrs alentour de cette diagonale (Arg. 2)
3. Par conséquent, les Pgrs BC, EH qui en sont les complémens, sont = entr'eux. Prop. 43. L. 1.
Or le Pgr EH est = au Δ AKL (Ref. 4) & le Δ donné T est = au même Δ AKL (Ref. 3).
4. D'où il suit, que le Pgr EH est = au Δ donné T. Ax. 1.
Le Pgr EH étant donc = au Δ donné T (Arg. 4) & ce même Pgr EH étant = au Pgr BC (Arg. 3).
5. Le Pgr BC est = au Δ donné T. Ax. 1.
De plus, à cause que les $\angle$ HAE, BAC sont opposés au sommet.
6. Ces angles sont = entr'eux. Prop. 15. L. 1.
C'est pourquoi, $\angle$ HAE étant = à $\angle$ donné M (Ref. 4).
7. L'angle BAC est aussi = à cet $\angle$ donné M. Ax. 1.
8. On a donc construit un Pgr BC sur la droite donnée AB, qui est = au Δ donné T (Arg. 5); & qui a un $\angle$ BAC = à $\angle$ donné M (Arg. 7).

C. Q. F. F.





PROPOSITION LXV. PROBLÈME XIII.
Construire un parallélogramme (AF); égal à une figure rectiligne donnée (IH);
 & qui ait un angle (n) égal à un angle rectiligne donné (N).

DONNEES

- I. Une figure rectiligne IH.
 II. Et un $\angle$ rectiligne N.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr $\equiv$ à la figure rectiligne IH;
 & qui ait un $\angle n \equiv$ à $\angle$ donné N.

Résolution.

1. Tirez la diagonale GK.
2. Sur une droite infinie AP construisez le Pgr AE $\equiv$ au Δ GHK;
 qui ait un $\angle n \equiv$ à $\angle$ donné N.
3. Sur le côté BE du Pgr AE construisez le Pgr BF $\equiv$ au Δ GIK;
 qui ait un $\angle r \equiv$ à $\angle$ donné N.

Dem. 1.

Prop. 42. L. 1.

Prop. 44. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque $\angle N$ est $\equiv$ à chacun des $\angle n$ & r (Ref. 2. & 3).

1. L'angle n est $\equiv$ à $\angle r$.
 Si l'on ajoute de part & d'autre $\angle$ commun m ;
2. Les $\angle n + m$ seront $\equiv$ aux $\angle r + m$.
 Mais à cause que les côtés AD, BE sont des Plies (Ref. 2) coupées par une même droite AB.
3. Les deux $\angle$ intérieurs $n + m$ sont $\equiv$ à deux $\angle$.
4. Par conséquent, les $\angle$ contigus $r + m$, qui leurs sont égaux (Arg. 2), sont aussi $\equiv$ à deux $\angle$.
 Les droites AB, BC, qui rencontrent de part & d'autre la ligne BE au point B, faisant donc avec cette droite BE la somme des $\angle$ contigus $r + m \equiv$ à deux $\angle$ (Arg. 4).
5. Ces droites AB, BC ne forment qu'une même ligne droite AC.
 De plus, les droites DE, AC étant deux Plies (Ref. 2) coupées par une même droite BE.

Ax. 1.

Ax. 2.

Prop. 29. L. 1.

Ax. 1.

Prop. 14. L. 1.

6. Les

6. Les ∇ alternes r & s sont égaux entr'eux,
Et si l'on ajoute de part & d'autre ∇ commun u ;
7. Les $\nabla r + u$ seront $=$ aux $\nabla s + u$.
Mais à cause que les côtés EF , BC sont deux Plles (*Ref. 3*) coupées par une même droite BE .
8. Les ∇ intérieurs $r + u$ sont $=$ à deux $\angle$.
9. D'où il suit, que les ∇ contigus $s + u$, qui leurs sont égaux (*Arg. 7*), sont aussi $=$ à deux $\angle$.
Les droites DE , EF , qui rencontrent de part & d'autre la ligne BE au point E , faisant donc avec cette droite BE la somme des ∇ contigus $s + u =$ à deux $\angle$ (*Arg. 9*).
10. Ces droites DE , EF ne forment qu'une même ligne droite DF .
Mais comme les droites AD , BE ; item BE , CF sont des côtés opposés des Pgrs. AE , BF (*Ref. 2 & 3*).
11. La droite AD est $=$ & Plle à BE , & BE est $=$ & Plle à CF .
12. Partant AD est $=$ & Plle à CF .
De plus, ces droites $=$ & Plles AD , CF sont jointes par les droites AC , DF (*Arg. 5 & 10*).
13. Partant, la figure AF est un Pgr.
Et puisque le Pgr BF est $=$ au ΔGIK (*Ref. 3*), le Pgr $AE =$ au ΔGHK & $\nabla n =$ à ∇ donné N (*Ref. 2*).
14. Le Pgr entier AF est $=$ à la figure rectiligne IH ; & il a un $\nabla n =$ à ∇ donné N .

Prop. 29. L. 1.

Ax. 2.

Prop. 29. L. 1.

Ax. 1.

Prop. 14. L. 1.

Prop. 34. L. 1.

Prop. 30. L. 1.

Ax. 1.

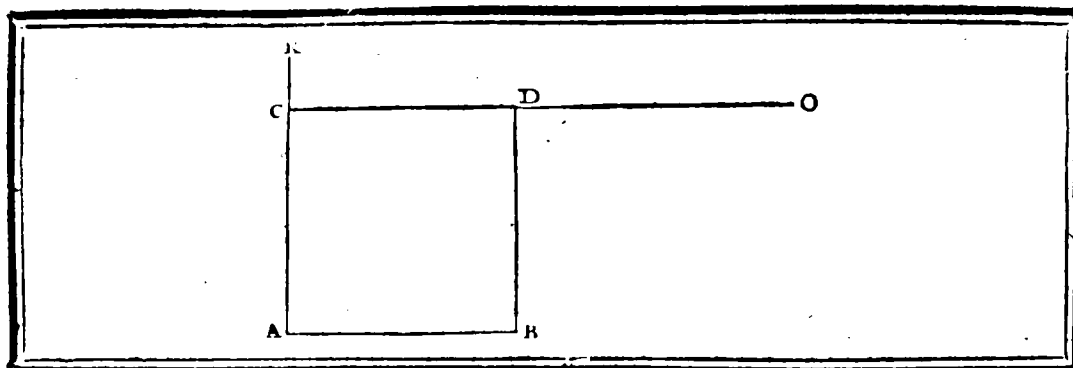
Prop. 33. L. 1.

Def. 35 L. 1.

Ax. 2.

C. Q. F. F





PROPOSITION XLVI. PROBLEME XIV.
Sur une ligne droite donnée (AB) construire un quarré (AD).

DONNEE.
 La droite AB.

CHERCHEE.
 La construction d'un quarré sur la droite AB.

Résolution.

1. DU point A élevez sur la droite AB la perpendiculaire AK. Prop. 11. L. 1.
2. Retranchez de la droite AK une partie AC = à AB. Prop. 3. L. 1.
3. Par le point C tirez la droite CO Plle à AB, }
4. Et par le point B tirez la droite BD Plle à AC, laquelle coupera } Prop. 31. L. 1.
 CO quelque part en D (Rem. de la Prop. XXVII).

DEMONSTRATION.

Puisque dans la figure AD les côtés opposés AB, CD, de même que AC, BD sont Plles (Ref 3 & 4).

1. La figure AD est un Pgr Def. 35. L. 1.
2. Partant, les côtés opposés AB, CD & AC, BD sont = entr'eux. Prop. 34. L. 1.
 Mais AC est = à AB (Ref 2).
3. Par conséquent, les quatre côtés AB, CD, AC, BD sont = entr'eux. Ax. 1.
 Derechef, puisque les droites AB, CD sont Plles. (Ref. 3).
4. Les $\angle$ intérieurs opposés A & ACD sont = à deux $\angle$. Prop. 29. L. 1.
 Or l'angle A étant un $\angle$ (Ref. 1).
5. Il est évident, que $\angle$ ACD est un $\angle$ aussi. N. C.
 De plus, à cause que AD est un Pgr (Arg. 1).
6. Les angles opposés sont = entr'eux. Prop 34. L. 1.
7. C'est pourquoi, les $\angle$ BDC & B, opposés aux $\angle$ droits A & ACD, sont aussi des $\angle$.
 La figure AD étant donc un Pgr (Arg. 1) équilatéral (Arg. 3) & rectangulaire (Arg. 7).
8. Il s'ensuit, que cette figure AD construite sur la droite AB est un quarré. Def. 30. L. 1.

C. Q. F. E.

C O R O L L A I R E I.

Tout parallélogramme, qui a deux côtés égaux AB, AC alentour d'un angle droit, est un carré. Car en tirant par les points C & B les parallèles CD, BD aux deux côtés AB, AC , on aura construit le carré AD (Def. 30. L. 1).

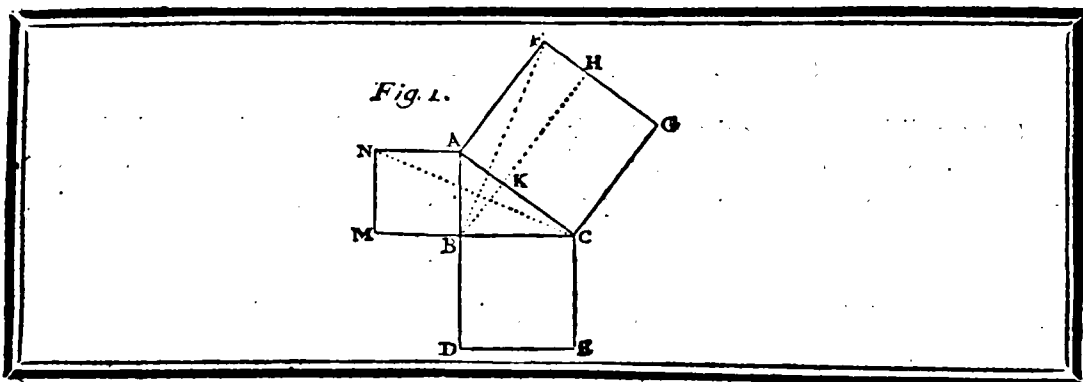
C O R O L L A I R E II.

Si dans un parallélogramme un seul angle est droit, les trois autres le sont aussi; ou bien, un tel parallélogramme est rectangle. Car puisque les angles opposés A & BDC sont égaux (Prop. 34. L. 1) & que l'angle A est un angle droit, l'angle BDC sera aussi droit; de plus les lignes AB, CD , item AC, BD étant des parallèles, les angles intérieurs A & ACD , item A & B sont égaux à deux droits (Prop. 29. L. 1). Mais l'angle A étant un angle droit, il est manifeste que les angles ACD & B sont des droits aussi.

C O R O L L A I R E III.

Si deux lignes sont égales, les carrés décrits sur ces lignes seront égaux; & réciproquement, si les carrés sont égaux, leurs côtés le seront aussi.





PROPOSITION XLVII. THEOREME XXXIII.
Dans tout triangle rectangle (ABC): le quarré de l'hypotenuse (AC) est égal aux quarrés des deux autres côtés (AB, BC), qui renferment l'angle droit (ABC).

HYPOTHESE.

Le $\triangle ABC$ est Rgle, ou $\angle ABC$ est $\angle$.

THESE.

Le $\square$ de l'hypotenuse AC est = au $\square$ de AB.
 & au $\square$ de BC pris ensemble.

Préparation.

1. Construisez (Fig. 1.) sur les trois côtés AC, AB, BC des $\square$ AG, AM, CD.
2. Par le point B tirez la droite BH Plle à AF ou CG.
3. Du point B au point F tirez la droite BF, }
4. Et du point C au point N la droite CN. }

Prop. 46. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la figure AM est un $\square$ (Prep. 1).

1. L'angle ABM est un $\angle$.

Def. 30. L. 1.

Mais $\angle ABC$ étant aussi un $\angle$ (Hyp).

Ax. 2.

2. Les deux $\angle$ contigus ABM, ABC sont = à deux $\angle$.

Les droites MB, BC, qui rencontrent de part & d'autre la ligne AB au point B, faisant donc avec cette droite AB la somme des $\angle$ contigus ABM, ABC = à deux $\angle$ (Arg. 2).

3. Ces droites MB, BC ne font qu'une même ligne droite MC qui est Plle à NA. {

Prop. 14. L. 1.

Prop. 29. L. 1.

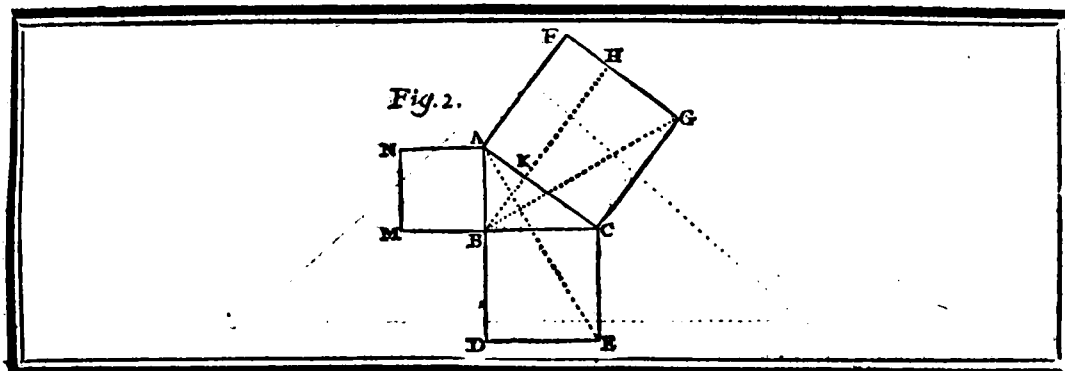
Par la même raison on prouvera que

4. La droite AB ne forme avec BD qu'une même droite AD qui est Plle à CE. De plus, à cause que AG, AM sont des $\square$ (Prep. 1).

5. Les $\angle$ FAC, NAB sont = entr'eux (puisque'ils sont des angles droits); & les côtés AF, AC, item AB, AN sont aussi = entr'eux.

Def. 30. L. 1.

Si donc on ajoute à ces $\angle$ égaux, FAC, NAB (Arg. 5), $\angle$ commun CAB; 6. L'angle



6. L'angle entier FAB fera $\equiv$ à $\angle$ entier NAC.

Ax. 2.

Puis donc que dans les Δ AFB, ACN les côtés AF, AB & AC, AN sont $\equiv$ chacun à chacun (Arg. 5), & que $\angle$ compris FAB est $\equiv$ à $\angle$ compris NAC (Arg. 6).

7. Le Δ AFB fera $\equiv$ au Δ ACN.

Prop. 4. L. 1.

Mais le Δ AFB & le Pgr AH sont placés sur la même base AF & entre les mêmes Plles AF, BH (Prep. 2).

8. D'où il suit, que le Pgr AH est double du Δ AFB.

Prop. 41. L. 1.

De même, le Δ ACN & le $\square$ AM étant placés sur la même base AN & entre les mêmes Plles AN, MC (Arg. 3).

9. Le $\square$ AM est double du Δ ACN.

Prop. 41. L. 1.

Les Δ AFB, ACN étant donc $\equiv$ entr'eux (Arg. 7) & le Pgr AH & le $\square$ AM en étant doubles (Arg. 8 & 9).

10. Il s'ensuit, que le Pgr AH est $\equiv$ au $\square$ AM.

Ax. 6.

De la même manière; en tirant (Fig. 2) les lignes BG, AE on démontrera, que le Pgr CH est $\equiv$ au $\square$ CD.

11. Mais le Pgr AH avec le Pgr CH forment le $\square$ AG.

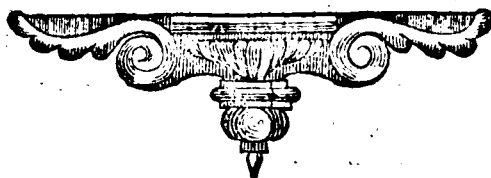
12. C'est pourquoi, ce $\square$ AG est $\equiv$ à la somme des $\square$ AM & CD.

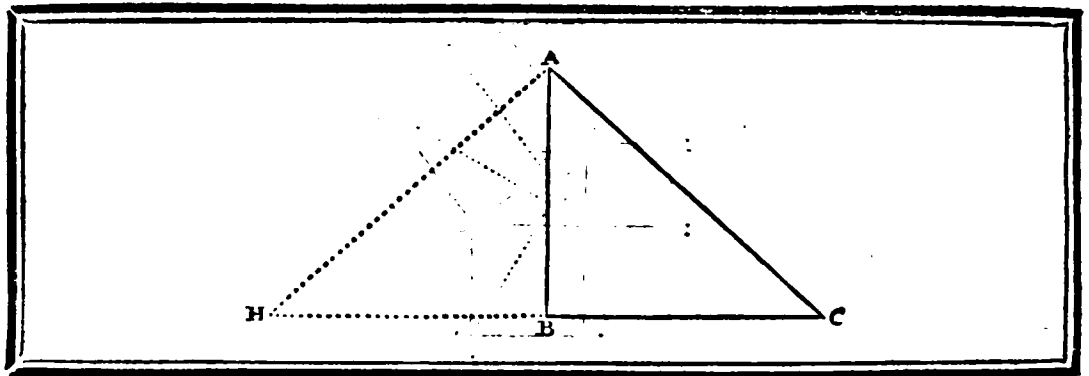
Ax. 1.

Or comme le $\square$ AG est le $\square$ de l'hypothénuse AC, & les $\square$ AM & CD les $\square$ des deux autres côtés qui renferment l'angle droit ABC.

13. Le $\square$ de l'hypothénuse AC est $\equiv$ au $\square$ des deux autres côtés AB & BC pris ensemble.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XLVIII. THEOREME XXXIV.

Si le carré de l'un des côtés (CA) d'un triangle (CBA) est égal aux carrés des deux autres côtés (AB, BC): l'angle (ABC) compris de ces deux côtés (AB, BC) est droit.

HYPOTHESE.

Le $\square$ de CA est = aux $\square$ de AB & au $\square$ de BC.

THESE.

L'angle ABC compris des côtés AB, BC est $\angle$.

Préparation.

1. Du point B, sur la droite BA, élevez la perpendiculaire BH.
2. Faites $BH = BC$.
3. Du point H au point A tirez la droite HA.

Prop. 11. L. 1.
Prop. 3. L. 2.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque BH est = à BC (Prep. 2).

1. Le $\square$ de BH sera = au $\square$ de BC.

Si on ajoute de part & d'autre le $\square$ de AB.

2. Les $\square$ de AB & BH seront = aux $\square$ de AB & BC pris ensemble.

Mais le $\triangle$ HBA étant Rgle en B (Prep. 1).

3. Il s'ensuit, que le $\square$ de HA est = aux $\square$ de AB & BH.

Puis donc que le $\square$ de CA est = aux $\square$ de AB & BC (Hyp. 1), le $\square$ de HA = aux $\square$ de AB & BH (Arg. 3) & que les $\square$ de AB & BH sont = aux $\square$ de AB & BC (Arg. 2).

4. Il faut nécessairement, que le $\square$ de CA soit = au $\square$ de HA.

5. Partant, CA est = à HA.

Or dans les $\triangle$ CBA, HBA le côté CA est = au côté HA (Arg. 5), AB est commun aux deux $\triangle$ & la base BC est = à la base BH (Prep. 2).

6. Par conséquent, les $\angle$ ABC, ABH, compris par les côtés égaux AB, BC & AB, BH, sont = entr'eux.

Mais l'angle ABH est un $\angle$ (Prep. 1).

7. Partant l'angle ABC sera aussi droit.

Prop. 46. L. 1.
Coroll. 3.

Ax. 2.

Prop. 47. L. 1.

Ax. 1.
Prop. 46. L. 1.
Coroll. 3.

Prop. 8. L. 1.

C. Q. F. D.

LES
E L E M E N S
D'EUCLIDE,

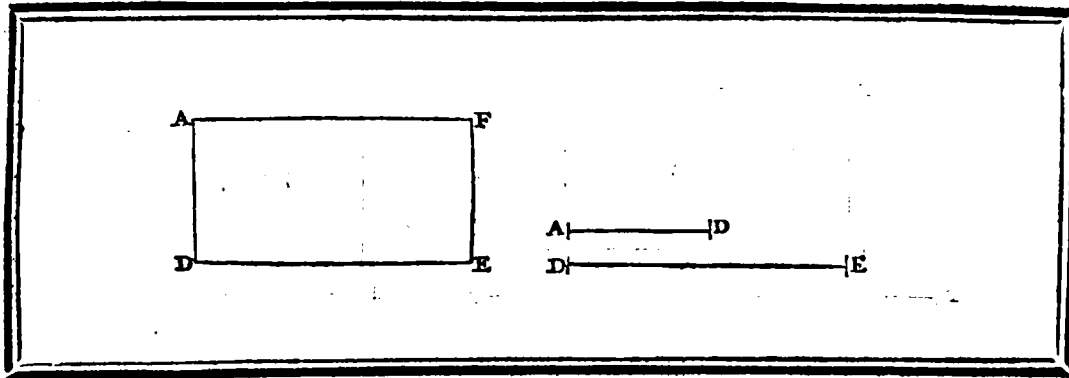
L I V R E S E C O N D.

U. S. A.

U. S. A. U. S. A. U. S. A.

U. S. A. U. S. A. U. S. A.

U. S. A. U. S. A. U. S. A.

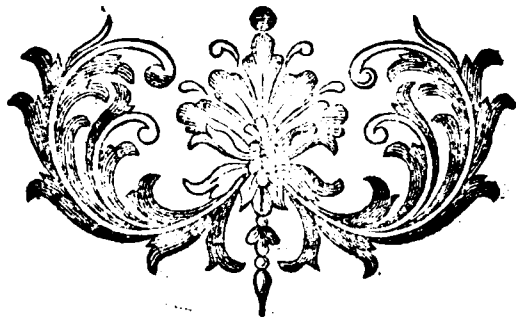


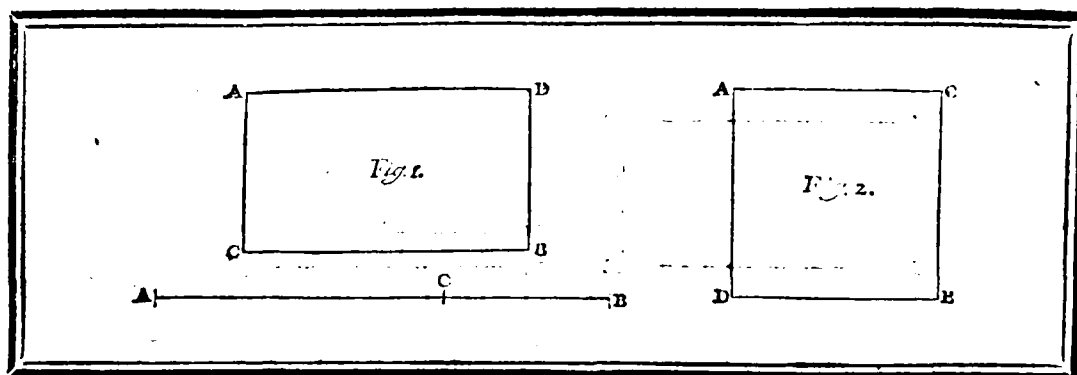
D E F I N I T I O N S.

I.

ON dit de tout Parallélogramme rectangle (DF); qu'il est compris des deux côtés (AD, DE) qui environnent l'angle droit (ADE).

1. Un Parallélogramme rectangle peut être désigné de cette manière; parcequ'un angle droit & les deux côtés qui l'environnent sont les déterminantes d'une telle figure. Aussitôt que la longueur des côtés AD, DE, alentour de l'angle droit, est fixée, la grandeur du Rectangle est déterminée en tout sens; puisqu'on achève de le construire en tirant par les extrémités A & E de ces côtés des parallèles à ces mêmes côtés AD, DE, selon la Def. 35. & Prop. 31. L. 1.
2. Pour abrégé, on désigne souvent un Parallélogramme rectangle DF par les trois lettres alentour de l'angle droit, en cette manière; le Pgr Rgle ADE. On le marque aussi ainsi. Le Pgr Rgle AD; DE; ce qui veut dire le Pgr Rgle qui resulteroit des deux côtés AD & DE formant un angle droit: on le prononce simplement, le Pgr Rgle sous AD & DE; ou le Pgr Rgle de AD & DE.

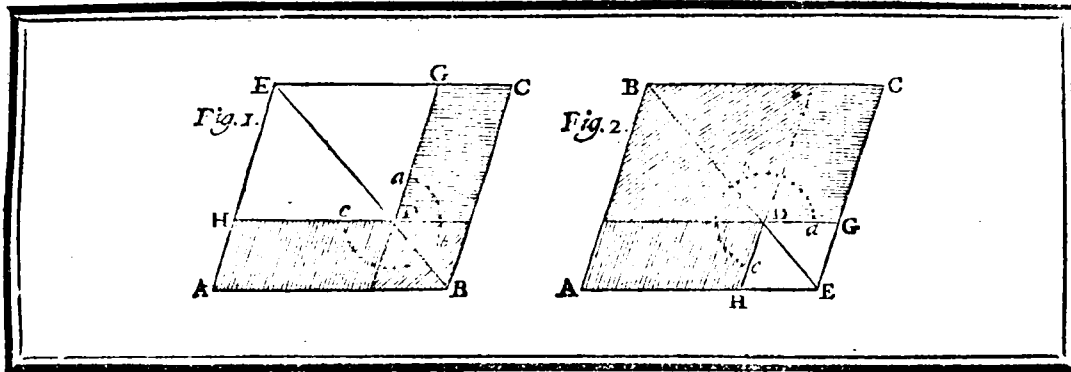




D E F I N I T I O N S.

3. Quelquefois les parties d'une ligne droite servent à indiquer un tel parallélogramme rectangle; par ex. (Fig. 1). la droite AB étant partagée en C , on peut construire (Prop. 31. L. 1.) de ces deux lignes AC , CB un parallélogramme rectangle, en les joignant à angle droit. On désigne donc ce parallélogramme ainsi. Le Pgr Rgle AC ; CB ; ou bien simplement le Pgr Rgle ACB ; où la lettre du milieu marque le point qui est commun aux deux lignes. De la même manière, on entend par le Pgr Rgle ABC , celui qu'on construirait selon les mêmes règles, en prenant AB pour un côté & BC pour l'autre.
4. Dans le cas où les lignes AD , & DB alentour de l'angle droit sont égales (Fig. 2), le parallélogramme DC est un carré (Def. 30. L. 1). Comme dans ce cas, un des côtés DB avec l'angle droit déterminent le carré, que l'on peut construire de ces données (par la Prop. 31. L. 1). On pourra aussi désigner ce carré par ses déterminantes, de cette façon, le $\square$ de DB ; ou le $\square$ de AD .



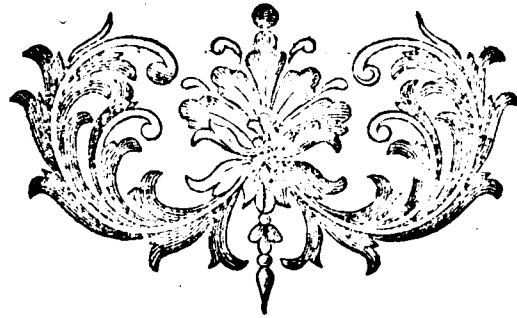


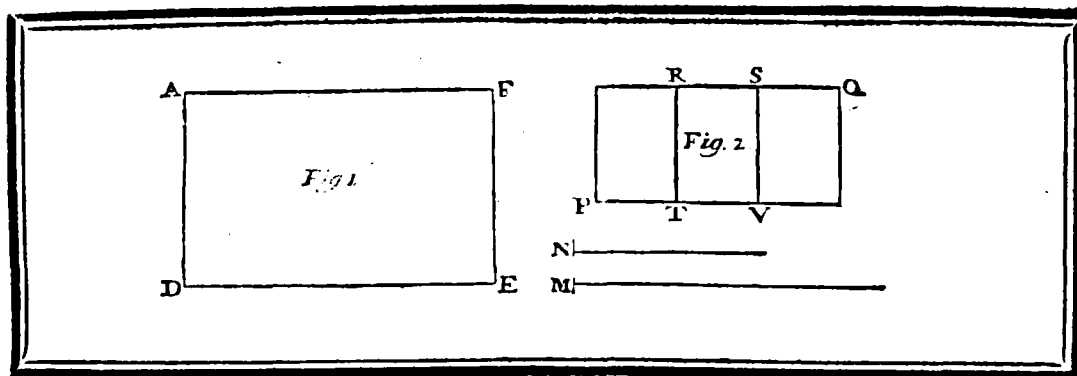
D E F I N I T I O N S.

II.

ON appelle *Gnomon*, ou *Equerre*, la figure (ABCGDH) composée d'un parallélogramme (DB) alentour de la diagonale (BE) & de deux compléments (AD, DC).

On marque le Gnomon par un arc de cercle *abc*, qui passe par les deux compléments (AD, DC) & le Pgr alentour de la diagonale, desquels il est composé. On peut former dans chaque Pgr deux Gnomons différens; d'abord, en retranchant (Fig. 1) du Pgr entier, le plus grand Pgr (ED) alentour de la diagonale; ou bien, en retranchant (Fig. 2) le plus petit Pgr (ED) alentour de la diagonale.





A X I O M E S.

I.

LE tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

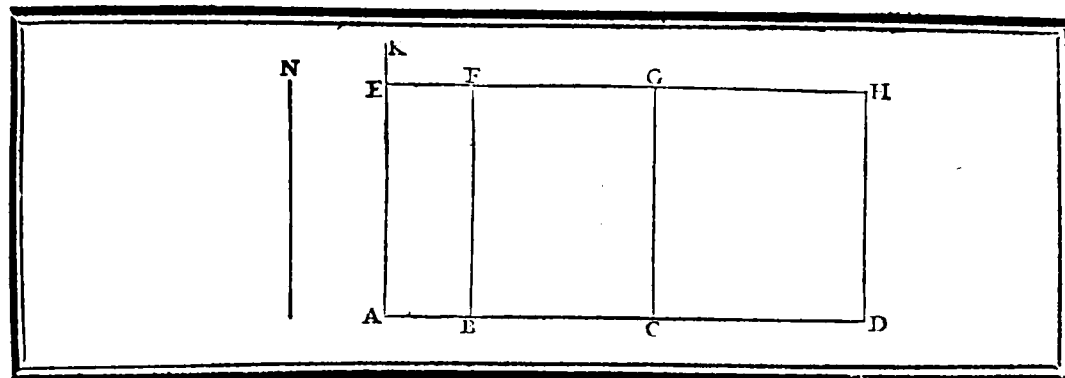
Le Pgr entier PQ, (Fig. 2) est égal à toutes ses parties, les Pgrs PR, TS, VQ pris ensemble.

II.

LEs parallélogrammes rectangles compris de côtés égaux; sont égaux.

Le Pgr Rgle DF (Fig. 1) est compris des droites AD, DE; par conséquent si la droite N est égale à AD, & la droite M égale à DE, le Rgle formé des droites N & M sera nécessairement égal au Rgle DF. Cela est évident par un des premiers principes de nos raisonnemens, qui demande, que toutes les déterminées de deux sujets soient les mêmes, aussitôt qu'il ne se trouve pas de différence dans leurs déterminantes.





PROPOSITION I. THEOREME I.

SI de deux lignes droites (AD & N), l'une (comme AD) est coupée en tant de parties (AB, BC, CD) que l'on voudra: le rectangle compris de ces deux droites (AD & N) est égal aux rectangles compris de la droite entière (N), & de chaque partie (AB, BC, CD) de la coupée (AD).

HYPOTHESE.

AD & N sont deux droites, dont l'une AD est coupée en plusieurs parties AB, BC, CD.

THESE.

Le Rgle AD. N est = aux Rgles AB. N + BC. N + CD. N.

Préparation.

1. Sur AD au point A élevez la $\perp$ AK.
2. De la droite AK retranchez une partie EA = N.
3. Par les points D & E tirez les droites DH, EH Plles à AE, AD,
4. Et par les points de section B, & C, les droites BF, CG Plles à AE ou DH.

Prop. 11. L. 1.

Prop. 3. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

1. LE Rgle AH est = aux Rgles AF, BG, CH pris ensemble.
Mais à cause que le Rgle AH est compris des droites EA, AD (Prep. 3) & que EA = N (Prep. 2).
2. Ce Rgle AH est compris des droites AD & N.
De même; à cause que le Rgle AF est compris des droites EA, AB (Prep. 4) & que EA = N (Prep. 2).
3. Ce Rgle AF est compris des droites AB & N.
4. De la même manière; le Rgle BG est compris des droites BC & N; parce qu'il est compris des droites FB & BC & que FB = N;
Et ainsi de tous les autres.
5. Partant, le Rgle compris des droites AD & N est = aux Rgles compris des droites AB & N, BC & N, CD & N pris ensemble. c. à d. le Rgle AD. N est = aux Rgles AB. N + BC. N + CD. N.

Ax. 1. L. 2.

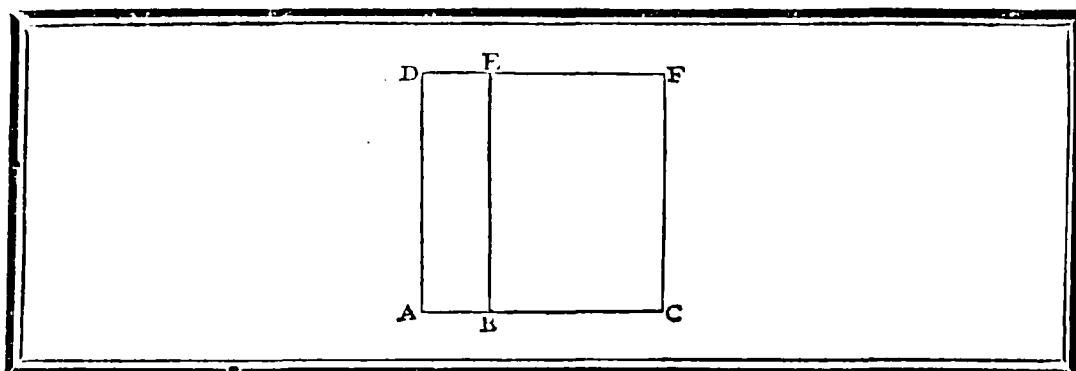
Ax. 2. L. 2.

Ax. 2. L. 2.

Prop. 34. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION II. THEOREME II.

SI une ligne droite (AC) est coupée en tant de parties (AB, BC), que l'on voudra: les rectangles compris de la droite entiere (CA) & de chacune de ses parties (AB, BC), sont égaux au quarré de la droite entiere (AC).

HYPOTHESE.

AC est une droite coupée en plusieurs parties AB, BC.

THESE.

Le Rgle CAB + le Rgle ACB
sont = au $\square$ de AC.

Préparation.

1. Sur la droite AC construisez le $\square$ AF
2. Par le point de section B tirez la droite BE Plle à AD, ou CF.

Prop 46. L. I.

Prop. 31. L. I.

DEMONSTRATION.

1. LE Rgle entier AF est = aux Rgles AE, BF pris ensemble.
Mais ce Rgle AF est le $\square$ de la ligne AC (Prep. 1)
2. Partant, les Rgles AE, BF pris ensemble égalent le quarré de la ligne AC.
3. Or le Rgle AE, est compris des droites CA, AB; à cause qu'il est compris des droites DA, AB dont $DA = CA$ (Prep. 1).
4. De même, BF est un Rgle compris des droites AC, CB; parcequ'il est compris des droites EB, BC; dont $EB = AC$ (Prep. 1 & 2).
5. C'est pourquoi, le Rgle compris des droites CA, AB avec le Rgle compris des droites AC, CB est = au $\square$ de la droite AC; ou bien le Rgle CAB + le Rgle ACB sont = au $\square$ de AC.

Ax. 1. L. 2.

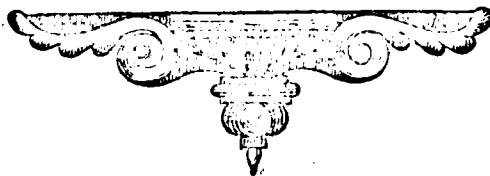
Ax. 1. L. 1.

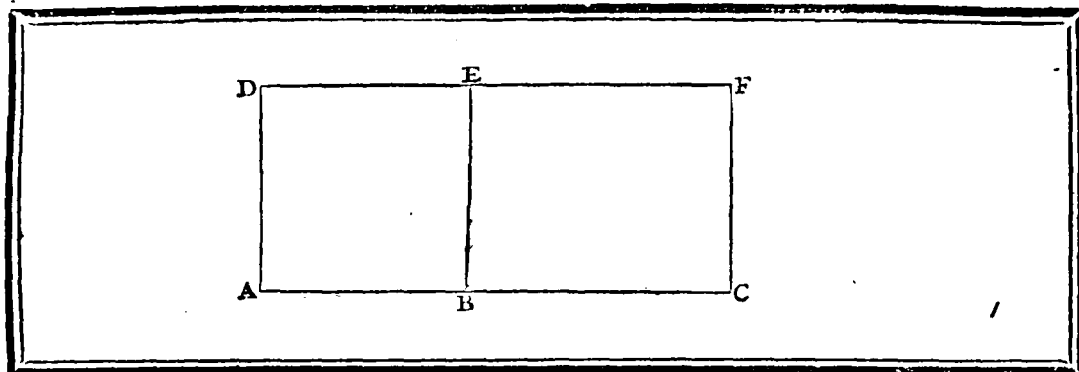
Ax. 2. L. 2.

Prop. 34. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION III. THEOREME III.

SI une ligne droite (AC) est coupée comme l'on voudra (en B): le rectangle compris de la droite entière (CA) & de l'une de ses parties (AB) est égal au rectangle compris des deux parties (AB, BC), & au quarré de la partie (AB); prise auparavant.

HYPOTHESE.

AC est une droite coupée en deux parties quelconques AB, BC.

THESE.

Le Rgle CAB est = au Rgle ABC + le $\square$ de AB.

Préparation.

1. Sur la droite AB construisez le $\square$ AE.
2. Prolongez le côté DE indéfiniment vers F.
3. Par le point C tirez la droite CFP lle à AD ou BE, & prolongez la, jusqu'à ce qu'elle rencontre DF au point F.

Prop 46. L. 1.
Dem. 2.
Prop. 31. L. 1.
Dem. 2.

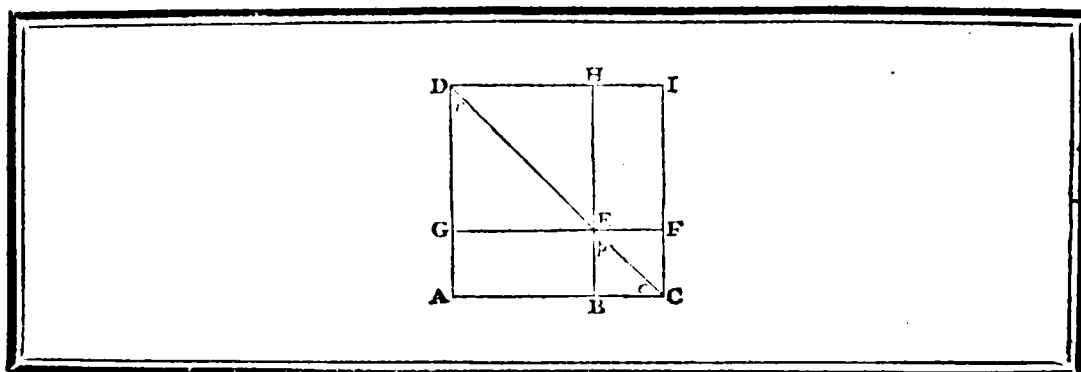
DEMONSTRATION.

1. LE Rgle AF est = aux Rgles AE & BF pris ensemble.
2. Mais le Rgle AF est compris des droites CA, AB; parce qu'il est compris de CA & AD, dont $AD = AB$ (Prep. 1).
3. Et le Rgle BF est compris de AB, BC; à cause qu'il est compris de EB, BC, dont $EB = AB$ (Prep. 1).
- De plus, le Rgle AE étant le $\square$ de la droite AB (Prep. 1).
4. Le Rgle de CA. AB est = au Rgle de AB. BC avec le $\square$ de AB; ou bien le Rgle CAB est = au Rgle ABC + le $\square$ de AB.

Ax. 1. L. 2.
Ax. 2. L. 2.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.
S I l'on coupe une droite (AC) en deux parties quelconques (AB, BC): le carré de la droite entière (AC) est égal aux carrés des deux parties (AB, BC), & au double rectangle compris de ces deux parties (AB, BC).

HYPOTHESE.

AC est une droite coupée en deux parties quelconques AB, BC.

THESE.

Le $\square$ de AC est = au $\square$ de AB + au $\square$ de BC + 2 Rgles ABC.

Préparation.

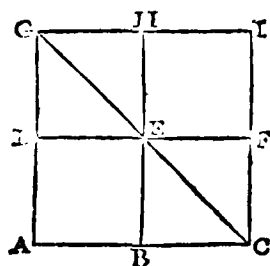
1. Sur AC construisez le $\square$ AI.
2. Par le point de section B tirez BH Plle à CI, ou AD.
3. Tirez la diagonale CD qui coupera BH quelque part en E.
4. Par le point E tirez GF Plle aux côtés opposés DI ou AC.

Prop. 46. L. 1.
 Prop. 31. L. 1.
 Dem. 1.
 Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

- P** uisque les lignes AD, BH, CI; de même AC, GF, DI sont Plles (Prep. 1. 2. & 4).
1. Les quatre figures AE, EI, BF, GH sont des Pgrs.
 Et parce que chacune de ces figures renferme un des angles droits du $\square$ AI.
 2. Ces Pgrs sont aussi Rgles.
 De plus, à cause que les côtés DA, AC du $\square$ AI sont égaux (Def. 30. L. 1).
 3. L'angle r est = à $\forall o$.
 Et à cause du parallélisme des droites AD, BH (Prep. 2.) coupées par la droite DC (Prep. 3).
 4. L'angle intérieur r est = à son $\forall$ extérieur opposé p .
 5. Partant, $\forall o = \forall p$.
 6. C'est pourquoi, le côté BE est = au côté BC.
 7. Et le Rgle BF est un $\square$; & nommément le $\square$ de BC.
 8. On prouvera de la même manière, que le Pgr GH est un $\square$; & nommément le $\square$ de AB; à cause que GE = AB.
 De plus BE étant = à BC (Arg. 6).
 9. Le Rgle AE, ou le Rgle de AB. BE sera = au Rgle de AB. BC.
 Mais le Rgle AE est = au Rgle EI (Prop. 43. L. 1).
 10. D'où il suit, que le Rgle EI est aussi = à un Rgle de AB. BC.

Def. 35. L. 1.
 Prop. 46. L. 1.
 Coroll. 2.
 Prop. 5. L. 1.
 Prop. 29. L. 1.
 Ax. 1. L. 1.
 Prop. 6. L. 1.
 Def. 30. L. 1.
 Prop. 34. L. 1.
 Ax. 2. L. 2.
 Ax. 1. L. 1.



11. Par conséquent, les deux Rgles AE, EI pris ensemble, sont égaux au double rectangle des parties AB, BC.

Puis donc que les deux $\square$ GH & BF sont les quarrés des deux parties AB & BC (Arg. 7 & 8). & que les Rgles AE, EI pris ensemble, sont = au double Rgle des parties AB, BC.

12. Il s'ensuit, que le $\square$ de la ligne entiere AC est = au $\square$ de AB + au $\square$ de BC + 2 Rgles ABC,

C. Q. F. D.

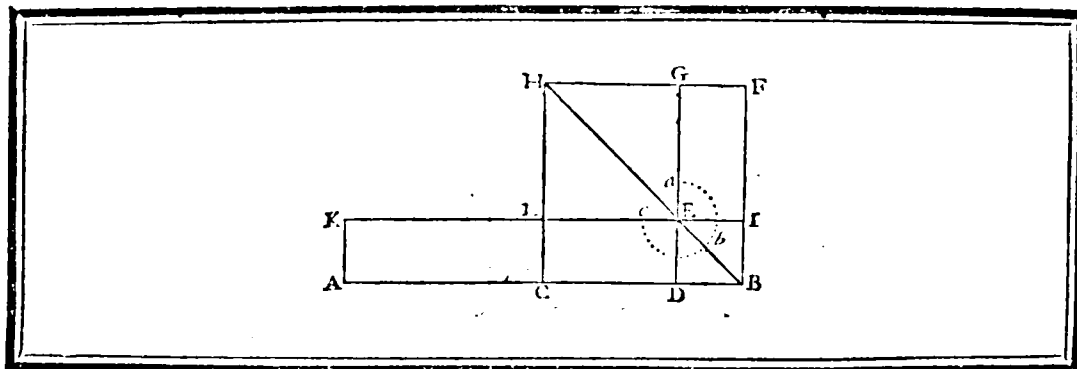
C O R O L L A I R E I.

Quand deux droites HB, DF Plles aux côtés d'un quarré s'entrecoupent en un même point E de la diagonale, les Rgles BF, DH formés autour de la diagonale sont des quarrés.

C O R O L L A I R E II.

SI l'on coupe la ligne AC en deux également en B, les compléments AE, EI sont des quarrés, & ces compléments égaux entr'eux, sont aussi égaux aux quarrés alentour de la diagonale, & le quarré de la ligne entiere AC est quadruple du quarré d'une des parties AB ou BC.

Car BF, DH sont des quarrés, (par le Coroll. précédent), égaux entr'eux; à cause que $BC = AB = DE$. De plus AE étant = à BF & EI étant = à BF, (Prop. 36. L. 1); les compléments AE, EI sont donc des quarrés aussi: & puisqu'ils sont égaux entr'eux; le $\square$ de AC = 4 $\square$ de AB = 4 $\square$ de BC.



PROPOSITION V. THEOREME V.

Une droite (AB) étant partagée en deux parties égales (AC, CB) & en deux inégales (AD, DB); le rectangle compris des deux parties inégales (AD, DB) & le carré de la partie (CD), comprise entre les points de section (C & D), sont égaux au carré de la moitié (AC ou CB) de la droite entière (AB).

HYPOTHESE.

AB est une droite coupée en deux également en C, & en deux inégalement en D.

THESE.

Le Rgle $ADB + \text{le } \square \text{ de } CD \text{ sont } = \text{ au } \square \text{ de } CB.$

Préparation.

1. Sur la droite CB construisez le $\square$ CF.
2. Par le point de section D, tirez DG Plle à BF ou CH.
3. Tirez la diagonale BH, qui coupera DG quelque part en E.
4. Par le point de section E tirez IL Plle à BC ou FH, & par le point A, la droite AK Plle à CL, qui conpera le prolongement de IL en K.

Prop. 46. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Dem. 1.

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

- Puisque la figure CF est un carré (Prop. 1).
1. Les Rgles LG, DI; alentour de la diagonale sont des $\square$.
 2. Et nommément DI le $\square$ de DB, & LG le $\square$ de CD; à cause que $LE = CD$.
 3. De plus, le complément CE est = au complément EF. Qu'on ajoute de part & d'autre le $\square$ DI.
 4. Le Rgle CI sera = au Rgle DF.
 5. Mais parce que $AC = CB$ (Hyp.).
 6. Le Rgle AL est = au Rgle CI.
 7. Partant, le Rgle AL est = au Rgle DF.
 8. Si donc on ajoute de part & d'autre le Rgle CE;
 9. Le Rgle entier AE sera = aux Rgles DF & CE pris ensemble; c. à d. au Gnomon abc.
 10. Mais le Rgle AE est compris de AD, DB; parce qu'il est compris de AD, DE, dont $DE = DB$ (Arg. 1).
 11. Par conséquent, le Rgle de AD . DB est aussi = au gnomon abc. Ajoutant de nouveau de part & d'autre le $\square$ LG, qui est le carré de CD (Arg. 2).
 12. Le Rgle AD . DB avec le $\square$ de CD sera = au Gnomon abc avec le $\square$ LG.
 13. Or ce Gnomon abc avec le $\square$ LG est = au $\square$ CF, qui est le carré de la moitié CB, de la droite entière AB (Prop. 1).
 14. Partant, le Rgle $ADB + \text{le } \square \text{ de } CD \text{ sont } = \text{ au } \square \text{ de } CB.$

Prop. 4. L. 2.

Coroll. 1.

Prop. 34. L. 1.

Prop. 43. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 2. L. 2.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

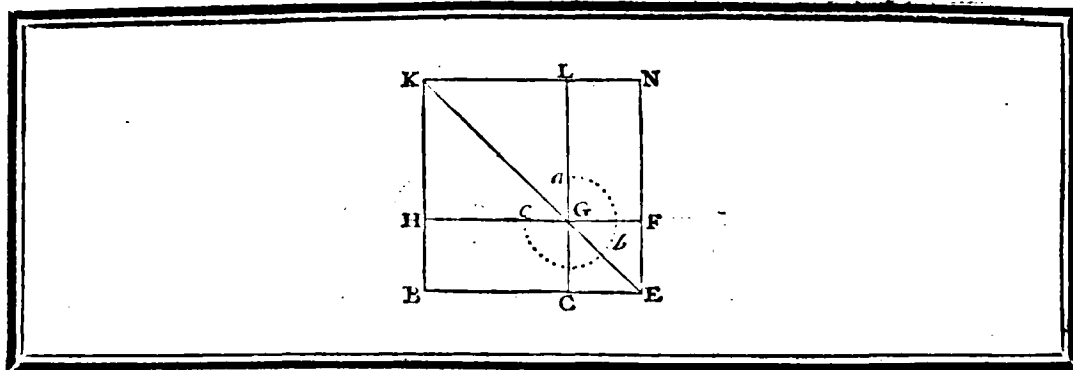
Ax. 2. L. 2.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VII. THEOREME VII.

SI une ligne droite (BE) est coupée en deux parties quelconques (BC, CE): le carré de la droite entière (BE) & le carré de l'une des parties (comme CE), sont égaux au double rectangle compris de la droite entière (BE) & de la même partie (EC) prise auparavant, avec le carré de l'autre partie (BC).

HYPOTHESE.

BE est une droite coupée inégalement en C.

THESE.

Le $\square$ de BE + le $\square$ de CE sont = à 2 Rgles BEC + au $\square$ de BC.

Préparation.

1. Sur BE construisez le $\square$ BN.
2. Par le point C, tirez la droite CL Plle à EN ou BK.
3. Tirez la diagonale EK, qui coupera CL quelque part en G.
4. Par le point G, tirez la droite FH Plle à EB ou NK.

Prop. 46. L. 1.
Prop. 31. L. 1.
Dem. 1.
Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la figure BN est un carré (Prop. 1).

1. Les Rgles alentour de la diagonale CF, HL sont des $\square$.
2. Et nommément CF le $\square$ de CE, & HL le $\square$ de BC; à cause que HG = BC. Mais le Rgle BG étant = au Rgle NG (Prop. 43. L. 1); si on ajoute de part & d'autre le $\square$ CF;
3. Le Rgle BF sera = au Rgle NC.
4. Partant, le double Rgle BF est = aux Rgles BF & NC pris ensemble, Et à cause que les Rgles BF & NC ne sont que le Gnomon abc avec le $\square$ CF.
5. Ce Gnomon abc avec le $\square$ CF sera aussi double du Rgle BF; ou bien = au double Rgle BF. Mais le Rgle BF est = au Rgle compris de BE, EC, à cause que EF = EC (Arg. 1).
6. C'est pourquoi, le Gnomon abc avec le $\square$ CF est = au double Rgle compris de BE, EC. Si on ajoute donc de part & d'autre le $\square$ HL, qui est = au $\square$ de BC (Arg. 2).
7. Le Gnomon abc + le $\square$ CF + le $\square$ HL seront = au double Rgle BE, EC + au $\square$ de BC. Puis donc que le Gnomon abc + le $\square$ HL sont = au $\square$ de BE, & que le $\square$ CF n'est autre chose que le $\square$ de CE (Arg. 2).
8. Il est manifeste, que le $\square$ de BE + le $\square$ de CE sont = à 2 Rgles BEC + au $\square$ de BC.

[Prop. 4. L. 2;
Coroll. 1.
Prop. 34. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

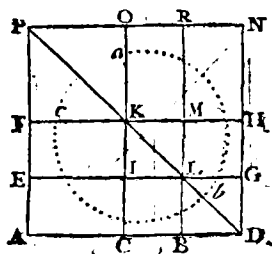
Ax. 1. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.
Si une droite (AB) est partagée en deux parties quelconques (AC, CB): le rectangle quadruple compris de la droite entière (AB) & d'une des parties (BC), avec le carré de l'autre partie (AC), sont égaux au carré de la droite (AD), composée de l'entière (AB) & de l'ajoutée (BD) égale à la partie (BC).

HYPOTHESE.

AB est une droite partagée en C, à laquelle on ajoute directement la droite BD = BC.

THESE.

Le Rgle quadruple ABC + le $\square$ de AC sont = au $\square$ de AD.

Préparation.

1. Sur AD construisez le carré AN.
2. Par les points B & C, tirez BR & CO Plls à DN ou AP.
3. Tirez la diagonale DP, qui coupera BR & CO quelque part en L & en K.
4. Par les points L & K, tirez GE & HF Plls à DA ou NP.

Prop. 46. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Dem. 1.

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la figure AN est un carré (Prep. 1).

1. Les Rgles alentour de la diagonale CH, ER, FO sont des carrés.
 Et parce que dans le $\square$ CH, le côté CD est partagé en deux également en B (Hyp.).

Prop. 4. L. 2.
 Coroll. 1.

2. Les Rgles BG, CL, LH, IM sont quatre carrés égaux,

3. Et le $\square$ CH est = au quadruple $\square$ CL.

Prop. 4. L. 2.
 Coroll. 2.

De plus, à cause que ER est un carré (Arg. 1).

4. Le Rgle EK est = au Rgle KR.

Prop. 43. L. 1.

Mais puisque IK = IC (Arg. 2), & CO Plle à AP (Prep. 2)

5. Le Rgle AI est = au Rgle EK.

Prop. 36. L. 1.
 Ax. 1. L. 1.

6. Partant, le Rgle AI est aussi = au Rgle KR.

De même, à cause que KM = MH (Arg. 2), & HF Plle à NP (Prep. 4).

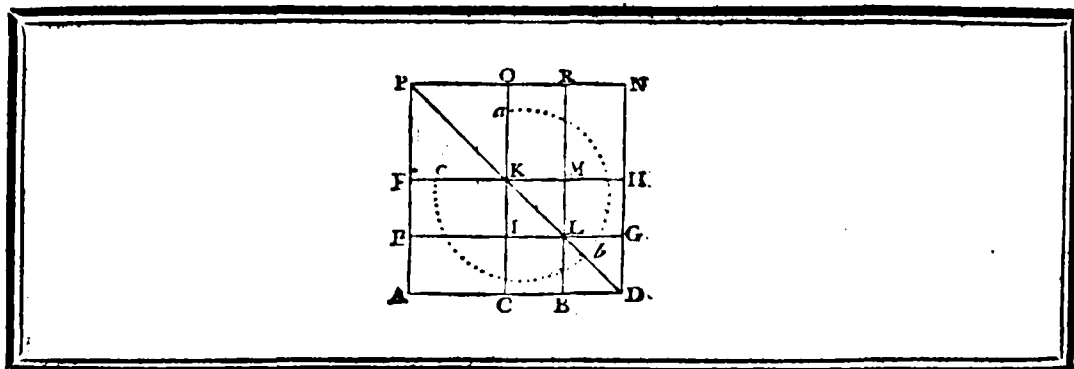
7. Le Rgle KR est = au Rgle MN.

Prop. 36. L. 1.
 Ax. 1. L. 1.

8. Partant, les quatre Rgles AI, EK, KR, MN, sont = entr'eux.

L 2

9. Par



9. Par conséquent, leur somme est $\equiv$ au quadruple Rgle AL.

Si on ajoute de part & d'autre le $\square$ CH, qui est $\equiv$ au quadruple $\square$ CL (*Arg. 3*).

10. Le Gnomon abc , qui en résulte d'une part, est $\equiv$ au Rgle quadruple AI & au quadruple $\square$ CL pris ensemble; c. a. d. au Rgle quadruple AL, attendu que le Rgle AI + le $\square$ CL est $\equiv$ au Rgle AL.

Ax. 2. L. 1.

En ajoutant de nouveau de part & d'autre le $\square$ de AC, qui est $\equiv$ au $\square$ FO; à cause que $AC = FK$ (*Prop. 34. L. 1*);

11. Le Rgle quadruple AL & le $\square$ de AC seront $\equiv$ au $\square$ AN.

Ax. 2. L. 1.

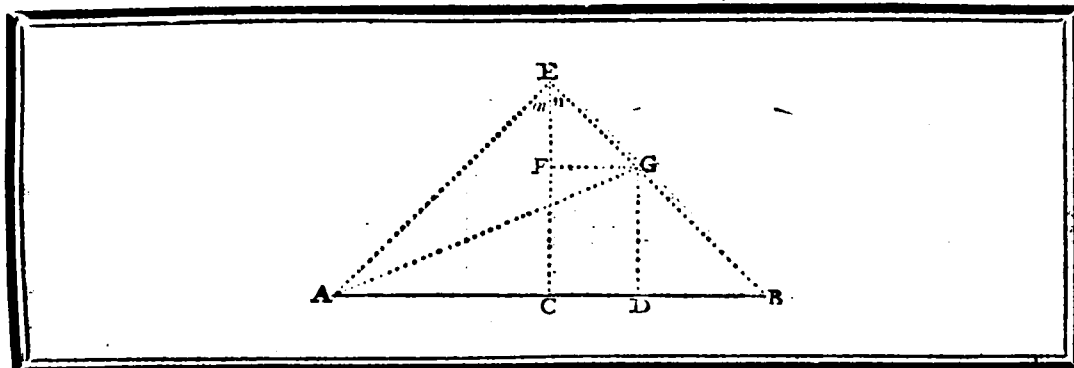
Mais le Rgle AL est $\equiv$ au Rgle compris de AB, BC; à cause que $BC = BL$ (*Arg. 2*), & le $\square$ AN est $\equiv$ au $\square$ de AD (*Prop. 1*).

12. Partant, le Rgle quadruple ABC + le $\square$ de AC sont $\equiv$ au $\square$ de AD.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION IX. THEOREME IX.

SI une droite (AB) est coupée en deux parties égales (AC, CB), & en deux inégales (AD, DB): les quarrés des deux parties inégales (AD, DB) sont doubles du quarré de la moitié (AC) de l'entiere (AB) & du quarré de la partie (CD) comprise entre les deux points de section (C & D).

HYPOTHESE.

AB est une droite partagée en deux également en C, & en deux inégalement en D.

THESE.

Le $\square$ de AD + le $\square$ de DB sont doubles du $\square$ de AC + du $\square$ de CD.

Préparation

1. DU point C élevez sur AB la $\perp$ CE. Ptop. 11. L. 1.
2. Faites CE = à AC ou BC. Prop. 3. L. 1.
3. Des points A & B au point E tirez les droites AE, BE. Dem. 1.
4. Par les points D & G tirez les droites DG & GF Plles à CE & AB. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

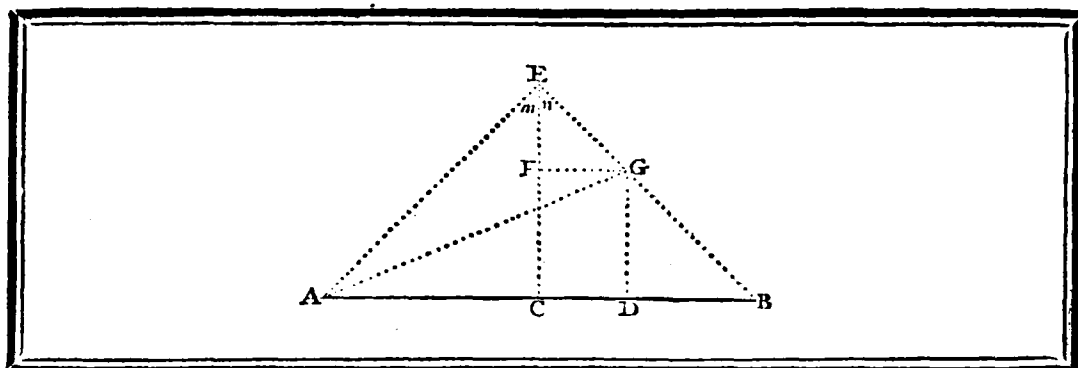
Puisque CE est = à AC (Prep. 2).

1. L'angle CAE est = à $\angle m$. Prop. 5. L. 1.
Mais $\angle ECA$ est un $\angle$ (Prep. 1).
2. C'est pourquoi, les deux autres $\angle$ CAE & m pris ensemble sont aussi = à un $\angle$. Prop. 32. L. 1.
3. Partant, chacun d'eux est un demi $\angle$; parcequ'ils sont = entr'eux (Arg. 1).
On prouvera de la même maniere, que
4. Chacun des $\angle$ CBE & n est un demi $\angle$,
5. Et ainsi, $\angle$ entier $m + n$ est = à un $\angle$. Ax. 2. L. 1.
Derechef, $\angle n$ étant un demi $\angle$ (Arg. 4) & $\angle EFG$ un $\angle$; à cause qu'il est = à son interieur opposé ECB (Prop. 29. L. 1), lequel est $\angle$ (Prep. 1).
6. L'angle EGF est aussi un demi $\angle$. Prop. 32. L. 1.
7. Et par conséquent, EF est = à FG, Prop. 6. L. 1.
Par un raisonnement semblable on prouvera, que
8. L'angle BGD est = à un demi $\angle$, & DG = DB.
Maintenant, à cause que le $\square$ de AE est = au $\square$ de AC & au $\square$ de CE pris ensemble (Prop. 47. L. 1), & que AC = CE (Prep. 2).
9. Le $\square$ de AE est double du $\square$ de AC.
On prouvera de même, que
10. Le $\square$ de EG est double du $\square$ de FG, c. à. d. du $\square$ de CD, puisque FG = CD.

L. 3

12. Par.

Prop. 34. L. 1.



12. Par conséquent, le $\square$ de AE & le $\square$ de EG pris ensemble, sont doubles du $\square$ de AC & du $\square$ de CD.

Ax. 2. L. 1.

Et parceque le $\square$ de AE & le $\square$ de EG pris ensemble sont $\equiv$ au $\square$ de AG (Prop. 47. L. 1. & Arg. 5).

13. Le $\square$ de AG est aussi double du $\square$ de AC & du $\square$ de CD pris ensemble.

Ax. 1. L. 1.

Mais $\angle ECA$ étant $\equiv$ à un $\angle$ (Prop. 1) & $\angle GDC \equiv \angle ECA$ (Prop. 29. L. 1).

14. Le $\square$ de AG est $\equiv$ au $\square$ de AD & au $\square$ de DG.

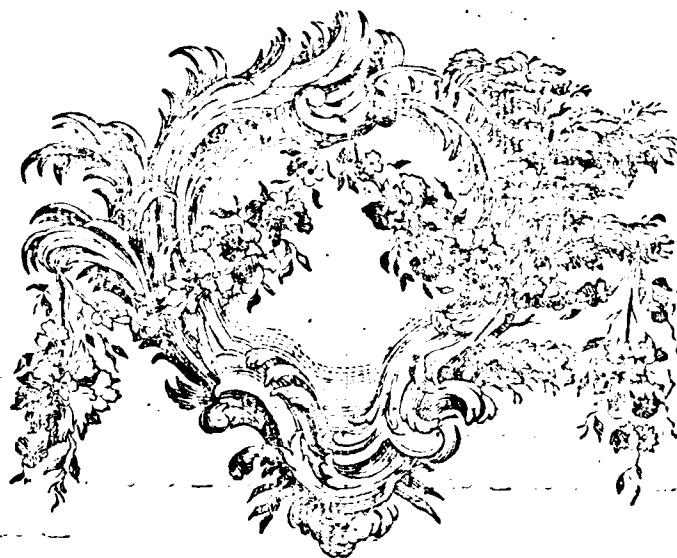
Prop. 47. L. 1.

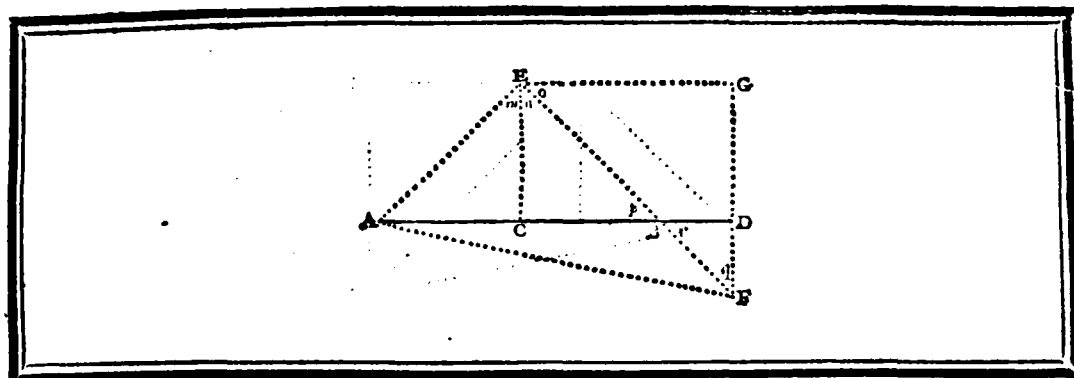
15. Ou le $\square$ de AG est $\equiv$ au $\square$ de AD & au $\square$ de DB pris ensemble ; à cause que DB est $\equiv$ à DG. (Arg. 8).

16. Partant, le $\square$ de AD & le $\square$ de DB pris ensemble sont doubles du $\square$ de AC & du $\square$ de CD ; ou le $\square$ de AD + le $\square$ de DB sont doubles du $\square$ de AC + du $\square$ de CD.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION X. THEOREME X.

Si on partage une droite (AB) en deux également (en C), & qu'on y ajoute directement une autre droite (BD): le quarré de la droite (AD) composée de l'entiere (AB) & de l'ajoutée (BD), avec le quarré de l'ajoutée (BD) sont doubles du quarré de la moitié (AC) de l'entiere (AB), & du quarré de la droite (CD), composée de la moitié (CB) de l'entiere (AB) & de l'ajoutée (BD),

HYPOTHESE.

AB est une droite partagée également en C, & à laquelle on ajoute directement une partie BD.

THESE.

Le $\square$ de AD + le $\square$ de BD sont doubles du $\square$ de AC + du $\square$ de CD.

Préparation.

1. Sur AB, au point C, élevez la $\perp$ CE.
2. Faites CE = à AC ou BC.
3. Des points A & B au point E tirez les droites AE & BE,
4. Par les points E & D menez EG, DG Plles à AD & CE; & prolongez DG jusqu'à ce qu'elle coupe le prolongement de EB en F.

Prop. 11. L. 1.
Prop. 3. L. 1.
Dem. 1.
Prop. 31. L. 1.
Dem. 2.

DEMONSTRATION.

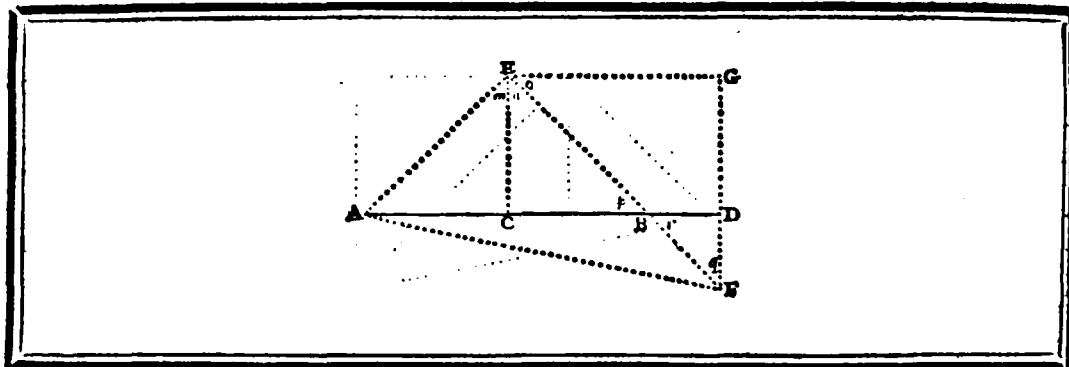
Puisque dans le Δ ACE le côté AC est = au CE (Prep. 2).

1. L'angle CAE est = à $\angle m$.
Or $\angle ACE$ est un $\angle$ (Prep. 1).
2. Ainsi chacun des $\angle$ CAE, & m est un demi $\angle$.
Par un raisonnement semblable on prouvera, que
3. Chacun des $\angle p$ & n est un demi $\angle$.
4. Partant, $\angle m + n$ sera = à un $\angle$.
De plus, $\angle p$ étant un demi $\angle$ (Arg. 3).
5. L'angle r sera aussi un demi $\angle$.
Mais $\angle BDF$ étant outre cela $\angle$ (Prop. 29. L. 1), puisqu'il est alterne de $\angle ECD$ qui est $\angle$ (Prep. 1).
6. L'angle q est aussi un demi $\angle$.
7. Partant, le côté BD = au côté DF.
De même; $\angle q$ étant un demi $\angle$ (Arg. 6) & $\angle G$ un $\angle$, comme diagonalement opposé à $\angle ECD$. (Prop. 34. L. 1).
8. L'angle o est un demi $\angle$.
9. Donc EG est = à GF.

Prop. 5. L. 1.
Prop. 32. L. 1.
Ax. 2. L. 1.
Prop. 15. L. 1.
Prop. 32. L. 1.
Prop. 6. L. 1.

Prop. 32. L. 1.
Prop. 6. L. 1.

Ensuite



Ensuite AC étant $\equiv$ à CE (*Prop. 2*).

10. Le $\square$ de AC est $\equiv$ au $\square$ de CE.

11. Partant, les $\square$ de AC & de CE pris ensemble font doubles du $\square$ de AC, Et ces $\square$ de AC & CE étant $\equiv$ au $\square$ de AE. (*Prop. 47. L. 1*).

[*Prop. 46. L. 1.*
Coroll. 3.

12. Le $\square$ de AE sera aussi double du $\square$ de AC.

Ax. 6. L. 1.

Dela même manière on prouvera, que

13. Le $\square$ de EF est double du $\square$ de EG, c. à d. du $\square$ de CD; puisque $EG = CD$.

Prop. 34. L. 1.

14. Par conséquent, le $\square$ de AE avec le $\square$ de EF font doubles du $\square$ de AC & du $\square$ de CD.

Mais le $\square$ de AE & le $\square$ de EF étant $\equiv$ au $\square$ de AF (*Prop. 47. L. 1*).

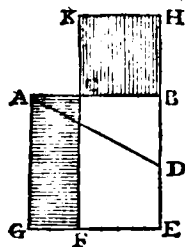
15. Le $\square$ de AF est double du $\square$ de AC & du $\square$ de CD.

Et ce même $\square$ de AF étant outre cela $\equiv$ au $\square$ de AD & au $\square$ de DF (*Prop. 47. L. 1*), ou de BD, attendu que $DF = BD$ (*Arg. 7*).

16. Il s'enfuit donc, que le $\square$ de AD + le $\square$ de BD font doubles du $\square$ de AC + du $\square$ de CD.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XI. PROBLEME I.

PROPOSITION XI. PROBLEME I.
Couper une ligne droite donnée (AB) de façon; que le rectangle de l'entière (BA) & de l'une de ses parties (AC) soit égal au quarré de l'autre partie (CB).

D O N N E E
La droite AB.

C H E R C H E.

*Le point d'interjection C tel que le Rgle
BAC soit = au $\square$ de CB.*

Résolution.

1. Sur la droite AB construisez le quarré AE.
2. Partagez le côté BE en deux également au point D, & tirez du point D au point A la droite DA.
3. Sur le prolongement de EB, faites $DH = DA$.
4. Sur la droite BH construisez le quarré CH,
5. Et prolongez le côté KC en F.

Prop. 46. L. 1.
Prop. 10. L. 1.
Dem. 1.
Prop. 3. L. 1.
Prop 46. L. 1.
Dem. 2.

DEMONSTRATION.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite BE est coupée en deux également en D, & que la droite BH y est ajoutée directement.

1. Le Rgle $EH.HB + \square$ de BD est $\equiv$ au $\square$ de DH . Prop. 6. L. 2.
2. Et ce $\square$ de DH est $\equiv$ au $\square$ de DA ; parceque $DH = DA$ (*Ref. 3*). Prop. 46. L. 1.
3. Partant, le Rgle $EH.HB + \square$ de BD est $\equiv$ au $\square$ de DA . Coroll. 3.
- Mais ce même $\square$ de DA est $\equiv$ au $\square$ de $AB +$ au $\square$ de BD (*Prop. 47. L. 1*).

4. C'est pourquoi, le Rgle $EH.HB + \square$ de $BD =$ au $\square$ de $AB +$ au $\square$ de BD .

Si donc on retranche de part & d'autre le $\square$ de BD ;

Ax. 1. L. 1.
5. Le Rgle $EH.HB$ fera $\equiv$ au $\square$ de AB .

Maintenant; si du Rgle $EH.HB$ qui est $\equiv$ au Rgle FH , (*Ref. 4. 5*) & du $\square$ de AB qui est $\equiv$ au $\square$ AE (*Ref. 1*), on retranche le Rgle commun FB ;

Ax. 3. L. 1.
6. Il restera le $\square$ $CH =$ au Rgle GC .

Ce $\square$ CH étant donc $\equiv$ au $\square$ de BC (*Ref. 4*) & le Rgle $GC =$ au Rgle $BA.AC$; à cause que $AG = AB$ (*Ref. 1*).

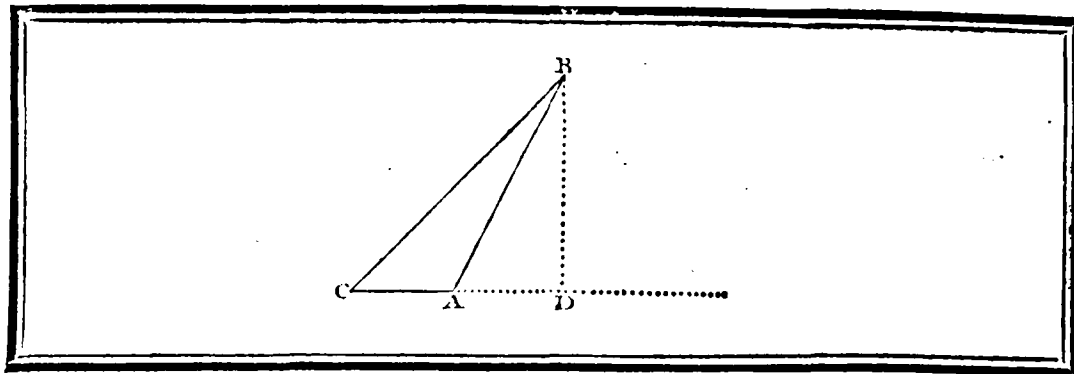
Ax. 3. L. 1.
7. Il s'ensuit. que la droite AB est coupée en C de façon que le Rgle BAC est $\equiv$ au $\square$ de CB .

Ax. 1. L. 1.

Prop. 6. L. 2.
 { Prop. 46. L. 1.
 Coroll. 3.
 Ax. 1. L. 1.
 Ax. 1. L. 1.
 Ax. 3. L. 1.
 Ax. 3. L. 1.
 Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.

M



PROPOSITION XII. THEOREME XI.

EN tout triangle amblygone (CBA) le quarré du côté (BC): qui est opposé à l'angle obtus (A) est plus grand que les quarrés des deux autres côtés (AB, CA), du double rectangle compris d'un des côtés (CA) alentour de l'angle obtus, sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé (B), & de la partie (AD) comprise entre cette perpendiculaire & le sommet de l'angle obtus (A).

HYPOTHESE.

- I. CBA est un $\triangle$ amblygone,
- II. Et BD la $\perp$ abaissée du sommet de l'angle B, sur le prolongement du côté opposé CA.

THESE.

Le $\square$ de BC est = au $\square$ de AB + au $\square$ de AC + au double Rgle CAD.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite CD est coupée en deux parties quelconques CA, AD (Hyp. 2).
1. Le $\square$ de CD est = au double Rgle CA . AD & aux $\square$ de CA & de AD pris ensemble.

Prop. 4. L. 2.

Si on ajoute donc de part & d'autre le $\square$ de BD.

2. Le $\square$ de CD + le $\square$ de BD sera = au double Rgle CA . AD + au $\square$ de CA + au $\square$ de AD + au $\square$ de BD.

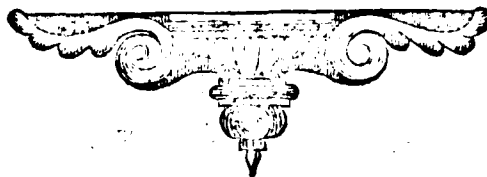
Ax. 2. L. 1.

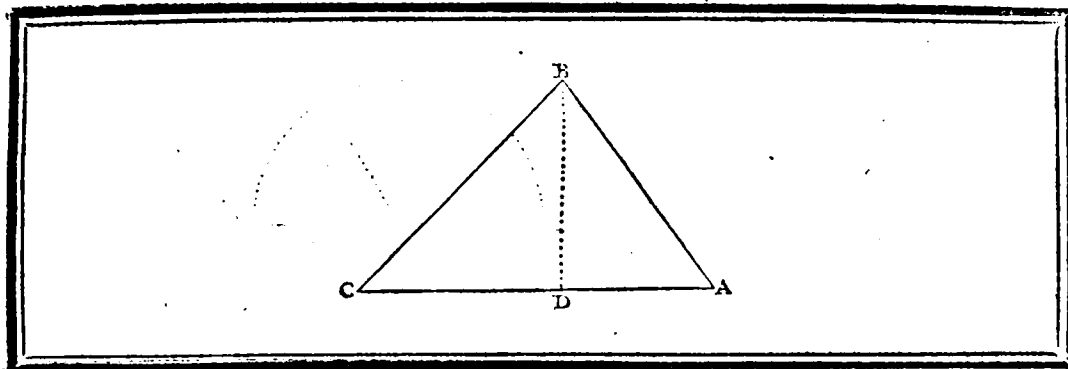
Mais le $\square$ de CD avec le $\square$ de BD est = au $\square$ de BC, & le $\square$ de AD avec le $\square$ de BD est = au $\square$ de AB (Prop. 47. L. 1).

3. Par conséquent, le $\square$ de BC est = au double Rgle de CAD + au $\square$ de CA + au $\square$ de AB.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIII. THEOREME XII.

EN tout triangle oxygone (CBA) : le quarré d'un des côtés (BA) opposé à un des angles aigus (C) est plus petit que les quarrés des deux autres côtés (CB, CA), du double rectangle compris d'un des côtés (AC) alentour de l'angle aigu, sur lequel tombe la perpendiculaire (BD), abaissée de l'angle opposé (B), & de la partie (CD) comprise entre cette perpendiculaire & le sommet de l'angle aigu (C).

HYPOTHESE.

- I. CBA est un Δ oxygone,
- II. Et BD la $\perp$ abaissée du sommet de l'angle B sur le côté opposé CA.

THESE.

Le $\square$ de BA + le double Rgle ACD est = au $\square$ de CA + au $\square$ de CB.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite CA est partagée en deux parties quelconques CD, DA (Hyp. 2).

1. Le $\square$ de CA avec le $\square$ de CD est = au double Rgle AC. CD avec le $\square$ de AD.

Prop 7. L. 2.

Si donc on ajoute de part & d'autre le $\square$ de DB,

2. Le $\square$ de CA + le $\square$ de CD + le $\square$ de DB fera = au double Rgle AC. CD + au $\square$ de AD + au $\square$ de DB.

Ax. 2. L. 1.

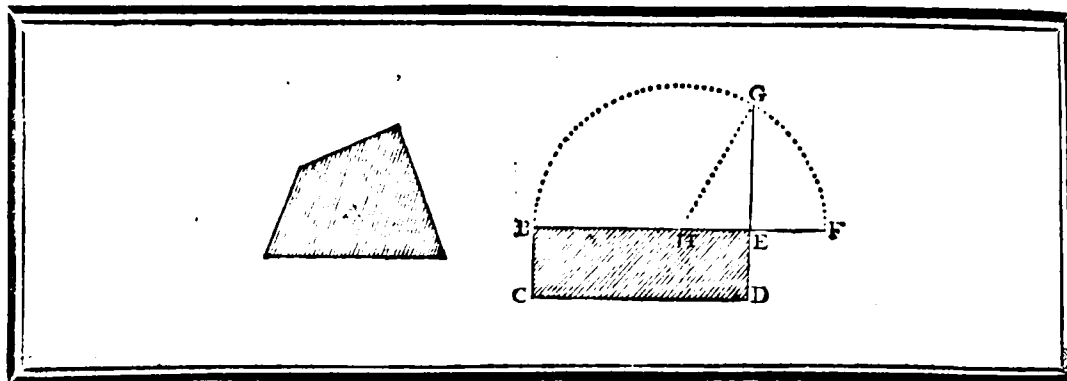
Mais le $\square$ de CD + le $\square$ de DB est = au $\square$ de CB, & le $\square$ de AD + le $\square$ de DB est = au $\square$ de BA (Prop. 4. L. 1).

3. C'est pourquoi, le $\square$ de BA + le double Rgle ACD est = au $\square$ de CA + au $\square$ de CB.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIV. PROBLEME II.

Construire un quarré; égal à une figure rectiligne donnée (A).

DONNEE

La figure rectiligne A.

CHERCHEE.

La construction d'un quarré = à la figure rectiligne donnée A.

Résolution.

1. **F**aites le Pgr Rgle $CE =$ à la figure A.
2. Prolongez le côté BE, & faites $EF = ED$.
3. Partagez la droite BF en deux parties égales au point H.
4. Et du point H comme centre, & du rayon HB décrivez le $\odot$ BGF.
5. Prolongez le côté DE, jusqu'à ce qu'il coupe la $\odot$ BGF en G.

Prop. 45. L. 1.

Prop. 3. L. 1.

Prop. 10. L. 1.

Dem. 3.

Dem. 1.

Préparation.

Tirez du point H au point G la droite HG.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite BF est coupée en deux également en H & en deux inégalement en E (Ref. 3 & 2).

1. Le Rgle BE. EF & le $\square$ de HE pris ensemble sont = au $\square$ de HF.
2. Et parceque $HF = HG$ (Def. 15. L. 1); le $\square$ de HF est = au $\square$ HG.
Le Rgle BE. EF + le $\square$ HE est = au $\square$ de HG.
Mais le $\square$ de HG étant = au $\square$ HE & au $\square$ de EG pris ensemble (Prop. 47. L. 1).
3. Le Rgle BE. EF + le $\square$ de HE est aussi = au $\square$ de HE + au $\square$ de EG. Ax. 1. L. 1.
Si on retranche donc de part & d'autre le $\square$ de HE;
4. Le Rgle BE. EF fera = au $\square$ de EG. Ax. 3. L. 1.
Et ce Rgle BE. EF étant de plus = au Rgle BE. ED; à cause que $EF = ED$.
(Ref. 2).
5. Le Rgle BE. ED fera aussi = au $\square$ de EG. Ax. 1. L. 1.
Mais le Rgle BE. ED est = à la figure donnée A (Ref. 1).
6. Par conséquent, le $\square$ de EG sera aussi égal à cette figure rectiligne donnée A. Ax. 1. L. 1.

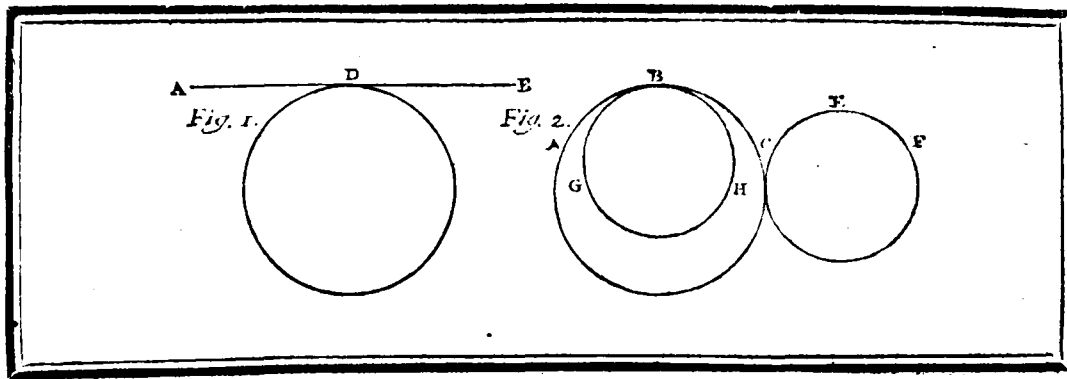
C. Q. F. F.

R E M A R Q U E.

Si le point H tombe sur le point E, les droites BE, EF, ED, seront chacune égales à EG; est le Pgr Rgle CE, lui même, sera le quarré cherché.
(Coroll. 1 & 3. de la Prop. 46. L. 1).

LES
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
LIVRE TROISIEME;

THE
21st CENTURY
OF THE
FUTURE
ALL INFORMATION CONTAINED
HEREIN IS UNCLASSIFIED
DATE 11/10/01 BY 1047



D E F I N I T I O N S

I.

ON nomme *tangente d'un cercle*, une ligne droite (ADB), qui touche le cercle sans le couper, quoique prolongée de part & d'autre à l'infini Fig. 1.

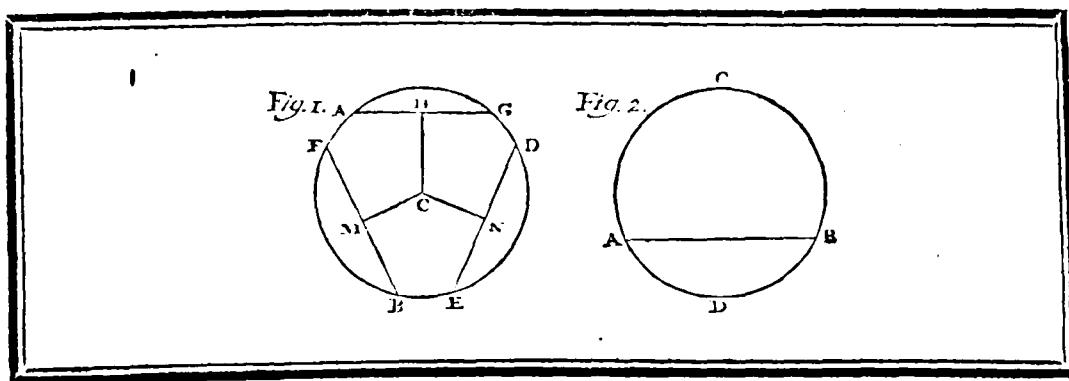
II.

On dit que *deux cercles se touchent*, quand leurs circonférences (ABC, CEF ou ABC, GBH) se touchent sans se couper. Fig. 2.

III.

Deux cercles se touchent extérieurement, quand l'un (CEF) tombe au dehors de l'autre (ABC): Mais deux cercles se touchent intérieurement, quand l'un (GBH) tombe au dedans de l'autre (ABC) Fig. 2.





D E F I N I T I O N S

IV.

LA distance d'une ligne droite (FB) du centre du cercle, est la perpendiculaire (CM) abaissée du centre du cercle (C) sur cette ligne droite (FB); C'est pour cela que l'on dit; que deux lignes droites (FB, DE) sont également distantes du centre du cercle, quand les perpendiculaires (CM, CN), abaissées du centre (C) sur ces lignes droites (FB, DE) sont égales. Fig. 1.

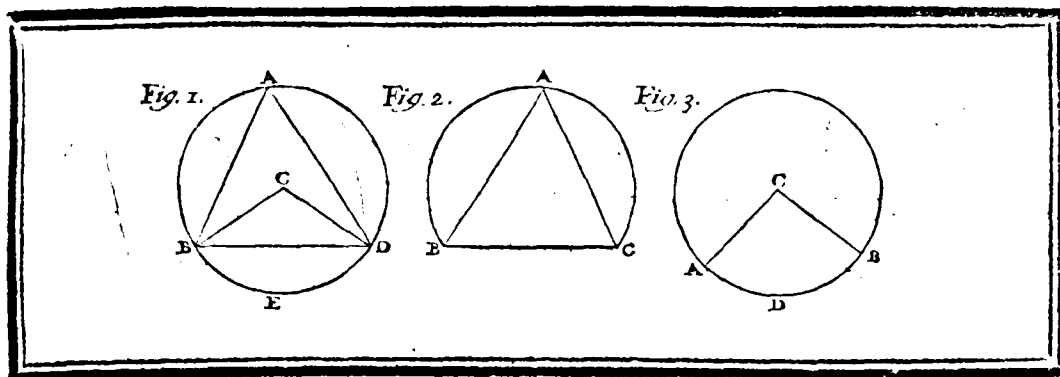
V.

Mais on dit qu'une ligne droite (AG) est plus éloignée du centre du cercle que (BF ou ED), lorsque la perpendiculaire (CH) abaissée du centre (C) sur cette ligne droite est plus grande que (CM ou CN) Fig. 1.

VI.

L'angle mixtiligne du segment, est cet angle (CAB ou DAB) formé de l'arc (CA ou DA) du segment (ACB ou ADB) & de sa corde (AB); Fig. 2.





D E F I N I T I O N S.

VII.

L'angle dans le segment, est un angle (BAC) compris de deux lignes droites (AB, AC) tirées d'un point (A) de l'arc du segment, & terminées aux extrémités (B & C) de la corde (BC) Fig. 2. Quand les lignes droites (AB, AD) partent d'un point (A) pris dans la circonférence du cercle, l'angle (BAD) est un angle à la circonférence: mais quand les lignes droites (CB, CD) partent du centre, l'angle (BCD) est un angle au centre. Fig. 1.

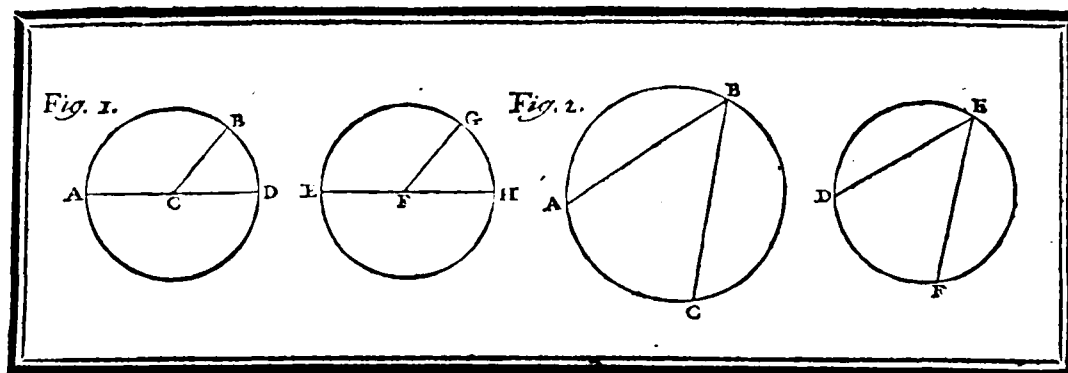
VIII.

On dit, qu'un angle s'appuye sur un arc de cercle, quand les lignes droites (AB, AD ou CB, CD), qui forment cet angle (BAD ou BCD), sont tirées; soit d'un même point (A) de la circonférence; soit de son centre (C), aux extrémités (B & D) de l'arc (BED). Fig. 1.

IX.

Un secteur de cercle, est une figure comprise de deux rayons (CA, CB), & de l'arc, (ADB) compris entre ces deux rayons. Fig. 3.





A X I O M E S.

I.

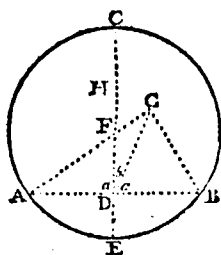
Les cercles égaux (ABD, EGH), sont ceux dont les diamètres (AD, EH), ou les rayons (CB, FG) sont égaux. *Fig. 1.*

Le rayon est la déterminante du cercle ; parcequ'un cercle est décrit par le mouvement du rayon autour du centre : Or quand les déterminantes de deux figures sont les mêmes, il est naturel que les déterminées le soient aussi ; & c'est la raison pourquoi l'égalité des rayons entraîne nécessairement l'égalité parfaite des cercles décrits de ces rayons.

I I.

Les segmens de cercle (ABC, DEF), qui peuvent contenir des angles égaux (ABC, DEF), sont semblables. *Fig. 2.*

Les cercles sont des figures semblables : par conséquent tout ce qu'on détermine dans deux cercles de la même manière, doit conserver ce caractère de similitude. Si on retranche donc deux segmens ABC, DEF , au moien de deux angles égaux ABC, DEF qu'on y place, ces segmens doivent être semblables, comme ayant été retranchés semblablement de deux tous semblables. Cette proposition est proprement un theoreme, qui peut être démontré de la véritable notion de la similitude, qu'Euclide n'a point développé.



PROPOSITION I. PROBLEME I.

Trouver le centre (F) d'un cercle donné (ACBE).

DONNE
Le cercle ACBE.

CHERCHE.
Le centre F de ce $\odot$.

Résolution.

1. Tirez la corde AB.
2. Coupez la en deux également au point D.
3. Du point D élevez sur AB, la $\perp$ DC, & prolongez la en E.
4. Coupez la droite CE en deux également au point F;
Ce point F sera le centre cherché du $\odot$ donné ACBE.

Dem. 1.
Prop. 10. L. 1.
Prop. 11. L. 1.
Prop. 10. L. 1.

DEMONSTRATION.

Si non. Quelqu'autre point, comme H ou G pris dans la ligne ou hors de la ligne EC, sera le centre cherché du $\odot$ ACBE.

C A S. I.

Supposé, que le centre se trouve dans la ligne EC, en un point H différent du point F.

Puisque le centre du $\odot$ est dans la ligne EC, en un point H différent du point F (Sup. 1).

1. Les rayons HE & HC sont = entr'eux.
Mais FE étant = à FC (Ref. 4) & HC < FC (Ax. 8. L. 1).
2. HC sera aussi < FE, & à plus forte raison < HE.
3. Partant, HE n'est point = à HC.
4. Le point H pris dans la ligne EC, différent du point F, ne peut donc être le centre du $\odot$ ACBE.

Def. 15. L. 1.

C A S II.

Supposé, que le centre se trouve hors de la ligne EC, en un point G.

Préparation.

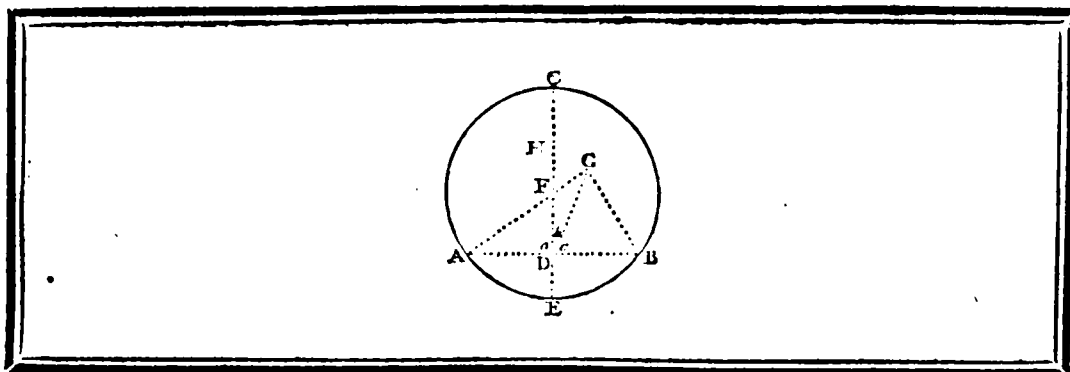
Tirez donc du centre G les droites GA, GD, GB.

Dem. 1.

Puisque dans les Δ AGD, DGB le côté GA est = au côté GB (Prep. & Def. 15. L. 1), le côté GD commun aux deux Δ , & la base AD = à la base DB (Ref. 2).

N 2

1. Les



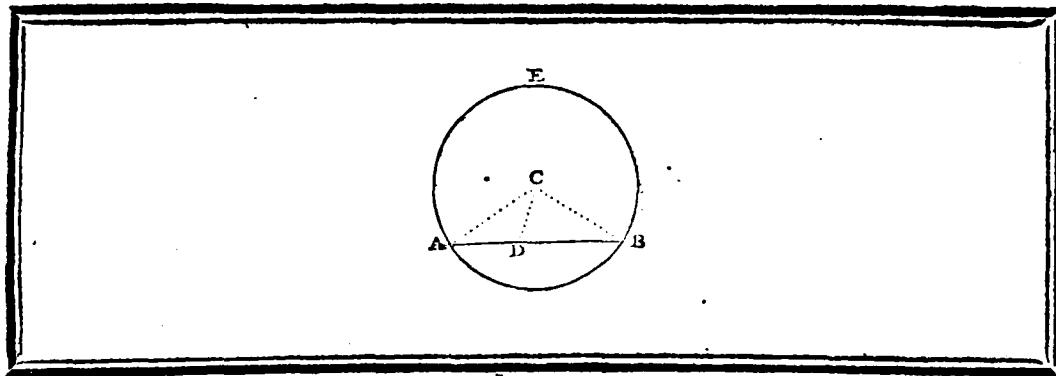
1. Les $\angle$ contigus $a + b$ & c , opposés aux côtés égaux GA, GB , sont $\equiv$ entr'eux. Prop. 8. L. 1.
2. Partant $\angle a + b$ est un $\angle$. Def. 10. L. 1.
- Mais $\angle a$ étant aussi un $\angle$ (Ref. 3).
3. Il suit, que $\angle a + b$ est $\equiv$ à $\angle a$; ce qui est impossible. Ax. 8. L. 1.
4. Partant le point G pris hors de la ligne EC , ne peut être le centre du $\odot ACBE$.
Ce centre n'étant donc ni dans la ligne EC , en un point H différent du point F (Cas. 1); ni hors de la ligne EC , en un point G (Cas. 11).
5. Le centre cherché du $\odot ACBE$ sera nécessairement en F .

C. Q. F. F.

C O R O L L A I R E.

SI dans un cercle $ACBE$, une corde EC coupe une autre corde AB en deux également & à angles droits; cette corde CE est un diamètre, & par conséquent le centre du cercle s'y trouve (Def. 17. L. 1).





PROPOSITION II. THEOREME I.

SI on prend deux points quelconques (A & B) dans la circonférence d'un cercle (AEB): la droite (AB), qui joint ces deux points, tombera au dedans du cercle.

HYPOTHESE.

Les deux points A & B sont pris dans la $\odot$ AEB.

THESE.

La droite AB tombe au dedans du $\odot$ AEB.

Préparation.

1. Cherchez le centre C du $\odot$ AEB.
2. Tirez les droites CA, CD, CB.

Prop. 1. L. 3.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le $\triangle ACB$, le côté CA est = au côté CB (Prop. 2 & Def. 15. L. 1).

1. Les $\angle CAD$, CBD sont = entr'eux.

Prop. 5. L. 1.

Mais $\angle CDA$ étant un $\angle$ extérieur du $\triangle CDB$.

2. Il est $\angle$ que son intérieur CBD .

Prop. 16. L. 1.

Et à cause que $\angle CBD$ est = à $\angle CAD$ (Arg. 1).

3. Cet $\angle CDA$ sera aussi $\angle$ $\angle CAD$.

4. Partant, le côté CA opposé au plus grand $\angle CDA$ est $\angle$ le côté CD opposé au moindre $\angle CAD$.

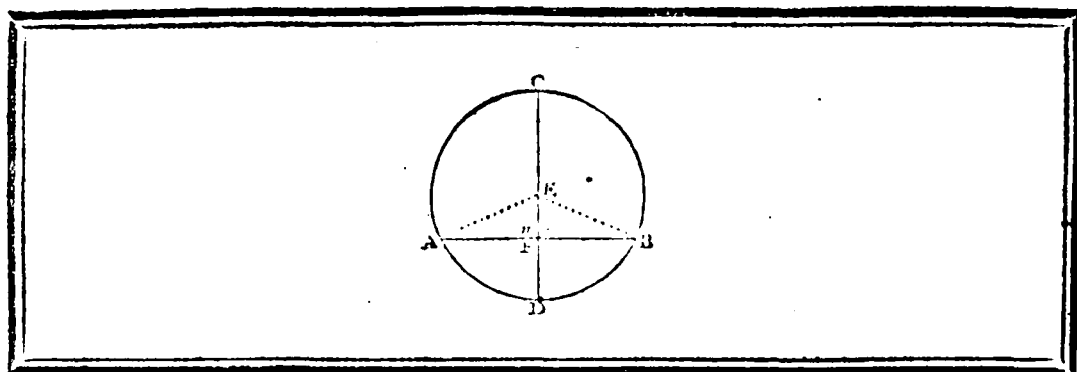
Prop. 19. L. 1.

5. Dou il suit, que l'extrémité D de ce côté CD tombe au dedans du $\odot$ AEB.

Et comme on peut démontrer la même chose, de tout autre point pris dans la droite AB.

6. Il est évident, que la droite entière AB tombe au dedans du $\odot$ AEB.

C. Q. F. D.



PROPOSITION III. THEOREME II.

S I un diamètre (CD) coupe une corde (AB) en deux également (en F) : il la coupe à angles droits. Et *reciproquement* ; si un diamètre (CD) coupe une corde (AB) à angles droits : il la coupe aussi en deux également.

I.

HYPOTHESE.

CD est un diamètre du $\odot$ ACBD, qui coupe AB en deux également au point F.

THESE.

Le diamètre CD est $\perp$ sur la corde AB.

Préparation

Tirez les rayons EA, EB.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Dans les $\triangle$ AEF, BEF, le côté EA est = au côté EB (*Prep. & Def. 15. L. 1*), le côté EF est commun aux deux $\triangle$, & la base AF = a la base BF (*Hyp.*).

1. Par conséquent, les $\sphericalangle$ contigus m & n , opposés aux côtés égaux EA, EB, sont = entr'eux.

Prop. 8. L. 1.

2. Partant, la droite CD, qui forme sur AB des $\sphericalangle$ contigus m & n = entr'eux, est $\perp$ sur AB.

Def. 10. L. 1.

C. Q. F. D.

II.

HYPOTHESE.

La droite CD est un diamètre du $\odot$ ACBD, qui est $\perp$ sur la corde AB ; ou qui fait $\sphericalangle m = \sphericalangle n$.

THESE.

AF est = à FB.

DEMONSTRATION.

Les côtés EA, EB du $\triangle$ AEB étant = entr'eux (*Prep. & Def. 15. L. 1*).

1. Les $\sphericalangle$ EAF, EBF le seront aussi.

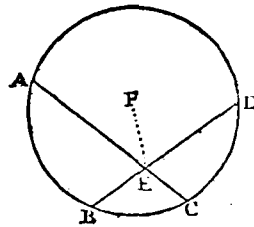
Prop. 5. L. 1.

Puis donc que dans les $\triangle$ AEF, BEF, les $\sphericalangle$ EAF, EBF sont = (*Arg. 1*), de même que les $\sphericalangle m$ & n (*Hyp.*), & le côté EF commun aux deux $\triangle$.

2. La base AF sera = a la base FB.

Prop. 26. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME III.

SI dans un cercle (ADCB) deux cordes (AC, DB) s'entrecoupent: elles s'entrecouperont en deux inégalement.

HYPOTHESE.

Les deux cordes AC, DB du $\odot$ ADCB s'entrecoupent au point E.

THESE.

Ces cordes s'entrecoupent en deux inégalement.

DEMONSTRATION.

Si non.

Les cordes AC, DB s'entrecoupent en deux également.

Préparation.

Tirez du centre F au point E la portion de diamètre FE.

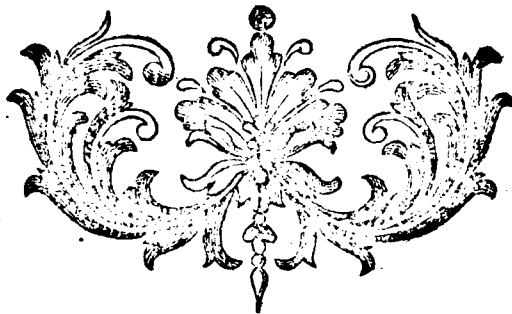
Dem. 1.

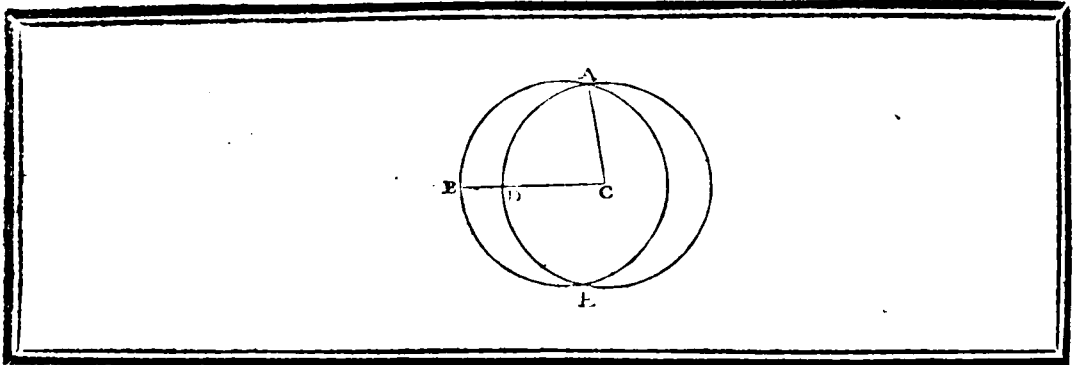
Puisque le diamètre, ou sa partie FE, coupe en deux également chacune des cordes AC, DB du $\odot$ ADCB (*Sup.*).

1. Cette droite FE est $\perp$ sur chacune des cordes AC, DB.
2. Partant, les $\angle$ FEB, FEA sont $\equiv$ entr'eux; ce qui est impossible.
3. C'est pourquoi, les deux cordes AC, DB s'entrecoupent en deux inégalement.

Prop. 3. L. 1.
[Ax. 10. L. 1.
Ax. 8. L. 1,

C. Q. F. D.





PROPOSITION V. THEOREME IV.
Si deux cercles (ABE, ADE) s'entre-coupent mutuellement: ils n'ont pas un même centre (C).

HYPOTHESE.

ABE, ADE sont deux $\odot$ qui s'entre-coupent mutuellement aux points A & E.

THESE.

Ces deux cercles n'ont pas un même centre C.

Si non.

DEMONSTRATION.

Les cercles ABE, ADE ont un même centre C.

Préparation.

1. Tirez du point C à un point de section A le rayon CA.
2. Et du même point C la droite CB, qui coupe les deux $\odot$ aux points D & B. } **Dém. 1.**

Puisque les droites CA, CD sont tirées du centre C à la $\odot$ ADE (Prep. 1. & 2).

1. Ces droites CA, CD sont = entr'elles.

Def. 15. L. 1.

Par un raisonnement semblable on prouvera, que

2. Les droites CA, CB sont = entr'elles.

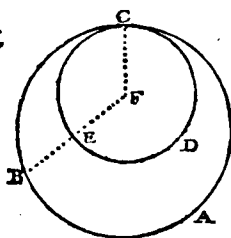
3. Partant, CB seroit = à CD; ce qui est impossible.

Ax. 8. L. 1.

4. Donc les deux cercles ABE, ADE n'ont pas un même centre C.

C. Q. F. D.

Fig. 6.



PROPOSITION VI. THEOREME V.
SI deux cercles (BCA, ECD) se touchent intérieurement en (C): ils n'ont pas un même centre (F).

HYPOTHESE.

Le $\odot$ ECD touche le $\odot$ BCA intérieurement en C.

THESE.

Ces deux $\odot$ n'ont point un même centre F.

DEMONSTRATION.

Si non.

Les $\odot$ BCA, ECD ont un même centre F.

Préparation.

Tirez donc les rayons FB, FC.

Dem. 1.

Puisque le point F est le centre du $\odot$ BCA (Sup).

1. Les rayons FB, FC sont = entr'eux.

Derechef; le point F étant aussi le centre du $\odot$ ECD (Sup).

2. Les rayons FE, FC sont = entr'eux.

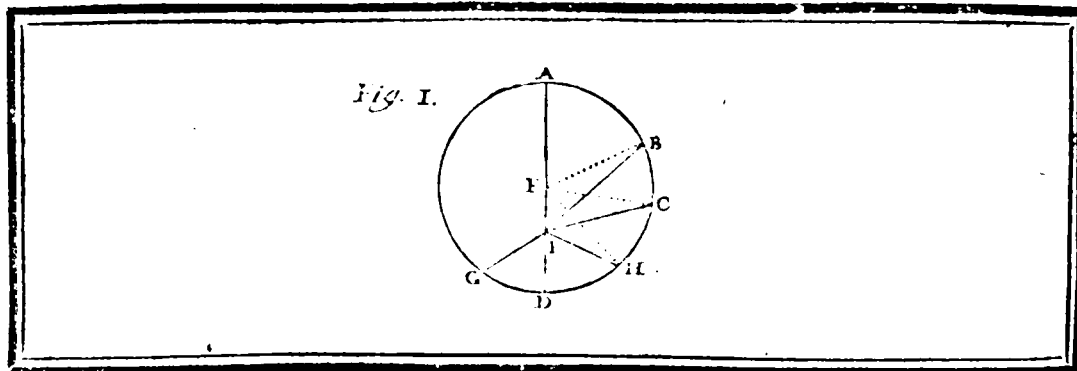
3. Partant FB = FE (Ax. 1. L. 1); ce qui est impossible.

4. C'est pourquoi les deux $\odot$ BCA, ECD n'ont point un même centre F.

{ Def. 15. L. 1.
Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION VII. THEOREME VI.
S d'un point quelconque (F) dans un cercle (AHG), différent de son centre (E), on tire à sa circonférence tant de lignes droites (FA, FB, FC, FH) que l'on voudra, la plus grande de toutes est (FA) qui passe par le centre, & la plus petite est sa prolongée (FD). Quant aux autres; celle (FB ou FC), qui est plus proche de la ligne (FA) passant par le centre, est plus grande qu'une autre (FC ou FH), qui en est plus éloignée. Enfin; de part & d'autre de la plus petite (FD), on ne sauroit tirer de ce même point (F) plus de deux lignes droites (FH, FG) égales entr'elles.

HYPOTHESE.

- I. Le point F pris dans le $\odot$ AHG, est différent du centre E.
- II. La droite FA, tirée du point F, passe par le centre E du $\odot$ AHG,
- III. Et les droites FB, FC, FH sont tirées du point F à la circonférence AHG.

THÈSE.

- I. La droite FA est la plus grande de toutes les droites tirées du point F à la circonférence AHG,
- II. Et sa prolongée FD est la plus petite de toutes ces droites.
- III. De toutes les autres droites FB, ou la droite FC, plus proche de FA, est $>$ FC ou FH, qui en est plus éloignée.
- IV. Du point F, de part & d'autre de la plus petite FD, on ne peut tirer plus de deux droites FH, FG $=$ entr'elles.

I. Préparation.

Tirez les rayons EB, EC, EH &c. Fig. I.

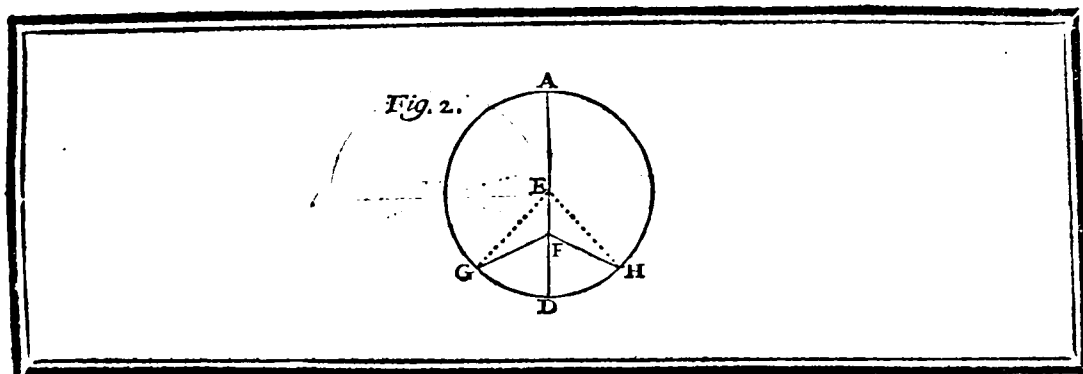
DEMONSTRATION.

1. **L**es deux côtés FE+EB du $\triangle$ FEB sont $>$ le troisième FB.
 Or EB est $=$ à EA (Def. 15. L. 1).
2. Donc FE+EA, ou FA est $>$ FB.
 De la même manière on prouvera, que
3. La droite FA, est la plus grande de toutes les droites tirées du point F à la circonférence AHG.

C. Q. F. D. 1.

4. Réciproquement; les deux côtés FE+FH du $\triangle$ FEH sont $>$ le troisième EH. Prop. 20. L. 1.
 Et ED étant $=$ à EH (Def. 15. L. 1)

5. Les



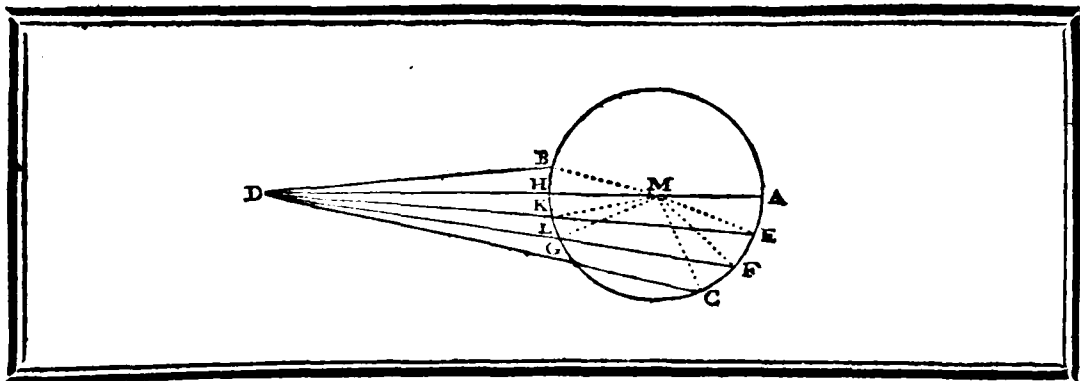
5. Les droites $FE + FH$ sont aussi $> ED$.
 En retranchant donc de part & d'autre la partie FE ;
 6. La droite FH sera $> FD$; ou $FD < FH$. Ax. 5. L. 1.
 On démontrera de la même manière que
 7. La droite FD , qui est la prolongée de FA , est la plus petite de toutes les droites quelconques tirées du point F à la circonférence AHG . C. Q. F. D. II.

- De plus, le côté FE étant commun aux deux $\triangle FEB, FEC$, le côté $EB =$ au côté EC (Def. 15. L. 1), & $\angle$ compris $FEB > \angle$ compris FEC (Ax. 8. L. 1);
 8. La base FB sera $>$ la base FC . Prop. 24. L. 1.
 Par un raisonnement semblable on prouvera que
 9. La droite FC est $> FH$.
 10. Partant, la droite FB ou FC plus proche de la ligne FA , passant par le centre, est $>$ celle FC ou FH qui en est plus éloignée. C. Q. F. D. III.

II. Préparation. Fig. 2.

1. Faites ensuite $\angle FEG = \angle FEH$, & prolongez EG jusqu'à la rencontre de la $\odot AHG$. Prop. 23. L. 1.
 2. Du point F au point G tirez la droite FG . Dem. I.

- Maintenant, EF étant commun aux deux $\triangle FEH, FEG$, le côté $EH =$ au côté EG (Def. 15. L. 1), & $\angle$ compris $FEH = \angle$ compris FEG (II Prep. 1).
 11. La base FH sera $=$ à la base FG . Prop. 4. L. 1.
 Mais parceque tout autre droite, différente de FG , se trouve nécessairement, ou plus proche de la ligne FD ou plus éloignée d'elle, que FG .
 12. Une telle droite sera aussi $<$ ou $> FG$ (Arg. 10).
 13. C'est pourquoi on ne peut tirer du point F , de part & d'autre de la plus petite FD , plus de deux lignes droites $FH, FG =$ entr'elles. C. Q. F. D. IV.



PROPOSITION VIII.

THEOREME VII.

S I d'un point quelconque (D), pris hors d'un cercle (BGCA), on tire à sa circonférence concave, tant des lignes droites (DA, DE, DF, DC) qu'on voudra, celle (DA) qui passe par le centre (M): est la plus grande de toutes. Quant aux autres; la plus proche (DE ou DF) de celle (DA) qui passe par le centre, est plus grande qu'une autre (DF ou DC) qui en est plus éloignée: mais au contraire de celles (DH, DK, DL, DG), qui se terminent à la circonférence convexe; celle (DH) dont le prolongement passe par le centre, est la plus petite de toutes. Quant aux autres; la plus proche (DK ou DL), de celle (DH), dont le prolongement passe par le centre, est plus petite qu'une autre (DL ou DG); qui est plus éloignée. Enfin de part & d'autre la plus petite (DH), on ne peut tirer du point (D) que deux lignes droites (DK, DB) égales entr'elles.

HYPOTHESE.

- I. Le point D est pris hors d'un $\odot$ BGCA dans un même plan.
- II. Les droites DA, DE, DF, DC, sont tirées de ce point, à la partie concave du $\odot$ BGCA.
- III. Et ces droites coupent la partie convexe aux points H, K, L, G.

THESE.

- I. La droite DA, passant par le centre M, est la plus grande de toutes les droites, DA, DE, DF, DC.
- II. Les droites DE ou DF, selon qu'elles sont plus proches de la ligne DA sont $>$ DF ou DC, qui en sont plus éloignées.
- III. La droite DH, dont le prolongement passe par le centre M, est la plus petite de toutes les droites DH, DK, DL, DG.
- IV. Les droites DK ou DL, selon qu'elles sont plus proches de la ligne DH, sont $<$ DL ou DG, qui en sont plus éloignées.
- V. Du point D, de part & d'autre de la droite DH, on ne peut tirer plus de deux droites DK, DB = entr'elles.

I. Préparation.

Tirez les rayons ME, MF, MC, MK, ML.

DEMONSTRATION.

1. **L**es deux côtés DM + ME du $\triangle$ DME sont $>$ le troisieme DE.
Et parceque ME = MA (Def. 15. L. 1).

Prop. 20. L. 1.

$$2. DM + MA.$$

2. $DM + MA$ ou DA sera $> DE$.

De la même manière on prouvera que

3. La droite DA passant par le centre M est $>$ toute autre droite tirée du point D à la partie concave du $\odot BGCA$.

C. Q. F. D. I.

De plus le côté DM étant commun aux deux $\triangle DME, DMF$, le côté $ME =$ au côté MF (Def. 15. L. 1) & $\angle$ compris $DME >$ $\angle$ compris DMF (Ax. 8. L. 1).

4. La base DE sera aussi $>$ la base DF .

Prop. 24. L. 1.

Par un raisonnement semblable on démontrera que

5. La droite DF est $> DC$, & ainsi des autres.

6. Partant, les droites DE ou DF , selon qu'elles sont plus proches, de la ligne DA passant par le centre, sont $> DF$ ou DC qui en sont plus éloignées.

C. Q. F. D. II.

7. Derechef, les côtés $DK + KM$ du $\triangle DKM$ sont $>$ le troisième DM .

Prop. 20. L. 1.

Si on retranche de part & d'autre les parties égales MK, MH (Def. 15. L. 1).

8. La ligne restante DK sera $> DH$; ou $DH < DK$.

On prouvera de même que

9. La droite DH est $< DL$, & ainsi des autres.

10. Partant, la droite DH , dont le prolongement passe par le centre M , est la plus petite de toutes les droites tirées du point D à la partie convexe du $\odot BGCA$.

C. Q. F. D. III.

De même, les droites DK, MK étant tirées des extrémités D & M du côté DM du $\triangle DLM$ à un point K , pris au dedans de ce $\triangle$ (Hyp. 3).

11. Il s'ensuit que $DK + MK < DL + ML$.

Prop. 21. L. 1.

Et en retranchant ces parties égales MK, ML (Def. 15. L. 1).

12. La droite DK sera $< DL$.

On démontrera de la même manière, que

13. La droite DL est $< DG$; & ainsi des autres.

14. Partant, les droites DK ou DL , selon qu'elles sont plus proches de la ligne DH , dont le prolongement passe par le centre, sont $< DL$ ou DG , qui en sont plus éloignées.

C. Q. F. D. IV.

II. Préparation.

1. Faites ensuite $\angle DMB = \angle DMK$, & prolongez MB jusqu'à la rencontre de la $\odot$.

Prop. 23. L. 1;
Dem. 1.

2. Du point D au point B tirez la droite DB .

Maintenant, le côté DM étant commun aux deux $\triangle DKM, DBM$, le côté $MK =$ au côté MB (Def. 15. L. 1), & $\angle$ compris $DMK = \angle$ compris DMB (II Prep. 1).

15. La base DK sera $=$ à la base DB .

Prop. 4. L. 1.

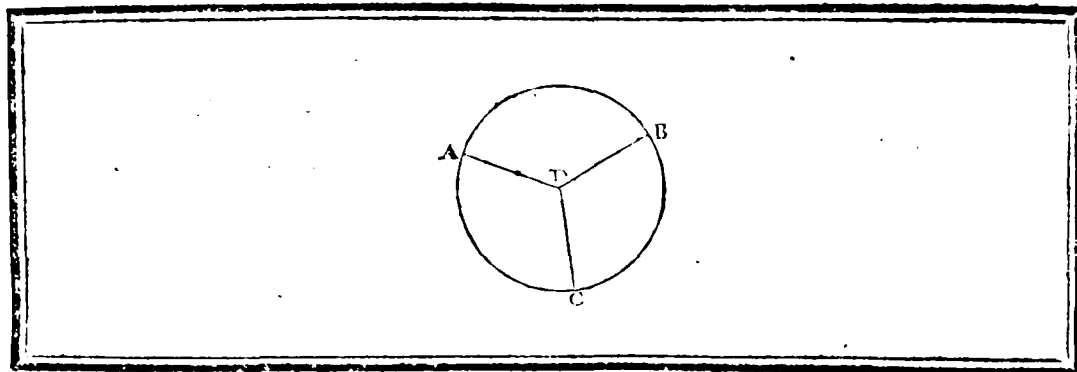
Mais parceque toute autre droite différente de DB , se trouve nécessairement ou plus proche de la ligne DH ou plus éloignée d'elle, que DB .

16. Une telle droite sera aussi $<$ ou $> BD$ (Arg. 14).

17. C'est pourquoi on ne peut tirer du point D , de part & d'autre de la droite DH , plus de deux lignes droites $DK, DB =$ entr'elles.

O. 3

E. Q. F. D. V.



PROPOSITION IX. THEOREME VIII.

SI d'un point quelconque (D), pris au dedans d'un cercle (ABC), on peut tirer à sa circonférence plus de deux lignes droites (DA, DB, DC) égales entr'elles, ce point sera le centre du cercle.

HYPOTHESE.

Du point D, pris au dedans du $\odot$ ABC, on peut tirer à la $\odot$ ABC plus de deux droites DA, DB, DC = entr'elles

THESE.

Le point D est le centre du cercle ABC.

DEMONSTRATION.

SI non.

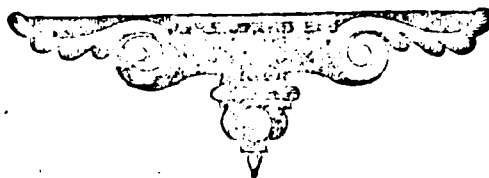
Quelqu'autre point sera le centre.

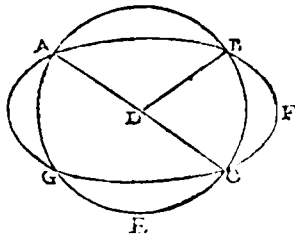
Puisque donc le point D n'est pas le centre (*Sup.*), & que de ce point D, on peut tirer à la circonférence plus de deux droites DA, DB, DC = entr'elles (*Hyp.*).

1. Il s'ensuivroit, que d'un point D, autre que le centre, on pourroit tirer plus de deux droites = entr'elles; ce qui est impossible.
2. Partant, le point D est le centre du $\odot$ ABC.

Prop. 7. L. 3.

C. Q. F. D.





PROPOSITION X. THEOREME IX.

SI deux cercles (ABCEG, ABFCG) s'entrecoupent: ils ne s'entrecouperont pas en plus de deux points (A & B).

HYPOTHESE.

Les deux $\odot$ ABCEG, ABFCG s'entrecoupent.

THESE.

Il ne sçauroient s'entrecouper en plus de deux points A & B.

SI non.

DEMONSTRATION.

Ils s'entre-coupent en plus de deux points, comme en A, B, C &c.

Préparation.

1. Trouvez le centre D du $\odot$ ABCEG.
2. Tirez du centre D aux points de section A, B, C, &c les rayons DA, DB, DC.

Prop. 1. L. 3.

Dem. 1.

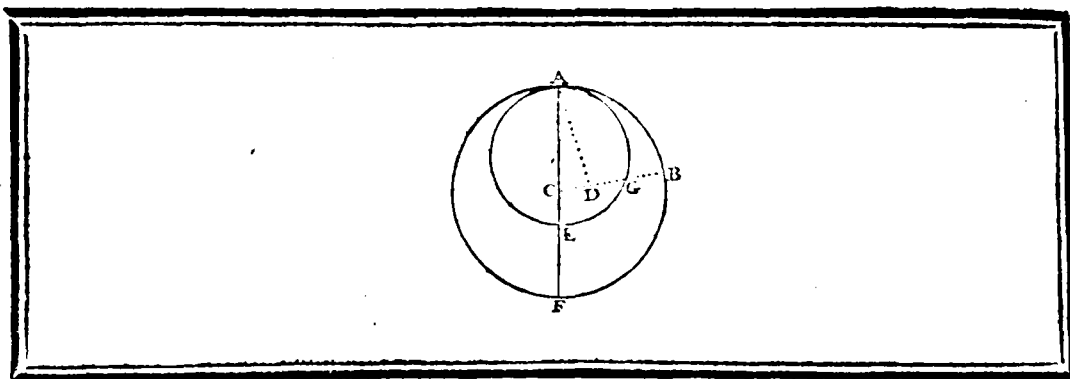
PUisque le point D est pris au dedans du $\odot$ ABFCG, & que plus de deux droites DA, DB, DC, tirées de ce point à la $\odot$ du $\odot$ ABFCG, font = entr'elles (Prop. 1. & Def. 15. L. 1).

1. Le point D est le centre de ce cercle.
Mais ce point étant aussi le centre du cercle ABCEG (Prop. 1).
2. Il s'ensuivroit que deux cercles ABFCG, ABCEG qui s'entrecoupent ont un centre commun D; ce qui est impossible.
3. Partant, deux $\odot$ ABCEG, ABFCG ne sçauroient s'entrecouper en plus de deux points.

Prop. 9. L. 3.

Prop. 5. L. 3.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XI. THEOREME X.
Si deux cercles se touchent intérieurement (en A): la droite qui joint leurs centres, étant prolongée, passera par le point de leur attouchement (A).

HYPOTHESE.

La droite CA joint les centres des deux $\odot$ AGE, ABF, qui se touchent intérieurement en A.

THESE.

Cette droite étant prolongée, passera par le point d'attouchement A de ces deux $\odot$.

DEMONSTRATION.

Si non.

Cette droite qui joint les centres, passera quelque'autre part, comme la droite CGB.

Préparation.

Tirez donc des centres C & D au point d'attouchement les droites CA, DA.

Dem. 1.

Puisque dans le $\triangle CDA$, les deux côtés CD & DA pris ensemble, sont $>$ le troisieme CA (Prop. 20. L. 1), & que CA est $=$ à CB (Def. 15. L. 1).

1. Les droites CD + DA seront aussi $>$ CB,

Si on retranche donc de part & d'autre la partie commune CD;

2. La droite DA sera $>$ DB.

Ax. 5. L. 1.

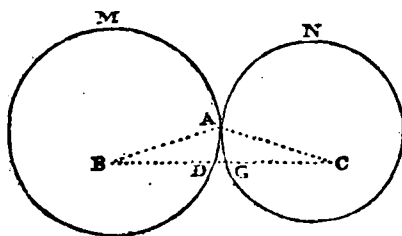
Mais la droite DA étant $=$ à DG (Prop. & Def. 15. L. 1).

3. DG seroit aussi $>$ DB; ce qui est impossible.

Ax. 8. L. 1.

4. C'est pourquoi la droite CA, qui joint les centres des $\odot$ AGE, ABF se touchant intérieurement, étant prolongée, passera par le point d'attouchement A.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XII. THEOREME XI.
Si deux cercles (DAM, GAN) se touchent extérieurement : la droite (BC), qui joint leurs centres, passera par le point d'attouchement (A).

HYPOTHESE.

La droite BC joint les centres des deux $\odot$ DAM, GAN, qui se touchent extérieurement en A.

THESE.

La droite BC passe par le point d'attouchement des deux $\odot$.

DEMONSTRATION.

Si non.

Cette droite, qui joint les centres, passera autre part, comme BDGC.

Préparation.

Tirez donc des centres B & C au point d'attouchement A les rayons BA, CA.

Dem. 1.

Puisque BA est $\equiv$ à BD & CA $\equiv$ à CG (Def. 15. L. 1).

Ax. 2. L. 1.

1. Les droites BA + CA sont $\equiv$ aux droites BD + CG;

Et si on ajoute aux droites BD + CG la partie DG;

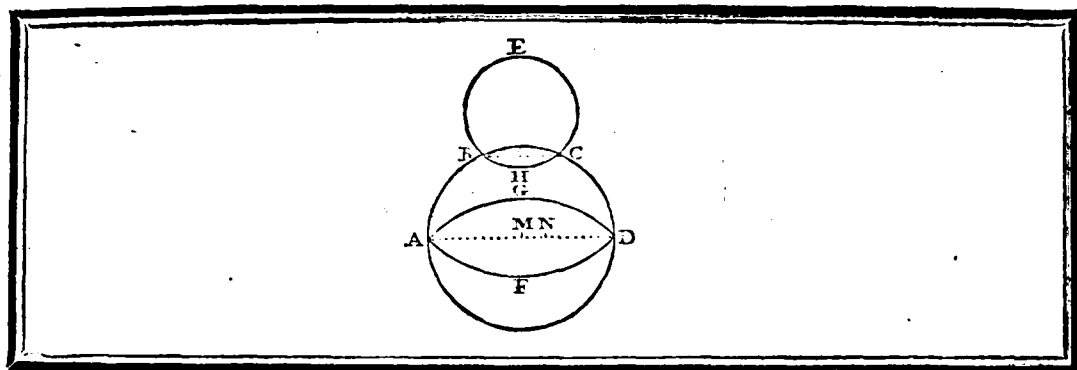
2. BD + DG + CG, ou la base BC du $\triangle$ BAC est $>$ les deux côtés BA + CA; ce qui est impossible.

Prop. 20. L. 1.

3. La droite BC, qui joint les centres, passera donc par le point d'attouchement A.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIII. THEOREME XII.
Deux cercles ($\odot ABCD$, $\odot AGDF$ ou $\odot ABCD$, $\odot BECH$), qui se touchent; soit intérieurement; soit extérieurement: ne se touchent pas en plus d'un point.

HYPOTHESE

- I. Les deux $\odot ABCD$, $\odot AGDF$ se touchent intérieurement,
 II. Et les deux $\odot ABCD$, $\odot BECH$ se touchent extérieurement.

THESE.

- Les $\odot ABCD$, $\odot AGDF$ ou $\odot ABCD$,
 $\odot BECH$ ne se touchent pas en plus d'un point.

DEMONSTRATION.

SI non.

- I. Les $\odot ABCD$, $\odot AGDF$ se touchent intérieurement en plus d'un point, comme en A & en D.
- II. Ou bien les $\odot ABCD$, $\odot BECH$ se touchent extérieurement en plus d'un point, comme en B & en C.

I. Préparation.

1. **T**rouvez les centres M & N des $\odot ABCD$, $\odot AGDF$.
2. Tirez par les centres la droite MN & prolongez la de part & d'autre, jusqu'à la rencontre de la $\odot$.

Prop. I. L. 3.

Dem. I. & 2.

Puisque la droite MN joint les centres M & N des deux $\odot ABCD$, $\odot AGDF$, (Prep. 2), qui se touchent intérieurement (Sup. I).

1. Cette droite passera par les points d'attouchement A & D.

Prop. II. L. 3.

Or AM est $\equiv$ à MD (I. Prep. 2. & Def. 15. L. 1).

Ax. 8. L. 1.

2. La droite AM est donc $\succ$ ND & à plus forte raison AN $\succ$ ND.

Mais par la raison que AN est $\equiv$ à ND (I. Prep. 2. & Def. 15. L. 1).

3. La droite AN seroit à la fois $\succ$ ND & $\equiv$ à ND; ce qui est impossible.

4. Partant, deux $\odot ABCD$, $\odot AGDF$, qui se touchent intérieurement, ne sauroient se toucher en plus d'un point.

C. Q. F. D.

II. Préparation.

Tirez par les points d'attouchement B & C des $\odot ABCD$, $\odot BECH$, la droite BC.

Dem. I.

Puisque la droite BC joint deux points B & C, pris dans les $\odot$ des cercles $\odot ABCD$, $\odot BECH$ (II Prep.).

1. Cette droite tombera au dedans des deux $\odot ABCD$, $\odot BECH$.

Prop. 2. L. 3.

Mais le $\odot BECH$ touchant extérieurement le $\odot ABCD$ (Sup. 2).

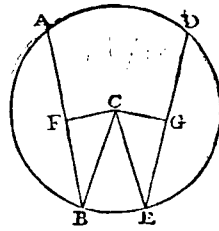
Def. 3. L. 3.

2. La droite BC, tirée dans le $\odot BECH$, tombera hors du $\odot ABCD$.

3. D'où il suit, que la droite BC tomberoit à la fois dans le $\odot ABCD$ (Arg. 1) & hors du même $\odot$ (Arg. 2); ce qui est impossible.

4. C'est pourquoi deux $\odot ABCD$, $\odot BECH$, qui se touchent extérieurement, ne se touchent pas en plus d'un point.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. THEOREME XIII.

Dans un cercle (ABED) les cordes égales (AB, DE) sont également éloignées du centre (C) : & les cordes (AB, DE) également éloignées du centre (C) : sont égales.

CAS I.

HYPOTHESE.

Les cordes AB, DE sont égales.

Préparation.

THESE.

Ces cordes sont également éloignées du centre C.

1. Trouvez le centre C du $\odot$ ABED.
2. Abaissez sur les cordes AB, DE les $\perp$ CF, CG.
3. Tirez du centre C aux points E & B les rayons CE, CB.

Prop. 1. L. 3.
Prop. 12. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Les cordes AB, DE étant = entr'elles (Hyp.), & partagées en deux également en F & G (Prop. 2, & Prop. 3. L. 3).

1. Leurs moitiés FB, GE le sont aussi,
2. Partant, le $\square$ de FB est = au $\square$ GE.
Mais à cause que le $\square$ de CB est = au $\square$ de CE (Prop. 3. & Prop. 46. Coroll. 3).
3. Il s'enfuit, que le $\square$ de FB + le $\square$ de FC est = au $\square$ de GE + au $\square$ de CG.
- Retranchant donc de part & d'autre les $\square$ égaux de FB & de GE (Arg. 2);
4. Le $\square$ restant de FC sera = au $\square$ de GC (Ax. 3. L. 1); ou FC = GC.
5. Partant, les cordes AB, DE sont également éloignées du centre C du $\odot$ ABED.

Ax. 7. L. 1.
Prop. 46. L. 1.
Coroll. 3.
Prop. 47. L. 1.
Ax. 1. L. 1.
Prop. 46. L. 1.
Coroll. 3.
Def. 4. L. 3.
C. Q. F. D.

CAS II.

HYPOTHESE.

Les cordes AB, DE, sont également éloignées du centre C du $\odot$ ABED.

THESE.

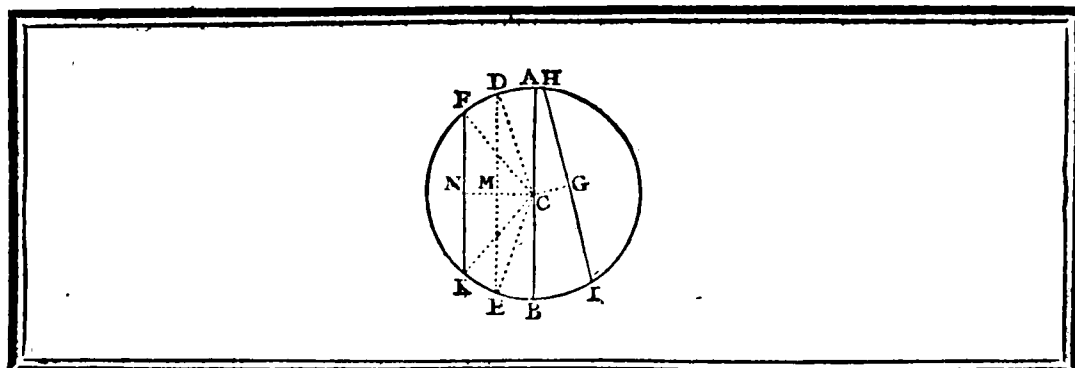
Ces cordes sont égales.

Puisque FC est = à GC (Hyp. & Def. 4. L. 3), & CB = CE (Prop. 3 & Def. 15. L. 1).

1. Le $\square$ de FC sera = au $\square$ de CG & le $\square$ de CB = au $\square$ de CE.
2. Partant; le $\square$ de FC + le $\square$ de FB est aussi = au $\square$ de CG + au $\square$ de GE.
En retranchant donc de part & d'autre les $\square$ égaux de FC & de CG (Arg. 1);
3. Le $\square$ restant de FB sera = au $\square$ de GE (Ax. 3. L. 1); ou FB = GE.
4. Partant, FB, GE étant les demicordes (Prop. 2. Prop. 3. L. 3), les cordes entières AB, DE sont aussi égales entr'elles.

Prop. 46. L. 1.
Coroll. 3.
Prop. 47. L. 1.
Ax. 1. L. 1.
Prop. 46. L. 1.
Coroll. 3.

Ax. 6. L. 1.
C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. THEOREME XIV.

LE diamètre (AB) d'un cercle (AIK) est plus grand que chacune de ses cordes (HI, FK); & une corde (HI) plus proche du diamètre est plus grande que toute autre (FK), qui en est plus éloignée.

HYPOTHESE.

1. AB est le diamètre du $\odot$ AIK.
11. Et la corde HI, est plus proche du diamètre que la corde FK.

THESE.

1. Le diamètre AB est $>$ chacune des cordes HI, FK.
11. La corde HI est $>$ la corde FK.

Préparation.

1. DU centre C abaissez sur HI & FK les $\perp$ CG, CN.
2. De CN, la plus grande de ces $\perp$, retranchez une partie CM $=$ à CG.
3. Elevez au point M sur CN une $\perp$ DM, & prolongez la en E.
4. Tirez les rayons CD, CF, CE, CK.

Prop. 12. L. 1.
Prop. 3. L. 1.
Prop. 11. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites CD, CE, CA, CB sont $=$ entr'elles (Prep. 4 & Def. 15. L. 1).

1. Il suit, que $CD + CE$ est $=$ à $CA + CB$ ou AB.

Ax. 2. L. 1.

Mais $CD + CE$ est $>$ DE (Prop. 20. L. 1).

2. C'est pourquoi AB est aussi $>$ DE, ou $>$ HI; à cause que $HI = DE$ (Prep. 2).

{ Def. 4. L. 3.
Prop. 14. L. 3.

3. On prouvera par un raisonnement semblable, que AB est aussi $>$ FK.

C. Q. F. D. I.

De plus, les $\triangle CDE$, CFK ayant deux côtés CD, CE $=$ à deux côtés CF, CK chacun à chacun (Prep. 4. & Def. 15. L. 1), & $\angle$ compris DCE $=$ $\angle$ compris FCK (Ax. 8. L. 1).

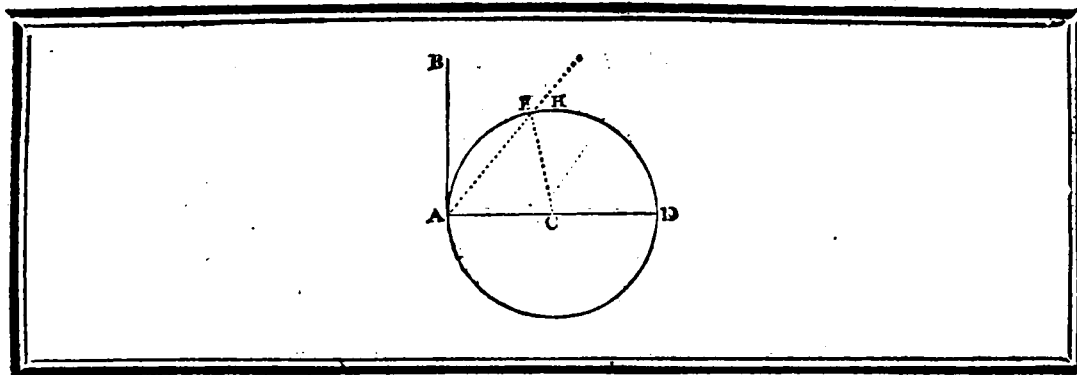
4. La base DE sera $>$ la base FK.

Prop. 24. L. 1.

5. Et parce que HI est $=$ à DE (Prep. 2.), HI est aussi $>$ FK.

{ Def. 4. L. 3.
Prop. 14. L. 3.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XVI. THEOREME XV.
Toute droite (AB) perpendiculaire au diamètre d'un cercle (AHD), à son extrémité (A), tombe hors de ce cercle; & on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette perpendiculaire (AB) & la circonférence; de plus l'angle mixtiligne (HAD), formé par une partie de la circonférence (HEA) & le diamètre (AD): est plus grand que tout angle rectiligne aigu quelconque; & l'angle (HAB) formé par la perpendiculaire (AB), & la même partie de la circonférence (HEA): est plus petit que tout autre angle rectiligne aigu quelconque.

HYPOTHESE:

- I. AB est tirée perpendiculairement à l'extrémité A du diamètre,
- II. Et forme avec l'arc HEA un $\angle$ mixtiligne HAB,
- III. Le diamètre AD forme avec le même arc HEA un $\angle$ mixtiligne HAD.

THESE.

- I. La $\perp$ AB tombe hors du $\odot$ AHD.
- II. On ne peut tirer aucune droite entre la $\perp$ AB & l'arc HEA.
- III. L'angle mixtiligne HAD est $>$ tout $\angle$ rectiligne aigu.
- IV. L'angle mixtiligne HAB est $<$ tout $\angle$ rectiligne aigu.

DEMONSTRATION:

I. Si non.

La $\perp$ AB tombera au dedans du $\odot$ AHD & le coupéra quelque part en E, comme AE.

Préparation.

Du centre C au point de section E tirez le rayon CE.

Dem. 1.

Puisque CA est $=$ à CE (Def. 15. L. 1).

1. L'angle CAE sera $=$ à $\angle$ CEA.

2. Et à cause que $\angle$ CAE est un $\angle$ (Sup.); $\angle$ CEA est aussi un $\angle$.

3. C'est pourquoi, les deux $\angle$ CAE + CEA, du $\triangle$ AEC, ne seront pas $<$ $2\angle$; ce qui est impossible.

4. La $\perp$ AB tombe donc hors du cercle.

Prop. 5. L. 1.

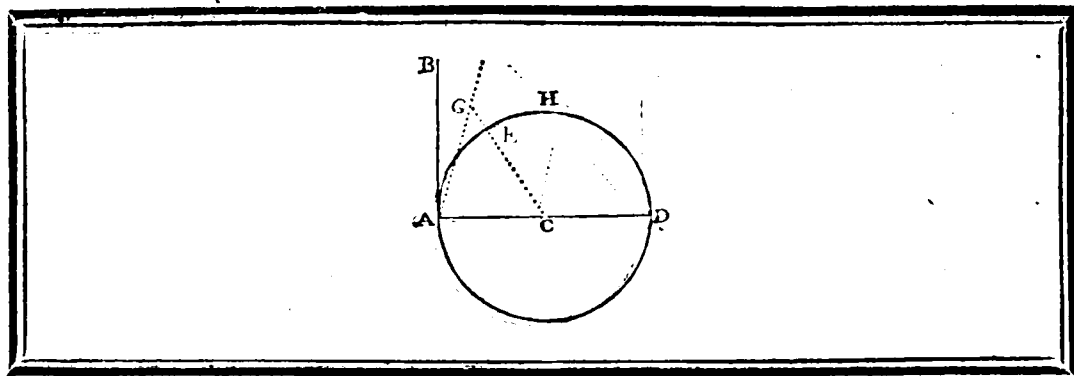
Ax. 1. L. 1.

Prop. 17. L. 1.

C. Q. F. D.

P. 3

II Si non.



II. Sĩ nôn.

On pourra tirer une droite, comme AG , entre la $\perp AB$ & la circonférence du $\odot AHD$.

Préparation.

Du centre C , abaissez sur AG la $\perp CG$.

Prop. 12. L. 1.

Puisque $\forall CGA$ est un L ; & $\forall CAG < \text{un } L$ (Ax. 8. L. 1); commen'étant que la partie d'un L CAB (Hyp. 1).

1. Il suit que le côté CA est $\simeq$ le côté CG .

Prop. 19. L.I.

Mais CA étant $\equiv$ à CE (*Def.* 15. L. 1).

2. La droite CE seroit aussi $\simeq CG$; ce qui est impossible.

Ax. 8. L. 1.

3. On ne peut donc tirer aucune droite entre la $\perp AB$ & la $\odot$ du $\odot AHD$.

C. Q. F. D. II.

III. & IV. **Si** non.

On peut tirer une droite, comme AG , qui forme de part & d'autre avec le diamètre AD & avec la $\perp AB$, un $\vee$ rectiligne aigu $GAD \searrow \vee$ mixtiligne HAD , & un $\vee$ rectiligne $GAB \swarrow \vee$ mixtiligne EAB .

Puis donc que la droite AG , tirée à l'extrémité A du diamètre AD , forme avec le diamètre & avec la $\perp AB$ un $\sphericalangle$ rectiligne aigu $GAD > \sphericalangle$ mixtiligne HAD , & un $\sphericalangle$ rectiligne $GAB < \sphericalangle$ mixtiligne EAB (*Sup.*).

1. Cette droite AG tombera nécessairement sur l'extrémité A du diamètre AD, entre la $\perp$ AB & la circonférence du $\odot$ AHD; ce qui est impossible.

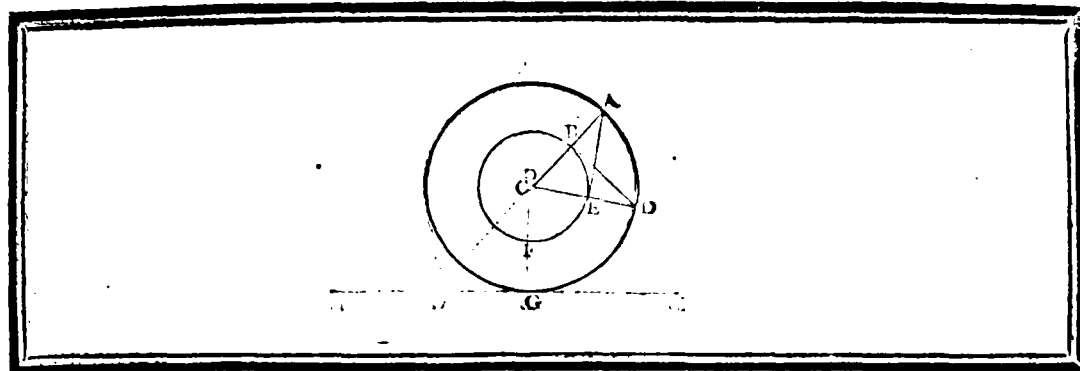
Dem. précéd.

2. L'angle mixtiligne HAD est donc $\sphericalangle$, & $\forall$ mixtiligne HAB $\sphericalangle$ tout $\forall$ rectiligne aigu.

C. Q. F. D. III. & IV.

C O R O L L A I R E

Toute droite, tirée perpendiculairement, à l'extrémité d'un diamètre, touche le cercle en un seul point.



PROPOSITION XVIII PROBLEME III.
Tirer d'un point donné (A) hors d'un cercle (BEF) ; une tangente (AE) à ce cercle.

DONNE.

Le point A hors du $\odot$ BEF.

CHERCHEE.

La tangente AE tirée du point A au $\odot$ BEF.

Résolution.

1. Cherchez le centre C du $\odot$ BEF, & tirez CA. Prop. 1. L. 3.
2. Du centre C & du rayon CA décrivez de $\odot$ ADG. Dém. 3.
3. Du point B, où le rayon CA coupe la $\odot$ BEF, élevez sur CA la $\perp$ BD. Prop. 11. L. 1.
4. Du centre C, au point D, où la $\perp$ BD coupe la $\odot$ ADG, tirez le rayon CD. Dém. 1.
5. Du point A au point E, où CD coupe la $\odot$ BEF tirez la droite AE, qui fera la tangente cherchée.

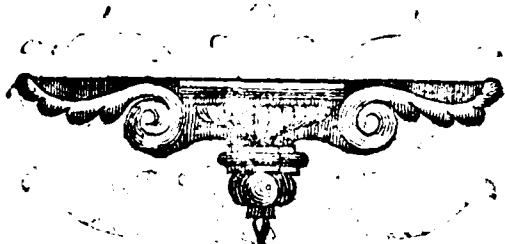
DEMONSTRATION.

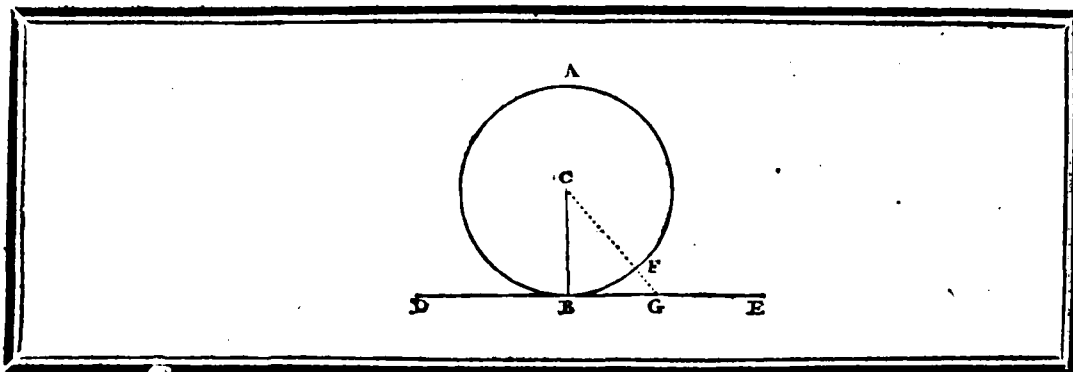
Puisque dans les $\triangle$ CBD, CEA le côté CB est = au côté CE, le côté CA = au côté CD (Def. 15. L. 1) & $\angle$ compris BCD commun aux deux $\triangle$.

1. Les $\angle$ CBD, CEA, opposés aux côtés égaux CD, CA, sont = entr'eux. Prop. 4. L. 1.
2. C'est pourquoi $\angle$ CBD étant un $\angle$ (Ref. 3), $\angle$ CEA fera droit aussi. Ax. 1. L. 1.
3. Partant, la droite AE, tirée du point donné A, est tangente du $\odot$ BEF. Prop. 16. L. 3.

[Cor. Def. 1. L. 3]

C. Q. F. F.





PROPOSITION XVIII. THEOREME XVI.
Si une droite (DE) touche un cercle (AFB) en un point (B): le rayon (CB) tiré du centre au point d'attouchement (B), est perpendiculaire sur la tangente (DE).

HYPOTHESE.

- I. La droite DE touche le $\odot$ AFB au point B,
- II. Et le rayon CB passe par le point d'attouchement B.

THESE.

Le rayon CB est $\perp$ sur la tangente DE.

DEMONSTRATION.

Si non.

On pourra abaisser du centre C une autre droite CG $\perp$ sur la tangente DE.

Préparation.

Abaissiez donc du centre C sur la tangente DE la $\perp$ CG.

Prop. 12. L. 1.

Puisque l'angle BGC du $\triangle$ BCG est un $\angle$ (Prep.).

1. L'angle CBG sera $<$ un $\angle$.

2. Partant, CB est $>$ CG.

Et CF étant $=$ CB (Def. 15. L. 1).

3. La droite CF est aussi $>$ CG; ce qui est impossible.

4. C'est pourquoi le rayon CB est $\perp$ sur la tangente DE.

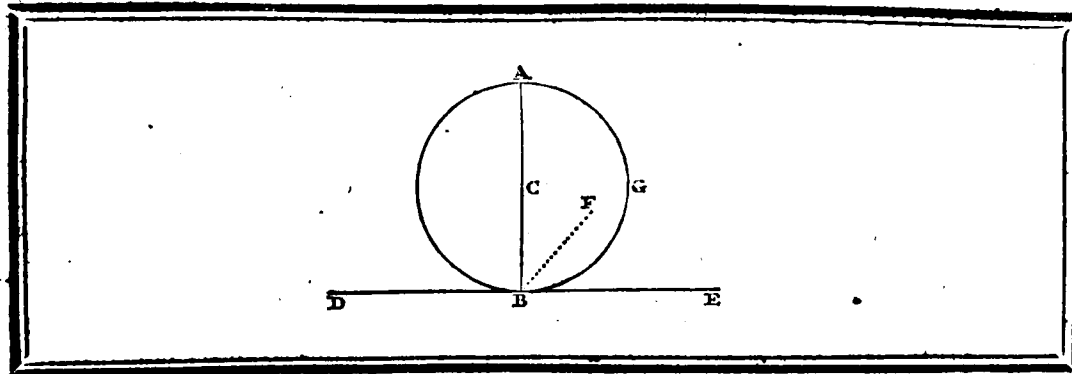
Prop. 17. L. 1.

Prop. 19. L. 1.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIX. THEOREME XVII.

Si une ligne droite (DE) touche un cercle (AGB en B): la perpendiculaire (BA) élevée du point d'attouchement (B) sur cette tangente, passera par le centre (C) du cercle.

HYPOTHESE.

- I. La droite DE est tangente du $\odot$ AGB.
- II. Et BA est la $\perp$ élevée du point d'attouchement B sur cette tangente.

THESE.

La droite BA passe par le centre C du $\odot$ AGB.

Si non.

DEMONSTRATION.

Le centre se trouvera dans un point F hors de la droite BA.

Préparation.

Tirez donc du point d'attouchement B au centre F la droite BF.

Dem. 1.

Puisque la droite BF est tirée du point d'attouchement B au centre F du $\odot$ AGB (Prep.).

1. L'angle FBE est un $\angle$.

Prop. 18. L. 3.

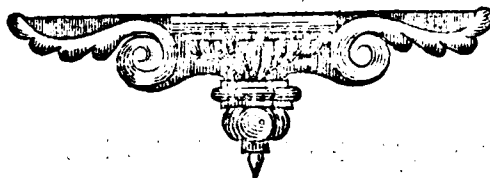
Mais $\angle$ ABE étant aussi un $\angle$ (Hyp. 2.).

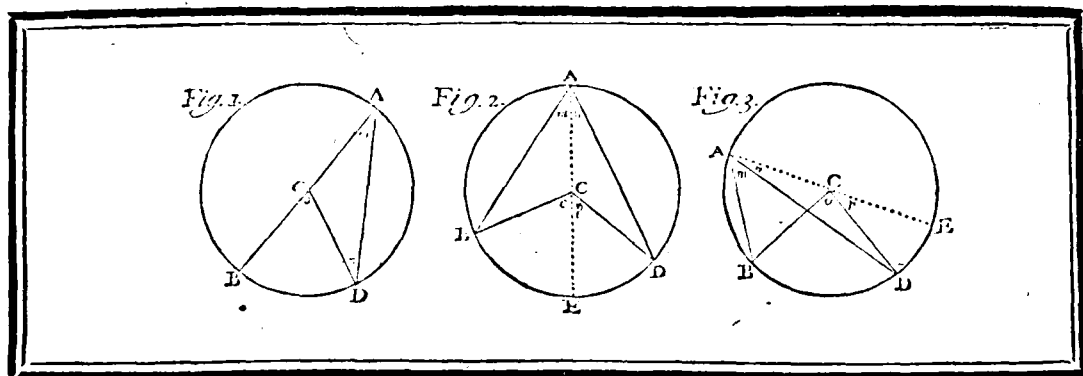
2. L'angle ABE est $\simeq$ à $\angle$ FBE; ce qui est impossible.
3. C'est pourquoi le centre C sera nécessairement dans la droite BA.

[Ax. 10. L. 1.]

[Ax. 8. L. 1:]

C. Q. F. D.





D PROPOSITION XX. THEOREME XVIII.
 Dans le cercle : l'angle au centre (BCD) est double de l'angle à la circonférence (BAD), quand ces angles s'appuient sur le même arc (BD).

HYPOTHESE.

- I. L'angle BCD est au centre, & $\angle BAD$ à la $\odot$.
- II. Les jambes BC, CD & BA, AD de ces $\angle$ s'appuient sur le même arc BD.

THESE.

L'angle au centre BCD est double de $\angle$ à la $\odot$ BAD.

DEMONSTRATION.

CAS I.

Si le centre C, tombe sur une des jambes AB de $\angle$ à la $\odot$. (Fig. 1).

Puisque dans le $\triangle CAD$ le côté CA est = au côté CD (Def. 15. L. 1).

1. L'angle m est = à $\angle n$ & $\angle m + n$ double $\angle m$.

Mais $\angle o$ est = à $\angle m + n$ (Prop. 32. L. 1).

2. Donc $\angle o$ est double de $\angle m$ ou $\angle BCD$ double de $\angle BAD$.

{ Prop. 5. L. 1.
 Ax. 2. L. 1.

Ax. 6. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS II.

Si le centre C tombe au dedans de $\angle$ à la $\odot$ (Fig. 2).

Préparation.

Tirez le diamètre ACE.

Dem. 1.

On prouvera, comme dans le premier Cas, que

1. Que le $\angle o$ est double de $\angle m$ & $\angle p$ double $\angle n$.

2. D'où il suit que $\angle o + p$ est double de $\angle m + n$, ou $\angle BCD$ double de $\angle BAD$. Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.

CAS III.

Si le centre C tombe au dehors de $\angle$ à la $\odot$ (Fig. 3).

En tirant le diamètre ACE; on démontrera encore par un raisonnement semblable à celui du premier Cas, que

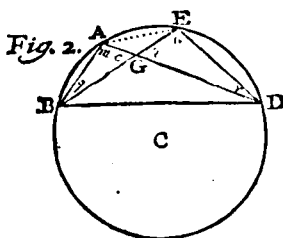
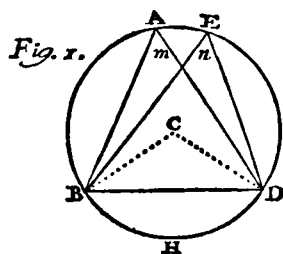
1. L'angle p est double de $\angle n$, & $\angle o + p$ double de $\angle m + n$;

En retranchant donc d'une part $\angle p$, & de l'autre $\angle n$,

2. L'angle restant o fera double de $\angle m$ ou $\angle BCD$ double de $\angle BAD$.

Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



D PROPOSITION XXI. THEOREME XIX.
 Dans le cercle, les angles (m & n), placés dans un même segment de cercle ($BAED$), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

Les $\angle m$ & n sont dans le même segment de $\odot BAED$.

THESE.

$\angle m$ est $=$ à $\angle n$.

DEMONSTRATION.

C A S I.

SI le segment $BAED$ est $>$ le demi $\odot$ (Fig. 1).

Préparation.

1. Cherchez le centre C du $\odot BAED$.
2. Et tirez les rayons CB , CD .

Prop. 1. L. 3.
 Dem. 1.

Puisque $\angle BCD$ est double de chacun des $\angle m$ & n (Prop. 20. L. 3).
 1. Il s'en suit que $\angle m$ est $=$ à $\angle n$.

Ax. 7. L. 1.

C A S II.

SI le segment $BAED$ est $<$ le demi $\odot$ (Fig. 2).

Préparation.

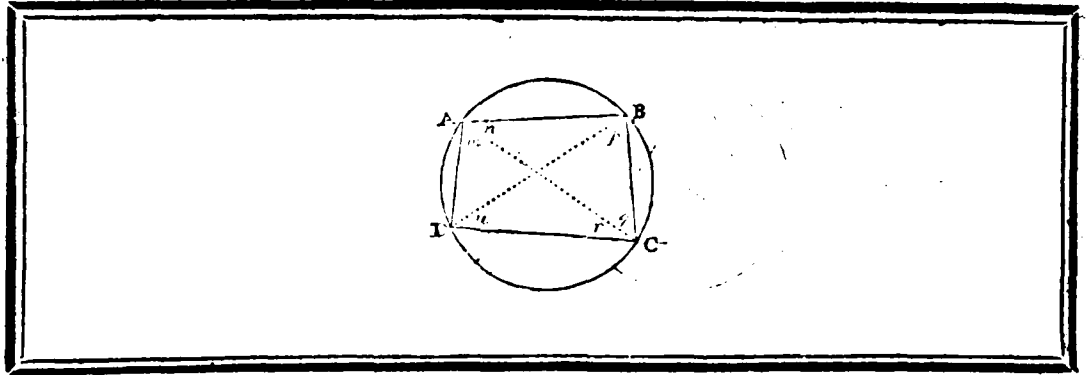
Tirez la droite AE .

Dem. 1.

1. Les trois $\angle m + o + q$ du $\triangle BAG$ sont égaux aux trois $\angle p + m + r$ du $\triangle GED$.
 Mais $\angle q$ est $=$ à $\angle r$ (Cas 1), & $\angle o =$ à $\angle p$ (Prop. 15. L. 1), en retranchant donc d'une part les $\angle q + o$ & de l'autre leurs égaux les $\angle p + r$,
 2. Les $\angle$ restans m & n seront $=$ entr'eux.

Prop. 32. L. 1.
 & Ax. 1. L. 1.

Ax. 3. L. 1.
 C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII. THEOREME XX.
Les figures quadrilatères (DABC) inscrites dans un cercle: ont les angles opposés (BAD, BCD ou ABC, ADC) égaux à deux droits.

HYPOTHESE.

La figure DABC est un quadrilatère inscrit dans un $\odot$.

THESE.

Les $\angle$ opposés $BAD + BCD$,
ou $ABC + ADC$ sont $=$ à 2 $\angle$.

Préparation.

Tirez les diagonales AC, BD.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les $\angle u$ & n sont des $\angle$ à la $\odot$, placés dans le même segment DABC.

1. Ces $\angle u$ & n sont $=$ entr'eux.

Prop. 21. L. 3.

On prouvera de même, que

2. Les $\angle p$ & m sont $=$ entr'eux.

3. C'est pourquoi, les $\angle u + p$ sont $=$ aux $\angle n + m$ ou à $\angle BAD$.

Ax. 2. L. 1.

Si on ajoute donc de part & d'autre $\angle r + q$, ou BCD;

4. Les $\angle u + p + (r + q)$ sont $=$ aux $\angle BAD + BCD$.

Ax. 2. L. 1.

Mais les trois $\angle u + p + (r + q)$ du $\triangle DBC$ étant $=$ à 2 $\angle$ (Prop. 32. L. 1).

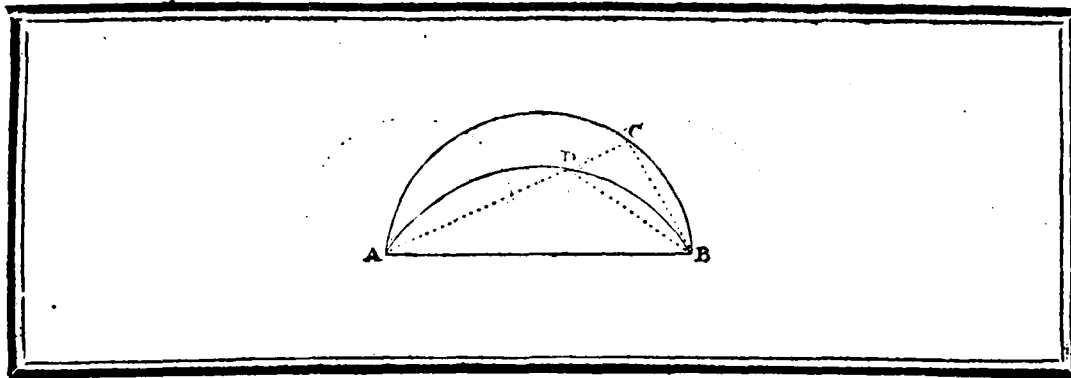
5. Les deux $\angle$ opposés $BAD + BCD$ du quadrilatère DABC sont aussi $=$ à 2 $\angle$.

Ax. 1. L. 1.

On démontrera par un raisonnement semblable, que

6. Les $\angle ABC + ADC$ sont $=$ à 2 $\angle$.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIII. THEOREME XXI.
Sur une même ligne droite (AB) & du même côté: on ne sçauroit placer deux segmens de cercles (ADB, ACB) semblables & inégaux.

HYPOTHESE

Les segmens semblables ADB, ACB sont placés sur une même ligne droite & du même côté.

THESE.

Ces segmens ne sçauroient être semblables & inégaux.

DEMONSTRATION.

Si non.

Les segmens ADB, ACB placés sur la même corde AB & du même côté seront semblables & inégaux.

Préparation.

1. Tirez une droite quelconque AC, qui coupe les segmens ADB, ACB aux points D & C.
2. Tirez les droites BD, BC.

} Dem. 1.

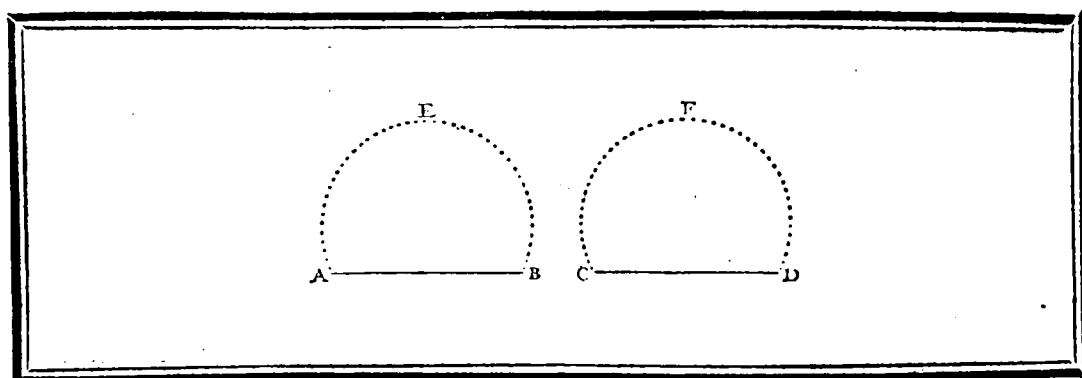
Puisque les $\angle$ BDA, BCA sont placés dans des segmens semblables ADB, ACB (*Hyp. & Prep. 1 & 2*).

1. Ces $\angle$ sont donc $\equiv$ entr'eux.
2. L'angle extérieur ADB du $\triangle$ BDC seroit donc $\equiv$ à son intérieur opposé BCD; ce qui est impossible.
3. Partant, on ne sçauroit placer sur une même ligne droite AB & du même côté deux segmens de $\odot$ ADB, ACB semblables & inégaux.

Ax. 2. L. 3.

Prop. 16. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV. THEOREME XXII.

Les segmens de cercles semblables (AEB, CFD) foustendus par des cordes égales (AB, CD) sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

1. Les segmens de $\odot$ AEB, CFD sont semblables;
- II. Et ces segmens sont foustendus par des cordes égales AB, CD.

THESE.

Les segmens AEB, CFD sont
= entr'eux.

Si non.

DEMONSTRATION.

Le segment AEB ne fera point = au segment CFD.

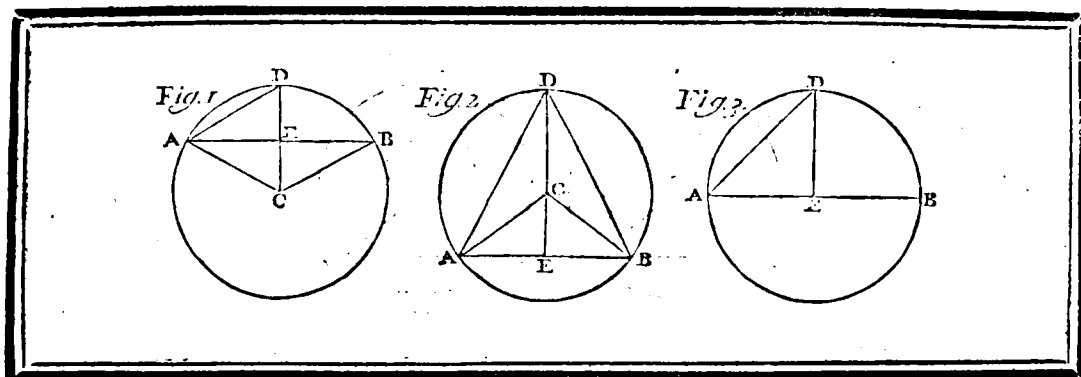
Puis donc que le segment AEB n'est point = au segment CFD (Sup), & que la corde AB est = a la corde CD. (Hyp. 2),

1. On pourra placer sur une corde AB, ou sur son égale CD, deux segmens de $\odot$ semblables & inégaux AEB, CFD; ce qui est impossible.
2. Ces segmens sont donc = entr'eux.

Prop. 23. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXV. PROBLEME III.

UN segment de cercle (ADB) étant donné; décrire le cercle dont il est un segment.

DONNEE

 Le segment de $\odot$ ADE.

CHERCHEE.

 Le centre C du $\odot$, dont ADB est un segment.

Résolution.

1. Partagez la corde AB en deux également au point E.
2. Du point E sur AB élevez la $\perp$ ED.
3. Tirez la droite AD.

Prop. 10. L. 1.
Prop. 11. L. 1.
Dem. 1.

Et $\angle ADE$ sera $>$, ou $<$; ou $= \angle DAE$.

CAS I & II.

Si $\angle ADE$ est ou $>$, ou $<$ $\angle DAE$. (Fig. 1. & 2).

4. Faites sur DA au point A, $\angle DAC = \angle ADE$.
5. Prolongez DE en C (Fig. 1), & tirez BC (Fig. 1. & 2).

Prop. 23. L. 1.
Dem. 2. & 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le $\triangle ADC$, l'angle DAC est $=$ à $\angle ADC$ (Ref. 4).

1. Le côté AC est $=$ au côté DC.

Prop. 5. L. 1.

Mais: dans les $\triangle AEC$, $\triangle BEC$, le côté AE est $=$ au côté EB, le côté EC commun aux deux $\triangle$ & $\angle$ compris AEC $=$ $\angle$ compris BEC (Ref. 2 & Ax. 10. L. 1).

2. La base AC sera $=$ à la base BC.

Prop. 4. L. 1.

3. Partant, les trois droites AC, DC, BC, tirées d'un point C, à la $\odot$ ADB, sont $=$ entr'elles.

Ax. 1. L. 1.

4. C'est pourquoi le point C est le centre du $\odot$, dont ADB est un segment.

Prop. 9. L. 3.

C. Q. F. F.

FIG. 3.

CAS III.

Si $\angle ADE$ est $=$ à $\angle DAE$. (Fig. 3).

1. LE côté AE est donc $=$ au côté ED.

Prop. 5. L. 1.

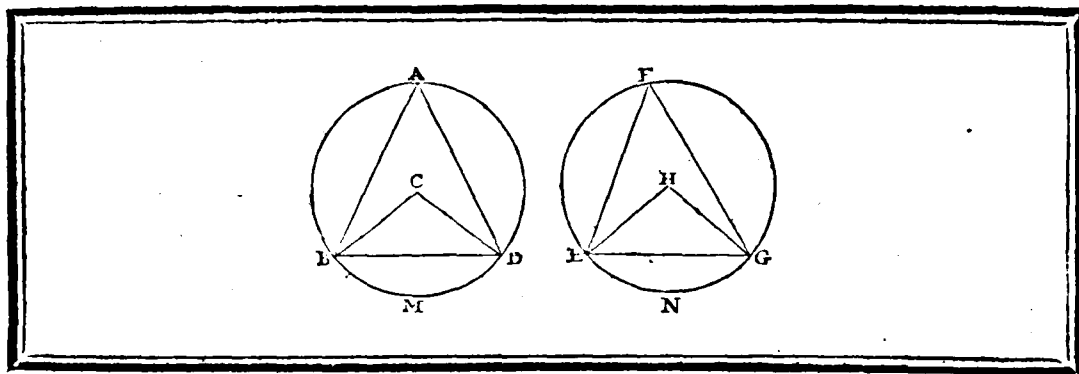
2. Partant, AE étant $=$ EB (Ref. 1), les trois droites AE, ED, EB tirées d'un point E à la $\odot$ ADB sont $=$ entr'elles.

Ax. 1. L. 1.

3. D'où il suit que le point E est le centre du $\odot$ dont ADB est un segment.

Prop. 9. L. 3.

C. Q. F. F.



DANS LES CERCLES ÉGAUX (BADM, EFGN): les angles égaux; tant ceux au centre (C & H), que ceux à la circonférence (A & F), s'appuyent sur des arcs égaux (BMD, ENG).

HYPOTHESE.

- I. Les $\angle A, F$ sont des $\angle$ à la $\odot$, $\equiv$ entr'eux.
- II. Les $\angle C \& H$ sont des $\angle$ au centre $\equiv$ entr'eux.
- III. Ces $\angle$ sont placés dans des $\odot$ égaux BADM, EFGN.

THESE.

Les arcs BMD, ENG sur lesquels ces $\angle$ s'appuyent sont $\equiv$ entr'eux.

Préparation.

Tirez les cordes BD, EG.

DEMONSTRATION.

LES deux côtés CB, CD du $\triangle BCD$ étant $\equiv$ aux deux côtés HE, HG du $\triangle EHG$ (Hyp. 3 & Ax. 1. L. 3), & $\angle$ compris C $\equiv$ à $\angle$ compris H (Hyp. 2).

1. La base BD sera $\equiv$ à la base EG.
Et puisque $\angle A$ est $\equiv$ à $\angle F$ (Hyp. 1).
2. Le segment BAD est semblable au segment EFG.
3. C'est pourquoi la base BD étant $\equiv$ à la base EG (Arg. 1) ces segments seront $\equiv$ entr'eux.
Si on retranche donc des $\odot$ égaux BADM, EFGN (Hyp. 3) les segments égaux BAD, EFG (Arg. 3).
4. Les arcs restans BMD, ENG seront aussi $\equiv$ entr'eux.

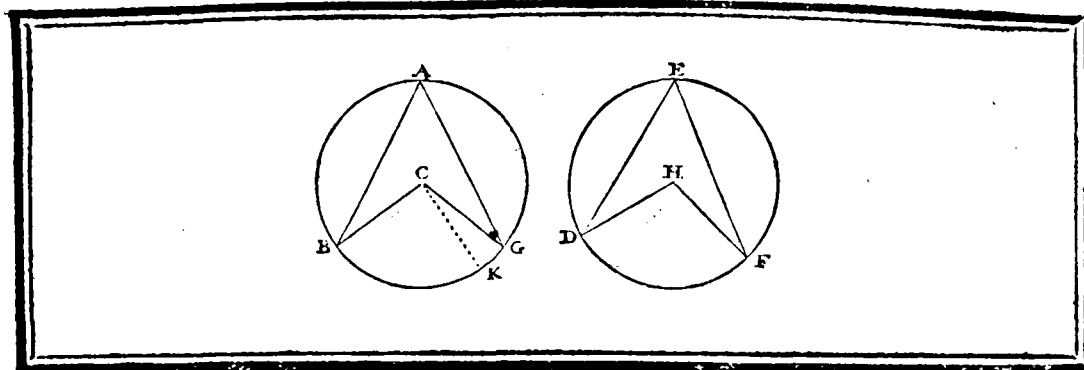
Prop. 4. L. 1.

Ax. 2. L. 3.

Prop. 24. L. 3.

Ax. 3. L. 1.

C. Q.F.D.



PROPOSITION XXVII. THEOREME XXIV.

DAns les cercles égaux (BAG, DEF), les angles, tant ceux au centre BCG, & H, que ceux à la circonférence (A & E), qui s'appuyent sur des arcs égaux (BG, DF), sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. Les $\odot$ BAG, DEF sont =, de même que leurs arcs BG, DF.
- II. Les $\angle$ au centre BCG & H, de même que ceux à la $\odot$ A & E, s'appuyent sur des arcs égaux.

THESE.

- I. Les $\angle$ au centre BCG & H sont = entr'eux.
- II. Et les $\angle$ à la $\odot$ A & E sont aussi = entr'eux.

DEMONSTRATION.

Si non.

Les $\angle$ au centre BCG & H; seront inégaux, & l'un comme BCG sera $>$ l'autre H.

Préparation.

FAites sur BC au point C, l'angle BCK = à $\angle$ H.

- I. L'arc BK est donc = à l'arc DF.
Mais l'arc DF étant = à l'arc BG. (Hyp. 2).
2. L'arc BK seroit aussi = à l'arc BG; ce qui est impossible;
3. Partant, les $\angle$ au centre BCG & H sont = entr'eux.

Et ces $\angle$ étant doubles des $\angle$ à la $\odot$ A & E (Prop. 20. L. 3).

4. Les $\angle$ à la $\odot$ A & E sont aussi = entr'eux.

Prop. 23. L. 1.

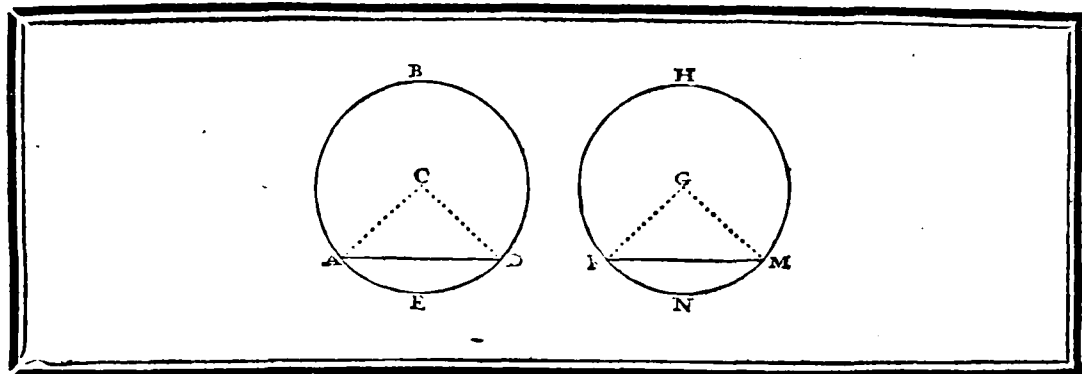
Prop. 26. L. 3.

{ Ax. 1. L. 1.
Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D. I.

Ax. 7. L. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXVIII. THEOREME XXV.
Dans les cercles égaux (ABDE, FHMN): les cordes égales (AD, FM) soutendent des arcs égaux (ABD, FHM ou AED, FNM).

HYPOTHESE.

1. Les $\odot$ ABDE, FHMN sont égaux.
2. Et les cordes AD, FM sont égales.

THESE.

Les cordes AD, FM soutendent des arcs égaux ABD, FHM ou AED, FNM.

Préparation.

1. Cherchez les centres C & G des deux $\odot$ ABDE, FHMN.
2. Tirez les rayons CA, CD item GF, GM.

Prop. 1. L. 3.
 Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les $\odot$ ABDE, FHMN sont égaux (Hyp. 1).
 1. Les côtés CA, CD, & GF, GM des $\triangle$ ACD, FGM sont = aussi.
 Et les cordes AD, FM étant outre cela égales (Hyp. 2).
 2. Les $\angle$ ACD, FGM sont = entr'eux.
 3. Partant, les arcs AED, FNM soutendus par les cordes AD, FM seront aussi = entr'eux.
 4. Et les $\odot$ entières étant de plus égales (Hyp. 1), les arcs ABD, FHM sont aussi égaux.

Ax. 1. L. 3.

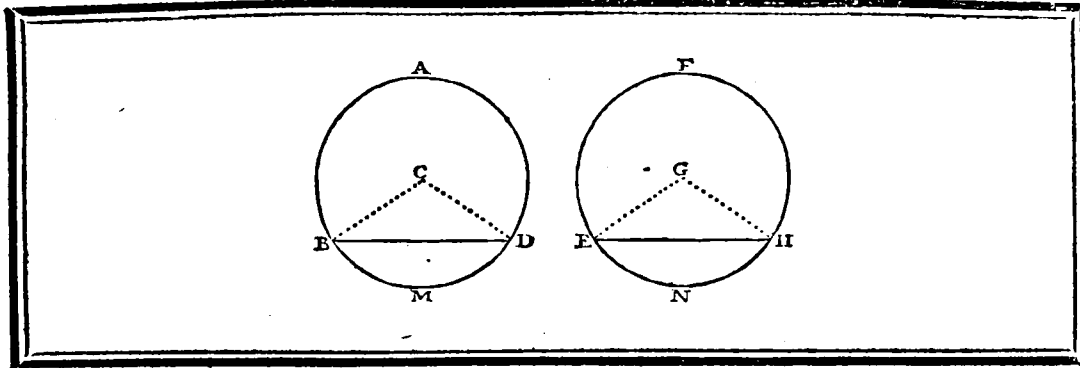
Prop. 8. L. 1.

Prop. 26. L. 3.

Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXIX. THEOREME XXVI.
DAns les cercles égaux ($\odot$ BADM, EFHN): les arcs égaux (BMD, ENH) sont soutendus par des cordes égales (BD, EH).

HYPOTHESE.

- I. Les $\odot$ BADM, EFHN sont égaux.
- II. Les arcs BMD, ENH sont égaux aussi.

THESE.

Les cordes BD, EH, qui soutiennent ces arcs sont = entr'elles.

Préparation.

1. Cherchez les centres C & G des deux $\odot$ BADM, EFHN.
2. Tirez les rayons CB, CD, GE, GH.

Prop. 1. L. 3.
 Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les $\odot$ BADM, EFHN sont égaux (Hyp. 1).

1. Les côtés CB, CD, & GE, GH des $\triangle$ BCD, EGH sont = entr'eux. Ax. 1. L. 3.

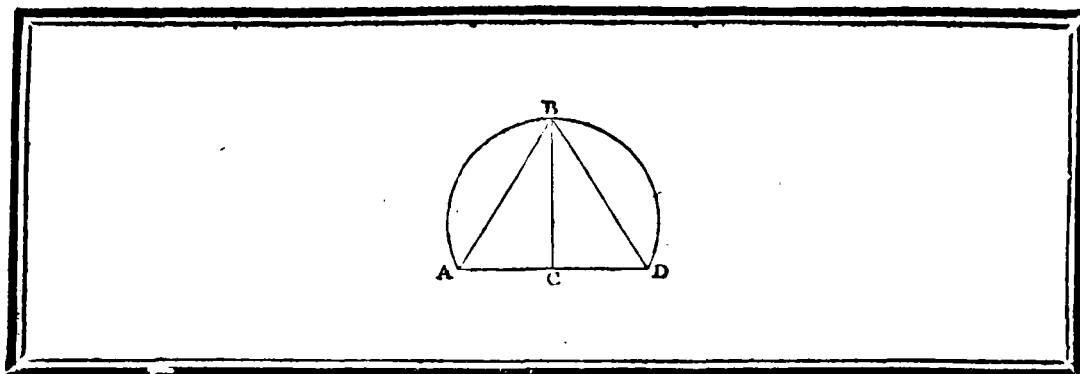
Mais les arcs BMD, ENH étant aussi égaux (Hyp. 2).

2. Les $\angle$ C & G, compris par ces côtés égaux, seront = entr'eux.
3. Partant, la corde BD est = à la corde EH.

Prop. 27. L. 3.
 Prop. 4. L. 1.

C. Q. F. D.





C PROPOSITION XXX. PROBLEME IV.
Couper un arc (ABD) en deux parties égales (AB, BD).

DONNE.
L'arc ABD.

CHERCHEE.
La division de l'arc AB en deux parties égales AB, BD.

Résolution.

1. DU point A au point D tirez la corde AD.
2. Coupez cette corde en deux également au point C.
3. Du point C élevez sur AD la $\perp$ CB; qui, prolongée suffisamment, coupera l'arc ABD en deux également au point B.

Dem. 1.
Prop. 10. L. 1.
Prop. 11. L. 1.

Préparation.

Tirez les cordes AB, DB.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le côté AC est $\equiv$ au côté CD (*Ref. 2.*), CB commun aux deux Δ ABC, DBC, & $\angle$ compris ACB $\equiv$ à $\angle$ compris DCB (*Ax. 10. L. 1. & Ref. 3.*).

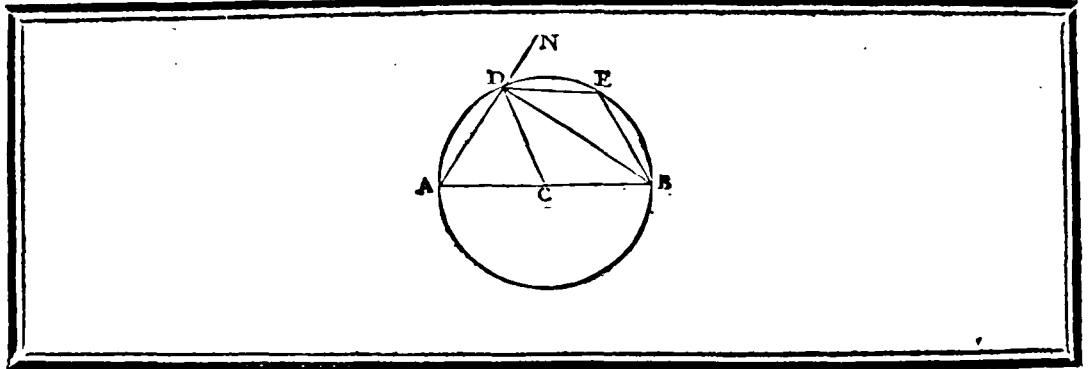
1. La base AB est $\equiv$ à la base DB.
2. Partant, les arcs AB & DB soutendus par les cordes égales AB, DB sont aussi $\equiv$ entr'eux, & l'arc entier ABD est coupé en deux également en B.

Prop. 4. L. 1.

Prop. 28. L. 3.

C. Q. F. F.





C A S III.

HYPOTHESE.

L'angle $\angle DEB$ est placé dans un segment $DEB < \text{la demi} \odot$.

THESE.

Cet $\angle DEB$ est $> \text{un } \angle$.

DEMONSTRATION.

1. Les $\angle$ opposés $\angle DAB + \angle DEB$, du quadrilatère $ADEB$ sont $= 2 \angle$. Prop. 22. L. 3.
2. C'est pourquoi, $\angle DAB$ étant $< \text{un } \angle$ (Cas II), $\angle DEB$ sera nécessairement $> \text{un } \angle$.

C. Q. F. D.

C A S IV.

HYPOTHESE.

Les $\angle$ mixtilignes $\angle BDA$, $\angle BDE$, sont formés par la droite BD & les arcs DA , DE .

THESE.

L'angle $\angle BDA$ est $> \text{un } \angle$, & l'angle $\angle BDE$ est $< \text{un } \angle$.

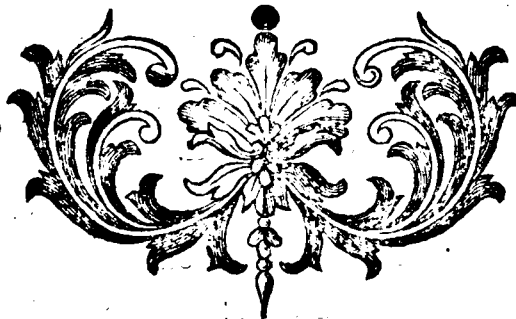
DEMONSTRATION.

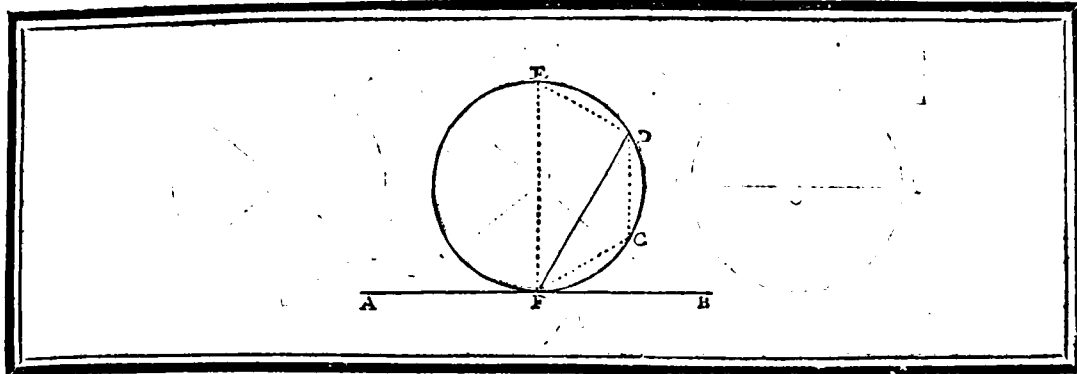
Puisque les $\angle$ rectilignes $\angle ADB$, $\angle NDB$ sont des $\angle$ (Cas I).

1. L'angle mixtiligne $\angle BDA$ sera nécessairement $> \text{un } \angle$, & $\angle$ mixtiligne $\angle BDE$ $< \text{un } \angle$.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXXII. THEOREME XXVIII.

SI une ligne droite (AB) touche un cercle (ECF), & que du point d'attouchement (F) on tire une corde quelconque (FD): les angles (DFB, DFA) formés par la corde & la tangente, sont égaux à ceux (FED, FCD,) qui sont placés dans les segmens alternes (FED, FCD).

HYPOTHESE.

- I. La droite AB est tangente du $\odot$ ECF.
- II. Et FD est une corde de ce $\odot$ tirée du point d'attouchement.

THESE.

- I. L'angle FED est $\equiv$ à $\angle$ DFB.
- II. L'angle FCD est $\equiv$ à $\angle$ DFA.

Préparation.

1. Sur AB, au point d'attouchement F, élevez la $\perp$ FE. Prop. 11. L. 1.
2. Prenez dans l'arc DF un point quelconque C & tirez ED, DC, CF. Dem. 1.

DEMONSTRATION.

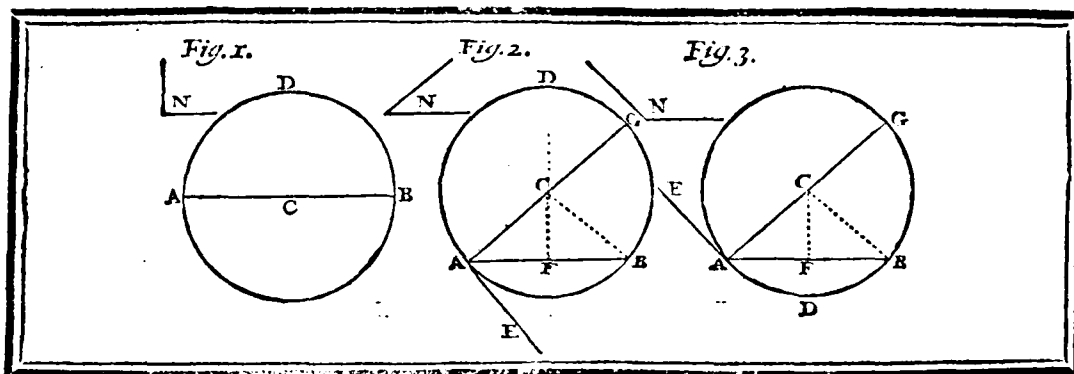
Puisque la droite AB touche le $\odot$ ECF (Hyp. I), & que FE est une $\perp$ élevée sur AB au point d'attouchement F (Prop. 1).

1. La droite FE est un diamètre du $\odot$ ECF. Prop. 19. L. 3.
2. Partant, $\angle$ FDE est un $\angle$. Prop. 31. L. 3.
3. C'est pourquoi, les $\angle$ DEF + DFE sont $\equiv$ à un $\angle$. Prop. 32. L. 1.
- Mais $\angle$ EFB ou $\angle$ DFE + $\angle$ DFB étant aussi $\equiv$ à un $\angle$ (Prop. 1).
4. Les $\angle$ DEF + DFE sont $\equiv$ aux $\angle$ DFB + DFE. Ax. 1. L. 1.
5. D'où il suit que $\angle$ DEF est $\equiv$ à $\angle$ DFB; ou $\angle$ placé dans le segment DEF $\equiv$ à $\angle$ formé par la tangente BF & la corde DF. [Ax. 3. L. 1; Prop. 21. L. 3.]

C. Q. F. D. I.

- Les $\angle$ FED + FCD étant $\equiv$ à 2 $\angle$ (Prop. 22. L. 3), & les $\angle$ contigus DFB + DFA étant aussi $\equiv$ à 2 $\angle$ (Prop. 13. L. 1).
6. Les $\angle$ FED + FCD sont $\equiv$ aux $\angle$ DFB + DFA. Ax. 1. L. 1.
 7. C'est pourquoi, $\angle$ FED étant $\equiv$ à $\angle$ DFB (Arg. 5), l'angle FCD est aussi $\equiv$ à $\angle$ DFA; ou $\angle$ placé dans le segment FCD $\equiv$ à $\angle$ compris par la tangente AF & la corde DF. [Ax. 3. L. 1; Prop. 21. L. 3.]

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXXIII. PROBLEME V.
Sur une droite donnée (AB); décrire un segment de cercle (ADB), qui contienne un angle égal à un angle donné (N).

DONNÉE

La droite AB avec $\angle N$.

CHERCHEE.

Le segment ADB décrit sur AB, qui contienne un $\angle =$ à $\angle N$.

C A S I. Si $\angle$ donné est $\angle$, (Fig. 1).

DÉMONSTRATION.

On n'a qu'à décrire sur AB un demi $\odot$ ADB.
 1. Ce demi $\odot$ contiendra un $\angle =$ à $\angle$ droit donné N.

Dem. 3.
 Prop. 31. L. 3.

C A S II. Si $\angle$ donné est aigu, (Fig. 2.); ou obtus (Fig. 3).

Résolution.

1. Faites sur AB, au point A, l'angle BAE $=$ à $\angle$ donné N.
2. Du point A elevez sur AE la $\perp$ AG.
3. Coupez la droite AB en deux également au point F.
4. Elevez sur AB, au point F, la $\perp$ FC, qui coupera AG quelque part en C.
5. De ce point C comme centre, & du rayon CA, décrivez le $\odot$ ADG;

Prop. 23. L. 1.
 Prop. 11. L. 1.
 Prop. 10. L. 1.
 Prop. 11. L. 1.
 Dem. 3.

Préparation.

Tirez la droite CB.

Dem. 1.

DÉMONSTRATION.

Puisque dans les $\triangle$ ACF, BCF, le côté AF est $=$ au côté BF (Ref. 3), FC commun aux deux $\triangle$, & $\angle$ compris AFC $=$ à $\angle$ compris BFC (Ax. 10. L. 1 & Ref. 4).

1. La base CA est $=$ à la base CB.
2. Partant, le $\odot$ décrit du centre C & du rayon CA, passera aussi par le point B, & ADB est un segment décrit sur AB.
 Mais la droite AE touchant le $\odot$ ADB au point A (Ref. 2. & Prop. 16. L. 3. Coroll.) & AB étant une corde tirée de ce point d'attouchement A (Arg. 2.).
3. L'angle compris dans le segment alterne ADB est $=$ à $\angle$ BAE.
4. C'est pourquoi, $\angle$ BAE étant $=$ à $\angle$ donné N (Ref. 1), $\angle$ compris dans le segment ADB décrit sur AB, est aussi $=$ à $\angle$ donné N.

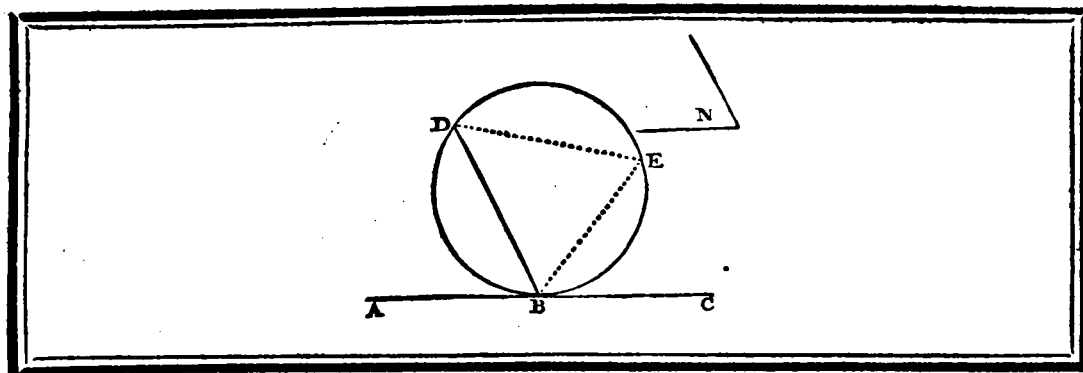
Prop. 4. L. 1.

Def. 15. L. 1.
 Def. 19. L. 1.

Prop. 31. L. 3.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXIV. PROBLEME VI.

Retrancher d'un cercle donné (BDE) un segment (BED), qui contienne un angle (DEB) égal à un angle rectiligne donné (N).

DONNE.

Le $\odot$ BDE, & $\sphericalangle$ rectiligne N.

CHERCHE.

Le segment BED retranché de ce $\odot$, contenant un $\sphericalangle$ DEB = à $\sphericalangle$ donné N.

Résolution.

1. D'Un point quelconque A tirez au $\odot$ BDE la tangente ABC. Prop. 17. L. 3.
2. Du point d'attouchement B, menez la corde BD, en sorte qu'elle forme sur AB $\sphericalangle$ DBA = à $\sphericalangle$ donné N. Prop. 23. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque $\sphericalangle$ donné N est = à $\sphericalangle$ DBA (Ref. 2), & $\sphericalangle$ DEB = à $\sphericalangle$ DBA (Prop. 32. L. 3).

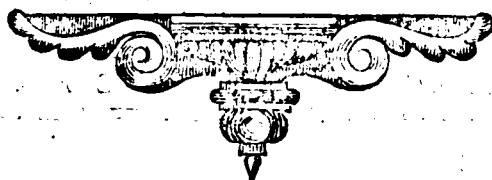
1. Les $\sphericalangle$ DEB & N sont = entr'eux.

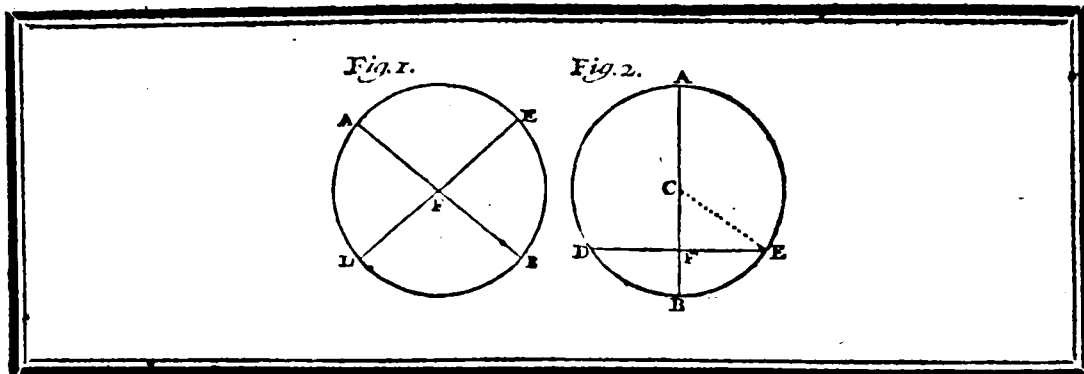
Ax. 1. L. 1.

2. On a donc retranché du $\odot$ BDE, un segment BED, qui contient un $\sphericalangle$ DEB = à $\sphericalangle$ donné N.

Prop. 21. L. 3.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XXXV. THEOREME XXIX.

Si dans un cercle (DAEB) deux cordes (AB, DE) s'entrecoupent: le rectangle compris des deux parties (AF, FB) de l'une, est égal au rectangle compris sous les deux parties (DF, FE) de l'autre.

HYPOTHESE.

- I. AB, DE sont deux cordes d'un même $\odot$ DAEB,
- II. Et ces cordes s'entrecoupent en un point F.

THESE.

Le Rgle AF.FB est = au Rgle DF.FE.

C A S I. Si les deux cordes passent par le centre F du $\odot$ (Fig. 1).

DEMONSTRATION.

1. Les droites AF, FB, DF, FE sont donc = entr'elles,
2. Et par conséquent le Rgle AF.FB est = au Rgle DF.FE.

Def. 15. L. 1.
Ax. 2. L. 2.

C A S II. Si l'une des cordes AB, passant par le centre coupe l'autre DE à L (Fig. 2).

Préparation.

Tirez le rayon CE.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque la droite AB est coupée en deux également en C, & en deux inégalement en F.

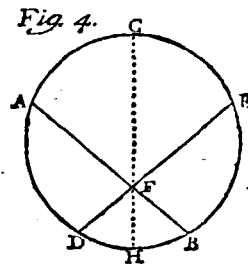
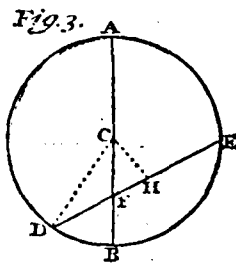
1. Le Rgle AF.FB + le $\square$ de CF est = au $\square$ de CB, ou = au $\square$ de CE.
Mais le $\square$ de FE + le $\square$ de CF est aussi = au $\square$ de CE (Prop. 47. L. 1).
2. D'où il suit que le Rgle AF.FB + le $\square$ de CF est = au $\square$ de FE + au $\square$ de CF.
3. Partant, le Rgle AF.FB est = au $\square$ de FE,
Et par la raison que DF est = à FE (Prop. 3. L. 3), ou DF.FE = au $\square$ de FE (Ax. 2. L. 2).
4. Le Rgle AF.FB est aussi = au Rgle DF.FE.

{ Prop. 5. L. 2.
Ax. 1. L. 1.

Ax. 1. L. 1.
Ax. 3. L. 2.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



C A S III. Si l'une des cordes AB, passant par le centre, coupe l'autre DE obliquement. (Fig. 3).

Préparation.

1. DU centre C abaissez sur DE la $\perp$ CH,
2. Et tirez le rayon CD.

Prop. 12. L. 1.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque DH est $\equiv$ à HE (Prop. 1. & Prop. 3. L. 3).

1. Le Rgle DF. FE + le $\square$ de FH est $\equiv$ au $\square$ de DH.

2. C'est pourquoi, le Rgle DF. FE + le $\square$ de FH + le $\square$ de CH est $\equiv$ au $\square$ de DH + au $\square$ de CH;

Mais le $\square$ de FH + le $\square$ de CH est $\equiv$ au $\square$ de CF, & le $\square$ de DH + le $\square$ de CH $\equiv$ au $\square$ de CD (Prop. 47. L. 1).

3. Le Rgle DF. FE + le $\square$ de CF est donc $\equiv$ au $\square$ de CD, ou au $\square$ de CB. De plus le Rgle AF. FB + le $\square$ de CF étant $\equiv$ au même $\square$ de CB (Prop. 5. L. 2).

4. Le Rgle DF. FE + le $\square$ de CF est aussi $\equiv$ au Rgle AF. FB + au $\square$ de CF,

5. Ou, en retranchant le $\square$ commun de CF, le Rgle DF. FE est $\equiv$ au Rgle AF. FB.

C. Q. F. D.

C A S IV. Si aucune des cordes AB, DE ne passe par le centre. (Fig. 4).

Préparation.

1. Tirez par le point F le diamètre GH.

Dem. 1.

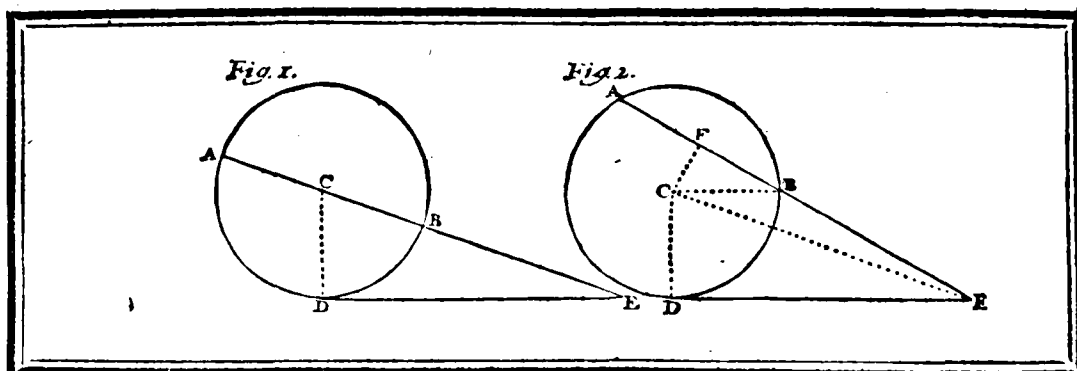
DEMONSTRATION.

Puisque chacun des Rgles AF. FB & DF. FE est $\equiv$ au Rgle GF. FH, par le troisieme Cas;

1. Ces Rgles AF. FB & DF. FE sont aussi $\equiv$ entr'eux.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVI. THEOREME XXX.
Si d'un point quelconque (E) pris hors d'un cercle (ABD), on tire à ce cercle deux lignes droites, dont l'une (DE) le touche, & l'autre (EA) le coupe: le rectangle compris de la secante entiere (AE) & de sa partie extérieure (EB) est égal au quarré de la tangente (ED).

HYPOTHESE.

1. Le point E est pris hors du $\odot$ ABD.
2. Et de ce point on a tiré la tangente ED & la secante EA.

THESE.

Le Rgle AE.EB est = au $\square$ de ED.

C A S I. Si la secante AE passe par le centre (Fig. 1).

Préparation.

Tirez au point d'attouchement D, le rayon CD.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

1. **L**E Rayon CD est donc $\perp$ sur la tangente ED, Et à cause que la droite AB est coupée en deux également en C, & que la droite BE y est ajoutée directement;
2. Le Rgle AE.EB + le $\square$ de CB est = au $\square$ de CE.
De plus, le $\square$ de CE étant aussi = au $\square$ de DE + au $\square$ de CD (Prop. 47. L. 1), ou au $\square$ de DE + au $\square$ CB (Prop. 46. L. 1. Coroll. 3);
3. Le Rgle AE.EB + le $\square$ de CB est = au $\square$ de DE + au $\square$ de CB.
4. Partant, le Rgle AE.EB sera = au $\square$ de DE.

Prop. 18. L. 3.

Prop. 6. L. 2.

Ax. 1. L. 11

Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.

C A S II. Si la secante AE ne passe pas par le centre (Fig. 2).

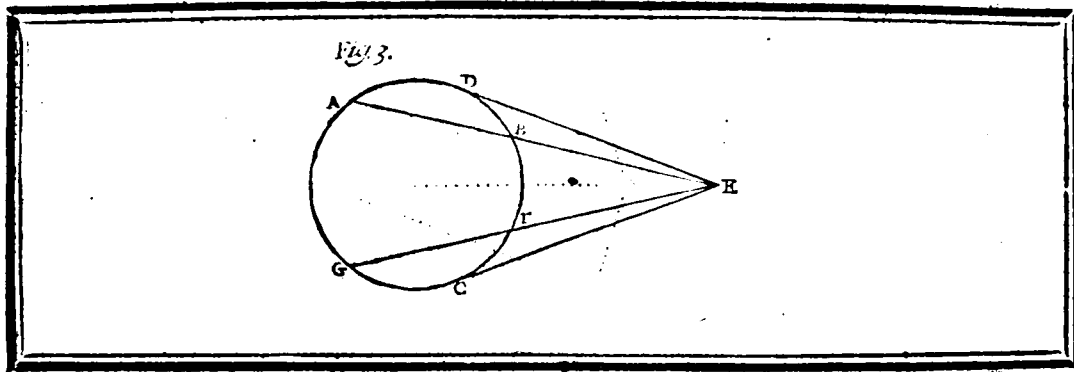
Préparation.

1. **A**baïssiez du centre C sur AE la $\perp$ CF.
2. Tirez les rayons CB, CD, & la droite CE.

Prop. 12. L. 1.

Dem. A

DEMON-



DEMONSTRATION.

Puisque la droite AB est coupée en deux également en F (*Prop. 1. & Prop.*

3. L. 3), & que la droite BE y est ajoutée directement,

1. Le Rgle AE. EB + le $\square$ de FB est = au $\square$ FE.

Prop. 6. L. 2.

2. Partant, le Rgle AE. EB + le $\square$ FB + le $\square$ de FC est = au $\square$ de FE + au $\square$ de FC, ou = au $\square$ de CE.

Ax. 2. L. 1.
Prop. 47. L. 1.

Mais par la raison que le $\square$ de DE + le $\square$ de CD est = au $\square$ de CE & le $\square$ de FB + le $\square$ de FC = au $\square$ de CB (*Prop. 47. L. 1*), ou = au $\square$ de CD (*Def. 15. & Prop. 46. L. 1, Coroll. 3*).

3. Le Rgle AE. EB + le $\square$ de CD est = au $\square$ de DE + au $\square$ de CD.

4. Par conséquent, le Rgle AE. EB est = au $\square$ de DE.

Ax. 3. L. 1.

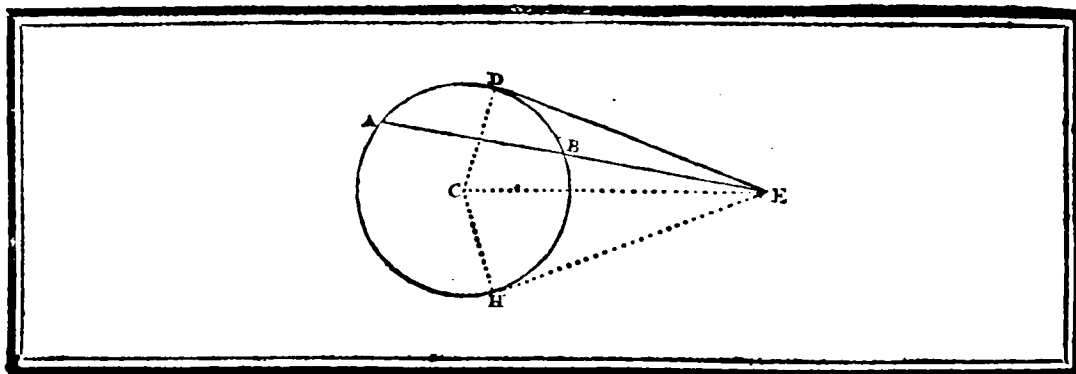
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

IL est évident que si (*Fig. 3*) d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADBF), on tire plusieurs droites (AE, EG &c) qui coupent le cercle (en B & F &c): les rectangles compris des secantes entières (AE, GE), & des parties extérieures (EB, EF), sont égaux entr'eux; puisqu'en tirant du point E la tangente (ED), ces rectangles seront tous égaux au carré de la même tangente (ED).

COROLLAIRE II.

IL est aussi évident que, si d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADBF), on tire à ce cercle deux tangentes (ED, EC), elles seront égales entr'elles; puisque le carré de chacune est égal au même rectangle (AE. EB).



PROPOSITION XXXVII. THEOREME XXXI.

Si d'un point quelconque (E), pris hors d'un cercle (ADH), on tire à ce cercle deux lignes droites dont l'une (AE) coupe le cercle, & l'autre (ED), se termine à sa circonférence convexe; & que le rectangle, compris de la secante entière (AE) & de la partie extérieure (EB), soit égal au quarré de la droite (ED), qui se termine à la circonférence convexe: celle-ci touchera le cercle (en D).

HYPOTHESE.

- I. La droite AE coupe le $\odot$ ADH en B,
- II. Et la droite ED se termine à sa $\odot$ convexe.
- III. La Rgle AE . EB est = au $\square$ de ED.

THESE.

La droite ED touche le $\odot$ ADH au point D.

Préparation.

1. Du point E tirez au $\odot$ ADH la tangente EH.
2. Tirez les rayons CD, CH & la droite CE.

Prop. 17. L. 3.
Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque le Rgle de AE . EB est = au $\square$ de ED (Hyp. 3) & que le Rgle AE . EB est aussi = au $\square$ de EH (Prop. 1 & Prop. 36. L. 3).

1. Le $\square$ de ED est = au $\square$ de EH (Ax. 1. L. 1), ou ED = EH,

(Prop. 46. L. 1.
Coroll. 3.

Et comme de plus, dans les $\triangle$ CDE, CHE, le côté CD est = au côté CH (Def. 15. L. 1), & CE commun aux deux $\triangle$.

2. L'angle CDE est = à $\angle$ CHE.

Prop. 8. L. 1.

3. C'est pourquoi, $\angle$ CHE étant un $\angle$ (Prop. 1 & Prop. 18. L. 3), $\angle$ CDE est un $\angle$ aussi;

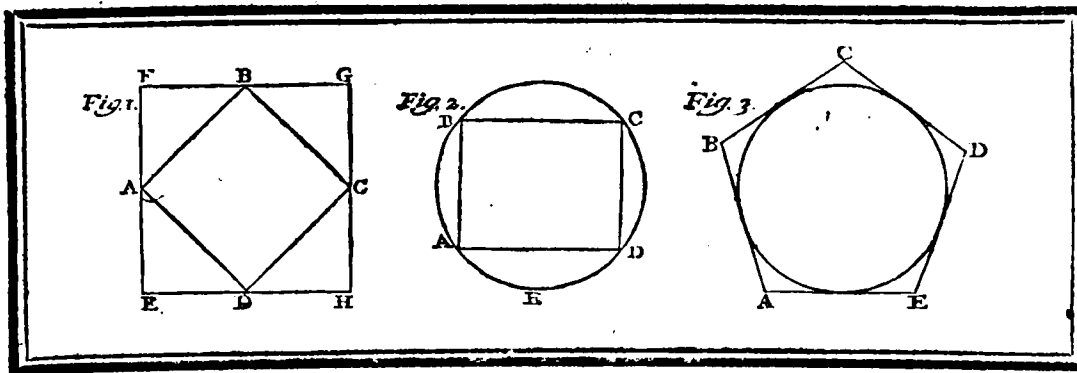
Ax. 1. L. 1.
Prop. 16. L. 3.
Coroll. 3.

4. Et la droite ED touche le $\odot$ ADH au point D.

C. Q. F. D.

LES
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
LIVRE QUATRIEME.

THE
OFFICE OF THE
SECRETARY OF THE
NAVY
WASHINGTON, D. C.



D E F I N I T I O N S

I.

ON dit qu'une figure rectiligne (ABCD) est *inscrite* dans une autre figure rectiligne (EFGH), quand chacun des angles (A, B, C, D) de la figure inscrite, touche chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure dans laquelle elle est inscrite (Fig. 1).

II.

Pareillement on dit qu'une figure rectiligne (EFGH) est *circonscrite* à une autre figure rectiligne (ABCD); quand chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure circonscrite touche chacun des angles (A, B, C, D) de la figure à laquelle elle est circonscrite (Fig. 1).

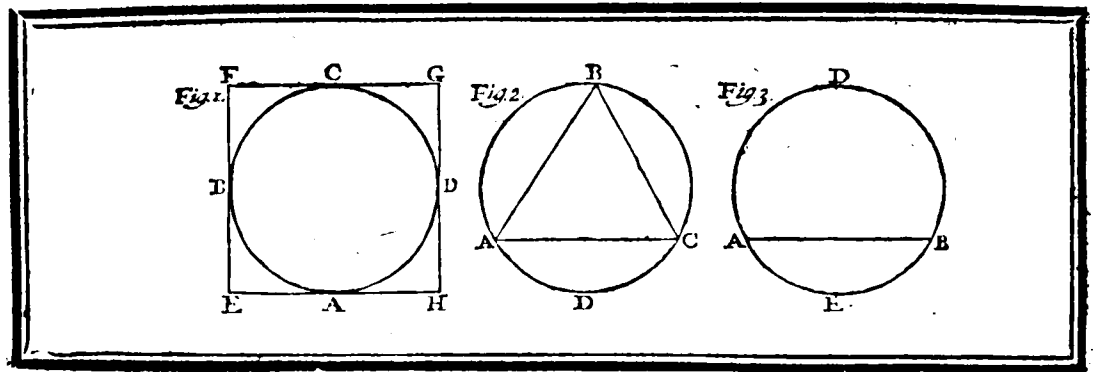
III.

Une figure rectiligne (ABCD) est *inscrite* dans un cercle, quand chacun des angles (A, B, C, D) de la figure inscrite touche la circonférence du cercle (ABCDE) dans lequel elle est inscrite (Fig. 2).

IV.

Et une figure rectiligne (ABCDE) est *circonscrite* à un cercle, quand chacun de ses côtés (AB, BC, CD, DE, EA) touche le cercle, auquel elle est circonscrite (Fig. 3).

T



D E F I N I T I O N S

V.

UN cercle (ABCD) est inscrit dans une figure rectiligne (EFGH), quand sa circonférence touche chacun des côtés (EF, FG, GH, HE) de la figure à laquelle il est inscrit (Fig. 1).

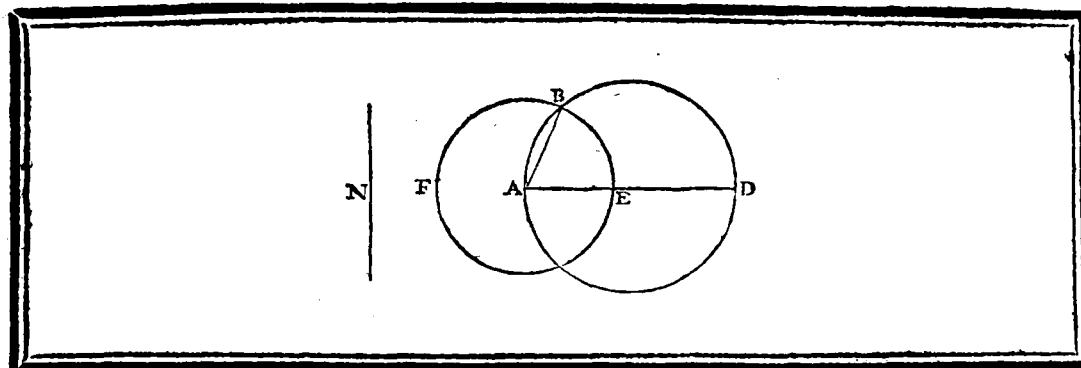
VI.

Mais un cercle (ABCD) est circonscrit à une figure rectiligne (ABC), quand la circonférence du cercle touche chacun des angles (A, B, C) de la figure à laquelle il est circonscrit (Fig. 2).

VII.

Une ligne droite (AB) est appliquée dans un cercle (ADBE), quand ses extrémités (A & B) sont dans la circonférence du cercle (Fig. 3).





PROPOSITION I. PROBLEME I.

Appliquer dans un cercle donné (ABD), une ligne droite (AB) égale à une ligne droite donnée (N), laquelle ne soit pas plus grande que le diamètre du cercle (ABD).

DONNE.
Un $\odot$ ABD, avec une droite N, qui n'est pas
 $>$ le diamètre de ce $\odot$.

CHERCHE.
La droite AB appliquée dans le $\odot$ ABD,
& qui soit $=$ à la droite N.

Résolution.

1. **T**irez le diamètre AD du $\odot$ ABD.

Dem. 1.

C A S I.

Si AD est $=$ à N.

On aura appliqué dans le $\odot$ donné ABD une droite AD $=$ à la donnée N. Def. 7. L. 4.

C. Q. F. F.

C A S II.

Si AD est $>$ N.

1. **F**aitez AE $=$ à N.

2. Du centre A & du rayon AE décrivez le $\odot$ EBF, & tirez AB.

Prop. 3. L. 1.
Dem. 3.

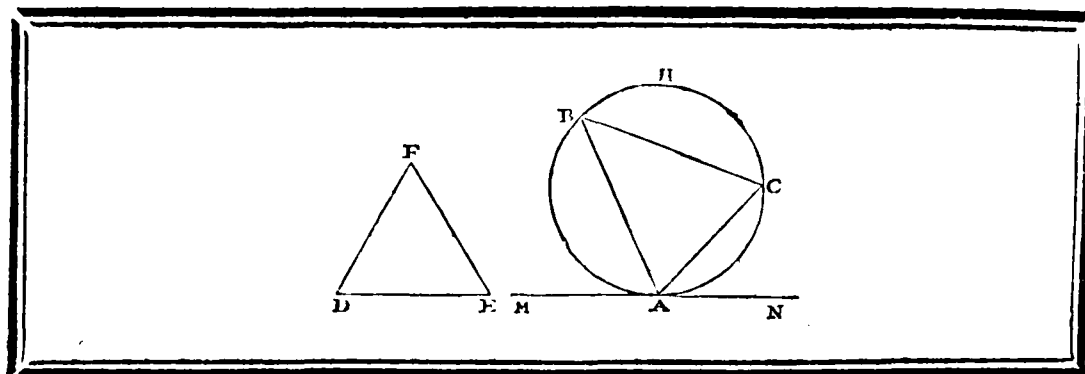
DEMONSTRATION.

Puisque AB est $=$ à AE (Def. 15. L. 1), & que la droite N est $=$ à AE
(Ref. 1),

1. La droite AB, appliquée dans le $\odot$ ABD, sera aussi $=$ à N.

{ Ax. 1. L. 1.
{ Def. 7. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION II. PROBLEME II.
Inscrire dans un cercle donné (ABHC); un triangle (ABC) équiangle à un triangle donné (DFE).

DONNE.
 Un $\odot$ ABHC avec le $\triangle DFE$.

CHERCHE.
 Le $\triangle ABC$ inscrit dans le $\odot$ ABHC,
 & qui soit équiangle au $\triangle DFE$.

Résolution.

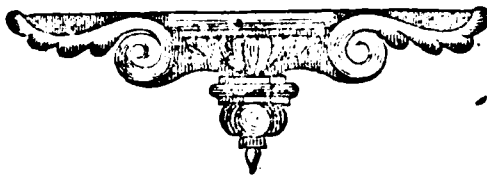
1. **T**irez d'un point quelconque M, au $\odot$ ABHC, la tangente MN. Prop. 17. L. 3.
2. Faites sur MN, au point d'attouchement A, l'angle $BAM = \angle FED$, & $CAN = \angle FDE$. Prop. 23. L. 1.
3. Tirez BC. Dem. 1.

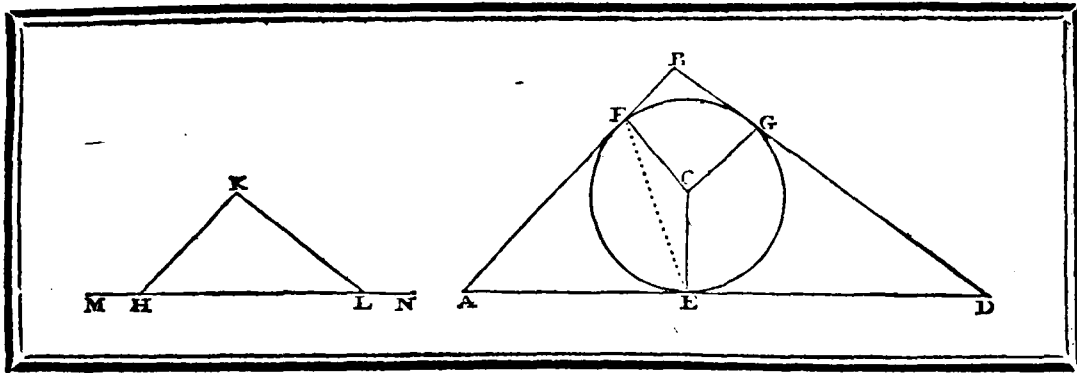
DEMONSTRATION.

Puisque $\angle BCA = \angle BAM$ (Prop. 32. L. 3), & $\angle FED =$ au même $\angle BAM$ (Ref. 2); Item $\angle CBA = \angle CAN$ (Prop. 32. L. 3), & $\angle FDE$ aussi $= \angle CAN$ (Ref. 2).

1. Il s'ensuit que $\angle BCA$ est $= \angle FED$, & $\angle CBA = \angle FDE$. Ax. 1. L. 1.
3. Partant, le troisième $\angle BAC$, du $\triangle ABC$, est aussi $=$ au troisième $\angle DFE$ du $\triangle DFE$, & ce $\triangle ABC$ est inscrit dans le $\odot$ ABHC. { Prop. 32. L. 1.
Def. 3. L. 4.

C. Q. F. E.





PROPOSITION III. PROBLEME III.
Circonscrire à un cercle donné (EFG) un triangle (ABD), qui soit équiangle à un triangle donné (HKL).

DONNE.

Le $\odot$ EFG, avec le $\triangle$ HKL.

CHERCHE.

Le $\triangle$ ABD circonscrit au $\odot$ EFG, qui soit équiangle au $\triangle$ HKL.

Résolution.

1. Prolongez de part & d'autre le côté HL du $\triangle$ HKL.
2. Cherchez le centre C du $\odot$ EFG, & tirez le rayon CE.
3. Faites sur CE, au point C, l'angle $\angle ECF = \angle KHM$, & $\angle ECG = \angle KLN$.
4. Sur CE, CF, CG élevez les $\perp$ prolongées AD, AB, DB.

Dem. 2.

Prop. 1. L. 3.

Prop. 23. L. 1.

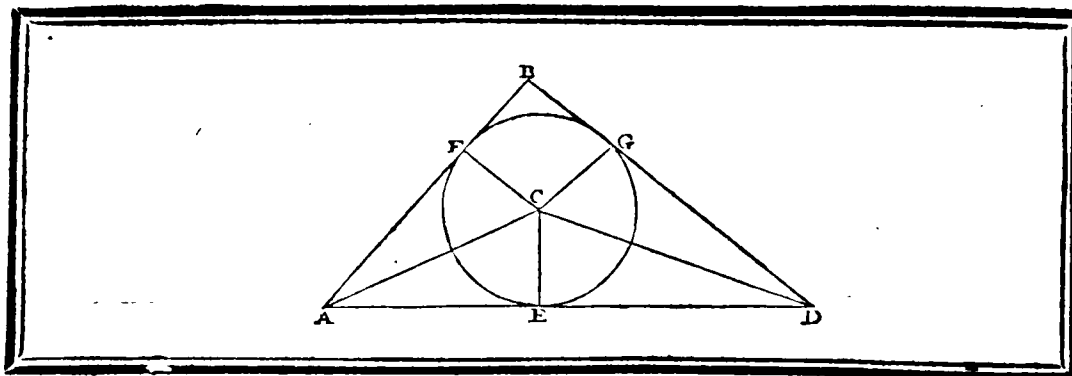
Prop. 11. L. 1.

Préparation.

Tirez la droite FE.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les $\angle$ CEA, CFA sont des $\angle$ (Ref. 4),
1. Les $\angle$ FEA + EFA sont $< 2 \angle$, & les droites AD, AB se rencontreront quelque part en A. { Ax. 8. L. 1.
Ax. 11. L. 1.
 - On démontrera de la même manière, que
 2. Les droites AD, DB item AB, DB se rencontreront quelque part en D & B, Et par la raison que les droites AD, AB, DB sont $\perp$ à l'extrémité E, F, G des rayons EF, CF, CG (Ref. 4),
 3. Ces droites touchent le $\odot$ EFG; & le $\triangle$ ABD formé par ces droites est circonscrit au $\odot$ EFG. { Prop. 16. L. 3.
Cor. D. 4. L. 4.
 - De plus, les $\angle$ CEA + CFA + ECF + FAE du quadrilatère AFCE étant $= 4 \angle$ (Prop. 32. L. 1), & les $\angle$ CEA + CFA $= 2 \angle$ (Ref. 4),
 4. Les $\angle$ ECF + FAE sont aussi $= 2 \angle$, Ax. 3. L. 1.
 5. Ou égaux aux $\angle$ KHM + KHL, à cause que ceux-ci sont aussi $= 2 \angle$. { Ax. 1. L. 1.
Prop. 13. L. 1.
 - Mais $\angle$ ECF étant $= \angle$ KHM (Ref. 3),
 6. L'angle FAE est $= \angle$ KHL, & par la même raison $\angle$ GDE $= \angle$ KLG. Ax. 3. L. 1.
 7. C'est pourquoi le troisième $\angle$ FBG, du $\triangle$ ABD, est $=$ au troisième $\angle$ HKL, du $\triangle$ HKL.
 8. Le $\triangle$ ABD circonscrit au $\odot$ EFG est donc aussi équiangle au $\triangle$ donné HKL. Prop. 32. L. 1.



PROPOSITION IV. PROBLEME IV. INscrire dans un triangle donné (ABD) un cercle (EFG).

DONNE.
Le $\triangle ABD$.

CHERCHE.
Le $\odot EFG$ inscrit dans le $\triangle ABD$.

Résolution.

1. Coupez les $\angle BAD, BDA$ en deux également par les droites AC, DC prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C .
2. Du point C abaissez sur AD la $\perp CE$.
3. Et de ce même point C comme centre, & du rayon CE , décrivez le $\odot EFG$.

Prop. 9. L. 1.
Prop. 12. L. 1.

Dem. 3.

Préparation.

Abaissez du point C sur AB & DB les $\perp CF, CG$.

Prop. 12. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les $\triangle AFC, ACE$, l'angle FAC est $=$ à $\angle CAE$ (Ref. 1),
 $\angle CFA =$ à $\angle CEA$ (Prep. Ref. 2 & Ax. 10. L. 1); & AC commun aux deux $\triangle$,

1. La droite CF est $=$ à CE .
On démontrera de même, que
2. La droite CG est $=$ à CE .

Prop. 26. L. 1.

3. Partant, les droites CF, CE, CG sont $=$ entr'elles; & le $\odot$ décrit du centre C & du rayon CE , passera aussi par les points F & G .

[Ax. 1. L. 1.
Def. 15. L. 1.

Et par la raison que les côtés AD, AB, DB sont $\perp$ à l'extrémité E, F, G du rayons CE, CF, CG (Ref. 2 & Prep.),

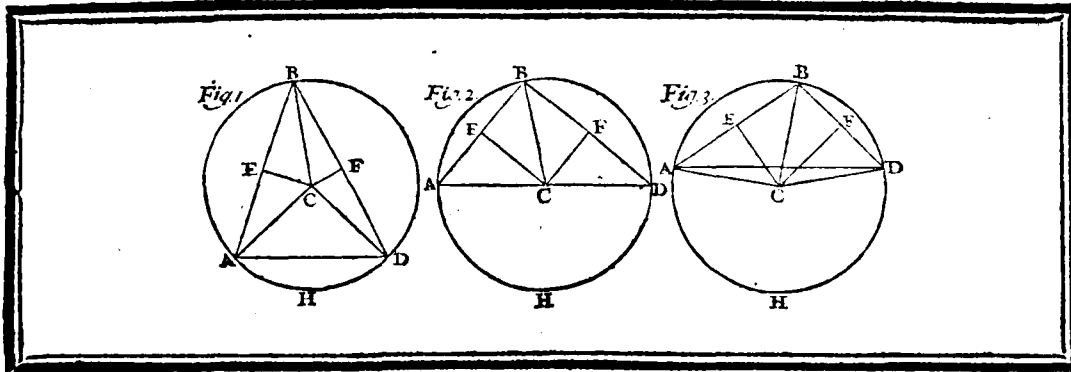
4. Ces côtés toucheront le $\odot$ aux points E, F, G .

[Prop. 16. L. 3.
Coroll.

Le $\odot EFG$ est donc inscrit dans le $\triangle ABD$.

Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION V. PROBLEME V. Circonscire un cercle (ABDH) à un triangle donné (ABD).

DONNE.
Le $\triangle ABD$.

CHERCHE.
Le $\odot ABDH$ circonscrit au $\triangle ABD$.

Résolution.

1. Partagez les côtés AB, DB en deux également, aux points E & F.
2. Sur AB, DB, aux points E & F, elevez les $\perp EC$, FC prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C.
3. Et, soit que le point C tombe au dedans (Fig. 1), au dehors (Fig. 3), ou sur un des côtés (Fig. 2) du $\triangle ABD$, décrivez du centre C & du rayon CA le $\odot ABDH$.

Prop. 10. L. 1.

Prop. 11. L. 1.

Dem. 3.

Préparation.

Tirez les droites CD, CB.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les $\triangle AEC$, BEC , le côté AE est = au côté EB (Ref. 1), EC commun aux deux $\triangle$, & $\angle$ compris AEC = à $\angle$ compris BEC (Ref. 2. & Ax. 10. L. 1),

1. La droite CB est = à CA.

Prop. 4. L. 1.

On démontrera de même, que

2. La droite CB est = à CD.

3. Partant, les droites CA, CB, CD sont = entr'elles; & le $\odot ABDH$ décrit du centre C & du rayon CA, passera aussi par les points B & D.

Ax. 1. L. 1.

Def. 15. L. 1.

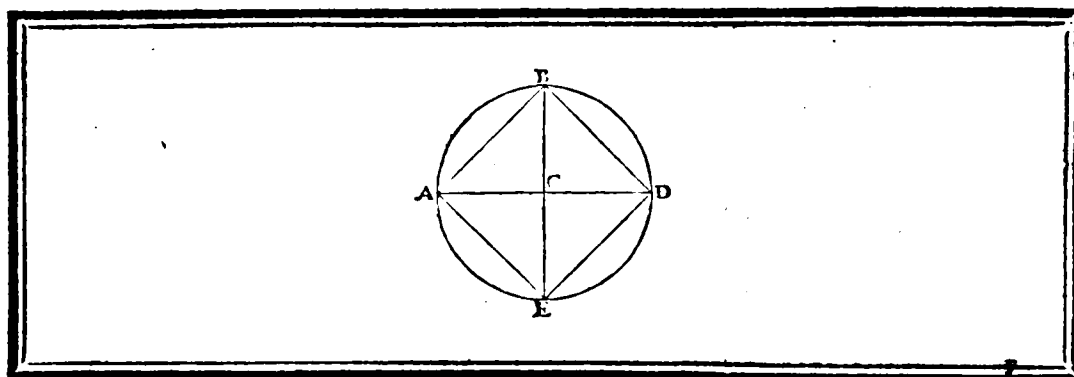
4. Ce $\odot ABDH$ est donc circonscrit au $\triangle ABD$.

Def. 6. L. 4.

C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

SI le triangle ABD est acutangle, le point C tombe au dedans de ce triangle (Fig. 1); mais si ce triangle est obtusangle, le point C tombera au dehors (Fig. 3); enfin s'il est rectangle, le point C tombera sur un des côtés (Fig. 2).



I PROPOSITION VI. PROBLEME VI.
 Inscrire dans un cercle donné (ABDE); un quarré (ABDE).

DONNE.
 Le $\odot$ ABDE.

CHERCHE.
 Le $\square$ ABDE inscrit dans ce $\odot$.

Résolution.

1. Tirez les diamètres AD, BE, en sorte qu'ils se coupent à $\angle$.
2. Joignez leurs extrémités par les droites AB, BD, DE, EA.

Prop. II. L. I.
 Dem. 1.

DÉMONSTRATION.

Puis donc que dans les $\triangle ABC$, DBC le côté AC est $=$ à CD (Ref. 1. & Def. 15. L. 1), BC commun aux deux $\triangle$, & $\angle$ compris BCA $=$ à $\angle$ compris BCD (Ref. 1. & Ax. 10. L. 1),

1. La droite AB est $=$ à BD.

Prop. 4. L. 1.

Par un raisonnement semblable on démontrera, que

2. La droite BD est $=$ à DE, DE $=$ à EA & EA $=$ à AB.
3. Partant, les droites AB, BD, DE, EA sont $=$ entr'elles, ou le quadrilatère ABDE est équilatère.

Ax. 1. L. 1.

Et à cause que chacun des $\angle$ ABD, BDE, DEA, BAE est placé dans un demi $\odot$.

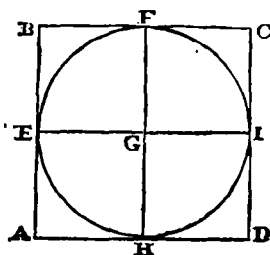
4. Ces $\angle$ seront des $\angle$, & le quadrilatère équilatère ABDE est aussi rectangulaire.

5. C'est pourquoi ce quadrilatère est un quarré inscrit dans le $\odot$ ABDE.

Prop. 31. L. 3.
 { Def. 30. L. 1.
 { Def. 3. L. 4

C. Q. F.F.





C PROPOSITION VII. PROBLEME VII.
Circonscrire un quarré (ABCD) à un cercle donné (HEFI).

DONNE.
Le $\odot$ HEFI.

CHERCHEZ.
Le $\square$ ABCD circonscrit au $\odot$ HEFI.

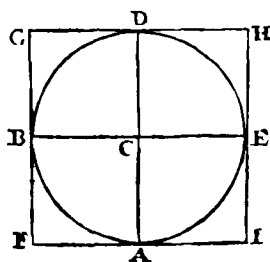
Résolution.

1. **T**irez les diamètres EI, HF en sorte qu'ils se coupent à $\vee$ L. Prop. 11. L. 1.
2. Sur les extrémités H, E, F, I de ces diamètres, elevez les $\perp$ AD, AB, BC, CD. Prop. 11. L. 1.

DEMONSTRATION.

1. **L**es droites DA, AB, BC, CD sont donc des tangentes du $\odot$ HEFI, { Prop. 16. L. 3
Coroll.
2. Et la droite AD est $\perp$ à EI, de même que la droite BC; à cause que $\vee$ HGE + GHA, item $\vee$ FGE + GFB sont $\equiv$ à 2 $\angle$ (Ref. 1 & 2). Prop. 28. L. 1.
3. Partant AD est aussi $\perp$ à BC; & par la même raison AB, HF, DC sont $\perp$ les. Prop. 30. L. 1.
4. C'est pourquoi les quadrilatères AI, EC, AF, HC, AC sont des Pgmes. Def. 35. L. 1.
5. D'où il suit, que les droites AD, EI, BC, item AB, HF, DC, sont $\equiv$ entr'elles. Prop. 34. L. 1.
6. Et par la raison que EI est $\equiv$ à HF (Def. 15. L. 1), les droites AD, BC, AB, DC sont aussi égales. Ax. 1. L. 1.
7. L'angle A, qui lui est diagonalement opposé, est $\angle$ aussi. Prop. 34. L. 1.
8. Les $\vee$ B, C, D sont des $\angle$.
Mais $\vee$ EID du Pgme AI étant un $\angle$ (Ref. 2),
Par un raisonnement semblable on prouvera, que
9. Par conséquent, on a circonscrit au $\odot$ HEFI un quadrilatère ABCD équilatère (Arg. 6.) & rectangulaire (Arg. 7 & 8); ou un quarré. { Def. 4. L. 1.
Def. 30. L. 1.

C. Q. F.F.



PROPOSITION VIII. PROBLEME VIII.
Inscrire un cercle (ABDE) dans un quarré donné (FGHI).

DONNE.
 Le $\square$ FGHI.

CHERCHE.
 Le $\odot$ ABDE inscrit dans le $\square$ FGHI.

Résolution.

1. **C**oupez les côtés FI, FG du quarré FGHI en deux également.
2. Par les points de section A & B, tirez AD Plle à FG ou IH & BE Plle à FI ou GH.
3. Du point C, ou AD, BE s'entrecoupent, comme centre & du rayon CA, décrivez le $\odot$ ABDE.

Prop. 10. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Dem. 3.

DEMONSTRATION.

Puisque les figures FE, BH, FD, AH, FC, AE, BD, CH sont des Pgmcs (Ref. 2. & Def. 35. L. 1).

1. La droite FA est $\equiv$ à BC & FB $\equiv$ à AC.

Prop. 34. L. 1.

Mais les droites entières FI, FG étant égales (Def. 30. L. 1) & FA, FB étant les moitiés de ces droites (Ref. 1).

2. La droite FA est $\equiv$ à FB.

Ax. 7. L. 1.

3. Partant BC est aussi $\equiv$ à AC; & par la même raison AC est $\equiv$ à CE & BC $\equiv$ à CD.

Ax. 1. L. 1.

4. D'où il suit, que les droites AC, BC, CE, CD sont $\equiv$ entr'elles, & que le $\odot$ décrit du centre C & du rayon CA; passe aussi par les points B, D, E, Or les $\angle$ DAF, EBG, ADH, BEI étant des $\angle$ (Prop. 34. L. 1), comme intérieurs opposés aux $\angle$ GFA, HGB, IHD, FIE (Def. 30. L. 1).

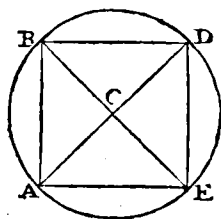
[Ax. 1. L. 1.
Def. 15. L. 1.]

5. Les droites FI, FG, GH, HI sont des tangentes du $\odot$ ABDE.

[Prop. 16. L. 3.
Coroll.
Def. 5. L. 4.]

6. C'est pourquoi ce $\odot$ est inscrit dans le quarré FGHI.

C. Q. F. F.



C PROPOSITION IX. PROBLEME IX.
Circonscrire un cercle (ABDE); à un quarré donné (ABDE).

DONNE.
Le $\square$ ABDE.

CHERCHE.
Le $\odot$ ABDE circonscrit au $\square$ ABDE.

Résolution.

1. **T**irez les diagonales AD, BE.
2. Du point C, où ces diagonales se coupent, comme centre & du rayon CA décrivez le $\odot$ ABDE.

Dem. 1.

Dem. 3.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les $\triangle$ ABE, EBD le côté AB est = au côté BD, AE = à ED (Def. 30. L. 1) & BE commun aux deux $\triangle$.

1. L'angle ABE est = à $\angle$ EBD, & $\angle$ entier ABD est coupé en deux également par la droite BE.

Prop. 8. L. 1.

On prouvera de même que

2. Les autres $\angle$ BAE, BDE, AED sont coupés en deux également par les droites AD, BE.

Or les $\angle$ entiers ABD, BAE étant = entr'eux (Def. 30. L. 1).

3. Leurs moitiés les $\angle$ CBA, CAB seront = aussi.

Ax. 7. L. 1.

4. Partant CA est = à CB, & par la même raison CA est = à CE, & CB = à CD.

Prop. 6. L. 1.

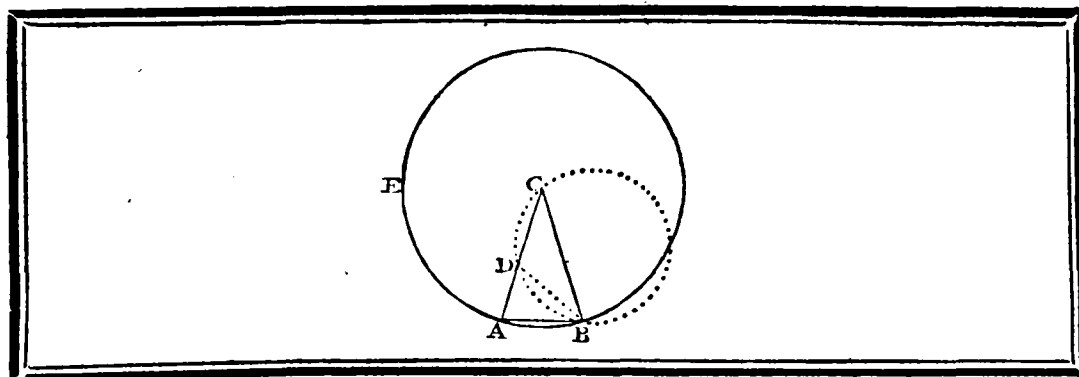
5. D'où il suit, que les droites CA, CB, CE, CD sont = entr'elles, & que le $\odot$ décrit du centre C & du rayon CA, passera aussi par les points B, D, E.

[Ax. 1. L. 1.
Def. 15. L. 1.]

6. C'est pourquoi le $\odot$ ABDE est circonscrit au quarré ABDE.

Def. 6. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION X. PROBLEME X.
Construire un triangle isoscèle (ACB); qui ait chacun des angles (CAB , CBA) sur la base (AB) double de l'angle au sommet (ACB).

DONNE.

Une ligne CA prise à volonté.

CHERCHE.

Le Δ isoscèle ACB , qui ait $\angle CAB$ ou $CBA = 2 \angle ACB$.

Résolution.

1. **T**irez donc une ligne quelconque CA .
2. Coupez cette ligne, en sorte que le Rgle de CA . AD soit $=$ au $\square$ de CD .
3. Du centre C & du rayon CA décrivez le $\odot ABE$.
4. Appliquez dans ce $\odot$ la droite $AB =$ à CD , & tirez CB .

Dem. 1.

Prop. 11. L. 2.

Dem. 3.

Prop. 1. L. 4.

Préparation.

1. **T**irez la droite DB ,
2. Et circonscrivez un $\odot$ au ΔCDB .

Dem. 1.

Prop. 5. L. 4.

DEMONSTRATION.

Puis donc que le Rgle CA . AD est $=$ au $\square$ de CD (Ref. 2), & que le $\square$ de AB est $=$ au $\square$ de CD (Ref. 4. & Prop. 46. Coroll. 3. L. 1).

1. Le Rgle CA . AD sera aussi $=$ au $\square$ de AB .
2. Partant la droite AB est tangente du $\odot CDB$:
3. D'où il suit que $\angle DBA$ est $=$ à $\angle BCD$.
 En ajoutant donc de part & d'autre $\angle DBC$,
4. L'angle ABC sera $=$ aux $\angle BCD + \angle DBC$.
 Mais $\angle BDA$ étant aussi $=$ aux $\angle BCD + \angle DBC$ (Prop. 32. L. 1).
5. L'angle BDA est donc $=$ à $\angle ABC$.
 De même, puisque CB est $=$ à CA (Ref. 4 & Def. 15. L. 1).
6. L'angle BAC est $=$ à $\angle ABC$.
7. C'est pourquoi, $\angle BDA$ est $=$ à $\angle BAC$, & DB est $=$ à AB .
 Et à cause que CD est aussi $=$ à AB (Ref. 4).
8. La droite DB sera $=$ à CD , & $\angle CBD =$ à $\angle BCD$.
 En ajoutant de part & d'autre $\angle DBA$ ou son égal $\angle BCD$ (Arg. 3).
9. Les $\angle CBD + \angle DBA$ ou $\angle CAB$ est $=$ à $2 \angle BCD$; Et on a construit un Δ isoscèle CAB , qui a chacun des $\angle$ sur la base double de $\angle$ au sommet.

Ax. 1. L. 1.

Prop. 37. L. 3.

Prop. 32. L. 3.

Ax. 2. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

Prop. 5. L. 1.

[Ax. 1. L. 1.

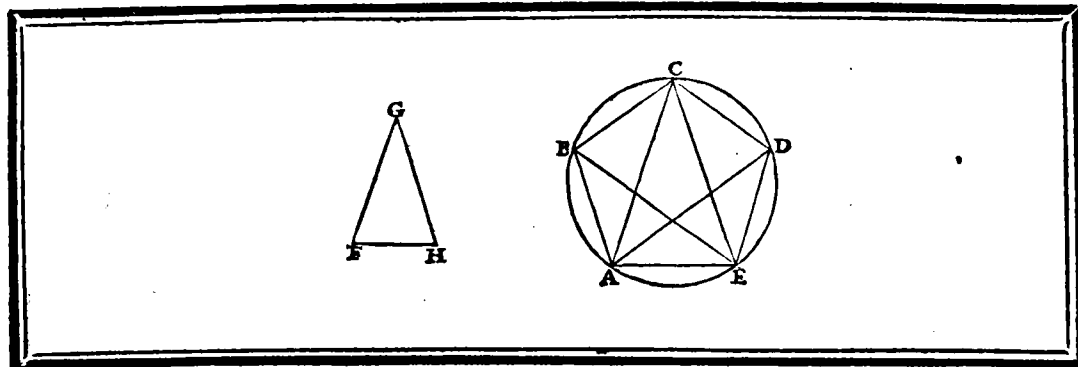
[Prop. 6. L. 1.

[Ax. 1. L. 1.

[Prop. 5. L. 1.

Ax. 2. L. 1.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. PROBLEME XI.
Dans un cercle donné (ACE); inscrire un pentagone (ABCDE) équilateral & équiangle.

DONNE.
 Le $\odot$ ACE.

CHERCHE.
 Le pentagone équilateral & équiangle ABCDE;
 qui soit inscrit dans le $\odot$ ACE.

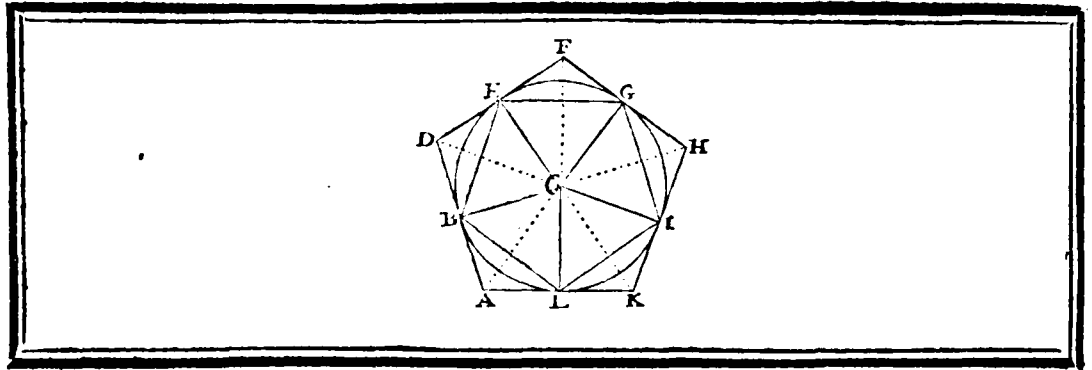
Résolution.

1. Construisez le Δ isoscèle FGH, qui ait chacun des $\angle$ à la base FH double de $\angle$ au sommet G.
 2. Inscrivez dans le $\odot$ ACE un Δ ACE équiangle au Δ FGH.
 3. Coupez les $\angle$ à la base CAE & CEA en deux également par les droites AD, EB,
 4. Et tirez les droites AB, BC, CD, DE.
- Prop. 10. L. 4.
 Prop. 2. L. 4.
 Prop. 9. L. 1.
 Dem. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque chacun des $\angle$ CAE, CEA est double de $\angle$ ACE (Ref. 1. & 2), & que ces angles sont coupés en deux également (Ref. 3).
1. Les cinq $\angle$ ACE, CAD, DAE, BEA, CEB, seront = entr'eux.
 2. D'où il suit, que les arcs AE, ED, DC, CB, BA sont = entr'eux; de même que les cordes AE, ED, DC, CB, BA.
 3. L'arc entier EABC est = à l'arc entier ABCD; & $\angle$ CDE est = à $\angle$ DEA.
 4. Chacun des $\angle$ EAB, ABC, BCD est = à $\angle$ CDE ou DEA.
 5. C'est pourquoi on a inscrit dans le $\odot$ ACE, un pentagone équilateral & équiangle (Arg. 4).
- Ax. 7. L. 1.
 Prop. 26. L. 3.
 Prop. 29. L. 3.
 Ax. 2. L. 1.
 Prop. 27. L. 3.
 Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



C PROPOSITION XII. PROBLEME XII.
 Circonscrire à un cercle donné (LEG) un pentagone (ADFHK) équilateral & équiangle.

DONNE.
 Le $\odot$ LEG.

CHERCHE.
 Le Pentagone équilateral & équiangle ADFHK,
 qui soit circonscrit au $\odot$ LEG.

Résolution.

1. Inscrivez dans le $\odot$ LEG, un pentagone équilateral & équiangle. Prop. 11. L. 4.
2. Tirez aux points B, E, G, I, L les rayons CB, CE, CG, CI, CL. Dem. 1.
3. Elevez sur les extrémités de ces rayons les $\perp$ prolongées AD, DF, FH, HK, KA. Prop. 11. L. 1.

Préparation.

Tirez les droites CA, CD, CF, CH, CK.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les droites AD, DF, FH, HK, KA sont $\perp$ à l'extrémité des rayons CB, CE, CG, CI, CL (Ref. 3).

1. Ces droites toucheront le $\odot$ au point B, E, G, I, L, } Prop. 16. L. 3.
 Et les $\angle$ DBE + DEB, FEG + FGE, HGI + HIG, KIL + KLI, } Coroll.
 ABL + ALB, pris deux à deux sont $< 2\angle$. Ax. 8. L. 1.

2. Les droites AD, DF, FH, HK, KA se rencontreront donc aux points D, F, H, K, A. } Rem. de Prop. 27. L. 1.

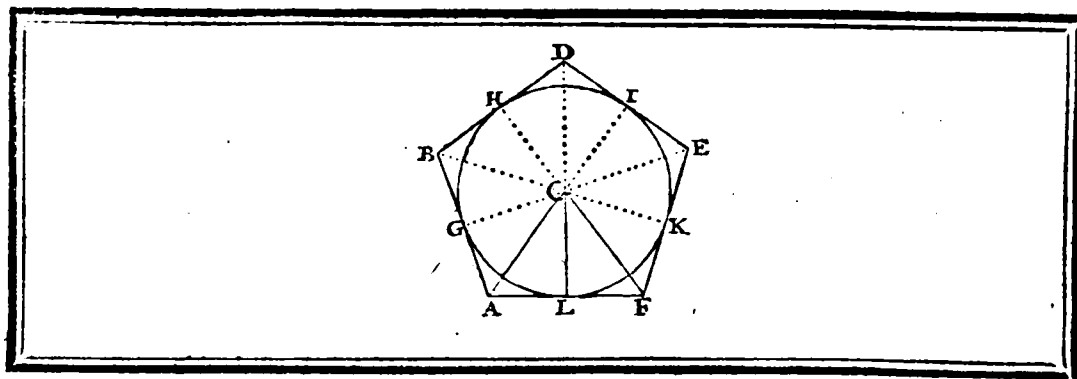
Mais, puisque dans les $\triangle$ CEF, CGF le côté FE est = au côté FG (Prop. 37. L. 3. Coroll. & Ref. 3), CE = GC (Def. 15. L. 1) & CF commun aux deux $\triangle$,

3. L'angle

3. L'angle CFE est $\equiv$ à $\angle$ CFG & $\angle$ ECF $\equiv$ à $\angle$ GCF. Prop. 8. L. 1.
4. Par conséquent, $\angle$ EFG est double de $\angle$ CFG, & $\angle$ ECG double de $\angle$ FCG; par la même raison $\angle$ GHI est double de $\angle$ CHG & $\angle$ GCI double de $\angle$ GCH.
5. De plus, $\angle$ ECG est $\equiv$ à $\angle$ GCI, à cause des arcs égaux EG, GI (Ref. 1). Prop. 28. L. 3.
6. Partant, $\angle$ FCG est $\equiv$ à $\angle$ GCH. Ax. 7. L. 1.
- Mais les $\angle$ CGF, CGH des $\triangle$ CFG, CHG étant de plus égaux (Ref. 3. & Ax. 10. L. 1) & CG commun aux deux $\triangle$,
7. La droite FG est $\equiv$ à GH & $\angle$ CFG est $\equiv$ à $\angle$ CHG. Prop. 26. L. 1.
8. C'est pourquoi FH est double de FG, & par la même raison DF est double de EF. Ax. 2. L. 1.
- Et puisque de plus la droite FG est $\equiv$ à EF (Prop. 37. L. 3. Coroll.).
9. La droite FH est aussi $\equiv$ à DF, (Ax. 6. L. 1) & les droites HK, KA, AD seront par la même raison $\equiv$ à FH ou DF.
- Derechef $\angle$ EFG ou DFH étant double de $\angle$ CFG, l'angle GHI ou FHK double de $\angle$ CHG & de plus $\angle$ CFG $\equiv$ à $\angle$ CHG (Arg. 7).
10. Les $\angle$ DFH, FHK seront $\equiv$ entr'eux, & les $\angle$ HKA, KAD, ADF sont par la même raison $\equiv$ à DFH ou FHK.
11. Partant, on a circonscrit au $\odot$ LEG un pentagone ADFHK (Arg. 1) équilatéral (Arg. 9) & équiangle (Arg. 10). Def. 4. L. 4.

C. Q. F. E.





I PROPOSITION XIII. PROBLEME XIII.
Inscrire dans un pentagone équilatéral & équiangle (ABDEF); un cercle (GHIKL).

DONNE.

Le Pentagone équilatéral & équiangle ABDEF.

CHERCHE.

Le $\odot$ GHIKL inscrit dans ce pentagone.

Résolution.

1. Coupez les deux $\angle$ BAF, AFE du pentagone ABDEF en deux également, par les droites prolongées CA, CF.
2. Du point C, où ces droites se joignent, abaissez sur AF la $\perp$ CL.
3. Du point C, comme centre & du rayon CL, décrivez le $\odot$ GHIKL.

Prop. 9. L. 1.
Prop. 12. L. 1.
Dem. 3.

Préparation.

1. Tirez les droites CB, CD, CE.
2. Du point C abaissez sur AB, BD, DE, EF les $\perp$ CG, CH, CI, CK.

Dem. 1.
Prop. 12. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les $\triangle$ ACF, ACB le côté AF est = au côté AB, le côté CA commun aux deux $\triangle$ & $\angle$ CAF = à $\angle$ CAB (Ref. 1 & donné).

1. Il s'en suit que $\angle$ CFA est = à $\angle$ CBA.
Mais $\angle$ AFE étant = $\angle$ DBA & double de $\angle$ CFA (Ref. 1).
2. Il s'en suit que $\angle$ DBA est aussi double de $\angle$ CBA; ou $\angle$ CBD = à $\angle$ CBA.
On démontrera de même, que
3. L'angle CDB est = à $\angle$ CDE, & $\angle$ CED = à $\angle$ CEF.
On a donc dans les $\triangle$ CBG, CBH, l'angle CBG = à $\angle$ CBH (Arg. 2), l'angle CGB = à $\angle$ CHB (Prop. 2 & Ax. 10. L. 1) & CB commun aux deux $\triangle$.
4. Partant, la droite CG est = à CH; & par la même raison CI, CK, CL sont = à CH ou à CG.
5. Le $\odot$ décrit du centre C & du rayon CL passera donc aussi par les points G, H, I, K.
Et parce que les droites AB, BD, DE, EF, FA sont $\perp$ à l'extrémité des rayons CG, CH, CI, CK, CL (Prop. 2 & Ref. 2).
6. Ces droites toucheront le $\odot$ GHIKL (Prop. 16. L. 3. Coroll.); & ce $\odot$ est inscrit dans le pentagone ABDEF.

Prop. 4. L. 1.

Ax. 6. L. 1.

Prop. 26. L. 1.

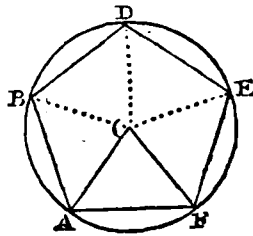
Def. 15. L. 1.

Def. 5. L. 4.

C. Q. F. F.

C O R O L L A I R E

SI les deux angles voisins (BAF, EFA) d'une figure équilatère & équiangulaire sont coupés en deux également, & que du point (C) où les droites (AC, FC), qui les coupent en deux également se rencontrent, on tire des droites (CB, CD, CE) aux angles restants de la figure, ces droites couperont aussi les angles restants en deux également.



PROPOSITION XIV. PROBLEME XIV.

Circonscrire un cercle (ADF); à un pentagone (ABDEF) équiangle & équilatéral.

DONNE.

Le pentagone ABDEF équiangle & équilatéral.

CHERCHE.

Le $\odot$ ADF circonscrit à ce pentagone.*Résolution.*

1. **C**oupez les $\angle$ BAF, AFE en deux également par les droites prolongées CA, CF.
2. Du point C, où ces droites se coupent, comme centre, & du rayon CA décrivez le $\odot$ ADF.

Prop. 9. L. 1.

Dem. 3.

Préparation.

Tirez les droites CB, CD, CE.

Dem. 1.

DEMONSTRATION.

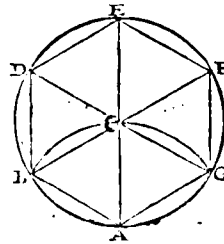
1. **L**es droites CB, CD, CE coupent donc en deux également les $\angle$ ABD, BDE, DEF,
2. Et à cause que $\angle$ BAF est $=$ à $\angle$ AFE, l'angle CAF sera aussi $=$ à $\angle$ CFA.
3. C'est pourquoi CA est $=$ à CF.
4. Chacune des droites CB, CD, CE est $=$ à CA ou à CF.
5. D'où il suit que le $\odot$ décrit du centre C & du rayon CA passera aussi par les points B, D, E, F,
6. Par conséquent le $\odot$ ADF est circonscrit au pentagone donné ABDEF.

Prop. 13. L. 4.
Coroll.

Ax. 7. L. 1.
Prop. 6. L. 2.

Def. 15. L. 1.
Def. 6. L. 4.

C. Q. F.F.



PROPOSITION XV. PROBLEME XV.
Inscrire un Hexagone (ABDEFG) équilateral & équiangle ; dans un cercle donné (BEG).

DONNE.
 Le $\odot$ BEG.

CHERCHE.
 L'Hexagone équilateral & équiangle ABDEFG,
 inscrit dans le $\odot$ BEG.

Résolution.

1. Cherchez le centre C du $\odot$ BEG, & tirez un diamètre quelconque AE.
2. Du point A comme centre, & du rayon AC décrivez l'arc de $\odot$ BCG.
3. Tirez les rayons CG, CB prolongés en D & F.
4. Tirez les droites AB, BD, DE, EF, FG, GA.

Prop. 1. L. 3.

Dem. 3.
 Dem. 1 & 2.
 Dem. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque dans le $\triangle$ BCA, le côté BC est $\equiv$ au côté AC, & AB $\equiv$ aussi à AC (Ref. 3. & Def. 15. L. 1).

1. Ce $\triangle$ est équilateral & équiangle.
2. C'est pourquoi, $\angle$ BCA est $\equiv$ à la troisieme partie de $2\angle$, & par la même raison $\angle$ ACG est aussi $\equiv$ à la troisieme partie de $2\angle$.
 Mais les $\angle$ BCA + ACG + GCF étant $\equiv$ à $2\angle$ (Prop. 13. L. 1).
3. L'angle GCF sera aussi $\equiv$ à la troisieme partie de $2\angle$; & les $\angle$ BCA, ACG, GCF sont $\equiv$ entr'eux.
4. Par conséquent, les $\angle$ FCE, ECD, DCB, qui les égalent comme leurs opposés au sommet, sont aussi $\equiv$ entr'eux.
5. Partant, les arcs BA, AG, GF, FE, ED, DB sont $\equiv$ entr'eux, de même que les cordes BA, AG, GF, FE, ED, DB.
6. L'Hexagone ABDEFG, inscrit dans le $\odot$ BEG, est donc équilateral.
 De plus l'arc BA étant $\equiv$ à l'arc ED (Arg. 5); si on ajoute l'arc commun AGFE.
7. L'arc BAGFE sera $\equiv$ à l'arc AGFED.
8. D'où il suit, que $\angle$ EDB est $\equiv$ à $\angle$ DBA; & par la même raison, chacun des $\angle$ FED, GFE, AGF est $\equiv$ à $\angle$ EDB ou à $\angle$ DBA.
9. L'Hexagone équilateral ABDEFG, inscrit dans le $\odot$ BEG, est donc aussi équiangle.

Def. 24. L. 1.
 Prop. 5. L. 1.

Prop. 32. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

Prop. 15. L. 1.

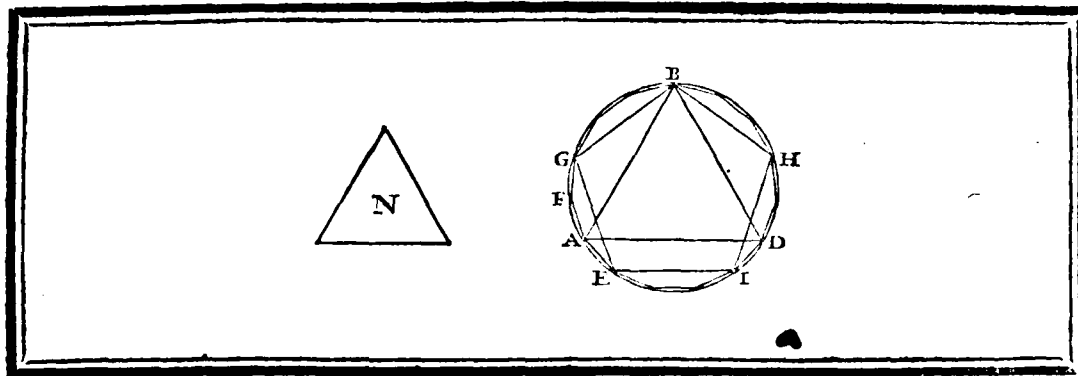
Prop. 26. L. 3.
 Prop. 29. L. 3.

Ax. 2. L. 1.

Prop. 27. L. 3.

Def. 3. L. 4.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XVI. PROBLEME XVI.
Inscrire un quindécagone (EAFG &c.) équilateral & équiangle, dans un cercle donné (EBI).

DONNE.

Le $\odot$ EBI.

CHERCHE.

Le quindécagone équilateral & équiangle EAFG &c.

Résolution.

1. Construisez un Δ équilateral N. Prop. 1. L. 1.
2. Inscrivez dans le $\odot$ EBI un Δ ABD équiangle au Δ équilateral N. Prop. 2. L. 4.
3. Et un pentagone équilateral & équiangle EGBHI. Prop. 11. L. 4.
4. Tirez la corde AE, & appliquez la 15 fois de suite, dans le $\odot$ EBI. Prop. 1. L. 4.

DEMONSTRATION.

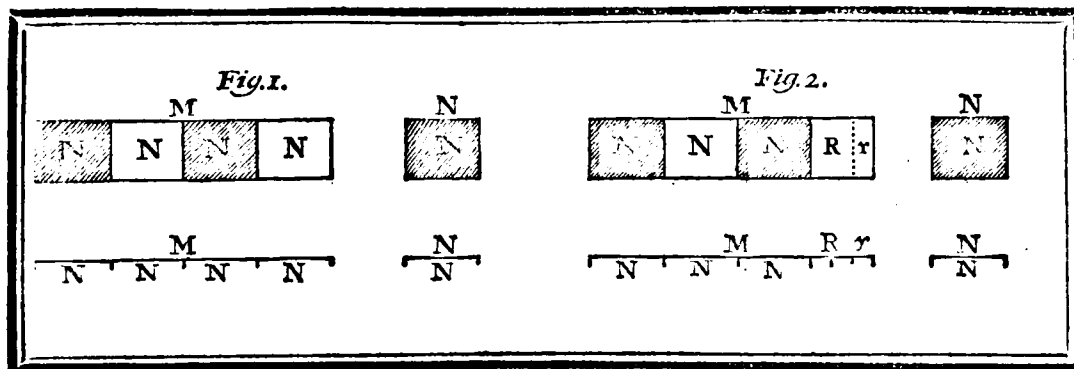
Puisque le Δ ABD est équiangle à un Δ équilateral N (Ref. 2).

1. Ce Δ est aussi équilateral, ou AD est $\equiv$ à AB $\equiv$ à BD, Prop. 6. L. 1.
2. Et les arcs AD, AB, BD sont $\equiv$ entr'eux, ou chacun est la troisième partie de la $\odot$ entiere. Prop. 28. L. 3.
- Derechef, à cause que le pentagone EGBHI est équilateral, (Ref. 3).
3. Chacun des arcs EG, GB, BH, HI, IE est la cinquième partie de la $\odot$ entiere. Prop. 28. L. 3.
- Mais l'arc AB étant la troisième partie (Arg. 2), & l'arc EG ou GB chacun la cinquième partie de la $\odot$ (Arg. 3).
4. On peut appliquer dans l'arc AB cinq côtés du quindécagone, & dans chacun des arcs EG, GB trois côtés du quindécagone, ou dans l'arc EGB six côtés du quindécagone.
5. Partant, on pourra appliquer un de ces côtés dans l'arc AE, & le quindécagone équilateral EAFG &c. sera inscrit au $\odot$ EBI. Def. 3. L. 4.
- De plus, puisque chacun de ses $\angle$ FAE s'appuie sur un arc FHE qui est $\equiv$ à treize quinziesmes parties de la circonference,
6. Ces angles seront tous $\equiv$ entr'eux. Prop. 27. L. 3.
7. On a donc inscrit dans le $\odot$ EBI, un quindécagone EAFG, équilateral & équiangle.

C. Q. F. F.



LES
ELEMENTS
D'EUCLIDE,
LIVRE CINQUIEME.



D E F I N I T I O N S.

I.

ON appelle *partie*, une moindre grandeur qui en mesure une plus grande.

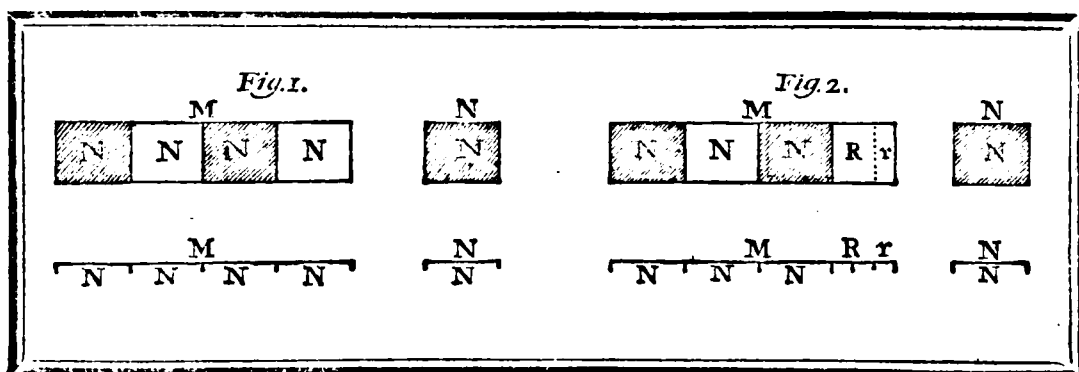
§. 1. Par l'expression *mesurer une grandeur*, Euclide entend, s'y trouver contenu un certain nombre de fois sans reste, c. à. d. une moindre grandeur N (Fig. 1.) en mesure une plus grande M , lorsque la grandeur N est contenue dans M sans reste deux, trois, quatre, & en général tant de fois qu'on voudra; ou, ce qui revient au même, lorsque la moindre grandeur N répétée deux, trois, quatre, & en général tant de fois qu'on voudra, produit un Tout égal à la plus grande M .

§. 2. Les modernes nomment ces sortes de parties, qui mesurent le Tout sans reste, des parties aliquotes; donnant le nom de parties aliquantes à celles qui ne peuvent mesurer le Tout qu'avec un reste; tandis qu'une autre quantité déterminée peut les mesurer exactement, aussi bien que le Tout.

Ainsi les nombres 2, 3, 4, 6 sont autant de parties aliquotes du nombre 12 considéré comme un Tout; attendu que chacun des nombres 2, 3, 4, 6 se trouve répété dans 12 un certain nombre de fois sans reste. Au contraire les nombres 5, 7, 9 &c. sont des parties aliquantes du même Tout 12; car ces nombres ne mesurent 12 qu'avec un reste: quoiqu'ils puissent tous être mesurés par l'unité, aussi bien que 12; ce qui réussit souvent avec d'autres nombres différens de l'unité: comme dans le cas du nombre 9, qui est commensurable au nombre 12 par le nombre 3, aussi bien que par l'unité.

De même la grandeur N (Fig. 2) est une partie aliquante de la grandeur M ($= N + N + N + R$ &c.), si N mesure M en laissant un reste R ; bien entendu néanmoins que ce reste R soit tel, qu'il mesure lui-même, la grandeur N , ou du moins, qu'une de ses parties déterminée r mesure ce reste R de même que la grandeur N , & par conséquent aussi toute la grandeur M ; autrement N ne seroit point une partie aliquante de M , mais une partie incommensurable.

§. 3. On appelle en général nombre commensurable, celui qui peut résulter de l'unité, ou d'une de ses parties aliquotes répétée un nombre de fois déterminé: Ou, ce qui revient au même, celui qui peut être mesuré par l'unité, ou une de ses parties aliquotes. Ainsi les nombres.



D E F I N I T I O N S .

nombre 6, 9, 17, & les fractionnaires $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ sont des nombres commensurables ; puisque les premiers peuvent résulter de l'addition successive & déterminée de l'unité ; & les derniers de celle des fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{7}$, parties aliquotes de l'unité.

§ 4. Conformément à cette définition, on appelle quantité commensurable, celle qui résulte de la répétition déterminée d'une quantité déterminée quelconque. Une quantité est donc commensurable, quand elle contient une de ses parties, autant de fois qu'un nombre déterminé contient l'unité.

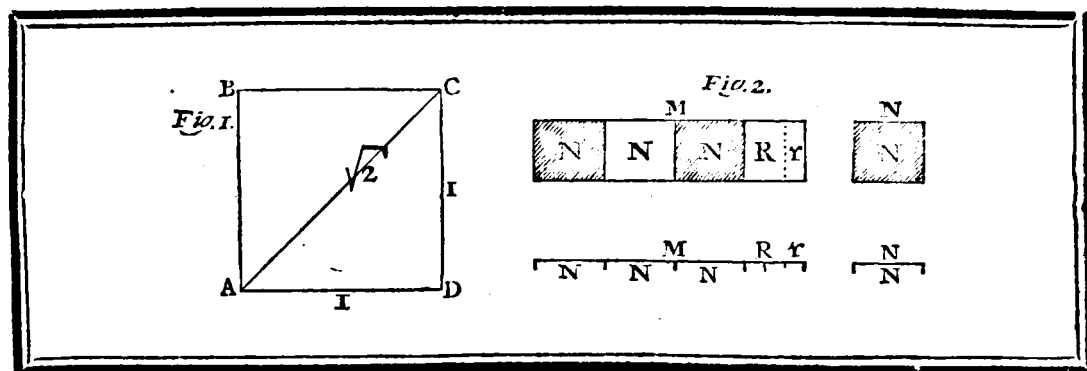
§ 5. La commensurabilité est donc quelque chose de relatif. Les grandeurs M & N sont commensurables entant qu'une mesure commune & déterminée r, qu'on est autorisé à prendre pour unité, peut les mesurer toutes les deux exactement ; ou entant que ces deux grandeurs peuvent naître de la répétition déterminée de la même quantité r, quelle qu'elle puisse être.

§ 6. Il suit de cette notion des nombres commensurables, qu'ils sont tous ou des multiples les uns des autres, ou des parties aliquotes, ou bien des parties aliquantes. Car si les quantités M & N sont commensurables, N mesure M, ou M mesure N, ou un autre nombre déterminé r les mesure toutes deux. Dans le premier Cas, le nombre M est un multiple de N ; dans le second Cas M est une partie aliquote de N ; & dans le troisième, le plus petit des deux est une partie aliquante du plus grand. La même chose est vraie des grandeurs rationnelles en général.

§ 7. Le nombre, qui ne peut résulter de la répétition déterminée de l'unité ou d'une de ses parties aliquotes, est appelé irrationnel ou incommensurable relativement à l'unité. Et en général, les grandeurs, qui ne peuvent naître de la répétition déterminée d'une même quantité déterminée considérée comme unité, sont incommensurables entr'elles, ou irrationnelles. Ainsi la racine quarrée du nombre 2 fait un nombre incommensurable à l'unité ; car

$$\sqrt{2} \text{ est } = \text{à } 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100000} \text{ \&c. \& ainsi à l'infini.}$$

Tellement qu'il est impossible de trouver une partie aliquote, qui ajoutée à elle même un nombre de



D E F I N I T I O N S.

de fois déterminé, reproduise l'unité, & qui ajoutée à elle même un autre nombre de fois déterminé, fasse en même tems naître la racine quarrée du nombre 2. Puis donc que la diagonale (AC) du quarré (ABCD) représente la racine quarrée du nombre deux, le côté (AD ou DC) du quarré étant pris pour unité; on voit que la diagonale d'un quarré est incommensurable à son côté (Fig. 1).

§. 8. Il suit de-là, que si deux grandeurs M & N sont incommensurables, M ne peut-être ni un multiple de N, ni une partie aliquote, ni enfin une partie aliquante de ce même N. Car supposant le contraire, il arriveroit nécessairement, que les grandeurs M & N pourroient être mesurées, par une même grandeur déterminée, représentative de l'unité; ce qui repugne à l'hypothèse de l'incommensurabilité (Fig. 2).

Au reste quand Euclide parle de parties dans ce Cinquième Livre, il entend toujours des parties aliquotes, conformément à cette définition. Il n'explique les parties aliquantes que dans la IV^e Définition du VII^e Livre.

I I.

Une grandeur plus grande est nommée un multiple d'une moindre; lorsque la moindre peut mesurer la plus grande.

Ainsi le nombre 12 est dit être un multiple du nombre 4; parceque 4 mesure 12 sans reste.

Au terme de multiple répond celui de sousmultiple, qui désigne qu'une moindre grandeur est une partie aliquote d'une plus grande; ainsi 4 est un sousmultiple de 12, comme 12 est un multiple de 4.

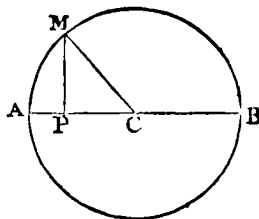
I I I.

La Raison est une certaine relation mutuelle de deux grandeurs homogènes, comparées l'une à l'autre selon leur quantité.

Cette définition est incomplète, à moins qu'on ne soit disposé à la sauver au moyen d'une interprétation convenable du terme κατά πηλικότητα selon la quantité ou selon la quantuplicité, terme qu'Euclide n'a point défini.

Y

§. I.



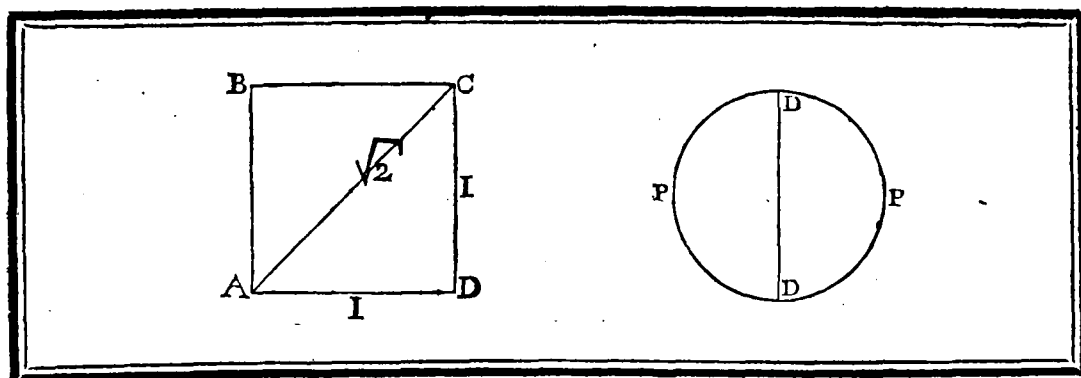
D E F I N I T I O N S .

§. 1. L'idée de la raison enveloppe sans doute une certaine relation des quantités de deux grandeurs homogènes ; mais ce caractère général ne suffit pas ; vu que les quantités de deux grandeurs homogènes sont susceptibles de plusieurs sortes de relations, différentes de celle de la raison. Ainsi ; lorsque dans un cercle AMB on se représente le quarré de la perpendiculaire PM comme constamment égal à la différence des quarrés du rayon MC, & de la portion du rayon PC, c. à. d. $\overline{PM}^2 = \overline{MC}^2$ moins $\overline{PC}^2$, on considère sans doute une certaine relation des grandeurs homogènes PM, PC. Cependant il est manifeste que cette relation n'est point une raison, attendu que la comparaison des quantités ne se fait, qu'au moyen du rayon MC, qui est une troisième grandeur homogène, prise hors des quantités PM, PC qu'on compare. La même chose a lieu dans toutes les especes de relations, qu'on représente en Algèbre par des Equations.

§. 2. Les quantités homogènes pouvant donc être rapportées les unes aux autres de plusieurs manieres différentes, il faut spécifier plus particulièrement la relation qui constitue le caractère distinctif de la raison. Voici comment Mr. Leibnitz, à qui on est redevable de cette remarque, définit la raison ; La relation qui a lieu entre deux grandeurs homogènes, lorsqu'on fait servir la quantité de l'une à déterminer la quantité de l'autre, indépendamment de toute autre troisième grandeur homogène quelconque. Cette définition caractérise la raison parce qu'elle a de plus essentiel. Une raison a lieu, lorsque comparant deux grandeurs homogènes A & B, qu'on nomme termes, la quantité de l'un des termes B, prise pour mesure connue & fixée, sert à déterminer la quantité de l'autre terme homogène A. Il existe par conséquent une raison entre les grandeurs homogènes A & B, entant que la quantité du terme B, prise pour unité ou mesure, suffit à faire connoître la quantité du terme A, sans qu'il soit besoin de faire entrer dans la détermination une autre grandeur quelconque, qui ne résulte point de la comparaison des deux termes A & B. D'où l'on voit, que la raison est la plus simple de toutes les relations.

§. 3. Une raison est rationnelle ou commensurable, lorsque les termes de la raison M & N sont des grandeurs commensurables entr'elles ; & la raison est nommée incommensurable, lorsque ces mêmes termes se trouvent dans le cas de l'incommensurabilité l'une à l'égard de l'autre. (§. 6. & 7. Def. 1).

Les



D E F I N I T I O N S.

Les raisons qui ont lieu entre les nombres 3 & 7 ou 8 & 11 &c. sont des raisons rationnelles, & au contraire celles qui subsistent entre les nombres 1 & $\sqrt{2}$, 3 & $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ & $\sqrt{5}$ sont autant de raisons incommensurables.

§. 4. L'antécédent d'une raison M à N est le premier des deux termes qu'on compare, & l'autre est nommé son conséquent.

De plus on représente la raison, qui se trouve entre deux grandeurs M & son conséquent N, en cette manière.

M : N Caractéristique qu'on énonce, la raison de l'antécédant M au conséquent N; ou simplement la raison de M à N.

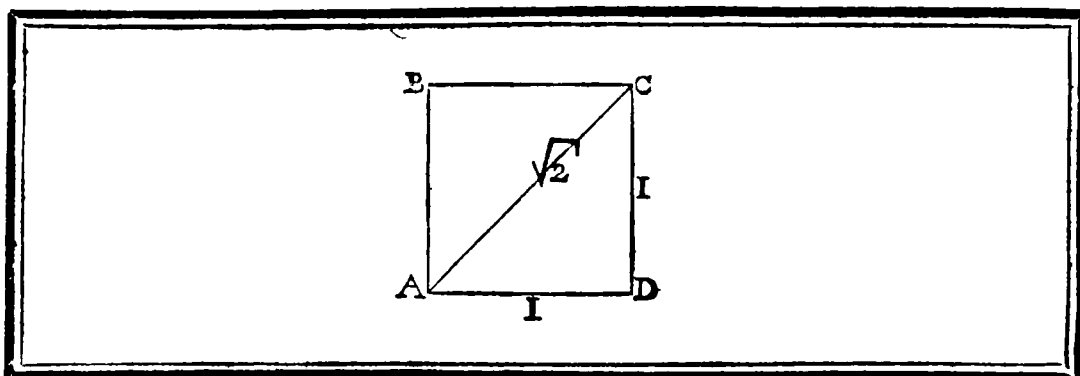
§. 5. On appelle exposant de la raison, le quotient qui résulte de la division de l'antécédent M par son conséquent homogène N. Ainsi l'exposant de la raison 6 : 2 est $\frac{6}{2} = 3$; celui de la raison 5 : 7 est $\frac{5}{7}$. On donne à ce quotient le nom d'exposant, parcequ'il expose combien de fois le conséquent contient son antécédent, ou qu'il y est contenu.

§. 6. Les raisons incommensurables ont des exposants, entant qu'on généralise la notion de la division, & qu'on soumet les quantités incommensurables à ses opérations; ce qui peut se faire. Car quoiqu'on ne puisse diviser effectivement 1 par $\sqrt{2}$; on peut cependant représenter le résultat de cette division arithmétiquement, sous la forme de la fraction $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $1 : \sqrt{2}$, (qu'on énonce un divisé par racine de deux), que la Géométrie fait exprimer par des lignes.

Ainsi elle représente l'expression $1 : \sqrt{2}$, par le rapport du côté (AB) à la diagonale (AC) du carré.

§. 7. Il y a donc des exposants rationnels & d'irracionnels, selon que les termes de la raison sont de l'un ou de l'autre genre. En général, de quelque nature que puissent être les grandeurs qui forment la raison, on représentera toujours son exposant sous la forme d'une fraction, où l'antécédent devient le numérateur & le conséquent le dénominateur.

Conformément à ce principe, l'exposant de la raison qu'il y a entre le diamètre D & la circonférence P, sera représenté par la fraction $\frac{D}{P}$ c. à. d. D divisé par P.



D E F I N I T I O N S.

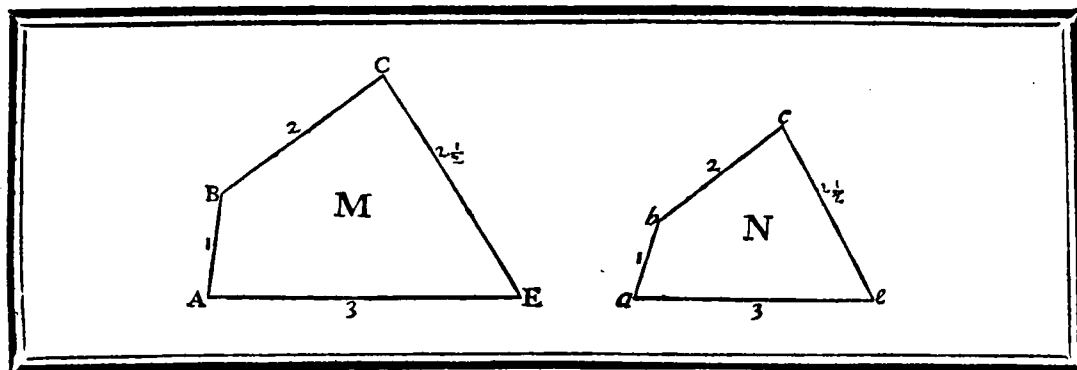
§. 8. La définition de l'exposant donne à connoître qu'il règne une correspondance intime, ou plutôt une identité, entre les raisons & les fractions. Car les unes aussi bien que les autres supposent la division de la quantité en parties soit rationnelles, soit irrationnelles; pourvu qu'on se forme une notion plus générale de la division, qui soit applicable aux quantités non-rationnelles. Une fraction n'est autre chose qu'une Partie qui se rapporte au Tout, comme le numérateur au dénominateur, & par-là elle représente en même tems une raison. La fraction ($\frac{2}{3}$) deux tiers par exemple, signifie deux parties d'un Tout partagé en trois parties. Or deux parties sont visiblement à trois parties (c. à. d. au Tout représenté par l'unité) comme le nombre deux est au nombre trois. Par conséquent la raison de $\frac{2}{3}$: 1 est la même que la raison 2 : 3, & il n'y a d'autre différence, sinon que dans le premier cas la raison est exprimée par la comparaison d'une partie à l'unité, & dans le second par celle d'un nombre entier à un autre nombre entier.

De la même manière, lorsqu'on affirme que le côté (AB) du quarré est $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la diagonale (AC); on ne dit autre chose, sinon, que le côté du quarré considéré comme partie, se rapporte à la diagonale considérée comme unité & Tout, de la même manière, que l'unité se rapporte à la racine quarrée du nombre 2.

§. 9. Cette conformité de la fraction & de la raison, a engagé Mr. Leibnitz à les représenter l'une & l'autre par le même signe; tellement qu'en voyant 2 : 3, on peut dire, la raison du nombre 2 au nombre 3, ou bien la fraction deux tiers, ou ce qui revient au même, deux divisé par trois.

§. 10. Ces principes faisant voir que l'exposant d'une raison (2 : 3) se rapporte à l'unité de la même manière que l'antécédent (2) se rapporte à son conséquent (3), ou bien le numérateur (2) à son dénominateur (3); il est clair qu'une raison est déterminée par son exposant; & que les raisons sont égales ou les mêmes, lorsque leurs exposans sont les mêmes. Par ex. La raison de 6 : 2 est la même que la raison de 24 : 8; parceque l'exposant 6 : 2 (6 divisé par 2), est égal à l'exposant 24 : 8 (24 divisé par 8).

§. 11. Comme les raisons qui ont les mêmes exposans sont égales; celles qui ont des exposans différens doivent être nommées inégales: & en particulier, une raison plus grande est celle.



D E F I N I T I O N S.

celle dont l'exposant est plus grand, & une raison plus petite celle dont l'exposant est moindre.

La raison de $7:3$ est $>$ la raison de $7:4$ parceque sept tiers est une plus grande quantité que sept quarts.

§. 12. Deux raisons égales s'appellent une proportion. Selon Mr. Leibnitz on l'exprime au moyen du signe d'égalité, de cette manière

$$6 : 2 = 24 : 8.$$

Caractéristique qu'on peut énoncer, la raison de 6 à 2 est égale à la raison de 24 à 8 ; ou bien, 6 est à 2 comme 24 est à 8. Et puisque $6:2$ représente aussi une fraction, la même expression peut-être expliquée ainsi. L'exposant (6 divisé par 2) de la première raison est égal à l'exposant (24 divisé par 8) de la seconde raison.

§. 13. On nomme semblables des sujets dont les déterminations intrinsèques sont les mêmes, autant qu'il est possible d'en juger par ce qu'on trouve dans le sujet même, sans employer des moyens de comparaison externes.

La similitude supposant donc une parfaite identité à l'égard de toutes les déterminations qui se trouvent dans le sujet, & une abstraction totale de toutes celles qu'on ne rencontre que hors du sujet ; on ne conçoit dans les sujets semblables qu'une grandeur relative, cela veut dire, une grandeur qui se rapporte à une mesure ou unité prise dans le sujet même qu'on considère comme semblable à un autre.

Ainsi deux figures M & N sont semblables, quand elles n'offrent aucune différence, ni dans la forme des lignes qui en sont les limites, ni dans leur nombre, ni dans leur inclinaison, ni enfin dans leur grandeur relative, c. à d. dans cette grandeur qu'on assigneroit à leurs différentes parties, en les rapportant à des grandeurs intrinsèques correspondantes, comme à des unités.

Par ex. Si prenant dans la figure M le côté AB pour unité on trouve

$$BC = 2, \quad CE = 2\frac{1}{2}, \quad AE = 3.$$

On trouvera pareillement dans la figure N

$$bc = 2, \quad ce = 2\frac{1}{2}, \quad ae = 3$$

pourvu qu'on prenne pour unité le côté ab, qui correspond au côté AB.

Y 3

§. 14.

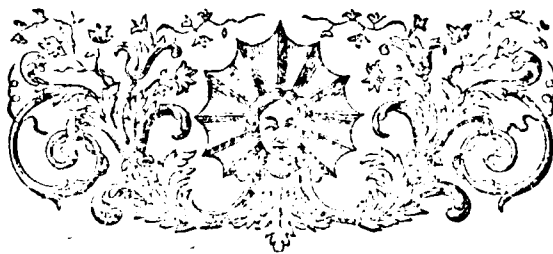
D E F I N I T I O N S.

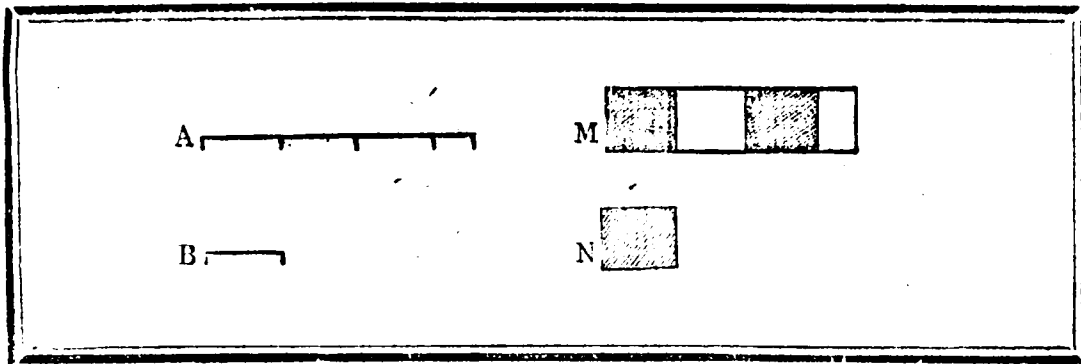
§. 14. Une raison est donc semblable à une autre raison ; lorsque leur grandeur relative est la même , ou bien lorsque leurs exposans sont identiques. Car hors des exposans ces sujets ne présentant à l'Esprit aucune autre détermination intrinsèque ; ils ne peuvent manquer d'être parfaitement semblables , aussitôt que ces exposans sont les mêmes.

§. 15. Les raisons égales sont donc en même tems des raisons semblables. Par conséquent puisque la proportionnalité consiste dans l'égalité des deux raisons , qui se trouvent entre le premier & le second terme , & entre le troisième & le quatrième ; on est fondé à définir la Proportion par une similitude de deux raisons.

§. 16. C'est cette égalité des exposans , que les Géomètres modernes ont embrassée comme le caractère distinctif de la proportionnalité , qu'ils ont mis à la place de celui que propose Euclide dans la Ve. Définition de ce Livre , & dont ils déduisent avec une grande facilité toute la doctrine des proportions , au moyen de l'Arithmétique numérique & littérale ; entant que cette science si fort amplifiée aujourd'hui , manie avec la même facilité les quantités entières , fractionnaires & irrationnelles. En effet , l'Arithmétique , celle surtout qui emploie des Lettres plutôt que des nombres , est très propre à expliquer les affections générales des quantités. C'est sa nature de représenter des quantités dénuées de toutes ces déterminations particulières , qui ne doivent pas être prises en considération , & de nous montrer leurs affections & leurs rapports dans la plus grande généralité. Les lignes ne remplissent pas si bien ce but , que les caractères : néanmoins les Géomètres anciens n'ont pas laissé d'employer des lignes pour expliquer la doctrine des proportions. N'ayant aucune idée sur le calcul littéral que nous avons aujourd'hui , ne connoissant pas même les avantages d'une caractéristique numérique semblable à la nôtre , & regardant d'ailleurs l'unité comme le plus petit nombre , ils ne pouvoient guères faire autrement , que de se renfermer dans l'Arithmétique des entiers , sans pouvoir toucher à celle des fractions & des irrationnels. C'est - là , ce qui les a obligé d'expliquer par des lignes , leurs raisonnemens abstraits sur la proportionnalité en général. Mais s'il se trouve quelque inconvénient dans cette méthode , elle donne l'avantage réel , qu'on peut s'instruire de la doctrine des proportions , sans savoir les règles du Calcul littéral & même l'Arithmétique ; avantage qui peut faire plaisir aux Commengans.

C'est pour cette raison que nous n'avons pas voulu abandonner cette méthode ; contens d'avoir fait connoître la marche des Auteurs modernes , nous tâcherons de repandre du jour sur celle d'Euclide , afin qu'un lecteur médiocrement attentif puisse le suivre , sans le secours des principes d'une autre science.





D E F I N I T I O N S.

VI.

Deux grandeurs sont dites avoir une raison l'une à l'autre ; lorsqu'il est possible, qu'un multiple de la plus petite, égale ou surpasse la plus grande.

§. 1. Il y a raison entre les lignes A & B ; parceque la ligne B, par .ex. prise trois fois & demi, égale la ligne A, & prise quatre fois, la surpasse. Il y a pareillement une raison entre les Rgles M & N ; parceque le Rgle N pris trois fois & demi, égale le Rgle M, & que pris un plus grand nombre de fois, il le surpasse.

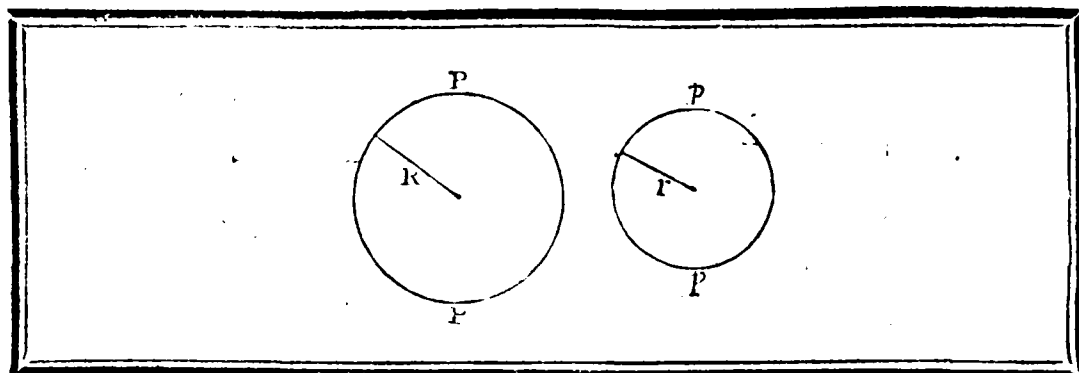
Au contraire, il n'y a pas de raison entre la ligne B & le Rgle M, attendu que la ligne B, répétée tant de fois qu'on voudra, ne peut jamais produire une grandeur qui égale ou qui surpasse le Rgle M. La raison ne peut donc avoir lieu, qu'autant qu'on compare des grandeurs homogènes ou du même genre, c. à. d. des nombres à des nombres, des lignes à des lignes, des surfaces à des surfaces, & des solides à des solides.

§. 2. En vertu de cette définition, il n'y a point de raison entre une grandeur finie & une infinie, encore qu'on les suppose de même genre. Car une grandeur conçue infinie, est conçue sans limites ; par conséquent une grandeur finie répétée tant de fois que l'on voudra, (pourvu que le nombre des répétitions soit déterminé) ne peut jamais parvenir, ni à égaler, ni à surpasser une telle grandeur infinie.

V.

On dit que des grandeurs sont en même raison la première à la seconde & la troisième à la quatrième : lorsque des équimultiples quelconques de la première & de la troisième, comparés à d'autres équimultiples quelconques de la seconde & de la quatrième, chacun à chacun (c. à. d. le multiple du I terme à celui du II, & le multiple du III terme à celui du IV.) se trouvent constamment ou plus grands, ou égaux, ou plus petits, de part & d'autre, selon quelque multiplication que ce puisse être.

§. 1. Euclide voulant décrire dans cette définition un caractère général de la proportionnalité



D E F I N I T I O N S.

de quatre grandeurs, s'arrête à celui qu'offrent les équi-multiples des antécédens, comparés à des équi-multiples des conséquens. Et il prévient des termes qu'il emploiera dans la suite, en disant qu'il nommera grandeurs proportionnelles ou en même raison, celles dont les équi-multiples ont une telle correspondance constante entr'eux, que les équi-multiples des antécédens, sont toujours à la fois ou plus grands, ou égaux, ou plus petits, que les équi-multiples des conséquens, comparés chacun à chacun, selon quelque multiplication que ce puisse être.

§. 2. Il suppose tacitement, qu'on lui accorde, qu'il y a en effet des grandeurs douées de cette correspondance des multiples, apparemment, parcequ'il a cru qu'on pouvoit s'en assurer aisément par la seule inspection de toutes les figures semblables. En effet, un rayon (r) par ex. étant à sa circonférence (p), comme un autre rayon (R) à la sienne (P), il est assez manifeste, que si le triple du premier rayon (r) est moindre que sa circonférence (p), le triple du second rayon (R) sera aussi moindre que la sienne (P). Item, que si le quadruple du premier rayon (r) est plus grand que sa circonférence (p): le quadruple du second rayon (R) sera aussi plus grand que la sienne (P). Et l'on voit que la même chose est vraie de tous les autres équi-multiples qu'on pourra prendre, soit des rayons, soit des circonférences. Les exemples numériques font voir pareillement, qu'il y a des grandeurs douées de la propriété énoncée dans la définition. Par ex. Les nombres 2 & 6 item 8 & 24, sont quatre grandeurs dans le cas de cette correspondance. Car si l'on multiplie les deux antécédens 2 & 8 par un même nombre quelconque M , & les deux conséquens 6 & 24, par un autre nombre quelconque N ; le multiple 2 M du premier antécédent, ne sauroit être $=$, ou $>$, ou $<$ que le multiple 6 N de son conséquent, sans que le multiple du second antécédent 8 M , ne soit en même tems $=$, ou $>$, ou $<$ que le multiple 24 N de son conséquent. Car il est évident

$$\begin{array}{ll}
 \text{Si } 2M \text{ est} & = \text{à } 6N, \\
 2M + 2M + 2M + 2M \text{ est aussi} & = \text{à } 6N + 6N + 6N + 6N. \text{ c. à. d. } 8M = 24N. \\
 \text{Item} \quad \text{Si } 2M \text{ est} & > 6N, \text{ alors} \\
 2M + 2M + 2M + 2M \text{ est aussi} & > 6N + 6N + 6N + 6N. \text{ c. à. d. } 8M > 24N. \\
 \text{\& enfin} \quad \text{Si } 2M \text{ est} & < 6N, \text{ alors} \\
 2M + 2M + 2M + 2M \text{ est aussi} & < 6N + 6N + 6N + 6N. \text{ c. à. d. } 8M < 24N.
 \end{array}$$

Cela

D E F I N I T I O N S.

Cela étant ainsi, on doit dire, selon Euclide, que la raison du nombre 2 au nombre 6, est la même que celle du nombre 8 au nombre 24; ou bien, que les quatre nombres 2, 6, 8, 24 sont proportionnels (voyez la Def. VI).

§. 3. Au contraire les nombres 2 & 3, item 7 & 8, n'ayant pas cette propriété, ne doivent point recevoir la même dénomination. Car si l'on multiplie les antécédens par 3, & les conséquens par 2, il en résulte les quatre multiples 6, 6, 21, 16; où le multiple 6 du 1 antécédent est égal au multiple 6 de son conséquent; sans que 21, multiple du 11 antécédent, soit égal à 16 multiple de son conséquent. D'où il suit que 2 & 3, item 7 & 8, ne doivent point être appelés des nombres en même raison; ni tous les quatre, des nombres proportionnels. C'est là le sens de cette Définition, qui a si fort embarrassé les Commentateurs, que plusieurs ont cru devoir lui substituer la XX du VII Livre, relative à la proportionnalité des seuls nombres rationnels, qui paroit plus simple: sçavoir, que quatre nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second, ou la même partie soit aliquote soit aliquante, que le troisième est du quatrième.

Nous allons faire quelques remarques, qui serviront à lever ces difficultés.

§. 4. On suppose qu'Euclide n'a pas jugé convenable de se servir de cette Définition de la proportionnalité du VII Livre, parcequ'il avoit en vû d'établir dans le V la doctrine générale des proportions pour toutes sortes de grandeurs, tant rationnelles, qu'irrrationnelles, & même celles dont le rapport est jusques ici inexprimable en nombres, tel que celui du diamètre à la circonférence. En effet, personne ne doutant que la proportionnalité ne puisse subsister entre des grandeurs incommensurables, & même celles dont le rapport échappe aux nombres finis, puisqu'elle a lieu entre les côtés de tous les quarrés & leurs diagonales, les diamètres de tous les cercles & leurs circonférences, l'Elémentateur auroit eu tort de fonder cette Théorie sur une Définition particulière, relative aux seules grandeurs rationnelles, vû que ces sortes de grandeurs ne sont ni des multiples les unes des autres, ni des parties aliquotes, ni des parties aliquantes. Son dessein exigeant donc une propriété plus générale de la proportionnalité, il lui a plu de choisir celle de la correspondance des équi-multiples, comme applicable, à toutes les grandeurs proportionnelles de quelque nature qu'elles puissent être; réservant la Définition citée du VII Livre pour la seule doctrine des nombres rationnels, qui sont dans le cas d'être toujours ou des multiples les uns des autres, ou des parties aliquotes, ou des parties aliquantes.

§. 5. Pour ce qui est du principe de cette V Définition, on ne peut douter qu'Euclide ne l'ait tiré de la considération de la similitude & de ses propriétés, au moins si la VIII Définition est de lui, laquelle dit en propres termes que la proportion consiste dans la similitude des raisons. On ne pouvoit rencontrer plus heureusement: la notion de la similitude est la véritable source où il faut puiser les principes généraux sur la proportionnalité. Il seroit aisé de le faire voir, si c'étoit ici le lieu de développer cette notion dans toute son étendue. Nous nous dispensons d'entrer dans ce détail. On sent assez, par la seule idée confuse de la similitude, que les proportions résultent de la comparaison des grandeurs correspondantes qui résident dans les figures semblables, ou plus généralement, dans les Sujets, dans

D E F I N I T I O N S.

les Etres semblables. Il y a proportion entre les côtés de tous les quarrés & leurs diagonales ; entre tous les diamètres & leurs circonférences : pourquoi ? Sans doute , parceque tous les quarrés & tous les cercles sont des figures semblables. De même il y a proportion entre les quatre termes de deux raisons , parceque ces raisons forment deux sujets semblables , où les antécédens & les conséquens se correspondent , comme dans le cas particulier de deux cercles , les rayons correspondent aux circonférences ; ou dans celui de deux quarrés , les côtés aux diagonales.

§. 6. Si Euclide avoit eu une notion distincte de la similitude , & qu'il eût voulu remonter aux premières sources métaphysiques pour en déduire la doctrine de la proportionalité , il auroit pu se contenter de la Définition VIII , qui fait consister la proportion dans la similitude des raisons. En suivant cette route , les V & VI Définitions devenoient des axiomes , ou des théorèmes préliminaires , démontrables de quelques vérités générales plus simples , admises comme notions communes. C'eût été sans doute la véritable manière de traiter ce sujet ; la doctrine des proportions étant plus étendue que la Géométrie , indépendante des principes de cette science , & intimement liée aux vérités universelles qui découlent de la nature de l'Etre considéré dans toute sa généralité.

§. 7. Mais ce Géomètre n'a point fait usage du principe qu'il avoit entre les mains , non plus que les Auteurs qui ont manié le même sujet après lui. Il a pris le parti de former du caractère de la correspondance des équimultiples , une Définition de nom , comme il étoit en droit de le faire , puisqu'en Logique il est permis de donner à une chose douée d'une certaine propriété , un certain nom : & ce parti a produit deux inconvéniens , 1°. Qu'on trouve à la tête de ce V Livre deux Définitions de la proportionalité , la V & la VI , qui peuvent passer pour une seule , & la VIII , ce qui est contraire à la précision de la méthode , qui n'en admet qu'une. 2°. Que la V Définition étant purement nominale , on n'en peut raisonner avec sûreté , qu'autant qu'on suppose la possibilité de la chose définie , c. à. d. autant qu'on suppose qu'il y a effectivement des choses douées du caractère énoncé dans la Définition. A la rigueur , cette possibilité de la chose définie doit être démontrée en Géométrie. Euclide lui-même en donne l'exemple. Il ne raisonne point des Définitions nominales , du triangle équilatéral , par ex. , ou du quarré , avant qu'il ait fait voir la possibilité de ces figures , en donnant leur construction. Conformément à cette maxime , avant de se servir de la Définition V , il auroit dû faire voir qu'il est possible qu'il y ait des grandeurs telles , que les équimultiples des antécédens , comparés aux équimultiples des conséquens , soient toujours ou égaux , ou plus grands , ou plus petits : & dès-lors ayant satisfait aux loix de sa propre méthode , il auroit prévenu toutes les difficultés , que cette petite omission fait naître dans l'esprit de ceux qui ne connoissent pas assez les règles relatives à cette matière.

§. 8. Au reste , si l'on adopte comme première notion de la proportionalité la VIII Définition de ce Livre , ou ce qui revient au même , si avec la plupart des Auteurs modernes on la fait consister dans l'identité des exposans de deux raisons ($R : P$ & $r : p$) quel'on compare , on peut se convaincre aisément , même sans calcul , que l'inverse de la proposition contenue dans la V Définition

D E F I N I T I O N S.

finition, découle de cette notion de la proportionalité, à sçavoir, si quatre grandeurs $R \& P$, $r \& p$, sont proportionnelles, les équi-multiples de la I & de la III sont constamment ou égaux, ou plus grands, ou plus petits, que d'autres équi-multiples de la II & de la IV, comparés chacun à chacun.

Car les deux raisons $R : P \& r : p$ étant semblables, en vertu de cette Définition, il suit que R se rapporte à P considéré comme Tout ou comme partie, de la même manière que r se rapporte à p considéré pareillement ou comme Tout ou comme partie; tellement que les moindres termes, $R \& r$ par exemple, sont des parties semblables des plus grands $P \& p$. Les deux raisons $R : P \& r : p$ forment donc deux sujets semblables, de la même manière que deux circonférences, & deux rayons tirés à ces circonférences, forment deux figures semblables.

§. 9. Mais puisque la diversité & la dissimilitude, ne peuvent s'introduire: où l'on ne suppose que des principes d'identité & de similitude, on ne peut refuser de recevoir au nombre des axiomes évidens par les notions communes, cette vérité, que des opérations semblables, faites semblablement, sur des Sujets semblables, doivent produire des résultats semblables. Par conséquent, si on multiplie les antécédens ($R \& r$) des deux raisons semblables, par le même nombre m , & les conséquens $P \& p$ par le même nombre n , les résultats ne peuvent manquer de rester dans le même cas de similitude; & la comparaison des équi-multiples des antécédens aux équi-multiples des conséquens, doit toujours conduire aux mêmes rapports d'égalité, de majorité, ou de minorité, selon quelque multiplication que ce puisse être. Car d'abord les raisons $R : P$, & $r : p$ sont semblables par l'hypothèse, & les opérations qui produisent les équi-multiples de chaque couple de termes, sont semblables, puisqu'on les multiplie par le même nombre. De plus, étant que ces équi-multiples sont formés des termes correspondans c. à. d. des antécédens & des conséquens, les opérations se font semblablement dans des Sujets semblables. Par conséquent les résultats doivent rester dans cet état de similitude; tellement que ce que le premier antécédent est devenu comparativement à son conséquent, le second antécédent le soit devenu comparativement au sien. D'où il suit que, s'il y a une égalité entre le multiple du premier antécédent & celui de son conséquent, la même égalité aura lieu entre l'équi-multiple du second antécédent & celui de son conséquent, comme on l'a fait voir pour le cas particulier du §. 2.

§. 10. Au reste, cette proposition n'est qu'un cas particulier, de cette autre plus générale, qui pourroit se démontrer des mêmes principes, sçavoir, si quatre grandeurs A, B, C, D , sont en proportion, & que quatre autres a, b, c, d , le soient pareillement, les produits Aa, Bb, Cc, Dd , résultant de la multiplication des termes correspondans, seront aussi en proportion.

Car 1°. la raison $A : B$ est semblable à la raison $C : D$. 2°. Les termes $A \& a$, $B \& b$, $C \& c$, $D \& d$, se correspondent semblablement dans les deux proportions, 3°. Les produits Aa, Bb, Cc, Dd résultent semblablement de la même opération. Par conséquent la raison entre le premier produit $Aa \& le second Bb , doit nécessairement se trouver semblable à celle qui a lieu entre le troisième produit Cc , & le quatrième Dd ; ou bien ces qua-$

D E F I N I T I O N S.

tre produits doivent être en proportion. Si on suppose $a = c$ & $b = d$, on tombe dans le cas particulier qu'on a traité dans le §. précédent. (Voyez App. Prop. 3).

§. 11. On déduit des mêmes principes la liaison qui règne entre les vérités contenues dans les V & VIII Définitions; à sçavoir,

Que deux raisons $R : P$ & $r : p$ sont semblables, si les équi-multiples de leurs antécédens (mR & mr) correspondent tellement aux équi-multiples (nP & np) de leurs conséquens, chacun à chacun, qu'il y ait toujours de part & d'autre ou égalité, * ou majorité, ou minorité, selon quelque multiplication que ce puisse être.

Car puisque mR est $=$, $>$, ou $<$ nP , selon que mr est $=$, $>$, ou $<$ np ; il est clair que mR est comparativement à nP , ce que mr est comparativement à np . Et d'autant que cette correspondance est constante, la raison de $mR : nP$ doit être semblable à la raison de $mr : np$. Or qui ne sent la vérité de ce principe, que, lorsque les mêmes opérations, faites semblablement, ne produisent aucune différence dans deux sujets sur lesquels elles se font, ces sujets doivent être semblables? Par conséquent, puisque dans ce cas la multiplication des deux antécédens par un même nombre, aussi bien que celle des deux conséquens par un autre même nombre, constituent des opérations identiques faites semblablement, il faut bien que la raison $R : P$ soit semblable à la raison de $r : p$. Autrement il naîtroit de la diversité dans les résultats des deux multiplications faites semblablement; ce qui est contraire à la supposition.

Ce sont là à peu près les principes généraux, qui peuvent servir à réduire aux notions communes les vérités contenues dans ces Définitions. Il ne nous est pas permis d'approfondir davantage cette matière en ce lieu; il faudroit composer un Traité en forme sur la similitude, ce qui nous écarteroit trop de la route qu'Euclide a suivie.

§. 12. Remarquez encore que ce qui est vrai de la correspondance des multiples, est vrai par rapport à celle des sous-multiples, des Puissances semblables, des Radicaux semblables &c. Mais il paroît assez qu'Euclide n'a pas voulu embrasser cette généralité, pour ne pas s'éloigner de la clarté des notions communes: & en particulier on peut croire qu'il a préféré l'usage des multiples à celui des sous-multiples, parcequ'il n'auroit pu prescrire de prendre des sous-multiples, sans montrer auparavant comment on doit partager une grandeur en parties égales; au-lieu que la formation des multiples n'avoit pas besoin d'un pareil principe. Ce Géomètre étoit en droit de demander qu'on pût doubler, tripler &c. ou prendre tel multiple qu'on voudroit d'une grandeur, au-lieu qu'il devoit apprendre par la résolution d'un problème, comment on peut retrancher une partie aliquote quelconque d'une ligne donnée: & la résolution de ce problème supposant la doctrine de la similitude, elle ne pouvoit être donnée que dans la IX Prop. du VI Livre.

VI.

On nommera proportionnelles, les grandeurs qui sont en même raison.

VII.

* A la rigueur, le seul cas de l'égalité pourroit suffire. Car si $mR = nP$ & $mr = np$ on en peut démontrer que $n : m = R : P = r : p$. (Voyez Append. Prop. 4).

DEFINITIONS.

VII.

Mais si dans cette comparaison des équi-multiples, le multiple de la première surpasse le multiple de la seconde, sans que le multiple de la troisième surpasse le multiple de la quatrième, on dira que la raison de la première à la seconde, est plus grande que la raison de la troisième à la quatrième.

§. 1. Comme il y a des raisons égales, il doit y en avoir d'inégales; & par conséquent de plus grandes & de plus petites.

Lorsqu'on juge de la raison par son exposant, on dit qu'une plus grande raison est celle qui a un plus grand exposant, ou bien qu'une raison $A : B$ est $>$ qu'une autre $a : b$, lorsque l'antécédent de la première A contient plus de fois son conséquent B ; que l'antécédent a de la seconde ne contient le sien b ; ou bien encore, lorsque l'antécédent de la première raison est une plus grande partie de son conséquent, que l'antécédent de la seconde ne l'est du sien.

Ainsi la raison de $12 : 3$ est $>$ la raison de $8 : 4$, parceque l'antécédent 12 contient son conséquent 3 , quatre fois; au-lieu que l'antécédent 8 , ne contient son conséquent 4 , que deux fois. Tout au contraire

la raison de $3 : 12$ est $<$ la raison de $4 : 8$.

Parceque l'antécédent 4 est la moitié de son conséquent 8 , au-lieu que l'antécédent 3 n'est que le quart de son conséquent 12 . La même chose est manifeste par les exposans. Ainsi

$12 : 3 > 8 : 4$, c. à. d. 12 divisé par 3 est $>$ 8 divisé par 4 ; ou bien trois, exposant de la première raison est $>$ deux, exposant de la seconde raison. De même

$3 : 12 < 4 : 8$ parceque $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$.

§. 2. Le principe des exposans est donc très commode pour distinguer immédiatement si une raison est égale à une autre raison, ou si elle est plus grande, ou moindre. Cependant l'Auteur de ces Elémens, qui n'a pas fait usage de la doctrine des exposans, nous propose un autre caractère de la majorité des raisons. Selon lui, une raison est plus grande, lorsqu'un certain multiple du premier antécédent, peut surpasser le multiple du conséquent, sans qu'un pareil multiple du second antécédent surpasse le multiple de son conséquent.

Les raisons $3 : 2$ & $11 : 9$ sont dans ce cas. Car si on multiplie les antécédens par 9 & les conséquens par 13 , il en résulte 27 , 26 ; 99 , 117 ;

$$\begin{array}{rcccl} 3 & : & 2 & ; & 11 & : & 9 \\ 9 & & 13 & & 9 & & 13 \\ \hline 27 & : & 26 & ; & 99 & : & 117 \end{array}$$

D E F I N I T I O N S.

où la correspondance des multiples ne se soutient pas, le premier antécédent 27 se trouvant plus grand que son conséquent 26, pendant que le second antécédent 99 est moindre que son conséquent 117.

§. 3. Pour reconnoître aussitôt l'inégalité de deux raisons $A : B$ & $C : D$, par ce caractère de la non-correspondance des multiples, on choisira pour multiplicateurs les deux termes de l'une des deux raisons, par ex: $C : D$, & on multipliera les antécédens A & C , par le conséquent D de la raison choisie $C : D$; & les deux conséquens B & D , par l'antécédent C de la même raison, en cette manière:

$$\begin{array}{rcccl} A & : & B & ; & C & : & D \\ D & & C & & D & & C \\ \hline A.D & : & B.C & ; & C.D & : & D.C \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} 3 & : & 5 & ; & 7 & : & 9 \\ 9 & & 7 & & 9 & & 7 \\ \hline 27 & : & 35 & ; & 63 & : & 63 \end{array}$$

Cela fait, les deux produits $C.D$ & $D.C$ se trouveront égaux, pendant que les deux autres $A.D$ & $B.C$ sont inégaux. Et en particulier, le multiple d'un des antécédens est plus grand que celui de son conséquent, pendant que le multiple de l'autre est égal au sien, si l'on choisit pour multiplicateurs les termes de la plus petite raison. Au contraire, le multiple de l'antécédent est moindre que celui de son conséquent, pendant que les autres sont égaux, si l'on prend pour multiplicateurs les termes de la plus grande raison.

Par ex. La raison de $7 : 5$ est $>$ la raison de $11 : 9$, Si l'on multiplie donc les antécédens 7 & 11 , par 9 , conséquent de la plus petite raison; & les conséquens 5 & 9 , par 11 antécédent de la même raison;

$$\begin{array}{rcccl} 7 & : & 5 & ; & 11 & : & 9 \\ 9 & & 11 & & 9 & & 11 \\ \hline \end{array}$$

il en résulte ces quatre nombres, $63 : 55 ; 99 : 99$ où 63 est $>$ 55 pendant que 99 est $= 99$.

§. 4. Au contraire, si l'on multiplie les deux antécédens par 5 & les deux conséquens par 7 , termes de la plus grande raison,

$$\begin{array}{rcccl} 7 & : & 5 & ; & 11 & : & 9 \\ 5 & & 7 & & 5 & & 7 \\ \hline \end{array}$$

les produits sont $35 : 35 ; 55 : 63$ où 35 est $= 35$, pendant que 55 est $<$ 63 .

§. 5. Si l'on veut avoir des multiplicateurs, qui produisent quatre multiples tels que le premier soit plus grand que le second, pendant que le troisième est moindre que le quatrième, il faut prendre pour multiplicateurs les termes d'une raison moyenne entre les deux raisons proposées, & multiplier les antécédens par le conséquent de cette raison moyenne, & les conséquens par son antécédent.

Par ex: L'exposant de la raison $7 : 5$ est $\frac{7}{5}$, & celui de la raison $11 : 9$ est $\frac{11}{9}$, ou bien $1\frac{2}{9} = \frac{11}{9}$ (en multipliant & réduisant par 5). Par conséquent il faut prendre une raison $<$ celle de $7 : 5$ & $>$ celle de $11 : 9$. Or il est évident que tous les nombres assignables entre les limi-

DEFINITIONS.

limites $6\frac{1}{2}$ & 7 fournissent une telle raison, en les comparant au nombre 5. Qu'on s'arrête par ex: à la raison de $6\frac{1}{2} : 5$, ou $6\frac{1}{2} : 5$, qui se réduit à la raison de 13 : 10, on a deux multiplicateurs satisfaisans à la question. Car le premier produit 35, est > le second produit 31 $\frac{1}{2}$, pendant que le troisième 55 est < le quatrième 57; voici le calcul;

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & : & 5 & ; & 11 & ; & 9 \\ 5 & & 6\frac{1}{2} & & 5 & & 6\frac{1}{2} \\ \hline 35 & : & 31\frac{1}{2} & ; & 55 & : & 57 \end{array}$$

VIII.

La proportion est une similitude des raisons. (Voyez Def. V §. 5 & 6).

IX.

La proportion consiste au moins en trois termes.

§. 1. La proportion consistant dans l'égalité de deux raisons; & chaque raison ayant deux termes, la proportion a proprement quatre termes; dont le premier & le quatrième sont appelés extrêmes, & le second & le troisième moyens. On regarde ces quatre termes comme n'en faisant que trois, quand le conséquent de la première raison tient en même tems lieu de l'antécédent de la seconde raison. C'est pour cela qu'on distingue les proportions en discrètes & en continues. Une proportion est discrète, lorsque les deux termes moyens sont inégaux, & elle est nommée continue, quand ces mêmes termes sont égaux.

Ainsi cette proportion $2 : 4 = 5 : 10$ est discrète, parceque les deux termes moyens 4 & 5 sont inégaux. Au contraire la proportion $2 : 4 = 4 : 8$ est du nombre des continues, à cause de l'égalité des termes moyens 4 & 4.

§. 2. Une suite de grandeurs en proportion continue, forme une progression Géométrique. Tels sont les nombres

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.

De même 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, &c.

Dans ces deux suites il règne partout la même raison entre les deux termes qui se succèdent immédiatement, c. à. d.

$$\begin{array}{l} 1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 \text{ ou} \\ 1 : 3 = 3 : 9 = 9 : 27 = 27 : 81 \text{ &c.} \end{array}$$

§. 3. On appelle termes équidistans d'une progression, deux termes qui se trouvent séparés par un même nombre d'autres termes. Ainsi dans la première de ces progressions, les termes 1 & 8, 8 & 64 sont équidistans, parceque de part & d'autre ils se trouvent séparés par deux termes intermédiaires.

§. 4. Cette

D E F I N I T I O N S.

§. 4. Cette Définition fait voir, qu'entre les termes équidistans, il se trouve toujours le même nombre de raisons égales, ou bien, que pour arriver de l'un des équidistans 1, à l'autre 8, il faut toujours passer par trois raisons égales 1 : 2, 2 : 4, 4 : 8; comme pour arriver du terme 8 à l'équidistant 64, il faut passer par les trois raisons 8 : 16, 16 : 32, 32 : 64 égales entr'elles & à chacune des trois précédentes. On démontrera en son lieu, que tous les termes équidistans d'une progression Géométrique sont en même raison. (Voyez l'Appendice de ce V Livre Prop. VI).

§. 5. On peut appeller raison primordiale d'une progression, celle qui se trouve entre les deux termes avec lesquels on a commencé à former la progression, ou qu'on regarde comme ayant servi à la commencer. Par exemple. Si on part de la raison de 1 : 2, pour faire comme 1 est à 2 ainsi 2 est à 4; & comme 2 est à 4 ainsi 4 est à 8 &c. on détermine la progression des nombres 1, 2, 4, 8, 16 &c. par les deux premiers termes 1 & 2 choisis arbitrairement; c'est donc cette raison qui se trouve entre ces deux premiers termes arbitraires 1 & 2, qu'on peut appeller la raison primordiale de cette progression.

Si l'on vouloit commencer la progression par les termes 1 & 4, par exemple, on formeroit d'abord la progression,

1, 4, 16, 64, 256, &c.

puis prenant les moyennes proportionnelles 2, 8, 32, 128 &c, entre chaque deux termes, qui se suivent immédiatement, on trouveroit la même progression.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 &c.

où il n'y a d'autre différence, sinon que dans ce dernier cas, on regarde la progression comme née de la raison primordiale 1 : 4. On pourroit prendre pour raison primordiale de cette même progression, telle autre raison qu'on voudroit; puisqu'au moyen de la Composition & Décomposition des raisons, dont il sera traité à la fin de ce Livre, on peut toujours, d'une raison primordiale quelconque, remonter ou descendre à toutes les autres raisons possibles.

X.

Si trois grandeurs sont proportionnelles, on dit que la première est à la troisième en raison doublée de la première à la seconde.

XI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, on dit que la première est à la quatrième en raison triplée de la première à la seconde. On dira de même qu'une raison est quadruplée, quintuplée, sextuplée &c, en augmentant d'une unité la dénomination de la raison, à mesure que la proportion sera poussée plus loin d'un terme.

§. 1. Par des grandeurs proportionnelles, il faut entendre des grandeurs en proportion continue (Def. IX. § 1), qui constituent une progression Géométrique, où les termes équidistans sont en même

D E F I N I T I O N S.

même raison. Toutes les raisons pouvant être considérées comme dérivées d'une raison primordiale quelconque, il a paru convenable aux Géomètres, de donner à ces raisons dérivées des dénominations qui indiquent leur dérivation de la raison primordiale. Ainsi, puisqu'on arrive au conséquent 4 de la raison 1:4, en passant par les deux raisons 1:2, & 2:4, on nomme cette raison de 1:4, une raison doublée de la raison primordiale de 1:2. Pareillement, comme partant de la même raison primordiale 1:2, on ne parvient au conséquent 64, de la raison dérivée 1:64, qu'en passant par les six raisons intermédiaires égales

$$1:2 = 2:4 = 4:8 = 8:16 = 16:32 = 32:64.$$

la raison de 1:64, est appelée une raison sextuplée de la raison primordiale 1:2.

Une raison A:B devient donc doublée, triplée, quadruplée, & en général multipliée d'une raison primordiale donnée a:b, selon le nombre des raisons intermédiaires toutes égales à la raison primordiale a:b, qui sont interposées entre les termes A & B.

§. 2. Pareillement, si entre les deux termes (1 & 64) d'une raison prise comme primordiale, on place un ou plusieurs termes (2, 4, 8, 16, 32), en sorte que ces termes moyens forment avec les extrêmes (1 & 64) appartenans à la primordiale, une progression continue, les raisons intermédiaires qui subsistent entre le premier terme (1) & chacun des moyens (2, 4, 8 &c.), sont appelées des raisons sousmultipliées de la raison primordiale des extrêmes. En particulier, quand il n'y a que deux raisons intermédiaires égales, on nomme l'une & l'autre sousdoublée de la raison des extrêmes; quand il y en a trois, chacune est appelée sous triplée de la même raison; & ainsi de suite à l'infini. Si par exemple on place entre les termes 1 & 64, le terme 8, on a deux raisons intermédiaires égales 1:8, & 8:64 entre celles des termes extrêmes; dont chacune est nommée sousdoublée de la raison de 1 à 64. Si entre les mêmes extrêmes 1 & 64, on place les deux moyens 4, & 16, il en résulte trois raisons intermédiaires égales 1:4=4:16=16:64, dont chacune est nommée sous triplée de la raison des extrêmes de 1 à 64.

Ainsi on voit en général que pour avoir une raison, sousquadruplée par ex., il faut établir entre les termes de la raison primordiale trois termes moyens en proportion continue; & que pour en avoir une sousquintuplée de la même raison, il est besoin d'en établir quatre, & de même à l'infini, toujours un terme de moins que n'est le nombre des raisons intermédiaires qui doivent être interposées.

§. 3. Au reste ces dénominations tirent leur origine de l'analogie qu'on remarque entre la manière selon laquelle une grandeur étendue résulte d'une autre grandeur étendue de même genre, & celle selon laquelle une raison peut naître d'une autre raison primordiale. On considère les raisons comme des quantités d'une espèce particulière, & toutes comme homogènes & comparables entr'elles; Car dans la contemplation des raisons, l'esprit ne s'arrête qu'à la relation, à la quantuplicité des termes, sans faire attention à ce qui peut leur convenir comme grandeurs d'une telle ou telle autre espèce. C'est pour cela qu'on se représente les raisons comme égales, & inégales, & comme étant susceptibles d'une multiplicité, & d'une sousmultiplicité les unes à l'égard des autres; Et on les conçoit ainsi, afin que d'une raison quelconque il puisse naître toutes les autres raisons, par la voye d'une composition & résolution propre à cette espèce

D E F I N I T I O N S.

de quantités, de la même manière que d'une ligne, ou d'une surface multipliée ou divisée convenablement, on peut faire résulter toutes les lignes & toutes les surfaces à l'infini.

Ces idées seront mieux développées dans l'Appendice de ce Livre.

X I I.

On dit que les antécédens sont homologues (ou correspondans) aux antécédens, & les conséquens aux conséquens.

On a vu que les raisons qui forment une proportion, sont des sujets semblables. Or les antécédens & les conséquens ayant la même relation dans les deux raisons, ces termes doivent être considérés comme des parties semblables de deux Touts semblables. C'est pour cela qu'il faut toujours les comparer dans le même ordre, afin que cette similitude ou correspondance ne soit jamais troublée.

X I I I.

On appelle *raison alterne* la comparaison de l'antécédent de la première raison à l'antécédent de la seconde, & du conséquent de la première raison au conséquent de la seconde.

$$\begin{array}{l} \text{Si } A : B = C : D \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{on peut inférer} \\ 4 : 5 = 16 : 20 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A : C = B : D \\ 4 : 16 = 5 : 20. \end{array} \right. \end{array}$$

Quand on dispose la proportion de cette manière, on dit communément qu'on le fait en alternant, ou alternando.

X I V.

Mais lorsqu'on change les conséquens en antécédens & les antécédens en conséquens dans le même ordre, on dit que la comparaison des termes se fait par *inversion* de raison, ou *invertendo*.

$$\begin{array}{l} A : B = C : D \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Donc invertendo} \\ 3 : 9 = 4 : 12 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B : A = D : C \\ 9 : 3 = 12 : 4. \end{array} \right. \end{array}$$

X V.

Mais la comparaison se fait par composition, ou *componendo*, quand on compare la somme des conséquens & antécédens à leurs conséquens respectifs.

$$\begin{array}{l} A : B = C : D. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Donc compo-} \\ 3 : 9 = 4 : 12. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B : B = C + D : D. \\ 3 + 9 : 9 = 4 + 12 : 12. \end{array} \right. \end{array}$$

X V I.

On procède par *division* de raison, ou *dividendo*, lorsque l'excès, dont l'antécédent surpasse son conséquent, est comparé au conséquent.

Si

DEFINITIONS.

$$\text{Si } A : B = C : D \left\{ \begin{array}{l} \text{on peut faire dividendo} \\ 9 : 3 = 12 : 4. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A - B : B = C - D : D. \\ 9 - 3 : 3 = 12 - 4 : 4. \end{array} \right.$$

XVII.

Et l'on va par *conversion de raison*, ou *convertendo*, quand on compare l'antécédent à l'excès dont ce même antécédent surpasse son conséquent.

$$\text{Si } A : B = C : D \left\{ \begin{array}{l} \text{il s'ensuit convertendo} \\ 9 : 3 = 12 : 4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A : A - B = C : C - D. \\ 9 : 9 - 3 = 12 : 12 - 4. \end{array} \right.$$

XVIII.

On argumente par *égalité de raison*, ou *ex æquo*, lorsque comparant deux suites de grandeurs de même nombre, telles que les raisons de la première soient égales aux raisons de la seconde, chacune à chacune (soit que la comparaison se fasse dans le même ordre, soit dans un ordre renversé), on conclut que les extrêmes des deux suites sont en proportion.

Le sens de cette Définition est celui-ci; Si A, B, C, D est une suite de quatre grandeurs, & a, b, c, d une suite de quatre autres grandeurs, tellement que

$$\left. \begin{array}{l} A : B = a : b \\ B : C = b : c \\ C : D = c : d \end{array} \right\} \text{ou dans un ordre renversé} \left\{ \begin{array}{l} A : B = c : d \\ B : C = b : c \\ C : D = a : b \end{array} \right.$$

Dans l'un & l'autre cas il est permis d'inférer *ex æquo*, que la raison de la I suite des extrêmes A : D est égale à la raison des extrêmes a : d de la II suite; ou bien que $A : D = a : d$.

I. A, B, C, D	15, 3, 45, 9
II. a, b, c, d	10, 2, 30, 6
A : D = a : d	15 : 9 = 10 : 6

XIX.

L'*Égalité de raison* est appelée *ordonnée* lorsque les raisons de la première suite sont égales aux raisons de la seconde suite chacune à chacune, dans le même ordre direct.

Soit par ex.

$$\begin{array}{l} A : B = a : b \\ B : C = b : c \\ C : D = c : d \end{array}$$

Ici les raisons sont égales chacune à chacune, dans le même ordre direct, puisque dans l'une & dans l'autre suite on va de la première grandeur vers la dernière. Si l'on conclut donc que les extrêmes sont proportionels, ou bien que $A : D = a : d$, on dit qu'on argumente par *égalité ordonnée* ou *directe*, autrement *ex æquo ordinate*.

A a 2

X X. Au

D E F I N I T I O N S.

X X.

Au contraire, l'égalité de raison est appelée *renversée* ou *troublée*, dans le second cas, c. à d. lorsque les raisons de la première suite sont égales à celles de la seconde suite chacune à chacune; en prenant ces dernières dans un ordre renversé.

§. 1. Soient encore les deux suites de grandeurs

$$\left. \begin{array}{l} A, B, C, D \\ a, b, c, d. \end{array} \right\} \text{ où l'on suppose } \left\{ \begin{array}{l} A : B = c : d \\ B : C = b : c \\ C : D = a : b \end{array} \right.$$

Ici les raisons de la I suite sont égales aux raisons de la II suite, chacune à chacune, mais dans un ordre renversé, tellement que la raison entre la première & la seconde grandeur de la I suite, est égale à la raison entre la pénultième & la dernière grandeur de la II suite &c. & ainsi de même en avançant dans la première & en rétrogradant dans la seconde. Si l'on conclut donc que

$$A : D = a : d,$$

on nomme cette analogie *ex æquo inversé* ou *perturbatè*.

§. 2. Les commençans n'auront pas de peine à distinguer le cas de l'égalité ordonnée ou directe, de celui de l'égalité troublée ou renversée, s'ils se souviennent que lorsque deux termes se retrouvent dans deux proportions, & qu'ils y occupent indifféremment ou la première & la troisième, ou la seconde & la quatrième place, c'est toujours le cas de l'égalité ordonnée; par ex.

$$\begin{array}{rcl} A : B = a : b & B : A = b : a & A : B = a : b \\ B : C = b : c & B : C = b : c & C : B = c : b \\ \hline A : C = a : c. & A : C = a : c. & A : C = a : c. \end{array}$$

On a toujours deux proportions qui ont de commun les deux termes B & b, occupants la première & la troisième, ou la seconde & la quatrième place; par conséquent, les deux autres termes A & C sont proportionnels aux deux autres a & c, en les prenant dans le même ordre.

§. 3. Au contraire, lorsque les deux termes, qui sont communs aux deux proportions, ou sont les moyens ou les extrêmes, c'est le cas de l'égalité troublée; par ex: si

$$\begin{array}{rcl} A : B = b : c & B : A = c : b & A : B = b : c. \\ B : C = a : b & B : C = a : b & C : B = b : a. \\ \hline A : C = a : c & A : C = a : c & A : C = a : c. \end{array}$$

Dans ces trois cas les termes B & b, qui se retrouvent dans les deux proportions, y sont ou les extrêmes ou les moyens; par conséquent les autres termes sont en proportion, tellement que les deux termes, qui viennent de la même proportion A & C ou a & c, demeurent extrêmes ou moyens. Ou, ce qui revient au même, les quatre autres termes différens A, C & a, c sont proportionnels comparés dans un ordre renversé, en ce que la comparaison descend de la I proportion dans la II, & remonte aussitôt de la II à la I.

Ce sont les dénominations qu'on donne aux différentes manières de conclure par analogie, présentement l'Auteur va démontrer qu'elles sont légitimes.

DEMANDES.

I.

ON demande qu'on puisse doubler , tripler , quadrupler une grandeur donnée quelconque , ou en général qu'on puisse en prendre tel multiple qu'on voudra.

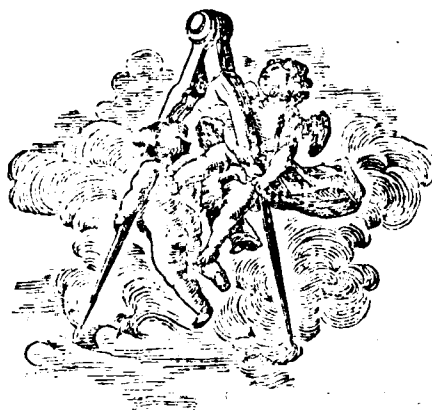
II.

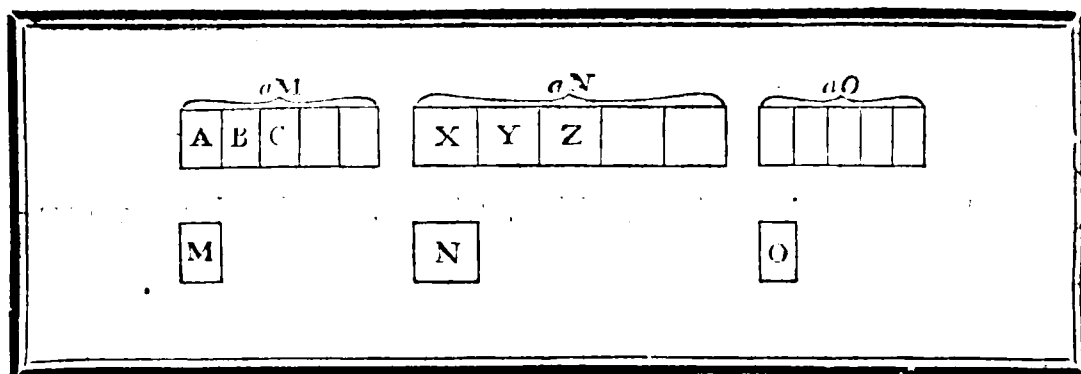
Que dans une grandeur plus grande , on puisse prendre une ou plusieurs parties égales à une moindre grandeur de même genre.

ABBREVIATIONS.

Gdr. Grandeur.

Equimult. . . . Equimultiple.





PROPOSITION I. THEOREME I.
SI plusieurs grandeurs (aM, aN, aO) sont équimultiples d'un pareil nombre d'autres grandeurs (M, N, O &c), chacune de chacune, la somme ($aM + aN + aO$ &c) des premières sera autant multiple de la somme ($M + N + O$ &c) des secondes, qu'une des premières (aM) est multiple de sa correspondante (M).

HYPOTHESE.

aM } sont des $\left[\begin{matrix} M & \text{chacune} \\ N & \text{de} \\ O & \text{chacune.} \end{matrix} \right.$
 aN } équimultiples
 aO } de

THESE.

$aM + aN + aO$ est autant multiple de $M + N + O$ que aM l'est de M , ou aN de N &c.

Préparation.

La Gdr. aM étant autant multiple de M , que aN l'est de N (*Hyp.*), on peut prendre dans aN autant de grandeurs X, Y, Z &c. chacune égale à sa correspondante N , qu'on en peut prendre dans aM , comme A, B, C , &c. chacune égale à sa correspondante M .

Faites donc $\left. \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \right\}$ égale chacune à M & $\left. \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\}$ égale chacune à N .

Dem. 2.

DEMONSTRATION.

Puisque aM est autant multiple de M , que aN l'est de N (*Hyp.*),
 1. La gdr. aM doit contenir autant de grandeurs A, B, C &c. égales chacune à M , que aN en contient d'égales à N , comme X, Y, Z &c.

Mais $A = M$ & $X = N$ (*Prep.*),

2. Donc $A + X = M + N$.

Ax. 2. L. 1.

De même B étant $= M$ & $Y = N$ (*Prep.*),

3. Il suit que $B + Y = M + N$.

Ax. 2. L. 1.

Derechef, puisque $C = M$ & $Z = N$ (*Prep.*),

4. On aura $C + Z = M + N$.

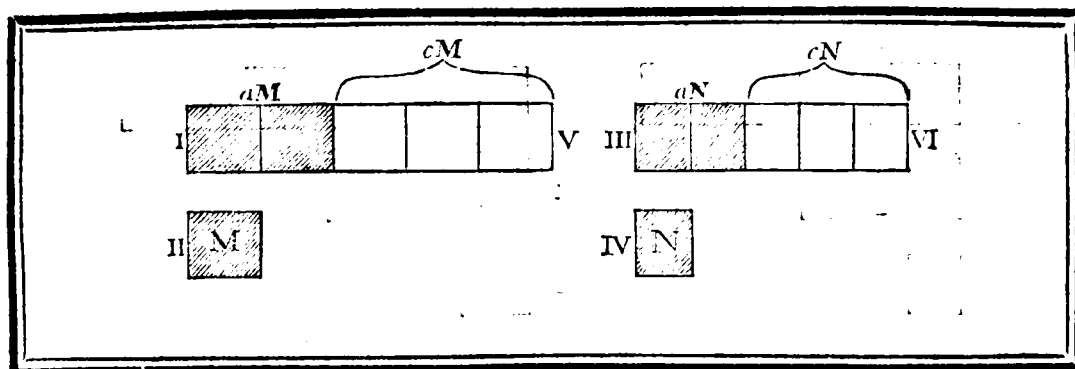
Ax. 2. L. 1.

Par conséquent il se trouve dans aM autant de grandeurs $= M$,

Qu'il s'en trouve dans $aM + aN = M + N$.

5. D'où il suit que $aM + aN$ est autant multiple de $M + N$, que aM l'est de M , ou que aN l'est de N . & par la même raison $aM + aN + aO$ autant multiple de $M + N + O$, que aM l'est de M ou aN de N &c.

C. Q. F.D.



PROPOSITION II. THEOREME II.
S Si la premiere grandeur (aM) est multiple de la seconde (M), autant que la troisieme (aN) l'est de la quatrieme (N); & que la cinquieme (cM) soit encore multiple de la seconde (M), autant que la sixieme (cN) l'est de la quatrieme (N): la grandeur ($aM + cM$) composée de la premiere & cinquieme, est multiple de la seconde (M), autant que la grandeur ($aN + cN$) composée de la troisieme & sixieme l'est de la quatrieme (N).

HYPOTHESE.

$\left. \begin{matrix} aM \\ \& \\ aN \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{de même} \\ \& \\ \text{que} \end{matrix} \left[\begin{matrix} cM \\ \& \\ cN \end{matrix} \right] \begin{matrix} \text{sont des} \\ \text{équimult.} \\ \text{de} \end{matrix} \left[\begin{matrix} M \\ \& \\ N \end{matrix} \right] \begin{matrix} \text{chacune} \\ \text{de} \\ \text{chacune.} \end{matrix}$

THESE.

$aM + cM$ est autant multiple de M que $aN + cN$ l'est de N .

DEMONSTRATION.

Puisque aM est autant multiple de M , que aN l'est de N (*Hyp.*),

1. La grandeur aM contient M le même nombre de fois que aN contient N .

De même, puisque cM est autant multiple de M , que cN l'est de N (*Hyp.*),

2. La grandeur cM contient M le même nombre de fois que cN contient N .

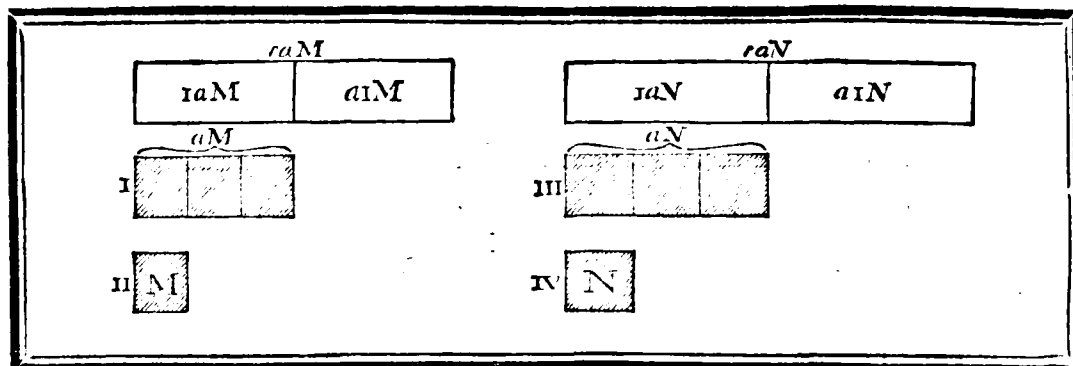
3. Partant la grandeur entiere $aM + cM$ contient M le même nombre de fois que la grandeur entiere $aN + cN$ contient N .

4. Par conséquent $aM + cM$ est autant multiple de M , que $aN + cN$ l'est de N .

AX. 2. L. 2.

C. Q. F. D.





PROPOSITION III. THEOREME III.
S I la premiere grandeur (aM) est multiple de la seconde M , autant que la troisieme (aN) l'est de la quatrieme (N), & qu'on prenne des équimultiples (eaM , eaN) de la premiere (aM) & de la troisieme (aN): ces deux dernieres grandeurs (eaM , eaN) seront également multiples de la seconde (M) & de la quatrieme (N).

HYPOTHESE.

1. aM } sont deux { M chacune
 & } équimultiples { & de
 aN } de { N chacune.
2. eaM } sont deux { aM chacune
 & } équimultiples { & de
 eaN } de { aN chacune.

THESE.

eaM est autant multiple de M , que
 eaN l'est de N .

Préparation.

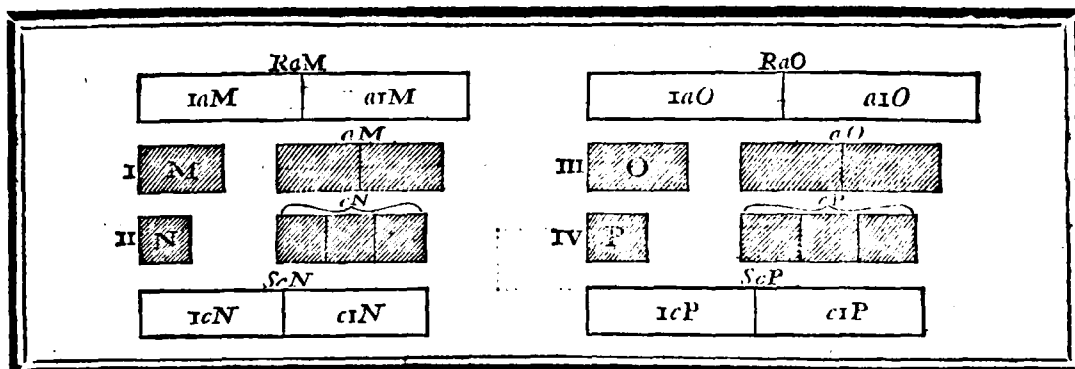
Partagez donc eaM en ses parties iaM , aiM &c. chacune $= aM$.
 & eaN en ses parties iaN , aiN &c. chacune $= aN$.

DEMONSTRATION.

- P** uisque eaM est autant multiple de aM , que eaN l'est de aN (Hyp. 2),
1. Il se trouve dans eaM autant de grandeurs $= aM$,
 .. qu'il s'en trouve dans eaN $= aN$.
 2. Le nombre des parties iaM , aiM &c. dans eaM , est donc égal au nombre des parties iaN , aiN &c. dans eaN .
 Mais par la raison que aM est autant multiple de M , que aN l'est de N , & que $iaM = aM$, $iaN = aN$,
 3. La grandeur iaM est autant multiple de M que iaN l'est de N .
 4. Et par la même raison aiM est autant multiple de M , que aiN l'est de N .
 Puis donc que la I^{re} gdr iaM est autant multiple de la II^e gdr M ,
 que la III^e gdr iaN l'est de la IV^e gdr N ,
 & que la V^e gdr aiM est autant multiple de la II^e gdr M ,
 que la VI^e gdr aiN l'est de la IV^e gdr N ,
 5. Il s'ensuit que la grandeur eaM , composée de la I. & V gdr $iaM + aiM$, est autant multiple de la II gdr M , que la grandeur eaN , composée de la III & VI gdr $iaN + aiN$, l'est de la IV gdr N .

Prop. 2. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.
 Si quatre grandeurs (M, N, O, P) sont proportionnelles: les équi-multiples (aM , aO) de la première (M) & de la troisième (O), comparés, chacun à chacun, à des équi-multiples (cN , cP) de la seconde (N) & de la quatrième (P), seront en même raison, selon quelque multiplication que ce puisse être.

HYPOTHESE.

1. $M : N = O : P$.

2. $\left\{ \begin{array}{l} aM \\ aO \end{array} \right\}$ sont des équi-multiples de $\left\{ \begin{array}{l} M \\ O \end{array} \right\}$ item $\left\{ \begin{array}{l} cN \\ cP \end{array} \right\}$ des équi-multiples de $\left\{ \begin{array}{l} N \\ P \end{array} \right\}$.

THESE.

$aM : cN = aO : cP$.

Préparation.

1. Prenez RaM , RaO équi-multiples de aM & de aO .
2. De même ScN , ScP équi-multiples de cN & de cP .

} Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puis donc que aM est autant multiple de M , que aO l'est de O (Hyp. 2), & que les grandeurs RaM , RaO sont des équi-multiples des grandeurs aM , aO (Prep. 1),
 1. La grandeur RaM est autant multiple de M , que la grandeur RaO l'est de O .
 2. Par la même raison; la grandeur ScN est autant multiple de N , que ScP l'est de P .

Prop. 3. L. 5.

Et d'autant que $M : N = O : P$ (Hyp. 1), & que RaM , RaO sont des équi-multiples quelconques du I terme M & du III O ; & ScN , ScP des équi-multiples quelconques du II terme N & du IV P (Arg. 1 & 2),

3. Si RaM est $>$, = ou $<$ ScN , pareillement RaO sera $>$, = ou $<$ ScP .

Def. 5. L. 5.

Mais les grandeurs RaM & RaO sont des équi-multiples quelconques des grandeurs aM & aO , & les grandeurs ScN , ScP des équi-multiples quelconques des grandeurs cN , & cP (Prep. 1 & 2).

4. Partant, la raison, de aM à cN est égale à la raison de aO à cP ; ou $aM : cN = aO : cP$.

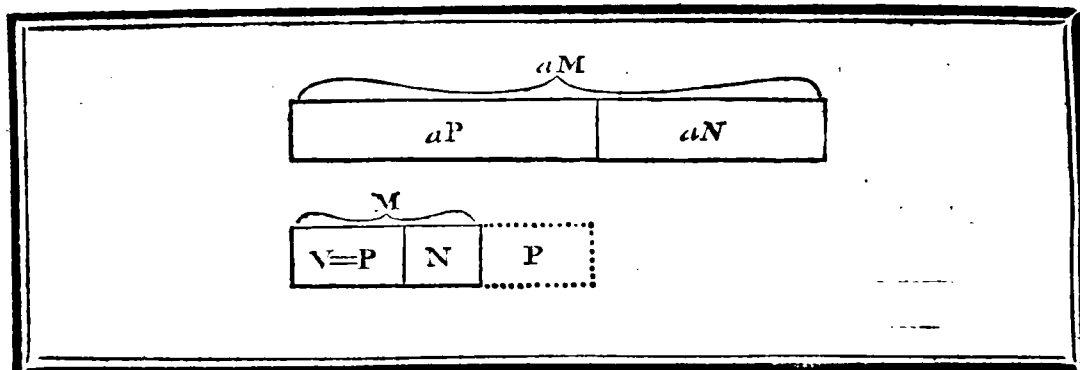
Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

IL s'ensuit de l'Arg. 3, que, selon que ScN est $>$, =, ou $<$ RaM ; pareillement ScP sera $>$, = ou $<$ RaO ; c'est pourquoi $cN : aM = cP : aO$ (Def. 5. L. 5).

Donc, si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le sont aussi par inversion de raison, ou *invertendo*.



PROPOSITION V. THEOREME V.
SI une grandeur (aM) est autant multiple d'une autre grandeur (M), que la retranchée (aN) l'est de la retranchée (N), le reste (aP) sera autant multiple du reste (V), que la grandeur entière (aM), l'est de la grandeur entière (M).

HYPOTHESE.

1. { Les gdrs. aM & M sont deux Tous,
 2. { les gdrs. aN & N leurs parties retranchées
 & les gdrs. aP & V les restes.
 21. { aM est multiple de M , autant que
 aN l'est de N .

THESE.

aP est autant multiple de V , que
 aM l'est de M .

Préparation.

Prenez une grandeur P telle, que aP soit autant multiple de P , que
 aN l'est de N , ou aM de M .

Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

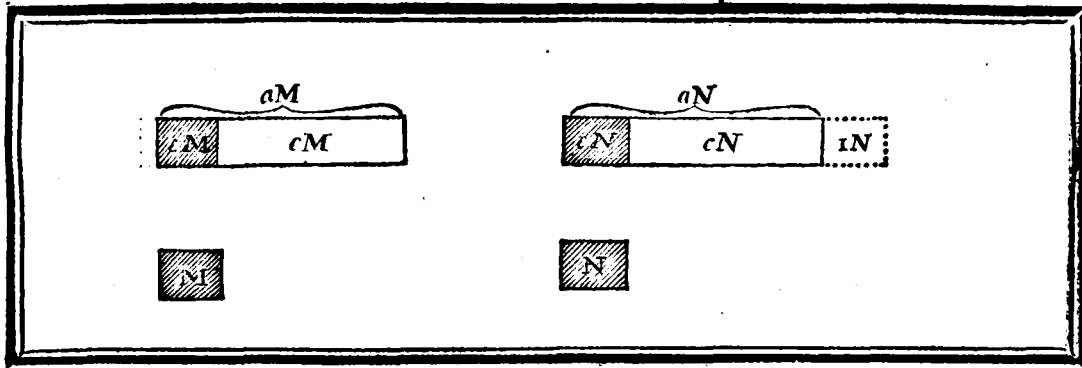
- P**UIS donc que aN est autant multiple de N , que aP l'est de P (*Prep.*),
 1. La somme $aN + aP$, ou aM , des premières, est autant multiple de la somme
 $N + P$ des dernières, que aN l'est de N .
 Mais aM est autant multiple de M , ou de $N + V$, que aN l'est de N (*Hyp. 2*);
 2. Partant; la même gdr. aM est equimultiple des gdrs. $N + P$, & $N + V$.
 3. Par conséquent, $N + P = N + V$.
 Et retranchant la gdr. commune N ,
 4. Il s'enfuit que la gdr. P est $=$ a la gdr. V .
 5. Partant, aP étant autant multiple de P , que aM l'est de M (*Prep.*), le même
 aP est autant multiple de V , que aM l'est de M .

Prop. 1. L. 5.

Ax. 7. L. 1.

Ax. 3. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION VI. THEOREME VI.
SI deux grandeurs (aM , aN) sont équi-multiples de deux autres grandeurs (M & N), chacune de chacune, & les retranchées (cM & cN) équi-multiples des mêmes grandeurs, les restes (eM & eN) seront respectivement ou égaux à ces grandeurs (M & N), ou ils en feront des équi-multiples.

HYPOTHESE.

- aM & aN sont deux Tous,
 I. cM & cN leurs parties retranchées.
 eM & eN leurs restes.

II. $\left\{ \begin{array}{l} aM \\ cM \\ eM \end{array} \right\}$ sont des équi-multiples de $\left\{ \begin{array}{l} M \\ cM \\ eM \end{array} \right\}$

THESE.

- I. Si $eM = M$, eN sera $= N$.
 II. Si eM est multiple de M , eN sera équi-multiple de N .

CAS I. Si eM est $= M$.

Préparation.

Faites $IN = N$.

Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque cM est autant multiple de M , que cN l'est de N (*Hyp. 2*), & que $eM = M$ (*Sup. 1*), & $IN = N$ (*Prep.*),

1. La gdr. $cM + eM$, ou aM , sera autant multiple de M , que $cN + IN$ l'est de N .

Or aM étant autant multiple de M , que aN , ou $eN + cN$ l'est de N (*Hyp. 2*).

2. Les deux gdrs. $cN + IN$ & $eN + cN$ sont équi-multiples de la même gdr. N .

3. C'est pourquoi la gdr. $cN + IN = eN + cN$.

Retranchant donc la gdr. commune cN ;

4. Il suit que IN est $= eN$.

Mais IN est $= N$ (*Prep.*);

5. Partant, eN est $= N$.

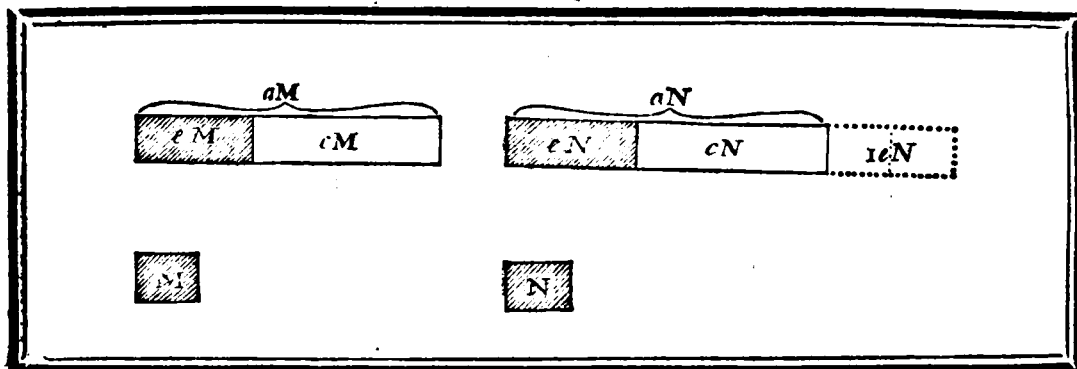
6. Donc si eM est $= M$, eN est $= N$.

Ax. 6. L. 1.

Ax. 3. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

C. Q. F.D. 1.



C A S II. Si eM est multiple de M .

Préparation.

Prenez ieN autant multiple de N , que eM l'est de M . Dem. 1. L. 5;

DEMONSTRATION.

Puisque eM est autant multiple de M , que ieN l'est de N (*Prep.*), & que cM est autant multiple de M , que cN l'est de N (*Hyp. 2*),

1. La grandeur $eM + cM$, ou aM , sera autant multiple de M , que $ieN + cN$ l'est de N . Prop. 2. L. 5.

Mais aM étant autant multiple de M , que aN , ou $eN + cN$, l'est de N (*Hyp. 2*),

2. Les deux gdrs. $ieN + cN$ & $eN + cN$ sont donc équimultiples de la même gdr. N .

3. Par conséquent, $ieN + cN$ est $= eN + cN$. Ax. 6. L. 1.

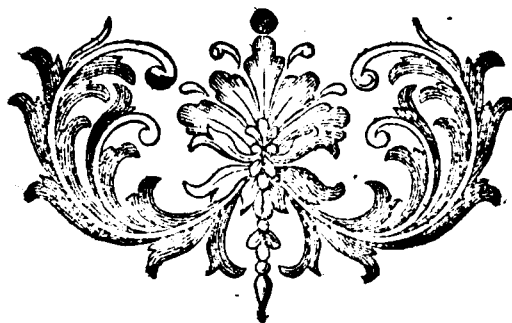
En retranchant donc la gdr. commune cN ,

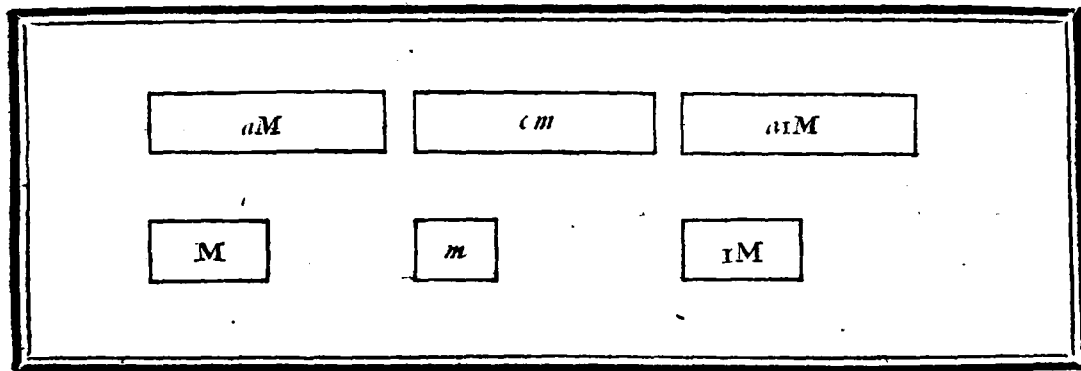
4. Il suit que la grandeur ieN est $= eN$. Ax. 3. L. 1.

Or ieN est autant multiple de N , que eM l'est de M (*Prep.*);

5. Donc, si eM est multiple de M , eN sera équimultiple de N .

C. Q. F. D. 11.





PROPOSITION VII. THEOREME VII.
LEs grandeurs égales (M & IM), ont même raison à une même grandeur (m); & une même grandeur (m) a même raison à des grandeurs égales (M & IM).

HYPOTHESE.

M & IM sont deux grs. égales, & m
 en est une troisième.

THESE.

I. $M : m = IM : m$.
 II. $m : M = m : IM$.

Préparation.

1. Prenez aM & aIM équi-multiples de M & de IM .
2. Et em un multiple quelconque de m .

Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque aM & aIM sont des équi-mult. de M & de IM (Prep. 1), & que
 $M = IM$ (Hyp.),

1. Lagd aM est $= aIM$.

Ax. 6. L. 1.

2. Donc, si aM est $>$, $=$, ou $<$ em ; aIM fera pareillement $>$, $=$, ou $<$ em .

Mais aM & aIM sont des équi-mult. du I terme M & du III terme IM ,
 comme em & em en sont du II terme m & du IV terme m ;

3. Partant $M : m = IM : m$.

Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. 1.

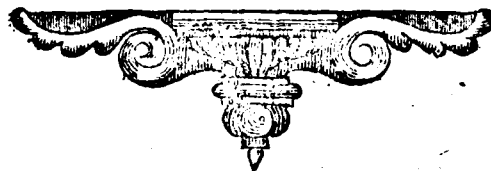
Et puisque $aM = aIM$ (Arg. 1),

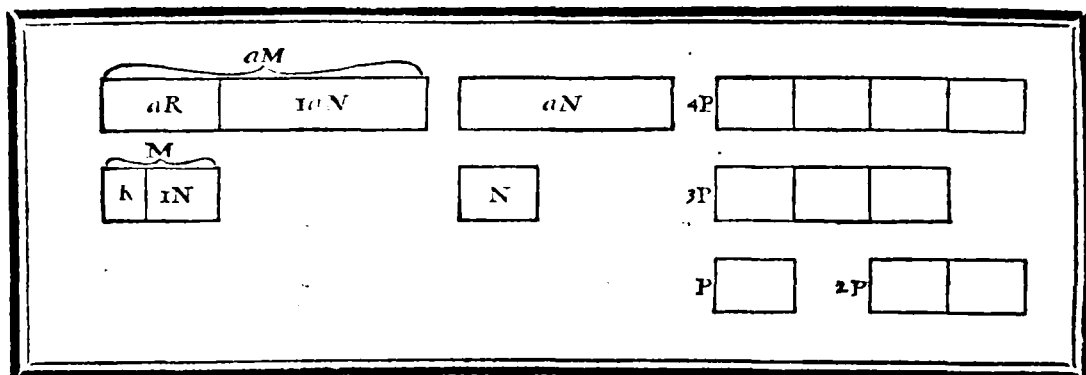
4. Il suit encore que, si em est $>$, $=$ ou $<$ aM , le même em doit en-même
 tems être $>$, $=$ ou $<$ aIM .

5. Donc, $m : M = m : IM$.

Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. 11.





PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.

SI deux grandeurs (M & N) sont inégales, la plus grande (M) aura une plus grande raison à une même grandeur (P), que la plus petite (N); & au contraire la même grandeur (P) aura une plus grande raison à la plus petite (N), qu'à la plus grande (M).

HYPOTHESE.

- I. $M > N$.
II. P est une gdr. quelconque.

THESE.

- I. $M : P > N : P$.
II. $P : N > P : M$.

I. Préparation.

1. Rétranchez de la plus grande M la partie $1N$ = à la plus petite N ;
Et le reste R sera ou $<$, ou $>$ ou enfin $= N$;
Supposez premièrement que ce reste soit $< N$.
2. De ce reste R prenez un multiple $aR > P$,
3. Autant que aR est multiple de R , prenez $1aN$ & aN multiples de $1N$ & de N .
4. Faites la gdr. $2P$ double de P ; la gdr $3P$ triple de P ; & ainsi de suite jusqu'à ce que vous soyez parvenu au premier multiple de P , qui surpasse aN , que vous supposerez être $4P$.

Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

- Puisque $4P$ est le premier des multiples de P , qui est $> aN$ (Prep. 4),
1. Le multiple précédent $3P$ n'est pas $> aN$; Ou bien aN n'est pas $< 3P$.
De plus aR & $1aN$ étant équimult. de R & de $1N$ (Prep. 3),
 2. La gdr. $aR + 1aN$, ou aM est autant multiple de $R + 1N$, ou M que aR l'est de R , Prop. 1. L. 5.
Ou bien que aN de N . (Prep. 3).
 3. Donc aM & aN sont des équimult. de M & de N .
D'ailleurs; aN & $1aN$ étant des équimult. des gdrs. égales N & $1N$ (Prep. 3 & 1),
 4. La gdr. aN est $= 1aN$.
Mais aN n'est pas $< 3P$ (Arg. 1);
 5. Partant $1aN$ n'est pas non plus $< 3P$.
Or aR est $> P$. (Prep. 2).
 6. Donc, en ajoutant, $aR + 1aN$, ou $aM > 4P$.
Puis donc que aM est $> 4P$, & $aN < 4P$ (Prep. 4); & que aM & aN sont des équimult. des antécédens M & N , & $4P$ & $4P$ d'autres équimult. des conséquens P & P (Arg. 3 & Prep. 4).
 7. Il suit que $M : P > N : P$.

Ar. 6. L. 1.

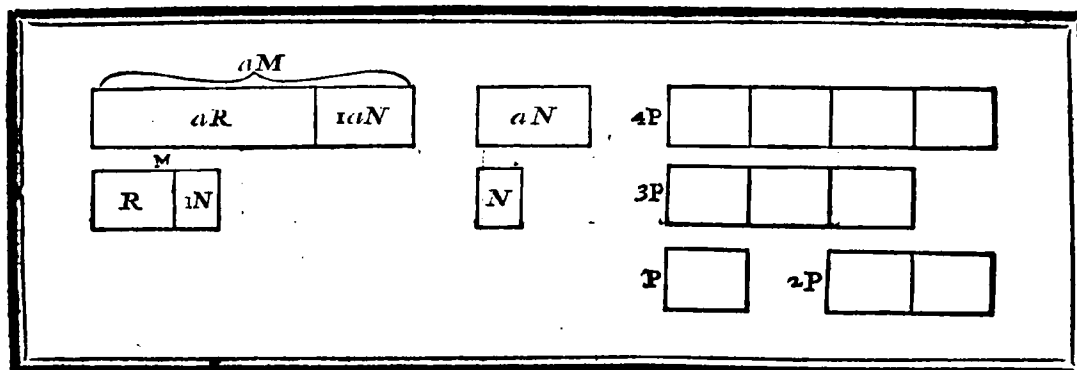
Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D. I.

- De plus, comme on vient d'établir que aN est $< 4P$ (Prep. 4), & $aM > 4P$ (Arg. 6),
8. Il est évident que la gdr. $4P$ est $> aN$, & que la même gdr. $4P$ est $< aM$.
Or $4P$ & $4P$ étant des équimult. des antécédens P & P ; & aN & aM d'autres équimult. des conséquens N & M ,
 9. Il suit que $P : N > P : M$.

Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D. II.



II. Préparation.

Si on suppose en second lieu $R > 1N$ ou N .

5. Prenez de $1N$ un multiple $1aN > P$.
6. Et autant que $1aN$ est multiple de $1N$, prenez aR multiple de R , item aN multiple de N .
7. Prenez encore $4P$ pour le premier multiple de $P > aR$; ainsi le multiple précédent $3P$ ne sera pas $> aR$, ou bien aR ne sera pas $< 3P$.

Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

D'Abord on prouvera, comme dans le raisonnement précédent (Arg. 1. 2 & 3), que

1. Les gdrs. aM & aN sont équimult. des gdrs. M & N .

De plus, aR & aN étant des équimult. de R & de N (Prep. 6), & R étant $> N$ (Sup.),

2. Il s'ensuit que aR est $> aN$.

Maintenant aR n'étant pas $< 3P$ (Prep. 7),

Et la gdr. $1aN$ étant $> P$ (Prep. 5),

3. On aura, en ajoutant $aR + 1aN$, ou $aM > 4P$.

Mais aR étant $< 4P$ (Prep. 7), & ce même aR étant $> aN$ (Arg. 2),

4. A plus forte raison aN est $< 4P$.

Or aM & aN sont des équimult. des antécédens M & N (Arg. 1), & $4P$ &

$4P$ d'autres équimult. des conséquens; P & P & de plus $aM > 4P$; & aN $< 4P$ (Arg. 3 & 4).

5. Par conséquent $M : P > N : P$.

Def. 7. L. 5.

C. Q. F.D. 1.

De plus, sans changer de préparation, on démontre comme dans le cas précédent (Arg. 8 & 9), que

6. La raison de $P : N$ est $>$ la raison de $P : M$.

C. Q. F.D. 11.

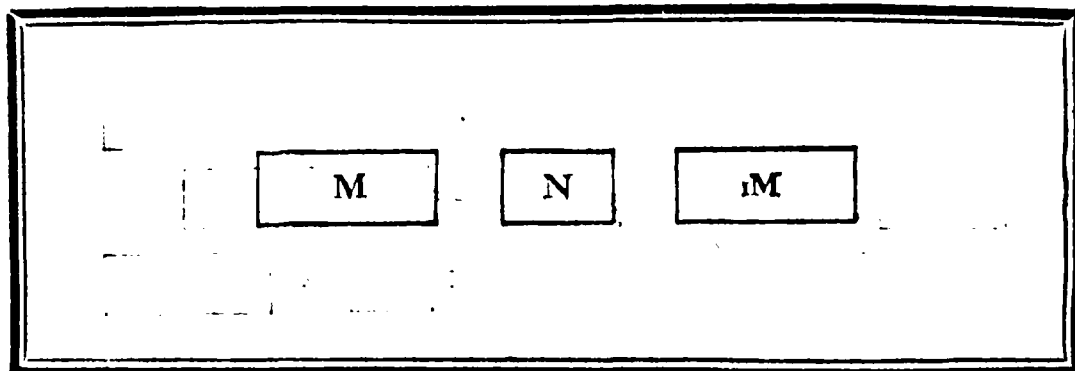
III.

Et en appliquant la même préparation & le même raisonnement au dernier

Cas lorsque $R = 1N$,

7. On achevera la démonstration comme dans les deux Cas précédens.

C. Q. F.D. 1 & 11.



PROPOSITION IX. THEOREME IX.
LEs grandeurs (M & i M) qui sont en même raison à une même grandeur (N):
 sont égales entr'elles. Et celles (M & i M) auxquelles une même grandeur (N)
 a même raison: sont aussi égales entr'elles.

HYPOTHESE.
 $M : N = iM : N.$

THESE.
 La gdr. M = i M.

DEMONSTRATION.

I.

Sinon, les deux gdrs. M & i M sont inégales.

1. **L**Es deux gdrs. M & i M n'ont donc pas même raison à la même gdr. N. Prop. 8. L. 5.
 Mais elles ont même raison à cette même gdr. N (Hyp.);
2. La gdr. M est donc = à la gdr. i M.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.
 $N : M = N : iM.$

THESE.
 La gdr. M = i M.

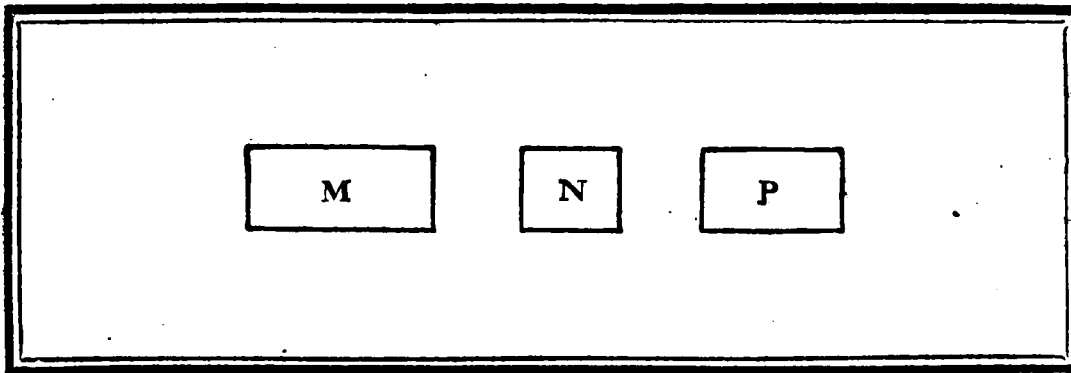
DEMONSTRATION.

II.

Sinon, les deux gdrs. M & i M sont inégales.

1. **L**A même gdr. N n'a donc pas même raison aux deux gdrs. M & i M. Prop. 8. L. 5.
 Or elle a même raison à ces deux gdrs. (Hyp.);
2. Donc la gdr. M est = à la gdr. i M.

C. Q. F. D.



D PROPOSITION X. THEOREME X.
 E deux grandeurs (M & P), celle (M) qui a plus grande raison à une même (N), est la plus grande. Au contraire, celle (P) à laquelle une même grandeur (N) a plus grande raison, est la plus petite.

HYPOTHESE.
 $M : N \text{ est } > P : N.$

THESE.
 La gdr. M est $> P.$

DEMONSTRATION.
 I.

Sinon; M est $= P$, ou $< P.$

C A S I. Si M est $= P.$

1. **L**Es deux gdrs. M & P auroient donc même raison à la même gdr. N. Prop. 7. L. 5.
 Or elles n'ont point même raison à la même gdr. N (Hyp.);
2. La gdr. M n'est donc point $=$ à la gdr. P.

C A S II. Si M est $< P.$

3. **L**A raison de M : N seroit $<$ la raison P : N. Prop. 8. L. 5.
 Or la raison de M : N n'est pas $<$ la raison P : N (Hyp.);
4. Donc la gdr. M n'est pas $<$ la gdr. P.
5. Mais M n'étant pas non plus $= P$ (Arg. 2),
 Il reste donc que M soit $> P.$

HYPOTHESE.
 $N : P > N : M.$

C. Q. F. D. I.
 THESE
 La gdr. P est $< M.$

DEMONSTRATION.
 II.

Sinon; P est $=$, ou $> M.$

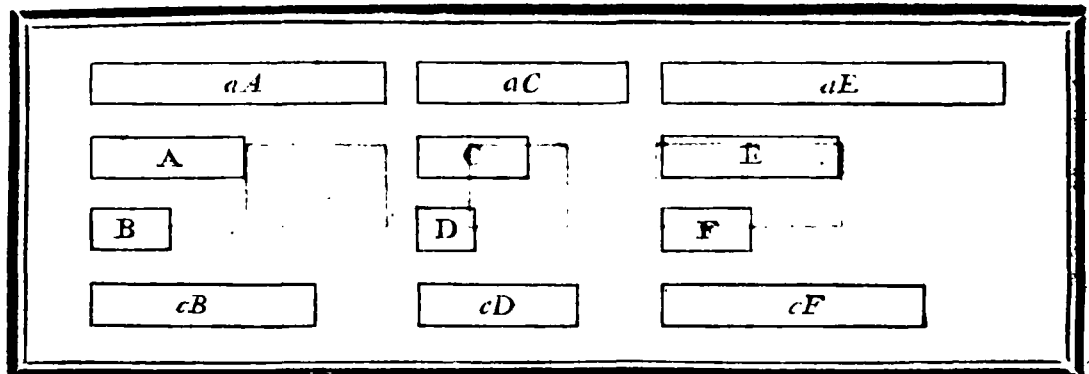
C A S I. Si P est $= M.$

1. **L**A raison N : M devroit être $=$ à la raison de N : P. Prop. 7. L. 5.
2. Ce qui étant contraire à l'hypothèse, P ne sera pas $= M.$

C A S II. Si P est $> M.$

3. **L**A raison N : M devient $>$ la raison N : P. Prop. 8. L. 5.
4. Ce qui étant encore contraire à l'hypothèse, P ne sera pas $> M.$
 Mais P n'est pas non plus $= M$ (Arg. 2);
5. Il reste donc que P soit $< M.$

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XI. THEOREME XI.
Les raisons ($A : B$ & $E : F$) qui sont égales à une même troisième raison ($C : D$), sont égales entr'elles.

HYPOTHESE.

Les raisons $\begin{cases} A : B \\ E : F \end{cases}$ sont = à la même raison $C : D$.

THESE.

$A : B = E : F$.

Préparation.

1. Prenez des équimultiples quelconques aA , aC , aE des trois antécédens A, C, E.
 2. Et d'autres équimultiples quelconques cB , cD , cF des trois conséquens B, D, F.
- } Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque $A : B = C : D$ (Hyp);

1. Si le multiple aA est $>$, $=$, ou $<$ le multiple cB ; l'équimultiple aC est pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple cD . Def. 5. L. 5.
 De même puisque $C : D = E : F$ (Hyp).
2. Si le multiple aC est $>$, $=$ ou $<$ le multiple cD ; l'équimultiple aE sera pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple cF . Def. 5. L. 5.
3. Par conséquent si le multiple aA est $>$, $=$ ou $<$, le multiple cB ; l'équimultiple aE est pareillement $>$, $=$, ou $<$ l'équimultiple cF .
4. Partant, $A : B = E : F$. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.

mA	mC	mE
A	C	E
B	D	F
nB	nD	nF

PROPOSITION XII. THEOREME XII.
SI plusieurs grandeurs (A, B, C, D, E, F , &c.) sont en proportion (ou bien si plusieurs raisons sont égales): la somme de tous les antécédens ($A+C+E$ &c.) est à la somme de tous les conséquens ($B+D+F$ &c.), comme un antécédent est à son conséquent.

HYPOTHESE.

Les gdrs. A, B, C, D, E, F sont proportionnelles
 ou $A : B = C : D = E : F$ &c.

THESE.

$$A + C + E : B + D + F = A : B.$$

Préparation.

1. Prenez les équimultiples mA, mC, mE des antécédens A, C, E ;
 2. De même les équimultiples nB, nD, nF des conséquens B, D, F .
- } Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puis donc que $A : B = C : D = E : F$ (Hyp.);

1. Si mA est $>$, $=$, ou $<$ nB , mC est pareillement $>$, $=$, ou $<$ nD ; & de même mE est $>$, $=$ ou $<$ nF .

Def. 5. L. 5.

En ajoutant donc de part & d'autre les gdrs. $>$, $=$ ou $<$.

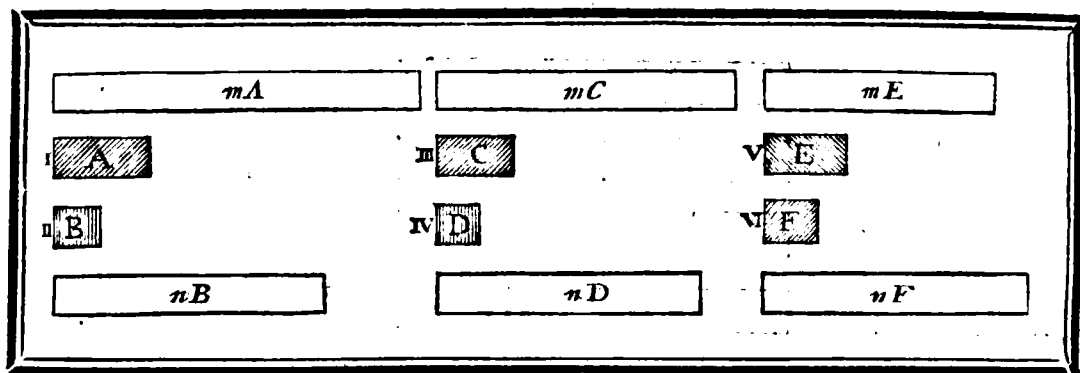
2. Les gdrs. $mA + mC + mE$ seront constamment $>$, $=$, ou $<$ les gdrs. $nB + nD + nF$, selon que mA est $>$, $=$, ou $<$ nB .

Or les gdrs. $mA + mC + mE$ & mA sont des équimultiples des gdrs. $A + C + E$ & A (Prep. 1 & Prop. 1. L. 5); item les gdrs. $nB + nD + nF$ & nB sont des équimultiples des gdrs. $B + D + F$ & B (Prep. 2 & Prop. 1. L. 5);

3. Partant $A + C + E : B + D + F = A : B$.

Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIII. THEOREME XIII.
SI la premiere grandeur (A) a même raison à la seconde (B), que la troisieme (C) à la quatrieme (D); mais que la troisieme (C) ait plus grande raison à la quatrieme (D), que la cinquieme (E) à la sixieme (F): la raison de la premiere (A) à la seconde (B) sera aussi plus grande, que la raison de la cinquieme (E) à la sixieme (F).

HYPOTHESE.

- I. $A : B = C : D$.
- II. $C : D > E : F$.

THESE.

$$A : B > E : F.$$

Préparation.

1. La raison de $C : D$ étant $>$ la raison de $E : F$ (Hyp. 2), prenez des équimult. mC & mE des antécédens C & E ; & pareillement d'autres équimultiples nD & nF des conséquens D & F , tellement que mC soit $>$ nD sans que mE soit $>$ nF ; Dem. 1. L. 5;
Def. 7. L. 5;
5. 5.
2. Prenez mA autant multiple de A que mC l'est de C .
3. De même nB autant multiple de B que nD l'est de D . Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

PUIS donc que $A : B = C : D$ (Hyp. 1), & que mA , mC sont des équimultiples des antécédens & nB , nD des équimultiples des conséquens (Prep. 2 & 3),

1. La gdr. mA sera $>$, $=$, ou $<$ nB ; selon que mC sera $>$, $=$, ou $<$ nD . Def. 5. L. 5.
 Or mC est $>$ nD (Prep. 1);

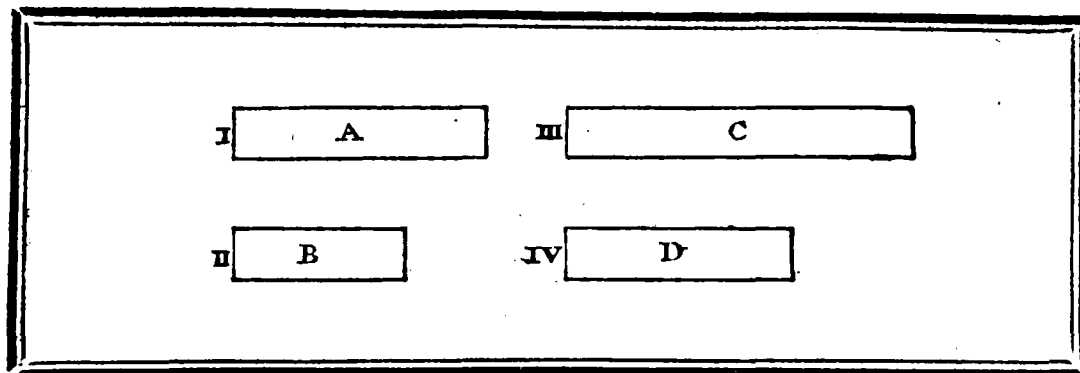
2. Donc mA est aussi $>$ nB .

Mais en même tems mE n'est pas $>$ nF (Prep. 1), & les gdrs. mA & mE sont des équimultiples des antécédens A & E , & nB , nF des équimultiples des conséquens B & F (Prep. 1 & 2),

3. Partant la raison $A : B$ est $>$ la raison $E : F$.

Def. 7. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV. THEOREME XIV.
Si quatre grandeurs (A, B, C, D) sont proportionnelles: selon que la premiere (A) fera plus grande, égale, ou moindre, que la troisieme (C), la seconde (B) fera aussi plus grande, égale, ou moindre que la quatrieme (D).

HYPOTHESE.

I. $A : B = C : D$.II. A est $>$, = ou $<$ C.

THESE.

Selon que A est $>$, = ou $<$ C.
B sera $>$, = ou $<$ D.C A S I. Si A est $>$ C.

DEMONSTRATION.

1. LA raison de A : B est donc $>$ la raison C : B.
 Mais $A : B = C : D$ (Hyp. I);
2. Donc la raison de C : D est $>$ la raison C : B.
3. D'où il suit, que D est $<$ B ou B $>$ D.

Prop. 8. L. 5.

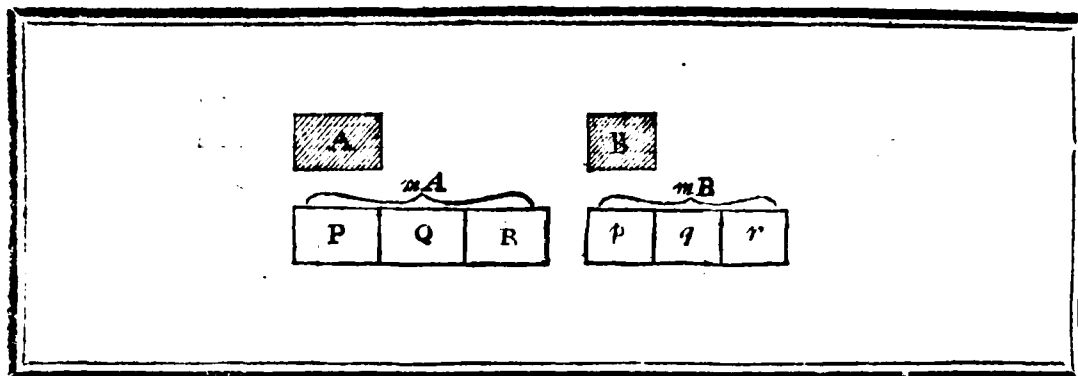
Prop. 13. L. 5.

Prop. 10. L. 5.

- On démontrera de la même maniere pour les deux autres cas; si $A = C$, que B sera $= D$; & si A est $<$ C, que B sera $<$ D.
4. Par conséquent, selon que A est $>$, =, ou $<$ C, pareillement B est $>$, =, ou $<$ D.

C. Q. F.D.





PROPOSITION XV. THEOREME XV.
Les parties (A & B) sont en même raison que leurs équimultiples (mA & mB).

HYPOTHESE

Les gdrs. mA & mB sont des équimult. des gdrs. A & B.

THESE.

$$A : B = mA : mB.$$

Préparation.

1. Divisez mA en ces parties P, Q, R chacune $= A$.
2. Et mB en ces parties p, q, r chacune $= B$.

$\frac{1}{2}$ Dem. 2. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque les gdrs. mA , mB sont équimultiples des gdrs. A & B (*Hyp*).

1. Le nombre des parties P, Q, R &c. est $=$ au nombre des parties p, q, r &c.

Et d'autant que $P = Q = R$ (*Prep. 1*), & $p = q = r$ (*Prep. 2*),

2. La gdr. $P : p = Q : q = R : r$ &c.

3. C'est pourquoi $P + Q + R$, ou $mA : p + q + r$ ou $mB = P : p$.

Mais à cause que $P = A$ & $p = B$ (*Prep. 1 & 2*),

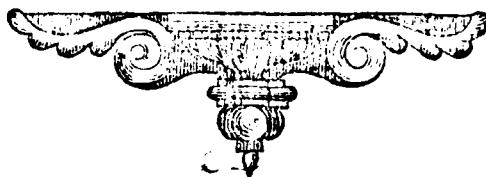
4. La gdr. $P : p = A : B$.

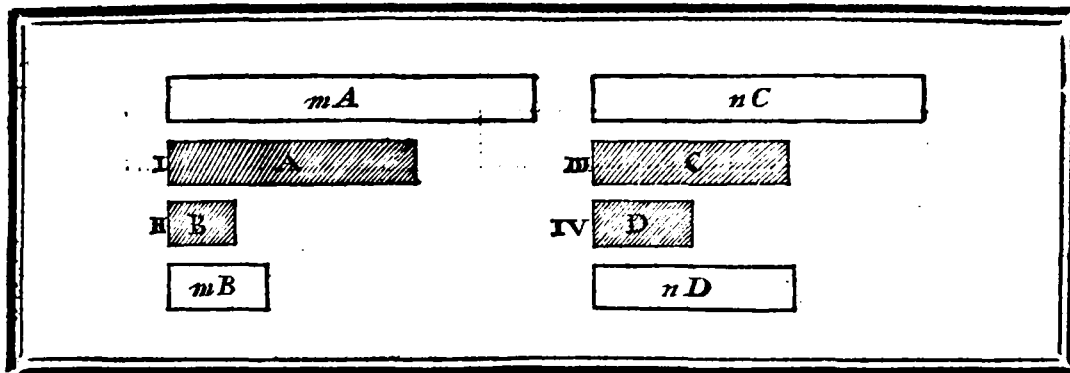
5. Partant $A : B = mA : mB$.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Prop. 7. L. 5.} \\ \text{Prop. 11. L. 5.} \\ \text{Prop. 12. L. 5.} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Prop. 7. L. 5.} \\ \text{Prop. 11. L. 5.} \end{array} \right.$

C. Q. F. D.





PROPOSITION XVI. THEOREME XVI.
SI quatre grandeurs (A, B, C, D) sont en proportion, elles le seront encore en raison alterne.

HYPOTHESE.
 $A : B = C : D$.

THESE.
 $A : C = B : D$.

Préparation.

1. Prenez des équimult. quelconques $m A$, & $m B$ des termes A & B de la première raison.
 2. Prenez d'autres équimult. quelconques $n C$, $n D$ des termes C & D de la seconde raison.
- } Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puis donc que A & B sont des parties des équimult. $m A$ & $m B$ (Prep. 1),

1. On aura $A : B = m A : m B$. Prop. 15. L. 5.
- Mais $A : B = C : D$ (Hyp.);
2. Donc $C : D = m A : m B$. Prop. 11. L. 5.
3. De même $C : D = n C : n D$. Prop. 15. L. 5.
4. Partant $m A : m B = n C : n D$. Prop. 11. L. 5.
5. C'est pourquoi, selon que $m A$ est $>$, $=$, ou $<$ $n C$, pareillement $m B$ sera $>$, $=$, ou $<$ $n D$. Prop. 14. L. 5.
- Or $m A$ & $m B$ étant des équimult. des termes A & B pris comme antécédens (Prep. 1), & $n C$, $n D$ étant d'autres équimultiples des termes C & D considérés comme conséquens (Prep. 2),
6. Partant $A : C = B : D$. Def. 5. L. 5.

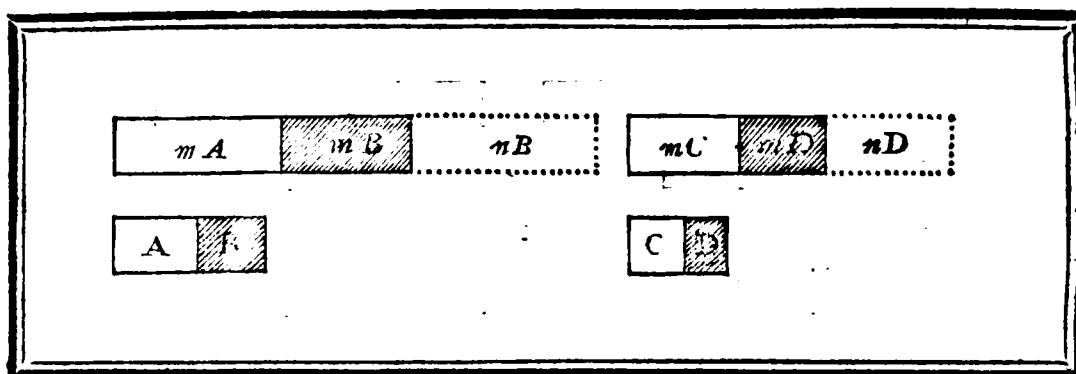
C. Q. F. D.

Remarque.

IL suit de cette proposition, que si quatre grandeurs sont proportionnelles, selon que la première est plus grande, égale, ou moindre que la seconde, la troisième est de même plus grande, égale, ou moindre que la quatrième.

- Car puisque $A : B = C : D$ (Hyp),
1. On aura $A : C = B : D$. Prop. 16. L. 5.
 2. Donc, selon que A & $>$ ou $<$ B, C sera pareillement $>$, $=$ ou $<$ D. Prop. 14. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII. THEOREME XVII.
Si les grandeurs composées ($A + B$ & $C + D$ comparées à leurs parties B & D) sont proportionnelles: les grandeurs divisées le seront aussi.

HYPOTHESE.

$$A + B : B = C + D : D$$

THESE.

$$A : B = C : D.$$

Préparation.

1. Prenez des équimult. quelconques mA , mB , mC , mD des grandeurs A , B , C , D .
2. Prenez encore des équimult. quelconques nB , nD des grandeurs B & D .

Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

1. **L**a gdr. entière $mA + mB$ est donc autant multiple de la gdr. $A + B$, que mA l'est de A , ou mC de C .
2. De même, la gdr. entière $mC + mD$ est autant multiple de la gdr. $C + D$, que mC l'est de C .
3. Par conséquent $mA + mB$ est multiple de $A + B$, autant que $mC + mD$ l'est de $C + D$.
4. On voit aussi que les gdrs. entières $mB + nB$, $mD + nD$ sont équimult. des gdrs B & D .
 Or $A + B : B = C + D : D$ (Hyp.), & $mA + mB$, $mC + mD$ sont équimult. des antécédens $A + B$ & $C + D$ (Arg. 3); item $mB + nB$, $mD + nD$ sont équimult. des conséquens B & D (Arg. 4);
5. Par conséquent, si $mA + mB$ est $>$, $=$, ou $<$ $mB + nB$; $mC + mD$ est aussi $>$, $=$, ou $<$ $mD + nD$.
 Mais, si $mA + mB$ est $>$, $=$, ou $<$ $mB + nB$; en retranchant la partie commune mB ,
 6. Le reste mA est encore $>$, $=$, ou $<$ le reste nB .
 De même, si $mC + mD$ est $>$, $=$, ou $<$ $mD + nD$; en retranchant la partie commune mD ,
 7. Le reste mC est encore $>$, $=$, ou $<$ le reste nD .
 8. C'est pourquoi, si mA est $>$, $=$, ou $<$ nB ; mC est pareillement $>$, $=$, ou $<$ nD .
 Mais mA & mC sont des équimult. de A & de C pris comme antécédens (Prep. 1); & nB , nD des équimult. de B & D considérés comme conséquens (Prep. 2);
9. Partant $A : B = C : D$.

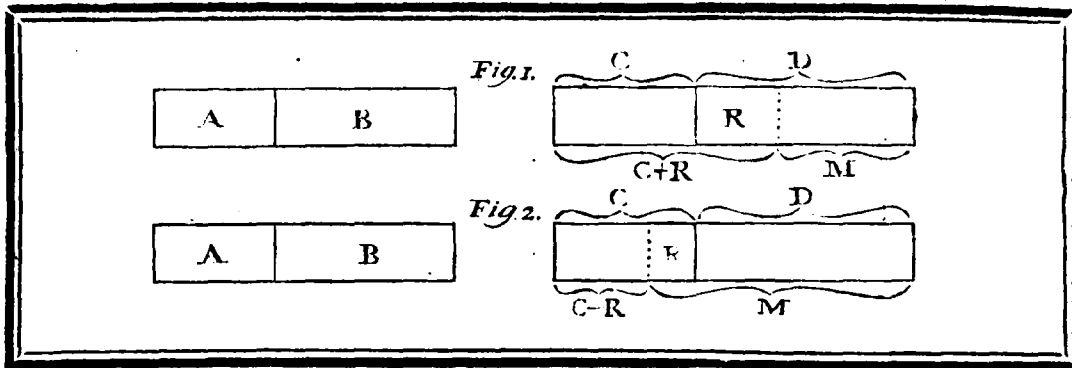
Prop. 2. L. 5.

Prop. 1. L. 5.

Prop. 1. L. 5.

Def. 5. L. 5.
 5. 8 & 9.

C. Q. F.D. Def. 5. L. 5.



PROPOSITION XVIII. THEOREME XVIII.
SI des grandeurs divisées sont proportionnelles ($A : B = C : D$), elles seront encore proportionnelles en composant ($A+B : B = C+D : D$).

HYPOTHESE.
 $A : B = C : D$.

THESE.
 $A + B : B = C + D : D$.

DEMONSTRATION.

Sinon, $A + B : B = C + D$: autre gdr. $M < \text{ou} > D$.

C A S I. Soit d'abord $M < D$, ou $M + R = D$ (Fig. 1).

Puis donc que $A + B : B = C + D : M$, ou $A + B : B = C + M + R : M$.

1. On aura dividendo $A : B = C + R : M$.

Prop. 17. L. 5.

Mais $A : B = C : D$. (Hyp.);

2. Partant $C + R : M = C : D$.

Prop. 11. L. 5.

Or $C + R$ est $> C$ (Ax. 8. L. 1);

3. Donc M est $> D$, & la supposition que M soit $< D$, est impossible.

Prop. 14. L. 5.

C A S II. Soit ensuite $M > D$, ou $M = D + R$ (Fig. 2).

Puis donc que $A + B : B = C + D : M$, ou $A + B : B = C + D : D + R$.

4. On aura dividendo $A : B = C - R : D + R$.

Prop. 17. L. 5.

Mais $A : B = C : D$. (Hyp.).

6. Partant $C - R : M = C : D$.

Prop. 11. L. 5.

Or $C - R$ est $< C$ (Ax. 8. L. 1);

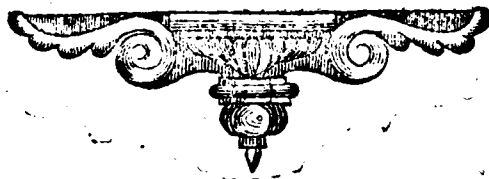
7. La gdr. M est donc $< D$, & la supposition que M soit $> D$, est impossible.

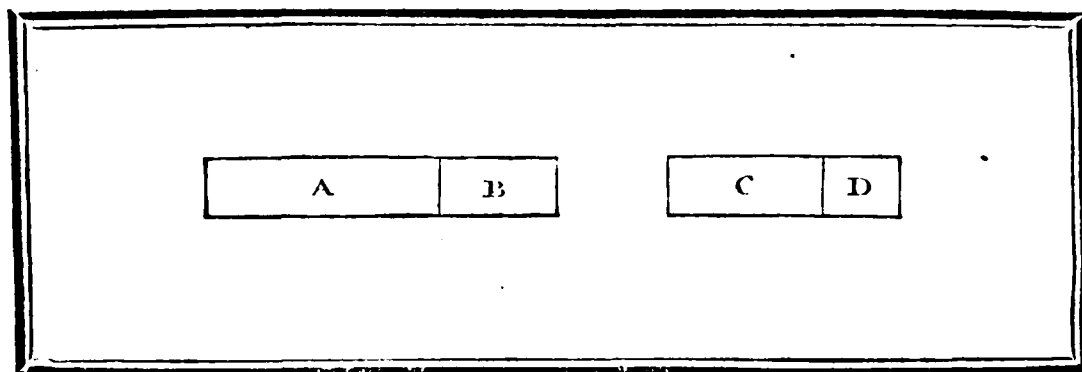
Prop. 14. L. 5.

La gdr. M ne pouvant donc être ni $< D$ (Arg. 3), ni $> D$ (Arg. 7),

8. Il s'enfuit que M est $= D$; & que $A + B : B = C + D : D$.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XIX. THEOREME XIX.
Si le Tout ($A+B$) est au Tout ($C+D$), comme le retranché (A) est au retranché (C), le reste (B) sera aussi au reste (D), comme le Tout ($A+B$) est au Tout ($C+D$).

HYPOTHESE.
 $A+B : C+D = A : C.$

THESE.
 $B : D = A+B : C+D.$

DEMONSTRATION.

Puisque
 1. Donc alternando $A+B : C+D = A : C.$ (Hyp.). Prop. 16. L. 5.
 2. Puis dividendo $A+B : A = C+D : C.$ Prop. 17. L. 5.
 3. Et alternant de nouveau $B : D = A : C.$ Prop. 16. L. 5.
 Mais d'autant que $A+B : C+D = A : C.$ (Hyp.).
 4. Il suit que $B : D = A+B : C+D.$ Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E.

Si des grandeurs, composées sont proportionnelles, c. à d. que $A+B : A = C+D : C$

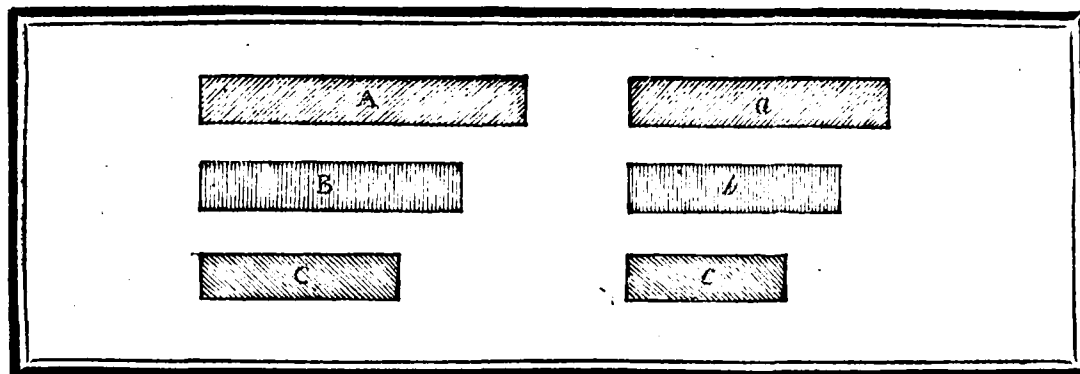
On peut inférer par *conversion de raison* $A+B : B = C+D : D$ (Def. 17. L. 5).

Car d'abord $A+B : C+D = A : C$ (Hyp. & Prop. 14).

C'est pourquoi $A+B : C+D = B : D$ (Prop. 19).

Donc $A+B : B = C+D : D$ (Prop. 14).





PROPOSITION XX. THEOREME XX.
 S'il y a une suite de trois grandeurs (A, B, C) d'un côté, & une suite de trois autres grandeurs (a, b, c) de l'autre, telles que les raisons de la premiere suite soient égales aux raisons de la seconde suite, chacune à chacune, prises dans le même ordre direct, il sera vrai, par égalité de raison, que selon que la premiere grandeur (A) est plus grande, égale, ou moindre que la troisieme (C) dans une des suites, de même dans l'autre, la premiere grandeur (a) sera aussi plus grande, égale, ou moindre que la troisieme (c).

HYPOTHESE.

- I. $A : B = a : b.$
- II. $B : C = b : c.$

THESE.

Selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C,
 a est aussi $>$, $=$, ou $<$ c.

DEMONSTRATION.

C A S I. Soit $A > C.$

Puis donc que A est $>$ C

1. La Raison $A : B$ est $>$ $C : B.$

Prop. 8. L. 5.

Mais $A : B = a : b.$ (Hyp. 1).

& $C : B = c : b.$ (Hyp. 2 & Prop. 4. L. 5 Coroll.).

2. Donc la raison $a : b$ est $>$ $c : b.$

Prop. 13. L. 5.

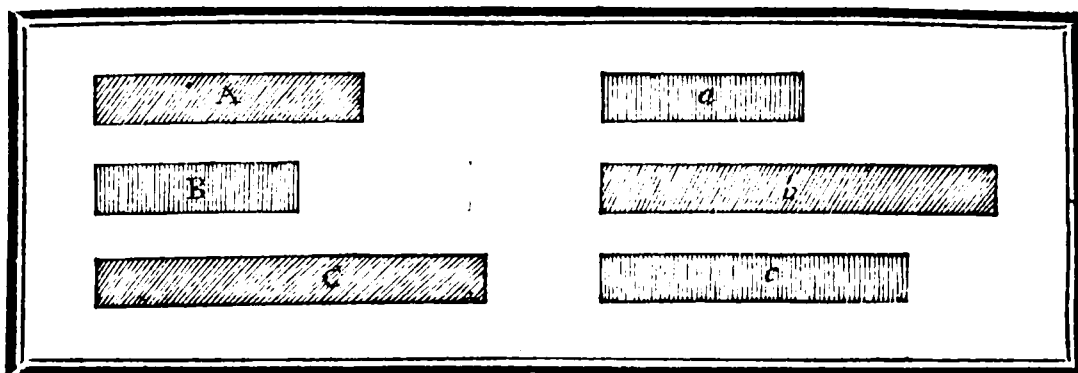
3. Partant a est aussi $>$ $c.$

Prop. 10. L. 5.

4. On prouvera de la même manière, si A est $= C$; qu'aussi a est $= c$; & encore de même; si A est $<$ C , qu'aussi a est $<$ $c.$

5. Partant, selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C , a sera aussi $>$, $=$, ou $<$ $c.$

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXI. THEOREME XXI.
S'il y a une suite de trois grandeurs (A, B, C) d'un côté, & une suite de trois autres grandeurs (a, b, c) de l'autre, telles que les raisons de la premiere suite soient égales à celles de la seconde suite, chacune à chacune, dans un ordre troublé, il sera vrai, par égalité de raison, que selon que la premiere grandeur (A) est plus grande, égale, ou moindre que la troisieme (C) dans une des suites, de même dans l'autre la premiere grandeur (a) fera aussi plus grande, égale, ou moindre que la troisieme (c).

HYPOTHESE.

- I. $A : B = b : c$.
 II. $B : C = a : b$.

THESE.

Selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C.
 a est aussi $>$, $=$, ou $<$ c.

DEMONSTRATION.**CAS I. Soit $A > C$.**

Puis donc que

1. La raison de

Mais

& invertendo

2. Partant, la raison

3. Et de-là

4. On démontrera de-la même manière, si A est $=$ C, qu'aussi a est $=$ c; & encore de même, si A est $<$ C, qu'aussi a est $<$ c.

5. Partant, selon que A est $>$, $=$, ou $<$ C, a sera aussi $>$, $=$, ou $<$ c.

A est $>$ C

$A : B > C : B$.

$A : B = b : c$ (Hyp. 1).

$C : B = b : a$ (Hyp. 2. & Prop. 4. L. 5. Coroll.).

$b : c > b : a$.

c est $<$ a, ou a $>$ c.

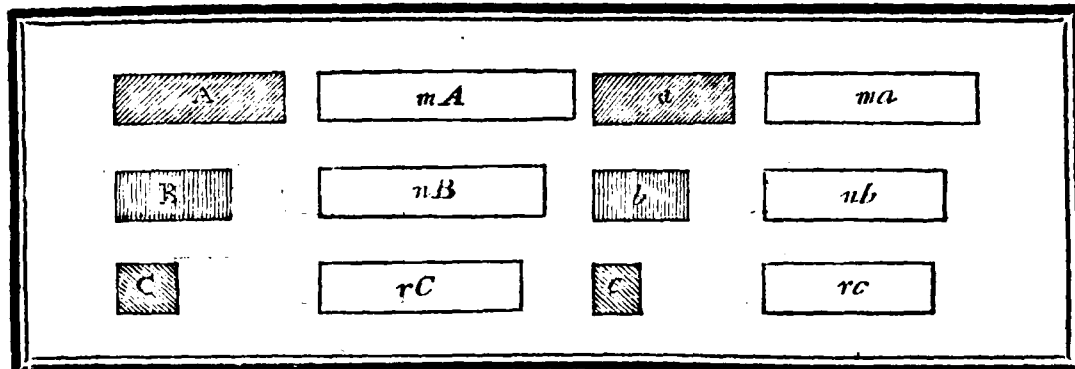
Prop. 8. L. 5.

Prop. 13. L. 5.

Prop. 10. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXII. THEOREME XXII.
 S'il y a deux suites de grandeurs (A, B, C &c. a, b, c &c.) de même nombre de part & d'autre, telles que les raisons de l'une soient égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, prises dans un ordre direct, les extrêmes seront proportionnelles par égalité de raison ordonnée, ou *ex æquo ordinatè*.

HYPOTHESE.

- I. $A : B = a : b$.
- II. $B : C = b : c$.

THESE.

$$A : C = a : c$$

Préparation.

1. Prenez mA & ma équimult. de A & a .
2. De même nB & nb autres équimult. de B & b .
3. Enfin rC & rc équimult. de C & c .

{ Dem. 1. L. 5.

DEMONSTRATION.

Puisque $A : B = a : b$ (Hyp. 1).

1. On aura $mA : nB = ma : nb$

Prop. 4. L. 5.

De même $B : C = b : c$ (Hyp. 2).

2. Par conséquent $nB : rC = nb : rc$.

Prop. 4. L. 5.

3. Donc mA, nB, rC & ma, nb, rc forment deux suites de grandeurs, telles que les raisons de l'une sont égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre direct.

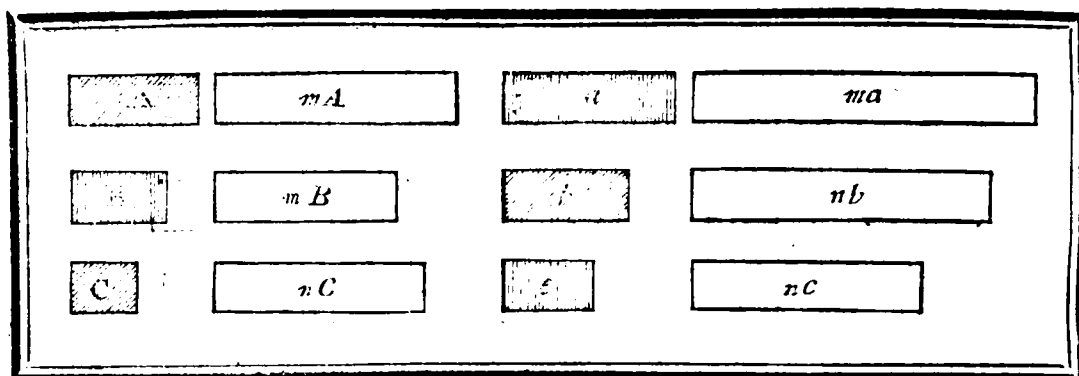
4. Partant, par égalité de raison, selon que la première mA d'une des suites est $>$, $=$, ou $<$ que la troisième rC , de même la première ma de l'autre suite sera $>$, $=$, ou $<$ que la troisième rc .

Prop. 26. L. 5.

5. D'où il suit que $A : C = a : c$.

Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



P R O P O S I T I O N X X I I I . T H E O R E M E X X I I I .

S'il y a deux suites de grandeurs (A, B, C & a, b, c & c) de même nombre de part & d'autre, telles que les raisons de l'une soient égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre renversé ou troublé, les extrêmes seront proportionelles par égalité de raison troublée, ou *ex æquo perturbatè*.

H Y P O T H E S E .

- I. $A : B = b : c$.
- II. $B : C = a : b$.

T H E S E .

$$A : C = a : c$$

P r é p a r a t i o n .

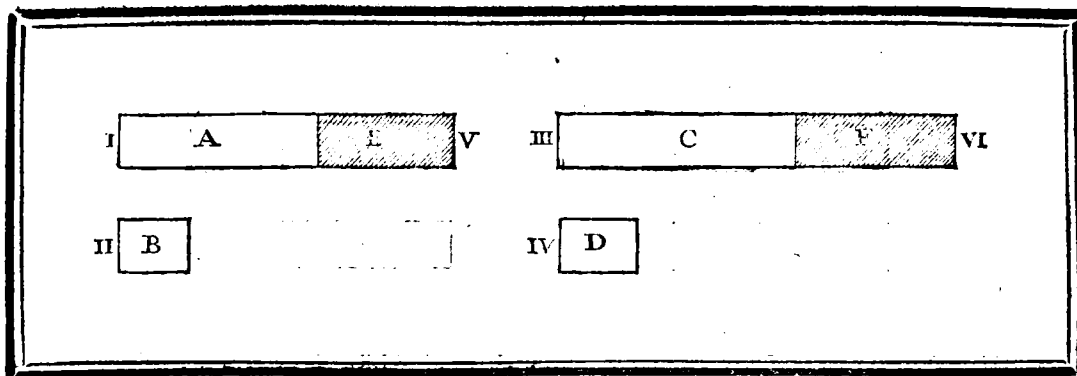
1. Prenez $m A, m B, m a$ équimult. des gdrs. A, B, a .
2. De même $n C, n b, n c$ autres équimult. des gdrs. C, b, c .

} Dem. 1. L. 5.

D E M O N S T R A T I O N .

- Puisque $m A$ & $m B$ sont des équimult. de A & de B (Prep. 1).
1. On aura $A : B = m A : m B$. Prop. 15. L. 5.
 2. Par la même raison $b : c = n b : n c$.
 - Mais $A : B = b : c$ (Hyp. 1).
 3. Donc $m A : m B = n b : n c$. Prop. 11. L. 5.
 - Et à cause que $B : C = a : b$ (Hyp. 2).
 4. On aura $m B : n C = m a : n b$. Prop. 4. L. 5.
 5. D'où il suit que $m A, m B, n C$; & $m a, m b, n c$ forment deux suites de gdrs. telles que les raisons de l'une sont égales aux raisons de l'autre, chacune à chacune, dans un ordre renversé.
 6. Partant, par égalité de raison, selon que la première $m A$ de l'une des suites est $>$, $=$ ou $<$ que la troisième $n C$, de même la première $m a$ de l'autre suite sera $>$, $=$, ou $<$ que la troisième $n c$. Prop. 21. L. 5.
 7. C'est pourquoi $A : C = a : c$. Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV. THEOREME XXIV.
SI quatre grandeurs (A, B, C, D) sont proportionnelles, & qu'une cinquieme (E) soit à la seconde (B), comme une sixieme (F) est à la quatrieme (D), la composée ($A+E$) de la premiere & de la cinquieme sera à la seconde (B), comme la composée ($C+F$) de la troisieme & de la sixieme sera à la quatrieme (D).

HYPOTHESE.

- I. $A : B = C : D$.
- II. $E : B = F : D$.

THESE.

$$A + E : B = C + F : D.$$

DEMONSTRATION.

Puisque

1. Il suit par inversion

Et d'autant que

2. Par égalité ordonnée

3. Donc par composition

Mais à cause que

4. Il suit encore par

égalité ordonnée que

$$E : B = F : D \quad (\text{Hyp. 2}).$$

$$B : E = D : F.$$

$$A : B = C : D \quad (\text{Hyp. 1}).$$

$$A : E = C : F.$$

$$A + E : E = C + F : F.$$

$$E : B = F : D \quad (\text{Hyp. 2}).$$

$$A + E : B = C + F : D.$$

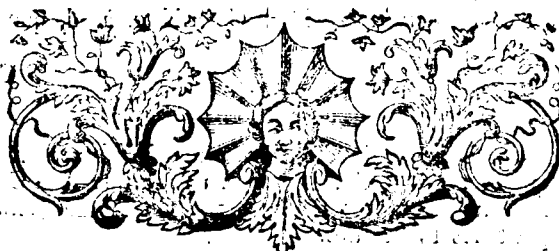
[Prop. 4. L. 5.
Coroll.

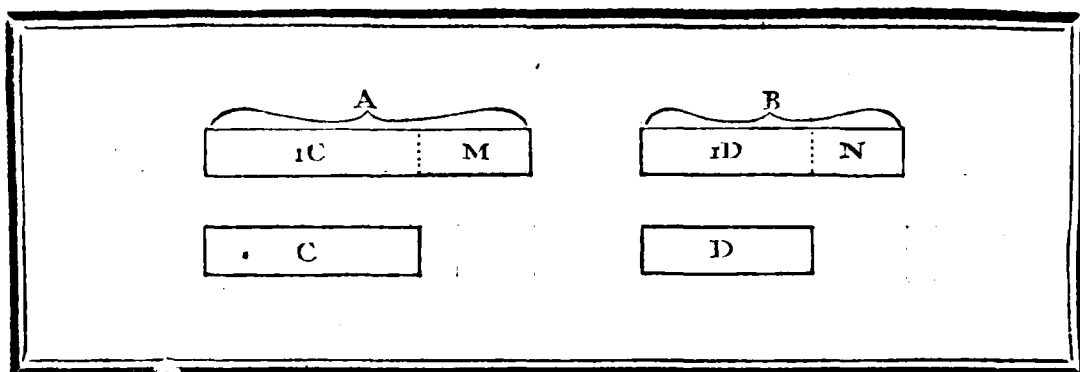
Prop. 22. L. 5.

Prop. 18. L. 3.

Prop. 22. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXV. THEOREME XXV.
SI quatre grandeurs (A, B, C, D) sont proportionnelles, la somme de la plus grande (A) & de la plus petite (D) excède la somme des deux autres (B & C).

HYPOTHESE.

1. $A : B = C : D$.
11. A est le plus grand terme & par conséquent (*) D le plus petit.

THESE.

$$A + D > B + C.$$

Préparation.

Faites $1C = C$ & $1D = D$.

DEMONSTRATION.

Puis donc que $A : B = C : D$ (Hyp. 1), & que $C = 1C$ & $D = 1D$ (Prep.).

1. Il suit que $A : B = 1C : 1D$. Prop. 7. L. 5.
2. C'est pourquoi $A : B = M : N$. Prop. 19. L. 5.
 Mais la gdr. A étant $> B$ (Hyp. 2).
3. La gdr. M est aussi $> N$. Prop. 16. L. 5.
 De plus, à cause que $C = 1C$ & $D = 1D$ (Prep. 1 & 2). Rem.
4. Il s'ensuit que $1C + D = 1D + C$. Ax. 2. L. 1.
 Et comme M est $> N$ (Arg. 3).
5. Il s'ensuit de plus que $1C + D + M > 1D + C + N$, c. à d. que A + D est $> B + C$. Ax. 4. L. 1.

C. Q. F. D.

(*) L'Auteur suppose la conséquence de cette Hypothèse suffisamment évidente par les vérités précédentes. Car, puisque $A : B = C : D$ (Hyp. 1), & que $A > C$ (Hyp. 2), B est $> D$ (Prop. 14. L. 5). De même A étant $> B$ (Hyp. 2), C est $> D$. (Rem. de Prop. 16. L. 5); Partant D est le plus petit des IV termes.

APPENDICE.

DE LA

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION

DES

RAISONS

ET DES

LOGARITHMES.

A P P E N D I C E.

De la Composition & Décomposition des Raisons & des Logarithmes.

D E F I N I T I O N I.

MULTIPLIER, dans un sens général, n'est autre chose que trouver une grandeur P , qui soit à une grandeur homogène F , dans la raison donnée d'une autre grandeur quelconque f , à une unité homogène.

§. 1. Pour peu qu'on se rende attentif à ce qui se passe dans la multiplication numérique, on trouvera qu'il y est question de résoudre ce Problème général. Une raison $1 : f$ étant donnée, avec une grandeur quelconque F , trouver une autre grandeur de même genre P , telle que $1 : f = F : P$?

Par ex. en multipliant 5 par 3, on cherche un PRODUIT 15, qui contienne le FACTEUR 5 trois fois, comme l'autre FACTEUR 3 contient l'unité sous entendue trois fois. La multiplication des nombres rationels s'achève donc arithmétiquement, en répétant l'un des Facteurs autant de fois que l'unité se trouve répétée dans l'autre. Mais ce caractère de l'addition répétée, qui fixe suffisamment la nature de la multiplication numérique rationnelle, n'étant guères applicable à l'idée de cette opération prise dans un sens plus général, c. à. d. entant qu'elle manie les grandeurs non-rationnelles, on est obligé, pour la définir, de se servir du caractère plus étendu de la proportionnalité, en la regardant, comme la manière de trouver une IV proportionnelle à l'unité & aux deux Facteurs.

§. 2. On reconnoît sans peine que multiplier, & trouver une IV proportionnelle à trois termes donnés, sont des opérations analogues, ou plutôt identiques. Il y a cette différence, que, dans la première, on regarde le premier terme comme une unité homogène à un des Facteurs f ; ce qui dispense de faire mention de la division du produit par le premier terme; au-lieu que dans la dernière, on envisage souvent le premier terme comme une grandeur quelconque; ce qui oblige de faire succéder à la multiplication des termes moyens, la division du Produit par le premier. Au reste la raison ne subsistant qu'entre grandeurs de même genre, il est clair que l'unité 1 & l'un des deux Facteurs f doivent nécessairement être homogènes; au-lieu qu'il n'est pas absolument nécessaire que les Facteurs f & F le soient. Ces deux Facteurs peuvent être hétérogènes, comme une ligne & un plan; un plan & un solide &c; tellement que leur produit ne soit néanmoins qu'un plan ou un solide, c. à. d. une quantité homogène au second Facteur F . Car les deux premiers termes, 1 & f ne doivent être considérés que comme une simple raison, où l'on fait abstraction de la quantité spécifique & absolue des termes. A la vérité on dit communément, qu'une ligne multipliée par une ligne fait naître un plan; & qu'un plan multiplié par une ligne produit un solide; mais ces expressions n'étant pas tout à fait justes, elles ne doivent pas être prises au pied de la lettre. Euclide démontre dans la Proposition XII du VI Livre, qu'une ligne multipliée par une ligne produit une ligne; & il prouve, Proposition XXIII, que les plans des parallelogrammes semblables, sont comme les produits de leurs côtés homologues. De sorte que la multiplication d'une ligne par une autre, ne produit pas un plan, mais un nombre, ou une quantité, qui suit la raison du plan.

D E F I N I T I O N II.

DIVISER, dans un sens général, une grandeur D par une autre d , c'est trouver une grandeur Q , qui se rapporte à l'unité, de la même manière que D se rapporte à une grandeur homogène d .

On nomme la gdr. d , le DIVISEUR ; la gdr. D , le DIVIDENDE, & la gdr. Q , le QUOTIENT. Par conséquent Diviser le Dividende D par le Diviseur d , c'est trouver un Quotient Q , qui par son rapport à l'unité 1, indique la raison du Dividende au Diviseur.

Par ex. en divisant 6 par 2, on a pour Quotient 3, qui contenant l'unité trois fois, indique que le Dividende 6 contient le Diviseur 2, trois fois. D'où l'on voit qu'en général

Le Divif. 2 est au Divid. 6, comme l'unité 1 est au quotient 3.

La Définition avertit assez que le Dividende & le Diviseur doivent être des grandeurs de même genre ; & que l'unité & le Quotient doivent être dans le même cas. Car dans cette opération la raison de d à D est donnée, & on demande qu'on l'exprime par la raison de l'unité à Q ; il faut donc que les termes appartenants à la même raison soient de même genre.

La division se réduit donc à trouver une quatrième proportionnelle au Diviseur, au Dividende, & à l'unité.

D E M A N D E I.

ON demande qu'on puisse multiplier & diviser des grandeurs conformément aux Définitions I & II.

On se contente ici de demander qu'on puisse trouver une quatrième proportionnelle à l'unité & à deux autres grandeurs données, ce qui s'appelle multiplier ; qu'on puisse trouver une quatrième proportionnelle à deux grandeurs données & à l'unité, ce qui s'appelle diviser ? On se contente, dis-je, de demander ces vérités de pratique, parceque ce n'est pas ici le lieu d'enseigner les règles de l'effection, réservée aux sciences qui traitent des grandeurs particulières qu'on propose à multiplier ou à diviser. L'Arithmétique exécute ces opérations par des chiffres ; la Géométrie par des constructions linéaires ; & l'Algèbre, comme la science des grandeurs en général, ne les exécute souvent point, se contentant de les indiquer par des caractères convenables : & comme ces caractères sont d'un grand usage, nous nous en servirons, après en avoir expliqué la signification.

H Y P O T H E S E I.

ON représente le produit de deux Facteurs f & F , par l'expression fF , qui dénote par conséquent une grandeur telle que $1 : f = F : fF$ (Def. I). De même le produit de la grandeur m par fF , est représenté par l'expression mfF ; signifiant $1 : m = fF : mfF$, & ainsi des autres.

COROL.

C O R O L L A I R E I.

LA transposition des Lettres ne change point la valeur du produit, c. à d. $fF = Ff$.
 Car $1 : f = F : fF$,
 Et $1 : F = f : fF$, } (Hyp. 1 & Def. 1).
 Donc alternando $1 : f = F : Ff$. Prop. 16. L. 5.
 Partant $F : fF = F : Ff$. Prop. 11. L. 5.
 Mais $F = F$
 Donc $fF = Ff$. Prop. 14. L. 5.

C O R O L L A I R E II.

Lorsqu'on multiplie deux Facteurs égaux r & r ; le produit rr est appelé un QUARRÉ, & le Facteur r sa RACINE. Par conséquent l'unité 1 est à la racine r , comme cette racine r est au quarré rr . c. à d. $1 : r = r : rr$. (Def. 1).

En multipliant de la même manière le quarré rr par la racine r , on trouve le cube rrr .
 Partant

$$1 : r = rr : rrr. \text{ (Def. 1).}$$

De même, en multipliant le Cube rrr par la racine r , le produit $rrrr$ est appelé un QUARRÉ-QUARRÉ. Donc

$$1 : r = rrr : rrrr. \text{ (Def. 1).}$$

Et ainsi des autres produits à l'infini, auxquels on donne le nom de PUISSANCES. On les nomme première, seconde, troisième, &c., puissance; selon que dans l'expression la lettre (r) désignant la racine, est répétée une, deux, trois &c. fois. On les marque aussi de cette manière r^1 , r^2 , r^3 , caractéristique d'un usage fort étendu, qui a son fondement dans la composition & décomposition des raisons, comme nous l'expliquerons dans la suite.

C O R O L L A I R E III.

Puisque toutes les raisons sont égales à la raison $1 : r$, il s'ensuit que

$$1 : r^1 = r^1 : r^2 = r^2 : r^3 = r^3 : r^4 \text{ &c.}$$

Prop. 11. L. 5.

c. à d. toutes les raisons entre les Puissances successives sont des raisons égales & continues. Ou ce qui est la même chose; La suite des Puissances

$$1, r, r^2, r^3, r^4 \text{ &c.}$$

forme une Progression Géométrique.

} Def. 9. L. 5.
§. 2.

H Y P O T H E S E II.

LE quotient Q , qui résulte de la Division de la grandeur D par une autre d , sera représenté par le caractère $\frac{D}{d}$; ou $D : d$ tellement que $d : D = 1 : \frac{D}{d}$ (Def. 2).

Les autres caractères plus composés auront la même signification. Ainsi $\frac{D}{ad}$, représentera le Quotient qui vient en divisant la grandeur $\frac{D}{a}$ par d ; de manière que

$$a : \frac{D}{d} = 1 : \frac{D}{ad}$$

DEF-

D E F I N I T I O N III.

LEs produits, comme $m A$, $m B$, qui résultent de la multiplication de deux grandeurs A & B , par un même facteur m , seront nommés des EQUIPRODUITS.

Il ne faut pas confondre les Equimultiples avec les Equiproduits. Lorsque le Facteur m est un nombre entier & rationnel quelconque (par exemp. 7), les quantités $m A$, $m B$ (c. à. d. $7 A$, $7 B$) sont des Equimultiples de A & de B ; mais lorsque la grandeur m représente une grandeur non-rationnelle quelconque comme une racine numérique sourde, ou une circonférence de cercles, ou toute autre grandeur de l'espèce de celles qu'on nomme transcendante, les quantités $m A$ & $m B$ ne sont plus des Equimultiples, mais des Equiproduits des grandeurs A & B .

P R O P O S I T I O N I.

LEs Equiproduits $m A$ & $m B$ sont comme les Facteurs A & B .

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque $m A$ est un produit de A par m ; & $m B$ un produit de B par m ; on peut inférer

$$\begin{array}{lcl} I : m = A : m A & \} & \text{Def. 1.} \\ I : m = B : m B & \} & \\ \text{Partant } A : m A = B : m B & & \text{Prop. 11. L. 5.} \end{array}$$

$$\text{Donc alternando} \quad A : B = m A : m B \quad \text{Prop. 16. L. 5.}$$

$$\text{Ou ce qui est la même chose } m A : m B = A : B.$$

P R O P O S I T I O N II. C. Q. F. D.

Si quatre grandeurs A , B , C , D , sont en proportion, les Equiproduits $m A$ & $m C$ des antécédens, comparés à d'autres Equiproduits $n B$, $n D$ des conséquens, chacun à chacun, sont encore en proportion.

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque $m A$ & $m C$ sont des Equiproduits de A & C (Hyp.).

On aura $A : C = m A : m C$.

Derechef $n B$ & $n D$ étant des Equiproduits de B & D (Hyp.).

On aura $B : D = n B : n D$.

Mais $A : C = B : D$ (Hyp. & Prop. 16. L. 5).

Partant $m A : m C = n B : n D$.

Et alternando $m A : n B = m C : n D$.

Prop. 11. L. 5.

Prop. 16. L. 5.

P R O P O S I T I O N III. C. Q. F. D.

Si quatre grandeurs A , B , C , D sont en proportion, & que quatre autres a , b , c , d le soient aussi, les produits $a A$, $b B$, $c C$, $d D$, qui résultent en multipliant chacune par chacune, sont encore en proportion.

D E M O N S T R A T I O N.

Car puisque $A : B = C : D$, prenant les Equiproduits aA & aC des antécédens ; item les Equiproduits bB & bD des conséquens ,
on aura $aA : bB = aC : bD$. Prop. 2.

De même, puisque $a : b = c : d$; si on prend les Equiproduits aC & cC des antécédens, & les Equiproduits bD & dD des conséquens
on aura $aC : bD = cC : dD$. Prop. 2.
Partant $aA : bB = cC : dD$. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E.

Si quatre grandeurs A, B, C, D sont en proportion, leurs Quarrés, leurs Cubes, & leurs Puissances quelconques de même dénomination, sont encore en proportion.

P R O P O S I T I O N IV.

Si quatre grandeurs A, B, C, D sont en proportion, le produit AD des extrêmes, est toujours égal au produit BC des moyens.

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque $A : B = C : D$, (Hyp).
Et $D : C = D : C$,
Il suit que $AD : BC = CD : DC$,
Mais $CD = DC$ (Hyp. 1. Coroll. 1).
Partant $AD = BC$.

Prop. 3.

[Prop. 16. L. 5.
Rem.

C. Q. F. D.

D E F I N I T I O N. IV.

ON appelle RAISON D'EGALITÉ, celle où les deux termes sont égaux entr'eux, Et RAISON D'INEGALITÉ lorsque ces termes sont inégaux.

En particulier on nomme Raison de plus grande inégalité, lorsque l'antécédent est plus grand que son conséquent. Au contraire Raison de moindre inégalité, lorsque l'antécédent est moindre que son conséquent.

C O R O L L A I R E.

LE conséquent devenant l'unité, les raisons $B : 1, C : 1$ &c, sont des raisons de plus grande inégalité, lorsque les antécédens B & C sont $>$ que l'unité. Et par conséquent ces mêmes raisons renversées $1 : B, 1 : C$ seront des raisons de moindre inégalité.

DEFI.

D E F I N I T I O N V.

QUand on renverse les termes d'une raison, tellement que l'antécédent devienne conséquent, & le conséquent antécédent, cette seconde raison est appelée la R É C I P R O Q U E de la première qu'on nomme D I R E C T E.

Par ex. La raison directe $3 : 1$ a pour réciproque la raison $1 : 3$. De même prenant $B : A$ pour directe, sa réciproque est $A : B$. En général la grandeur $\frac{1}{A}$ est la réciproque de la grandeur A . Car une grandeur A se rapportant naturellement à l'unité comme conséquent, A est autant que $\frac{1}{A}$.

C O R O L L A I R E.

SI la directe, par ex. $3 : 2$, est une raison de plus grande inégalité, sa réciproque $2 : 3$ sera nécessairement une raison de moindre inégalité.

D E F I N I T I O N VI.

ON dit qu'une RAISON $M : N$ est COMPOSÉE DE DEUX OU DE PLUSIEURS RAISONS COMPOSANTES $A : B$, $C : D$, $E : F$, &c. lorsqu'elle est égale à la raison qui se trouve entre le produit $ACDE$ de tous les antécédens, comparé au produit BDF de tous les conséquens.

Par ex. soient les raisons simples $5 : 2$, $2 : 3$, $3 : 7$ &c. on dira que la raison de $5 : 7$ est une raison composée des trois proposées. Car le produit de leurs antécédens est 30, & celui de leurs conséquens 42,

$$\text{Or} \quad 5 : 7 = 30 : 42.$$

H Y P O T H E S E III.

L'Analogie qui règne entre la composition des raisons, & celle des grandeurs, conduit à indiquer la composition des raisons directes, comme l'addition des grandeurs positives, par le signe $+$.

Ainsi l'expression $+ A : B + C : D$, ou simplement $\overline{A : B + C : D}$ désigne que la première raison $A : B$ doit être composée avec la seconde $C : D$, selon la définition précédente.

Mais lorsqu'une raison doit entrer dans la composition réciproquement (Def. 5), tellement que son antécédent multiplie le produit des conséquens, & son conséquent celui des antécédens, on fait précéder une telle raison par le signe $-$.

Ainsi $\overline{A : B + C : D} - \overline{E : F}$ dénote que les raisons $A : B$, & $C : D$ doivent être composées avec la réciproque de la raison $E : F$, c. à. d. avec la raison $F : E$; d'où résulte la raison $ACF : BDE$.

C'est pourquoi les Auteurs voulant exprimer une raison composée par les composantes ont coutume de se servir de l'expression suivante

$$AC : BD = \overline{A : B + C : D} \text{ item } ACF : BDE = \overline{A : B + C : D} - \overline{E : F}.$$

Et

Et il en est de même des autres exemples. On va expliquer le fondement de cette signification du signe — .

P R O P O S I T I O N V.

S'Il y a une suite d'autant de grandeurs A, B, C, D &c. qu'on voudra: la raison de la première A à la dernière D, est composée de toutes les raisons intermédiaires A : B, B : C, C : D.

D E M O N S T R A T I O N.

Car composant la raison A : B avec la raison B : C, il en résulte la raison A B : C B. Def. 6.

Mais les termes AB : BC sont des Equiproduits des Facteurs A & C (Def. 3); Partant A : C = AB : BC. Prop. 1.

De même, composant les trois raisons A : B, B : C, C : D, on parvient à la raison ABC : BCD. Def. 6.

Mais ces termes sont des Equiproduits des Facteurs A & D (Def. 3); Partant A : D = ABC : BCD. Prop. 1.

C. Q. F.D.

C O R O L L A I R E I.

SI les raisons composantes ne sont pas continues, c. à. d. telles que le conséquent de la précédente devienne l'antécédent de la suivante; on peut les rendre telles en cherchant successivement des IV^{mes}. proportionnelles à chacune des raisons données (hormis la 1^{re}.) & au conséquent de celle qui la précède.

Par ex. soient les composantes $\overline{A : B}$, + $\overline{C : D}$ + $\overline{E : F}$, on les rendra continues, en faisant,

$$C : D = B : Q.$$

$$E : F = Q : S.$$

Car en mettant les raisons B : Q, item Q : S à la place de leurs égales C : D, & E : F; on a les raisons composantes A : B, B : Q, Q : S qui sont continues.

C O R O L L A I R E II.

Une raison d'égalité A : A ne produit aucun changement dans la composition des raisons. Car si on compose la raison A : A avec la raison B : C; on trouve la raison A B : A C, égale à la raison de B : C, (Prop. 1). Vérité qui fournit le principe d'Analogie suivant: de même que Zéro ne produit aucun changement dans la composition des grandeurs, la raison d'égalité n'en produit aucun dans la composition des raisons.

C O R O L L A I R E III.

U Ne raison directe $A : B$, composée avec sa réciproque $B : A$, produit une raison d'égalité, vu que les termes AB & BA de la composée sont égaux (Def. 4 & Cor. 1. Hyp. 1).

C O R O L L A I R E IV.

Puis donc que la composée $AB : BA$, comme raison d'égalité (Cor. 3), équivaut à Zéro en matière de composition des raisons (Cor. 2); les composantes $A : B$ & $B : A$ doivent être considérées comme d'une nature contraire relativement à cette même composition. Car la directe $A : B$, comme une raison d'inégalité, produisant un changement dans la composition, sa réciproque anéantit ce changement, en ramenant la composée à la première valeur.

Par ex. Composant la directe $A : B$ avec la raison $M : N$, la composée $AM : BM$ cesse d'être égale à la primitive $M : N$. Mais en continuant la composition avec la réciproque $B : A$, ce changement est redétruit; attendu que la composée $BAM : BAN$ redevient égale à la primitive $M : N$ (Prop. 1).

H Y P O T H È S E IV.

Puisque dans la composition des raisons, on est obligé de regarder la raison d'égalité (p. ex. $A : A$ ou $AB : BA$) comme équivalente à Zéro (Coroll. 2); on représente sa nature, (ou son effet dans cette composition), par l'expression $A : A = 0$ ou $AB : BA = 0$.

C O R O L L A I R E.

ET d'autant qu'une raison directe $A : B$, composée avec sa réciproque $B : A$ produit une raison d'égalité $AB : BA$ équivalente à Zéro en cette espèce de composition (Prop. 5. Coroll. 3. Dem. 2.) il s'ensuit que $A : B + B : A = 0$ (Hyp. 3. & 4). D'où l'on déduit, (en ajoutant de part & d'autre $- B : A$)

$$A : B = - B : A.$$

Ce qui fait voir qu'une raison négative $- B : A$ est équivalente à la réciproque $A : B$ de celle qui se trouve affectée du signe $-$. Ou bien, que si on fait précéder une raison quelconque $B : A$ du signe $-$, que l'expression négative qui en résulte dénote la réciproque de cette raison. C'est en cette manière que les signes $+$ & $-$ mis au devant d'une même raison, expriment leur nature contraire (Prop. 5 Coroll. 4). Et cela fait comprendre pourquoi les raisons négatives doivent entrer réciproquement dans la composition (Hyp. 3).

R E M A R Q U E.

I Les Commensans doivent se mettre au fait de la correspondance qui règne entre la composition des raisons & celle des grandeurs, & faire attention à la manière de la représenter par les Caractères $+$, $-$, 0 . pour qu'ils ne se trouvent point arrêtés dans les écrits de plusieurs Auteurs célèbres qui en font usage. Cette correspondance est manifeste; car comme dans la

Com-

composition des grandeurs les positives augmentent la somme, que les négatives diminuent, & que celles qui sont égales à Zéro n'altèrent point; de même dans la composition des raisons, celles de plus grande inégalité augmentent la composée, celles de moindre inégalité la diminuent, & celles d'égalité n'y font aucun changement. Ce principe fait voir qu'on peut se servir utilement des signes +, —, o dans les deux espèces de composition, pourvu qu'on les explique conformément aux principes de chacune.

P R O P O S I T I O N VI.

DAns toute Progression Géométrique, les termes équidistans sont proportionels; ou bien leurs raisons sont égales.

D E M O N S T R A T I O N.

Que les grandeurs A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, &c, représentent les termes d'une Progression Géométrique, où les termes B & E, item F & I, soient des termes équidistans. On a donc en vertu de l'égalité & continuité des raisons qui règne dans les Progressions Géométriques,

$$\begin{array}{l} B : C = F : G \\ C : D = G : H \\ D : E = H : I \end{array}$$

Def. 9. L. 5.
§. 2.

Donc

$$B : E = F : I$$

Prop. 22. L. 5.

C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N VII.

DAns une Progression Géométrique A, B, C, D, E, F, G, &c, deux termes quelconques sont entr'eux, comme les Puissances de deux autres termes, qui se suivent immédiatement, exprimées par le nombre des raisons égales, interposées entre les deux termes qu'on compare.

D E M O N S T R A T I O N.

Soient les deux termes qu'on compare C & G, entre lesquels il se trouve quatre raisons égales, à sçavoir, les raisons C : D, D : E, E : F, F : G. je dis que

$$\begin{array}{l} C : G = C^4 : D^4 \\ \left\{ \begin{array}{l} C : D = C : D \\ D : E = C : D \\ E : F = C : D \\ F : G = C : D \end{array} \right. \end{array}$$

Car

Def. 9. L. 5.
§. 2.

Donc

$$CDEF : DEFG = C^4 : D^4$$

Prop. 35

Mais

$$CDEF : DEFG = C : G$$

Prop. 1.

Et

Partant	$C : G = C^4 : D^4$	Prop. 11. L. 5.
Et puisque	$A : B = C : D$ (Def. 9. L. 5. & § 2.).	
On aura	$A^4 : B^4 = C^4 : D^4$	Prop. 3.
Partant	$C : G = A^4 : B^4$	Prop. 11. L. 5.

Ou en général, comme la puissance IV^{me} d'un terme quelconque est à la même puissance du terme suivant. C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E I.

Puisque la suite des Puissances 1. R, RR, RRR, &c. commençant par l'unité, forme une Progression Géométrique (Hyp. 1. Cor. 3), il est manifeste qu'entre l'unité & la première puissance R il n'y a qu'une raison. Mais qu'il y en a deux égales entre l'unité & le quarré RR; qu'il y en a trois entre l'unité & le cube RRR & ainsi de suite. C'est pourquoi on marque ces puissances avec les chiffres 1, 2, 3, 4 &c. nommés, EXPOSANS, de cette manière R^1, R^2, R^3, R^4 &c. Où ces exposans dénotent la multiplicité de la raison primordiale 1 : R; c. à. d. combien de fois cette raison doit être continuée, avant qu'on arrive au terme dont on considère l'exposant.

C O R O L L A I R E II.

Toutes les puissances de l'unité à l'infini sont égales à l'unité.
 Car expliquant r par 1. $1 : 1 = 1 : 1^2$ (Hyp. 1. Coroll. 2).
 Or $1 = 1$
 Donc $1 = 1^2$
 De même $1 : 1 = 1^2 : 1^3$ (Hyp. 1. Coroll. 2).
 Or $1 = 1^2$
 Donc $1 = 1^3$
 Et ainsi de même des autres puissances à l'infini.

Prop. 14. L. 5.

Prop. 14. L. 5.

C O R O L L A I R E III.

Lorsque deux ou plusieurs raisons sont exprimées par une même primordiale (R : 1) ayant pour conséquent l'unité; leur composition s'exécutera par la simple addition des Exposans des antécédens, c. à. d. de leurs exposans de multiplicité. Car supposons qu'il faille composer la raison $R^3 : 1$ avec la raison $R^2 : 1$. la composée sera $= R^3 : 1 + R^2 : 1$, (Def. 6. & Hyp. 3).

Mais $\frac{R^3 : 1}{R^2 : 1} = \frac{R : 1 + R : 1 + R : 1}{R : 1 + R : 1} : 1$ (Def. 6.)

& $\frac{R^2 : 1}{R : 1} = \frac{R : 1 + R : 1}{R : 1} : 1$ (Def. 6.)

Partant $\frac{R^3 : 1 + R^2 : 1}{R^2 : 1} = \frac{R : 1 + R : 1 + R : 1 + R : 1 + R : 1 + R : 1}{R : 1} : 1$
 $= R^5 : 1$.

Def. 6.

Mais $R^5 : 1 = R^{3+2} : 1$

Par conséquent l'Exposant de multiplicité de la composée est la somme des Exposans des composantes.

DEFI-

D E F I N I T I O N. IX.

U Ne grandeur R est considérée comme la RACINE d'une autre grandeur E, lorsqu'un de ses produits successifs R^2, R^3 , ou R^4 , &c, devient égal à la grandeur proposée E. En particulier on nomme R la RACINE QUARRÉE de E, lorsque $R \cdot R$ ou $R^2 = E$; & la RACINE CUBIQUE, quand $R \cdot R \cdot R$ ou $R^3 = E$; & ainsi de suite.

On marque la racine par le signe $\sqrt{}$; & l'ordre des racines par les chiffres 2, 3, 4, &c. nommés EXPOSANS RADICAUX. Ainsi $\sqrt[2]{E}$, $\sqrt[3]{E}$, $\sqrt[4]{E}$, dénotent successivement la racine quarrée, cubique, quarré-quarrée de E; & ainsi de suite à l'infini.

D E M A N D E II.

Q U'on puisse trouver les racines quarrées, cubiques, & toutes les autres racines des grandeurs déterminées.

L'Arithmétique détermine ces racines ou exactement, ou à peu près, par ses opérations. L'Algèbre abrège ces opérations au moyen de ses formules générales. Et la Géométrie assigne un certain nombre de ces racines, par des constructions linéaires. On suppose donc que l'extraction effective des racines est possible, afin de pouvoir établir les vérités Théorétiques qui en dépendent.

P R O P O S I T I O N VIII.

L A racine d'une grandeur E, exprimée par un Exposant radical déterminé, est égale à la première moyenne proportionnelle entre l'unité & la grandeur E; si l'on prend autant de ces moyennes proportionnelles, que l'Exposant radical contient d'unités, moins une.

D E M O N S T R A T I O N.

S Upposons pour fixer les idées, qu'il soit question de la racine quatrième de E, que nous nommerons R; je dis, que prenant entre 1 & E, quatre moyennes proportionnelles moins une, c. à. d. trois, que nous nommerons R, S, T; la première R est égale à la racine quatrième de E.

Car, puisque les grandeurs 1, R, S, T, E, sont en proportion continue,

$$1 : E = 1^4 : R^4$$

Mais

$$1 = 1^4$$

Partant

$$E = R^4$$

Ou

$$\sqrt[4]{E} = R \quad (\text{Def. 9.})$$

Prop. 7.
Prop. 7.
Coroll. 2.
Prop. 14. L. 5.

Et comme le même raisonnement est applicable à tous les Cas, l'énoncé de la Proposition se soutient dans toute sa généralité.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E I.

L'Interposition des moyennes proportionnelles R, S, T, résout la raison de 1 : E, en autant de raisons égales à celle de 1 : R, que l'Exposant radical contient d'unités. Par ex. dans ce cas, les

trois moyennes proportionnelles R, S, T, résolvent la raison de 1 : E, en ces quatre raisons égales, $1 : R = R : S = S : T = T : E$.

C'est pourquoi si l'on considère la raison de 1 : E, ou de 1 : E^1 comme primordiale, & celle de 1 : R comme une de ses dérivées; cette raison de 1 : R est sousquadruplée de la raison entière, 1 : E, ou elle est $\frac{1}{4}$ des composantes. Celle de 1 : S = $1 : R + R : S$ (Def. 6) en est $\frac{2}{4}$, celle de 1 : T = $1 : R + R : S + S : T$ en est $\frac{3}{4}$, enfin celle de 1 : E = $1 : R + R : S + S : T + T : E$ en est $\frac{4}{4}$ ou 1, c. à. d. elle est égale à la raison entière.

C O R O L L A I R E II.

SI l'on veut donc exprimer les racines analogiquement à la Caractéristique des puissances; il faut regarder R comme $= E^{\frac{1}{4}}$; où la puissance fractionnaire $\frac{1}{4}$ marque que la raison de 1 : $E^{\frac{1}{4}}$ est une des quatre raisons égales interposées entre la raison 1 : E. Ce qui s'accorde avec les principes antérieurs. Car supposant que $E^{\frac{1}{4}}$ dénote la première des trois moyennes proportionnelles entre 1 & E, ou ce qui est la même chose, la racine quatrième de E

On a $1 : E^1 = 1^4 : E^{(1)^4}$ Prop. 7.

Mais $1 = 1^4$ (Prop. 7. Coroll. 2) & $E^1 = E^{(1)^4}$. Car $(1)^4 = 1$.

Par conséquent $1 : E^1 = 1 : E^1$. Ce qui est vrai, les expressions étant identiques.

De la même manière qu'on exprime R par $E^{\frac{1}{4}}$, on doit exprimer S par $E^{\frac{2}{4}}$; T par $E^{\frac{3}{4}}$; E par $E^{\frac{4}{4}} = E^1$.

C O R O L L A I R E III.

IL suit de ces principes, que les expressions $\sqrt[4]{E}$ & $E^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{E}$ & $E^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[4]{E^3}$ ou $E^{\frac{3}{4}}$; &c. sont identiques. Cependant les dernières sont plus expressives que les premières, en ce qu'elles représentent ces grandeurs comme appartenantes à l'ordre des puissances, ou comme des termes d'autant de raisons dérivées par la voye de l'interposition & de la continuation, c. à. d. de la résolution & de la composition d'une même raison primordiale, ce qui fait leur caractère essentiel.

C O R O L L A I R E IV.

ON voit ce qu'il faut faire pour la résolution des raisons, (comme 1 : R^3 , ou $R^3 : 1$, ayant pour antécédent, ou pour conséquent l'unité) lorsqu'il est question d'en dériver une sousmultipliée quelconque selon un Exposant donné, par ex. 5. On divisera par cet Exposant 5 l'Exposant de multiplicité 3 de la raison proposée, le quotient $\frac{3}{5}$ sera l'Exposant de la sousmultipliée 1 : $R^{\frac{3}{5}}$ qu'on cherche.

COROL-

C O R O L L A I R E V.

SI l'on continue la Progression Géométrique A, B, C, D, &c. ou $1, R^1, R^2, R^3,$
 $\left\{ \begin{array}{l} d, c, b; \quad A, B, C, D, \&c. \\ \frac{1}{R^3} \frac{1}{R^2} \frac{1}{R^1} \quad 1 \quad R^1 \quad R^2 \quad R^3, \&c. \end{array} \right\}$

de l'autre côté de l'unité pour avoir les termes b, c, d, &c. ou $\frac{1}{R^1} \frac{1}{R^2} \frac{1}{R^3} \&c.$ On commence cette partie de la progression par la réciproque de la raison $1 : R$, c. à d. par la raison $R : 1$ en faisant $R : 1 = 1 : R^1$ Item $R : 1 = R^1 : R^2 \&c.$ ainsi de suite; tellement que les termes $\frac{1}{R^1}, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^3} \&c.$ deviennent les réciproques des termes équidistans de l'unité $R^1, R^2, R^3, \&c.$ Ce qui montre que les raisons $A : b, A : c, A : d$, sont les réciproques des raisons $A : B, A : C, A : D \&c.$ Cette vérité est manifeste: car la directe $A : C$ ou $1 : R^2$ a pour sa réciproque $R^2 : 1$ & celle-ci est égale à la raison de $1 : R^2$ (Prop. 6); & l'on voit que ce même raisonnement s'applique à tous les autres cas.

C O R O L L A I R E VI.

P Uisque les raisons dérivées se composent par la simple addition de leurs Exposans de multiplicité & que les directes, & leurs réciproques sont d'un effet contraire dans la composition des raisons, tellement qu'elles s'entrédétruisent, il est de l'ordre analogique de donner à ces réciproques des Exposans de multiplicité négatifs; afin qu'étant ajoutés dans la composition aux Exposans positifs, ils anéantissent ceux de leurs directes. Par ex. s'il faut composer, la raison $R^3 : 1$ avec la raison $1 : R^2$; on trouve la composée $R^3 : R^2 = R^3 : 1$ (Prop. 5). Mais en donnant à la raison $1 : R^2$ cette forme $R^{-2} : 1$, & en la composant ensuite avec la raison $R^3 : 1$, on trouve la composée $R^3 R^{-2} : 1$ égale à la raison de $R^3 : 1$.

C O R O L L A I R E VII.

I L suit de là que les expressions $\frac{1}{R^1} \& R^{-1}, \frac{1}{R^2} \& R^{-2}, \frac{1}{R^3} \& R^{-3}$, & toutes les autres semblables sont identiques: & par conséquent que $\frac{1}{R^2} : 1$. désigne la même chose que $1 : R^2$ c. à d. la réciproque de la raison $R^2 : 1$.

C O R O L L A I R E VIII.

E T d'autant que la raison d'égalité ne produit ni augmentation ni diminution dans la composition des raisons (Prop. 5 Cor. 2), il est de l'ordre analogique de lui assigner Zéro pour Exposant de

de sa multiplicité. Ainsi lorsqu'on compose les raisons directes $R^3 : 1 \& R^3 : 1 \& c$, avec leurs réciproques $R^{-2} : 1 \& R^{-3} : 1 \& c$. On trouve toujours les raisons $R^0 : 1, R^0 : 1 \& c$, désignant la raison d'égalité, $1 : 1$. D'où il suit que le caractère R^0 représente constamment l'unité, quelle que puisse être la valeur de R .

C O R O L L A I R E IX.

Puisque la raison $1 : R^3$ est composée des raisons $1 : R + 1 : R + 1 : R$. (Def. 6 & Hyp. 3.), Et celle de $1 : R^{-3}$, des raisons $1 : R^{-1}, + 1 : R^{-1} + 1 : R^{-1} \& c$ ainsi des autres: On voit qu'en général les raisons exprimées par une même primordiale $1 : R$, se composent par la simple addition des Exposans, soit affirmatifs, soit négatifs; & dans l'un ou l'autre cas, soit entiers, ou fractionnaires, c. à. d. potentiels ou radicaux.

C O R O L L A I R E X.

Si on suppose qu'une raison donnée $F : 1$ soit exprimée par une raison $R^{\frac{m}{n}} : 1$ dérivée de la primordiale $R : 1$, & une autre $f : 1$, de même par une autre dérivée $R^{\frac{p}{q}} : 1$.

Il est clair que la composée $fF : 1 = R^{\frac{m}{n}} : 1 + R^{\frac{p}{q}} : 1$. sera exprimée par la raison $R^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} : 1$: où l'Exposant de R est la somme des Exposans des composantes $R^{\frac{m}{n}} : 1. \& R^{\frac{p}{q}} : 1$.

P R O P O S I T I O N IX.

Une raison primordiale $1 : R$ peut être décomposée à l'infini par la voye de l'interposition, & composée à l'infini par la voye de la continuation.

D E M O N S T R A T I O N.

Entre les deux termes $1 \& R$ de la raison donnée, on peut prendre une moyenne proportionnelle $R^{\frac{1}{2}}$, qui résout la raison donnée dans les deux raisons égales $1 : R^{\frac{1}{2}}, \& R^{\frac{1}{2}} : R^1$ (Prop. 8).

Chacune de ces deux raisons pouvant de même être résolue par l'interposition des moyennes proportionnelles $Q = R^{\frac{1}{4}} \& S = R^{\frac{3}{4}}$ (Cor. 1. Prop. 8) en deux raisons égales, la raison entière $1 : R$ se trouvera décomposée en quatre raisons continues & égales $1 : Q : R^{\frac{1}{2}} : S : R$; ou bien $1 : R^{\frac{1}{4}} : R^{\frac{2}{4}} : R^{\frac{3}{4}} : R^1$.

Et comme par l'interposition de quatre autres moyennes proportionnelles, chacune de ces raisons peut-être résolue en deux autres, d'où naîtra par rapport à la raison entière $1 : R$, une résolution en huit raisons égales; & cette interposition pouvant être répétée à l'infini, il est manifeste que toute raison donnée peut être résolue en une infinité de raisons continues & égales, par l'interposition d'une infinité de moyennes proportionnelles.

De même, en formant des termes $1 \& R$ une Progression Géométrique $1, R^1, R^2, R^3, R^4,$

R^4 , &c; on trouve les raisons composées $1 : R^2$, $1 : R^3$, $1 : R^4$ &c. doublées, triplées, quadruplées, &c. de la raison donnée $1 : R$. Et comme cette continuation peut être poussée à l'infini, & que chacune de ces raisons multipliées, peut-être composée avec chacune des raisons sousmultipliées $1 : Q$, $1 : R^{\frac{1}{2}}$ &c; il est clair que cette composition des raisons va à l'infini.

C. Q. F. D.

R E M A R Q U E.

Les raisons $1 : R^1$, $R^1 : R^2$, $R^2 : R^3$, &c. étant égales, la résolution $1 : Q$, $Q : R^{\frac{1}{2}}$, $R^{\frac{1}{2}} : S$, $S : R^1$ &c. de la première, est en même tems la résolution de toutes les autres. Si on compose donc une des multipliées, par ex. la doublée, $1 : R^2$, avec une des sousmultipliées; comme par ex. avec la sousdoublée $1 : R^{\frac{1}{2}}$, on trouvera la raison composée $1 : R^{\frac{5}{2}}$; moyenne entre la doublée & la triplée; où le conséquent $R^{\frac{5}{2}}$ est la moyenne proportionnelle entre R^2 , & R^3 . Il en est de même de toutes les autres compositions.

De plus, les raisons $R^2 : 1$, $R^3 : 1$ &c. étant les réciproques des directes multipliées $1 : R^2$, $1 : R^3$, &c. de même que les raisons $R^{\frac{1}{2}} : 1$ & $R^{\frac{3}{2}} : 1$ &c. sont les réciproques des directes sousmultipliées $1 : R^{\frac{1}{2}}$, $1 : R^{\frac{3}{2}}$ &c; On voit que la résolution & composition de la raison $1 : R$, donne les dérivées de sa réciproque $R : 1$, en renversant les termes.

P R O P O S I T I O N X.

LA moyenne proportionnelle R , entre deux termes M & N , est plus grande que le moindre terme M , & plus petite que le plus grand N .

D E M O N S T R A T I O N.

Puisque $M : R = R : N$. (Hyp.)
 Il s'ensuit que $M^2 : R^2$ ou $RR : NN = M : N$.
 Mais M est $< N$ (Hyp.)
 Donc M^2 est $< R^2$ & RR est $< NN$
 D'où il suit que M est $< R$ & que R est $< N$.

Prop. 7.

[Prop. 16. L. 5.
 Rem.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E I.

SI l'on place entre M & R une autre moyenne proportionnelle Q ; M est $< Q$, & Q est $< R$. Et si l'on en place une autre nouvelle S , entre R & B , il suit encore que $R < S$ & que S est $< B$. Partant $M < Q, Q < R, R < S, S < N$. c. a. d. les moyennes proportionnelles croissent successivement depuis le moindre terme M , jusqu'au plus grand N .

C O R O L L A I R E II.

Puisqu'on peut prendre une infinité de moyennes proportionnelles a, b, c, d , &c. entre M & N , il est clair que les termes $M, a, b, c, d, \dots$ & N passeront successivement par tous les degrés de grandeurs depuis M jusqu'à N .

C O R O L L A I R E III.

Par conséquent toute grandeur quelconque $K > M$ & $< N$, sera égale à quelqu'une des moyennes proportionnelles a, b, c, d , &c. prises entre M & N .

P R O P O S I T I O N XI.

Toute raison $1 : K$ peut être considérée comme une dérivée de quelque primordiale $1 : B$ (supposant $K \& B > 1$.)

D E M O N S T R A T I O N.

D'Abord si K est $=$ à B , ou à une des Puissances de B , la vérité est manifeste. Puisqu'en ce cas, K devient $=$ à B^1 ou B^2 ou B^3 &c. Si K est $< B$, cette grandeur K sera $=$ à l'une des moyennes proportionnelles $B^{\frac{n}{m}}$, qu'on pourra prendre à l'infini entre 1 & B .

(Prop. 10. Coroll. 2.) * Par conséquent la raison $1 : K$ sera $=$ à la raison $1 : B^{\frac{n}{m}}$. Mais cette dernière raison, est une raison dérivée de la Primordiale $1 : B$. Donc aussi en ce cas une raison peut être considérée comme dérivée d'une même Primordiale. Si K est $> B$, la gdr. K tombera entre deux termes quelconques comme B^3 & B^4 , -Par conséquent parmi les moyennes proportionnelles de cette raison $B^3 : B^4$, ** il y en aura une $B^{\frac{r}{s}}$ $=$ à K . (Prop. 10. Cor. 3.)

Partant la raison $1 : K$ sera $=$ à la raison $1 : B^{\frac{r}{s}}$. Mais cette dernière raison est une dérivée de la Primordiale $1 : B$. (Prop. 8. Coroll. 1.). Donc la vérité de la proposition est encore manifeste dans ce cas.

C. Q. F. D.

DEFI-

* En prenant 1 & B à la place de les gdrs. M & N du (Coroll. 3. Prop. 10.)

** En prenant B^3 & B^4 au lieu des gdrs M & N du même Coroll.

D E F I N I T I O N X.

LA suite de toutes les raisons possibles, tant directes, que réciproques, considérées comme ayant été dérivées d'une même raison Primordiale, peut être nommée un SYSTÈME DE RAISONS.

C O R O L L A I R E.

Toutes les raisons $A : B$, $C : D$ &c. peuvent donc être exprimées, par une même Primordiale $1 : R$, tellement que $A : B = 1 : R^{\frac{m}{n}}$ & $C : D = 1 : R^{\frac{x}{y}}$. Par conséquent, au lieu de faire les opérations de composition, ou de résolution, sur les raisons $A : B$, $C : D$, &c. on peut les faire sur leurs égales, $1 : R^{\frac{m}{n}}$ & $1 : R^{\frac{x}{y}}$.

R E M A R Q U E.

LA Primordiale est arbitraire, mais aussitôt qu'on la détermine, tout le Système de raisons qui en dépend est déterminé. Comme chaque raison peut être prise pour Primordiale, il est clair qu'on peut imaginer une infinité de ces Systèmes.

D E F I N I T I O N XI.

Lorsqu'après avoir établi un Système de raisons, on fait correspondre à la Primordiale, $(1 : R)$, une quantité arbitraire quelconque L ; & qu'ensuite on fait pareillement correspondre aux autres dérivées (multipliées ou sousmultipliées &c.) de la Primordiale, d'autres quantités multiples ou sousmultiples de l'arbitraire L ; tellement que de quelque manière que les dérivées augmentent ou diminuent, par la voye de la composition ou résolution des raisons, leurs quantités correspondantes augmentent ou diminuent pareillement selon la composition ou résolution des grandeurs; alors ces quantités, analogues en cette manière aux grandeurs des raisons, sont nommées leurs MESURES, ou leurs LOGARITHMES; Et toute la suite de ces Mesures ou Logarithmes appartenant à un même Système de raisons, s'appelle un SYSTÈME DE LOGARITHMES.

C O R O L L A I R E I.

Les Logarithmes étant destinés à ramener la composition & résolution des raisons, laquelle s'exécute par la multiplication ou division des termes, à la composition & résolution des grandeurs, qui s'effectue au moyen de l'addition & de la soustraction: ou bien, le but de l'institution des Logarithmes étant d'indiquer, par leur rapport au Logarithme Primordial, la multiplicité ou sousmultiplicité de leurs raisons correspondantes, relativement à la raison Primordiale; il est clair, que les raisons égales doivent avoir des Logarithmes égaux; & qu'en composant une raison $1 : R^2$ de deux raisons égales $1 : R + 1 : R$, il faut composer son Logarithme de deux Logarithmes égaux $1 L$ & $1 L$, pour avoir le Logarithme $2 L$ de la com-

posée $1 : R^2$. Et que pareillement en resolvant la raison $1 : R$ en deux ou plusieurs autres égales p. ex. $1 : R^{\frac{1}{2}}$ & $R^{\frac{1}{2}} : R$, il faut aussi résoudre son Logarithme L , en deux autres égaux, $\frac{1}{2}L$ & $\frac{1}{2}L$, pour avoir le Logarithme de chacune.

Et en général, comme l'exposant de multiplicité ou de sousmultiplicité, p. ex. 2 ou $\frac{1}{2}$ d'une raison composée $1 : R^2$ ou $1 : R^{\frac{1}{2}}$ est multiple ou sous multiple de l'exposant de multiplicité 1 de la Primordiale $1 : R^1$: ainsi le Logarithme $2L$ ou $\frac{1}{2}L$ de la composée, est multiple ou sousmultiple du Logarithme L de cette même Primordiale. D'où l'on voit, qu'on trouve les Logarithmes dérivés, en multipliant le Logarithme Primordial L par les exposans de multiplicité des raisons dérivées auxquelles ils doivent appartenir.

C O R O L L A I R E II.

LE Logarithme Primordial L étant arbitraire, on peut supposer $L = +1$. Et en ce cas les exposans de multiplicité des raisons dérivées deviennent eux mêmes les Logarithmes de ces raisons. Mais si on fait $L = -1$ ces mêmes exposans, pris avec leurs signes contraires, se changent en Logarithmes.

C O R O L L A I R E III.

LA raison d'égalité $1 : 1$ ou $1 : R^0$ &c. (Prop. 8. Cor. 8.) ne produisant ni augmentation, ni diminution dans la composition des raisons, il est de l'ordre analogique de lui assigner Zéro pour Logarithme, attendu que Zéro ajouté ou retranché des grandeurs, n'y produit aucun changement.

C O R O L L A I R E IV.

Puis donc que de la composition d'une raison directe $1 : R$ avec sa réciproque $R : 1$, il résulte une raison d'égalité, $R : R$, dont le Logarithme est égal à Zéro (Cor. 3.); il s'ensuit que leurs Logarithmes doivent avoir des signes contraires, tellement que si celui de la directe $1 : R$ est positif, celui de sa réciproque $R : 1$ soit négatif, afin que s'entredétruisant il en résulte Zéro, qui est le Logarithme de la raison d'égalité provenue de leur composition.

D'où l'on voit, que le Logarithme d'une raison réciproque est égal au Logarithme de sa directe pris négativement

C'est-à-dire

$$\text{Log. } \overline{R : 1} = - \text{Log. } \overline{1 : R}$$

Car puisque

$$\overline{R : R} = \overline{1 : R} + \overline{R : 1}$$

Def. 6.

Il s'ensuit

$$\text{Log. } \overline{R : R} = \text{Log. } \overline{1 : R} + \text{Log. } \overline{R : 1}$$

{ Def. 11.
Coroll. 1.

Or

$$\text{Log. } \overline{R : R} = 0.$$

Donc $\text{Log. } \overline{1 : R} + \text{Log. } \overline{R : 1} = 0$. & ajoutant départ & d'autre $-\text{Log. } \overline{1 : R}$.

On a

$$\text{Log. } \overline{R : 1} = - \text{Log. } \overline{1 : R}.$$

Ax. 2. L. 1.

COROL.

C O R O L L A I R E V.

LE Logarithme d'une raison composée de directes & de réciproques, est donc l'aggrégat des Logarithmes, soit positifs soit négatifs des composantes.

Par exempl. la raison $AB : DE = A : D + B : E$.

Partant $\text{Log. } AB : DE = \text{Log. } A : D + \text{Log. } B : E$.

{ Def. 11.
Coroll. 1.

Derechef en réduisant la décomposition à l'unité:

Puisque la raison $AB : DE = A : 1 + B : 1 + 1 : D + 1 : E$

Il s'ensuit que $\text{Log. } AB : DE = \text{Log. } A : 1 + \text{Log. } B : 1 + \text{Log. } 1 : D + \text{Log. } 1 : E$ { Def. 11.
Cor. 1.

Mais d'autant que les Logarithmes des réciproques sont égaux à ceux de leurs directes pris négativement.

On aura $\text{Log. } 1 : D = -\text{Log. } D : 1$, & $\text{Log. } 1 : E = -\text{Log. } E : 1$ Def. 11. Cor. 4.

Par conséquent $\text{Log. } AB : DE = \text{Log. } A : 1 + \text{Log. } B : 1 - \text{Log. } D : 1 - \text{Log. } E : 1$.

C O R O L L A I R E VI.

SI l'on se détermine une fois à donner à une Primordiale de plus grande inégalité $R : 1$, & à toutes ses dérivées $R^2 : 1$, $R^3 : 1$ &c. $R^{\frac{1}{2}} : 1$, $R^{\frac{1}{3}} : 1$ &c. l'unité pour conséquent, les Logarithmes de ces raisons pourront être apellés les Logarithmes des quantités ou nombres R , R^2 , R^3 , $R^{\frac{1}{2}}$, $R^{\frac{1}{3}}$ &c. en supprimant l'unité, leur commun conséquent, comme devant être sous entendu, parce que tout nombre est essentiellement relatif à l'unité. Par ex. si on suppose que la Primordiale soit la raison de $10 : 1$, & son Logarithme correspondant L ; celui de sa doublée $100 : 1$, sera $2 L$, & celui de sa triplée $1000 : 1$ sera $3 L$ &c. (Def. 11. Coroll. 1.). On peut donc dire que $1 L$ est le Logarithme de 10 , que $2 L$ est celui de 100 , & $3 L$ celui de 1000 &c. vu que les nombres 10 , 100 , 1000 &c se rapportent tous à l'unité, & expriment tacitement les raisons de $10 : 1$, $100 : 1$, $1000 : 1$ &c.

Ainsi dans le Système ordonné de cette manière, le Logarithme d'un nombre quelconque N , n'est autre chose que le Logarithme de la raison de $N : 1$.

R E M A R Q U E

ON peut choisir une grandeur quelconque L , d'un genre quelconque, pour être la mesure de la Primordiale, (comme un nombre, une ligne; une surface, un solide &c.) & en dériver les mesures des autres raisons, en restant toujours dans le même Système & dans le même genre de grandeurs. L'analogie subsiste, pourvu que les mesures soient entr'elles comme les nombres qui expriment la multiplicité des raisons.

Quand on assigne à la Primordiale pour mesure de sa raison, un nombre toutes les autres mesures deviennent numériques, & prennent proprement le nom de Logarithmes terminés: qui veut dire Nombres des Raisons, en grec αριθμοι λογων.

P R O P O S I T I O N XII.

LE Logarithme du Produit $f F$ est égal à la somme des Logarithmes des Facteurs f & F .

D E M O N S T R A T I O N.

LE Logarithme du Produit $f F$ est proprement celui de la raison $f F : 1$.
 Mais cette raison est composée de la raison $f : 1$ & $F : 1$.

c. a. d. $f F : 1 = f : 1 + F : 1$.

Def. 6.

Partant les Logarithmes réduisant la composition des raisons à celle des grandeurs,

Il s'ensuit que $\text{Log. } f F : 1 = \text{Log. } f : 1 + \text{Log. } F : 1$.

Def. 11.
Coroll. 1.

Or l'unité étant sousentendue comme conséquent, en prononcent les nombres, on peut la supprimer.

Partant $\text{Log. } f F = \text{Log. } f + \text{Log. } F$.

Def. 11.
Coroll. 6.

C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N XIII.

LE Logarithme du quotient $\frac{M}{N}$ est égal au Logarithme du Dividende moins le Logarithme du Diviseur.

D E M O N S T R A T I O N.

LE Logarithme du nombre $\frac{M}{N}$ est proprement le Logarithme de la raison

$\frac{M}{N} : 1 = M : N$.

Def. 2.

Or cette raison est composée de la raison $M : 1$ & de la raison $1 : N$

c. à. d. $\frac{M}{N} : 1 = M : 1 + 1 : N$,

Def. 6.

Par conséquent les Logarithmes représentant la composition des raisons par celle des grandeurs;
 (Def. 11. Coroll. 1.)

Il suit que le $\text{Log. } \frac{M}{N} : 1$ ou $\text{Log. } M : N = \text{Log. } M : 1 + \text{Log. } 1 : N$

Mais le $\text{Log. } 1 : N$ est $= - \text{Log. } N : 1$ (Def. 11. Coroll. 4.)

Partant le $\text{Log. } \frac{M}{N} : 1 = \text{Log. } M : 1 - \text{Log. } N : 1$,

Et en supprimant les unités qui sont les conséquens,

On aura $\text{Log. } \frac{M}{N} = \text{Log. } M - \text{Log. } N$.

Def. 11. Cor. 5.

C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N XIV.

LE Logarithme d'une Puissance est égal au Logarithme de la racine de cette Puissance, multiplié par l'exposant potentiel. Et réciproquement; le Logarithme de la racine est égal à celui de la Puissance, divisé par l'exposant radical.

D E M O N S T R A T I O N.

LE Logarithme d'une Puissance quelconque, comme R^3 , est proprement le Logarithme de la Raison $R^3 : 1$. (Def. II. Cor. I.)

Mais $R^3 : 1 = \overline{R : 1} + \overline{R : 1} + \overline{R : 1} = 3 \overline{R : 1}$ Def. 6.

Partant $\text{Log. } R^3 : 1 = \text{Log. } \overline{R : 1} + \text{Log. } \overline{R : 1} + \text{Log. } \overline{R : 1} = 3. \text{Log. } \overline{R : 1}$ { Def. II. Coroll. 1.

Par conséquent en supprimant l'unité

$\text{Log. } R^3 = 3 \text{ Log. } R$. { Def. II. Coroll. 6.

Mais le facteur 3 est l'exposant potentiel de R.

Donc, le Logarithme d'une Puissance, est égal au Logarithme de la racine de cette Puissance, multiplié par l'exposant potentiel.

C. Q. F. D. 1^o.

Puis donc que $\text{Log. } R^3 = 3 \text{ Log. } R$

Il s'en suit que $\frac{1}{3} \text{Log. } R^3 = \text{Log. } R$

Mais le Diviseur 3 est l'exposant radical de la racine cubique de la Grandeur R^3 .

Donc le Logarithme de la racine est égal à celui de la Puissance divisé par l'exposant radical.

C. Q. F. D. 2^o.

R E M A R Q U E.

ON a calculé les Logarithmes de tous les nombres naturels, depuis l'unité jusqu'à dix mille, & même jusqu'à cent mille, & on les a réduits en Tables. On y a choisi pour raison Primordiale celle de $10 : 1$, à laquelle on a donné l'unité pour Logarithme, par conséquent la raison doublée $100 : 1$, ou simplement le nombre 100 a dû recevoir 2 pour Logarithme; & de même la triplée $1000 : 1$, ou le nombre 1000, a dû avoir 3 pour le sien; & ainsi de même des autres Puissances du nombre 10.

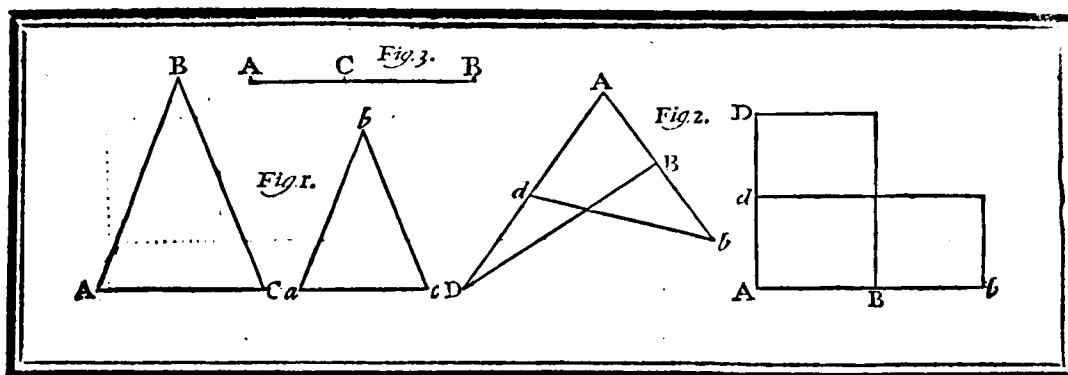
Cherchant ensuite successivement un grand nombre de moyennes proportionnelles entre 10 & 1, on est parvenu à résoudre la raison Primordiale $10 : 1$ en plusieurs raisons moyennes, & on a trouvé leurs Logarithmes correspondants en prenant la moitié de la somme des Logarithmes des deux termes extrêmes. De tous ces Logarithmes on n'a rapporté dans la Table que ceux des nombres entiers, compris entre 1 & 10. On a fait la même chose avec les raisons de $100 : 1$, de $1000 : 1$ &c. en se contentant de ne ranger dans la Table que les Logarithmes des nombres entiers selon leur suite naturelle.

Une

Une explication plus détaillée des adresses de calcul relatives à la Logarithmo-technie, ou construction de la Table des Logarithmes, n'entre pas dans le Plan que nous nous sommes proposés de suivre: les Commencans trouveront ce détail dans tous les Auteurs, & il n'auront pas de peine à l'entendre & à acquérir la pratique du calcul Logarithmique, pour peu qu'ils se soient rendu familiers avec les principes que nous venons d'établir.



L E S
E L E M E N S
D' E U C L I D E,
L I V R E S I X I E M E.



DEFINITIONS.

I.

ON nomme *figures semblables* (Fig. 1.) celles (ABC, abc), qui ont les angles (A, B, C, & a, b, c,) égaux chacun à chacun, & les côtés (AB, AC, BC & ab, ac, bc,) comprenant ces angles égaux proportionnels (c. à. d. $AB : AC = ab : ac$, item $AB : BC = ab : bc$, & $AC : BC = ac : bc$).

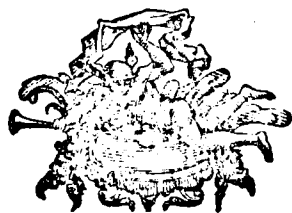
II.

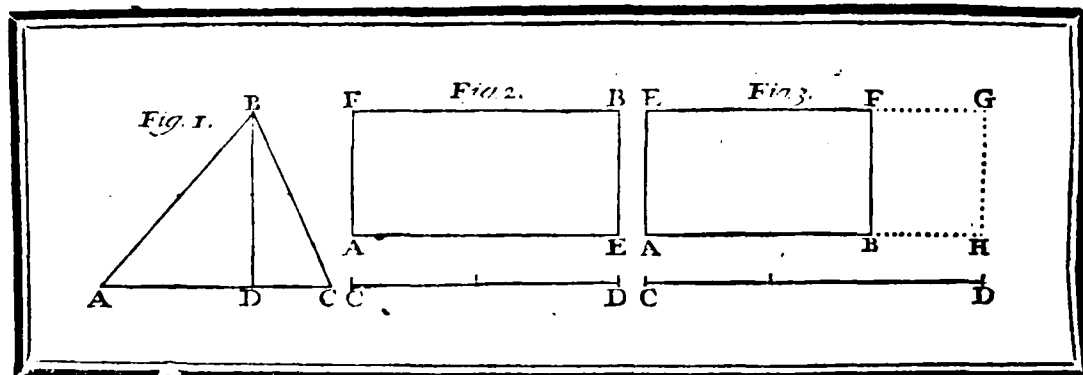
Les figures (DAB, dAb) sont réciproques (Fig. 2.) quand les antécédens (AD, Ab) & les conséquens (Ad, AB) des raisons se trouvent dans l'une & l'autre figure (c. à. d. $AD : Ad = Ab : AB$).

Ou les figures (DAB, dAb) sont réciproques; quand les deux côtés (AD, AB & Ad, Ab) dans chacune de ces figures, environnant un même angle (A) ou des angles égaux, deviennent les extrêmes ou les moyens (Voy. Def. 9. §. 1. L. 5.) d'une même proportion (c. à. d. si $AD : Ad = Ab : AB$).

III.

Une ligne droite (AB) est dite être divisée en moyenne & extrême raison, (Fig. 3.) quand la droite entière (AB) est à la plus grande partie (BC), comme cette plus grande partie (BC) est à la plus petite (AC).





D E F I N I T I O N S.

I V.

LA hauteur d'une figure (ABC) (Fig. 1.) est la perpendiculaire (BD) abaissée du sommet (B) sur la base (AC).

R E M A R Q U E

IL suit de cette Définition que si deux figures, placées sur une même droite, ont la même hauteur, elles seront aussi entre les mêmes Parallèles; puisque par la nature des Parallèles les perpendiculaires abaissées de l'une à l'autre sont toujours égales.

V.

UNe raison (AB.BC.CD:DE.EF.FG) est composée de plusieurs autres ($\overline{AB:DE} + \overline{BC:EF} + \overline{CD:FG}$), lorsque ses termes résultent de la multiplication des termes de ces raisons composantes (Voy Def. 6. de l'Append.).

V I.

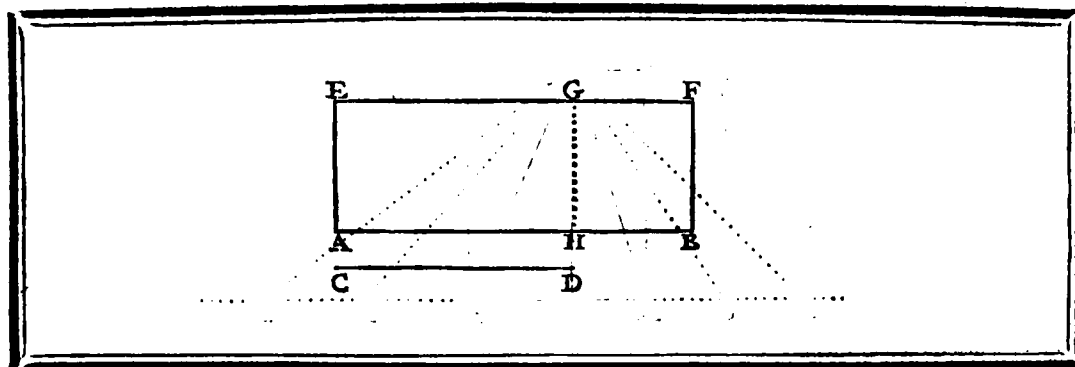
ON dit qu'un Parallélogramme (AB) (Fig. 2.) est appliqué à quelque ligne droite (CD), quand il a pour base ou pour côté cette ligne droite proposée (CD).

V I I.

UN Parallélogramme défailant (AF) (Fig. 3.) est celui dont la base (AB) est plus petite que la ligne proposée (CD) à laquelle il est dit être appliqué.

V I I I.

Mais le défaut d'un Parallélogramme défailant (AF) (Fig. 3.) est un Parallélogramme (BG) compris du reste de la droite proposée (CD) & de l'autre côté (BF) du Parallélogramme défailant.



DEFINITIONS.

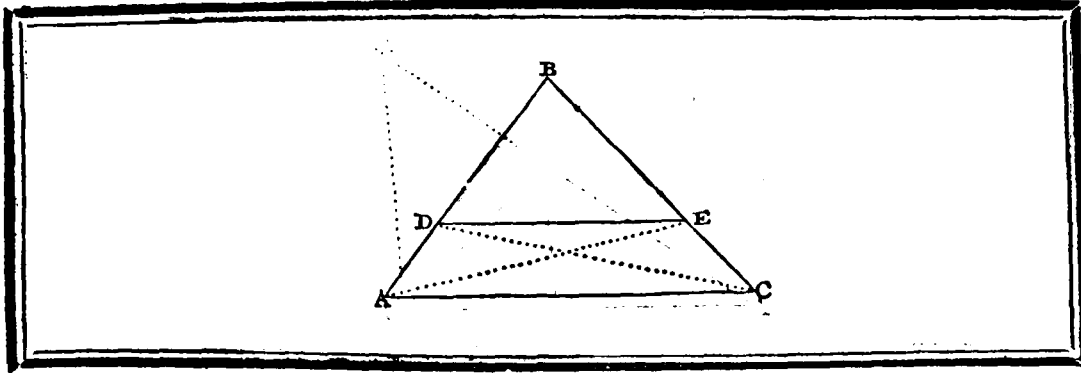
I X.

UN *Parallélogramme excédant* (AF) est celui dont la base (AB) est plus grande que la ligne proposée (CD), à laquelle il est dit être appliqué.

X.

ET l'*excès d'un Parallélogramme excédant* (AF) est un *Parallélogramme* (HF) compris du surplus, dont la base AB surpasse la droite proposée (CD), & de l'autre côté (BF) du *Parallélogramme excédant*.





PROPOSITION II. THEOREME II.
Si une ligne droite (DE) est tirée parallèlement à un côté (AC) d'un Triangle (ABC): elle coupera les deux autres côtés (AB, BC) proportionnellement (c. à. d. que $AD:DB=CE:EB$); & réciproquement, si une ligne droite (DE) coupe proportionnellement les deux côtés (AB, BC), elle sera parallèle au troisième côté (AC).

HYPOTHESE.
 La droite DE est Plle à AC.

THESE.
 $AD:DB=CE:EB$.

Préparation.

Tirez les droites AE, CD.

Dem. I. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

Puis donc que DE est Plle à AC (Hyp.)

1. Le $\triangle DAE$ est $\equiv$ au $\triangle ECD$.
2. Partant $\triangle DAE : \triangle DBE = \triangle ECD : \triangle DBE$.
- Mais le $\triangle DAE : \triangle DBE = AD : DB$,
- & le $\triangle ECD : \triangle DBE = CE : EB$ (Prop. I. L. 6).
3. Donc $AD : DB = CE : EB$.

Prop. 37. L. 1.

Prop. 7. L. 5.

Prop. 11. L. 8.

C. Q. F. D. I.

HYPOTHESE.
 $AD:DB=CE:EB$.

THESE.
 La droite DE est Plle à AC.

II. DEMONSTRATION.

Puisque les $\triangle DAE, DBE$ sont entre les mêmes Plls, de même que les $\triangle ECD, DBE$,

1. On aura le $\triangle DAE : \triangle DBE = AD : DB$,
- & le $\triangle ECD : \triangle DBE = CE : EB$.
- Mais $AD : DB = CE : EB$ (Hyp.),
2. Donc le $\triangle DAE : \triangle DBE = \triangle ECD : \triangle DBE$.
3. C'est pourquoi le $\triangle DAE$ est $\equiv$ au $\triangle ECD$.
4. Partant la droite DE est Plle à AC.

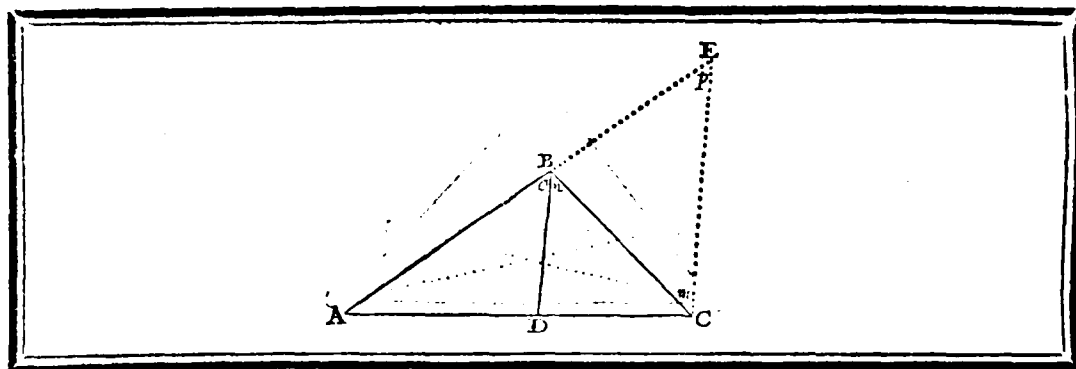
{ Prop. 1. L. 6.

Prop. 11. L. 8.

Prop. 9. L. 5.

Prop. 39. L. 1.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION III. THEOREME III.

SI l'angle (B) d'un triangle (ABC) est partagé en deux également par une ligne droite (BD) qui coupe la base du triangle en (D), les segmens de la base (AD, DC) seront proportionels aux deux côtés (AB, BC) du triangle. Et réciproquement, si les segmens de la base (AD, DC) sont proportionels aux deux côtés (AB, BC) du triangle (ABC), la ligne droite (BD) tirée du sommet (B) du triangle au point de section (D), coupera aussi l'angle au sommet (ABC) en deux également.

HYPOTHESE.

La droite BD coupe $\angle ABC$ en deux également ou $\angle o = \angle n$.

THESE.

$$AD : DC = AB : BC.$$

Préparation.

1. Par le point C tirez CE Plle à DB.
2. Prolongez AB jusqu'à ce qu'elle rencontre CE en E.

Prop. 31. L. 1.

Dem. 2. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

Puisque les droites DB, CE sont Plls (Prop. 1);

1. Il s'ensuit que $AD : DC = AB : BE$.

Prop. 2. L. 6.

2. Et que $\angle n = \angle m$, & $\angle o = \angle p$.

Prop. 29. L. 1.

Mais, $\angle o$ étant $=$ à $\angle n$ (Hyp.).

3. L'angle m est aussi $=$ à $\angle p$, & $BC = BE$.

[Ax. 1. L. 1.

[Prop. 6. L. 1.

4. C'est pourquoi $AD : DC =$ ou $AB : BC$

Pr. 7. & 11. L. 5.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.

$$AD : DC = AB : BC.$$

THESE.

La droite BD coupe $\angle ABC$ en deux également ou $\angle o = \angle n$.

II. DEMONSTRATION.

Puisque les droites DB, CE sont Plls (Prop. 1);

1. Il s'ensuit que $AD : DC = AB : BE$.

Prop. 2. L. 6.

Mais $AD : DC = AB : BC$ (Hyp.).

2. C'est pourquoi $AB : BE = AB : BC$.

Prop. 11. L. 5.

3. Par conséquent, $BE = BC$, & $\angle m = \angle p$.

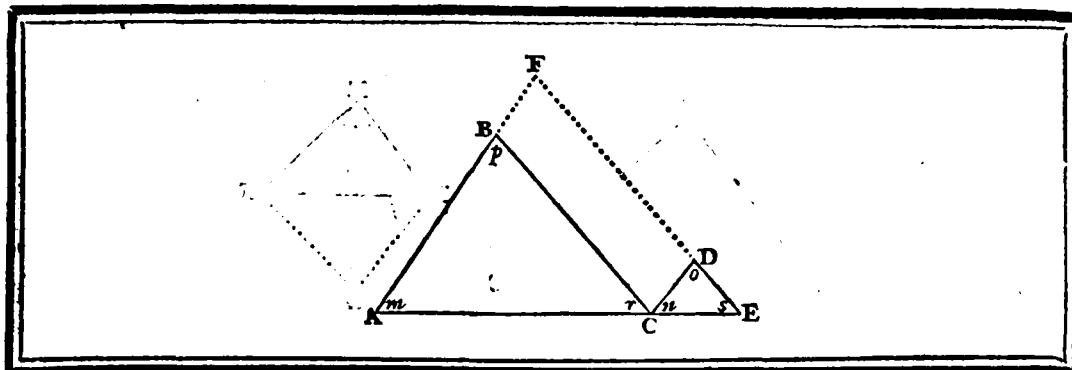
[Prop. 9. L. 5.

[Prop. 5. L. 1.

Mais $\angle m$ est aussi $=$ à $\angle n$, & $\angle p =$ à $\angle o$ (Prop. 29. L. 1).

4. Partant $\angle n$ est $=$ à $\angle o$, ou la droite BD coupe $\angle ABC$ en deux également. Ax. 1. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION IV. THEOREME IV.
Les triangles équiangles (ABC, CDE) ont les côtés (AC, AB & CE, CD & c), qui comprennent des angles égaux (m & n & c), proportionnels; & les côtés (AB, CD & c) opposés aux angles égaux (r & s & c), sont homologues.

HYPOTHESE.

Les $\Delta ABC, CDE$ sont équiangles;
 ou $\forall m = \hat{=} \forall n, \forall r = \hat{=} \forall s$,
 ou $\forall p = \hat{=} \forall o$.

THESE.

- I. $\begin{cases} AB : AC = CD : CE. \\ AC : BC = CE : DE. \\ AB : BC = CD : DE. \end{cases}$
 II. Les côtés $\begin{cases} AB, CD \\ AC, CE \\ BC, DE \end{cases}$ opposés aux $\forall$ égaux, sont homologues.

Préparation.

1. Placez les $\Delta ABC, CDE$, en sorte que les bases AC, CE se rencontrent directement.
2. Prolongez les côtés AB, DE indéfiniment en F .

Dem. 2. L. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les $\forall m + r$ du ΔABC sont $< 2L$ (Prop. 17. L. 1), & que $\forall r$ est $= \hat{=} \forall s$ (Hyp),
 1. Les $\forall m + s$ sont aussi $< 2L$, & AB, DE se rencontreront quelque part en F . } Prop. 27. L. 1.
 Mais $\forall m$ étant $= \hat{=} \forall n$ & $\forall r = \hat{=} \forall s$ (Hyp), } Rem.
 2. Les droites AF, CD item BC, FE sont Plles,
 3. Et le quadrilatère CF est un Pgmé. } Prop. 28. L. 1.
 4. Partant les côtés opposés BC, FD ; item CD, BF sont $=$ entr'eux. } Def. 35. L. 1.
 Or BC étant Plle au côté FE du ΔFAE (Arg. 2), } Prop. 34. L. 1.
 5. Donc $AB : BF = AC : CE$. } Prop. 2. L. 6.
 6. Ou alternando $AB : AC = BF : CE$. } Prop. 16. L. 5.
 7. Ou bien $AB : AC = CD : CE$; parce que CD est $= \hat{=} BF$ (Arg. 4). } Prop. 7. L. 5.
 Pareillement CD étant Plle au côté AF du ΔFEA ; on prouvera de même
 8. Que $AC : BC = CE : DE$.
 9. Par conséquent $AB : BC = CD : DE$.

Prop. 22. L. 5.

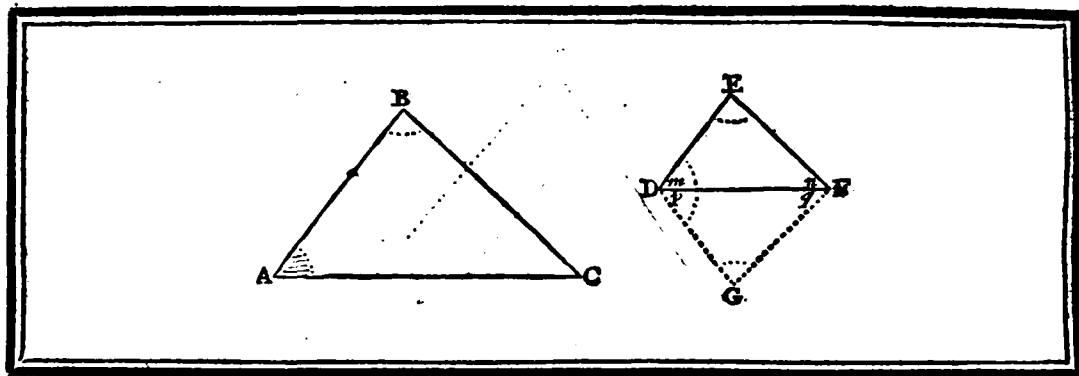
C. Q. F. D. I.

- Or les côtés AB, CD , item AC, CE & BC, DE , sont opposés aux $\forall$ égaux r & s , item p & o , & m & n .
 10. Partant les côtés $AB, CD; AC, CE; BC, DE$ opposés aux $\forall$ égaux! sont homologues.

Def. 12. L. 5.

C. Q. F. D. II.

Coroll. Les triangles équiangles sont donc aussi semblables. (Def. 1. L. 6).



PROPOSITION V. THEOREME V.
SI deux triangles (ABC, DEF) ont les côtés proportionels, ces triangles seront équiangles; & les angles (A & m, C & n &c) opposés aux côtés homologues, (BC, EF & AB, DE &c) seront égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

Les Δ ABC, DEF ont les côtés proportionels, c. à. d.

1. $\begin{cases} AB : AC = DE : DF. \\ AB : BC = DE : EF. \\ AC : BC = DF : EF. \end{cases}$

11. Les côtés BC, EF, AB, DE, AC, DF, sont homologues.

THESE.

1. Les Δ ABC, DEF sont équiangles.
 11. Les $\angle$ opposés aux côtés homologues sont égaux; ou $\angle A = \angle m$, $\angle C = \angle n$, & $\angle B = \angle E$.

Préparation.

1. Faites sur la droite DF au point D, $\angle p = \angle A$; Et au point F, $\angle q = \angle C$.
 2. Prolongez les côtés DG, FG jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en G.

Prop. 23. L. 1.
 Prop. 27. L. 1.
 Rem.

DEMONSTRATION.

Puisque dans les Δ équiangles ABC, DGF, (Prop. 1. & Prop. 32. L. 1), & spécialement $\angle C = \angle q$ & $\angle B = \angle G$.

1. Mais $AB : AC = DG : DF$.
 2. Donc $DG : DF = DE : DF$. Et DG est $=$ à DE.
 Par un même raisonnement on prouvera que

Prop. 4. L. 6.

3. La droite GF est $=$ à EF.

Prop. 11. L. 5.
 Prop. 9. L. 5.

Puis donc que dans les deux Δ DEF, DGF les deux côtés DE, EF sont $=$ aux deux côtés DG, GF (Arg. 2 & 3), & que la base DF est commune aux deux Δ ,

4. Les $\angle n$ & m sont $=$ aux $\angle q$ & p chacun à chacun,

Prop. 8. L. 1.

5. Et les Δ DEF, DGF sont équiangles.

Mais le Δ DGF est équiangle au Δ ABC (Prop. 1 & Prop. 32. L. 1);

6. Il s'enfuit donc que les Δ ABC, DEF seront aussi équiangles.

Ax. 1. L. 1.

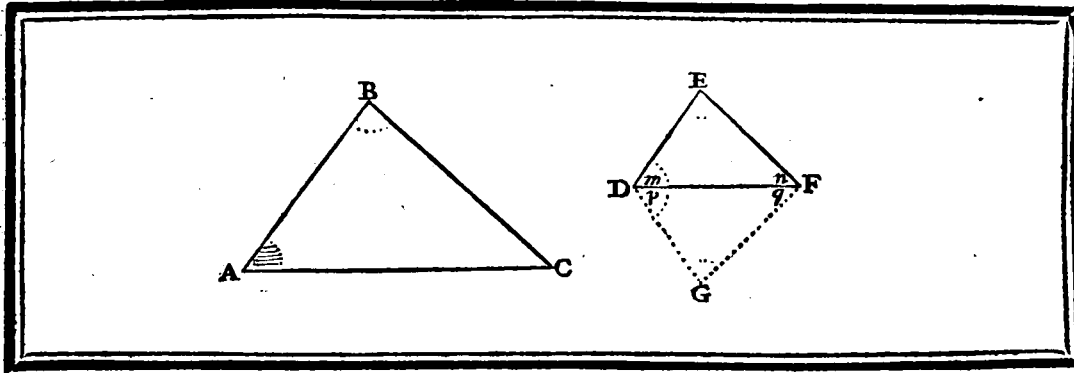
C. Q. F. D. 1.

7. De plus, les $\angle A$, C, & B opposés aux côtés BC, AB, AC, étant égaux chacun à chacun aux $\angle m$, n & E opposés aux côtés EF, DE, DF; homologues aux côtés BC, AB, AC chacun à chacun, parceque les uns & les autres de ces $\angle$, sont égaux chacun à chacun aux $\angle p$, q, G (Prop. 1. Prop. 32. L. 1 & Arg. 4),

8. Il s'enfuit, que les $\angle A$, m; item C, n; & B, E opposés aux côtés homologues sont égaux.

C. Q. F. D. 11.

Coroll. Ces triangles sont donc aussi semblables (Def. 1. L. 6.).



PROPOSITION VI. THEOREME VI.
Si deux triangles (ABC , DEF) ont un angle (A) égal à un angle (m), & les côtés (BA , AC & ED , DF), qui comprennent ces angles, proportionels: les triangles sont équiangles; & les angles (C & n item B & E) opposés aux côtés homologues, (BA , ED item AC , DF) sont égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. $\angle A = \angle m$.
- II. $BA : AC = ED : DF$.
- III. BA , ED ; AC , DF sont homologues.

THESE.

- I. Les $\triangle ABC$, DEF sont équiangles.
- II. Les $\angle C$ & n , item les $\angle B$ & E sont = entr'eux.

Préparation.

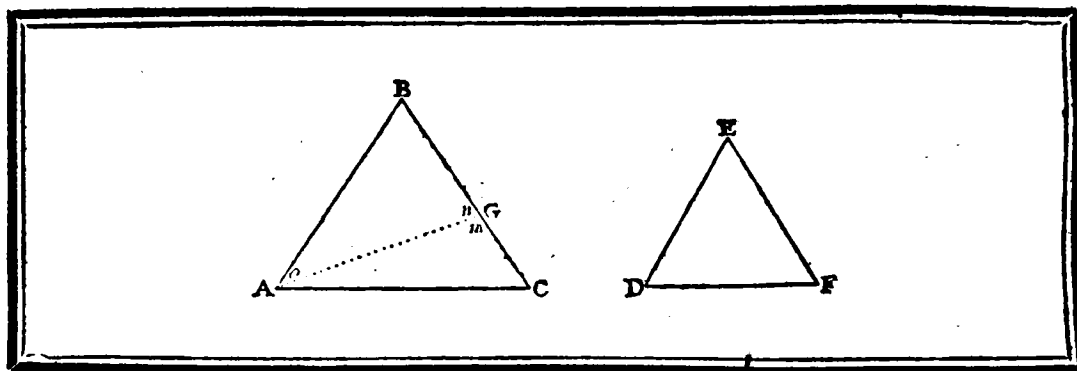
1. Faites sur la droite DF au point D , $\angle p = \angle A$, ou $= \angle m$, & au point F , $\angle q = \angle C$. Prop. 23. L. 1.
2. Prolongez les côtés DG , FG jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en G . { Prop. 27. L. 1.
Rem.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les $\triangle ABC$, DGF sont équiangles (*Prop. 1. & Prop. 32. L. 1.*), & spécialement $\angle C = \angle q$ & $\angle B = \angle G$.
1. $BA : AC = GD : DF$. Prop. 4. L. 6.
 - Or $BA : AC = ED : DF$ (*Hyp. 2.*), Prop. 11. L. 5.
 2. C'est pourquoi $GD : DF = ED : DF$. Prop. 9. L. 5.
 3. D'où il suit que $GD = ED$.
 Les deux $\triangle DEF$, DGF ayant donc deux côtés ED , $DF =$ à deux côtés GD , DF (*Arg. 3.*) & $\angle$ compris $m =$ à $\angle$ compris p (*Prop. 1.*), Prop. 4. L. 1.
 4. Les deux autres $\angle n$ & q item E & G sont = entr'eux; & ces deux $\triangle DEF$, DGF sont équiangles. Ax. 1. L. 1.
 5. Il suit que les $\triangle ABC$, DEF sont équiangles C. Q. F. D. 1.

- De plus, chacun des angles C & n étant $=$ à $\angle q$ (*Prop. 1. & Arg. 4.*),
6. L'angle C est $=$ à $\angle n$. Ax. 1. L. 1.
 7. Partant, $\angle A$ étant $=$ à $\angle m$ (*Hyp. 1.*), l'angle B est aussi $=$ à $\angle E$. Prop. 32. L. 1.
 Et les côtés BA , ED & AC , DF opposés à ces angles, étant homologues (*Hyp. 3. & Def. 12. L. 5.*),
 8. Il s'ensuit que les $\angle C$ & n , item B & E opposés à ces côtés homologues, sont = entr'eux. C. Q. F. D. II.

Coroll. Ces triangles sont donc aussi semblables entr'eux (*Prop. 4. L. 6. Coroll.*).



PROPOSITION VII. THEOREME VII.
Si deux triangles (ABC, DEF) ont un angle (B) égal à un angle (E), & les côtés (BA, AC & ED, DF) qui comprennent deux autres angles (A & D), proportionnels; les angles restans (C & F) étant l'un & l'autre, ou aigus, ou obtus, les triangles seront équiangles, & les angles (A & D) autour desquels les côtés sont proportionnels feront égaux entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. $\angle B \text{ est } = \angle E$.
- II. $BA : AC = ED : DF$.
- III. Les $\angle C$ & F sont l'un & l'autre, ou aigus, ou obtus.

THESE.

Les $\triangle ABC, DEF$ sont équiangles, & les $\angle BAC$ & D sont = entr'eux.

DEMONSTRATION.

Sinon les $\angle BAC$ & D sont inégaux; & l'un comme BAC est $>$ l'autre D .

Préparation.

Faites donc sur AB , au point A , $\angle o = \angle D$.

Prop. 23. L. 1.

C A S I. Si les $\angle C$ & F sont l'un & l'autre aigus.

Puis donc que $\angle o$ est $= \angle D$ (*Prép.*) & $\angle B = \angle E$ (*Hyp. 1*),

1. Il s'ensuit que $\angle n$ est $= \angle F$; & que les $\triangle ABG, DEF$ sont équiangles. Prop. 32. L. 1.
2. Partant $BA : AG = ED : DF$. Prop. 4. L. 6.
- Mais $BA : AC = ED : DF$ (*Hyp. 2*),
3. Par conséquent $BA : AG = BA : AC$; Prop. 11. L. 5.
4. D'où il suit que AG est $= AC$. Prop. 9. L. 5.
5. C'est pourquoi $\angle C$ est $= \angle m$. Prop. 5. L. 1.
- Et à cause que dans ce Cas $\angle C$ est $< L$.
6. L'angle m sera aussi $< L$; & $\angle n$ qui lui est contigu $> L$, Prop. 13. L. 1.
- Mais cet $\angle n$ étant $= \angle F$ (*Arg. 1*), qui est dans ce Cas $< L$,
7. Ce même $\angle n$ seroit aussi $< L$; ce qui est impossible.
8. Les $\angle BAC$ & D sont donc = entr'eux, & le troisième $\angle C$ est $= \angle F$; ou les $\triangle ABC, DEF$ sont équiangles. Prop. 32. L. 1.

C. Q. F. D.

C A S II. Si les $\angle C$ & $\angle F$ sont l'un & l'autre obtus.

Par le même raisonnement (*Arg. 1. jusqu'à 5*) du premier Cas, on prouvera que

1. L'angle C est $=$ à $\angle m$.

2. Donc $\angle m$ est aussi $> \angle L$, & les $\angle C + m$ seront $> 2 \angle L$; ce qui est impossible. Prop. 17. L. 1.

3. Partant, les $\angle BAC$ & $\angle D$ sont $=$ entr'eux, & le troisième $\angle C$ est $=$ à $\angle F$,
ou les $\triangle ABC$, DEF sont équiangles. Prop. 32. L. 1.

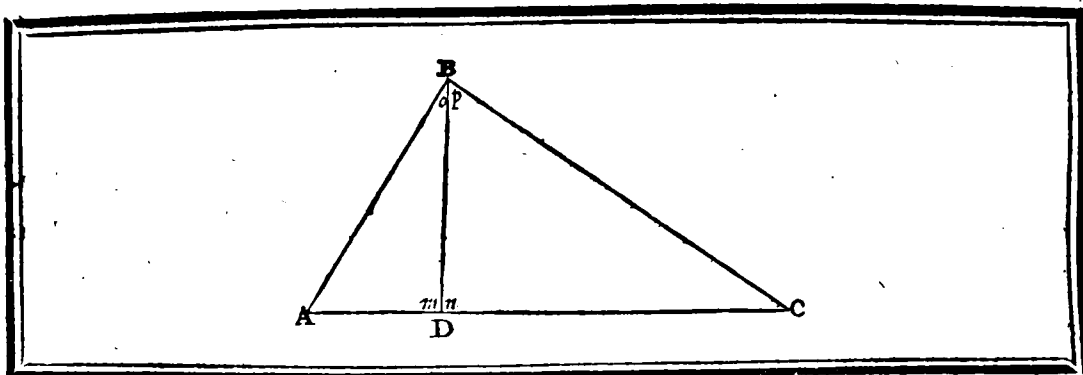
C. Q. F. D.

Remarque.

Si les $\angle C$ & $\angle F$ sont l'un & l'autre droits, les $\triangle ABC$ & DEF sont équiangles
(Hyp. 1 & Prop. 32. L. 2).

Coroll. Ces sortes de triangles sont donc aussi semblables entr'eux (Prop. 4. L. 6. Coroll.).





PROPOSITION VIII. THEOREME VIII.
SI de l'angle droit (ABC) d'un triangle rectangle (ABC) on abaisse sur l'hypothénuse (AC) une perpendiculaire (BD): elle partagera ce triangle en deux autres (ADB, BDC) semblables entr'eux, & semblables au triangle total (ABC).

HYPOTHESE.

1. Le ΔABC est Rgle en B.
- II. BD est $\perp$ sur AC .

THESE.

Les ΔADB , BDC sont semblables entr'eux,
 & chacun est aussi semblable au Δ total ABC .

DEMONSTRATION.

Puisque dans les deux Δ Rgles ADB , ABC , l'angle m est $=$ à $\forall ABC$ (Ax. 10. L. 1), & $\forall A$ commun aux deux Δ ,

1. L'angle o est $=$ à $\forall C$, & les deux ΔABC , ADB sont équiangles.

2. Partant ces deux Δ sont aussi semblables.

On démontrera par un même raisonnement, que

3. Le ΔBDC est semblable au ΔABC .

De même, dans les deux Δ Rgles ADB , BDC l'angle m étant $=$ à $\forall n$ (Ax. 10. L. 1), & $\forall o =$ à $\forall C$ (Arg. 1),

4. L'angle A est $=$ à $\forall p$, & les deux ΔADB , BDC sont équiangles.

5. D'où il suit que ces Δ sont semblables.

6. La $\perp BD$ partage donc le ΔABC en deux ΔADB , BDC semblables entr'eux (Arg. 5), & semblables chacun au Δ total ABC (Arg. 2 & 3).

Prop. 32. L. 1.

{ Prop. 4. L. 6.
Coroll.

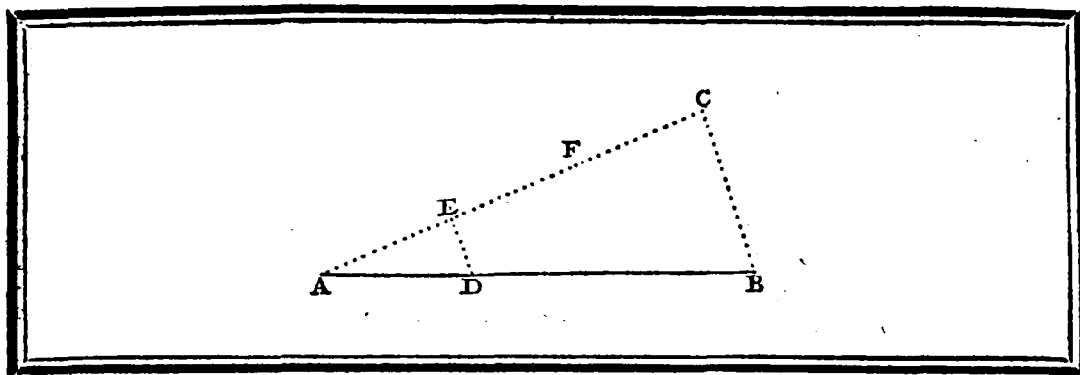
Prop. 32. L. 1.

{ Prop. 4. L. 6.
Coroll.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E.

IL est manifeste que cette perpendiculaire BD , abaissée du sommet de l'angle droit sur la base, est une moyenne proportionnelle entre les deux segmens AD & DC de cette base; car les triangles ADB , BDC étant équiangles, on aura $AD : DB = DB : DC$ (Prop. 4. L. 6). De même, chaque côté AB ou BC du triangle ABC est une moyenne proportionnelle entre la base AC & le segment AD ou DC adjacent à ce côté. Car puisque chacun des triangles ADB , BDC est équiangle au Δ total ABC , on aura $AC : AB = AB : AD$, & $AC : BC = BC : DC$ (Prop. 4. L. 6).



R PROPOSITION IX. PROBLEME I.
 Etrancher d'une ligne droite donnée (AB), une partie demandée quelconque.
 (par ex. la troisième partie).

DONNÉE.
 La droite AB.

CHERCHEE.
 La droite retranchée AD qui soit
 la troisième partie de AB.

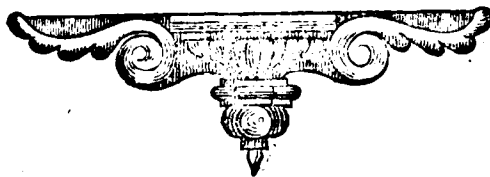
Résolution.

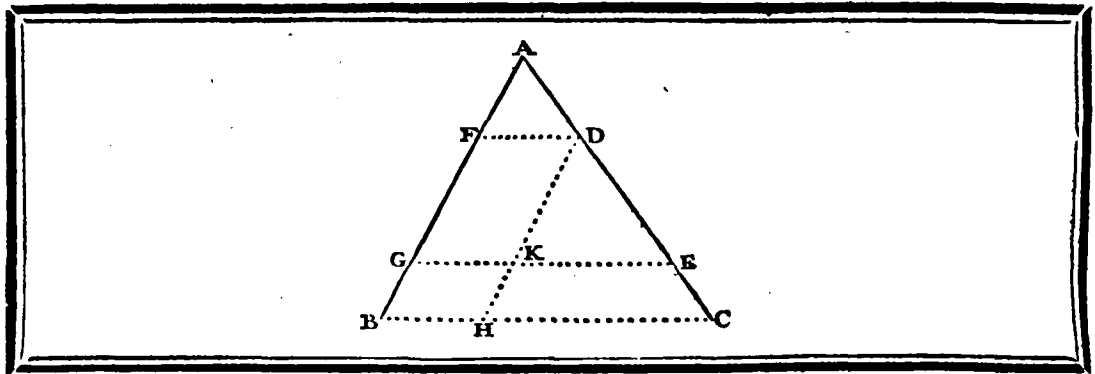
1. Tirez du point A une droite indéfinie AC, qui forme avec AB un angle quelconque BAC. Dem. 1. L. 1.
2. Prenez sur AC trois parties égales AE, EF, FC de longueur arbitraire. Prop. 3. L. 1.
3. Joignez CB. Dem. 1. L. 1.
4. Et par E, tirez ED Plle à CB, qui coupera la droite AB de manière que AD en sera la troisième partie. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uisque ED est Plle au côté CB du $\triangle CAB$ (Prop. 4),
 1. $CE : EA = BD : DA$. Prop. 2. L. 6.
 Or CE est double de EA (Ref. 2);
 2. Partant BD est aussi double de DA. Def. 8. L. 5;
 3. Par conséquent AB est triple de AD.
 4. La droite retranchée AD est donc la troisième partie de AB.

C. Q. F. E.





C PROPOSITION X. PROBLEME II.
Couper une droite donnée entière (AB), semblablement à une droite donnée (AC) coupée en tant de points (D, E &c) que l'on voudra.

DONNEE.

- I. La droite entière AB,
- II. Et la droite AC coupée aux points D & E &c.

CHERCHEE.

Couper AB semblablement à AC aux points F & G, en sorte que
 $AF : FG = AD : DE$ & que
 $FG : GB = DE : EC$.

Résolution.

1. Joignez les droites données AB, AC sous un angle quelconque BAC.
2. Tirez CB, & des points D & E, les droites DF, EG Plles à CB, item DH Plle à AB.

Dem. 1. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque DF est Plle au côté EG du $\triangle AGE$ (Ref. 2. & Prop. 30. L. 1), & KE Plle au côté HC du $\triangle DHC$ (Ref. 2),

1. $AF : FG = AD : DE$
Et $DK : KH = DE : EC$.

Prop. 7. L. 6.

Mais les figures KF, HG étant des Pgmcs (Ref. 2. & Def. 35. L. 1).

2. Il s'enfuit que FG est $\equiv$ à DK, & GB $\equiv$ KH.

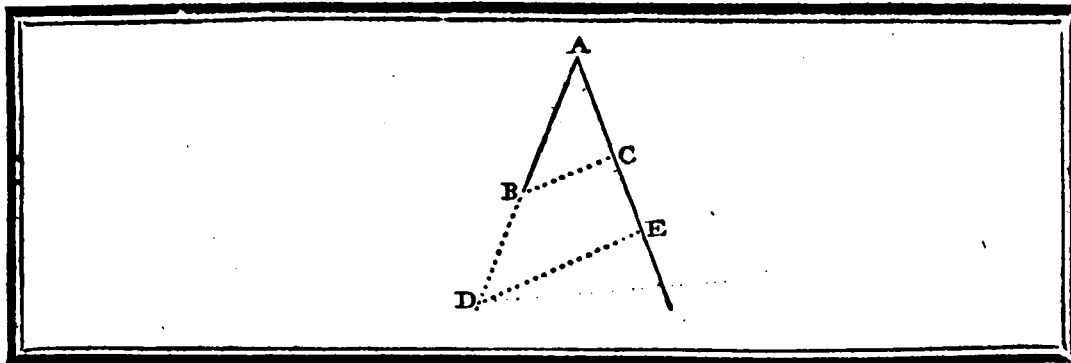
Prop. 34. L. 1.

3. Donc $FG : GB = DE : EC$.

Pr. 7 & 11 L. 5.

4. Partant la droite donnée AB est coupée semblablement à AC aux points F & G; en sorte que $AF : FG = AD : DE$ & $FG : GB = DE : EC$.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XI. PROBLEME III.
Trouver une troisième proportionnelle (CE) à deux lignes droites données (AB, AC).

DONNER.
 Les deux droites AB, AC.

CHERCHER.
 La droite CE, troisième proportionnelle aux
 deux droites AB, AC, c. à d. telle que
 $AB : AC = AC : CE$.

Résolution.

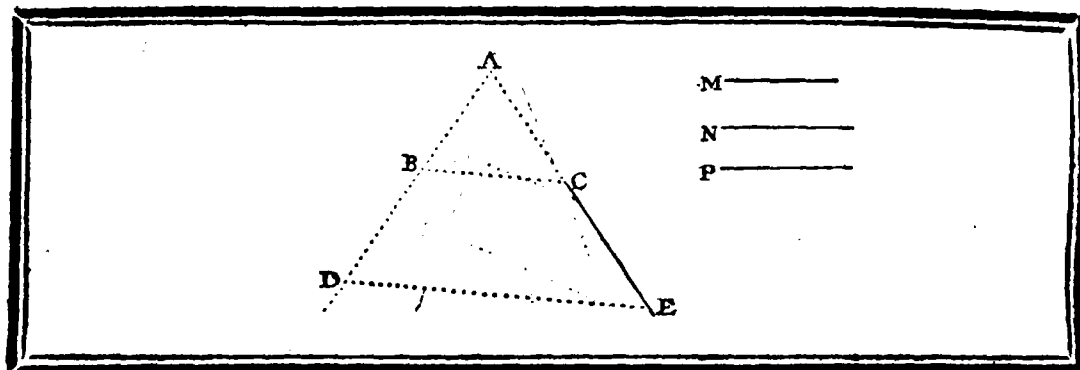
1. Joignez les deux droites AB, AC, en un V quelconque BAC.
 2. Prolongez les, & faites $BD = AC$.
 3. Joignez BC,
 4. Et par l'extrémité D de la droite AD, tirez DE Plle à BC.
- Prop. 3. L. 1.
 Dem. 1. L. 1.
 Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uis donc que BC est Plle à DE (Ref. 4),
1. $AB : BD = AC : CE$ Prop. 2. L. 6.
 - Mais $BD = AC$ (Ref. 2);
 2. Partant $AB : AC = AC : CE$ Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XII. PROBLEME IV.
Trouver une quatrième proportionnelle (CE) à trois lignes droites données (M, N, P).

DONNEE.

Les trois droites M, N, P.

CHERCHEE.

La droite CE, quatrième proportionnelle
à M, N, P, c. à d. telle que
 $M : N = P : CE$.

Résolution.

1. Menez les deux droites AD, AE, formant un $\angle$ quelconque DAE.
2. Faites $AB = M$; $BD = N$; $AC = P$.
3. Joignez BC.
4. Par l'extrémité D de la droite AD, tirez DE Plle à BC.

Prop. 3. L. 1.

Dem. 1. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puis donc que BC est Plle à DE (Ref. 4),

1. $AB : BD = AC : CE$,

Prop. 2. L. 6.

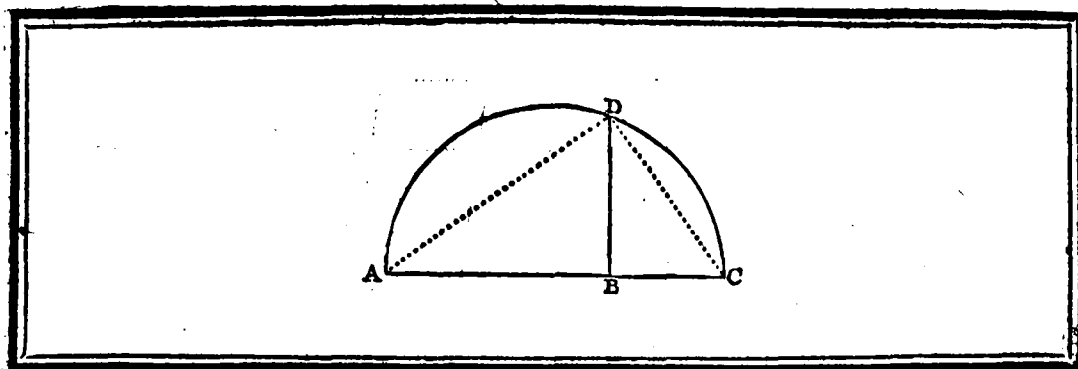
Or $AB = M$, $BD = N$, & $AC = P$ (Ref. 2);

2. Partant $M : N = P : CE$.

Pr. 7 & 11. L. 5.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XL. PROBLEME V.
Trouver une moyenne proportionnelle (BD); entre deux lignes droites données (AB, BC):

DONNEE.
 Les deux droites AB, BC.

CHERCHEE.
 La droite BD, moyenne proportionnelle
 entre AB & BC, c. à d.
 telle que $AB : BD = BD : BC$.

Résolution.

1. Joignez les deux droites AB, BC en une même droite AC.
2. Décrivez sur AC le demi $\odot$ ADC.
3. Sur AC, au point B, élevez la $\perp$ BD, jusqu'à la $\odot$ en D.

Dem. 3. L. 1;
 Prop. 11. L. 1.

Préparation.

Joignez AD, & CD.

Dem. 1. L. 11

DEMONSTRATION.

PUIS donc que $\angle ADC$ se trouve dans un demi cercle (Ref. 2, & Prep.).

1. C'est un angle droit.

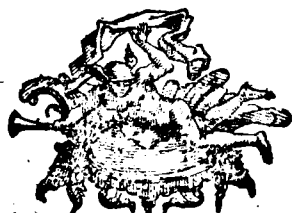
Prop. 31. L. 3;

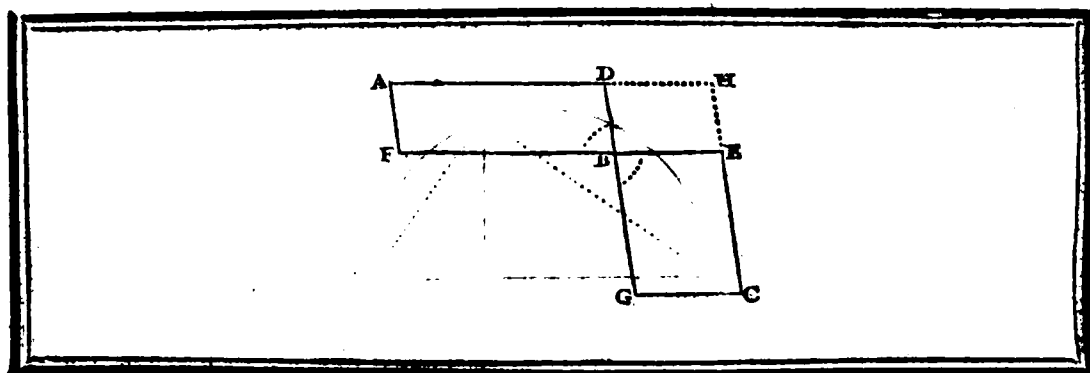
3. C'est pourquoi le $\triangle ADC$ est rectangle en D, & BD est une $\perp$ abaissée du sommet D de l'angle droit, à la base AC (Ref. 3).

3. Par conséquent $AB : BD = BD : BC$.

{ Prop. 8. L. 6,
 Coroll.

C. Q. F. F.





PROPOSITION XIV. THEOREME IX.
Dans les Parallélogrammes égaux (AB, BC), qui ont un angle (FBD) égal à un angle (GBE), les côtés (FB, BD & GB, BE), alentour de ces angles égaux, sont réciproquement proportionels (c. à d. $FB : BE = GB : BD$). Et les Parallélogrammes, qui ont un angle (FBD) égal à un angle (GBE) & les côtés (FB, BD & GB, BE), alentour de ces angles égaux, réciproquement proportionels, sont égaux.

HYPOTHESE.

- I. Le Pgr AB est = au Pgr BC.
- II. $\angle FBD$ est = à $\angle GBE$.

THESE.

$$FB : BE = GB : BD.$$

Préparation.

1. Disposez les deux Pgrs AB, BC, tellement que les côtés FB, BE ne forment qu'une même ligne droite FE.
2. Achevez le Pgr DE.

Dem. 1. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

- P**uisque les $\angle FBD, GBE$ sont égaux (*Hyp. 2*); & que les droites FB, BE ne forment qu'une même droite FE (*Prep. 1*).
1. Les droites GB, BD ne forment aussi qu'une même droite GD. *Prop. 14. L. 1.*
 - Mais le Pgr AB étant = au Pgr BC (*Hyp. 1*).
 2. Le Pgr AB : Pgr DE = Pgr BC : Pgr DE. *Prop. 7. L. 5.*
 - Or les Pgrs AB, DE item BC, DE ont la même hauteur (*Prep. 2. Arg. 1 & Def. 4. L. 6. Rem.*).
 3. C'est pourquoi le Pgr AB : Pgr DE = FB : BE } *Prop. 1. L. 6.*
 & le Pgr BC : Pgr DE = GB : BD } *Prop. 11. L. 5.*
 4. Partant $FB : BE = GB : BD$ (*Arg. 2*).

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.

- I. $FB : BE = GB : BD$.
- II. $\angle FBD$ est = à $\angle GBE$.

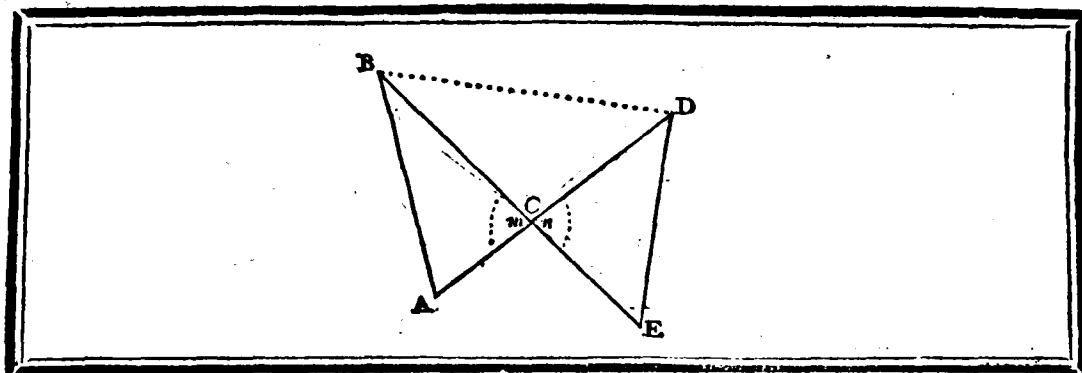
THESE.

$$\text{Le Pgr AB est } = \text{ au Pgr BC.}$$

II. DEMONSTRATION:

1. **O**N démontrera comme auparavant que les droites GB, BD ne forment qu'une même droite GD.
 Or les Pgrs AB, DE item BC, DE ont la même hauteur (*Prep. 2. Arg. 1 & Def. 4. L. 6. Rem.*).
2. Partant le Pgr AB : Pgr DE = FB : BE.
 & le Pgr BC : Pgr DE = GB : BD. *Prop. 1. L. 6.*
 Or $FB : BE = GB : BD$ (*Hyp. 1*).
3. C'est pourquoi le Pgr AB : Pgr DE = Pgr BC : Pgr DE. *Prop. 11. L. 5.*
4. Partant le Pgr AB est = au Pgr BC. *Prop. 9. L. 5.*

C. Q. F. D.



PROPOSITION XV. THEOREME X.
Si deux triangles égaux. (ACB, ECD) ont un angle (m) égal à un angle (n): les côtés (AC, CB, & EC, CD), alentour de ces angles égaux, sont réciproquement proportionnels. Et si deux triangles (ACB, ECD) ont un angle (m) égal à un angle (n), & les côtés (AC, CB, & EC, CD), alentour de ces angles égaux, réciproquement proportionnels, ces triangles sont égaux.

C A S I.

HYPOTHESE.

- I. Le $\triangle ACB$ est $\equiv$ au $\triangle ECD$.
 II. $\forall m$ est $\equiv$ à $\forall n$.

THESE.

Les côtés AC, CB, & EC, CD, sont réciproquement proportionnels, ou
 $AC : CD = EC : CB$.

Préparation.

1. Disposez les deux $\triangle ACB$, ECD , en sorte que les côtés AC, CD, ne forment qu'une même droite AD.
2. Tirez la droite BD.

Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque $\forall m = \forall n$ (Hyp. 2), & que les droites AC, CD, ne forment qu'une même droite AD (Prep. 1),

1. Les lignes EC, CB, ne formeront aussi qu'une même droite EB.

Prop. 14. L. 1.

Mais le $\triangle ACB$ étant $\equiv$ au $\triangle ECD$ (Hyp. 1),

2. Le $\triangle ACB : \triangle CBD = \triangle ECD : \triangle CBD$.

Prop. 7. L. 5.

Or les $\triangle ACB$, CBD , item ECD , CBD , ont la même hauteur (Prep. 2 Arg. 1 & Def. L. 6. Rem.);

3. C'est pourquoi le $\triangle ACB : \triangle CBD = AC : CD$.

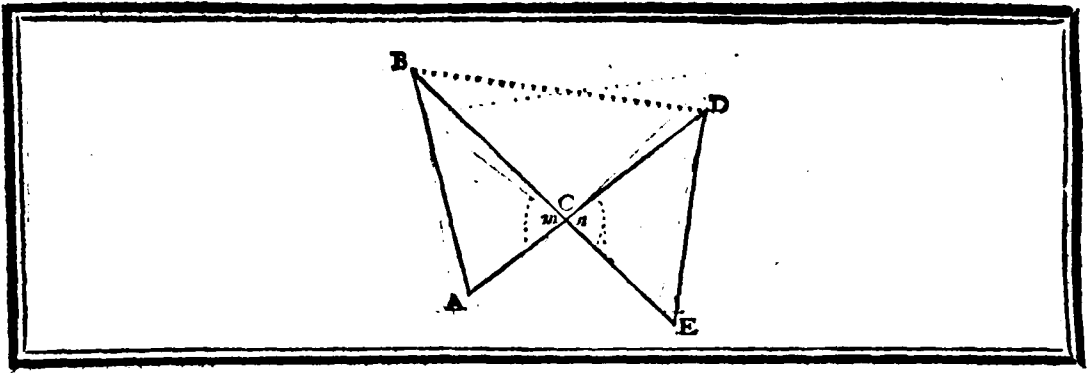
Prop. 1. L. 6.

& le $\triangle ECD : \triangle CBD = EC : CB$.

4. Partant

$$AC : CD = EC : CB. \text{ (Arg. 2 \& Prop. 11. L. 5.)}$$

C. Q. F. D.



CAS II.

HYPOTHESE

- I. $AC : CD = EC : CB$.
 II. Et $\angle A = \angle E$.

THESE.

Le $\triangle ACB$, est $=$ au $\triangle ECD$.

Préparation.

1. Disposez les deux $\triangle ACB$, ECD , en sorte que les côtés AC , CD ne forment qu'une même droite AD .
2. Tirez la droite BD .

DEMONSTRATION.

1. ON démontrera, comme dans le premier Cas, que EC , CB ne forment qu'une même droite EB .

Et puisque les $\triangle ACB$, CBD , item les $\triangle ECD$, CBD , ont la même hauteur
 (Prep. 2 Arg. 1. & Def. 4. L. 6 Rem.).

2. Le $\triangle ACB : \triangle CBD = AC : CD$,
 De même le $\triangle ECD : \triangle CBD = EC : CB$.
 Or $AC : CD = EC : CB$ (Hyp. 1);

Prop. 1. L. 6.

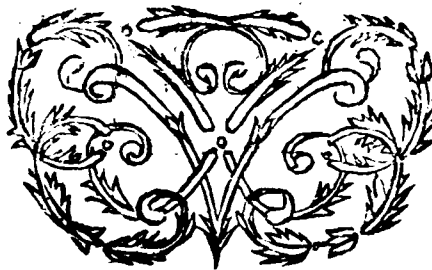
3. C'est pourquoi $\triangle ACB : \triangle CBD = \triangle ECD : \triangle CBD$.

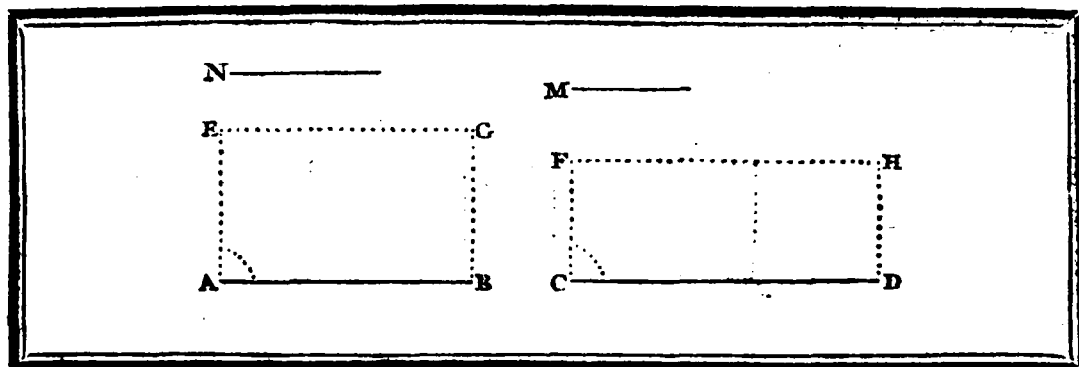
Prop. 11. L. 5.

4. D'où il suit que le $\triangle ACB$ est $=$ au $\triangle ECD$.

Prop. 9. L. 5.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XVI. THEOREME XI.
Si quatre lignes droites (AB, CD, M, N) sont proportionnelles, le rectangle des extrêmes (AB.N) est égal à celui des moyennes (CD.M). Et si le rectangle des extrêmes (AB.N) est égal au rectangle des moyennes (CD.M), les quatre droites (AB, CD, M, N,) sont proportionnelles.

HYPOTHESE.
 $AB : CD = M : N$

THESE.
 Le Rgle AB . N = au Rgle CD . M.

Préparation.

1. Sur les extrémités A & C, des droites AB, CD, élevez les $\perp$ AE, CF. Prop. 11. L. 1.
2. Faites AE = N, & CF = M. Prop. 3. L. 1.
3. Achevez les Rgles EB, FD. Prop. 31. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

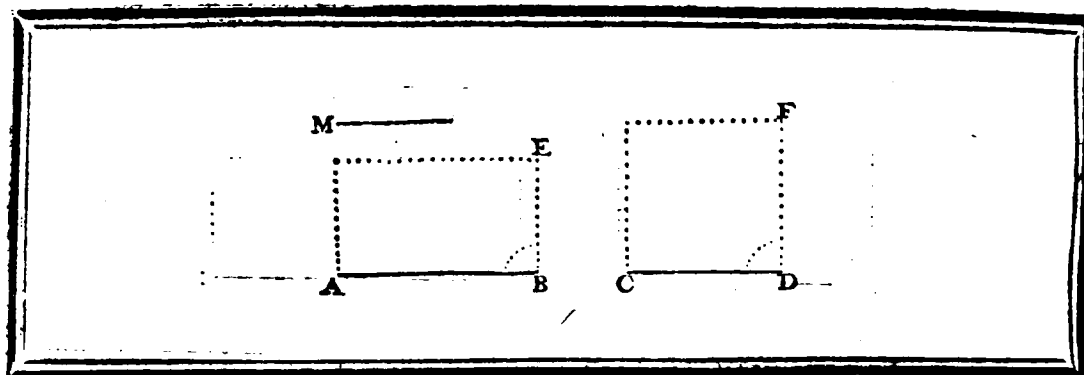
- P**uis donc que $AB : CD = M : N$ (Hyp.) : & que $M = CF$ & $N = AE$ (Prep. 2),
1. $AB : CD = CF : AE$. Pr. 7 & nL. 5.
 2. Les côtes des Rgles EB, FD, alentour des $\vee$ égaux A & C, (Prep. 1 & Ax. 10. L. 1) sont donc réciproques. Def. 2. L. 6.
 3. Par conséquent le Rgle EB = au Rgle FD, ou le Rgle sous AB . AE = au Rgle sous CD . CF. Prop. 14. L. 6.
 - Partant AE étant = N & CF = M (Prep. 2), Def. 1. L. 1.
 4. Le Rgle sous AB . N est aussi = au Rgle sous CD . M. Ax. 2. L. 2.

HYPOTHESE.
 Le Rgle AB . N est = au Rgle CD . M.

C. Q. F. D. I.
THESE.
 $AB : CD = M : N$

II. DEMONSTRATION.

- P**uisque le Rgle AB . N est = au Rgle CD . M (Hyp.) : & que AE = N, & CF = M (Prep. 2),
1. Le Rgle sous AB . AE est = au Rgle sous CD . CF. Ax. 2. B. 2.
 - Or ces côtes environnant les $\vee$ égaux EAB, FCD (Prep. 1. & Ax. 10. L. 1).
 2. $AB : CD = CF : AE$. Prop. 14. L. 6.
 - Et d'autant que CF = M & AE = N (Prep. 2),
 3. $AB : CD = M : N$. Pr. 7 & nL. 5.
- C. Q. F. D. II.**



PROPOSITION XVII. THEOREME XII.
Si trois lignes droites (AB, CD, M) sont proportionnelles, le rectangle ($AB.M$) des deux extrêmes est égal au quarré de la moyenne (CD). Et si le rectangle des deux extrêmes ($AB.M$) est égal au quarré de la moyenne (CD), les trois droites (AB, CD, M) sont proportionnelles.

HYPOTHESE.

$AB : CD = CD : M.$

THESE.

Le Rgle $AB.M$ est $=$ au $\square$ de CD .

Préparation.

1. Sur les extrémités B & D des droites AB, CD , élevez les $\perp$ BE, DF . Prop. 11. L. 1.
2. Faites $BE = M$, & $DF = DC$. Prop. 3. L. 1.
3. Achevez les Rgles EA, FC . Prop. 31. L. 1.

I. DEMONSTRATION.

Puisque $AB : CD = CD : M$ (*Hyp.*), que $CD = DF$ & $M = BE$ (*Prep. 2*).

1. $AB : CD = DF : BE$. Pr. 7 & II. L. 5.

Les côtés des Rgles EA, FC , alentour des angles égaux B & D (*Prep. 1* & *Ax. 10. L. 1.*), sont donc réciproques. Def. 2. L. 6.

2. Partant le Rgle EA est $=$ au Rgle FC , ou le Rgle sous $AB.BE$ $=$ au Rgle sous $CD.DF$. Prop. 14. L. 6.

3. C'est pourquoi BE étant $= M$ & $DF = CD$ (*Prep. 2*), le Rgle $AB.M$ est aussi $=$ au $\square$ de CD . Def. 1. L. 2.

Ax. 2. L. 2.

C. Q. F. D.

HYPOTHESE.

Le Rgle $AB.M$ est $=$ au $\square$ de CD .

THESE.

$AB : CD = CD : M.$

II. DEMONSTRATION.

Puisque le Rgle sous $AB.M$ est $=$ au $\square$ de CD (*Hyp.*), & que BE est $= M$, & $DF = CD$ (*Prep. 2*),

1. Le Rgle sous $AB.BE$ est $=$ au Rgle sous $CD.DF$. Ax. 2. L. 2.

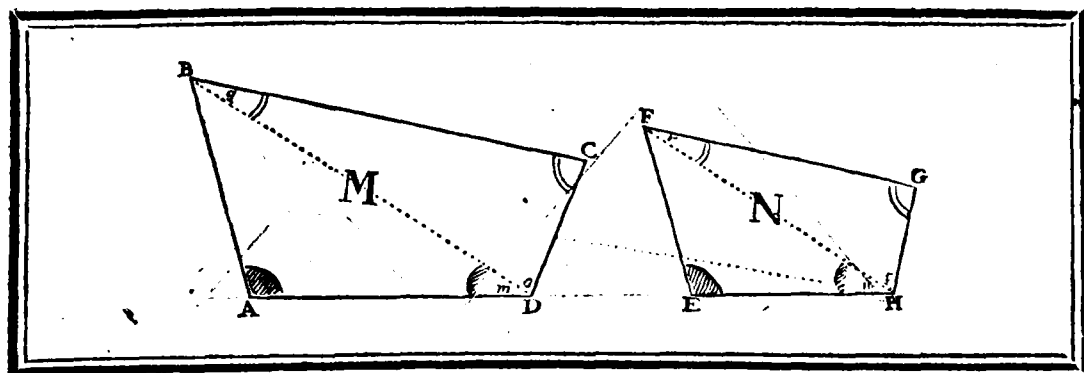
Or ces côtés environnent les $\angle$ égaux EBA, FDC ; (*Ax. 10. L. 1* & *Pr. 1*). Prop. 14. L. 6.

2. Donc $AB : CD = DF : BE$.

Et par la raison que $DF = CD$ & $BE = M$ (*Prep. 2*),

3. $AB : CD = CD : M.$ Pr. 7 & II. L. 5.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII. PROBLEME VI.
D'Une ligne droite donnée (AD), décrire une figure rectiligne (M) semblable à une autre figure rectiligne donnée (N) & semblablement posée.

DONNEE.

- I. La droite AD.
- II. La Rectiligne N.

CHERCHEE.

La Rectiligne M, semblable au Rectiligne N & semblablement posée.

Résolution.

1. Joignez HF.
2. Sur AD, aux points A & D, faites $\angle A = \angle E$ & $\angle m = \angle n$; c'est pourquoi le troisième $\angle ABD$ sera = au troisième $\angle EFH$.
3. Sur DB, au point D, faites $\angle o = \angle p$ & au point B, $\angle q = \angle r$. Par conséquent le troisième $\angle C$ sera = au troisième $\angle G$.

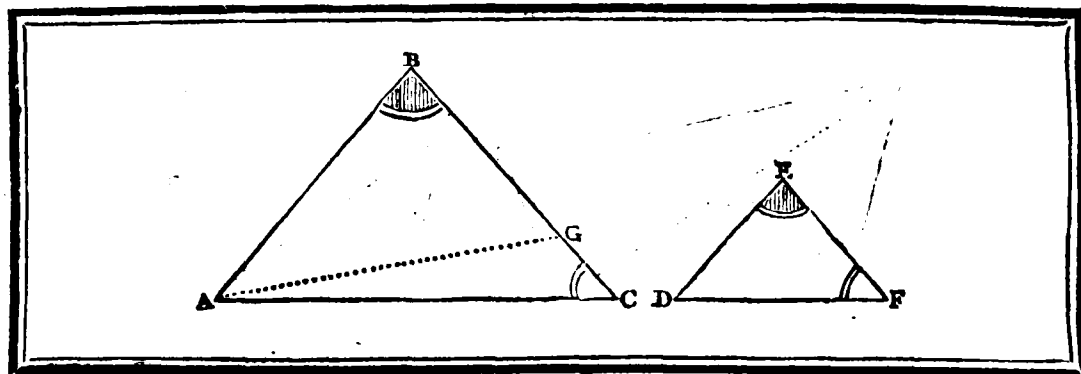
Dem. 1. L. 1.
 Prop. 23. & 32
 L. 1. &
 Remarq. de
 Prop. 27. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puis donc que le $\triangle ABD$ est équiangle au $\triangle EFH$, & le $\triangle DBC$ équiangle au $\triangle HFG$ (Ref. 2 & 3),

1. $BD : FH = BA : FE = AD : EH$.
 & $BD : FH = DC : HG = CB : GF$. } Prop. 4. L. 6.
2. Partant $BA : FE = AD : EH = DC : HG = CB : GF$. Prop. 11. L. 5.
- Maintenant $\angle m$ étant = à $\angle n$ (Ref. 2), ainsi que $\angle o = \angle p$ (Ref. 3),
3. L'angle entier $m + o$ est = à l'angle entier $n + p$. Ax. 2. L. 1.
4. Par la même raison $\angle ABC = \angle EFG$.
 De plus $\angle A = \angle E$ (Ref. 2), & $\angle C = \angle G$ (Ref. 3).
5. C'est pourquoi le Rectilig. M est équiangle au Rectilig. N, & leurs côtés alentour des angles égaux sont proportionels.
6. Le Rectilig. M, construit sur la donnée AD, est donc semblable au Rectilig. E G, & il est semblablement posé. Def. 1. L. 6.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XIX. THEOREME XIII.
LES triangles semblables (ABC, DEF) sont entr'eux en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques (CB, FE ou AC, DF &c).

HYPOTHESE.

Les triangles ABC, DEF sont semblables, de manière que $\angle C = \angle F$, & les côtés AC, DF item CB, FE sont homologues.

THESE.

Le ΔABC est au ΔDEF en raison doublée de CB à FE
 c. à d. comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.

Préparation.

Prenez à CB, FE la troisième proportionnelle CG, & tirez AG.

{ Prop. 11. L. 6.
 Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

- P**uis donc que
1. En alternant $AC : CB = DF : FE$ (Hyp. & Def. 1. L. 6),
 - Mais $AC : DF = CB : FE$.
 2. Par conséquent $CB : FE = FE : CG$ (Prop.);
 3. Les côtés des ΔAGC , DEF alentour des $\angle$ égaux C & F (Hyp.), sont donc réciproques. (Def. 2. L. 6.).
 4. Partant le ΔAGC est = au ΔDEF .
 - Or les ΔABC , ΔAGC ayant la même hauteur,
 5. Le $\Delta ABC : \Delta AGC = CB : CG$.
 6. Partant le $\Delta ABC : \Delta DEF = CB : CG$.
 - Mais, puisque $CB : FE = FE : CG$ (Prop.),
 7. $CB : CG$ en raison doublée de CB à FE ou comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.
 8. Par conséquent le $\Delta ABC : \Delta DEF$ en raison doublée de CB à FE, ou comme $\overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$ *.

Prop. 16. L. 5.

Prop. 11. L. 5.

Prop. 15. L. 6.

Prop. 1. L. 6.

Prop. 7. L. 5.

Def. 10. L. 5.

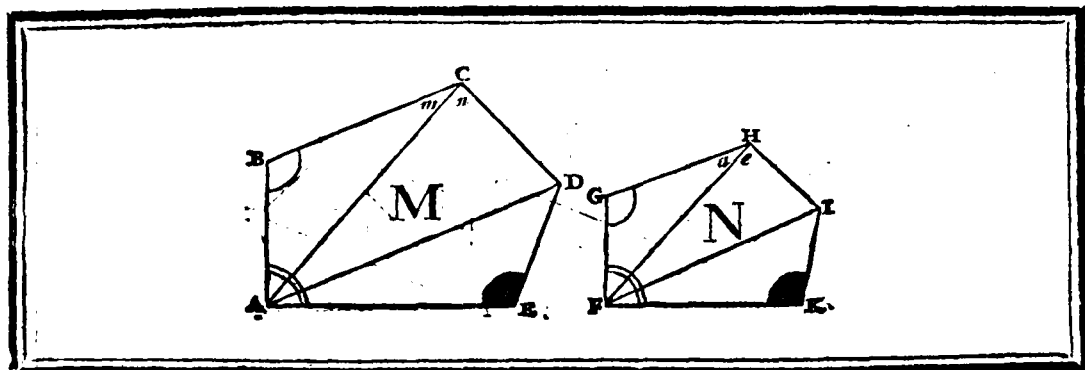
Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E.

Lorsque trois lignes (CB, FE, CG) sont proportionnelles, la première est toujours à la troisième, comme le Δ fait de la première est à un Δ semblable fait de la seconde, en le supposant semblablement posé.

* Voyez Append. Prop. VII. & Hyp. 1. Cor. 2. item Cor. 2. de la Prop. suivante.



PROPOSITION XX. THEOREME XIV.
 Les Polygones semblables (M & N) peuvent être divisés par des diagonales (AC, AD; FH, FI) tirées semblablement, en un même nombre de triangles (ABC, ACD, ADE, & FGH, FHI, FIK) semblables entr'eux & proportionnels à leurs Touts; de plus les Polygones (M & N) sont en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques (AB, FG; ou BC, GH &c).

HYPOTHESE.

Le Polygone M est semblable au Polygone N;
 tellement que les $\angle A, B, C$ &c, sont
 = aux $\angle F, G, H$ &c, chacun à chacun,
 & les côtés AB, FG; ou BC, GH &c,
 homologues.

THESE.

Par des Diagonales tirées semblablement
 I. On peut diviser ces Polygones en un même
 nombre de triangles semblables.
 II. Proportionnels à leurs Touts.
 III. Et le Polyg. M: Polyg. N en raison doublée
 des côtés homologues AB, FG;
 ou comme $AB^2 : FG^2$.

Préparation.

Tirez AC, FH, de même AD, FI semblablement, c.à.d. des $\angle$ égaux
 A & F, aux $\angle$ égaux C & H, item D & I.

Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

- Puis donc que $\angle B = \angle G$ & $AB : BC = FG : GH$ (Hyp. & Def. 1. L. 6),
 1. Le $\triangle ABC$ est équiangle au $\triangle FGH$,
 2. C'est pourquoi ces $\triangle$ sont semblables, & $\angle m = \angle a$.
 Or $\angle$ entier $m + n$ est = à $\angle$ entier $a + e$ (Hyp.);
 3. Partant $\angle n$ est = $\angle e$.
 Puis donc que par la similitude des $\triangle ABC$ & $\triangle FGH$ (Arg. 2),
 $AC : BC = FH : GH$.
 & par la similitude des Polyg. M & N $BC : CD = GH : HI$.
 4. Il suit par égalité de raison, que $AC : CD = FH : HI$.
 c. à d. les côtés alentour des $\angle$ égaux n & e sont proportionnels.
 5. Le $\triangle ACD$ est donc équiangle au $\triangle FHI$;
 Et par conséquent il lui est semblable.
 6. Par la même raison, tous les autres $\triangle ADE, FIK$ &c, sont semblables.
 7. Les Polyg. semblables peuvent donc être divisés dans le même nombre de
 $\triangle$ semblables, par des diagonales tirées semblablement.

Prop. 6. L. 6.

Prop. 4. L. 6.

Coroll.

Ax. 3. L. 1.

Def. 1. L. 6.

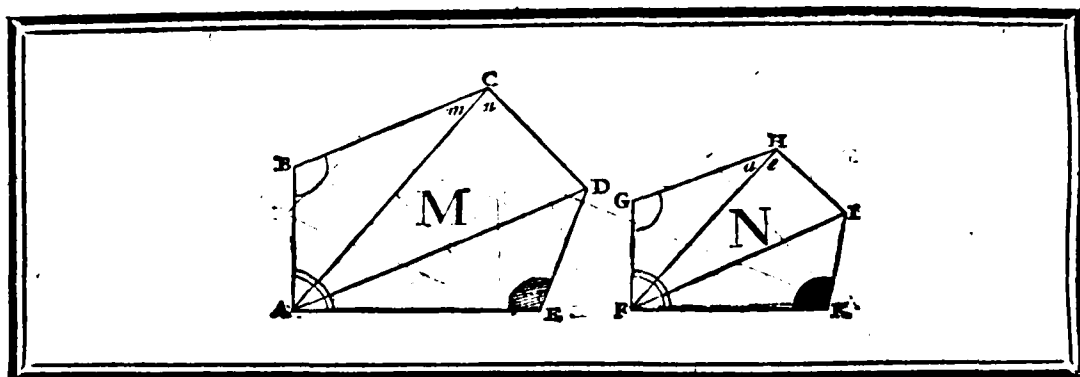
Prop. 22. L. 5.

Prop. 6. L. 6.

Prop. 4. L. 6.

Coroll.

C. Q. F. D. 1.



De même, parceque les $\triangle ABC$, $\triangle FGH$ sont semblables (*Arg.* 2),

6. Le $\triangle ABC : \triangle FGH = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2 ; *$ } Prop. 19. L. 6.
 De même le $\triangle ACD : \triangle FHI = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2 ; *$ }
 7. Donc le $\triangle ABC : \triangle FGH = \triangle ACD : \triangle FHI$. Prop. 11. L. 5.
 On démontrera de même que
 8. Le $\triangle ADE : \triangle FIK = \triangle ACD : \triangle FHI$.
 9. C'est pourquoi $\triangle ABC : \triangle FGH = \triangle ACD : \triangle FHI = \triangle ADE : \triangle FIK$. Prop. 11. L. 5.
 10. Comparant donc la somme des Antécédens à celle des Conséquens,
 le $\triangle ABC + \triangle ACD$ &c. $\triangle FGH + \triangle FHI$ &c. $= \triangle ABC : \triangle FGH$, &c. Prop. 12. L. 5.
 c.à.d. le Polyg. M : Polyg. N $= \triangle ABC : \triangle FGH = \triangle ACD : \triangle FHI$ &c. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. II.

Puis donc que le $\triangle ABC : \triangle FGH = \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$ * (*Prop.* 19. L. 6.),

11. Le Polyg. M : Polyg. N $= \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$ *. Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. III.

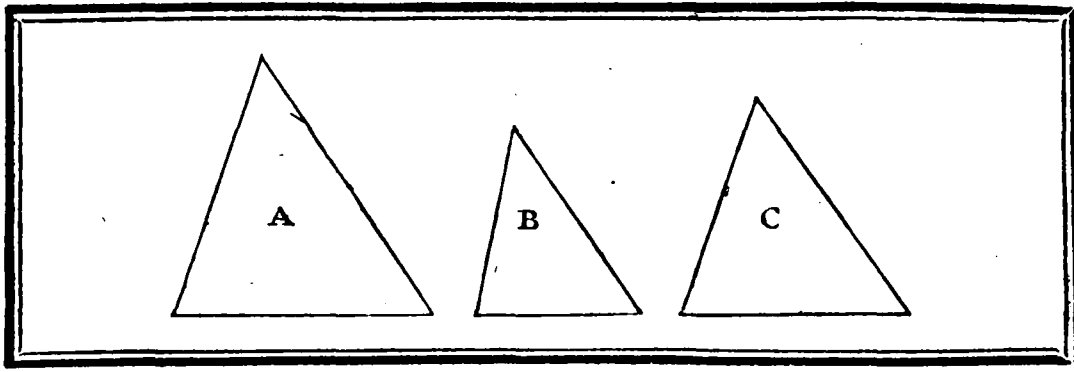
C O R O L L A I R E I.

Puisqu'on peut appliquer cette Démonstration aux Quadrilatères, & qu'on vient de prouver la même vérité des Triangles (*Prop.* 19), il est clair qu'en général toutes les Figures rectilignes semblables sont entr'elles en raison doublée de leurs côtés homologues quelconques. C'est pourquoi prenant aux côtés homologues AB, FG une III^{me} proportionnelle X; puisqu' AB est à X, en raison doublée de AB : FG; & qu'un Rectiligne M est à un autre Rectiligne semblable N, en raison doublée des mêmes côtés AB : FG, on voit que si trois lignes sont proportionnelles, la première est à la troisième, comme le Rectiligne décrit de la première est au Rectiligne décrit de la seconde, semblablement &c en une position semblable (*Prop.* 11. L. 5).

C O R O L L A I R E II.

EN particulier, tous les Quarrés étant semblables (*Def.* 30. L. 1 & *Def.* 1. L. 6), deux Rectilignes semblables quelconques M & N, sont toujours en raison des Quarrés de leurs côtés homologues AB, CD. Car de part & d'autre ces Figures sont en raison doublée de ces mêmes côtes.

* C'est pourquoi l'expression $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$, désigne également la raison des Quarrés Géométriques des lignes AB & CD, & la raison de leurs Quarrés Arithmétiques ou Algébriques (entendus selon Hyp. I. Coroll. 2 de l'Append.). ou enfin la raison doublée de ces mêmes lignes; puisque ce n'est qu'une seule & même raison.



PROPOSITION XXI. THEOREME XV.
LEs figures rectilignes A, C, semblables à une même (B), sont semblables entr'elles.

HYPOTHESE.

Les Figures rectilignes A et C sont semblables à la Figure B.

THESE.

La Figure rectiligne A est semblable à la Figure rectiligne C.

DEMONSTRATION.

PUis donc que chacune des figures A et C est semblable à la figure B (*Hyp.*),

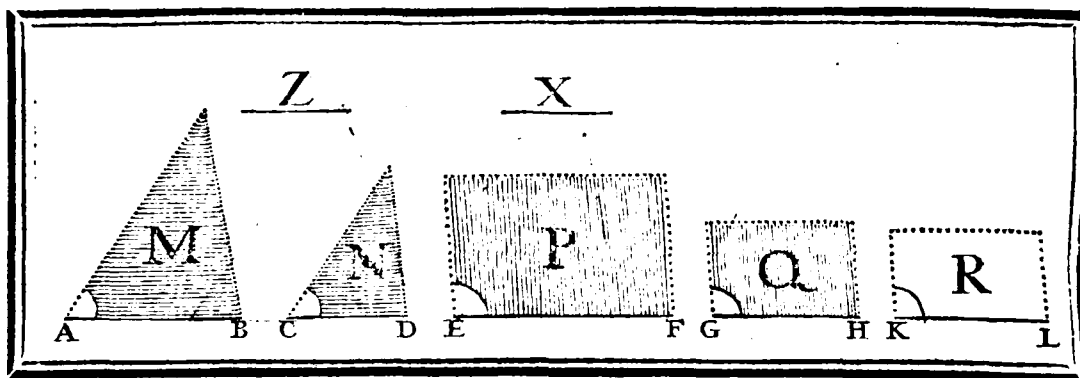
1. Chacune de ces figures sera aussi équiangle à la figure B, & aura les côtés alentour des $\vee$ égaux, proportionels aux côtés de la figure B.
2. Par conséquent ces figures A et C seront aussi équiangles entr'elles, & leurs côtés alentour des $\vee$ égaux, seront proportionels.
3. Partant les figures A et C, sont semblables.

Def. 1. L. 6.

{ Ax. 1. L. 1.
 { Prop. 11. L. 5.
 Def. 1. L. 6.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXII. THEOREME XVI.
SI quatre lignes droites (AB, CD, EF, GH) sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables & semblablement posées (M, N, item P, Q), décrites de ces lignes, seront proportionnelles. Et si les figures rectilignes semblables & semblablement posées (M, N, P, Q), décrites de ces lignes, sont proportionnelles, ces droites (AB, CD, EF, GH) seront elles mêmes proportionnelles.

HYPOTHESE.

I. $AB : CD = EF : GH$.

II. Les Figures M & N, décrites des lignes AB, CD, item les Fig. P & Q, décrites des lignes EF, GH, sont semblables, & semblablement posées.

I.

THESE.

$M : N = P : Q$.

Préparation.

Prenez aux lignes AB, CD la III^e proportionnelle Z.
 Et aux lignes EF, GH la III^e proportionnelle X.

Prop. 11. L. 6.

DEMONSTRATION.

Puisque $AB : CD = EF : GH$ (Hyp. 1),
 & $CD : Z = GH : X$ (Hyp. 1. Prep. & Prop. 11. L. 5),

1. $AB : Z = EF : X$

Prop. 22. L. 5.

Or à cause de la similitude des figures M & N, P & Q, & de leur description semblable des droites AB & CD, item EF & GH (Hyp. 2.);

2. $AB : Z = M : N$
 & $EF : X = P : Q$

Prop. 20. L. 6.
 Coroll. 2.

3. C'est pourquoi $M : N = P : Q$ (Arg. 1).

Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D.

II.

HYPOTHESE.

1. $M : N = P : Q$.
 11 Ces Figures sont semblables, & décrites en des positions semblables des droites AB, CD , item EF, GH .

THESE.

$AB : CD = EF : GH$.

Préparation.

1. Aux lignes AB, CD, EF prenez la IV^{re} . proportionnelle KL . Prop. 12. L. 6.
 2. De cette KL décrivez la Figure rectil. R , semblable & semblablement posée, aux Figures P ou Q . Prop. 18. L. 6.

DEMONSTRATION.

Puisque $AB : CD = EF : KL$ (Prep. 1); & qu'on a décrit de ces droites, les Fig. M & N , item P & R semblables chacune à chacune, & en des positions semblables (Hyp. 2 & Prep. 2),

1. $M : N = P : R$ (Partie I de cette Propos.).
 Or $M : N = P : Q$ (Hyp. 1).
 2. Partant $P : R = P : Q$. Prop. 11. L. 5.
 3. C'est pourquoi $R = Q$. Prop. 9. L. 5.
 De plus, ces mêmes figures égales, sont aussi semblables & décrites semblablement des droites GH, KL (Prep. 2).
 4. Partant $GH = KL$ *.
 5. Puis donc que $AB : CD = EF : KL$ (Prep. 1), & que $GH = KL$ (Arg. 4),
 5. $AB : CD = EF : GH$. Prop. 7. L. 5.

C. Q. F. D. 11.

* L E M M E.

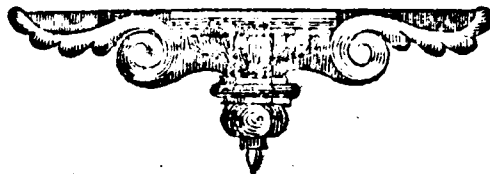
Les Rectilignes (Q & R) égaux & semblables ont leurs côtés homologues (GH & KL) égaux.

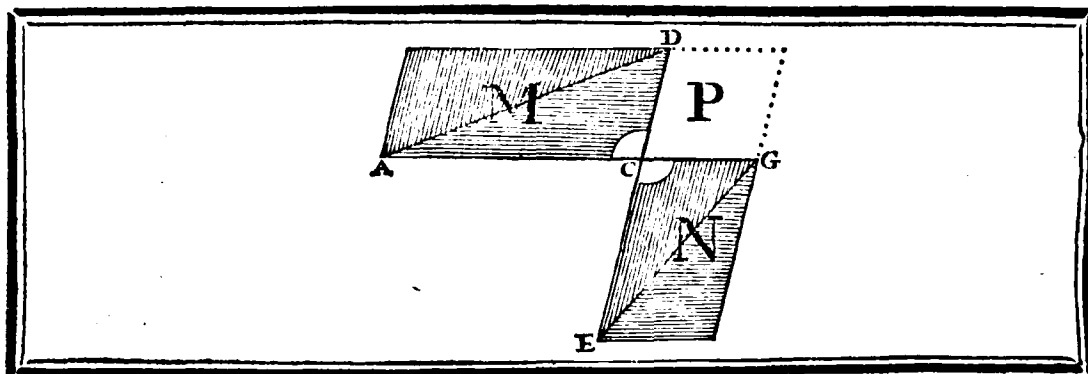
Car à cause de leur similitude

1. $Q : R = \square$ de $GH : \square$ de KL .
 Or Q étant $=$ à R (Arg. 3),
 2. Le $\square$ de GH est $=$ au $\square$ de KL .
 Par conséquent $GH = KL$.

{ Prop. 20. L. 6.
 { Coroll. 2.
 { Prop. 16. L. 5.
 { Rem.
 { Prop. 46. L. 1.
 { Coroll. 3.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXIII. THEOREME XVII.
Les Parallélogrammes équiangles (M & N) sont entr'eux en raison composée des raisons de leurs côtés (AC, CD & EC, CG) alentour des angles égaux.

HYPOTHESE.

Les Pgrs M & N sont équiangles;
 si bien que $\angle ACD = \angle ECG$.

THESE.

Pgr M : Pgr N = AC . CD : EC . CG;

Préparation.

1. Disposez AC & CG en une même droite AG;
 cela fait, EC & CD formeront aussi une même droite ED.
2. Achevez le Pgr P.

Prop. 14. L. 1.
 Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les Pgrs M, P, N, forment une suite de trois grandeurs,

1. La raison de la première M à la dernière N, se trouve composée des deux raisons intermédiaires M : P & P : N.

Prop. 5. &
 Hyp. 3. App.

c. à d. la raison

$$M : N = M : P + P : N.$$

Or à cause que

$$\begin{aligned} AC : CG &= M : P. \\ \& DC : CE &= P : N. \end{aligned}$$

Prop. 1. L. 6.

2. La raison des côtés AC : CG est la même que celle des Pgrs M : P; & la raison des côtés DC : CE, la même que celle des Pgrs P : N.
 Puis donc que la raison de M : N se trouve composée des raisons M : P & P : N (Arg. 1),

3. Cette même raison se trouve composée de leurs égales; des raisons AC : CG, & CD : EC, des côtés alentour des angles égaux ACD, ECG.

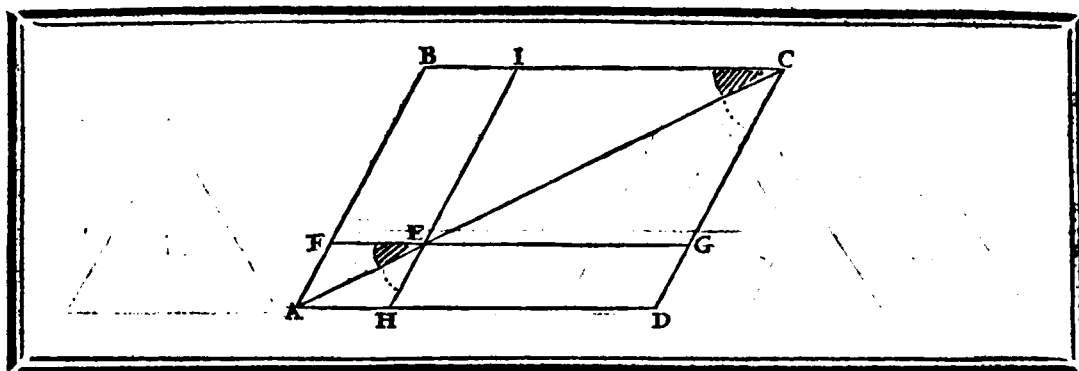
4. Par conséquent $M : N = AC . CG : EC . CG$.

Def. 5. L. 6.
 Def. 6. App.

C. Q. F. D.

Coroll. I. Les Pgrs équiangles sont donc comme les produits qui résultent de la multiplication de leurs côtés alentour des angles égaux. (Déf. 1 & 6. App.).

Coroll. II. Les mêmes vérités conviennent aux Triangles (ACD, ECG) qui ont un Angle (ACD) égal à un angle (ECG). Car les Diagonales (AD, EG) partagent les Pgrs en deux également (Prop. 34. L. 1.).



PROPOSITION XXIV. THEOREME XVIII.
EN tout Parallélogramme (BD), les Parallélogrammes (FH, IG) alentour de la diagonale (AC) sont semblables & au Tout & entr'eux.

HYPOTHESE.

- I. BD est un Pgr.
- II. FH, IG sont des Pgrs alentour de la diagonale AC.

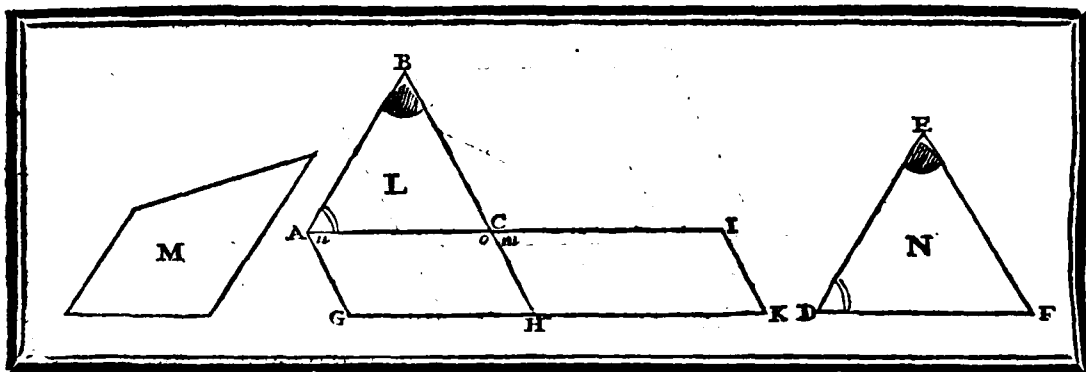
THESE.

- I. Les Pgrs AFEH, EICG sont semblables au Pgr ABCD,
- II. Et semblables entr'eux.

DEMONSTRATION.

- P**uisque FE est Plle à BC (Hyp. I. & 2. & Prop. 30. L. I.),
 1. Le $\triangle AFE$ est équiangle au $\triangle ABC$, selon l'ordre des lettres.
 De même, parceque HE est Plle à DC,
 2. Le $\triangle AHE$ est équiangle au $\triangle ADC$, selon l'ordre des lettres.
 3. Le Pgr AFEH est donc aussi équiang. au Pgr ABCD, selon l'ordre des lettres.
 Et à cause que dans les $\triangle AHE, ADC$, les $\angle AHE$ & $\angle D$ sont égaux (Arg. 2),
 comme dans les $\triangle AFE, ABC$, les $\angle AFE$ & $\angle B$ (Arg. 1),
 4. $AH : HE = AD : DC$ } Prop. 4. L. 6.
 & $AF : FE = AB : BC$ }
 De plus, à cause que les $\angle AEH, ACD$; item $\angle EFA, BCA$ sont égaux (Arg. 1 & 2)
 5. $HE : AE = DC : AC$ } Prop. 4. L. 6.
 & $AE : EF = AC : CB$ }
 6. Donc par égalité $HE : EF = DC : CB$. Prop. 22. L. 5.
 Et encore, à cause que les $\angle EAH, EFA$ sont communs, de part & d'autre,
 aux deux triangles AHE, ADC & AFE, ABC ,
 7. $HA : EA = DA : CA$ } Prop. 4. L. 6.
 & $EA : AF = CA : AB$ }
 8. Donc par égalité $HA : AF = DA : AB$ Prop. 22. L. 5.
 9. C'est pourquoi les Pgrs AFEH, ABCD, ont leurs angles égaux, chacun à chacun, dans l'ordre des lettres (Arg. 3); & les côtés alentour des angles égaux, proportionels (Arg. 4. 6. 8.).
 10. Par conséquent ces Pgrs sont semblables. Def. 1. L. 6.
 11. On démontre de la même manière, que les Pgrs EICG, ABCD sont semblables.
 12. Par conséquent les Pgrs AFEH, EICG sont aussi semblables entr'eux. C. Q. F. D. I. Prop. 21. L. 6.

C. Q. F. D. II.



PROPOSITION XXV. PROBLEME VII.
Construire un Rectiligne (N), semblable à un Rectiligne donné (L), & égal à un autre (M).

DONNEE.

1. Le Rectiligne L.
2. Et le Rectiligne M.

CHERCHEE.

Le Rectiligne N, semblable au Rectiligne L, & égal au Rectiligne M.

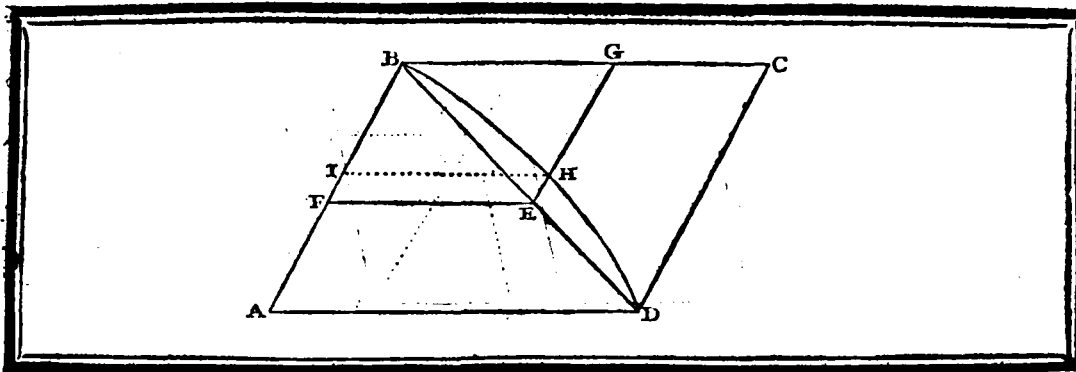
Résolution.

1. Appliquez à la droite AC, un Pgr AH = au Rectiligne donné L. Prop. 44. L. 1.
2. Et à la droite CH, un Pgr CK = au Rectiligne donné M, ayant un $\forall m = \forall n$. Prop. 45. L. 1.
3. Cela fait, les côtés AC, CI & GH, HK se rencontreront directement. Prop. 14, 29, & 34. L. 1.
4. Prenez entre A-C, & CI, une moyenne proportionnelle DF. Prop. 13. L. 6.
5. De cette droite DF, décrivez le Rectil. N, semblable & semblablement posé au Rectil. L. Prop. 18. L. 6.

DEMONSTRATION.

- P**uisque les Pgrs AH, CK, ont la même hauteur (Ref. 2 & 3),
1. $\text{Pgr AH} : \text{Pgr CK} = AC : CI$, Prop. 1. L. 6.
 Or le Pgr AH = Rectil. L, & le Pgr CK = Rectil. M (Ref. 1 & 2);
 2. Partant $L : M = AC : CI$. Prop. 11. L. 5.
 Mais $AC : DF = DF : CI$ (Ref. 4); & des droites AC, DF ont été décrits les Rectilignes semblables & semblablement posés L & N (Ref. 5); Prop. 20. L. 6.
 3. Partant $L : N = AC : CI$. Coroll.
 4. D'où il suit que $L : N = L : M$ (Arg. 2); Prop. 11. L. 5.
 5. C'est pourquoi $N = M$. Prop. 14. L. 5.
 6. On a donc construit un Rectiligne N, semblable au Rectiligne L (Ref. 5), & égal au Rectiligne M. (Arg. 5).

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXVI. THEOREME XIX.
SI d'un Parallélogramme (AC) on retranche un Parallélogramme (FG), semblable & semblablement posé au Parallélogramme entier (AC), ayant un angle (FBG) commun avec lui: le Parallélogramme (FG) est placé alentour de la diagonale (BD) du Parallélogramme entier (AC).

HYPOTHESE

- I. AC est un Pgr, dont BD est la diagonale.
- II. FG est un Pgr semblable à AC, & ayant un $\angle$ FBG commun avec AC.

THESE

Le Pgr FG est placé alentour de la diagonale BD du Pgr AC.

DEMONSTRATION.

Si non. Soit une autre ligne BHD, différente de BED, la diagonale du Pgr AC, coupant le côté GE en un point H.

Préparation.

Par ce point H tirez HI Plle à CB ou DA.

Prop. 31. L. 1.

LES Pgrs AC, IG étant donc placés alentour de la même diagonale BHD, & $\angle$ FBG étant commun aux deux Pgrs (Sup. & Prep.),

1. Le Pgr AC est semblable au Pgr IG.
2. Partant $CB : BA = GB : BI$.
 Mais les Pgrs AC & FG étant aussi semblables, & $\angle$ B commun aux deux Pgrs (Hyp. 2),
3. On aura $CB : BA = GB : BF$.
4. Par conséquent $GB : BI = GB : BF$.
5. Donc $BI = BF$.
6. Ce qui est impossible.
7. Ainsi toute ligne BHD, différente de la ligne BED, n'est point la diagonale du Pgr AC.
8. Partant, la ligne BED est la véritable diagonale, & le Pgr FG est placé alentour d'elle.

Prop. 24. L. 6.

Def. 1. L. 6.

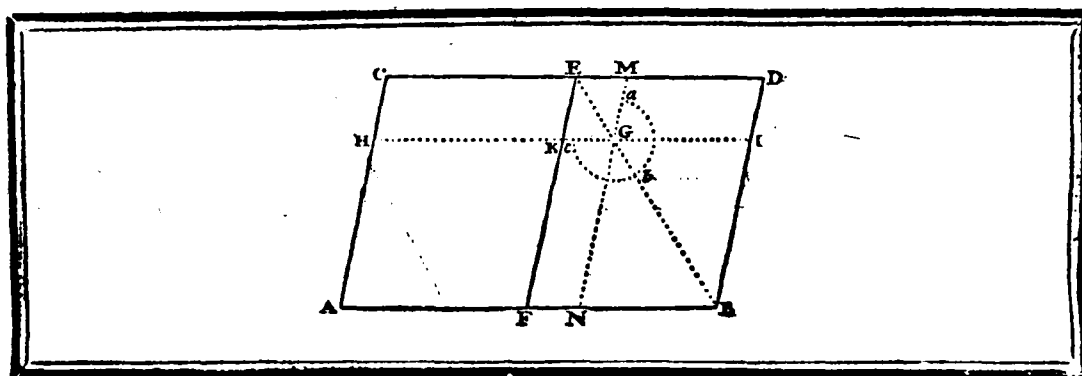
Def. 1. L. 6.

Prop. 11. L. 5.

Prop. 14. L. 5.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVII. THEOREME XX.

DE tous les Parallélogrammes (AG) appliqués selon une même ligne droite (AB), & défailans de Parallélogrammes (NI) semblables & semblablement posés, à un autre Parallélogramme (FD) décrit de la moitié (FB) de la ligne entière (AB); Le plus grand est le Parallélogramme (AE) appliqué à l'autre moitié (AF), & semblable à son défaut (FD).

HYPOTHESE.

- I. AE est un Pgr appliqué à la moitié AF, de la droite AB.
- II. Lequel est semblable & semblablement posé à son défaut, le Pgr FD, déjà décrit de l'autre moitié FB.

THESE.

AE est le plus grand de tous les Pgrs, tel que AG, applicables selon AB, ayant leurs défauts, tel que NI, semblables & semblablement posés au Pgr FD, défaut de AE, décrit de FB moitié de AB.

Préparation.

1. Tirez la Diagonale BE.
 2. Et par un point quelconque G, pris dans BE, tirez IH MN Plles à BA, AC.
- Afin d'avoir un Pgr quelconque AG, appliqué selon AB, défailant d'un Pgr NI, semblable au Pgr FD & semblablement posé.

Dem. 1. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

Prop. 16. L. 6.

DEMONSTRATION.

CAS I. Lorsque le point N tombe dans la moitié FB.

Puisque le Pgr GD est = au Pgr GF (Prop. 43. L. 1); en ajoutant le Pgr commun NI,

1. Le Pgr ND sera = au Pgr FI.

Ax. 2. L. 1.

Mais à cause que le Pgr AK est aussi = au Pgr FI (Prop. 36. L. 1),

2. Le Pgr ND est = au Pgr AK.

Ax. 1. L. 1.

Si l'on ajoute donc de part & d'autre le Pgr FG;

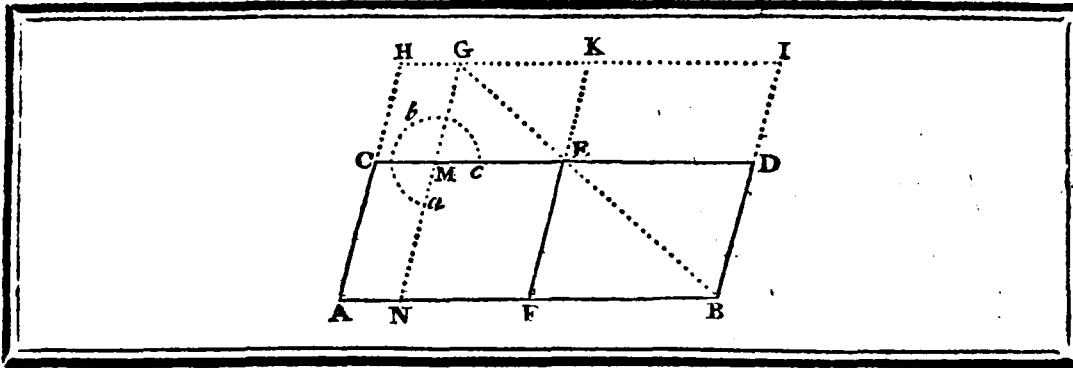
3. Le Gnomon abc est = au Pgr AG,

Ax. 2. L. 1.

4. Partant le Pgr entier FD, ou son égal le Pgr AE (Hyp. 2), est > Pgr AG.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.



CAS II Lorsque le point N tombe dans la moitié AF.

Le Pgr NE étant $\equiv$ au Pgr IE (*Prop. 43. L. 1.*), si l'on ajoute de part & d'autre le Pgr commun FD,

1. Le Pgr ND sera $\equiv$ au Pgr FI;

Mais à cause que le Pgr AK est aussi $\equiv$ au Pgr FI (*Prop. 36. L. 1.*),

2. Le Pgr ND sera $\equiv$ au Pgr AK.

Si l'on retranche donc de part & d'autre le Pgr commun FM,

3. Reste le Pgr FD $\equiv$ au Gnomon *abc*.

Or le Pgr FD est $\equiv$ au Pgr AE;

4. C'est pourquoi le Pgr AE $\equiv$ au Gnomon *abc*.

5. Par conséquent le Pgr AE $>$ que le Pgr AG.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 3. L. 1.

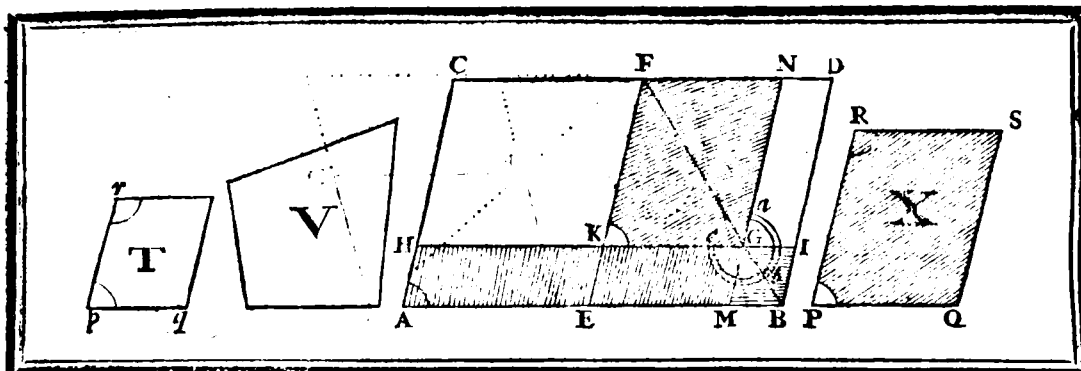
Prop. 36. L. 1.

Ax. 1. L. 1.

Ax. 8. L. 1.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXVIII. PROBLEME VIII.

Sur une droite donnée (AB), appliquer un Parallélogramme (AG) égal à un Rectiligne donné (V), & défailant d'un Parallélogramme (MI), semblable à un Parallélogramme donné (T); mais il faut que le Rectiligne donné (V), ne soit pas plus grand, qu'un Parallélogramme (AF) appliqué à la moitié de la droite donnée, ayant son défaut (ED) semblable au Parallélogramme donné (T).

DONNEE.

- I. La droite AB, & le Pgr T.
- II. Le Rectiligne V, qui n'est pas > qu'un Pgr ED, semblable à T, appliqué à AE, moitié de AB.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr AG, appliqué selon AB, qui soit = à V, & défaille d'un Pgr MI, semblable à T.

Résolution.

1. Coupez AB en deux également en E.
2. Construisez sur EB un Pgr ED, semblable au Pgr T & semblablement posé.
3. Achevez le Pgr AD.
Le Pgr AF sera ou =, ou > V; puisqu'il ne peut être < V, par la détermination.

Prop. 10. L. 1.

Prop. 18. L. 6.

Prop. 31. L. 1.

CAS I. Si AF est = à V.

On aura appliqué selon AB, un Pgr AF = au Rectil. V, & défailant d'un Pgr ED semblable au Pgr T.

C. Q. F. F.

CAS II. Si AF est > V, & par-là ED > V, parce que AF = ED.

Prop. 36. L. 1.

4. Construisez un Pgr X, semblable au Pgr T, (ou au Pgr ED) (Ref. 2), & semblablement posé, & égal à l'excès dont ED, ou son égal AF, surpasse V (c. à d. faites $X = ED - V$), & que RS, FD item RP, FE en foyent les côtés homologues.
Et d'autant que X est semblable à ED & < ED; (parce que $ED = V + X$),
Les côtés RS, RP sont < que leur côtés homologues FD, FE.
5. Faites donc FN = à RS, & FK = à RP.
6. Et achevez le Pgr NK.

Prop. 45. L. 1.

Prop. 3. L. 1.

Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

- L**E Pgr KN étant donc égal & semblable au Pgr X (Ref. 4, 5 & 6); qui est lui même semblable au Pgr ED (Ref. 4),
1. Le Pgr KN est semblable au Pgr ED. Prop. 21. L. 6.
 2. C'est pourquoi ces deux Pgrs KN, ED, sont alentour de la même diagonale. Prop. 26. L. 6.
 Tirez cette diagonale FGB, & achevez de décrire la figure.
 Puis donc que le Pgr MI, est aussi alentour de la même diagonale FB,
 3. Il est semblable au Pgr ED. Prop. 24. L. 6.
 4. Par conséquent semblable au Pgr T (Ref. 2.). Prop. 21. L. 6.
 Or le Pgr DG étant = au Pgr EG (Prop. 43. L. 1), si l'on ajoute de part & d'autre ce Pgr commun MI,
 5. Le Pgr MD. fera = au Pgr EI. Ax. 2. L. 1.
 Mais le Pgr AK. étant aussi = au Pgr EI (Prop. 36. L. 1),
 6. Le Pgr MD est = au Pgr AK. Ax. 1. L. 1.
 Et ajoutant de plus le Pgr commun EG, de part & d'autre,
 7. Le Gnomon *abc* fera = au Pgr AG. Ax. 2. L. 1.
 Or le Pgr ED étant = aux figures V & X prises ensemble, (Ref. 4) ou V & KN, puisque X est = KN, (Ref. 5 & 6); si l'on ôte le commun KN, de part & d'autre
 8. Reste le Gnomon *abc* = à V. Ax. 3. L. 1.
 9. Partant le Pgr AG est = à V. (Arg. 7). Ax. 1. L. 1.
 Or ce Pgr AG a pour défaut le Pgr MI, semblable au Pgr donné T (Arg. 4);
 10. On a donc appliqué selon AB, un Pgr AG = à V, défailant d'un Pgr MI semblable au Pgr T. Def. 8. L. 6.

C. Q. F. F.

Remarque.

Divers Editeurs de Nouveaux Elémens d'Euclide, ont omis cette Proposition & la suivante, comme inutiles, parcequ'ils n'en connoissoient pas l'usage. Elles sont cependant essentiellement nécessaires pour l'Analyse des Anciens, en ce qu'elles correspondent à la résolution algébrique des égalités du second Degré; où le 1^{er} terme peut être affecté d'une quantité quelconque; le dernier étant un rectangle quelconque.

Cette XXVIII. Proposition répond au cas, où le dernier terme de l'égalité réduite à zéro, devient positif.

Car réduisant l'espace donné V en un Pgr équiangle au Pgr T; posez $V = nl$; la raison des côtés QP, PR du Pgr X (ou T), $m : n$; de plus $AB = a$, $AM = x$, & $MB = a - x$.

Partant, à cause que le défaut MI, doit être semblable au Pgr T ou au Pgr X,

$$QP : PR = BM : MG \text{ (Def. 1. L. 6)}$$

$$m : n = a - x : \frac{n}{m}(a - x)$$

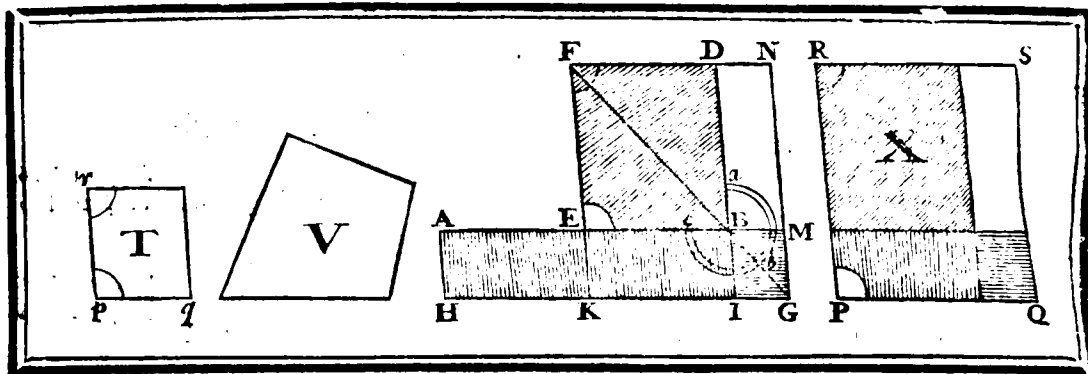
Et, d'autant que le Pgr GA (= MA . MG) doit être égal à l'espace donné V (= nl), On arrive à l'égalité suivante (Prop. 23. L. 6).

$$\frac{n}{m}(a - x) x = V \text{ ou } nl$$

Qui se réduit à cette autre, $\frac{n}{m} x x - \frac{n}{m} a x + V = 0$

Ou bien, en mettant pour V sa valeur, & multipliant par m, puis divisant par n.

$$x x - a x + ml = 0.$$



PROPOSITION XXIX. PROBLEME IX.
Selon une droite donnée (AB), appliquer un Parallélogramme (AG), égal à un Rectiligne donné (V), excédant d'un Parallélogramme (MI), semblable à un Parallélogramme donné (T).

DONNEE.

- I. La droite AB, & le Pgr T.
- II. Le Rectiligne V.

CHERCHEE.

La construction d'un Pgr AG, appliqué selon AB, égal au Rectil. V, & ayant pour excès un Pgr MI, semblable à T.

Résolution.

1. Coupez AB en deux également, en E. Prop. 10. L. 1.
2. De la moitié EB, décrivez un Pgr ED, semblable au Pgr T, & semblablement posé. }
3. Décrivez un Pgr X (ou PS) = V + ED, semblable & semblablement posé au Pgr T; & par conséquent semblable au Pgr ED (Ref. 2. Prop. 21. L. 6): & soient les côtés RS, FD; RP, FE homologues. } Prop. 18. L. 6.
4. Puis donc que X, (comme = V + ED), est > ED; le côté RS est > que FD, & le côté RP > que FE. C'est pourquoi après avoir prolongé FD & FE, faites FN = RS & FK = RP; & achevez le Pgr FKGN, qui sera égal & semblable au Pgr X. Prop. 31. L. 1.

DEMONSTRATION.

LE Pgr KN étant donc égal & semblable au Pgr X, qui est lui même semblable au Pgr ED (Ref. 3),

1. Le Pgr KN est semblable au Pgr ED. Prop. 11. L. 6.
2. C'est pourquoi ces deux Pgrs KN, ED, sont alentour d'une même diagonale. Prop. 26. L. 6.
 Tirez cette diagonale FBG, & achevez de décrire la figure.
 Puis donc que X est = V + ED, & que X est au Pgr KN (Ref. 3 & 4),
3. Le Pgr KN = V + ED. Ax. 1. L. 1.
 Otant donc de part & d'autre le Pgr commun ED,
4. Reste le Gnomon abc = au Rectil. V. Ax. 3. L. 1.
 Or, à cause que AE = EB (Ref. 1),
5. Le Pgr AK = au Pgr EI. Prop. 36. L. 1.
6. Et par cette raison ce Pgr AK est = au Pgr NB. Prop. 43. L. 1.

Ajoutant

- Ajoutant donc de part & d'autre le Pgr commun MK,
7. Résulte le Pgr AG = au Gnomon *abc*. Ax. 2. L. 1.
 Or le Gnomon *abc* est = au Rectil. V (Arg. 4);
8. Partant le Pgr AG est = au Rectil. V. Ax. 1. L. 1.
 Puis donc que ce Pgr AG a pour excès le Pgr MI, semblable au Pgr ED
 (Prop. 24. L. 6); & par conséquent semblable au Pgr T (Ref. 2. Prop. 21. L. 6),
9. On a appliqué selon AB, un Pgr AG = au Rectil. V, ayant pour excès un
 Pgr MI, semblable au Pgr T.

C. Q. F. F.

Remarque.

SI, comme dans le cas précédent, on fait AB = *a*; l'espace donné V (reduit à un Pgr équiang. au Pgr T) = *nl*; la raison des côtés QP, PR du Pgr X (qui est celle des côtés du Pgr T) *m* : *n*; de plus AM = *x* & par conséquent MB = *x* — *a*. L'on arrive à une égalité de la même espèce.

Car, à cause que le défaut MI doit être semblable au Pgr T ou X, on a comme auparavant cette Analogie

$$QP : PR = MB : MG \text{ (Def. 1. L. 6).}$$

$$m : n = x - a : \frac{n}{m}(x - a)$$

Et d'autant que le Pgr AG (= AM . MG), doit être égal à l'espace donné V (= *nl*), on a l'égalité suivante

$$\frac{n}{m}(x - a)x = V. \text{ (Prop. 23. L. 6).}$$

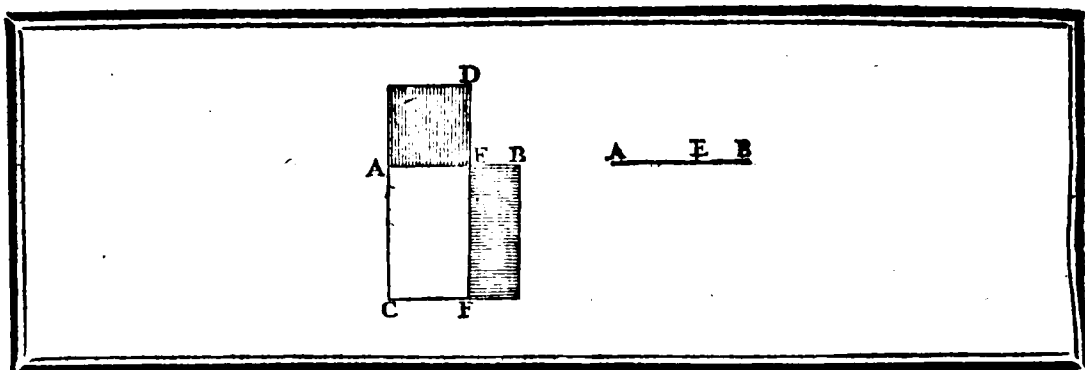
Qui se réduit à celle-ci. $\frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax - V = 0.$

Ou bien, en mettant pour V sa valeur *nl*, puis multipliant par *m* & divisant par *n*

$$xx - ax - ml = 0.$$

D'où l'on voit, que la Prop. XXIX regarde le cas, où le dernier terme de l'égalité réduite à zéro, est négatif.





C PROPOSITION XXX. PROBLEME X.
Couper une droite donnée (AB) en extrême & moyenne raison (en E).

DONNEE.
La droite AB.

CHERCHEE.
Le point E, tel que AB soit coupé en extrême & moyenne raison; de manière que
 $BA : AE = AE : BE$.

Résolution.

1. De la droite AB décrivez un carré BC. Prop. 46. L. 1.
2. Appliquez au côté CA, un Pgr CD = au carré BC, dont l'excès AD soit semblable à BC; qui fera par conséquent un carré. Prop. 29. L. 6.

DEMONSTRATION.

Puis donc que $BC = CD$ (Ref. 2.); si l'on ôte le Rgle commun CE,

1. Reste $BF = AD$. Ax. 3. L. 1.

Mais BF est aussi équiangle avec AD (Prop. 15. L. 1);

2. Leurs côtés FE, EB; ED, AE alentour des angles égaux, sont donc réciproquement proportionels, c. à. d. $FE : ED = AE : EB$.

Or FE est = CA (Prop. 34. L. 1), ou = à BA, & ED = AE (Def. 30. L. 1).

3. C'est pourquoi $BA : AE = AE : EB$. Prop. 14. L. 6.

Mais parceque BA est $\angle$ AE (Ax. 8. L. 1.),

4. La droite AE est $\angle$ EB. Pr. 7. & 11. L. 5.

5. Partant la droite AB est coupée en extrême & moyenne raison en E; tellement que AE en est le plus grand segment. Prop. 14. L. 5.

Def. 3. L. 6.

C. Q. F. F.

Autrement.

Partagez BA en E, enforte que le Rgle AB. BE soit = au $\square$ de AE.

Prop. 11. L. 2.

DEMONSTRATION.

Puis donc que BA. BE est = au $\square$ de AE (Ref.),

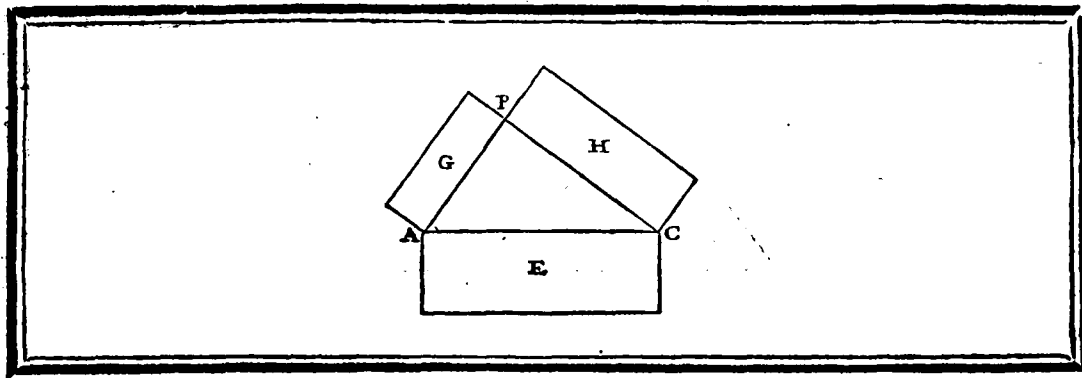
1. $BA : AE = AE : BE$. Prop. 17. L. 6.

Et parceque BA est $\angle$ AE (Ax. 8. L. 1.),

2. La droite AE est $\angle$ BE. Prop. 14. L. 5.

3. Partant la droite AB est coupée en extrême & moyenne raison en E. Def. 3. L. 6.

C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXI. THEOREME XXI.
Dans tout triangle rectangle (ABC), la figure (E) décrite de l'hypothénuse (AC) est égale à la somme des figures semblables & semblablement posées (G & H), décrites des deux côtés (AB, BC) alentour de l'angle droit.

HYPOTHESE.

- I. ABC est un Δ Rgle en B.
- II. La figure E est décrite de l'hypothénuse AC de ce Δ .
- III. Et les figures G & H sont semblables à E & décrites semblablement des deux autres côtés AB, BC.

THESE.

La figure E est = aux figures G + H.

DEMONSTRATION.

Puis donc que les figures E, G, H sont semblables & décrites semblablement des côtés homologues AC, AB, BC (Hyp. 3),

- I. $G : E = \square \text{ de } AB : \square \text{ de } AC.$
 Et $H : E = \square \text{ de } BC : \square \text{ de } AC.$
2. Partant $G + H : E = \square \text{ de } AB + \square \text{ de } BC : \square \text{ de } AC.$
 Or à cause que le Δ ABC est rectangle en B (Hyp. I),
3. Le $\square \text{ de } AB + \square \text{ de } BC$ est = au $\square \text{ de } AC.$
4. Donc la figure E est = aux figures G + H.

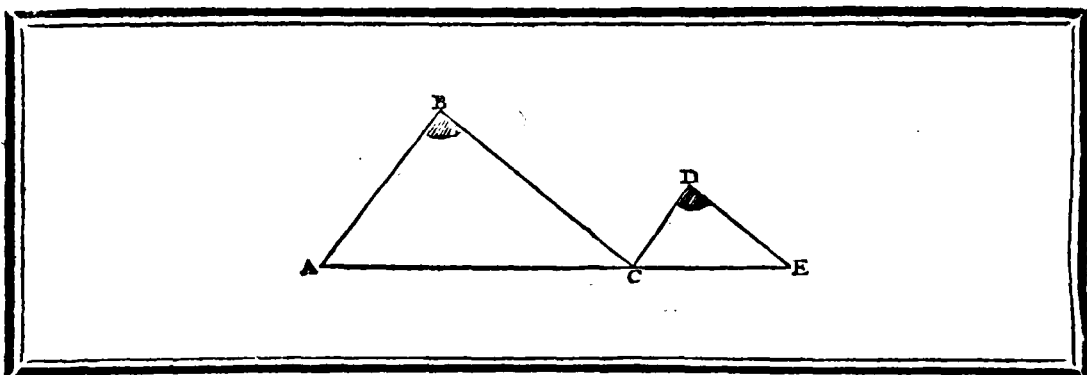
{ Prop. 20. L. 6.
 { Coroll. 2.
 Prop. 24. L. 5.

Prop. 47. L. 1.

{ Prop. 16. L. 5.
 { Rem.

C. Q. F. D.





PROPOSITION XXXII. THEOREME XXII.
Si deux triangles (ABC , CDE), qui ont deux côtés (AB , BC) proportionels à deux côtés (CD , DE), s'entretouchent (en C), de manière que leurs côtés homologues (AB , CD , BC , DE) soient Parallèles, les deux autres côtés (AC , CE) se rencontreront directement.

HYPOTHESE.

- I. $AB : BC = CD : DE$.
- II. Les ΔABC , CDE s'entretouchent en C .
- III. De manière que AB est Plle à CD , & BC Plle à DE .

THESE.

Les deux autres côtés AC , CE de ces Δ , se rencontrent directement, ou ils ne forment qu'une même droite AE .

DEMONSTRATION.

Puisque les Plles AB , CD sont coupées par la droite BC , & les Plles BC , DE par la droite DC (*Hyp. 2*),

1. L'angle B est $=$ à $\angle BCD$ & $\angle D$ est aussi $=$ à $\angle BCD$.

Prop. 29. L. 1.

2. Partant $\angle B$ est $=$ à $\angle D$.

Ax. 1. L. 1.

Et comme de plus $AB : BC = CD : DE$ (*Hyp. 1*),

3. Les ΔABC , CDE sont équiangles.

Prop. 6. L. 6.

4. Donc l'angle A est $=$ à $\angle DCE$, comme opposés aux côtés homologues BC , DE .
 Ajoutant donc de part & d'autre $\angle B$, ou son $=$ $\angle BCD$ (*Arg. 1*), avec $\angle$ commun BCA ,

5. Les $\angle A + B + BCA$ seront $=$ aux $\angle DCE + BCD + BCA$.

Ax. 2. L. 1.

Or les $\angle A + B + BCA$ sont $=$ à $2\angle$ (*Prop. 32. L. 1*),

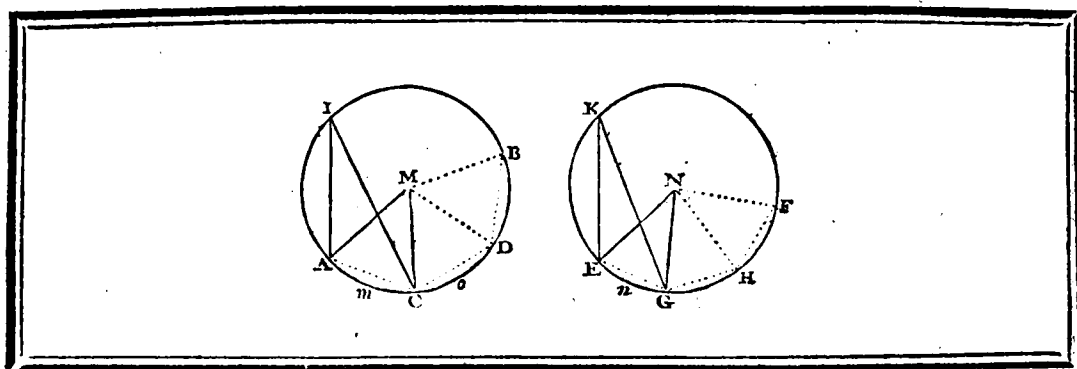
6. Par conséquent les $\angle DCE + BCD + BCA$ sont aussi $=$ à $2\angle$.

Ax. 1. L. 1.

7. D'où il suit que les droites AC , CE se rencontrent directement, ou qu'elles ne forment qu'une même ligne droite AE .

Prop. 14. L. 1.

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXIII. THEOREME XXIII.
 Dans les cercles égaux (AIBC, EKFG), les angles, soit aux centres soit aux circonférences (AMC, ENG ou AIC, EKG), de même que les secteurs (AMCm, ENGn), sont en raison des arcs (AmC, EnG) sur lesquels ils appuyent.

HYPOTHESE.

- I. Les $\odot$ AIBC, EKFG sont = entr'eux.
- II. Les $\sphericalangle$ aux centres AMC, ENG, & les $\sphericalangle$ aux $\odot$ AIC, EKG appuyent sur les arcs AmC, EnG.

THESE.

- I. $\sphericalangle AMC : \sphericalangle ENG = AmC : EnG$.
- II. $\sphericalangle AIC : \sphericalangle EKG = AmC : EnG$.
- III. Sect. AMCm : Sect. ENGn = AmC : EnG.

Préparation.

1. Joignez les cordes AC, EG.
2. Appliquez dans la $\odot$ AIBC, les cordes CD, DB &c, chacune = à AC, & dans la $\odot$ EKFG un pareil nombre de cordes, GH, HF &c, chacune = à EG.
3. Tirez MD, MB &c, item NH, NF &c.

Dem. 1. L. 1.

Prop. 1. L. 4.

Dem. 1. L. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque d'un côté les cordes AC, CD, DB, & de l'autre les cordes EG, GH, HF sont = entr'elles (Prép. 2),

1. Les arcs AmC, CoD, DB sont tous égaux d'un côté; comme les arcs EnG, GH, HF le sont de l'autre.
2. Partant les $\sphericalangle$ AMC, CMD, DMB &c; item ENG, GNH, HNF &c, sont aussi = entr'eux, d'un côté & de l'autre.
3. C'est pourquoi $\sphericalangle$ AMB & l'arc ACDB, sont des équi-multiples de $\sphericalangle$ AMC & de l'arc AmC.
4. Et par la même raison $\sphericalangle$ ENF & l'arc EGHF sont des équi-multiples de $\sphericalangle$ ENG & de l'arc EnG.

Prop. 28. L. 3.

Prop. 27. L. 3.

Mais à cause de l'égalité des deux $\odot$ AIBC, EKFG (Hyp. 1),

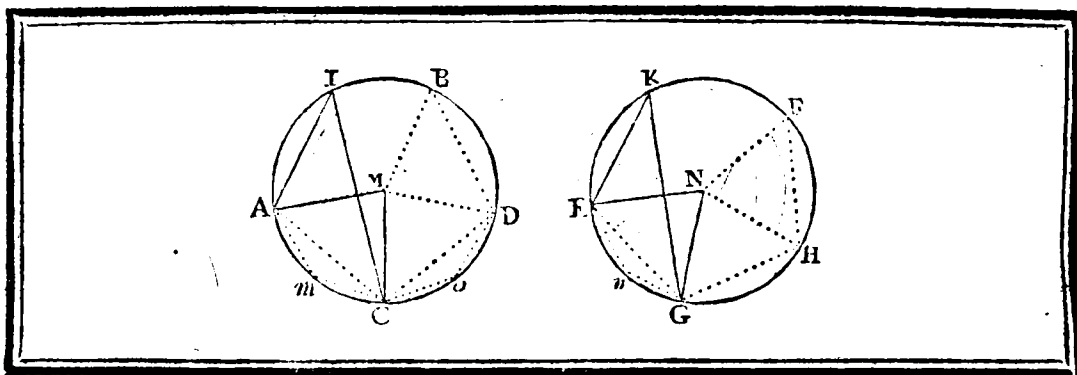
Selon que l'arc ACDB est $\sphericalangle$, = ou $\sphericalangle$ que l'arc EGHF; $\sphericalangle$ AMB est aussi $\sphericalangle$ = ou $\sphericalangle$ que $\sphericalangle$ ENF.

5. C'est pourquoi $\sphericalangle AMC : \sphericalangle ENG = AmC : EnG$.

Prop. 27. L. 3.

Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. L



De plus, $\angle AMC$ étant double de $\angle AIC$, & $\angle ENG$ double de $\angle EKG$
(*Prop. 20. L. 3*),

6. Il s'en suit que $\angle AMC : \angle ENG = \angle AIC : \angle EKG$.

Prop. 15. L. 5.

7. Partant. $\angle AIC : \angle EKG = AmC : EnG$.

Prop. 11. L. 5.

C. Q. F. D. 11.

PREP. 4. Dans les arcs AC, CD, prenez les points m & o ; & joignez Am , Cm ;
 Co , Do &c.

Dem. 1. L. 1.

Puis donc que les deux côtés AM , MC sont = aux deux côtés CM , MD
(*Def. 15. L. 1.*), & que les $\angle$ compris AMC , CMD sont égaux (*Arg. 2*),

8. La base AC est = à la base CD , & le $\triangle AMC$ = au $\triangle CMD$.

Prop. 4. L. 1.

De plus, par la raison que l'arc AmC est = CoD (*Arg. 1*),

9. Le complément $AIBDC$ du premier est = au complément $CAIBD$ du second.

Ax. 3. L. 1.

10. C'est pourquoi $\angle AmC$ est = $\angle CoD$.

Prop. 27. L. 3.

11. Le Segment AmC est donc semblable au Segment CoD

Ax. 2. L. 3.

Et ils sont outre cela soutendus par des cordes égales (*Arg. 8*).

12. Par cette raison le Segment AmC est = au Segment CoD .

Prop. 24. L. 3.

Or comme le $\triangle AMC$ est aussi = au $\triangle CMD$ (*Arg. 8*),

13. Le Secteur $AMCm$ est = au Secteur $CMDo$.

Ax. 2. L. 1.

De la même manière, le Secteur DMB est égal à chacun des deux précédens
 $AMCm$, $CMDo$.

14. Les trois Secteurs AMC , $CMDo$, DMB sont donc égaux entr'eux.

15. On démontre de même, que les trois Secteurs ENG , GNH , HNH sont
= entr'eux.

16. C'est pourquoi le Sect. $AMBDC$ & l'arc $ACDB$ sont d'un côté des équimultiples du Sect. $AMCm$ & de l'arc AmC ; comme de l'autre côté, le Sect.
 $ENFHG$, & l'arc $EGHF$ sont des équimultiples du Sect. $ENGn$, & de
l'arc EnG .

Or à cause que les $\odot AIBC$, $EKFG$ sont égaux (*Hyp. 1*),

Selon que l'arc $ACDB$ est $>$, = ou $<$ que l'arc $EGHF$: (*)

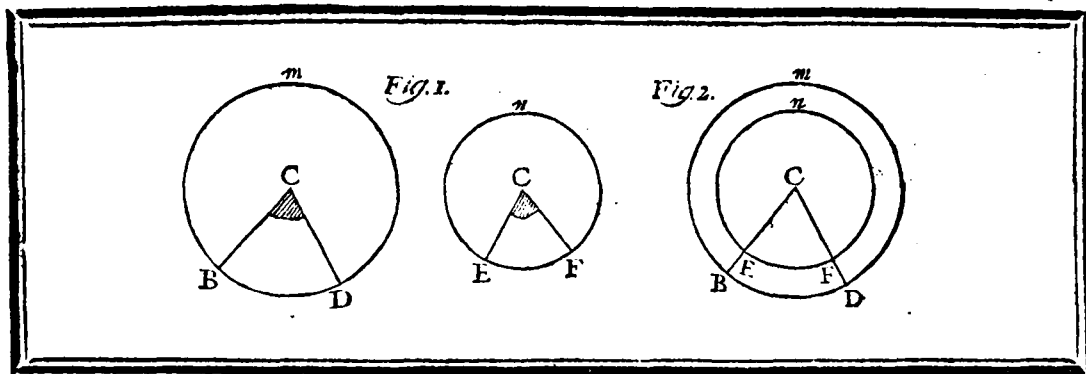
le Sect. $AMBDC$ est aussi $>$, = ou $<$ que le Sect. $ENFHG$.

17. Partant Sect. AMC : Sect. $ENG = AmC : EnG$.

Def. 5. L. 5.

C. Q. F. D. III.

(*) La preuve se trouve dans les raisonnemens de cette III partie de la Démonstration, jusqu'à *Arg. 12* inclusivement. On n'a qu'à supposer l'arc $AmC =$ à l'arc EnG . Car par là $\angle AmC$ est = à $\angle ENG$ (*Prop. 27. L. 3*) item $AC = EG$ (*Prop. 4. L. 1*). D'où l'on tire comme précédemment, que le Sect. $AMCm$ est = au Sect. $ENGn$. Partant, si l'arc AmC est $>$ ou $<$ l'arc EnG , le Sect. $AMCm$ est aussi $>$ ou $<$ Sect. $ENGn$.



C O R O L L A I R E I.

L'angle au centre, est à 4 angles droits, comme l'arc sur lequel il appuie, est à la circonférence Car (Fig. 1) $\angle BCD : 4L = BD : \text{à un quart de } O.$

C'est pourquoi, quadruplant les conséquens,

$$\angle BCD : 4L = BD : O.$$

Prop. 15. L. 5.

C O R O L L A I R E II.

Les arcs EF, BD de cercles inégaux, sont semblables, s'ils soutiennent des angles égaux C&C, soit aux centres, soit aux circonférences (Fig. 2).

Car $EF : OE \text{ ou } F = \angle ECF : 4L$

Mais $\angle BCD$ ou $\angle ECF : 4L = BD : OB \text{ ou } D$ } (Corol. 1);

Partant $EF : OE \text{ ou } F = BD : OB \text{ ou } D.$

Les arcs EF, BD sont donc semblables.

Prop. 11. L. 5.

C O R O L L A I R E III.

Deux rayons CB, CD retranchent de circonférences concentriques, des arcs semblables EF, BD (Fig. 2).

Remarque.

C'est en vertu de la proportionnalité, établie dans le Coroll. I, qu'un arc de cercle (BD) est appelé la MESURE de son angle Correspondant (BCD); c. à. d. de l'angle au centre, soutenu par cet arc; la circonférence circulaire étant la seule ligne courbe, où les arcs augmentent ou diminuent, dans la raison des angles correspondans, alentour d'un même point.

On conçoit tout cercle divisé en 360 parties égales, qu'on appelle DEGRÉS; & chacun de ces degrés en 60 autres parties égales, qu'on nomme MINUTES; & chaque minute encore en 60 autres parties égales, dites SECONDES &c. En conséquence de cette hypothèse, & de la correspondance établie entre les arcs & les angles, on est obligé de concevoir la totalité des angles, qui peuvent entourer un point dans un même plan (c. à. d. la somme de $4L$); comme partagée en 360 parties égales. Tellement que l'angle d'un degré n'est autre chose que la 360^{ième} partie de $4L$, ou la 90^{ième} d'un L ; d'une amplitude par conséquent à pouvoir être soutenu par la 360^{ième} partie d'une circonférence.

