

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EVCLIDIS
ELEMEN-
TORUM

LIBRI XIII.

*Succinctis & perspicuis demon-
strationibus comprehensi*

D. AMBROSIO RHODIO
Kembergenſi, Mathematicum
Super:Professore publico in Acade-
mia Leucorea.

*Editio postuma, priore Correctior & Emen-
datior.*

VVITTEBERGÆ,

Impensis Hæred. Pauli Helwigii, Bibliop.

Excudebatur ab AMBROSIO ROTHIO.

Anno M. DC. XXXIV.

Helwigii.

SECTION
MEMBER
MAR 10
JUL 1911



AD

*Serenissimum ac Potentissimum
Principem ac Dominum*

**DN. CHRISTIA-
NUM II. DUCEM SAXONIAE,
SACRI ROM. IMP. ARCHIMAR-
schallum & Electorem, Landgravium
Thuringiae, Marchionem Misniae, Burg-
gravium Magdeburgensem Dominum
suum Clementissimum.**

**M. AMBROSII RHODII Kembergensis
*epistola dedicatoria.***



UM JAM à MULTIS AN-
nis, Princeps Serenissime,
Domine Clementissime, non
in schola modò, quæ ad Mol-
dam est, Illustris; sed & Academia, quæ ul-
tra seculum floret ad Albin, cum multis
alijs Munificentiam Illustrissimæ Celsitu-
dinis vestræ quasi ordinariam expertus

sim; ejus in primis memoriam nulla mihi
unquam ex animo eripiet ætas, quam pro
diligentiore opera studiorum Mathematicorum culturæ impendenda, annis hisce
proximis supra Academiæ seculum pri-
mum excurrentibus, paulò expertus sum
largiorem. Hujus enim adminiculi opus,
non modò academicam hanc vitam, quæ
vel unica studiis urgendis optatissima vi-
detur, continuare; verùm etiam de quanti-
plurimis Academiæ civibus, quòd citra
jactantiam dictum velim, varias subinde
Mathematicum partes docendo, benè me-
re mihi licuit. Cùm autem animo jam
certò constituissèm, etiam ad penitiora
harum disciplinarum, præcipuè verò A-
stronomiæ, Geographiæ & Chronologiæ
sacra plures deducere; meatum quod parti-
tium, curæ etiam fuit maximæ, ut probè
illi principiis tum Geometriæ, tum Ari-
thmeticæ prius informarentur, per quæ
veluti scalas duas, summa ima quævis in
Mathematicum amplissimo theatro attin-
gere copia sit. Quod cum unus optimè
præstet ipsa antiquitate, per tot jam itera-
tas imperiorum mutationes, singulari Dei
providentia, clarus Euclides, in suis Ele-
men-

mentis quæ hæcenus ab alijs doctissimis
Viris sine imperfectione, imò cum abun-
dante perfectione edita sunt; à quorum
tamen lectione vel cognitione caritas par-
tim exemplarium, partim prolixitas, quæ
ingeniosis tedium, tardioribus exiguum
præstat commodum, multos deterrent; id
mihi consilium; ut, quantum possem, Ele-
mentorum tamen probè considerata na-
tura & ingenio, ne vel necessaria defice-
rent, vel minus necessaria abundarent, Eu-
clidea Elementa cum suis demonstratio-
nibus, integra, sed forma quadam contra-
cta, præcioq; exiguo redimenda ederem.
Ita enim effecturum me spero, ut calami
tadio, & tot literarum in demonstrationi-
bus iterandarum descriptione, devitato, in-
tra paucas septimanas, solis oculis de-
monstrationibus crebrius repetitis, multa
de Elementis hisce universo studiorum
ordini summo opere necessarijs, cogno-
sçantur, quæ alias totidem mensibus, &
quod excurrit, vix perciperentur. Huic
verò operæ meæ, ut Illustrissima vestra
Celsitudo imprimis & maximè, secundum
Deum, favere, eamq; in tutelam suam cle-
menter suscipere velit, unicè mihi exo-

randavideretur: Quod quidem non impetraturum me modò spero, sed planè jam impetratum, futurumque esse confido, ut Clementiam illam pristinam erga me majora atque majora subinde incrementa, sumsisse re ipsa experiar; & hoc quasi stimulo incitatus, majori, si potero, industria, hoc disciplinarum Mathematicarum stadium decurrere & conficere porro etiam enitar. Hoc quidem certè habeo polliceri, si quid benedictione divina carius; valetudine optima acceptius; ipsoque divino favore gratius; id omne, ut pro illustriſſima Celsi vestra, & inclyta Domo Saxonica precibus à Deo æterno pijs impetretur, me vota cum alijs innumeris perpetuò conjuncturum. Wittebergæ X. Calend. August.
Anno M.D.C.IX.

M. AMBROSIUM RHODIUM,

Nepotem ex sorore
cariss.

CUM sic ingenium noctesq; diesq; fatiget,
Et sit magnarum nuda MATHESIS opum:

Esse aliquem, res mira, sui qui prodigus, avum
In sterili ut vulgus judicat, arte terat.

Verum animā cū nemo suam videt: Haud secus, alter
Gaudia quæ capiat pectore, nemo videt.

Hic tabula intentus quarit, num pranderit! : urbem
Non sentit, formans pulvere signa, capi.

Alter, jō reperi! geminat, nudusq; per urbem
Evolat inventi catus amplexu popi.

Nobile qui tandem effluxit diagramma, Camenio
Offert; mactato pinguis sacra bove.

Fas modo sit Phæbi speciem sibi cernere, flamma
Haud neget hic uri cum Phæthonte pari.

Hoc igitur felicitis inaspectabile mentis

Delicium RHODI pramia summa putas:

Quam vigil EUCLIDIS tractas ELEMENTA, beati
Ingenijq; penu divite promissæ opes.

Pramia jam studij capis baud spernenda: sed olim
Majora à grata posteritate fores.

Johannes Wankelius,
Hist. P. P.



In

AMBROSII RHODII

Mathematici

Elementa Euclidea.

HOcerat insignem Rhodius spirare colossus,
 Hoc dignum ambrosio nomine pergerat,
 Euclidem lucere faciem, lucere iuventæ
 Rectâ Euclidean vadere scire vias,
 En Rhodus, en saltus: hoc auspicio Harpoeræti
 Posse timere senem Lencoris alma nequis.

Adamus Theod.

Adami. F. Siberus,



AD

M. AMBROSII RHODII

Saxonem,

EUCLIDIS GEOMETRIAM

illustrantem,

DOCTI pulveris Hercules, an Hermes?
 EUCLIDES, per & has Scholas & istas

Illustrat

Hoc à scribitur manūq, lorā.
Et hac sacra Marbeseus adhaere
Omnes scire putant. Sciuntne, RHODI?
Tu scis, optime mystagogā, tu scis.
Quis tendit moderamen arripendi,
Non statim bonus agriūdisar idem est.
Plus est esse Geometres: Et hoc pium
EUCLIDEM simulare. Nunc ut omnem
Euclidis Genuum adsequantur omnes,
DEMONSTRATIO LINEALIS EXSIT
Auctor RHODIUS est. Cuius hoc alumni
Acumen tibi gratulare, Saxo.
EUCLIDES tenebris operatus, ac quid
Euclides mihi sit? profecto non est.
Quem nunc RHODIA lucubrat atq,
EUCLIDES tibi LUCULENTUS est.

Frid. Taubmanns,



DE ELEMEN- TIS EUCLIDIS PRÆFATIO.



Uod in pleriq; rebus usu venire solet, ut
nullum simul opus & inceptum & per-
fectum sit, sive quod dies diem docet;
sive quod oculi plus vident quam ocu-
lus; sive quod Deus ipse Sapiencia sua
semina in homines ita dispergit, ut accrementa in alijs
magis juberet & promoveat; idem cum in universa
Philosophia, tum vel maxime in Mathematicis ob-
servare licet. Sicut enim in illa primitus tantum-
modo insinuatæ, eaq; absurdissimæ à varijs Sophistis dis-
seminata erant opiniones, quas tandem Plato & Ar-
istoteles messe feliciore omnes collegerunt, resecundæ
& rejectæ, ingenij pariter & judicij acie mira, cum
absurditatibus, tum vanitatibus, integrum & per-
fectum quoddam Philosophiæ corpus relinquere
posteritati voluerunt: Ita etiam olim, cum maxi-
mo essent in precio studia mathematica; varia à
varijs erant inventa theoremata & problemata,
qua tandem nacta sunt Geometram acutissimum
Euclidem, paulò post obitum quod vero simile vi-
detur, Alexandri M. qui omnia illa cum suis prin-
cipijs collegit, elegantissimòq; disposuit ordine, &

cru.

auditione tanta contentus, ut Aristarcha nullo iudi-
gasset, nisi communiquedam præstantissimorum vi-
rorum facto & ipse illa taxare nequisset. Nam quod
Euclides adificium Sphæricum, proportionem elegan-
tissimam, mirabili corporum quinque Regularium in-
scriptione exornatas, & multorum jam seculorum
atatem tulerat, id anatomia syntaxis, nova, in Har-
tum quendam, unumquodq, suo convenienti loco re-
positus, ut velle videtur, permutat, exclusis mul-
tis ignorantia mirum in modum medentibus her-
bis. Quam Horti illius amantiam labilem præ-
terimus, & cum magnis illis Geometris, Archimede,
Apollonio, Pappo, Sereno, Hypsicte, Ptolæmaeo,
Copernico, alijsq, innumeri, adificij huius Euclidei
commoditatibus fruimur, quod nos contra omnis
generis tempestates iueri potest, quousq, & anni &
ætatis tempore. Ceterum ELEMENTORUM hæc
nomen jure sibi vendicat hic tractatus, quod confi-
deratio omnium, ad aliorum, per universam Ma-
thesein, pertransit scientiam, ex quibus dubiorum,
quæ in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio; sine
quibus quàm impudenter aliquis adhibet scientias
mathematicas, tam infeliciter easdem tractabit.
Neque ulla deest ipsi candidiorum, quæ in Elementis
reperi solent. Superfluum enim omne, tanquam
impedimentum est sublatum; eliguntur cuncta, quæ
propositum continent & concludunt: dilucidatio-
is brevitatis cura habetur maxima, ne contraria
perurbent cogitationem: Deniq, etiam universalis
abstrusum in terminis comprehensio super hîc lo-

invenitur, nā quavis cognitio inōprehensibilis effici-
tur ijs, quæ doctrinā in particularia frustra dissectant.

Ordine autem hoc pulcherrimo procedit Euclides.
Cum Geometria maxime occupetur, ut Proclus ait, in
figurarum contemplatione, quæ vel planæ vel solidæ
sunt: Linearum enim, tanquam terminorum, non re-
quirebatur peculiaris consideratio: de planis quidam
Libris sex prioribus, de Solidis in tribus ultimis agere
voluit. Ceterum, ne imperfecta esset illa Stereometria,
quam plurimum juvat notitia linearum Commensu-
rabilium & incommensurabilium, tribus illis præmisit
decimum, in quo copiose de illis differit. Tandem neq;
hec quidem tractatio in se perfecta esse poterat, absq;
numeratorum notitia; ideoq; ipsorum quoq; affectio-
nes tribus, decimum præcedentibus libris demonstrare
abundè voluit. Sunt itaq; veluti quatuor principalia
Elementorum Euclideanorum membra, quorum primum
est Geometricum, quatuor quidem prioribus libris ab-
solutam figurarum contemplationem absolvens, quin-
to proportionales magnitudinum in genere persequens;
sexto proportionales figurarum planarū inter se expo-
nens. Secundū Arithmeticum, tribus libris, numerorū,
quibus cum magnitudinibus, tanquam binis omnium
quantitatum radicibus, magna intercedit communis
& societas, demonstrans affectiones proposito sufficien-
tes. Tertium quasi mixtum de lineis commensura-
bilibus & incommensurabilibus agit, quarū natura
maximè in numeris evidens est, ususq; maximus & ne-
cessarius ad rectè percipiendas proportionales latarū in
quinque corporibus regularibus, plerūq; incommensurabilibus.

Quar-

Quartum Stereometricum scientiam tradit Solidorū,
 qua praeipua corporū affectiones dēonstrantur, in pri-
 mis autem quinq; corporum regularium Sphaera in-
 scribendorum constructio, & mutua proportio; unde
 tandem elegantissimum illud Mathematicum adispe-
 um constat, quod propositione ultima libri decimim-
 ty absolvitur. Possunt, quidē de corporibus plura, eaq;
 jucundissima demonstrari ex libris, illis tribus
 decimum tertium sequentibus, qui Euclidis vulgō solena
 addi perspicuum est, quibus Doctissimus Clavius ma-
 gnā operam, magnūq; laborem impendit: Ceterū
 Euclidis tredecim nobis pro nostro instituto sufficiant,
 quib; cognitū, qui sese totos huius studio sine tradentē,
 non Campanum modō & Clavius; sed quosvis alios
 nobiliores Geometris magno cum fructu legent, intel-
 ligent. Ut autem quatuor operis Euclidis nostri posui-
 mus membra; ita singulis illis sua propria prae-
 mittuntur principia, ex quibus demonstrationum omnium
 mathematicarum longē accuratissimarum, certissi-
 marumq; robur ac firmamentum nascitur. Suntq; prin-
 cipiorum tria genera: primum Definitiones seu Hypo-
 theses, quibus explicantur vocabula arithmetica, ne qua no-
 minum ambiguitate vel obscuritate circumveniri, pa-
 rallogismos incurramus; & haec unumquodq; illorum
 membrorum habet peculiare. Deinde sunt axiomata
 seu postulata, quae adeo sunt clara & perspicua in sub-
 jecta scientia, ut nulla indigeant confirmatione, sed nu-
 dum auditoris assensum requirunt, ne in demonst-
 rando nulla vel hesitatio vel difficultas oboriatur. Deniq;
 sunt communes notiones, seu Axiomata & dignitates,
 quae non in hac tantum, sed in omnibus aliis Scientijs

ita sunt manifesti, ut nemo non ulterius assensum ad-
dat, qui tantum vocabula intelligit. Ex hisce principiis
constituuntur & demonstrantur duplices proposicio-
nes; Problemata, in quibus ponitur aliquid, quod non
dum est, constituendum; & Theoremata, in quibus
aliquid vel inesse vel non inesse constituta quantitati
demonstratur. Differuntq; 1. fine; illorum enim est
constructio, horum cognitio, quod etiam clausula dis-
tincta indicare solemus; Quod erat faciendum, in il-
lis. Quod erat ostendendum, in his. 2. Usu: illa enim
Mechanicis, hac demonstrationibus inserviunt. 3. Ac-
cidentibus, quae in illis non sunt perpetua, nec perpetua
comitantur sua subiecta, quia vitiosa potest esse con-
structio, in his vero semper sunt eadem. Ipsae Demonstra-
tiones sex absoluntur partibus. Prima $\pi\rho\beta\ \mu\epsilon\tau\epsilon\tau\epsilon\tau\epsilon\tau\epsilon\tau$ est
generalis propositio demonstrationis, quae monet, qui-
bus posita & concessis, quae quaesita sint demonstnan-
da. Hac si theorema sit, habet duas partes, $\eta\gamma\epsilon\mu\sigma\ \nu\omicron\upsilon\upsilon$,
& $\epsilon\pi\omicron\mu\alpha\upsilon\omicron\upsilon$: Sin problema, $\delta\epsilon\delta\omicron\upsilon\epsilon\iota\omicron\upsilon$, quod
constituit subiectum, de quo aliquid affirmatur vel
negatur, vel quomodo cumq; quaritur; & $\epsilon\pi\tau\epsilon\mu\epsilon\upsilon\upsilon$,
quod ostendit, quid in subiecto sit demonstrandum.
Secunda est $\epsilon\kappa\delta\epsilon\sigma\tau\epsilon\varsigma$ expositio seu declaratio dati vel
antecedentis, quae datum seorsum repetit & explicat:
Sicut tertia $\delta\iota\omicron\upsilon\epsilon\iota\sigma\ \mu\omicron\varsigma$ quaesitum; quam utramq; par-
tem commodissime exhibent literae contextui propo-
sitionum insertae, sed forma distincta, circa ullam cur-
sum propositionum confusionem. Quarta constructio
vel $\alpha\tau\tau\epsilon\upsilon\upsilon$ seu delineatio, quae prae parat, & accom-
modat ea, quae ad demonstrationem accidentium
dati

dari requiruntur & necessaria sunt. Quinta, eadē
 principia ἀποδείξις demonstratio, quae per prima
 nota & concessa, vel etiam antea demonstrata demon-
 strat id, quod de dato ostendendum est. Et hac pro-
 gressum observat duplicem. Vel enim à principijs
 natura notis, ut sunt definitiones, postulata & axio-
 mata, vel etiam antea demonstratis, quae & ipsa ad
 principia possunt reduci, procedimus, quae Metho-
 dus συνθετική dicitur; vel procedimus à quibus &
 posteriore ad prius & principia, quae vel est ἀναλή-
 ψις & πείσις ἀναλυτική dicitur; vel ἀναρρη-
 τή & ἀπαγωγή εἰς ἀδύνατον dicitur. Sex-
 ta συμπεράσμα, quae demonstrata ad propositionem
 refert, eandē, recte demonstratam esse affirmat.
 Propositionibus cognatam est λήμμα, quae in
 Geometricis est propositio indigens probatione, ar-
 viditque, tum constructioni, tum demonstrationi, hoc
 differens à principijs, quod hac nulla indigent de-
 monstratione; illud autem demonstrari cum possit,
 absq; demonstratione sumitur, ad aliorum facien-
 dam fidem. Corollarium etiam theorema est,
 quod per se ex demonstrationibus propositionum
 sequitur, sine nova ac peculiari demonstratione.
 Hac tanquam necessaria ad pleniorē cognitionem
 auctoris prae-mittenda mihi videbantur. Frugalissi-
 mas itaque hasce disciplinas, Geometriam & Ar-
 metikā, in hisce Elementis Euclideis exornatas, (quae
 quā parum πρὸς τὴν ἀλφειότητα facere censentur, in
 diffi-

difficile; sed illis, qui velant pronunciant, quam
 insipienter: vel prius abiciunt studium, quam pericu-
 lum fecerint: Si quis impensius coluerit, ipso experie-
 tur opere, plus habuisse in recessu, quam magnifica mi-
 nus fronte promiserunt: in primis autem, si non Ma-
 gnitudinum & Numerorum hac Philosophia, versato
 quendam amorem ingeneratum; ac saltem divinitus
 innatum sibi confirmari & conservari percipiet; sen-
 tiet, quam notabili fruge vegetior sibi reddatur, lu-
 xuriet, & toris animosi pectoris ardor. Opere vero e-
 tiam experietur ipso, si quarumvis rerum fuerint ex-
 pedienda dimensiones, veluti longitudinum, latitudi-
 num, planities, agrorum, insularum; altitudines
 turrium, montium; cœlestia Quævis, & per instru-
 menta accurate observanda & examinanda; horolo-
 gia spherica delineanda; machine varia construenda,
 usurpanda; ponderum & vires exponenda; phœno-
 mena ex illuminatione diversa specularum, pictura-
 rum, aqua & aeris excusanda; Denique, siue speculati-
 onibus indulgere velit cœlestibus, siue elementaribus
 quæ a ysaia, & gen[ese]ou non ferunt, quanta & inci-
 ramento & adiumento, addo etiam
 complemento hac elementa
 sint futura.

EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

Definitiones.

I.

Punctum est, cujus pars nulla est, id est, punctum est quiddam indivisibile, quod mente tantum concipitur. *Non enim punctum est quantitas, sed omnium quantitarum continuarum principium, quae potentia in infinitum sunt divisibiles. Illud autem quod creta pingitur punctum, Physicum, non mathematicum est, quippe non omni sarens latitudine, quo interim facilioris doctrinae gratia utimur.*

A

2. Linea

2. Linea est longitudo latitudinis expers, seu, ut Gellius loquitur, Longitudo illatabilis. *Hac prima species est quantitatum continuarum duntaxat longa.*

3. Termini linearum sunt puncta; actu quidem in linea recta terminata; in peripheria circuli potentia.

4. Recta linea est, quæ ex æquo sua interfacet puncta, id est, in qua nihil flexuosum reperitur. *Archimedes brevissimam esse dicit earum, quæ eosdem habent terminos: vel est brevissima a puncto ad punctum extensio.*

5. Superficies est, quæ longitudinem latitudinemque tantum habet. *Hac secunda magnitudinum species est, quæ præter dimensionem, quam secundum longum communem habet cum linea, etiam secundum latitudinem mensurabilis est; omni tamen mensura in profundum destituta.*

6. Super-

6. Superficieei extrema sunt lineæ. Sic trilatera figura tribus, quadrilatera quatuor, multilatera multis terminantur lineis: Circulus una.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas. Estque omnium, quæ eadem habent extrema, & minima, & brevissima.

8. Planus angulus est linearum in plano se mutuò tangentiũ & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio. Jacentes enim in directum lineæ, si protrahantur, nunquam concurrunt, ita ut se secent protractæ & sic angulos non efficiunt.

9. Rectilineus est angulus, cum, quæ angulum continent lineæ, sunt rectæ. Curvilineus autem, qui ex duabus curvis: mixtus qui ex una curva & altera recta.

10. Cum recta linea super rectam consistens lineam, eos, qui sunt de-



incept, angulos aec, ceb
 æquales inter se fecerit;
 rectus est uterque angu-
 lorum: & quæ insistit, li-

neae ce , perpendicularis vocatur ejus,
 cui insistit.

11. Angulus obtusus est aed , qui re-
 ctio major est;

12. Angulus autem acutus bed , qui
 rectio minor.

13. Terminus est, quod alicujus ex-
 tremum est, *Sic puncta linearum, lineæ
 superficierum; superficies corporum sunt
 termini. Corpora verò, quia ab alia quan-
 titate nulla dimensione superantur, nul-
 lius etiam termini esse possunt.*

14. Figura est; quæ sub aliquo vel
 aliquibus terminis comprehenditur.
*Ita videlicet, ut circumquaque illis ter-
 minis claudatur.*

15. Circulus est figura plana, sub una
 linea comprehensa, quæ peripheria
 appellatur, ad quam ab uno puncto
 eorum, quæ intra figuram sunt posita,
 cadentes omnes rectæ lineæ inter se
 sunt æquales.

16. Hoc

16. Hoc punctum centrum circuli appellatur.

17. Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat, & totum planum contentum peripheria, & ipsam peripheriam in partes æquales, cum nulla alteram excedat.

18. Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro & sub ea linea, quæ de circuli peripheria auferitur, *id est, semiperipheria.*

19. Figuræ rectilinéæ sunt, quæ sub rectis lineis continentur. *Ideoq, curvilineæ erunt, quæ curvis; & mixtæ, quæ mixtis lineis continentur.*

20. Trilateræ quæ sub tribus.

21. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22. Multilateræ, quæ sub pluribus, quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria

latera habet æqualia. *Duplicem habet divisionem triangulorum, alteram ex lateribus, alteram ex angulis.*

24. Isosceles est, quod duo tantum æqualia habet latera; *tertio vel majore vel minore.*

25. Scalenum est, quod tria inæqualia habet latera.

26. Adhæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum, quidem est triangulum quod rectum habet angulum: *sive illud sit Isosceles sive scalenum.*

27. Amblygonium, quod obtusum habet angulum; *itidem vel Isosceles vel Scalenum.*

28. Oxygonium, quod tres habet acutos angulos. *Est q, vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum.*

29. Quadrilaterarum figurarum, Quadratum est, quod & æquilaterum est, & æquiangulum.

30. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem est, sed non æqui-

æquilatera. Habet enim tantum duo opposita latera equalia. Alij oblongum, alij rectangulum vertunt.

31. Rhombus, quæ æquilatera, sed rectangula non est. *Sunt enim huius tantum oppositi anguli æquales.*

32. Rhomboides, quæ aduersa & latera & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula. *Opposita est quadrato omni ex parte.*

33. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia appellantur. *Vocantur irregulares, quoniam infinitis possunt variari modis. Estque Trapezium aliud Isosceles, quod duo latera opposita parallela, duo vero equalia: aliud scalenum, quod duo tantum opposita parallela habet. Trapezoides, quod neque parallela, neque equalia habet latera.*

34. Parallela rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex u-

traque parte in infinitum producuntur, in neutra sibi mutuo concurrunt.

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela seu æquidistantia. *Ut sunt quadrata, oblonga, Rhombus & Rhomboides.*

36. Cum verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ, secantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma: Appellantur illa, per quæ diameter non transit, complementa: duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur. *Vide proposit. 43.*

PETITIONES SIVE

postulata.

1. Postuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.

2. Et

2. Et rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.
3. Quovis centro & intervallo circulum describere.

COMMUNES NOTIONES SIVE

Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent & dignitates.

1. Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus est aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus aliqua magnitudine, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.
2. Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.
3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia.
4. Si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia. Et si inæqualibus inæqualia sint adjecta, majori

A 5

 majus,

majus & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

6. Quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium. *Idem intelligendum est de triplo & quadruplo, & ceteris.*

7. Quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia. Et contra quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia. *Pari ratione, quæ ejusdem sunt partes tertia vel quarta, &c. inter se sunt æquales.*

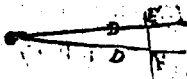
8. Quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia. *Intelligendum est axioma de magnitudinibus ejusdem spe,*
cici-

ciet, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit. Sic linea linea congruens, eidem aequalis est, non autem applicari dicitur linea superficiei. Neque tamen confundenda est $\Phi\alpha\mu\omega\sigma\iota\varsigma$ hac mathematica, cum applicatione Mechanica vel Physica.

9. Totum sua parte majus est. Alias ablata parte tolleretur totum.

10. Omnes anguli recti sunt inter se æquales. Quia latera sine inclinatione ulla sibi perpendiculariter insistent.

11. Si in duas rectas ab, cd , altera recta linea e incidens, internos, ad easdem partes, angulos bef, dfe , duobus rectis, minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ, sibi mutuo incident in g . ad eas partes, ubi sunt anguli, duobus rectis minores.



12. **EVCLIDIS ELEM:**

12. Duæ rectæ lineæ spaciū non comprehendunt. Si enim cōtinent in uno puncto ad efficiendum angulum, ex altera parte necessario magis ac magis disjungentur. Ad minimum ergo requiruntur lineæ rectæ ad simplicissimam figuram rectilineam constituendam.

PROPOSITIO I.

Problema 1.

Super data recta $a b$ terminata, Triangulum æquilaterum $a b c$ construere.

Intervallo ab a & b describantur duo circuli, quorum intersectio c



connectatur cum a & b . Quoniam igitur eidem $a b$ æquales sunt $b c$ & $a c$, erunt etiam

inter se æquales, & triangulum $a b c$ æquilaterum. Quod erat faciendum.

α 1. Postul.

β 5. def. 1.

γ 1. axiom.

PROPOSITIO II.

Problema 2.

Ad datum punctum b , datæ rectæ lineæ a , æqualem rectam $b d$ ponere.

Inter-

Intervallo a linea α describa-
tur centro b circulus cd . Cum er-
gò ipsi bc sint æquales $\zeta b d$ & γ
 α . Proinde ad punctū b , posita ζb
 d erit etiam ipsi $a d$ æqualis. Quod
erat faciendum.

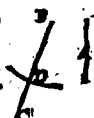


α Postul.
 β 15. def. 1.
 γ ex hyp:
 δ 1. axio.

PROPOSITIO III.

Problema 3.

Duabus datis rectis inæqualibus,
de maiore cb , minori
 a æqualem rectam db , ab-
scindere.



Centro b intervallo a a secetur
 cb in d , & erit db æqualis ipsi a .

α 2. I.
 ζ 15. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 1.

Si duo Triangula bcd, def , duo
latera bc, ed , duobus lateribus bd ,
 ef æqualia habeant, utrumq; utriq;
habeant verò & angulum cbd , an-
gulo, def æqualem, sub æqualibus
rectis lineis contentum : & basin cd
basi, df æqualem habebunt; eritque
Triang.

14 *EVCLIDIS ELEM:*

Triangulum cbd Triangulo def æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt; uterque utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

α 3. L

Si basis cd est major, quàm basis df , & auferatur ex cd , cg æqualis ipsi df , & ducatur bg . Si jam bc , bg sunt æquales ipsis cd , cf , & basis cg , basi df ; non

β 9. axio.



erit tamen angulus cbg angulo e æqualis, defectu anguli gbd . Quod est contra hypothesin. Ideoq; si

γ 8. axio.

tres termini Trianguli congruant tribus terminis alterius Trianguli applicati, reliquos reliquos etiam congruere, & totum toti æquale esse necessum est. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO. V.

Theorema 2.

Isoſcelium Triangulorum abr , qui ad basin sunt anguli abc & $ar b$, inter se sunt æquales: & productis æqualibus rectis ab , ac lineis, qui sub basi sunt anguli $d'bc$ & ecb , inter se sunt æquales.

Exteri-

Lateribus ab, ac aequalibus, aequaliter extensis in d & e , ducantur cd, be . Quoniam ergo in Triangulis dac & eab dantur duo latera, ad, ac aequalia duobus lateribus ae & ab , & angulus a utriusque communis; erit etiam basis bc basis cd aequalis, & angulus d , angulo e , & angulus abe angulo acd . Rursus in Triangulis bdc & ceb aequalium laterum ce & bd , be & cd , & angulorum d ipsi e : erunt etiam anguli ecb, dbc sub basi a aequales, sicut & a 4. ebc & $dcba$ aequales; quibus ablatis ab aequalibus abe & acd , relinquentur acb & abc anguli ad basin & aequales. Idem quoque de Triangulis aquilateris verum est. Unde sequitur β 3. ax. Triangula aquilatera etiam esse equiangula.



PROPOSITIO IV.

Theorema 3.

Si Trianguli abc duo anguli b, c , aequales inter se fuerint, etiam sub aequalibus angulis subtensa latera ab & ac aequalia inter se erunt.

Conversa prioris.

Si quis neget, angulis b, c aequalibus aequalia opponi latera ab, ac ; dicat ab esse longius ac ; cui aequale sit db ex ab β abscissum. Ducta linea dc : a ex hypi β 3. h.

γ ex dato



δ 4. 1.

1. 9. ax.

dc : in Triangulis acb & dbc propter latera aequalia, ac ipsi db & bc commune; angulumq; b angulo c aequalem: necessario etiam bases dc , ab erunt & aequales, & totum Triangulum, acb , toti $dc b$, pars toti, quod est impossibile.

PROPOSITIO VII.

Theorema 4.

Super eadem recta ab duabus eisdem rectis ac , bc aliae duae rectae ad , bd aequales, utraq; utriq; non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, supra vel infra, eisdemq; terminos a & b , cum duabus ac , bc initio ductis habentes.



Constituuntur, si potest, ad aliud punctum d aliae duae rectae prioribus aequales ad ipsi ac & bd ipsi bc , & connectantur puncta dc .

Erunt Triangulorum a Isoscelium

α ex hyp
β 5. 1.

acd & bdc aequales anguli ad basin acd ipsi, adc & bdc ipsi bcd . Vnde fit, ut, quia acd aequalis est partiali adc quo major totalis bdc aequalis est partiali bcd , totus acd fiat partiali bcd minor. Quod γ absurdum.

γ 9. ax.

PRO-

PROPOSITIO IIX.

Theorema 5.

Si duo Triangula abc, def , duola-
tera ab, ac , duobus lateribus de, df ,
utrumque utrique æqualia; habue-
rint verò & basin bc basi ef æqualem;
angulum quoque a sub æqualibus re-
ctis lineis contentum, angulo d æ-
qualem habebunt.

Convertit primam partem propo-
sitionis 4.

Quando latera singu-
la singula, basi, basis
applicata conveniunt,
et convenire etiam to-
tum Triangulum toti



æ 8. axio-
mat.

oportet & angulum a , angulo d . Nisi enim a æ-
quat $m d$, sed in g , super eadem linea ef , duabus
eisdem rectis de, df , alie duæ rectæ æquales $eg,$
 gf utraq; utriq; ad eandem partem, eandemque
terminos constituentur. Quod est impossibile.

37. l.

PROPOSITIO IX.

Problemata 4.

Datum angulum $b a c$ rectiline-
um bifariam secare.

Ex $a b$ & abscindatur ad , pro libito assumpta $d 3. l.$
 $a c$ æqualis; atq; ad ductam lineam $d c$ spona- $31. l.$

B

tur



γ ex
constr.
 $\delta 8.1.$

tur Triangulum equilaterum, vel etiam Iſoſceles dfe , & connectantur af . Erunt in Triangulis daf & eaf γ equalium laterum ad ipsi ae , & af communi, & basium df, ef ; anguli daf & eaf δ aequales, ſectusq; angulus a in duos aequales angulos. Sed in praxi ſufficit in utraque parte punctum ſupremum f per occultam interſectionem arcuum noſſe.

PROPOSITIO X.

Problema 5.

Datam rectam finitam ab , bifariam ſecare.

$\alpha 1.1.$
 $\beta 9.1.$

Super datam rectam ab α conſtituitur triangulum cb angulum c β biſecans linea cd , biſecat & ab lineam datam in d . Quia enim in triangulis acd & bcd , γ equalia ſunt latera ac & bc , cd vero commu-



γ ex
constr.

ne, & anguli comprehenſi c β aequales; erunt & bases ad & db δ aequales; & recta ab in d bifariam ſecta.

$\delta 4.1.$

PROPOSITIO XI.

Problema 6.

Data

Data recta ab , à puncto c in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Puncto c impositus circinus utring, transferat aequales partes cd , ce , ac super tota de a 1. l.

constituatur Triangulum vel æquilaterum vel Isosceles def , duaturq; fc . Iterum propter latera cd , ce β aequalia



& cf commune; & bases df , ef aequales, γ aequales sunt anguli adc contigui, id est, recti & fc δ perpendicularis ex puncto c erecta.

ϵ ex const.

γ 8. l.

δ 10. def. l.

PROPOSITIO XII.

Problema 7.

Super datam rectam infinitam ab , à dato puncto c , quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Ex centro c arcus circuli interfecet a in d & e de α dividatur bisariam in f , erit fc β perpendicularis: uterque enim ad f contiguus est γ aequalis seu rectus, propter latera fd , fe aequalia & fc commune, propterq; bases dc , ce δ aequales.



α 10. l.

ϵ 10. def. l.

γ 8. l.

δ 15. def. l.

B a

PRO.

PROPOSITIO XIII.

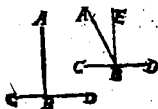
Theorema 6.

Utut recta $a b$ super rectam $c d$ consistens, angulos faciat; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

α 10. def. 1.

β 11. 1.

γ 8. ax.



In perpendiculariter insistentibus, ab nimirum ipsi cd res est α manifesta. Sed si ab non sit perpendicularis, ex puncto b β erecta perpendiculari be , videmus angulos abc & abd simul sumptos tantundem occupare (spacij), quantum duo recti ebc ; & ebd atq; mutuo γ congruere.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 7.

Si ad aliquam rectam ab atque ad punctum c in ea, duæ rectæ cd & ce non ad easdem partes ductæ d vele, eos qui sunt deinceps angulos acd , ace , duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ cd , ce , seu recta una.



α 13. 1.

Si dce non est recta una, esto dce . In hanc ergo rectam incidens recta ac , faciet duos angulos duobus rectis α æquales acd

$\angle acd$ & $\angle acf$. Enim autem $\angle acd$ & $\angle ace$ β a-
 quales duobus rectis. Ablato itaq; communi
 $\angle acd$, γ aequales relinquentur $\angle acf$, $\angle ace$ minor
 majori, vel pars toti. Quod absurdum.

β ex hy-
 pot.

γ 9. axio.

PROPOSITIO XV.

Theorema 8.

Si duæ rectæ ab & cd se invicem
 secuerint, angulos ad verticem: in-
 ter se æquales efficient.

Sunt enim $\angle aec$ & $\angle aed$ duo-
 bus rectis α aequales. Sunt item
 $\angle acd$ & $\angle deb$ duobus rectis a-
 quales. Ablato ergo communi
 $\angle aed$, β relinquentur $\angle aec$ &
 $\angle deb$ aequales, anguli ad verticem.



α 13. l.

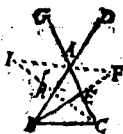
β 3. axio.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 9.

Omnis Trianguli abc uno latere
 ba producto externus angulus dac
 utroq; interno, tam $\angle acb$, quàm $\angle abc$,
 & opposito major est.

α Dividatur ac bifariam in e ;
 & ducta recta, be β cōtinuetur a-
 qualis usq; in f ; jungaturq; af .
 Jam in Triangulis ceb & acf fla-
 terne ae & ec , eb & ef sunt γ a-
 qualia; δ anguli $\angle acf$ & $\angle bec$.



α 10. l.

β 1. l.

γ ex con-
 str.

δ 15. l.

ϵ 4. l.

B 3

Ergo

6.4.1. Ergo & totum triangulum toti est æquale, & angulus $e c b$ ipsi $e a f$, quo tanquam pars externus totus $e a d$ est major.

Ita pro angulo $a b c$ & dividatur latus $a b$ bifurcam, & recta $e h$ in continuum absindatur β æqualis $h i$, connectaturq; $i a$. Rursum in Triangulis $c h b$ & $a h i$ & æqualia sunt latera $a h$ & $h b$, $h c$ & $h i$, & angulique $c h b$ & $a h i$. Totum ergo triangulum toti est æquale, & angulus $i a h$ ipsi $h b c$, cui æqualium duorum ad verticem alter $d a f$ tanquam pars minor est toto externo $c a d$.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 10.

Omnis Trianguli $a b c$ duo anguli, duobus rectis sunt minores, quomodo-
docunque sumti.

6.16.1.

6.4. axio.

7.13.1.



Producto latere $c b$, angulus externus $a b d$ a major est interno opposito $a c b$. Si utrique jungatur angulus communis $a b c$, β majores erunt $a b c$, $a b d$ cæ duobus rectis

& æquales, quàm interni duo $a b c$ & $a c b$. Itaq; minores sunt duobus rectis.

P R O.

PROPOS. XIX.

Theorema II.

Omnis trianguli abc majus latus ac majorem angulum abc subtendit.

α Abscindatur ex ac ipsi ab equalis ad & α 3. l.
 ducatur bd . In triangulo β Isosceli ergo bad , β ex con-
 anguli abd & adb sunt γ str.
 aequales. Sed hic tanquam γ 5. l.
 externus δ major est interno δ 16. l.
 opposito bcd . Ergo ϵ abd .
 Ejus autem totus abc multo
 est major. Idem demonstratur eodem modo de
 altero angulo a .



PROPOS. XIX.

Theorema 12.

Omnis trianguli abc major angulus b majori lateri ac subtenditur.

Sin minus, esset latus a vel aequale latere ab ,
 & sic anguli c & b essent α aequales contra da-
 tum: aut minus, atq; sic
 oporteret a c tanquam
 latus minus β majorem
 angulum b subtendere,
 latusq; majus ab , mino-
 rem c . Quod γ absurdum.



α 5. l.
 β ex hyp.
 γ 18. l.

PROPOSITIO XX.

Theorema 13.

Omnis trianguli abc duo latera ab, ac , reliquo bc sunt maiora, quomodocunque sumta.



α 4. def. 1.

Est enim bc inter b & c omnium α brevissima.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 14.

Si super trianguli abc uno latere bc ; ab extremitatibus, dux rectæ bd, cd , interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus ba, ca minores quidem erunt, maiorem verò angulum d continebunt.



α 20. l.

β 4. axia.

γ 16. l.

Producta latere bd in e , in triangulo bae , latera ba, ac simul α maiora sunt tertio be , additod, e communis, ba, ac β maiora erunt be, e simul sumtis: α ita &

ce, ed quàm dc , sic bd, dc simul β minores ipsis be, e : Ideoq, γ minores sunt maiorib. ba, ac . Sic tanquam externus d angulus γ maior est angulo e interno opposito; & hic itidem tanquam externus interno a : itaq, γ d maior est ipso a .

PRO-

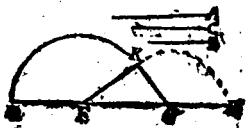
PROPOSITIO XXII.

Problema 8.

Ex tribus rectis lineis fg , fk , kg , quæ sunt datis tribus, abc , æquales, triangulum $fk g$ constituere. Oportet autem duas reliqua esse majores omnifariam sumtas: quoniam uniuscujusque trianguli duo latera quomodocunq; sumta reliquo sunt majora.

Data a equali $f g$ utrinque apponantur in directum $f d$ & $g h$ æquales ipsis b & c , & illarum intervallo descriptorum circularum intersectio k cum g & f connexa,

exhibet triangulum $f k g$, cujus latera datis tribus rectis sunt æqualia. In



praxi sufficit tantum ad tertia linea extremitates intervalla reliquarum duarum intersectionem notasse eamq; cum illis extremitatibus copulasse per rectas.

ex con-
str. & 13.
def. 1.

PROPOSITIO XXIII.

Problema 9.

Ab datam rectam $a b$, datumque
inea punctum c , dato angulo recti-

B s

linea

lineo def , æqualem angulum ick re-
ctilineum constituere.

In lineis ed, ef angulum datum e includen-
tibus sumta duo puncta pro libitu g & h conne-
ctantur, ipsiq; eg æqualis in a b fi-
at ci , cui accommodentur due re-
liquæ g h ceu ik , & eh ceu kc .
Erit ick suis lateribus & basi a -
quale triangulo geh , & ad pun-
ctum c factus angulus γ æqualis
angulo e .

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 15.

Si duo triangula abc, def duo
latera ab, ac duobus lateribus de, df
habuerint æqualia, utrumq; utrique;
angulum a vero angulo d majorem,
sub æqualibus rectis lineis conten-
tum: & basin bc , basi ef majorem
habebunt.

α Fiat ad punctum d angulo a æqualis, ut
latus dg sit β æquale lateri df , c ad e g , e g vel in
 e f vel supra, vel infra eam. Si supra ipsam, in
Triangulis bac & edg propter æqualia latera
 ba, ed & ac, dg , & angulos a & d , erunt &
bases bc, eg γ æquales. Et in triangulo $Isoceli$
 egf ,

$\angle d g f$, anguli ad basin $d g f$ &

$d f$ gerunt d aequales: Quo

angulo $d g f$ cum minor sit,

$e g f$, angulo autem $d f g$ ma-

jor $e f g$, utique minori $e g f$

minus latus $e f$, & majori $e f$

g majus latus $e g$ subtende-

tur, id est, tunc aequalis $b c$

basis major erit basi $e f$. Si

in ipsam, necessario $e g$ & a -

qualis ipsi $b c$, & major est basi $e f$. Denique si in-

fra; productis $d f$ in h , & $d g$ in i , ductaq; $e g$

erit rursus $e g$ basis & aequalis basi $b c$; angulus

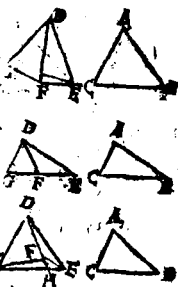
ipse $h f g$ & aequalis angulo $f g i$, quo sane & mi-

nore est $e g f$, adeoq; & angulo $e f g$. & Idcirco

angulo $e f g$ adhuc majori majus latus $e g$ sub-

tendetur quod aequalis est ipsi $b c$, quam angulo

$e g f$, quod est $e f$. Sic patet propositum.



25. l.

19. l.

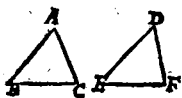
29. axio.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 16.

Si duo triangula $a b c, d e f$, duo latera $a b, a c$, duobus lateribus $d e, d f$ aequalia habuerint, utrumq; utri- que: basin vero $b c$ basi $e f$ majorem, & angulum a sub aequalibus rectis contentum, angulo d majorem ha- bebunt.

Sim



*Sin minus, erit vel a-
qualis, atq; sic contra hypo-
thefin etiam bases bc , ef
erunt α aequales: vel major
dispo a , atque sic basis ef basi bc contra hypo-
thefin β major. Erit itaq; a major quam d .*

α 4. l.
 β 24. l.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 17.

Si duo triangula abc , def , duos
angulos b , c , duobus angulis e , dfe
 α quales habuerint, utrumq; utriusque:
unumque latus uni lateri α quale, sive
quod α qualibus adjacet angulis bc ,
 ef seu quod uni α qualium angulo-
rum subtenditur; ac & df & reliqua
latera reliquis α qualia, utrumque,
utriusque, & reliquum angulum a , re-
liquo d α qualem habebunt.



*Nisi ergo ab & de sint
aqualia, fiat ge α quale ipsi
 ab , ducaturq; gf . Iam cum
 ab , bc α quenter ipsi ge ,
 ef , angulisq; b & e sint α quales, $erunt$ &
anguli α qualibus lateribus oppositi α quales, c &
 efg . Cui c quoniam etiam α α qualis est dfe , $erunt$ dfe totus & gfe partialis α quales, quod*

α ex hy-
pot.
 β 4. l.
 γ 1. axi-
om.
 δ 9. ax5.

δ absurdum.

PRO.

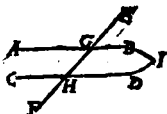
LIBER I.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 18.

Si in duas rectas ab, cd , recta ef incidens, alternatim agb & gbd , angulos inter se æquales fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ.

Si non sunt, & concurrerent productæ in i : eritque g in triângulo, cujus latera gi productio in a , angulus externus agh , & major fit interno opposito ghi ; cui tamen ex hypothesis æqualis erat. Sunt ergo parallelæ.



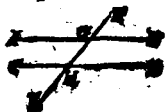
α 34. def.
1.
 β 16. l.

PROPOSITIO XXIIIX.

Theorema 19.

Si in duas rectas ab, cd , recta ef incidens, externum age angulum, interno & opposito, cbg , & ad easdem partes, æqualem fecerit: aut internos agb & gbc & ad easdem partes, duobus rectis æquales, parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ.

Eidem enim age æquales sunt agh & chg ; hi ergo tanquam alterni inter se & æquales, & parallelas arguunt ab & cd . Deinde



α 15. l.
 β ex hypothesis.
 γ 1. axio.
cum δ 27. l.

E 13. l.

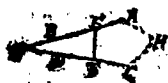
§ 3. axio.

cum βagh , & chg : itemq; $eagh$ & hgb duobus rectis sint æquales, erunt, ablato communi agh , anguli reliqui hgb & chg alterni & æquales: ideoq; rectæ parallelæ.

L E M M A.

Si in duas rectas ab & cd , recta ef incidens, internos & ad easdem partes angulos bef & dfe duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes; ubi sunt duo anguli duobus rectis minores.

Si versus alteram partem dicamus concurrere



in h , ubi non sunt duobus rectis minores, sed majores, fierent in triangulo ehf duo illi anguli duobus rectis majores. Quod æ absurdum.

E 17. l.

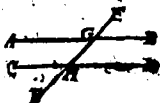
P R O P O S I T I O XXIX.

Theorema 20.

In parallelas rectas ab , cd , recta ef incidens, & alternatim angulos æquales efficit agb , gbd ; & externum beg interno & opposito abg , & ad easdem partes æqualem; & internos bgb , gbd ad easdem partes duobus rectis æquales faciet.

Si

Si quis alternos negaverit aequales, alter a g h
esto major altero g h d. His inaequalibus additus
communis b g h, cum cōsigno quidem h g a duo-
bus rectis α aequantur; sed
cum g h d duobus rectis e-
runt β minores, id est duo
interni, & ita a b, c d non
 γ erunt parallela contra



α 1. 13. l.
 β 4. 1. 1. 1.
 γ 11. ax.

hypothesein. Quoniam igitur alternorum aequa-
lium uni a g h d aequalis e g b, & erit etiam hic
externus interno ad easdem partes opposito a-
qualis. Denique cum internus b g h cum externo
e g b duobus rectis sint α aequales, cum eodem
b g h alter internus g h d duobus rectis β aequa-
les erunt. Patet ergo propositum.

δ 15. l.

ϵ 1. ax.

PROPOS; XXX.

Theorema 21.

Quæ eidem rectæ lineæ e f sunt
parallelae a b, c d, & inter se sunt paral-
lelae:

Recta g h fecit illas parallelas in i k l. Iam
in a b, c f parallelas incidens g h, facit alternos
a i h & i l f α aequales. α I-
temque externum i k d in-
terno opposito k l f, vel i l f; β
erunt ergo & a i k & i k d
alterni aequales, rectæ a b
& c d γ parallelae.



α 19. l.

β 1. ax.

γ 27. l.

PRO.

PROPOS: XXXI.

Problema 10.

α 23. l.
 β 27. l.

Per datum punctum a , data recta abc , parallelam rectam ef ducere.

Ducta ada fiat angulus adc equalis daf alternus, continueturq; fa in e β Erunt illæ propter lateros æquales parallelæ.



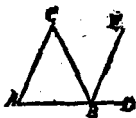
PROPOS: XXXII.

Theorema 22.

Omnis trianguli abc , uno latere ab producto in d ; externus angulus cbd duobus internis oppositis a & c est æqualis: & trianguli tres anguli, duobus rectis sunt æquales.

Lateri ac & agatur per punctum b parallelæ be . In duas ergo bus parallelas ac & be incidens.

α 31. l.
 β 29. l.



cb , efficit alternos cbe & $c\beta a$ æquales; ad vero linea externum cbd interno opposito a . Sic totus externus internis duobus oppositis æqualis est. Quibus si ad-

datur tertius internus cba communis, erunt trianguli anguli duobus rectis æquales.

γ 13. l.

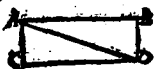
PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 23.

Rectæ lineæ ac , db , quæ æquales
 ab , cd ad partes easdem conjungunt,
 & ipsæ æquales & parallelæ sunt.

Ducta a ad $efficit$ alternos b a d , a d c & æqua- α 29. l.
 les, cōprehensos duarum triangulorum β æqua- β ex hy-
 libus lateribus ab ipsi cd & β pot.
 a d communi. Bases itaq; a c
 & b d seu rectæ æquales pa-
 rallelæ connectentes sunt & æquales: & anguli
 cad , adb & æquales: qui alterni etiam paralle- γ 4. l.
 las easdem a c & b d ostendunt. δ 27. l.

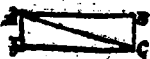


PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 24.

Parallelogrammorum spæiorum
 $abcd$; æqualia sunt inter se, quæ ex
 adverso & latera & anguli; atque illa
 bifariam secat diameter ac .

Ducta diameter a c facit alternos a c d & c a
 b ; cad & acb & æquales, quos angulos æquales
 communis interjacens basis a c Triangulorum a
 bc & adc ; reliqua latera
 reliquis seu opposita efficit
 β æqualia, & reliquos an- α 29. l.
 gulos b , d oppositos, sicut & ex æqualibus compo- β 26. l.
 fit



γ 2. axio. *siti a & c y aequales sunt; & tota triangula a b c*
 δ 4. l. *& a d c sunt & aequalia, sectum nimirum est bi-*
fariam parallelogrammum per diametrum.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 25.

Parallelogramma $c d e a$, & $c d b f$, su-
 per eadem basi $c d$, & in eisdem paral-
 lelis $a b$, $c d$ constituta, inter se sunt æ-
 qualia.

α 34. l.
 β 1. axio.
 γ 2. axio.
 δ ex hyp.
 ϵ 29. l.
 ζ 4. l.
 η 3. axio.

Eidem $c d$ a aequales $a c$ & $f b$ inter se sunt &
 aequales, quibus eadem $c d$, addim y aequales fa-
 cit $a f$ & $e b$. Jam triangula $f a c$ & $b e d$ & æ-
 qualium laterum $a f$ & $e b$, $a c$ &
 $e d$, & s angulorum ipsis compre-
 hensorum $c a f$, $d e b$ erunt & æqua-
 lia, a quibus ablatum commune triangulum $c g f$,
 relinquit trapezia $a e g c$, $b f g d$ & aequalia,
 quibus commune additum triangulum $c g d$, pa-
 rallelogrammum $a c d e a$ & $c d b f$ super eadem basi
 in iisdem parallelis ostendit y aequalia.



PROPOSITIO XXXV.

Theorema 26.

Parallelogramma $a c e f$, $g b d b$,
 super æqualibus basibus $c e$, $b d$, & in
 eisdem

LIBER I.

eisdem parallelis ab , cd constituta
inter se sunt æqualia.

Conjunctis gc , be assi-
unt parallelogramma data
eidem ceb , g , ideoque &
inter se β æqualia.



α 35. l.
C 1. xia.

PROPOS. XXXVII.

Theorema 27.

Triangula abc , dbc super eadem
basi bc , & in eisdem parallelis bc , ad ,
inter se sunt æqualia.

Per puncta b & c a ducantur parallela be ,
 cf ipsi ca , bd , quæ concurrant cum ad utrinq;
producta. Sunt ergo super
eadem basi bc in iisdem
parallelis constituta paral-
lelogramma $bcae$, $bcbf$
δ β æqualia, ideoq; & ipsorum dimidia triangu-
la data γ æqualia.



α 32. l.

β 35. l.
γ 34. l.

PROPOS. XXXIIX.

Theorema 28.

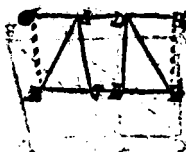
Triangula bac , edf , super æqua-
libus basibus br , ef constituta, & in
eisdem parallelis, inter se sunt æquat
lia.

C 1

Berlin

α 31. l.

Iterum per puncta b, f a ductis parallelis $b g$,
 $f h$ ipsis $c a, e d$; & utring, continuata $a d$ sunt

 β 36. l. γ 34. l. δ 6. axio.

parallelogrammum $c g$ &
 $e h$ super equalib. basibus
 β equalia, & proinde ipso-
 γ rum γ dimidia seu data
 duo trianguia δ equalia.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 29.

Trianguia $a b c, d b c$ equalia super
 eadem basi $b c$, & ad easdem partes
 constituta, in eisdem quoque sunt
 parallelis $b c, a d$.

 α 31. l. β 37. l. γ ex hy-
 pot. δ 9. axio.

Sin minus, a fiat $a f$
 parallela ipsi $b c$ & ducatur
 $f c$. Erunt Triangulo
 eidem $b a c$ equalia Tri-
 angula β $b f c$ parziale & γ $b d c$ totale. Quod
 δ absurdum.

PROPOSITIO XL.

Theorema 30.

Trianguia $a b c, d e f$ equalia super
 equalibus basibus $b c, e f$, & ad easdem
 partes constituta, in eisdem quoque
 sunt parallelis $a d, b f$.

Sin

Si minus, et fiat ah
 parallela ipsi bf & duca-
 tur hf . iterum eadem tri-
 angulo bac aequalia erunt
 triangula βehf parziale
 & γedf totale. Quod absurdum.



a 31. l.
 38. l.
 7 ex hyp.
 9. axio-
 mat.

PROPOSITIO XLI.

Theorema 31.

Si parallelogrammum $acde$ cum
 triangulo bcd eandem basin cd ha-
 buerit, in eisdemque fuerit parallelis
 ab, cd ; duplum erit parallelogram-
 mum trianguli.

Ducatur diagonus ad .
 Erit Trianguli acd & a-
 qualis Triangulo cbd &
 duplum parallelogrammū
 $acde$. Ideoque & ipsius cbd duplum erit.



a 37. l.
 34. l.
 7. axio.

Corollarium.

Si Triangulum bef duplum ha-
 buerit basin cf , fueritque in eisdem
 parallelis cum parallelogrammo $ac-
 de$, erit triangulum parallelogram-
 mo æquale.

Ducta enim bd , ejus-
 dem trianguli bcd dupla



C 3

sunt,

α 38. l. sunt, α triangulum cbf & β parallelogrammum
 β 41. l. $acde$. Ideoq; sunt γ aequalia.
 γ 6. axio.

PROPOSITIO XLII.

Problema II.

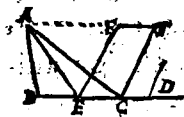
Dato Triangulo abc æquale pa-
 rallelogrammum, $cefg$ constituere
 in dato angulo rectilineo d .

α 10. l.

β 23. l.

γ 31. l.

α Diviso latere bc bisariam in e , β fiat ad
 punctum e angulus angulo dato rectilineo d æ-
 qualis, γ aganturq; paral-
 lela ag ipsi bc per a , & c g
 ipse ef per c ; & connectan-
 tur denum puncta a, c .



Quoniam, ergo ejusdem

δ 38. l.

ϵ 41. l.

ζ 6. axio.

trianguli cae dupla sunt δ triangulum bac &
 ϵ parallelogrammum $efgc$, erunt ζ aequalia.

Conversa.

Dato parallelogrammo $abcd$, æ-
 quale Triangulum bef constituere in
 dato angulo rectilineo g .

α 23. l.



α Fiat angulus cbe æ-
 qualis angulo g , seceturq; bc
 productam ad in e ; & in
 continuum addatur ipsi bc
 æqualis cf , junganturq; f
 e & ducatur ce . Quia rursus ejusdem trianguli
 bec

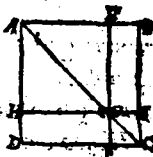
hec dupla sunt β triangulum bef & parallelogrammum $abcd$, etiam inter se sunt α equalia, β 38. l. γ 41. l. δ 6. axio.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema 32.

In omni parallelogrammo $abcd$, Complementa $dfgb$, $begi$, eorum quæ circa diametrum ac sunt, parallelogrammorum $aegb$, $cfigi$, sunt inter se α equalia.

Ab α equalibus triangulis adc , abc , ablatis triangulis α equalibus ahg , aeg , relinquuntur Trapezia $hgcd$, $egcb$ β α equalia; à quibus iterum sublatis α equalibus triangulis gfc , gic , relinquuntur complementa duo gb & gd β equalia. β 3. axio.



α 34. l.

PROPOSITIO XLIV.

Problema 12.

Ad datam rectam ab , dato triangulo c , α quale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo d .

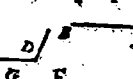
α 4.

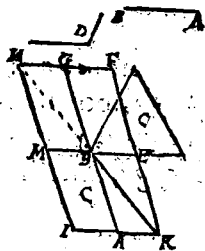
Fiat

42.1

*α Fias triangulo c equalo parallelogrammum
ebfg, habens angulum eb g equalem angulo
dato d; producatursq, gb in a, ut ab fit data ab*

Fig. 1.


 equalis; a c per punctum a ipsi eb & agatur pa-
 rallela, qua cum linea fe
 producta cōcurrat in pun-
 to k. Per hoc & punctum
 b ducitur diagonis con-
 currens in puncto h cum
 g f producta: per quod ipsi
 ag & ducitur parallela h l,
 itemq; eb continuatur in
 m. Quia enim eidē paral-



243.1.

lelogramma gebf equalia sunt, & triangulum

§ 43. 1.

c & d parallelogrammum ab ml, erit parallelo-

Axiom.

gratum ab m l ad datam lineam ab in angulo rectilineo, d triangulo dato s equale constitutum.

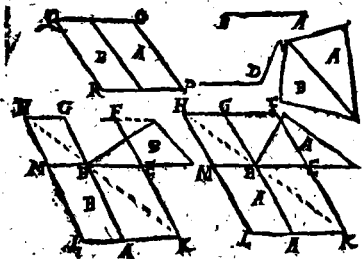
PROPOSITIO XLV.

Problema 13.

Ad datam rectam lineam ab , dato rectilineo, b, a , equalis parallelogrammum $apqr$ constituere, in dato angulo rectilineo d .

Resoluta rectilinea data in sua triangula, a,
b & cōstruantur triagulia singulia equalia paral-
lelogramma a & b, quæ deinde in linea p iuxta
aqua-

44.1



aquales suas altitudines conjungantur. & Erit 39. axi.
 totum hoc parallelogrammum toti rectilineo
 dato aequale, cum singula partes respondeant
 singulis.

PROPOSITIO XLVI.

Problema 14.

A data recta linea ab , quadratum
 ab describere.

Ex alterutro termino a lineae datae a eriga-
 tur perpendicularis ad aequalis lineae datae b per d
 agatur linea ab parallela & aequalis dc , jun-
 ganturq; c & b . & Aequales & parallelae, ab ,
 dc , connectentes da & cb erunt
 & aequales, & parallelogrammum
 factum & aequilaterum; & propter
 angulos c , b , oppositos rectis ad
 rectos, rectangulum: ideoq; qua-
 dratum.



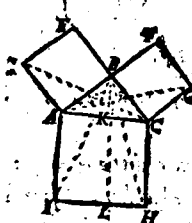
a 11. l.
 & 34.
 ex con.
 d 33. l.
 & 1. axio.
 & 34. l.
 26. def. l.

PROPOSITIO XLVII.

Theorema 33.

In rectangulis triangulis abc , quadratum, quod à latere ac rectum angulum abc subtendente describitur; æquale est quadratis $abed$, $bcbf$, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

α Descriptio tribus quadratis ah , ag , cf , in directum β jacent linea ab , bf & eb , bc ; γ ducta aq , bl parallela ipsi ai , ducantur etiam bh , bi , ag , cd .



Addito communi angulo bac rectos dab & iac sunt δ æquales anguli iab . dac , & ipsæque triangula dac , iab , eorumque ζ dupla parallelogramma ac & al æqualia; eodemque modo cf & cl demonstran-

tur æqualia: Erunt ergo quadrata ac , cf , quadrato ah , quod ex parallelogrammis al & cl componitur æqualia.

PROPOS: XLIX.

Theorema 34.

Si

Si quadratum, quod ab uno la-
terum ac trianguli abc describitur,
æquale sit eis, quæ à reliquis ab, bc
trianguli lateribus describuntur qua-
dratis: angulus comprehensus sub
reliquis duobus trianguli lateribus
rectus est.

Erigatur ex b linea ab perpendicu-
laris bd æqualis ipsi bc & connectantur
 ad . Quoniam Quadrata ac ad & ca
 c æqualia quadratis ab, bd itemq; ab .
 bc erunt etiam inter se γ æqualia: &
sic in triangulis æqualium laterum abc & abd
etiam anguli abc & abd æquales erunt:
quorum uno abd existente recto, etiam
alter abc rectus erit.



247. l.
6 ex hyp.
71. ax.
82. l.

EUCLE

44

E U C L I D I S
ELEMENTORUM
LIBER II.

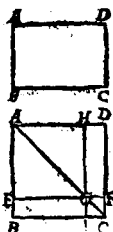
Definitiones.

1.



Mne parallelogrammum rectangulum $abcd$ contineri dicitur sub rectis duabus lineis, ah , ad , quæ rectum comprehendunt angulum bad .

2. In omni parallelogrammo spacio $abcd$ unumquodlibet ag vel gc eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis bg & gd Gnomon vocetur.



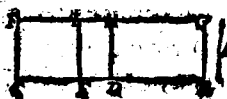
P R O.

PROPOSITIO. I.

Theorema 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ a & b ,
seceturq; ipsarum altera b in quot-
cunque segmenta $b d, d e, e c$; Rectan-
gulum $b f$ comprehensum sub illis
duabus rectis lineis a & b æquale est
eis, quæ sub insecta a vel $b g$, & quolibet
segmentorum $b d, d e, e c$ com-
prehenduntur, rectangulis $b h, d i, e f$.

Erigatur ex puncto b perpendicularis $b g$
ipsi a æqualis; compleaturque rectangulum $b f$
comprehensum sub $b c$ & $b g$. Rursus etiam ex
punctis sectionum d & e



et a erigantur perpen-
diculares $d h$ & $e i$
æquales & parallelae

lineæ $g b$, ut fiant rectangula $b h, d i, e f$, quæ
tanquam partes simul sumptæ æquales sunt toti
 $b f$ sub datis lineis comprehenso. Quod erat o-
stendendum.

21. l.
31. &
34. l.

PROPOS: II.

Theorema 2.

Si recta linea $b a$ secta sit utcun-
que in c : rectangula $a f$ & $e d$, quæ sub
tota, & quolibet segmentorum $a c$ &
 $c b$

EVCLIDIS ELEM:

c b comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, Quadrato *a d*.

a 46. 6.
B 31. 1

Super recta *a b* describatur quadratum *a d*, & ducatur per ipsos *a c* & *d b* parallela & æqualis *c f*. Finit ergo *a f* & *c d* parallelogramma, tanquam partes simul sumta æqualia toti *a d* quadrato.



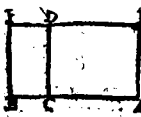
PROPOSITIO III

Theorema 3.

Si recta linea *a b* secta sit ut cunque rectangulum *a f* sub tota *a b* & uno segmentorum *a c* comprehensum, æquale est illi, quod sub segmentis *a c*, *c b* comprehenditur, rectangulo *c f* & illi, quod à prædicto segmento *a c* describitur, Quadrato *a d*.

a 46. 1

Ex utrovis segmento, ut *a c* fiat quadratum *a c d e*, & producta recta *e d* in *f* fiat æqualis ipsi *a b*, & connectantur *f b*. Erit totum rectangulum *a f* æquale quadrato segmenti *a d* una cum illo segmentorum recta.



rectangulo, tanquam totum, suis partibus sum-
sumus.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si recta linea ab secta sit utcum-
que in c ; Quadratum ad , quod à to-
ta ab describitur, æquale est & illis,
quæ à segmentis ac & cb describuntur,
quadratis bf , ci , & ei, quod bis sub
segmentis comprehenditur, rectan-
gulo ga , gd .

In Quadrato ad , ex ab & descripto, ducatur diagonus bc , & ex puncto sectionis c agatur ipsi a & e parallela cf secans diametrum in g puncto, per quod parallela cf fiat hi ipsi a & b . Ut ergo in triangulis Iso scelibus rectangulis eab & ceb angulis ad basin y æquales sunt & semirecti; ita in triangulis efg & ehg rectangulis, ad basin eg angulis existentibus & æqualibus, etiam latera ipsis opposita æqualia sunt, quibus similiter sua opposita sunt æqualia, adeoque hf est $\frac{1}{2}$ quadratum, ut & ci , utrumq; videlicet sui segmenti. Horum lateribus tanquam segmentis, complementa ga & gd æqualia, comprehensa sunt, quæ cum segmentorum quadratis quadrato totum sunt æqualia.



a 40. l.

c 32. l.

y 5. l.

d 32. l.

e 34. l.

f 43. l.

Certe

Corollarium.

In quadratis quæ circa diametrum sunt parallelogramma, quadrata sunt.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si recta linea ba secetur in æqualia ac , cb & non æqualia ad , db : rectangulum $a b$ sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, unâ cum quadrato $k g$, quod ab intermedia sectionum $c d$ æquale est, ei, quod à dimidia $c b$ describitur, quadrato $c f$.

Ex cb dimidia a describatur quadratum $c f$, & ducatur diagonus, quam ex d β erecta perpendicularis secet in pû-



α 46. l.

ϵ 11. l.

γ 31. l.

δ 36. l.

ϵ 43. l.

ζ cor. 4. l.

cto h , per quod æqualis & parallela li γ agatur ipsi $a b$, & i cum a jungatur. Iam si rectangulorum δ æqualiū uni $a k$ adiiciatur, complementorum ϵ æqualium unū $c h$, aliteri verò $c i$ alterum $h f$, & utriq; commune ζ quadratū intersegmenti $k g$; erit $a h$ rectangulum inæqualium segmentorum unâ cū illo intersegmenti quadrato,

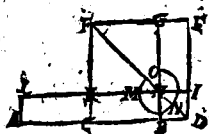
to $k g$ æquale gnomoni $m n o$ cum eodem quadrato seu quadrato $c f$ dimidia $c d$.

PROPOS: VI.

Theorema 6.

Si recta linea $a b$ secetur in c , & illi recta quædam linea $b d$ in rectum adjiciatur: rectangulum $a i$ comprehensum sub tota cum adjecta $a d$ & adjecta $b d$, unã cum quadrato $k g$ à dimidia $c b$ æquale est quadrato $c e$ à linea; quæ cum ex dimidia $c b$ tum ex adjecta $b d$ componitur, tanquam ab una descripto.

α Describatur ex $c d$ quadratum $c e$ cum diametro $d f$, quam ex $b \beta e$ recta perpendicularis intersectet in h puncto, per quod ipsi $a d$ yducatur parallela $\&$ æqualis $i l$. Rectangulo eidem $c h d$ æqualibus $a k$ & $h e$; addito communi $e i$, æqualia sunt rectangulum $a i$ & gnomon $m n o$; adeoq; & aucta communi quadrato $k g$.

 α 46. I. β 11. I. γ 31. I. δ 56. &

43. I.

51. ax.

D

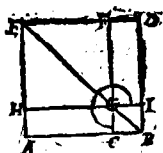
PRD.

Theorema 7.

Si recta linea ab secetur utcunque in c , quod à tota ad , quodque ab uno segmentorum bf , utraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo af , bd , & illi quod à reliquo segmento fit, quadrato gb .

α 46. I.
 β 11. I.
 γ 31. I.
 δ 4. II.
 ϵ 8. ax.

Iterum super ab α describatur quadratum & ducta diagonis ex c β erigatur perpendicularis cf , & per g data ab parallela γ fiat hi .



Cum ergo gnomonii ecm , una cum quadrato gb δ æquale sit quadratum ad , addito comuni hf , ϵ erunt quadrata ad ex tota, & hf ex segmento, æqualia rectangulis af & hd , sub tota & segmento comprehensis, una cum reliqui segmenti quadrato gb .

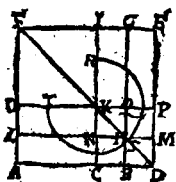
PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si recta linea ab secetur utcunque

que in rectangulum ab quater comprehensum sub tota ab & uno segmentorum c , cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato oi æquale est ei, quod à tota & dicto segmento; tanquam ab una a d linea describitur, quadrato ae .

Vicinus, in c. secta a b ad ponatur b d æqualis ipsi cb . & a describatur quadratum ae super tota a d : ex punctis autem c & b β erigantur perpendiculares & parallela ci & bg , quæ diagonem



α 46. l.
C. I.

fd secens in k & h punctis, per quæ ipsi a d parallela & æquales ya gantur. & Aequalibus igitur parallelogrammis singulis an , lk , kg , qe , ex segmentis data linea factis, si addantur singula quadrata & æqualia ex altero segmento facta; erunt quatuor hæc rectangula ex tota & segmento & inter se 2 æqualia & simul sumpta gnomonist: quibus si addatur quadratum oi ex priore segmento ac , æqualia erunt quadrato ae facto ex tota ab cum segmento b d tanquam ab una partes simul sumpta toti.

γ 31. 34. l.
 δ 36. l. &
43. l.

634. l.

2 ax.

PROPOS: IX.

Problema

9.

D 2

Si

Si recta linea ab secetur in æqualia ac, cb , & non æqualia ad, db : Quadrata ad, db , quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & ejus, quod à dimidia ac , & ejus, quod ab intermedia sectionum cd fit, quadrati.

a 1. I.

Dimidia ac equalis c erigatur perpendicularis ce . & cum a & b connectatur, ut fiant duo triangula isoscelia rectangula ace & bce , quorum anguli ad bases β erunt æquales & semire-

β 5. & 32 I.

Et, & totus ae & b ex duobus semirectis rectus.

Rursus erigatur ex d perpendicularis df , & per

γ 31. I.



se ipsi cd & fiat parallela & æqualis. β Erunt ergo in duobus rectangulis triangulis bdf & egf semirecti ad

δ 6. I.

bases, & his suprensa latera d æqualia. Denique ducatur af . In triangulo ace quadratum hypotenuse ae , æquale est quadrato ex a & c & ce , vel duplum quadrati dimidia ac , & itemq; quadratum cf duplum erit quadrati gf vel cd intermedia: ac proinde quadrata ae & ce & cf simul sumpta erunt dupla quadratorum ac dimidia & cd intermedia. Cumq; quadratum af æquale sit, & quadratis ae & cf simul sumtis; & quadratis ad & df vel db inæqualium segmentorum; erunt hæc quadrata inæqualium segmentorum

dupla.

dupla quadratorum ex dimidia & intermedia.

Quod erat propositum.

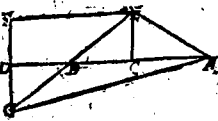
PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si recta linea ab secetur bifariam in c ; adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea bd : quod à tota cum adjuncta & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata ad & bd , duplicia sunt & ejus, quod à composita ex dimidia & adjuncta, tanquam ab una cd , descriptum sit, quadrati.

Iterum ex ca erecta

perpendiculari ce aequali ipsi ac , fiant duo triangula Isoscelia ace & bce , in quibus anguli ad bases



ae II. I.

& aequales & γ semirecti. Deinde compleatur rectangulū cf , produclæ fd & eb concurrant in g , & g connectatur cum a . Erunt triangula rectangula efg & $b d g$ etiam Isoscelia, & anguli ad bases semirecti. Est ergo quadratum $a c d$

β 5. I.

γ 32. I.

duplū quadrati ac , & quadratum eg quadrati ef vel cd , quadratum ag quadratis ac & eg est δ æquale; idemq; quadratum ag etiam δ æquale est quadratis ad totius cum adjuncta & $d g$ adjuncta: ideoq; etiam hac duo quadrata to-

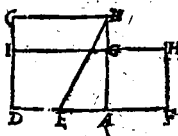
δ 47. I.

rius cum adjecta & adjecta erunt dupla quadratorum dimidia & dimidia cum adjecta.

PROPOSITIO XI.

Problema I.

Datam rectam lineam ab secare, ut comprehensum sub tota ab vel bc , & altero segmentorum gb rectangulum gc , æquale sit ei, quod à reliquo segmento ag fit, quadrato ab .



Super e b data a describatur quadratum ac ; & latus ad secetur bisariam in e , ductaq; eb fiat equalis ef ; & super af fiat quadratum, continuata hg in i . Cum ergo rectangulum dh super tota cum adjecta & adjecta, una cum quadrato dimidia & æquale sit quadrato ex dimidia & adjecta ef vel eb , quod d æquale est quadratis ea dimidia & ab totius; ablato communi quadrato ea , erunt quadratum db ex tota ab , & rectangulum dh ex tota cum adjecta & adjecta æ equalia: rursusq; ablato rectangulo communi ai ex tota & adjecta, relinquitur quadratum ah adjecta, vel alterius segmen-

α 46. I.

β 10. I.

γ 6. II.

δ 47. I.

ϵ 3. ax.

segmenti ag æquale rectangulo gc comprehenso sub data recta ab & altero segmento gb .

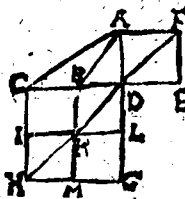
PROPOS: XII.

Theorema II.

In amblygonijs triangulis abc , quadratum quod fit à latere ac angulum obtusum abc subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus ab, bc , obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo ck bis comprehenso & ab uno laterum cb , quæ sunt circa obtusum angulum, in quod cum protractum fuerit, cadit perpendicularis ad , & ab assumpta $b d$ exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

Ex puncto a demittatur perpendicularis ad in latus cb protractum. Quadratum ex cd æ 12. I. β æquale est quadratis segmentorum cb & β 4. II. bd , una cum rectangulo bis sub segmento cd sumto;

y 2. ax.



d 47. I.

sumto : quibus si addatur commune quadratum perpendicularis ad, erunt tria quadrata ex segmentis & perpendiculari, una cum re-ctangulo bis sub segmentis a-qualia duobus quadratis ex c d & a d, quibus d aequale est quadratum a c. Cumq; quadratum a b tan-tum sit d aequale quadratis a d & b d, erit qua-dratum c a majus quadratis laterum obtusum angulum includentium re-ctangulo bis sub unoq; laterum c b & assumta b d comprehenso.

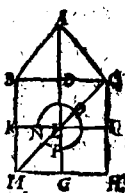
PROPOS : XIII.

Theorema 12.

- In oxygonijs triangulis abc qua-dratum a latere $a b$ angulum acutum
 • $ac b$ subtendente minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus ac, bc acutum angulum comprehendentibus, re-ctangulo bi & db , bis comprehenso & ab uno laterum bc , quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpen-dicularis ad cadit, & ab assumpta inte-rius linea dc sub perpendiculari pro-pe acutum angulum.

Demit.

α Demittatur perpendicularis a d in latus b c angulo dato c adjacens. Est quadratum recte a b β aequalē quadratis a d & b d: quadrato autem b d majus est quadratum recte b c, gnomone n o p: quadratum verò a c β a-
quale est quadratis a d & d c, majus nimirum quadrato a d per quadratum d c. Sic ergo quadratum recte a b minus est quadratis rectarum b c & c a, rectangulo b i sumto sub tota b c, & segmenta d c, id est, rectangulis b i & d h.



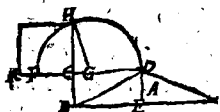
β 47. I.

PROPOS: XIV.

Problema 2.

Dato rectilineo a, æquale quadratum c i constituere.

α Fiat rectilineo a, æquale rectangulum b c d e; extendaturq; latus d c in f, intervallo c b, ipsaq; d f β secetur bifariam in g, & ex g intervallo g d vel g f describatur semicirculus d h f, producta b e in h. Cum ergo recta d f secta sit æqualiter in g, & inequaliter in c, erit rectangulum e c sub d e & c f, upa cum quadrato g c



α 45. E.

β 10. I.

7. II.
47. I.

51. AX.

yaquale quadrato recta gf & gh . Quadrato
autem ghd equalia sunt quadrata gc & ch .
Ergo & rectangulum ec una cum quadrato
 gc & aequale est quadratis rectarum gc & ch .
Ablato communi quadrato gc ; remanebunt a-
qualia rectangulum ec vel a, & quadratum re-
cta ch . Quod erat faciendum.



E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

LIBER III.

1. 1. 30

Definitiones.

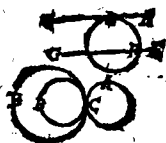
1. 015



¹
ÆQUALES circuli
sunt a fb , b gc ,
quorum diametri ab ,
 bc sunt æquales; & quorum quæ ex-
cen-

centris, rectæ df , eg sunt æquales.

2. Recta abc circum bfd tangere dicitur, quæ cum circum tangit $in b$, si producat, circum non secat.



3. Circuli sese mutuò tangere *in c* dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.

4. In circulo abd rectæ ab/bi , æqualiter à centro c distare dicuntur, cum perpendiculares ek , cf , quæ à centro c in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius abesse illa dicitur de , in quam major cg perpendicularis cadit.



5. Segmentum c circuli est figura, quæ sub recta linea, bd & circuli peripheria bad comprehenditur.





6. Segmenti angulus bac est, qui sub recta linea ac & circuli peripheria comprehenditur.



7. In segmento angulus est, cum in segmenti peripheria sumtum fuerit quodpiam punctum b , & ab illo in terminos rectæ a, c , qui segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ; angulus abc , ab adjunctis illis comprehensus.



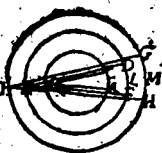
8. Cum verò comprehendentes angulum rectæ da, ba aliquam assumunt peripheriam; ille angulus bad peripheriæ db insistere dicitur.



9. Sector Circuli est, cum ad ipsius circuli centrum e constitutus fuerit angulus aec : estque figura comprehensa à rectis ae, ec angulum continentibus, & à peripheria adc ab illis assumpta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ

quæ angulos capiunt æ-
quales: aut in quibus
anguli b, e, i , inter se
sunt æquales. Ita arcus
vel circumferentiæ akc ,
 dlf, mbi similes dicuntur, quibus æ-
quales anguli insunt.



PROPOSITIO I.

Problema 1.

Dati circuli abc centrum f inve-
nire.

Ad ductam in circulo rectam ac , a bifari-
amq; sectam in e , & erigatur perpendicularis,
qua utrinq; in peripheriam terminata, etiam
a secetur bifariam in f , centro circu-
li. Sin minus, cum in illa recta aliud
esse non possit, extra ipsam pona-
tur g , ducanturq; gfa, gc, ge .



Quia ergo equalia sunt in triangulis age , &
 egc omnia latera $ya g, gc; da e, ec; & g$ cō-
mune; & æquales etiam erunt anguli aeg, ceg
& recti; totus aeg partifca, æqualis. Quod
absurdum.

α 10. I.
 β 11. I.

γ 15. def. I.
 δ ex cōstr.
 ϵ 8. I.
 ζ 9. ax.

Corollarium.

Si recta rectam ad angulos re-
ctos

ctos in circulo æquibifecet, in secante centrum erit circuli.

PROPOSITIO II.

Theorema 1.

Si in circuli peripheria duo quælibet, puncta accepta fuerint, recta linea *ab* quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

α 16. I.



In recta *ab* assumatur quodcunque punctum *d*, & ducantur ex centro *ca*, *cb*, *cd*. Cum ergo angulus *eda* α major sit angulo *cdb* β

β 5. I.

γ 19. I.

seu angulo *cad*; erit etiam *c* a semidiameter γ major linea *cd*. Ideoque, & punctum *d*, & quavis alia intermedia puncta linea *ab* cadant intra circulum.

PROPOSITIO III.

Theorema 2.

Si in circulo *bcd* recta quædam lineæ *ce* per centrum extensa, quædam non per centrum extensam *bd* bifariam secet *inf*, eam ad angulos rectos secabit. Et si ad angulos rectos

Quos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

Quia enim in Triangulis $a f b$, $a f d$ laterum a equalium, etiam lateribus equalibus oppositi anguli sunt β aequales, erunt $a f b$, $a f d$ γ recti.



α ex constr. & 15. def. I.
 β 8. I.
 γ 10. def. I.

PROPOS. IV.

Theorema 3.

Si in circulo duæ rectæ lineæ $a b$, $c d$ sese mutuò secant in e , non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

Quod si bifariam se secarent; tum ex centro f ducta recta $f e$ utramq; secaret ad angulos rectos α aequales β in partemq; toti aequalem efficeret. Quod est γ absurdum.



α 3. III.

β 10. def. I.
 γ 9. ax.

PROPOSITIO V.

Theorema 4.

Si duo circuli $a b d$ $b e d$ sese mutuò secant in b & d ; non erit illorum idem centrum c .

Si centrum commune esset c , duæ lineæ, $c b$ & $c a$ erunt $c b$, $c e$ & $c a$ aequales, pars toti. Quod ζ absurdum.



α 15. def. I.
 β 9. ax.

PRO.

PROPOSITIO VI.

Theorema 5.

Si duo circuli ab, cb sese mutuò interiorius tangant in b ; eorum non erit idem centrum d .

$\alpha 15$. def. I.
 $\beta 9$. ax.



Si centrum commune esset d , ductis lineis db & dac , erunt db , da , & dc æquales, pars toti. Quod est absurdum.

PROPOS: VII.

Theorema 6.

Si in diametro circuli ab quodpiam sumatur punctum g , quod circuli centrum non sit; ab eoque puncto g in circulum quædam rectæ lineæ gc, gd, ge cadant: maxima quidem erit ea ga in qua centrum; minima verò reliqua gb ; aliarum verò propinquior illi; quæ per centrum f ducitur, remotiore semper maior ga ipsa gc , & hæc ipsa gd : duæ autem solum rectæ æquales gb, ge ab eo puncto

Ad o in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ $g b$ vel maximæ $g a$.

Ex centro f ducantur semidiametri $f c$, $f d$, $f e$, $f h$, & ponatur q angulo $e f b$ equalis $b f h$, & ducatur recta $g h$. Quia enim $f c$ & $f g$, hoc est, $g a$, & majores sunt latere $g c$; & hoc latere $g d$, quia in triangulis equalium laterum majori angulo subtensum; & hoc rursus latere $g e$: Quia etiam $e f$, hoc est, $f b$ & minor est $f g$ & $g e$ simul sumtis, ablato communi $f g$, etiam $g e$ major erit $g b$: adeoque maxima est $g a$, minima $g b$; reliqua quoque viciniore minima, eò sunt minores. Quia denique in triangulis $e f g$ & $g f h$ equalium laterum aequales angulos comprehendentium, bases $g e$ & $g h$ fiunt aequales; ex utraque parte minima $g b$ aequaliter distantes sunt aequales: Reliqua omnes sunt vel minores versus b , vel majores versus a . Quod erat propositum.



a 23. I.

c 15. def. I.

y 20. I.

d 44. I.

z 20. I.

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam a , adeoque ad circulum ducantur quædam rectæ $a b$, $a c$, $a d$, $a e$, quarum una quidem $a b$ per

E

cen-

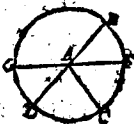
fit quàm ac & ck , ablatis equalibus kb & kc ; relinquetur ab minor quàm ac . Ita, cum & minores sint ac & ck ; quàm ad , dk & bd minores quàm ae , ek , be quàm am , mk , demtis a equalibus semidiametris, relinquentur ad minor quàm ae , & hec quàm am , atq; ita illorum minima est ab . Deniq; quia in triangulis akc & akl sub equalibus lateribus comprehenduntur, anguli ad k aequales, illis & equalia opponuntur latera al & ac , quibus nulla alia equalis ex eodem puncto ad circumferentiam illam duci potest. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Theorema 8.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod a , & ab eo puncto ad circumulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

Si minus a fuerit centrum, esto e , & per e a ducatur diameter fg . Ex puncto. ergò a duæ ad summum rectæ ad circumferentiam æquales cadere poterunt; tertiâq; vel major vel minor erit. Quod est contra hypothesis, præter a ergò aliud centrum non erit.



a 7. III.

PROPOSITIO X.

Theorema 9.

Circulus $abcdef$ circulum agb ,
 deb in pluribus quàm duobus pun-
 ctis non secat.

Sicent se, si possibile est
in tribus punctis a, b, d,
duo circuli, qui rectis a b,
b d connectantur, per qua-
rum puncta media i & k



β erigantur perpendiculares il & kl. γ Erit
communis illarum intersectio l centrum utriusq;
circuli. Quod est d absurdum.

PROPOSITIO XI.

Theorema 10.

Si duo circuli c , d sese intus con-
 tingant in e , atq; accepta fuerint eo-
 rum centra a , b , ad eorum centra ad-
 juncta recta linea ab & producta in
 contactum e circulorum cadet.

Si in recta a e centrum b non fuerit, ponat-
tur in f, & ducatur linea a f g h. Erunt f e & f g,
a c &

ae & ah æquales. Cumq; fe &
 fa æquales ipsis af , fg , & majores
 sint quàm ae seu ah ; erit pars
 ab major tota ah . Quod ð absurdum.



$\alpha 15$. det. l.
 $\beta 2$. ax.
 $\gamma 20$. l.
 $\delta 9$. ax.

PROPOSITIO XII.

Theorema 11.

Si duo circuli sese exterius contin-
 gant in b , linea recta ad quæ ad centra
 eorum adjungitur, per contactum b
 transibit.

Sin minus recta conne-
 ctens centra per contactum
 b transi, esto fg , & conne-
 ctantur bf , bg . æ Erunt ha-
 dua vel ga , fc majores quàm fg , pars toto.
 Quod ð absurdum.



$\alpha 10$. l.
 $\beta 9$. ax.

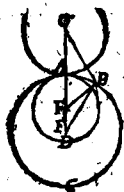
PROPOSITIO XIII.

Theorema 12.

Circulus circulum non tangit in
 pluribus punctis, quàm uno a sive in-
 tus sive extra tangat.

Recta per centra ef æ cadit in contactum a ;
 si præter a ponatur aliud contactus punctum b ,
 E ; quod

§ 20. I.
 γ 5. ax.



quod connectatur cum utroq; centro f & e . Cum ergò bf , fe finit & majores quàm eb , id est ea , ablata communi ef , γ major erit fb quàm fa & punctum b cadet extra circulum interiorem, ubi nullus sit contactus. Sic tangent se duo circuli exterius itidem in a ; recta connectens contra a cadit in contactum a : Sin etiam in b fieret contactus, tum bg & be fierent δ aequales lineæ, & g . Quod β absurdum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo æquales rectæ ab , dc æqualiter distant à centro e , & quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.



§ 12. I.
 § 3. III.
 γ 15. def. I.

§ 47. I.
 § 3. ax.

In rectas ab , dc æquales ex centro e ducantur perpendiculares in f & g illorum puncta f & g media, item ea , & ed γ æquales. Quia ergò quadrata ex ea , ed æqualia, quadratis af , ef & dg , eg sunt δ æqualia; ablati æqualibus quadratis laterum β æqualium af , dg ; residua quadrata δ æqualia, erunt æquali-

quæ laterum ef , eg quadrum, id est, inscriptæ
æquales æqualiter à centro distant.

PROPOSITIO XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea
est diameter ef ; aliarum autem pro-
pinquior bi centro g remotiore cd
semper maior est.

In lineas hi , cd ex centro g
æ ducantur perpendiculares gl ,
 gk ; ipsiq; gl æqualis gm abscin-
datur de gk , & per m erigatur
perpendicularis ipsi hi æqualis; ducanturq;
semidiametri in puncta b , c , d , e . Cum ergo gb ,
 ge , id est, af maiores sint, quàm be , & an-
gulus bge maior angulo cgd ; erit af mai-
or quàm be , & b seu hi est maior quàm cd .
Quod erat ostendendum.



æ 13. I.

ß 12. I.

γ 14. I.

δ 20. I.

ε 9. ax.

ζ 24. I.

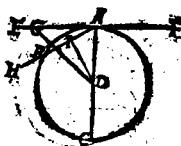
PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

Quæ fe ab extremitate æ cuiusq; dia-
metri

metri ca circuli ad angulos rectos
ducitur, extra ipsum circulum cadet;
& in locum inter ipsam rectam line-
am ae & peripheriam comprehen-
sum, altera linea non cadet: & semi-
circuli quidem angulus dab quovis
angulo acuto rectilineo major est;
reliquus autem bac (contactus) mi-
nor.

α ex hyp.
617. I.
 γ 17. I.
 δ 12. I.



Sumatur in linea ae pun-
ctum g & connectatur cum
centro d . Erit angulo α recto
 a oppositum latus dg , quàm
 da , oppositum β acuto g
 γ majus g , punctumq; g cum
ceteris omnibus illius linea extra circulum. De-
inde ducta alia $a h$ infra ipsam ae , & demittatur
in ipsam perpendicularis di . Angulo itaq; λ recto
opponetur δ majus latus da , β acuto dab minus
 di . Ideoq; i punctum intra circulum cadit, &
linea illa circulum secat, nec ulla inter Tangen-
tem & circulum alia duci potest. Proinde neque
minor erit angulus, angulo contactus eab ; nec
major angulo semicirculi seu corniculari dab ,
inter quosvis rectilineos.

Corollarium.

Recta tangens circulum, in u-
nico

nico extremo diametri puncto tangit.

PROPOSITIO XVII.

Problema 2.

A dato puncto a rectam a c ducere, quæ datum circumlun tangat in c.

Dati circuli centrum d connectatur cum a & ex intersectionis puncto b a erigatur perpendicularis infinita, & ex centro d intervallo d a descriptus circulus secet infinitam illam in e, quod cum centro d connexum, secat circumlun datum in c.



eucl.

puncto, ad quod ex a ducta recta a c tangit circumlun. Sunt enim in triangulis a c d & d b c β aequalium laterum cum angulo comprehenso communi d, etiam reliqui anguli reliqui γ aequales, & rectus b, rectus c: & Ideo, a c Tangens. Quod erat faciendum.

 β 15. def. I. γ 4. I. δ 12. def. I. ϵ 16. III.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

Si circumlun tangat recta quæpiam
E s linea

74 **EVCLIDIS ELEM:**

linea ab , à centro e autem ad contactum c adjungatur recta quædam linea ec : quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

α 19. I.
 β 9. ax.



Si angulus ecb non est rectus, esto ecf rectus. Hujus ergo oppositum lat⁹ ec velle dedit a majus quam ef par toto. Quod absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si circulum a tetigerit recta ab quæpiam linea à contactu autem c recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur; in excitata erit centrum circuli.

α 18. III.
 β ex con-
str. &
hypot.
 γ 9. ax.



Si centrum non est in cc , esta extra illam f , quodcum c a perpendiculari linea connectetur. Erunt ergo ecb rectus & fcb pars recti æqua. Quod absurdum.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

In circulo abc angulus ad centrum bdc duplex est anguli a, e, f ad peripheriam; cum fuerit eadē peripheria bc basis angulorum.

Primò filatus ba sit communis cum bd ; a erit externus bdc interiorum β equalium alterius bac , anguli ad peripheriam duplus.



a 32. l.

c 5. l.

Deinde includantur ba, ac duæ bd, dc & ducatur diameter eg ; γ Erunt rursus bdg, gdc dupli duorum beg, gec ; totiusq; bdc , tertius bec .

y 32. & 5. l.

Tertiò f secet latus ba , & ducatur diameter fh . γ Erit similiter angulus externus totius hdb duplus inscripti totius hfb ; si etiam externus hdc auferendus ex toto hdb duplus est anguli cfh , etiam à suo toto hfb auferendi. Reliquus ergo ad centrum cdh est reliquus ad peripheriam cfb duplus. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. XXI.

Theorema 19.

In

In circulo, qui in eodem segmento ac sunt, anguli a, b , sunt inter se æquales.

æ 10. III.
ß 7. ax.



Ductis semidiamentis ed, ec ;
Quia angulus $entriusq, a \& b$ dup-
lus est, erunt, ß æquales.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Quadrilaterorum $abcd$ in circulis
descriptorum $b a d, b c d$ anguli, qui ex
adverso ac , duobus rectis sunt æqua-
les.

æ 22. I.
ß 22. I.



Ducantur diagoni $a c, b d$.
Cum ergo trianguli $b c d$ tres an-
guli duobus rectis sint æ æquales,
partesq, anguli a sint duobus $ad b a$ -
sin ß æquales, $cad \& cb d$; cab
 $\& b d c$; erunt etiam oppositi $a \& c$ duobus re-
ctis æquales.

PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Super eadem recta linea ab , duo
segmen-

segmenta circulorum similia, & inæqualia non constituentur ad easdem partes.

Ductis $a c d, c b, d b$: Erunt in æ similibus segmentis anguli $c \theta$ & $d \beta$ æquales. Quod γ absurdum.



α ex hypot.

β 10. def.

III.

γ . 16. I.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Super æqualibus rectis lineis $a b, c d$, similia circulorum segmenta, sunt inter se æqualia.

Propter bases minima $a b, c d$ æquales congruentes, con-



$\alpha \beta$. ax.

gruere sibi debent ipsa segmenta $a e b, c f d$. Sin β 23. III. minus, erunt vel inæqualia, sed non β similia γ 10. III. contra hypothesein: vel circulus circulum in pluribus, a, g, b quam duobus punctis secabit. Quod γ absurdum.

PROPOS: XXV.

Problema 3.

Circuli segmento $a b c$ dato, describere circulum, cuius est segmentum.

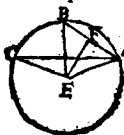
α Sect.

EVCLIDIS ELEM:

10. I.
 1. cor. I.
 III.

21.
 4. I.
 9. III.

7. *a* Secetur basis *a b* segmenti bisariam per li-
 nearum, quæ centrum circuli β continebit, *a* sece-
 tur item alia inscripta *a b* bisari-
 am per aliam lineam, quæ priorem
 secabit in *e* centro. Vel ad a ipsi
a b e angulo γ fiat equalis *b a e* du-
 ctis *a e* & *e c*; erunt tres lineæ *a e*,
e c, *e b* δ æquales & *e* centrum circuli.

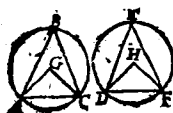


PROPOSITIO XXVI.

Theorema 23.

In circulis æqualibus, æquales an-
 guli æqualibus peripherijs *a f*, *a c* in-
 sistunt; siue ad centra *g*, *h*, siue ad pe-
 ripherias *b*, *e* constituti insistant.

4. I.
 20. III.
 7. ax.
 10. def.
 III.
 24. III.
 3. ax.



Ducantur rectæ *a c*, *d f*
 æquales β Erunt ergo æqua-
 les *g* & *h* ad centra γ equali-
 um *b*, *e* ad peripheriam du-
 pli & segmenta *a b e*, *d e f* δ si-
 milia, & super æqualibus basibus *a c*, *d f* æ-
 qualia.

Æqualibus ergo peripherijs *a b e* & *d e f*
 ablatis ex totis circulis æqualibus, relinquentur
 peripheria *a c*, *d f* æquales. Quod erat pro-
 positum.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 24.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs ac, df insistant, sunt inter se æquales, siue ad centra agc, dbf , siue ad peripherias b, e constituti insistant.



Sin minus, esto angulus angulo h maior, cui æqualis a fiat agi. Erunt ergo etiam basæ a i pars & d f vel a c totum & æqualia. Quod absurdum.

a 23. I.

β 26. III.

γ 9. an

PROPOS: XXIX.

Theorema 25.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ ac, df æquales peripherias auferunt, maiorem quidem abc major def , minorem autem aic minori $d kf$.

Ex terminis linearum inscriptarum æqualium ducantur semidiametri, a. Erunt ergo anguli g, h æquales, qui etiam æqualibus

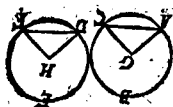
a 8. I.

§ 29. III.

10

EUCLIDIS BLEM:

γ 3. α.



libus insistant peripherijs alicuius d k f. Quibus ablati ab equalibus circulis, reliqua peripheria sunt γ aequales a b c, d e f.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

In æqualibus circulis, æquales peripherias a b c, d e f æquales rectæ lineæ a c, d f subtendunt.

α 27. III.

β 4. I.



Ductis semidiametris a g, g t, d h, h f. Erunt α æqualibus angulis g & h opposita bases a c, d f inter se β æquales. Quod erat propositum.

PROPOS: XXX.

Problema 4.

Datam peripheriam a b c bifariam secare.

α n. I.

β 4. I.

γ 28. III.



Ex puncto medio d subtenso a c ærigatur perpendicularis b d & ducantur b c, b a, quæ inter se & æquales etiam γ æquales peripherias a b & b c subtendunt. Sola

ergo est peripheria bifariam in b.

PRO.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 27.

In circulo angulus abc qui in semicirculo aec rectus est: qui autem in maiore segmento bac , minor recto: qui verò bec in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus gbc maioris segmenti, recte quidem maior est; minoris autem segmenti angulus bhc minor est recto.

Quoniam a equales sunt anguli dab, abd & dbc, bcd ex unius coniuncti, binus β equales, abd & bac cum adb , quibus duobus γ aequalis est externus cbf ; ac proinde abc est δ rectus: Angulus autem a in maiori segmento recto ϵ minor. Sed angulus c in segmento minori recto ζ maior. Cum denique angulus abc rectus sit tantum pars anguli segmenti maioris gbc ; & angulus segmenti minoris bhc tantum pars recti cbf ; η erit ille maior, hic minor recto.



α 5. I.

β 4. ax.

γ 23. I.

δ 13. I.

ε 17. I.

ζ 22. III.

η 9. 22.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 28.

F

Si

Si circulum tetigerit aliqua recta, linea ab , à contactu c autem producat^{ur} quædam recta linea ce circulum secans: anguli are , ecb quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis d & g .

α 31. III.
 & 18. III.
 β 32. I.
 γ 21. III.
 δ 3. ax.



Ducantur cf diameter & fe .
 Cum a recti sint anguli cef , fca
 & efc , ecf recti & æquales; ablato
 communi ecf , anguli efc , & id est
 egc in majori segmento, & ace
 erunt æquales. Horum æqualium δ æqualia
 erunt complementa ad duos rectos, anguli ecb
 & d in segmento minore æquales.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema 5.

Super data recta linea ab describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo c .

α 23. I.
 ϵ 11. I.

Super recta ab α fiat ad a angulo c dato æqualis dab , β erigaturq; perpendicularis a ex a $fiat$ ad & rursus angulo e ab æqualis fiat abf ;
 erunt

erunt af, bf & ay aequales. Ex f ergo intervallo f a
descriptum segmentum acb super ab , angulo dab
alternum capiet angulo dato c aequalem. Com-

y 6. I.



pleto enim circulo: Quia a d est
g Tangens, ad ipsam factus angulus
 dab dato c aequalis, & aequalis est an-
gulo agb in alterno segmento. Quod
erat faciendum.

d cor. 16.

III.

s 32. III.

Si angulus $datus$ c sit rectus, su-
per ab data tanquam diametro describitur se-
micirculus, qui angulum c rectum capit.

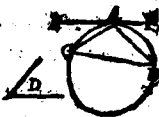
s 31. III.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema 6.

A dato circulo segmentum ab-
scindere, capiens angulum aequalem
dato angulo rectilineo d .

Recta caf tangat circun-
tum in a , & ad a fiat angulo
dato d aequalis $ca c$. β Erit er-
go in alterno segmento angulus
 b angulo $ca c$, id est, angulo dato d aequalis.



a 23. I.

s 32. III.

F 2.

PRO.

PROPOS. XXXV.

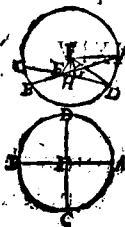
Theorema 29.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ab, cd sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis ae, eb unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius de, ec comprehenditur, rectangulo.

α 12. I.

β 3. III.

γ 5. III.



Ex centro f a demittantur perpendiculares fg, fh , quæ illas lineas æqualiter secant in g & h , ducaturq; fe . Erit ergo rectangulum ex ae, eb , unâ cum quadratis eg & gf vel ef , æquale quadratis ag & gf seu quadrato semidiametri af . Sic etiam rectangulum ex ce, ed , unâ cum quadratis ch & hf seu ef , æquale quadratis ch & hf seu quadrato semidiametri fe . Ablato ergo utrinq; ex rectangulis quadrato fe , communi, residua rectangula ex inæqualibus segmentis sunt æqualia.

δ 47. I.

Si in centro secant se duo diametri, planum est, quod ex segmentis æqualibus seu semidiametriis fiant æqualia quadrata.

ε 3. ax.

PRO.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 30.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod d , ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera da quidem circulum secet; altera db vero tangat: Quod sub tota secante da & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta dc comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à Tangente db describitur, quadrato.

Transseat primò secans ad per centrum e , ducaturq; eb perpendicularis Tangenti db . Erit rectangulum sub tota ad cum adjecta es adjecta cd , una cum quadrato dimidiæ ec aequale quadrato ed ex dimidiæ es adjecta, id est, quadratis db , be . Sublatis quadratis aequalibus semidiametrorum be , & ec , erit rectangulum ex ad & dc aequale quadrato Tangentis db .



a 18. 3.

B 6. II.

γ 3. ax.

Deinde non transeat secans da per centrum, & ducantur eb , ed , ec & ef perpendiculares. Erit rursus rectangulum ex ad & cd , una cum



quadrato fc æquale quadrato en fd ,
 additoq; quadrato communi ef , æ-
 quale erit rectangulum ex ad & cd ,
 una cum quadrato fc & fe , id est,
 quadrato ec , quadrato de , seu qua-
 drato db , be . Ablati aequalibus
 quadratis be & ce , relinquantur, æqualia
 rectangula ex ad , dc , & quadratum Tangen-
 tis db .

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 31.

Si extra circulum sumatur pun-
 ctum aliquod d , ab eoq; puncto in
 circulum cadant duæ rectæ lineæ,
 quarum altera da circulum secet, al-
 tera db in eum incidit; sit autē quod
 sub tota secante ad & exterius inter
 punctum & convexam peripheriam
 assumpta dc , comprehenditur rectan-
 gulum, æquale ei, quod ab incidente
 dc describitur, quadrato; incidens
 ipsa db circulum tanget.

¶ 36. II.

Ducta Tangente df , & semidiametris ef ,
 & b , ed . Erit quadratum Tangentis df æqua-

le rectangulo ex $a d$, & $d c$, scilicet
quadrato $d b$ incidentis; & d ipse
 $d b$ aequalis. Cumq; angulus b sit an-
gulo f recto & aequalis; e erit $d b$
Tangens.



Ex hy-
pot.
71. ax.
8. I.
18. III.



E U C L I D I S

ELEMENTO- RUM

LIBER IV.

Definitiones.

Figura rectilinea $f d e$ in figura re-
ctilinea $a b c$ describi dicitur, cum
singuli figurae descriptae anguli, sin-

F 4

gula



gula latera ejus, in qua describitur, tangunt.

2. Figura *ghi* circa figuram *klm* describi dicitur, cum singula descriptæ latera, singulos angulos ejus, circum quam describitur,

tangunt.

3. Figura rectilinea *abc* in circulo describi dicitur, cum singuli figuræ descriptæ anguli peripheriam circuli tangunt.



4. Figura rectilinea *abc* circa circumulum describi dicitur, cum singula descriptæ latera circuli peripheriam tan-

gunt.

5. Circulus in figura rectilinea describi dicitur, cum circuli peripheria singula latera ejus, in qua describitur, tangit.

6. Circulus circa figuram rectilineam describi, aut figura rectilinea circulo circumscribi dicitur, cum circu-

circuli peripheria singulos angulos
ejus, circa quam describitur, tangit.

7. Recta *ab* in circulo a-
ptari dicitur, cum ejus ex-
trema in circuli peripheria
fuerint.

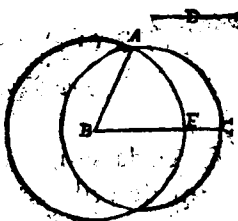


PROPOSITIO I.

Problema 7.

In dato circulo rectam lineam
accommodare, æqualem datæ rectæ
lineæ *d*, quæ circuli diametro non sit
major.

Cum enim dia-
meter inscriptarum
in circulo *a* sit maxi-
ma, major ipsa in-
scribi non potest: sin
ipsi sit æqualis, qua-
vis diameter ducta
erit aptata: Sin mi-
nor, intervallo lineæ



et 15. III.

datæ *d*, describatur circulus super *b c* diametro
circuli dati, & connectatur *b* cum *a*. β Erit hæc
linea circulo aptata æqualis datæ.

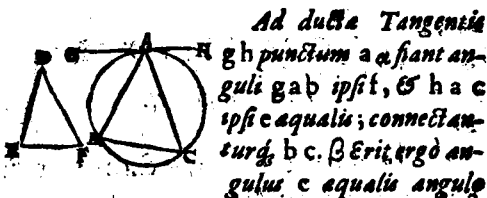
et 15. def. I.
& 1. ax.

EUCLIDIS ELEM:

PROPOSITIO II.

Problema 2.

In dato circulo triangulum describere, dato triangulo def æqui-
angulum.



Ad ducta Tangentia
gh punctum a α siant an-
guli gab ipsi, & hac
ipse aqualis; connectan-
turq; bc. β Erit ergo an-
gulus c aqualis angulo
gab, id est angulo f, & angulus b angulo e; γ
& angulus bac angulo d, triangulum inscri-
ptum abc, triangulo def æquiangulum.

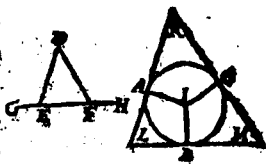
PROPOS: III.

Problema 3.

Circa datum circulum a b c trian-
gulum describere, dato triangulo
def æquiangulum.

*Producta utrinq; trianguli baf in g & h, an-
gulis externis α siant aequales ad centrum i; a i b
ipsi deg; & b i c ipsi d f h: ad extremitates
vero semidiametrorum a, b, c ducantur perpendi-
culares.*

angulares vel β tangen-
tes, quæ concurrent in
k, l, m. Ergo in qua-
drilateri quatuor an-
gulorum rectis quatu-
or equalium (propter



resolutionem in duo triangula) cum duo oppositi
sint γ recti, reliqui etiam duo duobus rectis æ-
quales erunt. Cumq; a i ipsi d e g, & b i ipsi
d f h æquatur, δ æquabitur i ipsi d e f & m ipsi
d f e & k i ipsi d. Circumscriptum ergo est Tri-
angulum dato æquiangulum.

γ ex con-
str.

δ 13. I &

3. ax.

432. I.

PROPOSITIO IV.

Problema 4.

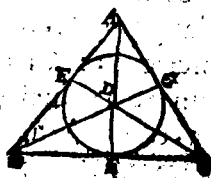
In dato triangulo abc circulum in-
scribere.

α Secentur duo anguli bisariam per lineas
duas, ex quarum intersectione puncta d & dẽ mit-

α 9. I.

C 12. I.

tantur perpendiculares
ad latera singula, earum-
que intervallo describa-
tur circulus. Erunt ergo in
triangulo edb , bdf la-
tera de , df γ equalia, &



in triangulis, $f d c$, & $ed g$ latera fd , gd δ Tres
nimirum æquales ex puncto d: quod erit cen-
trum circuli singula latera trianguli ζ tangenti-
æ vel inscripti.

γ 26. I.

δ 1. ax.

ϵ 9. III.

ζ cor. 16.

III.

PRO-

PROPOS: V.

Problema 5.

Circa datum triangulum abc circulum describere.

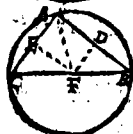
α 10. I.



Duo quævis latera a dividantur bisariam per lineas perpendiculares concurrentes in f , ex quo ad angulos singulos ducantur lineæ, illarumq; intervallo describatur circulus. Erunt ergo fa , fb , fc æquales, & ex f & centro descriptus circulus circa triangulum datum.

β 4. I.

γ 9. III.



Corollarium 1.

α 31. III.

Si centrum f cadat in latus, a erit triangulum rectangulum, quia in semicirculo: Si intra, erit acutangulum, quia in majori segmento: Si extra, obtusangulum, quia in minori segmento.

Corollarium 2.

Per data tria puncta non in eadem

dem recta linea existentia, circulum describere licet per hanc propositionem. Connexis enim punctis tribus habeo triangulum.

Scholion.

Cuius figura regulari qua & equilatera & a 4. IV.
& equiangularis est, circulus tum a 4. I.
inscribitur intervallo perpendicularium concurrentium;
tum circumscribitur intervallo angulos duos
quosq; bisariam secantium.

PROPOS. VI.

Problema 6.

In dato circulo quadratum describere.

Ducantur duo diametri ad angulos rectos se a intersecantes, eorumq; extremitates jungantur rectis ab, bc, cd, da. Quatuor angulis ad centrum & rectis, & a



quatuor sunt quatuor arcus quibus insistant, & his subtenso quatuor latera d aequalia. Anguli etiam omnes sunt in semicirculo & recti. Ergo quadratum abcd inscriptum.

a n. 1.

6 ex con-
str.

γ 26. III.

δ 29. III.

ε 31. III.

ζ 29. def. I.

LEMMA.

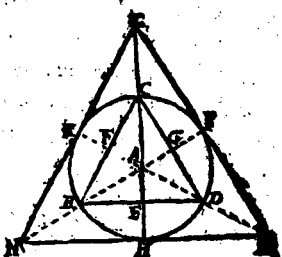
Figura regularis circa circulum deseri.

1. 2.

describitur à perpendicularibus lm ,
 ln , nm ab extremitate semidiamet-
 rorum b, i, k latera figuræ prius in-
 scriptæ bc, bd, cd bifariam dividuntur
 in e, f, g ex itatis.

per ali-
 quam
 prop. IV.

Inscribatur in
 circulo figura equi-
 latera & equian-
 gula, qualis requi-
 ritur, & per ipsius
 angulos ex centro
 utring, continuen-
 tur lineæ ad peri-
 pheriam in h, i, k



3.1

& ultra peripheriam in l, m, n , & secantes an-
 gulos & latera data figuræ bifariam, & tres ad
 centrum efficientes æquales $ba d, da c, bac$. De-
 nique ad extremitates h, i, k & extenduntur perpen-
 diculares lm, ln, nm . Cum itaque æquales sint
 anguli abe, anh , & ade, amh , id est, & toti n
 & b, m & $d; l$ & c ; erit figura & circumscripta
 æquiangula. Deinde in triangulis $anm, am l$,
 anl æqualium angulorum, & æqualia etiam er-
 unt inter se latera am, al, an , quæ compræhen-
 dentia angulos æquales, etiam bases inter se
 æquales efficiunt nm, ml, ln , figuram quasi-
 tam constituentia.

2. II. I.
 29. I.

62. ax.
 1. ax.
 6. I.

4. I.

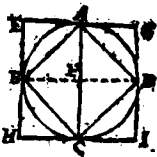
PRO.

LIBER IV.

PROPOS: VII.

Problema 7.

Circa datum circulum, quadratum describere.



α Inscripto prius quadrato, aliud etiam *β* circumscribetur.

α 6. IV.

6 per

Lemma

eiusdem.

PROPOSITIO IIX.

Problema 8.

In dato quadrato circulum describere.



Constructio & demonstratio est ex 4. IV.

PROPOSITIO IX

Problema. 9.

Circa datum quadratum circulum describere.



Constructio & demonstratio est ex scholio 5. IV.

Scholium.

Est *q*, quadratum circumscriptum inscripti *α* duplum, quia illud ex diagona inscripti vel diametro fit, sicut ex hypotenusa. *α* 47. I.

PRO.

LIBER IV.
PROPOSITIO XI.

97

Problema II.

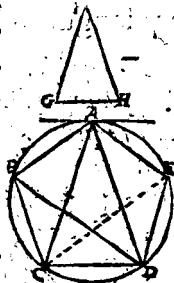
In dato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Constructio triangulo Iſoſceli fgh , cujus anguli ad basin g & h sunt dupliciter y f : & inscribitur circulo dato æquiangulum aed , & anguli ad basin y secantur bisariam per lineas db , ce , & ducantur rectæ ab , bc , cd , de , ea . Insistens ergo quinque anguli æquales a ce , e cd , a db , b dc , c ad & æqualibus peripherijs quinq; totum circulum comprehendentibus quibus & æqualia subtensa quinq; latera sunt pentagoni inscripti æquilateri; quod & n æquiangulum est, quod omnes ipsius anguli æqualibus peripherijs circuli insistant.

æ 10. IV.
ß 2. IV.
y 9. I.

ß ex
constr.
æ 26. III.
ß 29. III.

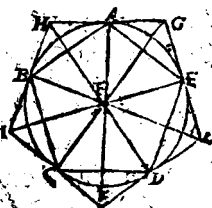
æ 27. III.



PROPOS. XII.

Probl. 12.

Circa datum circulum pentagonum



æqui



æquilaterum & æquiangulum describere.

æ II. IV.

α Inscripto prius pentagono, circumscribat^r aliud per lemma sexta hujus.

PROPOSITIO XIII.

Problema 13.

In dato pentagono æquilat^{ro} & æquiangulo, circulum inscribere.

æ 9. I.

β Schol. 5.

IV.

Duo quid^q, anguli proximi *α* secantur bifariam per lineas *fi*, *fk*, quarum concursu *f* intervallo perpendicularis *fc* circulus β erit inscriptus.

PROPOSITIO XIV.

Problema 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere.

æ 19. I.

β Schol. 5.

IV.

Iterum duo anguli *α* secantur bifariam per lineas, quarum intervallo ex illarum concursu β circumscribitur circulus.

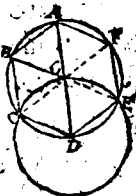
PROPOSITIO XV.

Problema 15.

In dato circulo hexagonum & æqui-

æquilatèrum & æquiangulum inscribere.

Ducto diametro circuli a d, ex d describatur alius priori æqualis circulus secans priorem in e & e punctis, per quæ ducantur diametri eb, cf, itemque ab, bc, cd, de, ef, fa. Erunt triângula cgd & dge æquilatèra & æquiangula, & anguli ad centrum omnes & æquales, vel $\frac{1}{3}$ duorum rectorum. Ideoque omnes d æqualibus insistent peripherijs, quibus & æquales lineæ, id est, latèra hexagoni sex æqualia subtenduntur, quæ etiam & æquales includunt angulos sex, æqualibus peripherijs insistentes. Hexagonum ergo & æquilatèrum & æquiangulum est inscriptum.



a 15. def. I.

β 5. I.

γ 32. & 15.

I.

δ 26. III.

ε 29. III.

ζ 27. III.

III.

III.

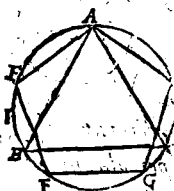
Corollarium.

Latus Hexagoni æquale est semidiametro ejusdem circuli. Circulo autem dato circumscribetur hexagonum per Lemma 6. IV. Circulus ipsi inscribetur & circumscribetur per Scholion 5. IV.

PROPOSITIO XVI.

Problema 16.

In dato circulo quindecagonum
& æquilaterum & æquiangulum de-
scribere.



Inscribatur in circulo da-
to a triangulum æquilaterum
& pentagonū. Cum ergò latus
trigeni $ab \frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{15}$: latus au-
tem pentagoni $ac \frac{1}{5}$ quatuor
rektorum : illarum duarum
peripheriarum differentia cb habet $\frac{2}{15}$; Ipsius
ergò dimidium erit $\frac{1}{15}$, cui subtensum latus c
est quindecagoni γ æquilateri & æquianguli
latus. Ejusdem circumscriptio fiet per Lem-
ma 6. IV. Ipsi autem & inscribetur &
circumscribetur circulus per
Schol. 5. IV.

α 2. IV.

β 11. IV.

γ 29. III.

δ 27. III.



EUCLI.



E U C L I D I S

ELEMENTO- RUM

LIBER V.

Definitiones.

1.

Ars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

2. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem. *Intelligitur hic pars aliquota, qua aliquoties precise continetur in toto, quod ejus multiplex est. Ideoque & eque multiplices sunt magnitudines, qua multitudine aequales partes habent.*

3. Ratio, λόγος, est duarum magnitudi-

G ;

tudi-

tudinum, ejusdem generis, *numera cum numero, linea cum linea*, mutua quædam secundum quantitatem habitudo, *quatenus una est major altera, vel minor, vel æqualis.*

4. Analogia, proportionalitas vel proportio, est rationum similitudo. *Ut enim magnitudines, ita earum rationes inter se comparantur.*

5. Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicata sese mutuo superare.

6. In eadem ratione dicuntur esse magnitudines, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquemultiplicia, à secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroque vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt, si casumantur, quæ inter se respondent, *Multiplæx primæ cum multiplæce secundæ; & tertiæ cum quartæ multiplæce.* Complectitur autem definitio etiam magnitudines tres, si media his sumatur.

7. Ean-

7. Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8. Cum verò æque multiplicium, multiplex primæ magnitudinis, excesserit multiplicem secundæ; at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam maiorem habere rationem dicetur, quam tertia ad quartam.

9. Analogia ad minimum in tribus terminis consistit. *Ut haberi possint duo Antecedentes & duo consequentes.*

10. Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem, *multiplicata in sese vel quadratæ ratione prima ad secundam*, habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: at cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam, triplicatam, *cubicæ in se multiplicata ratione prima ad secundam*, rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quam

diu proportio extiterit. *Loquitur definitio tantum de continua proportionalitate.*

II. Homologæ seu similes ratione magnitudines dicuntur, Antecedentes quidem Antecedentibus, consequentes verò consequentibus. *Ante proportionem dixerat rationum similitudines: nunc ejus terminos etiam dicit similes. Sequuntur jam sex argumentandi modi Geometris usitati.*

12. Alterna ratio est sumtio Antecedentis ad Antecedentem, & consequentis ad consequentem. *Oportet hic omnes terminos esse ejusdem generis. Non enim si sit ut numerus ad numerum sic linea ad lineam, recte collegaris alterne, ut numerus ad lineam; sic numerus ad lineam.*

13. Inversa ratio est sumtio consequentis tanquam Antecedentis, ad Antecedentem tanquam consequentem.

14. Compositio rationis est sumtio Antecedentis cum consequente seu unius

unius, ad ipsam consequentem, Vel
Compositio rationis est sumtio ter-
minorum simul ad alterutrum eo-
rundem. Et contra, est sumtio al-
terutrius termini ad compositum ex
utrisque. *Hic in compositione ratio-
num tantum intelligentur termini: ipse
rationes in 5. def. VI.*

15. Divisio rationis est sumtio ex-
cessus, quo consequentem superat
Antecedens, ad ipsam consequen-
tem, Vel est sumtio excessus termini
majoris supra minorem, ad ipsum
minorem: Et contra minoris ad ex-
cessum majoris.

16. Reversio rationis est sumtio
Antecedentis ad excessum, quo An-
tecedens superat consequentem. Vel
est sumtio termini majoris ad exce-
ssum supra minorem. Et contra,
excessus terminorum ad ipsum ma-
jorem.

17. Ex æqualitate ratio est, si plures
duabus sunt magnitudines, & his æ-
liae multitudine pares quæ binæ su-

mantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam; sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel, Est sumtio extremorum per subductionem mediorum. *Hi modi argumentandi demonstrantur aliquot propositionibus.*

18. Ordinata sive directa proportio est, cum fuerit, quemadmodum Antecedens ad consequentem; ita Antecedens ad consequentem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

19. Perturbata autem proportionalitas est, cum tribus positis magnitudinibus & alijs, quæ sunt his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet Antecedens ad consequentem; ita in secundis magnitudinibus Antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam; sic in secundis magnitudinibus

PROPOSITIO II.

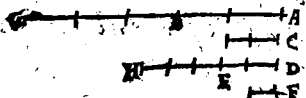
Theorema 2.

Si prima ab secundæ c fuerit æquemultiplex, atque tertia de quartæ f ; fuerit autem & quinta bg secundæ c æquè multiplex, atque sexta eh quartæ f ; erit & composita prima cum quinta ag secundæ c æque multiplex; atque tertia cum sexta dh æque multiplex quartæ f .

α ex hy-
pot.

β 2. ax.

γ 1. def. V.



Si enim a qualibus multitudinibus ab & de a æquales multitudines

bg & eh addantur, & erunt etiam compositæ ag & dh æquales, & suarum partium γ æque multiplices.

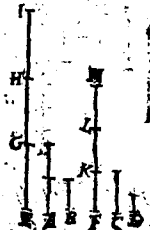
PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si sit prima a secunda b æque multiplex, atque tertia c quartæ d ; iunantur autem æquemultiplices e & i , summa pri-

primæ a & tertiæ c : Erit & ex æquo
sumtarum e ad b , & f ad d , utraq;
utriusque æque multiplex; altera
quidem secundæ b , altera f autem
quartæ d .

Quia enim primæ a , illiq; &
æquales e g , gh , hi sunt æque
multiplices secundæ b , atq; ter-
tiæ c , illiq; æquales f k , k , l m ,
quartæ d ; ßerunt etiam com-
positæ e & f earundem, se-
cundæ b & quartæ d æque mul-
tiplices, idest, yextremè vel ex
æquali sumtæ.



æ ex hy-
pot.

ßz. V.

¶ 17. def.
V.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si prima a ad secundam b eandem
habuerit rationem, & tertiæ c ad quar-
tam d : etiam æque multiplices primæ
 a & tertiæ c , ad æque multiplices se-
cundæ b & quartæ d , juxta quamvis
multiplicationem, eandem habe-
bunt rationem, & prout inter se re-
spondent, ita sumtæ fuerint.

Atque

2. V.



Aequemultiplicium e & f
sumantur alia aequemultiplices i
& k; itemq; aequemultiplicium
g & h uel l & m; ac etiam ex a-
quali i & k aequemultiplices pri-
ma a & tertia c; itemq; l & m, a-
que multiplices secunda b &
quarta d. Cumq; sit, ut prima
ad secundam; sic tertia ad quar-
tam, quarum aequemultiplices sunt
demonstrata i k & l m directe

36. def. V.

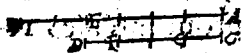
sumta, si fiet, si i superat l, etiam k superabit m,
ut hoc loco: Cumq; eadem etiam sint aequemul-
tiplicium e f & g h aequemultiplices constructa;
Ergo ut e ad g, ita f ad h.

PROPOSITIO V.

Theorema 5.

Si magnitudo a b magnitudinis
c d aequae fuerit multiplex, atque abla-
ta e ablata e f; etiam reliqua e b, re-
liqua f d ita multiplex erit, ut tota e b
totius c d.

Ponatur quadam
g c, cuius aequae multi-
plex sit e b, arg. est ab-
lata



lata a c ablata c f, vel tota a b totius c d: ac erit
 quoq; tota a b totius g f aequae multiplex, atque
 ablata a e, ablata c f: Erunt g f aequalis ipsi c d,
 & ablata communis c f, erunt g c & f d aequales.
 Cum itaq; e b reliqua sit tam multiplex ipsius
 g c, quam multiplex est a b ipsius c d; tam mul-
 tiplex etiam erit e b reliqua, reliqua f d. Quod
 erat propositum.

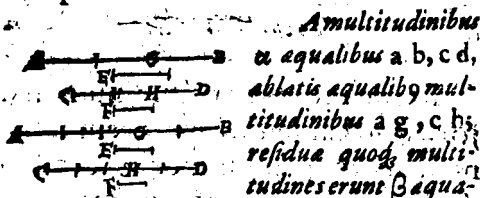
et. V.

36. az.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines a b, c d duarum magnitudinum e & f sint æque multiplices; & detractæ quædam a g, e b sint earundem e & f æque multipli- ces: & reliquæ g b & b d, eidem e & f aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.



A multitudinibus
 æ aequalibus a b, c d,
 ablatiis aequalibus mul-
 titudinibus a g, c h;
 residua quodq; mul-
 titudines erunt æqua-

a ex hy-
pot.

33. az.

les; siue ex constructione æquales sint ipsis e & f, ut in priori figuratone; siue earundem æque multiplices, ut in posteriore.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

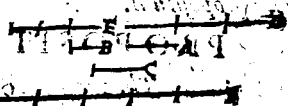
Acquales a, b , ad eandem c , eandem habent rationem; & eadem c ad aquales a, b .

Sint equalium

a & b aquae multiplices d & e

aquales, & ipsum c multiplex ut-

cung. Quia ergo multiplex d est minor multiplice e eadem minor quoque est multiplex c . Ideoque c ad a , sic c ad b .



a, b . ax.

β def. V.

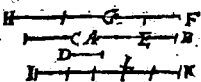
PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Inæqualium magnitudinum maior a, b ad eandem d , maiorem rationem habet, quam minor c ; & eadem d ad minorem c maiorem rationem habet, quam ad maiorem a, b .

Sit maior a, b prima, c tertia, d secunda & quarta

Quarta; ipsiq; c ex a b au-
feratur equalis a e, & ipsa-
rum a e vel c & e b fiant
aquemultiplices h g, g f,



¶ I. V.

quarum utraq; major sit quàm d, & sic h f tota
etiam totius a b majoris aquemultiplex a erit,
atq; h g ipsius a e vel c. Fiat item secunda &
quarta d aquemultiplex i k, proxime major
multiplice h g, sed minor multiplice h f, & de i k
abscindatur ipsi d equalis l k. Non erit ergo i l
major quàm h g, sed vel equalis vel minor (aliàs
non esset i k multiplex ipsius d, proxime major
quàm h g) Et cum g f major sit quàm d vel l k;
ideog; etiam tota h f major erit quàm i k. Et
proinde, cum f h, h g sint aque multiplices prima
a b & tertia c, atque i k multiplex d secunda &
quarta: Sicq; f h major quàm i k; h g verò mi-
nor quàm i k; major β erit proportio a b prima β 8. def.
ad d secundam, quàm c tertia ad d quartam. Et
conuertendo, cum tertia d multiplex i k sit ma-
jor multiplice prima h g; & ejusdem d tertia
multiplex eadem i k minor h f multiplice quar-
ta: Ideog; d majorem habet rationem ad c, quàm
ad a b. Quod erat propositum.

PROPOSITIO IX.

Problema 9.

Quæ a & b ad eandem c, eandem

H

ha-

habent rationem, æquales sunt inter se: & ad quas a & b eadem c eandem, habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

a 8. V.

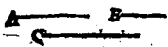


Si a major esset quàm b , a esset major majoris a proportio ad c , quàm b minoris ad eandem, contra hypothesin. Ideoq; non sunt inæquales. Rursus, si c habeat eandem rationem ad utramq; a & b , etiam æquales sunt. Sin minus, esto a major, tum c ad b minorem, majorem haberet rationem, quàm ad a , quod est contra hypothesin.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Ad eandem magnitudinem c rationem habentium, quæ a majorem rationem habet, illa major est: ad quam b autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

a 7. V.  Nisi enim a majorem habens rationem ad c , quàm b ad c , esset major b , foret vel æqualis, & sic contra hypothesin a haberet eandem rationem ad c vel

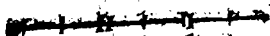
Vel minor, & sic b ad c maiorem β haberet ra- β 8. V.
tionem, quàm a, contra hypotbesin. Vice versa, si
c habeat rationem maiorem ad b, quàm ad a,
rursus erit major a, quàm b: sin minus, erit ipsi
vel equalis & contra hypotbesin α erit ipsius c ad
utramq, eadem ratio; vel minor. & sic maior erit
ratio c ad a, quàm ad b, contra hypotbesin.

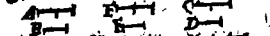
PROPOS. XI.

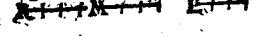
Theorema II.

Quæ eidem sunt eadem ratio-
nes, inter se sunt eadem.

Sumantur & An.

recedentium a, c, & 

æquè multiplices g, h. 

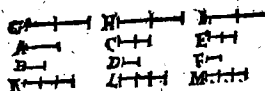
i; & consequentium. 

b, f, d, æquè multiplices k, m, l. Quia ergò. St, ut
a ad b, sic c ad d, α fiet; si g superat i, etiam k su- α 6. def.
peret m, & si equalis, equalis; & si minor, mi- V.
nor sit. Quia etiam est, ut e ad f, sic c ad d; fiet
etiam, si h superat i, etiam m superet l, & si aqua-
tis, equalis; & si minor, minor. Cum ergò æquè
multiplices directe sumita, habeant hanc tripli-
cem conditionem, excessus, æqualitatis & defe-
ctus, α erit, ut a ad b, sic c ad f.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si sint magnitudines quotcunque proportionales a, b, c, d, e, f ; quemadmodum se habuerit una a Antecedentium, ad unam b consequentium; ita se habebunt omnes antecedentes a, c, e , ad omnes consequentes b, d, f .



Sumantur aequæ
multiplices tum An-
tecedentiū a, c, e , quæ
sint g, h, i ; tum con-

ae 1. V. *Sequentium b, d, f , quæ sint k, l, m : & Erit composita ghi , composita kli aequæ multiplex, ac à ipsius b . Cum g sit, ut a ad b , sic c ad d & e ad f ; β fiet; si g superat k , etiam h superet l , & i superet m ; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor: Atque ita g, h, i simul, ad k, l, m simul, triplicem illam conditionem β recipiant: Ideoq; ut a ad b ; sic omnes antecedentes a, c, e ad omnes consequentes g, d, f ,*

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si prima a ad secundam b , eandem habuerit rationem, quam tertia c ad quar-

quartam *d*; tertia verò ad quartam, majorem rationem habuerit, quàm quinta *e* ad sextam *f*: prima quoq; ad secundam, majorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

Sumantur æquales
multiplices tum Antecedentium *a*, *c* *e*, tum
consequentium *b*, *d*, *f*, quæ sint *k*, *l*, *m*, ut in præ-
sidente propositione. Quia ergò eadem est ra-
tio *a* ad *b*, quæ *c* ad *d*: sed *c* ad *d* major est ratio,
quàm *c* ad *f*: α fiet, si *g* superet *k*, etiam *h* su-
peret *l*, sed *i* quandoq; deficiat ab *m*. Atq; ita, cum
g superet *k*, *l* non superet *m*, β habebit *a* ad *b*
majorem rationem, quàm *e* ad *f*.

α 6. def.

V.

β 8. def.

V.

PROPOSITIO XIV.

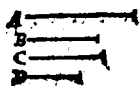
Theorema 14.

Si prima *a*, ad secundam *b*, eandem habuerit rationem, quam tertia *c* ad quartam *d*; prima verò quàm tertia major fuerit, erit & secunda major quàm quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & se-

H 3

cunda

cunda æqualis quartæ: si verò minor,
& minor erit.



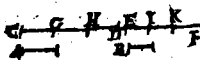
æ 8. V.
§ 10. V.

Sit a major quàm c : Ergà
 a habet majorem rationem a ad
 b quàm c ad b : & cum sit, ut a
ad b , ita c ad d ; & erit etiam c
ad d major ratio, quàm c ad b , & d erit minor
quàm b . Ob easdem etiam rationes quartæ est
major secunda, si tertia major sit prima; æqua-
lis etiam, si æqualis.

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Partes a, b , cum pariter multiplici-
bus c, d, e, f , in eadem sunt ratione, si,
prout sibi mutuò respondent, ita su-
mantur ut a ad b , sic c ad d & f .



Cùm ergò partes æqua-
multiplicium numero sint
æquales, c, g, h, h, d ipsius
 a ; e, i, i, k, k, f ipsius b ; quæ erit ratio unius An-
tecedentium c, g , ad unam consequentium e, i ;
eadem & erit omnium c, d , ad omnes e, f .

æ 12. V.

PRO.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 16.

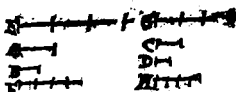
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, ut a ad b , sic c ad d ; & vicissim proportionales erunt, ut a ad c , sic b ad d .

Sumantur æque

multiplies prima e ,

& secunda f ; item

tertia g & quarta h .

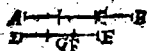


α Erit ut a ad b ; Sic e ad f ; & ut c ad d ; sic g ad h . α 15. V.
 β Idcirco etiam, ut e ad f ; ita g ad h . Si itaq; β 11. V.
 γ e fuerit maior quam g , etiam f & h erit maior quam h ; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor; atque sic, ut a ad c , ita b ad d . γ 14. V.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, ut ab , ad cd , sic de , ad fe ; hæ quoque divisæ proportionales erunt, ut ac ad cb ; ita df ad fe .



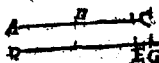
α 16. V.

Si enim magnitudo de non est in f secta, ut ab in c , esto secta in g . Erunt ergo due Antecedentes conjuncta, hoc est ab , ad duas consequentes, hoc est, de , ut bc ad eg . Sed tota ab ad ed ponebatur, ut tota de ad ef . Itaque erit, ut ab ad de ; ita bc ad ef . Quare ef aequalis erit ipsi eg , pars toti. Quod absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 18.

Si divisæ magnitudines sint proportionales ut ab ad bc ; ita de ad ef ; etiam compositæ proportionales erunt, ut ac ad bc ; ita df ad cf .



α 17. V.

β 14. V.

Si minus, habeat df ad cf aliam dg eam rationem, quam ac ad ab . α Erit ergo dividendo, ut ab ad bc , ita dg ad gf : Sed ut ab ad bc , ita erat de ad ef : Ideoque β erit etiam, ut de ad ef ; ita db ad gf . Cumque prima de sit minor tertia dg ; etiam secunda ef erit minor quarta gf , pars totum partem. Quod absurdum.

PRO.

PROPOS: XIX

Theorema 19.

Si, quemadmodum totum ab ad totum cd ; ita ablatum ae se habuerit ad ablatum ef : & reliquum eb ad reliquum fd , ut totum ad totum se habebit.

Cum igitur sint, ut ab ad cd ; ita ae ad ef ; α erit $\frac{ab}{cd} = \frac{ae}{ef}$.
 Et α $\frac{ab}{cd}$, ut ab ad ae ; ita $\frac{eb}{fd}$.
 β dividendo, ut eb ad ae ; ita fd , ad ef .
 γ componendo, ut ab tota ade breliquam; ita cd tota, ad fd reliquam; & α permutando, ut ab ad cd ; ita eb reliqua, ad fd reliquam.

 α 16.V. β 17.V. γ 18.V.

PROPOSITIO XX.

Theorema 20.

Si sint tres magnitudines a, b, c , & aliae ipsis numero æquales d, e, f , quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, ut a ad b , ita d ad e ; & ut b ad c , ita e ad f : ex æquo autem prima æquàm tertia c major fuerit & quarta

H 5 d quam

d quàm sexta *f* major. Quod si prima
a tertiæ *c* fuerit æqualis, erit & quarta
d æqualis sextæ *f*; sin illa minor, hæc
 quoque minor erit.

8. V.

13. V.

10. V.

7. V.



*Sit enim prima a major quàm
 tertia c, tum a ad b æ habet ma-
 jorem rationem, quàm c ad b;
 Et quia d ad c eandem habet ra-
 tionem, quàm a ad b; erit eti-
 am major d ad c, quàm c ad b.
 hoc est, quàm f ad e : Ideoq; major erit d
 quarta, quàm sexta. Sic, si a est æqualis c, etiam
 d est æqualis f, Et si minor, minor.*

PROPOSITIO XXI.

Theorema 21.

*Si sint tres magnitudines a, b, c, &
 aliæ ipsis æquales numero d, e, f, quæ
 binæ, & in eadem ratione sumantur
 ut, a ad b, sic e ad f; Et ut b ad c, sic d ad e;
 fueritque perturbata earum propor-
 tio; ex æquo autem prima, quàm
 tertia major fuerit : erit & quarta,
 quàm sexta major. Quod si prima
 ter-*

LIBER V.

tertiæ fuerit æqualis; erit & quarta æqualis sextæ; Sin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sit enim a major quàm c , & sic a ad b majorem a habet rationem, quàm c ad b ; adeoq; c ad f & majorem, quàm c ad b , hoc est, quàm e ad d : eritq; d major quàm f ; Sic, si a est æqualis c , etiam d æqualis est f ; & si minor, minor.



α 8. V.
 β 13. V.
 γ 10. V.

PROPOS: XXII.

Theorema 22.

Si sint quotcunque magnitudines, a, b, c , & aliæ ipsis æquales numero d, e, f , quæ binæ in eadem ratione sumantur, ut a ad b , sic d ad e ; & ut b ad c , ita e ad f ; & ex æqualitate in eadem ratione erunt, ut a ad c , ita d ad f .

Prioribus tribus adjungatur g , & posterioribus h . Sitq; ut a ad b , ita c ad g ; & ut a ad c , ita b ad g : Sit item ut d ad e , ita f ad h ;



α 16. V.

Ex hy-
pot.

a erit iterum ut d ad f , ita e ad h . Cum ergo consequentes e sint in eodem ordine cum antecedentibus; Ideoque est, ut a ad c , sic d ad f .

PROPOS: XXIII.

Theorema 23.

Si sint tres magnitudines a, b, c , aliaque ipsis numero æquales d, e, f , quæ binæ in eadem ratione sumantur, ut a ad b , sic e ad f , & ut b ad c ; sic d ad e ; fuerit autem perturbata earum proportio; etiam ex qualitate in eadem ratione erunt, ut a ad c , sic d ad f .



Sin minus, fiat ut b ad c , ita f ad g assumptam; eritque d ad e ut f ad g , quatuor nimirum proportionales; ac proinde a ut d ad f , ita e ad g . Sed e ad g est ut a ad c , & itaque & d ad f est, ut a ad c .

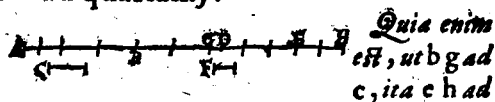
α 6. V.
 β 11. V.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 24.

Si prima a ad secundam c eandem

dem habuerit rationem, quam tertia
 d ad quartam f ; habuerit autem &
 quinta b g ad secundam c eandem ra-
 tionem, quam sexta e b ad quartam
 f ; etiam composita a g prima cum
 quinta, ad secundam c eandem habe-
 bit rationem, quam tertia cum sexta
 d b ad quartam f .



f ; erit convertendo, ut c ad b g ; ita f ad e h . Cum-
 que sit ut a b ad c , ita d e ad f ; & ut c ad b g , ita a 22. V.
 f ad e h , & erit ex equali, ut a b , ad b g ; ita d e ad 18. V.
 e h . Ergo, cum & componendo, ut a b ad b g ,
 ita d h ad e h : & ut b g ad c , ita e h ad f ; & erit
 ex equali a g ad c , ut d h ad f .

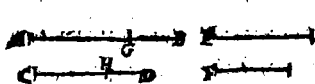
PROPOSITIO XXV.

Theorema 25.

Si quatuor magnitudines propor-
 tionales fuerint, ut a b . ad c d ; sic e ad f .
 maxima a b & minima f reliquis dua-
 bus c d & e majores erunt.

Ex a b aequalis e auferatur a g , & ex c d
 ipsi f , ch . Fit, ut a b . ad c d ; sic a g ad ch ; Et ut
 a b ad

219.
 Ex hy-
 pot.
 714.V.



ab ad cd; a sit
 reliqua gb adh
 d. Cumque B

major sit ab quàm cd, y major erit G gb
 quàm h d ex similitudine rationum. Additis er-
 go equalibus f G ch ad aequales ag G e, aequa-
 les sunt ag G f simul, ipsis e G ch simul; quibus si
 rursum addantur in aequales gb major G h d
 minor, erunt a b maxima G f minima simul
 maiores medijs cd G e simul.

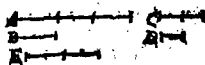
Sequentes propositiones ideò hñc inter Eu-
 clideas tolerantur, quia scriptores gravissimi,
 Archimedes, Apollonius G Pappus hys utuntur.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 26.

Si prima a ad secundam b habua-
 erit maiorem proportionem, quàm
 tertia c ad quartam d: habebit con-
 vertendo secunda ad primam mino-
 rem proportionem, quàm quarta ad
 tertiam.

210. V.
 23.V.



Habeat quaedam e ean-
 dem rationem ad b, quàm
 habet c ad d. Quia ergò a
 ad b, maiorem habet rati-
 onem, quàm c ad d, id est, quàm e ad b; erit etiam
 a a maj-

a maior quàm *c*; & *b* ad *a* minorem *b* habebit rationem, quam ad *c* minorem, id est, quàm ad *c*.

PROPOS: XXVII.

Theorema 27.

Si prima *a* ad secundam *b* habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam *d*: habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quàm secunda ad quartam.

Intelligatur esse ad *b*, ut *c* ad *d*. Quia ergo ad *b* maiorem habet rationem *a* quàm *c*; *a* erit maior *e*: & maiorque erit proportio *a* ad *c*, quàm *e* ad *c*. Cumque permutando sit, ut *c* ad *c*, ita *b* ad *d*, maiorque sit ratio *a* quam *e* ad *c*; etiam *a* ad *c* quàm *b* ad *d* maiorem rationem habebit. 10.V.
78.VI.

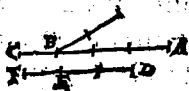
PROPOS: XXIX.

Theorema 28.

Si prima *ab* ad secundam *bc* maiorem habuerit proportionem, quàm

quam tertia de ad quartam ef , habebit quoque composita prima cum secunda ac , ad secundam bc maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta df ad quartam ef .

G



Habeat gb rationem

$ad\ bc$, quam $de\ ad\ ef$,
eritque $ab\ ad\ bc$ major
proportio, quam $g\ b\ ad$

et 10. V.

38. V.

718. V.

bc , & $a\ b$ a major quam $g\ b$. Addita ergo com-
muni bc , fiet $a\ bc$ major, quam $g\ bc$, & major-
que erit proportio $a\ bc$ quam $g\ bc$ ad $b\ c$. Sed
& componenda ut est $g\ bc$ ad $b\ c$, ita $d\ f$ ad $e\ f$.
Major itaque est proportio $a\ c$ ad $b\ c$, quam $d\ f$
ad $e\ f$.

PROPOS : XXIX.

Theorema 29.

Si composita ac prima cum se-
cunda ad secundam bc maiorem ha-
buerit proportionem, quam compo-
sita df tertia cum quarta ad quartam
 ef : habebit quoque dividendo pri-
ma ab ad secundam bc maiorem pro-
portionem, quam tertia de ad quar-
tam

tam $e f$.

G

Habeat $g b c$ ad $b c$ rationem, quam $d f$ ad $e f$, eritque major $a c$, quam $g b c$ ratio ad $b c$, & major, $a c$ quam $g b c$. Hinc ablata communi $b c$, major erit $a b$ quam $g b$; adeoque θ major proportio $a b$ quam $g b$ ad $b c$. Sed γ dividendo, ut $g b$ ad $b c$, ita $d e$ ad $e f$, Ergo major est proportio $a b$ ad $b c$, quam $d e$ ad $e f$.



a 10. V.

b 8. V.

y 17. V.

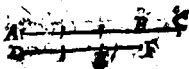
& ex hypot.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 30.

Si composita $a c$ prima cum secunda, ad secundam $b c$ maiorem habuerit proportionem, quam composita $d f$ tertia cum quarta, ad quartam $e f$: habebit per conversionem rationis, $a c$ prima cum secunda, ad primam $a b$, minorem proportionem, quam $d f$ tertia cum quarta, ad tertiam $d e$.

Quia enim $a c$ ad $b c$ major est proportio, quam $d f$ ad $e f$; etiam α dividendo



a 29. V.

major

§ 26. V.

γ 28. V.

major est proportio a ad b c, quam d ad e f.
Ideoq; § convertendo, minor proportio b c ad
 a b, quam e f ad d e; itaq; propter γ componen-
do minor proportio totius a c ad a b, quam totius
 d f ad d e.

PROPOSITIO XXXI.

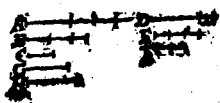
Theorema 31.

Si sint tres magnitudines a, b, c , &
aliæ ipsis æquales numero d, e, f , sitq;
major proportio primæ a priorum,
ad secundam b ; quam primæ poste-
riorum d ad secundam e ; item secun-
dæ b priorū ad tertiam c major, quam
secundæ e posteriorum ad tertiam f :
erit quoq; ex æqualitate major pro-
portio primæ a priorum ad tertiam c ;
quam primæ d posteriorum ad ter-
tiam f .

α 23. V.

§ 10. V.

γ 8. V.



Esto enim g ad c , ut e
ad f , & a erit major ratio
 b quam g ad c , § major-
quæ b quam g . Ideoque
γ major erit ratio a ad g minorem, quam a ad b
majorem. Cum autem major ponatur ratio a
ad b , quam d ad e ; multo erit major a ad g ,
quam

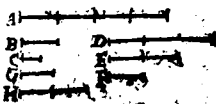
quàm d ad e . Rursus esto h ad g , ut d ad e , & erit
 a ad g major quàm h ad g , β majorq; a quàm h .
 Ideoq; $ad c$ major a maiorem habet rationem,
 quàm h . Sed ut h ad c , δ ita d ad f , ex equali. δ 12. V.
 (quia ut d ad e , ita h ad g , & ut e ad f , ita g ad
 c) Ergo etiam major est ratio a ad c , quàm d
 ad f .

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 32.

Si sint tres magnitudines a, b, c , &
 aliæ ipsis æquales numero d, e, f , sitq;
 major proportio primæ a priorum
 ad secundam b , quàm secundæ e po-
 steriorum ad tertiam f ; item secun-
 dæ b priorū ad tertiam c major, quàm
 primæ d posteriorum ad secundam e .
 erit quoque ex æqualitate major pro-
 portio primæ a priorum ad tertiam c ,
 quàm primæ d posteriorum ad ter-
 tiam f .

Esto g ad c , ut d ad e ,
 eritque b major ratio,
 quàm g ad c , & b a ma-
 jor quàm g . β Major er-
 go est ratio a ad g minorem quàm ad b .



æ 10. V.

 β 8. V.

1 2

Cumq;

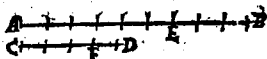
Cumq; a ad b sit major quàm e ad f , multò major est a ad g quàm e ad f . Rursus esto h ad g ut e ad f , eritq; a ad g major ratio, quàm h ad g , & a major quàm h . Ideoq; a major quàm h ad g habet maiorem rationem. γ Sed ut h ad e , ita ex equali d ad f . Ergò major est etiam ratio a ad c quàm d ad f .

α 10. V.
 β 8. V.
 γ ex hypot.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 33.

Si fuerit major proportio totius ab ad totum cd , quàm ablata ae ad ablatum cf : erit & reliqui eb ad reliquum fd major proportio, quàm totius ab ad totum cd .



Quia enim major est ratio ab ad cd , quàm ae ad cf ; α e-

α 23. V.

β 30. V.

rit etiam permutando major ratio ab ad ae , quàm cd ad cf : & per β conversionem rationis minor erit ratio ab ad eb , quàm cd ad fd . Itaq; α permutando, minor erit ratio ab ad cd , quàm eb reliqua ad fd reliquam.

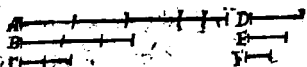
PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 34.

Si

Si sint quotcunq; magnitudines a, b, c , & aliæ ipsis æquales numero d, e, f ; sitq; major proportio primæ a priorum ad primam d posteriorum, quàm secundæ b ad secundam e ; & hæc maior quàm tertiæ c ad tertiam f , & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul, ad omnes posteriores simul maiorem proportionem, quàm omnes priores b, c relictæ primæ a ad omnes posteriores e, f , relictæ quoque primæ d ; minorem autem, quàm primæ priorum a , ad primam posteriorum d ; maiorem deniq; etiam, quàm ultima c priorum ad ultimam f posteriorum.

Quia n. major

est ratio a ad d , 
quàm b ad e ; et i-

am α permutando major est a ad b , quàm d ad e : Et β cõponendo major a, b simul ad b , quàm d , e simul ad e : rursusq; permutando major a, b simul ad d, e simul, quàm b ad e . Itaq; cum a b tota ad d e totam habeat maiorem rationem, quàm ablata b ad ablatam e , & etiam reliqua a ad restam d maiorem rationem habebit, quàm a b tota ad d e totam. Pari modo major erit ratio b

α 27. V.

β 28. V.

γ 33. V.

ade, quàm b c ad ef; ac proinde multo major a ad d, quàm b c ad ef; & α permutando major ratio a ad b c, quàm d ad ef; & β componendo major a b c ad b c, quàm d e f ad ef; & rursus permutando, major omnium simul a b c ad omnes simul d e f, quàm b c ad e f. Quod est primum. Cum igitur totius a b c ad totum d e f sit major ratio, quàm ablati b c ad ablatum e f; erit etiam reliqui a ad reliquum d major, quàm totius a b c ad totum d e f. Quod est secundum. Quia etiam major est ratio b a d e, quàm e a d f; erit α permutando major quoque, b a d c, quàm e a d f; & β componendo major totius b c a d c, quàm totius e f a d f. Cum autem major sit ratio a b c a d d e f, quàm b c a d e f ex demonstratis: multo ergo maior erit ratio omnium a b c ad omnes d e f, quàm ultima c ad ultimam f. Quod est tertium.

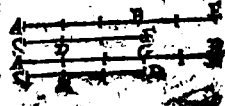
PROPOS. XXXV.

Theorema 35.

Si duabus magnitudinibus a b, c d majoris inæqualitatis aliæ æquales b e, d f addantur; component rationem minorem a e ad c f: Sin æquales demantur b g & d b, relinquent rationem majorem a g ad c b.

Pon4-

Ponatur, ut ab ad cd, ita be ad di: α Erit α 14. V.
 be, b. e. gb major quàm β 8. VI.
 di: β Ideoq; cd ad di mi-
 norem, habebit rationem
 majorẽ, quàm ad df ma-
 jorem. γ Quare etiam ab ad be majorem ra- γ 13. V.
 tionem habebit, quàm cd ad df: δ & componen- δ 28. V.
 do a e ad b e majorem rationem habebit, quàm
 e f ad d f: Sed e revertendo a e ad a b minorem, ϵ 30. V.
 rationem habebit, quàm c f ad c d. Quare ζ per- ζ 27. V.
 mutando a e ad c f minorem rationem habebit,
 quàm ab ad cd. Quod erat propositum. Eo-
 demq; modo altera propositionis pars demonstra-
 tur.



Hinc patet: Data rationi aliam paulò mino-
 rem majoremve dari, æqualis quantitatis addi-
 tione vel subtractione.



E U C L I D I S

E L E M E N T O -

R U M

LIBER VI.

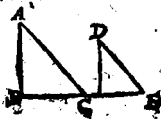
Definitiones.

1.



Similes figuræ rectilineæ sunt abc , ade , quæ & angulos singulos singulis æquales habent a, d ; b, e ; c, f ;

atq; etiam latera quæ circum æquales angulos, proportiona-

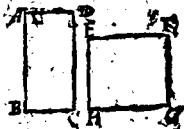


lia, ut ab ad bc ; ita de ad ce . Utraque enim hæc in figurarum similitudine, & æqualitatem angulorum, & proportiona-

lita-

figurate laterum oportet concurrere. In
deoque etiam tantum habet locum in ejus-
dem speciei figuris, circulis & circulis,
quadratis & quadratis, &c.

2. Reciproce figuræ sunt $abcd$ & e
 fgb cum in utraque
figura antecedentes
 ad, bg & consequentes
 eb, bc rationum termi-
ni fuerint. Hic nulla se-
quitur figurarum similitudo.



3. Secundum extremam & medi-
am rationem recta linea secta esse
dicitur, cum ut tota ad majus se-
gmentum; ita majus ad minus se ha-
buerit.

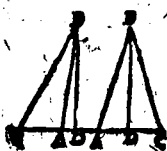
Extrema & mediæ ratione est in ex-
tremum & medium terminum dividi.
Quæ praxis in 30 propos. docebitur & a-
lijs verbis in II. II. est tradita. Ex usu au-
tem maximo in stereometria potissimum,
quod libro 13. constabit, dicta est Divina
hæc proportio.

4. Altitudo bd cujusque figuræ
 abc est linea perpendicularis à verti-

I 5

ce b

cebad basinac deducta. Hinc equē
nta dicuntur figura quarum perpen-



diculares sunt equales,
ita enim etiam consiste-
re possunt intra duas pa-
rallelas sua basi & ver-
tice.

5. Ratio a ad c ex rationibus a ad
b & b ad c componi dicitur, cum rati-
onum a ad b & b ad c quantitates dena-
minatores d ad e & f ad g, inter se mul-
tiplicate d in f & e in g, aliquam effice-
rint rationem a. ad c.



Quantitas rationis est
Denominator proportio-
nis dictus, quod indicet
quanta sit magnitudo an-
tecedens respectu conse-
quentis. Ex duabus ergo
vel pluribus rationibus

componi dicitur ratio quando ipsarum
denominatores inter se multiplicati eam
efficiunt. Ut duodecupla componatur ex
dupla & sextupla, quia denominator
duodecupla proportionis producitur ex
mul-

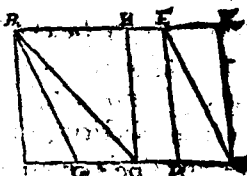
multiplicatione denominatorum dupla 2.
 & sextupla 6. Ideoq; quocunq; magnitu-
 dinibus ordine posita, ratio extremorum
 componitur ex rationibus intermedio-
 rum.

PROPOS: I.

Theorema 1.

Triangula abc , item def paralle-
 logramma $ahdk$, quorum eadem fue-
 rit altitudo, ita se habent inter se,
 ut bases abc ad def , & ah ad dk , ut ac
 ad df .

Esto basis ac du-
 pla ad basin df , & a
 secetur bifariam in g ,
 connect. tur g ad b .
 Erunt Triangula abg ,
 gbc & def æqua-



a 10. I.

lia, & Triangulum abc duplum Trianguli def 38. I.
 videlicet ut basis ac ad basin df , ita Triangu-
 lum abc ad Triangulum def . Quod primum
 est. Ita etiam cum parallelogramma ah & dk
 sint γ dupla Triangulorum abc & def , & erit
 ut abc ad def , ita parall. ah ad parall. dk . 15. V.
 Quare etiam ut basis ac ad basin df , ita pa-
 rall. ah ad parall. dk . Quod est secundum.

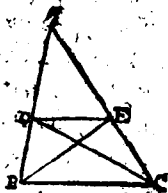
Hinc

Hinc patet Corollarium. Triangula item parallelogramma quæ æquales habent bases, sunt ut altitudines. Si enim bases sumantur pro altitudinibus, tum ex prima hujus patet propositum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si ad unum Trianguli abc latus bc parallela ducta fuerit recta quædam linea de , hæc proportionaliter ut a ad d , ita ae ad ec secabit ipsius Trianguli latera. Et si Trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, de , erit ad reliquum ipsius Trianguli latus bc parallela.



Ducantur rectæ be , cd . Est enim ut a æqualia Triangula dbe & dce ad Triangulū dae , ita bases bd ad da & ce ad ea . Quod est primū. Et rursus: ut basis bd ad basin da , ita be ad ea . Quæ-

æ 37. I.

67. V.

β I. VI.

δ II. V.

d: Quare Triangula bed & ced erunt equalia, & erit d e ipsis b & c parallela: Quod est secundum.

19. V.
§ 39. 1.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si Trianguli abc angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea ad secuerit & basin: basis segmenta bd , ad & dc eandem habebunt rationem; quam reliqua ipsius Trianguli latera ba ad ac . Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem, producitur, bifariam secat Triangulum ipsius angulum.

Per punctum b agatur ipsi ad parallela be , concurrens cum c a producta in e . Quia ergo a sunt equaliter anguli dab & abe ; dac & ec ; erunt quoque his opposita latera ea & ab equalia, Quare But ea , hoc est b ad a & a c, ita b d ad d c. Quod primum. Rursum etiam est, ut b d ad



a ex hy-
pot. & 29.
§ 2. VI.

d c, ita

35. I.

dc, ita b avel ea ad ac; erunt rectæ b a & ea
 y aquales anguli e b a & b a d, e & d a c erunt
 & aequales. Angulus nimirum a bifariam est se-
 ctus per da. Quod erat propositum.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Aequiangulorum a b c, a e f Trian-
 gulorum proportionalia sunt latera,
 ut a b ad d c; ita c d ad d e, ut b c ad c a; ita
 e e ad e d, ut b a ad a c; ita c d ad d e, quæ
 circum æquales angulos, b & d c e, b
 e a & e, a & d, & homologa sunt late-
 ra, a b ad d c, b c ad c e, ac ad d e, quæ æ-
 qualibus angulis b c a & e a & c d, b &
 d c e, subtenduntur.



Sint bases b c & e e Triangula-
 lorum & secundam angulo-
 rum aequalitatem similiter
 positorum, indirectum, &
 concurrant b a & e d productæ
 in f. Quia ergo anguli d c e &
 b, item a c b & e sunt æquales,
 & erunt parallela b f & c d;

item a e & c f, & a c d f parallelogrammum.
 y Erit ergo ut b a ad a f, & hoc est, c d, ita b c ad
 e c; & permittendo ut a b ad b c, ita d c ad c e.

Rursus

æ 28. I.

β 34. I.

γ 2. VI.

δ 7. V.

ε 16. V.

Rursus γ erit etiam, ut bc ad ce , ita f d d hoc
est, a c ad d e, & α permittendo ut b c ad c a, ita
 c c ad e d. Erit ergo etiam ex ζ equali, ut a b ad
 a o, ita c d ad d e.

ζ 22. V.

Corollarium.

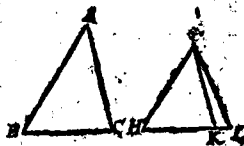
Hinc patet: Recta a c uni laterum. sc. Triang.
gula b f c parallela, auferit Triangulum b a c, η 29. I.
Simile toti b f c η . Aequales enim sint anguli f b c & θ 4. VI.
 a e & c, & b communis. Quare latera b proportionalia & ipsa Triangula similia.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si duo abc b g k Triangula latera pro-
portionalia habeant, ut ab ad bc , ita g
 b ad b k, ut b c ad ca , ita b k ad k g, ut b a
ad ac , ita b g ad g k. æquiangula erunt
Triangula, a & g , b & b , c & k , & æqua-
les habebunt eos angulos, sub quibus
& homologa latera b c ad b k; ac ad g k;
 ab ad gb subtenduntur.

Conversa prece-
dens. Si Triangulo abc
non Triangulum hgk ,
sed hgl esset æquiangu-
lum: a Essent ergo gh



ad hl , & sicut & gh & hk , ut ab ad bc ; & hl β ex hy ,
æquale ipsi hk ; & cum parti. Quod absurdum. por.

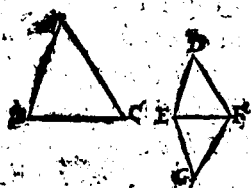
PRO- γ 9. V.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duo abc, def Triangula unum b angulum uni e angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, ut a b ad b c , ita d e ad e f , habuerint: æquiangula erunt Triangula, æqualesque habebunt a & d, c & f angulos, sub quibus homologa bc ad ef , ab ad de , latera subtenduntur.

Eu. 23. l.
 β 32. l.
 γ 4. VI.
 δ ex hypot.
 ε 9. V.
 ζ 4. l.



Ad e f recte puncta
 Et a & f sunt anguli
 æquales angulis b & c .
 β Erunt etiam g æqualis
 a ; & Triangula abc
 & efg æquiangula. γ

Ideoq; ut a b ad b c , ita g e vel d e ad e f ; eruntque g e & d e æquales; & reliqui anguli reliquis angulis, & Triangula abc, def æquiangula.

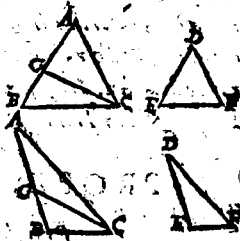
PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si duo abc, def Triangula unum
 æan-

Angulum uni d æqualem, circum autem alios angulos c & f latera proportionalia habeant; ut ac ad cb , ita df ad fe : reliquorum verò simul utrumque b & e aut minorem, aut non minorem recto: *Æquiangula erunt Triangula, & æquales habebunt eos angulos, c & f , circum quos proportionalia sunt latera.*

Eslo primum uterq; tertius angulus b & e acutus. Si abc & def non sunt æquiangula, et fiat angulus agc æqualis angulo e ; B erit ergo bgc obtusus, & ut df ad fe , ita ac ad cg & cb , & sic gc & cb , anguli ad $basin$ gc sunt æquales; obtusus acutus. Quod absurdum. Idem absurdum sequitur, si b & e anguli sint obtusi.



23. l.
 13. l.
 4. VI.
 ex hy-
 pot:
 5. l.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si in Triangulo abc rectangulo, ab angulo a recto in basin bc perpendicu-

K

dictu-

dicularis ad ducta sit: quæ ad perpen-
dicularem Triangula bda & adc tum
toti bac Triangulo, tum ipsa inter se
similia sunt, bda & adc .



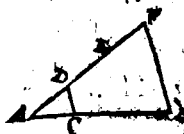
Quia enim bac & bda
rectangula præter angulum
rectum & communem habent
 b , etiam tertius, tertio est
 a aequalis, & Triangula illa sex equiangula, la-
teraq; β habent circa aequales angulos propor-
tionalia, laterum homologia observata, videli-
cet, ut $e b ad ba$, ita $a b ad bd$; & ut $b a ad a c$,
ita $b d ad da$. Itaq; sunt γ similia Triangula.
Eadem etiam Trianguli dac est demonstratio.

α 32. I.
 β 4. VI.
 γ 1. def.
VI.

PROPOSITIO IX.

Problema 1.

A data recta ab linea imperatam
partem auferre ag .



Auferenda sit pars tertia.
Ex a ergo ducatur sub quovis
angulo recta infinita ac , cu
qua auferantur tres aequales
partes ad, de, ef , & f conne-

α 31. I.
 β 2. VI.
 γ 13. V.

ctatur cum b , cui per d agatur α parallela dg . E-
rit ag pars tertia desiderata. Quia enim est, & ut
 $ad ad df$, ita $ag ad gb$; erit γ cõponendo; Ut tota
 a af ad

Et ad partem $a d$; ita data $a b$ ad partem definitam $a g$. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO X.

Problema 2.

Datam $a b$ rectam lineam insectam.
Similiter secare, ut data altera $a c$ recta
secta fuerit in d & e .

Efficiantur due recte

$a b$ & $a c$ angulum

quemcumque a , & ducatur

ch , cui per d & e

agantur parallele $e g$

& df : item per d ipsi $a b$ parallela $d h$. Est ergo

sicut $a d$ ad $d e$, sic $a f$ ad $f g$: item ut $d e$ ad $e c$;

ita $d i$ ad $i h$ & id est, $f g$ ad $g b$: atq; ita $a b$ ipsi

$a c$ similiter secta. Quod erat faciendum.



231. I.

32. VI.

734. I.

PROPOSITIO XI.

Problema 3.

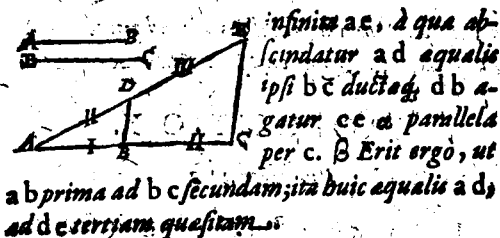
Duabus datis rectis lineis $a b, b c$,
tertiam proportionalem adinvenire.

Datae due recte $a b, b c$ ponantur in dire-
ctione, & quovis angulo $c a c$ ducatur recta

K 2

infi.

α 31. I.
 β 2. VI.



PROPOSITIO XII.

Problema 4.

Tribus datis lineis, quartam pro-
 portionalem invenire.

Data dua ab pri-
 ma, & bc secunda po-
 nantur in directum, &
 quovis angulo cae du-
 catur recta infinita, in
 qua sumatur tertia ad



α 31. I.
 β 2. VI.

ductaq; db parallela ce per c agatur. β Erit ut
 ab prima, ad bc secundam; ita ad tertia, ad
 de quartam quesitam.

PROPOSITIO XIII.

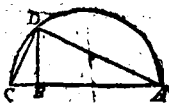
Problema 5.

Duabus ab, bc, datis rectis, mediam
 proportionalem adinvenire.

Data

qua
aqua
d b
aralle
rgo, d
u ad

Data duae rectae $a b, b c$
ponantur in directum, & su-
per tota $a c$ describatur semi-
circulus $a d c$, & erigatur
ex b perpendicularis $b d$, & ducantur $a d, c d$.
Erit ergo $a d c$ in semicirculo rectus: & $d b$ per-
pendicularis efficit duo Triangula $a b d$ & $c b d$
& equiangula, Ideoq; δ proportionalia, Ut $a b$
 $a d b d$, ita $b d a d b c$. Est ergo $b d$ media pro-
portionalis.



α II. I.
 β 31. III.
 γ 8. VI.
 δ 4. VI.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 9.

Aequalium, & unum $a b c$, uni $e b g$
aequalem habentium angulum, pa-
rallelogrammorum, $b d, b f$, recipro-
ca sunt latera, ut $a b a d b g$; ita $e b a d b c$
quæ circum æquales angulos. Et quo-
rum parallelogrammorum $b d b f$ u-
num $a b c$ angulum, uni $e b g$ angulo æ-
qualem habentium, reciproca sunt
latera, quæ circum æquales angulos,
ista sunt æqualia $b d, b f$.

Ponantur anguli æquales ita, ut fiant verti-
cales ad b , & ita in directum erunt $a b, b g$, & $a c, c g$. α 14. I.

K. 3

item



Item bc , & $b'e$ comple-
tuntq; gnomon $a'hc$. Ha-
bentur aequalia parallelog-
 bd & $b'f$ β eandem ra-
tionem ad $b'h$, quam ba-
ses ab ad bg , & $b'e$ ad
 bc , i. e. sunt & reciproca.
Contra sunt latera circum
aequales. angulos ad b re-
ciprocè proportionalia, ut

ab ad bg , ita be ad bc , erunt parall. bd & $b'f$
equalia. Habent enim bd & $b'f$ ad $b'h$ ean-
dem rationem. Ideoq; sunt & equalia.

PROPOSITIO XV.

Theorema. 10.

Aequalium abc , ebg , & unum ebc
uni ebg . aequalem habentium angu-
lum, Triangulorum, reciproca sunt
latera, ut ab ad bg , ita eb ad bc , quæ
circumæquales angulos. Et quorum
Triangulorum abc , ebg , unum angu-
lum abc uni ebg æqualem habentium
reciproca sunt latera, ut ab ad bg ; ita
 eb ad bc , quæ circum æquales angu-
los; illa sunt æqualia.

Demonstratio cum priore, coincidit, quod Pa-
rallelogramma sunt Triangulorum dupla. Rur-
sum

37. V.

71. VI.

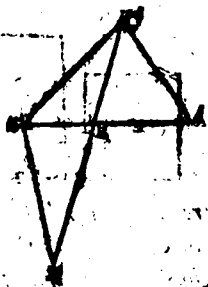
2. def.

VI.

1. VI.

9. V.

sum ergo anguli aequales
 sunt verticales, ut $a b, b g$
 & $c b, b e$ sint a in dire-
 ctum, & ducatur $c g$. Erit
 ut aequalia Triangula $a b$
 e & $c b g$ ad Triangulum
 $c b g$, & ita bases erunt ad
 bases, dnt $a b$ ad $b g$, ita
 $e b$ ad $b c$, id est, recipro-
 ce. Et contra. Lateribus
 data reciproca vel ~~substantia~~, Erit ut aequales ra-
 tiones data basium $a b$ ad $b g$, vel $e b$ ad $b c$, ita
 & triangulum $a c b$, vel $b g c$ ad triangulum $b e g$, s. i. VI.
 Ideo, triangula $a c b$ & $b e g$, erunt & aequalia. § 9. V.
 Quod erat ostendendum.



a 14. I.
 § 7. V.

y i. VI.
 § 8. V.

F
 aequalitas

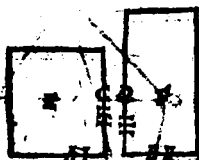
PROPOSITIO XVI.

Theorema II.

Si quatuor rectae lineae a, b, d, c , pro-
 portionales fuerint: ut a ad b ; ita d ad c
 quod sub extremis a & c comprehen-
 ditur rectangulum e , & quale est ei, quod
 sub mediis b & d comprehenditur, re-
 ctangulo f . Et si sub extremis a & c co-
 prehensum rectangulum e & quale fue-
 rit ei f , quod sub mediis b & d continetur,
 rectangulo: illae 4. lineae rectae $a, b,$
 d, c , proport. erunt, ut a ad b , ita d ad c .

K 4

Quia



æ 2. def.

VI.

§14. VI.

Quia enim, 4. datæ rectæ proportionales, ut a ad b , ita d ad c ; ponuntur in duobus rectangulis e & f , circa æquales rectos a reciproca; erunt rectangula e & f æqualia. Et contrà rectangula e & f æqualia habebunt circa æquales angulos latera reciproce proportionalia, ut a ad b , ita d ad c ; & ut a ad d , ita b ad c . Idem de Rhombo & rhomboide verum est in hac & sequenti proportionē.

PROPOSITIO XVII.

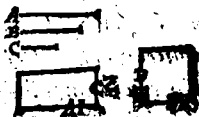
Theorema 12.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: ut a ad b ; ita b ad c ; quod sub extremis a & c comprehenditur rectangulum e , æquale est ei, quod à media b describitur, quadrato f ; Et si sub extremis a & c comprehensum rectangulum e æquale sit ei, quod à media b describitur quadrato e : illæ tres rectæ lineæ a, b, c , proportionales erunt, ut a ad b ; ita b ad c .

Quia

4. du
ales, ut
pon
angul
ales m
erit
ang
ang
m
m

Quia etiam media pro-
portionalis b bis est po-
nenda erunt in prece-
dente propositione 4. re-
cta circum angulos a-
quales rectos a reciproce proportionales. Ideo-
que rectangula β equalia. Et contra, equalia
rectangula circa angulos rectos habent latera
 β reciproce proportionalia, videlicet, ut a ad b,
ita eadem b ad d. Quod erat ostendendum.



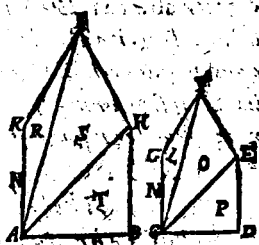
a 2. def.
VI.
 β 4. VI.

PROPOSITIO XIX.

Problema 6.

A data recta ab linea, dato recti-
lineo cde fgm simile similiterque
positum rectilincum abhkn descri-
bere.

Rectilincum da-
tum in resolvatur in
Triangula per lineas
occultas ce, cf, ex eo-
de angulo c. a Fiant
aequales angulis dce
quidem hab, & d
spfi. b; erunt Trian-
gula abh & cde



a 23. I.

K s. C. equi.

34 **EVCLIDIS BLEM:**

23. l.
74 V.

2. ax.

4. V.
22. V.

1. def.
VI.

Si equiangularia & latera proportionalia, ut ec ad cd , ita ha ad ab , atq; ita Triangula similia similiterq; posita (Secundum eundem sicutum quod ad latera & angulos) Ita Triangulo ecf super ah , fiat simile similiterq; positum Triangulum ahi , & erit quadrangulum $abhi$ quadrangulo $cdef$ equiangularum. Ideoq; cum ex similitudine Triangulorum, ex quibus supra facta, sit ec ad cd ut ce ad cf ; ita ab ad ah & ab ad ai . Ergo ex equalitate cd ad cf , ita ab ad ai , latera vimirum circa aequales angulos sunt proportionalia; & ita etiam quadrangulum $abhi$ simile est similiterq; positum quadrangulo $cdef$. Deniq; super ai simile similiterq; positum fiat Triangulo efg Triangulum aik , quod additum quadrangulo efficit pentagonum pentagonum ie equiangularum & simile similiterq; positum. Quia enim rursus ut yc ad ad & cf ad cg ; ita ab ad ai , & ai ad ak ; Ergo ex equalitate cd ad cg , ita ab ad ak ; atq; ita circa reliquos angulos reliqua latera sunt proportionalia; & ipsum simile similiterq; positum Pentagonum. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 13.

1. 2. 3.

Similia abc , def Triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum bc & ef (hoc est quadrata quam refert bc ad tertiam proport. bg).

Lateribus duobus
homologis bc & ef

equatur tertia
proportionalis bg .

Aucaturq; ag . Quia

ergo est bc ut a ad b c , ita d ad e f ; ergo y per-
mutando, ut a ad b ad d , ita b c ad e f ; ita ef ad
 bg videlicet reciprocando circa aequales angu-
las b & e . Itaq; a equalia erunt Triangula abc & def , ad
qua utraq; eadem habet ratio-
nem abc ; eam videlicet a qua est basis bc ad ba-
sin bg , id est abc ad tertiam bg . & dupli-
catam rationem homologorum laterum bc ad
 ef . Itaq; etiam triangula abc & def habi-
bunt rationem duplicatam homologorum la-
terum.

Hinc patet. Si tres b c ef , bg , recte sint pro-
portionales, ut d c ad e f , ad bg , ut est prima;
 bc ad tertiam, ef , ita est Triangulum abc super
primam bc , descriptum ad Triangulum def
super secundam ef simile similiterq; descriptum.
Ita etiam Triangulum super secundam ef ad
Triangulum super tertiam bg .

PROPOSITIO XX.

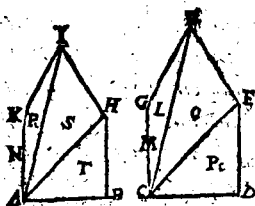
Theorema 14.

Similia polygona m & n in similia tri-
angula dividuntur, l & e , a & p , t &
numero equalia; & homologa totis;
 m & n .



a II. VI.
 β 4. VI.
 γ 1. 6. VI.
 δ ex con-
str.
& II. V.
 ϵ 15. VI.
 ζ 7. V.
 η 1. VI.
 θ 10. def.
 ι V.
 κ II. V.

& polygona duplicatam quadratam,
habent eam rationem inter se quam
latus homologum c ad homologum
latus $a b$.



Ab angulū equalibus c & a ad angulos oppositos f & e h & i , ducantur linee dividentes polygonam & in terena equalia Triangula! op & rs t. Qua

Triangula bina inter se ut p & t , quia circumaequales angulos b & d sunt latera proportionalia, sunt α & β aquiangula & β similia: Ita cum sit, ex similitudine figurarum, e c ad d & d e ad e f ita h a ad h b & h b ad h i , etiam ex aequali sit, ut c e ad e f , ita a h ad h i , latera circa residuos aequales angulos ex toto h ipsi e equali; α & β erunt o & s Triangula aquiangula & quē similia ac p & t . Ita deniq; α & β aequē similia sunt l & r ut p & t . Cum ergo sint in ratione duplicata p & t , & o & s & communium laterum homologorum c e , ad a h . Item ut o & s , sunt etiam l & r in ratione duplicata communium homologorum laterum c f & a i ; erunt etiam, ut p ad t , ita l ad r , & o ad s . Ideoque etiam ita ut m ad n , ut p ad t , d est, Triangula similia sunt etiam

α 6. VI.

β 1. def.

VI.

γ 22. V.

etiam homologa ipsis polygonis; Proindeque ipsa etiam polygona in duplicata ratione laterum homologorum videlicet, cd ad ab . Quod erat propositum.

Hinc sequitur.

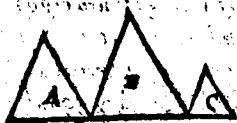
Si tres rectæ sint proportionales, ut est prima ad tertiam, ita est figura super primam descripta, ad figuram, super secundam similem similiterque descriptam: Et ita figura super secundam descripta, ad figuram super tertiam similem similiterque descriptam.

PROPOSITIO XXI.

Theorema III.

Quæ eidem a & b rectilineo c sunt similia, & inter se a ipsi b sunt similia.

Quia enim utrumque a & b est simile tertio c , eidem erit a æqui angulū, & ita b inter se e-



runt æqui angulæ, & habebuntque circa æquales angulos latera proportionalia, & inter se erunt d similia. Quod erat propositum.

PRO.

Rob. 157

at. def. VI

Si. l. 1. c. 1

y. 4. VI.

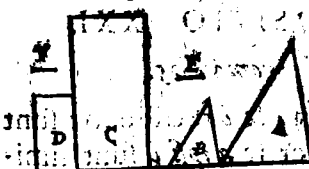
d. i. def.

VI.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOS: XXII.

Theorema 16.

Si 4. rectæ proportionales fuerint, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam, & ab eis rectilinea similia similiterq; descripta, proportionalia erunt, ut a ad b, ita c ad d. Et si a rectis lineis similia similiterq; descripta proportionalia fuerint rectilinea, ut a ad b, ita c ad d, præteriam rectæ lineæ proportionales erunt, prima ad secundam, ut tertia ad quartam.



Quæstat pri-
ma & secundam
tertia propor-
tionalis e, item
tertia & quan-
ta, tertia pro-

port f. Aequalium ergo rationum prima ad se-
cundam, & tertia ad quartam, etiam duplica-
ta rationes a prima ad e, & tertia ad f: & a
ad b & c ad d y æquales erunt.

Deinde, sunt figuræ a similes ut a ad b, ita c ad
d, & duplicata ratione homologorum laterum
eadem, ut prima ad e, ita tertia ad f, erunt eti-
am dimidiata rationes eadem, ut prima ad se-
cundam, ita tertia ad quartam. Quod erat
propositum.

10. def.
V.
39. V.
20. VI.
7. 6. ax.
10. 11.
IV

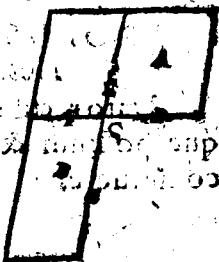
PROPOSITIO XXIII.

I. 4. 3

Theorema 17.

Aequiangula ad verticem c , parallelogramma $a d c$ & b inter se habent rationem eam, quæ ex lateribus componitur.

Compleatur parallelogrammum k . Quia eorum parallelogrammorum a ad b ratio componitur ex inæquimedys, a ad h , & h ad b , quibus β eadem sunt rationes laterum d ad f & e ad g : Itaq; ex his γ rationibus laterum composita erit ratio a ad b . Quod erat propositum.



a 5. def.

VI.

β 1. VI.

γ 4. V.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 18.

In omni parallelogrammo, $b d$, quæ circa diametrum $a c$ sunt parallelogramma $g e$, & $f b$ & totum $b d$ & inter se sunt similia.



(Diagonale est, quod & angulos & diagonem habet communem cum toto)

æ æquales sunt ang. a i g

& d a i, e i h & i c f; Itē anguli g a i, a i e, f i c & i c h

q. am.

a 19. E

C34. I.

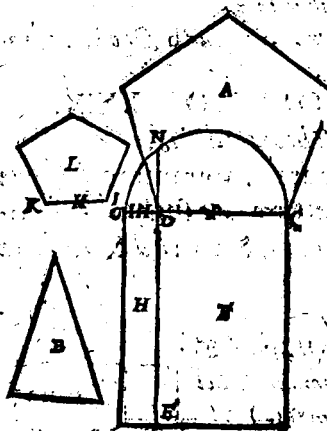
Anguli item, e, g, h, f; ideoq; 4. illa Triangula sunt equiangula, & latera habent circum aequales angulos & proportionalia, ut a e ad c i, ita i h ad h c, & ut a g ad g i, ita i f ad f c. Sunt ergo Diagonales & inter se & tota similia.

7 4. VI.

PROPOSITIO XXV.

Problema 7.

Dato rectilineo, simile, similiterque possum & alteridato aequale constitueret



244. V.

45. I.

Dato rectilineo a cui construendum est simile ad lat9 e d sub angulo quovis e d e & applicetur parallel9 grammum & aequale; rursusq; ad huius latera d e sub angulo contiguo & applicetur parall

h a.

In aequale rectilineo b , cui aequale est construendum. Inter cd & dg quantur media proportionalis dn vel ik , super qua rectilineo a simile rectilineum l y construatur, quod erit aequale ipsi b . Quia enim est, ut prima cd ad tertiam dg , ita f ad h , sive est, a ad b , & a ad l ; etiam ex n equali est l aequale ipsi b , quod etiam est constructum simile ipsi a . Quod erat faciendum.

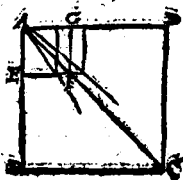
β 13. V.
 γ 18. VI.
 δ 1. VI.
 ex costr.
 & 7. V.
 ζ 11. V.
 η 22. V.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 19.

Si a parallelogrammo bd parallelogrammum ablatum sit eg , & simile toti & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum ac consistit.

Si quis ei dicat diagonale, & erit illud simile toti bd . Itaque β ut b a ad ad ; ita ea ad ag y & ai equalia partem & totum. Quod absurdum. Igitur non ei, sed eg est diagonale. Quod erat demonstrandum.

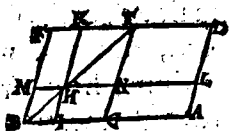


α 24. VI.
 ζ 1. def.
 VI.
 γ 9. V.

PROPOS. XXVII.

Theorema 20.

Omniunt ac , ab parallelogrammorum ad eandem rectam ab applicatorum, deficientiumq; parallelogrammis cf & im similibus similiterq; positis, ei ae quod à dimidia ac describitur; maximum id est ae , quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum simile existens defectui im .



Ad data ab dimidiam ac quocumq; constituitur parallelogrammum ae , & à completo parallelogrammo $a f$ deficiat $a e$ simili parall. cf , dico $a e$ esse maximum applicatorum secundum rectum ab , deficientiumq; parallelog. similibus.

Postea enim ducatur Diagonus be in qua servatur ubicumq; punctum h , per quod ipsae ab & bf agantur parallelae lm & ki . Erit ah deficiens parallelogr. & simili im minus $a e$ vel cf . Quia enim complementa ch & hf sunt γ equalia, erit nf vel nd majus, quam ch , additoq; communi an , erit $a e$ totum majus toto ah . Quod erat propositum.

P R O.

a 14. VI.

B 43. I.

Y 34. I.

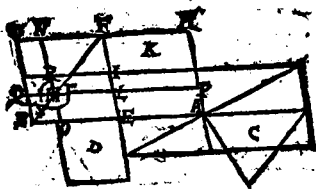
S 36. I.

S 9. ax.

PROPOSITIO XXIX.

Problema 8.

Ad datam lineam ab rectam, dato rectilineo c æquale parallelogrammum c applicare, deficiens figura parallelogramma d , quæ similis sit alteri parallelogrammo dato d . Oportet autem datum rectilineum c , cui æquale applicandum est, non majus esse eo af , quod ad dimidium applicatur, cum similes fuerint defectus & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus cui simile eg & og deesse debet.



Super dimidia ab , fiat parallelogrammum eg simile d , compleatur ag & ducatur fg . Si c æquale fuerit parallelogrammo af vel eg , factum est 18 . VI. est, quod jubet propositio. Sin minus & a sit minus af , sum excessui k & construat æquale paral 325 . VI.

γ 26. VI. *parallelog. ipsi e g vel d simile similiterq; positū
yeritq; In ex e g secundum communē angulum
allatum diagonale ipsius e g, Completa tota figu-
ra ponq; Dico a m ipsi c aequale esse.*

δ ex cōstr.

ε 3. ax.

ζ 43. & 36.

I.

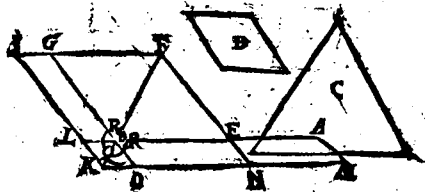
η 24. VI.

*Ablatis enim ab δ aequalibus a f & c g, δ a-
qualibus k & l n, ē relinquitur a i vel rectiline-
um c aequale gnomoni r s t; vel ζ buic aequali pa-
rallelo grammo a m, quod desinit parallelogram-
mo o q n simili similiterq; posito ipsi e g vel dato
d. Quod erat faciendum.*

PROPOSITIO XIX.

Problema 9.

*Ad datam rectam a b, dato rectili-
neo c, æquale parallelogrammum in l
applicare, excedens parallelogram-
mo o l, quod simile similiterq; situm,
sit alteri dato d.*



α 18. VI.

β 25. VI.

*Ad data a b dimidiam c b applicetur a parall.
e g; simile similiterq; situm dato d. Deinde ε fiat,
parall.*

parallelogrammum ni aequale duobus rectilineis
 $c\&eg$, simile vero eidem $c\&eg$; erit $c\&eg$ diagon-
 nale γ ipsius ni; inventa nimirum recta si ponatur homologa lateri fg , & compleatur figura ak
 ge . Dico ml aequale esse ipsi c .

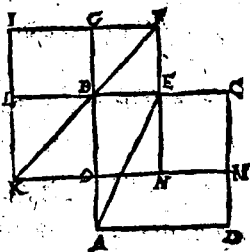
Aequalia enim erunt rectilineo c gnomon d & ex cōstr.
 pgr & parallelog. ml , quod excedit datam ab 36. & 43.
 parallelogrammo ol , simili similiterq; sito, ipsi I. & 2. ax.
 $c\&eg$, sive dato d . Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 10.

Propositam rectam ab lineam
 terminatam extrema, ac media ratio-
 ne secare.

A data ab a de-
 scribatur quadran-
 gulum bd , cui ad re-
 ctam cb applicetur
 β aequale parallelogr.
 ml excedens ipsam
 cb similiter quadra-
 to ol (super dimidia
 nimirum b , e con-



a 46. I.
 β 29. VI.

struatur quadratum eg , & ducatur ea , qua erit
 iatus quadrati fk , quod quadratis duobus bd &
 $c\&eg$ est

γ 47. I.

e g est γ aequale. Ideoq; ipsi e a sit similis si ho-
mologa lateri fg, & compleatur Figura, fin D
Dico ab sectam esse proportionaliter.

δ 3. ax.

ε 17. VI.

ζ 3. def.

VI.

Si enim ab aequalibus b d & l m auferatur
commune m b, d relinquetur rectangulum d o
sub tota a d sive a b & segmento a o comprehen-
sum aequale quadrato o l facto a segmento o b.
Ideoq; tres recta a b, b o & o a sunt & proportio-
nales, adeoq; a b in o secta secundum mediam
& extremam rationem. Quod erat faciendum.



In praxi commodissime
adhibetur II. II. ut ad da-
tam ab ad punctum b eri-
gatur perpendicularis a-
qualis b c, qua secetur aequaliter in e, interval-
loq; e a ponatur aequalis e l, & ipsi b l aequalis
b o, erit o sectio ipsius a b.

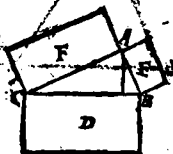
PROPOSITIO XXXI.

Theorema 21.

In rectangulis a b c triangulis, fi-
gura d quævis, à latere b c rectum an-
gulum b a c subtendente descripta, æ-
qualis est figuris e, & f, quæ priori illi
similes, & similiter posita, à lateri-
bus

bus ab & ac rectum angulum continentibus describuntur.

Quia enim bis terna sunt
 a proportionales bc, ba, bg ;
 β bc, ca, cg : erit ut bc ad
 bg ita d ad βe , item ut bc
 ad $c g$, ita d ad f . Est autem
 $recta$ bc equalis ipsis bg &
 gc simul sumtis: Ideoque & figura d equalis erit
 $figuris$ e & f simul sumtis. Quod erat ostenden-
 dum.



α 8. VI.
 β cor. 20.
 VI.

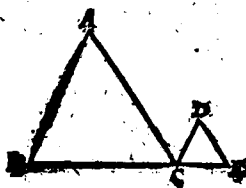
PROPOSITIO XXXII.

Theorema 22.

Si duo triangula, abc, dec quæ duo
 latera duobus lateribus proportiona-
 lia habeant, ut ba ad bc , ita cd ad de se-
 cundum unum angulum acd com-
 posita fuerint, ita ut homologa eo-
 rum latera sint etiam parallela ba &
 cd, ac & de : tum reliqua illorum tri-
 angulorum latera bc & cd in rectam
 lineam collocata reperiuntur.

Quia

α 29. I.
 β 6. VI.



γ 2. IX.
 δ 32. I.
 ϵ 14. I.

Quia enim aequali
 sunt anguli α alterni
 acd , d & a ; β erunt
 Triangula aequiangula
 & dce & b aequales;
 quibus adduntur aequa-
 les alterni acd & a ,
 erit totus ace duobus b & a aequalis; rursusque
 addito communi acb , γ erunt duo acb & ace
 tribus trianguli abc angulis, hoc est, duobus δ
 rectis aequales. Ideoque bases bc , ce erunt in
 e directum seu linea una bc . Quod erat ostend-
 endum.

PROPOSITIO XXXIII.

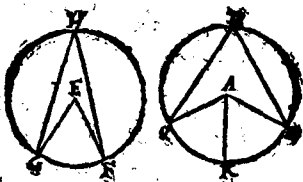
Theorema 23.

In æqualibus circulis, anguli ean-
 dem habent rationem cum periphc-
 riis bc & fg , quibus insunt, sive ad
 centra bac , feg , sive ad peripherias
 bdc , fbg constituti insistant: Insuper
 verò & sectores bca & fge , quippe
 qui ad centra consistunt.

α 30. III.
 β 27. III.
 γ 4. V.

Sit enim duplus arcus bc ipsius fg , & bca se-
 cetur bisariam in f per rectam ak : Erunt anguli
 bak , kac , feg aequales; ideoque totus bac duplus
 anguli feg , γ hoc est, ut arcus bc ad arcum fg ;

ita angulus ad
centrum b i a c
ad alium f e
g. Quia vero
hic ad centrum
est duplus est pro-
portionalis sunt



anguli ad peripheriam d e h. rursus erit: ut. d 20. III.
arcus b c ad arcum f g, ita angulus d ad angulum e 15. V.
h. Denique, sectores b k a, k c a, f g a sibi mutuo est. II. V.
congruentes erunt nequales, ideoque, e sector b c ne 8. ax.
a duplus erit sectoris f g e, id est, e sector ad se-
ctorem est, ut arcus b c ad arcum f g. 94 def. V

Corollarium. 1.

Ut angulus ad angulum, sic sector
ad sectorem.

ne II. V.

Corollarium. 2.

Vt angulus in centro ad 4. rectos;
ita arcus eidem angulo subtensus
ad totam peripheriam scil. 4. rectos
subtendentem.

233. VI.



E U C L I D I S

ELEMENTO- RUM

LIBER VII.

Definitiones.

1.



Nitas est , secundum
quam unumquodque
eorum , quæ sunt , u-
num dicitur. *Ita secun-*
dum unitatem, unam dici-
mus ulnam, unum corpus, &c. Hac
indivisibilis esse concipitur, ut & pun-
ctum.

2. Numerus autem ex unitatibus
composita multitudo. *Ita 7. ex septem*
unita-

unitatibus seu partibus constat. *Qua earundem partium ut unitatum participatio facit, ut omnes numeri sint inter se commensurabiles. Quod magnitudinibus negatum est.*

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur maiorem. Ita 5 est numeri 20 pars, quae tamen denominationem habet ab eo, per quem metitur numerum, cuius est pars, ut 5 est pars quarta 20, quia metitur illud per 4.

4. Partes autem, cum non metitur. Si nimirum minor maiorem non metiatur, ut 5 numerum 18 tum ipsius non pars sed partes dicitur, quia continet quinque unitates quae singulae sunt decimae octavae partes numeri 18.

Nomen partium est ex illis numeris, per quos communis mensura utrumque metitur, ut cum 3 metiatur 6 partes 6 cuius non est partes per 2 & 3. senarius dicitur duae tertiae partes novenarii. Euclides partes retinuit in magnitudinibus lib. V. quia non quaelibet magnitudo alterius inequalis vel
pars

*pars vel partes est, quia saepe sunt incom-
mensurabiles.*

5. Multiplex verò major minoris,
cum maiorem metitur minor. Ta-
lis est omnis qui partes habet aliquotas,
Vt 9. multiplex est 3.

6. Par numerus est, qui bifariam di-
viditur. Ut 24.

7. Impar verò qui bifariam non di-
viditur; vel qui unitate differt à pari:
Ut 3. 5. 7. Vnde indivisibilem hic intelligi
debere unitatem constat, alias quilibet
numerus esset par. Ut 3. haberet dimidi-
um $\frac{1}{2}$ unitatem cum semisse.

8. Pariter par numerus est, quem
par numerus metitur per numerum
parem; Ut 24. est pariter par, quia 4.
cum metitur per 6. parem.

9. Pariter autem impar est, quem
par numerus metitur per imparem:
Vt 24. etiam est pariter impar quia 8,
metitur, illum per 3. imparem. Ideoq. mul-
ti sunt numeri, qui & pariter partes &
pariter impares sunt.

10. Impariter verò impar nume-
rus

rus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem. *Ut 21. metitur 3. per 7.*

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur. *Tales sunt, qui nec pariter nec impariter pares vel impares possunt dici, ut 2. 5. 7.*

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas communis mensura metitur. *Etiam intelliguntur numeri, qui per se primi non sunt, modo ut inter se præter unitatem nullam habeant communem mensuram, ut 7. 10. 15. sunt inter se primi.*

13. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur. *Sic 15. est compositus numerus, quia illum 3. 5. 3. metiuntur. Omnes primi præter binarium sunt impares 3. omnes pares præter binarium compositi.*

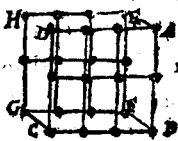
14. Compositi autem inter se sunt numeri, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur. *Etiam de ijs accipitur, qui per se compositi non sunt, ut 7. 14. 21. quia 7. eos metitur.*

15. Nu-

15. Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis: *Ut 4. dicetur multiplicare 5, si quinarium fuerit quater compositus, quot in 4. sunt unitates, &c. Inde constat productum habere ad alterum multiplicantium eandem rationem quam alter ad unitatem, quia toties continet, quot alter continet unitates. Ut ratio 20 ad 5 est eadem, quadrupla, quæ 4. ad 1.*

16. Cum autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur. *Possunt enim ita procreati numeri disponi in formam parallelogrammi rectanguli, cuius latera respondent numeris inter se multiplicatis. Ita 12 est numerus planus, quia ex ductu 3 in 4 nascitur. Reliqua pene infinita planorum numerorum genera hic in Euclide nullius usus praterimus.*

17. Cum verò tres numeri mutuò se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur. Qui autem numeri mutuò se multiplicarint, latera illius dicentur.

Ut 1, 2, 4 efficiunt 8. numerum solidum, cujus basis b f 1 latitudo est, longitudo b c 4 cui alia basis similis e^s aequalis superposita facit, ut totus numerus habent 8 e^s altitudo a b duas unitates. Unitas improprie e^s planus e^s solidus numerus appellari solet, e^s quad e^s ex duabus unitatibus e^s tribus inter se multiplicatis producat.

18. Quadratus numerus est; qui æqualiter æqualis, vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur. Vt 16. est numerus quadratus, cujus dispositio refert accuratum quadratum cujus radix est quaternarius.

19. Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur. Sic 8 est cubus, cujus dispositio refert

refert accuratum cubum, cujus longitudo, latitudo & altitudo vel latera sint æqualia, ex quarum multiplicatione numerus producitur.

20. Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: vel certè cum primus secundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemque insuper illius partem vel easdem partes. *Vi* $\frac{6}{3} \frac{8}{4}$ numeri sunt proportionales, quia primus secundi æquè duplus est, ac tertius quarti, & rursus primus secundi æquè dimidiū est ac tertius, quarti. Ita 5. 4. 10. 8. sunt proportionales, quia primus æquè secundum continet semel cum $\frac{1}{2}$ ac tertius quartum.

21. Similes plani & solidi sunt, qui proportionalia habent latera. Cum unius planus numerus possit varijs modis disponi, non requiritur, ut in omnibus modis illa reperiatur laterum proportio, sed sufficit, ut uno queat modo.

ita

Ita similes sunt plani 6. & 24. quia laterum 2. ad 3. & 4. ad 6. eadem est proportio, etiamsi 3. ad 8. in alia dispositione non habeant eandem. Similiter 92 & 24. sunt similes solidi, quia 8. 6. 4. eandem proportionem habent, quam 4. 3. 2.

22. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis. Loquitur de parte aliquota, de qua & tertia definitio, alias omnes numeri essent perfecti summi secundum quartam definitionem partium. Ut 6. est numerus perfectus, quia ipsius partes aliquotæ 1. 2. 3. simul sumptæ illum restituunt; ita 28. & 496. Illi in quibus partes aliquotæ simul sunt maiores, dicuntur abundantes; Diminuti, in quibus sunt minores. Ad has Euclideas definitiones addit Clavius ex Campano sequentes:

23. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans; vel à quo multiplicatus illum producit. Sic 2. metitur 14. per 7. quia 2. multiplicatus per 7. producit 14.

24. Proportio numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex vel pars, partesve; vel certè illum continet semel aut aliquoties & aliquam insuper illius partem vel partes. *Sic si numerus 24 comparatur cum 6 ea ratione qua ipse multiplex est, nimirum quadruplus, diceretur illa habitudo proportio.*

25. Termini, sive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportionem nequeunt summi minores.

26. Cum tres numeri proportionales fuerint; primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; primus ad quartum, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad secundum: & semper deinceps uno amplius, quam diu proportio extiterit. *In 10. def. V. dicebantur eadem de magnitudinibus.*

27. Quot.

27. Quotlibet numeris ordine positus, proportio primi ad ultimum, componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio. *Eadem in def. 5. VI. fuerunt declarata. Ex V. vero etiam libro possunt peti argumentorum forma, qua etiam hoc VII. in numeris demonstrantur.*

POSTULATA.

I.

Postuletur, cuilibet numero posse quotlibet sumi æquales vel multiples:

II.

Quolibet numero posse sumi majorem; *Quia additione unitatis numerus in infinitum augeri potest.*

M 2

AXIO.

AXIOMATA.

I.

Qui numeri æqualium numero-
rum, vel ejusdem æquè multiplices
sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè
multiplex est, vel æquè multiplices
sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

Qui numeri æqualium numero-
rum vel ejusdem eadem pars, vel ead-
em partes fuerint, æquales inter se
sunt.

IV.

Quorum idem numerus, vel æ-
quales, eadem pars vel eadem partes
fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Unitas omnem numerum per uni-
tates, quæ in ipso sunt, hoc est, per
ipsummet numerum metitur. *Quia*
unitas toties sumpta, quot in ipso sunt uni-
tates, ipsum numerum constituit.

Omnis

VI.

Omnis numerus se ipsum metitur per unitatem. *Semenim sumtus numerus quilibet, sibi ipsi est equalis.*

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem,

IIX.

Si numerus numerum metiatur, & ille per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem. *Ut quia 3 metitur 12 per 4 metietur etiam eundem 12 4 per 3.*

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet. *Ut 3 metiens 12*

M 3 per

per 4, multiplicatus per 4 producit 12 quem metitur.

X.

Numerus quocunque numeros metiens, compositum quoq; ex ipsis metitur. Ut quia 3 metitur 6 & 9: Ideoque 3 metitur 15 ex 6 & 9 compositum.

XI.

Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoq; omnem numerum, quem ille metitur. Ut quia 3 metitur 6 qui metitur 12 Ideoque etiam 3 metitur 12.

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur etiam reliquum. Ut quia 3 metitur 6 & 15 totum 6 & 9 ablatum, ergo etiam metitur reliquum 6.

PRO.

PROPOS. I.

Theorema 1.

Si duobus numeris ab , cd inæqualibus propositis, detrahatur semper minor cd de maiore ab , altera quadam detractioe cd ex ab , eb ex cd ; fd ex eb , neque reliquus eb unquam metiatur præcedentem c , d , quoad assumpta sit unitas gb ; qui principio propositi sunt numeri, ab & cd primi inter se erunt.

A.....E..G.B
C...F..D
H....

Sin minus, metietur eos numerus, seu communis mensura ut h. Cum itaque h & metiatur cd ex hy ab & cd ; cd vero metiatur ae , etiam h & ae & eb γ reliquum metietur. Cumque eb & metiatur cf , etiam eb γ metitur cf & ipsius γ reliquum fd . Cum denique fd & metiatur eg etiam h metitur eg & ipsius reliquum γ gb unitatem numerus seu totum suam partem.

M 4

Quod

Quod absurdum. Sunt ergo inter se primi, Quod erat propositum.

PROPOSITIO II.

Problema 1.

IN duobus numeris $a b$, $c d$ datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram $f d$ invenire.

A.....E.....B

C.....E.....D

G---.

Detrahatur minor $c d$ ex maiore $a b$ & residuum $e b$ ex minore $c d$ & ita alternatim procedendo propositum perveniat ad numerum $f d$, qui precedentem $e b$ metiatur. Erit $f d$ ex hyp. communis mensura maxima. Cum enim $f d$ a metiatur $e b$, & $e b$ ipsum c etiam $f d$ metietur $c f$; Cumq; & seipsum, etiam totum $c d$ metietur. Metitur autem $c d$ ipsum $a e$, ergo & $f d$ eundem $a e$, & cum etiam $e b$ metiatur, totum quoq; $a b$, & ita utrumq; $a b$, $c d$ metietur.

Quod si quis etiam maximam hanc communem mensuram esse neget, esto g major quam $f d$. Cum ergo g metiatur & $a b$ & $c d$; $c d$ verò ipsum

ipsum ac ; itaq; $\&$ eb residuum: $\&$ cum e b metiatur c f , etiam g metietur c f $\&$ residuum fd , major minorem, quod absurdum.

Hinc patet Corollarium. Quod numerus metiens duos numeros etiam communem eorum maximam mensuram metiatur. Si enim totum $\&$ ablatum metiatur, metitur etiam reliquum, quod communis est mensura maxima.

PROPOS: IIL

Problema 2.

Tribus numeris a b c , datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram vel reperire.

A.....

B..... D....

C..... E... F....

Si d α inventa communis mensura a $\&$ b etiam metiatur c erit maxima communis mensura inventa. Si enim major quadam sit quam d , eadem cum metiatur a , b , c β etiam communem mensuram d metitur, major minore. Quod absurdum. Quod si d non metiatur c erunt inter se compositi. Proinde cum eadem mensura

α 2. VII.

β ax. 2. VII.

M 5

com-

E cor. 2.

VII.

a 2. VII.

commensuris que a, b, c metitur, etiam c metiatur d maximam mensuram a & b , α erit c mensura communis ipsius d & c , etiam communis maxima mensura numerorum a, b, c . Quia enim c metitur c & d , d vero a & b , α metietur etiam c ipsos a & b . Ceterum quod maxima communis mensura sit c patet, si aliam f esse velimus: Tum enim f metiens a & b , β metiretur etiam d eorum communem mensuram: & cum metiatur d & c , etiam horum communem mensuram c metiretur. Non igitur esset haec major. Atque ita c est communis mensura maxima trium numerorum a, b, c . Quod erat faciendum.

Vnde nascitur Corollarium, quod numerus metiens tres numeros, communem etiam illorum mensuram metiatur.

PROPOS: IV.

Theorema. 2.

Omnis numerus omnis numeri minor a , majoris b , aut pars est, aut partes.

A.....

B.....

A.....

B.....

A.....

B.....

C...

Si a & b sint inter se primi, minoris a unitates erunt partes maioris b . Si sint compositi, & a metiatur b , a erit ipsius pars. Si a non metiatur b , sed c , β sit communis eorum mensura, quoties numerum c continet b , tot partes continere dicitur b numeri a . Sic patet propositum.

a 3. def.
VII.
C 2. VII.

PROPOS: V.

Theorema 3.

Si numerus a numeri bc pars fuerit, & alter d alterius e eadem pars: & simul uterque a & d , utriusque bc & e simul eadem pars erit, quæ unus a unius bc .

A.....

D....

B..... G..... C E.... H.... F

Quia enim eadem pars est a ipsius bc , quæ d ipsius e , continebit bc tot a , i. e bg & gc , quot d id est eh , hf continet e . Itaque quot numeri a sunt in bc totidem numeri a & d simul sunt in bc & e simul.

PROPOSITIO. VI.

Theorema 4.

Si numerus a b numerus c partes fuerit,

rit, & alter *de* alterius *fe* eadem partes:
& simul uterque utriusque *ab* & *de*, *c*
& *f* simul eadem partes erit, quæ u-
nus unius *ab* ipsius *c*.

A...G,...B | D...H....E
C..... | F.....

25.VI.

Cum *a* *quales* *numero* *partes* *habeant* *ab* & *de*, *qua* *pars* *est* *a* *g* *ipsius* *c* & *d* *ipsius* *f*, *ea-*
dem *a* *erunt* *a* *g* & *d* *ipsorum* *c* & *f*. *Similiter*
prioribus *aquales* *gb* & *he*. *Itaq;* *utroq;* *ab* &
de *ipsorum* *c* *fe* eadem *partes* *erit*, *qua* *unus* *ab*
unius *c*. *Quod* *erat* *ostendendum*.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si *numerus* *a* *h* *numeri* *c* *d* *pars* *fue-*
rit, *qualis* *ablatus* *a* *e* *ablati* *cf*: *etiam*
reliqui *se* *b* *reliqui* *fd* *eadem* *parr* *e-*
rit, *qualis* *totus* *a* *b* *totius* *cd*.

A....E...B

C....C.....F....D

Si *postetur* *e* *b* *numeri* *g* *c* *eadem* *pars*, *qua*
est *ae*

est $a e$ ipsius $c f$ vel $a b$ ipsius $c d$ & erit uterq; $a e$, $a 5$. VII.
 $e b$ simul eadem pars utriusq; $g c$ & $c f$, id est,
 qua totius $a b$ totius $c d$. Cum ergo $a b$ sit eadem
 pars utriusq; $g f$ & $c d$, erunt numeri aequales, a
 quibus ablato communis $c f$, relinquuntur $g c$ &
 $f d$ aequales. Itaq; eadem pars est $e b$ ipsius $f d$.
 qua $a b$ ipsius $c d$. Quod erat propositum.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si numerus $a b$ numeris $c d$ partes
 fuerit, quales ablati $a e$ ablati $c f$: &
 reliquus $e b$ reliqui $f d$ eadem partes
 erit, quales totus $a b$ totius $c d$.

A.....E.....B
 G.....C.....F.....D

Assumpto $g e$, cuius eadem partes sit $e b$, ac $a e$
 ipsum $c f$, & erit uterq; $a e$, $e b$ simul utriusq; $c f$ $a 7$. VII.
 & $g c$ eadem partes, qua $a e$ ipsius $c f$ vel $a b$
 ipsius $c d$, ideoq; $a b$ utriusq; $c d$ & $g f$ eadem
 partes erit, & $f g$, $c d$ erunt aequales; communi-
 que adempto $c f$, $g c$ & $f d$ aequales erunt. Qua-
 propter $e b$ etiam ipsius $f d$ erit eadem partes
 qua totus $a b$ totius $c d$. Quod erat proposi-
 tum.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si numerus *a* numeri *b c* pars fuerit, & alter *d* alterius *e f*, eadem pars: & vicissim, quæ pars est, aut partes primus *a* tertij *d*, eadem pars erit, vel eadem partes & secundus *b c* quarte *e f*.

A....

B....G....C

D.....

E.....H.....F

Divisis *b c* & *e f* in partes *b g*, *g c*, & *e h*, *h f* æquales ipsis *a* & *d*, erit multitudo partium numerorum *b c* & *e f* æqualis. Cumq; æquales inter se *b g*, *g c*, sint minores ipsis *e h*, *h f* inter se æqualibus, quia totus *b c* ponitur minor toto *e f*: erit *b g* ipsius *e h* eadem pars aut partes, quæ *g c* ipsius *h f*. & Itaq; uterq; *b g*, *g c* simul, id est, *b c* secundus utriusq; *e h*, *h f* simul, id est, *e f* quartæ eadem pars vel partes erit, quæ *b g* ipsius *e h*, id est, quæ a primi ipsius *d* tertij. Quod erat propositum.

in 5. v. 6.

VII.

PRO-

PROPOSITIO X.

Theorema 3.

Si numerus ab numeric partes fuerit, & alter de alterius f eadem partes: & vicissim, quæ partes est primus ab , tertij de aut pars; eadem partes erit & secundus c , quarti f ; aut pars.

A..G..B

C.....

D..... H.....E

F.....

Divisis ab & de in partes ag, gb & dh, he numerorum c & f : erit multitudo partium ab & de equalis & tam ag quam gb eadem pars numeric, quæ tam dh quam he numeri f . Itaq; & vicissim eadem pars vel partes, erit ag ipsius dh & gb ipsius he , quæ c ipsius f est: ac propterea eadem pars vel partes erit ag ipsius dh , quæ gb ipsius he , & adeoq; uterq; ag, gb simul, utriusq; dh, he simul eadem pars vel partes erit, quæ ag ipsius dh , id est, quæ c ipsius f . Quod erat demonstrandum.

a 9. VII.

E 5. v 6. 1

VII.

PROPOSITIO XI.

Theorema 9.

Si fuerit ut totus ab ad totum c d
ita

ira ablatuſ *ae* ad ablatum *cf*: Et reli-
quuſ *eb* ad reliquum *fd* erit, ut totuſ
ab ad totum *cd*.

A.....E.....B
C.....F...D

20. dcf.
VII.

Quia enim proportionales ſunt *ab* ad *cd* ut
a e ad *c* *f*, *a* erit primuſ *ab* ſecunduſ *cd*, ut ter-
tiuſ *a* e quartuſ *c* *f*, vel a què multiplex vel eadem
pars, aut partes, vel continet æqualiter cum ali-
qua parte vel partibus. Cum ergò *c* *f* eadem
pars ſit *ae*, quæ *cd* ipſiuſ *ab*, igitur & reliquuſ
fd reliqui *eb* eadem pars erit, quæ totuſ *cd* co-
tinuſ *ab*. Eritq; ut totuſ *ab*, ad totum *cd*, ita
reliquuſ *eb* ad reliquum *fd*.

7. v. 8.
VII.

PROPOSITIO XII.

Theorema 10.

Si ſint quotcunque numeri pro-
portionales ut *a* ad *b*, ita *c* ad *d* & *e* ad
f, erit quemadmodum unuſ *a* ante-
cedentiuſ, da unum conſequenti-
um *b*, ita omneſ antecedenteſ *a* *c* *e* ad
omneſ conſequentieſ *b* *d* *f*.

Quia

A....C...E...

B.....D....F.....

Quia enim a vel multiplex est vel eadem pars vel partes a ipsius b quæ c ipsius d & e ipsius f ; Erit & a c simul æquæ b d simul æquæ multiplex, eadem pars vel partes, quæ a ipsius b vel e ipsius f . Sic & a c tanquam unus & e simul, amborum b d tanquam unus & f simul æquæ multiplices erunt vel eadem pars aut partes, quæ a ipsius b . Itaq; & omnium a c e simul eadem est proportio ad omnes c , d , f simul; quæ a ad b . Quod erat propositum.

a 20. def.

VII.

35. v. 6.

VII.

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Si quatuor numeri proportionales sint: ut a ad b , ita c ad d ; & vicissim proportionales erunt, ut a ad c , ita b ad d .

A...C.....

B....D.....

Propter eandem proportionem a ipsius b & c ipsius d eadem pars aut partes vel æquæ multiplex a est. Itaq; vicissim a ipsius c & b ipsius d vel

a 20. def.

VI.

39 v. 10.

VII.

d vel eadem pars aut partes vel aequè multiplex
erit, α atq; ideo ut a ad c ita b ad d . Quod erat
propositum.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Si sint quotcunque numeri $a b c$,
& alii $d e f$ illis æquales multitudine,
qui bini sumantur & in eadem ratio-
ne ut a ad b , ita d ad e & ut b ad c , ita e ad
 f : etiam ex æqualitate in eadem ra-
tione erunt ut a ad c ita d ad f .

A..... D.....

B. E.....

C... F..

α 13. VII.
 β ex hyp.

Quia enim est, ut a ad b , ita d ad e ; etiam
 α vicissim erit ut a ad d , ita b ad e , & ob β ratio-
nem eandem b ad e , ut c ad f . itaq; ut a ad d , ita
 c ad f , & α vicissim ut a ad c , ita d ad f . Quod
erat propositum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si

Si unitas a numerum bc quem-
piam metiatur, æquè autem àltèr d
numerus alterum ef quendam nu-
merum metiatur: & vicissim æquè
unitas a , tertium numerum d metietur,
& secundus b c quartum ef .

A.

D.

B. G. H. C.

E. I. K. F

Diviso b c in unitates bg, gh, hc , & ef in
partes ei, ik, kf , ipsi d æquales; æqualis sit mul-
titudine unitatum numeri bc , multitudini parti-
um numeri, ef , & a unitas æquè metitur nume-
rū d , ac bg ipsum ei ; gh , ipsum ik & hc ipsum
 kf . Ideoq; unitas a & erit eadem pars numeri d ,
qua totus bc , totius ef ; ac proinde a numerum
 d & bc numerum ef æquè metitur. Quod erat
ostendendum.

a 5. VII.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo numeri a , & b sese mutuo
multiplicantes fecerint d & aliquos;
geniti d & c ex ipsis æquales inter se
erunt.

N 2

E.

E.

A...

B....

C.....

D.....

α 15. def.
 VII.
 β 15. VII.

Sumta unitate e, cum a multiplicans b faciat c, α erit c ex b toties compositus, quot in a sunt unitates, & unitas e numerum a, & b numerum c aequè metitur; Ergo β vicissim unitas e numerum b, & a numerum c aequè metitur. Rursus quia b multiplicans a facit d, α erit d ex a toties compositus, quot in b sunt unitates, & c aequè metietur b ac a ipsum d. Ideoq, β vicissim e numerum a, & b numerum d aequè metitur. a igitur metitur aequè & d & c, qui proinde sunt inter se aequales. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 15.

Si numerus a duos numeros b & c multiplicans fecerit aliquos d & e; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut b ad c, ita d ad e quam multiplicati.

F.

F.

A...

B.. C....

D..... E.....

Assumta unitate f, erit d ex b compositus toties, quoties unitas f est in a: similiterq, toties e compositus ex c, quoties unitas eadem est in eadom a. Itaq, b ipsum d & c ipsum e aequè metitur. Quare b ipfius d & c ipfius e eadem pars est, & a fit, ut b ad d, ita c ad e, & permuted, ut b ad c, ita d ad e. Quod erat ostendendum.

a 20. def.
VII.
§ 13. VII.

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Si duo numeri *a* & *b* quempiam numerum *c* multiplicantes, fecerint aliquos *d* & *e*: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ut *a* ad *b*, ita *d* ad *e*, quam multiplicantes.

A....B....

C...

D.....E.....

Cam enim ex a in c fiat d, idem a fiat ex

a 16. VII.

N 3 c in

§ 17. VII.

c in a. Eodem modo cum ex b in c fiat e, idem a fiat ex c in b. Quoniam igitur idem c multiplicans ipsos a & b facit d & e, erit ut a ad b ita d ad e.

PROPOS. XIX.

Theorema 17.

Si quatuor a, b, c, d numeri proportionales fuerint ut a ad b, ita c ad d, qui ex primo a & quarto d fit numerus e, æqualis erit ei, qui, ex secundo b & tertio c fit numero f. Et si qui ex primo a & quarto fit, numerus e æqualis fuerit ei, qui ex secundo b & tertio c fit numero f; ipsi 4 numeri proportionales erunt ut a ad b, ita c ad d.

A...

B..

C.....

D.....

E.....

F.....

G.....

§ 17. VII. Fiat g ex a in c. Quia idem a multiplicans d & c fecit e & g, a erit c ad d, ut g ad e. Erat autem

tem a ad b , ut c ad d : Est igitur e ad a ut b ad c . Rursus, quia a & b multiplicantes idem c faciunt f & g , β erit ut a ad b , ita g ad f . Erunt etiam g ad e , ut a ad b . Ergo e & f sunt γ a. γ 9. V. quales.

Sint jam æquales e & f , Eruntque illi numeri proportionales. Quia enim a multiplicans c & d facit g & e erit, ut c ad d , ita g ad e vel f ipsæ æqualem. Rursus cum a & b multiplicantes c faciant g & f , β erit a ad b , ut g ad f . Quare ad eandem proportionem g & f eadem a & b ; c & d erunt eadem. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si tres numeri a , b , c , proportionales fuerint, ut a ad b , ita b ad c , qui sub extremis a & c continetur; æqualis est ei, qui à medio b efficitur: Et si qui sub extremis a & c , continetur æqualis fuerit ei, qui à medio b describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt ut a ad b , ita b ad c .

A.....

B.....D.....

C....

Sumto d equali b , erit ut b ad c , hoc est, ut
 a 19. VII, a ad b ; ita d ad c , a eritq; numerus ex a in c a-
 qualis numero ex b in d , hoc est ex b in seipsum.

Sit jam etiam productus ex b in seipsum a-
 qualis producto ex a in c , erunt tres numeri pro-
 portionales. Rursum enim assumto d equali ipsi
 b erit ut b ad c ita d ad c . Quia ergo numerus
 factus ex a primo in c quartum aqualis est facto
 ex b secundo in d tertium, a erunt 4 numeri a b
 d c proportionales. Sed b est idem cum d . Quod
 erat propositum.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Minimi numeri ab , cd omnium e
 & f eandem cum eis rationem ha-
 bentium, ut ab ad cd , ita e ad f , meti-
 untur æque numeros, eandem cum
 eis rationem habentes, major ab ,
 quidem majorem e , minor verò cd
 minorem f .

A...

A...G..B

C..H.D

E.....

F.....

Cum enim sit ab ad cd , ut e ad f ; etiam a vicissim est ab ad e , ut c ad f ; & cum ab, cd sint minores ipsis e & f , β erit ab ipsius e , & cd ipsius f eadem pars vel partes. Sed partes esse non possunt. Divisis enim ab & cd , si fieri potest in partes a, g, gb & c, h, hd , quae multitudine erunt aequales, atque ideo a ipsius e , & ch ipsius f eadem pars. β Erit ergo, ut a ad e , ita ch ad f , & a vicissim ut a ad ch , ita e ad f , vel ab ad cd : ac proinde numeri a, g, ch , minores quam a, b, c, d eandem quam ab, cd minimi illius proportionis, habebunt rationem. Quod absurdum.

α 13. VII
 β 20. def.
 VI

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres numeri, a, b, t , & alij ipsis multitudine aequales, d, e, f , qui bini sumantur, & in eadem ratione; fuerit autem perturbata eorum proportio; ut a ad b , ita e ad f , & ut b

N 5 $ad c$

a d c, ita d a d e; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt ut a a d c, ita d a d f.

A..... D....
B..... E.....
C..... F....

¶ 19. VII

Cum enim sit, ut a ad b ita c ad f, a erit numerus ex a in f genitus equalis numero ex b in c; Ita ex b in c factus equalis erit ex c in d procreatus, cum sit, ut b a d c, ita d a d e; adeoque numerus ex a primo in f quartum productus numero ex c secundo in d tertium genitus equalis erit. Quare ut a a d c ita d a d f. Quod ostendendum erat.

PROPOSITIO XXIII

Theorema 21.

Primi inter se numeri a & b minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

A..... B.....
C..... D.....
E.....

Sin minus, sint c, d in eadem proportionem ipse

ipsis a, b minores minimi a . Metietur ergo c α 21. VII.
 ipsum a , & d ipsum b aequè; c videlicet ipsum a
 per tot unitates. per quas d metitur ipsum b .

Quæ unitates sint in e . Cum ergo c & d meti- β 25. VII.
 antur a & b per e unitates, β metietur e ipsos a
 & b per unitates ipsorum c & d . Idem enim
 e per c , quod c per e efficit. Itaque a & b contra
 hypotbesin non erunt primi, sed compositi.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Minimi a, b numeri omnium ean-
 dem cum eis rationem habentium,
 primi inter se sunt.

A.....B.....
 D....E....

Sin minus, esto communis ipsorum men-
 sura c . Itaque quoties c est in a & b tot erunt u- α 9. 21.
 nitates in d & e . & c α multiplicans d & e pro- β 28. VII.
 ducit a & b . Proinde est a ad b ut d ad e . Adeo-
 que cum d & e partes ipsorum a & b minores
 sint, a & b non sunt minimi in eadem ratione.
 Quod est contra hypotbesin.

PROQ-

Theorema 23.

Si duo numeri a, b primi inter se fuerint; qui unum a eorum metitur numerus c , ad reliquum b primus erit.

A.....B.....

C..... D.....

Sin minus, esto communis eorum mensura d. Quia ergo d metitur c, & ipsam a, etiam d a metitur a. Cumq; idem d metiatur etiam b. Non igitur a & b erunt inter se primi contra hypothesin.

II. ax.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Si duo numeri a, b ad quempiam c primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem c primus erit.

A.....B.....

C.....

D.....

E.....F.....

Sin minus esto communis ipsorum mensura d, qua

qua d metiatur toties, quot in f sunt unitates.
Itaq; c multiplicans f a producit d. Sic d est fa-
ctus ex a in b. Ergo cum ex e primo in f quar-
tum fiat idem numerus d, qui ex a secundo in b
tertiam, β erit ut e ad a, ita b ad f. Cumq; a & c
sint primi, & c ponatur metiri ipsum c, γ erit e
ad a primus; adeoq; e & a tanquam primi in
sua proportione d erunt minimi. Proinde a quē
s metientur b & f eandem proportionem ha-
bentes, e ipsum b & a ipsum f; Et e metiens b
& c faciet illos contra hypothesein compositos.

 α 9. az. β 19. VII. γ 25. VII. δ 23. VII. ϵ 21. VII.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si duo numeri a & b primi inter
se fuerint: Etiam ex uno a eorum ge-
nitus d ad reliquum b primus erit

A....B.....

C.....

D....

Sumto d ipsi a aequali, erit d ad b primus.
Quia ergo a & d ad b sunt primi, α erit c geni-
tus ex a in d, id est, ex a in seipsum ad eundem
b primus. Similiter ex b in se genitus ostenditur
primus ad a.

 α 20. VII.

PRO

PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Si duo numeri a & b ad duos numeros c & d , uterque ad utrumque, primi fuerint, qui ex eis e & f gignentur, primi inter se erunt.

A.....B...

E.....

C....D..

F.....

26.VII.

Ex a in b fiat c & ex e in d fiat f , erant e & f , inter se primi. Cum enim uterq; a & b ad c sit primus, genitus ex ipsis ad eandem c primus a erit; & ita etiam e ad d primus e erit. Quia ergo uterq; c & d ad e est primus, etiam f ex ipsis genitus ad e primus e erit.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si duo a & b numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem, & geniti ex ipsis

ipsis c & d primi inter se erunt: Et si, qui in principio a & b genitos c & d ipsos multiplicantes, fecerint aliquos e & f ; & hi quoque primi inter se erunt: & semper circa extremos hoc eveniet.

A...

B...

C.....

D....

E.....F.....

G 81

H 16

I 243

K 32

Cum enim a , b sint inter se primi, a erit c ex a in se factus ad reliquum b primus: Sic etiam d factus ex b in se erit ad c primus quia b & c sunt inter se primi, adeoque duo facti c d inter se primi. Rursus, quia b & a inter se sunt primi, erit c ex a in se factus, ad b , & d genitus ex b in se ad a primus: Est autem c ad d primus. Vterque igitur a c ad utrumque b d primus erit, & e factus ex a in c primus ad f factum ex b in d . Ita si ex a in e fiat g , & ex b in f fiat h , erunt g & h primi. Item si ex a in g & ex b in h fiant i & k , erunt & ipsi primi; idemque circa extremos semper eveniet.

C27. VII.

PRO.

PROPOS: XXX.

Theorema 28.

Si duo numeri ab, bc primi inter se fuerint: Etiam uterque simul ac ad quem libet illorum ab vel bc primus erit: & si uterque simul ac ad unum aliquem illorum ab primus fuerit; etiam qui in principio, ab & bc ; numeri primi inter se erunt.

A..... B..... C
D,---

ax. 12.

ax. 10.

Si ac ad bc non est primus, metiatur eos communis mensura d . Quia ergo d metitur ac totum & ab ablatum, etiam a metitur reliquum bc . Ideoque ab, bc contra hypotesin non sunt primi. Similiter si ac sit primus ad ab , dico etiam ab, bc esse primos inter se. Sin minus mensor communis d metiens ab & bc , etiam a ex ipsis compositum β metietur. Ideoque contra hypotesin a c a b primi non erunt.

Hinc patet Corollarium; Si numerus metitur duos numeros, metitur etiam ex illis compositum.

VI

Ut quia d metitur ab a & b c etiam metitur ex illis compositum $a c$.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Omnis primus numerus a ad omnem numerum b , quem non metitur, primus est.

A.....B.....

C.....

Si minus, esto communis mensur c. c ergo metiens a & b non potest esse idem cum a , qui non metitur b . Proinde cum alius numerus c metiatur ipsum a , non potest esse primus contra hypothesis.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 30.

Si duo numeri a & b sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem c ; genitum c autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus d : is etiam unum eorum, a vel b , qui in principio metietur.

O

A...

A.... B.....

C.....

D...E.....

α 19. VII.
β 23. VII.
γ 21. VII.

Si d non metiatur a, erunt d & a primi.
Sint autem in e tot unitates, quoties d continetur
in c. Itaque d multiplicans e producit c ut & a
multiplicans b, & est ut d ad a, ita b ad e. Cumq;
d ad a sit primus, ut supra patet, β erunt d & a
in sua proportione minimi, & aequè γ metientur
ipso b & e. Proinde si d non metitur ipsum a,
metitur ipsum b. Idem inferretur de a si d non
metiretur b.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Omnem compositum numerum
a aliquis numerus metitur.

A.....

B..... C...

α II. axio.

Si b metiens a esset primus, pateret propo-
situm. Sed cum sit compositus, metitur ipsum c,
qui vel primus, vel compositus est. Si primus, ipse
metiens b α metitur etiam a. Sin compositus,
alius ipsum metiens esset primus. Quia oportet

tan-

tandem venire ad numerum primum nisi infinite diminui numeros posse statuerimus.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 22.

Omnis a numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

C.....

Cum enim omnis numerus sit vel primus ; a vel compositus : compositum autem omnem metiatur primus. Igitur omnis numerus primus est, aut eum primus metitur. a 31. VII.

PROPOSITIO XXXV.

Problema 3.

Numeris datis quocunque a, b, c , reperire minimos omnium, eandem rationem habentium cum ipsis sive sc a ad b , ut b ad c , sive non.

A..... B.... C.....

D..

E.. F.. G....

H---, I--- K----

L-----

O 2

Si a ,

α 21. VII.

β 3. VII.

γ 1. 5. VII.

Si a, b, c essent primi, α pateret propositum. Si non primi, β inveniatur mensur eorum maximus d , qui ipsos a, b, c , metiatur per e, f, g , quos in eadem ratione minimos dico. Cum enim e, f, g multiplicantes eundem d producant a, b, c , eos in γ eadem ratione esse oportet. Si autem e, f, g ne gentur minimi, ipsis minores in eadem ratione sint h, i, k , qui ipsos a, b, c æquè metientur per l , & vicissim l ipsos a, b, c per h, i, k . Ideo l multiplicans h, i, k producit a, b, c & l metitur a, b, c per h, i, k . Cum ergo eundem a producant e primus multiplicans d , quartum; & h secundus multiplicans l tertium, derit ut e primus, ad h secundum; ita l tertius, ad d quartum. Sed e major est quam h , igitur & l major est quam d ; adeo l metiente ipsos a, b, c , non erit d communis maxima mensura contra hypotbesin.

δ 19. VII.

Hinc patet maximam mensuram quolibet numerorum metiri ipsos per numeros in eadem proportionem minimos.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 4.

Duobus numeris a & b datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum c .

A..

A.... B.....

C.....

D.....

E----- F----

Si a & b dati sunt primi, ex ipsorum inter se multiplicatione factus c est minimus omnium, quos a & b metiuntur. Cum enim c factus sit ex a in b, patet, quod a ipsum c per b, & b ipsum c per a a metiantur. Si quis autem c neget etiam minimum, metiantur a & b alium d minorem ipso c, per e & f. Cum ergo idem d fiat ex a primo in e quartum, & ex b secundo in f tertium, & erit ut a ad b, ita f ad e; adeoque a & b tanquam primi & in sua proportionem minimi a què d metientur ipsos f & e. Quoniam verò & multiplicans b & e facit c & d, & erit c ad d, ut b ad e: ac propterea cum b metiatur ipsum e, metietur & c ipsum d, major minorem. Quod absurdum.

α 7. axio.

β 19. VII.

γ 23. VII.

δ 21. VII.

ε 17. VII.

A.... B.....

C.. D...

E.....

G----- H----

Deinde dati numeri a & b non sint primi: § 35. VII.
 & § inveniantur c, d in eadem proportionem mini-

mi, & erunt 4 numeri proportionales, ex quorum primo a & quarto d fiet idem e qui ex b secundo in c tertium; eritque factus e minimus quem a & b metiuntur. Cum enim e ex a in d , & ex b in c sit factus, utrumque a & b ipsum e metiri constat. Si quis minimum eum esse negaverit, esto f minor ipso e , quem metiantur a & b per g & h . Cum ergo idem f fiat ex a primo in g quartum, & b secundo in h tertium. Perit ut a ad b ita h ad g , adeoque c & d minimi in proportionem a ad b , vel h ad g , & metientur ipsos h & g aequè. Quoniam verò a multiplicans d & g facit e & f , & erit e ad f , ut d ad g ; ac propterea cum d ipsum g metiatur, metietur & e ipsum f , major minorem. Quod absurdum.

Hinc patet Corollarium. Si duo numeri a & b multiplicent minimos c & d eandem rationem habentes, major b minorem c , & minor a maiorem d producitur minimus e , quem illi metiuntur.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 33.

Si duo numeri a & b numerum quempiam c & d metiantur: Et jam minimus

nimus & quem illi metiuntur, a, b , eundem c, d metietur.

A...B...

C.....F-----D

E.....

Sin minus, auferatur e ex c, d quoties potest, & relinquitur f, d minor ipso e . Cum itaq, tam a quam b metiatur ipsum e , & e ipsum c, f , a metietur etiam tum a tum b ipsum c, f : adeoq, a & b metientes & c, d totum & c, f ablatum, etiam b metientur reliquum f, d . Sed f, d est minor, quam e . Non igitur e est minimus quem a & b metiuntur, contra hypotbesin.

a. 11. axio.

b. 12. axio.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema 5.

Tribus numeris a, b, c datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum d .

A...B....C.....

D.....

E-----

a. Invento d minimo, quem a & b metiantur, eundem etiam c vel metietur c vel non. Si metiatur, factum est quod jubebatur. Si, d non sit minimus, minor ipso fiat e, quem a b c metiantur.

a. 36. VII.

337. VII.

Quoniam igitur a & b metiuntur e , & d est minimus, quem a & b metiuntur, β metietur quoque ipsum e major minorem. Quod est absurdum.

A...B...C....

D.....

E.....

F.....

y II. VII.

Deinde, si c non metiatur ipsum d , α invento e numero, quem c & d metiantur, erit e numerus minimus, quem a, b, c metiuntur. Cum enim a & b metiantur ipsum d , & d ipsum e , etiam a & b ipsum e metientur, metitur autem & c eundem e . Ergo omnes a, b, c ipsum e metiuntur.

Si c non esset minimus, minor ipso sit f quem a, b, c metiantur. Quia igitur a & b ipsum f metiuntur, β metietur etiam eundem f numerus d , adeoque cum c & d metiantur ipsum f minorem, quam e , non erit e minimus, quem c & d metiuntur. Quod est contra hypotesin.

Hinc nascitur Corollarium: Si tres a, b, c , numeri numerum quempiam f metiantur, etiam minimum e , quem illi metiuntur, eundem f metiri.

In ultima enim parte demonstrationis ostensum

sum est ex eo, quod a, b, c donebantur metiri i-
psum f ; etiam c minimum, quem a, b, c metiun-
tur, eundem f metiri.

PROPOSITIO. XXXIX.

Theorema 34.

Si numerum a numerus b quis-
piam metiatur; ille a , quem metitur,
partem habebit à dimetiente b de-
nominatam.

A.....

B.....C...

Quoties b metitur a , tot sint in c unitates.
Quia ergò b ipsum a metitur per unitates ipsius
 c , idem c a metietur a per unitates b . Itaq; uni-
tas toties metitur b , quoties c ipsum a . Sed uni-
tas b metitur b per partem à b denominatam;
Ergò c metitur a per partem à metiente b de-
nominatam. Quod erat propositum.

a 15. VII.

b 23. def.

VII

PROPOS: XL.

Theorema 35.

Si numerus a partem q habuerit

O s quam-

quamlibet; metietur illum a numerus c a parte b denominatus.

A.....

B...C....

α 15. VII. Cum enim pars b denominetur à c ; sit autem & unitas pars ipsius c , ab eodem c denominata; metietur unitas ipsum c & b ipsum a aequè. Vicissim ergo & unitas ipsum b ; & c ipsum a metietur.

PROPOSITIO XLI.

Problema 9.

Numerum g reperire, qui minimus cum sit, habeat partes datas a, b, c .

D..... A secunda

E..... B tertia.

F..... C quarta

G.....

H.....

α 38. VII.

ϵ 39. VII.

γ 40. VII.

Numeri à partibus a, b, c denominati sint d, e, f , qui minimum suum g a metiantur. Erit hic minimus partes datas continens. Partes quidem habet: Cum enim d, e, f ipsum g metiantur, β habebit g partes à d, e, f denominatas, hoc est, a, b, c , quæ à d, e, f denominantur. Si autem minimus non sit, est h minor habeas eundem partes a, b, c .

^a, b, c. Has ergo cum habeat, y metientur ipsam d, e, & numeri, à partibus illis denominati: adeoq; cum h sit minor, non erit g minimus quem d, e, & metientur contra hypotbesin.



E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

LIBER IIX.

PROPOS: I.

Theorema I.



Ifuerint quocunque numeri *a, b, c, d*, deinceps proportionales, extremi verò *a* & *d* ipsorum primi inter se fuerint, ipsi minimi sunt omnium, eandem cum eis rationem habentium.

Sin

A.....	E.....
B.....	F.....
C.....	G.....
D.....	H.....

*Sin minus, sint in eadem ratione minores e f
g h. Quod ergo ipsis a, b, c, d binis in eadem
a 14. VII. ratione sumti sunt alij e, f, g, h multitudine a.
β 23. VII. quales, ex equali a erit, ut a ad d, ita e ad h. Sed
γ 21. VII. a & d sunt in sua ratione e minimi quia primi.
Ergo tam a ipsum e, quam d ipsum h γ aequè
metietur, major minorem. Quod absurdum.*

PROPOSITIO II.

Problema I.

*Numeros e de reperire deinceps
proportionales minimos, quot cun-
que jusserit quispiam in data ratione
a ad b.*

A, 2.	C, 4.	F, 8.	K, 16.
B, 3.	D, 6.	G, 12.	L, 24.
	E, 9.	H, 18.	M, 36.
		I, 27.	N, 54.
			O, 81.

Tres

Tres ita inveniuntur a multiplicans seipsum
 & b; producit c & d; b in se tertium e. Quia
 ergo ex a in a & b facti sunt c & d. α 17. VII.
 ergo est, ut a ad b, ita c ad d. Ita cum d & e sint ex b in a
 & b erit, ut a ad b, ita d ad e. Sunt itaq; con-
 tinuè proportionales in ratione a ad b, Sed mi-
 nim etiam sunt in ratione eadem Quia enim
 extremi c & e facti sunt ex β primis a & b in se- β 24 VII.
 ipsos etiam c, e γ erunt inter se primi & in ea- γ 29 VII.
 dem ratione minimi. Iam ex a in inventos c, d, δ I. IIX.
 e fiant f, g, h & ex b in ultimum e fiat i. Erunt
 quatuor f, g, h, i in ratione data minimi. Quia
 enim f, g, h, ex a in c, d, e, sunt facti & retinent ϵ 18. VII.
 eandem rationem; & quia a & b multiplican-
 tes e fecerunt h & i, erunt etiam h i in ratione
 a ad b. Sunt verò etiam minimi ex modò data
 ratione. Non aliter ex a in f, g, h, i sunt k, l, m,
 n, & ex b in l ultimus o, ut sint quinq; continuè
 proportionales in ratione a, b proposita. Et
 consequenter quotcunq; sex, 7, 8 vel 9. & c. con-
 tinuè proportionales in ratione proposita pos-
 sunt inveniri. Hinc sequuntur Corollaria.

Corollarium i.

Si tres minimi numeri sint con-
 tinuè proportionales, extremi erunt
 quadrati: Si autem quatuor fuerint,
 cubi. Quia extremi illi tria sunt
 ex

ex ductu a & b in se: Extremi verò
 ipsorum quatuor fiunt ex ductu radi-
 cum a & b in quadratos e & f . Quare
 f & e inaccessum est esse cubos.

Corollarium 2.

Extremi numeri quotcunque
 proportionalium, ex hujus propor-
 tionis sensu inventorum in data ra-
 tione minimorū, inter se sunt primi.
 Hoc patet ex multiplicatione, qua
 numeri proportionales producuntur
 ex 29. VII.

Corollarium 3.

Duo numeri minimi in data ratio-
 ne metiuntur omnes medios quot-
 cunque minimorum in eadem rati-
 one. Producentur enim ex illorum
 multiplicatione in alios numeros.

PROPOS: III.

Theorema 2.

Si sint quotcunque numeri de-
 inceps proportionales a, b, c, d . mini-
 mi omnium, eandem cum eis ratio-
 nem

habentium; illorum extremi a, d , sunt inter se primi.

A, 8.

K, 8.

B, 12. E, 2. G, 4. L, 12.

C, 18. F, 3. H, 6. M, 18.

D, 27. I, 9. N, 27.

Inventis duobus in data ratione a ad b vel b ad c , vel c ad d . minimis e, f . & in eadem ratione c ad f a tribus minimis g, h, i , & quatuor ejusdem rationis k, l, m, n , & ita si opus foret, etiam quinq; vel sex, donec respondeant multitudine initio propositis a, b, c, d . Quoniam ergo a, b, c, d , & k, l, m, n , sunt minimis data ratione, oportet ut singuli singulis sint aequales, a ipsi k & d ipsi n . Cumq; k & n sint inter se primi, etiam a, d inter se primi erunt.

a 2.IIX.

32.col.2
IIX.

PROPOSITIO VI

Problema 2.

Rationibus datis quocunque a ad b , c ad d in minimis numeris, reperire numeros f, e, g , deinceps minimos in datis rationibus.

Pro

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.

H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.

I. . . . K. . . . L. . . .

36. VII. Pro tribus a inveniatur e minimus, quem b secundus & c tertius metiuntur: & quoties b metitur e, toties a ipsum f, & quoties e eundem e, toties d metiatur g. Erum f, e, g continue proportionales in rationibus datis. Quia enim a & b ipsos f & e aequè metiuntur, per eundem h, etiam a & b multiplicantes h producant f & e: & c est, ut a ad b, ita f ad e. Ita cum c & d aequè metiantur ipsos e & g c erit etiam, ut c ad d, ita e ad g; adeoq; f, e, g in rationibus a ad b & c ad d sunt continue proportionales.

37. VII. Quod si ydem negentur esse minimi, minores sint i, k, l. Quia ergo a & b sunt minimi, in sua ratione, y aequè metientur ipsos i & k, in eadem ratione constitutos consequens b ipsum k, consequentem: Sic etiam c & d ipsos k & l, antecedens c antecedentem k. Itaq; cum b & c metiantur ipsum k, minimus e quem b & c metiuntur, aundem k, major minorem d metietur. Quod absurdum.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.

Deinde

Deinde trium rationum datarum a ad b, c ad d, e ad f quatuor minimi deinceps proportionales inveniantur. Primo quidem g. a minimus, quem b & c metiuntur, & simul h & k ut prius. Quod si e metitur ipsum i, toties etiam f metiatur k, erunt g, h, g, i, k minimi in rationibus datis iisdem fundamentis ut prius.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.

H, 24. G, 20. I, 15.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

Si e non metiatur i, a invento minimo k, quem e & i metiantur, quoties i ipsum k, g ipsum l & h ipsum m; & quoties e ipsum k, toties f ipsum n metiatur. Erunt m, l, k, n minimi in rationibus datis ex eadem demonstratione.

Deniq, 4 rationum datarum in numeris minimis inveniantur quinq, directe proportionales, expeditis primum, juxta præcedentem modum, qua pro quatuor erant facienda; & deniq, cum ratione quartæ a d t fiat, ut antea cum tertia. Ut in exemplis patet, in quorum priore s metiatur n; in posteriore non.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 4. S, 3. T, 2.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.

M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

P

PRO-

PROPOSITIO V.

Theorema 3.

Plani numeri a & b rationem inter se habent ex lateribus compositam $ad e$, & d ad f ; vel ex c ad f , & d ad e .

A, 24. B, 48.

G, 18.

C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

A, 24. B, 48.

G, 96.

C, 4. D, 6. F, 16. F, 3.

α 17. VII. Et multiplicatione d in e fiat g . Cum ergo d multiplicans c & e producat a & g , a erit a ad g , ut c ad e ; & g ad b , ut d ad f , quia c in d & fillos producit. Sunt ergo deinceps proportionales a, g, b in laterum c ad e , & d ad f proportionibus. Sed ratio a ad b componitur ex rationibus a ad g , & g ad b , Ergo & ex rationibus laterum c ad e , & d ad f . Eodem modo ostenditur a ad b ratio composita ex rationibus c ad f , & d ad e .

PRO-

PROPOS. VI.

Theorema 4.

Si sint quotcunque numeri a, b, c, d, e , deinceps proportionales, primus, a autem secundum b non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

F, 4. G, 6. H, 9.

Quia enim eadem duorum proximorum sunt rationes, patet, si primus secundum non metiatur, quod nec secundus tertium & hic quartum, & hic quintum possit metiri. Quod verò nec quisquam quemquam reliquorum metiatur, ita patet. α Sumtis enim f, g, h minimis in α 2. VIII. a , ad b ratione; erit exaquo, ut a ad c , ita f ad h . Cumq; sit etiam ut a ad b , ita f ad g , Ergo f non e & a non metiatur b ; Ergo nec f metiatur g , & proinde non est unitas. Quare cum f & h β sint primi, f non metitur h , adeoq; nec a ipsum c . β 1. VIII. Quod ipsum de reliquis etiam demonstratur.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si sint quotcunq; numeri a, b, c, d, e

P 2

de-

deinceps proportionales, primus autem a extremum e metiatur; is a etiam metietur secundum b .

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

a 6. VIII. Si enim a non metiretur b neq; a metiretur aliorum quenquam, atq; ita nec a ipsum e , contra hypotbesin.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si inter duos numeros a, b , medii, c, d continua proportionē ceciderint; quot inter eos medii continua proportionē cadunt numeri: tot & inter alios e, f eandem cum illis habentes rationem medii, l, m , continua proportionē cadent.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.

G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.

E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.

G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.

E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.

G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.

E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

a Sumtis enim totidem g, h, i, k in ratione
a ad c minimis, ex aquo est, ut a ad b , & e ad f ,
 ita g ad k . Cum g, g & k inter se sint primi tan-
 quam extremi minimorum & in sua ratione β
 minimi, & aequè metietur, g ipsum e , & k ipsum
 f . Quoties autem g & k , metiuntur e & f , to-
 ties metiantur h & i alios l & m . Itaq; cum $g, h,$
 i, k , per eundem numerum metiantur e, l, m, f ,
 erunt hi producti ab illo numero d in g, h, i, k , in
 eadem cum ipsis ratione. Sunt autem g, h, i, k
 continuè proportionales. Ergo & e, l, m, f . Et
 cum multitudine sint pares numeris a, c, d, b , ca-
 dent tot medij inter e & f , quot inter a & b .

α 2. VII.
 β 23. VII.
 γ 21. VII.

δ 18. VII.

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si duo numeri a, b sint inter se
 primi, & inter eos medij, c, d , conti-

R 3

nua

nua proportione occiderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrumq; eorum a & b , ac unitatem g , medie g , & f , continua proportione cadent.

				K, 8.	A, 8.
		E, 2.	G, 4.	L, 12.	C, 12.
	O, 1.	F, 3.	H, 6.	M, 18.	D, 18.
			I, 9.	N, 27.	B, 27.

α 2. VIII.

Invenis e, f in ratione a ad c minimis, & sumantur in eadem ratione tres g, h, i & quatuor k, l, m, n vel plures, dum multitudinem aequales fiant initio positis a, c, d, b. Itaq; cum ab sint primi,

β 1. VIII.

erunt a, c, d, b minimi in ratione e ad f; sunt vero & k, l, m, n in eadem ratione minimi; erunt ipsi a, c, d, b aequales, singuli singulis. Caterum quia e multiplicans se ipsum producit g; multiplicans vero ipsum g facit k; & metietur e ipsum g per e, & g ipsum k per eundem e. δ Metitur vero & o ipsum e per e. Aequè igitur metitur o ipsum e, & ipsum g, & ipsum k. Ideoq; eadem pars erit o ipsius e, & ipsius g, & ipsius k; ad eod; & proportionales deinceps o, e, g, k; Perinde

γ 7. axio.

δ 5. axio.

ϵ 20. def.

VII.

ut

ut & o, f, i, n. Cumq; & o, e, g, k, & o, f, i, n sint
multitudine aequales ipsis k, l, m, n vel a, b, c, d
cadent tot medij continue proportionales inter
o, k vel o, a, ac inter o, n vel b, o, quot inter a, b.

PROPOS. X.

Theorema 8.

Si inter duos numeros a, b & unita-
tem p continue proportionales ceci-
derint numeri c d e; quot inter utrum-
que ipsorum a vel b, & unitatem p de-
inceps medi continua proportionem
cadunt numeri, totidem & inter ipsos
a & b medii, m, n, o continua propor-
tione cadent.

P	C	D	E	A 81
				M 162
				N 324
				O 648
				B 1296
	F 6	I 18	K 54	
		G 36	L 108	
			H 216	

a. Completis spacijs intermedijs i, k & h, m,
n & o, ut i fiat ex c in f; k ex c in l, g, m, n, o & 2. VIII.
ex c in k, l, h. Cum ergo sit ut p ad c, ita c ad d,
& d ad e, & e ad a, & aequè p metiatur ipsum

P 4

c 6

79. axio.

d18. VII.

c, & c ipsum d, & sic deinceps. Sed d metitur c per c: Ergo & c ipsum d, & d ipsum e & e ipsum a per c metietur. γ Quare c multiplicans seipsum fecit d, multiplicans d fecit e, & multiplicans e fecit a. Idemq; de f, g, h, b est statuendum. Proinde, cum c multiplicans c & f, faciat d & i, d erit ut c ad f, ita d ad i; itemq;, ut c ad f, ita i ad g. Sunt ergo d i g continuè proportionales in ratione, c ad f. Rursus & e, k, l, h sunt continuè proportionales: quia enim c in d, i, g fecit e, k, l ejusdem d erunt e k l rationis cujus d i g, id est, c ad f; itemq;, & c & f in g fecerint l & h; erit, ut c ad f, ita l ad h. Eodemq; modo continuè proportionales ostenduntur a, m, n, o, b in ratione c ad f, quia ex c in e k, l, h fiunt a, m, n, o, & ex c & f in h, fiunt o & b. Tot itaque medij proportionales inter a & b cadent, quot inter a vel b & unitatem p, quia multitudine conveniunt.

PROPOSITIO XI.

Theorema 9.

Duorum quadratorum numerorum a & b, unus e medius proportionalis est numerus; & Quadratus a ad Quadratum b duplicatam habet lateris c ad latus d rationem.

A, 9.

A, 9. E, 21. B, 49.

C, 3. D, 7.

Ex c in d fiat e: & a erit, ut c ad d, ita a ad e. a 17. VII.
 ade & cad b, adeoq; tres continuè proportio- b 16. def.
 nales in ratione c ad d, caditq; inter a & b me- VII.
 dius proportionalis e. Cum vero a ad b habeat
 rationem, & duplicatam q; 9, quam a ad e, habet
 quoq; duplicatam a quadratus ad b quadra-
 tum ejus, quam c latus, ad d latus, quod eadem
 hic fit ratio, qua ibi.

PROPOS: XII.

Theorema 10.

Duorum cuborum numerorum
 a & b, duo medij proportionales sunt
 numeri, b, i, & cubus a ad cubum b
 triplicatam lateris c ad latus d habet
 rationem.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.

E, 9. G, 12. F, 16.

C, 3. D, 4.

Compleantur spacia e, g, f, & h, i. ut in 10.
 Eujus fiebat. Et a erunt c, g, f, tres continuè a 17. VII.
 proportionales in ratione c ad d, ut & a, h, i, b,
 P S qua-

234 EVCLIDIS ELEM:

26. def. VII. quatuor; cadentq. inter cubos a, b duo medij;
Cum verò primus a ad quartum b habeat rati-
onem triplicatam ejus quam primus a ad h se-
cundum; habebit etiam a cubus, ad b cubum,
rationem triplicatam, laterum c add, cum a
ad h sit, ut c add.

PROPOSITIO XIII.

Theorema II.

Si sint quotlibet numeri a, b, c de-
inceps proportionales, & multipli-
cans quisque seipsum, faciat aliquos
d, e, f; qui ab illis producti fuerint,
proportionales erunt: Et si numeri,
a b c, primum positi multiplicantes
jam factos d, e, f, fecerint aliquos g, b, i
ipsi quoque proportionales erunt:
Et semper circa extremos hoc eve-
niet.

| A, 2. | B, 4. | C, 8. |

| D, 4. | N, 8. | E, 16. | O, 32. F, 64. |

|| G, 8. | P, 16. | Q, 32. | H, 64. | R, 128. | S, 256. | I, 512.

K, 16 | T, 32, V 64, X, 128 | L 256 | Y 512 | Z. 1024 | 22048 | m, 4096

Ex a in b fiat n, & o ex b in c: Fiant item p, q ex a in d, n, e; & r, s, ex b in o, f: Item, t, u, x, ex a in p, q, h; & y, z, a ex b in r, s, i. Cum ergo a multiplicans seipsum & b fecerit a & n; a erit, ut a ad b, ita d ad n: Ita, cum n & e sint ex b in se & a; Erit etiam, ut a ad b, ita n ad e; & ita d, n, e continuè proportionales sunt in ratione a ad b. Proportionales etiam sunt continuè e, o, f, quia ex b in se & in c fieret e & o; ex c in se & in b sunt o & f, & ejusdem rationis cum b, c, id est, cum a, b. Quoniam ergo d, n, e, & e, o, f sunt in eadem ratione continuè proportionales, ex a quo erit, ut d ad e, ita e ad f; & ita d, e, f continuè proportionales erunt. Deinde in eadem ratione continuè proportionales sunt g, p, q, h, cum g, p, q fiant ex a in d, n, e, & ex a, b in e fiant q & h: Similiter & h, r, s, i, cum h, r, s, fiant ex b in e, o, f, & s, i ex b, c in f. Est ergo ex a quo ut g ad h, ita h ad i.

a 17. VII.

Eodemq, modo k, l, m, continuè demonstrantur proportionales.

PROPOS: XIV.

Theorema 12.

Si Quadratus numerus, & Quadratus

dratum numerum b metiatur: & latus c unius a metietur latus d , alterius b . Et, si unius Quadrati a latus c metiatur latus d alterius b ; & Quadratus a Quadratum b metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.

C, 2. D, 6.

α II. IIX.
 § 7. IIX.

Fiat ex cind. α Erunt a & b , continè proportionales in ratione c ad d . Cumq; a primus b tertium metiatur, β metietur etiam c medium. Ideoq; cum sit, ut a ad c , ita c ad d , β metietur etiam latus c latus d . Rursus, si latus c metiatur latus d , metietur etiam quadratus a quadratum b , cum in eadem ratione continè α proportionalibus existentibus a , e , b ; a ipsum c aequè c metiatur, atq; c ipsum d , & ita etiam a quadratus b quadratum.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si cubus numerus a cubum numerum b metiatur; & latus c unius a metietur latus d alterius b . Et si latus c unius a cubi latus d alterius b meti-

metiatur & cubus a cubum b metietur.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.

E, 4. G, 12. F, 36.

C, 2. D, 6.

Completis iterum spacijs e, g, f , & h , i ut in α 12. IIX.
 β 7. IIX.
 id. bujus factum est. & Erunt & e, g, f & a, h, i ,
 b continue proportionales. Cumq; a primus me-
 tiatur extremum b , & metietur etiam secundum
 h & propter eandem rationem latus c quoq; d
 latus metietur. Rursus si c latus metiatur latus
 d metietur etiam cubus a cubum b . Continue
 enim existentibus proportionalibus a, h, i, b in
 ratione c add, & que metietur c ipsum d , & a
 ipsum h , & sic etiam extremum b , cubus cubum.

PROPOS: XVI.

Theorema 14.

Si Quadratus numerus a Quadra-
 tum numerum b non metiatur; ne-
 que latus c unius a metietur alteri-
 us b latus d . Et si latus βc unius a
 quadrati non metiatur latus d alte-
 rius

us b neque quadratus a quadratum b metietur.

A, 16.

B, 81.

G, 4.

D, 9.

a 14. IIX.

S Clatus metiretur latus d , etiam a quadratus c , a metiretur quadratum b contra hypothesin. Et contra, si quadratus a quadratum b metiretur, etiam c latus d ; itidem contra hypothesin.

PROPOSITIO. XVII.

Theorema 15.

Si cubus numerus a cubum numerum b non metiatur: neq; latus c unius a latus d alterius b metietur. Et si latus e cubi unius a latus d alterius b non metiatur: neq; cubus g a cubum b metietur.

A, 8.

B, 27.

C, 2.

D, 3.

a 15. IIX.

*S*i enim latus c , metiretur latus d , etiam a metiretur a cubus Cubum b contra hypothesin. Et contra, si cubus a cubum b metiretur; etiam latus c latus d metiretur, itidem contra hypothesin.

PROPOSITIO. XIIX.

Theorema 16.

Duorum similium planorum numerorum a b unus g medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris, hmo

mologi c vel d ad latus homologum,
e vel f rationem.

A, 12. G, 18. B, 27.

C, 6. D, 2. E, 9 F, 3.

Fiat g ex d in e. Cum sit ut c add, ita e ad f, erit
permutando c ad e, ut d ad f. Cum ergo d mul-
tiplicans c & e producat a & g, a erit a ad g, ut
c ad e. Sic etiam erit g ad b, ut d ad f, quia e mul-
tiplicans d & f producit g & b. Itaque, a, g, b sunt
proportionales in rationibus c ad e & d ad f, a-
deoq; inter a & b cadit g medius proportionalis.
Et quia proportionales sunt a, g, b, habebis a ad
b rationem duplicatam ejus, quam a ad g, i. e. c
ad e vel d ad f. Itaque, planus a ad planum b dupli-
catam habet rationem laterum homologorum.

a 17. IIX.

PROPOS: XIX.

Theorema 17.

Duorum similium solidorum numerorum
a, b duo m, n medij proportionales sunt nu-
meri: Et solidus a ad solidum b triplicatam
habet rationem lateris homologici vel d vel e
ad latus homologum f vel g, vel h.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.

I, 6. L, 12. K, 24.

O, 2. D, 3. E, 4. F, 5. G, 6. H, 10.

Fiat i ex c in d, & k ex f in g, & l ex d in f, &
m, n ex e, h in l. Cum ipsis f, g, h proportiona-
les sint c, d, e, etiam permutando proportionales
erunt, ut c ad f, ita d ad g & e ad h. Et quia
multiplicans c & f producit i & h, a erit, ut c

a 17. IIX.

C. 18. VII.

γ 26. def.
VII.

adf, ita i ad l: & ut d ad g, ita l ad k; quia l & k sunt ex f in d, g, adeoq; i, l, k sunt continuè proportionales in ratione c ad f, vel d ad g. Quia verò a solidus factus est ex c, d, e lateribus, & i ex c in d, fit, ut e multiplicans i, faciat a. Itacum b solidus sit factus ex f, g, h lateribus, k verò ex f in g, fit ut b solidum faciat, h multiplicans k. Quare cum e multiplicans i, l fecerit a. m; erit a ad m ut i ad l, id est, ut c ad f, vel d ad g, vel e ad h; Sic etiam n ad b, ut l ad k, id est, ut c ad f; cum h multiplicans l, k, fecerit n, b. 3. Est autem & m ad n, ut e ad h, quod e, h multiplicantes l fecerint m, n. Sunt ergò a, m, n, b continuè proportionales in ratione c ad f; adeoq; inter a b similes solidos cadunt medij proportionales m, n. Et quia a, m, n, b sunt 4. continue proportionales γ habebit solidus a ad solidum b similem rationem ejus, quam a ad m id est, c ad f, d ad g, & e ad h, id est, triplicatam ex ratione c ad f laterum homologorum.

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si inter duos a b números unus medius proportionalis cadat humerus c; similes plani erunt illi numeri a & b.

A, 18.

A, 18. C, 24. B, 32.

D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

Sumti minimi d, e in ratione a, c a metiuntur a 21. VII.
tur aq̄ue ipsos a, e per f, & ipsos c, b per g. Itaq, f
multiplicans d, e β producit, a, c, & g eosdem d, e 9. axio.
e multiplicans producit c, b. itaq, cum e multi- γ 17. VII.
plicans f, g faciat c, b, γ erit, ut c ad b, id est, ut
d ad e, ita f ad g; & permutando, ut d ad f, ita e
ad g. Cum vero a fiat ex d in f, erit planus, cu-
jus latera d & f, sunt proportionalia lateribus e
& g, ex quibus fit b planus. Erunt itaq, a b plani
similes.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Si inter duos numeros a, b duo
medii proportionales cadant nume-
ri c, d; similes solidi sunt illi numeri
a, b.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.

E, 1. F, 3. G, 9.

H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

Cum a sumtis tribus minimis e, f, g in ratio- a 9. VIII.
ne a, c; d, b, inter e & g cadat medius proportio-

Q

nalis

- § 20. IIX. *nalie f; Serunt e & g plani similes, quarum latera sint h, i, k, l. Et quia e, f, g sunt in ratione data minimi, aequè metiuntur ipsos a, c, d rationis ejusdem per m; Eodem modo e, f, g minimi ipsos c, d, b, ejusdem rationis metiuntur per n; ita ut m & n multiplicantes e, f, g producant a, c, d & c, d, b. Facti autem sunt e & f ex suorum laterum h, i, & k, l, multiplicatione mutua. Ergo a, b producuntur ex multiplicatione mutua h, i, m, & k, l, n, & sunt solidi. Quia verò ex m, n in f sunt c, d, ut supraparet, γ erit c ad d, ut m ad n: Sed c ad d d est, ut e ad f, (quia n multiplicans e facit c d) id est, ut h ad k, vel i ad l. Inter planos enim similes e, g, est medius proportionalis f e in ratione laterum homologorum h, k vel i, l: Igitur h ad k & i ad l erunt, ut m ad n; & permutando h ad i, ut k ad l; & i ad m, ut l, ad n. Sunt ergo latera h, i, k proportionalia lateribus k, l, n; ac propterea similes a, b solidi.*
- γ 18. VH.
 § 17. VII.
- § 19. IIX.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si tres numeri *a, b, c* deinceps sint proportionales, primus *a*, autem sit quadratus; & tertius *c* quadratus erit.

A, 36. B, 48. C, 64.

D, 6. E, 8.

F, 1.

Summa

Sumto d latere quadrati a, cum d in se faciat a a erunt d & a ab f unitate continuè proportionales, & convertendo a ad d, ut d ad f. Cum ergo inter a & c cadant tot medij, quot inter eundem a & f β vident etiam inter c & f tot; α 9. VIII. β 10. VIII. videlicet e. Cum itaq; f, e, c continuè proportionales sint, producet a c ex e in se, eritq; quadratus.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Si quatuor numeri a, b, c, d sint deinceps proportionales, primus a autem sit cubus; Et quartus d cubus erit.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.

F, 16.

H, 100.

E, 4.

G, 10.

I, 11

Sumto e latere cubi a, ex e in se fiat f; & ex f in e, cubus a. Quia ergo in se facit f, & in f facit a, a erunt e f a ab unitate continuè proportionales; & convertendo a, f, e, i continuè proportionales. Cum ergo inter eundem a & d, cadant tot medij continuè proportionales, quot inter a & i, β cadent inter d & i totidem. Quare cum i, g, h, d sint continuè proportionales, fiet h ex g in se, & d ex g in h, eritq; d cubus. α 9. VIII. β 10. VIII.

Q. 2

PRO.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Si duo numeri rationem habeant inter se, ut a ad b , quam Quadratus numerus ad Quadratum numerum ita c ad d , primus a autem sit Quadratus, & secundus b Quadratus erit.

A, 36. F, 48. B, 64.

C, 9. E, 12. D, 16.

Cum enim sit a ad b , ut c ad d , inter g , c & d a cadat medius proportionalis, etiam inter a , b , β cadet medius f . Cum ergo a , f , b sint continue proportionales, & a primus Quadratus, etiam b tertius Quadratus γ erit.

α II. VIII.

β 8. VIII.

γ 22. VIII.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri rationem inter se habeant a ad b , quam cubus numerus ad cubum numerum c ad d , primus a autem sit cubus, & secundus b cubus erit.

A, 8.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.

C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

Cum enim sit a ad b , ut c ad d ; inter g , e & d
 α , cadant duo medij proportionales, e & f , β ca- $\alpha 12. VIII.$
 dent etiam g , h inter a & b . Cum ergo a , g , h , $\beta 8. VIII.$
 b sint continuè proportionales, & a primus cu- $\gamma 23. VIII.$
 bus sit, γ erit & b quartus cubus.

Corollarium. I.

Proportio cujusvis numeri Qua-
 drati ad quemlibet non quadratum,
 non potest reperiri in duobus nume-
 ris Quadratis. Quia ex 24. hujus ipse
 quoque Quadrati essent.

Corollarium. II.

Nec inter cubum & non cubum
 cadit ratio euborum, ob eandem cau-
 sam ex 25.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Similes plani numeri inter se ra-
 tionem habent a ad b , quam quadra-
 tus numerus ad quadratum nume-
 rum ut d ad f .

Q. 3

A. 20.

A, 10. C, 30. B, 45.

D, 4. E, 6. F, 9.

α 18. VIII.
β 1. Cor. 2.
VIII.

Cum a & b sint plani similes, c cadit inter eos unus medius proportionalis c : Sumtis ergo tribus minimis in a, c, b , ratione continua, c erunt extremi d, f quadrati. Quare cum sit ex aequo a ad b , ut d ad f , patet a ad b esse ut d quadratus ad f quadratum.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Similiter solidi numeri a ad b rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum e ad h .

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810.

E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

α 19. VIII.
β 1. Cor. 2.
VIII.

Cum a & b sint solidi similes, c cadunt inter eos duo medij proportionales c, d . Sumtis ergo quatuor minimis e, f, g, h in ratione continua a, c, d, b , c erunt extremi e, h cubi. Quare cum sit ex aequo a ad b , ut e ad h patet, h ad b esse, ut e cubus ad h cubum. Quod erat propositum.



E U C L I D I S

E L E M E N T O -

R U M

LIBER IX.

PROPOS. I.

Theorema 1.



Si duo similes plani numeri a , b multiplicantes se mutuo faciant quendam c ; productus c erit Quadratus.

A, 6. B, 54.

D, 36, E, 108. C, 324.

A multiplicans seipsum faciat quadratum.

Cum itaque, ex a in a & b fiant d & c a erit, 17. VII.
ut a ad b , ita d ad c . Sed inter a & b

618. VIII. *ceu planos similes unus ϵ cadit medius propor-*
 78. VIII. *tionalis. Ergo ϵ inter d & c unus γ cadit, nem-*
 722. VIII. *pe E . Itaq, cum tres d, e, c sint continuè propor-*
tionales, ϵ primus sit quadratus, δ erit etiam c
tertius quadratus.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duo numeri a, b , se mutuo mul-
 tiplicantes, faciant Quadratum c ; si-
 miles plani erunt a, b .

A, 6. B, 54.

D, 36. C, 324.

17. VII. *A multiplicans seipsum faciat d quadratum.*
 11. VIII. *Erit, ut a ad b , ita d ad c , quia a multiplicans a*
 78. VIII. *& b , produxit d & c . Sed inter d, c quadratos*
 20. VIII. *cadit unus medius proportionalis: Ergo ϵ inter*
 a, b γ cadit unus, ac propterea a, b δ erunt plani
similes.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si cubus numerus a seipsum mul-
 tiplicans, procreet aliquem b ; pro-
 ductus b cubus erit.

A, 8.

A, 8.

E, 16.

D, 4.

F, 32.

C, 2.

B, 64.

I, 1.

Sit clatus cubi a, ex quo in se fiat d, & ex
c in d ipse cubus a. Itaque a metietur ipsum d per
c. Sed & unitas i eundem c & metietur per c. Er-
go unitas ipsius c est eadem pars, qua c ipsius d.

¶ Quare ut unitas ad c ita c add, Rursus eti-

a 7. ax.

am d a metietur a per c. quod c multiplicans d

b 5. ax.

fecit a. Sed quia etiam c metiebatur d per c,

γ 20. dif.

Ergo d ipsius a erit eadem pars, qua c ipsius d.

¶ Ergo est ut c add, ita d ada. Sed ut est cad

d, ita erat unitas ad c. Ideoque ut unitas ad c

ita d, add & d ada: adeoque inter unitatem

& a cadunt duo medij proportionales.

Caterum quia a metietur b per a; quod a

in se producebat b, & unitas eundem a per a me-

tiatur, erit unitas eadem pars ipsius a, qua a i-

psius b; & sic, ut i ada, ita a ad b. Sed cum inter

i & a cadant duo medij proportionales, ergo

d 8. IIX.

totidem inter a & b, d cadent f & e. Cum itaque

e 23. IIX.

inter quatuor a, e, f, b continue proportionales

primus sit cubus, e erit etiam quartus b cubus.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Q 5

Si

Si cubus numerus a cubum numerum b multiplicans, faciat aliquem; factus cubus erit,

A, 8.
D, 64.

B, 27.
C, 216.

a in se producat d . Quia ergo ex a in a & b sunt d & c , & erit ut a ad b , ita d ad c . Sed inter a & b cubos β cadunt duo medij proportionales: γ Ergo & inter d & c . Quare cum d primus d sit cubus, & c quartus & cubus erit.

α 17. VII.
 ϵ 12. IIX.
 γ 8. IIX.
 δ 3. IX.
 ϵ 23. IIX.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si cubus numerus a numerum quendam b multiplicans faciat cubum c ; & multiplicatus b cubus erit.

A, 8.
D, 64.

B, 27.
C, 216.

a in se producat d , & cubum. Cum ergo ex a in a & b fiant d & c , & erit, ut a ad b , ita d ad c . Sed inter d , c , cubos cadunt duo medij proportionales.

α 3. IX.
 β 17. VII.
 γ 12. IIX.

*iduales. Ergo & totidem inter a & b; adeoque
a existente cubo etiam b cubus & erit.*

d 2 IIX.

s 23. IIX.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si numerus a seipsum multipli-
cans, faciat cubum b; Et ipse a cubus
erit.

A, 8. B, 64. C, 512.

*Ex a in b fiat c, qui ex definitione est cubus.
Quoniam ergo b cubus multiplicans a, facit c, &
erit & a cubus.*

a 2 IIX.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si compositus numerus a aliquem
b multiplicans, quempiam c faciat: fa-
ctus c solidus erit.

A, 6. B, 7. C, 42.

D, 2. E, 3.

*Quia enim a est solidus, & metitur ipsum a-
lius præter unitatem, ut d per e; Ergo & d in e
producit a. Cū ergo b in a faciat c, erit c ex tri-
um d, e, b, seu laterum multiplicatione mutua
ortus, adeoque ex definitione solidus.*

a 23. def.

VII.

β 9. ax.

PRO.

EVCLIDIS ELEM.
PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si ab unitate quocunque numeri
 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$, deinceps pro-
portionales fuerint : Tertius b qui-
dem ab unitate Quadratus est, & u-
num intermittentes d, f, b, k, m , o-
mnes : Quartus c , autem est cubus, &
duos intermittentes f, i, m , omnes :
Septimus f verò cubus simul & Qua-
dratus, & quinque intermittentes m
omnes.

Vn. i. A, 3. B, 9. C. 27. D, 81, E, 243. F, 729.
G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049.
L, 177147. M, 531441.

Cum enim unitas a metiatur a per a , metietur
quilibet sequentem per ipsum a , quia continuè
proportionales sunt : & Ideoq; a multiplicans se-
ipsum producit b quadratum. Cumq; b, c, d sine
continuè proportionales, & b Quadratus, eti-
am d erit Quadratus : ita & trium sequen-
tium proportionalium tertius ferit Quadratus,
& iterum h, k, m & c. Rursus cum a in se faciat
 b , & idem a in b faciat c , erit ex definitione c
cubus.

α 5. α x.

β 9. α x.

γ 22. IIX.

cubus. Ergo cum 4. proportionalium c, d, e, f primus c sit cubus & erit & quartus f cubus. Denique cum septimus ab unitate f & Quadratus & cubus sit demonstratus; etiam intermissis quinq; g, h, i, k, l, meriti & Quadratus & cubus.

§ 23. IIX.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d, e, f, deinceps proportionales fuerint; qui verò post unitatem a sit Quadratus; & reliqui omnes, b, c, d, e, f, Quadrati erunt. Ac si qui post unitatem a sit cubus, & reliqui omnes b, c, d, e, f, cubi erunt.

A, 4, B, 16, C, 64, D, 256, E, 1024.

i. Unitas.

F, 4096.

A, 8, B, 64, C, 512, D, 4096, E, 32768.

F, 262144.

Quia enim b tertius ab unitate a est Quadratus, & unum intermissis, omnes d, f, sunt g, a, b, c continue proportionales, & a primus quadratus, & erit & c Quadratus. Eodem modo iterum

a 8. IX.

§ 22. IIX.

73. IX.

23. IIX.

ter c, d , & proportionales & existente quadrato, etiam c quadratus erit, & sic deinceps reliqui erunt quadrati. Ita si a primus ab unitate sit cubus: Quia c ab unitate quartus a est cubus & duos intermittentes omnes, etiam c erit cubus. Cumq; unitas metiatur a per a , & a cubus metiatur b per seipsum, γ erit & b cubus. Cum item a, b, c, d sint 4. continue proportionales, & a primus sit cubus, δ erit & d quartus cubus. Eodemq; modo reliqui ordine cubi ostendantur, sumtis semper continue proportionalibus, ut b, c, d, e . Quia enim b est cubus. Ergo & c & e .

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si ab unitate quocunque numeri ($a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$,) deinceps proportionales fuerint, qui a vero post unitatem non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit; præter tertium b ab unitate & unum intermittentes omnes d, f, h, k, m . At si post unitatem non sit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter quartum c ab unitate, & duos intermittentes omnes f, i, m .

i. Va.

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

E. Unitas.

G, 128. H, 256.

I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

Si enim aliquis alius esse potest quadratus, esto c. Quoniam est, ut a ad b, ita b ad c; convertendo c ad b erit, ut b ad a. Sed c est quadratus ex hypothesis: a Ergo & a. Quod absurdum. Quia ponitur non quadratus. Idem etiam de ceteris concludendum. Ita, si quis alium, ut d prater c ponat cubum, quia a, b, c, d, sunt continuè proportionales, conversim proportionales erunt. Itaq, cum d primus sit cubus, etiam a quartus cubus erit. Quod est contra hypothesis.

a 22. IIX.

c 23. IIX.

PROPOS: XI.

Theorema II.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d, e, f, deinceps proportionales fuerint, minor b maiorem f, metitur per aliquem d eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

I. Vn A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243.

F, 729.

Cū ex equo sit ut b ad f, ita unitas ad d, quod 5, a, b, c, d, e, f, cū 5. numeris & unitate a b c d e a d b

rati-

α 20. def. rationem habeant a aequè etiam Unitas metietur numerum d , atq; b ipsum f . Sed ϵ unitas metitur d per b , d per b , ergo ϵ b ipsum f per d metitur. Eodem modo d metitur ipsum e pro a , quod sit, ut d ad e , ita unitas ad a . Sic ϵ a ipsum f per e metietur cum sit ut a ad f , ita unitas ad e . Et ita de cæteris.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum d metiuntur, iidem & eum a , qui unitati proximus est, metientur.

1. Vn. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

α 31. VII. Sin minus Si primus numerus e metiens quidem d , non a metitur erunt a & e primi; & cum β 17. VII. a multiplicans se ipsum producat b , β erunt ϵ γ 26. VII. e b inter se primi; γ itemq; ϵ e & c , cum c ex a in b primis ad numerum e fiat. γ adeoq; ϵ e & d inter se erunt primi, cum d ex a in c fiat. Quod est contra hypotesin, quæ e ipsum d metiri ponebat.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si ab unitate quocunque numeri a, b, c, d , deinceps proportionales fuerint, qui verò a post unitatem, primus sit; Maximum d nullus alius metietur, præter eos a, b, c , qui sunt in numeris proportionalibus.

1. Un. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.

H. G. F. E.

Metiatur ipsum d , diversus ab a, b, c , qui sit e ; erit ille vel primus, vel compositus. Si sit primus, metiens extremum d , a metietur etiam a primo. Quod absurdum. Cum ergo e non sit primus, esto compositus, β metiens ipsum primus alius præter a nullus erit. Nam cum e metiatur extremum d , quilibet primus metiens e , γ , metietur d , metiens verò d maximum, α metietur e a unitati proximum, proinde duo primi β & γ mutuo metientur, quod absurdum, aut metiens ipsum e primus, erit ipse a .

Porro metiatur a ipsum e per f . Itaque a multiplicans f & c binos faciet binos e & d ; detritq; e ad d , ut f ad c . Quare si e metitur d , etiam f

R

meti-

a 12. IX.

 β 33. VII. γ 11. axio.

d 17. VII.

metitur c : adeoque & feodem modo, ut e , compositus erit, quem solus a metitur. Metiatur ergo a ipsum f per g . Ideoque a binos g & b multiplicans producet f & c , d eritque f ad c , ut g ad b : Sed f metitur ipsum c , ergo & g metitur b . Si jam g esset primus metiens b , a metiretur etiam a . Quod absurdum. Nullus ergo alius metitur g prater h . Denique metiatur a ipsum g per h . Binus ergo a & h multiplicans a producet b & g , d eritque g ad b , ut h ad a . Sed g metitur ipsum b . Ergo & h ipsum a primum. Itaque h aequalis est ipsi a . Cum autem ex h & g producat idem b , qui ex a in seipsum, e erit a medius proportionalis inter h & g ; cumque a metiatur g , etiam h metietur a , primus primum. Quod absurdum. itaque prater proportionales a, b, c , nullus alius extremum d metitur.

§ 20. VII.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Si minimum numerum a , primi numeri b, c, d metiantur: nullus alius primus numerus illum metietur, prater eos b, c, d qui à principio metiebantur.

A

[A.....

B...C...D.....

E---F----

Si potest, metiatur e primus ipsum a per f. α 9. axio.
Idem ergo e multiplicans f a facit a. Ideoq³ sin-
guli b, c, d alterum illorum e vel f e metientur. β 32. VII.
Non ipsum e primum; ergo ipsum f minorem
ipse a. Quod contra hypotesin.

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Si tres numeri a, b, c deinceps pro-
portionales, fuerint minimi omnium
eandem cum eis rationem habenti-
um, duo quilibet a b simul, b c, a c nu-
meri ad reliquum c, a, b primi erunt.

A, 9. B, 12.

C, 16.

D, 3. E, 4.

Sumtis duobus d, e in eadem cum illis pro-
portionem minimis, a patet d in se ipsum e e pro α 2. VIII.
ducere a & b, e e in se facere c. Cum itaq³ d e
e in sua proportionem minimi, etiam e sint primi ϵ 24. VII.
y erit e uterque d e simul ad quemlibet illo- γ 30. VII.
rum primus. Itaque cum tam compositus, ex d e

R a

quam

- § 26. VII. *quam ipse d ad e primus sit, derit quoq; ex d, e
tanquam uno factus numerus in d ad eundem e*
 § 3. II. *primus. § Qui autem sit ex d e tanquam uno in*
 § 27. VII. *d aequalis est & numero a facto ex d in se & nu-
mero b facto ex d in e. Igitur a b compositi pri-
mi sunt ad e, & ita ad c, qui sit ex e in seipsum.*

B, 12. C, 16.

A, 9.

D, 3. E, 4.

*Deinde quia uterque d e simul γ est primus
ad quemlibet ipsorum d, e; sit, ut numerus ex d e
tanquam uno, factus in e, δ primus sit ad d (cum
tam ex d e compositus, quam ipse e primus sit ad
d) Sed qui sit ex d e, tanquam uno in e s aequalis
est & numero c facto ex e in se; & b facto ex d
in e. Ergo & b c simul compositi ad d primi sunt,
§ adeoq; ad ipsum a, qui ex d in se est factus; pri-
mi sunt b & c simul compositi.*

A, 9. C, 16.

B, 12.

D, 3. E, 4.

*Deniq; quia, ut antea uterq; d & e simul ad
quemlibet ipsorum γ primus est, & è contrario
quilibet ipsorum d, e primus est ad compositum
ex*

ex d ; δ erit etiam factus ex d in e ad compositum ex d e primus, & sic ex d in e factus ad eum, qui ex d e tanquam uno in se primus erit. Sed qui fit ex d e tanquam uno in se aequalis est eis, n 4. II.
 qui sunt ex d & e in seipsos, una cum eo qui ex d in e bis. Quoniam itaq; duo numeri simul, nempe compositus ex ijs, qui sunt ex d & e in seipsos; & ex eo, qui fit ex d in e , atq; is qui fit d in e primi sunt ad aliquem ipsorum, eum videlicet, qui fit ex d in e , ut ostensum est, § 37. VII.
 δ erunt etiam duo illi, compositus ex ijs qui sunt ex d & e in seipsos & ex eo, qui fit ex d in e atq; is qui fit ex d in e inter se primi. Rursus, quia duo numeri simul, utpote compositus ex ijs, qui fit ex d & e in seipsos, atq; is, qui fit ex d in e ad aliquem ipsorum, eum nimirum, qui fit ex d in e , primi sunt ostensi; γ erunt etiam duo illi, compositus ex ijs, qui sunt ex d & e in seipsos, atq; is, qui fit ex d in e , inter se primi. Itaque cum ex d & e in seipsos sunt a & c , item ex d in e fiat b , erunt a & c simul compositi primi ad b .

PROPOSITIO XVI.

Theorema 16.

Si duo numeri a & b primi inter se fuerint: Non erit, ut primus a ad secundum b , ita secundus b ad alium quendam c .

R. 3

A.....

A.....

B.....

C-----

 α 23. VII. β 21. VII.

Esto, si potest tertius proportionalis c. Cum ergo a & b sint primi, & in sua ratione a minimi; ipsi & aequè metientur b & c numeros in eadem ratione; a ipsum b, & b ipsum c. Cumque a etiam metiatur seipsum. Duos ergo a & b inter se primos metietur numerus a. Quod absurdum.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 17.

Si fuerint quotcunque numeri a, b, c, d, deinceps proportionales, extremi autem ipsorum a, d primi inter se sint: Non erit, ut primus a ad secundum b, ita ultimus d, ad alium quempiam e.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E, ---

 α 23. VII. β 21. VII. γ II. axio.

Esto, si potest, ut a ad b, ita d ad e. Erit ergo permutando, ut a ad d, ita b ad e: sunt autem a, d primi sue rationis α minimi: igitur & aequè metientur, ipsos b e. Est verò, ut a ad b, ita b ad c. Si ergo a metitur b, etiam b γ metitur c. Quia item est, ut b ad c, ita c ad d; cum b metiatur

tiatur c etiam c metietur d: Quare a metiens c,
metietur etiam d. Metitur vero & a seipsum.
Ergo metitur a, d inter se primos. Quod absur-
dum.

PROPOSITIO XVIII.

Problema 1.

Duobus numeris a, b datis, confi-
derare, an ipsis possit tertius propor-
tionalis inveniri.

A, 4. B, 7.

Si a & b dati sint primi, a non potest reperi-
ri tertius proportionalis. Si non primi, tum b
multiplicans seipsum faciet c. Aut ergo a meti-
tur c, per d, & d est ipse tertius proportionalis:
Cum enim a metitur c per d, fiet c ex a in d. Fit
autem idem c ex b in b: Ergo qui sub extremis a,
d continetur c factus ex b in seipsum medio aqua-
lis est. Quare erit ut a ad b, ita b ad d. a 16. IX.

A, 4. B, 6. C, 36.

Aut a non metitur c, & tum nequit reperiri
tertius proportionalis. Si vero ponatur d tertius.
Quia est, ut a ad b, ita b ad d, ideo numerus sub
extremis a, d contentus, aqualis est ei, qui sit a
medio b, id est, c. Cum itaq; c ex a in d fiat, me-
rietur a ipsum c per d, quod absurdum. Quia
ponebatur non metiri.

A, 6. B, 4. D, --- C, 16.

R 4

PRO.

EVCLIDIS ELEM.
PROPOSITIO XIX.

Problema 2.

Tribus numeris a, b, c , datis; considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inveniri (*Sine deinceps proportionales sint sive non.*)

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.

A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

α 9. axio. B multiplicans c faciat d. Aut a metitur d
 β per per e quartum proportionalem. α Fit enim d ex
conste a in e, β & ex b in c. Ideoque cum sub extremis
7. 19. VII. a, c comprehensus, aequalis sit ei, qui sub interme-
dijs, γ erit, ut a ad b, ita c ad e.

A, 4. B, 6. C, 9. E---- D, 54.

A, 3. B, 4. C, 10. E---- D, 40.

Aut a non metiatur d, & tum nequit in-
veniri quartus proportionalis. Si tamen potest,
sit e. Cum 4, a, b, c, e sint proportionales, extre-
mis a, e contentus, aequalis β erit contento inter-
medijs b, c, hoc est, d. Cum itaq, d ex a in e δ fiat,
metitur a ipsum d per e, quod est absurdum.
Quia ponebatur non metiri.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Primi numeri plures sunt, omni
proposita multitudine primorum
numerorum a, b, c .

A_2 . B_3 . C_5 .

D E

a Sumto minimo d , quem a, b, c metiantur, apponatur ipsi unitas e . Si totus d est primus, factum est, quod vult propositio, quia tunc plures sunt primi a, b, c, d, e . § 2. VII.

A_3 . B_5 . C_7 .

D_{105} . E .

G_{53} .

Si totus d sit non primus, e metietur ipsum g , qui nulli propositorum a, b, c , idē esse potest. Si tamē sit, metietur etiam g ipsum d , sicut eū metiuntur a, b, c . Ideo g metiens totum d et e de tractum d , metietur etiam reliquum e unitatem quod absurdum. Ergo g primus, idem non est, § 3. VII.

R s

qui

γu . ax.

qui unus ipsorum a, b, c . Sunt ergo a, b, c , primi plures, quam a, b, c . Adeoq; & in infinitum plures primi inveniri possunt.

PROPOSITIO XXI.

Theorema. 19.

Si pares numeri quocunque ab, bc, cd componantur, totus par erit ad .

A.....B....C.....D

117.2 Cum enim quilibet par habeat partes duas aequalis, si aequalibus addantur aequales, omnes dimidia dimidijs fiunt aequales. Quare totus a derit par, dimidiatorum compositorum duplus ex definitione.

PROPOS: XXII.

Theorema 20.

117 Si impares numeri quocunque ab, bc, cd, de componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit $a e$.

A...B.....C.....D.....E

Cum propositi numeri sint impares, quilibet differt unitate a pari, ex definitione. Singula unita-

unitate detracta, quilibet reliquorum erit par. $\alpha 21. IX.$

Quare & à reliquis compositus a par erit. Sed unitatum detractarum multitudo est par. Ergo & totus a par erit.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Si impares numeri quodcumque a, b, c, e , componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus a impar erit.

$A...B.....C.....D.E$

Ablata unitate de e ex c, e , erit c, d par. Sed a ex imparibus multitudine paribus est compositus. Ergo & par a erit, huic si addatur c, d totus ad par e erit. Sed addita unitate de numero a, d , totus a e impar erit, quia par & impar differt per unitatem. $\alpha 22. IX.$
 $\beta 21. IX.$

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Si à pari numero a, b detrahatur par c, b : & reliquus a par erit.

$A. D....C....B$

Si non detracta a, d unitate erit d par. Ideo, & compositus d, b a erit par: ac proinde composito d, b addita unitate a, d , totus a, b impar fiet. Quod est absurdum; quia ponitur par. $\alpha 21. IX.$

PRO-

Theorema 23.

Si à pari numero $a b$ impar $c b$,
detrahatur; & reliquus $a c$ impar
erit.

A.....C.D....B

*Ex impari $c b$ ablata unitate $c d$, reliquus
 $d b$ par erit. Qui ergò totus $a b$ ponitur par ab-
lato pari $d b$, reliquus $a d$ par a erit, ablataque
unitate $c d$ reliquus $a c$ impar erit.*

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Si ab impari numero $a b$ impar $c b$
detrahatur; reliquus $a c$ par erit.

A...C.....D.B

*Ex imparibus $a b$, $c b$ unitate $d b$ detracta,
reliqui $a d$, $c d$ pares erunt. Ex pari $a d$ ablato
pari $c d$, reliquus $a c$ par a erit.*

PROPOSITIO. XXVII.

Theorema 25.

Si

Si ab impari numero $a.b$ par $c.b$ detrahatur; reliquus $a.c$ impar erit.

A. C.... D.... B

Ab impari a b unitate a d sublata, erit reliquus d b par, cui d b rursus auferatur c b a 24. IX. par, reliquus d c par quod a erit: ac proinde unitate a d addita, fiet a c impar.

PROPOS: XXIX.

Theorema 26.

Si impar a numerus parem b , multiplicans, fecerit aliquem c factus par erit.

A... B....

C

Cum fiat ex a in b; componitur c ex tot numeris ipsi b aequalibus, quot fuerint unitates in a. Est autem b par. Ergo c ex tot b paribus compositus, quot in a sunt unitates, par quodque b erit. a 21. IX.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si impar numerus a imparem b mul-

multiplicans fecerit aliquem c ; factus
 & impar erit.

A... B.....

C.....

23. IX.

Cum c ex a in b fiat, componetur c ex tot nu-
 meris ipsi b equalibus, quot in a fuerint unita-
 tes. Est autem b impar. Ergo & c ex tot impa-
 ribus compositus, quot in a sunt unitates, impar
 quoque c erit. Hinc nascuntur duo Corollaria.

Corollarium 1.

Par numerus in se multiplicatus;
 producit parem.

Corollarium 2.

Impar numerus in se multiplicatus
 producit imparem.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 28.

Si impar numerus a parem b me-
 riatur, & illius b dimidium d metie-
 tur.

A... G.... E..

B.....

D.....

Me.

Metiatur a ipsum b per c . Erit utiq; c par
 Si enim esset impar, sequeretur a imparem in c
 imparem a efficere imparem. Quod absurdum,
 quia b ponitur par: Ergo c erit par. Itaq;
 cum a per omnes c unitates efficiat totum b : I-
 dem a per dimidiam unitatem c ipsum
 d efficiet, ipse b dimidium. Metietur
 ergo a ipsum d per dimidium unitatem c , id
 est, c .

a 19. IX.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Si impar numerus a ad aliquem nu-
 merum b , primus sit: & ad illius du-
 plum c primus erit.

A.....B.....

C.....

D - -

Si a non sit primus ad c , metiatur eos d .
 qui omnino erit impar. Si enim esset d par, cum
 metiatur imparem, a erit a , facilius ex d pari,
 in eum numerum, per quem metitur, par; Quod
 absurdum, quia ponebatur a impar. d ergo im-
 par metiens c parem, β metietur quoq; dimidi-
 um numeri c . Idem autem d metitur & a . Ergo
 & a, b inter se primos metietur d . Quod absur-
 dum. a ergo ad c est primus.

a 28. IX.

b 30. IX.

Hinc

Hinc patet Corollarium: Numerum imparem, qui ad numerum aliquem, est primus, primum quoque esse, non solum ad duplum eius (ex 31. IX.) sed etiam ad quadruplum, octuplum, & ita per proportionem duplam in infinitum excurrendo. Quia semper sequentes precedentium sunt dupli.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 30.

Numerorum a, b, c, d , à binario & duplorum, unusquisque est pariter par-tantum,

1. Vn. A, 2. B, 4. G, 8. D. 16.

æ II. IX.

Exposita enim unitate sunt numeri ab unitate a deinceps proportionales: Quare a quemlibet b, c, d. & minor maiorem per aliquem ipsorum a, b, c, d metietur, Qui cū omnes sint pares, & binarij nimirum dupli ipsorum quemlibet a metietur numerus par per parem. Erit ergo quilibet pariter par ex definitione. Sed quod sint pariter pares tantū ita ostenditur. Cū enim ab unitate sint cōtinuè proportionales, & unitati proximus primus

fit primus, in pote binarius, nullus prater ipsos a, b, c, d quemlibet ipsorum β metietur. Quia cum β 13. IX. omnes sint pares, quemlibet ipsorum par numerus per parem γ metietur. γ 15. IX.

Scholium.

Hinc deducitur Ars Arithmeticonum inveniendi omnes numeros pariter pares. Nulli enim prater duplos à binario a, b, c, d, e, f, & c. δ 32. IX. tales esse possunt. Si enim esset quispiam g, ejus h dimidium par esset; quia si impar esset, g esset f & pariter impar contra hypothesis; ipsius h, dimidium sit i, qui ob eandem rationem par erit, & sic deinceps usq. ad unitatem. Cum ergo dimidium i sit unitas, h, g erunt dupli ab unitate atque ita in ordine priorum, contra hypothesis.

A 4. B 4. C 16. D 32. E 64. F 128.

I --- H --- G ---

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Si numerus a dimidium b habeat imparem: pariter impar est tantum.

A.....

B.....

D--- E---

Cum a habeat dimidium b imparem, metietur binarius c par numerus ipsum a per b. a itaq.

Sic

de

ex definitione erit pariter impar. Quod si tamen
esse talis negetur, erit quoq; pariter par. Ideoque
ipsum aliquis par per d parem e a metitur, &
ex d secundo in tertium e fiet a qui ex c primo in
b quartum β eritq; ut c add. ita e ad b. Meti-
tur autem e parem d. Ergo e par metitur
ipsum b imparem. Quod absurdum.

Scholium.

γ 33. IX. Imparium omnium dupli omnes sunt γ
34. IX. pariter impares d tantum.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 32.

Si par a numerus neque à binario
duplus sit, neq; dimidium habeat im-
parem: pariter par est; & pariter im-
par. A.....

Cum enim dimidium habeat parem per eum
metiètur ipsum binarius par. & sic pariter par
est. Sed & pariter impar. Diviso enim a bifari-
am, ejusq; dimidio rursus bifariam & sic dein-
ceps, tandem in imparem aliquem incidemus. Si
enim ult. mō occurreret binarius a esset a duplus
à binario, quod contra hypothefin. Cum ergo oc-
currat impar, ille metietur a per parem, non per
imparem, β quia impar multiplicans imparem,
producere a imparem a. Contra hypothefin. Est
itaq; & pariter impar.

Scholium, Omnes, relictis duplis à bina-
rio,

rio, & qui dimidiōs habet impares, pares; reliqui & pariter pares & pariter impares sunt.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 33.

Si sint quotcunq; numeri a, b, c, d, e, f, g & cinceps proportionales, detrahantur autem à secundo bc , & ultimo ef , gc, bf , æquales ipsi primo a . Erit ut secundi excessus bg , ad primum a , ita ultimi excessus eb ad omnes, a, b, c, d , ipsum antecedentes.

A.....

B.... G..... C

D.....

E..... K..... I.... H..... F

Ab ef detrahantur fi, & fk ipsis bc & d æquales. Quoniam fi est equalis bc & ablatum fh ablato gc, etiam reliquus hi, reliqua gb equalis erit. Sed quia est, ut a ad bc, ita bc ad d, & d ad ef; convertendoq; ut e f ad d, ita d ad bc, & bc ad a: estq; K f ipsi d & i f ipsi bc, & h f ipsi a equalis; erit etiam ut e f ad k f, ita k f ad i f & i f ad h f. Igitur dividendo ut e k ad k f, ita k i ad i f, & i h ad h f, ac proinde ita etiam ærunt omnes e k, k i, i h ad omnes k f, i f, h f, id est, totæ e h ad d, bc, a simul (quibus k f, i f, h f, sumti sunt æquales) ut i h ad h f, hoc est, ut bg ad a, qui illæ sunt æquales.

a 12. VII.

Scholium.

Per hoc theorema summam continuè proportionalium ex primo, secundo & ultimo terminis datis invenire licet.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 34.

Si ab unitate quocunque a, b, c, d numeri deinceps exponantur in dupla proportionē; quoad totus compositus fiat primus e ; & totus e hic in ultimum d multiplicatus faciat aliquem f , Factus erit perfectus.

1. Un. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G, 62. H, 124. I, 248. F, 496.

K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.

O, --- P, ---

α 14. VII. Sumantur ab e tot dupli; quot sunt a, b, c, d videlicet e, g, h, i : a erit ex aquo ut a ad d , ita e ad i , factus g ex a , in i & aqualis est facto ex d in e . Sed f est factus ex d in e . Idem ergo f ex a in i fit. Itaq; interitur f per a binarium, & ita f ipse

i est duplus. Quare e, g, h, i, f, deinceps sunt dupli. Ex secundo g & ultimo f detrahantur aequales ipsi e, qui sint k, l, relictis m, n excessibus; γ Erit ut m ad e; ita n ad omnes antecedentes e, g, h, i simul. Sed m est equalis ipsi e, dimidius videlicet dupli g. Ergo & n equalis ipsis e, g, h, i simul. At unitas & a, b, c, d aequales sunt l, ipsi e & k equalis. Itaq, totus l, n, id est, f equalis erit unitati & numeris a, b, c, d, e, g, h, i simul. Quare cum unitas & a, b, c, d, e, g, h, i metiantur ipsum f (Quia enim f ex e in d est factus, d metietur d ipsum f e eundemq, f, unitas & a, b, c, d, qui ipsum d metiuntur. Rursus cum i metiatur ipsum f, eundem f & metientur e, g, h, qui ipsum l metiuntur e ob proportionē duplam) nec alius ullus metiatur ipsum f. Erunt ergo unitas & numeri a, b, c, d, e, g, h, omnes partes quas f habere potest; quibus simul sumtis equalis cum sit f, erit f perfectus ex definitione. Si alius quidā numerus potest metiri ipsum f, esto o per p, ex quibus n fiat idem f, qui ex e in d. Cum ergo ex e primo in d quantum fiat idem numerus, qui ex p secundo in o tertium. Ergo ut e ad p, ita o ad d. Cum autem a, b, c, d sint proportionales ab unitate, & a primus, nullus prater illos & metietur d, Ergo nec o alius ab ipsis a, b, c positus; & cum sit e ad p, ut o ad d, neque e ipsum p metietur, qui, cum e sit primus, n inter se sunt primi.

γ 35. IX.

δ 7. IX.

ε π. IX.

ζ II. axio.

η 9. axio.

θ 13. IX.

κ 31. VII.

λ 23. VII.

μ 24. VII.

Et in sua ratione λ minimi, Et o ipsum eaque ac
 p ipsum d μ metiantur. Ergo cum d nullus pra-
 ter a b c, metiatur, p erit illorum aliquis. Sit
 idem qui b, Et quot b, c, d, totidem e, g, h, suman-
 tur, et erit q, ut b ad d ita e ad h, Et idem nume-
 rus fiet ex b in h, qui ex d in e, id est, qui ex o in p.
 Itaq, ut p ad b ita h ad o. Sed p est idem qui b.
 Ergo Et o idem qui h. Quod absurdum.
 Ponebatur enim alius.



E U C L I D I S

E L E M E N T O -

R U M

LIBER X.

Definitiones.



1. ^{1.} Ommensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur. Ita etiam 21 & 13. palmorum linea sunt commens. quia & unus palmus & dimidius & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsas metitur. Idem & de superficiebus, quas superficies eadem, & corporibus, qua corpus idem metitur, intelligitur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam communem mensuram

contingit reperiri. Tales sunt latus & Diagonius quadrati ut in propositione ultima demonstratur, & multa alia linea de quibus in propositionibus. Itemq; & superficies & corpora.

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spacium metitur. Antea linea commensurabiles longitudine sunt in 1. definitione explicata: hic verò longitudine alias incommensurabiles insuper intelliguntur, quarum quadrata per superficiem communem commensurabilia. Quæ quadrata in 47. I. appellantur potentia laterum vel linearum. Tales linea etiam sunt omnes longitudine commensurabiles non contra.

4. Incommensurabiles autem potentia, cum quadratis earum nullum spacium, quod sit communis illorum mensura, contingit reperiri. Intelligit eas, quæ neq; mensuram communem, quoad longitudinem, neque quoad quadrata habent.

5. His positis, ostenditur, cuicunque

que rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia; alias verò potentia solum, Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis. Dicit ad datam rectam alias infinitas & commensurabiles tum longitudine, tum potentia, & incommensurabiles posse inveniri, eamq; cujus respectu reliqua tales sunt dici p^{ri}m^o. Rationalem, quod semper ponatur certa & nota in quavis menura assumpta certa & nota, reliquis ut plurimum ignoratis.

6. Et huic commensurabiles sive longitudine & potentia, sive potentia tantum Rationales, Omnes linea quæ data quomodocumq; sunt commensurabiles dicuntur Rationales, non quidem positione, ut illa, sed quia in illa comparatione cum data commensurabiles inveniuntur. Ideoq; & lineas quarum quadrata 20 & 1000 sunt cuilibet quadrato, ut 16. vel 100. commensurabiles, recte etiam rationales appellamus.

7. Huic verò incommensurabiles,

S 5

Irratio.

irrationales vocentur. *Itidem hic ex adverso omnibus modis incommensurabiles ostendit, quas nec in longitudine neque in potestate exactus aliquis numerus exprimet.*

8. Et Quadratum, quod à proposita dicta recta fit, dicatur Rationale. *Non secus enim; ac linea illa certa & nota dicebatur rationalis, etiam quadratum ex ea factum Rationale est dicendum.*

9. Et huic commensurabilia quidem, Rationalia. *Ita & omnes superficies plane, Quadrata Rationalis linea proposita commensurabiles, Rationales sunt dicenda non positione sed collatione.*

10. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur. *Etiam superficies quaecumque, irrationales dicuntur, quarum linea sunt incommensurabiles rationali linea.*

11. Et rectæ, quæ ipsa possunt, irrationales. *Si nimirum sunt quadrata ipsa, intelliguntur hic latera per lineas; si verò sint alia quæpiam recti linea, re-*

cta

Et, describentes equalia quadrata spacijs incommensurabilibus.

POSTULATUM.

Quælibet magnitudo toties potest multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

AXIOMATA.

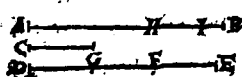
1. Magnitudo quocunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.
2. Magnitudo quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.
3. Magnitudo metiens magnitudinem totam & ablatam, metitur & reliquam.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Duabus magnitudinibus ab, c , inæqualib. propositis, si à majore ab aufertur majus a quàm dimidiū, & ab eo quod

quod reliquum bb est, rursus detraha-
tur majus bi , quàm dimidium; & hoc
semper fiat: Relinquetur tandem
quædam magnitudo, ib , quæ minor
erit proposita minore magnitudi-
ne, c .



Sumatur ipsius c mul-
tiplex d e proximè ma-
jor quàm ab , in partes

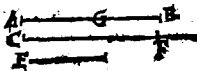
ipsi c equales divisa, quibus partibus multitudi-
ne æquales sint partes ah , hi , ib , in linea ab .
Cum ergo d e sit major quàm ab , & ex
d minus dimidio d g (vel etiam dimidi-
um, si d e esset dupla ipsius) ex ab verò plus di-
midio ah sit ablatum, erit reliquum g e reliquo
 hb majus, Rursus cum hb , quam ge sit minor,
& ex ge ablatum sit dimidium fg (vel minus
dimidio) ex hb verò majus dimidio hi erit re-
liquum fe id est c reliquo ib majus. Quod erat
propositum.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duabus magnitudinibus ab ,
 cd inæqualibus propositis, detraha-
tur semper minor ab de majore cd ,
alterna quadam detractione, &
reliqua

reliqua fd minimè præcedentem ab metiatur: incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines ab, cd .

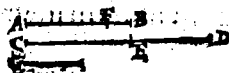
 Sin minus, esto cõmunis mensor e , qui vel æqualis est, ipsi ab vel minor. Facta ergò detractiõne ab ex cd quoties potest, æ relinquat fd , se minorem, & detracta fd ex ab relinquat se minorem gb &c. adeoq; relinquetur tandem vel ex cd vel ab quadam, ut gb minor ipsa e : Quoniam itaq; e metitur ipsam ab , & ab ipsam cf , etiam e & metietur ipsam cf , cumq; e metiatur etiam cd , & metietur totam etiam reliquam fd . Sed fd metitur ipsam ag ergò & e metitur ipsam ag , cumq; & metiatur ab & metietur etiam reliquam gb , major minorem. Quod absurdum.

α 1. X.
β 2. ax.
γ 3. ax.

PROPOSITIO III.

Problema 1.

Duabus ab, cd magnitudinibus commensurabilibus datis; maximam earum communem mensuram fb invenire.



Facta detractiõne alterna, metietur tandem fb ipsam cd , nisi datae duae

a 2. X.

duas ab, cd voluerimus esse incommensurabiles, eritq; bf maxima communis mensura. Cum

E 2. ax.

enim fb metietur ed , ed verò ipsam af , etiam fb metietur fa , & quia metitur seipsam, & etiam totam ab ; & ita etiam ipsam c equam metitur ab ; adeoq; cum c & e & d metiatur fb , & metietur totam cd , eritq; utriusq; ab &

y 1. ex.

cd mensura communis. Si quis verò etiam neget eam esse maximam, major sit g ; quæ & ab & cd metietur, & β ipsam ce , quam metitur, ab ; Cumq; metiatur & cd & ce , etiam d metietur e reliquam; quæ cum metiatur af , eandem af metietur etiam g : sed cum & ab & af metiatur d metietur etiam fb reliquam, maior minorem. Quod absurdum.

3. ax.

Hinc patet Corollarium.

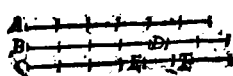
Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

PROPOS: VI

Problema 1.

Tribus magnitudinibus a, b, c commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Esse



Est d communis men-
sura a & b ; quæ si &
metitur c , a habetur

a 3. X.

propositum. Si enim major quadam quàm d ef-
set communis mensura, β metietur & d commu-
nem mensuram a & b major minorem. Si au-
tem d non metiatur c , erunt saltem commensu-
rabiles: Cum enim a, b, c , sint commensurabiles,
qualibet earum communis mensura, maximam
mensuram d ipsarum a & b β metietur. α Sit i-
taq; communis e inter c & d quæ tris maxima
trium a, b, c communis mensura. Sin minus,
major quàm e sit f . Quia ergo f metitur a &
 b , metietur etiam d . Cumq; metiatur etiam c
& d , β metietur communem earum mensuram.
 e , major minorem. Quod absurdum.

β cor. 3.
X.

Hinc manifesta sunt Corollaria.

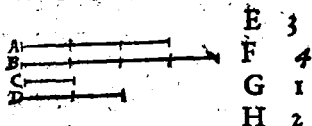
1. Magnitudo metiens tres magnitu-
dines, metitur quoque maximam ea-
rum communem mensuram.
2. Pluribus quam tribus magnitudi-
nibus datis, illarum communis maxi-
ma mensura inveniri potest. Si enim
sunt 4, invenitur prius trium.

LEMMA.

Si sint quotcūq; magnitudines, a, b, c ,
 d , & totidē etiā numeri, e, f, g, h , qui bini

in

in eadem ratione sumantur, in qua
binæ magnitudines; & ex æqualitate
in eadem ratione erunt, *A ad D* ma-
gnitudines & numeri *e ad b*.

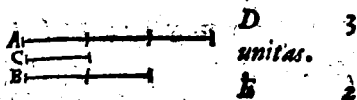


Demonstratio est ex V. & VII. manifesta.

PROPOS: V.

Theorema 3.

Gommensurabiles *a b* magnitu-
dines inter se rationem habent, quam
numerus ad numerum.



α 3. X.

*α Sit c earum mensura communis maxima,
qua quoties metietur a & b, toties unitas meti-
atur d & e numeros. Cum igitur magnitudo
c metiatur magnitudinem a quoties unitas nu-
merum d, erit ut c ad a ita unitas ad d: sed ut
est c ad b ita est unitas ad e, β Ergo ex quo ut
magnitudo a ad magnitudinem b ita numerus
d ad numerum e.*

β Lem. X

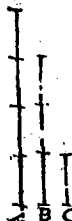
PRO-

PROPOS. VI.

Theorema 4.

Si duæ magnitudines *a, b*, proportionem habeant, quam numerus *d* ad numerum *e*; commensurabiles erunt *a, b*, magnitudines.

D 4 E 3. *Unitas.*



Quot unitates sunt in *d*, in tot partes æquales ipsi *c* sit divisa a magnitudo. Cum ergo sit ut *c* ad *a* ita unitas ad *d*, quia æquè metiuntur *c* ipsam *a* & unitas ipsum *d*; cumq; ponatur ut *a* ad *b*, ita *d* ad *e*, & erit ex æquo ut *c* ad *b* ita unitas ad *e*. Sed unitas metitur numerum *e*. Igitur & *c* metitur magnitudinem *b*. Sed & *c* metitur ipsum *a*. Ergo *a* & *b* eandem communem mensuram *c* habent, & β sunt commensurabiles.

& Lemma
4. X.

Corollarium.

β 1. def. X.

Si fuerint duo numeri & rectæ; dari potest alia recta, ad quam prior recta rationem habeat, quam numerus ad numerum. Si enim data recta secetur in tot partes æquales, quot

T

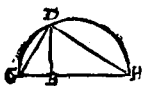
unita-

unitates continet alteruter numero-
rum; assumaturq; earundem partium
alia, quot unitates continet alter nu-
merus habetur propositum.

LEMMA.

Duobus numeris datis c & e , & li-
nea recta bb , oportet efficere ut nu-
merus c ad numerum e , sit quadra-
tum lineæ bb datae ad quadratum al-
terius bd .

α 13. VI.



Reperiatur bg , quæ sit ad hb
ut e ad c : & sitq; inter hb & bg
media proportionalis bd . Cum er-

β 29. VI.

C 5. E 2. gō sit ut c ad e , ita hb ad bg ; sed
ut hb ad bg , & ita quadratum ex hb ad qua-
dratum ex bd . Itaq; ut c ad e , ita quadratum ex
 hb ad quadratum ex bd .

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Incommensurabiles magnitudi-
nes a , b inter se proportionem non
habent, quam numerus ad nume-
rum.

α 6. X.

Si haberent & essent commensurabiles. Quod
est contra hypotesin.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines a, b proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines. (*longitud. scil.*)

Si enim commensurabiles acciperentur, & esset earum proportio, qua numerus ad numerum, contra hypotesin. a 5. X.

LEMMA.

Si sint tres quantitates a, b, c , continuè proportionales, & aliæ tres d, e, f continuè quoque proportionales; sitq; ut prima illarum a , ad tertiam c , ita prima d harum ad tertiam f ; erit & ut prima a illarum ad secundam b ; ita prima harum d ad secundam e .

D 29 E 42 F 36

Cum enim rationes a ad c & d ad f duplicata sint eadem, etiam dimidia a ad b , & d ad e eadem erunt.

PROPOSITIO IX.

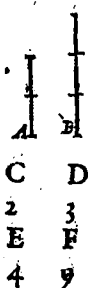
Theorema 7.

T 2

Quæ

Quæ à rectis lineis a b , longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se rationem habent, quam quadratus numerus e ad quadratum f numerum: Et quadrata ex a & b inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; & latera a b habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis a b longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; & quadrata ex a & b inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus e ad quadratum numerum f ; neque latera a & b habebunt longitudine commensurabilia.

α 5. X.



Cum rectæ a , b sint commensurabiles longit. a erunt ut numerus ad numerum. Sit autem a ad b ut c numerus ad numerum d , quarum quadrati sint e & f . Quoniam ergo a ad b est ut c ad d ; quadratum autem ex a ad quadratum

dratum ex b β habet duplicatam rationem laterum γ sicut $\mathcal{E}$ numerus quadratus e ad numerum quadratum f laterum c $\mathcal{E}$ d , erit eadem proportio quadratorum ex a $\mathcal{E}$ b , quæ est numerorum quadratorum e $\mathcal{E}$ f . G 20. VI.

I Deinde sit quadratum ex a ad quadratum ex b ut numerus quadratus e ad numerum quadratum f , erunt rectæ a $\mathcal{E}$ b longitudine commensurabiles. Cum enim rationes eadem quadratorum ex rectis a $\mathcal{E}$ b , $\mathcal{E}$ numerorum quadratorum e f β $\mathcal{E}$ γ γ II. VIII. sint duplicate suorum laterum a , b , $\mathcal{E}$ c , d , erit, ut numerus a ad numerum d , ita rectæ a ad rectam b , β eruntq; a , b , commensurabiles. δ 6. X.

Tertiò sint a b incommensurabiles, etiam quadrata ex ipsis non erunt ut numerus quadratus ad numerum quadratum; quia ita forent a , b , commensurabiles contra hypothesin. Deniq; quadratum ex a non habeat rationem ad quadratum ex b , quam numerus quadratus ad quadratum, erunt etiam longitudine incommensurabiles a $\mathcal{E}$ b ; si enim essent commensurabiles, etiam quadrata ex ipsis essent ut numerus quadratus, ad quadratum, contra hypothesin.

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

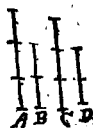
Si quatuor a b c d magnitudines

T 3

pro-

proportionales fuerint, prima a verò secunda b fuerit commensurabilis; & tertia c quartæ d commensurabilis erit. Et si prima a secunda b fuerit incommensurabilis, & tertia c , quartæ d incommensurabilis erit.

α 5. X.



β 6. X.

γ 7. X.

E F
3 2

Cum enim a & b sint commensurabiles, a habebunt rationem numerorum, e ad f . Est verò etiam c ad d ut a ad b , ergo etiam c ad d est ut e ad f . β Sunt ergo inter se commensurabiles.

Contra si a & b sint incommensurabiles, etiam γ non sunt ut numerus ad numerum. Ideoq; nec c ad d , quæ ponuntur ut a ad b , erunt ut numerus ad numerum, adeoq; etiam c & d incommensurabiles erunt.

LEMMA.

Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quam Quadratus numerus ad Quadratum numerum.

α 26. IIX.

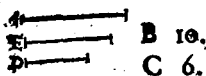
Inventi plani non similes, omnes non a habent rationē quam quadratus ad quadratum, Sunt q; tales

tales numeri primi omnes, & quorum unus quadratus, alter non, &c.

PROPOSITIO XI.

Problema 3.

Propositæ rectæ lineæ a invenire duas rectas lineas d & e incommensurabiles, alteram d quidem longitudine tantum, alteram e verò etiam potentia.



α Assumtis numeris b & c , & investigetur recta d , ad cuius quadratum sit quadratum rectæ a , ut b ad c , erit d ipsi a longitudine tantum incommensurabilis. Quia enim quadratum ex a ad quadratum ex d est, ut numerus b , ad numerum c , sed b & c non sunt quadrati: Ergò quadratum ex a ad quadratum ex d non erit ut numerus quadratus ad numerum quadratum: γ Ideoq; a & d sunt rectæ longitudine incommensurabiles; & longitudine quidem tantum. Cum n . quadrata earum habeant proportionem numerorū b ad c , d erunt commensurabilia. Deinde inter rectas a & d longitudine tantum incommensurabiles

aper lemma
ma 10. X.
& per lemma
ma 6. X.

γ 9. X.

δ 6. X.

T 4

& invē-

e 13. X.

e inveniatur media proportionalis e, quæ & longitudine & potentia incommensurabilis erit ipsi a. Quia enim quadratum ex a, ad quadratum ex e est, ut a ad d: sed a ipsi d est longitudine incommensurabilis; & erit ergo quadratum ex a quadrato ex e incommensurabile, & ita recta a e etiam potentia incommensurabiles.

ζ 10. X.

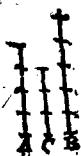
PROPOSITIO XII.

Theorema 9.

Quæ a b, eidem c magnitudini sunt commensurabiles, & inter se a & b sunt commensurabiles.

α 5. X.

ς 4. VIII.



D 10 E 8

F 2 G 3

H 5 I 4 K 6

Cum enim a, c sint commensurabiles, a habent rationem numerorum d, e, sicut & c b numerorum f, g. Assumtis autem h, i, k, tribus numeris minimis in rationibus datis d ad e, & f ad g; erit h ad i, ut d ad e, id est, a ad c; & i ad k, ut f ad g, id est, c ad b. Itaque ex aquo erit a ad b, ut h ad k. Id est, ut numerus ad numerum, & ita γ commensurabiles.

γ 6. X.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 10.

Si

Si sint duæ magnitudines ab , & altera a quidem eidem c sit commensurabilis, altera b verò incommensurabilis: incommensurabiles erunt magnitudines ab .

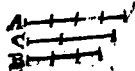
Sin minus, & eidem a sit commensurabilis b , & 12. X. & erunt etiam b & c commensurabiles, contra hypothesis.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 11.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera a autem ipsarum magnitudini cuiusdam c incommensurabilis fuerit: & reliqua b eidem c incommensurabilis erit.

Sin minus, cum a ipsi b sit commensurabilis, & 12. X. & erant etiam a & c commensurabiles, contra hypothesis.



Scholium.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

T 5

LEM-

LEMMA.

Duabus datis rectis inæqualibus
 bg & c ; invenire id, quo major bg
 plus potest quàm minor, c .

α I. IV.

63. I. II.
 γ 47. I.



Descripto semicirculo super hg
 a aptetur hd æqualis ipsi c , jun-
 ctis dg ; plus poterit recta hg
 quàm hd vel c quadrato rectæ
 dg . Cum enim hdg angulus ϵ sit
 rectus erit quadratum ex hg æquale γ qua-
 drato ex dh . & $d'g$. Atq; sic hg recta plus potest
 quàm c quadrato $d'g$.

PROPOS: XV.

Theorema 12.

Si quatuor a, b, d, e , rectæ lineæ
 proportionales fuerint, prima a ve-
 rò tantò plus possit, quàm secunda b ,
 quantum est Quadratum rectæ lineæ
 c , sibi commensurabilis longitudine;
 Et tertia d tantò plus poterit, quàm
 quarta e , quantum est quadratum
 rectæ f , lineæ sibi cōmensurabilis lon-
 gitudine; Quod si prima a tanto plus
 pos-

possit quàm secunda b , quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia atantò plus poterit, quàm quarta e , quantum est quadratum rectæ lineæ f sibi longitudine incommensurabilis.



Cum sit ut a ad b , ita d ad e ,
 a erunt etiam ex illis rectis de-
 scripta quadrata ut rectæ; sed $\alpha 22$. VI.

quadratum ex a est β aequale
 quadratis ex b , c , & quadratum β ex hy-
 ex d quadratis ex e , f . Ergo erit pothesi.
 ut quadrata ex b , c ad quadra-
 tum ex b ; ita quadrata ex e , f , ad

quadratum ex e : Et dividendo, ut quadratum
 ex c ad quadratum ex b ; ita quadratum ex f ad
 quadratum ex e . Ergo ut recta c ad rectam b ;
 ita recta f ad rectam e . Et convertendo ut b ad
 c , ita e ad f . Cum autem sit ut a ad b , ita d

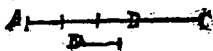
ad e , & ut b ad c , ita e ad f , erit etiam ex æ-
 quo, ut a ad c , ita d ad f . γ Quare a si fuerit, $\gamma 10$. X.
 longitudine commensurabilis ipsi c , etiam d ipsi
 f commensurabilis longitudine erit, & si incommensurabilis, incommensurabilis.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 13.

Si duæ magnitudines ab, bc commensurabiles componantur; & tota magnitudo ac utriq; ipsarum commensurabilis erit. Quod sit tota magnitudo ac , uni ab ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines ab & bc commensurabiles erunt.

æ 3. X.



æ Sit communis mensura d . Cum ergo d metiatur ab, bc , etiam

æ 3. ax.

ac totam β metietur, eruntq; ac & ab commensurabiles propter communem mensuram d ; sicut & ac & bc ; eaq; propter utriq; ab & bc commensurabilis est ac . Deinde sit tota ac alteri; ex quibus composita est ut ab commensurabilis, erunt ab & bc commensurabiles. Assumpta enim communi mensura d , erit eadem d reliquæ bc mensura. Ideoq; commensurabiles sunt ab, bc propter communem mensuram d .

Corollarium

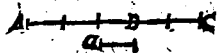
Si tota magnitudo ac ex duabus ab, bc , composita, commensurabilis fuerit

fuerit alteri ab ipsarum, eadem ac & reliquæ bc commensurabilis erit.

PROPOS: XVII.

Theorema 14.

Si duæ magnitudines ab, bc incommensurabiles componantur, & tota magnitudo ac utrique ab , & bc ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo ac uni ipsarum ab incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines ab , & bc incommensurabiles erunt.



Si non utriq; tantum alteri, ut ab , sit commensurabilis, habens

d mensuram communem. Itaq; d metiens totam ac , & ablatam ab , etiam a metietur reliquam bc , & commensurabiles erunt ab, bc , contra hypotesin. Deinde tota ac uni ipsarum ab incommensurabilis existens, etiam alteri bc incommensurabilis erit. Si non, etiam contra hypotesin ipsi ab commensurabilis & foret.

$\alpha 3. ax.$

$\beta 16. X.$

Corollarium.

Si tota magnitudo ex duabus
compo-

composita, incommensurabilis sit alteri illarum, eadem & reliquæ incommensurabilis est.

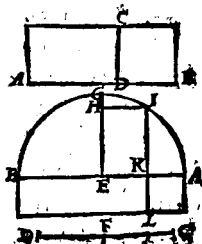
LEMMA I.

Si ad aliquam rectam ab applicetur parallelogrammum ac , deficiens quadrata figura bc ; parallelogrammum ac applicatum æquale est ei rectangulo quod sub segmentis ad , ab , vel dc , rectæ ab , ex applicatione factis continetur.

Quod patet ex 28. VI.

LEMMA 2.

Duabus datis rectis ab, cd , inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore cd descripti ad maiorem ab applicare, ita ut deficiat figura quadrata la .



Бяргэ

Supra ab describatur semicirculus, sitq; e g
 radius ad b perpendicularis. Secta cd bifariam
 in f , sumatur eh equalis cf recta; & h puncto
 agatur hi parallela ipsi ae , & i puncto ikl pa-
 rallela ipsi ge , sumtaque kl equali ipsi ak , per-
 ficiatur lb rectangulum, & la quadratum.
 Dico lb rectangulum quarta parti quadrati
 cde esse aequale, applicatum ad rectam ab ; de- a 13. VI.
 ficiens figura quadrata la . Quoniam k i a
 media proportionalis est inter ak , kb erit re 734. I.
 ctangulum akb quadrato k i aequale; id est, 4. II.
 quadrato ex βe vel cf , & quod quarta pars
 est quadrati cde .

LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ ab, cd , inæquales;
 & ad maiorem ab applicetur quarta
 pars lb Quadrati, ex minore cd de-
 scripti, deficiens figura quadrata la ;
 non erunt segmenta ak, kb , quæ ex
 applicatione sunt, æqualia.

Si æqualia sunt segmenta ak, kb a siqui-
 dem parallelogrammum applicatum ad ab de- a per
 ficiens figura quadrata ex ak descripta, æquale Lemma
 est rectangulo akb : Est verò sub æqualibus 17. X.
 ak, kb quadratum: erit parallelogrammum
 dictum

dictum quadratum ex $b k$, dimidio ipsius $a b$ descriptum, & quadratum ex $a b$ quadruplum ipsius parallelogrammi. Cum autem ex hypotbesi quadratum ex $c d$ ejusdem parallelogrammi applicati sit quadruplum, nempe quartæ parti quadrati ex $c d$. Igitur quadrata rectorum $a b$, $c d$ sunt equalia, ipsæq; rectæ contra hypotbesin æquales.

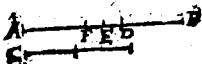
PROPOSITIO XIX.

Theorema 15.

Si fuerint duæ rectæ lineæ $a b$ & c inæquales, quartæ autem parti Quadrati, quod fit à minori c æquale parallelogrammum ad majorem $a b$ applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes $a d$, $d b$, longitudine commensurabiles ipsam dividat; major $a b$ tantò plus poterit, quàm minor c ; quantum est quadratum rectæ lineæ $f d$ sibi longitudine commensurabilis. Quod si major $a b$ tantò plus possit, quàm minor quantum est quadratum rectæ lineæ $f d$ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati,

æ 2. Lem.
17. X.

drati, quod fit à minori & æquale parallelogrammum ad maiorem & applicetur, deficiens figura quadrata, in partes ad , db longitudine commensurabiles ipsam dividet.



Quoniam enim $a d \beta$ major est quam $d b$, $\beta 2$. lem.
 cetur $a b$ bifariam in e , ipsiusq; $e d$ sumatur $\gamma 17$. X.
 qualis $e f$. Cum autem tota $a e$ & $e b$, ablataq;
 $e d$ & $e f$ sint æquales, erunt & reliquæ $a f$, $d b$
 æquales. Cumq; recta $a b$ in æqualia in e , itemq;
 in inæqualia in d , sit secta, erit rectangulum $\gamma 5$. II.
 super $a d b$ una cum quadrato $e d$ æquale qua-
 drato ex $e b$. & quadruplum rectanguli $a d b$ &
 quadrati ex $e d$ æquale erit quadruplo quadrati
 ex $e b$: Sed quadruplo rectanguli $a d b$ æquale
 est quadratum ex c : & quadruplo quadrati ex
 $e d$ æquale est quadratum ex $f d$ (cum quarta
 pars quadrati ex tota aliqua recta descripti æ-
 qualis sit quadrato ex totius rectæ dimidio. descri-
 pto) & quadruplo quadrati ex $e b$ æquale est qua-
 dratum ex $a b$. Quadratum igitur ex c & $f d$ jun-
 ctæ æqualia sunt quadrato ex $a b$; rectaq; $a b$ puer-
 potest recta c quadrata rectæ $f d$. Hanc dico com-
 mensurabilem toti $a b$. Cum enim $a d$, $d b$ sint com-
 mensurabiles & erit tota $a b$ paritudo $d b$ comensura-
 bilis longitudine: cum item ipsa b composita ex
 $d b$ &

s 12. X.

db & af sit longitudine cōmensurabili (qua dupla est ipsius db) Ergo cum utraq; a b & composita ex db, af longitudine sit cōmensurabilis ipsi db, & erunt etiam a b & composita ex db, af longitudine inter se cōmensurabiles: adeoq; cum a b composita ex af, db tanquam una recta & fd cōmensurabilis sit. longitudine composita ex af, db, eadem a b reliqua fd longitudine cōmensurabilis erit. Ergo a b plus potest quā c quadrato recta fd longitudine sibi cōmensurabilis.

Contra si a b plus potest quā c quadrato recta sibi longitudine cōmensurabilis & c. erunt segmenta a d, db cōmensurabilia. Eodem nimirā modo ostenditur a b plus posse quā c quadrato recta fd, longitudine sibi cōmensurabilis. Cum autem a b tota composita ex fd, af & db tanquam una sit lōgitudine cōmensurabilis ipsi fd, eadem cōmensurabilis & erit reliqua ex af, db composita. Est verò & af, db, composita cēdupla cōmensurabilis ipsi db. Itaq; cum utraq; a b & db composita ex af, db longitudine sit cōmensurabilis; erunt etiam a b, db longitudine cōmensurabiles: adeoq; cum tota a b, ex a d, db composita ipsi db sit cōmensurabilis longitudine, ipsa a d, db etiam inter se cōmensurabiles & erunt longitudine.

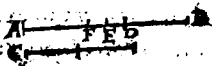
§ Cor. 16.
X.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16.

31

Si fuerint duæ rectæ lineæ ab , & c inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore c , æquale parallelogrammum ad maiorem ab applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major ab tantò plus poterit quam minor c , quantum est quadratum rectæ lineæ fd sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major ab tantò plus possit, quam minor c , quantum est quadratum rectæ lineæ fd sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore c , æquale parallelogrammum ad maiorem ab applicetur, deficiens figura quadrata, in partes ad & db longitudine incommensurabiles ipsam dividet.



Omnia constituentur ut in præcedenti propositione, nisi ut ad , & db fiant incommensurabiles longitudine. Quod cum ita sit & erit etiam tota ab parti db longitudine incommensurabilis. Sed db est commensurabilis sua dupla ex db , at composita.

a. 17. X.

β 14. X.

Igitur cum duarum commensurabilium, db & composita ex db, af , una db incommensurabilis sit ipsi ab , etiam reliqua ex db, af composita eadem ab incommensurabilis β erit: adeoque cum ab ex af, fd & db composita sit incommensurabilis longitudine composita ex af, db ; erit eadem ab etiam reliqua fd incommensurabilis, atque sic ab plus potest quam c , quadrato rectae fd longitudine sibi incommensurabilis.

Contra in partes ad, db incommensurabiles divisa ostenditur linea ab . Iisdem enim, ut prius retentis, erit ab ipsi fd incommensurabilis. Itaque cum tota, ab , ex fd, af, db composita, ipsi fd longitudine sit incommensurabilis, eadem etiam ab reliqua ex af & db composita incommensurabilis erit. Sed una recta ex af & db ipsi db longitudine est commensurabilis, utpote dupla. Duarum itaque commensurabilium, composita ex af, db & db ; ipsa composita ex af, db incommensurabili ipsi ab , β erit etiam reliqua db eadem ab incommensurabilis. Cum itaque tota ab , composita ex ad, db longitudine incommensurabilis sit ipsi db , α erunt & ipsae ad, db inter se incommensurabiles.

Hactenus actum est de commensurabili & incommensurabili. Nunc transeundum est ad Rationales & Medias.

LEM

LEMMA I.

Quoniam demonstratum est, lineas longitudine cōmensurabiles, omnino & potentia cōmensurabiles esse, potentia verò commensurabiles non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse & incōmensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit lōgitudine, illam vocari Rationalem, & ipsi cōmensurabilem non solum longitudine, sed etiam potētia: longitudine enim cōmensurabiles, omnino & potentia cōmensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, siquidem & longitudine, dicetur & sic, Rationalis & commensurabilis ipsi longitudine & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

LEMMA II.

EX PROCLO.

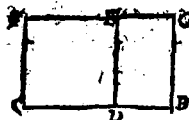
Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum cōmensurabiles; atq; ob id rursus dicuntur Rationales & cōmensurabiles inter se, quatenus Rationales; cōmensurabiles, inquam, inter se, vel longitudine & potētia vel potentiâ solum: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; si verò potētia inter se solum sunt commensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales; potentia solum inter se commensurabiles.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ, cd , bd , erit, ut prima cd ad secundam db : ita quadratum df , quod fit à prima cd , ad rectan-

angulum dg , quod sub duabus illis
rectis lineis continetur: & ut secunda
 db ad primam de , ita rectangulum dg
sub ipsis, ad quadratum ce ex prima.

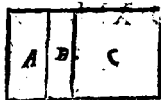
Cum enim rectangula ce ,



*ergo sint eque altæ, & sunt ut a , i. VI.
latitudines.*

LEMMA IV.

Spacium a Rationali
li spacio b commensu-
rahile & a ipsum Ra-
tionale est.



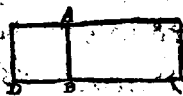
*Sit enim c quadratum rationale. Cum ergo b
sit rationale, & erit Rationali c commensurable: a 9. def.
Cumq; a ipsi b sit commensurable, etiam a & X .
 c tanquam comensurabilia ipsi b , inter se β com- β 12. X.
mensurabilia erunt, & sic etiam Rationali c com-
mensurable a , ipsum quoq; & rationale erit.*

PROPOSITIO XX.

Theorema 17.

Quod sub Rationalibus, longitu-
dine commensurabilibus, rectis lineis
 ab , bc , secundum aliquem prædicto-
rum modorum, (in lemmate secundo
propositorum, ut longit.) continetur Re-
ctangulum, ac , rationale est.

α 9. def.
 β 1. VI.
 γ 10. X.



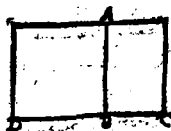
Super alterutra illarum,
 ut ab fiat quadratum ad α
 rationale. Quia autem ab ,
 id est, bd , & bc rationales
 commensurabiles sunt longitudine, & β est, ut
 db ad bc , ita ad ad ac , erunt etiam ad & ac
 commensurabilia, atque ad rationale, commensu-
 rabile ac etiam Lemma rationale.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 18.

Si Rationale ac ad Rationalem ab
 applicetur, latitudinem bc efficit Ra-
 tionalem, & ei ab , ad quam applica-
 tum est, longitudine commensura-
 bilem.

α 12. X.
 β 1. VI.
 γ 6. def.
 X.



Ex ab fiat quadratum,
 quod est rationale, erunt ad ,
 & rationalia; adeoque, ac com-
 mensurabilia. Sed & ut ad ad
 ad ac , ita est db , id est, ab
 Rationalis ad bc γ rationalem.

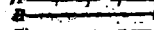
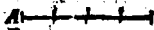
LEMMA I.

Recta linea potens spacium irra-
 tionale, irrationalis est.

Si enim linea illius quadratum aequale sit spacio irrationali, ipsum irrationale esse oportet, aut quadratum illud foret contra hypothesin rationalem α propter ipsam lineam rationalem. a, 20. X.
12. def. X.

LEMMA 2.

Duas rectas b & c Rationales potentia solum commensurabiles invenire.



Haec, ut β rationales longitudine commensurabiles, duplices tantum sunt; Aut enim illarum una, ut b , longitudine est commensurabilis data a , & cum ipsi a aequali assumpta b rationali α

inveniatur potentia tantum commensurabilia, vel longitudine tantum incommensurabilis, quae & ipsa β rationalis est: Aut neutra illarum longitudine ipsa a est commensurabilis, & cum primum b : & huic c α inveniatur potentia commensurabilis. Erunt ergo rationali a potentia commensurabiles γb & δc , ipsae quoque β rationales. a, 20. X.
12. def. X.

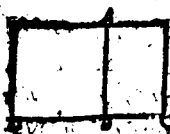
PROPOSITIO XXII.

Theorema 19.

Quod sub Rationalibus $a b$, $b c$ potentia tantum commensurabilibus
V s rectis

γ ex cō.
fir.
 δ II. X.

rectis lineis continetur rectangulum,
 & c, Irrationale est: & recta linea i-
 psum potens, rationalis est. Vocetur
 autem Media.



Ex altera, ut ab, descri-
 ptum sit quadratum ad, quod
 rationale est. Quoniam vero
 a est ut b d id est, ab ad bc;
 ita a d ad a c; & ab, bc

et VI.

§ 10. X.

γ 10. def.

X.

δ per

Lemma

I. 21. X.

§ 17. VI.

sunt longitudine incommensurabiles; § erunt &
 a d, a c incommensurabilia; cumq; quadratum
 ad sit rationale, γ irrationale erit a c rectangu-
 lum, & ipsi aequale quadratum describens linea
 d irrationalis. Hac autem linea cum inter ab
 & bc sit mediae proportionalis, vocatur Media,
 & rectangulum dicitur medium, quod vel sub
 duabus potentia tantum commensurabilibus
 continetur, ut a c: vel quod alteri cuiquam, sub
 talib; lineis comprehenso, aequale est, quia aequa-
 le est quadrato super media proportionali de-
 scripto.

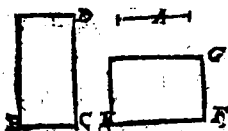
PROPOSITIO, XXIII.

Theorema 20.

et 45. I.

Quod à Media a fit, ad Rationalem b c a
 applicatam, latitudinem efficit Rationalem
 c d, & e i b c, ad quam applicatum est, longi-
 tudine incommensurabilem.

Quoniam



Quoniam a est Ma-
dia, potest rectang. e g
duabus rationalibus e
f, f g potentia tantum
commensurabilibus cō-
tentum, & rectangula

b d, e g sunt equalia, laterum e reciprocè pro-
portionata, ut b c ad e f; ita f g ad c d. y Et ut
quadratum ex b c, ad quadratum ex e f, quæ su-
per rationalibus lineis sunt commensurabilia;
ita quadratum ex f g, ad quadratum ex c d in-
ter se commensurabilia, ipsæq; rectæ f g & c d
commensurabiles; & cum f g sit rationalis, u-
traq; etiam Rationalis erit. Sed c d ipsæ est
incommensurabilis. Cum enim e f, f g sint ratio-
nales potentia tantum commensurabiles: a f g,
ut e f ad f g, ita quadratum ex e f, ad rectang.
e g, d erit quadratum ex e f rectangulo e g in-
commensurabile, & sic rectangula b d. At qua-
dratum ex e f commensurabile est quadrato ex
c d (quia lineæ illæ sunt rationales, & potentia
tantum commensurabiles.). Itaq; cum eidem
quadrato ex e f rectangulum b d sit incommen-
surabile, etiam b d rectang. & erit incommensu-
rabile; quadrato c d. Cum verò c d & b c s sint
ut quadratū c d & rectang. b d incommensura-
bilia: derunt ipsæ quoq; longitudine incommen-
surabiles. Est ergo rationalis c d, & rationali b
c potentia tantum commensurabilis seu longitu-
dine incommensurabilis.

PRO.

§ 14. VI.

y 22. VI.

§ 10. X.

§ Lemma
19. X.

§ 13. X.

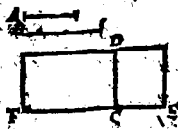
PROPOSITIO XXIV.

Theorema 21.

Mediæ a commensurabilis, b , Media est.

α 45. I.

β 43. X.



Sit d rationalis, ad quam a applicetur rectang. d e a quate quadrato ex a , β arit ce rationalis ipse d longitudi-
dine incommensurabilis. Eisdē

a d a applicetur rectangulū d f a quate quadrato ex b . Cum ergo a, b sint commensurabiles; ipsarum quadrata, id est, rectangula d e, d f etiā commensurabilia erunt. γ . Est autem, ut d e ad d f ; ita recta e c ad rectam c f . Et e c & c f d longitudine sunt commensurabiles. Sed e c est rationalis, ipse c d potētia tantum commensurabilis. Itaq; c f eidem c longitudine incommensurabilis erit. Et quia rationalis est c f , cum rationali c d commensurabilis sit potētia, potētia etiam commensurabiles erunt c d, f . ζ Ac proind b recta potens rectangulum d f sub rectis c d, c f potētia tantum commensurabilibus, media est.

γ 1. VI.

δ 10. X.

ϵ 14. X.

ζ 22. X.

Corollarium.

Spacium d f Medio spacio d e commensurabile, medium est.

Patebat

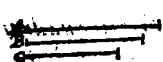
*Patet, quod utraq; continentur rectis
potentiis tantum commensurabilibus.*

LEMMA 1.

Gongruūt hoc omniquaq; cum
lemmate 1, 19. propos. nisi quod lo-
co Rationalis semper legendum est
Medium.

LEMMA 2.

Duas rectas Medias $a b$ longitudi-
ne commensurabiles; item duas $a c$
potentia tantum commensurabiles
invenire.



*Sibi ipsi a Media longitudine;
c verò eidem a potentia tan-
tum commensurabilis inveni-
tur, utraq; etiam a erit Media, a b quidem lon-
gitudine, a c verò potentia tantum commensu-
rabiles media.*

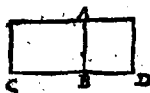
224. X.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

Quod sibi Medijs Longitudine
commensurabilibus rectis lineis $a b$,
 $b c$ continetur rectangulum $a c$, Me-
dium est.

Ex



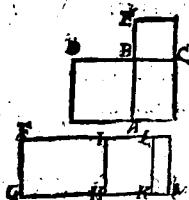
Ex ab media fiat quadra-
tum ad, quod erit Medium,
cum a sit, ut db ad bc, ita
ad ad ac: sunt autem db id

est ab & bc longitudine commensurabiles. I-
taq, ad, ac & erunt commensurabilia. & Quare
spacium ac medio ad commensurabile Medi-
um est.

PROPOSITIO XXV.I.

Theorema 23.

Quod sub mediis potentia tantum
commensurabilibus rectis lineis ab,
bc continetur rectangulum, ac, vel
Rationale est, vel Medium.



Descriptio quadrati
ex ab & bc a medijs ad
Rationalem fgβ. appli-
centur rectangula fh, h
l, lm aequalia spacijs ad,
ac, ce, ut fm fiat re-
ctangulum unum. Cum
itaque ad & ce sint me-

dia, etiam fh, lm erunt media, & eorumq, lati-
tudines gh, km rationales propter fgkl & a-
quales rationales, quibus sunt applicata, & po-
tentia cōmensurabiles erunt. Cumq, ab, bc sine
potentia commensurabiles, etiam earum qua-
drata ad, ce, & his aequalia rectangula fh, lm

com-

commensurabilia erant. & Sed ut fh ad l m ita s i. VI.
 recta gh ad km. ζ Sunt igitur gh, km longi ζ 10. X.
 tudine inter se commensurabiles. Et quia ra- ζ 20. X.
 tionalis fg potentia sunt commensurabiles; etiā
 rectangulum sub gh, km comprehensum & ra-
 tionale erit. & Quia verò est, ut db ad bc; ita a
 d ad ac: & ut ab ad b, ita a cad ce; erit ut
 a d ad ac; ita a e ad ce; cum sit b d ad b c, ut
 a b ad b c, quia utriq; utraq; equalis. Proinde
 & ipsis equalia rectangula fh, hb, l m erunt
 proportionalia, ut & ipsorum Bases gh, hk,
 km: & adeoq; rectangulum sub gh, km ratio-
 nale quadrato ex hk erit aequale quod & ipsum ζ 17. VI.
 & ipsius latus hk rationale est; & ob id fg ra-
 tionalis exposita longitudine vel potentia & com- ζ 6. def.
 mensurabilis est hk. Er si hk ipsi hi id est fg
 longitudine commensurabilis fuerit, & erit re-
 ctangulum hl rationale: Sed sit tantum poten-
 tia & erit Medium. Est ergo rectangulum sub
 Medijs potentia tantum commensurabilibus vel
 Rationale vel Medium.

Scholium.

Facilius quam per 45. I. potest dato
 ac rectangulo æquale fieri ad b: ratio- ζ 12. VI.
 nalem datam, si tribus his a applice-
 tur quarta proportionalis bk. Rectan- ζ 16. V.
 gulum enim sub extremis bi, bk & æ-
 quale est rectangulo ac ex inter medijs,
 Siqui-

γ 10. X.

δ 22. X.

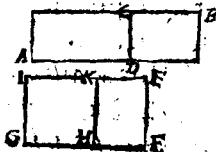
Siquidem verò rectangulum sub duabus mediis, potentia tantum commensurabilibus vel rationale vel medium est docetur propo. 18. quomodo inveniende sint illæ mediæ quæ comprehendunt rationale; & 29. quæ Medium. Atq; sic ex hætenus demonstratis colligitur, γ Rectangulum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus; Rationale esse, potentia verò Medium. Rursus δ rectangulum sub Mediis longitudine commensurabilibus esse Medium: Sub Mediis verò potentia tantum commensurabilibus vel Rationale vel Medium esse. (Sub Mediis verò nec potentia nec longitudine commensurabilibus, est Medio Medium, aequali rectangulo sub Rationali & Irrationali Mediæ; quam speciem Euclides non habet.)

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 24.

Medium *ab* non superat Medium
ac Rationali. *db*.

α 45. I.



Si enim *db* est Rationale, posita *e f* linea rationali applicetur *e g* medio *ab* aequali, & medio *ac* rectangulo *eb* aequali, eritq; *db* rationa-

rationali aequale $k g$. Cum ergo Media $e g$, $e h$ ad
 rationalem $e f$ sint applicata β , erunt $f g$, $f h$ Ra-
 tionales incömensurabiles longitudine ipsi $e f$ ra-
 tionali. Cum item rationale $h i$ ad rationalem
 $h k$, id est, $e f$ sit applicatum, γ erit $h g$ rationa-
 lis longitudine ipsi $e f$ cömensurabilis. Sed $e f$ ipsi
 $f h$ longitudine est incommensurabilis. Ergo $h g$
 eadem $f h$ lögitudine incömensurabilis d'erit. δ Ve-
 ritas ut $f h$ ad $h g$, ita quadratum ex $f h$, ad re-
 ctangulum $f h g$. Itaq, quadratü ex $f h$ incömen-
 surabile ζ erit rectangulo $f h g$. Sed quadratü
 ex $f h$ cömensurabile est quadratum ex $h g$ (quia
 utraq, ex rationalibus lineis sunt descripta) ad-
 roq, duo quadrata ex $f h$, $h g$ simul cömensura-
 bilia sunt quadrato ex $f h$; ξ η rectangulum $f h g$
 cömensurabile est his sub $f h$, $h g$ sumto rectan-
 gulo (quia duplum) itaq, quadrata $f h$, $h g$ simul
 incömensurabilia d'erüt rectangulo bis sumto sub
 $f h$, $h g$. θ Quare ξ compositum ex quadratis
 rectarum $f h$, $h g$, ξ ex bis sumto rectangulo
 $f h g$ incömensurabile est composito ex quadratis
 rectarum $f h$, $h g$. Sed quadratis $f h$, $h g$, una
 cum rectangulo $f h g$ bis sumto κ aequale est qua-
 dratum $f g$. Ergo quadratum ex $f g$, composit-
 o ex quadratis rectarum $f h$, $g h$ incommensu-
 rabile erit. Quod compos. cum sit λ rationale,
 etiam ipsi incommensurabile quadratum ex $f g$
 erit irrationale, ξ sit etiam recta $f g$ irratio-

 γ . 21. X. δ . 14. X. ξ . 3. Lemma
19. X. ζ . 10. X. η . 16. X. θ . 17. X. κ . 4. II. λ . 4. Lem-
ma 19. X.

X

nalis,

X. *alis, contra hypotbesin, quæ illam longitudine incommensurabilem ipsi eponobat.*

X.

Scholium.

Rationale eg superat Rationale eb kg Rationali.

a. X. d. e. f.

- m. X. I.

γ. 12. X. II.

γ. 13. X. III.

X.

δ. 4. Lem.

ma 19. X.

X. d. I.

Quia enim e g, e h sunt rationalia, a erant eadem commensurabilia quadrato rationalis exposita; & quare & inter se commensurabilia. Itaq; cum totum e g ex e h, k g compositum, ipsi e h sit commensurabile; erit quoq; idem e g reliquo k g γ commensurabile. Sed e g est rationale. Ergo & k g Rationale erit.

PROPOSITIO XXIX.

Problema 4.

Medias ad invenire, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

a. Lemma

2. 21. X.

β. 13. VI.

γ. 12. VI.

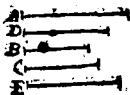
Inter a assumtas a, b rationales potentia tantum commensurabiles, & cadat media c, & γ fiat, ut a ad b, ita c ad d. Erunt c d media potentia tantum commensurabiles, quæ comprehendunt Rationale. Rectangulum sub a b rationalibus poten.

Potentia tantum commensurabilibus δ Medium δ 22. X.
 est, & c illud potens e Media. Sed ut a ad b, ita ϵ 17. VI.
 est c ad d: a & b sunt potentia tantum commensurabiles. ζ Ergo & c, d: & propter c Mediam ζ 10. X.
 etiam d e Media. Sunt itaq, invente c d media η 24. X.
 potentia tantum commensurabiles; Quæ etiam
 Rationale continebunt. Cum enim sit ut a ad b,
 ita c ad d; etiam permutando est, ut a ad c, ita
 b ad d. Sed ut a ad c, ita c ad b. Ergo ut c ad
 b, ita b ad d: ideoq, b media proportionalis in-
 ter c & d e poterit rectangulum sub c d compre-
 hensum. Sed quadratum ex rationali, est ratio-
 nale. Ergo & rectangulum sub c d, rationale
 est.

PROPOSITIO XXIX.

Problema 5.

Medias de invenire, potentia tan-
 tum commensurabiles, quæ Medium
 contineant.



a Sumtis tribus potentia tantum commensu-
 rabilibus, interq, a, b β Media d γ fiat, ut b ad
 X 2

a Lemma
 2. 21. X.
 c 13. VI.
 y 12. VI.

δ 22. X.
 ϵ 17. VI.
 ζ 10. X.

η 24. X.

θ 16. VI.

c , ita d ad e . Erunt d, e medie potentia tantum
 commensurabiles continentes Medium. Cum a, b
 rationales potentia tantum commensurabiles sint
 ex illis rectangulum δ erit medium. & illud δ pa-
 tens d media. Sed, quia, ut b ad c potentia tan-
 tum commens. ita d ad e & etiam potentia tantum
 commensurabiles sunt d & e , & Media d comen-
 surabilis e η media. Sic itaq; d, e media potentie
 tantum commensurabiles, sunt inventa; qua etiam
 continebunt Medium. Quia enim est, ut b ad c ,
 ita d ad e ; & permutando, ut b ad d , ita c ad e
 erit. Ut autem b ad d , ita d ad a ; erit ergo d ad a
 ut c ad e . Itaq; rectangulam sub d, e , & equale
 est ei, quod sub a, c . Hoc autem sub rationalibus
 potentia solum commensurabilibus & δ Irratio-
 nale est & Medium. Ergo & rectangulum sub
 d, e .

Scholium. i.

Duos numeros planos similes in-
 venire.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

Assumptis quatuor quibuscumque numeris pro-
 portionalibus, ut a ad c , ita b ad d , ex a in b , ut
 & ex c in d facti numeri e & f sunt similes pla-
 ni, quia constant lateribus proportionalibus, ut
 patet ex constructione.

LEM.

LEMMA I.

Duos numeros Quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis Quadratus etiam sit.

A..... E..... D..... B

C.....

Inveniantur per Scholion precedens duo plane similes $a b$ & c , ambo pares vel impares.

¶ Cūq; sublato pari à pari vel impari ab impare semper remaneat par, ex $a b$ sublato $d b$ ipsi c quali reliquus $a d$ par erit. Quo diviso bisariam

in e , dico factum ex $a b$ in $b d$, (qui quidem β quadratus est) cum quadrato ex $e d$ compositum, facere quadratum. Quia enim namex $a d$ bisariam sectus est in e , ipsiq; additus $d b$, γ erit qui sit ex $a b$ in $b d$ quadratus, una cum quadrato $d e$, equalis numero quadrato ex $e b$.

α 24. &

26. IX.

β 1. IX.

γ 6. II.

Corollarium.

Quando $a b$ & c sunt plani similes, quadrati ex $e b$ & $e d$ se excedunt quadrato ex $a b$ in $b d$. Cum autem $a b$ & c non sunt similes, sed tamen vel pares simul; quadrati $e b$ & $e d$ non excedunt se quadrato: Si enim excessus hac ex $a b$, $b d$ factus esset quadra-

a2. IX.

tus, essent ab & ca plani similes, contra hypoth.

Scholium. 2.

Hinc facile inveniuntur duo numeri quadrati, qui se excedunt quadrato, si sumantur duo plani similes vel pares vel impares, ut lemma præcedens jubebat; Itemq; alii duo quadrati, qui se non quadrato excedunt, si duo dissimiles sumuntur plani. Quod tamen facilimè fit secto numero quadrato in quadratum & non quadratum, ut 25, in 4, & 21.

LEMMA 2.

Duos Numeros quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

A. H. I. E. F. G. . . D. B

C.

Sint plani similes ab & c , eademq; adhibitis constructione ut in lemmate præcedente, auferatur ex de unitas ef . Erit quadratus ex df minor quadrato ex de propter inaequalitatem laterum. Dico quadratos ex ab in db , & ex d in se compositos non efficere quadratū. Si enim quadratus esset, esset quadrato bf vel major vel æqualis vel minor. Primò si esset major, latus ipsius esset
major

majus latere $b f$, esset q , ipsi $b e$ vel aequale vel maius, (quia minus esse nequit, cum inter $b f$ & $b e$ unitate tantum differentes non cadat medius). Si aequale, ita, ut quadrato ex $b e$ equalis sit quadratus, compositus ex quadrato factus ex $a b$ in $b d$ & ex quadrato $d f$. Cum eidem quadrato ex $b e$ ex precedente lemma equalis sit numerus factus ex $a b$ in $b d$ & ex $d e$ in se, erunt, factus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d f$, & ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d e$ aequales. Ablato q , communi, qui ex $a b$ in $b d$ fit, erunt quadrati ex $d e$, & $d f$ aequales, ipsaq; latera $d e$, totum & $d f$ pars aequalia. Latus itaq; quadrati ex quadrato compositi, quorum alter ex $a b$ in $b d$, alter ex $f e$ in se fit, nequit esse aequale numero $b e$. Neq; eodem est majus. Si tamen esset, ut aequale $b i$. Cum quadratus ex latere majore, major sit quadrato ex $b e$ minore latere, etiam compositus ex quadratis, quorum alter ex $a b$ in $b d$, alter ex $d f$ in se fit, major quadrato ex $b e$, cui per lemma praecedens equalis est numerus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d e$. Itaq; ablato communi ex $a b$ in $b d$, erit reliquus quadratus ex $d f$ reliquo quadrato ex $d e$ major, latusq; $d f$ latere $d e$ majus, pars toto. Compositi ergo ex quadratis $a b$ in $b d$ & ex $d f$ in se quadrati latus majus esse nequit latere $b e$: adeoq; ut ostensum, nec aequale, nec minus. Ideoq; quadrat. ille compositus non est maior quadrato ex $b f$.

7. VII.

6. II.

18. VII.

Deinde ponatur quadratus ex ab in bd & df in se, equalis quadrato ex bf , & ah sit duplus unitatis e . Quoniam totus ad totius ed est duplus (quia ad in e est bisariam sectus) & ablatius a habita unitatis e ; & erit & reliquus hd , reliqui fd duplus, & hd in f bisariam sectus. Factus itaq; ex hb in bd , una cum quadrato ex df , equalis erit quadrato ex bf . Sed eidem equalis ponitur factus ex ab in bd & quadrato ex df , itaq; ablato comuni quadrato ex df , relinquentur ex ab , in bd & ex hb in bd aequales. Atque sic ab & hb eundem bd multiplicantes, producentes numeros aequales, & erunt ipsi quoq; aequales, pars toti. Non ergo factus ex ab in bd cum quadrato ex df quadrato ex bf equalis est.

Deniq; ponatur quadratus ex ab in bd cum quadrato df minor quadrato bf ; unde & latus ejus latere bf minus erit, ut bg ; sumaturq; ipsius eg duplus ai . Quoniam ergo totus ad totius ed duplus est, & ablatius ai ablati eg ; erit & reliquus id reliqui gd duplus; & id in g divisus bisariam. Numerus ergo ex ib in bd cum quadrato ex dg equalis quadrato ex bg . Sed eidem quadrato ex bg equalis ponitur ex ab in bd cum quadrato ex df . Ablatis igitur quadratis dg , df , quorum dg minor est; remanebit ex ib in bd major eo qui ex ab in bd , pars tota. Non est ergo ex ab in bd cum quadrato ex df minor quadrato ex bf . Sicut neq; major, neq; equalis ostend-

ostensus est. Nō itaq; est quadratus ex $a b$ in $b d$ cum quadrato ex $d t$. Quod erat propositum.

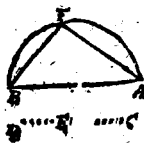
Scholium. 3.

Hinc inventu faciles sunt duo numeri, ut compositus ex illis ad neutrum illorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum. Talis enim est compositus non quadratus ex duobus quadratis. Tales etiam sunt numeri non quadrati, in quos quadratus aliquis dividitur.

PROPOS: XXX.

Problema 6.

Invenire duas Rationales $a b$, $a f$ potentia tantum commensurabiles, ita ut major $a b$, quàm minor $a f$ plus possit quadrato rectæ lineæ $b f$ longitudine sibi commensurabilis.



Assumta recta Rationali $a b$, & a2. Schol. a duob. numeris quadratis tota li. propos. $c d$, & c quorū excessus $d e$ non sit preced. quadratus; & fiat, ut $c d$ ad $d e$, ita c per lem- ma 6. X. quadratum rectæ $a b$, ad quadra-

X 5 sum

EVCLIDIS ELEM:

$\gamma 31.$ III. *sum a f quæ semicirculo super ab aptetur. Et f b
 connectatur. Cū ergo f in semicirculo γ sit rectus,
 æquale est quadratum ab quadratis a f, f b &
 ab, quàm a f plus potest quadrato f b. Cumq;
 quadratum ex a b sit ad quadratum a f, ut c d
 ad d e, derunt illa quadrata inter se commensu-
 rabilia, adeoq; eris æquè quadratum a f Ratio-
 nale, Et ipsa a f Rationalis; atq; quadratum a b
 super Rationali a b descriptum Rationale est.
 Rationales ergo sunt a b, a f & potentia tantum
 commensurabiles. Longitudine enim commen-
 surabiles esse nequeunt, ζ cum non habeant ra-
 tionem quam numerus quadratus ad numerum
 quadratum, quia d e non est quadratus.*

*Iam verò quoniam est ut c d ad d e, ita qua-
 dratum ex a b ad quadratum ex a f, erit con-
 vertendo, ut numerus quadratus c d ad nume-
 rum quadratum c e, sic quadratum ex a b ad
 quadratum ex b f. & Sunt ergo f b, a b longitu-
 dine commensurabiles.*

PROPOS: XXXI.

Problema 7.

*Invenire duas a b, a f Rationales
 potentia tantum commensurabiles,
 ita, ut major a b quàm minor a f plus
 possit Quadrato rectæ lineæ f b sibi
 Longitudine incommensurabilis.*

Assumta



C144. E. 16. D C. 166. D.

C. E. D.

Assumia Rationali ab , & inveniuntur duo α per
 quadrati numeri ce , ed , quarum summa cd Lemma
 non sit numerus quadratus: vel quadratus cd 2. 29. X.
 in duos ce , ed non quadratos dividatur; β ba- β 24. IIX.
 bebit cd ad neutrum ce , vel cd proportionem
 numerorum quadratorum γ fiatq; , ut cd ad β Lemma
 de ita quadratum ab ad aliud, ut $a f$, & appli- 6. X.
 cata $a f$ ad semicirculum supra ab descriptum,
 connectatur fb tam poterit ab plus quam $a f$
 quadrato recte fb . deruntq; ab , $a f$. Rationales δ 30. X.
 potentias autem commensurabiles. Sed cum
 convertendo sit, ut prius quadratum ab ad qua-
 dratum fb , ut cd ad ce : cd autem ad ce non
 sit ut quadratus ad quadratum. Non itaq; ab
 ad $a f$ habet rationem numeri quadrati ad nu-
 merum quadratum, & ϵ sunt Longitudine in- ϵ 9. X.
 commensurabiles. Invenit ergo sunt due recte
 ab , $a f$ potentia solum commensurabiles, ut ab
 major plus possit quam minor $a f$ quadrato re-
 ctę fb sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint due rectę lineę inæqua-
 les; erit ut major ad minorem;
 ita

ita rectangulum sub ipsis contentum
ad quadratum minoris.

*Demonstratio eadem est cum Lemmate 3. in
propof. 19. demonstratione.*

PROPOS: XXXII.

Problema 8.

Invenire duas Medias c , d poten-
tia tantum commensurabiles, quæ
rationale contineant; ita, ut major c ,
plus possit quam minor d , quadrato
rectæ lineæ sibi longitudine com-
mensurabilis.

α . 30. X.



β . 32. X.

a Inveniantur duæ Rationales a , b po-
tentia tantum commensurabiles, ut a
major plus possit quam minor b , qua-
drato rectæ sibi longitudine commensu-
rabilis, inter quas sit media proportio-
nalis c ; fiatq; ut a ad b , ita c ad d . Quoniam
ergo a , b Rationales potentia tantum sunt com-
mensurabiles; erit sub ipsis rectangulum C irra-
tionale, & c recta illud potens Media. Et quia
est c ad d , ut a ad b , quæ potentia tantum sunt
commensurabiles, etiam c & d potentia tan-
tum commensurabiles erunt. & Media c com-
mensurabilis d & Media. Comprehendent hæc
duæ

γ 10. X.

δ 24. X.

duæ Media c, d potentia tantum commensurabiles Rationales quod ex 28. hujus patet. Quia enim est ut a ad b, ita c ad d: Sed a quàm b s p l y potest, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis: Poterit & c plus quàm d quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. ex con-
str.
§ 15. X.

Patet ergo propositum. Si autem a, b, rationales se excederent quadrato rectæ sibi incommensurabilia longitudine, eodem modo ostenderetur c, d media potentia tantum commensurabiles continere Rationale, ut major c plus possit quàm d, quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint tres lineæ rectæ a b, b c, c d, erit ut prima a b ad tertiam c d, ita rectangulum a e sub prima a b & secunda b c contentum, ad id c f, quod sub secunda b c & tertia c d continetur.



Describatur ex b c, quadratum c e compleaturq; rectangulum a f. α Erit a e, ad c f ut a b ad c d.

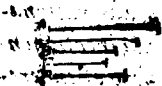
¶ VI.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema 9.

Invenire duas Medias a e potentia solum

solum commensurabiles; quæ Medium contineant, ita ut maior & plus possit quam minor, & quadrato rectæ lineæ, sibi longitudine commensurabilis.



¶ Invenitur dualiter a c, assumatur b c utriusque longitudine incommensurabilis, ut habeatur

a 30. X.
β per
Lemma.
2.21. X.

γ 13. VI.

δ 12. VI.
ε per Lem
ma 32. X.
ζ 17. VI.
η 16. VI.

θ 3. Lem.
19. X.

κ 10. X.

λ 22. X.
μ 24. X.

¶ Rationales a b c potentia tantum commensurabiles; ut ut a plus possit quam c quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. γ Sumaturque d media proportionalis inter a & b; δ & sit d ad b, ut e ad c. Quia ergo est, ut a ad c, ita rectangulum sub a b, ad rectangul. sub b c. Sed rectangulo sub a b, æquale est. quadratum ex d, & rectangulo sub b c, rectangulum sub d e. Ergo ut a ad c, ita quadratum ex d, ad rectangulum sub d e; Sed ut quadratum d, ad rectangulum d e, & ita recta d ad rectam e. Est ergo d ad e, ut a ad c: quæ cum potentia tantum sint commensurabiles; κ Ergo & d e. Et quia d potens spatium, sub Rationalibus ab potentia solum commensurabilibus, λ irrationalis est. ¶ Media μ erit etiam ipsi commensurabilis Media. Sunt ergo d, e dua Media potentia solum commensurabiles. Cum vero ostenderit, q rectangulo sub b c Medio æquale esse rectangulum sub d e

d e, & erit hoc quoq; medium. Deniq; cum ostensum sit esse d ad e, ut a ad c; Sed a plus possit quam c, quadrato recta sibi longitudine commensurabilis; & similiter plus etiam poterit d quam e. Quod erat faciendum.

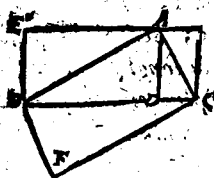
Quod si Rationalium ab c assuetarum potentia commensurabilium a plus posset quam c, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, similiter ostenderetur, d, e, duas medias inventas potentia solum commensurabilis, continere medium, ut major d plus possit quam minor e, quadrato recta linea sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA. I.

Sit Triangulum rectangulum abd , angulum habens bac rectum, a quo perpendicularis ad esto demissa. Dico rectangulum sub cb , bd æquale esse quadrato ab ; & contentum sub bc , cd , æquale quadrato ac , & contentum sub bd , dc , æquale quadrato ad : contentum deniq; sub bc , ad , æquale contento sub ab , ac .

Quia

28. VI.
 3 17. VI.
 7 16. VI.
 8 41. I.



Quia enim ab est inter
 bc & bd , & media pro-
 portionalis; rectangula
 ex $b c$ & $b d$ & aequalis
 est quadrato ab . Eo-
 demq; modo rectangula

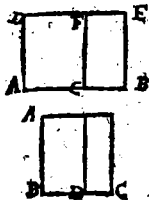
ex $b c, cd$, & ex $b d, dc$ aequalia sunt quadratis
 ca & da . Deniq; quia triacula abc , abd
 sunt similia, erit, ut bc ad ac ; ita ab ad ad ,
 quare rectangulum ex $b c, ad$ aequalis est rectan-
 gulo sub ab, ac ; vel ejusdem triaculi abc
 & dupla rectangula ce, cb sunt aequalia.

LEMMA 2.

Si recta linea ab secetur in duas
 partes inæquales ac, cb , erit; ut ma-
 jor pars ac ad minorem cb , ita re-
 ctangulum af , sub-tota ad & majore
 parte, ac ad rectangulum ce sub tota
 ad & minore parte cb contentum.

21. VI.

Super ab describatur quadratum, & ex c
 erigatur perpendicularis. Quoniam a est, ut
 ac ad cb , ita af ad cd , patet
 propositum.



LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ li-
 neæ inæquales $a b$,
 bc , minor autem bc se-
 cetur

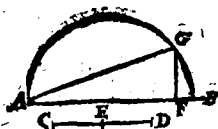
Ecce in d bifariam; erit rectangulum ac sub ipsis contentum, duplum rectanguli ad , quod sub majori linea ab & dimidia parte bd , minoris bc continetur.

Completo ac rectangulo, & ducta parallela α i. VI. per d ipsi ab , α pater propositum.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema 10.

Invenire duas rectas lineas ab , gb , potentia incommensurabiles; quæ faciant compositum quidein ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.



α Inveniantur dua α 31. X.
 Rationales lineæ a, b, c, d ; β Lemma 2.
 minorq; c, d secetur bifariam in e , & fiatq; rectangulum sub a, f ; f, b æquale γ 17. X.
 quadrato c, e . Describatur etiã semicirculus agb & ipsi ab perpendicularis fg agatur, connectanturque ag, gb . Quia ergo ab plus potest quàm c, d quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad ab rectangulum a, f, b , æquale quartæ parti quadrati c, d , deficiens

γ 19. X.

δ Lēma 2.

33. X.

ε Lēma 1.

33. X.

ζ 31. III.

η 10. X.

θ 4. def.

κ 47. I.

λ 17. VI.

μ Lēma 3.

33. X.

ν 22. X.

ξ Coroll.

24. X.

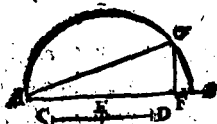
ficiens figura quadrata: γ erit a f ipſe b longitudine incommensurabilis. δ Sed ut a f ad f b, ita rectangulum b a f ad a b f rectang. Quae duo re-
ctangula: equalia sunt quadratis a g, g b, quia g in semicirculo ζ est rectus. Erat igitur, ut a f ad f b, ita quadratum a g, ad quadratum g b. Sed a f, f b sunt longitudine incommensurabiles. η Ergo & quadrata a g, g b, ipſaeq; rectae a g, g b potentia θ incommensurabiles. Et quia quadratum ex a b Rationale Rationale κ equale est quadratis a g, g b, etiam ex ipsis compositum Rationale erit. Rursus, quia a f b rectangulum, equale quadrato c c λ equale est quadrato f g, erunt quadrata f g, c c, equalia, & ipsa rectae f g, c c aequales; eritq; c d dupla ipsius c c, etiam dupla ipsius f g. μ Quare rectangulum sub a b, c d, duplum erit rectanguli sub a b, f g. Sed sub a b, c d Rationalibus contentum est ν Medium: Ergo & sub a b, f g ipſi commensurable, ut pote duplum, est ξ Medium. Sed sub a b, f g rectangulo: equale est rectangulum sub a g, g b: Ergo sub a g, g b est medium. Sed ex eorum quadratis compositum erat Rationale. Ergo inventae sunt duae a g, g b potentiae incommensurabiles, quae faciunt ex ipsarum quadratis compositum Rationale, sed Rectangulum sub ipsis Medium. Quod erat propositum.

PRO.

PROPOSITIO XXXV.

Problema II.

Invenire duas rectas lineas ag , gb , potentia incōmensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum Quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.



Inveniantur dua Media ab , cd ad mentem partis posterioris prop. 32. fiantq; reliqua, ut in præcedenti; erunt ag , gb potentia incommensurabiles. Quia enim Media ab quadratum æquale α rectarum ag , gb quadratis est Medium, etiam compositum ex ag , gb quadratis est Medium, Rursusq; ut in antecedenti propositione ostenditur rectangulum sub ab , cd , duplum esse rectanguli sub ab , fg ; Eo verò existente Rationali, erit & hoc ipsi commensurable; & huic α æquale ex ag , gb Rationale. Cum ergò sub ag , gb etiam sit Medium, patet propositum. Lēma 1. 33. X.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 12.

Invenire duas rectas lineas, ag, gb potentiâ incommensurabiles, quæ faciant & cōpositum ex ipsarum Quadratis Medium, & Rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurableque cōposito ex ipsorum Quadratis.

Inveniantur iterum ex sententia 2. partii propof. 33. duæ Media ab, cd , & reliquæ fiant, ut in 34. hujus. Ostenditur similiter ag, gb rectas incommensurabiles esse potentiâ; cōpositumq; ex ipsarū quadratis esse Medium, ipsumq; rectangulum sub ag, gb esse Medium. Sed quia ab ipsi cd est & incommensurabilis longitudo, & verò ipsi cd , ut dupl. commensurabilis longitudo, etiam ab ipsi ce longitudo incommensurabilis erit. γ Sed ut ab ad ce ; ita quadratum ex ab , ad rectangulum sub ab, ce , id est, ad ab, fg , vel ag, gb . Ergo quadratum ab est & incommensurable rectangulo ag, gb . Quæ sunt duæ rectæ invenienda.

α ex hyp:
 β 13. X.
 γ 3. Lēma
 29. X.
 δ 1. Lēma
 33. X.
 10. X.

Princi-

*Principium Senariorum per
Compositionem.*

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 25.

Si duæ Rationales ab, bc potentiâ tantum commensurabiles componentur; tota ac Irrationalis erit. Vocetur autem ex Binis nominibus.



α Inventæ duæ ab, bc componentur. Fiet tota ac Irrationalis. Quia enim ab ipsi bc est longitudo incommensurabilis, estq; ut ab ad bc , ita ab bc rectangulum ad bc quadratum, y erit rectang. ab bc quadrato bc incommensurabile: Sed rectangulo ab c ipsius duplum est cõmensurable; & quadrato bc quadratum ab est cõmensurable (quia sunt Rationalia) adeoq; ex quadratis ab, bc cõpositum eidem bc quadrato commensurable d est. Itaq; quod bis sub ab, bc continetur, cõposito ex quadratis rectarum; ab, bc incommensurable e erit. Quare & cõpositum ex eo, quod bis sub ab, bc & ex cõposito quadratorum ab, bc , id est, ex tota ac quadratum, cõposita ex quadratis rectarum ab, bc incõmensurable n erit. Sed quod ex quadratis re-

α 1. Lem
21. X.

β Lem. 31
X.

γ 10. X.

δ 16. X.

ε 14. X.

ζ 4. II.

η 17. X.

310. def.

X.

Harum ab, bc , est. Rationale; quia commensurable est quadrato rationalis bc . Igitur ex ac quadratum, Rationali ex bc quadrato incommensurable β , irrationale est, ipsaq; recta ac Irrationalis. Vocetur autem ex binis nominibus vel Binomium, quia ex duobus nominibus nempe duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus componitur.

Scholium.

α 22. X.

β 37. X.

Ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus duæ Irrationales procreantur. Media enim inter eas α est Irrationalis, β itemq; ex ipsis composita seu Binomium.

PROPOSITIO XXXIIX.

Theorema 26.

α 28. X.

Si α duæ Mediæ ab, bc potentia tantum commensurabiles α componantur, quæ Rationale contineant; tota ac Irrationalis erit. Vocetur autem, ex binis Mediis prima.

Quia enim ab ad bce est, ut ab c rectangulum ad quadratum bc . Sed ab, bc sunt longitudine incom-

incommensurabiles. β Sunt ergò abc rectangulum & quadratum bc incommensurabilia. Est autem rectangulo abc bis sub ab, bc commensurabile; & γ quadrato bc compositum ex quadratis ab, bc . Igitur rectangulum sub ab, bc bis, & compositum ex quadratis rectarum ab, bc , sunt incommensurabilia inter se. Ergo compositum ex quadratis ab, bc unà cum rectangulo abc bis, id est, quadratum ac incommensurabile est rectangulo abc bis sumto. Sed eidem abc rectangulo bis, est commensurabile ipsum si mel. η Igitur quadratum ex a est incommensurabile rectangulo abc . Sed abc rectangulum ponitur Rationale. Ergò quadratum a est Irrationale, ipsaq; a & Irrationalis. Vocetur autem ex Binis Mediis prima vel Bimediale prius.

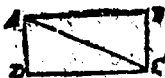
 β 10. X. γ 16. X. δ 14. X. ϵ 4 II. ζ 17. X. η 13. X. θ 10. def.

X.

 κ 11. def.

LEMMA.

Quod sub Linea Rationali ab & Irrationali bc continetur rectangulum, Irrationale est.



Si minus, ipsum Rationale ad Rationale ab applicatum, & faciet latitudinem bc Rationalem contra hypothesein.

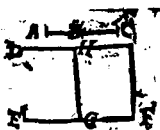
indef. β α 11. X.

Z. 10. X.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 27.

Si duæ Mediæ ab , bc potentiâ tantum commensurabiles & componantur, quæ Medium contineant; tota ac Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda.



Et Expositæ Rationali de , applicetur rectangulum dfe aequale quadrato, ac ; Et composita ex quadratis ab , bc aequale sit

dg . & Erit itaq; hfe aequale his sumto rectangulo $ab c$. Quod cum sit d Medium; e erit hfe ipsum duplum medium. Et quia quadrata mediarum ab , bc commensurabilia sunt potentiâ, etiam ex ipsis compositum rectangulum $d g$ utriusque ipsorum ζ commensurabile erit. Sed utrumque quadratum ex Mediis est Medium. Ergo $d g$ erit Medium: Quoniam ergo $d g$, hfe Media ad de Rationalem applicatur, nec ut latitudines eorum $e g$, $g f$. Rationales ipsi $d e$ longitudine incommensurabiles. Rursus quia longitudine incommensurabiles sunt ab , bc , & d est, ut ab ad bc , in quadratū ab ad rectangulum, $ab c$; & erunt, quadratū ab & rectang. $ab c$ longitudine incommensurabilia.

Sed

α 19. X.

β 45. I.

γ 4. II.
 δ ex hy-
 pot.

ϵ cor. 24.
 X.

ζ 16. X.

η 23. X.

θ 3. Lem.

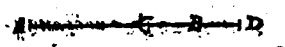
19. X.

π 10. X.

Sed quadrato ab compositum ex ab , bc qua-
 dratis, & rectangulo abc solum duplum osten-
 sum est commensurabile. λ Ergo compositum ex
 quadratis ab , bc id est $d g$ incommensurabile λ 14. X.
 est bis sumto rectangulo abc id est hf , μ Est μ 1. VI.
 però ut $d g$ ad hf , ita eg ad gf , κ Sunt itaq; eg ,
 gf longitudine incommensurabiles. Quæ cum
 sint ostense Rationales, erunt Rationales poten-
 tiæ tantum commensurabiles, & composita ef ,
 Irrationalis. ξ Est itaq; rectangulum $d f$ sub ν 37. X.
 Rationali de & c irrationali, irrationale &
 ipsi æquale quadratum ac irrationali, ipsaq;
 ac irrationalis. Hac vocetur ex Binis mediis,
 vel Bimediale posterius. ξ Lemma
 38. X.

LEMMA.

Si Recta linea ad non secet bi-
 fariam in b , erit compositum ex qua-
 dratis partium ab , bd majus, quam
 Rectangulum sub partibus ab , bd bis
 comprehensum, quadrato ejus lineæ
 ac , quæ major pars $a b$ minorem bd
 superat.


 Quoniam quadrata
 ab , bc æqualia sunt α 7. II.
 rectangulo abc bis sumto, cum quadrato &
 ac ; estq; bc ipsi bd æqualis, erunt quoque qua-
 drata ab , bd æqualia rectangulo abd bis
 sumto.

sumto unà cū quadrato $a c$: Quare ex $a b, b d$.
quadrata majora sunt rectangulo $a b c$ bis sum-
to quadrato $a c$. Quod erat propositum.

Corollarium.

Quadrata partium inæqualium si-
mul, majora sunt rectangulo bis sub
partibus inæqualibus contento.

PROPOSITIO XL.

Theorema 28.

$\alpha 34. X.$

Si a duæ rectæ $a b, b c$ potentia in-
commensurabiles cōponantur; quæ
faciant compositum quidem ex ipsa-
rum quadratis Rationale; quod au-
tem sub ipsis continetur, Medium;
tota $a c$ recta linea irrationalis erit.
Vocetur autem Major.

*Quia a b rectangu-
lum ponitur Medium,*

β Cor.

24. X.

ejus etiam duplum β erit Medium & Irratio-
nale. Sed compositum ex quadratis $a b, b c$ po-
nitur Rationale: Bis ergo sumtum $a b c$ rectan-
gulum

gulum illi est γ incommensurable. Quare & γ 10. X.
 rectangulum $abcb$ cum quadratis ab, bc , id
 est δ quadratum ac s incommensurable est δ 4. II.
 composito ex quadratis ab, bc . Cum autem ϵ 17. X.
 compositum ex quadratis, ponatur rationale, e-
 rit ζ c quadratum irrationale, η ipsa ac re- ζ 10. def.
 cta irrationalis, quæ vocetur Major: Quia η 11. def.
 cum possit duo quadrata ex ab, bc & rectan-
 gulum $abcb$, compositum ex quadratis $a b,$
 $b c$ & majus est rectangulo $abcb$. Quare
 cum compositum ex quadratis sit rationale, & θ Lemma
 $abcb$ rectangulum Medium, recte dicitur ac θ 39. X.
 Major, siquidem à Rationali, quod majus est,
 convenit imponere nomen.

PROPOS: XLI.

Theorema 29.

Si a duæ rectæ lineæ ab, bc poten- a 35. X.
 tiâ incommensurabiles componan-
 tur, quæ faciant compositum qui-
 dem ex ipsarum quadratis Medium,
 quod autem sub ipsis continetur, Ra-
 tionale: tota recta linea a c irratio-
 nalis erit. Vocetur autem Rationa-
 le ac Medium potens.


 Quoniam compo-
 situm ex quadratis ab,

§ 10. X.

b c est Medium, rectangulum vero a b c bis sum-
 tum Rationale, § erit compositum ex quadra-
 tis incommensurabile rectangulo bis sumto. I-

γ 4. II.

δ 17. X.

gitur & compositum ex quadratis cum bis sum-
 to rectangu α γ id est, quadratum a c d erit du-
 plo rectangulo a b c incommensurabile. Cum

§ 10. def.

§ II. def.

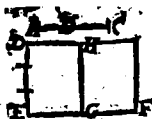
autem duplum rectanguli a b c sit Rationale,
 erit a c quadratum irrationale, ipsaq; a c & ir-
 rationalis, Quæ vocetur, Rationale ac Medi-
 um p otens, quia potest Medium ex quadratis
 a b, b c compositum, & Rationale scilicet bis
 sumtum rectangulum a b c. Verum Rationale
 antepositur irrationali quod natura sit prius, ut
 ut ordine hic sit posterius.

PROPOSITIO XLII.

Theorema 30.

α 36. X.

Si α duæ lineæ rectæ a b, b c poten-
 tiâ incommensurabiles componan-
 tur, quæ faciant & compositum ex
 ipsarum quadratis Medium, & quod
 sub ipsis continetur, Medium, incom-
 mensurabileq; composito ex quadra-
 tis ipsarum: tota recta linea a c irra-
 tionalis erit. Vocetur autem bina-
 Media potens.



Iterum exponatur Ratio-
nalis de, ad quam β applica-
tum sit rectangulum d f aqua-
le quadrato a c; & dg aquale

β 45. I.

composita ex quadratis ab, bc, & eritq; h f a-
quale bis sumto rectangulo ab c. Quoniam igitur
tam compositum ex quadratis ab, bc id est
dg, quam rectangulum ab c bis sumtum id est
h f sunt Media, & faciunt dg, h f applicata ad
rationalem d latitudines e g, g f. Rationales
longitudine incommensurabiles. Et quia
compositum ex quadratis ab, bc id est dg in-
commensurabile ponitur rectangulo ab c, cuius
duplum est h f, erunt dg, h f incommensura-
bilis. Sed ut dg ad h f, ita e g ad g f, & erunt
itaq; e g, g f rationales longitudine incommen-
surabiles vel potentiâ commensurabiles, adeoq;
totae e f, & irrationalis. & Est ergo d f subratio-
nalis de & irrationalis e f contentum irrationali-
le, & quadratum ex a c illi aquale irrationale,
ipsaq; a c irrationalis, qua vocetur Bina Media
potens, quia & compositum ex quadratis ab,
bc & rectangulum ab c erant Media.

γ 4. II.

δ 22. X.

ϵ 13. X.

ζ 1. VI.

η 10. X.

θ 37. X.

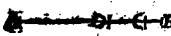
ι Lemma

38. X.

LEMMA.

Si recta linea a b in partes inæ-
quales in c & d secetur, & rursus in a-
lias partes inæquales; erunt quadrata
par-

partium ac, cb magis inæqualium simul maiora quadratis partium ad, db minus inæqualium simul.

 Bisecta $a b$ in e , cadit $d p$ tuum vel inter $e c$, vel inter $e a$.

α 5. II.

Primò cadat inter $e c$. Quoniam $a c b$ rectangulum cum quadrato ec æquale est quadrato eb , ut & $a d b$ rectangulum cum ed quadrato eidem eb quadrato æquale erunt, rectangulum $a c b$ cum quadrato ec , & rectangulum $a d b$ cum quadrato ed æqualia. Ablatis autem inæqualium rectarum ec, ed quadratis, cum quadratum ec sit maj9 quadrato ed , reliquum rectangulum $a c b$ minus erit reliquo $a d b$, & propterea bis sumtum $a c b$ rectangulum, bis sumto $a d b$ erit minus. Sed quadratum $a b$ tam

β 4. II.

rectangulo $a c b$ bis cum quadratis ac, cb , quàm rectangulo $a d b$ bis cum quadratis ad, db est β æquale: Sunt ergo æqualia rectangulum $a c b$ cum quadratis ac, cb & rectangulum $a d b$ cum quadratis ad, db : & cum $a c b$ sit minus quàm $a d b$, erunt residua quadrata ac, cb , maiora quadratis ad, db . Quod erat propositum. Deinde cadat d intra $a c$. Quoniam $a c, cb$ partes magis sunt inæquales quàm ad, db , erit ad major quàm cb , ac proinde cum $a c, eb$ sint æquales, erit ec reliqua major reliqua ed . Itaque quia rectangulum $a c b$ cum quadrato ec quadrato

drato ex eb a a quale est, itemq; a db rectan-
gulum cum quadrato ed , a a quale eidem qua-
drato e berit a c b rectangulum cum quadrato
ex ce a a quale rectangulo a db cum quadrato
 ed . Ergo ut prius, ac , cb quadrata, maiora
sunt quadratis ad , db .

PROPOSITIO XLIII.

Theorema 31.

Quæ ab ex binis nominibus, ad
unum duntaxat punctum c dividitur
in nomina ac , cb .

 Si potest in duas alias Rati-
onales potentia, tantum com-
mensurabiles juxta 37 X dividi, fiat illa divi-
sio in d Neq; c neq; d dividit lineam ab a a qua-
liter, quia ita a a quales etiam commensurabiles
essent longitudine ad , db contra hypothesin, sed a Lemma
partes inæquales ac , cb vel magis vel minus in- 42. X.
a a quales sunt partib; ad , db a atq; ita quadra-
ta ac , cb sunt vel minoræ vel majora quadratis
 ad , db . Quia verò si ab a a qualib; demantur, in-
a a qualia, residuorū excessus est ablatorū excessus 3 4. II.
a a qualis. Sunt autem ex ac , cb quadrata cum
rectangulo ac b bis sumto, a a qualia quadratis a
 d , db , cum a db rectangulo bis sumto, sic ut
qui fuerit excessus compositorum ex quadratis,
idem

idem sit his sumtorum rectangulorum: Sed excessus compositorum ex quadratu est spacium

Rationale. γ Rationalium enim $a c, c b$ quadra-

78.9. Def.

34. X.

27. X.

Schol.

$e a$ & ex ipsis d compositum sunt Rationalia; itemq; e ex $a d, d b$ quadrata una cum suo composito sunt rationalia. Cum ergo Rationale

superet Rationale rationali, manifestum est rationalem esse excessum compositorum ex qua-

dratu. Igitur & excessus rectanguli $a c b$ & $a d b$ quolibet b sumto, est spacium Rationale. Sed

$a c b$ rectangulum est ζ Medium. Ergo & duplum, sicut & $a d b$ rectangulum. η Cum vero

Medium non superet medium Rationali; non potest excessus rectangulorum esse Rationalis,

quod tamen in precedentibus concludebatur. In alio itaq; puncto quam c setari $a b$ in sua no-

mina impossibile est.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema 32.

Quæ ex binis medijs prima $a b$, ad unum duntaxat punctum d dividitur in nomina $a d, d b$.

Dividatur, si potest, in alia ad c nomina vel duas Medias potentia comensurabiles, quæ comprehendant Rationale juxta 38. hujus. Paribus ratione, ut in precedenti propositione erit idem

exces-

Excessus reſtangularum abc & adb bis, qui com-
 poſitorū ex quadratis ac, cb & ad, db . Sed Rati-
 onalium reſtangularum bis excessus α eſt Rationa-
 le ſpaciū. Ergo & excessus compoſitorū ex qua-
 dratis & ſpaciū Rationale. Cum verò a, d, db
 ſint Media, & potentia commenſurabiles, erunt
 & eorum quadrata Media & commenſurabilia;
 atq; ita ex ipsis compoſitū utrumq; $er. e$ & β com-
 menſurabile & γ Medium. Cum verò medium
 non ſuperet Mediū rationali. Itaq; excessus com-
 poſitorum ex quadratis non erit Rationale ſpa-
 ciū, quod tamen modo concludebatur. In alio
 itaq; puncto quam c ſecari a, b in ſua nomina
 eſt impoſſibile.

α 2. Scho-
 li. 27. X.

β 16. X.

γ 24. X.

δ 27. X.

PROPOS. XLV.

Theorema 33.

Quæ ex binis Mediis, Secunda ad ,
 ad unum duntaxat punctum c dividi-
 tur in nomina ac, bc .



Dividatur, ſi poteſt in alia ad
 d , ut reſpondeant ſenſui 39. lu-
 jus. Ubi cūq; erga ſit d , ut in
 43. oſtenditur, quadrata ex ac ,
 cb vel majora vel minora ſunt
 quadratis ad, db . Exponatur autem Ra-
 tionalis ef , ad quam, applicetur cg reſtang. a 45. I.
 Z
 æquale

34. II.

equale quadrato ab , & ch equale quadrato ac ,
 cb , & ek quadrato ex ad , db . β Erit ergo
 ig equale duplo rectanguli ac & lg equale du-
 plo rectanguli ac & lg equale duplo rectangu-
 li adb . Et quia quadrata ex a , c , b quadra-

Lemma 39. X. ta ad , db γ sunt inequalia, etiam rectangula

ch , ek erunt inequalia: δ quare & recta fh , fk

31. VI. sunt inequales. Rursus, quia quadrata ex a ,
 c , b sunt maiora rectang. ac b his, erit eh majus
 ipso ig , atq; im fh major dimidio ipsius fg ,
 quod de fk ostenditur. Quare bg , fh , hg sunt par-
 tibus fk , kg inequales singulis singula. Quia vo-
 ro a , c , b sunt Media potentia cōmensurabiles,

16. X. erunt etiam ipsarum quadrata media & cōmen-

3 cor. 24. surabilia, & adeoq; compositū ex ipsis utriq; ipso-

X. rum cōmensurabile, ideoq; & eh , & ek sunt

23. X. media. Cumq; im e sit Rationalis, nerunt fh ,
 fk Rationales longitudine ipsi incommensurabi-
 les. Sic etiam rectanguli ac b Medii duplum ig
 erit medium & hg Rationalis longitudine incō-
 mensurabilis; perinde ut & lg Medii, kg Ratio-
 nalis longitudine incōmensurabilis ipse e ostend-
 detur. Rursus quia a , c , b longitudine sunt incō-

3. Lem. mensurabiles, & est, θ ut a c ad c b , sit quadra-

19. X. tum a c ad rectangulum a c b , & erunt hæc etiam

10. X. incommensurabilia. Sed quadrato a c compositū
 ex quadrato a , c , b est cōmensurabile, ut ante
 constat, & rectangulo ac b suum duplum est cō-
 mensu-

LIBER X.

38

inmensurabile. Itaq; compositum ex quadratis ac, cb, id est, eh, est incommensurabile duplo re-
ctanguli acb, id est, ig. d Sed ut eb ad ig, ita
fh ad hg. x Sunt ergo fh, hg longitudine in-
commensurabiles. Cum vero etiam sint Rationales,
erunt Rationales potius solum commensurabiles.
u Tota ergo fg est Irrationalis, qua ex binis nomi-
nibus appellatur, divisaq; in nomina ad punctum;
nec potest fg in alio puncto ut k dividi in alia
nomina. Itaq; nec ab bimediale posterius in alio
puncto quam c dividi potest in nomina.

114. X.

u 37. X.

v 43. X.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema 34.

Major ab ad unum duntaxat pun-
ctum c dividitur in nomina ac cb.

~~Si potest, dividatur in duo~~ Si potest, dividatur in duo
nomina, quod 40. prop. re-

quirat. a Erit excessus quadratorum ac, cb & a u 43. X.

d, db idem cum excessu reſtangulorum acb du-
pli & a db dupli. Sed excessus duorum compo-
sitorum ex quadratis binis est ſpacium Ratio-
nale. Igitur & excessus reſtangulorum binorum.

Sed reſtangulum acb ponitur Medium; Bideorq;
duplum ipsius etiam est Medium; eodemq; modo &
adb Medium erit. x Sed Medium non superat Medi-

um Rationale. Itaq; excessus binorum reſtangulo-
rum non erit ſpacium Rationale, quod iam an-
tea ſequabatur. Non ergo in alio quam c puncto
scabitur Major.

Prop. 24.
X.

y 27. X.

Z 2

P R O.

EUCLEIDIS ELEM.
PROPOS. XLVII.

Theorema 35.

Rationale ac Medium porens ab
ad unum duntaxat c punctum dividi-
tur in nomina ac, cb .

$\alpha 43. X.$

*Si potest, dividatur in nomina, qualia 41. pro-
pos. requirit. Erit excessus quadratorum a^2
 cb & a^2d , db idem cum excessu rectorum
 ac^2b , & a^2db duplorum. Qui excessus in rectorum
est spatium Rationale. Ergo & incompofi-
tis quadratorum. Qua composita ex quadratis;
 ac^2b , & a^2d , db cum ponantur Media. & itaq;
excessus non potest esse spatium Rationale, ut jam
sequebatur. Non ergo in alio quam puncto c
cabitur Rationale & Medium potens.*

$\beta 27. X.$

PROPOS. XLIIIX.

Theorema 36.

Bina Media porens ab , ad unum
duntaxat punctum c dividitur in Me-
dia nomina ac, cb .

*Si potest, dividatur in 2 nomina, qualia re-
quirit 42. hujus. Constructione adhibita eadē, qua*



in 45. partit, partibus fh, hg,
partes fk, kg singulis singulas
esse inaequales. Cum ergo com-
positū ex quadratis ac, cb ponatur
Medium, erit Γ ch Medium, cumq; rectan-
gulis acb duplum sit Mediū, erit Γ ig Medium:

¶ Eruntq; fh, gh Rationales longitudine incom-
mensurabiles ipsi e f ut Γ fk Γ kg. Cum verò
compositū ex quadratis ac, Γ cb id est, eh Γ sit in-
commensurable rectanguli acb duplo, id est, pothef.
ig, sitq; ut eh ad ig ita fh ad hg, yerunt Γ ha
longitudine incommensurabiles. Cūq; sint o-
δ 37. X.

¶ Iensa Rationales, erunt Rationales potentia tan-
tum commensurabiles, totaq; fg. Irrationalis est
ex binis nominibus, divisa in h puncto in nomina.
Sed eodem modo dividere eam non patitur 43. in
puncto k. Igitur nec a b in alio puncto quam a
dividitur in nomina. Quod erat propositum.

Definitiones secundæ.

Iam investigat auctor omnia binomia,
quorum sex habet idē. Quia enim No-
mina Binomiū sunt dua Rationales, qua
nequeunt amba esse exposita Rationali
commensurabiles, nisi ipsa quocq; volint
esse longitudine inter se a commensurabi-

α 12. X.

tes, vel una tantum siue Major siue Minor, vel neutra tria sunt genera binomiorum. Quoniam etiam Nomina sunt inaequalia, poterit majus minore plus quadrato vel longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Unde si plus possit quadrato longitudine commensurabilis una cum dictis tribus generibus tres diverse lineae binomiales; Sed si plus quadrato longitudine incommensurabilis, cum his tribus, itidem tres oriuntur.

Exposita ergo Rationali, & quæ ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quam minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

1. Si majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus prima.
2. Si minus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus secunda.
3. Si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali, vocetur ex binis nominibus Tertia.

Rursus

Rursus si majus nomen plus possit quam minus quadrato recta linea sibi longitudine incommensurabilis.

4. Si majus nomen exposita Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si verò Minus nomen, vocetur Quinta.

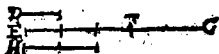
6. Quod si neutrum ipsorum nominum, vocetur sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Problema 13.

Invenire ex binis nominibus primam.

A C B



α Inventis duobus numeris a b, c b quorum excessus a c non sit quadratus, ita ut ab, c b proportionem habeant

α 2. Schol. li. 29. X.

numeri quadrati ad quadratum a b, a c non. Exponatur autē Rationalis β quae p̄ a d, cui, e f sumatur lōgitudinē cōmensurabilis, quae e f ob id quoq; Rationalis eris. Fiat deinde ut ab ad a c ita quadratū e f ad quadratū f g. Erit e g ex binis nomin.

β cor. 6. X

Z 4

Quoni-

y 6. X.

Quoniam quadrata $e f$ & $g h$ sunt incommensurabilia, erunt ipsa rectae etiam incommensurabiles sola potentia. Sed $e f$ est Rationalis. Ergo & $g h$.

d 9. X.

Quia vero $a b$ ad $a c$ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, etiam quadrata $e f$, $g h$ non habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Sunt ergo

e 37. X.

$e f$, $g h$ longitudine incommensurabiles; atque ita Rationales potentia solum commensurabiles; ipsaeque irrationales, quae ex binis nominibus dicuntur. Erit etiam prima. Cum sit ut numerus $a b$ ad

Lemma
14. X.

$a c$ ita quadratum $e f$ ad quadratum $g h$, sit etiam $a b$ major quam $a c$, etiam quadratum $e f$ erit majus quadrato $g h$. Quod quidem quadrato h .

Quia ergo est, ut $a b$ ad $a c$, ita quadratum $e f$ ad quadratum $g h$; etiam convertendo erit, ut $a b$ ad $c b$, nempe ad excessum, quo antecedens $a b$ superat consequentem $a c$, ita quadratum $e f$ ad quadratum h . Habet autem $a b$ ad $c b$ rationem quam quadratus numerus ad quadratum; Itaque & quadrata $e f$ & h ; eruntque commensurabiles longitudine $e f$, & h . Quoniam majus nomen $e f$ exposita Rationali d est longitudine commensurabile, ut patet; & potest plus quam minus $g h$ quadrato rectae h sibi longitudine commensurabilis, erit $e g$ per definit. ex binis nominibus prima.

PROPOSITIO L.

Problema 14.

Inven-

Invenire ex binis nominibus secundam.

A C B

D ————

E ———— F ————

G ————

Repertis duobus

ab, cb quadratis,

sumtisq; d Rationali,

cui longitudine com-

mensurabilis sit fg, qua ideo est Rationalis,

α Fiat ut a c numerus ad ab, ita quadratum gf

ad quadratum fc: Erit eodem modo ut in pre-

cedenti eg binomialis. Quae & erit secun-

da. Cum enim sint ut a c, ab. Quadrata recta-

rum gf, fe; etiam sunt convertendo ut a b ad

a c ita quadratum e f ad fg. Sed ab quam a c est

major, erit ergo quadratum e f majus quadrato

e f, β & quidem sit quadrato recte h. Iterum,

bic ut in precedenti ostendetur h ipse f longitu-

dine commensurabilis esse. Quoniam ergo majus

nomen e f plus potestate quam mino fg expōsit

rationali d longitudine commensurabile, ut patet

ex prioribus, quadrato recte h sibi longitudine

commensurabilis: Erit eg ex binis nominibus

per defin. secunda.

Cor. 6.
X.

Lemma
14. X.

PROPOSITIO LI.

Problema 15.

A C B

D ————

E ———— F ————

G ————

Invenire ex bi-
nis nominibus ter-
tiam.

Z 5

Re-

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

I A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

D —————

F

E —————

C

H —————

Reperit duobus
quadratis ab, cb
ut antea, sum-
atur alius i qui ad
neutrum habeat
proportionē quā

quadratus ad quadratum. Assumit d ratio-

Cor. 6. tionali a fiat, ut i ad ab, ita quadratum recta d

X.

β 6. X.

γ 9. X.

ad quadratum ef, quae quadrata β erunt com-

mensurabilia, cum habeant proportionē numero-

rum; Sed cum non quadratorum γ erunt d & ef

longitudine incommensurabiles. Fiat rursus ut

ab ad ac, ita quadratum ef ad quadratum fg,

quae etiam erunt β commensurabilia; sed latera

ipsa γ incommensurabilia. Sunt ergo ef, fg

Rationales potentia tantum commensurabiles,

& tota eg irrationalis ex binis nominibus.

Qua & erit tertia. Quia enim d, ut i ad ab, ita

quadratum d ad quadratum ef. Sed i ad ab

non est ut numerus quadratus ad quadratum.

Ergo nec d ad ef, & sunt longitudine γ incommensurabiles.

Quia etiam est ut ab ad ac, ita

quadratum ef, ad quadratum fg; Sed ab ma-

ior est quam ac, etiam e ferit majus fg. Sit

autem majus quadrato recta h. Erit ut quar-

tus h ipsi ef longitudine incommensurabilis.

Quoniam majus nomen est plq potest quam minq

fg quadrato recta h sibi longitudine commensu-

rabilis, & neutrum ef, fg exposita Rationali

d est

Lemma

14. X.

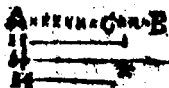
deff longitudine commensurabile. Erit ergo e g per def. ex binis nominibus tertia.

Binomia secunda & tertia inveniuntur facilius si similes plani numeri a se mutua auferantur, reliquus enim vel est quadratus, & oritur binomium secundum, vel non quadratus, & oritur binomium tertium.

PROPOS. LII.

Problema 16.

Invenire ex Binis nominibus Quartam.



a. Invenitis duobus nume- 35.

ria a c, e b ex quibus com- schol. 19.

positus ab ad neutrum i. X.

pforum habeat proportio- nem, quam quadratus ad

quadratum. & assumat rationali d, cui longitu-

dine commensurabilis sit ef per fid. aut arch, cetera

ut in 49. huius. Erit ubi e g ex binis nomini-

bus: & quidem Quarta. Majus sit quadratum ef

quam fg quadrato h. Quia autem convertendo

est, ut in 49. ut a b ad c b, ita quadratum ef ad

quadratum h. Sed a b ad c b non est ut quadra-

tus ad quadratum: Ergo nec quadrata ef, & h

habebunt proportionem quadratorum; Peruntq; 39. X.

recta ef & h incommensurabiles. Itaq; cum ma-

ius nomen ef, quod & exposita rationali d com-

mensurabile est, plus possit quam minus fg qua-

drata recta h sibi longitudine incommensurabi-

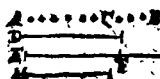
lis, erit e g per defm. ex binis nominibus qua-

Propo-

EUCLIDIS ELEM. PROPOS. LIII.

Problemata 17.

Invenire ex binis nominibus quinquanam.



Inventis namque ac, cb ut in precedenti & ad

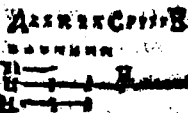
bibitis reliquis ut in 50.

basia: Erit cg ex binis nominibus & quidem Quinque. Sit quadratum ef majus quam quadratum fg, quadrato h. Erit, ut in 49. convertendo, ut ab ad cb, ita quadratum ef ad quadratum h. Exunt ef & h incommensurabiles ut in 32. Quia ergo majus ef fomen quam minus fg, quod & proposita, rationali commensurabilis est, plus potest quadrato recta h sibi longitudine incommensurabilis, erit per defin. cg ex binis nominibus quinque.

PROPOSITIO LIV.

Problemata 18.

Invenire ex binis nominibus sextam.



Inventis ac, cb p[ro]p[ri]is non similibus, quorum neuter sit quadratus, nec ex ipsis compositus quadratus sit, habebatur ad aliquem vocand[um] qua-

dratus sit, habebatur ad aliquem vocand[um] qua-

dratorum proportionem; sumatur alig quicundq;
 numerus i, qui nec ad a b, nec ad a c quadrato-
 rum proportionem habeat, qualis est quivis qua-
 dratus; assumique rationali d, sunt ceterique
 in 51. hujus, Patet ut ibi e f, f g longitudine esse
 incommensurabiles & totum e g, ex binis no-
 minibus. Et quidem est sexta. Quia, si qua-
 dratum e f quam quadratum f g majus sit qua-
 drato h, ut in 52. e f & h sunt longitudine in-
 commensurabiles. Itaq; cum majus nomen e f
 plus possit quam f g, quorum neutrum posita
 rationali sit commensurabile, quadrato recta h
 sibi longitudine incommensurabilis, erit ex bi-
 nis nominibus per defin. sexta.

Sapè promittit Binomia quinta & sexta oc-
 currunt, si dissimiles plani à se invicem auferan-
 tur, reliquum vel quadratus est & oritur bino-
 mium quintum, vel non, & nascitur binomium
 sextum.

LEMMA.

Si recta linea bc secta sit utcunq; in d;
 erit rectangulum e b sub partibus e d, d b
 contentum, medium proportionale
 inter earum quadrata ed^2 , db^2 ; item
 rectangulum de contentum sub tota
 & una parte, medium proportionale
 inter quadratum ee, totius lineae, &
 quadratum d d dictae partis.

De.



Descripto quadrato ce super bc , è sectionis puncto d erigatur perpendicularis dg ducaturq; diagonus bf , & lk parallela ipsi bc . Erit bme dium proportionale inter gk , ld quadrata. α Quia

ergo est ut kh ad hl ; ita tam gk ad ch , quam ch ad dl , erit, ut gk ad ch , ita ch ad dl . Sed ch & ch sunt aqualia. Est ergò rectangulum sub partibus medium proportionale inter earundem partium quadrata. Rursus α quia est ut cb ad bd , ita tam ce ad de , quam cl ad dl . Sed de & cl sunt aqualia. Est ergò rectangulum de sub tota & una parte, Medium proportionale inter quadratum totius ce & dictæ partis quadratum dl .

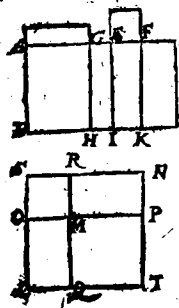
PROPOSITIO LV.

Theorema 17.

Si spaciū ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus primis ad ; Recta linea op spaciū potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Divi-

Divisa ad in novina



ac majus & ed minus, se-
ceatur ed in f bifariam.

a Quia ergo ac plus potest
quàm ed quadrato recte fi-
bi longitudine commensura-
biles. Si ad eam quarta par-
ti quadrati ed i. e. quadrato
ef aequale Parallelogrammū
age & applicetur, γ dividet
ipsam ac in partes ag. gc

a def. Bi.
primi.

β 2. Lem.

γ 17. X.

γ 18. X.

δ 14. II.

longitudine commensurabiles. Per puncta g e f
ducantur ipsi ab parallela gh, ei, fk & fiat g
ah, gi rectanguli aequalia quadrata lm, mn
juncta ad angulum mita, ut om, mp unam
efficiant rectam & compleatur totum ln qua-
dratum. Quoniam itaq, rectangulum age
& aequale est quadrato ef, & erit ut ag ad ef, ita
ef ad ge; & quare ut ah ad ek, ita ek ad gi.
Est itaque ek inter ah, gi medium propor-
tionale. Sed ipsis ah, gi sunt aequalia lm,
mn quadrata, & inter quae medium proportio-
nale est tm. Itaque tm est aequale ipsi ek.
Cum itaque tm sit x aequale ms λ & ek ipsi λ
fc, erit & ms ipsi fc aequale, totumque ln
quadratum toti rectangulo ac aequale, & o
p potest spatium ac sub Rationali ab &

sex cōstr.

ζ 17. X.

η 1. VI.

θ Lemma

precedēs.

κ 43. I.

λ 36. I.

bina-

binomiali prima a d contentū. Erat ea irrationalis
 nalis ex binis nominibus. Quoniam enim a g
 g e ostensa sunt longitudine commensurabiles,
 μ erit a c tota utriq; ipsarum longitudine com-
 mensurabilis. Sed a c, cum sit majus nomen bi-
 nomialis prima a d, rationali a b longitudine
 est commensurabilis. Ergo a g, g e eidem a b
 longitudine sunt commensurabiles, ipsaq; ut a b
 erunt Rationales. v Sunt itaq; rectangula
 a h, g i sub rationalibus rationalia, ipsiq; equa-
 lia quadrata l m, m n rationalia, rationalesq;
 recta o m, m p. Et quia a c ipsi e d est longi-
 tudine incommensurabilis; sed eidem a c longi-
 tudine commensurabilis ostensa est a g, & ipsi e d
 longitudine commensurabilis est e f; utpote i-
 psius dimidia. & Ergo a g, e f sunt longitudine
 incommensurabiles. Quare a h, e k, o quidem
 rationis cum a g, e f π incommensurabilia e-
 runt, & proinde l m, m n ipsi equalia incommensurabilia, ipsaq; recta o m, m p eandem
 habentes rationem quam l m, m n, erunt longi-
 tudine incommensurabiles. Cum autem eadem
 sint ostensa rationales. Igitur o m, m p sunt ra-
 tionales pariteria solum commensurabiles. Qua-
 re o p potens spaciū a c est irrationalis quā
 ex binis nominibus dicitur.

Sed Euclides noluit aliquam binomialium
 speciem determinare, cum possit & prima & se-
 cunda, & tertia, quarta, quinta, sexta esse.

Sequitur

μ 16. X.

v 20. X.

ξ 14. X.

ο 1. VI.

π 10. X.

Sequentibus propositionibus quinque docentur inventiones omnis generis Irrationalium linearum.

PROPOSITIO LVI.

Theorema 38.

Si spaciū ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus secunda, ad , Recta linea op spaciū potens, Irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur.

Divisa ad in nomina ae majus, & ed minus adhibeatur etiam reliqua precedentis propositionis cōstructio. Erit op ex binis mediis prima.

Quoniam enim ae , ed sunt longitudine incommensurabilia, & ed rationali ab longitudine cō-

mensurabile, a erunt ae , ab longitudine in-

commensurabiles. Et quia ag , ge in precedenti sunt

ostensa cōmensurabiles longitudine, tota a e-

rit, ipsarum erit β cōmensurabilis. Quare cum

a e ceu majus nomen binominalis secunda a d fit

linea Rationalis, erunt & ag , ge rationales lon-

gitudine cōmensurabiles. Sed a e rationali, ab est longitudine incommensurabilis. Utraq; ergo

ag , ge , eidem ab incōmensurabilis γ erit longi-

213. X.

β 16. X.

γ 14. X.

δ 11

etangu-

§ 22. X.

Angula a h, g i Media, ipsisq; equalia quadrata l m, m n Media, & o m, m p recta media.

§ 10. X.

Quia autem a g, g e sunt longitudine cōmensurabiles, et erunt a h, g i ejusdem rationis, ipsiq; equalia quadrata l m, m n commensurabilia, adeoq; o m, m p recta potentia tantum commensurabiles. Cumq; a e, e d, sint longitudine incommensurabiles, quibus longitudine sunt commensurabiles ostensa a g, e f: Ergo a g, e f sunt longitudine incommensurabiles, cum quibus in eadem ratione a h, e k etiam sunt incommensurabilia, & ipsis equalia l m, m t incommensurabilia; ipsaq; recta ejusdem rationis o m, m p longitudine sunt incommensurabiles. Sunt itaque o m, m p Mediae & potentia commensurabiles.

§ 1. VI.

Quia autem e d minus nomen, binomialis secunda a d, est commensurabile longitudine Rationali a b vel e i, etiam ipsius dimidium e f cōmensurabile est ipsi e d; & e i, e f η commensurabiles sunt longitudine. Sed e i est Rationalis.

η 12. X.

§ 20. X.

Ergo & e f & e k rectang. & rationale. Sed m t sub o m, m p contentum ipsi e k est aequale. Ergo & m t est rationale. Quare o m, m p sicut Mediae potentia solam cōmensurabiles, Rationalesq; continentes; adeoq; o p Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima η appellatur.

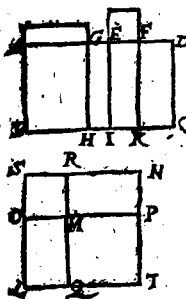
η 38. X.

PRO.

PROPOSITIO LVII.

Theorema 39.

Si spacium ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus tertia ad ; Recta linea op spacium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis Secunda dicitur.



Divisa ad in nomina a & e majus & d minus, reliqua fiant ut in 55. propof. Oſtendetur eodem modo, ut ibi, op poſſe ſpacium ac ; & ut in 56. rectas om , mp eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles, eò quod a & e ponitur rationali ab hinc ut illic longitudine incommenſurabilis.

Sed quia ed , ef longitudine ſunt cõmenſurabiles, eſtq; ed rationalis ab longitudine incõmenſurabilis, & erit etiam ef eidem ab , id eſt, e longitudine incõmenſurabilis. Sunt autem rationalis ef dimidia rationalis ed & e i potentia tantum cõmenſurabiles. Quare ek erit Medium, ipſiq; æquate mt medium, contentum ſub Medijs om , mp . Quare cum om , mp ſint Media potentia tantum commenſurabiles, contineantq; ſpacium Medium, erit op Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda γ appellatur.

¶ 14. X.

¶ 22. X.

¶ 39. X.

PROPOS. LIIX.

Theorema 40.

Si spacium ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus quarta ad : Recta linea op spacium potens Irrationalis est, quæ vocatur Major.

- α 19. X. Divisa a d in nomina a e majus & minus e d ,
 β 10. X. cetera fiant ut in 55. propos. α Erunt ag , ge lon-
 γ 20. X. gitudine incommensurabiles. Ostendetur quæ op
 δ 22. X. posse spacium ac . Quoniam ag , ge sunt longi-
 β 10. X. tudine incommensurabiles, β & ah , gi rectangu-
 γ 20. X. la ejusdem cum illis rationis & ipsis aequalia qua-
 δ 22. X. drata lm , mn incommensurabilia erunt, & recta
 om , mp potentiâ incommensurabiles. Sed quia
majus nomen ae Rationali ab est longitudine
commensurabile, erit ipsa ae rationalis, & rectan-
gulum ai γ rationale, δ & ec rectangulum
Medium propter ed ipsi ab longitudine incom-
mensurabilem, ipsiq; ec commensurabile ek Me-
dium & huius æquale tm medium. Quare cum
 om , mp sint incommensurabiles potentiâ, faci-
antq; compositum ex ipsarum quadratis lm , mn
rationale, rectangulumq; sub ipsis Medium, tota
 α 40. X. op Irrationalis erit, quæ appellatur Major.

PROPOSITIO LIX.

Theorema 41.

Si spaciū ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominib. quinta ad ; Recta linea op spaciū potens Irrationalis est, quæ Rationalis & Medium potens appellatur.

Divisa ad in nomina ae majus & ed minus, sicut cetera ut in 55. propos. α Erunt ag , $g\delta$ longitudine incommensurabiles; & op poterit ac ut in 55; quæ & Irrationalis erit, potens rationale & Medium. Erunt etiam ut in 58. om , mp potentia incommensurabiles. Ergo ai est & Medium, β 22. X. quia nomen majus a & binomij quinti ad est incommensurable longitudine Rationali ab per defin. Sed ai quadratis lm , mn simul est aequale; Sunt ergo Media. Rursus rectangulum ec est Rationalis, quia minus nomen ed longitudine commensurable est Rationali ab ex definitione, ipsiusque dimidium ef & γ Rationalis & ipsi aequale mt γ 10. X. Rationalis, sub ar , pm contentum. Quare cum om , pm sint potentia incommensurabiles, faciantque ex ipsarum quadratis lm , mn compositum Medium, & rectangulum sub ipsis contentum mt Rationalis; erit op & irrationalis, quæ δ 41. X. Rationalis & Medium potens dicitur.

EVCLIDIS ELEM.
PROPOSITIO LX.

Theorema 42.

Si spaciū ac contineatur sub Rationali ab , & ex binis nominibus sexta, ad , recta linea ap spaciū potens, Irrationalis est, quæ bina Media potens appellatur.

¶ 19. X.

Divisa ad in nomina a & e majus & e minus, cetera fiant ut in 55. α Erunt ag , eg longitudine incommensurabiles, & oportet poterit spaciū ac . Erunt & om , mp potentia incommensurabiles ut in 58. Compositum ex quadraticis lm , mn erit Medium, ut in 59. & ut in 58. mt sub om , mp contentum, Medium. Quia verò duarum. a , e & f rectarum, illa quidem longitudine est incommensurabilis ipse d ; hac vero commensurabilis; Erunt ae , ef longitudine incommensurabiles, Ergo & in eadem cum his ratione. ai , ek γ sunt incommensurabilia. Quare & compositum ex lm , mn quadraticis ipsi ai æquale, & mt ipsi ek æquale erunt incommensurabilia. Quamobrem cum om , mp sint potentia incommensurabiles, faciantq; & ex ipsorum quadraticis lm , mn compositum Medium & mt sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; ex ipsarum quadraticis compa-

¶ 13. X.

¶ 10. X.

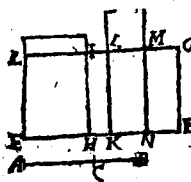
composito, erit tota op δ Irrationalis quæ bina δ 42. X.
Media potens vocetur.

Porro docetur, quasnam Irrationales Latitudines faciant Irrationalium primo Senario propositarum, ad rationalem lineam applicatam quadratam.

PROPOSITIO LXI.

Theorema 43.

Quadratum ejus ab , quæ ex binis nominibus ac , cb ad rationalem de applicatum df , latitudinem dg facit ex binis nominibus dl , lg primam.



Applicato ad de rectangulo dh quadrato a c equali & ad h alio, ik quadrato cb equali; a erit lf rectangulo acb bis sumto a c $4. II.$
quale; Siq; ex puncto m inter lg medio agatur parallela m n ipsi de , erit tam ln quàm mf $347. X.$
equale ac $rectangulo$. & Quoniam itaq; ac , cb potentia solum cõmensurabiles sunt, erũt eorũ quadrata rationalia & cõmensurabilia, quorũ utriq; cum $716. X.$
ex ijs cõpositũ y sit cõmensurabile, erit & quadratorum a c , cb cõpositum dk Rationale, quod ad $\delta 21. X.$
Rationalem de applicatũ, δ facit latitudinẽ dl δ 21. X.
rationalem; ipsiq; d elongitudine cõmensurabilem.

Quia

- Quia verò $a c, c b$ sunt Rationales potentia tantum cōmensurabiles, rectangulum sub ipsis erit
 22. X. Medium, & ejusq. duplum l f Medium. n Itaque
 cor. 24. Latitudo l g est Rationalis, ipsi l k, id est, d e
 X. longitudine incōmensurabilis. Sed d l ipsi d e est
 23. X. ostensa longitudine commensurabilis. & Ergo d l
 24. X. l g longitudine sunt incōmensurabiles, adeoq. rationales potentia solum cōmensurabiles, & d g
 37. X. ex binis nominibus composita. Erit etiam
 Prima. Quia enim $a c b$ rectangulum inter
 cor. 54. quadrata $a c, c b$ l est medium proportionale,
 X. erit & l n inter d h, i k Medium proportionale,
 1. VI. & l m inter d i, i l. & Itaq. rectangulum d i l
 17. VI. quadrato l m est aequale: Et cum quadrata $a c,$
 10. X. $c b$ sint commensurabilia, & recte d i, i l eandem
 Lemma cum illis habentes rationem longitudine sunt cō-
 39. X. mensurabiles. o Et quia d k quàm l f est majus,
 quadrataq. $a c, c b$ rectarum, rectangulo $a c b$
 his sumto sunt majora, & etiam d l quàm l g erit
 major. Itaq. cum d l sit major quàm l g, & d i l
 rectangulum quadrato l m ostensum aequale, di-
 videns rectam d l in i in partes longitudine com-
 mensurabiles, ut patet, & poterit d l major plus
 quàm l g minor quadrato recte sibi longitudine
 cōmensurabilis. Quare cum d g sit ostensa ex hi-
 18. X. us nominibus, & d l majus plus posse, quàm l g
 ipius, quadrato recte sibi longitudine cōmensu-
 rabilis; atq. idem d l nomen majus exposita ratio-
 nali d e longitudine commensurabile est, erit d g
 per desu. ex binis nominibus Prima. PRO-

PROPOSITIO LXII.

Theorema 44.

Quadratum ejus, quæ est ex binis
 ac, cb , medijs prima ab , ad de Ratio-
 nale applicatum df , Latitudinem
 dg facit ex binis dl, lg nominibus se-
 cundam,

Repetatur eadem constructio, quæ in prae-
 denti est adhibita. Quia ergo ac, cb sunt Me-
 dia potentia tantum commensurabiles, quæ con-
 gineant Rationale, erunt earum quadrata Me-
 dia & commensurabilia, & ipsis aequalia dh ,
 ik , media, quare & totum dk illis & commensu-
 rabile & Medium; ipsiusq; Latitudo dl ratio-
 nalis ipsi de , Longitudine incommensurabilis.
 Et cum ac, b rectangulum ac sit rationale, ejus
 etiam duplum lf rationale erit. Ergo lg Lati-
 tudo est rationalis longitudine commensurabilis
 ipsi ik , id est, de . Cum itaque duarum dl, lg ,
 hæc longitudine sit commensurabilis ipsi de , illa
 verò incommensurabilis, & erunt inter se longitu-
 dine incommensurabiles. Sunt autem & ratio-
 nales dl, lg ut patet: Itaq; sunt Rationales po-
 tentia tantum commensurabiles n : & tota dg
 est ex binis nominib9. Erit etiam secunda. Si-
 militex enim, ut in precedenti, ostenditur dl esse
 nomen majus & posse plus quam minus lg qua-
 drata rectæ sibi longitudine commensurabilis.

a 38. X.

b 16. X.

ycor, 24.

X.

d 23. X.

e 21. X.

f 13. X.

g 37. X.

Sed ostensum est nomen minus $l g$ esse longitudine commensurabile rationali de posita. η Erigitur $d g$ ex binis nominibus secunda.

PROPOSITIO LXIII.

Theorema 45.

Quadratum ejus, quæ ex binis medijs secunda $a b$, ad Rationalem de applicatum $d f$, Latitudinem $d g$ facit ex binis nominibus $d l, l g$ tertiam.

39. X.

Constructio: ijsdem ut in 61. quia $a c, c b$ sunt media potentia tantum commensurabiles, quæ contineant Medium, erunt eorum quadrata media & commensurabilia; & ipsis equalia $d h, i k$

16. X.

7 Cor. 24

X.

media, illiusq; totum $d k$ commensurabile, medium. Ergo $d l$ Latitudo est rationalis, ipsi de longitudine incommensurabilis. Et cum $a c b$ rectangulum sit Medium, ejus duplum l ferit medium & $l g$ latitudo longitudine d incommensurabilis ipsi $i k$ vel $d e$. Cum verò $a c, c b$ sint longitudine incommensurabiles, sitq; ut $a c$ ad

23. X.

3. Lem-

ma 19. X.

10. X.

16. X.

c b, sita quadratum $a c$ ad rectangulum $a c b$, ζ erunt hac inter se commensurabilia. η Sed $a c$ quadrato, compositum ex ipsis, id est $d k$ est commensurabile, ut patet, & rectangule $a c b$

com-

commensurabile est ejus duplum lf : 9 Ergò dk
 ipsi lf est incommensurabile, & ipsa df , dl, lg sunt 9 14. X.
 longitudine incommensurabiles: Cumq; etiam
 rationales, ut patet. Ergò dl, lg sunt rationales
 potentia tantum commensurabiles, & tota
 dg ex binis nominibus. Erit etiam ter-
 tia. Similiter enim ut in 61 ostenditur d leffe no- x 37. X.
 men majus, posseq; plus quam minus lg, qua-
 drato recta sibi longitudine commensurabilis.
 Sed ostensum est neutrum nomen dl, lg esse
 posita rationali de longitudine commensurabi- λ per de-
 le. λ Erit itaq; dg ex binis nominibus ter- fin.,
 tia.

PROPOSITIO LXIV.

Theorema 46.

Quadratum Majoris ab ad Ratio-
 nalem de applicatum df , latitudi-
 nem dg facit ex binis nominibus d l,
 lg quartam.

Constitutis iisdem ut in 61, & quia a c, cb por- a 40. X.
 tentia sunt incommensurabiles, continentes Me-
 dium, faciuntq; compositum ex quadratis suis
 Rationale, erit dk rationale & lf duplum
 rectanguli abc Medium; adeoque dl 3 ra- C 21. X.
 tionalis ipsi de longitudine commensurabilis;

γ Sic

23. X.

37. X.

10. X.

19. X.

perde-
fin.

γ Sed l grationalis ipsi l k, id est, d e longitudine
 incommensurabilis, ipsa q , d l, l g longitudine
 incommensurabiles, δ vel Rationales potentia
 tantum commensurabiles & d g binomi alis.
 Erit etiam quarta. Quadratum enim l m, ut in
 61, est aequale rectangulo d i l. Et quia quadrata
 a c, c b sunt incommensurabilia, etiam d h, i k
 ipsis equalia sunt incommensurabilia, & d i,
 i l longitudine incommensurabiles. Ita, ut in 61,
 ostenditur d l major quam l g; & ad d l applica-
 tum rectangulum d i l aequale quadrato l m,
 quod d l dividit ad i in partes longitudine in-
 commensurabiles. Itaque, poterit d l plus quam
 l g quadrato recta sibi longitudine incommen-
 surabilis. Sed majus nomen d l longitudine
 commensurabile est posita Rationali d e. η Erit
 ergo d g ex binis nominibus quarta.

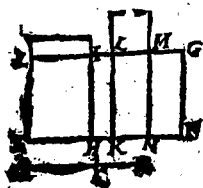
PROPOSITIO LXV.

Theorema 47.

Quadratum ejus a b, quae Medium
 & Rationale potest, ad Rationalem d e
 applicatum d f, Latitudinem d g facit
 ex binis nominibus d l, l g quintam.

41. X.

Peractis ceteris ut in 61, quia a c, c b a sunt
 potentia incommensurabiles, facientes quidem
 ex suis quadratis Medium, ac sub se contentum
 ratio-



rationale erit dk aequale

composito quadratorum

Medium, & l in duplum re-

ctanguli ac b Rationale.

Ergo Latitudo d est Ratio. $\beta 23. X.$

nalis longitudine β commē-

surabilis posita de ; lg verò Rationalis eidem

longitudine γ commensurabilis; & sic d l , lg

sunt longitudine δ incommensurabiles; & quia

Rationales, sunt Rationales potentia tantum $\gamma 21. X.$

cōmensurabiles, ex quibus composita d g est ex $\delta 19. X.$

binis nominibus & quidem quinta. Rursus e . $\delta 37. X.$

nim; ut in 61 . ostēditur, d l rectangulum aequa-

le esse quadrato lm , & ut in 64 . d l nomen majus

plus posse quam lg , quadrato recte sibi longitu-

dine incommensurabilis. Sed minus nomen lg

ostensum est posita Rationali de longitudine γ per de-

commensurabile. γ Erit itaq; d g ex binis

nominibus quinta.

PROPOSITIO LXVI.

Theorema 48.

Quadratum ejus ab , quæ bina Me-

dia potest, ad Rationalem de applica-

tum df , facit Latitudinem md g ex binis

d l , lg nominibus Sextam.

Per actis ceteris ut in 61 . quia ac , ob potentia

sunt incommensurabiles, a faciunt g ex sui qua-

dratis

$\alpha 42. X.$

β 23. X.

γ 13. X.

δ 10. X.

ε 37. X.

ζ per de-
fin.

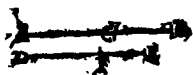
dratis compositum medium, & sub se contentum Medium, incommensurabileq; ex quadrato composito, id est, d k composito quadratorum æquale & l f rectangulo a c b bis sumto æquale; erunt Media, & latitudines d l, l g rationales ipsi de longitudine incommensurabiles. Quoniam verò d k, & incommensurabile est rectangulo a c b, etiam y ipsius duplū l f, incommensurabile erit, d ipsaq; d l, l g, incommensurabiles longitudine, quæ sunt Rationales potentia solū commensurabiles, & ac ob id d g ex binis nominibus, & quidem Sexta, Nam d l, ut in 65; nomen majus plus potest quam l g quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis. Sed neutrum illorum nomen d l, l g, est ostensum. Rationali posita d e commensurabile longitudine. Ergo d g est ex binis nominibus Sexta.

PROPOSITIO LXVII.

Theorema 49.

Ei a b, quæ ex binis nominibus a c, c b Longitudine commensurabilis a e, & ipsa ex binis nominibus d f, f e est, atque ordine eadem.

Fiat



a Fiat, ut tota *ab* ad totam *de*; ita ablata *a* 12. VI.
a c ad ablata *d* f. β Ergo & reliqua *cb* ad reli. 619. V.
 quam *fe* erit, ut tota *a* b ad *de* totam. Cumq;
de ipsi *ab* sit longitudine commensurabilis: γ γ 10. X.
 Erit & *d* f ipsi *a* c; & *fe* ipsi *c* b. δ Sunt vero
a c, *cb* nomina binomialis *ab* rationalia. Ergo δ 37. X.
 & *d* f, *fe* sunt Rationalia. Rursus, cum sit ut *a* c
 ad *d* f, ita *c* b ad *fe*: & permutando, ut *a* c ad
cb, ita *d* f ad *fe*. Seda *c*, *c* b sunt potentia so-
 lam commensurabiles. Ergo & *d* f, *fe*. Atq; ita
d f, *fe* sunt Rationales potentia solum commen-
 surabiles, & *d* e ex binis nominibus. Erit & i-
 ipsi *a* b ordine eadem. Aut enim *a* c plus potest,
 quam *c* b, quadrato recte sibi longitudine com-
 mensurabilis; Si poterit *a* c plus quam *c* b qua δ 15. X.
 drato recte longitudine commensurabilis, & po-
 terit & *d* f quam *fe*; atq; si nomen majus *a* c lon-
 gitudine commensurabile fuerit ipsi Rationali
 posita; erit & *d* f & utraq; *a* b *d* e binomialis
 prima: Si minus *cb* etiam *fe*, & utraq; *ab*, *d* e
 est binomialis secunda; Si neutrum *a* c, *cb* vel
d f, *fe* erit ex binis nominibus tertia. Sed si *a* c
 plus possit quam *cb* quadrato recte sibi longi-
 tudine incommensurabilis, etiam *d* f quam *fe*,
 & ita, ut antea, utraq; vel quarta vel quinta vel
 sexta binomialis erit per definitionem.

Scholium.

Si *de* binomiali *ab* tantum potentia sit commensurabilis, idem quidem concluditur, sed loco longitudine commensurabilis ubique legendum est potentia commensurabilis, id est, *de* quidem concluditur Binomialis, sed non eadem ordine cum *ab*. In sequentibus autem propositionibus *de* cum *a* semper est eadem, etiam si potentia sint commensurabiles.

PROPOS: LXIIX.

Theorema 50.

Si *ab*, quæ ex binis Medijs, *ac*, *tb*, Longitudine commensurabilis *de*, & ipsa ex binis medijs *df*, *fe* est, atque ordine eadem.

α Fiat ut *ab* ad *de*, ita ablata *a* cad ablatum *df*, *β* erit, etiam reliqua *cb* ad reliquam *fe*, ut tota ad totam. Sed deponitur ipsa *b* longitudine commensurabilis, *γ* Ergo *df*, *fe* ipsi *a*, *c*, *cb*, sunt longitudine commensurabiles. Sunt autem

α 12. VI.

β 19. V.

γ 10. X.

tem

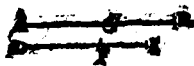
tem a c, c b media. δ Ergo $\&$ d f, f e. Rursus cum δ 24. X.
 sit, ut a c ad d f, ita c b ad f e, $\&$ permutando, ut
 a c ad c b, ita d f ad f e; sinq, a c, c b potentia cō- 38. X.
 mensurabiles, γ erunt $\&$ d f, f e. Sunt autem d f,
 f e etiam ostensa Media; sunt ergo Media poten-
 tia tantum cōmensurabiles, ζ $\&$ d e ex binis me- ζ 38. vel
 diis, $\&$ quidem cum a b eodem ordine. Quia e- 39. X.
 nim est, ut a c ad c b ita d f ad f e. η Sed ut a c ad η Lemma
 c b, ita quadratum a c ad rectangulum a c b, η $\&$
 ut d f ad f e, ita d f quadratum ad d f e rectangu- 59. X.
 lum; erit etiam, ut quadratum a c ad rectang.
 a c b, ita d f quadratum ad d f e rectang. $\&$ per-
 mutando, ut quadrata a c, d f, ita rectangula
 a c b, d f e; Sed a c quadratū quadratū d f. (quia
 a c, d f sunt longitudine cōmensurabiles) est com-
 mensurable. γ Ergo $\&$ rectangula. Si ergo a c b
 fuerit rationale, erit $\&$ d f e rationale. $\&$ d e ex
 binis Mediis prima: Si verò Medium. δ Me- δ cor. 24.
 dium, κ $\&$ d e ex binis Mediis secunda. X.

PROPOSITIO LXIX.

239. X.

Theorema si.

Majori a b commensurabilis de &
 ipsa de Major est.



Fiant, qua in antecedenti. Quia ergo a b, d e
 longitudine vel potentia tantum sunt commen-

Bb

Jura

- α 10. X. *surabiles, & eodem modo nam a c, d f, quàm c e, f e
 commensurabiles erunt. Rursus, cum sit, ut a c ad
 d f, ita c b ad f e: & permutando, ut a c ad c b,
 β 22. VI. ita d f ad f e, β erit, ut quadratum a c ad qua-
 dratum c b, ita quadratum d f ad quadratum f e;
 & cōponendo: ut cōpositum ex quadratis a c, c b,
 ad quadratum c b; ita compositum ex qua-
 dratis d f, f e, ad quadratum f e: & conver-
 tendo, ut quadratum c b, ad compositum qua-
 dratorum a c, c b, ita quadratum f e ad compos.
 Quadratorum d f, f e. Sed c b quadratum, qua-
 drato f e est commensurabile, quia ipsa recta vel
 longitudine vel potentia sunt commensurabiles;
 α Ergò & compositum quadratorum a c, c b,
 composito quadratorum d f, f e commensurabile
 erit. γ Sed compositum illud est Rationale, quia
 recta a c, c b, componunt Majorem a b. δ Igitur
 & hoc est Rationale. Rursus quia est, ut a c ad
 c b, ita d f ad f e, ut in praecedenti; rectangulo
 a c b, rectangulum d f e ostenditur commensura-
 bile; illudq; cum sit γ Medium, erit & hoc Me-
 dium. Sed cum sit, ut a c ad c b, ita d f, ad f e;
 γ Sintq; a c, c b, potentia incommensurabiles,
 α erunt & d f & f e. Itaq; cum d f, f e potentia
 sint incommensurabiles, faciantq; ex earum qua-
 dratis compositum Rationales; quod verò sub ipsis
 continetur, Medium; γ erit tota d e Major.*

PROPOS. LXX.

Theorema 52.

Rationale ac Medium potenti ab commensurabilis de , & ipsa de Rationale ac Medium potens est.

Constructis iisdem, ut prius, etiam ut in præcedenti compositum ex quadratis ac , cb composito ex quadratis df , fe commensurabile esse ostenditur. Sed illud compositum est a Medium: Et Ergo $\&$ hoc. Eodemq; modo rectangulo acb Rationali commensurabile $\&$ Rationale erit Rectangulum dfe , $\&$ df, fe a potentia incommensurabiles. Itaq; tota de Rationale ac Medium potens a erit, (propter affectiones ipsi competentes.)

a 41. X.

Et cor. 24.

X.

PROPOSITIO LXXI.

Theorema 53.

Bina Media potenti ab commensurabilis, de , & ipsa de bina Media potens est.

Constructis iisdem, ut prius, etiam ut antea, composito ex quadratis ac , cb compositum ex quadratis df , fe a commensurabile $\&$ Medium a 42. X. esse ostenditur: $\&$ rectangulo acb Medio commensurabile, $\&$ Medium rectangulum dfe . a Sunt vero df, fe potentia incommensurabiles, ut prius.

Bb 2

a Deniq;

- α 42. X. α Deniq, cum quadratorum $a c$, $c b$ cōposito re-
ctangulum $a c b$ sic incommensurable: sed cōpo-
sito quadratorum $a c$, $c b$, rectanguloq, $a c b$ cō-
mensurable sunt compositum quadratorum $d f$,
 β 14. X. $f e$, & rectangulum $d f e$; β erit etiam composi-
tum quadratorum $d f$, $f e$ incommensurable re-
ctangulo; α Eritq, $d e$ bina Media potens.

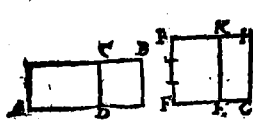
*Propositionibus duabus exponit aliam
differentiam Senarij primi sex Irrationa-
lium. Vocantur autem hactenus proposita
Senaria per cōpositionem, quod signo $\dagger$
componantur nomina. Sed a 74 sequit-
tur Senaria per detrāctionem, quia per si-
gnum, $\div$, subducentur nomina. De qui-
bus eadem quæ in illis docentur.*

PROPOSITIO LXXII.

Theorema 54.

Si Rationale $a c$ & Medium $d b$,
componantur, quatuor Irrationales
fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus;
vel quæ ex binis Mediis prima; vel
Major; vel Rationale ac Medium po-
tens.

Erit $a c$ quàm $d b$ vel majus vel minus: aqua-
rum esse nequit, quia $d b$ aequale rationali $a c$,
foret



foret Rationale. Sit ergo Majus. Applicentur ad rationalem ef, eh aquale ipsi ac; & kg

aquale ipsi db, ut totum fi sit aquale toti ab.

Erit ek a rationalis ipsi ef longitudine commensurabilis, sed ki rationalis eidem longitudine incommensurabilis.

Rursus quia eh rationale & hi Medium sunt incommensurabilia, erunt in eadem ratione ek, ki, longitudine & incommensurabiles.

Itaq; ex Rationalibus potentia incommensurabilibus composita ei d erit binomialis. Sed

eum ac quam db ponatur majus, eh quam hi, & erit etiam ek major quam ki. Jam majus nomen ek plus poterit, quam minus ki quadrato recta sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis.

Si ek plus potest quam ki quadrato recta sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis. Sit q; ek nomen majus rationali ef commensurabile longitudine, ut patet, erit ei per defin. ex binis nominibus prima. Itaq; recta potens spacium eg, ipsi a b aquale, sub rationali ab & binis nominibus prima e i contentum & erit Irrationalis, quare

ex binis nominibus dicitur.

Si vero ek plus potest quam ki, quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis; sit q; ek posita rationali ef longitudine commensurabilis, erit ei ex binis nominib. quarta per defin. Quare

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

recta

a 21. X.

c 23. X.

γ 10. X.

δ 37. X.

ε 55. X.

§58. X.

recta potens e g spaciū a q uale ipsi a b spacio
cōtentum sub Rationali e f & e i ex binis nomini-
bus quarta. Irrationalis est, quæ vocetur Mai-
or. Sit jam a c majus Irrationale & Medium;
d b verò minus Rationale, constructis iisdem, erit
e k longitudine ipsi e f incommensurabilis, & k i
commensurabilis, adeoq; e k , k i rationales potē-
tia tantum cōmensurabiles, & e i ex d b binis nomi-
nibus. Itaq; e k nomen majus plus potest, quā
minus k i , quadrato rectæ sibi longitudine vel cō-
mensurabilis vel incommensurabilis. Si commē-
surabilis, sitq; e k rationali e f posita incommē-
surabilis, erit e i ex binis nominibus secunda. Qua-
re recta potens spaciū e g , sive a b , sub rationali
e f & e i ex binis nominibus secunda, conten-
tum, Irrationalis est quæ ex binis Mediis pri-
ma nō appellatur.

§56. X.

Si commensurabilis, erit e i ex binis nomini-
bus quinta. Quare recta potens spaciū e g si-
ve a b sub rationali e f , & ex binis nominibus
quinta e i contentum, Irrationalis, est, quæ
Rationale ac Medium potens dicitur.

§59. X.

PROPOSITIO LXXIII.

Theorema 55.

Si duo Media, a c , d b inter se in-
commensurabilia componantur, duæ
reli-

reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

Adhibita præcedentis constructione, erit a c quàm db vel majus vel minus, & nullo modo equalis, quia contra hypothesein forent commensurabilia. Cum ergo a c, db ponantur spacia Media, & erunt ipsis equalia eh, hi media; quare ek, ki ejusdem rationis rationales & longitudine & incommensurabiles sunt ipsi ef, posita, & ex ek, ki rationalibus potentia tantum commensurabilibus composita ei est ex dbinīs nominibus. Cumq; a c quàm db ponatur majus, erit ek nomen majus, ki minus. Itaq; ek plus poterit quàm ki quadrato recta sibi longitudine vel cōmensurabilis vel incommensurabilis. Si cōmensurabilis & utrumque sit rationali exposita incommensurabile, erit ei ex binis nominibus tertia: Quare recta potens spacium eg quod a b est aequalē contentum sub rationali ef & ex binis nominib; tertia, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. Si incommensurabilis, & utrumq; ek, ki incommensurabile ipsi ef posita, erit ei ex binis nominibus sexta. Quare recta potens eg spacium sub rationali ef & binominali sexta ei contentum, Irrationalis est, quæ & bina Media potens vocatur.

α 10. X.

β 1. VI.

γ 23. X.

δ 37. X.

ε 57. X.

ζ 60. X.

Corollarium.

Ex his colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales, neque Mediæ, neque inter se easdem esse.

- Nam quadratum Mediæ ad Rationalem applicatum, α latitudinē efficit rationalem, ipsi Rationali longitudine incōmensurabilem. At Quadratū ejus, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, β latitudinem efficit ex binis nominibus primam. Et quadratum ejus, quæ est ex binis Medijs prima, ad rationalem applicatum, γ latitudinem facit ex binis nominibus secundā. Quadratū deinde ejus, quæ ex binis medijs secundā ad Rationalem applicatum, δ latitudinē facit ex binis nominibus tertiam. At Quadratū Majoris ad Rationalem applicatum, ε latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum vero ejus, quæ Rationale & Medium potest, ad rationalem applicatum, facit ζ latitudinē ex binis nominibus quintā. Postremo quadratum ejus, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatū, η latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Itaq; cum hæ latitudines differant ε à latitudine Media & inter se; à latitudine quidem Media, quod hæ sit Rationalis; illa verò Irrationales; inter se verò, quod ordine non sint eadem.*
- α 23. X.
β 61. X.
γ 62. X.
δ 63. X.
ε 64. X.
ζ 65. X.
η 66. X.

dem ex binis nominibus, perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

Hactenus itaq; de 7. Senarijs est actum. In primo à 37, ad 42, docuit Euclides ortum sex Irrationalium. In secundo à 43. ad 48. docuit eorum divisiones in uno puncto. In tertio à 49. ad 54 docuit inventionem Sex binomialium. In quarto à 55. ad 60. ostendit, quomodo primi Senarij sex irrationales differant, docens, quæ sit illa irrationalis, quæ potest spacium contentum sub Rationali & binomiali prima, secunda &c. In quinto à 61. ad 66. docuit, quas latitudines irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium primo Senario explicatarum ad rationalem lineam applicata. In sexto à 67. ad 71. ostendi commensurabilem alicui Irrationalium esse eandem cum illa. In 70. duabus propositionibus 72 & 73 aliam differentiam sex illarum linearum docuit.

Sequuntur jam 7 alij Senarij, in quibus Euclides demonstrat eadem de sex aliis Irrationabilibus lineis, quæ per detractionem generantur, quæ hactenus de Irrationalibus per compositionem factis docuit.

Principium Senariorum per Detractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

Theorema 56.

Bb 5

Si

Si à Rationali $a c$ Rationalis $a b$ auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua $b c$ Irrationalis est. Vocatur autem Apotome.



a Quia enim est ut $a c$ ad $a b$, ita quadratū $a c$ ad

$\alpha 3$. Lem-
ma 19. X.

$c a b$ rectangulum; Suntq; $a c$, $a b$ longitudine incommensurabiles, β erunt quadratum $a c$ & $c a b$ rectangulum incommensurabilia. Sed

$\beta 10$. X.

quadrato $a c$ compositum ex quadratis rectarū $a c$, $a b$ est γ commensurabile, quia linea illa sunt potentia commensurabiles; γ rectangulo $c a b$ suum duplum est commensurabile. δ Com-

$\gamma 16$. X.

positum itaq; ex quadratis $a c$, $a b$, & rectangu-
lum $c a b$ his sumtum sunt incommensurabilia

$\delta 14$. X.

Sed compositum ex quadratis rectarum $a c$, $a b$ est ϵ aequale rectangulo $c a b$ his sumto una cum quadrato $c b$. Itaq; compositum ex quadratu re-
ctarum $a c$, $a b$, reliquo quadrato $c b$ est ζ in-

$\epsilon 7$. II.

commensurabile. Cum itaq; ex rectarum $a c$, $a b$

ζ Cor. 17.
X.

quadratis compositum sit rationale, utpote cō-
mensurabile quadrato $a c$ Rationali, erit $c b$ Ir-
rationalis & ipsa $c b$ Irrationalis. Vocetur au-
tem Apotome, Resecta vel Residuum.

PROPOSITIO LXXV.

Theorema 57.

Si à Media $a b$, Media $a c$ auferatur potentia tantum commensurabilis existens

existens toti, quæ cum tota Rationali bac contineat; Reliqua bc Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

Cum a, b, ac sint potentia commensurabiles earum quadrata commensurabilia erunt, & ex quadratæ compositum quadrato ac commensurabile. Sed quadratum a c Mediæ est Irrationale & Medium. Ergo & compositum ex quadratis a, b, ac . Et cum bac rectangulum ponatur rationale, ejus etiam duplum erit rationale. Itaq; compositum ex quadratis & rectang. bac bis sumtum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex quadratis; a, b, ac est γ æquale rectangulo bac bis sumto cum quadrato bc . Itaq; rectang. bac bis cum quadrato bc incommensurabile erit rectangulo bac bis sumto: & rectang. bac bis incommensurabile est quadrato bc . Sed bac rectangulum est rationale. Ergo quadratum bc est Irrationale & recta cb Irrationalis, quæ vocetur Mediæ Apotome prima (quia relinquitur post deductionem. Minoris nominis linea ex binis Mediis primæ, à majori nomine.)

PROPOS: LXXVI.

Theorema 58.

Si à Mediæ b a Mediæ ac auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium bac contineat; Reliqua bc Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

Quo-

a16.X.

6 cor. 24.
X.

y7. II.

α 16. X.



β cor. 24.
X.

γ 7. II.

δ 27. X.

Quoniam quadrata ab ,
a c potentia commensurabili-
um sunt commensurabilia; erit & compositum
ex ipsis utriq; ipsorum a commensurabile. Sed
utrumq; super Medijs est Medium. Ergo utriq;
commensurabile compositum est β Medium.
Quia verò rectangulum bac ponitur Medium,
ejus etiam duplum erit Medium. Sed compositum
ex quadratis ab, ac y aequale est rectangu-
lo ba bis sumto cum quadrato $b c$. Compositum
ergo ex quadratis Medium est majus rectangu-
lo bac bis sumto Medio, quadrato $b c$. δ Sed
Medium non superat Medium rationali. Itaq;
quadratum $b c$ non est rationale, ip(aq; $b c$ linea
irrationalis qua vocetur Medix Apotome
secunda.

PROPOSITIO LXXVII.

Theorema 59.

Si à recta ab linea recta ac aufe-
ratur, potentia incommensurabilis
existens toti, quæ cum tota faciat
compositum quidem ex ipsarum.
Quadratis Rationale; quod autem
sub ipsis continetur bac Medium;
Reliqua $b c$ Irrationalis est. Vocetur
autem Minor.

Qua

X.

§ 10. def.

§ 7. II.

8 Cor. 17:

X.

Theorema 60.

Quoniam compositum ex quadratis rectarum
a b, ac est medium vel Irrationale, & compro-
batur sub ipsis b ac rationale, sicut & ipsius du-
plum

10. def. *plurimæ erunt compositum quadratorum & rectangulum bac bis sumtum incommensurabile. Sed compositum ex quadratis est rectangulo*

37 II.

17 X.

bac bis sumto cum quadrato bc , & æquale. Itaque rectang. bac bis sumtum cum quadrato cb rectangulo bac bis sumto est γ incommensurabile: & rectangulum bac bis, quadrato bc incommensurabile. Cum itaque bac rectangulum sit Rationale, erit quadratum bc irrationale, ipsaque recta bc Irrationalis, quæ vocetur cum Rationali medium totum efficiens.

PROPOSITIO LXXIX.

Theorema 61.

Si à recta ab recta ac auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis ab , ac Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium bac , incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua bc Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

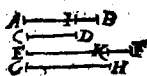
7. II.

Quoniam ex quadratis rectarum ab , ac , compositum æquale est rectang. bac bis sumto cum quadrato bc ; superabit compositum ex quadratis Medium, rectangulum bac bis sumtum γ Medi-

um quadrato $b c$. γ Sed medium non superat β cor. 24.
 Medium Rationali. Itaq; $b c$ erit Irrationale, X.
 ipsaq; $b c$ Irrationalis, qua vocetur cum Medio γ 27. X.
 Medium totum efficiens.

LEMMA.

Si idem excessus $i b$ sit inter primam $a b$ magnitudinem & secundam $c d$, qui $k f$ inter tertiam $e f$ magnitudinem & quartam $g h$; erit & vicissim idem excessus $k f$ inter primam $a b$ magnitudinem & tertiam $e f$, qui inter secundam $c d$ magnitudinem & quartam $g h$.



Quoniam $i b$ est excessus inter $e b, c d$; erunt $a i, c d$ aequales; ut & $e k, g h$. Erit ergo idem

excessus inter $a i$ & $e k$, qui inter $c d$ & $g h$, cum magnitudines singula singula sint aequales. Est autem totorum $a b, e f$ excessus idem, qui inter $a i, e k$, qui $i b$ & $k f$, ponuntur aequales. Idem itaq; erit excessus inter $a b, e f$, qui inter $c d$ & $g h$.

Corollarium.

Hinc constat: Quatuor magnitudines Arithmeticam analogiam habentes, vicissim quoq; Arithmeticam analogiam habere. Hae enim in excessu eodem consistit, quem jam ostendimus.

P R O.

EVCLIDIS ELEM:
PROPOSITIO LXXX.

Theorema 62.

Apotomæ ab una bc tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti &c.



Congruat ipsi a , si potest, alia Rationalis bd toti a & potentia solum commensurabilis. Quia bc est rationalis, erit a & illi potentia solum commensurabilis rationalis: Sunt ergo a & b potentia tantum commensurabiles, ut & ad , bd . Cum verò idem sit excessus, inter compositum ex quadratis rectarum ac , bc & rectangulum ac b bis sumtum, qui inter compositum ex quadratis rectarum ad , bd , & rectangulum ad b bis sumtum, a quia utrumque superat utrumque quadrato ab ; Erit permutando etiam idem excessus compositum ex quadratis a & c , b & c , & a & d , b & d , qui rectangulorum bis sumptorum ac b & ad b . Est autem excessus inter illa composita spaciū rationale, quod utrumque sit rationale. Igitur & excessus bis sumptorum rectangulorum est spaciū rationale. Sed cum a & b sint rationales potentia solum commensurabiles, & erit rectangulum ac b medium;

u 7. II.

β Iem, 79:

X.

27. X.

δ 22. X:

medium, & ejus, duplum medium. Sic eadem
 de causa ad b rectangulum bu erit medium.
 Sed medium non superat Medium rationali.
 Ergo excessus rectangulorum $a c b$ & $ad b$, id est,
 quadratum ex $a b$ erit spacium Medium, id est,
 Irrationale, quod tamen modo rationale asse-
 debatur. Quod absurdum.

PROPOSITIO LXXXI.

Theorema 63.

Mediæ Apotomæ primæ $a b$ una
 $b c$ tantum congruit recta linea Me-
 dia potentia solum commensurabi-
 lis existens $a c$ toti, & cum tota Ratio-
 nale $a c b$ continens.

Congruat ipsi $a b$ alia $b d$. Quia $b c$ est Media a 24. X.
 ipsi $a c$ potentia solum commensurabilis, & erit &
 $a c$, media; & $a c$, cb Media potentia solum com- 37. II.
 mensurabiles. Quoniam vero inter compositum
 quadratorum $a c$, $b c$, & compositum quadra- 7 Schol.
 torum $a d$, bd idem est excessus, nempe quadratum 27. X.
 $a b$, qui inter rectangula $a c b$ & $ad b$ quovis
 sumto. Sed excessus rectangulorum, & est spaci-
 um rationale. Ergo & excessus compositorum ex
 quadratis. Sed cum $a c$, bc sint Media potentia
 solum commensurabiles, erunt ipsarum qua-
 drata

§ 16. X.

s cor. 24.

X.

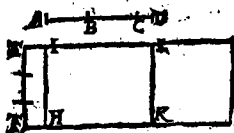
§ 27. X.

drata commensurabilia & compositum ex ipsis utriq; ipsorum d commensurabile, atq; ob id & Medium. Nec aliter Medium erit compositum quadratorum a d, b d. Sed medium non superat Medium rationali. Ergo excessus compositorum ex quadratis erit Medium Irrationale, quod modo ostendebatur Rationale. Quod absurdum.

PROPOSITIO LXXXII.

Theorema 64.

Mediæ Apotomæ Secundæ ab , una bc tantum congruit rectæ lineæ. Media potentia solum commensurabilis existens toti ac , & cum tota Medium ac b continens.



Congruat ipsi ab , si potest, alia bd ; & ad Rationalem ef applicetur rectangulum ek æquale composito quadratorum ac , bc & aliud eh æquale quadrato ab , & aliud eg æquale composito quadratorum ad , bd . Quoniam itaque compositum ex quadratis rectarum ac , bc rectangulo ac b bis sumto cū quadrato ab æquale est; erit ik æquale rectangulo ac b bis sumto, & ig æquale rectangulo

α 7. II.

Golo a db bis sumto. Cumq; a c, b c sint Media
 potentia commensurabiles β erunt earum qua-
 drata Media β commensurabilia, γ atq; ex ipsis
 compositum utriq; eorum commensurabile β
 d Medium. Igitur β e k, composito illi equale
 erit Medium. Quod cum sit applicatum ad Ra-
 tionalem e f, β erit f k rationale ipse e f longitu-
 dine incommensurabilis; neq; aliter h k ratio-
 nalis est ipse e f longitudine incommensurabilis.
 Et quia a c, b c longitudine sunt incommensu-
 rabiles, β est, ζ ut a c ad b c, ita quadratum
 a c ad rectangulum a c b, η erit quadratum a c
 rectangulo a c b incommensurabile. Sed qua-
 drato a c compositum ex quadratis a c, b c est
 commensurabile; id est, e k rectangulum; β
 a e b suum duplum, id est, i k rectangulum com-
 mensurabile: Ergo e k, i k sunt incommensura-
 biles; atq; sic f h, h k recta θ incommensurabi-
 les. Quae cum sint ostensa rationales: erunt
 f h & h k rationales potentia solum commensu-
 rabiles. Cum ergo ex Rationali f k aufera-
 tur rationalis h k ipse f k potentia tantum com-
 mensurabilis, κ erit f h Apotome β illi cōgruens
 h k. Similiter ostendetur f h apotome, illiq; con-
 gruens h g. Atq; ita apotome f h non una tan-
 tum congruet recta potentia solum commensu-
 rabili existens toti. Quod λ absurdum.

 β 24. X. γ 16. X. δ cor. 24.
X. ϵ 23. X. ζ Lēma. η 9. X. θ 10. X. ι 14. X. κ 74. X. λ 80. X.

PROPOSITIO LXXXIII.

Theorema 65.

Minori ab una tantum congruit
recta linea $b c$ potentia incommen-
surabilis existens toti ac , & cum tota
faciens compositum quidem ex ipsa-
rum ac, bc quadratis Rationale; quod
autem sub ipsis continetur, Medium
 acb .

Congruat ipsi ab , si potest, alia $b d$. Quo-

α Schol.
23. X.

niam ut in 80. propos. idem est excessus composi-
torum ex quadratis $a c, b c$ & ex quadratis $a d, b d$
qui inter rectangula $a c b$, & $a d b$ quolibet bis
sumto; α Sed excessus compositorum ex quadra-
tis est Rationale, quia utrumque ponitur rationa-
le. Ergo & excessus rectangulorum $a c b$ &
 $a d b$ est spatium Rationale. Idem vero etiam
est non rationale, quia rectangula ponuntur
Media, β quae se non excedunt rationali. Ne er-
go absurdum hoc sequatur, vera erit propositio.

ϵ 27. X.

PROPOSITIO LXXXIV.

Theorema 66.

Ei ab , quae cum Rationali Medi-
um to-

tum facit, una tantum congruit recta linea bc potentia incommensurabilis existens toti ac , & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur acb Rationale.

Præstet hoc, quod bc , alia bd . Quoniam ut in 80. propos. idem est excessus compositorum ex quadratu ac, bc , & ex quadratu ad, bd , qui inter rectangula acb & adb quolibet bis sumto, Sed inter hac rectangula ut in 81. propos. spacium est rationale. Igitur & compositorum ex quadratis excessus est spacium rationale. Sed idem etiam est non rationale, quia utrumque est medium quæ se non excedent rationali. Ne ergo absurdum hoc sequatur, vera erit propositio. α 27. X.

PROPOSITIO LXXXV.

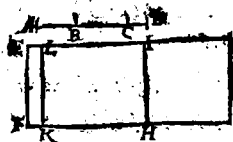
Theorema 67.

Ei ab , quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit recta linea bc potentia incommensurabilis existens toti ac , & cum tota faciens & compositum ex ipsa-

Cc 3

rum

rum Quadratis Medium, & quod sub
 ipsis continetur ac b Medium, incom-
 mensurabileque composito ex ipsa-
 rum Quadratis.



Præstet hoc, si potest,
 quod bc , alia bd ; ean-
 demq; adhibeatur con-
 structio, quæ in 82. Quo-
 niam, compositum ex

α 23. X.

quadratis ac , bc , est Medium; ipsi a quale, eh e-
 rit Medium, & recta fh rationalis ipsi ef lon-
 gitudine α incommensurabilis. Rursus cum
 ac b rectangulum sit Medium, & ipsius duplū,
 id est, ik Medium; erit & recta hk Rationalis
 longitudine incommensurabilis ipsi ef rationa-
 li. Et quoniam ik rectangulo ac b , tanquam
 duplum, est commensurabile, quod rectangulum
 ac b incommensurabile ponitur composito, ex
 quadratis, ac , bc , id est, ipsi eh , erit ik eidem
 composito eh & incommensurabile, & recta fh ,
 hk , eandem habentes rationem, longitudine
 γ incommensurabiles, Quæ cū etiā sint Rationales,
 Erūt ergo rationales potentia solum commensu-
 rabiles. Quare cum ex fh rationali aufera-
 tur rationalis hk , δ erit fk apotome, & ipsi con-
 gruens hk . Nec aliter ostendemus fk esse apo-

β 14. X.

γ 10. X.

δ 74. X.

comen.

tamen & ipsi congruentem g k. Unde fieret, ut Apotoma uni non una tantum congrueret. Quod est 80. X. est absurdum.

Definitiones

Tertiæ.

Exposita Rationali & Apotoma; si tota plus possit quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

1. Si quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome prima.

2. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Secunda.

3. Quod si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome tertia.

Rursus si tota plus possit, quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Quarta.

5. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur Apotome Quinta.

6. Quod si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; vocetur Apotome Sexta.

PROPOSITIO LXXXVI.

Problema 19.

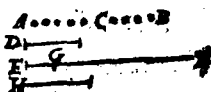
Invenire primam Apotomen.

22. Schol.

29. X.

β cor. 6.

X.



α Inventum duobus numeris quadratis ab, bc quorum excessu $a c$ sit non quadratus, assumtaq; Ra-

tionali d , & ipsi longitudine commensurabilis $e f$ fiat, ut $a b$ ad $a c$, β ita quadratum $e f$ ad quadratum $g f$ non secus ac in 49. X. Erit $e g$ Apotome. Quoniam quadrata $a c$, $e f$

$g f$ sunt

$g f$ sunt, ut numeri $a b, a c$, & erunt potentia sal- 76. X.
 tem commensurabiles recta $e f, g f$, Sed $e f$ est
 rationalis, quia posita drationalis longitudine
 est commensurabilis. Ergo & $g f$ rationalis. Cū
 verò $a b$ & $a c$ proportio non sit numerorum,
 quadratorum, derunt $e f, g f$ longitudine incom- 79. X.
 mensurabiles & sic $e f, g f$ recta potentia tantum
 commensurabiles: & Reliqua igitur Apotome,
 & quidem prima. Possit enim $e f$ plus quàm $g f$
 quadrato recta h : Quia est, ut numerus $a b$ ad 74. X.
 numerum $a c$ ita quadratum $e f$ ad quadratum
 $g f$; erit & convertendo, ut $a b$ ad $c b$ ita qua-
 dratum ex $e f$, ad quadratum ex h . Sed $a b, c b$
 habent rationem quadratorum. Ergo & qua-
 drata $e f$ & h , & sic $e g$ & h sunt longitudine
 & commensurabiles. Quoniam igitur tota $e f$
 plus potest, quàm congruens $g f$ quadrato recta
 h sibi commensurabilia longitudin, erit $e g$ per
 defin. Apotome prima.

PROPOS: LXXXVIII.

Problema 20.

Invenire Secundam Apotomen.

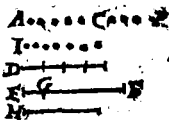
Fiant omnia ut in 50. propos. Erit $e g$ Apotome a 6. X.
 Secunda. Quoniam enim quadrata $g f, e f$ pro-
 portionē habentia numerorum $a c, a b$ commensurabilia sunt, & erunt recta $g f, e f$ commensura-
 biles

biles saltem potentia. Sed gf est rationalis, quia
posita rationali d commensurabilis longitudi-
ne; erit ergo et etiam Rationalis, & quia $a c$,
 $a b$, & sic quadrata gf , ef , proportionem non
habent quam numeri quadrati: & erunt recta
 gf , ef longitudine incommensurabiles & sic ra-
tionales potentia solum commensurabiles. γ I-
deoque eg reliquum est Apotome: & quidem
Secunda. Possit enim ef plus quam gf , qua-
drato h : erit ut in antecedenti h ipsi ef longitu-
dine commensurabilis. Quare, cum tota ef
plus possit, quam congruens gf , quadrato recta
 h sibi longitudine commensurabilis, erit eg A-
potome Secunda.

PROPOSITIO LXXXIIX.

Problema 21.

Invenire Tertiam Apotomen.



Fiant omnia, ut in 51. Erit
 eg Apotome. Quoniam enim
quadrata ef , gf proportionem
habentia numerorum $a b$, $a c$,
cōmensurabilia sunt; erunt eg ,
 gf recta commensurabiles saltem potentia: &
quia e frationalis, erit & gf rationalis. Quia
verò $a b$, $a c$ & sic quadrata ef , gf proportionē
nō habent, quadratorū numerarū, & erunt ef , gf
longi-

B 9. X.

747. X.

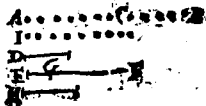
29. X.

longitudinis incommensurabiles & sic rationa-
 les. potentia solum commensurabiles β Ideoq;
 o γ reliqua Apotome est, & quidem Tertia. β 74. X.
 Quoniam est, ut i ad ab, ita quadratum d ad
 ef; & ut ab ad ac ita quadratum e ad qua-
 dratum gf; erit ex aquo; ut i ad ac: ita qua-
 dratum d ad quadratum gf. Sed i & a non
 habent rationem numerorum quadratorum;
 ergo nec d & gf; & sic d & gf recte sunt longi-
 tudine α incommensurabiles. Neutra igitur i-
 psarum ef; gf posita rationali d longitudine
 commensurabilis est. Possit eam ef plus quam
 gf quadrato recte h sibi longitudine commen-
 surabilis; erit, ut in 86. h ipsi ef longitudine
 incommensurabilis. Quare, cum ef plus possit
 quam gf (neutra earum posita rationali ex-
 istente commensurabili) quadrato recte h sibi
 longitudine commensurabilis; erit e γ ex defini-
 tione Apotome tertia.

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema 22.

Invenire Quartam Apotomen.



Fiant omnia, ut in 52.
 Erit; ut in 86, e γ Apo-
 tome; & quidem quar-
 ta. Possit enim ef plus
 quàm gf quadrato recte h.

Quia

412. **EVCLIDIS ELEM:**

a 9. X.

Quia ergo est, ut $a b$ ad $a c$, ita quadratum $e f$ ad quadratum $g f$, erit convertendo, ut $a b$ ad $c b$, ita quadratum $e f$ ad quadratum h . Cum itaq; $a b, c b$ non habeant proportionem numerorum quadratorum, erunt $e g$ & h recte longitudine & incommensurabiles. Quoniam itaq; tota $e f$ posita rationali existens commensurabilis longitudine, plus potest quam $g f$ quadrato recte h sibi longitudine commensurabilis, erit $e g$ ex defn. Apotome Quarta.

PROPOS: XC.

Problema 23.

Invenire Apotomen Quintam.

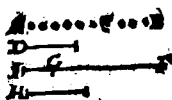
Fiant omnia ut in 53. Erit, ut in 87. $e f$ Apotome, & quidem Quinta. Possit $e f$ plus quam $g f$ quadrato recte h . Et quia similiter ut in 86. ostendemus per conversionem rationis esse, ut $a b$ ad $c b$; ita quadratum $e f$ ad quadratum h ; erunt rursus, ex 89. recte $e f$ & h incommensurabiles longitudine: Est $\frac{1}{2}$ congruens $g f$ rationali posita δ longitudine commensurabilis. Ergo ex definitione $e g$ Apotome Quinta.

PROPOS: XCI.

Problema 24.

Inve-

Invenire Apotomen Sextam.



Fiant omnia ut in 54. Erunt, ut in 88, d & ef longitudine commensurabiles, & eg Apotome, eaq; Sexta. Nam

d & g f sunt longitudine incommensurabiles, additoq; neutra ipsarum ef, fg commensurabilis exposita rationali d. Possit ef plus quam g f quadrato recta h; quæ ut in 89, ipsi ef longitudine incommensurabilis est. Est ergo eg ex definitione Apotome Sexta.

Scholium.

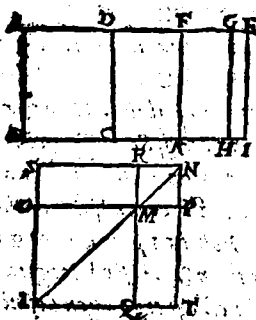
Theon invenit Apotomas promatius, subductis binomiorum nominibus minoribus ex maioribus; atque ita apotomarum ordo respondet ordini binomiorum.

PROPOS: XCII.

Theorema 86.

Si spaciū *ac* contineatur sub Rationali *ab* & Apotoma prima *ad*, recta linea *om* spaciū potens, Apotoma est.

Ipsi ad congruas de, & erunt ex definitione apoto.



apocoma prima a e;
de potentia tantum
comensurabiles; & a e
posita rationali lon-
gitudine comensu-
rabilis. Sed a e bi-
fariam in f; quadra-
to e f. ad a e applice-
tur equale rectangu-
lum a g e. Et quia a e
plus potest quam de

2. Lem-
ma 17. X.

13. X.

16. X.

12. X.

16. de 1

10. X.

14. X

22. X.

14. II.

26. VI.

quadrato recta sibi longitudine commensurabi-
lis, & erunt a g, g e recta longitudine commensu-
rabiles, & sic utraq, toti a e longitudine com-
mensurabilis. Sed a e rationali a b longitudine
est commensurabilis: Ergo & utraq, a g, g e,
rationali commensurabilis est longitudine, & o
rationalis. Quare ductis g h, e i ipsa b paralle-
lis, & erunt a h, g i rectangula rationalia. Rursus
quia utraq, d f, f e longitudine commensurabilis
est ipsi d e; d e vero longitudine incommensura-
bilis rationali a b; n erit utraq, ipsarum d f, e f
ipsi a b & longitudine incommensurabilis. Itaq,
rectangulum f c sive f i sub Rationalib, potentia
commensurabilibus contentum erit & Medium.
Iam n fiant ipsi a h, g i quadrata s, t, r p aqua-
lia ad communẽ angulum n juncta, & erunt qua-
drata s, t, r p circa eandem diametrum l n.

Quon-

Quoniam itaq; rectangulum agc , quadrato
 est est aequale; $uerunt ag, cf, g$ recta propor-
 tionales, $uadeoq;$ si medium proportionale in-
 ter ah, gi , id est, inter st, rp quadrata: Sed sp
 inter eadem quadrata est ξ Medium proportio-
 nale. Sunt itaq; rectangulum spc & si aequaliat
 Sed ipsi si aequale est fe , & ipsi sp aequale rt . It-
 itaq; totum dignomeni pnq , cum quadratis pr
 est aequale. Est autem totum ain aequale qua-
 dratis st, rp . Itaq; reliquum ac quadratis oq
 aequale est, & om potest spacium ac . Dico esse
 Apotomen. Quia enim ah, gi sunt spacia ratio-
 nalia, ut patet; ipsis aequalia quadrata st, rp
 rationalia, & recta op, mp , Rationales erunt.
 Cumq; si sit medium, & ei aequale sp erit Me-
 dium; adeoq; incommensurabilia sunt sp, tp
 & v ejusdem cum ipsis rationis recta op, mp
 incommensurabiles, & reliqua om Apo-
 tome.

A. 17. II.

VI. VI.

 & lem. 4.
 X.

 EX CON-
 str.

 A. 17. II.
 VI. VI.

X. 113

p. 10. 113

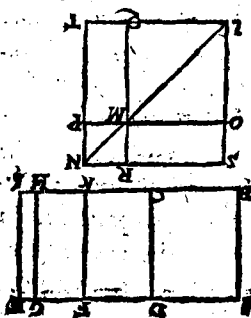
74. 113

PROPOSITIO XCIII.

Theorema 69.

Si spacium ac contineatur sub
 Rationali ab & Apotoma secunda
 ad ; Recta linea om spacium potens,
 Medix est apotome prima.

1p/2



Ipsi ad congruat d e
quibus conveniunt, quā
habet definitio apoto-
ma secunda. Secta de
bisariam in f reliqua
omnia construantur ut
in 2. & Erunt rursus
ag, ge longitudine,
3 commensurabiles. tū
inter se, tum ipsi a e.
Sed a e posita rationa-

liab longitudine est incommensurabilis; γ ergo
ag, ge, quae cum rationali a e commensura-
biles sint; δ ipsi a b potentia tantum commensu-
rabiles sunt. Rectangula itaq; ah, gi sunt a me-
dia. Rursus cum d e, a b & sint Rationales lon-
gitudine commensurabiles; sint & d f, f e longi-
tudine tum inter se, tum ipsi d e commensurabi-
les; erunt f c, fi rectangula sub rationalibus
longitudine cōmensurabilib; contenta rationali-
lia. Iam verd, ut in precedenti, ostenderetur
om posse spacium a c. Erit autem om Media
Apotome prima. Quoniam ag, ge commen-
surabiles sunt longitudine, η erunt & ah, gi, sive
st, r p commensurabilia. Ergo & op, m p erunt
commensurabilia potentia tantum: & quidem
Media, quod quadrata st, r p, equalia Medio
ah, gi Media sint. Cum q, fi, & ipsi aequale s p

fi

218. X.
216. X.

γ 14. X.
δ 6. defin.

222. X.
ζ ex hy-
pot.

η 10. X.

fit rationale, & fit mediocris incommensurabile,
erunt $o p, m p$ ejusdem cum ipsis rationis incom-
mensurabiles longitudine. Cum verò etiam sine
Media, ut patet, & commensurabiles erunt $o p,$
 $m p$ Media potentia tantum commensurabiles,
quia continent rationales $s p, d$ erit $o m$ Mediae § 57. X.
Apotome prima.

PROPOSITIO XCIV.

Theorema 70.

Si spacium $a c$ contineatur sub Rati-
onali $a b$, & Apotoma $a d$, tertia Recta
linea $o m$ spacium potens, Mediae est
Apotome secunda.

Ipsi $a d$ congruat $d e$, quibus conveniunt pro- § 18. X.
prietates definitionis Apotomae tertiae. Secta $d e$ § 16. X.
bisariam in f , fiant omnia ut in § 2; & eruntque γ ex hy-
rursus $a g, g e$ cum inter se, tum ipsi $a e$ longitu- pot.
dine commensurabiles. Quare cum $a c$ fit ipsi
 $a b$ longitudine incommensurabilis, eidem & $a g,$
 $g e$ longitudine incommensurabiles erunt. Sed
 $a c$ est rationalis: Ergo & ipsi potentia com-
mensurabiles $a g, g e$ sunt rationales; d atque § 22. X.
ita rectangula $a h, g i$ sunt Media. Rursus
cum deponatur longitudine incommensura- § 14. X.
bilis rationali $a b$, utraque $d f, f e$ hinc $d e$
commensurabilis, & erit ipsi $a b$ longitudine
incommensurabilis; ipsaque rectangula $f c,$

D d

f i me-

§ 10. X. *fi media. Ostendetur autem, ut in 92, rectam
 om posse spacium a c; quam dicemus Mediae A-
 potome Secundam. Quoniam enim a h, i g
 sunt Media, quadrata etiam st, r p ipsi aequalia
 erunt Media, & ipsaq; latera o p, m p Media. Sed
 ag, g e sunt ostensa commensurabiles: Ergo &
 a h, g i, vel st, r p commensurabilia sunt, ipsaq;
 o p, m p potentia tantum commensurabiles. Et
 quia ipsi a e ostensa est g e commensurabili lon-
 gitudine & f e ipsi d e, erunt, g e, f e longitudi-
 ne incommensurabiles, & sic ejusdem rationis
 g i, f i, id est, r p, s p incommensurabilia; ipsaq;
 o p, m p & incommensurabiles longitudine.
 Cumq; etiam sint Media & commensurabiles, o-
 runt o p, m p Media potentia tantum commen-
 surabiles, & quia continet s p Medium; erit
 om Mediae Apotome Secunda.*

PROPOSITIO XCV.

Theorema 71.

Si spacium a c contineatur sub Ra-
 tionali a b, & Apotoma ad quarta, re-
 cta linea om spacium potens, Minor
 est.

*Ipsi a d congruat d e, quibus conveniunt pro-
 prietates Apotome quarta. Secta d e bifariam
 fiat*

fiat omnia ut in 92; eruntq; a, g, g e longitudi-
 ne incommensurabiles, cum a, e plus possit quam
 de quadrato recta sibi longitudine incommen-
 surabilis. Et quia a, e est rationalis, rationalis $a, 20. X.$
 a, b longitudine commensurabilis; a erit a, i rati- $\beta 22. X.$
 onale. Rectangulum vero d, i, β medium (quia
 de rationalis ipsi a, b longitudine incommensu-
 rabilis est) ipsiusq; dimidium f, i Medium. In-
 commensurabilia autem erunt a, h, g, i , cum $a, g,$
 g, e ostensa sint incommensurabiles. Jam osten-
 detur ut in 92. rectam o, m posse β ac,
 quam β Minorem dicemus. Quoniam enim
 a, i rectangulum est rationale etiam compo-
 situm ex quadratis s, t, r ipsi γ aequale erit rati-
 onale. Et quia f, i est Medium, ut patet; erit β γ ex $con-$
 s, p , sub quadratorum lateribus o, p, m, p com- β tr.
 prehensum Medium. Cumq; a, h, g, i sint incom-
 mensurabilia ostensa, ipsis etiam equalia qua-
 drata s, t, r, p incommensurabilia erunt β recta
 o, p, m, p potentia incommensurabiles; Proin-
 de quia o, p, m, p sunt potentia incommensura-
 biles, β compositum ex quadratis Rationale,
 rectangulumq; sub ipsis Medium, δ erit reliqua $\delta 77. X.$
 $\bullet$ m Minor.

PROPOSITIO XCVI.

Theorema 72.

D d 2

Si

Si spaciū ac contineatur sub Rationali ab & Apotome quinta ad , Recta linea om spaciū potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

¶ Ipsi ad congruat de , quibus convenient proprietates Apotoma quinta Secta de bifariam, fiant omnia ut in 92; Eruntq; ut in 95. ag , ge longitudine incommensurabiles, & a ut in 93, Medium; diverso Rationale ipsiusq; dimidium si rationale. Erunt & a h , gi ut in 95 incommensurabilia, poteritq; om , ut in 92. spaciū ac , quæ om dicitur cum rationali Medium totum efficiens. Quoniam enim ai est Medium, erit compositum ex quadratis st , & p Medium: Cumq; si sit rationale, etiam sp , sub op , mp rationale erit. Sunt autem op , mp potentia incommensurabiles, ut in 95 patet. Itaq; cum op , mp sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero sub ipsis Rationale; reliqua om & erit, quæ cum rationali Medium totum efficit.

α 78. X.

PROPOS: XCVII.

Theorema 73.

Si spaciū ac contineatur sub Rationali

tionali ab & Apotoma sexta ad , Recta linea om spacium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

Ipsi $a d$ congruat $d e$, quibus conveniunt proprietates Apotoma sexta. Secta de bisariam, fiant reliqua, ut in 92; eruntq; ut in 95, $a g$, $g e$ longitudine incommensurabiles, & ai , $d i$ ut in 49, Media, huiusq; dimidium fi Medium. Erunt etiam $a h$, $g i$, ut in 95, incommensurabilia, poteritq; om , ut in 92, spacium $a c$. Quæ om dicetur cum Medio Medium totum efficiens. Quoniam enim ai est Medium, erit & compositum ex quadratis rectarum om , mp Medium. Et cum fi sit Medium, erit & sp sub op , mp contentum Medium. Cumq; si ipsi ai sit incommensurabile, etiam sp incommensurabile erit composito ex quadratis st , rp . Deniq; op , mp sunt incommensurabiles potentia, ut in 95. Quare cum op , mp sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis Medium, rectangulumq; sub ipsis Medium, & composito ex ipsarum quadratis incommensurabile: reliqua om & erit ea, quæ cum Medio, Medium totum efficit.

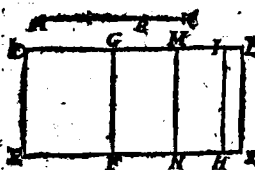
PROPOS:XCIIIX.

Theorema 74.

Dd 3

Qua-

Quadratum Apotomæ $a b$ ad Rationalem $d e$ applicatum $d f$; latitudine $d g$ facit Apotomen primam.



Apotoma $a b$ congruat $b c$, ut $a c$, $b c$ sint rationales potentia solum commensurabiles & ad rationalem $d e$ applicetur $d f$ equale quadrato

ab , cuius latitudo $d g$ erit Apotome prima. Applicetur enim ad eandem $d e$ rectang. $d h$ equale quadrato $a c$ & $i k$ ad $i h$ equale quadrato $b c$ ut totum $d k$ equale sit quadratis, $a c$, $b c$. Quoniam ergo hoc quadratorum compositum $B a$ equale est rectangulo $a c b$ bis sumto, cum quadrato ab ; sublato hoc quadrato $d f$; erit reliquum $g k$ equale rectangulo $a c b$ bis sumto; indeoque, divisag l bifariam per m erit $m k$ rectangulo $a c b$ equale. Cumque $a c$, $b c$ sint rationales, erunt & earum quadrata rationalia, & ex ipsis y compositum, id est, $d h$ rationale, adeoque, & inter se, & huic commensurabilia: & eritque, $d l$ ipse de longitudine commensurabilis. Rursus, quia $a c$, $b c$ sunt rationales potentia solum commensurabiles, erunt, & earum rectangulum, $m k$ & huius duplum $g k$ Media, & sic latitudo $g l$ ra-

45. I.

37. II.

7. 16. X.

21. X.

gl rationalis ipsi gf , id est, de longitudine incommensurabilis. Et cum dk sit rationale, gk Irrationale & Medium, erunt inter se incommensurabilia, & sic dl, gl incommensurabiles vel Rationales potentia tantum commensurabiles, adeoque $dg \eta$ Apotome, & quidem prima. Quoniam enim rectangulum $ac b$, id est, mk est Medium proportionale inter quadrata ac, bc , id est, dh, ik , erunt dh, mk, ik , continue proportionalia, & di, ml, l recte proportionales. Itaque di rectangulum quadrato m est æquale. Cumque quadrata ac, bc , id est, dh, ik sint commensurabilia, erunt di, l longitudine commensurabiles. Cum ergo dl, gl sint inæquales & ad maiorem dl applicatum sit di rectangulum æquale quadrato m , id est, quarta parti gl : Sine verò di, l ostensa commensurabiles, poterit dl plusquam gl quadrato recte sibi longitudine commensurabilis. Quare cum dg sit ostensa apotome, totaque dl plus possit quam gl congruens quadrato recte sibi longitudine commensurabilis, eademque tota rationali de longitudine commensurabilis sit. Erit ex desin. dg Apotome prima.

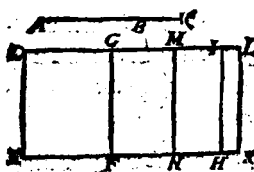
PROPOSITIO XCIX.

Theorema 75.

Dd 4

Qua

Quadratum Mediæ Apotomæ primæ $a b$ ad Rationalem $d e$ applicatum latitudinem $d g$ facit Apotomen secundam.



Mediæ Apotoma
prima $a b$ congruat
 $b c$, ut $a c$, $b c$ sint
Mediæ potentia solum
commensurabiles con-
tineantq; Rationale ϵ

ad $d e$ rationalem applicetur $d f$ æquale quadra-
to $a b$; Erit $d g$ Apotome. Iisdem enim constru-
tis, ut in præcedenti: Quoniam $a c$, $b c$ sunt me-
diæ potentia commensurabiles, erunt earum
quadrata, id est, $d h$, $i k$ Mediæ ϵ commensura-
bilis, a totumq; $d k$ utriq; ipsorum commensu-
rabile ϵ β medium. Hoc ad $d e$ rationale ap-
plicatum γ facit $d l$ rationalem ipsi $d e$ longitu-
dine incommensurabilem. Rursus, quia re-
ctangulum $a c b$ ponitur rationale, erit ejus du-
plum $g k$ rationale, ejusq; latitudo $g l$ rationa-
lis, ipsi $g f$, id est, $d e$ longitudine d commensura-
bilis. Sed quia $d k$ est Medium, $g k$ verò ratio-
nale, $d l$ ϵ $g l$ sunt incommensurabiles; ϵ
quia etiam rationales, sunt rationales potentia
tantum commensurabiles; ac $d g$ ζ Apotome
eaque Secunda. Oñdendur enim, ut in
98. tota $d l$ plus posse quàm $g l$ congruens qua-
drato

a 16. X.

E cor. 24.

X.

y 23. X.

d 21. X.

s 10. X.

z 74. X.

drato recta sibi longitudine commensurabilis;
qua gl cum sit longitudine commensurabilis
rationali posita de; ex definitione igitur d g
est Apotome Secunda.

PROPOS: C.

Theorema 76.

Quadratum Mediæ Apotomæ sc-
cundæ, a b ad Rationalem de appli-
catum d f, Latitudinem d g facit A-
potomen Tertiam.

Media Apotoma secunda a b, congruat b c,
ut a c, b c sint Media potentia solum commensu-
rabiles, continentes Medium; Et ad de ratio-
nalem applicetur d f æquale quadrato a b: E-
rit d g apotome. Iisdem enim, qua prius, con-
structis, ut in 99, d k est Medium, Et d l rationa-
lis longitudine a incommensurabilis ipsi d e. Ea-
cum a c b rectangulum sit Medium, etiam ipsius
duplum g k, Et latitudo g l longitudine incommensurabilis rationali d e. Sed quia a c, c b sunt
longitudine incommensurabiles; Et est, b ut a c
ad b c, ita quadratum a c ad rectangulum a c
b; y erunt Et hæc inter se incommensurabilia.
Et quia quadrato ex a c compositum ex qua-
dratis a c, b c est d commensurabile, rectan-
gulo verò a c b suum duplum; e erunt
compositum ex quadratis, id est, d k Et

D d 5

rectan-

a 23. X.

63. Léma

19. X.

710. X.

816. X.

814. X.

rectangulum bis id est, gk incommensurabilis;
 recta q , d hgl longitudine incommensurabiles.

§74.X.

Qua cum etiam sint rationales; Erunt ratio-
 nales potentia tantum commensurabiles & dg
 & Apotome, eaque Tertia. Ostenditur enim;
 ut in 98, d l totam plus posse applicatā gl qua-
 drato recta sibi longitudine commensurabilis.
 Sed cum neutra illarum d l , gl sit longitudine
 commensurabilis posita rationali d e , erit ex de-
 finit. Apotome Tertia.

PROPOSITIO CI.

Theorema 77.

Quadratum Minoris a b ad Rationa-
 lem d e applicatum df , Latitudinem
 dg facit Apotomen Quartam,

Minori a b congruat b c , ut a c , b c potentia
 incommensurabiles sint, facientes ex suis quadra-
 tis compositum rationale; sed rectangulum a c b
 Medium, & ad d e rationalem applicetur df , ut
 antea, erit q , d g apotome. Isdem enim ut prius

a 21. X.

construimus in 100; Quoniam d k aequale compo-
 sito quadratorum a c , b c est rationale, erit d l
 rationalis rationali d e longitudine commensu-

§21.X.

rabilis: a c b autem medium; erit & ejus du-
 plum, id est, gk medium, & gl rationalis, ipsi
 d e longitudine β incommensurabilis. Rursus,
 quia d k rationale, gk medium, erunt incommen-

men-

incommensurabiles, atq; ita Rationales potentia tantum commensurabiles. & d g d Apotome, eaq; d 74. X.

Quarta. Quoniam enim a c, b c potentia sunt incommensurabiles, earum quadrata d h, i k incommensurabilia & d l, il longitudine incommensurabiles sunt. Cum itaq; d i rectangulum aequale sit quadrato m l, ut ex 98 patet, s 19. X.
 & poteris d l plus quam g l quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis. Itaq; cum ead d l posita rationali d e longitudinis commensurabilis plus possit, quam congruens g l quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis: erit d g reliqua ex definitione, Apotome, Quarta.

PROPOSITIO CH.

Theorema 78.

Quadratum ejus a b, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem d e applicatum d f, Latitudinem d g facit Apotomen Quintam.

Recta cum Rationali Medium totum efficiens a b congruat b c ut a c, b c sint potentia incommensurabiles: facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum verò rationale; & ad d rationalem applicetur d f ut antea. Erunt d g apotome. Quoniam enim ex quadratis rectarum a c, b c compositum, id est, d k est Medium, & erit d l rationalis posita longitudine incommensurabilis: Rectangulum autem a c b, a 23. X.

221. X. *ejusq; duplum g k rationale, & erit g l posita longitudine commensurabilis. Cum itaq; d k sit Medium, & g k rationale, incommensurabilia sunt;*
710. X. *& d l, g l longitudine y incommensurabiles, adeoq; Rationales potentia tantum commensurabiles, & d g d Apotome eaque quinta. O-*
274. X. *stenditur enim, ut in 101, d l plus posse quam g l congruens, quæ posita rationali longitudine commensurabilis est, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Erit ergo ex definitione d g Apotome quinta.*

PROPOSITIO CIII

Theorema 79.

Quadratum ejus *ab*, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem *de* applicatum *d f*, Latitudinem *d g*, facit Apotomen Sextam.

Recta cum Medio medium totum facienti a b congruat b c, ut a c, b c potentia sint incommensurabiles, facientes compositam ex suis quadratis & rectangulum medium, & ad rationale d e applicetur ut antea. Erit d g apotome. Quoniam enim tam compositum ex quadratis a c, b c, id est d k, quam rectangulum a c b ipsumq; duplum g k sunt Media; & erunt d l & g l rationales

les longitudine incommensurabiles posita rationali de. Cumq; a c b rectangulum compositio quadratorum sit incommensurabile, erunt g k, d k incommensurabilia, & g l, d l longitudine incommensurabiles, adeoq; rationales potentia solum commensurabiles, & d g y Apotome eaq; Sexta. Ostenditur enim, ut in 101, d l plus posse quam congruens g l quadrato recta sibi longitudine incommensurabilis: & quia neutra illarum posita rationali d e longitudine commensurabilis est, erit ex definitione d g Apotome Sexta.

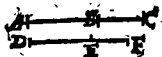
β 10. X.

γ 74. X.

PROPOSITIO CIV.

Theorema 80.

Recta linea de Apotomæ ab Longitudine commensurabilis, & ipsa de Apotome est, atque ordine eadem.



Apotoma ab congruens sit b c, ut ab, b c sint rationales potentia commensurabiles, sitq; de commensurabilis ipsi ab: Erit de apotome ordine eadem cum a b. α Fiat, ut ab ad de, sic d c ad e f. β Ergo etiā est ut a c ad d f, ita b c ad e f. γ Quoniam igitur ab, de sunt longitudine commensurabiles, & erunt & b c, e f, & a c, d f lon-

α 12. VI.

β 12. V.

γ 10. X.

et longitudine commensurabiles. Et cum ac , bc sint rationales, et etiam df , e ipsis commensurabiles rationales erunt. Rursus, quia est, ut a c ad d f , ita b c ad e f : Et permutando, ut a c ad b c , ita d f ad e f , erunt ba , ut illa potentia tantum commensurabiles. Et quia etiam sunt rationales; d Erit reliqua d e Apotome; Et quidem ordine eadem cum a b . Si enim possit a c plus quam b c quadrato recte sibi longitudine commensurabilis: etiam d f quam e f , si jam a c tota fuerit rationali posita longitudine commensurabilis, d erit d f , Et sic Apotome prima; Si vero congruens b c , etiam e f ; Et sic Secunda: si neutra, etiam neutra, Et sic Tertia. Sed si a c plus possit, quam b c quadrato recte sibi longitudine incommensurabilis; Ergo etiam d f quam e f ; siq; a c tota fuerit rationali posita longitudine commensurabilis; a erit d f ; Et sic d e eodem modo Apotome quarta: Si vero congruens b c , etiam e f ; Et sic Apotome quinta, sexta Et ostenditur prout ab.

Scholium.

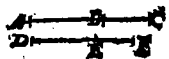
Eadem observationes, ad 67, de potentia commensurabilibus sunt additæ, possunt huc quoque transferri.

PROPOS: CV.

Theorema 81.

Recta

Recta linea de Medix Apotomæ ab
commensurabilis, & ipsa de Medix
Apotome est, atque ordine eadem.



Media apotoma ab congrua
at bc, ut ac, bc, sine Media
potentia tantum commensur-

rabiles: & ipsi ab sit de commensurabilis vel
vel longitudine vel potentia tantum: Factis is-

dem qua in precedenti, erunt bc, ef: & ac,
df eodem modo vel longitudine vel potentia
commensurabiles prout ab, de fuerint. Cum
ac, bc sine Media, etiam df, ef ipsis commen-

surabiles β Media erunt. Rursus cum sit, ut ac
ad df, ita bc ad ef: & permutando; ut ac ad
bc ita df ad ef; erunt ha, ut illa, potentia tan-

tum commensurabiles: & quia etiam Media,
erit de reliqua Media apotome, & quidem
ordine eadem cum ab. Quoniam est, ut ac ad
cb, ita df ad ef: & ut ac ad cb, ita quadra-

sum ac ad rectang. acb: ita ergo etiam erit
quadratum df ad rectang. dfe; & permutan-

do; ut quadratum ac ad quadratum df, ita
rectangulum acb ad rectang. dfe; & hac, ut
illa, commensurabilia. Si itaq; rectangulum
acb fuerit rationale, erit & dfe; & de
Medix Apotome prima: Sed si Medium,
& de Medix apotome secunda.

PRO-

PROPOS: CVL

Theorema 82.

Recta linea *de* Minori *ab* commen-
surabilis, & ipsa *de* Minor est.

Minori *ab* congruat *bc*, ut *ac*, *bc* sint po-
tentia incommensurabiles facientes ex suis qua-
dratis compositum rationale, rectangulum verò
Medium; sed ipsi *ab* sit *de* commensurabilis sive
longitudine, sive potentia tantum. Factis iisdem,
qua in prioribus, erunt *df*, & ipsi *ac*, *bc* eodem
modo ut in 105. commensurabiles. Cumq; sit, ut

22. VI

ac ad *df*; ita *bc* ad *ef*; & permutando, ut *ac*
ad *bc*: ita *df* ad *ef*; & Ergò, ut quadratum
ac, ad quadratum *bc*; ita quadratum *df* ad
quadratum *ef*; & componendo, ut compositum
ex quadratis *ac*, *bc*, ad quadratum *bc*,

10. X.

ita compositum quadratorum *df*, *ef* ad qua-
dratum *ef*; & permutando, ut compositum
ex quadratis *ac*, *bc*, ad compositum ex qua-
dratis *df*, *ef*; ita quadratum *bc* ad quadra-
tum *ef*; & Ergò ut hoc sibi, ita illa sibi commen-
surabilia erunt. Sed compositum ex quadratis
ac, *bc* est rationale: Ergò & ex *df*, *ef* compo-
situm. Rursus, quia, ut in 105. *ac* *bc* & *df* *ef* sunt
commensurabilia, hoc, ut illud, y erit Medium.

7 Cor.

24. X.

Denique cum sit, ut *ac* ad *bc*, ita *df* ad *ef*;
Sed *ac*, *bc* sint potentia incommensurabi-
les; erunt & *df*, *ef*: Quae cum faciant ex suis
quadra-

quadratum compositum rationale; reſt angulū ve-
ro ſub iſdem d f, e f Medium, d erit d e Minor. 77.X.

PROPOS: CVII.

Theorema 83.

Reſta linea *d e* commensurabilis
a b, quæ cum Rationali Medium to-
 tum efficit; & ipsa *d e* cum Rationali
 Medium totum efficiens est.

Reſta *a b* cum rationali Medium totum effi-
 cienti, congruat *b c*; ut *a c*, *b c* potentia ſint in-
 commensurabiles, facientes compositum qua-
 dratorum Medium, reſt angulum verò rationa-
 le; ſitq; *d e* ipſa *a b* quocunq; modo commensura-
 bilis. Factis iſdem, qua in prioribus, ostenditur,
 ut in 106 compositum ex quadratis *a c*, *b c*, com-
 pſito quadratorum *d f*, *e f* commensurabile ef-
 ſe. Cumque illud ponatur Medium, erit & hoc
 Medium. Rurſus ostendetur etiam reſt angulum
a c b commensurabile eſſe reſt angulo *d f e*, &
 hoc, ut illud Rationale, ex 105. Sunt deniq; *d f*,
e f eodem modo, ut in 106, potentia incommensu-
 rabiles; qua cum ex ſuis quadratis compositum
 efficiant Medium, reſt angulum verò ſub ipſis
 rationale; & erit *d e* quæ cum Medio rationa-
 le efficit. 78.X.

PROPOSITIO CVIII.

Theorema 84.

Ee

Reſta

Recta linea *d e* commensurabilis
ei *a b*, quæ cum Medio Medium to-
tum efficit, & ipsa *d e* cum Medio Me-
dium totum efficiens est.

Recta *a b* cum Medio Medium totum efficiens
congruat *b c*, ut *a c*, *b c* potentia sint. commen-
surabiles, facientes compositum quadratorum
Medium & rectangulum Medium incommensu-
rabile composito quadratorum. Factis iisdem,
ut antea, ostenditur ut in 106, compositum ex
quadratis *a c*, *b c* composito quadratorum *d f*,
e f commensurabile esse; quorum illud, cum sit
Medium, etiam hoc est Medium. Rursus, ut in 105,
rectangulum *a c b* rectangulo *d f e* commensu-
rabile, & hoc, ut illud, Medium ostenditur: Sunt
etiam *d f*, *e f*, ut in 106. potentia incommensura-
biles. Deniq; etiam ut compositum ex quadratis
a c, *b c* incommensurabile est rectangulo *a c b*,
ex hypothesis; & ita compositum ex quadratis *d f*,
e f rectangulo *d f e*, β Ergo est *d e*, quæ cum
Medio Medium totum efficit.

α 14. X.

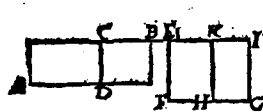
ϵ 79. X.

PROPOS: CIX.

Theorema 85.

Medio *b d* a Rationali *a b* detracto;
Recta linea, quæ reliquum spacium
a c potest, una ex duabus Irrationali-
bus fit, vel Apotome vel Minor.

Ad



Ad Rationalem ef
applicentur rectan-
gula eh, kg aequalia
rectangulis ac, db ut

et ut si sit aequaliter rationali a b, erit q, ei a 21. X.
rationalis rationalis ef longitudine commensu-
rabilis; & quia kg Medio db est aequalis, erit β 23. X.
ki rationalis longitudine β commensurabilis γ 13. X.
rationalis ef. γ Itaq, ei, ki sunt longitudine in-
commensurabiles, & sic rationales potentia tan- δ 74. X.
tum commensurabiles; ipsaq, ek δ Apotome, &
congruens ki. Si jam ei plus potest quam ki
quadrato recta sibi longitudine commensura-
bilis, erit ek Apotome prima, atq, sic recta po-
tens spacium fk contentum sub rationali ef & 892. X.
Apotome prima, id est, a est e Apotome. Si
verò plus potest quadrato recta incommensura-
bilis, cum tota ei posita ef longitudine sit com-
mensurabilis, erit ek Apotome quarta, & re-
cta potens spacium ek sub rationali ef & apo- ζ 95. X.
toma quarta ek erit ζ Minor.

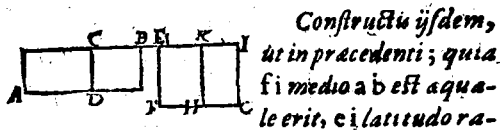
PROPOSITIO CX.

Theorema 86.

Rationali db à Medio a b detracto;
aliter duæ Irrationales fiunt, vel Me-
dia Apotome prima, vel cum ratio-
nali Medium totum efficiens.

Ecce 2

Con-



ca 22. X.

ca 21. X.

ca 71. X.

ca 93. X.

ca 96. X.

tionalis rationali $e f$ longitudine incommensurabilis; $k i$ verò β commensurabilis, quia $h i$ rationali $d b$ est æquale: itaq; $e i, k i$ rationales potentia tantum commensurabiles & reliquæ $e k$ & apotome, eiq; congruens $k i$. Si $e i$ plus possit quàm $k i$ quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & congruens $k i$ commensurabilis longitudine rationali $e f$, erit $e k$ apotome secunda; quare recta potens spaciū $e k$ contentum sub rationali $e f$, & apotome secunda; & erit Mediæ Apotome prima. Si verò plus quadrato rectæ longitudine incommensurabilis, erit $e k$ apotome quinta; & recta potens hoc spaciū $f k$ contentum sub rationali & apotome quinta, & erit cum rationali Medium totum efficiens.

PROPOS: CXI.

Theorema 87.

Medio $d b$ à Medio $a b$ detractō, quæ $d b$ sit commensurabile $a b$ toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda; vel cum Medio Medium totum efficiens.

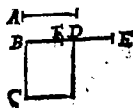
Constru-

Construatis iisdem, ut antea; α erunt $e l, k i$ $\alpha 23$. X.
 rationales rationali $e f$ longitudine incommen-
 surabiles. Sed cum $f i, h i$ ipsis $a b, d b$ aequalia
 ponantur incommensurabiles; erunt $e i, k i$
 longitudine incommensurabiles, & sic ra-
 tionales potentia tantum commensurabi- $\beta 74$. X.
 les; & reliqua $e k$ Apotome. Si ergo $e i$, plus pos-
 sit quam $k i$ quadrato recta sibi longitudine co-
 mmensurabilis, & utraq; $e i, k i$ rationali $e f$ sit in-
 commensurabilis, us patet, erit $e k$ apotome
 tertia & recta potens spaciū $f k$ contentum, $\gamma 94$. X.
 sub rationali $e f$ & apotoma quarta $e k$, γ erit
 Medix Apotome Secunda: Si però plus po-
 test quadrato recta longitudine incommensura-
 bilis, erit $e k$ apotome Sexta; & recta potens
 spaciū $f k$ contentum sub rationali & apoto- $\delta 97$. X.
 ma Sexta, δ erit ea quæ cum Medio Medium
 totum efficit,

PROPOSITIO CXII.

Theorema 88.

Apotome a non est eadem, quæ ex
 binis nominibus,



Rationali $b c$ posita applice-
 tur rectangulum $c d$ aequale
 quadrato a . Quoniā ergo a est
 apotome, α erit $b d$ apotome
 prima; cui congruat $d e$. Erunt

Ee 3

$b c, d e$

$\alpha 93$. X.

§ 61. X.

y 12. X.

§ 16. X.

§ 14. X.

§ 74. X.

$b c, d e$ ex definitione apotome primæ rationalis potentia tantum commensurabilis; quarum prior posita commensurabilis longitudine, plus poterit quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Rursus, quia $\mathcal{E}$ a ponitur esse ex binis nominibus, eadem latitudo $b d$ β erit ex binis nominibus prima. Sit autem majus nomen $b f$. Ergo ex definitione binomij primi $b f, f d$ sunt rationales potentia solum commensurabiles, quarum prior posita existens longitudine commensurabilis, plus potest quam $f d$ quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Itaq; cum tam $b c$, quam $b f$ longitudine sint commensurabiles eidem $b c$, γ erunt quoq; $b c, b f$ inter se commensurabiles longitudine: Ergo $\mathcal{E}$ eadem $b c$, reliqua parti $f c$ longitudine d commensurabilis est, $\mathcal{E}$ $f c$ ut $b c$ rationalis erit: Sed quia duarum commensurabilium longitudine $b c, f c$, una $b c$ ipsi $d e$ est incommensurabilis, erit $\mathcal{E}$ altera $f c$ eidem $d e$ incommensurabilis longitudine; $\mathcal{E}$ sic $f c, d e$ sunt rationales potentia solum commensurabiles. Itaq; $f d$ reliqua est ζ apotome $\mathcal{E}$ sic Irrationalis, quæ antea erat rationalis. Non ergo a existens Apotome, est eadem qua ex binis nominibus.

Corollarium.

Ex his colligitur Apotomen & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas neq; Mediarum neq; inter se esse easdem.

Nam quadratū Mediæ ad rationalem lineam appli-

applicatum, latitudinem aefficit rationale, posita longitudine incōmensurabilem. Quadratum autem apotoma ad rationalem applicatum, latitudinem β fatit apotomen primam; quadratum Medie apotoma primae, γ apotomen secundam; Media apotoma secundae δ Apotomen tertiam; Minoris, ε apotomen quartā. Ejus, quae cum rationali Mediu totum efficit, ζ apotomen quintā. Ejus, quae cum Medio Medium totum efficit, η apotomen sextam. Cum itaq; ha latitudines differant à Media latitudine, quia hac rationalis, illae irrationales sunt; & inter se, quia ordine nō sunt eadem apotoma, patet Apotomē & reliquas illā consequentes, & à Media & inter se differre.

Cum verò, ut in hoc Theoremate ostensum est, Apotome non sit eadem, quae ex binis nominibus; quadrata autem apotoma & reliquarum ipsam consequentium faciant latitudines; Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam: Sed quadrata Binomialis & reliquarū consequentium, faciant latitudines ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, sextam, constat, latitudines Apotoma & aliarum Irrationalium, quae post ipsam, easdem non esse, latitudinibus ejus, quae ex binis nominibus & reliquarum post ipsam Irrationalium; adeoq; inter se differre. Quare, cum & ha & illa à Media differant, patet, rationali posita Mediu Irrationales esse lineas esse lineas inter se differentes, de quibus hactenus.

α 23. X.
β 98. VI.
γ 99. X.
δ 100. X.
ε 101. X.
ζ 102. X.
η 103. X.

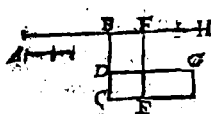
1. est Media, 2. Ex binis nominibus cum 6. speciebus. 3. ex binis Medijs prima. 4. ex binis Medijs secunda. 5. Major. 6. Rationale ac Medium potens. 7. Bina Media potens. 8. Apotome cum sex speciebus. 9. Mediæ apotome prima, 10. Mediæ apotome secunda 11. Minor 12. Cum rationali Medium totum efficiens. 13. Cum Medio Medium totum efficiens. *Pergit jam Euclides expositis Irrationalium proprietatibus, inter se conferre Apotomas & binomiales propos. 113. 114. 115.*

PROPOS: CXIII.

Theorema 89.

Quadratum Rationalis *a* ad eam, *bc*, quæ ex binis nominibus *bd*, *cd*, applicatum *be*, latitudinem *bf* facit apotomen, cujus nomina tota *fk* & congruens *bk* commensurabilia sunt nominibus *bd*, *dc*, ejus, quæ ex binis nominibus & in eadem proportionem, & adhuc Apotome *bf*, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, *bc*, quæ ex binis nominibus.

Ad nomen minus d c recta bc, applicetur eidem



dem quadrato rationalis

a, rectangulum cg aequale,

fitq; bh aequalis ipsi dg.

Cum ergo cf, cg sint a-

a 14. vel

qualia, a erit, ut bc ad dc, ita dg, id est bh ad

16. VI.

b f, & dividendo: ut b d ad dc, ita f h ad b f:

erug; fh major quam b f, sicut b d major est

quam d c. Sumta fi ipsi fb equali, & fiat, ut hi

β 12. VI.

isa, fb ad b k. & componendo, ut h f ad fi, id

est, b f ita f k ad b k. Ostensum vero est, esse, ut h f

ad b f ita b d ad d f. Sed hac sunt nomina bino-

mialis, rationales potētia tantum commensura-

biles. Ergo & h f, b f sunt potentia cōmensura-

γ 10. X.

biles. Rursus, quia est, ut h f ad b f; ita f k ad

b k: & erunt h f, f k antecedentes simul, id est

δ 12. X.

h k tota; ad consequentes f b, b k simul, id est,

b k, ut h f ad b f. Quare ut h k prima ad b k

ε 20. VI.

secundam, sita quadratum prima ad quadra-

tum secunda. Sed cum cg sit rationale, utpote

quadrato rationalis a aequale, rationali d c ap-

plicatum & faciens dg rationalem ipsi c d lon-

gitudine commensurabilem; erunt h b, id est, dg

ζ 21. X.

& d c rationales longitudine commensurabiles.

Cumq; sit ostensum, esse, ut b d ad d c, ita f k ad

b k, & ut f k ad b k, ita h k ad f k. Ergo ut

η 22. VI.

quadratum b d ad quadratum d c, ita quadra-

tum h k ad quadratum f k. Et sic commensu-

rabilia sunt hac atq; illa. Sed fuit, ut quadratū

E e

s

h k, ad

9 cor. 16.
X.

$h k$, ad quadratum $f k$, ita recta $h k$ ad $b k$: γ ideoq, sunt longitudine commensurabiles inter se & reliqua $b h$. Sed $b h$ est ostensa rationalis:

n 74. X.

λ 16. X.

μ 12. X.

n 15. X.

Ergo & $h k$ ipsi commensurabilis est rationalis, quare & $h b$, $b k$ rationales erunt. Cum itaque $f k$ ipsi $b k$ potentia tantum commensurabilis sit, erit & $f k$ rationalis. Quare cum $f k$, $b k$ sint

rationales potentia tantum commensurabiles, erit reliqua $b f$ apotoma, cōgruens, $b k$. Quod

primum. Cumq, $h b$, $b k$ ostensa sint longitudine inter se cōmensurabiles; λ ergo & ipsi $h k$: i p sag, $h b$ sit longitudine commensurabilis $d c$, erit eidem $d c$ longitudine commensurabilis $b k$.

Rursus, quia est, ut $b d$ ad $d c$, ita $f k$ ad $b k$, & permutando, ut $b d$ ad $f k$, ita $d c$ ad $b k$; γ itaq, ut $b a$, ita & illa sunt longitudine commensurabiles; erunt $\therefore$ ipsius $b f$ Apotoma nomina $f k$, $b k$, nominibus $b d$, $d c$ binomialis longitudine commensurabilia. Quod secundum. Rursus, quia est,

ut $b d$ ad $d c$ ita $f k$ ad $b k$; erunt apotoma $b f$ nomina $f k$, $h k$ in eadem ratione cum $b d$, $d c$ nominibus ipsius $b c$ Binomialis. Quod est tertium. Deniq, vel $b d$ plus potest quam $d c$ quadrato recta sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis,

cum sit, ut $b d$ ad $d c$, ita $f k$ ad $b k$, poterit etiam $f k$ plus quam $b k$ quadrato recta sibi longitudine commensurabilis. Si incommensurabilis, poterit plus quadrato recta longitudine incommensur-

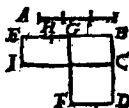
surae

furabilis. Quare, si rationali posita longitudine commensurabilis fuerit bd , erit & $f k$, quare vel prima vel quarta apotome erit, cū illa prima vel quarta sit: Si dc , etiam bk , quare secunda vel quinta: Si neutra bd , dc , etiam neutra $f k$, bk , quare tertia vel sexta. Ergo apotome eadem ordine cum Binomiali.

PROPOSITIO CXIV.

Theorema 90.

Quadratum Rationalis a ad Apotomen b capolicatum bi , latitudinem be facit eam, quæ ex binis nominibus bg , ge cujus nomina bg , ge commensurabilia sunt nominibus bd , cd , Apotomæ bc , & in eadem proportionem ut $b d$ ad $c d$, ita $b b$, ad be , & adhuc, quæ be ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome bc .



Appliſetur ad bd , bf rectan-

gulum æquale ipſi b i faciens la-

titudinem bg . α Erit ut be ad

bg , ita bd ad bc ; & conver-

tendo, ut be ad ge , ita bd ad

cd . β Secetur etiã ge ad h juxta proportionẽ be

ad ge . Quia eſt, ut be tota ad ge totã, ita ch ex

be ablata, ad hg ex ge ablatam. Erit ergo etiã

reliqua bh ipſius be , ad reliquã he ipſius ge , ut

tota be , ad totam ge . Sed ut be ad ge , ita erat

ch ad hg . Ergo ut bh ad he , ita ch ad he , ipſa q .

ch eſt media proportionatũ inter bh , gh :

γ Quare

$\alpha 14.$ vel

16. VI.

$\gamma 10.$ VI.

cor. 20.
VI.

§ 10. X.

§ 16. X.

§ 21. X.

§ Scho. 12.
X.

§ 37. X.

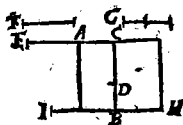
Quare ut b h prima ad g h tertiam, ita quadratum prima, ad quadratum tertia. Quia autem fuit, ut b d ad c d; ita b e ad g e, id est, b h adh e; Sunt autem b d, c d nominae apotomae b c rationales potentia solum commensurabiles & erunt etiam b h, h e & ex his quadrata commensurabilia; adeoque b h, h e propter quadrata commensurabilia longitudine commensurabiles; & tota b h longitudine commensurabilis parti g h, etiam ipsi b g longitudine commensurabilis erit. Sed cum quadrato rationali a aequale rationale b f sit applicatum ad rationalem b d, erit b g latitudo rationalis longitudina ipsi b d commensurabilis: Eidem ergo & b h longitudine commensurabilis n erit & rationalis. Quare cum b h, h e sint ostensa potentia solum commensurabiles, & b h rationalis; erit & h e rationalis, & sic b h, h e, sunt rationales potentia solum commensurabiles, & ipsaeque b e ex binis nominibus. Quod primum est. Quia vero & patet esse b h adh e, ut b d ad c d; & permutando, b h ad b d, ut h e ad c d, Suntque b h, b d longitudine commensurabiles: & Ergo & h e, c d. Itaque nomina b h, h e binomialia b e, nominibus b b, c d Apotoma b c longitudine sunt commensurabilia. Quod secundum. Imò & in eadem ratione, cum sit ut b h adh e, ita b d ad c d. Quod est tertium. Denique b d plus potest, quam c d quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis

rabilis, vel incommensurabilis. Si cōmensurabilis, etiam bh plus potest quàm he quadrato re. Et sibi longitudine commensurabilis. Si incommensurabilis, incommensurabilis; unde ordine sex binomia singula ejusdem ordinis cum apotomis inveniuntur. Quod est quartum.

PROPOSITIO CXV.

Theorema 91.

Si spaciū ab contineatur sub Apotoma ac & ca cb quæ ex binis nominibus, cujus nomina cd , db , commensurabilia sunt nominibus ce , ae , Apotomæ ac , & in eadem proportionē, ut cd ad db , ita ce ad ae , recta linea spaciū ab potens est Rationalis.



Quadrato rationalis g æquale rectangulum ch applicetur ad cb , & erit bh apotome, cujus nomina hi , bi sint longitudine commensurabilia nominibus cd , db , & in eadem ratione, nempe hi ad bi , ut cd ad db , adeoq; ut ce ad ae :

α 113. X.

Q

$\beta 19.V.$ & permutando, ut tota hi ad totam c , ita ab-
 $\gamma 12.X.$ lata bi ad ablatam a . & Ergo & reliqua b h
 $\delta 10.X.$ ad reliquam a , ut hi ad c . Quia cum γ sint
 $\epsilon 1.VI.$ commensurabiles longitudine, quia utraq; ipsi
 c d longitudine commensurabilis est, erunt &
 hb, a & hc ipsi ab cum sint in eadem ratio-
 ne. Sed hc aequale quadrato rationalis g est
 rationale. Ergo & a b ipsi commensurabile
 est rationale, & ipsum potens recta t ratio-
 nale.

Corollarium.

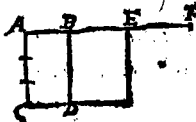
Constat hinc, rationale spacium
 includi posse duabus Irrationalibus
 ut hic binomiali & apotomæ inclu-
 sum est rationale ab .

PROPOS: CXVI.

Theorema 92.

A Media ab infinitæ Irrationales
 fiunt, & nulla alicui antecedentium
 est eadem.

$\alpha 38.X.$
 Lemma.
 $\beta 11.def.$



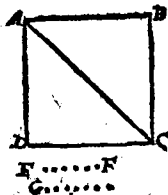
Subrationali a c & Me-
 dia, ab comprehensum spa-
 cium ad a Irrationale pos-
 sit bc Irrationalis qua nul-
 li 13 Irrationalium eadē erit.

Medium

Medium enim ad rationalem applicatum γ fa- γ 23. X.
 cerit latitudinem rationalem; reliquarum 12. Ir- δ à 61. ad
 rationalium quadrata applicata ad rationalem 66. X. & à
 facerent latitudines vel binomiales vel apoto- 97. ad
 mas. Sed Quadratum b e applicatum ad a c fa- 103. X.
 cit latitudinem a b Mediam differentem à reli-
 quis omnibus Irrationalium quadratorum lati-
 tudinibus. Ergo b e Irrationalis differt ab illis
 13 Irrationalibus. Si autem compleatur rectan-
 gulum d e, erit illud sub rationali, & irrationali
 comprehensum Irrationale, quod cum possit
 e f, & erit & hac irrationalis, & differt à reli-
 quis omnibus Irrationalibus. Cum enim hujus
 quadratum applicatum ad rationalem b d,
 faciant latitudinem b e distinctam à reliqua-
 rum Irrationalium quadratorum applicatorum
 latitudinibus, ut patet ex precedentibus, ipsam
 quoque e b Irrationalem peculiarem à reliquis
 esse oportet.

PROPOSITIO CXVII.

Theorema 93.



Propositum sit no-
 bis ostendere, in qua-
 dratis figuris d b dia-
 metrum a c lateri a b
 incommensurabilem
 esse longitudine.

Si non

47. I.

14. IIX.

Si non, esto commensurabilis habeantq; a & b proportionem quam ef & g numeri sua rationis minimi & primi: quarum g unitas non erit (Cum enim ex a & c quadratum a sit duplum quadrati b , sitq; ut quadratum a & c ad quadratum b , ita numerus quadratus ex ef , ad quadratum numerum ex a & g , erit etiam ille huius duplus; ideoq; si g esset unitas, esset ipsius quadratum unitas, numerusq; quadratus ex ef binarius, quod absurdum;) Sed numerus. Et quia, ut iam ostensum est, ex ef est duplus quadrati ex g ; & metietur quadratus ex g quadratum ex ef & latus g metietur latus ef . Cum verò g etiam metiatur seipsum, erunt ef & g numeri inter se compositi, habentes communem mensuram g : qui tamen inter se erant primi. Quod absurdum. Non ergo a & b inter se commensurabiles sunt.





ELEMENTO- RUM EUCLIDIS

LIBER XI.

Definitiones.

1.

Solidum est, quod longitudinem
& latitudinem & crassitudinem
habet.

2. Solidi autem extremum est
superficies.

3. Linea recta est ad planum recta.,
cum ad rectas omnes lineas à quibus
illa tangitur, quæque in proposito
sunt plano, rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum rectum est
cum rectæ lineæ quæ communæ pla-

Ff

horum

norum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur alteri plano ad rectos sunt angulos. Hoc enim modo non magis inclinabit in unam partem quam in alteram, sed æqualiter illi insistet.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta, est, inquam angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis Lineis contentus, quæ in utroq; planorum ad idem sectionis communis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

7. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum; cum dicti intersectionum anguli inter se fuerint æquales.

8. Paral-

8. Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

10. Equales similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

11. Solidus angulus est plurimum quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel: solidus angulus est, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

12. Pyramis est figura solida, quæ planis continetur ab uno plano ad unum punctum constituta. Potest autem illud unum planum, a quo omnia tendunt, esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum. Unde Pyramis vel triangula, vel quadrangula solet dici. Reliqua omnia ad unum punctum constituta sunt triangula numero respondentia lateribus plani. Ff 2 13. Pri-

13. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia & parallela; alia vero parallelogramma. Est nimirum columna quadam laterata equalis crassitudinis, cujus bases oppositæ sunt æquales, similes & parallele, sive hæ sint triangula, sive quadrata, sive pentagona. Itaque tot continebit parallelogramma quodlibet Prisma, quot latera sive anguli in uno quodq; oppositorum planorum reperiuntur.

14. Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus, in seipsum rursus revolvitur, unde moveri ceperat, circumassumpta figura; vel, Sphæra est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam, ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

15. Axis autem sphæræ est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

16. Cen-

16. Centrum Sphæræ est idem, quod est semicirculi.
17. Diameter autem sphæræ est recta quadam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.
18. Conus est, quando rectanguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri ceperat circumassumptâ figurâ. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, orthogonius erit conus. Si verò minor, amblygonius: Si verò major, Oxygonius: tum enim angulus ad verticem vel rectus sit, vel obtusus, vel acutus.
19. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.
20. Basis verò coni, est circulus, qui à circumducta recta describitur.
21. Cylindrus est, quando rectangu-
- Ff 3
- li pa-

Si parallelogrammi manente uno latere, eorum, quæ circa rectum angulum; circumductum parallelogrammum in seipsum foris revolvitur, unde deperat moveri circumassumptâ figurâ.

22. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases verò cylindri, sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

24. Similes conii & cylindri, sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida, sub sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraëdron, est figura solida, sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

27. Octaëdron, est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

28. Dodecaëdron, est figura solida sub

da, sub 12. pentagonis æquilatris & æquiangulis contenta,

29. Icosaëdrium, est figura solida, sub

20. triangulis æqualibus & æquilatris contenta. *Hæc 3. corpora sola appetant regularia. Quia omnia plana quibus continentur, sunt equalia æquilatæ & æquiangula: quorum constructiones in decimo tertio libro docebuntur.*

30. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex aduerso, paralleleæ sunt, contenta. *Horum tot sunt genera, quot sunt parallelogrammorum, ut cubus, altera parte longius, Rhombus, Rhomboides.*

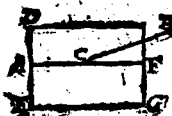
31. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

32. Solida figura, solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ, tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam verò in sublimi.



Sit, si potest, a c pars in plano d g, pars c b extra planum. Si ergo continuetur a c in illo plano d g usq; in f, erunt eidem a c lineæ duæ diverse c b, c f ad eandem partem adjectæ quod æ absurdum.

¶ 14. I.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duæ rectæ lineæ a b, c d, se mutuo secant in e uno sunt plano: Atque triangulum omne e f g in uno est plano.



In lineis a b, c d connectantur puncta f, g, ut fiat triangulum f e g, cuius si pars quædam, ut h i f, dicatur esse extra illud planum, erunt lineæ rû e f, f b partes, supra partes in plano, æ quod absurdū. Quod si jam totū triangulum e f g, est in eodem plano, oportet

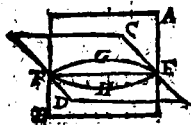
¶ 1. XI.

oportet & ipsius terminos, lineas ef , eg , & ad eorundem
quarum sunt partes, ab , cd , totas, in eodem
plano esse.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si duo plana ab , cd , se mutuo secant; communis eorum sectio ef est
linea recta.



Si quis ef lineam neget in utroque plano existere, erit vel
in neutro, & intra terminos
 e & f ducta in alterutro planorum recta egf includent

recta ef & egf figuram, quod α absurdum; vel
in alterutro, intraque eorundem terminos ducta in
altero recta egf , idem sequetur absurdum.

ax. I.

PROPOSITIO IV.

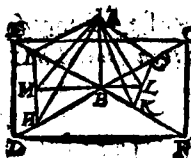
Theorema 4.

Si recta linea ab , rectis duabus cd ,
& lineis se mutuo secantibus, in com-
muni sectione b ad angulos rectos in-
sistat: illa ab ducto etiam per ipsas
plano cd , ef ad angulos rectos erit.

Ef 5

Quis

a 3. XI.



Quia enim se mutuo secant
ed, ef linea, & erunt in eo-
dem plana. Sumptis bg &
bh, itemq; bi & bk aqua-
libus, ductisq; gk, ih & lm,
qua in punctis l & m illas

β 15. I.

γ 1. I.

I. 26. I.
ex con-
str.

α 26. I.

ζ 8. I.

α 10. def.

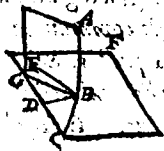
duas gk, ih fecer; demittantur ex a puncto sub-
limi ag, al, ak, ah, am, ai. Cum ergo latera
bg, bk, trianguli bgk equalia sint lateribus
bh, bi, trianguli bhi, cum angulo compre-
henso ad b β equali. Erunt & gk, & ih bases
γ equales. Anguliq; bkg, & bhi aequales;
Rursus cum in triangulis bkl, & bim, equali-
um angulorum ad β b, & lkb ipsi bim, latera
interjacentia bk, bi, sint δ equalia; & erunt &
reliqua latera kl, lb, reliquis im, mb equalia,
Eodemq; modo in triangulis δ rectangulis abg,
abh, equalium laterum bg & bh, & ab com-
munis; etiam ag, ah bases fiunt γ equales. Si-
cut & ai & ak. Amplius in triangulis ak g &
ai h equalium laterum gk & ih, ak & ai, &
basium ag & ah; ζ erunt anguli comprehensi
aih, ak g equales. Itaq; cum in triangulis ak l
& aim, aequales angulos i & k comprehenden-
tia latera sint equalia; γ erunt & bases al, am
equales. Deniq; cum in triangulis abl & abm,
equalia sint latera bl & bm, & ab communis,
& bases al, am ζ erunt; & anguli ad b aequales;
& quia deinceps, etiam a recti. Erit ergo recta
ab

ab perpendicularis ipsi lm ; adeoque omnibus i-
pſam tangentibus in plano ce, df , ipſæ etiam pla-
no ce, df perpendicularis.

PROPOS. V.

Theorema 5.

Si recta linea ab , rectis tribus lineis bc, bd, be ; ſe mutuo tangentibus in communi ſec-
tione ad rectos angulos inſtat; illæ tres
rectæ in uno ſunt plano.



Cum qualibet duarum illarum
per ſectionem mutuam, ſint in
eodem plano, ut bc, bd , in pla-
no ut bc, bd in plano fc , pa-
natur ſi poteſt, tertia ab be
extra planum illud in ſubli-

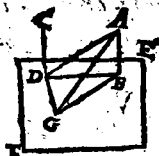
mi. Quoniam ab, be ſunt in eodem plano, ſint
in plano ac . Quoniam ergo plana fc, ac , ſibi
mutuo occurrunt in b , neceſſario productæ ſe
mutuo ſecabunt, & B quidem ſectione communi
 bg . Sed quia ab ponitur ad angulos rectos ipſis
 bc, bd ; γ erit etiam plano fc , per ipſas ducto,
ad angulos rectos; δ Et ſic etiam rectæ bg , qua
ipſam in b tangit. Itaq; duo recti anguli abg ,
 abe in eodem plano ag conſtienti, pars ϵ ſo-
sumorunt aequalia.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ rectæ lineæ ab, cd , eidem plano
 ef ad rectos ſint angulos, parallelæ erunt re-
ctæ illæ lineæ.

Ductæ



a 3. def.

XI.

Ex con-
str.

74. I.

28. I.

5. XI.

2. XI.

28. I.

Ducta ab in plano ef , erunt
anguli d & b α recti in eo-
dem plano ef . Ducatur dg
perpendicularis ad bd , a-
qualis ipsi ab : connectun-
tur g , recta bg , ag , da . Iam

in triangulis abd , bdg β aequalium laterum
 ab & dg ; & b d communis cum angulo com-
prehensio recto; γ erunt etiam bases bg , ad , a-
quales. Rursus in triangulis abg , adg aquali-
um laterum ad & bg , & basis communis ag ,
erunt anguli a b g & g d a d aequales. Sed ille
 α rectus. Ergo & hic. Sed ex eadem definitio-
ne etiam angulus g d c est rectus. Erit ergo
 g d tribus rectis db , da , dc ad angulos rectos.
Quare recta db , da , dc , in uno sunt plano.
Est ζ autem ab in eodem plano, in quo, db , da .
Itaq, recta cd in eodem erit plano cum ab . Sed
cum interni anguli b & d sint recti; η Erunt
 ab , cd parallela. Quod erat propositum.

PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si duæ sunt parallelæ rectæ lineæ
 ab , cd , in quarum utraque sint quæli-
bet puncta e f ; illa linea ef quæ ad
hæc puncta adjungitur, in eodem est
cum parallelis plano.

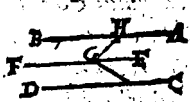
Sim

in triangulis, cdg & cbg equalium laterum
 cd , bg & bc , gd & gc communio & an-
 guli dgc & cdg sunt aequales. Cumq; hic sit
 a rectus. Ergo & ille. Quare recta gb , duabus
 rectis bd , bc se mutuo secantibus in b , ad an-
 gulos rectos insistit, & sic plano per bd , bc du-
 cto & erit ad angulos rectos. In quo plano cum sit
 & ab , quia $\angle bdc$, bca , in eodem sunt plano, in
 quo parallela ab , cd . Itaq; & gb recta ba ad
 angulos rectos a insistit. Quare cum ab sit recta
 ad rectas bg , bd : & erit recta ad planum per
 bg , bd : & erit recta ad planum per bg , bd , id
 est, ad planum cf .

PROPOSITIO IX.

Theorema 9.

Quæ eidem ef rectæ lineæ ab , cd sunt
 parallelæ, sed non in eodem cum il-
 la plano hæ ab , cd quoque inter se
 sunt parallelæ.

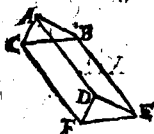
 A quolibet puncto g , recta
 ef , ducantur duæ perpendi-
 culares gh , quod in plano pa-
 rallelarum ab , ef ; ac gi in plano parallelarum
 ef , cd . Quoniam ergo eg est recta ad gh & gi
 tangentes se in puncto g : & erit etiam recta
 plano per illas gh , gi ducto: cumq; fe una pa-
 rallelarum sit illi plano per gh , gi , perpendicularis:
 & Erit & altera ab ; & per eandem causam etiã
 cd , quia eidem ef est parallela. Cum itaq; ab ,
 cd

et eodem plano sint ad angulos rectos, et erunt etiam parallelæ. Debuit autem propositio hæc sumere duas parallelas extra planum, quia alias cum 30. I. coincidisset quæ de parallelis in eodem plano loquitur. y 6. XL.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si duæ rectæ lineæ ab , ac se mutuò tangentes in a , ad duas rectas de , df se mutuò tangentes in d , sint parallelæ, non in eodem plano; illæ angulos bac , edf , æquales comprehendunt.



Ponantur ab , de ; & ac , df æquales: Ducanturq; bc , ef ; bc , ad , cf . Erunt ergo bc , ad æquales parallelas ba , ed connectentes æquales, ut & ad , cf : & adeoq; & bc , cf , quia eadem ad parallela. At & deniq; bc , ef . Atq; ita in Triangulis bac , edf , equalium laterum, ab , de & ac , df ; equaliumq; basium bc , ef ; anguli bac , & edf sunt æquales. a 33. I.
69. XL
y 8. I.

PROPOS: XL.

Problema 1.

A dato puncto a in sublimi; ad subiectum planum bc ; perpendicularem rectam ducere.

In

a 12. I.

B 1. I.

y 31. I.

ex const.

s 4. XI.

§ 8. XI.

n 2. XI.

§ 3. def.

XI.



In plano cb ducatur recta
ulcunq; de , ad quam ex a
 a demittatur perpendicularis
a f , g in plano $b c$, per

f , ad d ducatur perpendicularis gh , ad quam
ex a a demittatur perpendicularis ai , qua ad
planum subjectum perpendicularis est. y Ducta
enim in plano $b c$, per i , ipsi de parallela kl ;
cum df sit d ad angulos rectos duobus fa , fh :
 g sic ad planum per illas fa , fh : g erit etiam
 ki ad idem planum recta. Sed quia ai cum fa ,
 fh , in eodem est plano, tangitq; recta ki in i :
erit $\angle$ angulus kia rectus; adeoque ai ad angu-
los rectos ipsis ki , if . Igitur g ad planum $b c$
erit recta.

PROPOSITIO XII.

Problema 2.

Dato plano $b c$ a puncto a , quod in
illo datum est, ad rectos angulos re-
ctam lineam excitare.

a 11. XI.



Ex quovis puncto sublimi d
demittatur a ad planum $b c$
perpendicularis de , qua, si
cecidit in a , factum est quod
quaritur: sed si ceciderit in punctum aliud e , ex-
tensa recta per e g a , ducatur per a ipsi de pa-
rallela

§ 31. I.

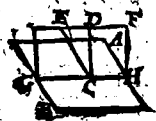
parallelæ af, in plano gh per d e, cā, ducto: erit
af recta ad planum datum erecta. Cum enim
d e, a f sint parallelæ, & d e ad planum b c y re-
cta; ð erit etiam af recta ad idem planum b c.

γ ex cōp
ð 8. XI.

PROPOS: XIII.

Theorema II.

Dato plano ab a puncto c quod in
illo datum est, duæ rectæ lienæ ad re-
ctos angulos non excitantur ad c-
adem partes.



Ducantur, si potest fieri, c d æ. 6. XI.
c e ad planum ab perpendi-
culares. æ Erunt ergo amba
parallelæ, quæ tamen in pun-
cto c concurrunt, quod absur-

dum. Eodem modo ex uno puncto sublimi im-
possibile est, ad idem planum, duas perpendicula-
res demittere.

PROPOS: XIV.

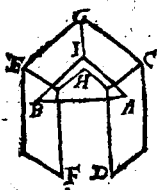
Theorema 12.

Ad quæ plana c d, e f eadem ab re-
cta linea; recta est; illa sunt parallelæ.

G

S

α 3. XI.



β 17. I.

ponatur recta, ad utrumq; planum erunt trianguli aib , anguli iab , & iba recti, qui tamen sunt duobus rectis β minores.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si duæ rectæ lineæ ab , ac se mutuo tangentes in a , ad duas rectas de , df se mutuo tangentes in d , sint parallele; non in eodem consistentes plano: parallele sunt, quæ per illa ducuntur plana bc , ef .

α 11. XI.

β 31. I.



α Ducatur ex a in planum ef perpendicularis ag , & per punctum g β ducantur gh , gi parallela ipsis de , df . Cum itaq; gh , ab , sint parallela ipsi dc ;

γ 9. XI.

δ 29. I.

α 3. def. XI

§ 4. XI.

γ etiam inter se sunt parallela, anguliq; $b a g$, $a g h$, duobus rectis δ æquales: ac propter hunc β rectum, etiam ille rectus. Eodemq; modo $c a g$ angulus est rectus. § Itaq; cum ga ad ab , & ac sit recta,

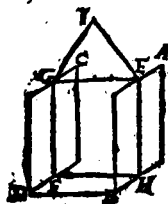
recta,

recta, recta etiam erit ga , ad planum bc , per illas ductum. Eadem autem ga , etiam η est recta ad planum ef , & Itaq; bc & ef sunt plana parallela. η ex cor. 1^o str.
& 14. XI.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo plana parallela ab, cd , plano quopiam ef secentur: communes illorum sectiones eh, ef , sunt parallelae.



Si non sunt parallelae, convenient tandem producta, ut in puncto I . Quoniam linea he tota est in plano uno ab , linea vero fgi tota in plano cd producto: Producta itaq; illa plana concurrent quaremen ponuntur parallela. a 1. XI.

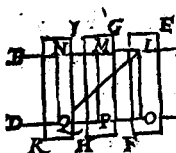
PROPOSITIO XVII.

Theorema 15.

Si duae rectae lineae ab, cd parallelis planis ef, gb, ik , secantur; in easdem rationes secabuntur, videlicet, ut segmenta inter plana dicta sint proportionalia, ut lm , ad mn , ita op , ad pq .

Gg 2

Ducan-



α 2. XI.
 β 16. XI.

Ducantur enim rectæ lo, nq in planis ef, ik , & conjungantur rectæ lq , quæ occurrunt plano gh , in puncto, a quo ad puncta m, p ducantur in eodem gh plano rm, rp : & eritq; triangulum lnq , in uno plano. Cumq; parallela plana gh, ik secentur plano trianguli lnq & erunt communes sectiones mr, nq parallele; ut & rp & lo , quæ ob rem erit, ut lr ad rq ; ita lm , ad mn . Item, ut lr ad rq ; ita op ad pq : ac proinde, ut lm ad mn ; ita op , ad pq .

PROPOS: XVIII.

Theorema 16.

Si recta linea ab plano cuiuspiam $c d$ ad rectos sit angulos, & omnia, quæ per ipsam ab plana, eidem $c d$ ad angulos rectos erunt.



α per 31. L
 β 8. XI.

Sit enim per ab ductum planum ef , secans planum cd per rectam lineam fg : atq; ex puncto h utrunq; sumito in linea fg , ps ab , parallela hi & erigatur. Quoniam itaq; ab, hi sunt parallela, illa ad planum $c d$ recta existente, & erit & hac recta. Et ad

com-

communem sectionem fg perpendicularis: eodemq; modo recta omnes in plano g si ipsi ab parallela erunt ad communem sectionem fg perpendiculares, psum: q; planum g ad planum c d rectum. Nec aliter habet cum omnibus alijs planis per ab ductis, sed & illa omnia ad planum c recta sunt.

γ 3. defi.

XI.

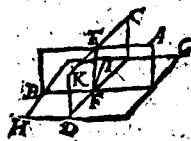
δ 4. defi.

XII

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si duo plana a b , c d se mutuo secantia, plano cuidam g h ad rectos sunt angulos, communis etiam illoru sectio e f ad rectos eidem plano angulos erit.



Aut enim e f ad b f , d f , Communes sectiones planorum a b , c d cum plano g h est recta, aut non. Si est ad illas recta, & etiam ad planum

α 4. XI.

g h , per ipsas ductum: si ad alteram tantum b f , recta dicatur e f , quoniam e f in plano a b , ad planum g h recto perpendicularis est communi eorum sectioni b f ; & erit & ad ipsum planum g h recta: Et ita, si ad alteram d f tantum poneretur recta, idem inferretur. Si autem e f ad neutram b f , d f credatur esse recta, & ducatur ex f in plano a b , ad b f sectionem communem, cum plano g h perpendicularis fi : & in plano c d perpendicularis fk . Quoniam ergo planum a b

β 3. defi.

XI.

γ II. I.

& g 3. defi.

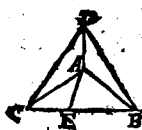
est rectum ad planum gh ; erit & i f ad b f sectionem communem perpendicularis, ut & k f , ad idem planum gh : adeoque, ex puncto f ad planum gh duæ erectæ sunt perpendiculares, & Quod absurdum.

§ 13. XI.

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si solidus angulus a tribus angulis planis bac , cad , dab , contineatur: ex his duo quilibet, ut ut assumpti, tertio sunt majores.



Si enim omnes tres sint inæquales inter se, patet duos esse tertio majores. Si autem duotantum æquales & tertius minor, et idem duo quilibet tertio sunt majores.

α 23. I.

Si unus, ut bac , sit maximus: reliqui autem si ve æquales si ve inæquales, quilibet eorum cum illo reliqua est major. Quo maximo bac , majores etiam sunt duo reliqui $b ad$ & $d ac$. In plano enim per a , b , ac , ducto, & fiat angulus bac , æquatus angulo $b ad$, & recta ad æqualis ac , & per c extendatur recta bc , secans ipsas ab , ac , in b & c , & connectantur rectæ bd , cd . Quoniam in triangulis $b ad$, & $b ac$, latera ad & ac sunt æqualia & ab commune, illiusque comprehensi anguli æquales, § Ergo & bases bc , bd erunt æquales. Sed quia latera db , dc sunt majora latera bc ; & demum æqualibus bd , be , erit dc , major quam ec . Itaque, cum in trian-

β 4. I.

γ 3. I.

gulus $\angle dac$ & $\angle eac$, latera da , ea sint equalia.
 & commune; basis autem dc major basi
 ec ; erit & $\angle dac$ major quam $\angle eac$, &
 aequalibus additis, erunt duo $\angle bad$ & $\angle daci$. d 25. I.
 ut $\angle bad$ majora $\angle bac$, $\angle eac$ simul, id est, an-
 gulo, $\angle bac$ maximo.

PROPOS: XXI.

Theorema 19.

Omnis solidus angulus a sub mi-
 noribus quam quatuor rectis angulis
 planis continetur.



Ductis rectis bc , cd , db , e-
 runt tres anguli b, c, d solidi, quo-
 rum quilibet sub tribus angulis
 planis continetur, ut b sub $cb a$,
 abd & bdc ; c sub bca , acd ,

dcb ; d sub cda , adb , bdc . Quoniam duo a 20. XI.
 anguli $cb a$, abd , majores sunt angulo dbc ;
 similiter & duo adb , adc majores angulo bdc ;
 & duo acd , acb majores angulo dcb . Sed tres b 32. I.
 hi $cb d$, bdc , & dcb , sunt duobus rectis aequa-
 tes; & erunt illi sex duobus rectis majores. Sed
 cum iidem sex una cum tribus ad a angulis sint
 sex rectis & aequales; ablati illis sex, qui majores
 sunt duobus rectis: erunt tres reliqui ad a , con-
 stituentes angulum solidum, minores quatuor
 rectis. Nec diversus est demonstratio si angulo so-
 lidus constet ex pluribus, quam tribus planis an-
 gulis.

Theorema 20.

Si fuerint tres anguli plani a, b, c , quorum duo, ut libet, assumpti reliquus sint majores: comprehendant autem ipsos rectæ lineæ, ad, ae, bf, bg, ca, ci , fieri potest, ut ex lineis de, fg, hi , æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.



Si tres anguli dati, a, b, c , sunt æquales, a , erunt quoque bases de, fg, hi , æquales,

Et illarum quolibet dua tertiâ majores: si vero duo anguli sint æquales, Et tertius minor, a erunt etiam dua bases æquales. Et basis tertiæ utraq; β minor; Et sic rursus quolibet dua tertiâ sunt majores. Si autem unus a sit maximus; reliquis b, c vel æqualibus vel inæqualibus; erit de basis omnium maxima, Et sic de, fg , majores tertiâ hi, de , tenentur hi majores quam fg . Erunt etiam fg, hi majores quam de . γ Fiat enim da, k angulus æqualis angulo b . Et ak sit æqualis ipsi ad , quia ex a per puncta dk et transit peripheria circuli ob trium illarum rectarum ad, ak, ae æqualitatem, connectanturq; dk, ke . Quoniam ergo duo anguli b, c , ponuntur

maja-

$\alpha 4. I.$

$\beta 24. I.$

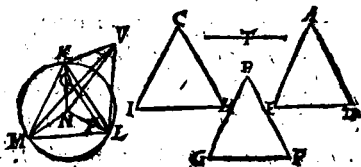
$\gamma 23. I.$

maiores angulo dac , & b aequalis est angulo dak ; erit angulus c major reliquo kac , basisq; dk aequalis basi fg : basis verò ke minor quam hi . Cum ergò dk , ke sint λ majores quam de , eadem de majores etiam erunt fg , & hi . Tribus ergò hisce ita cõparatis, ut dua qualibet tertia sint majores, facile erit inde triangulum efformare. 20. I.

PROPOSITIO XXIII.

Problema 3.

Ex tribus angulis planis abc , quorum duo quomodocunq; assumpti, reliquo sunt majores, solidum angulum constituere.



Tres illis angulos a, b, c comprehendentes lineas omnes ponantur aequales; & subtendantur bases de, fg, hi , ex quibus potest triangulum a constitui, quod sit klm , ut latus kl , basi de , lm basi fg , & km , basi hi sit aequale; ac circa illud

§ 5. IV.

huc describatur circulus, ex, cujus centro n, du-
cantur n k, n c, n m, quibus majores sunt quali-
bet rectarum, ut a d, a e, angulos planos inclu-

y Cor. 5.

IV.

dentium. Primò y cadat centrum n intra illud
triangulum k l m, quia Oxygonium. Si ergò a d,

§ 8. I.

a e, non sunt majores, quam n k, n l, sint vel æ-
quales: ð eruntq; propter bases etiam æquales
d e & l k, anguli k n l & a; ut & l n m & b; &
m n k & c æquales. Cumq; tres illi circa centrū
n sint quatuor rectis æquales: erunt & a, b, c
quatuor rectis æquales, contra hypotbesin: vel

s corol.

15. I.

minores a d & a e, quàm n k & n l, & cum n o,
n p, æqualibus abscissis; ducta o p parallela erit
ipsis k l, propter proportionalem sectionem tri-
anguli l n k, & triangula l n k, p n o, equiangu-
la. n Cumq; sit, ut n k, ad k l: ita n o ad o p: &

§ 2. VI

erit e l k; id est, d e major quàm o p: sicut n k,
quàm n o. Cum ergò in laterum æqualium tri-
angulis, d a e & o n p, basis d e sit major basi
o p; x erit & angulus a major, angulo o n p; &
sic angulus b major angulo l n m, angulusq; c maj-
or angulo m n k. Erūt proinde a b c anguli, qua-
tuor rectis, quibus illi tres circa n sunt æquales,
majores, contra hypotbesin; Itaq; a d, a e nec
æquales, nec minores, sunt ipsis n l, n k.

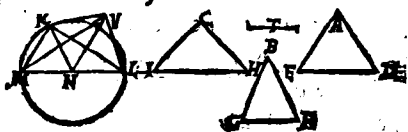
§ 14. V.

n 4. VI.

n 25. I.

Deinde cadat centrum n in latus l m, quod sit,
si angulus k sit rectus, sintq; a d, a e, id est, b f, b g;
vel æquales ipsis n l, n k, id est, l m, que æ-
qualis

qualis est ipsi fg. Erunt ergò bf, bg aequales ipsi fg, quod λ absurdum; vel sint minores, eruntq; λ 20. I. bf, bg minores, ipsis nl, nk, id est, ipsi al m, vel fg. quod iterum absurdum.

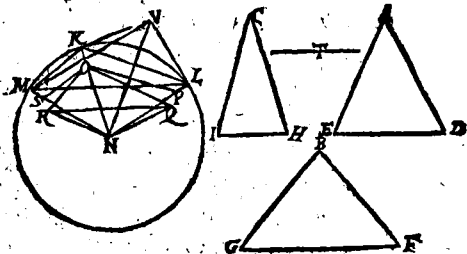


Postremò cadat centrum n extra triangulum klm, quod fit, si angulus k sit obtusus: sintq; ad, ae, vel aequales ipsis nl, nk; erunt propter bases de, kl, aequales, etiam anguli a & knl aequales δ . & angulus c angulo knm, totusq; lnm, angulus a & c, qui duo simul ex hypothesi, tertio b sunt majores. Rursus, idē angulus lnm propter bases lm & fg aequales, aequalis est angulo b, contra hypothesin. Vel minores sint ad, ae, quàm ln, nk; abscissis aequalibus no, np, μ 23. I. erit ut in primo casu, angulus a major angulo onp, angulusq; c major quàm angulus knm. Itaq; fiat μ angulo a aequalis onq, & angulo c angulus onr, ponanturq; nq, nr aequales ipsis ad, ae, & connectantur oq, or; cadetq; oq ν 29. I. infra op, quia per o, p, q ex centro n transit circulus, & quare cum angulus, pon, aequalis sit angulo nkl, externus interno, erit angulus qon, minor angulo nkl. Eodemq; modo nor minor, quàm nkm. Si ducatur os parallela ipsi km, Totus ergò lkm, toto qor, major erit.
Sunt

§ 4. I.

o 24. I.

Sunt autem in triangulis onq & dac aequalium laterum, & anguli aequales a & o nq etiam bases de & oq & aequales, id est, oq & lk , & sit or & km . Connexa jam recta qr , quoniam in triangulis qor & lkm , aequalia sunt latera kl , km ; ipsis oq , or & angulus qor minor quam lkm : o erit basis lm , id est, fg , major basi qr . Sed quia bf , bg , sunt aequalia ipsis nq , nr ; basis autem fg , major basi qr : Erit angulus b major angulo qnr . Rursus, quia anguli onq & a ; item onr & c facti sunt aequales: erit totus qnr aequalis duobus, a & c . Sed a & c ponuntur majores angulo b : Igitur & qn reodem b , major est, qui tamen modo ipso qnr major est demonstratus. Itaque, majores esse oportet ad , ae ipsis nk , nl .



Iam cum recta ad , ae majores sint rectis nk el ubicunque centrum trianguli existat, possit recta ad plus quam recta nk , quadrato linea t per lemma

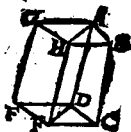
lemma propositionis 15. X , ita ut quadratum
 recta a ad aequale sit quadratis rectarum n k . Et
 ex centro n π excutetur n u , ad planum circuli
 k l m aequalis ipfit, connectanturq; u k , u l , u m . π 12. XI.
 Quoniam ergo n u est recta ad planum k l m ;
 recta etiam q erit ad rectas n k , n l , n m ; ac pro- p 3. XI.
 inde quadratum recta u k σ aequale quadratis σ 47. I.
 rectarum k n , n l . Cumq; σ quadratum a d a-
 quale sit, ex constructione, iisdem quadratis k n ,
 n u , erunt ergo u k σ a quadrata aequalia, i-
 pseq; recta u k , a d aequales. Rursus, quia latera
 u n , l n , trianguli u n k aequalia sunt lateribus
 u n , l n , trianguli u n l , σ anguli ipsius conten-
 ti u n k , u n l recti: Erunt bases u k , u l ζ aequa-
 les, ut σ u m . Sunt ergo tres, u k , u l , u m ,
 aequales a d ; ipsis etiam a e , b f , b g , c h , c i , a-
 quales: adeoq; in triangulis u k l , l u m , k u m ,
 aequalium laterum σ basium, cum triangulis
 d a e , f b g , h c i : erunt σ anguli a , b , c anguli
 ad u d aequales; ipseq; angulus solidus u , tribus
 illis angulis continetur, quod erat propositum.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 21.

Si solidum a b , e f , parallelis planis a e ,
 e f , f b , b a , a f , b e contineatur; adversa il-
 lius plana parallelogramma, sunt similia
 & aequalia.

Cum



a16. XI.

Cum enim parallela plana a f, b e secentur
plano a c: α erunt communes sectiones a b, c d
parallela. Similiter cum plana a f, b e secentur
plano a c; erunt communes ipsorum sectiones a d,
b c parallela; & sic figura quadrilatera a b c d
est parallelogramma, adeoq; & reliqua omnes.
Sed & opposita parallelogramma sunt similia

E n. XI.

& aequalia. Cum enim recta a b, b h, parallela
sint rectis d c, c e in opposito plano; β erunt a b h,
b c e anguli aequales, & sic etiam reliqui anguli
parallelogrammi b g reliquis parallelogrammi
c f. Cumq; a b ipsi d c in parallelogrammo a c:
& b h ipsi c e in parallelogrammo b' c aequalis γ
sit: erit, ut a b a d b h; ita d c a d c c: ac propter-
ea, ut b h a d h g, ita c e a d c f, Obeandem cau-
sam erunt latera parallelogrammorum b g, c f

734. I.

circa aequales angulos proportionalia & paral-
lelogramma ipsa similia. Ductis jam diametris
a h, d e; cum in triangulis a b h, & d c e γ aequa-
lia sint latera a b, b h lateribus d c, c e, & an-
gulus a b h, angulo d c e: erunt tota triangu-
la aequalia, ipsorumq; dupla parallelogramma
b g, c f aequalia. Idem de oppositis reliquis

84. I.

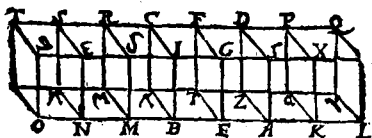
paral-

parallelogrammis demonstrabitur, quod & similia & aequalia inter se sint.

PROPOS : XXV.

Theorema 22.

Si solidum parallelepipedum ab cd , plano ef secetur adversis ad bc planis parallelo; erit, quemadmodum basis ag ad basim gb , ita solidum $aefd$, ad solidum $bcfe$.



Intelligatur parallelepipedum ab cd utringque productū, sumanturque in a b , utringque protracta, quocumque recta ak , kl ipsi ae : & quocumque recta bm , no ipsi eb aequales: ducanturque per puncta k , l , m , n , o plana akp , $lqmr$, ns , ots , parallela planis ad , ef , bc . Quoniam igitur solidum $aefd$ continetur planis parallelis ex hypothefi; ipsum erit parallelepipedum, ex definitione; & habebitque plana opposita parallelogramma similia; ut & reliqua omnia $akpd$, $klqp$, $ebcf$, $bmrc$, $mnsr$, $nots$, $elqf$, $eotf$.

Sed

E 36.I.

y 29.I.

Propo. defin.

IX.

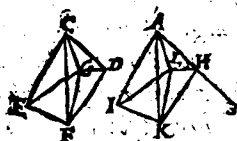
Sed cum parallelogramma ag, ku , lx super aqualibus basibus a, e , ak , kl sint & aequalia similiaq; propter angulos & aequales, & latera circum illos aequalia & proportionalia erunt. Sic aequalia & similia sunt parallelogramma ay, kz , la . Itaq; cum & aequalia & similia sint parallelogramma ad, kp, lq ; erunt tria plana ag, ay, ad solidi ae, fd , aequalia & similia tribus planis ku, kz, kp , solidi ak, pd : bisce vel tribus in uno quoque solido planis opposita sunt aequalia & similia, nempe ag ipsi z, f , ay , ipsi u, f , & ad ipsi e, f . Itaq; & aequalia sunt solida ae, fd , ak, pd, kl, qp . Eademq; ratione & $e, b, c, f, b, m, rc, m, ns, r, no, ts$. Quare quam multiplex est basis lg , basis ag , tam multiplex erit solidum le, f, q , solidi ae, fd , & quam multiplex basis og , basis bg , tam multiplex solidum oe, f, t solidi b, e, f, c . Quoniam verò si basis lg , aequalis est basi og ; aequale etiam est solidum le, f, q solidum oe, f, d ; quia basibus lg, og existentibus aequalibus, aequalia quoq; sunt & similia sex parallelogramma solidi oe, f, t : Si autem basis est maior base, solidum quoq; solido majus est, & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione. Erit ergò, ut basis ag prima magnitudo, ad basin bg , secundam magnitudinem; Ita solidum a, f, c, d , tertia magnitudo; ad solidum b, e, f, c , quartam. Eadem ratione demonstrare esse solidum ad solidum, ut basis dy ab basin cy ; &

et y ; & ut basis ay , ad basin by ; & ut basis bg ad basin cg .

PROPOSITIO XXVI.

Problema 4.

Ad datam rectam ab , ejusq; punctum a , angulum solidum constituere, angulo solido dato c æqualem.



Ex f ad planū per cd
 c & ductū perpendicularis
 a fg erigatur;
 cōnectanturq; df , dg ,
 ef , eg , cg ; & abscis-

an. XI.

β 23. I.

sa ah æqualis cd , & fiat angulus hai , angulo
 dce , æqualis; & recta ai , recta ce æqualia. Ite-
 rumq; in plano per ah , ai ductum, constituatur
 angulus hal , æqualis angulo dce , & al ipsi cg
 Sed ex l ad planum, in quo sunt ah , al , ai , y eri-
 gatur perpendicularis lk , qua ipsi fg ponatur æ-
 qualis; & conjungatur recta ka . Erit angulus so-
 lidus a , contentus tribus planis hak , hai & kai
 æqualis solido dato c . Connexis enim rectis hk ,
 hl , ik , il , cum lateribus ah , al , trianguli ahl , æqua-
 lia sint lateribus cd , cg trianguli cdg ; anguliq;
 hal & dce æquales ex constructione: & erunt
 bases hl , dg æquales. Rursus ablati æqualibus
 angulis hal & dce , ex æqualib; hai , dce ; relictis

γ 12. XI.

δ 4. I.

Hb

æqua

34. I.

8. I.

aqualibus $\angle a i$ & $g c f$ qui comprehenduntur a qualibus lateribus $a b$, $a i$ ipsis $c g$, $c e$: Erunt $\angle l i$ & $g e d$ aequales. Et sic in triangulis rectangulis $h l k$, $d g f$, d aequales bases, $h k$, & $d f$; iterumque in triangulis rectangulis $a h k$, & $c d f$ aequales bases $a k$, $c f$ Erunt ergo, & $h a k$ & $d c f$ anguli aequales, & Denique etiam in rectangulis $k l i$ & $f g e$ bases $k i$ & $f e$ aequales: iterumque in triangulis $k a i$, & $f c e$, aequalium laterum & basium, & aequales erunt anguli $k a i$, & $f c e$. Sunt ergo tres anguli plani solidum angulum a includentes, aequales tribus planis angulum solidum c includentibus: Et solidus a solido c aequalis. Quod erat faciendum.

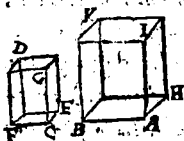
PROPOS. : XXVII.

Problema 5.

A data recta linea $a b$, dato solido $c d$ parallelepipedo, simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

26. XI.

32. VI.



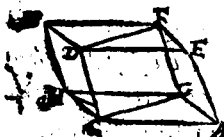
Ad recta $a b$ punctum a , fiat α angulus solidus aequalis angulo solido c , ut tres anguli plani $h a i$, $i a b$, $b a h$ aequales sint tribus angulis planis $e c g$, $g c f$, $f c e$. Deinde fiat β ut $c f$ ad $c g$, sic $a b$ ad $a i$; & ut $c g$ ad $c e$, ita $a i$ ad $a h$: erit

erit ex equo, ut ct ad ce , ita $abad$ ad ah : Postea
 parallelogrammis completis absolvatur. paral-
 lelepipedum ak , quod parallelepipedo cd simile
 similiterq; positum erit. Cum enim equales sint $\gamma 24. XI.$
 anguli bah , & fce , lateraq; ba , ah , praportio- $\delta 9. def.$
 nalia lateribus fc , cf . Erunt parallelogramma $XI.$
 hb et , Similia similiterq; posita: itemq; hi ,
 eg , & ib , gf : quibus tribus similibus similiter-
 que positis inter se erunt & oppositarum plana
 similia similiterq; posita: & δ sic solida ak , cd ,
 similia similiterq; posita.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema 23.

Si solidum parallelepipedum ab
 plano effecetur per diagonios cg , df ,
 adversorum planorum ab , cb : bifari-
 am secabitur solidum ab ab ipso pla-
 na bc .



Quoniam utraq; cd , gf
 parallela & a equalis est $\alpha 34. I.$
 ipsi ae , erunt etiam in-
 ter & se parallelae & aqua-
 les, & ipsasq; connectentes

cg , df , parallela, per quas ductum planum cf , $\beta 9. XI.$
 bifariam secat ipsum parallelepipedum ab . $\gamma 33. I.$

Ab a Cam

§ 24. XI.

Cum enim plana ab , eb sint parallelogramma equalia & similia: erunt & eorum dimidia, seu triacula agc , gcb ; efd , fdb , equalia, & propter latera circum aequales angulos proportionalia etiam & similia. Cum item & parallelo-

§ 6. VI.

grammum at , & aequale sit, & simile parallelogrammo cb : & ad ipsi gb . & cf commune; erunt duo triacula agc , efd , & parallelogramma af , ad , cf , prismatibus $acgfd$, equalia & similia duobus triangulis, hcg , $b'df$, & parallelogrammis cb ; bg , cf prismatibus $hgdc$, bf .

§ 10. def.
X.

Ipsa quoque prismata inter se & equalia. Quia cum componantur parallelepipedum ab ; Erit ipsum bifariam sectum plano cf .

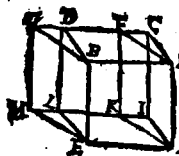
P R O P O S : XXIX.

Theorema 24.

Solida parallelepipeda $acde$, $afge$ super eandem basin ab constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes ai , ak , el , em , & bc , bf , hd , bg , lineæ in iisdem collocantur rectis lineis im & cg ; sunt inter se equalia.

a 35. I.

Quia enim & equalia sunt parallelogramma ah , am , erunt communi trapezio $akle$ ablato, & equalia triacula aik , elm . Quia item equalia sunt



¶ sunt omnia latera triangulorum aik & hcf; item elm

& b dg; erunt γ aquiangula, & propter latera circum aequales angulos δ proportionalia, inter se similia. & Rur-

sus & parallelogramma accd inter se sunt aequalia & similia, ζ sicut & if, & lg propter aequales bases ik, lm; adeoq; omnia plana Prismatis aik, fch, aequalia sunt omnibus planis Prismatis elm, g db; ipsaq; prismata aequalia. Quibus si addatur commune solidum ahfk, l dbe; parallelepipeda super eadem basi in eadem altitudine fiunt aequalia.

334. I.

78. I.

4. VI.

24. XI.

36. I.

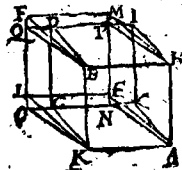
10. def.

XI.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 25.

Solida parallelepipeda aik, amfk super eandem basin ab constituta & in eadem altitudine, quorum insistentes ac, ae, kg, kl; bi, bm, bd, bf; lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis cg, id: inter se sunt æqualia.



Quia enim plana cd, ef, opposita basi ab, sunt in eodem plano ob eandem parallelepipedorum altitudinem: pertractis in eodem

H b 3

plano

α 34. I. β 33. I. γ 92. XI.

plano rectis $c g, i d$; illam quidem $e m$ & f pro-
tracta secant in n & o ; hanc verò $i d$ in $p u$ $i d$
 p, q : junganturq; recta $a n, k o, h p, b q$. Quia
 igitur $p q, m f$ recta sunt aequales & paralle-
 le, sicut & $m f, h b$: erunt & $p q, h b$ aequales &
 & parallela, & $h p q b$ est parallelogrammum.
 Sicut eadem de causa & $h p n a, a n o k, k o$
 $q b$. Est autem & $n o q p$ parallelogrammum.
 Igitur $a p q k$ est parallelepipedum. Cui aequa-
 le γ est parallelepipedum $a i d k$, propter eandem
 basin $a b$ & lineas insistentes in iisdem rectis $c o,$
 $i q$. Sed eidem $a p q k$ propter eandem basin $a b,$
 & lineas insistentes in iisdem rectis $n m, o f$, a-
 quale est parallelepipedum $a m f k$. Igitur $a i d k$
 & $a m f k$ etiam inter se sunt aequalia.

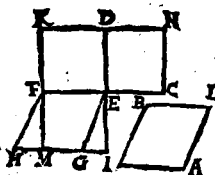
PROPOSITIO XXXI.

Theorema 26.

Solida parallelepipeda super æ-
 quales bases $a b, c d$, constituta, & in
 eadem altitudine; æqualia inter se
 sunt.

Protractis duobus lateribus $d e, c e$ ad partes
 c , fiat angulus $f e g$ aequalis angulo i : recta $e f,$
 recta $l b$; & recta $e g$ recta $l a$: Erit paralle-
 logrammum $e h$ aequale & simile paralleto-
 grammum $a b$. Conveniat autem producta $h g$

sum



cum de ini, & cōple-
tur parallelogrammū
ik. Iam concipiantur
super bases eh, if, ek
aqué alta parallelepi-
da ipsis super ab, cd
constructis parallelepi-

pedis, ut omnium insistentes lineæ ad bases sine
perpendiculares. Erunt super ab & eh propter
aqualia & similia plana inter se æqualia; it-
emq; super eh, & if, æqualia. Cumq; paralle-
logramma eh, cd, & fi sint γ æqualia, eidemq;
eh æquale cd; erūt & c a & if æqualia δ Erit i-
gitur, ut if, ad ek, ita cd ad ek. Sed, ut if ad
ek, ita est solidum super if, ad solidum super ek:
quia planum super ef, secans totum solidum su-
per ik, est parallelum planis aduersis super dk,
im, erectis. Eademq; ratione ut cd ad ek, ita
solidum super cd ad solidum super ek. Itaq; e-
rit, ut solidum super if, ad solidum super ek, &
solidum super cd, ad solidum super ek: Eruntq;
solida super if & cd ζ æqualia. Sed parallepi-
pedum super if est æquale parallelepipedo super
ab. Aequalia igitur erunt & parallelepipeda
super ab, cd.

α10. def.

XI.

β19. XI.

γ35. I.

δ7. V.

ε25. XI.

ζ9. V.

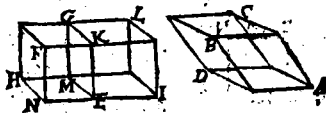
PROPOSITIO XXXII.

Theorema 27.

Solida parallelepipeda abcd, efgb, sub ea-
dem altitudine, inter se sunt, ut bases, ab, ef.

Hb 4

super



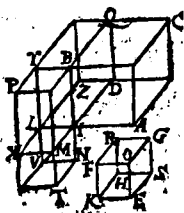
α 45. I.
β 31. XI.
γ 7. XI.
δ 25. XI.

Super rectam ek α constituatur parallelogrammum ik , aequale parallelogrammo ab , in angulo iek , aequali ipsi $en f$: ita, ut if fiat unum parallelogrammum. Completo autem parallelepipedo $iflh$; erunt $abcd$ & $iklm$, aequalia β parallelepipeda. γ Erit igitur ut solidum $iklm$, ad solidum $efgh$. δ Sed solidum $iklm$, ad solidum $efgh$ est, ut basis ik , vel ipsi aequalis ab , ad basin ef . Igitur etiam solidum $abcd$, ad solidum $efgh$, est ut basis ab , ad basin ef .

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 28.

Similia solida parallelepipeda $abcd$, $efgh$ inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum aie .



Producatur ai , ad l , ut il sit aequalis ipsi e vel gr . Item di ad m , ut im sit aequalis ipsi h vel go : Item bi ad n ; ut in sit aequalis ipsi k vel gs . Et completis parallelogrammis lm , ln , ita perficia-

perficiatur parallelepipedum $txiu$. Erunt pa-
 rallelogramma propter angulos & latera equa-
 lia ix & gf , ln & rs , it & ge similia & equalia;
 quibus cum sua opposita in illis parallelepipedis $\alpha 24. XI.$
 $efgh$, & $txiu$ sint α similia & equalia; erunt $\beta 10. def.$
 Ipsa illa parallelepipeda inter se equalia & si- XL
 milia. Rursus completis parallelogrammis
 mb , bl , ml , perficiatur parallelepipedum mp ;
 bl . Item completis parallelogrammis iy , dl , iq
 perficiatur parallelepipedum $iyqz$. Quoniam
 ergo ex similitudine parallelepipedorum $abcd$, $\gamma 1. VI.$
 $efgh$, est; ut ai ad ek , id est, il ; ita di ad hk
 vel im : & bi ad fk vel in . γ Sed ut ai ad il ,
 ita est parallelogrammum $adad$ dl ; & ut di ad
 im , ita parallelogrammum $dlad$ lm ; & ut bi
 ad in , ita parallelogrammum $blad$ ln . Erit ergo $\delta 32. XI.$
 ut ad ad dl , ita dl ad lm ; & bl ad lm . δ Sed ut $\eta 10. def.$
 basis ad ad basin dl , ita est parallelepipedum XL
 $adcb$, ad parallelepipedum $dlyq$. Atque ut
 basis dl ad basin lm , ita parallelepipedum $dlyq$
 ad parallelepipedum $lmbp$: & ut bases bl , ln ;
 Ita parallelepipeda $lmbp$: & $nltx$. Quare e-
 rit, ut parallelepipedum $adcb$ ad parallelepipedum
 $dlyq$; ita parallelepipedum $dlyq$ ad $blin$ p .
 & hoc ad $lntx$. Quare quatuor sunt continue
 proportionales quantitates $adcb$, $dlyq$, $lmbp$,
 $lntx$: & proportio prima $adcb$ ad quartam
 $lntx$, i. e. $adefgh$, est triplicata, proportio
 prima $adcb$, ad secundam $dlyq$. δ Et autem $adcb$

addlyq, ita est basis ad ad basin d l; & ut a d ad
d l, ita est a i a d i l, id est e k. Est ergo proportio
parallelepipedorum ad c b & e f g h, triplicata,
proportionis homologorum laterum a i & e k.

Corollarium.

Datis quatuor lineis continuè proportio-
nalibus, ut est prima ad quartam: ita sunt
parallelepipeda primæ ad quartæ, similia si-
militerque descripta.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 29.

Equalium solidorum ad c b, e b g f, paralle-
lepipedorum bases ab, eb, & altitudines reci-
procantur, & quorum solidorum parallele-
pipedorum bases & altitudines reciprocantur,
illa sunt æqualia.



Ad bases ab, eh, sunt insistentes
ai, ek perpendiculares, quæ sunt
parallelepipedorum datorum ca-
altitudines: quæ si fuerint æ-
quales, erunt & propter ipsa

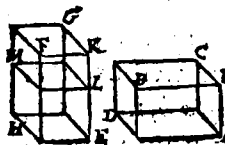
per 4.
defin. VI.

β 31. XI.
γ 7. V.

parallelepipeda æqualia, ipsa bases ab, eh æqua-
les s. Adeoq, ut basis a d ad basin eh; ita e k ad
a i, id est, bases & altitudines sunt reciproca.

Si autem altitudines sint inæquales, ex ek ma-
joro abscindatur ipsi a i æqualis el, & per l ipsi
basi eh ducatur planum parallelum l m. Quoni-
am ergo æqualia sunt solida a c d b & eh g f,
erit ut acdb, ad ehlm; ita ehgf ad f hlm. d Ve

autem



autem solidum ad cb ad
solidum $ehlm$; ita c basis
ad basin eh , propter alti-
tudines ai , el aequales.

Ad Atq , ut $chgf$ ad $ghlm$, § 32. XI.
ita basis kn ad basin ln .

Igitur, ut basis ad ad basin eh ; ita est kn ad lm .
Et sic ek ad el , id est, ad ai ipsi aequalē. Quare est
ut basis ad , ad basin eh ; ita altitudo ek , ad alti-
tudinē ei , id est, reciproca sunt bases altitudinib.
Sint jam bases & altitudines reciproca, erunt etiā
parallelepipeda aequalia. Si enim altitudines ek ,
& ai sint aequales, cum sit, ut altitudo ad altitu-
dinē, ita basis ad basin: erunt etiam bases ad , eh ,
aequales & sic parallelepipeda ipsa aequae alta a-
qualia. Quod si inaequales sint altitudines, ab-
scindatur, ut antea, aequalis. Quoniam ergo est ex
hypothesi, ut basis ad ad basin eh ; sit altitudo ek
ad altitudinem ai , id est, el . Et autē est basis ad
ad basin eh , ita est solidū ad cb ad solidū $ehlm$,
propter altitudines el , ai aequales. Et ut ek ad
 el , ita kn ad ln . Et autē kn ad ln , ita est solidū
 $ehgf$, ad solidum $ehln$. Ideoque erit, ut solidum
ad cb , ad solidum $ehlm$; ita $ehgf$, ad $ghlm$. Et sic
ad cb & $ehgf$ sunt aequalia. Poterat idem ostē-
di si insistentes, vel altitudines parallelepipedo-
rum non sint perpendiculares, si deinde demic-
tantur perpendiculares. Eadem hac etiam de
prismatib. iisdem servatis principijs vera sunt.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 30.

Si

Si fuerint duo plani anguli æquales bac, def , quorum verticibus a, b , sublimes rectæ lineæ ag, db , insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales bag & cag utrumque utrique. In sublimibus autem lineis ad, gb quælibet sumpta fuerint puncta g, b , & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli bac, def primum positi, ductæ fuerint perpendiculares gi, bk ; à punctis verò i, k quæ in planis à perpendicularibus gi, bk fiunt ad angulos bac, def primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ ia, kd ; hæc ik, kd cum sublimibus ag, db æquales angulos comprehendunt.



Si enim ag, dh , sunt inæquales, auferatur ex a ipsi dh æqualis al , & ex l ad planum bac demittatur perpendicularis lm . Quoniam igitur

¶ 6. XI.

gi, lm sunt ad idem planum perpendiculares, erunt æ parallelæ, & in eodẽ plano trianguli gai , cadetq; lm in rectam ai . Iam ducantur ex punctis m, k ad rectas ab, ac, de, df perpendiculares.

lateres mb, mc, ke, kf , & connectantur rectæ abc ,
 bl, c, lcf, eh, hf . Et quia lm est recta ad pla-
 num anguli bac , ipsa rectum argulum efficiet β
 cum recta am in eodem plano ducta. Quare β 3. def.
 quadratum al erit γ aequale quadratis am, lm . XI.
 Sed quadratum am est γ aequale quadratis ac , γ 47. L.
 cm . Igitur quadratum al aequale est quadratis δ 48. I.
 ac, cm, ml . At quadratis cm, ml aequale est ϵ 47. L.
 quadratum cl . Quia, cm, l angulus est β rectus. ζ 4. I.
 Igitur quadratum al aequale est quadratis ac, cl . η 8. L.
 Ideoq; ac, l angulus erit δ rectus. Rursus, quia
 quadratum ac aequale est quadratis am, ml : Sed
 am, γ aequale est quadratis ab, bm : Igitur qua-
 dratum rectæ al , aequale est quadratis rectarum
 ab, bm, ml : at quadratis bm, ml aequale est
 quadratum bl . Ergo quadratum al aequale est
 quadratis ab, bl angulusq; abl erit δ rectus. Nec
 aliter anguli dfe, deh , ostenduntur recti. Quo-
 niam itaq; abl & ab anguli trianguli abl sunt
 æquales angulis dfe, hde , trianguli dfe ;
 Suntq; latera ac, dh æqualia, & erunt & reliqua
 latera ab, bl , reliquis lateribus dfe, hde æqua-
 lia. Eodemq; modo æquales erunt rectæ ac, cl ,
 rectis dfe, fh . Quare in triangulis abc, dfe
 æqualium laterum ab, ac , ipsis de, df , & an-
 gulorū bac ipsis edf ; Erunt & bases bc, ef in-
 ter se, & anguli abc, acb , angulis dfe, dfe ,
 æquales. Sunt autem & toti anguli abm
 acm

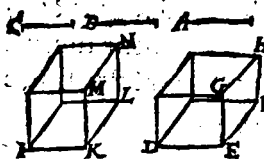
a & m *equales totis* $d e k$, $d f k$, *cum sint recti*. Itaque & *reliqui* $m b c$ & $m c b$, *reliquis* $k e f$, $k f e$, *erunt aequales; proptereaq;* *cum & latera* $b c$, $e f$ *sint ostensa equalia.* & *Erunt latera* $b m$, $c m$ *lateralib.* $e k$, $f k$ *equalia.* Quia ergo *latera* $a c$, $c m$ *equalia sunt laterib;* $d f$, $f k$, *anguliq;* $a c m$, $d f k$; *erunt & bases* $a m$, $d k$ *equales.* Cum autem *equales sint ostensa recta* $b l$, $e h$; *erunt & earum quadrata equalia.* Sed quia *quadratum* $b l$, *equale est quadratis* $b m$, $m l$; & *quadratum* $e h$, *quadratis* $e k$, $k h$: *Erunt & quadrata* $b m$, $m l$ *equalia quadratis* $e k$, $k h$. Ablatis ergo *quadratis* $b m$, $e k$ *equalibus, reliqua quadrata* $l m$ $h k$ *erunt equalia, recta* $l m$, $h k$ *equales.* Quamobrem *cum latera* $a l$, $a m$ *equalia sint lateribus* $d h$, $d k$; & *basis* $l m$, *basi* $h k$: *erunt & anguli* $l a m$, $h d k$ *equales.* Quod erat propositum.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 32.

Si tres rectæ lineæ a , b , c , *proportionales fuerint*, quod ex tribus his fit solidum *e* b *parallelepipedum, æquale est descripto à media linea* b *solido parallelepipedo, in*, quod *æquilaterum quidem sit, æquiangulum, verò prædicto.*

Cum



Cum enim sit, ut de
ad ik, ita km ad eg
(quia de ipsi a, &
ik, km, ipsi b; & eg
ipsi c sumta sunt ei
quales) & anguli deg,

α 14. IV.

ikm aequales: α Erunt parallelogramma dg,
im, equalia quia, latera habent circum aequales
angulos reciproca. Quoniam vero anguli plani
deg, ikm sunt aequales, quorum verticibus infi-
stunt sublimes linea aequales e, f, k, l, qua aqua-
les angulos comprehendunt cum lineis primò po-
sitis, utrumq; utriq; ex constructione: erunt
perpendiculares ex f, l, ad plana basium dg, im,
demissa, nimirum altitudines parallelepipedo-
rum dh, in, si bases sint dg, im inter se aqua-
les. β Quare parallelepipeda dh, in, propter ba-
ses dg, im aequales altitudines, inter se sunt γ a.
qualia. Quod erat propositum.

β 35. XI.

γ 31. XI.

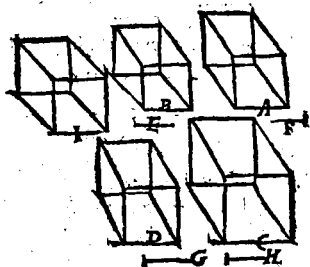
PROPOS: XXXVII.

Theorema 32.

Si quatuor rectæ lineæ a, b, c, d pro-
portionales fuerint, ut a ad b, ita b ad
c & solida parallelepipeda abcd, quæ
ab ipsis & similia & similiter de-
scribuntur, proportionalia erunt,
Et

386 EVCLIDIS ELEM.

& si solida parallelepipeda, quæ & similia similiterq; describuntur, fuerint proportionalia, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



33. XI.

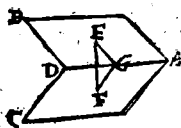
Cum eadem sit proportio a ad b , quæ c ad d , eadem quoq; erunt solidorum a ad b , & c ad d , in quia sunt proportionēs triplicatæ ejusdē proportionis. Contra cum a ad b , & b ad c solida habeant eandē proportionem triplicatam proportionis lineæ a ad b , & c ad d . Erunt etiam linearum a ad b & c ad d eadem proportionet.

PROPOS: XXXVIII.

Theorema 33.

Si planum ab , ad planum ac , rectum fuerit, & ab aliquo puncto e eorum, quæ in uno sunt planorum ab ad

ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit : in communem sectionem *ad* cadet planorum ducta perpendicularis.



Si ex puncto e dato in plano, demissa perpendicularis ad planum a c non cadit in communem sectionem a d, sed in punctum f extra

illum, ducatur ex e ad rectam a d perpendicularis e g, qua & ad planum a c & recta erit. Quare a 4. def. ex puncto c extra planum a c ducta sunt ad ipsum XI. planum a c duae perpendicularis e f, f g. Quod β 13. XI. absurdum.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si solidi parallelepipedum *ab* eorum, quae ex adverso planorum *ac*, *bd* latera bifariam secta sint in *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*; per sectiones autem plana *in*, *ko* sint extensa: communis sectio *rs* planorum, & solidi parallelepipedum diameter *ab* bifariam se mutuo secabunt.

234. I.

229. I.

24. I.

13. I.

14. I.

9. XI.

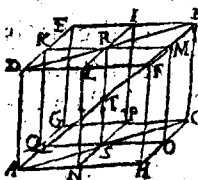
33. I.

7. XI.

29. & 15.

I.

26. I.



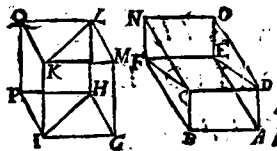
Connexis enim rectis rb , rd ; sa , sc , in triangulis aqs , cos , propter a equalia latera aq , qs , ipsis co , os , & angulum aqs β equalē alterno angulo cos :

Erunt & bases as , cs , γ a -
quales, anguliq; asr , & $cs o$ a quales. Sed asq
& aso sunt duobus rectis δ a quales: igitur & cso
& aqs . Ac propterea as , cs unam rectam lineam a
constituēt. Eodēq; modo a quales ostenduntur br ,
 dr ; & unam constituere rectam bd . Rursus, quia
utraq; ad , bc parallela est equalis recta fh ,
ob parallelogramma af , fc ; ipsa quoq; parallela &
 a quales ζ erunt. Quare & recta ac , bd , earū ex-
trema cōiungentes, parallela sūt & a quales ipse-
rumq; dimidia as , br a quales. Quia verò ac , bd
sunt parallela: δ erunt recta ab , rs in eodem cum
ipsis plano. Ideoq; se mutuò secabunt in puncto
 t . Cum autem duo anguli asr , ats , κ a quales
sint duobus angulis brt & ptr , & latera as late-
rib; r ; a erunt & reliqua latera ra , ts reliquis
 rb , tr a qualia: ac propterea ab , rs , se mutuò
bisariam secant in t . Quod erat propositū. Hinc
efficitur in omni parallelepipedo: Diametros o-
mnes se mutuò bisariam secare in uno pun-
cto, in quo bisariam dividuntur.

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

Si fuerint duo prismata $abcdef$, $gbiklm$, æqualis altitudinis; quorum hoc quidem habeat basin parallelogrammum $abcd$, illud verò triangulum gbi : duplum autem fuerit parallelogrammum $abcd$ trianguli gbi : æqualia erunt ipsa prismata.



Perficiatur enim parallelepipedum an , gq ; extensis triangularum planis, & perfectis parallelogrammum bn , ao ; gp mq : ac du-

ctum on , pq quæ æque alta sunt parallelepipedum cum ipsis prismatis. Quoniã igitur parallelogrammum gp , æ duplum est trianguli ghi . Sed & ac $\alpha 34$. I. parallelogrammum ejusdẽ trianguli ghi est duplum. Erant illa inter se æqualia: ipsa gq , parallelepipedum æquẽ alta super æqualib: basib: & æqualia $\beta 31$. XI: & ipsorum dimidia, quæ sunt data prismata, æqualia. γ Quia parallelepipedum am , gk per diagonem cf , de , hi , lk planorum adversorũ secatur bifariã in bina videlicet prismata. Quod erat propositũ. Quæ demonstratio ostendit, propositionem tantummodo loqui de illis prismatis, quæ duo triangula habent opposita, quia jubet parallelepipedum compleri, quod non fieret, nisi utrumq; prisma opposita haberet triangula, quia jam antea esset completum, parallelepipedum. **ELI.**



E U C L I D I S

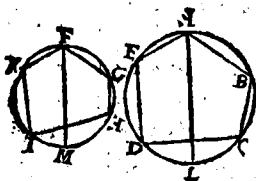
E L E M E N T O - R U M

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

QUæ in circulis polygona similia $abcde$, $fgbik$, inter se sunt, ut à diametris ah , fm quadrata



Angulis aequalibus abc , fgb , subtendantur rectæ ac , fh ; & connectantur rectæ bl , gm . Quoniam ob similitudinem poly-

gonorum est, ut $abadbc$; sic $fgadgh$: erunt æ triangula abc , fgb , æquiangula. Est autem angulus acb , & æqualis angulo alb ; & fhg , ipsi fm . Erunt igitur & alb & fm æquales. Sed cum & anguli ab , fm , sint & æquales,

α 6. VI.

β 21. III.

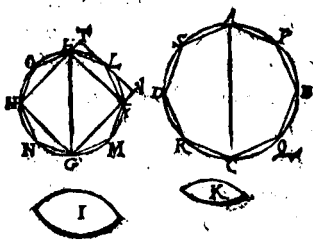
γ 31. III.

tanquam in semicirculo recti: δ erunt & reliquae δ 32. I.
 ba , gf m e g uales. e Erit ergo, ut a l ad ab , ϵ 4. VI.
 ita f m ad fg . Et permutando, ut a l ad f m ; ζ 22. VI.
 Ita a b , ad fg . ζ Igitur est, ut quadratum ex a l ,
 ad quadratum ex f m : Ita polygonum $ab c d e$,
 super a b , ad polygonum $f g h i k$ super $f g$; cum
 tam quadrata quam polygona sint figurae similes.

PROPOS. II.

Theorema 2.

Circuli $ab c d$, $e f g h$, inter se sunt, quem-
 admodum a diametris ac , eb quadrata.



Sin minus, esto, ut quadratum diametri ac ,
 ad quadratum diametri eg ; ita circulus $ab c d$,
 ad aliam magnitudinem, i . que vel major vel mi-
 nor erit circulo $e f g h$. Si enim esset aequalis, α ha- α 7. V.
 berent circuli $ab c d$, & $e f g h$ eam rationem,
 quam diametri ac , eg ; quod tamen nō concedi-

tur. Sit ergo i minor circulo $efgh$, magnitudine k ut quidem i & k simul sint circulo $efgh$, aequalis. Circulo ergo $efgh$ inscribatur quadratum $efgh$, quod quia quadrati, circulo eidem circumscripti, β dimidium est, majus erit semicirculo. Iam his secetur peripheria $e f, fg, gh, he$, in punctis l, m, n, o ; adjungaturque recta $le, lf, mf, mg, ng, nh, ho, oe$. Ducaturque per l . Tangens tu , quae ipse e ferit parallela, occurrens rectis he, gf . Protractis in t & p . Quoniam itaque triangulum elf , β dimidium est parallelogrammi $tefu$, majus erit dimidio segmenti elf : & sic reliqua singula triangula dimidiis segmentorum sunt majora, & omnia simul majora dimidio omnium segmentorum simul. Eodemque modo bisectis bisce peripheriis el, lf , iterum adjuncta lineae efficerentur triangula dimidiis segmentorum majora. Quoniam autem si a circulo $efgh$, auferatur plus dimidio, nempe quadratum $efgh$, & a reliquis segmentis rursum plus dimidio, nempe triangula elf, fmg : & in hunc modum semper fiat detractio, tandem a relinqueretur minor magnitudo quam est k excessus inter circumulum $efgh$, & magnitudinem i . Sint itaque segmenta circuli relicta el, lf, fm , simul sumta minora magnitudine k . Cum ergo circulus $efgh$, ponatur aequalis ipsis i & k : simul segmenta illa minora magnitudine k , subtrahenda ex circulo, relinquunt polygonum $elfmgnh o$; majus magnitudine reliqua i . Huic polygono simile inscribatur.

β 9. IV.

γ 27. III.

δ 41. I.

ϵ 1. X.

batur circulo $abcd$. Quoniam haec polygoni inter se sunt ut ex eorundem circulorum diametris quadrata, id est, n : ut circulus $abcd$ ad i sed polygonum $apbqcrds$ minus est circulo $abcd$. θ I. pot. igitur & polygonum, $el\epsilon m, gnho$, minus erit θ 14. V. quam i : quod tamen modo demonstratum est majus, Quod absurdum. Deinde magnitudo i ponatur major circulo $efgh$. Cum itaque ponatur $abcd$ circulus ad i ut quadrata diametrorum ac & eg erit & convertendo i ad circulum $abcd$, ut ex eg & ac diametrorum quadrata. Ponatur autem circulus $efgh$, ad magnitudinem k , ut i ad circulum $abcd$. Quoniam ergo i est major circulo $efgh$, major etiam θ erit circulus $abcd$ magnitudine k . Itaque erit ut diametrorum eg , ac , quadrata, ita circulus $efgh$, ad magnitudinem k minorem circulo $abcd$. Quod absurdum. Quia ostensum modo est, non posse esse, ut quadratum diametri ad quadratum diametri; ita circulum ad magnitudinem minorem circulo. Si patet etiam, nunquam habere posse quadrata duorum circulorum eandem rationem, quam circulus prior ad magnitudinem posteriori majori. Idem enim sequetur absurdum, ut quod quadratum diametri ac ad quadratum diametri eg , habeat eandem rationem, quam circulus $abcd$ ad magnitudinem circulo $efgh$ minorem: quod falsum esse jam constat. Cum ergo magnitudine i , neque major neque minor esse possit circulus $efgh$, patet, eandem esse

circularum rationem, quæ & ex ipsorum diametru quadratorum. Hinc etiam patet.

Corollarium.

Esse circulum ad circulum, ut polygona similia ipsis inscripta, quia ipsa quoq; sunt, ut ex diametris quadrata.

PROPOS. III.

Theorema 3.

Omnis Pyramis $abcd$, triangularem habens basin abc dividitur in duas pyramides $aegh$, $hikd$ æquales & similes inter se, triangulares habentes bases aeg , bik , & similes toti, & in duo prismata $ebfgbi$, $cfg bik$ æqualia; quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.



*Omnialatem pyramidis
secetur bisariam in e' , f , g ,
 h , i , k , connectantur g, e, f ,
 $f, g, g, e, h, i, k, k, h, h, e$,
 e, i, i, f : erunt dua pyrami-*

des $aegh$, $hikd$, & æquales & similes inter se

&

Et toti: Sicut & duo prismata $acbfghi, cfbghi$
 ik inter se equalia, & majora dimidio totius pyra-
 midis. Quia enim ad, bd , latera secta sunt bifa-
 riam, & sic proportionaliter, ae erunt hi, ab , $\alpha 2. VI.$
 parallela, & eadem ratione parallela $ik, bc: hk,$
 $ac: eg, be: ef, ac: fg, ab: eh, bd: ei, ad:$
 $if, dc: hg, dc: \beta$ Sunt autem & fg, hi , inter $\beta 9. XI.$
 se parallela, quia eidem ab , parallela sunt. Sicut
 & gh, fi , quia eidem dc . Sunt ergo parallelo-
 grammata $acih, hebi, idhe, ebfh, ghkc,$
 $ckif, fghi$. Quia verò he, hg rectis db, bc
 sunt parallela: $erunt$ anguli ehg, bdc $\gamma 10. XI.$
 aequales: sicut & heg, dbc & hge, dcg . δ Sunt ergo $\delta 4. VI.$
 triangulorum heg, dbc latera circum aequales
 angulos proportionalia, & triangula similia. Sed
 & triangula hae, hag, aeg ; triangulis dab
 dac, abc sunt δ similia: Sunt ergo pyramides
 $aegh. abcd$ δ similes. Rursus, quia rectae $hi, bk,$ $\gamma 9. def. XI.$
 rectae ab, ac , sunt parallela; erunt anguli $ihk,$
 bac aequales: γ Itemque $hik, abc; hki, acb$.
 Quare triangula hik, abc habent circum a-
 quales angulos latera proportionalia, & sunt si-
 milia. δ Sunt autem & triangula $dhi, dik,$
 dkh , triangulis dab, dbc, dca similia: Itaque
 pyramides $hikd, abcd$ sunt δ similes. Quo-
 niam autem triangula ahc, hdi , δ sunt similia
 triangula adb ; ipsa etiam inter se ζ erunt simi- $\zeta 21. VI.$
 lia. Et quia super aequales rectas ah, hd , sunt
 constituta: η erunt etiam equalia. Ita etiam η Lemma

34. I.
220. def.
XI.

28. I.

15. XI.

41. I.
40. XI.

ahg, hdk , triangula similia, super aequales bases ah, hd constituta sunt etiam aequalia; ut & aeg & hik , super ae & hi aequales. Et denique ehg, idk , super he, di aequales, aequalia sunt. Itaque Pyramides similes $aegh$, & $hikd$, etiam sunt aequales. Rursus quia eh, hg, ge , sunt aequales & parallela rectis bi, if, fb ; λ erunt triangula ehg, bif , equiangula inter se & aequalia & similia. μ Sunt etiam parallela, quia eh, hg , per quas planum ehg est ductum, parallela sunt rectis bi, if , per quas planum bif , est ductum. Igitur solidum bif, ghe , sub duobus his triangulis ex adverso aequalibus parallelis & similibus, & tribus parallelogrammis $egfb, behi, ifgh$, contentum est prisma. Eodemque modo propter triangula cfg, hik , ex adverso λ aequalia parallela & μ similia, & propter parallelogramma $cfik, khgc, ifgh$, quibus continetur; solidum cfg, hrk , est prisma. Quod cum cum priore bif, ghe sit ejusdem altitudinis, & pote inter plana parallela bce, hik & parallelogrammum $ebfg$ est & duplum trianguli cfg , ξ erunt haec inter se aequalia. Denique, quia prisma $ebfghi$ majus est pyramide $ebfi$; totum parte, qua aequalis & similis est pyramidibus $aegh$ & $hikd$. Ex aequalitate & similitudine triangulorum. e. ut illa duo prismata pyramidibus $aegh$, & $hikd$ majore-

majora: adeoque excedet quidem dimidium pyramidis $abcd$: hac verò à dimidio ejus deficiet. Toto enim in partes inaequales diviso, dimidiū quidem superat pars major: sed à dimidio deficit minor.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si fuerint duæ pyramides $abcd$, $efgb$ ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases abc , efg ; Sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides $ailm$, $mnod$, & $eprs$, $stuv$, æquales inter se & similes toti & in duo prismata æqualia $ibklmn$, $cklmno$, & $pfqrst$, $gqrstu$, ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum $ailm$, $mnod$ & $eprs$, $stuv$, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idque semper fiat, erit, ut unius pyramidis $abcd$ basis abc , ad alterius pyramidis $efgb$ basin efg ; ita & omnia, quæ in una pyramide prismata ad omnia, quæ in altera pyramide prismata multitudine æqualia.

Con-



Constructiæ cum præcedente coniunctis. Cum ergo sit, ut bcd ad ck , ita efg ad gr . Quia utraq; bcd

4. VI.

efg linea est bifariam secta: α Sini autem abc , lkc : itemq; efg & rqq similia, similiterq; po-

12. VI.

sita; β erit, ut abc , ad lkc , ita efg ad rqq . Et permutando, ut abc , ad efg , ita lkc ad rqq .

5. VI.

Sed ut lkc ad rqq , ita est prisma $cklmno$, ad prisma $gqrst$; ita etiam prisma $ibklmn$, ad prisma $pqrst$, tanquam illis æqualia. Et ut

unum prisma $ibklmn$, ad unum prisma $pqrst$: γ ita sunt duo prismata $ibklmn$, $cklmno$, ad duo prismata $pqrst$, $gkrtsu$. E-

runt igitur duo prismata in pyramide $abcd$, ad duo prismata in pyramide $efgh$, ut basis $abcd$ ad basin $efgh$. Eodem modo demonstratur, ita

esse duo prismata in pyramide $ailm$, mno , ad duo prismata in pyramide $ailm$, mno , ad bases harum epr & stu . Et sic

porro eadem adhibita divisione. Sed ut sunt illæ bases, ad has: ita est lkc , basis, illis æqualis, &

similis, ad basin rqq , his similem & æqualem, hoc est, ita est $abcd$ ad efg . Itaq; erunt quoq; pris-

mata cujuslibet pyramidis factæ, in pyramide $abcd$, ad prismata cujuslibet pyramidis factæ in py-

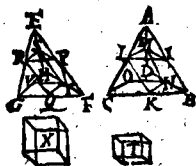
ramide $efgh$, ut basis abc , ad basin efg :

at propterea erunt etiam, ut prismata pyramidis
 $abcd$, ad prismata pyramidis $efgh$: ita prismata
 tam pyramidis $ailm$, ad prismata pyramidis
 $eprs$, quàm prismata pyramidis $mno d$, ad
 prismata pyramidis $stuh$: & sic deinceps. Qua-
 re, cum sint, ut duo prismata pyramidis $abcd$, γ 12. V.
 ad duo prismata pyramidis $efgh$: ita omnia
 prismata in pyramidibus $abcd$, $ailm$, $mno d$
 simul, ad omnia prismata in pyramidibus $efgh$,
 $eprs$, $stuh$ simul: si bac illis multitudine sint æ-
 qualia. Erunt etiam, ut basis abc , ad basin efg ;
 ita omnia prismata in pyramide $abcd$, ad o-
 mnia prismata in pyramide $efgh$. Quod erat
 propositum.

PROPOS. V.

Theorema 5.

Sub eadem altitudine existentes pyra-
 mides $abcd$, $efgh$, & triangulates habentes
 bases abc , efg , inter se sunt, ut bases.



Sin minus, esto, ut basi
 $abcd$ ad basin efg ; Ita
 pyramis $abcd$, ad soli-
 dum x , quod majus vel mi-
 nus est pyramide $efgh$.
 Sit primo minus in agnitu-
 dine.

- a 3. XII. *diuey. a* Dividatur ergo pyramis $efgh$ in duas pyramides aequales, & duo prismata equalia. Rursusq; ba facta pyramides in alias duas pyramides & prismata equalia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide $efgh$, auferatur plus quàm dimidim. duo nempe prismata $pfqrst$, $gqrstn$, & majora dimidio pyramidis $efgh$: Itemq; è reliquis pyramidibus $eprs$, tuh , plus dimidio, utpote illarū prismata, Et sic deinceps; Prelinquitur tandē minor magnitudo, magnitudine y , seu excessu, quo pyramis $efgh$, superat solidum x . Relicta ergo magnitudo jam sit minor. Cum verò pyramis $efgh$, ponatur equalis solidis x & y : Erunt cetera prismata in pyramide $efgh$, majora solido x . Dividatur pyramis $abcd$ in duas pyramides aequales & duo prismata equalia. Itemq; facta pyramides $ailm$, $mnod$, in binas pyramides aequales, & bina prismata equalia. Quod toties fiat, quoties in pyramide $efgh$ est factum. *y* Quoniam ergo omnia prismata in pyramide $abcd$, ad omnia prismata numero equalia, in pyramide $efgh$ sunt, ut basis abc , ad basin efg , id est, ut pyramis $abcd$, ad solidum x ; omniaq; prismata in pyramide $abcd$ minora quàm pyramis tota $abcd$: Derunt etiam omnia prismata in pyramide $efgh$, minora solido x ; quae tamen modo ostensa sunt majora. Minus ergo nequit esse solidum x pyramide $efgh$.

Deinde

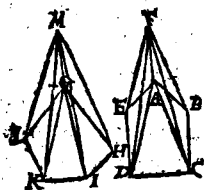
Deinde sit eadem major. Quoniam ergo ponitur
 pyramis $abcd$, ad solidum x , ut basis abc , ad
 basin efg . Erit convertendo solidum x , ad
 $abcd$, ut efg , ad abe . Ponatur autem so-
 lidum x , ad pyramidem $abcd$, ut $efgh$ pyra-
 mis ad solidum y . Quoniam ergo solidum x ,
 majus ponitur pyramide $efgh$: deris & pyra-
 midis $abcd$ major solido y . Quare erit, ut ba-
 sis efg ad basin abc ; ita pyramis $efgh$, ad
 solidum y , quod minus est pyramide $abcd$. Quod
 absurdum. Quia ostensum est, esse non posse, ut
 basis ad basin, ita pyramidē ad solidū pyramide
 minus. Cum ergo pyramis $efgh$ nec minor nec
 major sit solido x , erit ipsis equalis. 87. V. Erit ergo,
 basis abc , ad basin efg , ita pyramis $abcd$,
 ad pyramidem $efgh$, id est, ad x . Manifesta et-
 iam hinc est conversa, quod si pyramides triangu-
 lares sint ac bases, quod sint sub eadem altitudi-
 ne. Et quod si pyramides super eadem five aqua-
 libus basibus, ejusdemque sint altitudinis, etiam
 sint aequales.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Sub

Sub eadem altitudine existentes pyramides $abcdef$, $ghiklm$, & polygonas habentes bases $abcde$, $ghikl$; inter se sunt ut bases.



Resolutio basibus in trian-
gula numero equalia: erit
qualibet pyramis divisa in
eoridem pyramides trian-
gulares. α Quia vero est, ut
basis abc , ad basin acd ;
ita pyramis $abcf$, ad py-

as. XI.

ramidem $acdf$. α Rursusq, ut bases aed , ade ,
ita pyramides $acdf$, $aded$. Igitur ex aequo, ut
 $abcd$, ad ade ; ita $abedf$, ad $acdf$. Et
componendo, ut bases $abcde$, ade ; sic pyra-
mides $abcdef$, & $aded$. Similiter erit, ut ba-
ses $ghikl$, & gkl ; ita pyramides $ghiklm$,
& $gklm$: Et convertendo, ut bases gkl , g
 $hikl$; ita pyramides $gklm$, &
 $ghiklm$. α Rursus quoniam est, ut ba-
ses, ade ad gkl ; ita pyramides $aded$, $adgk$
 lm : erunt quatuor bases, $abcde$, ade , gkl ,
 $ghikl$, cum quatuor pyramidibus $abcdef$,
 $aded$, $gklm$, $ghiklm$, in eadem ratione. Erit
ergo ex aequo, ut bases $abcde$ ad $ghikl$; ita py-
ramides $abcdef$ ad $ghiklm$. Quod erat
propositum.

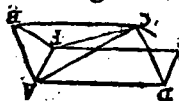
P R O.

LIBER XII.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Omne prisma $abcdef$, triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ æquales inter se, triangulares bases habentes.



Ducantur in tribus parallelogrammis tres diagonij ac , ad , cf , fd , & dividentes ea in triangula inter se equalia.

Est ergo, ut bases abc , adc æquales; ita pyramides $abcf$, $adcf$ ejusdem altitudinis, quæst perpendicularis ex f demissa in planum ab β γ . X. cd β æquales. Ita etiam æquales sunt pyramides $adfc$, $efdc$, super æquales bases adf , def constitutæ, sub eadem altitudine, ceu perpendiculari à vertice c ad planum adf demissa. Sed pyramis $adcf$, est eadem pyramidi $adfc$, quippe ejusdem contenta planis. Igitur tres pyramides $abcf$, $adcf$, $efdc$ vel $cdef$, æquales inter se sunt; & sic prisma $abcdef$ in tres æquales pyramides est divisum. Unde patet: Quamque pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum ipsa habentis basin & altitudinem.

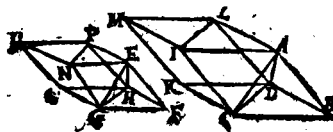
PROPOS. VIII.

Theorema 8.

kk

Simi

Similes pyramides $abcd, efgh$,
quæ triangulares habent bases abc ,
 efg ; in triplicata sunt homologorum
laterum bc, fg , ratione.



Extendantur
plana triangulorum abc, efg ,
ad b, da, b , per-
ficianturq; pa-

rallelogramma bi, bk, bl : & ducantur rectæ
ipsis ai, al æquales & parallele im, in : conne-
ctaturq; km , ut parallelepipedū completum sit
 $b m$ ejusdem altitudinis cum pyramide, ut pa-
rallela plana a ostendunt. Eodemq; modo per-
ficiatur parallelepipedum $f n$. Quoniam igitur
propter similitudinem pyramidum & anguli
 abc, efg sunt æquales, estq; ut ab ad bc , ita
 ef ad fg ; erunt parallelogramma $bi, f n$ simi-
lia: Ita, cum anguli abd, efh sint æquales; &
sit, ut ab ad bd , ita ef ad hf : item anguli $dbc,$
 hfg æquales, & sicut db ad bc , ita hf ad fg ; e-
runt & parallelogramma $bl, b k$ parallelogram-
mis $fp, f o$ similia. Sed tam tria bi, bk, bl , pa-
rallelepipedum $b m$, reliquis tribus oppositis $d m,$
 $a m, c m$; quàm tria fn, fo, ep , parallelepipedum
 $f n$, reliquis oppositis tribus $h n, f q, g q$, sunt æ-
qualibus & similia; adeoque sex plana paralle-
lepipe-

34. XI.

34. XI.

parallelepipedorum bm , & fq sunt inter se similia, ipsaq;
 parallelepipeda similia γ . Quoniam verò ducta
 rectæ li , pn , Præmata db ci la , hf gn pe habent
 eandem proportionem, quam ipsorum dupla
 bm & fq . Et pyramides $abcd$, $efgh$, ean-
 dem quam præmata dicta earum tripla: s ha-
 bebunt quoq; pyramides eandem proportionem,
 quam parallelepipeda. Sed cum proportio pa-
 rallelepipedorum bm , fq sit triplicata rationis
 homologorum laterum bc , fg erit etiam pro-
 portio pyramidum triplicata eorundem late-
 rum bc , fg . Quod ipsum quoq; locum habet in
 pyramidibus similibus plurium laterum, sicut &
 in præmatibus similibus.

79. def.
 XI.

15. V.

11. V.

33. XI.

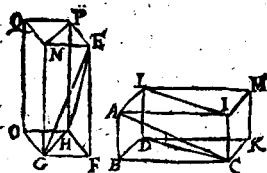
PROPOS. IX.

Theorema 9.

Æqualium pyramidum $abcd$, $efgh$,
 & triangulares bases abc , efg
 habentium, reciprocantur bases &
 altitudines; & quarum pyramidum
 triangulares bases habentium reci-
 procantur bases & altitudines, illæ
 sunt æquales.

Kk 2

Perfect.



Perficiantur, ut in
precedenti, paralle-
lepipedab m, f q, ea-
rundem altitudinū
cum pyramidibus;
cōnectanturq; rectā
li, pn; erunt pri-

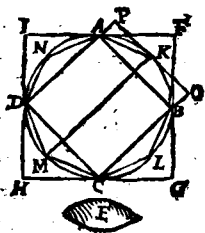
smatad b c i l a, h f g n p e, tanquam tripla py-
ramidum equalium, inter se equalia, ipsaq; pa-
rallelepipedab m, f q prismatū dupla, equalia:
α Eorum itaq; bases reciprocantur altitudini-
bus, id est, erit, ut basis b i, ad basin f n: ita alti-
tudo solidi f q, ad altitudinem solidi b m. β Sed
ut sunt bases b i & f n, ita sunt triangula a b c,
e f g. Itaq; ut sunt bases a b c, e f g; ita sunt alti-
tudines pyramidum e f g h & a b c d. Quippe
eadem cum parallelepipedorum altitudinibus;
& sic reciprocantur bases altitudinibus. Iā sint
bases & altitudines reciproca. Erunt etiam py-
ramides aequales. Constructa figurant prius,
cum sit, ut a b c ad e f g; ita parallelogrammum
b i, ad f n. Sint q; eadem altitudines parallelepi-
pedorum & pyramidum; erunt etiam bases &
altitudines parallelepipedorum reciproca; Et sic
α equalia b m, f q. Quare & ipsorum dimidia
prismata, & horum partes tertia pyramides,
sunt aequales. Quod ipsum de reliquis non tri-
angularibus pyramidibus & prismatis quibus-
cunq; potest ostendi.

PRO.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin $abcd$, habentis & altitudinem æqualem.



Sin minus est cylindrus conitriplo, erit vel major vel minor triplo con. Sit ergo major magnitudine e, & sic æqualis triplo con & magnitudine e simul. Circulo ceu basi utriusq; inscribatur qua-

dratum $abcd$, & circa eundem quadratum $fg hi$, super qua quadrata intelligantur sub altitudine con & cylindri erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum $abcd$, æ dimidium est quadrati $fg hi$; β estq; ut basis ad basin; ita parallelepipedum, ad parallelepipedum ejusdem altitudinis. Erit etiam unum alterius duplum. Et minus super basi $abcd$, majus dimidio cylindri. Iam secentur peripheria ab , bc , cd , da , bifariam in punctis k , l , m , n ; conjunganturq; rectæ ka , kb , lb , lc , mc , md , nd , na , & per k agatur tangens op , γ parallela ipsi ab , occurrens rectis da , cb productis in punctis o , p ; & super akb , $abop$, intelligantur pri-

α 9. IV.
β 3 2. XI.

γ 27. III.

K k 3

smata

§ 41. I.
 § 7. XII.

scata equè alta cono vel cylindro. Quoniã ergò
 akb est δ dimidium $abop$, erit & illius pri-
 sma hujus δ dimidium: Eritq; prima basis akb
 majus, quàm dimidium segmenti cylindri, cu-
 jus basis continetur linea ab , & arcu akb .
 Quod ipsum de reliquis segmentis tribus verum
 est. Eruntq; omnia prismata quatuor triangu-
 lorum simul majora dimidio, omnium segmen-
 torum cylindri simul. Idemq; sequeretur, si peri-
 pheria ba iterum bisariam secarentur, & fierent
 triangula &c. Si ergò à cylindro, cujus basis est
 circulus $abcd$, auferatur plus, quàm dimidium,
 ut parallelepipedum basis $abcd$, & à reliquis se-
 gmentis plùs, quàm dimidium, nimirum prisma-
 ta basium akb , bkc . Et sic fiat ulterius detra-
 ctio: & relinquitur tandem minor magnitudo,
 quàm e , excessu cylindri supra triplum coni. Sine
 jam segmenta cylindri relicta basium ak , kb , bc
 simul sumpta minora, quàm e . Cum ergò, cylin-
 drus ponatur aqualis triplum coni & magnitu-
 dini e simul, ablatis segmentis illis ex cylindro
 & ex triplum coni una cum magnitudine e , ipsa e ,
 qua major est dictis segmentis, erit reliquum pri-
 sma basis multangula $akblcm$, ejusdem
 altitudinis cum cono & cylindro, majus quàm
 reliquum triplum coni. Erit itaq; conus minor
 terti, a parte Prismatici sive Pyramide, cujus eadẽ
 ipso, cum est basis & altitudo, totum parte mi-
 nus, quod absurdum. Non ergò major est cylin-
 drus triplum coni.

Sic

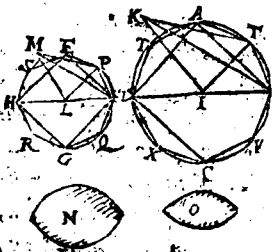
Et jam minor, & sic conus major tertia parte cy-
 lindri i magnitudine e, ut conus sit equalis tertia
 parti cylindri, & magnitudini e simul. Constru-
 etis iisdem Pyramis super a dimidia basi abcd
 descripta erit & dimidia pyramidis super fghi. 96. XII.
 Majorq; pyramis super abcd, conus super abcd
 circulo descripti dimidio. Rursu jam, ut antea,
 du sis peripheriis, & completis triangulis, pyra-
 mis super akb major est dimidio segmenti conus
 aequè alti, super basilinea ab & peripheria akb
 contenta. Quod ipsum de reliquorum triangu-
 lorum pyramidibus, & segmentorum conus dimidijs
 verum est. Quae omnes pyramides simul majores
 sunt quam dimidia omnium segmentorum conus si-
 mul. Idem sequeretur, si peripheria ba rursu
 secaretur bifariam. Si jam ex cono super cir-
 culo abcd facto auferatur pyramis dimidio ma-
 jor, cujus basis abcd aequè alta: relinquitur mi-
 nus dimidio, & à reliquis segmentis iterum plus
 dimidio, ut pyramides super akb, blc, cmd &c.
 Et sic ulterius fiat detractio, & relinquitur tandem
 minor magnitudo quam e, excessus equi supra
 tertiam partem cylindri. Sini jam segmenta
 conus relicta ak, kb, bl simul sumpta minora
 quam e. Cum igitur Conus ponatur aqua-
 lis cylindri parti tertia, & magnitudini e si-
 mul, Si ex cono detrahantur segmenta praedicta,
 & ex tertia parte una cum magnitudine e,
 quam major est praefatis conus segmentis

erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum $akbl$, $cmdn$, ejusdē altitudinis cū cono & cylindro, major tertia parte cylindri reliqua. Et sic triplum pyramidis majus cylindro. Proinde cum prisma ejusdem baseos cum pyramide, & altitudinis cum cono & cylindro, & triplum sit pyramidis; erit prisma majus cylindro, pars toto. Non ergo cylindrus est minor triplo coni. Sed neq; major, ut antea patet. Ergo equalis. Et sic cōnus quilibet cujuslibet cylindri equē alti, & ejusdem basis, est pars tertia. Quod erat propositum.

PROPOS: XI.

Theorema 11.

Sub eadem ik, lm , altitudine existentes coni & cylindri inter se sunt ut bases $abcd, efgh$.



Sin minus, esto, ut basis $abcd$, ad ba sine $efgh$, sic Conus, super $abcd$, ad aliam magnitudinē m , quæ vel minor vel major est cono $efgh$. Sit ergo minor.

minor magnitudine o, ut conus sit equalis ipsis n
 & o simul. Inscripto quadrato e f g h in circu-
 lum, secentur quadrantes bisariam in p, q, r, s,
 qua puncta connectantur cum e, f, g, h. Quoni-
 am ergo, si ex cono e f g h m detrahatur pyra-
 mis, super basin e f g h ejusdemq, altitudinis, & a
 reliquis segmentis auferantur pyramides ejusde
 altitudinis basium e p f, f q g: eodem modo sem-
 per fiat detractio, semperq, plus dimidio sub-
 trahatur, ut in precedenti propositione; & relin- a 1. XI.
 quitur tandem minor magnitudo quam o, ex-
 cessus conie f g h m super n. Sint ergo relicta se-
 gmenta basium conie p, p f, f q simul sumpta; mi-
 nora quam o. Cum igitur Conus e f g h m po-
 natur equalis ipsis n & o simul; si ex cono de-
 trahantur dicta ipsius segmenta, sed ex no si-
 mul ipsa o major dictis segmentis simul, erit re-
 liqua pyramis cujus basis est polygonum e p f q
 g h s ejusdem altitudinis cum Cono, major quam
 n. Huic ergo polygono simile inscribatur etiam
 circulo, a b c d, ut in secunda propositione est fa- B 2. XII.
 ctum, & ducantur diametri b d, f h. Quoniam
 ergo est, ut circulus a b c d, ad circulum e f g h; ita
 polygonum a t b u c x d y, ad polygonum e p f q
 g r h s. Sed ut est circulus ad circulum; ita poni-
 tur conus a b c d k, ad magnitudinem n; & ut
 y polygonum ad polygonum; ita est pyramis ad py- d 6. XII.
 ramidem ejusdem altitudinis cum Conis. Erit etiam
 pyramis ad pyramidem, ut conus a b c d k ad
 Kk 1 n. Cumq,

n. Cumq; Conus $abcdk$ sit major pyramide a
 $t bucx dyk$: δ erit ϵ n major pyramide $e p$
 $f qgrhs m$: qua tamen modo ostensa est mi-
 nor. Quod absurdum. Non ergo minor est n,
 quam cono $efgh m$. Hinc ponatur major magni-
 tudo n cono $efgh m$. Cum sit, ut circuli, $abcd$,
 $ad efgh$; ita conus $abcdk$ ad n: etiam con-
 vertendo erit, ut circuli $efgh$, ad $abcd$; ita n
 ad conum $abcdk$; iam ponatur: ut n ad Ca-
 num $abcdk$; ita conus $efgh m$ ad o: Et quia
 n major ponitur cono $efgh m$; δ erit conus $abcd$
 k major, quam o, Quare erit, ut circuli; $efgh$,
 $ad abcd$; ita conus $efgh m$, ad magnitudinem
 o, qua minor cono $abcd h$ est. Quod absurdū.
 quia ostensum modo est, non posse esse conum ad
 magnitudinem minorem aliquo cono, ut basis est
 huius cono, ad basin illius cono. Itaq; n non est
 maior $efgh m$; ac proinde aequalis. Quare cum
 sit, ut circuli $abcd$, $ad efgh$; ita conus $abcdk$
 ad n, id est ad conum $efgh m$: erit, ut basis
 ad basin, ita conus ad conum, si sint aequè alti.
 Cumq; super iisdem basibus aequè alti cylindri
 cum conis sint ζ eorum tripli. η Erit etiam, ut
 basis ad basin, ita cylindrus ad cylindrum, si sint
 aequè alti.

§ 7. V.

§ 10. XII.

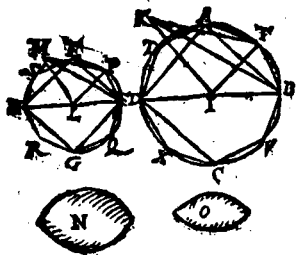
§ 15. V.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Similes

Similes Coni & Cylindri in triplicata
ratione sunt distictorum $b d, f h$, quæ in
basibus $a b c d, e f g h$.



Si minus, habe-
at cunus $a b c d k$,
id aliquā magni-
tudinem n , tripli-
catam rationem
diametrorum, $b d$,
 $f h$, erit ergo vel
minor vel major
coro $e f g h m$. Pri-

imum sit n minor, como $e f g h m$, magnitudinis;
 o , adhib. $t a q$, præcedens constructione, erit rur-
sus pyramis $e p f g g r h s m$, major quam n . Iam du-
cantur $k b, k r, m f m p$, ut fiant triangu-
la $b k t, f m p$; connectanturq; $t i, p l$. Quoniam
igitur Coni $a b c d k, e f g h m$ ponantur similes:
erit, ut diameter $b d$, ad diametrum $f h$: β $\alpha 24. d.$
vel, ut semidiameter $b i$ ad semidiametrum $f l$, i- β $\alpha 24. d.$
ta axis $i k$, ad axem $m l$. Cumq; anguli $b i k, f l m$ β $\alpha 24. d.$
sint γ recti, quod & conii ponantur recti; & ipso- β $\alpha 24. d.$
rum axes ad bases recti: δ erunt triangu- β $\alpha 24. d.$
 $b i k, f m l$ æquiangula: adeoq; sicut $k b$ ad $b i$, δ $\alpha 24. d.$
ita $m f$ ad $f l$. Sed ut $b i b t$, ad ita $f l a d f b$, ob simili- δ $\alpha 24. d.$
tudinem δ triangulorum $b i t, f l p$ (quia anguli δ $\alpha 24. d.$
 $b i t, f l p$, similibus arcibus insistentes sunt aqua- δ $\alpha 24. d.$
les, circumq; ipsos latera proportionalia.) δ $\alpha 24. d.$

Itaq;

Itaq; ex equo, ut kb ad pt , ita fa ad fp . Rur-
sus, quia latera ki , ib , trianguli kib , equalia
sunt lateribus ki , it , trianguli kit , & anguli i-
psi, comprehensi recti y . Erunt bases kb , kt , a-
quales. & Eodemq; modo equaliter exunt recte
 mf , mp , atq; sic recte kb , kt , rectis mf , mp pro-
portionales: Quia vero, ut kb , ad bt ; ita kt , ad
eandem bt : item, ut mf ad fp , ita mp , ad ean-
dem fp . Erat autem ut kb ad bt ; ita mf ad fp ;
erit quoq; ut kt , ad bt , ita mp ad fb : & con-
vertendo, ut bt ad tk , ita fp ad pm . Quare cum
sit ut tk ad kb ; ita pm ad fm ; Et ut kb ad bt ;
ita mf ad fp . Et, ut bt ad tk , ita fp ad pm ;
habebunt triangula bkt , fmp , latera propor-
tionalia: Eruntq; & equiangula & similia. Neq;
aliter reliqua triangula pyramides atbucxd
 y k & epfqgrhsm, ambientia, inter se similia o-
stendentur. Cumq; multitudine sint equalia, e-
runt dictae pyramides & similes & in x triplica-
ta proportionem homologorum laterum. Ut autem
 bt ad fp , ita est bi ad fl , ob similitudinem tri-
angulorum bit , flp : & Et ut bi ad fl , ita bd
ad fh . Igitur pyramis ad pyramidem habebit
quoq; proportionem triplicatam diametrorum
 bd , fh . Sed earundem diametrorum proportio-
nem triplicatam habebat Conus $abcdk$ ad n :
Erit igitur, ut pyramis atbucxdy k ad pyra-
midem epfqgrhsm; ita conus $abcdk$ ad
 n . Cum igitur pyramis prior sit minor Cane
abcdk,

Q. 9. def.

XI.

* 8. XII.

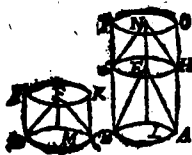
$abc dk$, pars toto: erit etiam posterior minor
 magnitudine n , qua tamen modo ostensa est
 maior. Quod absurdum. Non ergo minor est ma-
 gnitudo n . Cono $efgh m$. Iam, si t major cono
 $efgh m$. Cum ergo Conus $abc dk$ habeat pro-
 portionem triplicatam diametri bd ad diame-
 trum fh ; Sicut & pyramis $atbucxdyk$ ad
 pyramidem $epfqgrhsm$: erit, ut conus abc
 dk ad n , ita pyramis ad pyramidem; & conver-
 tendo, ut n ad conum $abc dk$, ita pyramis epf
 $qgrhsm$ ad pyramidem $atbucxdyk$. Qua-
 recum pyramides illae habeant rationem tri-
 plicatam homologorum laterum pt ad $t b$, id est,
 diametri fh , ad db . habebit etiam n ad conum
 $abc dk$ rationem triplicatam diametri fh ad
 bd . Ponatur ergo ut n ad conum $abc dk$: ita
 conus $efgh m$, ad o . Erit etiam inter hac ratio
 triplicata diametrorum fh ad bd . Cum autem
 si ponatur major cono $efgh m$: λ erit & conus
 $abc dk$ major quam o , Itaque, conus $efgh m$ ad
 o minorem cono $abc dk$, proportionem habet
 triplicatam diametrorum fh ad bd . Quod absur-
 dum: quia ostensum est modo non posse Conum ad
 magnitudinem alio cono minorem; proportionem
 habere triplicatam diametrorum baseos. Itaque, nec
 maior est n , quam conus $efgh m$ sed sunt aequales.
 Ideoque, conus $abc dk$, ad n & μ conum $efgh m$,
 habet rationem triplicatam diametrorum fh ad
 bd . Et μ 7. V.

aqualibus altitudinibus, kl, ek, ie, sunt & aquales; quàm cylindri xz, zt, td, dh, sub aequales bases xy, uz, ta, cd, & sub altitudinibus aequalibus no, mn, fm, if. Erit tam multiplex cylindrus *a* n. XII. 67. def. V. xg cylindri cg, quàm multiplex est axis io, ipsius if: Et tam multiplex cylindrus sh cylindri ah, quàm multiplex axis i ipsius i e. Si ergo axes i l & io sunt aequales & aequales etiam sunt cylindri sh & xg; si verò axis axe est major, etiam cylindrus cylindro major est; & si minor, minor, in quacunq; multiplicatione. Erit igitur axis ie, ad axem if, ut cylindrus ab, ad cylindrum gh.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Super aequalibus basibus ab, cd existentes coni abt, cdf, & cylindri abgh, e dik, inter se sunt ut altitudines le, mf.



Extenso cylindro abgh, ad partes gh, una cum axe le, & rectangulo ag, abscindatur axi mf, aequalis en, ut n sit centrum circuli, aequalis & paralleli ipsi gh.

α 11. XII.
β 7. V.
γ 13. XII.
δ 10. XII.
ε 15. V.

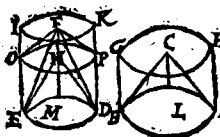
Et fiat cylindrus $ghop$ ejusdem altitudinis $ε$ cum cylindro $cdik$, qui $ε$ inter se sunt aequales $α$: ad quos cylindrus agb habet eandem rationem. Est $γ$ autem cylindrus $agad$ cylindrum ap ut axis vel altitudo le , ad axem vel altitudinem en , id est, ad mf buic aequalem. Igitur $ε$ cylindri ag, ci sunt ut altitudines le, mf . Cumq; conus abe, cdf sint partes $δ$ teris $α$ cylindrorum, $ε$ erunt etiam coni bi , ut altitudines le ad mf .

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Aequalium conorum abc, def , & cylindrorum $abgb, deik$, reciprocantur bases ab, de , & altitudines lc, mf : & quorum conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

α 11. XII.



In cylindris enim si altitudines lc, mf sint aequales $α$, erunt $ε$ bases aequales: Briga ut bases $abad, de$, & altitudines aequales mf ad lc , id est, bases erunt altitudinibus reciproca. Si vero altitudines lc ,

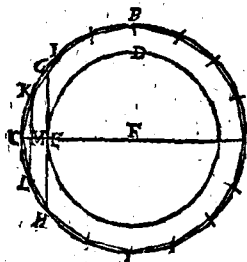
lc, mf , sint inaequales; abscindatur ex mf , mn ,
 aequalis ipsi lc , & centro n describatur planum
 ipsi basi de aequale & parallelum, ut fiant duo
 cylindri do, ok . Quoniam ergo aequales ponun- § 7. V.
 tur cylindri ag, di , § habebunt ad eundem cylin- γ 14. XI.
 drum do , eandem rationem. Sunt autem cili-
 dri ag, do , ut bases ab, de , propter aequales alti-
 tudines; & cylindri di, do , ut altitudines mf &
 mn propter identitatem γ basis & cylindri. E-
 rit ergo ut basis $a b ad de$; ita altitudines $m f$
 $ad m n$, vel huic aequalem lc , id est, bases & alti- § 10. XII.
 tudines sunt reciprocae. In conis, si ponantur æ-
 quales, abc, def ; erunt & eorum cylindri ah
 di , quorum sunt partes tertiae, aequales. Et quia
 horum bases & altitudines reciprocantur. Ergo
 & conorum. Si verò ponantur bases & altitu-
 dines reciprocae, etiam coni & cylindri erunt
 aequales. In cylindris ergo ag, di , si altitudi-
 nes ic, mf sint aequales, cum bases ab, de sint,
 ut altitudines: erunt & ipse & rotæ cylindri æ-
 quales: si verò altitudines sint inaequales, cum
 ponantur altitudines $mf ad lc$, id est, mn ut ba-
 ses $ad ad de$: & Sinq; bases $ab ad dc$ ut cili-
 dri $ag ad do$, propter altitudines aequales, &
 ut altitudines $mf, ad mn$, ita cylindri $di ad do$
 propter identitatem basis de . Erunt cylindri § 9. V.
 ag, di in eadem ratione, ad cylindrum do , &
 sic & aequales. In conis verò reciprocis pe-
 sitis basibus, & altitudinibus; ipsorum quoq; tri-

pli cylindri reciprocantur propter easdem bases,
& altitudines reciprocas, ex quibus cum cylin-
dri concludantur aequales, etiam aequales erunt
ipsorum partes tertia vel comi.

PROPOSITIO XVI

Problema I.

Duobus circulis abc, de , circa idem cen-
trum existentibus, in majori circulo abc ,
polygonum æquilaterum, & parium late-
rum inscribere, quod non tangat minorem
circulum de .



Extendatur per scē-
rum diameter ac ,
qui secet circulum
 de in e , per quod
A punctum ducatur
perpendicularis ipsi
 ac , quæ æ tangens
erit circuli de . Quo-
niam arcus agc ma-

æ 13. III.

ß 1. X.

jor est arcus gc , subtracto dimidio ab & ex resi-
duo bc , dimidio bi , & ex residuo ic dimidio ik ,
Erelinquitur ck minor quam gc : eritq; ck sub-
tensa ipsi ck arcui latus polygoni inscribendi. Si
enim arcus bi in partes numero & magnitudi-
ne aequales ipsius ci dividatur, & quadrans ab
in aequales partibus bc quadransu, & ahc
semi-

semicirculus in aequales semicirculi abc partibus, quibus arcubus subtensa linea omnes erunt y aequales recta ck. Et sic polygonum aquilaserum erit perfectum, quod minorem circulum y^{29. III.} de non tangit. Demissa perpendiculari kl per k in a c, quam secat in m. Quoniam anguli g e m, k m e sunt recti: derunt gh, kl, parallela. d^{28. I.} Quare cum gh tangat circulum g e in e, erit kl tota extra illum circulum; cumq; nunquam attinget, quia nunquam cum recta gh conuenire potest. Ideoq; multò minus k longius ab eodem circulo remota tanget illum circulum. Proinde nec reliquorum polygonilaterum ullum huic ck equalium, aequaliter quippe à centro f distantium, circulum d e s. continget.

PROPOSITIO XVII.

s^{14. I II.}

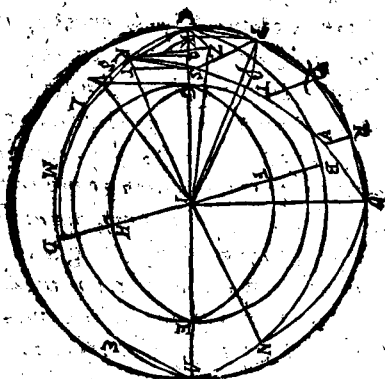
Problema 2.

Duabus sphaeris a b c d, e f g b, circa idem centrum i existentibus, in maiori sphaera a b c d, solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minores e f g b, sphaerae superficiem.

Ambae sphaerae secantur plano aliquo per centrum, sintq; communes sectiones facta in sphaeris plana a b c d, e f g h, quae circuli sunt ex definitione sphaerae, idem habentes centrum i cum ipsis sphaeris. In his circulis ducantur diametria c, e b d in centro i ad angulos rectos se secantes;

Ll 2

ut



α 16. XII.

ε cor. 16.

III.

γ L. IV.

δ 19. I.

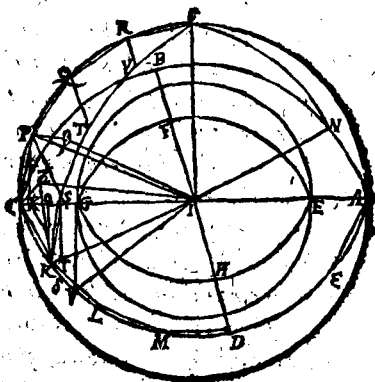
ε 28 III.

ζ I. X.

η 29. III.

ut sint quadrantes ab, bc, cd, da . Postea in
 majori circulo α inscribatur polygonum non
 tangens minorem, quod pro demonstrationis fa-
 cilitate ita fiat. Ex ga et g ducatur perpendicu-
 laris gy usq; ad circumferentiam circuli $abcd$
 quae circum e $fgh\beta$ tangit in g : cui gy aequa-
 lis applicetur ae in circulo $abcd$, quia vero si
 arcui, cy intelligatur subtendi recta, ut fiat tri-
 angulum gc, y , est cy latus majori seu recto
 angulo oppositam majus latere gy , erit & i-
 pso ae . Abscindatur ergo cd arcus aequalis ipsi
 ae , si jam ex quadrante cd auferatur dimidi-
 um dl & ex reliquo cl dimidium lk , & sic dein-
 ceptis, relinquetur ζ tantus arcus minor arcui cd , seu
 arcui ae . Sit ergo arcus ck minor arcui cd , seu arcui

ac erit etiā ck subtensa minor rectā ae, id est, g
 y, & ck erit inscribendi polygoni latus. Nā cum
 recta c d arcū subtendens minorem arcu c y, nō
 attingat circulum e f g h, multo minus ck arcū
 c d minorem subtendens eundem circulū tanget.
 Rursus ducta diametro kn, erigatur ex centro i
 perpendicularis i o, ad planā circulorum a b c d,
 e f g h, occurrens superficiei sphaera majoris in o,
 & per rectas o i, a e, & o i, kn ducantur plana,
 quae ad circulū a b c d, & erunt rectae, efficientq; cō-
 munes sectiones circulos, quarū semicirculi sunt
 a o c, n o k. Quia verō anguli o i c, o i k sunt $\frac{1}{2}$ & 18. XI.
 recti; & erunt o c, o k i quadrantes, & quidem, 13. def. XI
 quia a o c, n o k, circuli aequales sunt ipsi a b c d, & 22. III.
 propter aequales diametros: erūt ipsi c d, o c, o k,
 aequales quadrantes. Si ergo d l arcus dividatur
 in tot partes, in quot divisus est c l; & quadran-
 tes o c, o k in partes numero & magnitudine a-
 quales arcubus quadrantis c d: & erunt illis omni-
 bus subtensa recta ck, kl, lm, md; cp, pq, qr, ro,
 rs, st, tu, uo aequales. Cōiunctis autē rectis ps, qt,
 ry, demittantur ex p & s ad planū circuli a b c d
 perpendiculares px, sy, quae in communes secti- o 58. XI.
 ones a c, nk, o cadent, eruntq; inter se & paralle- π 6. XI.
 lae. Quoniam ergo triangulorum p c x, s k y an- 627. III.
 guli x & y sunt y recti, anguliq; p c x, s k x, & a- σ 26. I.
 quales, quod periphēria a o p, n o s; quibus in-
 ffigunt, aequales sint. & Erūt ergo propter illos an-



τ 33. I.
 υ 2. VI.
 φ 9. XI.
 χ 7. XI.

gulos aequales & latera pc , sk aequalia, etiam reliqua latera reliquis aequalia. Cum itaq; aequales sint px , sy & parallela erunt τ & ipsas connectentes ps , xy , aequales & parallela. υ Sed quia etiam ck , xy , sunt parallela propter latera ic , ik ; proportionaliter secta erunt ϕ & ps , ck parallela, & has connectentes cp , ks in eodem cum ipsis plano erunt, χ & totum quadrilaterum $cksp$ in uno plano erit. Si ex q & t demittantur perpendiculares in planum $abcd$, connectanturq; rectae qc , tk , quas similiter parallelas, ipsaq; ps , qt , tanquam eidem ck parallelas, inter se parallelas, totumq; quadrilaterum $pstq$ in uno plano esse ostenderemus, sicut & quadrilaterum $qtur$ & triangulum ψruo . Quae ipsa construo.

Etio

Etio si & super reliqua latera kl, lm, md, dictis
 videlicet quadrantibus; ol, om, od exhibeatur, ¶ 2. XI.
 nec non & in reliquis quadrantibus & reliquo
 hemisphærio, ut tota sphaera major quadrilate-
 ru & triangulis repleatur similibus & aquali-
 bus modo predictis super latus ck inter quadran-
 tes oc, ok constructis, inscriptum erit in majori
 sphaera solidum polyedrum circumscriptum dictis
 quadrilateris atq; triangulis. Dico hoc sphaerā
 minorem esse fgh non tangere, ducatur i γ. Quo-
 niam igitur ex constructione ck, α est minor re-
 cta c γ: est enim ck major, quam cz. quod angu-
 lus czk est α obtusus, multo major erit quam cz
 & quadratum rectae g γ major quadrato zc. Quo-
 niam verò quadratum i γ, β aequale est quadratis re-
 ctarum ig, g γ, & quadratum i c, quadratis iz
 zc: sunt autē aequalia quadrata i γ, i c, aequalia: α per
 ergo sunt etiā ig, γ g, ipsis iz, zc: demptis, illinc schol.
 quadrato g γ, & hinc quadrato zc, relinquetur sequens.
 quadratum i g minus quadrato iz: rectae g, ig mi-
 nor recta iz. Quocirca cum ig sit sphaera mino- β 47. I.
 ris efgh semidiameter, existet punctam z, extra
 eandem sphaeram, ipsumq; planum cksp, spha-
 ram efgh minimè tanget, quod & reliqua omnia
 ipsius puncta longius absint à sphaera illa quam
 z. Ducatur rursus ex i ad planum pstq, perpen-
 dicularis i ε; erit ε centrū circuli circa pstq, de-
 scripti, connexaq; β p, i p, cū angulus i β p, sit γ
 rectus. Erit quadratum i p aequale quadratis i ε; ε p.

quoniam $\angle z$ est rectus. $\angle$ Erit ipsi oppositum $\angle 3$. def. XI
 latus z majus latere iz , & sic $\angle$ remotius iz . $\angle 19$. I.

Denique probabitur, quo-

modo recta zc major sit
 recta βp ; sit athen prius
 fuerit ostensum, $p s$ esse
 majorem recta qt . Opus
 autem est nobis. hic figura
 superioris parte intra se-

midiametros ic , io con-

tenta, & quadrantibus

oc , ok ; demissioneq; per-

pendicularium μ , τ & qua ad communes circu-

lorum sectiones ic , ik , η cadunt, ac parallela θ sunt,

quas aequales & parallela qt & μ & connectunt.

Qua μ & cum η sit parallela ipsi ck , quia ic & ik

latera similiter per μ & sunt secta, etiam paral-

lela λ erit xy . μ Erit itaq; ut iy ad yx , ita i ξ , ad

$\xi \mu$. & sit yx vel sp , major quam $\xi \mu$ vel qt .

Hoc ostenso ex centri-

z , β , circa quadrilate-

ra $cksp$, $pstq$, descri-

bantur circuli cum

semidiamentis. Si zc

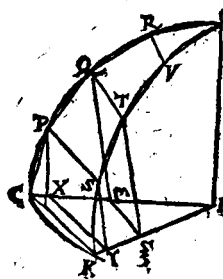
non credatur major quam βp , erit vel aequa is ,

vel minor. Si aequalis, cum lateribus ck , zc ponantur

equalia latera βs , βp , & basis kc major quam

sp ierit angulus kzc major angulo $s\beta p$. Eo

Ll s demq;



Hoc ostenso ex centri-

z , β , circa quadrilate-

ra $cksp$, $pstq$, descri-

bantur circuli cum

semidiamentis. Si zc

non credatur major quam βp , erit vel aequa is ,

vel minor. Si aequalis, cum lateribus ck , zc ponantur

equalia latera βs , βp , & basis kc major quam

sp ierit angulus kzc major angulo $s\beta p$. Eo

Ll s demq;

$\eta 28$. XI.

$\theta 6$. XI.

$\eta 2$. VI.

$\lambda 30$. I.

μ cor. 4.

VI.

$\eta 25$. I.

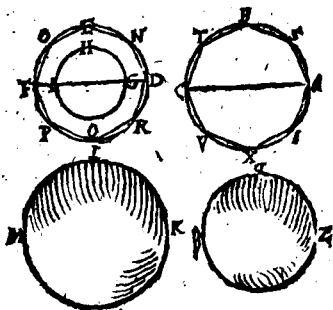
- ξ 22. I. demq; modo szp , major est angulo βq . Sed propter bases ssk , pc , ts , qp aequales, ξ aequales sunt anguli kzs , czp , $s\epsilon t$, $p\epsilon q$. Igitur quatuor anguli ad z , qui quatuor rectis sunt θ aequales, majores sunt angulis quatuor ad β , qui θ ipsi quatuor rectis, θ aequales sunt. Quod absurdum. Si verò minor sit $z c$ quàm βp , abscindantur $\beta \pi$, π 14. V. ϵp , $\epsilon \omega$, $\epsilon \phi$ aequales ipsis zc , zk , zs , zp , connectanturq; puncta π , q , ω , ϕ lineis quadrilateri $spqc$ lateribus π parallelis. μ Erit itaq; ut ϵs ad sp , ita ϵq , ad $p\omega$ $q\omega$ nimirum π minor quàm βp , sicut $\epsilon p\omega$, $\omega\phi$, ϕp minores sunt quàm st , tq , qp . At cum sp sit minor, quàm ck ; ϵst , pq aequalis rectis ks , cp ; tq ϵ minor, quàm ps : erunt rectae $p\pi$, $\pi\omega$, $\omega\phi$, ϕp minores rectis ck , ks , sp , pc ; sed propter $\epsilon \pi$, $\beta\omega$, ϵq , $\epsilon \phi$ aequales positas ipsis zc , zk , zs , zp , anguli ad z , majores angulis ad β , quibus tamen θ aequales sunt. Itaq; nec βp ipsa $z c$ minor erit; ϵ quia nec aequales sunt: Proinde $z c$ major erit quàm βp . Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema 16.

Sphaerae sunt abc , def in triplicata ratione suarum diametrorum, ac , df .

Sin minus, erit sphaera abc ratio eadem, ad aliam vel majorem vel minorem sphaeram. Pri-



nam ergò habeat rationem triplicatam a c ad d f. XII.
 d f, sphaera a b c, ad sphaeram g h i minorem
 sphaera d e f. α Inscribatur autem in majori
 sphaera d e f polyedrum d n e o f p q r, non cogens
 minorem g h i, atq; huic simile a b c, sphaera a s b
 t c u x y; quae cum sint β in triplicata ratione a c β coroll.
 ad d f, sicut sphaera a b c, g h i: erit, ut a b c, ad
 g h i, ita polyedrum ad polyedrum. Itaq; cum
 sphaera a b c fit major polyedro sibi inscripto,
 γ erit & g h i sphaera major altero polyedro, d n e
 o f p q r, pars toto. Quod absurdum, nò ergò major
 sphaera a b c, ad minorem g h i, ipsa d e f habet γ 14. V.
 ratione triplicatam diametrorum a c ad d f.
 Habeat porrò rationem hanc ad quandam maio-
 rem k l m, ipsa d e f. Rursus est, ut polyedrum,
 a s b t c u x y ad polyedrum d n e o f p q r, β id
 est, ut a c ad d f, ita sphaera a b c ad sphaera k l m:

¶

Et convertendo, ut klm ad abc , ita polyedrum posterius ad prius, id est, βdf ad αc . Ponatur autem ut klm ad abc , sic def ad $\gamma \alpha \beta$. Quia ergo sphaera klm major ponitur ipsa def . Erit & abc major ipsa $\gamma \alpha \beta$. Itaq; sphaera def ad sphaeram $\gamma \alpha \beta$, ipsa abc minorem, habet rationem triplicatam diametrorum df ad αc . Quod absurdum, quia ostensum est, non posse sphaeram ad sphaeram aliam sphaeram minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Cum ergo sphaera abc , neq; ad minorem neq; ad majorem sphaeram, ipsa def , habeat rationem triplicatam diametrorum αc ad df : habet itaq; ad ipsam def . Et sic sphaera quavis ad quamvis triplicatam diametrorum rationem habet, Hinc fit: sphaeras esse inter se, ut in ipsis similia polyedra descripta propter proportionem eandem triplicatam diametrorum.





ELEMETO- RUM EUCLIDIS,

LIBER XIII.

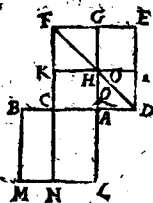
Propositio I.

Theorema I.



Si linea recta $a b$ secundum
extremam & mediam ra-
tionem a secetur in c : ma-
jus segmentum assumens
dimidiam totius, quintuplum potest
ejus, quod à dimidia totius describi-
tur quadrati.

α 10. II. vel
30. VI.



Super $c d$ fiat quadratum $c e$,
in quo ducta diametro $d f$, du-
catur $a g$ ipsi $d e$ parallela, se-
cans diametrum in h puncto per
quod ducatur $i k$ parallela ipsi
 $c d$. Deinde super $a b$ perficiatur
qua-

β cor. 4.

II.

γ 3. 2 def.

VI.

δ 17. VI.

ε 1. VI

ζ 43. I.

κ Schol.

4. II.

127. (127)

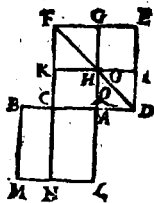
quadratiū am pertrahaturq; f cad n. β Erunt a
i, k g quadrata rectarū a d, a c. γ Quia ergo est,
ut ab ad a c, ita a c ad c b : δ erit rectangulum
c m sub extremis aequale ipsi k g quadrato me-
dia a c. Cumq; ab, id est, a l ponatur dupla ipsius
ad, id est, ah; ε sit, ε ut a l ad a h, ita rectan-
gulum a n ad a k : erit a n, ipsius a k duplum.
Quia vero a k ε i g sunt 2 equalia. erit a n a-
quale duobus a k, i g. Ideoq; additis equalibus,
c m, k g erit quadratum a m, aequale gnomoni
o p q. Quare cum quadratum a m sit quadru-
plum κ a i, quia a b est dupla ipsius a d : Erit
etiam gnomon o p q, quadruplus ejusdem qua-
drati; additoq; quadrato d i, erit quadratum
d f quintuplum quadrati.

PROPOS. II.

Theorema 2.

Si recta linea d c sui ipsius segmenti d a
quintuplum possit; duplæ a b prædicti d a, se-
gmenti extrema & media ratione sectæ in-
c; majus segmentum a c reliqua pars est ejus,
quæ à principio, rectæ.

Super d c fiat quadratum d f ε diametrum
d f secet a g parallela ipsi c f in h, per quod ducatur
i k parallela ipsi d c, producta g, a c fiat super
a b du-



ab dupla ipsius da quadratum
am, & continetur c fin n. E-
runt & ergo ai, kg quadrata
rectarum da, ac. Quia autem
quintuplum ponitur quadrati
cc quadrati ai; relinquitur
gnomon opq quadruplus ejus-
dem quadrati ai. Sed & am

a cor. 4

11 b

quadratum, est quadruplum ejusdem quadrati
ai. Quia ab est dupla ipsius da. Sunt igitur
gnomon opq & quadratum am equalia. Rur-
sus, quoniam ab, id est, al, ponitur ipsius da, id
est, ah, dupla; & best, ut la ad ah; ita re-
ctangula c ad a k. Erit quoque illud
hujus duplum, & sic equalibus ak, he,
rectangulis simul, aequale lc, & reliquum
rectangulum cm reliquo quadrato kg. Cumq;
sint tres recta ab, ac, cb: & rectangulum cm
sub ab, cb sit aequale quadrato recta ac: d erit, ut
ab ad ac, ita ac ad cb. Secta itaq; est ab extre-
ma & media ratione in c, estq; majus segmen-
tum ac.

c 1. VI.

743. I.

d 17. VI.

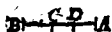
PROPOS : III.

Theorema 3.

Si recta linea ab, secundum mediam & ex-
tremam rationem, secetur in c; minus se-
gmentem cb assumens dimidiam cd majoris
segmenti ac, quintuplū potest ejus, quod a di-
midia majoris segmenti describitur quadrati.

Quoni-

6. II.



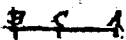
Quoniam $a c$ est bisecta in d , eiq;
addita $c b$; erit a rectangulum sub
 $a b, b c$, una cum quadrato recte $c d$, equale
quadrato recte $b d$. Sed rectangulum sub $a b$,
 $b c$ est quadruplum quadratic $c d$, quia inter-
media quadratum $a c$, huic equale, est quadru-
plum quadrati ejusdem $c d$. Idem ergo rectan-
gulum sub $a b$: $b c$ una cum quadrato $c d$, est
quintuplum quadratic $c d$. Ideoq; β quadratum
recte $b d$, segmenti minoris cum dimidio majo-
ris quintuplum est ejusdem $c d$ quadrati.

PROPOSITIO IV

Theorema 4.

Si recta linea $a b$, secundum mediam &
extremam rationem secetur in c : quod α
tota $a b$, quodque α minore segmento $c b$ si-
mul, utraque quadrata $a b, c b$ tripla sunt e-
jus quod α majore segmento $a c$ describi-
tur quadrati.

α 17. VI.
 β 7. II.



Quia enim rectangulum
sub $a b, b c$ α equale est qua-
drato $a c$; & illud rectangu-
lum bis, cum quadrato $a c$,
tripulum est quadrati $a c$: erunt β bis β aqua-
lia quadrata $a b, b c$ tripla ejusdem quadrati $a c$.

PRO-

PROPOS. V.

Theorema 5.

Si recta linea ab , secundum mediam
& extremam rationem secetur in c ,
apponaturq; ei da equalis majori ac
segmento: tota recta linea bd secun-
dum mediam & extremam rationem
secatur, & majus segmentum est, quæ
à principio recta linea ab .

Quia enim est, ut $a b$

ad $a c$, vel $a d$, ita $a c$ ad $c b$:

etiam convertendo est, ut $d a$

ad $a b$, ita $b c$ ad $c a$: &

componendo, ut $d b$, ad $a b$, ita $a b$, ad $e a$, vel $a d$

d a. Secta itaq; est $b d$ in a , extrema & media

ratione.

PROPOS. VI.

Theorema 6.

Si recta linea ab Rationalis extre-
mâ ac media ratione secetur in c , u-
trumq; segmentorum ac , $c b$ irrationalis
linea est, quæ vocatur Apotome.

Addatur majori segmento

ac , recta ad , æqualis dimidia

totius ab . Quoniam propterea dra-

matris ita $c d$ est, æ quæ supsum æ i XIII.

quadratis rectæ ad ; habebunt quadrata cd ad ad ,

ad in ratione.

36. X.

rationem, quam numerus ad numerum: Perantq;
inter se commensurabilia: ipsaq; recta cd ,
ad commensurabiles saltem potentia. Sed ad di-
midia Rationalia ab , est Rationalia. Ergo & cd .

724. II. X.

Quia vero quadratum cd , ad non γ habens ratio-
nem, quam numerus quadratus, ad quadratum,

89. X.

cum sit quinaris ad univertem; derunt cd , a d re-
cta longitudine incommensurabiles, ac proinde ra-
tionales potentia solum commensurabiles. Quare,
si ex Rationali cd detrahatur a d rationalis po-
tentia solum commensurabilis, erit reliqua a c

174. X.

Irrationalis, qua vocatur Apotome. Rursus, ap-
plicato ad a b rectangulo ac , contento sub ab & b :

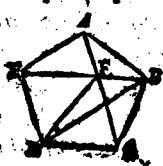
298. X.

cum sit, ut a b ad a c ; Sic a c ad c b : erit hoc re-
ctangulum ac aequale quadrato recte ac . Quare
quadratum Apotome a c , i c rectang. a c appli-
catum ad a b Rationalem facit alterum latu-
be, vel huic aequale segmentum minus cd , Apoto-
men primam.

PROPOS. VII.

Theorema 7.

Si pentagoni $abcde$ equilateri, tres an-
guli abc five qui deinceps, five qui non dein-
ceps sint, aequales fuerint: equiangulum e-
rit ipsum pentagonum.



Primo sint tres anguli b, c de-
inceps. Anguli abf aequalibus
subtendatur recte ab, ac, bd ;
ergo, aut intersectione, illarum
duca-

ducatur recta fd . Iam in triangulis abe & cbd ,
 aequalium laterum, ex hypotesi ab , a & ipsis bc ,
 cd : & anguli contenti aequalis, a ipsis c : erunt &
 bases be , bd ; & anguli aeb , odb , & aequales. 4. I.
 Sed propter be , bd aequales, etiam anguli b & d
 bde sunt & aequales. Igitur ceteri a & d , bde sunt 5. I.
 aequales: Eodem modo in triangulis abc , abc ,
 sunt aequales bases be , ac . & Et anguli abe , aeb ,
 & aequales angulis bac , bca . Itaque cum anguli
 bac & abe , trianguli bfa sint aequales: erunt
 & bf , fa aequales γ : quae demum ex be , ac , & γ 6. I.
 aequalibus, relinquunt aequales fe , fc . Cum er-
 go trianguli fec & latera fe , cd sint aequalia tri-
 anguli fec & lateribus fe , cd , & basis fd com-
 muni: derunt & anguli contenti fed , fec & a- 7. I.
 quales. Ideoque a & d , bcd , quadrati sunt aequa-
 les. Adeoque cum ipsi bcd , ponantur aequales bae
 & abc , ipsique a & d ostensu etiam sit aequalis ced :
 erunt omnes quinque aequales & pentagonum a-
 quilaterum. Deinde tres anguli a , c , d , sunt no-
 deinceps. Rursus ergo in triangulis bae , bcd ,
 & sunt bases be , bd & anguli aeb , odb , &
 aequales. Summa autem & bcd & bdc & aequa-
 les. Igitur ceteri a & d , cde sunt aequales: & sit
 tres d , c , a , sunt deinceps aequales. Ideoque ut
 primum Pentagonum aquilaterum.

EUCLIDISELEM.
PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si pentagoni *abcde* æquilateri & æquianguli duose, *d* angulos, qui deinceps sint, subtrahant rectæ lineæ *ab*, *ce*, hæc mediâ & extrema ratione se mutuo secant, & majora ipsarum segmenta *fb* *fe*, æqualia sunt pentagoni lateri.



Descriptio articulo circa pentagonum. Si sunt quoque arcus ab, bc, cd, de, ea æquales. In triangulis autem cdb, & dce propter æqualitatem bc, cd, da; & æquales contentos angu-

los c, d, æquales sunt bases do, de, & anguli cdb, ccd; quibus cum sit externus bfc, æqualis γ. Erit etiam anguli dce duplex: Sicut & bce, propter duplum arcum bac, ejusdem dce d duplex est. Ideoque bfc, & bfe, erunt æquales, restatque bf, be, & æquales, id est, latus pentagoni bc æquale est segmento majori bf, subtensa bd. Sunt autem & anguli cbd, anguli cdb, æqualibus peripheriis bc, ed insistentibus & æquales. Proinde triângula bcd, cfd, propter angulos cdb, cbd æquales, ipsis fcd, & fdc, erunt γ æquiangula. Eritque nunc bda ad dc, id est, bf: ut a-

dc,

α 14. IV.
β 28. III.

γ 32. I.

δ 33. VI.
ε 6. I.

ζ 27. III.

η 40. VI.

$d c$, id est, $b e$, ad $f d$. Idem, $b d$ in $f e$ et extrema & media ratione. Eodem modo & c in $f e$ eodem ratione secta esse ostenderetur.

PROPOS. IX.

Theorema 9.

Si hexagoni latus $b e$, & decagoni $a b$, in eodem circulo $a b c$ descriptorum, componantur: tota recta linea $a c$ extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum $c b$ hexagoni latus $b e$.



Ex a per centrum d ducatur diameter $a c$, & jungantur recte $a b$, $d e$. Quoniam igitur $a b$ arcus est decimus pars circuli: semicirculus $a c$ continet eum quinque, erit $b e$ quadruplus ipsius $a b$: & angulus $b d c$ $\alpha 33$. VI.

quadruplus anguli $b d a$. Rursus in triangulo $d b e$ equalium laterum $d b$, $b e$; β erunt $b d e$, & $e a$ $\beta 5$. I. quales, quib. α equalis γ externus $d b a$, duplus erit $\gamma 32$. I. ipsius e : Sicut & $d b a$ equalis $\beta b a d$. Et sic ambo $d 42$. I. simul quadrupli anguli e adeoque, his γ equalis externus $b d c$, ejusdem quadruplus. Qui cum & anguli $a d b$ fuerit quadruplus: erunt e & $a d b$ aequales. Et sic propter angulos e & a aequales ipsis $b d a$, & a , triangula $a e d$, & $a d b$, equiangula.

M m 3

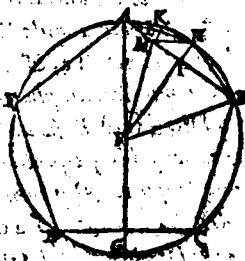
Erit

Erigitur, ut $a e a d a d$, id est, $o b$; Ita $a d$, vel $a b$, ad $a b$. Secta nimirum est $a c$ secundum extremam & mediam rationem, cujus segmentum majus est latus hexagoni. Hinc patet, cum per quincam hujus decratum minus segmentum ex majore, relinquitur majus segmentum, divisum secundum extremam & mediam rationem, quod subtrahito latere decagoni ex hexagoni latere fiat decagoni latus segmentum majus lateris hexagoni, media & extrema ratione secti.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si in circulo $a b c d e$, pentagonum equilaterum describatur; Pentagoni latus $a b$, potest & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo descriptorum.



Ducatur diameter ag
& semidiameter fb ,
& bisecto arcu ab in
 h ; erit ah latus de-
cagoni, & bf hexa-
goni. Rursusq; bi-
secto arcu ah , in k :
Ducatur fk sitans
 ah

74. VI.

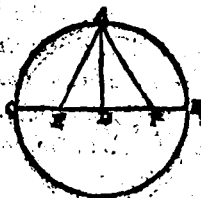
17. VI.

15. I.

12. II.

Quantobrem in ut ab ad ab, ita a h ad h m. Et
 sic sub ab a m, contentum rectangulum aequale
 quadrato ah. Sed sub a b, b m est ostensum a-
 quale quadrato b f. Itaq; rectangula sub ab, b m,
 & a b, a m, aequalia sunt quadratis b f, a h si-
 mul. Sed illa duo rectangula sub a b, b m &
 ab, a m sunt λ aequalia quadrato ab. Aequale ergo
 est quadratum ab, quadratis b f, a h, laterum He-
 nagoni & decagoni. Hinc patet prima, quod linea
 ex centro bisecans arcum, ejus quoq; sub
 tensam bisecet. Secundo quod diameter circu-
 li ex uno angulorum pentagoni latus ipsi op-
 positum bifariam lecer.

Scholium.



Ex Ptolemao usitata est
 praxis, qua una eademq; o-
 peram dato circulo & pen-
 tagonum & decagonum
 describantur. Ejus demon-
 stratio hac est. In circulo
 abc, super diametro b ac-

rigatur perpendicularis ex centro d a, & d c bi-
 fariam secta in e ducatur ea: ipsiq; aequalis abscin-
 datur ef; & ducatur fa. a Erit fa latus pentago-
 ni, & f d decagoni. Quia enim d c bisecta est in
 e, ipsiq; adjectis d f, a erit rectangulum sub cf, d f,
 una cum quadrato de, aequale quadrato rectae f
 vel

14. II.

vel ea, β quod aequale est quadrato rectangulo cd ,
 da. Dempto itaq; quadrato communi de : relin-
 quitur rectangulum sub cf , df , aequale quadrato
 rectangulo ad , id est, quadrato cd . γ Erit igitur, ut cf
 ad cd ; ita cd ad df , & sic cf divisa est secundum ex-
 tremam & mediam rationem in d . Cum igitur
 illius segmentum majus cd sit latus δ hexagoni:
 erit d latus δ hexagoni ejusdem circuli. Rur-
 sus quoniam quadratum ϵ a aequale est quadra-
 to laterum hexagoni ad , & pentagoni df , ζ erit
 ϵ a latus pentagoni.

C47.I.

74.VI.

815.IV.

891.III.

818.XII.

PROPOS. XI.

Theorema II.

Si in circulo $abcde$ Rationalem habente
 diametrum ag , pentagonum $abcde$, α -
 quilaterum describatur: Pentagoni latus
 ab Irrationalis est linea, quae vocatur
 Minor.



Per centrum f ducatur diame-
 tri ag , bh : quorum ag secun-
 da cd latus in i : connectanturq;
 ac , ah ; Quorum ab secun-
 da bh in k . Abscindatur
 quoq; ex semidiametro fh quar-
 ta ipsius pars fl ; itemq; ex re-
 ctangulo ac quarta eius pars cm . Quoniam igitur dia-
 meter

α 16. X.
β cor. 10.
XIII.

γ 32. I.
δ 4. VI.
ε 15. VI.
ζ 22. VI.
η 8. XIII.
θ 1. XIII.
κ 6. X.
λ 20. VI.

metur b h Rationalis est, erunt & ipsius aliquotae
partes b f, f l rationales. Tomq; b l utriq; cōmensu-
rabilis, α Rationalis. Rursus, quia f b ex centro se-
cat arcum ac bisariam in b; ergo β & ipsius sub-
tensam a c in k, & ad angulos rectos. Sicut & ag
ipsam c d in i. Atq; ita triangula a c i, a f k, re-
ctangula, propter communem angulum a sunt a-
quiangula γ: d eritq; ut c i ad c a; ita f k ad f a:
& permutando, ut c i, ad f k; ita c a ad f a. Ille
autem e a ad f a, ita s est c m, quarta pars ipsius
c a ad f l, quartam partem ipsius f a. Erit ergo ut
c i ad f k, ita c m ad f l: & permutando ut c i
ad c m, id est, barum duple c d ad c k, ita f k ad
f l: & componendo, ut c d c k simul, ad c k, ita f k,
f l simul, id est, k l ad f l. Ideoq; erit, ut quadra-
tum rectarum c d, c k simul, ad quadratum c k;
ita quadratum k l ad quadratum f l. Quia verò, si a c
fecerit media & extrema ratione, ducta videlicet
a recta b d, majus ipsius segmentum η aequale est la-
teri pentagoni, ut c d: & erit quadratum composi-
ta ex c d segmento majore & c k, dimidia totius.
Quintuplū quadrati rectae c k seu dimidia totius,
Quare & quadratum k l quintuplū est quadrati
f l. Ideoq; quadrata k l, f l commensurabi-
lia sunt, & rectae k l, f l potentia saltem com-
mensurabiles. Sed f l erat Rationalis. Ergo & k l.
Deinde, quia b: continet quatuor partes ipsi f l
equa-

aequalis sit b l talium quing. a habebit b l qua-
 dratum talium 25. quatum fl. una propter ra-
 tionem duplicatam quadratorum ad latera. & kl
 quing. Cum igitur quadratum b l. k l. non ha-
 beat rationem numerorum quadratorum: Sicut
 enim ut 25. ad quing. vel quing. ad unum:
 μ erunt recta b l. k l. longitudine incommensura-
 biles. Ideo, cum & Rationales; erunt Ratio-
 nales potentia solum commensurabiles. Si inq.
 ex rationali b l. dematur Rationalis k l. poten-
 tia tantum commensurabilis; γ Erit reliqua b k Irra-
 tionalis & Apotome, cuius congruens est kl. Iam
 recta b l possit plus, quam kl, quadrato recta n.
 Quoniam quadratum b l, equale est quadrato k l
 & n, sed quatum b l fuit 5. talium k l est una. γ
 Erit n reliqua talium 4; habebunt igitur quadra-
 ta b l & n proportionem numeri ad numerum.
 Ideo, erunt n commensurabiles, ipsae, b l & n
 recta commensurabiles saltem potentia: Sed b l est
 ostensa Rationalis. Erit igitur & n rationalis.
 Quoniam illa b l ad n ratio, non est numerorum
 quadratorum. Est enim quing. ad quatuor.
 μ Erunt b l & n longitudine incommensurabiles,
 ac proinde rationales potentia solum commensura-
 biles. Quare cum tam b l rationalis longitudi-
 ne, sit commensurabilis rationali b h: (Quatum
 cum b h est a l o, tantum b l est quing.)
 posita

Σ cor. 8.
VI.

o 31. IV.

π 27. IV.

ε 28. X.

possit, plus quam congruus kl quādamto recta a
sibi longitudine incommensurabilis, erit bk Aporo-
ma quarta ex definitione. Deniq, quia a b ē me-
dia proportionalis inter b h, b k; Quia bah est
rectangulum o propter angulum rectū d, ex quo
dimissa perpendiculari ak, π erit ab, quadratum
aquale rectangulo sub bh, bk, Cum igitur super-
ficiem sub Rationali bh, & apotema quarta bk,
possit recta a b, & erit ab minor.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si in circulo a b c, triangulum aequilae-
rum a b c describatur, trianguli latus a b po-
tentia triplum est ejus lineae d b, quae ex cen-
tro circuli d ducitur.

α coroll.
10. XIII.



β cor. 15.
IV.

γ 47. I.

δ 21. III.

Ducta diametra a n; sectur
α & arcus b c in e, & subten-
s b c in f bisariam, & ad angulos
rectos: erit b e, dimidia pars
tertia b c, pars sexta circuli.
psu d, subtenso b c latus bema-
goni, aequale β semidiametro circuli. Quomā ar-
go quadratum a c γ aequale est quadrato ab b e,
quod angulus a b c in semicirculo sit rectus δ. Est
autem

totius recta ac quadruplum recta be dimittit. Schol.

Qualiumvis, partium quadratum a b, be sunt 4. 11.

quatuor, latitudo be est una, & a b tres: adeoq;
quadratum a b triplum quadrati be, vel semidia-
metri b d. Aliter patet: Diametrum circuli
potentia esse sesquialterum ad latus trigoni
equilateri, quia ipsius partes sunt quatuor, qua-
litas huius sunt tres. 2. Semidiametrum de
bisariam fecerit in f, a latere trianguli be.
Cum enim quadratum a b, sit triplum ipsius be,
si a b ponatur partium 12. erit be cillum 4. Est
autem quadratum be aequale quadratis fb, fe,
& talium partium tres habet b f, quia quarta
pars quadrati a b; Una igitur illarum est fe, ipsi-
usq; quadruplum e be, id est, de, ac proinde fe di-
midia est ipsius d e.

PROPOSITIO XIII.

Problema 1.

Pyramidem constituere & datam sphaeram
compleri, & demonstrare, quod sphaerae
diameter potentia sit sesquialtera lateris
ipsius pyramidis.



In diametro sphaerae
a d sit dupla ipsius ab
ducaturq; perpendi-
cularis e d, & linea

ca,

17. VI.

47. I.

4. I.

12. XIII.

ea, c b. Longi intervallo h c, id est, de abatur
 circulus e f g, in quo inscribatur triangulum a-
 quilaterum e f g. Iungantur g h f, h g, aequales e-
 ipsi d c, super h erigatur perpendicularis h i, aequa-
 lis recte a d: Et ex i demittantur i e, i f, i g. Er-
 unt quatuor hisce triangulis comprehensum soli-
 dum pyramis sive Tetracdrum. a Quoniam en-
 nim quadratum a d est duplum quadrati c d,
 Et quadratum c a triplum E ejusdem c d: Ideoq;
 etiam ipsarum i e, i f, i g aequalium 7 ipse c a qua-
 drata erunt & tripla quadratorum h e, b f, h g,
 semidiametrorum. Erunt triangula quatuor e f g,
 e f i, f g i, g e i, aequaliter a & equiangulara, ex qui-
 bus constituta pyramis, data sphaera, cujus diame-
 ter a b est, inscripta. Extensa enim i h, qua a-
 qualis ipsi a d in k, dum i k fiat equalis ipsi a b.
 Quia inter i h, h k media proportionales sunt h e,
 h f, h g (Sunt enim aequales ipsis a d, d b, d c) e-
 jusdem sphaera sub i k, id est, a b diametro semi-
 circuli transibunt puncta i, k, e, f, g; eritq; sphaera
 data diametri a b, inscripta pyramis e f g i, ad
 ejus latus quodvis ipsius sphaera diameter est ses-
 quilatera. Cum enim e proportionales sint a b,
 a c, a d; erit, ut a b ad a d, ita quadratum a b
 ad quadratum. Sed a b est sesquilatera ipsius a c.
 Igitur Et a b, id est, ipsius i k diametri sphaera qua-
 dratum erit sesquilaterum quadrati a c, id est,
 ejuus lateris pyramidis. Quod erat faciendum.

Corollarium.

1. Erit etiam diameter sphaerae potentia quadrupla sesquilatera semidiametri circuli circa basin pyramidis descripti.

Quia enim $a b$ est ostensa sesquilatera ipsius $a c$, id est, $c f$: Erit quadratum $c f$: tantum partium 6. qualium $a b$ novem. Talium autem he tantum est 2. quia quadratum $c f$ ipsius $h c$ est triplum. Quadratum igitur $a b$ 9. est quadrati $a b$ 2. quadruplum sesquilaterum.

2. Perpendicularis ex centro i sphaerae ad planum basis $e f g$ pyramidis $e f g$ remissa sexta pars erit diametri $a b$ sphaerae & tertia semidiametri $a i$.

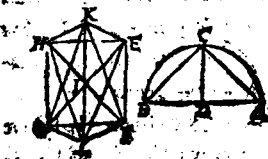
Quia enim $a d$ 4. est dupla ipsius $b d$ 2: erit ipsius $a b$, 6. Id, 1. pars sextae; ipsius $a i$ pars tertia. Cumq; altitudo $h i$ sit ipsa $a d$, continebit hac duae tertiae diametri; & proinde quadratum diametri 9. ad altitudinem 4. exhibet ipsorum proportionem duplicatam ad 3. ad 2. Si ex materia fiant 4. triangula aequilatera, quae hunc in modum disponantur, fiet inde pyramis ut docet Durerus.



EUCLIDIS ELEM. PROPOSITIO XIV.

Problema 2.

Octaedrum constitutere, & sphaera complecti, qua & pyramidem, & demonstrare quod sphaerae diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.



Circa diametrum ab, data sphaera, descripto semicirculo, erigatur ex centro perpendicularis ac, & connectantur ca, cb &c.

a 4. I.

quales. Super e faequali ipsi ac fiat quadratum efgh, diametris eg, fh, secantibus se in aequaliter. Jam ad platum hoc quadratum utring, ex utroque perpendicularis rk, itales ipsi de. Junganturq, puncta k. Item efgh per

3. & 4. I. Circa ex octo triangulis aequalibus & equilateris kef, kfg, kgh, keh, ice, leh, lhg, lfg, factum solidum octaedrum, quod datae diametri ab sphaerae inscriptum est. Quia super k h, id est ab diametro motu semicirculus omnia etiam e, f, g, h, tanquam aequaliter a centro a distantia puncta transit, estq, sphaerae diameter a b dupla ipsius ac, id est ef vel cgh, lateris octaedri.

Corol.

Corrollaria:

1. In octaedro tres diametri kl, ef, fb se mutuò ad angulos rectos secant in i centro sphæræ. *Quia omnes ad i. anguli sunt ostens recti.*

2. Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis est quadratum $efgb$. Et vertices k, l , altitudinesq; ik, il , semidiametri. *Habent enim plana similia & æqualia.*

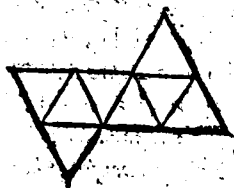
3. Si Tetraedrum & Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, Tetraedri latus potentia sesquitertium est lateris octaedri. *Quia enim potentia diametri ab o est sesquilatera d lateris Tetraedri 4. & dupla e Octaedri 3: Erit potentia laterum illorum 4. ad 3. id est sesquitertia.*

4. Bases octaedri oppositæ sunt parallele.

Scholium.

¶ 16. XI.

Durerus ex materia vult fieri, si ita inter se complacentur octo tria angula.



N n

P R O.

Oppositorum enim planorum $efki, ghlm$ diametri sint ek, fi, gm, hl per quae ducantur plana ek, lh, fi, mg ; quorum utrumque cum s secet 15. XI. Cubum, transibit utrumque per centrū p , in quo 2 schol. etiam omnes cubi diametri se bifariam secant, 39. XI. per idem punctū p cōmunis planorum sectio non incedet. Quia verò plana ek, lh, fi, mg sunt reſt angula, quod 6 h e aequē ad ek , quā ef , ad ei perpendicularis n̄ est; 7 aequalia propter latera equalia. Adeoq; diametri sibi el, fm, hk, gi & aequales; ut 8 semidiametri $pe, pl, ph, pk, pf, pm, pg, pi$. Quare ex centro p descriptus semicirculus, circa el circūductus, describet sphaeram omnes Cubi angulos attingentem. Haec ergo el est ipsi ab equalis. Quia enim quadratum ek aequale est quadrato ef, fk , id est, duplum quadrati ef , vel kl : Erunt quadrata ek, kl tripla quadrati kl , 9 sic quadratis ek, kl , aequale quadratum el etiam est triplum quadrati kl , vel bc , cujus quadrati bc etiam triplum est quadratum ab . Cum enim ab, bc, bd sint proportionales; erit, ut ab prima ad b d̄ tertiam: ita quadratum ab , ad quadratum secundae bc , id est, ab est triplum ipsius bc ; sicut 6 el . Erunt ergo ab, el equalia. Cumq; quadratum el fuerit triplum quadrati kl , patet diametrum sphaerae potentia triplum esse lateris Cubi.

Corollaria.

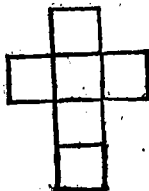
1. Omnes diametri cubi inter se sunt æquales, seq, mutuò bifariam secant in centro sphæræ; eodemq; modo lineæ centra oppositorum quadratorum continentes secantur bifariam in centro.

2. Potentia diametri sphæræ seu cubi, æqualis est potentiis laterum Tetraedri & Cubi simul sumptis.

α 13. XIII. *Qualium α enim partium quadratum diametri est 9, talium sex est quadratum lateris Tetraedri*
 β 15. XIII. *medri β taliumq; 3, quadratum lateris cubi.*

Scholium.

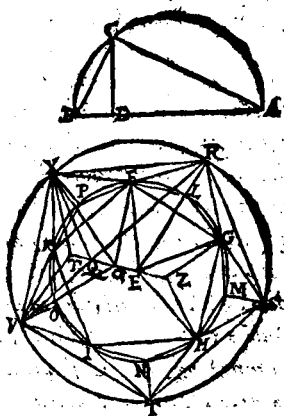
Ex materia aliqua in 6 quadrata equalia in hunc modum divisa optime fiet cubus seu figura & angularum tessera similis.



PROPOSITIO XVI.

Problema 4.

Icosaedrum constituere, & sphaera
complecti, quâ & ante dictas figuras;
& demonstrare quodd Icosaedri latus
Irrationalis est linea, quæ vocatur
Minor.



Circa diametrum data sphaera a b descripto se-
micirculo, auferatur ex a b pars quinta d b, ut ab
ipsius bd sit quintupla: Ipsius ad vero sesquiquar-
ta; & ad ipsius db quadrupla. Ex d erecta per-
pendiculari dc connectantur ca, bc. Intervallo
cf id est, bc describatur circulus cui a inscribatur a II. IV.

Nn 3

pen.

pentagonum aequilaterum $fg h i k$, divisitq; arcu-
 bus fg, gh, hi, ik, kf , bifariam in punctis, $l, m,$
 n, o, p connectantur fl, lg, gm, mh , cetera
 decagoni. Deinde ex illis punctis ad planum cir-
 culi $ghik$ erigantur perpendiculares $eq, lr,$
 ms, nt, ou, px , aequales semidiametro cf vel
 bc ; & sic β parallela ipsi eq , quam cum singulis
 opposita bina aequales & parallela γ connectunt
 semidiametro aequales; ut sic δ plana duo opposita
 parallela $fg h i k$, & $rstux$ contineant quin-
 que semidiametros aequalium parallelorum cir-
 culorum. Connectantur jam puncta $rs, t, u, x,$
 per lineas ts, st, tu, ux, xr , quae β parallela sunt
 lineis oppositis ut r & x ipsi tp , & γ aequales, aequa-
 lesq; & in circulis aequalibus subtendunt arcus: estq;
 rx pars quinta circuli $rstux$, sicut lp pars quinta
 est circuli $ghik$. Eodemq; modo reliqua omnes
 etiam quintae partes eorum circularium auferunt, &
 sic pentagonum $fg h i k$ aequilaterum aequale est rs
 tux . Ductis $rf, rg, sg, sh, ti, ui, uk, xk,$
 xf ; quae omnes possunt & semidiametros seu
 perpendiculares lr, ms ; & latera decagoni ut $fl,$
 $lg.$ η Ideoq; sunt aequales latera pentagoni ejusdē
 circuli, id est, ipsi $fg r x$; & sic decem triangula
 $r fx, rfg, rgs, g h t, t h i, i u, u i k, u k x,$
 $x k f$, aequilatera & aequalia sunt. Jam eq perpen-
 dicularis utriusq; extendatur ut qy & $e z$, sinē a-
 quales latera decagoni quae puncta zy connectan-
 tur

§ 6. XI.

¶ 1.

§ 6. XI.

§ 18. III.

§ 47. I.

§ 10. XII

tur cum singulis angulorum pentagoni f, g, h, i, k ,
 $\& r, s, t, u, x$; quæ rursus omnes $\&$ possunt semidi-
 ametros $\&$ latera decagoni illorum circularũ.
 Ideoq; $\&$ æquales sunt lateri p̄tagoni, ut sic fiāt
 usring; 5 triāgula æquilatēra $\&$ æqualia priorib;
 10. Hæc ergo 20 triāgula, si suis laterib; cōnectā-
 tur, efficiēt Icosædru. Dico hæc ipsum cōpre-
 bendi sphaera diametri $a b$. Divisa enim $e q$ in α ,
 ducantur $\alpha f, \alpha x, \alpha u$. Quoniam latera $\alpha q, p u$.
 triāguli $\alpha q u$, æqualia sunt lateribus $\alpha q, q x$
 triāguli $\alpha q x$, cum $q u, u x$ sint semidiametri
 circuli $r s t u x$, $\&$ anguli $\alpha q u, \alpha q x$ recti. $\&$ Er-
 runt b̄ses $\alpha u, \alpha x$ æquales. Itasi ducantur
 $\alpha r, \alpha s, \alpha t$, æquales ostenderentur, ipsis $\alpha u, \alpha x$.
 Rursus quia triāguli $\alpha q x$ latera $\alpha q, q x$ æqua-
 lia sunt lateribus $\alpha e, e t$, triāguli $\alpha e f$, quia $e f$
 $\&$ $q x$ æqualium circularũ sunt semidiametri, $\&$
 anguli $\alpha q x, \alpha e t$, recti: Erunt bas̄es $\alpha x, \alpha f$,
 æquales. Quibus eadem modo æquales ostende-
 rentur $\alpha h, \alpha g, \alpha i, \alpha k$. Sunt ergo omnes decem
 lineæ, ex α ad decem angulos $f, g, h, i, k, r, s, t, u, x$
 ductæ æquales. Quia verò $q e$ est semidiameter
 seu latus hexagoni $\&$ $e z$ decagoni: $\&$ erit $q z$ divi-
 sa in e , secundum extremam $\&$ mediam ratio-
 nem, $\&$ minus segmentum $e z$, assumens $e \alpha$ di-
 midium majoris, id est, αz , quintuplum μ potest
 quadrati $e \alpha$.

03. def. XI

x 4. I.

A 9. XII.

μ 3. XIII.

Potest autem $\mathcal{E}$ α $\mathcal{E}$ quintuplū ejusdem quadrati
 $\mathcal{E}$ α , quia $\mathcal{E}$ $\mathcal{E}$ dupla ipsius $\mathcal{E}$ α , quadruplū, est qua-
 dratum ipsius $\mathcal{E}$ α , $\mathcal{E}$ utriusq; simul quintuplum e-
 jusdē $\mathcal{E}$ α . Erunt ergo quadrata $\alpha\mathcal{E}$, $\alpha\mathcal{Z}$ equalia: i-
 pſeq; recta equales. $\mathcal{E}$ cum $\mathcal{Z}\mathcal{Y}$ secta ſit bifariam
 in α , erūt omnes recta ex α , ad omnes Icoſaedri an-
 gulos ducta equales, $\mathcal{E}$ ſphæra illig diameter erit
 equalis diametro ſphæra ab . Cum n. ſit, ut $\alpha\mathcal{Z}$ ad
 $\mathcal{E}$ α , ita $\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ dupla ipsius $\alpha\mathcal{Z}$ ad $\mathcal{Q}\mathcal{C}$ duplā ipsius $\alpha\mathcal{C}$; $\mathcal{E}$
 quadratorum erunt, earū quadrata, cumq; qua-
 dratum recta ſit quintuplum ipsius $\mathcal{E}$ α , erit etiam
 quadratum $\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ quintuplū quadrati recta $\mathcal{Q}\mathcal{C}$, id
 eſt, bc , cui poſita eſt equalis. Sed $\mathcal{E}$ ejusdem qua-
 drati bc quintuplum eſt quadratum ab , o cum
 ſit, ut ab ad bc , ita bc ad bd : erit etiam, ut
 ab , ad bd ; ita quadratum ab ad quadratum bc ;
 adeoq; quadratum ab , quadrati bc quintuplum
 eſt, ſicut ab ipſius bd eſt quintupla. Ideoq; qua-
 drati rectarum $\mathcal{Y}\mathcal{Z}$, ab , equalibus erūt ipſe quo-
 que equales; $\mathcal{E}$ ſphæra circa ipſas equales. Quia
 deniq; diameter ſphæra $a b$ ponitur Rationalis, $\mathcal{E}$
 poteſt quintuplum quadrati bc vel cf : erit $\mathcal{E}$ cf
 ſemidiameter circuli $eghik$ Rationalis; cū ſint π ,
 ut numerus ad numerum 5 ad 1. $\mathcal{E}$ ſic cōmenſura-
 bilis ſaltem potentia: Et tota diameter ejusdem
 circuli Rationalis erit: proptereaq; laſus pētagoni,
 id eſt, Icoſaedri Irrationalis g erit linea vocata
 Minor.

Corol.

Corollaria.

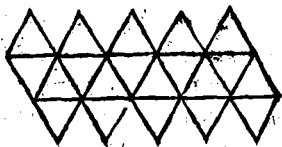
Diameter sphaerae est potentia quintupla semidiametri circuli quinquelatera Icosaedri ambientis. *Quadratum enim a b quintuplum est ostensum quadrati b c, id est, semidiametri c f.*

2. Diameter z sphaerae componitur ex latere eg , hexagoni, & duobus lateribus qy, ez decagoni ejusdem circuli $fgbik$.

3. Latera Icosaedri opposita kx, bi sunt parallela. *Quia eidem lp sunt parallela.*

Scholium.

Si triangula 24. disponantur hoc modo, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem.



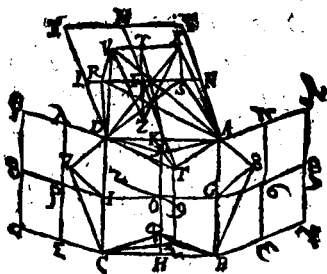
PROPOSITIO XVII.

Problema 5.

Nn 5

Dode

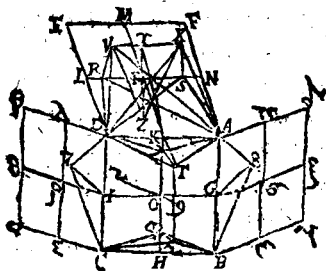
Dodecaedrum constituere & sphaera complecti, qua & praedictas figuras: & demonstrare, quod dodecaedri latus est Irrationalis linea, quae vocatur Apotome.



Sit una basis cubi, data sphaera comprehensi, quadratum abcd cui aliud aequale ad angulos rectos insit ad ef quorum communis sectio sit ad. Divisis cuilibet lateribus bifariam in g, h, i, k, l, m, n, punctis, iung, connexis a secantibus se rectis in punctis op, secantur ok, pl, po, extremae & mediae ratione in punctis qrs ex quib. ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares qt, ru, sx, aequales segmentis majoribus oq, pr, ps, & conjungantur rectis at, ax, dt, du, ux. Erit at dux, unum ex duodecim pentagonis aquilateris & aequiangulis dodecaedri constituendi. Esse hoc in uno plano constat. Quia cum rax, ad quadrat-

dratum adef, sint recta & parallela & aequales § 6. XI.
 nunquam equalium segmenta eadem: y Erunt et- x 33. I.
 iam rux illas connectentes aequales & parallela.
 Et quia a d, r s; etiam aequales rectas parallelas
 a n, d l connectentes, sunt parallela; d erunt & d 9. XI.
 ad, ux parallela, & has connectentes ax, du, in-
 e eodem cum ipsis plano. Et sic Trapezium a d ux § 7. XI.
 in uno est plano. Sed quia & triangulum a t d in
 uno est plano; erit etiam in eodem cum trapezio.
 Ducta enim py, perpendiculari parallela ipsi r u;
 connectantur kt, ky. Quoniam est, ut ok ad oq;
 Ita o q ad q k: & k p aequalis est ipsi o k. Quia
 laterum cubi sunt dimidia, & py ipsi o q, id est,
 r u; erit etiam ut k p ad p y, ita o q, id est, q t,
 ad q k. Quare cum triagula pky, qtk duo latera
 duob; circum angulo conjunctis, proportionalia
 habeant; latera q, p k, q k, homologa & parallela,
 quia utrumq; est rectum ad quadratum abcd: &
 p y, q k, parallela, quia utrumq; est rectum ad
 quadratum adef: § erunt reliqua latera ky, kt, § 32. VI.
 in eandem rectam collocata. Et q recta ty, in uno § 1. XI.
 erit plano. & sic plana a d t, & a d ux, unum
 sunt planum per rectas a d, t y ductum. Est ergo
 pentagonum atdux in eodem plano. Sed & a-
 quilaterum esse iam patet. Triangula enim re-
 ctangula a ns, akq, duorum equalium la-
 terum an, ns ipsi ak, k q; etiam bases as, a q § 4. I.
 habent aequales &.

Rursus



- Rursus triangula rectangula asx , aqx , duorum
 equalium laterum as , sx , ipsis aq , qx , (quia sx , qx
 equalium eadem sunt segmenta) etiam bases ax ,
 et aequales habent. Idemq; in triangulis dqz ,
 duz , ostenderetur de lateribus cd , du , quod e-
 qualia sint ipsi ac . Erunt ergo 4. pentagoni
 latera aequalia, quibus aequale etiam ostendetur
 ux , x quadrata rectarum p , n , n simul sunt tri-
 pla quadrati ps vel sx . Sed quadrato recte po a-
 quale est quadratum recte an . Igitur & quadra-
 tum an , n s simul sunt tripla quadrati s ; & illi
 aequale quadratum a ejusdem quadrati s tri-
 plum: & quadratum as , s x simul quadrupla qua-
 drati s ; & sic eisdem aequale λ quadratum a x
 quadruplū quadrati s , id est quadrati ps μ vel
 sy . Sed quia dupla ipsius xy , id est xu ; Quadra-
 tum etiam est y quadruplum. Erunt quadratum a x
 xu aequalia, ipsaeq; rectae aequales; cui a x cum &
 reliis

reliqua tria at, td, du sint equalia; Erit p̄tagonū
at dux aquilaterum. Est verò & equiangulum.

Ductū enim ar, au, cum po sit in s̄secta media & 1 per sch.
extremā ratione, eig, additā p̄ equalis majori se 4. 11.

gm̄eto ps; & erit quoq; nr̄ s̄secta in p̄ extrema & me 5. XIII

dia ratione, majusq; segmentum np. Erunt igitur
quadrata rectarum nt, rp, simul tripla qua-
drati np, id est, an. Est autem quadratum ru a-
quale quadrato rp. Ideoq; nr, ru etiam simul sūt
tripla quadrati an; & proinde quadrata nt, ru,
an, quadrupla sunt ejusdē quadrati an. Sunt au-
tem quadrata nr, an equalia quadrato ar. Igi-
tur & ar; ru quadrupla sunt quadrati an, & il-
li γ equalia quadratum au, quadruplū recta an.
Cumq; ejusdē an dupla ad quadratū sit etiā qua-
druplū quadrati an. Igitur quadrata ad, au sunt
equalia ipsaq; recta equalia. Eodemq; modo dx,
ad sunt equalia; & sic tres ad, au, dx, sunt equalia.
Jam in triangulis ta d, & dux, equalium
lateralum ejusdem pentagoni, & basium ad, dx;
erunt & anguli at d, dux equalia. Eidemq; 8. I.

dux equalis axu. Proinde, cum tres pentagoni
equilateri anguli sint equalia, & erunt omnes in- π 7. XIII.
ver se equalia. Et sic pentagonum aquilaterum
& equiangulū. Quod si sumantur alia duo cubi
quadrati c aß d, by da, recta ad quadratum a
bc d, quorum singula latera secantur bisatiam
in e, ð, λ, i, μ, ξ, π, g punctis; qua jungantur recta
secan-

secantibus se mutuò in certis quadratorum ρ, σ .
 Secentur jam $oh, ok, \rho i, \sigma g$, extrema & me-
 dia ratione in punctis $\Phi, q, 3, 4$, ex quibus plana
 quadratorum ad partes cubi exteriores perpen-
 diculares $\Phi 2, q 3, 37, 48$ aequales segmentis ma-
 joribus $\Phi o, q o, 3 \rho, 4 \sigma$, junganturque
 $tz, 2c, c 7, 7 d, d e, ta, a 8, 8 b, b 2$: eodem-
 que modo ostendentur pentagona $t z c 7 d$ &
 $t z b 8 a$, esse aequilatera & aequiangula, & a-
 qualia priori ob latera communia td, ta . Et
 sic habent tria pentagona tangencia cubi triala-
 tera $a d, d c, a b$, si aig, mutuò coharentia late-
 ribus communibus td, ta .

Qua methodo alia novem sunt fabricanda
 pentagona similia tangencia reliqua novem cu-
 bi latera, & habebitur sphaera comprehensum
 Dodecaedrum.

Iam intelligantur plana cubi opposita se-
 cari planis $a d e f$, & $a b c d$; per rectas pla-
 norum latera bifariam secantes km & ln, gi
 & $h k$ ductis.

Hac plana secantia cum sint recta ad pla-
 na cubi, utpote parallela basibus cubi, rectis ad
 e 19. XI. plana $a d e f$, & $a b c d$; e erunt & sectiones
 eorum communes ad cubi plana recta.

Idem

Ideoq; cum yp sit recta ad planum $adef$, ipsa versus z producta erit communis sectio planorum per rectas km , ln ductorum.

Ita, si ex o ad planum $abcd$ erigatur perpendicularis goz : Erit ipsa communis sectio planorum per rectas gi , hk , ductorum. Sed quia diæta omnes sectiones & diametri cubi se mutuò bisariam secant σ : Secent se in z ; & σ 39. XI. bisariam sese diametri cubi secant τ in centro τ cor. 1. 13. sphaera cubum completentis. XIII.

Erit igitur z centrum sphaera circa cubum descripta, & omnes lineæ z , ad omnes angulos cubi erunt æquales.

Sed & ad omnes angulos Dodecaedri ex z ductæ rectæ erunt iisdem omnes æquales.

Ductæ enim zx : quoniam parallela & sunt k p , oz , cum utraque sit recta ad planum $abcd$:

Itemq; & ok , zp tanquam recta ad planum $adef$: erit pk oz (quia duo z conjuncta debent intelligi) parallelogrammum, & pz μ æqualis ko , vel np , dimidio lateri cubi.

Est autem py , ipsi pr : æqualis tota ergò zy , toti nr æqualis erit.

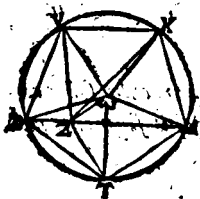
Quare

O 15. V.

Φ 12. V L

Quare cum quadrata nr , pr , simul sint tripla quadrati np , quod nr in p media & extrema ratione est secta; erunt etiam quadrata zy , py ; id est, zy , xy , simul tripla quadrati ps , quia xy , aequalis est ipsi ps vel py . Sed quadratus zy , xy , λ aequale est quadratum zx : Erit igitur & hoc triplū quadrati zp , id est, quadrati dimidii lateris cubi; cuius etiam triplum est quadratum semidiametri sphaera cubum cōprehendens (ut & enim diameter ad latus cubi: Ita semidiameter ad dimidium cubi. Ideoq; Quare quadratum diametri, ad quadratum lateris cubi, ita quadratū semidiametri ad quadratū dimidii lateris. Cum ergo quadratum diametri sit triplum quadrati lateris; erit & semidiametri quadratū triplū quadrati dimidii lateris.) Erit itaq; quadratum zx , quadrato semidiametri sphaera seu cubi aequale: Ipsaq; zx , aequalis semidiametro. & idem semidiametro & zu , quia zu & zx rectorum aequilaterorum zyx , & zyu bases sunt, est & aequalis: tumq; & za , zd , ad angulos cubi, semidiametro sphaera sint aequales, ut antea dictū erunt jam ex centro z , ad 4. angulos pentagoni, a , d , u , x , aequales semidiametro sphaera. Sed quod eodem semidiametro aequalis etiam sit zt , ad angulum t , quintum, ita patet; si circa pentagonum aequilaterum illud describatur circulus at d u x , in cuius planū ex z centro sphaera demittatur perpendi-

perpendicularis $\zeta\omega$, & ω connectatur cum a, t, d, u, x punctis. Quoniam quadratum ζa aequale est quadratis $\zeta\omega, a$; & quadratum ζx aequale quadratis $\omega \zeta, \omega x$; erunt subtrahendo communi quadrato $\zeta\omega$, ex quadratis aequalium restarum ζa & ζx , equalia quadrata ωa & ωx ; ipsaeque rectae $\omega a, \omega x$ aequales. Nec aliter rectae $\omega u, \omega d$, & inter se ipsas ωa & ωx aequales sunt, quia $\zeta u, \zeta d$ sunt astra aequales. Cum ergo ex pluribus



duobus aequales cadant in $\chi 9. III.$

peripheriam, χ erit ω centrum circuli. Ideoq; ωt reliquis ex centro aequalis erit, & quadrata $\zeta\omega, \omega t$, equalia quadratis $\zeta\omega, \omega a$, efficient aequales $\zeta t, \zeta a$. Ex igitur centro sphaera descripta complectens cubum, comprehendit etiam pentagonum $a t d u x$. Eodemq; modo & omnia dodecaedri latera, adeoque & sphaera eadem comprehenduntur cubus & dodecaedrum. Deniq; cum sit ut $n p$ ad $p s$; ita $p s$ ad $p n$. Erit quoque ut $n l$ dupla ipsius $n p$; ad $t s$ duplatam ipsius $p s$; ita $r s$ ad compositum ex $b n, t s$ seu duplatam ipsius $s n$. Si igitur latus cubi $n l$ secetur extrema & media ratione, majus segmentum erit $r s$; sed $n l$ tota ita secta, est Rationalis, cum ipsius quadratum quadrato diametri sphaera Rationalis sit.

commensurabile, tanquam hujus pars tertia.
 Majus igitur segmentum $\alpha\tau$, id est, latus dodeca-
 edri $\alpha\upsilon$, illi aequale, Irrationatus est linea, que
 vocatur Apotome.

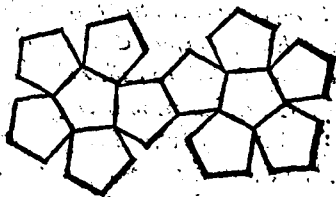
Corollarium.

Si latus cubi secetur extrema &
 media ratione, majus segmentum est
 latus Dodecaedri in eadem sphaera
 descripti.

Recta enim ln , aequalis lateri cubi, secta ex-
 tremis & media ratione, majus segmentum
 habet eodem dodecaedri.

Scholium.

Si duodecim Pentagona hoc modo dis-
 ponantur equiangula & aequilatera; com-
 ponetur ex illis dodecaedrum secundum
 totam soliditatem.

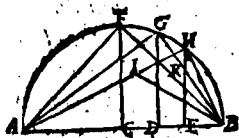


PROPOSITIO XVIII.

Problema 6.

Latera quinque figurarum exponere, & in-
 ter se comparare.

Diam.



Diameter ab secetur
bisariam in c, & ab-
scindantur b d, pars
tertia; & bc pars
quinta diametri; su-

per q, a b describatur semicirculus, & erigantur
perpendiculares c f, d g, e h; connectantur q, f g h,
cum a & b. Hinc ex a h abscindatur equalis la-
teri decagoni h i, cujus semidiameter seu latus
hexagoni est b h: connectantur b i. Deniq, b g
secetur media & extrema ratione in k, ut b k sit
segmentum majus: erit a g latus pyramidis, vel
Tetraedri: a f latus Octaedri; b g latus cubi, b i
latus Icosaedri, b k latus Dodecaedri. Quia
a enim a g est media proportionalis inter b a,
a d; & erit, ut b a ad a d ita, quadratum a b ad
quadratum a g. Est autem a b ad a d sesquial-
tera: Igitur & quadratum a b quadrati a g
sesquialterum erit. Et γ sic a g est latus Tetra-
edri, cujus lateris est sesquialtera potentia dia-
meter. Rursus α quoniam a f est media propor-
tionalis inter b a, a c, erit rursus, ut b a ad a c,
ita quadratum b a, ad quadratum a f. Est
autem b a dupla ipsius a c: Igitur & quadra-
tum a b, quadrati a f. Et δ sic a f est latus Octa-
edri, quippe diameter est potentia dupla lateris
Octaedri. Deinde cum b g a sit media propor-
tionalis inter a b, b d; & erit, ut a b ad b d, ita qua-
dratum a b ad quadratum b g. Est autem a b

α cor. 8.

VI.

6 cor. 20.

VI.

γ 13. XIII.

δ 14. XIII.

15. XIII.

triplici ipsius $b d$: Ergo & quadratum $a b$ quadrati $b g$: & sic $b g$ latus cubi; quia diameter sphaerae potentia est scripta lateris cubi. Postea proportionales & etiam sunt $a b, b h, b e$; & est h ut $a b$ ad $b e$, ita quadratum $a b$ ad quadratum $b h$. Est autem $a b$ quintupla ipsius $b e$: Ergo &

2 cor. 16.

XIII.

& quadratum $a b$ quadrati $b e$. Cum ergo diameter sphaerae potentia sit quintupla semidiametri circuli quing, latera Icosaedri ambientis, ut $b h$ dicti circuli semidiameter, vel latus hexagoni.

47. I.

Est autem $b i$ latus decagoni ejusdem circuli. Ideoq; $b i$ potens est latus hexagoni $b h$ &

618. XIII.

16. XIII.

1 cor. 17.

XVI.

decagoni $b i$, erit & latus pentagoni ejusdem circuli, Et sic $b i$ latus Icosaedri. Deniq; cum $b g$ latus cubi sit extrema & media ratione sectum in k , λ erit $b k$ segmentum majus lateris dodecaedri. Quing, ergo figurarum regularium latera sunt exposita. Comparatio eorundem sic habet: Quoniam diameter sphaerae est potentia sesquialter a lateris pyramidis; & potentia dupla lateris octaedri; & potentia tripla lateris cubi; erunt partium talium quadrata laterum Tetraedri 4, Octaedri trium, Cubi duarum, qualium diameter est sex. Proindeq; latus Tetraedri ad latus Octaedri potentia sesquitercium est: Et ad latus Cubi potentia duplum. Latius autem Octaedri ad latus Cubi potentia sesquialterum. Harum ergo figurarum laterum quadrata

quadrata & diametri sphaera sunt inter se ut
 numerus ad numerum. Ideoque sunt linea inter
 se μ commensurabiles. Et propter diametrum
 Rationalem reliqua etiam rationales sunt, μ 6. X.
 Cumque non sint ut numerus quadratus ad qua- ν corol.
 dratum, & nec erunt longitudine commensura- 25, VIII.
 biles. Et sic Rationales potentia solum commen- ξ 9. X.
 surabiles. At verò latera Icosaedri & Dodeca-
 edri, quoniam sunt linea Irrationales, illud Mi-
 nor, hoc Apotome, nec longitudine nec potentia
 productis sunt commensurabiles. Si enim es-
 sent lateribus tribus prioribus commensurabi-
 les, qua diametro Rationali sunt commensura-
 bilia, essent ipse quoque Rationales quod absur-
 dum, quia sunt Irrationales. Sed nec inter se
 sunt commensurabilia latera Icosaedri & Do-
 decaedri. Si enim longitudine inter se essent com-
 mensurabilia, θ Essent utraque ejusdem speciei θ 104. X.
 vel Minores vel Apotoma. Si autem solum po- π 106. X.
 tentia, π eodem modo latus dodecaedri erit Mi- ρ 16. XIII.
 nor; quia Icosaedri latus est Minor ρ . Quod σ ab- σ 102. X.
 surdum, quia nulle Irrationales specie differen-
 tes, eadem sunt. Quanquam itaque trium prio-
 rum quidem figurarum latera tum inter se, tum
 ipsi diametro sphaera sunt commensurabilia &
 Rationalia: duo verò posteriora ejusdem & dia-
 metro & inter se incommensurabilia & Irrati-
 onalia: Inter eas tamen figuras occurrit hic or-

392. **EUCLIDIS ELEMENTA**

do, ut eodem ordine se excedant earum latera
quo ipsas construximus. Quanquam eum or-
dinem in definitionibus, non observavit Eucli-
des. Majus enim est latus Tetraedri a g, late-
re Octaedri a f: quia majorem subiendit ar-
cum: Et hoc majus est latere cubi b g. cubi au-
tem latus majus esse latere Icosaedri ita patet.

28. III.

20. VI.

Quoniam a b ponitur tripla ipsius b d, & erit
propter duplicatam quadratorum rationem
quadratum a b, nuncuplum quadrati b d; quia
nuncupla est duplicata tripla. Propterea, qua-
lium partium quadratum est novem, talium
unum habet b d. Earundem autem est quadra-
tum b g trium, quod illud hujus sit Q triplum.

15. XIII.

Erunt igitur quadrata g d & d b, etiam talium
trium: sublatog, quadrato b d, unius; erit d g
talium duarum. Sed quia quadratum a b est
quintuplum quadrati b h, & erit hoc minus qua-
talium 2; quia 9. ad 2. minorem quintupla ba-
bent proportionem. Ideoq, quadratum g d ma-
jus est quadrato b h, & g b major quam b h.

10. V.

1. VII.

Rursus quia diameter sphaera & componitur ex
b h semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum
constituitur, & duplo decagoni h i: Erit latus de-
cagoni h i minus tertia parte b d diametri a b.
Si enim credatur aequalis ipsi b d, tum duplum
decagoni esset aequale ipsi a d, & h b ipsi d b. I-
deoq, quadratum a b nuncuplum quadrati b d,

corol.

16. XIII.

erit

erit etiam nuncuplum quadrati $b h$, cuius modo
 erat quintuplum. Non ergo est $h i$ tertia pars
 ipsius $a b$. Sed neq; maior. Si enim ducatur ma-
 jor tertia parte $b d$, erit etiam ipsius dupla ma-
 jor dupla partis tertia $a d$. Et sic $b h$ erit minor
 parte tertia $a d$. Ad eod; quadratum $a b$, majus
 quam nuncuplum quadrati $b d$; quod magis est
 absurdum. Cum ergo $h i$ nec equalis sit nec ma-
 jor tertia parte, erit necessario minor. Itaq; cum
 $g d, d b$ sunt majores rectis $b h, h i$, ut ostensum
 est: erunt etiam ipsarum quadrata majora,
 harum quadrata, sed quadratum recte $b g$ est
 η equale quadratis $g d, d b$; & quadratum $b i$
 α quale quadratis $b h, h i$: Ergo quadratum $b g$
 majus erit quadrato $b i$; latus ubi latere Icosa-
 edri. Deniq; Icosaedri latus $b i$ majus est latere
 Dodecaedri $b k$, quod est segmentum majus li-
 nea $b g$ extrema & mediacione secta. Est e-
 nim rectangulum sub $b g, b k$ majus rectangu-
 lo sub $b g, g k$, adeoq; rectangula sub $b g, b k$ &
 sub $b g, g k$ simul, id est, ω quadratum $b g$, mayo-
 ra sunt duplo rectanguli sub $b g, g k$, id est, A
 quadrato $b k$ bis. (quia $b g, b k, g k$ sunt propor-
 tionales, & quadratum $b k$, α quale est rectan-
 gulo sub $b g, g k$.) Idcirco majora erunt tria
 quadrata recte $b g$, sex quadratis recte $b k$; sed
 tribus quadratis $b g$ equalia sunt 5. Quadrata
 $b h$. (quia quadratum $a b$ tam est triplum qua-
 dra-

ω 2. I.

A 17. VI.

drati gb , quàm quintuplum quadrati bh) a-
 numq; quadratum bg majus erit imò quadra-
 to bh . (sic enim esset aequale quadratum bh , qua-
 drato bk , vel minus; & quadrata bh essent mi-
 nora sex quadratis bk ; quibus tamen majora
 sunt ostensa.) Et recta bh major, quàm recta
 bk : cumq; b major sit quàm bh ; erit etiam
 major quàm bk , latus f cosacdrilacere Dode-
 caedri. Exposita itaq; sunt latera quinq; fi-
 gurarum & inter se comparata.

Quod erat faciendum.

F I N I S.

Corrigenda præcipua.

Pag. 151. l. 11. Lege æqualibus pro sabibus
 p. 333. l. 9. modo pro numero.

