Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI XIII.



Succinctis & perſpicuis demonſtrationibus comprehenſi

à

D. AMBROSIO RHODIO
Kembergenſi, Mathematum
Super: Profeſſore publico in Academia Leucorea.

Editio poſtuma, priore Correctior & Emendatior.

VVITTEBERGÆ,
Impenſis Hæred. Pauli Helwigii, Bibliop.
Excudebatur ab AMBROSIO ROTHIO.
Anno M. DC. XXXIV.







AD

Sereniſſimum ac Potentiſſimum

Principem ac Dominum

DN. CHRISTIANUM II. DUCEM SAXONIÆ, SACRI ROM. IMP. ARCHIMARſchallum & Electorem, Landgravium Thuringiæ, Marchionem Miſniæ, Burggravium Magdeburgenſem Dominum ſuum Clementiſſimum.

M. AMBROSII RHODII Kembergenſis

epiſtola dedicatoria.

CUM JAM à MULTIS ANnis, Princeps Sereniſſime, Domine Clementiſſime, non in ſchola modò, quæ ad Moldam eſt, Illuſtri; ſed & Academia, quæ ultra ſeculum floret ad Albim, cum multis aliis Munificentiam Illuſtriſſimæ Celſitudinis veſtræ quaſi ordinariam expertus

sim; ejus inprimis memoriam nulla mihi unquam ex animo eripiet ætas, quam pro diligentiore opera studiorum Mathematicorum culturæ impendenda, annis hisce proximis supra Academiæ seculum primum excurrentibus, paulò expertus sum largiorem. Hujus enim adminiculi ope, non modò academicam hanc vitam, quæ vel unica studijs urgendis optatissima videtur, continuare; verùm etiam de quamplurimis Academiæ civibus, quod citra jactantiam dictum velim, varias subinde Mathematum partes docendo, benè mereri mihi licuit. Cùm autem animo jam certò constituissem, etiam ad penitiora harum disciplinarum, præcipuè verò Astronomiæ, Geographiæ & Chronologiæ sacra plures deducere; mearum quod partium, curæ etiam fuit maximæ, ut probè illi principijs tum Geometriæ, tum Arithmeticæ prius informarentur, per quæ veluti scalas duas, summa ima quævis in Mathematum ampliſſimo theatro attingere copia sit. Quod cum unus optimè præstet ipsa antiquitate, per tot jam iteratas imperiorum mutationes, singulari Dei providentia, clarus Euclides, in suis Elemen-

mentis, quæ hactenus ab alijs doctissimis Viris sine imperfectione; imò cum abundante perfectione edita sunt: à quorum tamen lectione vel cognitione caritas partim exemplarium, partim prolixitas, quæ ingenioſis tædium, tardioribus exiguum præstat commodum, multos deterrent; id inii consilium; ut, quantum possem, Elementorum tamen probè considerata natura & ingenio, ne vel necessaria deficerent, vel minus necessaria abundarent, Euclidea Elementa cum suis demonstrationibus, integra, sed forma quadam contracta, precioq; exiguo redimenda ederem. Ita enim effecturum me spero, ut calami tædio, & tot literarum in demonstrationibus iterandarum scriptione, devitato, intra paucas septimanas, solis ocularibus demonstrationibus crebriùs repetitis, multa de Elementis hisce universo studiorum ordini summopere necessarijs, cognoscantur, quæ aliàs totidem mensibus, & quod excurrit, vix perciperentur. Huic verò operæ meæ, ut Illustrissima vestra Celsitudo imprimis & maximè, secundùm Deum, favere, eamq; in tutelam suam clementer suscipere velit, unicè mihi exo-

randa videtur: Quod quidem non impetraturum me modò spero, sed planè jam impetratum, futurumque esse confido, ut Clementiam illam pristinam erga me majora atque majora subinde incrementa sumsisse reipsa experiar; & hoc quasi stimulo incitatus, majori, si potero, industria, hoc disciplinarum Mathematicarum stadium decurrere & conficere porrò etiam enitar. Hoc quidem certè habeo polliceri, si quid benedictione divina carius; valetudine optima acceptius; ipsoque divino favore gratius; id omne, ut pro Illustrissima Celsi. vestra, & inclyta Domo Saxonica precibus à Deo æterno pijs impetretur, me vota cum alijs innumeris perpetuò conjuncturum. Wittebergæ X. Calend. Augusti.

Anno M.D.CIX.

AD

M. AMBROSIUM RHODIUM, Nepotem ex sorore cariss.

CVM sic ingenium noctesq; diesq; fatiget,
Et sit magnarum nuda MATHESIS *opum:*
Esse aliquem, res mira, sui qui prodigus, ævum
Insterili ut vulgus judicat, arte terat.
Verùm animâ ceu nemo suam videt: Haud secùs, alter
Gaudia quæ capiat pectore, nemo videt.
Hic tabulæ intentus quærit, num pranderit! urbem
Non sentit, formans pulvere signa, capi.
Alter, jò reperi! geminat, nudusq; per urbem
Evolat inventi cæcus amore novi.
Nobile qui tandem effinxit diagramma, Camœnis
Offert, mactato pinguia sacra bove.
Fas modò sit Phœbi speciem sibi cernere, flamma
Haud neget hic uri cum Phaëthonte pari.
Hoc igitur felicis inaspectabile mentis
Delicium RHODI *præmia summa putas:*
Dum vigil EUCLIDIS *tractat* ELEMENTA, *beati*
Ingenijq; penu divite promis opes.
Præmia jam studij capis haud spernenda: sed olim
Majora ingrata posteritate feres.

Johannes Wanckelius,
Hist. P.P.

In

AMBROSII RHODII Mathematici

Elementa Euclidea.

HOc erat insignem Rhodijs spirare colossum,
Hoc dignum ambrosio nomine pignus erat.
EUCLIDI lucere facem, lucere juventæ
Rectà Euclideas vadere scire vias.
En Rhodus, en saltus: hoc auspicio Harpocrateũ
Posse timere senem Leucoris alma nequis.

Adamus Theod.
Adami. F. Siberus.

AD M. AMBROSIUM RHODIUM Saxonem,

EUCLIDIS GEOMETRIAM illustrantem.

DOCTI *pulveris Hercules, an Hermes?*
EUCLIDES, *per & has Scholas & istas*

Illotæ

Illotâ teritur manû, lotâ.
Et hæc sacra Matheseωs adaquè
Omnes scire putant. Sciuntnè, RHODI?
Tu scis, optime mystagoga, tu scis.
„ QUI *tendit moderamen arvipendI,*
„ *Non statim bonus agrimensor idem est.*
Plus est esse Geometren: & hoc plus
EUCLIDEM *similare. Nunc ut omnem*
Euclidis Genium adsequantur omnes,
DEMONSTRATIO LINEALIS *exstat*
Auctor RHODIUS *est. Catum hoc alumni*
Acumen tibi gratulare, Saxo.
EUCLIDES *tenebris opertus, ecquid*
Euclides mihi sit? profectò non est.
Quem nunc RHODIA *lucubravit ætas*
EUCLIDES *tibi* LUCULENTUS *est.*

Frid. Taubmanus.

DE ELEMENTIS EUCLIDIS

PRÆFATIO.

QUod in plerisq; rebus usu venire solet, ut nullum simul opus & inceptum & perfectum sit, sive quòd dies diem docet; sive quòd oculi plus vident quàm oculus; sive quòd Deus ipse Sapientiæ suæ semina in homines ita dispergit, ut accrementa in alio magis juvet & promoveat; idem cùm in universa Philosophia, tum vel maximè in Mathematicis observare licet. Sicut enim in illa primitus tantùm non infinita, eaq; absurdissima à varijs Sophistis dissæminata erant opiniones, quas tandem Plato & Aristoteles messe feliciore omnes collegerunt, resectisq; & rejectis, ingenij pariter & judicij acie mira, tum absurditatibus, tum vanitatibus, integrum & perfectum quoddam Philosophiæ corpus relinquere posteritati voluerunt: Ita etiam olim, cùm maximo essent in precio studia mathematica; varia à variis erant inventa theoremata & problemata, quæ tandem nacta sunt Geometram acutissimum Euclidem, paulò post obitum quod vero simile videtur, Alexandri M. qui omnia illa cum suis principijs collegit, elegantissimoq; disposuit ordine, & eru-

eruditione tanta contexuit, ut Aristarcho nullo indi-guisset, nisi communi quodam praestantissimorum virorum fato & ipse illo carere nequisset. Nam quod Euclides aedificium Sphaericum, proportione elegantissima, mirabili corporum quinque Regularium inscriptione exornarat, & multorum jam seculorum aetatem tulerat; id anatomia syntaxiq; nova, in Hortum quendam, unumquodq; suo convenienti loco reponens, ut velie videtur, permutavit, exclusis multis ignorantiae mirum in modum medentibus herbis. Quam Horti illius amoenitatem labilem praetermimus, & cum magnis illis Geometris, Archimede, Apollonio, Pappo, Serено, Hypsicle, Ptolemaeo, Copernico, alijsq; innumeris, aedificij hujus Euclidei commoditatibus fruimur, quod nos contra omnia generis tempestates tueri potest, quovis & anni & aetatis tempore. Caeterùm ELEMENTORUM hoc nomen jure sibi vendicat hic tractatus, quòd consideratio omnium, ad alliorum, per universam Matheſin, pertransit scientiam, ex quibus dubiorum, quae in ipsis contingunt, succurrit nobis solutio; sine quibus quàm impudenter aliquis adibit scientiae mathematicas, tam infeliciter easdem tractabit. Neque ulla deest ipsi conditionum, quae in Elementis reperiri solet. Supervacuum enim omne, tanquam impedimentum est sublatum; eliguntur cuncta, quae propositum continent & concludunt: diluciditatis ac brevitatis cura habetur maxima, ne contrariae perturbent cogitationem: Deniq; etiam universalis theorematum in terminis comprehensio suum hîc locum,

em inveniẽdã quævis cognitio incõprehensibilis efficitur ijs, quæ doctrinã in particularia frusta dissecant.

Ordine autem hoc pulcherrimo procedit Euclides. Cùm Geometria maxime occupetur, ut Proclus ait, in figurarum contemplatione, quæ vel planæ vel solidæ sunt: Linearum enim, tanquam terminorum, non requirebatur peculiaris consideratio: de planis quidem Libris sex prioribus, de Solidis in tribus ultimis agere voluit. Cæterùm, ne imperfecta esset illa Stereometria, quam plurimum juvat notitia linearum Commensurabilium & incommensurabilium, tribus illis præmisit decimum, in quo copiosè de illis differit. Tandem neq; hæc quidem tractatio in se perfecta esse poterat absq; numerorum notitia; ideoq; ipsorum quoq; affectiones tribus, decimum præcedentibus libris demonstrare abundè voluit. Sunt itaq; veluti quatuor principalia Elementorum Euclideorum membra, quorum primum est Geometricum, quatuor quidem prioribus libris absolutam figurarum contemplationem absolvens, quinto proportiones magnitudinum in genere persequens; sexto proportiones figurarum planarũ inter se exponens. Secundũ Arithmeticum, trib9 libris, numerorũ, quibus cum magnitudinibus, tanquam binis omnium quantitatum radicibus, magna intercedit communio & societas, demonstrans affectiones propositio sufficientes. Tertium quasi mixtum de lineis commensurabilibus & incommensurabilibus agit, quarũ natura maximè in numeris evidens est, usus q; maxim9 & necessarius ad rectè percipiendas proportiones laterũ in quinq; corporib9 regularib9, plerũq; incõmẽsurabilium.

Quar-

Quartum Stereometricum scientiam tradit Solidorũ, qua precipua corporũ affectiones dẽonstrantur, inprimis autem quinq; corporum regularium Sphæra inscribendorum constructio, & mutua proportio; unde tandem elegantissimum illud Mathematicum ædificium constat, quod propositione ultima libri decimitertij absolvitur. Possunt, quidẽ de corporibus plura, eaq; jucundissima demonstrari ut ex libris, illis tribus decimum tertiũ sequentibus, qui Euclideis vulgò solent addi, perspicuum est, quibus Doctissimus Clavius magnam operam, magnumq; laborem impendit: Caterũ Euclidei tredecim nobis pro nostro instituto sufficiant, quibꝰ cognitis, qui sese totos huic studio sunt tradituri, non Campanum modò & Clavium, sed quosvis alios nobiliores Geometras magno cum fructu legent, intelligent. Ut autem quatuor operis Euclidei nostri posuimus membra, ita, singulis illis sua propria præmittuntur principia, ex quibus demonstrationum omnium, mathematicarum longè accuratissimarum, certissimarumq; robur ac firmamentum nascitur. Suntq; principiorum triagenera: primum Definitiones seu Hypotheses, quibus explicantur vocabula artis, nequa nominum ambiguitate vel obscuritate circumvenei, paralogismos incurramus; & has unumquodq; illorum membrorum habet peculiares. Deinde sunt ὑπήκοα seu postulata, qua adeò sunt clara & perspicia in subjecta scientia, ut nulla indigeant confirmatione, sed nudum auditoris assensum requirunt, ne in demonstrando ulla vel hæsitatio vel difficultas oboriatur. Demiq; sunt communes notiones, seu Axiomata & dignitates, qua non in hac tantùm, sed in omnibus aliis Scientijs

ita sunt manifesta, ut nemo non ultrò assensum addat, qui tantùm vocabula intelligit. Ex hisce principijs constituuntur & demonstrantur duplices propositiones; Problemata, in quibus ponitur aliquid, quod nondum est, constituendum: & Theoremata, in quibus aliquid vel inesse vel non inesse constituta quantitati demonstratur. Differunt 3. 1. fine; illorum enim est constructio, horum cognitio, quod etiam clausula distincta indicare solemus; Quod erat faciendum, in illis; Quod erat ostendendum, in his. 2. Vsu: illa enim Mechanicis, hæc demonstrationibus inserviunt. 3. Accidentibus, quæ in illis non sunt perpetua, nec perpetuò comitantur sua subjecta, quia vitiosa potest esse construction, in his verò semper sunt eadem. Ipsa Demonstrationes sex absolvuntur partibus. Prima πρόταξις est generalis propositio demonstrationis, quæ monet, quibus positis & concessis, quæ quæsita sint demonstranda. Hæc si theorema sit, habet duas partes, ἡγούμενον, & ἑπόμενον: Sin problema, δεδομένον, quod constituit subjectum, de quo aliquid affirmatur vel negatur, vel quomodocunq; quæritur; & ζητούμενον, quod ostendit, quid in subjecto sit demonstrandum. Secunda est ἔκθεσις expositio seu declaratio dati vel antecedentis, quæ datum seorsim repetit & explicat: Sicut tertia διορισμὸς quæsitum; quam utramq; partem communissimè exhibent literæ contextui propositionum inserta, sed forma distincta, citra ullam cursus propositionum confusionem. Quarta constructio κατασκευή seu delineatio, quæ præparat, & accommodat ea, quæ ad demonstrationem accidentium

dati requiruntur & necessaria sunt. Quinta, eaq; præcipua ἀπόδειξις demonstratio, quæ per prima, nota & concessa, vel etiam antè demonstrata demonstrat id, quod de dato ostendendum est. Et hæc progressum observat duplicem. Vel enim à principijs natura notis, ut sunt definitiones, postulata & axiomata, vel etiam antea demonstratis, quæ & ipsa ad principia possunt reduci, procedimus, quæ Methodus συνθετικὴ dicitur; vel procedimus à quæsito & posteriore ad prius & principia, quæ vel est θετικὴ τῶν ἀρχῶν & πίστις ἀναλυτικὴ dicitur; vel ἀναιρετικὴ τῶν ἀρχῶν & ἀπαγωγὴ εἰς ἀδύνατον dicitur. Sexta συμπέρασμα, quæ demonstrata ad propositionem refert, eamq; rectè demonstratam esse affirmat. Propositionibus cognatum est λῆμμα, quæ in Geometricis est propositio indigens probatione, accidit q; tum constructioni, tum demonstrationi, hoc differens à principijs, quòd hæc nulla indigent demonstratione; illud autem demonstrari cùm possit, absq; demonstratione sumitur, ad aliorum faciendam fidem. Corollarium etiam theorema est, quod per se ex demonstrationibus propositionum sequitur, sine nova ac peculiari demonstratione. Hæc tanquam necessaria ad pleniorem cognitionem autoris præmittenda mihi videbantur. Frugalissimas itaque hasce disciplinas, Geometriam & Arithmeticã, in hisce Elementis Euclideis exornatas, (quamquã parùm πρὸς ἕλξιν facere censentur, ut & diffi-

difficiles; sed illis, qui vel antè pronunciant, quàm inspiciant: vel priùs abijciunt studium, quàm periculum fecerint: si quis impensiùs coluerit, ipso experietur opere, plus habuisse in recessu, quàm magnifica minus fronte promiserunt: in primis autem, si non Magnitudinum & Numerorum hac Philosophia, veritatis quendam amorem ingeneratum; at saltem divinitus innatum sibi confirmari & conservari percipiet; sentietq; quàm notabili fruge vegetior sibi reddatur, luxurietve toris animosi pectoris ardor. Opere verò etiam experietur ipso, si quarumvis rerum fuerint expedienda dimensiones, veluti longitudinum, latitudinum, planicterum, agrorum, insularum; altitudines turrium, montium; cœlestia φαινόμενα per instrumenta accuratè observanda & examinanda; horologia sciotherica delineãda; machinæ variæ exstruendæ, usurpandæ; ponderum rationes exponendæ, phænomena ex illuminatione diversa speculorum, picturarum, aquæ & aeris excusanda; Denig; sive speculationibus indulgere velit cœlestibus, sive elementaribus quæ ἀγεωμέτρητον non ferunt, quanto & incitamento & adjumento, addo etiam complemento hæc elementa sint futura.

EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

Definitiones.

I.

PUnctum est, cujus pars nulla est, id est, punctum est quiddam indivisibile, quod mente tantùm concipitur. *Non enim punctum, est quantitas, sed omnium quantitatum continuarum principium, quæ potentia in infinitum sunt divisibiles. Illud autem quod creta pingitur punctum, Physicum, non mathematicum est, quippe non omni carens latitudine, quo interim facilioris doctrinæ gratia utimur.*

2. Linea est longitudo latitudinis expers, seu, ut Gellius loquitur, Longitudo illatabilis. *Hæc prima species est quantitatum continuarum duntaxat longa.*

3. Termini linearum sunt puncta: actu quidem in linea recta terminata; in peripheria circuli potentia.

4. Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta, id est, in qua nihil flexuosum reperitur. *Archimedes brevissimam esse dicit earum, quæ eosdem habent terminos: vel est brevissima à puncto ad punctum extensio.*

5. Superficies est, quæ longitudinem latitudinemque tantùm habet. *Hæc secunda magnitudinum species est, quæ præter dimensionem, quam secundum longum communem habet cum linea, etiam secundum latitudinem mensurabilis est; omni tamen mensura in profundum destituta.*

6. Super-

6. Superficiei extrema sunt lineæ. *Sic trilatera figura tribus, quadrilatera quatuor, multilatera multis terminantur lineis: Circulus una.*

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas. *Estque omnium, quæ eadem habent extrema, & minima, & brevissima.*

8. Planus angulus est linearum in plano se mutuò tangentium & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio. *Jacentes enim in directum lineæ, si protrahantur, nunquam concurrunt, ita ut se secent protractæ & sic angulos non efficiunt.*

9. Rectilineus est angulus, cum, quæ angulum continent lineæ, sunt rectæ. Curvilineus autem, qui ex duabus curvis: mixtus qui ex una curva & altera recta.

10. Cum recta linea super rectam consistens lineam, eos, qui sunt de-



inceps, angulos *aec*, *ceb* æquales inter se fecerit; rectus est uterque angulorum: & quæ insistit, linea *ce*, perpendicularis vocatur ejus, cui insistit.

11. Angulus obtusus est *aed*, qui recto major est;

12. Angulus autem acutus *bed*, qui recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus extremum est. *Sic puncta linearum, lineæ superficierum; superficies corporum sunt termini. Corpora verò, quia ab alia quantitate nulla dimensione superantur, nullius etiam termini esse possunt.*

14. Figura est, quæ sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur. *Ita videlicet, ut circumquaque illis terminis claudatur.*

15. Circulus est figura plana, sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

16. Hoc

16. Hoc punctum centrum circuli appellatur.

17. Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat, & totum planum contentum peripheria, & ipsam peripheriam in partes æquales, cum nulla alteram excedat.

18. Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur, *id est, semiperipheria*.

19. Figuræ rectilineæ sunt, quæ sub rectis lineis continentur. *Ideoq; curvilineæ erunt, quæ curvis; & mixtæ, quæ mixtis lineis continentur.*

20. Trilateræ quæ sub tribus.

21. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

22. Multilateræ, quæ sub pluribus, quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria-

latera habet æqualia. *Duplicem habet diuisionem triangulorum, alterum ex lateribus, alterum ex angulis.*

24. Isosceles est, quod duo tantùm æqualia habet latera; *tertio vel majore vel minore.*

25. Scalenum est, quod tria inæqualia habet latera.

26. Adhæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum, quidem est triangulum quod rectum habet angulum: *sive illud sit Isosceles sive scalenum.*

27. Amblygonium, quod obtusum habet angulum; *itidem vel Isosceles vel Scalenum.*

28. Oxygonium, quod tres habet acutos angulos. *Est ǵ vel aquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum.*

29. Quadrilaterarum figurarum, Quadratum est, quod & æquilaterum est, & æquiangulum.

30. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem est, sed non æqui-

æquilatera. *Habet enim tantùm duo opposita latera æqualia. Alij oblongum. alij rectangulum vertunt.*

31. Rhombus, quæ æquilatera, sed rectangula non est. *Sunt enim bini tantùm oppositi anguli æquales.*

32. Rhomboides, quæ adversa & latera & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula. *Opposita est quadrato omni ex parte.*

33. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia appellantur. *Vocantur irregulares, quoniam infinitis possunt variari modis. Estque Trapezium aliud Isosceles, quod duo latera opposita parallela, duo verò æqualia: aliud scalenum, quod duo tantùm opposita parallela habet. Trapezoides, quod neque parallela, neque æqualia habet latera.*

34. Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex u-

traque parte in infinitum producuntur, in neutra ſibi mutuo concurrunt.

35. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera ſunt parallela ſeu æquidiſtantia. *Ut ſunt quadrata, oblonga, Rhombus & Rhomboides.*

36. Cum verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ, ſecantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma: Appellantur illa, per quæ diameter non tranſit, complementa: duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur. *Vide propoſit. 43.*

PETITIONES SIVE poſtulata.

1. Poſtuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.

2. Et

2. Et rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

3. Quovis centro & intervallo circulum describere.

COMMVNES NOTIONES SIVE *Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent & dignitates.*

1. Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus est aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus aliqua magnitudine, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.

2. Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.

3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia.

4. Si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia. Et si inæqualibus inæqualia sint adjecta, majori

majus & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

6. Quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium. *Idem intelligendum est de triplo & quadruplo, & cæteris.*

7. Quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia. Et contra quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia. *Pari ratione, quæ ejusdem sunt partes tertiæ vel quartæ, &c. inter se sunt æquales.*

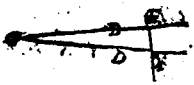
8. Quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia. *Intelligendum est axioma de magnitudinibus ejusdem speciei-*

cici, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit. Sic linea lineæ congruens, eidem æqualis est, non autem applicari dicitur lineæ superficiei. Neque tamen confundenda est Φάρμακος *hæc mathematica, cum applicatione Mechanica vel Physica.*

9. Totum sua parte majus est. *Alias ablata parte tolleretur totum.*

10. Omnes anguli recti sunt inter se æquales. *Quia latera sine inclinatione ulla sibi perpendiculariter insistunt.*

11. Si in duas rectas *ab*, *cd*, altera recta linea *ef* incidens, internos, ad easdem partes, angulos *bef*, *dfe*, duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ, sibi mutuò incident in *g*. ad eas partes, ubi sunt anguli, duobus rectis minores.



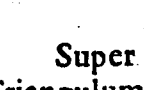
12. Duæ

12. Duæ rectæ lineæ spacium non comprehendunt. *Si enim coëant in uno puncto ad efficiendum angulum, ex altera parte necessario magis ac magis disjungentur. Ad minimum ergò requiruntur linea recta ad simplicissimam figuram rectilineam constituendam.*

PROPOSITIO I.

Problema 1.

Super data recta *a b* terminata, Triangulum æquilaterum *a b c* constituere.



Inter vallo ab *ex* b *describantur duo circuli, quorum intersectio* c *connectatur cum* a *&* b. *Quoniam igitur eidem* a b *æquales sunt* b c *&* a c, *erunt etiam inter se æquales, & triangulum* a b c *æquilaterum. Quod erat faciendum.*

α 1. Postul. β 5. def. 1. γ 1. axiom.

PROPOSITIO II.

Problema 2.

Ad datum punctum *b*, datæ rectæ lineæ *a*, æqualem rectam *b d* po[illegible]c.

Inter-

Intervallo a *linea* a *describatur centro* b *circulus* c d. *Cum ergò ipsi* b c *sint æquales* ☾ b d *&* γ a. *Proinde ad punctũ* b, *posita* ☾ b d. *erit etiam ipsi* a ∂ *æqualis. Quod erat faciendum.*



α Postul. β 15. def. 1. γ ex hyp: ∂ 1. axio.

PROPOSITIO III.

Problema 3.

Duabus datis rectis inæqualibus, de majore *c b*, minori *a* æqualem rectam *d b*, abscindere.

Centro b *intervallo* a α *fecetur* c b *in* d, *& erit* d b β *æqualis ipsi* a.



α 3. I. β 15. def. 1.

PROPOSITIO IV.

Theorema 1.

Si duo Triangula *b c d*, *d e f*, duo latera *b c*, *e d*, duobus lateribus *b d*, *e f* æqualia habeant, utrumq; utriq; : habeant verò & angulum *c b d*, angulo, *d e f* æqualem, sub æqualibus rectis lineis contentum : & basin *c d* basi, *d f* æqualem habebunt ; eritque Trian-

Triangulum *c b d* Triaugulo *d e f* æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

α 3. I. *Si basis* c d *est major, quàm basis* d f, *auferatur ex* c d, c g *æqualis ipsi* d f, *& ducatur* b g. *Si jam* b c, b g *sunt æquales ipsis* e d, e f, *& basis* c g, *basi* d f; *non erit tamen angulus* c b g *angulo* e f *æqualis, defectu anguli* g b d. *Quod est contra hypothesin. Idcoq; si*

β 9. axio.



tres termini Trianguli congruant tribus terminis alterius Trianguli applicati, reliquos reliquis etiam γ *congruere, & totum toti æquale esse necessum est. Quod erat ostendendum.*

γ 8. axio.

PROPOSITIO. V.

Theorema 2.

Isosceliũm Triangulorũm *a b c*, qui ad basin sunt anguli *a b c* & *a c b*, inter se sunt æquales: & productis æqualibus rectis *a b*, *a c* lineis, qui sub basi sunt anguli *d b c* & *e c b*, inter se sunt æquales.

Lateri-

Lateribus a b, a c *aqualibus, aqualiter extensis in* d *&* e, *ducantur* c d, b e. *Quoniam ergò in Triangulis* d a c *&* e a b *dantur duo latera* a d, a c *aqualia duobus lateribus* a e *&* a b, *& angulus* a *utrig; communis; erit etiam basis* b c *basi* c d *aqualis, & angulus* d, *angulo* e, *& angulus* a b e *angulo* a c d. *Rursus in Triangulis* b d c *&* c e b *aqualium laterum* c e *&* b d, b e *&* c d, *& angulorum* d *ipsi* e: *erunt etiam anguli* e c b, d b c *sub basi a aquales, sicut &* e b c *&* d c b *aquales, quibus ablatis ab aqualibus* a b e *&* a c d, *relinquentur* a c b *&* a b c *anguli ad basin & aquales. Idem quoque de Triangulis aquilateris verum est. Unde sequitur Triangula aquilatera etiam esse aquiangula.*



α 4. 1.

β 3. ax.

PROPOSITIO IV.

Theorema 3.

Si Trianguli *a b c* duo anguli *b*, *c* æquales inter se fuerint, etiam sub æqualibus angulis subtensa latera *a b* & *a c* æqualia inter se erunt.

Conversa prioris.

Si quis neget, angulis b, c *a aqualibus aqualia opponi latera* a b, a c; *dicat* a b *esse longiq* a c, *cui aquale sit* d b *ex* a b *β abscissum. Ducta linea* d c:

α ex hyp.

β 3. 1.

γ ex dato



δ 4. 1. 1. 9. ax.

dc: *in Triangulis* acb & dbc *propter latera aqualia*, ac *ipsi* db & bc *commune*; *angulumq;* b *angulo* c *aqualem*: *necessariò etiam bases* dc, ab *erunt* δ *aquales*, & *totum Triangulum*, acb, *toti* dcb, *pars toti*, *quod est impossibile*.

PROPOSITIO VII.

Theorema 4.

Super eadem recta *a b* duabus eisdem rectis *a c*, *b c* aliæ duæ rectæ *a d*, *b d* æquales, utraq; utriq; non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, *supra vel infra*, eosdemq; terminos *a* & *b*, cum duabus *ac*, *bc* initio ductis habentes.



Constituantur, *si potest*, *ad aliud punctum* d *alia duæ rectæ prioribus aquales* ad *ipsi* ac & bd *ipsi* bc, & *cõnectantur puncta* dc. *Erunt Triangulorum* & *Isoscelium* acd & bdc β *aquales anguli ad basin* acd *ipsi*, adc & bdc *ipsi* bcd. *Vnde fit*, *ut*, *quia* acd *aqualis est partiali* adc *quo major totalis* bdc *aqualis est partiali* bcd, *totus* acd *fiat partiali* bcd *minor*. *Quod* γ *absurdum*.

& ex hyp β 5. 1.

γ 9. ax.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Theorema 5.

Si duo Triangula *a b c, d e f*, duo latera *a b, a c*, duobus lateribus *d e, d f*, utrumque utriquè æqualia; habuerint verò & basin *b c* basi *e f* æqualem; angulum quoque *a* sub æqualibus rectis lineis contentum; angulo *d* æqualem habebunt.

Convertit primam partem propositionis 4.



Quando latera singula singulis; basis basi applicata conveniunt, & convenire etiam totum Triangulum toti oportet & angulum a, angulo d. Nisi enim a cadat in d, sed in g, super eadem linea e f, duabus eiusdem rectis d e, d f, alia duæ rectæ æquales e g, g f utraq; utriq; ad eandem partem, eosdemque terminos constituentur. Quod est β impossibile.

ā 8. axiomat.

β 7. 1.

PROPOSITIO IX.

Problema 4.

Datum angulum *b a c* rectilineum bifariam secare.

Ex a b ā abscindatur a d, pro libitu assumta a e æqualis; atq; ad ductam lineam d e β ponatur

ā 3. 1.

β 1. 1.



tur Triangulum æquilaterum, vel etiam Isosceles d f e, & connectantur a f. Erunt in Triangulis d a f & e a f γ æqualium laterum a d, ipsi a e, & a f communi, & basium d f, e f; anguli d a f & e a f δ æquales, sectus ∠ angulus a in duos æquales angulos. Sed in praxi sufficit in utravis parte punctum supremum f per oculatam intersectionem arcuum notasse.

γ ex constr.

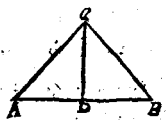
δ 8. l.

PROPOSITIO X.

Problema 5.

Datam rectam finitam *a b*, bifariam secare.

Super data recta a b α *constituti trianguli* a c b *angulum* c β *bisecans linea* c d, *bisecat &* a b *lineam datam in* d. *Quia enim in triangulis* a c d & b c d, γ *aequalia sunt latera* a c & b c, c d *vero commune, &* ∠ *anguli comprehensi* ∠ β *æquales; erunt & bases* a d & d b δ *æquales; & recta* a b *in* d *bifariam secta.*



α 1. l.

β 9. l.

γ ex constr.

δ 4. l.

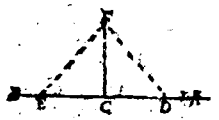
PROPOSITIO XI.

Problema 6.

Data

Datæ rectæ *a b*, à puncto *c* in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Puncto c *impositus circinus utring. transferat æquales partes* c d, c e, *ac super tota* d e *constituatur. Triangulum vel æquilaterum vel Isosceles* d e f, *ducatur* f c. *Iterum propter latera* c d, c e β *æqualia & c f commune; & bases* d f, e f *æquales,* γ *æquales sunt anguli ad* c *contigui, id est, recti &* δ f c *perpendicularis ex puncto* c *erecta.*



α 1. l.
ζ ex constr.
γ 8. l.
δ 10. def. l.

PROPOSITIO XII.

Problema 7.

Super datam rectam infinitam *a b*, à dato puncto c, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Ex centro c *arcus circuli intersecet* a b *in* d e & d e *a dividatur bifariam in* f, *erit* f c β *perpendicularis: uterque enim ad* f *contiguus est* γ *æqualis seu rectus, propter latera* f d, f e *æqualia &* f c *commune, propter quæ bases* d c, c e δ *æquales.*

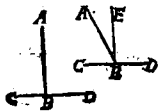


α 10. l.
ζ 10. def. l.
γ 8. l.
δ 15. def. l.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 6.

Utut recta *a b* ſuper rectam *c d* conſiſtens, angulos faciat; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



α 10.def.1.

In perpendiculariter inſiſtentibus, a b *nimirum ipſi* c d *reſecta* α *manifeſta*. *Sed ſi* a b *non ſit perpendicularis, ex puncto* b β *erecta perpendiculari* b e, *videmus angulos* a b c *&* a b d *ſimul ſumtos tantundem occupare ſpacij, quantum duo recta* e b c; *&* e b d *ad* γ *mutuo* γ *congruere.*

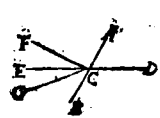
β 11.1.

γ 8 ax.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 7.

Si ad aliquam rectam *a b* atque ad punctum *c* in ea, duæ rectæ *c d* & *c e* non ad easdem partes ductæ *d* vel *e*, eos qui ſunt deinceps angulos *a c d*, *a c e*, duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ *c d*, *c e*, ſeu recta una.



α 13.1.

Si d c e *non eſt recta una*, *eſto* d c f. *In hanc ergo rectam incidens recta* a c, *facit duos angulos duobus rectis* α *æquales*

a c d

acd & acf. *Erant autem* & acd & aceβ *æquales duobus rectis. Ablato itaq; communi* acd, γ *æquales relinquentur* acf, ace *minor majori, vel pars toti. Quod absurdum.*

βex hyp. pot.
γ 3. axio.

PROPOSITIO XV.

Theorema 8.

Si duæ rectæ *a b* & *c d* se invicem secuerint, angulos ad verticem: inter se æquales efficient.



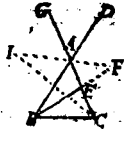
Sunt enim aec & aed *duobus rectis* α *æquales. Sunt item* aed & deb *duobus rectis æquales. Ablato ergò communi* aed, β *relinquentur* aec & deb *æquales, anguli ad verticem.*

α 13. l.
β 3. axio.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 9.

Omnis Trianguli *abc* uno latere *ba* producto externus angulus *dac* utroq; interno, tam *acb*, quàm *abc*, & opposito major est.



α *Dividatur* ac *bifariam in* e; & *ducta recta,* be β *cõstituatur æqualis usq; in* f; *conjungatur*γ af. *Jam in Triangulis* ceb & aef *latera* ea & ec, eb & ef *sunt* γ *æqualia;* δ *anguli*ε aef & bec.

α 10. l.
β 3. l.
γ ex constr.
δ 15. l.
ε 4. l.

Ergò & totum triangulum toti erit ε æquale, & angulus e c b *ipsi* e a f, *quo tanquam parte externus totus* c a d *est major.*

14. 1.

Ita pro angulo a b c *α dividatur latus* a b *bifariam. & rectæ* c h *in continuum abscindatur β æqualis* h i, *connectaturq;* i a. *Rursum in Triangulis* c h b *&* a h i *γ æqualia sunt latera* a h *&* h b, h c *&* h i, *& angulique* c h b *&* a h i. *Totum ergò triangulum toti est ε æquale, & angulus* i a h *ipsi* h b c, *cui æqualium duorum ad verticem alter* d a f *tanquam pars minor est toto externo* c a d.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 10.

Omnis Trianguli *a b c* duo anguli, duobus rectis sunt minores, quomodocunque sumti.



Producto latere c b, *angulus externus* a b d *α major est interno opposito* a c b. *Si utrique jungatur angulus communis* a b c, *β majores erunt* a b c, a b d *ceu duobus rectis*

16. 1.

4. axio.

13. 1.

γ æquales, quàm interni duo a b c *&* a c b. *Itaq; minores sunt duobus rectis.*

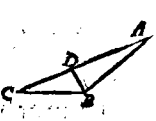
PRO-

PROPOS. XIIX.

Theorema 11.

Omnis trianguli *a b c* majus latus *a c* majorem angulum *a b c* subtendit.

α Abscindatur ex a c *ipsi* a b *æqualis* a d *&* *duçatur* b d. *In triangulo* β *Isoscele ergò* b a d, *anguli* a b d *&* a d b *sunt* γ *æquales. Sed hic tanquam extremus* δ *major est interno opposito* b c d. *Ergò &* a b d. *Ejus autem totas* a b c *multo erit major. Idem demonstratur eodem modo de altero angulo* a.



α 3. l.
β ex constr.
γ 5. l.
δ 16. l.

PROPOS. XIX.

Theorema 12.

Omnis trianguli *a b c* major angulus *b* majori lateri *a c* subtenditur.

Sin minus, esset latus a c *vel æquale latere* a b, *& sic anguli* c *&* b *essent* α *æquales contra datum: aut minus, at* β *sic oporteret* a c *tanquam latus minus* β *majorem angulum* b *subtendere, latus* γ *majus* a b, *minorem* c. *Quod* γ *absurdum.*



α 5. l.
β ex hyp.
γ 18. l.

PROPOSITIO XX.

Theorema 13.

Omnis trianguli *abc* duo latera *ab*, *ac*, reliquo *bc* sunt majora, quomodocunque sumta.



α 4. def. 1. *Est enim* b c *inter* b & c *omnium* α *brevissima.*

PROPOSITIO XXI.

Theorema 14.

Si super trianguli *abc* uno latere *bc*, ab extremitatibus, duæ rectæ *bd*, *cd*, interiùs constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus *ba*, *ca* minores quidem erunt, majorem verò angulum *d* continebunt.



Producto latere b d *in* e, *in triangulo* b a e, *latera* b a, a e *simul* α *majora sunt tertio* b e, *addito* q_3 e c *communi*, b a, a c β *majora erunt* b e, e c *simul sumtis:* α *ita &* c e, e d *quam* d c, *sic* b d, d c *simul* β *minores ipsis* b e, e c: *Ideoq*$_3$ *& minores sunt majoribus* b a, a c. *Sic tanquam externus* d *angulus* γ *major est angulo* e *interno opposito; & hic itidem tanquam externus interno* a: *itaq*$_3$ *&* d *major est ipso* a.

α 20. l.

β 4. axio.

γ 16.

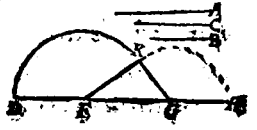
PRO-

PROPOSITIO XXII.

Problema 8.

Ex tribus rectis lineis *fg*, *fk*, *kg*, quæ sunt datis tribus, *a b c*, æquales, triangulum *fkg* constituere. Oportet autem duas reliquas esse majores omnifariam sumtas: quoniam uniuscujusque trianguli duo latera quomodocunq; sumta reliquo sunt majora.

Data a *æquali* f g *utrinque apponantur in directum* f d *&* g h *æquales ipsis* b *&* c, *& illarũ intervallo descripterum circulorum intersectio* k *cũ* g *&* f *connexa, exhibet triangulum* f k g, *cujus latera datis tribus rectis sunt æqualia. In praxi sufficit tantùm ad tertiæ lineæ extremitates intervallo reliquarum duarum intersectionem notasse eam q; cum illis extremitatibus copulasse per rectas.*



a ex constr. & 15. def. 1.

PROPOSITIO XXIII.

Problema 9.

Ab data recta *a b*, datumque linea punctum *c*, dato angulo rectilineo

lineo *d e f*, æqualem angulum *i c k* rectilineum constituere.

In lineis e d, e f *angulum datum* e *includentibus sumta duo puncta pro libitu* g & h *connectantur, ipsiq;* e g *æqualis in* a b *fiat* c i, *cui accommodentur duæ reliquæ* g h *ceu* i k, *&* e h *ceu* k c. *Erit* i c k *suis lateribus & basi* β *æquale tringulo* g e h, *& ad punctum* c *factus angulus* γ *æqualis angulo* e.

α 22. I.

ζ. ex constr.

γ 8. I.



PROPOSITIO XXIV.

Theorema 15.

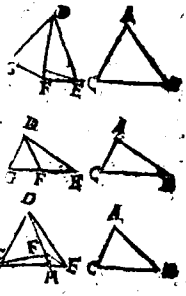
Si duo triangula *a b c*, *d e f* duo latera *a b*, *a c* duobus lateribus *d e*, *d f* habuerint æqualia, utrumq; utrique; angulum *a* verò angulo *d* majorem, sub æqualibus rectis lineis contentum: & basin *b c*, basi *e f* majorem habebunt.

α 23. I. ζ. ex constr.

γ 4. I.

α *Fiat ad punctum* d *angulo* a *æqualis, ut latus* d g *sit* β *æquale lateri* d f, *cadet q;* e g *vel in* e f *vel supra, vel infra eam. Si supra ipsam, in Triangulis* b a c *&* e d g *propter æqualia latera* b a, e d *&* a c, d g, *& angulos* a *&* d; *erunt & bases* b c, e g γ *æquales. & in triangulo Isoscheli* e g f,

d g f, *anguli ad basin* d g f & d f g *erunt* δ *æquales: Quo angulo* d g f *cum minor sit,* e g f, *angulo autem* d f g *major* e f g, *utique minori* e g f *minus latus* e f, & *majori* e f g *majus latus* e g *subtendetur, id est, huic æqualis* b c *basis major erit basi* e f. *Si in ipsam, necessariò* e g γ *æqualis ipsi* b c, ζ *major est basi* e f. *Denique si infra; productis* d f *in* h, & d g *in* i, *ductaq;* e g; *erit rursus* e g *basis* γ *æqualis basi* b c; *angulus item* h f g δ *æqualis angulo* f g i, *quo sanè* ζ *minor est* e g f, *adeoq; & angulo* e f g. ε *Ideoque angulo* e f g *adhuc majori majus latus* e g *subtendetur quod æquale est ipsi* b c, *quàm angulo* e g f, *quod est* e f. *Sic patet propositum.*



δ 5. 1.

ε 19. 1.

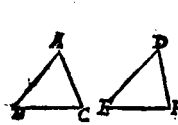
ζ 9. axio.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 16.

Si duo triangula *a b c, d e f*, duo latera *a b, a c*, duobus lateribus *d e, d f* æqualia habuerint, utrumq; utrique: basin vero *b c* basi *e f* majorem, & angulum *a* sub æqualibus rectis contentum, angulo *d* majorem habebunt.

Sit



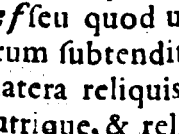
Sin minus, erit vel æqualis, atq; sic contra hypothesin etiam bases b c, e f *erunt* α *æquales: vel major* d *ipso* a, *atque sic basis* e f *basi* b c *contra hypothesin* β *major. Erit itaq;* a *major quàm* d.

α 4. l.
β 24. l.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 17.

Si duo triangula *a b c, d e f*, duos angulos *b, c*, duobus angulis *e, d f e* æquales habuerint, utrumq; utrique: unumque latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis *b c, e f* seu quod uni æqualium angulorum subtenditur; *a c* & *d f* & reliqua latera reliquis æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum *a*, reliquo *d* æqualem habebunt.



Nisi ergo a b *&* d e *sint æquales, fiat* g e *æquale ipsi* a b, *ducatur* γ g f. *Iam cum* a b, b c *æquentur ipsis* g e, e f, *anguli* γ b *&* e *sint* α *æquales, & erunt & anguli æqualibus lateribus oppositi æquales,* c *&* e f g. *Cui* c *quoniam etiam* α *æqualis est* d f e, γ *erunt* d f e *totus &* g f e *partialis æquales, quod* δ *absurdum.*

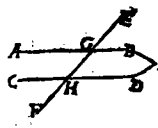
α ex hypot.
β 4. l.
γ 1. axiom.
δ 9. axiō.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 18.

Si in duas rectas *a b*, *c d*, recta *e f* incidens, alternatim *a g b* & *g h d*, angulos inter se æquales fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ.



Si non sunt, à concurrent producta in i: *eritque* g i h *triangulum, cujus latere* g i *producto in* a, *angulus externus* a g h, *ß major sit interno opposito* g h i; *cui tamen ex hypothesi æqualis erat. Sunt ergo parallelæ.*

à 34. def. 1.

ß 16. 1.

PROPOSITIO XXIIX.

Theorema 19.

Si in duas rectas *a b*, *c d*, recta *e f* incidens, exterium *a g e* angulum, interno & opposito, *c h g*, & ad easdem partes, æqualem fecerit: aut internos *a g h* & *g h c* & ad easdem partes, duobus rectis æquales, parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ.

Eidem enim a g e *æqualis sunt* a hgb *&* ß chg; *hi ergo tanquam alterni inter se* γ *æquales,* δ *parallelas arguunt* ab *&* cd. *Deinde*



à 15. 1.

ß ex hypot.

γ 1. axio.

δ 27. 1.

cum ∠ a g h, & c h g: *item* ∠ s a g h & h g b *duobus rectis sint æquales, erunt, ablato communi* a g h, *anguli reliqui* h g b & c h g *alterni* ∠ *æquales: ideo* ⫽ *rectæ parallelæ.*

a 13. 1. ∠ 3. axio.

LEMMA.

Si in duas rectas *a b* & *c d*, recta *e f* incidens, internos & ad easdem partes angulos *b e f* & *d f e* duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt duo anguli duobus rectis minores.

Si versus alteram partem dicamus concurrere in h, *ubi non sunt duo* ∠ *recti minores: sed majores, fierent in triangulo* e h f *duo illi anguli duobus rectis majores. Quod est absurdum.*



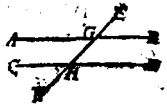
PROPOSITIO XXIX.

Theorema 20.

In parallelas rectas *a b*, *c d*, recta *e f* incidens, & alternatim angulos æquales efficit *a g b*, *g b d*; & externum *b e g* interno & opposito *a b g*, & ad easdem partes æqualem; & internos *b g b*, *g b d* ad easdem partes duobus rectis æquales faciet.

a 17. 1.

Si quis alternos negaverit æquales, alter a g h *esto major altero* g h d. *His inæqualibus additus communis* b g h, *cum cõtiguo quidem* h g a *duobus rectis* α *æquantur; sed cum* g h d *duobus rectis erunt* β *minores, ideſt duo interni, & ita* a b, c d *non* γ *erunt parallelæ contra hypotheſin. Quoniam igitur alternorum æqualium uni* a g h δ *æqualis* e g b, ε *erit etiam hic externus interno ad eaſdem partes oppoſito æqualis. Deniq; cum internus* b g h *cum externo* e g b *duobus rectis ſint* α *æquales, cum eodem* b g h *alter internus* g h d *duobus rectis* ε *æquales erunt. Patet ergò propoſitum.*



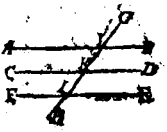
α 1. 13. l.
β 4. ax.
γ 11. ax.
δ 15. l.
ε 1. ax.

PROPOS. XXX.

Theorema 21.

Quæ eidem rectæ lineæ *e f* ſunt parallelæ *a b, c d*, & inter ſe ſunt parallelæ:

Recta g h *ſecet illas parallelas in* i k l. *Iam in* a b, e f *parallelas incidens* g h, *facit alternos* a i h & i l f *æquales.* α *Item externum* i k d *interno oppoſito* k l f, *vel* i l f; β *erunt ergo &* a i k & i k d *alterni æquales, rectæ* a b & c d γ *parallelæ.*



α 29. l.
β 1. ax.
γ 27. l.

PRO-

PROPOS: XXXI.

Problema 10.

α 23. I. β 27. I. Per datum punctum *a*, datæ rectæ *b c*, parallelam, rectam *e f* ducere.

Ducta a d *α fiat angulo* a d c *æqualis* d a f *alternus, continuetur* d f *a in* e *β Erunt illæ propter* l*aternos æquales parallelæ.*



PROPOS: XXXII.

Theorema 22.

Omnis trianguli *a c b*, uno latere *a b* producto in *d*; externus angulus *c b d* duobus internis oppositis *a* & *c* est æqualis: & trianguli trés anguli, duobus rectis sunt æquales.

Lateri a c *α agatur per punctum* b *parallela* b e. *In duas ergo has parallelas* a c *&* b e *incidens.*

α 31. I. β 29. I. c b, *efficit alternos* c b e *&* c *β æquales*; a d *verò linea externum* c b d *interno oppositio a. Sic totus externus internis duobus oppositis æqualis est. Quibus si addatur tertius internus* c b a *communis* γ *erunt trianguli anguli duobus rectis æquales.*



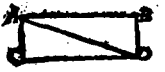
γ 13. I.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 23.

Rectæ lineæ *a c*, *d b*, quæ æquales *a b*, *c d* ad partes easdem conjungunt, & ipsæ æquales & parallelæ sunt.



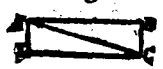
Ducta a d *efficit alternos* b a d, a d c *α æquales, cõprehensos duorum triangulorum* β *æqualibus lateribus* a b *ipsi* c d *&* a d *communi. Bases itaq;* a c *&* b d *seu rectæ æquales parallelas connectentes sunt* γ *æquales: & anguli* c a d, a d b γ *æquales: qui alterni etiam parallelas easdem* a c *&* b d δ *ostendunt.*

α 29. l. β ex hypot. γ 4. l. δ 27. l.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 24.

Parallelogrammorum spaciorum *a b c d*; æqualia sunt inter se, quæ ex adverso & latera & anguli; atque illa bifariam secat diameter *a c*.



Ducta diameter a c *facit alternos* a c d *&* c a b; c a d *&* a c b *α æquales, quos angulos æquales communis interjacens basis* a c *Triangulorum* a b c *&* a d c, *reliqua latera reliquis seu opposita efficit* β *æqualia, & reliquos angulos* b, d *oppositos, sicut & ex æqualibus compositi*

α 29. l. β 26. l.

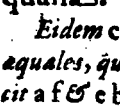
γ 2. axio. δ 4. l. *siti a & c γ æquales sunt; & tota triangula a b c & a d c sunt δ æqualia, sectum nimirum est bifariam parallelogrammum per diametrum.*

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 25.

Parallelogramma *c d e a, c d b f* super eadem basi *c d*, & in eisdem parallelis *a b, c d* constituta, inter se sunt æqualia.

α 34. l. β 1. axio. γ 2. axio. δ ex hyp. ε 29. l. ζ 4. l. η 3. axio.



Eidem c d a æquales a e & f b inter se sunt β æquales, quibus eadem e f, addita γ æquales facit a f & e b. Jam triangula f a c & b e d δ æqualium laterum a f & e b, a c & e d, & ε angulorum ipsis comprehensorum c a f, d e b erunt ζ æqualia, a quibus ablatum commune triangulum e g f, relinquit trapezia a e g c, b f g d η æqualia, quibus commune additum triangulum c g d, parallelogramma a c d e a & c d b f super eadem basi in iisdem parallelis ostendit γ æqualia.

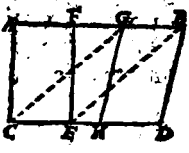
PROPOSITIO XXXV.

Theorema 26.

Parallelogramma *a c e f, g b d h*, super æqualibus basibus *c e, b d*, & in eisdem

eisdem parallelis *ab*, *cd* constituta, inter se sunt æqualia.

Conjuncta g c, b e *α fiunt parallelogramma data eidem* c e b g, *ideòque & inter se β æqualia.*



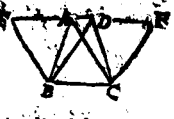
α 35. l. β 1. axio.

PROPOS. XXXVII.

Theorema 27.

Triangula *abc*, *dbc* super eadem basi *bc*, & in eisdem parallelis *bc*, *ad*, inter se sunt æqualia.

Per puncta b & c *α ducantur parallelæ* b e, c f *ipsis* c a, b d, *quæ concurrant cum* a d *utrinq; producta. Sunt ergò super eadem basi* b c *in iisdem parallelis constituta parallelogramma* b c a e, b c f d *β æqualia, ideoq; & ipsorum dimidia triangula data γ æqualia.*



α 31. l. β 35. l. γ 34. l.

PROPOS. XXXIIX.

Theorema 28.

Triangula *bac*, *edf*, super æqualibus basibus *bc*, *ef* constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqua-

α 31. l. *Iterum per puncta* b, f *α ductis parallelis* b g, f h *ipsis* c a, e d; *& utring, continuata* a d *fiunt*



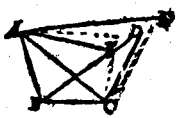
β 36. l. γ 34. l. δ 6. axio. *parallelogrammum* c g *&* e h *super aequalib. basibus* β *aequalia, & proinde ipsorum* γ *dimidia seu data duo trianguli* δ *aequalia.*

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 29.

Triangula *a b c, d b c* æqualia super eadem basi *b c*, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis *b c, a d.*

α 31. l. β 37. l. γ ex hypot. δ 9. axio.



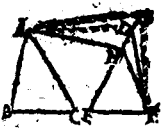
Sin minus, α fiat a f *parallela ipsi* b c *& ducatur* f c. *Erunt Triangulo eidem* b a c *aequalia Triangula* β b f c *partiale & γ* b d c *totale. Quod δ absurdum.*

PROPOSITIO XL.

Theorema 30.

Triangula *a b c, d e f* æqualia super æqualibus basibus *b c, e f*, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis *a d, b f.*

Ber minus, & fiat a h parallela ipsi b f & ducatur h f. Iterum eidem trigulo b a c æqualia erunt triangula β e h f partiale & γ e d f totale. Quod δ absurdum.



α 31. l.
β 38 l.
γ ex hyp.
δ 9. axiomat.

PROPOSITIO XLI.

Theorema 31.

Si parallelogrammum *a c d e* cum triangulo *b c d* eandem basin *c d* habuerit, in eisdemque fuerit parallelis *a b, c d;* duplum erit parallelogrammum trianguli.

Ducatur diagonius a d.

Erit Trianguli a c d α *æqualis Triangulo* c b d ζ *duplum parallelogrammū* a c d e. *Ideoq; & ipsius* c b d γ *duplum erit.*



α 37. l.
ζ 34. l.
γ 6. axio.

Corollarium.

Si Triangulum *b c f* duplam habuerit basin *c f*, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo *a c d e*, erit triangulum parallelogrammo æquale.

Ducta enim b d, *ejusdem trianguli* b c d *dupla*



α 38. l. β 41 l. γ 6. axio.

sunt, α triangulum c b f *& β parallelogrammum* a c d e. *Ideoq; sunt γ aqualia.*

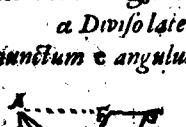
PROPOSITIO XLII.

Problema 11.

Dato Triangulo *a b c* æquale parallelogrammum, *c e f g* constituere in dato angulo rectilineo *d.*

α 10. l. β 23. l. γ 31. l.

α Diuiso latere b c *bifariam in* e, *β fiat ad punctum* e *angulus angulo dato rectilineo* d *aqualis, γ agantur q; parallela* a g *ipsi* b c *per* a, *& c g ipsi* e f *per* c; *& connectantur demum puncta* a, e.



Quoniam ergo ejusdem δ 38. l. ε 41. l. ζ 6. axio.

trianguli e a c *dupla sunt δ triangulum* b a c *& ε parallelogrammum* e f g c, *erunt ζ aqualia.*

Conuersa.

Dato parallelogrammo *a b c d*, æquale Triangulum *b e f* constituere in dato angulo rectilineo *g.*

α 23. l.

α Fiat angulus c b e *aqualis angulo g, secetq;* b e *productam* a d *in* e; *& in continuum addatur ipsi* b c *aqualis* c f, *jungantq;* f e *& ducatur* c e. *Quia rursus ejusdem trianguli*



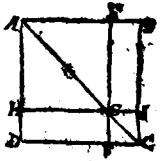
b e c

hæc duplæ sunt β triangulum b e f & parallelogrammum a b c d, etiam inter se sunt æqualia. β 38. 1. γ 41. 1. δ 6. axio.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema 32.

In omni parallelogrammo *a b c d*, Complementa *d f g h*, *b e g i*, eorum quæ circa diametrum *a c* sunt, parallelogrammorum *a e g h*, *c f g i*, sunt inter se æqualia.



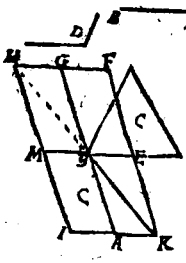
Ab æqualibus triangulis a d c, a b c, *ablatis triangulis æqualibus* a h g, a e g, *relinquuntur Trapezia* h g c d, e g c b *æqualia; à quibus iterum sublatis æqualibus triangulis* g f c, g i c, *relinquuntur complementa duo* g b & g d *æqualia.* α 34. 1. β 3. axio.

PROPOSITIO XLIV.

Problema 12.

Ad datam rectam *a b*, dato triangulo *c*, æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo *d*.

a 42. l. *a. Fiat triangulo* c *æquale parallelogrammum* ebfg, *habens angulum* ebg *æqualem angulo dato* d; *producatur* fg *ad* h, *ut* ab *ſit data ad* b 31. l. *æqualis*; ac *per punctum* a *ipſi* eb ℊ *agatur parallela*, *quæ cum linea* fe *producta cõcurrit in puncto* k. *Per hoc* ℊ *punctum* b *ducitur diagonius concurrens in puncto* h *cum* gf *producta*: *per quod ipſi* ag ℊ *ducitur parallela* hl, *itemq*; eb *continuatur in* m. *Quia enim eidẽ parallelogrammo* gebf *æqualia ſunt*, γ *triangulum* 43. l. c ℊ δ *parallelogrammum* abml, *erit parallelo-* a 1. axiom. *grammum* abml *ad datam lineam* ab *in angulo rectilineo* d *triangulo dato* ε *æquale conſtitutum*.

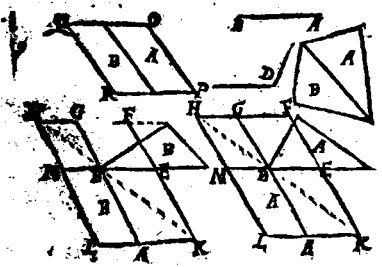


PROPOSITIO XLV.

Problema 13.

Ad datam rectam lineam *ab*, dato rectilineo, *b*, æquale parallelogrammum *apqr* conſtituere, in dato angulo rectilineo *d*.

Reſoluto rectilineo dato in ſua triangula, a, a 44. l. *b* α, *cõſtruantur triãgulis ſingulis æqualia parallelogramma* a ℊ b, *quæ deinde in linea* pr *juxta* aqua-



æquales suas altitudines conjungantur. ζ *Erit* β 9. axi. *totum hoc parallelogrammum toti rectilineo dato æquale, cum singulæ partes respondeant singulis.*

PROPOSITIO XLVI.

Problema 14.

A data recta linea *a b*, quadratum *a b c d* describere.

Ex alterutro termino a *lineæ datæ* a *erigatur perpendicularis* a d *æqualis lineæ datæ &* β *per* d *agatur linea* a b *parellela & æqualis* d c, *jungantur* c *&* b. γ *Æquales & parallelas* a b, d e, *connectentes* d a *&* c b *erunt* δ *æquales, & parallelogrammum factum* ε *æquilaterum; & propter angulos* c, b, *oppositos recto* a d ζ *rectos, rectangulum: ideoq;* η *quadratum.*



α 11. l.
β 31. l.
γ excon.
δ 33. l.
ε 1. axio.
ζ 34. l.
η 26. def. l.

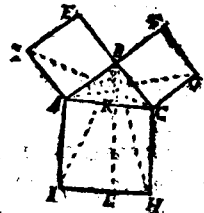
PROPOSITIO XLVII.

Theorema 33.

In rectangulis triangulis *a b c*, quadratum, quod à latere *a c* rectum angulum *a b c* ſubtendente deſcribitur; æquale eſt quadratis *a b e d, b c g f*, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

α 46. 1. ζ 14. 1. γ 31. 1.

α *Deſcriptis tribus quadratis* a h, a e, c f, *in directum* β *jacent lineæ* a b, b f & c b, b e; γ *ducta* ag b l *parallela ipſi* a i, *ducantur etiam* b h, b i, a g, c d.



δ 2. ax. ε 4. 1. ζ 41. 1. η 6. ax.

Addito communi angulo b a c *adrectos* d a b & i a c *fiunt* δ *æquales anguli* i a b. d a c, *ipſaque triangula* d a c, i a b, *eorumque* ζ *dupla parallelogramma* a e & a l η *æqualia; eodemque modo* c f & c l *demonſtrantur æqualia: Erunt ergo quadrata* a e, c f, *quadrato* a h, *quod ex parallelogrammis* a l & c l *componitur æqualia.*

PROPOS: XLIIX.

Theorema 34.

Si

Si quadratum, quod ab uno laterum *ac* trianguli *abc* describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis *ab*, *bc* trianguli lateribus describuntur quadratis: angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus rectus est.



Erigatur ex b *lineæ* a b *perpendicularis* b d *æqualis ipsi* b c *& connectantur* a d. *Quoniam Quadrata* α a d *&* ζ a c *æqualia quadratis* a b, b d *itemq;* a b. b c *erunt etiam inter se* γ *æqualia: & sic in triangulis æqualium laterum* a b c *&* a b d *etiam anguli* a b c *&* a b d δ *æquales erunt: quorum uno* a b d *existente recto, etiam alter* a b c *rectus erit.*

α 47. I.
ζ ex hyp.
γ 1. ax.
δ 8. I.

EUCLI

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER II.

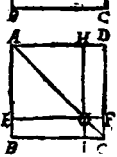
Definitiones.

1.

OMne parallelogrammum rectangulum *abcd* contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, *ab*, *ad*, quæ rectum comprehendunt angulum *bad*.



2. In omni parallelogrammo ſpacio *abcd* unumquod libet *ag* vel *gc* eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorũ, cum duobus complementis *bg* & *gd* Gnomon vocetur.



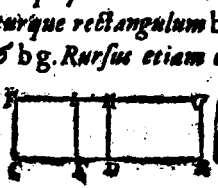
PRO-

PROPOSITIO. I.

Theorema 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ *a* & *bc*, secenturq; ipsarum altera *bc* in quotcunque segmenta *bd*, *de*, *ec*; Rectangulum *bf* comprehensum sub illis duabus rectis lineis *a* & *bc* æquale est eis, quæ sub insecta *a* vel *bg*, & quolibet segmentorum *bd*, *de*, *ec* comprehenduntur, rectangulis *bh*, *di*, *ef*.

Erigatur ex puncto b *perpendicularis* b g *ipsi a aqualis*, *compleaturque rectangulum* b f *comprehensum sub* b c *&* b g. *Rursus etiam ex punctis sectionum* d *&* e *α erigantur perpendiculares* d h *&* e i *β æquales & parallelæ lineæ* g b, *ut fiant rectangula* b h, d i, e f, *quæ tanquam partes simul sumta æquilia sunt toti* b f *sub datis lineis comprehenso. Quod erat ostendendum.*



a 11. l. & 31. & 34. l.

PROPOS: II.

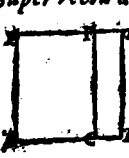
Theorema 2.

Si recta linea *ba* secta sit utcunque in *c*: rectangula *af* & *cd*, quæ sub tota, & quolibet segmentorum *ac* & *cb*

c b comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, Quadrato *a d*.

α 46. 6. β 31. 1.

Super rectâ a b *describatur quadratum* a d, & β *ducatur per* c *ipsis* a e & d b *parallela & æqualis* c f. *Fiunt ergò* a f & c d *parallelogramma, tanquam partes simul sumta æqualia toti* a d *quadrato.*

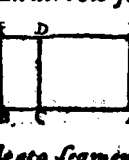


PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si recta linea *a b* secta sit ut cunque: rectangulum *a f* sub tota *a b* & unô segmentorum *a c* comprehensum, æquale est illi, quod sub segmentis *a c*, *c b* comprehenditur, rectangulo *c f* & illi, quod à prædicto segmento *a c* describitur, Quadrato *a d*.

α 46. 1. *Ex utrovis segmento, ut* a c *à fiat quadratum* a c d e, & *productâ rectâ* e d *in* f *fiat æqualis ipsi* a b, & *connectatur* f b. *Erit totum rectangulum* a f *æquale quadrato segmenti* a d *unà cum illo segmentorum rectâ-*



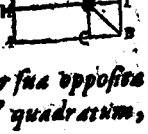
rectangulo, tanquam totum suis partibus simul sumtis.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si recta linea *ab* secta sit utcunque in c; Quadratum *ad*, quod à tota *ab* describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis *ac* & *cb* describuntur, quadratis *bf*, *ci*, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo *ga*, *gd*.

In Quadrato ad, *ex* ab *a descripto, ducatur diagonius* be, *& ex puncto sectionis* c *agatur ipsi* ae *parallela* cf *secans diametrum in* g *puncto, per quod parallela* β *fiat* hi *ipsi* ab. *Ut ergò in triangulis Isosceli bus rectangulis* eab & edb *anguli ad basin* γ *æquales sunt & semirecti; ita in triangulis* efg & ehg *rectangulis, ad basin* eg *angulis existentibus & æqualibus, etiam latera ipsis opposita æqualia fiunt, quibus similiter sua opposita sunt æqualia, adeoque* hf *est* ζ *quadratum, ut &* ci, *utrumq; videlicet sui segmenti. Horum lateribus tanquam segmentis, complementa* ga & gd ζ *æqualia, comprehensa sunt, quæ cum segmentorum quadratis quadrato totius sunt æqualia.*



a 46. I.
β 31. I.
γ 5. I.
δ 32. I.
ε 34. I.
ζ 43. I.

Cor-

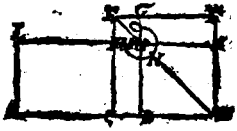
Corollarium.

In quadratis quæ circa diametrum sunt parallelogramma, quadrata sunt.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si recta linea *b a* secetur in æqualia *a c*, *c b* & non æqualia *a d*, *d b*: rectangulum *a b* sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato *k g*, quod ab intermedia sectionum *c d* æquale est, ei, quod à dimidia *c b* describitur, quadrato *c f*.



Ex c b *dimidia describatur quadratum* c f, *& ducatur diagonius, quam ex* d *erecta perpendicularis secet in punctο* h, *per quod æqualis & parallela* l i *agatur ipsi* a b, *& l cum* a *conjungatur. Iam si rectangulorum æqualium unũ* a k *adijciatur, complementorum æqualium unũ* c h; *aliteri verò* c i *alterum* h f, *& utrig, commune quadratũ inter segmenti* k g; *erit* a h *rectangulum inæqualium segmentorum unà cũ illo interſegmenti quadrato,*

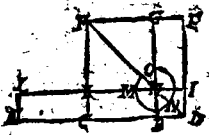
α 46. l.
β 11. l.
γ 31. l.
δ 36. l.
ε 43. l.
ζ cor. 4. l.

lo k g aquale gnomoni m n o *cum eodem quadrato, seu quadrato* c f *dimidiæ* c d.

PROPOS. VI.

Theorema 6.

Si recta linea *a b* secetur *in c*, & illi recta quædam linea *b d* in rectum adjiciatur: rectangulum *a i* comprehensum sub tota cum adjecta *a d* & adjecta *b d*, una cum quadrato *k g* à dimidia *c b* æquale est quadrato *c e* à linea; quæ cum ex dimidia *c b* tum ex adjecta *b d* componitur, tanquam ab una descripto.



α *Describatur ex* c d *quadratum* c e *cum diametro* d f, *quam ex* b β *erecta perpendicularis intersecet in* h *puncto; per quod ipsi* a d γ *ducatur parallela & æqualis* i l. *Rectangulo eidem* c h δ *æqualibus* a k & h e, *addito communi* e i, ε *æqualia fiunt rectangulum* a i & *gnomon* m n o; *adeoq; &* ζ *acta communi quadrato* k g.

α 46. I.
β 11. I.
γ 31. I.
δ 36. & 43. I.
ε 2. ax.

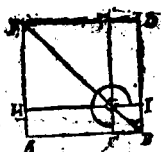
PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si recta linea *a b* secetur utcunque *in c*, quod à tota *a d*, quodque ab uno segmentorum *b f*, utraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo *a f*, *b d*, & illi quod à reliquo segmento fit, quadrato *g b*.

Iterum super a b *α describatur quadratum & ducta diagonio ex* c *β erigatur perpendicularis* c f, *& per* g *data* a b *parallela γ fiat* h i.

α 46. I.
β 11. I.
γ 31. I.
δ 4. II.
ε 8. ax.



Cum ergo gnomoni i e m, *una cum quadrato* g b *δ æquale sit quadratum* a d; *addito communi* h f, *erunt quadrata* a d *ax tota, & h f ex segmento, æqualia rectangulis* a f *&* h d, *sub tota & segmento comprehensis, una cum reliqui segmenti quadrato* g b.

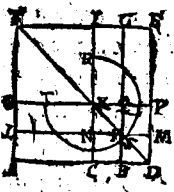
PROPOSITIO VIII.

Theorema 8.

Si recta linea *a b* secetur utcunque

que in c: rectangulum *a b* quater comprehensum sub tota *a b* & uno segmentorum *c b*, cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato *o i* æquale est ei, quod à tota & dicto segmento; tanquam ab una *a d* linea describitur, quadrato *a e*.

Vtcunq; in c sectæ a b adponatur b d æqualis ipsi c b; & describatur quadratum a e super totam a d: expunctis autem c & b β erigantur perpendiculares & parallelæ c i & b g, quæ diagonium f d secent in k & h punctis, per quæ ipsi a d parallelæ & æquales ducantur. Æqualibus igitur parallelogrammis singulis a n, l k, k g, q e, ex segmentis datæ lineæ factis, si addantur singula quadrata æqualia ex altero segmento facta; erunt quatuor hæc rectangula ex tota & segmento & inter se & æqualia & simul sumta gnomon m r s t: quibus si addatur quadratum o i ex priore segmento a c, æqualia erunt quadrato a e facto ex tota a b cum segmento b d tanquam ab una parte simul sumta toti.



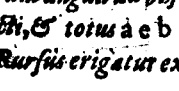
α 46. I.
ζ 11. I.
γ 31. 34. I.
δ 36. I. & 43. I.
ε 34. I.
ζ 2 ax.

PROPOS. IX.

Problema 9.

Si recta linea *ab* secetur in æqualia *ac*, *cb*, & non æqualia *ad*, *db*: Quadrata *ad*, *db*, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & ejus, quod à dimidia *ac*, & ejus, quod ab intermedia sectionum *cd* fit, quadrati.

Dimidiæ a c *æqualis* a *erigatur perpendicularis* c e, *& ei cum* a *&* b *connectatur, ut fiant duo triangula isoscelia rectangula* a c e *&* b c e, *quorum anguli ad bases* β *erunt æquales & semirecti, & totus* à e b *ex duobus semirectis rectus. Rursus erigatur ex* d *perpendicularis* d f, *& ipsi* c d γ *fiat parallela & æqualis. Erũt ergò in duobus rectangulis triangulis* b d f *&* e g f *semirecti ad bases, & his subtensa latera* δ *æqualia. Dein, ducatur* a f. *In triangulo* a c e *quadratum hypotenusæ* a e, *æquale est quadratis ex* a c *&* c e; *vel duplum quadrati dimidiæ* à c, *item quadratum* e f *duplum erit quadrati* g f *vel* c d *intermediæ: ac proinde quadrata* a e *&* e f *simul sumta erunt dupla quadratorum* a c *dimidiæ &* c d *intermediæ. Cum quadratũ* a f e *æquale sit quadratis* a e *&* e f *simul sumtis; & quadrati* ad *&* d f *vel* d b *inæqualium segmentorum erunt hæc quadrata inæqualium segmentorum*



α 1. I.

β 5. & 32. I.

γ 31. I.

δ 6. I.

47. I.

dupla.

dorum ex dimidia & intermedia. Quod erat propositum.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si recta linea *a b* secetur bifariam in *c*; adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea *b d*: quod à tota cum adjuncta & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata *a d* & *b d*, duplicia sunt & ejus, quod à composita ex dimidia & adjuncta, tanquam ab una *c d*, descriptum sit, quadrati.



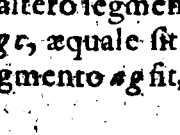
Iterum ex c ducatur recta c e *perpendicularis aequalis ipsi a c, fiant duo trianguli Isosceli a c e & b c e, in quibus anguli ad bases* α 11. I. *& aquales & γ semirecti. Deinde compleatur rectangulum c f, producta e f & f d donec eb concurrant in g, & g connectatur cum a. Erunt trianguli rectangula c f g & b d g etiam Isosceli, & anguli ad bases semirecti. Est ergo quadratum a c d* β 5. I. γ 32. I. *duplum quadrati a c, & quadratum c g quadrati e f vel c d, quadratum a g quadratis a c & c g* δ 47. I. *est δ aquale, idemq; quadratum a g etiam δ aquale est quadratis a d totius cum adjecta & d g adjecta: ideoq; etiam hæc duo quadrata to-*

tius cum adjecta & adjecta erunt dupla quadratorum dimidiæ & dimidiæ cum adjecta.

PROPOSITIO XI.

Problema 1.

Datam rectam lineam *a b* secare, ut comprehensum sub tota *a b* vel *b c*, & altero segmentorum *g b* rectangulum *g c*, æquale sit ei, quod à reliquo segmento *a g* fit, quadrato *a b*.



α 46. I. β 10. I. *Super e b data a describatur quadratum a c; & latus a d β secetur bifariam in e, ductaq; e b fiat æqualis e f; & super a b ita fiat quadratum, continuata h g in i. Cum ergò rectangulum d h super tota cum adjecta & adjecta, unà cum quadrato dimidiæ γ æquale sit quadrato ex dimidia & adjecta e f vel e b, quod δ æquale est quadratis e a dimidiæ & a b totius; ablato communi quadrato e a, erunt quadratum d b ex tota a b, & rectangulum d h ex tota cum adjecta & adjecta æqualia: rursusq; ablato rectangulo communi a i ex tota & adjecta, relinquetur quadratum a h adjecta, vel alterius*

γ 6. II. δ 47. I. ε 3. ax.

segmen-

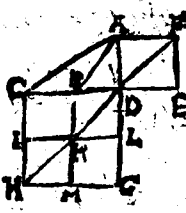
segmenti a g æquale rectangulo g c *comprehenso sub data recta* a b *& altero segmento* g b.

PROPOS. XII.

Theorema II.

In amblygonijs triangulis *a b c*, quadratum quod fit à latere *a c* angulum obtusum *a b c* subtendente, majus est quadratis quæ fiunt à lateribus *a b, b c*, obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo *c k* bis comprehenso & ab uno laterum *c b*, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod eum protractum fuerit, cadit perpendicularis *a d*, & ab assumta *b d* exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

Ex puncto a demittatur perpendicularis a d *in latus* c b *protractum. Quadratum ex* c d ∝ II. 1. *æquale est quadratis segmentorum* c b *&* β 4 II. b d. *una cum rectangulo bis sub segmentis*



γ 2. ax. *sumto : quibus si addatur commune quadratum perpendicularis* a d, *erunt tria quadrata ex segmentis & perpendiculari, una cum rectangulo bis sub segmentis aequalia duobus quadratis ex* c d *&* a d, *quibus* δ *aequale est*

δ 47. I. *quadratum* a c. *Cum* q *quadratum* a b *tantum sit* δ *aequale quadratis* a d *&* b d, *erit quadratum* c a *maius quadratis laterum obtusum angulum includentium rectangulo bis sub uno laterum* c b *&* assumta b d *comprehenso.*

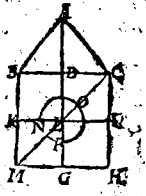
PROPOS: XIII.

Theorema 12.

In oxygonijs triangulis *a b c* quadratum à latere *a b* angulum acutum *a c b* subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus *a c, b c* acutum angulum comprehendentibus, rectangulo *b i* & *d h*, bis comprehenso & ab uno laterum *b c*, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis *a d* cadit, & ab assumta interius linea *d c* sub perpendiculari prope acutum angulum.

Demit.

α Demittatur perpendicularis a d in latus b c angulo dato c adjacens. Est quadratum rectæ a b β æquale quadratis a d & b d: quadrato autem b d majus est quadratum rectæ b c, gnomone n o p: quadratum verò a c β æquale est quadratis a d & d c, majus nimirum quadrato a d per quadratum d c. Sic ergo quadratum rectæ a b minus est quadratis rectarum b c & c a, rectangulo bis sumto sub tota b c, & segmento d c, id est, rectangulis b i & d h.



α 12. II.

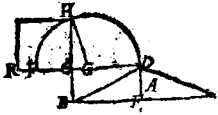
β 47. I.

PROPOS. XIV.

Problema 2.

Dato rectilineo a, æquale quadratum c i constituere.

α Fiat rectilineo a, æquale rectangulum b c d e; extendatur ℓ3 latus d c in f, intervallo c b, ipsa ℓ3 d f β secetur bifariam in g, & ex g intervallo g d vel g f describatur semicirculus d h f, producta b c in h. Cum ergo recta d f sectaſit æqualiter in g, & inæqualiter in c, erit rectangulum e c sub d c & c f, unà cum quadrato g c



α 45. I.

β 10. I.

γ. II. 47. I. γ aquale quadrato rectæ g f & g h. Quadrato autem g h ∂ æqualia sunt quadrata g c & c h. Ergò & rectangulum e c una cum quadrato g c, æquale est quadratis rectarum g c & c h. 8. Ax. Ablato communi quadrato g c, remanebunt æqualia rectangulum e c vel a, & quadratum rectæ c h. Quod erat faciendum.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER III.

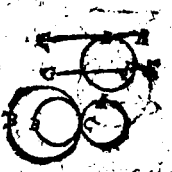
Definitiones.



Æquales circuli sunt *a f h*, *b g c*, quorum diametri *a b*, *b c* sunt æquales; & quorum quæ excen-

centris, rectæ *d f*, *e g* sunt æquales.

2. Recta *a b c* circulum *b f d* tangere dicitur, quæ cum circulum tangit in *b*, si producatur, circulum nō secat.



3. Circuli seſe mutuò tangere in *e* dicuntur, qui seſe mutuò tangentes, seſe mutuò non secant.

4. In circulo *a b d* rectæ *a b*, *b i*, æqualiter à centro *e* distare dicuntur; cum perpendiculares *e k*, *e f*, quæ à centro *e* in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longiùs abesse illa dicitur *d e*, in quam major *e g* perpendicularis cadit.



5. Segmentum *e* circuli est figura, quæ sub recta linea, *b d* & circuli peripheria *b a d* comprehenditur.



6. Se-



6. Segmenti angulus *bac* est, qui sub rectalinea *ac* & circuli peripheria comprehenditur.



7. In segmento angulus est, cum in segmenti peripheria sumtum fuerit quodpiam punctum *b*, & ab illo in terminos rectæ *a*, *c*, qui segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ; angulus *abc*, ab adjunctis illis comprehensus.



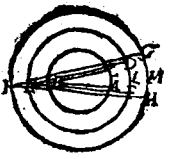
8. Cum verò comprehendentes angulum rectæ *da*, *ba* aliquam assumunt peripheriam; ille angulus *bad* peripheriæ *db* insistere dicitur.



9. Sector Circuli est, cum ad ipsius circuli centrum *e* constitutus fuerit angulus *aec*: estque figura comprehensa à rectis *ae*, *ec* angulum continentibus, & à peripheria *adc* ab illis assumta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ

quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli *d*, *e*, *i*, inter se sunt æquales. Ita arcus vel circumferentiæ *a k c*, *d l f*, *m b i* similes dicuntur, quibus æquales anguli insistunt.



PROPOSITIO I.

Problema 1.

Dati circuli *a b c* centrum *f* invenire.

Ad ductam in circulo rectam a c, *& bifariam secta*m *in* e, *& erigatur perpendicularis, quæ utrinq; in peripheriam terminata, etiam & secetur bifariam in* f, *centro circuli. Sin minus, cum in illa recta aliud esse non possit, extra ipsam ponatur* g; *ducanturq;* g f a, g c, g e. *Quia ergò æqualia sunt in triangulis* a g e, *&* e g c *omnia latera* γ ag, gc; δ ae, ec; *& ge cõmune; æquales etiam erunt anguli* a eg, c eg *& recti; totum* a eg *parti* f e a, *æquale.* ζ *Quod absurdum.*

α 10. I.
β 11. I.
γ 15. def. I.
δ ex cõstr.
ε 8. I.
ζ 9. ax.



Corollarium 1.

Si recta rectam ad angulos rectos

γ 5. II. γ æquale quadrato rectæ g f. & g h. Quadrato autem g h d æquales sunt quadrata g c & c h. Ergò & rectangulum e c una cum quadrato g c, æquale est quadratis rectarum g c & c h. Ablato communi quadrato g c, remanebunt æqualia rectangulum e c vel a, & quadratum rectæ c h. Quod erat faciendum.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER III.

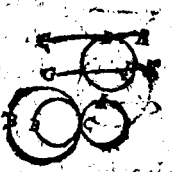
Definitiones.



1. ÆQUALES circuli sunt a f b, b g c, quorum diametri a b, b c sunt æquales; & quorum quæ excen-

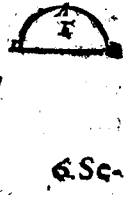
centris, rectæ *d f*, *e g* sunt æquales.

2. Recta *a b c* circulum *b f d* tangere dicitur, quæ cum circulum tangit in *b*, si producatur, circulum nō secat.



3. Circuli sese mutuò tangere in *c* dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.

4. In circulo *a b d* rectæ *a b*, *b d*, æqualiter à centro *e* distare dicuntur; cum perpendiculares *e k*, *e f*, quæ à centro *e* in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longiùs abesse illa dicitur *d e*, in quam major *c g* perpendicularis cadit.



5. Segmentum *e* circuli est figura, quæ sub recta linea, *b d* & circuli peripheria *b a d* comprehenditur.



6. Se-



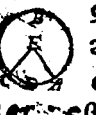
6. Segmenti angulus *bac* est, qui sub rectalinea *ac* & circuli peripheria comprehenditur,



7. In segmento angulus est, cum in segmenti peripheria sumtum fuerit quodpiam punctum *b*, & ab illo in terminos rectæ *a*, *c*, qui segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ; angulus *abc*, ab adjunctis illis comprehensus.



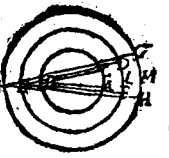
8. Cum verò comprehendentes angulum rectæ *da*, *ba* aliquam assumunt peripheriam; ille angulus *bad* peripheriæ *db* insistere dicitur.



9. Sector circuli est, cum ad ipsius circuli centrum *e* constitutus fuerit angulus *aec*, estque figura comprehensa à rectis *ae*, *ec* angulum continentibus, & à peripheria *adc* ab illis assumta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ

quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli *d*, *e*, *i*, inter se sunt æquales. Ita arcus vel circumferentiæ *a k c*, *d l f*, *m b i* similes dicuntur, quibus æquales anguli insistunt.



PROPOSITIO I.

Problema 1.

Dati circuli *a b c* centrum *f* invenire.

Ad ductam in circulo rectam a c, *& bifariam secetam in* e, *& erigatur perpendicularis, quæ utrinque in peripheriam terminata, etiam bifariam secetur in* f, *centro circuli. Si minus, cum in illa recta aliud esse non possit, extra ipsam ponatur* g; *ducanturque* g f a, g c, g e. *Quia ergo æqualia sunt in triangulis* a g e, *& e g c omnia latera* a g, g c; *& a e, e c; & g e commune; æquales etiam erunt anguli* a e g, c e g *& recti; totum* a e g *parti* f e a, *æquale. Quod absurdum.* 10. I. 11. I.



15. def. I. ex cõstr. 8. I. 9. ax.

Corollarium.

Si recta rectam ad angulos rectos

ctos in circulo æquibisecet, in secante centrum erit circuli.

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si in circuli peripheria duo quælibet, puncta accepta fuerint, recta linea *ab* quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

α 16. I.



In recta a b *assumatur quodcunq; punctum* d, *& ducantur ex centro* c a, c b, c d. *Cum ergo angulus* e d a *α major sit angulo* c d b β *seu angulo* c a d; *erit etiam* c a *seu idem a semidiametro* γ *major linea* c d. *Ideoq; & punctum* d, *& quævis alia intermedia puncta a linea* a b *cadunt intra circulum.*

β 5. I.
γ 19. I.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si in circulo *b c d* recta quædam linea *c e* per centrum extensa, quandam non per centrum extensam *b d* bifariam secet *in f*, eam ad angulos rectos secabit. Et si ad angulos re-

ctos

dos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

Quia enim in Triangulis a f b, a f d *laterum* α *aequalium, etiam lateribus aequalibus oppositi anguli sunt* β *aequales, erunt* a f b, a f d γ *recti.*



α ex constr. & 15. def. I.
β 8. I.
γ 10. def. I.

PROPOS. IV.

Theorema 3.

Si in circulo duæ rectæ lineæ α *a b, c d* sese mutuò secent *in e*, non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

Quod si bifariam se secarent; tum ex centro f *ducta recta* f e *utramq; secaret ad angulos rectos* α *aequales* β *in partem q; toti aqualem efficeret. Quod est* γ *absurdum.*



α 3. III.
β 10. def. I
γ 9. ax.

PROPOSITIO V.

Theorema 4.

Si duo circuli *a b d, b e d* sese mutuò secent *in b & d*; non erit illorum idem centrum *c.*

Si centrum commune esset c, *ductis lineis,* c b & c a *erunt* c b, c e & c a α *aequales, pars toti. Quod* β *absurdum.*



α 15. def. I.
β 9. ax.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 5.

Si duo circuli *a b*, *c b* ſeſe mutuò interius tangant *in b*; eorum non erit idem centrum *d*.



Si centrum commune eſſet d, *ductis lineis* d b & d a c, *erunt* d b, d a, & d c æ *equales*, *pars toti*. *Quod* & *abſurdum*.

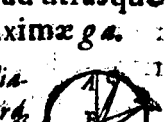
15. def. 1. & 9. ax.

PROPOS: VII.

Theorema 6.

Si in diametro circuli *a b* quodpiam ſumatur punctum *g*, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto *g* in circulum quædam rectæ lineæ *g c*, *g d*, *g e* cadant: maxima quidem erit ea *g a* in qua centrum; minima verò reliqua *g b*; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum *f* ducitur, remotiore ſemper major *g a* ipſa *g c*, & hac ipſa *g d*: duæ autem ſolum rectæ æquales *g b*, *g e* ab eo puncto

dog in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ g b vel maximæ g a.



Ex centro f *ducantur semidiametri* f c, fd, fe, fh, *& ponatur* ∠ *angulo* e f b *æqualis* b f h, *& ducatur recta* g h. *Quia enim* f c *&* f g, *hoc est*, g a, *ý majores sunt latere* g c; *ô hoc latere* g d, *quia in triangulis æqualium laterum major angulo subtensum*; *ô hoc rursus latere* g e. *Quia etiam* e f, *hoc est*, f b *ę minor est* f g *&* g e *simul sumtis, ablato communi* f g, *etiam* g e *major erit* g b: *adeoq; maxima est* g a, *minima* g b; *reliquæ quò viciniores minimæ, eò sunt minores. Quia denig; in triangulis* e f g *&* g f h *æqualium laterum æquales angulos comprehendentium*, *bases* g e *&* g h *sunt æquales*; *ex utraq; parte minimæ* g b *æqualiter distantes sunt æquales*: *Reliquæ omnes sunt vel minores versus* b, *vel majores versus* a. *Quod erat propositum.*

a 23. I.
b 15. def. I.
γ 20. I.
δ 44. I.
ε 20. I.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 7.

Si extrà circulum sumatur punctum quodpiam *a*, adeoque ad circulum ducantur quædam rectæ *a b*, *a c*, *a d*, *a e*, quarum una quidem *a b* per

centrum *k* protendatur; reliquæ verò utcunque: in concavam peripheriam cadentium rectarum *af, ag, ab, ai*, maxima quidem est ea *ai* quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior *ab* illi *ai*, quæ centrum transit remotior *ag* semper major est; ut convexam verò peripheriam cadentium rectarum linearū, minima quidem est illa *ab* quæ inter punctum *a* & diametrum *bi* interponitur; aliarum autem ea, *ac*, quæ propinquior est minimæ, remotiore *ad* semper minor est. Duæ autem tantùm rectæ lineæ *ac*, *al* æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ *ab* vel maximæ *ai*.



Ex centro k *ducantur semidiametri ad singula sectionis puncta,* α *fiat* ⅔ *angulus* a k c *angulo* a k l *æqualis.*

α 23. I.

Quia enim rectæ a k, k h *vel* a i β *major est recta* a h; *at* ⅔ *ita* a h γ *major quàm* a g, *& hæc quàm* a f, *maxima itaq; est* a i, *& reliquæ quò remotiores ab ea, hoc* γ *minores. Contra rum* a k β *minor*

β 20. I.
γ 24. I.

sit

sit quàm a c *&* c k, *ablatis æqualibus* k b *&* k c; *relinquetur* a b *minor quàm* a c. *Item, cum & minores sint* a c *&* c k, *quam* a d, d k *& hæ & minores quàm* a e, e k, *hæ quàm* a m, m k, *demtis æqualibus semidiametris, relinquentur* a d *minor quàm* a e, *& hæc quàm* a m, *atq; in illorum minima est* a b. *Denig; quia in triangulis* a k c *&* a k l *sub æqualibus lateribus comprehenduntur, anguli ad* k *æquales, illis æqualia opponuntur latera* a l *&* a c, *quibus nulla alia æqualis ex eodem puncto ad circumferentiam illam duci potest. Quod erat demonstrandum.* & 21. I. 24. I.

PROPOSITIO IX.

Theorema 8.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod a, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

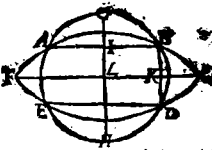


Sin minus a *fuerit centrum, esto* e, *& per* e a *ducatur diameter* f g. *Ex puncto ergò* a *duæ ad summum rectæ ad circumferentiam æquales cadere poterunt; tertiaq; vel major vel minor erit. Quod est contra hypothesin, præter* a *ergò aliud centrum non erit.* 27. III.

PROPOSITIO X.

Theorema 9.

Circulus *a b c d e f* circulum *a g c h e k* in plurib⁹ quàm duobus punctis non secat.



Secent se, si possibile est in tribus punctis a, b, d, *duo circuli, qui rectis* a b, b d *connectantur, per quarum puncta media* i & k

α 10. I. β 11. I. γ 1. III. δ 5. III.

β erigantur perpendiculares i l & k l. *γ Erit communis illarum intersectio* l *centrum utrius circuli. Quod est δ absurdum.*

PROPOSITIO XI.

Theorema 10.

Si duo circuli *c, d* sese intus contingant in *e*, atq; accepta fuerint eorum centra *a, b*; ad eorum centra adjuncta recta linea *a b* & producta in contactum *e* circulorum cadet.

Si in rectâ a e *centrum* b *non fuerit; ponatur in* f, *& ductæ lineæ* a f g h, *erunt* f e & f g

a e

a g & a h *æquales. Cumq;* f e & f c *æquales ipsis* a f, f g, γ *majores sint quàm* a e *seu* a h; *erit pars* a b *major toto* a h. *Quod δ absurdum.*



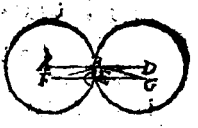
α 15. def. I.
β 2. ax.
γ 20. I.
δ 9. ax.

PROPOSITIO XII.

Theorema 11.

Si duo circuli sese exteriùs contingant in *b*, linea recta *a d* quæ ad centra eorum adjungitur, per contactum *b* transibit.

Sin minus recta connectens centra per contactum b *transeat, esto* f g, *& connectantur* b f, b g. *α Erunt hæ duæ vel* g e, f c *majores quàm* f g, *pars toto. Quod β absurdum.*



α 20. I.
β 9. ax.

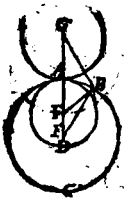
PROPOSITIO XIII.

Theorema 12.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm uno, sive intus sive extra tangat.

Recta per centra e f *α cadit in contactum* a, *si præter* a *ponatur aliud contactus punctum* b,

β 10. I. γ 5. ax.



quod connectatur cum utroq; centro f *&* e. *Cum ergò* b f, f e *sint* β *majores quàm* e b, *id est* e a, *ablata communi* e f, γ *major erit* f b *quàm* f a *& punctum* b *cadet extra circulum interiorem, ubi nullus fit contactus. Sic tangent se duo circuli exterius itidem in* a; *recta connectens contra* α *cadit in contactum* a: *Sin etiam in* b *fieret contactus, tum* b g *&* b e *fierent* δ *æquales lineæ* e a g. *Quod* β *absurdum.*

δ 15. def. I.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo æquales rectæ *a b, d c* æqualiter distant à centro *e*, & quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

α 12. I. β 3. III. γ 15. def. I.



In rectas a b, d c *æquales ex centro* α *ducantur perpendiculares in* f *&* g *illorum puncta* f *& media, item* e a, *&* e d γ *æquales. Quia ergò quadrata ex* e a, e d *æqualia, quadratis* a f, e f *&* d g, e g *sunt* δ *æqualia; ablatis æqualibus quadratis laterum* β *æqualium* a f, d g; *residua quadrata* ε *æqualia, erunt æquali-*

δ 47. I. ε 3. ax.

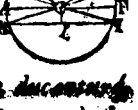
um

quæ diameter e f, *ex quadam, ideſt, infinito circuli ambitu aquilitus distans.*

PROPOSITIO XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea, eſt diameter e f; *aliarum autem propinquior* h i *centro* g *remotiore* c d *ſemper major eſt.*



In linea h i, c d *ex centro* g *ducantur perpendiculares* g l, g k; *ipſi* g l *æqualis* g m *abſcindatur de* g k, *& per* m *ipſi* e f *rectus erigatur* m n; *ipſi* h i *æqualis*, *ducantur* n o, n p *ad circumferentiam* a b, c, d, e. *Cum ergo* g l *ſit æqualis* g m, a f *& maiores ſint, quàm* b e, *& angulus* a g f *maior angulo* c g d; *erit* a f *maior quam* c d. *Quod erat oſtendendum.*

α 12. I.
β 12. I.
γ 14. I.
δ 20. I.
ε 9. ax.
ζ 24. I.

PROPOSITIO XVI.

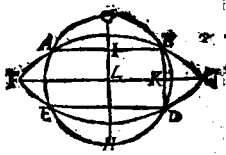
Theorema 15.

Quæ ſe ab extremitate cujusq; dia-

PROPOSITIO X.

Theorema 9.

Circulus *a b c d e f* circulum *a g b d e h* in plurib⁹ quàm duobus punctis non secat.



Secent se, si possibile est in tribus punctis a, b, d, *duo circuli, qui rectis* a b, b d *connectantur, per quarum puncta media* i & k

α 10. I.

β 11. I.

γ 1. III.

δ 5. III.

β *erigantur perpendiculares* i l & k l. γ *Erit communis illarum intersectio* l *centrum utrius circuli. Quod est* δ *absurdum.*

PROPOSITIO XI.

Theorema 10.

Si duo circuli *c, d* sese intus contingant in *e*, atq; accepta fuerint eorum centra *a, b*; ad eorum centra adjuncta recta linea *a b* & producta in contactum *e* circulorum cadet.

Si in rectâ a e centrum b non fuerit; ponatur in f, & ducantur lineæ a f g h, b f, b g, b h.

a e

a e & a h *æquales. Cumq;* f e & f a *æquales ipsis* a f, f g, *γ majores sint quàm* a e *seu* a h; *erit pars* a b *major tota* a h. *Quod δ absurdum.*



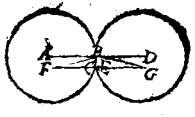
α 15. def. I.
β 2. ax.
γ 20. I.
δ 9. ax.

PROPOSITIO XII.

Theorema 11.

Si duo circuli sese exterius contingant in b, linea recta a d quæ ad centra eorum adjungitur, per contactum b transibit.

Sin minus recta connectens centra per contactum b transit, esto f g, *& connectantur* b f, b g. *α Erunt hæ duæ vel* g e, f c *majores quàm* f g, *pars toto. Quod β absurdum.*



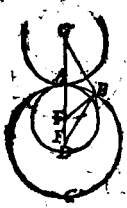
α 20. I.
β 9. ax.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 12.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm uno, sive intus sive extra tangat.

Recta per centra e f *α cadit in contactum* a, *si præter* a *ponatur aliud contactus punctum* b,



β 10. I. γ 5. ax. *quod connectatur cum utroq; centro* f *&* e. *Cum ergò* b f, f e *sint* β *majores quàm* e b, *id est* e a, *ablata communi* e f, γ *major erit* f b *quàm* f a *& punctum* b *cadet extra circulum interiorem, ubi nullus fit contactus. Sic tangent se duo circuli exterius itidem in* a; *recta connectens centra* α *cadit in contactum* a: *Sin etiam in* b *fieret contactus, tum* b g *&* b e *fierent* δ *æquales lineæ* e a g. *Quod* β *absurdum.*

δ 15. def. I.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 13.

In circulo æquales rectæ *a b, d c* æqualiter distant à centro *e*, & quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.



α 12. I. β 3. III. γ 15. def. I. *In rectas* a b, d c *æquales ex centro* e *ducantur perpendiculares* e f *&* e g *illarum puncta* f *&* g *media, item* e a, *&* e d γ *æquales. Quia ergò quadrata ex* e a, e d *æqualia, quadratis* a f, e f *&* d g, e g *sunt* δ *æqualia; ablatis æqualibus quadratis laterum* β *æqualium* a f, d g; *residua quadrata æqualia, erunt æquali-*

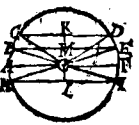
δ 47. I. ε 3. ax.

um laterum ef, eg *quadratum, id est, inscripto æquales æqualiter à centro distant.*

PROPOSITIO XV.

Theorema 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter *ef*; aliarum autem propinquior *bi* centro g remotiore *cd* semper major est.



In lineas hi, cd *ex centro* g *ducantur perpendiculares* gl, gk; *ipsi* gl *æqualis* gm *abscindatur de* gk, *& per* m *erigatur perpendicularis ipsi* hi γ *æqualis*; *ducantur semidiametri in puncta* b, c, d, e. *Cum ergò* gl, ge, *id est*, af *ò maiores sint, quàm* be, *& angulus* bge *maior angulo* cgd; *erit* af *ò maior quam* be, *&* ζ be *seu* hi *est maior quàm* cd. *Quod erat ostendendum.*

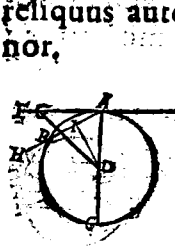
α 12. I.
β 12. I.
γ 14. I.
δ 20. I.
ε 9. ax.
ζ 24. I.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 15.

Quæ *fe* ab extremitate *f* cujusq; dia-

metri c̄ circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet, & in locum inter ipsam rectam lineam *ae* & peripheriam comprehensum, altera linea non cadet: & semicirculi quidem angulus *dab* quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem *bae* (contactus) minor.



Sumatur in linea a e *punctum* g *& connectatur cum centro* d. *Erit angulo* a *recto* a *oppositum latus* d g, *quam* d a, *oppositum* β *acuto* g γ *majus* g, *punctum* g *cadit extra omnibus illius lineæ extra circulum. Proinde ducta alia* a h *infra ipsam* a e, *& demittatur ipsam perpendicularis* d i. *Angulo* a *recto* i *rectus opponetur & majus latus* d a, β *acuto* d a b *minus* d i. *Ideoq;* i *punctum intra circulum cadit, & linea illa circulum secat, nec ulla inter Tangentem & circulum alia duci potest. Proinde neque minor erit angulus, angulo contactus* d a b; *nec major angulo semicirculi seu corniculari* d a b *inter quosvis rectilineos.*

a ex hyp.
ζ 17. I.
γ 17. I.
δ 12. I.

Corollarium.

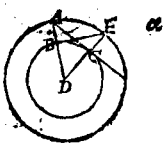
Recta tangens circulum, in unico

nico extremo diametri puncto tangit.

PROPOSITIO XVII.

Problema 2.

A dato puncto *a* rectam *ac* ducere, quæ datum circulum tangat *in c*.



Dati circuli centrum d *connectatur cum* a *& ex intersectionis puncto* b *α erigatur perpendicularis infinita, & ex centro* d *intervallo* d a *describatur circulus secet infinitam illam in* e, *quod cum centro* d *connexum, secat circulum datum in* c *puncto, ad quod ex* a *ducta recta* a c *tangit circulum. Sunt enim in triangulis* a c d *&* d b e *β aequalium laterum cum angulo comprehenso communi* d, *et iam reliqui anguli reliquis γ aequales, δ rectо* b, *rectus* c: *ε Ideoq;* a c *Tangent. Quod erat faciendum.*

α 11. I.

β 15. def. I.
γ 4. I.
δ 12. def. I.
ε 16. III.

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Si circulum tangat recta quæpiam

linea *a b*, à centro *e* autem ad contactum *e* adjungatur recta quædam linea *e c*: quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.



α 19. I. β 9. ax.

Si angulus e c b non est rectus, esto e f c rectus. Hujus ergò oppositum latus e c vel e d erit a, majus quàm e f pars totæ. Quod ζ absurdum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si circulum *d* tetigerit recta *a b* quæpiam linea à contactu autem *c* recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur; in excitata erit centrum circuli.



α 18. III. β ex constr. & hypot. γ 9. ax.

Si centrum non est in c e, esto extra illam f, quod cum c a perpendiculari linea connectetur. ζ Erunt ergò e c b rectus & f c b pars recti æqua. Quod absurdum.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

In circulo *a b c* angulus ad centrum *b d c* duplex est anguli *a e f* ad peripheriam; cum fuerit ead em peripheria *b c* basis angulorum.



Primò sit latus b a *sit commune cum* b d; *& erit externus* b d c *internorum & æqualium alterius* b a c, *anguli ad peripheriam duplus.* α 32. I. & 5. I.

Deinde includant duæ b a, a c *duas* b d, d c *& ducatur diameter* e g; γ *Erunt rursus* b d g; g d c *dupli duorum* b e g, g e c; *totus* g b d c, *totius* b e c. γ 32. & 5. I.

Tertiò f c *secet latus* b a, *& ducatur diameter* f h. γ *Erit similiter angulus externus totus* h d b *duplus interim totius* h f b; *sic etiam externus* h d c *auferendus ex toto* o h d b *duplus est anguli* c f h, *etiam à suo toto* h f b *auferendi. Reliquus ergo ad centrum* c d b *est reliqui ad peripheriam* c f b *duplus. Quod erat demonstrandum.*

PROPOS: XXI.

Theorema 19.

In

In circulo, qui in eodem segmento *dac* sunt, anguli *a*, *b*, sunt inter se æquales.



α 20. III. β 7. ax.

Ductis semidiametris e d, e c; *Quia angulus* e *utriusq;* a & b *duplus est, erunt,* β *æquales.*

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Quadrilaterorum *a b c d* in circulis descriptorum *b a d*, *b c d* anguli, qui ex adverso *ac*, duobus rectis sunt æquales.



α 22. I. β 21. I.

Ducantur diagonij a c; b d. *Cùm ergò trianguli* b c d *tres anguli duobus rectis sint* α *æquales, partes* d, *anguli* a *sint duobus ad basin* β *æquales,* c a d & c b d; c a b & b d c; *erunt etiam oppositi* a & c *duobus rectis æquales.*

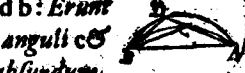
PROPOS: XXIII.

Theorema 21.

Super eadem recta linea *a b*, duo segmen-

segmenta circulorum similia, & inæqualia non constituentur ad easdem partes.

Ducta a c d, c b, d b: *Erunt in a similibus segmentis anguli* c & d β *æquales. Quod* γ *absurdum.*



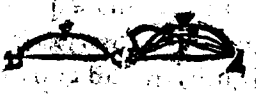
a ex hypot. β 10. def. III. γ 16. I.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Super æqualibus rectis lineis *a b, c d,* similia circulorum segmenta, sunt inter se æqualia.

Propter bases enim a b, c d *æquales congruentes, congruere sibi debent ipsa segmenta* a c b, c f d. *Si minus, erunt vel inæqualia, sed non* β *similia contra hypothesin: vel circulus circulum in pluribus quam duobus punctis secabit. Quod* γ *absurdum.*



a 8. ax. β 23. III. γ 10. III.

PROPOS. XXV.

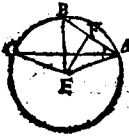
Problema 3.

Circuli segmento *a b c* dato, describere circulum, cujus est segmentum

a Stev.

α 10. I. β coni. III. γ 11. δ 4. I. ε 9. III.

α Secetur basis a b *segmenti bifariam per lineam, qua centrum circuli* β *contineabit, α secetur item alia inscripta* a b *bifariam per alteram lineam, qua priorem secabit in* e *centro. Vel ad aipsi* a b *e angulo* γ *fiat aequalis* b a e *ductis* a e *&* e c; *erunt tres lineæ* a e, e c, e b δ *aequales &* e ε *centrum circuli.*



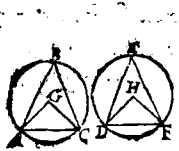
PROPOSITIO XXVI.

Theorema 23.

In circulis æqualibus, æquales anguli æqualibus peripheriis *d f, a c* insistunt; sive ad centra *g, h*, sive ad peripherias *b, e* constituti insistant.

α 4. I. β 20. III. γ 7. ax. 10. def. III. δ 24. III. ζ 3. ax.

Ducantur rectæ a c, d f *α æquales* β *Erunt ergò æquales* g *&* h *ad centra* γ *æqualium* b, e *ad peripheriam duplii &* δ *segmenta* a b c, d e f δ *similia, & super æqualibus basibus* a c, d f ε *æqualia.*



Æqualibus ergò peripheriis a b c d e f ε *ablatis ex totis circulis æqualibus, relinquentur peripheriæ* a c, d f ζ *æquales. Quod erat propositum.*

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 24.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis *ac*, *df* insistunt, sunt inter se æquales, sive ad centra *agc*, *dbf*, sive ad peripherias *b*, *e* constituti insistunt.



Sin minus, esto angulus g *angulo* h *major, cui æqualis* α *fiat* a g i. *Erunt ergò etiam bases* a i *pars & d f vel* a c *totum* β *æqualia. Quod* γ *absurdum.*

α 23. I.
β 26. III.
γ 9. ax.

PROPOS: XXIIX.

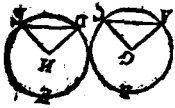
Theorema 25.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ *ac*, *df* æquales peripherias auferunt, majorem quidem *abc* majori *def*, minorem autem *aic* minori *dkf*.

Ex terminis linearum inscriptarum α *æqualium ducantur semidiametri,* β *Erunt ergò anguli* g, h *æquales, qui etiam æqualibus*

α 3. II.

ζ 29. III.



γ 3. ax.

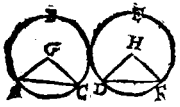
libus circulis consistunt peripheriis a i c, d k f. Quibus ablatis ab æqualibus circulis, reliquæ peripheriæ sunt γ æquales a b c, d e f.

PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Inæqualibus circulis, æquales peripherias *a b c*, *d e f* æquales rectæ lineæ *a c*, *d f* subtendunt.

α 27. III. β 4. I.



Ductis semidiametris a g, g c, d h, h f. *Erunt* α *æqualibus angulis* g & h *oppositæ bases* a c, d f *inter se* β *æquales. Quod erat propositum.*

PROPOS: XXX.

Problema 4.

Datam peripheriam *a b c* bifariam secare c.

α 11. I. β 4. I. γ 28. III.



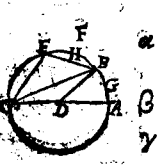
Ex puncto medio d *subtensæ* a c α *erigatur perpendicularis* b d *& ducantur* b c, b a, *quæ inter se* ζ *æquales etiam* γ *æquales peripherias* a b *&* b c *subtendunt. Secta ergo est peripheria bifariam in* b.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 27.

In circulo angulus *abc* qui in semicirculo *adc* rectus est: qui autem in maiore segmento *bac*, minor recto: qui vero *bec* in minore segmento, major est recto. Et insuper angulus *ebc* majoris segmenti, recto quidem major est, minoris autem segmenti angulus *hbc* minor est recto.



Quoniam a *aequales sunt anguli* d a b, a b d *et* d b c, b c d; *erunt bini quique simul bini* β *aequales*, a b c *& b a c cum* a c b, *quibus duobus* γ *aequalis est externus* c b f; *ac proinde* a b c *simul rectus*, δ *angulus autem* a *in majore segmento recto* ε *minor. Sed angulus* e *in segmento minori recto* ζ *major. Cum denique angulus* a b c *rectus sit tantum pars anguli segmenti majoris* g b c; *& angulus segmenti minoris* c b h *tantumpere recti* c b f; η *erit ille major, hic minor recto.*

α 5. I.
β 4. ax.
γ 23. I.
δ 13. I.
ε 17. I.
ζ 22. III.
η 9. 22.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 28.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea *a b*, à contactu *c* autem producatur quædam recta linea *c e* circulum secans: anguli *a c e*, *e c b* quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis *d* & *g*.



Ducantur c f *diameter &* f e. *Cum* α *recti sint anguli* c e f, f c a *&* e f c, e c f *recto* β *æquales; ablato communi* e c f, *anguli* e f c, γ *id est* e g c *in majori segmento, &* a c e *erunt æquales. Horum æqualium* δ *æqualia erunt complementa ad duos rectos, anguli* e c b *&* d *in segmento minore æquales.*

α 31. III. & 18. III.
β 32. I.
γ 21. III.
δ 3. ax.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema 5.

Super data recta linea *a b* describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo *c*.

Super recta a b *ut fiat ad* a *angulo* c *dato æqualis* d a b, β *erigatur* ζ *perpendicularis* a e *ex* a *ipsi* a d *&* rursus *angulo* e a b *æqualis fiat* a b f; *erunt*

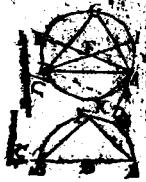
α 23. I.
ζ 11. I.

erunt a f, b f γ *æquales. Ex* f *ergò intervallo* f a *describatur segmentum* a e b *super* a b, *angulo* d a b *alterum capiet angulo dato* c *æqualem. Completo enim circulo: Quia* a d *est* g *Tangens, ad ipsam factus angulus* δ ab *dato* c *æqualis,* ε *æqualis est angulo* a g b *in alterno segmento. Quod erat faciendum.*

γ 6. I.

δ cor. 16. III.

ε 32. III.



Si angulus datus c *sit rectus, super* a b *data tanquam diametro describitur semicirculus, qui angulum* ζ *rectum capit.*

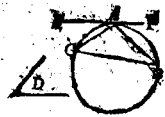
ζ 31. III.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema 6.

A dato circulo segmentum abscindere, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo *d*.

Recta e a f *tangat circulum in* a, *& ad* a e *fiat angulo dato* d *æqualis* c a c. β *Erit ergò in alterno segmento angulus* b *angulo* c a c, *id est, angulo dato* d *æqualis.*



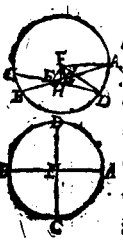
α 23. I.

β 32. III.

PROPOS. XXXV.

Theorema 29.

Si in circulo duæ rectæ lineæ *a b*, *c d* fese mutuò secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis *a e*, *e b* unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius *d e*, *e c* comprehenditur, rectangulo.



Ex centro f α *demittantur perpendiculares* f g, f h, *quæ illas lineas* β *æqualiter secent in* g & h, *ducaturq;* f e. γ *Erit ergò rectangulum ex* a e, e b, *unà cum quadrato* e g & g f *vel* e f, *æquale quadrato* a g & g f *seu quadrato semidiametri* a f: *Sic etiam rectangulum ex* c e, e d, *unà cum quadrato* e h & h f δ *seu* e f, *æquale quadrato* c h & h f *seu quadrato semidiametri* f d. *Ablato ergo utrinq; ex rectangulis quadrato* f e, *communi, residua rectangula ex inæqualibus segmentis sunt* ε *æqualia.*

α 12. I.
β 3. III.
γ 5. III.
δ 47. I.
ε 3. axi.

Si in centro secent sè duo diametri, planum est, quod ex segmentis æqualibus seu semidiametris fiant æqualia quadrata.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

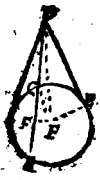
Theorema 30.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod *d*, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera *da* quidem circulum secet; altera *db* vero tangat: Quod sub tota secante *da* & exterius inter punctum & cōvexam peripheriam assumta *dc* comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à Tangente *db* describitur, quadrato.



Transeat primò secans a d *per centrum* e, *ducaturq; ea perpendicularis Tangenti* e b. ℈ *Erit rectangulum sub tota* a d *cum adjecta & adjecta* c d, *una cum quadrato dimidiæ* e c *æquale quadrato* e d *ex dimidia & adjecta, id est, quadratis* d b, b e. *Sublatis quadratis æqualibus semidiametrorum* b e, & e c, γ *erit rectangulum ex* a d & d c *æquale quadrato Tangentis* d b. α 18. 3. β 6. II. γ 3. ax.

Deinde non transeat secans d a *per centrum, & ducantur* e b, e d, e c & e f, *perpendiculares.* ℈ *Erit rursus rectangulum ex* a d & c d, *una cum*



quadrato f c *æquale quadrato ex* f d, *additoq; quadrato communi* e f, *æquale erit rectãgulum ex* a d *&* c d, *unà cum quadrato* f c *&* f e, *id est, quadrato* e c, *quadrato* d e, *si quadratis* d b, b e. *Ablatis æqualibus quadratis* b e *&* c e, *relinquuntur* γ *æqualia rectangula ex* a d, d c, *& quadratum Tangentis* d b.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 31.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod *d*, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera *d a* circulum secet, altera *d b* in eum incidit; sit autẽ quod sub tota secante *a d* & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumta *d c*, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente *d c* describitur, quadrato; incidens ipsa *d b* circulum tanget.

Ducta Tangente d f, *& semidiametris* e f, e b, e d. *a Erit quadratum Tangentis* d f *æqua-*

a 36. II.

le

Le rectangulo ex a d, *&* d c, β *ideſt quadrato* d b *incidentis*; γ *&* d f *ipſi* d b *æqualis. Cumq; angulus* b *ſit angulo* f *recto* δ *æqualis*; ε *erit* d b *Tangens.*



β ex hypot.
γ 1. ax.
δ 8. I.
ε 18. III.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER IV.

Definitiones.

1.

FIgura rectilinea *f d e* in figura rectilinea *a b c* deſcribi dicitur, cum ſinguli figuræ deſcriptæ anguli, ſin-

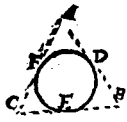


gula latera ejus, in qua describitur, tangunt.

2. Figura *g b i* circa figuram *k l m* describi dicitur, cum singula descriptæ latera, singulos angulos ejus, circum quam describitur, tangunt.

3. Figura rectilinea *a b c* in circulo describi dicitur, cum singuli figuræ descriptæ anguli peripheriam circuli tangunt.





4. Figura rectilinea *a b c* circa circulum describi dicitur, cum singula descriptæ latera circuli peripheriam tangunt.

5. Circulus in figura rectilinea describi dicitur, cum circuli peripheria singula latera ejus, in qua describitur, tangit.

6. Circulus circa figuram rectilineam describi, aut figura rectilinea circulo circumscribi dicitur, cum circu-

circuli peripheria singulos angulos ejus, circa quam describitur, tangit.

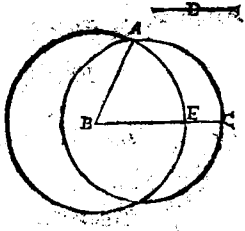
2. Recta *ab* in circulo aptari dicitur, cum ejus extrema *a*, *b* circuli peripheria fuerint.



PROPOSITIO I.

Problema 7.

In dato circulo rectam lineam accommodare, æqualem datæ rectæ lineæ *d*, quæ circuli diametro non sit major.

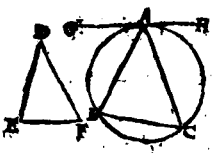


Cum enim diameter inscriptarum in circulo a sit maxima, major ipsa inscribi non potest: sin ipsi sit æqualis, quævis diameter ducta, erit aptata: Sin minor, intervallo lineæ datæ d, describatur circulus super b c diametro circuli dati, & connectatur b cum a. β Erit hæc linea circulo aptata æqualis datæ. α 15. III. β 15. def. I. & 1. ax.

PROPOSITIO LI.

Problema 2.

In dato circulo triangulum describere, dato triangulo *d e f* æquiangulum.



Ad ducta Tangentia g h *punctum* a *fiant anguli* g a b *ipsi* f, & h a c *ipsi* e *æquales*; *connectantur* b c. *Erit ergò angulus* c *æqualis angulo* g a b, *id est angulo* f, *& angulus* b *angulo* e; *& angulus* b a c *angulo* d, *triangulum inscriptum* a b c, *triangulo* d e f *æquiangulum.*

α 23. I.
β 32. III.
γ. 32. I.

PROPOS: III.

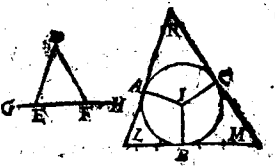
Problema 3.

Circa datum circulum *a b c* triangulum describere, dato triangulo *d e f* æquiangulum.

Producta utring; trianguli basi ing & h, *angulis externis* α *fiant æquales ad centrum* i; a i b *ipsi* d e g; & b i c *ipsi* d f h: *ad extremitates verò semidiametrorũ* a, b, c *ducantur perpendiculares*

α 23. I.

ulares vel β tangentes, quæ concurrent in k, l, m. *Ergò in quadrilatero quatuor anguli circa* k, l *quatuor aqualium (propter resolutionem in duo triangula) cum duo oppositi sint γ recti, &c. qui etiam duo duobus rectis æquales erunt. Cumq; a i b ipsi d e g, & b i c ipsi d f h æquetur, δ æquabitur l ipsi d e f & m ipsi d f e & k ipsi d. Circumscriptum ergo est Triangulum dato æquiangulum.*



ζ 16. III

γ ex constr.

δ 13. I & 3. ax.

ε 13. I.

PROPOSITIO IV.

Problema 4.

In dato triangulo *a b c* circulum inscribere.

α Secentur duo anguli bifariam per lineas duas, ex quarum intersectionis punctο d *β demittantur perpendiculares ad latera singula, earumque intervallo describatur circulus. Erunt ergò in triangulo* e d b, b d f *latera* d e, d f *γ æqualia, & in triangulis* f d c, & c d g *latera* f d, g d *δ Tres nimirum æquales ex puncto* d *quod erit centrum circuli singula latera trianguli ζ tangentis vel inscripti.*



α 9. I. ε 12. I.

γ 26. I.

δ 1. ax.

ε 9. III.

ζ cor. 16. III.

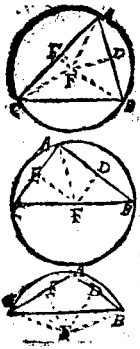
PRO-

PROPOS: V.

Problema 5.

Circa datum triangulum *a b c* circulum describere.

α 10. I.



Duo quævis latera a b dividantur bifariam per lineas perpendiculares concurrentes in f, ex quo ad angulos singulos ducantur lineæ, illarumq; intervallo describatur circulus. Erunt ergò f a, f b, f c æquales, & ex f centro descriptus circulus circa triangulum datum.

β 4. I.
γ 9. III.

Corollarium 1.

α 31. III. Si centrum *f* cadat in latus, erit triangulum rectangulum, quia in semicirculo: Si intra, erit acutangulum, quia in majori segmento: Si extra, obtusangulum, quia in minori segmento.

Corollarium 2.

Per data tria puncta non in eadem

dem recta linea existentia, circulum describere licet per hanc propositionem. Connexis enim punctis tribus habebis triangulum.

Scholion.

Cuivis figuræ regulari quæ & æquilatera & æquiangula est, circulus tum circumscribitur intervallo perpendicularium concurrentium; tum & circumscribitur, intervallo angulos duos quos quævis earum secantium. α 4. IV. β 6. I.

PROPOS. VI.

Problema 6.

In dato circulo quadratum describere.

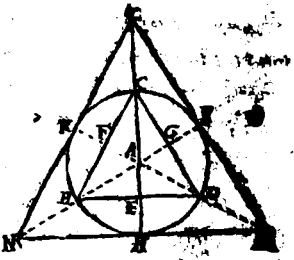


Ducantur duo diametri ad angulos rectos se α *inter secantes, earumque extremitates jungantur rectis* a b, b c, c d, d a. *Quatuor anguli ad centrum* β *recti, & æqualium quatuor arcus quibus insistunt, &* γ *hinc subtensa quatuor latera* δ *æqualia. Anguli etiam omnes sunt in semicirculo* ε *recti. Ergo* ζ *quadratum* a b c d *inscriptum.* α 11. I. ζ ex constr. γ 26. III. δ 29. III. ε 31 III.

LEMMA.

Figura regularis circa circulum ζ 29. def. I. descri-

describ.tur à perpendicularibus *l m, l n, n m* ab extremitate semidiametrorum *h i, k* latera figuræ prius inscriptæ *b c bd, cd* bifariam dividentium *m e, f g* exc.tatis.



α per aliquam prop. IV. *α Inscribatur in circulo figura æquilatera & æquiangula, qualis requiritur, & per ipsius angulos ex centro utring; continuentur lineæ ad peripheriam in* h, i, k

β 2. I. *& ultra peripheriam in* l, m, n, *β secantes angulos & latera data figuræ bifariam, & tres ad centrum efficientes æquales* b a d, da c, b a c. *Deinq; ad extremitates* h i k *γ excitentur perpendiculares* l m, l n, n m. *Cum itaq; δ æquales sint*

γ 11. I. δ 29. I. *anguli* a b e, a n h; *& a d e, a m h, ideſt, ſ toti* n *&* b, m *&* d; l *&* c; *erit figura ζ circumscripta aquiangula. Deinde in triangulis* a n m, a m l,

ε 2. ax. ζ 1. ax. η 6. I. a n l *æqualium angulorum, η æqualia etiam erunt inter ſe latera* am, al, a n, *quæ comprehendentia angulos æquales, etiam baſes inter ſe æquales efficiunt* n m, m l, l n, *figuram quæſitam conſtituentia.*

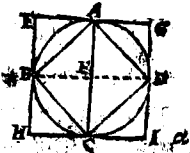
θ 4. I.

PRO-

PROPOS: VII.

Problema 7.

Circa datum circulum, quadratum describere.

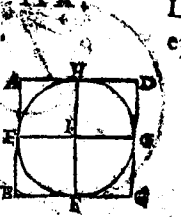


Inscripto prius quadrato, aliud etiam circumscribetur. a 6. IV. & per Lemma ejusdem.

PROPOSITIO IIX.

Problema 8.

In dato quadrato circulum describere.



Constructio & demonstratio est ex 4. IV.

PROPOSITIO IX

Problema. 9.

Circa datum quadratum circulum describere.



Constructio & demonstratio est ex scholio 5. IV.

Scholium.

Est autem quadratum circumscriptum inscripti duplum, quia illud ex diagonio inscripti vel diametro fit, tanquam ex hypotenusa. a 47. I.

PRO-

PROPOSITIO X

Problema 10.

Isosceles triangulum constituere; quod habeat utrumque eorum, quæ ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.



α 11. II. *Datâ quævis lineâ* a b α *secetur ita, ut rectangulum sub* a b & c b *sit æquale quadrato* a c, & β 1. IV. *intervallo* a b *facto circulus* β *accommodetur* b d, *æqualis* a c, *ducanturq;* c d & a d & *triangulo* a c d γ *circumscribatur circulus.*

γ 5. IV. *Quia ergo quadratum* b d δ *æquale est* δ ex hypot. *rectangulo ex secante* b a & *externo segmento* c b, ε *erit Tangens & angulus* a *angulo* c d b ζ *æqualis, additoq; communi* a d c, *erit* a d b ε 37. III. *æqualis angulis* a & c d a, *id est angulo* b c d *vel* ζ 32. III. b. *Ideoq; latera* b d & c d & c a *erunt* η *æqualia, & angulus* a *angulo* a d c; *ideoq; anguli* $= \frac{1}{2}$ η 6. I. *duplus* b c d, *vel duo ad basin* b & d $\frac{2}{2}$ *in triangulo Isoscheli* b a d *constituto.*

PRO-

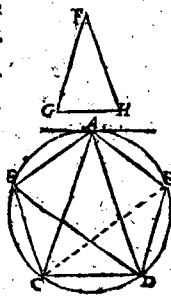
PROPOSITIO XI.

Problema 11.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Constructo triangulo Isosceli f g h, *cujus anguli ad basin* g & h *sunt dupli tertij* f: *& inscribatur circulo dato aequiangulum* a c d; *& anguli ad basin* γ *secentur bifariam per lineas* d b, c e, *& ducantur rectæ* a b, b c, c d, d e, e a. *Insistent ergò quinque anguli* δ *æquales* a c e, e c d, a d b, b d c; c a d *æqualibus peripheriis quinq;, totum circulum comprehẽdentibus quibus* ζ *æqualia subtensa quinq; latera sunt pentagoni inscripti æquilateri; quod &* η *æquiangulum est, quod omnes ipsius anguli æqualibus peripheriis circuli insistunt.*

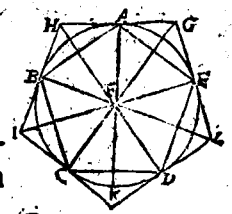
α 10. IV.
β 2. IV.
γ 9. I.
δ ex constr.
ε 26. III.
ζ 29. III.
η 27. III.



PROPOS. XII.

Probl. 12.

Circa datum circulum, pẽtagonum



æquilaterum & æquiangulum descri-
bere.

α II. IV. *α Inscripto prius pentagono, circumscribe-
tur aliud per lemma sextæ hujus.*

PROPOSITIO XIII.

Problema 13.

In dato pentagono æquilatero &
æquiangulo circulum inscribere.

α 9. I. β Schol. 5. IV. *Duo quidq; anguli proximi α secentur bifa-
riam per lineas* f i, f k, *quarum concursu* f *inter-
vallo perpendicularis* f c *circulus* β *erit inscri-
ptus.*

PROPOSITIO XIV.

Problema 14.

Circa datum pentagonum æqui-
laterum & æquiangulum circulum
describere.

α 19. I. β Schol. 5. IV. *Iterum duo anguli α secentur bifariam per
lineas, quarum intervallo ex illarum concursu
β circumscribitur circulus.*

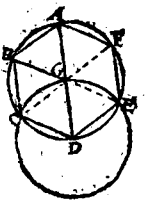
PROPOSITIO XV.

Problema 15.

In dato circulo hexagonum &
æqui-

æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Ducto diametro circuli a d, *ex* d *describatur alius priori æqualis circulus secans priorem in* c *&* e *punctis, per quæ ducantur diametri* e b, c f, *itemque* a b, b c, c d, d e, e f, f a. *Erunt triangula* c g d *&* d g e α *æquilatera &* β *æquiangula, &* γ *anguli ad centrum omnes* γ *æquales, vel* $\frac{1}{3}$ *duorum rectorum. Idcoque omnes* δ *æqualibus insistent peripheriis, quibus* ε *æquales lineæ, id est, latera hexagoni sex æqualia subtenduntur, quæ etiam* ζ *æquales includunt angulos sex, æqualibus peripheriis insistentes. Hexagonum ergò & æquilaterum & æquiangulum est inscriptum.*



α 15. def. 1.

β 5. 1.

γ 32. & 15. 1.

δ 26. III.

ε 29. III.

ζ 27. III.

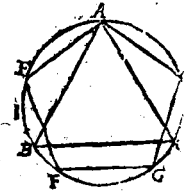
Corollarium.

Latus Hexagoni æquale est semidiametro ejusdem circuli. Circulo autem dato circumscribetur hexagonum per Lemma 6. IV. Circulus ipsi inscribetur & circumscribetur per Scholion 5. IV.

PROPOSITIO XVI.

Problema 16.

In dato circulo quindecagonum & æquilaterum & æquiangulum describere.



α 2. IV. β 11. IV.

Inscribatur in circulo dato a triangulum æquilaterum & pentagonũ. Cum ergò latus trigoni a b $\frac{1}{3}$ *vel* $\frac{5}{15}$: *latus autem pentagoni* a e $\frac{1}{5}$ *quatuor rectorum: illarum duarum peripheriarum differentia* e b *habet* $\frac{2}{15}$; *Ipsius ergò dimidium erit* $\frac{1}{15}$, *cui subtensum latus* e i *est quindecagoni* γ *æquilateri &* δ *æquianguli latus. Ejusdem circumscriptio fiet per Lemma 6. IV. Ipsi autem & inscribetur & circumscribetur circulus per Schol. 5. IV.*

γ 29. III. δ 27. III.

EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER V.

Definitiones.

1.

PArs est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

2. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem. *Intelligitur hîc pars aliquota, quæ aliquoties præcisè continetur in toto, quod ejus multiplex est. Ideoq; & æquemultiplices sunt magnitudines, quæ multitudine æquales partes habent.*

3. Ratio, λόγος, est duarum magni-

tudinum, ejusdem generis, *numeri cum numero, lineæ cum lineâ*, mutua quædam secundum quantitatem habitudo *quatenus una est major altera, vel minor, vel æqualis.*

4. Analogia, proportionalitas vel proportio, est rationum similitudo. *Ut enim magnitudines, ita earum rationes inter se comparantur.*

5. Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuò superare.

6. In eadem ratione dicuntur esse magnitudines, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquemultiplicia, à secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroque vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondent. *Multiplex primæ cum multiplice secundæ; & tertiæ cum quartæ multiplex. Complectitur autem definitio etiam magnitudines tres, si media bis sumatur.*

7. Ean-

7. Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8. Cùm verò æque multiplicium, multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam majorem habere rationem dicetur, quàm tertia ad quartam.

9. Analogia ad minimum in tribus terminis consistit. *Ut haberi possint duo Antecedentes & duo consequentes.*

10. Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationem, *multiplicata in se vel quadratè ratione primæ ad secundam*, habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: at cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam, *cubicè in se multiplicata ratione primæ ad secundam*, rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quam

dem proportio extiterit. *Loquitur definitio tantùm de continua proportionalitate.*

11. Homologæ seu similes ratione magnitudines dicuntur, Antecedentes quidem Antecedentibus, consequentes verò consequentibus. *Antè proportiones dixerat rationum similitudines: nunc ejus terminos etiam dicit similes. Sequuntur jam sex argumentandi modi Geometris usitati.*

12. Alterna ratio est sumtio Antecedentis ad Antecedentem, & consequentis ad consequentem. *Oportet hîc omnes terminos esse ejusdem generis. Non enim si sit ut numerus ad numerum, sic linea ad lineam, recte colligeris alternè, ut numerus ad lineam; sic numerus ad lineam.*

13. Inversa ratio est sumtio consequentis tanquam Antecedentis, ad Antecedentem tanquam consequentem.

14. Compositio rationis est sumtio Antecedentis cum consequente ceu unius

unius, ad ipsam consequentem. Vel Compositio rationis est sumtio terminorum simul ad alterutrum eorundem. Et contra, est sumtio alterutrius termini ad compositum ex utrisque. *Hic in compositione rationum tantùm intelliguntur termini: ipsæ rationes in 5. def. VI.*

15. Divisio rationis est sumtio excessus, quo consequentem superat Antecedens, ad ipsam consequentem. Vel est sumtio excessus termini majoris supra minorem, ad ipsum minorem: Et contra minoris ad excessum majoris.

16. Reversio rationis est sumtio Antecedentis ad excessum, quo Antecedens superat consequentem. Vel est sumtio termini majoris ad excessum supra minorem. Et contra, excessus terminorum ad ipsum majorem.

17. Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares quæ binæ su-

mantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam; sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. Vel, Est sumtio extremorum, per subductionem mediorum. *Hi modi argumentandi demonstrantur aliquot propositionibus.*

18. Ordinata sive directa proportio est, cum fuerit, quemadmodum Antecedens ad consequentem; ita Antecedens ad consequentem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

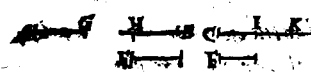
19. Perturbata autem proportionalitas est, cum tribus positis magnitudinibus & alijs, quæ sunt his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet Antecedens ad consequentem; ita in secundis magnitudinibus Antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam; sic in secundis magnitu-

gnitudinibus aliud quidpiam ad Antecedens.

PROPOS. I.

Theorema 1.

Si sint quotcunque magnitudines *a b, c d*, quotcunque magnitudinum, *e, f*, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices *a b ipsius e, & c d ipsius f*; quam multiplex est unius *e* una *a b* magnitudo; tàm multiplices erunt & omnes *a b, c d*, omnium *e, f*.



Cum ergò ter contineat a b ipsam e, & c d ipsam f, singulis ternis unius partibus, a g g h, h, b, addantur singula alterius c i, i k, k d: Erunt ipsis e & f junctis ter bina ter æquales: ac proinde β *æquemultiplex totum ex a b, c d, totius ex e, f. Si itaque partes sint æquemultiplices partium, totum etiam totius est æquemultiplex. Indeq; idem est multiplicare per partes ac per totum.*

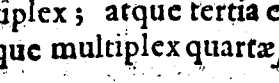
α 2. ax.
β 2. def. V.

PRO-

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si prima *ab* ſecundæ *c* fuerit æquemultiplex, atque tertia *de* quartæ *f*; fuerit autem & quinta *bg* ſecundæ *c* æquè multiplex, atque ſexta *eh* quartæ *f*; erit & compoſita prima cum quinta *ag* ſecundæ *c* æque multiplex; atque tertia cum ſexta *dh* æque multiplex quartæ *f*.



α ex hypot.
β 2. ax.
γ 2. def. V.

Si enim æqualibus multitudinibus a b, *& d e æquales, multitudines* b g *&* e h *addantur, erunt etiam compoſitæ* a g *&* d h *æquales, & ſuarum partium æque multiplices.*

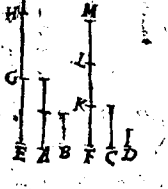
PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si ſit prima *a* ſecundæ *b* æque multiplex, atque tertia *c* quartæ *d*; ſumantur autem æquemultiplices *e i*, *f m* pri-

primæ *a* & tertiæ *c*: Erit & ex æquo sumtarum *ei* ad *b*, & *fm* ad *d*, utraque utriusque æque multiplex; altera *ei* quidem secundæ *b*, altera *fm* autem quartæ *d*.

Quia enim prima a, *illius æquales* e g, g h, hi *sunt æque multiplices secundæ* b, *atq; tertiæ* c, *illius æquales* f k, k, l m, *quartæ* d; *erunt etiam compositæ* e i & f m *earundem, secundæ* b *& quartæ* d *æque multiplices, id est, extremè vel ex æquali sumtæ.*



α ex hypot.

β 2. V.

γ 17. def. V.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si prima *a* ad secundam *b* eandem habuerit rationem, & tertia *c* ad quartam *d*: etiam æque multiplices primæ *e* & tertiæ *f*, ad æque multiplices secundæ *g* & quartæ *h*, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumtæ fuerint.

Atque



Æque multiplicium e & f *sumantur alia æquemultiplices* i & k; *item* g, *æquemultiplicium* g & h *alia* l & m, *cæruntque ex æqualii* i & k *æque multiplices primæ* a & *tertiæ* c: *item* g, l & m, *æque multiplices secundæ* b & *quartæ* d. *Cum* g *sit, ut prima* a *ad secundam; sic tertia ad quartam, quārū æquemultiplices sunt demonstratæ* i k & l m *directè*

α 2. V.

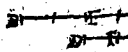
β 6. def. V.

sumptæ, β *fiet, ſi* i *superat* l, *etiam* k *superabit* m, *ut hoc loco: Cum* g, *eadem etiam sint æquemultiplicium* e f & g h *æquemultiplices constructæ,* β *Ergò ut* e *ad* g, *ita* f *ad* h. D

PRPPOSITIO V.

Theorema 5.

Si magnitudo *a b* magnitudinis *c d* æque fuerit multiplex, atque ablata *a e* ablatæ *c f*: etiam reliqua *e b* reliquæ *f d* ita multiplex erit, ut tota *a b* totius *c d*.



Ponatur quædam g c, *cujus æque multiplex ſit* e b, *atq; eſt ab-*

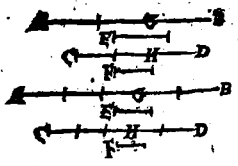
lata

lata a e, *ablata* c f, *vel tota* a b *totius* c d: *& erit* α I. V.
quoq; tota a b, *totius* g f *aque multiplex*, *atque*
ablata a e, *ablata* c f, *& erit & g f æqualis ipsi* c d,
& ablata communi c f, *erunt* g c *&* f d *æquales.* β 6. ax.
Cum itaq; e b *reliqua sit tam multiplex ipsius*
g c, *quàm multiplex est* a b *ipsius* c d; *tam mul-*
tiplex etiam erit e b *reliquæ* f d. *Quod erat pro-*
positum.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines *a b*, *c d* duarum magnitudinum *e* & *f* sunt æquè multiplices; & detractæ quædam *a g*, *c h* sint earundem *e* & *f* æque multiplices: & reliquæ *g b* & *h d*, eisdem *e* & *f* aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

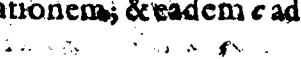


A multitudinibus α *æqualibus* a b, c d, *ablatis æqualibus multitudinibus* a g, c h; *residua quoq; multitudines erunt* β *æquales*; *sive ex constructione æquales sint ipsis* e *&* f, *ut in priori figuratione*; *sive earundem æque multiplices*, *ut in posteriore.* α ex hypot. β 3. ax.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Æquales *a b*, ad eandem *c*, eandem habent rationem; & eadem *c* ad æquales *a*, *b*.



Sint æqualium a & b *æquè multiplices* d & e *æquales, & ipsius* c *multiplex ut cunq;. Quia ergò multiplex* d *est minor multiplicè eadem minor quoq; est multiplex* e. *Iaeoq; erit, ut* a *ad* c, *sic* b *ad* c: *& convertendo ut* c *ad* a, *sic idem* c *ad* b.

ζ6.ax.

ζ6.def.V.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Inæqualium magnitudinum major *a b* ad eandem *d*, majorem rationem habet, quàm minor *c*: & eadem *d* ad minorem *c* majorem rationem habet, quàm ad majorem *a b*.

Sit major a b *prima*, c *tertia*, d *secunda & quarta*

quarta; ipsiq; c ex a b auferatur æqualis a e, & ipsarum a e vel c & e b fiant æquemultiplices h g, g f,



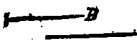
quarum utraq; major sit quàm d, & sic h f totius etiam totius a b majoris æquemultiplex a erit, atq; h g ipsius a e vel c. Fiat item secundæ & quartæ d æquemultiplex i k, proximè major multiplice h g, sed minor multiplice h f, & de i k abscindatur ipsi d æqualis l k. Non erit ergo i l major quàm h g, sed vel æqualis vel minor (aliàs non esset i k multiplex ipsius d, proximè major quàm h g) Et cum g f major sit quàm d vel l k; ideoq; etiam tota h f major erit quàm i k. Et proinde, cum f h, h g sint æque multiplices primæ a b & tertiæ c, atque i k multiplex d secundæ & quartæ: Sicq; f h major quam i k; h g verò minor quàm i k; major β erit proportio a b primæ ad d secundam, quàm c tertiæ ad d quartam. Et convertendo, cum tertiæ d multiplex i k sit major multiplice primæ h g; & ejusdem d tertiæ multiplex eadem i k minor h f multiplice quartæ: Ideoq; d majorem habet rationem ad c, quàm ad a b. Quod erat propositum. β 8. def. V.

PROPOSITIO IX.

Problema 9.

Quæ a & b ad eandem c, eandem

habent rationem, æquales sunt inter se: & ad quas *a* & *b* eadem *c* eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.



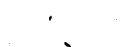
Si a *major esset quàm* b, *a esset major majoris* a *proportio ad* c, *quàm* b *minoris ad eandem, contra hypothesin. Ideoq; non sunt inæquales. Rursus, si* c *habeat eandem rationem ad utramq;* a & b, *etiam æquales sunt. Sin minus, esto* a *major, tum* c *ad* b *minorem, majorem haberet rationem, quàm ad* a, *quod est contra hypothesin.*

a 8. V.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Ad eandem magnitudinem *c* rationem habentium, quæ *a* majorem rationem habet, illa major est: ad quam *b* autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.



Nisi enim a *majorem habens rationem ad* c, *quàm* b *ad* c, *esset major* b, *foret vel æqualis, & sic contra hypothesin a haberet eandem rationem ad* c *vel*

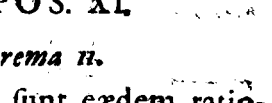
a 7. V.

vel minor, & ſic b *ad* c *majorem* β *haberet ra-* β 8. V.
tionem, quàm a, *contra hypotheſin. Vice verſa, ſi* c *habeat rationem majorem ad* b, *quàm ad* a, *rurſus erit major* a, *quàm* b: *ſin minus, erit ipſi vel æqualis & contra hypotheſin* α *erit ipſius* c *ad utramq; eadem ratio; vel minor, & ſic major erit ratio* c *ad* a, *quàm ad* b, *contra hypotheſin.*

PROPOS. XI.

Theorema 11.

Quæ eidem ſunt eædem rationes, inter ſe ſunt eædem.

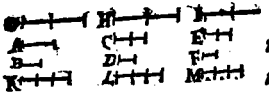


Sumantur & Antecedentium a, e, c *æquè multiplices* g, h, i; *& conſequentium* b, f, d, *æque multiplices* k, m, l. *Quia ergò eſt, ut* a *ad* b, *ſic* c *ad* d, *α fiet; ſi* g *ſuperat* i, *etiam* k *ſuperet* m, *& ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor ſit. Quia etiam eſt, ut* e *ad* f, *ſic* c *ad* d; *fiet etiam, ſi* h *ſuperat* i, *etiam* m *ſuperet* l, *& ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Cum ergò æque multiplices directè ſumtæ, habeant hanc triplicem conditionem, exceſſus, æqualitatis & defectus, α erit, ut* a *ad* b, *ſic* e *ad* f. α 6. def. V.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si sint magnitudines quotcunque proportionales *a b, c d, e f;* quemadmodum se habuerit una *a* Antecedentium, ad unam *b* consequentium; ita se habebunt omnes antecedentes *a, c, e,* ad omnes consequentes *b, d, f.*



Sumantur aequè a *multiplices tum Antecedentiū* a, c, e, *quæ sint* g, h, i; *tum con-*

α 1. V. *sequentium* b, d, f, *quæ sint* k, l, m: *& Erit compositum* g h i, *compositæ* k l m *æquè multiplex, ac* a *ipsius* b. *Cumq; sit, ut* a *ad* b, *sic* c *ad* d *& e ad* f;

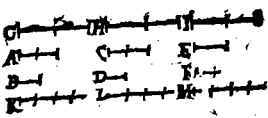
β 6. def. V. *β fiet; si* g *superat* k, *etiam* h *superet* l, *& i superet* m; *& si æqualis, æqualis; & si minor, minor: Atque ita* g, h, i *simul, ad* k, l, m *simul, triplicem illam conditionem* β *recipiant. Ideoq; ut* a *ad* b; *sic omnes antecedentes* a, c, e *ad omnes consequentes* g, d, f.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si prima *a*, ad secundam *b*, eandem habuerit rationem, quam tertia *c* ad quar-

quartam *d*; tertia verò ad quartam majorem rationem habuerit, quàm quinta *e* ad sextam *f*: prima quoq; ad secundam, majorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.



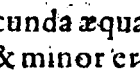
Sumantur æquè multiplices tùm Antecedentium a, c, e, *quæ sint* g, h, i: *tum consequentium* b, d, f, *quæ sint* k, l, m, *ut in præcedente propositione. Quia ergò eadem est ratio* a *ad* b, *quæ* c *ad* d: *sed* c *ad* d *major est ratio, quàm* c *ad* f: *& fiet, si* g *superet* k, *etiam* h *superet* l, *sed* i *quandoq; deficiat ab* m. *Atq; ita, cum* g *superet* k, l *non superet* m, *habebit* a *ad* b *majorem rationem, quàm* e *ad* f. α 6. def. V. β 8. def. V.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Si prima *a*, ad secundam *b*, eandem habuerit rationem, quam tertia *c* ad quartam *d*; prima verò quàm tertia major fuerit, erit & secunda major quàm quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & se-

cunda æqualis quartæ: si verò minor, & minor erit.



Sit a *major quàm* c: *Ergò* a *habet majorem rationem* a *ad* b *quàm* c *ad* b: *& cum sit, ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d; *& erit etiam* c *ad* d *major ratio, quàm* c *ad* b, *& erit minor quam* b. *Ob easdem etiam rationes quarta est major secunda, si tertia major sit prima; aqualis etiam, si aqualis.*

α 8. V.
β 10. V.

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Partes *a, b*, cum pariter multiplicibus *c d, e f*, in eadem sunt ratione, si, prout sibi mutuò respondent, ita fumantur *ut a ad b, sic c d ad e f.*



Cùm ergò partes aque multiplicium numero sint aquales, c g, g h, h d *ipsius* a; e i, i k, k f *ipsius* b; *quæ erit ratio unius Antecedentium* c g, *ad unam consequentium* e i; *eadem α erit omnium* c d, *ad omnes* e f.

α 12. V.

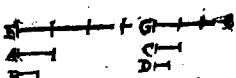
PRO-

PROPOSITIO XVI.

Theorema 16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, *ut a ad b, sic c ad d*; & vicissim proportionales erunt, *ut a ad c, sic b ad d.*

Sumantur æque multiplices primæ e, *& secundæ* f; *item tertiæ* g *& quartæ* h.

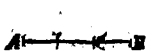


α *Erit ut* a *ad* b; *Sic* e *ad* f; *& ut* c *ad* d; *sic* g *ad* h: β *Idcircò etiam, ut* e *ad* f: *ita* g *ad* h. *Si itaq;* e *fuerit major quàm* g, *etiam* f γ *erit major quàm* h; *& si æqualis, æqualis, & si minor, minor: atque sic, ut* a *ad* c, *ita* b *ad* d. α 15. V. β 11. V. γ 14. V.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, ut *a b*, ad *c b*, sic *d e*, ad *f e*; hæ quoque divisæ proportionales erunt; *ut a c ad c b; ita d f ad f e.*

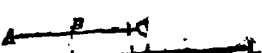


Si enim magnitudo d e *non est in* f *secta, ut* a b *in* c, *esto secta in* g. *Erunt ergò duæ Antecedentes conjunctæ, hoc est* a b, *ad*
α 16. V. *duas consequentes, hoc est,* d e, *ut* b c *ad* e g. *Sed totum* a b *ad* e d *ponebatur, ut totum* d e *ad* e f. *Itaq;* α *erit, ut* a b *ad* d e; *ita* b c *ad* e f. *Quare* e f *æqualis erit ipsi* e g, *pars toti. Quod absurdum.*

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 18.

Si divisæ magnitudines sint proportionales *ut a b ad b c; ita d e ad e f;* etiam compositæ proportionales erunt, *ut a c ad b c; ita d f ad e f.*



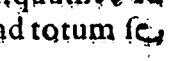
Sin minus, habeat d f *ad aliam* d g *eam rationem, quam* a c
α 17. V. *ad* a b. α *Erit ergò dividendo, ut* a b *ad* b c, *ita* d g *ad* g f: *Sed ut* a b *ad* b c, *ita erat* d e *ad* e f;
β 14. V. *Ideoq;* β *erit etiam, ut* d e *ad* e f; *ita* d b *ad* g f. *Cum* γ *prima* d e *sit minor tertia* d g; *etiam secunda* e f *erit minor quarta* g f, *par toti parti. Quod absurdum.*

PRO-

PROPOS: XIX

Theorema 19.

Si, quemadmodum totum *a b* ad totum *c d*; ita ablatum *a e* ſe habuerit ad ablatum *e f*: & reliquum *e b* ad reliquum *f d*, ut totum ad totum ſe habebit.



Cum igitur ſint, ut a b *ad* c d; *ita* a e *ad* c f; *α erit* c f *ad* a e, *ut* a b *ad* a e; *ita* c d *ad* c f; *& β dividendo, ut* e b *ad* a e; *ita* f d, *ad* c f *& γ componendo, ut* a b *tota ad* e b *reliquam; ita* c d *tota, ad* f d *reliquam*: *& α permutando, ut* a b *ad* c d; *ita* e b *reliqua, ad* f d *reliquam.*

α 16. V.
β 17. V.
γ 18. V.

PROPOSITIO XX.

Theorema 20.

Si ſint tres magnitudines *a, b, c*, & aliæ ipſis numero æquales *d, e, f*, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, *ut a ad b, ita d ad e; & ut b ad c; ita e ad f*; ex æquo autem prima *a* quàm tertia *c* major fuerit & quarta

d quàm ſexta f major. Quod ſi prima a tertiæ c fuerit æqualis, erit & quarta d æqualis ſextæ f: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

α 8. V.
β 13. V.
γ 10. V.
δ 7. V.



Sit enim prima a *major quàm tertia* c; *tum* a *ad* b α *habet majorem rationem, quàm* c *ad* b; β *& quia* d *ad* e *eandem habet rationem, quàm* a *ad* b; β *erit etiam major* d *ad* e, *quam* c *ad* b, *hoc eſt, quàm* f *ad* e: γ *Ideoq; major erit* d *quarta, quàm ſexta. Sic, ſi* a *eſt æqualis* c, *etiam* d *eſt* δ *æqualis* f, *& ſi minor, minor.*

PROPOSITIO XXI.

Theorema 21.

Si ſint tres magnitudines *a, b, c,* & aliæ ipſis æquales numero *d e, f,* quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur *ut, a ad b, ſic e ad f; & ut b ad c, ſic d ad e;* fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quàm tertia major fuerit: erit & quarta quàm ſexta major. Quod ſi prima ter-

tertiæ fuerit æqualis; erit & quarta æqualis sextæ; Sin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sit enim a *major quàm* c, *& sic* a *ad* b *majorem* α *habet ratio nem, quàm* c *ad* b; *adeoq;* β c *ad* f *& majorem, quàm* c *ad* b, *hoc est, quàm* e *ad* d: *erit* γ d *major quàm* f; *Sic, si* a *est æqualis* c, *etiam* d *æqualis est* f; *& si minor, minor.*



α 8. V.
β 13. V.
γ 10. V.

PROPOS: XXII.

Theorema 22.

Si sint quotcunque magnitudines, *a, b, c,* & aliæ ipsis æquales numero *d, e, f,* quæ binæ in eadem ratione sumantur, *ut a ad b, sic d ad e; & ut b ad c, ita e ad f;* & ex æqualitate in eadem ratione erunt, *ut a ad c; ita d ad f.*

Prioribus tribus adjungatur g, *& posterioribus* h. *Sit* α *ut* a *ad* b, *ita* c *ad* g; α ἐστὶν ὡς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἑνὸς πρὸς τοὺς ἑξῆς ἐν τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ ἕκαστος πρὸς ἕκαστον τῶν ἑξῆς ἐν τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ ἔσται ὡς ἓν πρὸς ἓν οὕτως πάντες πρὸς πάντας. ergò *ut* a *ad* c, *ita* b *ad* g: *Sit item ut* d *ad* e, *ita* f *ad* h; α *erit*



α 16. V.

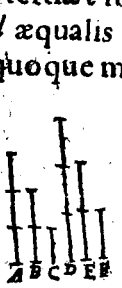
d quàm ſexta *f* major. Quod ſi prima *a* tertiæ *c* fuerit æqualis, erit & quarta *d* æqualis ſextæ *f*: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

α 8. V.

ε 13. V.

γ 10. V.

δ 7. V.



Sit enim prima a *major quàm tertia* c; *tum* a *ad* b α *habet majorem rationem, quàm* c *ad* b; *& quia* d *ad* e *eandem habet rationem, quàm* a *ad* b; β *erit etiam* d *major ad* e, *quam* c *ad* b, *hoc eſt, quàm* f *ad* e: γ *Ideoq; major erit* d *quarta, quàm ſexta. Sic, ſi* a *eſt æqualis* c, *etiam* d *eſt* δ *æqualis* f, *& ſi minor, minor.*

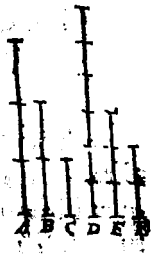
PROPOSITIO XXI.

Theorema 21.

Si ſint tres magnitudines *a, b, c*, & aliæ ipſis æquales numero *d e, f*, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur *ut, a ad b, ſic e ad f*; *& ut b ad c, ſic d ad e*; fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quàm tertia major fuerit: erit & quarta quàm ſexta major. Quod ſi prima, ter-

tertiæ fuerit æqualis; erit & quarta æqualis sextæ; Sin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sit enim a *major quàm* c, *& sic* a *ad* b *majorem habet rationem, quàm* c *ad* b; *adeoq;* c *ad* f *& majorem, quàm* c *ad* b, *hoc est, quàm* e *ad* d: *eritq;* d *major quàm* f; *Sic, si* a *est æqualis* c, *etiam* d *æqualis est* f; *& si minor, minor.*



α 8. V.
β 13. V.
γ 10. V.

PROPOS: XXII.

Theorema 22.

Si sint quotcunque magnitudines, *a, b, c,* & aliæ ipsis æquales numero *d, e, f,* quæ binæ in eadem ratione sumantur, *ut a ad b, sic d ad e; & ut b ad c, ita e ad f;* & ex æqualitate in eadem ratione erunt, *ut a ad c; ita d ad f.*

Prioribus tribus adjungatur g, *& posterioribus* h. *Sitq; ut* a *ad* b, *ita* c *ad* g; *& ut* b *ad* c, *ita* g *ad* h; *ergò ut* a *ad* c, *ita* b *ad* g: *Sit item ut* d *ad* e, *ita* f *ad* b; *& erit*



α 16. V.

& ex hypot. α erit itarum ut d ad f, ita e ad h. Cum ergò consequentes & sint in eodem ordine cum antecedentibus, Ideoq; est, ut a ad c, sic d ad f.

PROPOS: XXIII.

Theorema 23.

Si sint tres magnitudines *a, b, c,* aliæque ipsis numero æquales *d, e, f,* quæ binæ in eadem ratione sumantur, *ut a ad b, sic e ad f; & ut b ad c; sic d ad e;* fuerit autem perturbata earum proportio; etiam ex qualitate in eadem ratione erunt, *ut a ad c, sic d ad f.*



Sin minus, fiat ut b ad c, *ita* f ad g *assumtam: erit* d ad e *ut* f ad g, *quatuor nimirum proportionales; ac proinde* α *ut* d ad f, *ita* e ad g. *Sed* e ad g *est ut* a ad c, & *ita* d ad f *est, ut* a ad c.

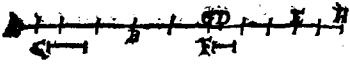
α 6. V.
β 11. V.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 24.

Si prima *a b* ad secundam c eandem

dem habuerit rationem, quam tertia *de* ad quartam *f*; habuerit autem & quinta *b g* ad secundam *c* eandem rationem, quam sexta *e b* ad quartam *f*: etiam composita *a g* prima cum quinta, ad secundam *c* eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta *d b* ad quartam *f*.



Quia enim e h, *ut* b g *ad* c, *ita* e h *ad* f; *erit convertendo, ut* c *ad* b g; *ita* f *ad* e h. *Cum-que sit ut* a b *ad* c, *ita* d e *ad* f; *& ut* c *ad* b g, *ita* f *ad* e h, *erit ex æquali, ut* a b, *ad* b g; *ita* d e *ad* e h. *Ergò, cùm & componendo, ut* a b *ad* b g, *ita* d h *ad* e h: *& ut* b g *ad* c, *ita* e h *ad* f; *erit ex æquali* a g *ad* c, *ut* d h *ad* f. α 22. V. β 18. V.

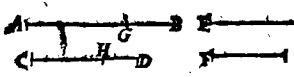
PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, *ut a b ad c d; sic e ad f*: maxima *a b* & minima *f* reliquis duabus *c d* & *e* majores erunt.

Ex a b *æqualis* e *auferatur* a g, *& ex* c d *ipsi* f, c h. *Fit, ut* a b *ad* c d; *sic* a g *ad* c h; *Et ut* a b *ad*

α 19. ζ ex hypot. γ 14. V.



a b *ad* c d; *a ſit relicua* g b *ad* h d. *Cumque* ζ *major ſit* a b *quàm* c d, γ *major erit* ζ g b *quàm* h d *ex ſimilitudine rationum. Additis ergò æqualibus* f ζ c h *ad æquales* a g ζ e, *æquales ſunt* a g ζ f *ſimul, ipſis* e ζ c h *ſimul; quibus ſi rurſum addantur inæquales* g b *major* ζ h d *minor, erunt* a b *maxima* ζ f *minima ſimul majores medijs* c d ζ e *ſimul.*

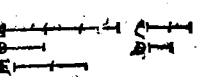
Sequentes propoſitiones ideò hîc inter Euclideas tolerantur, quia ſcriptores graviſſimi, Archimedes, Apollonius ζ *Pappus ijs utuntur.*

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 26.

Si prima *a* ad ſecundam *b* habuerit majorem proportionem, quàm tertia *c* ad quartam *d*: habebit convertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.

α 10. V. ζ 8. V.



Habeat quædam e *eandem rationem ad* b, *quam habet* c *ad* d. *Quia ergò* a *ad* b, *majorem habet rationẽ, quàm* c *ad* d, *id eſt, quam* e *ad* b; *erit etiam* a *ad maj-*

a α *major quàm* e; & b *ad* a *minorem* β *habebit rationem, quam ad* e *minorem, id est, quàm* d *ad* c.

PROPOS: XXVII.

Theorema 27.

Si prima *a* ad secundam *b* habuerit majorem proportionem, quàm tertia *c* ad quartam *d*: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam majorem proportionem, quàm secunda ad quartam.

Intelligatur e *esse ad* b, *ut* c *ad* d. *Quæ ergò ad* b *majorem habet rationem* a *quàm* e; a *erit* α *major* e: & *major, erit proportio* a *ad* c *quàm* e *ad* c. *Cum, permutando fit, ut* e *ad* c, *ita* b *ad* d, *major, fit ratio* a *quam* e *ad* c; *etiam* a *ad* c *quàm* b *ad* d *majorem rationem habebit.* α 10. V. γ 8. VI.

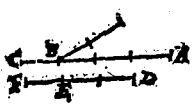
PROPOS: XXIIX.

Theorema 28.

Si prima *ab* ad secundam *bc* majorem habuerit proportionem, quàm

quàm tertia *de* ad quartã *ef*, habebit quoque composita prima cum secunda *ac*, ad secundam *bc* majorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta *df* ad quartam *ef*.

G



Habeat g b *rationem ad* b c, *quam* d e *ad* e f, *eritque* a b *ad* b c *major proportio, quàm* g b *ad*

α 10. V. b c, *&* a b *α major quàm* g b. *Addita ergò communi* b c, *fiet* a b c *major, quàm* g b c, *&*

β 8. V. *majorque erit proportio* a b c *quàm* g b c *ad* b c. *Sed*

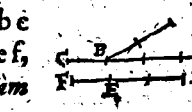
γ 18. V. *γ componendo; ut est* g b c *ad* b c, *ita* d f *ad* e f. *Major itaq; est proportio* a c *ad* b c, *quàm* d f *ad* e f.

PROPOS: XXIX.

Theorema 29.

Si composita *ac* prima cum secunda ad secundam *bc* majorem habuerit proportionem, quàm composita *df* tertia cum quarta ad quartam *ef*: habebit quoque dividendo prima *ab* ad secundam *bc* majorem proportionem, quàm tertia *de* ad quartam

tam *ef*.



Habeat g b c *ad* b c *rationem, quam* d f *ad* e f, *eritque major* a c, *quàm* g b c *ratio ad* b c, *α major*, a c *quàm* g b c. *Hinc ablatâ communi* b c, *major erit* a b *quàm* g b; *adeoq; β major proportio* a b *quàm* g b *ad* b c. *Sed γ dividendo, ut* g b *ad* b c, *ita* d e *ad* e f, *Ergò major est proportio* a b *ad* b c, *quàm* d e *ad* e f.

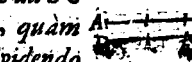
α 10. V.
β 8. V.
γ 17. V. & ex hypot.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 30.

Si compoſita *a c* prima cum ſecunda, ad ſecundam *b c* majorem habuerit proportionem, quàm compoſita *d f* tertia cum quarta, ad quartam *e f*: habebit per converſionem rationis, *a c* prima cum ſecunda, ad primam *a b*, minorem proportionem, quam *d f* tertia cum quarta, ad tertiam *d e*.

Quia enim a c *ad* b c *major eſt proportio, quàm* d f *ad* e f; *etiam α dividendo*



α 29. V.

major est proportio a b *ad* b c, *quam* d e *ad* e f.

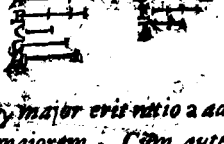
β 25. V. γ 22. V. *Ideoq; β convertendo, minor proportio* b c *ad* a b, *quam* e f *ad* d e; *eaq; propter γ componendo minor proportio totius* a c *ad* a b, *quam totius* d f *ad* d e.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 31.

Si sint tres magnitudines *a, b, c,* & aliæ ipsis æquales numero *d, e, f,* sitq; major proportio primæ *a* priorum, ad secundam *b;* quàm primæ posteriorum *d* ad secundam *e;* item secundæ *b* priorũ ad tertiam *c* major, quàm secundæ *e* posteriorum ad tertiam *f:* erit quoq; ex æqualitate major proportio primæ *a* priorum ad tertiam *c;* quàm primæ *d* posteriorum ad tertiam *f.*

α 23. V. β 10. V. γ 8. V.



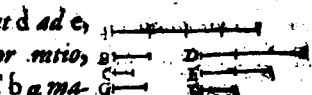
Esto enim g *ad* c, *ut* e *ad* f, *& α erit major ratio* b *quàm* g *ad* c, *β major quàm* b *quàm* g. *Ideoquè γ major erit ratio* a *ad* g *minorem, quàm ad* b *majorem. Cùm autem major ponatur ratio* a *ad* b, *quàm* d *ad* e; *multò erit major* a *ad* g, *quam*

quàm d ad e. Rursus esto h ad g, ut d ad e, & erit a ad g major quàm h ad g, β major g, a quam h. Ideoq; ad c major a majorem habet rationem, quàm h. Sed ut h ad c, ∂ ita d ad f, ex æquali. (quia ut d ad e, ita h ad g, & ut e ad f, ita g ad c.) Ergò etiam major est ratio a ad c, quàm d ad f. ∂ 22. V.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 32.

Si sint tres magnitudines *a, b, c*, & aliæ ipsis æquales numero *d, e f* sitq; major proportio primæ *a* priorum ad secundam *b*, quam secundæ *e* posteriorum ad tertiam *f*; item secundæ *b* priorū ad tertiam *c* major, quam primæ *d* posteriorum ad secundam *e*: erit quoque ex æqualitate major proportio primæ *a* priorum ad tertiam *c*, quàm primæ *d* posteriorum ad tertiam *f*.



Esto g ad c, ut d ad e, eritque b major ratio, quàm g ad c, & b a major quàm g. β Major ergò est ratio a ad g minorem quàm ad b. α 10. V. β 8. V.

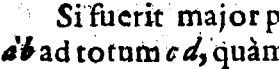
Cumq́ a *ad* b *sit major quàm* e *ad* f, *multò major est* a *ad* g *quàm* e *ad* f. *Rursus esto* h *ad* g *ut* e *ad* f, *erit q́* a *ad* g *major ratio, quàm* h *ad* g, *&* a *major quàm* h. *Ideoq́ &* a *major quàm* h *ad* g *habet majorem rationem.* γ *Sed ut* h *ad* c, *ita ex æquali* d *ad* f. *Ergò major est etiam ratio* a *ad* c *quàm* d *ad* f.

α 10. V.
β 8. V.
γ ex hypot.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 33.

Si fuerit major proportio totius *a b* ad totum *c d*, quàm ablati *a e* ad ablatum *c f*: erit & reliqui *e b* ad reliquum *f d* major proportio, quàm totius *a b* ad totum *c d*.



Quia enim major est ratio a b *ad* c d, *quàm* a e *ad* c f; α *erit etiam permutando major ratio* a b *ad* a e, *quàm* c d *ad* c f: *&* β *per conversionem rationis minor erit ratio* a b *ad* e b, *quàm* c d *ad* f d. *Itaq́* a *permutando, minor erit ratio* a b *ad* c d, *quàm* e b *reliqua ad* f d *reliquam.*

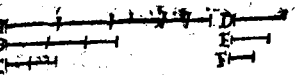
α 23. V.
β 30. V.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 34.

Si

Si sint quotcunque magnitudines *a,b,c,* & aliæ ipsis æquales numero *d,e, f;* sitq; major proportio primæ *a* priorum ad primam *d* posteriorum, quàm secundæ *b* ad secundam *e;* & hæc major quàm tertiæ *c* ad tertiam *f,* & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul, ad omnes posteriores simul maiorem proportionem, quàm omnes priores *b c* relicta prima *a* ad omnes posteriores *e, f,* relicta quoque prima *d;* minorem autem, quam prima priorum *a,* ad primam posteriorum *d:* majorem deniq; etiam, quàm ultima *c* priorum ad ultimam *f* posteriorum.



Quia n. major est ratio a *ad* d, *quàm* b *ad* e; *etiam* α *permutando major est* a *ad* b, *quàm* d *ad* e: & β *componendo major* a, b *simul ad* b, *quàm* d, e *simul ad* e; *rursus permutando major* a, b *simul ad* d, e *simul, quàm* b *ad* e. *Itaq; cum* a b *totum ad* d e *totum habeat majorem rationem, quam ablata* b *ad ablatam* e, γ *etiam reliqua* a *ad reliquam* d *majorem rationem habebit, quàm* a b *totum ad* d e *totum. Pari modo major erit ratio* b *ad* e,

α 27. V.
β 28. V.
γ 33. V.

ad c, quàm b c ad e f; ac proinde multò major a ad d, quàm b c ad e f; & α permutando major ratio a ad b c, quàm d ad e f; & β componendo major a b c ad b c, quam d e f ad e f; & rursus permutãdo, major omnium simul a b c ad omnes simul d e f, quàm b c ad e f. Quod est primum. Cum igitur totius a b c ad totum d e f sit major ratio, quàm ablati b c ad ablatum e f; erit etiam reliqui a ad reliquum d major, quàm totius a b c ad totum d e f. Quod est secundum. Quia etiam major est ratio b ad c, quàm e ad f; erit α permutando major quoq; b ad c, quam e ad f; & β componendo major totius b c ad c, quàm totius e f ad f. Cum autem major sit ratio a b c ad d e f, quàm b c ad e f ex demõstratis: multò ergò maior erit ratio omnium a b c ad omnes d e f, quàm ultimæ c ad ultimam f. Quod est tertium.

PROPOS. XXXV.

Theorema 35.

Si duabus magnitudinibus *a b, c d* majoris inæqualitatis aliæ æquales *b e, d f* addantur; component rationem minorem *a e* ad *c f*: Sin æquales demantur *b g* & *d b*, relinquent rationem majorem *a g* ad *c b*.

Pona-

Ponatur, ut a b *ad* c d, *ita* b e *ad* d i: *a Erit* a 14. V.
b e, *hoc est* g b *major quàm* d i: *β ideoq;* c d *ad* d i *mi-* β 8. VI.
norem, habebit rationem majorē, quàm ad d f *ma-*
jorem. γ *Quare etiam* a b *ad* b e *majorem ra-* γ 13. V.
tionem habebit, quàm c d *ad* d f: *&* δ *componendo* δ 28. V.
ut a e *ad* b e *majorem rationem habebit, quàm* ε 30. V.
e f *ad* d f: *Sed* ε *revertendo* a e *ad* a b *minorem* ζ 27. V.
rationem habebit, quàm c f *ad* c d. *Quare* ζ *per-*
mutando a e *ad* c f *minorem rationem habebit,*
quàm a b *ad* c d. *Quod erat propositum. Eo-*
demq; modo altera propositionis pars demonstra-
tur.

Hinc patet: Datæ rationi aliam paulò mino-
rem majoremve dari, æqualis quantitatis addi-
tione vel subtractione.

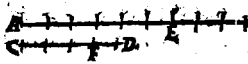
Cumq; a ad b sit major quàm e ad f, multò major est a ad g quàm e ad f. Rursus esto h ad g ut e ad f, eritq; a ad g major ratio, quàm h ad g, & a α *major quàm h. Ideoq; & a* β *major quàm h ad g habet majorem rationem.* γ *Sed ut h ad c, ita ex æquali d ad f. Ergò major est etiam ratio a ad c quàm d ad f.*

α 10. V.
β 8. V.
γ ex hypot.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 33.

Si fuerit major proportio totius *a b* ad totum *c d*, quàm ablati *a e* ad ablatum *c f*: erit & reliqui *e b* ad reliquum *f d* major proportio, quàm totius *a b* ad totum *c d*.



Quia enim major est ratio a b *ad* c d, *quàm* a e *ad* c f; α *erit etiam permutando major ratio* a b *ad* a e, *quàm* c d *ad* c f: *&* β *per conversionem rationis minor erit ratio* a b *ad* e b, *quàm* c d *ad* f d. *Itaq;* γ *permutando, minor erit ratio* a b *ad* c d, *quàm* e b *reliqua ad* f d *reliquam.*

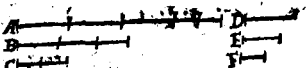
α 23. V.
β 30. V.
γ

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 34.

Si

Si sint quotcunque magnitudines *a,b,c,* & aliæ ipsis æquales numero *d,e, f;* sitq; major proportio primæ *a* priorum ad primam *d* posteriorum, quàm secundæ *b* ad secundam *e;* & hæc major quàm tertiæ *c* ad tertiam *f,* & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul, ad omnes posteriores simul maiorem proportionem, quàm omnes priores *b c* relicta prima *a* ad omnes posteriores *e, f,* relicta quoque prima *d;* minorem autem, quam prima priorum *a,* ad primam posteriorum *d:* majorem deniq; etiam, quàm ultima *c* priorum ad ultimam *f* posteriorum.



Quia n. major est ratio a *ad* d, *quàm* b *ad* e; *etiam* α *permutando major est* a *ad* b, *quàm* d *ad* e. & β *cõponendo major* a, b *simul ad* b, *quàm* d, e *simul ad* e: *rursus*q; *permutando major* a, b *simul ad* d, e *simul, quàm* b *ad* e. *Itaq; cum* a b *tota ad* d e *totam habeat majorem rationẽ, quam ablata* b *ad ablatam* e, γ *etiam reliqua* a *ad reliquam* d *majorem rationem habebit, quàm* a b *tota ad* d e *totam. Pari modo major erit ratio* b *ad* e,

α 27. V.
β 28. V.
γ 33. V.

ad c, *quàm* b c *ad* e f; *ac proinde multò major* a *ad* d, *quàm* b c *ad* e f; *& α permutando major ratio* a *ad* b c, *quàm* d *ad* e f; *& β componendo major* a b c *ad* b c, *quam* d e f *ad* e f; *& rursus permutãdo, major omnium simul* a b c *ad omnes simul* d e f, *quàm* b c *ad* e f. *Quod est primum. Cum igitur totius* a b c *ad totum* d e f *sit major ratio, quàm ablati* b c *ad ablatum* e f; *erit etiam reliqui* a *ad reliquum* d *major, quàm totius* a b c *ad totum* d e f. *Quod est secundum. Quia etiam major est ratio* b *ad* e, *quàm* e *ad* f; *erit α permutando major quoq;* b *ad* c, *quam* e *ad* f; *& β componendo major totius* b c *ad* c, *quàm totius* e f *ad* f. *Cum autem major sit ratio* a b c *ad* d e f, *quàm* b c *ad* e f *ex demõstratis: multò ergò maior erit ratio omnium* a b c *ad omnes* d e f, *quàm ultima* c *ad ultimam* f. *Quod est tertium.*

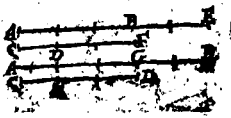
PROPOS. XXXV.

Theorema 35.

Si duabus magnitudinibus *a b, c d* majoris inæqualitatis aliæ æquales *b e, d f* addantur; component rationem minorem *a e* ad *c f*: Sin æquales demantur *b g* & *d b*, relinquent rationem majorem *a g* ad *c b*.

Pona-

Ponatur, ut a b *ad* c d, *ita* b e *ad* d i: *a Erit* b e, *hi* e g *major quàm* d i: *β ideoq; ut* c d *ad* d i *minorem, habebit rationem majorẽ, quàm ad* d f *majorem.* *γ Quare etiam* a b *ad* b e *majorem rationem habebit, quàm* c d *ad* d f: *& δ componendo* a e *ad* b e *majorem rationem habebit, quàm* e f *ad* d f: *Sed ε revertendo* a e *ad* a b *minorem rationem habebit, quàm* c f *ad* c d. *Quare ζ permutando* a e *ad* c f *minorem rationem habebit, quàm* a b *ad* c d. *Quod erat propositum. Eodem modo altera propositionis pars demonstratur.*



α 14. V.
β 8. VI.
γ 13. V.
δ 28. V.
ε 30. V.
ζ 27. V.

Hinc patet: Datæ rationi aliam paulò minorem majoremve dari, æqualis quantitatis additione vel subtractione.

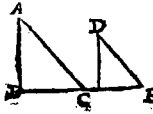
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER VI.

Definitiones.

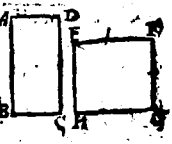
1.

Similes figuræ rectilineæ sunt *abc*, *dèc*, quæ & angulos singulos singulis æquales habent *a,d; b,c; c,f;* atq; etiam latera quæcircum æquales angulos, proportionalia, *ut ab ad bc; ita dc ad ce. Utraque enim hæc in figurarum similitudine, & æqualitatem angulorum, & proportionalita-*



tatem laterum oportet concurrere. Ideoq; etiam tantùm habet locum in ejusdem speciei figuris, circulis & circulis, quadratis & quadratis, &c.

2. Reciprocæ figuræ sunt *a b c d* & *e f g b* cum in utraque figura antecedentes *a d, b g* & consequentes *e b, b c* rationum termini fuerint. *Hic nulla sequitur figurarum similitudo.*

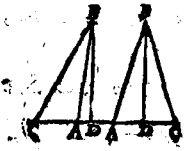


3. Secundum extremam & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum ut tota ad majus segmentum; ita majus ad minus se habuerit.

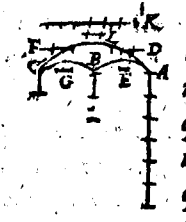
Extrema & media ratione est in extremum & medium terminum dividi. Quæ praxis in 30 propos. decebitur & aliis verbis in 11. II. est tradita. Ex usu autem maximo in stereometria potissimum, quod libro 13. constabit, dicta est Divina hæc proportio.

4. Altitudo *b d* cujusque figuræ *a b c* est linea perpendicularis à verti-

c e ad basin a e deducta. *Hinc aquè alta dicuntur figuræ quarum perpendiculares sunt æquales, ita enim etiam consistere possunt intra duas parallelas sua basi & vertice.*



4 Ratio a ad c ex rationibus a ad b, & b ad c componi dicitur, cum rationum a ad b & b ad c quantitates *denominatores* d ad e & f ad g, inter se multiplicatæ d in f & e in g, aliquam effecerint rationem a ad c.



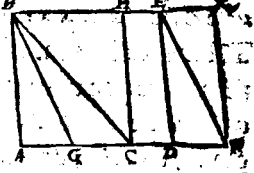
Quantitas rationis est Denominator proportionis dictus, quòd indicet quanta sit magnitudo antecedens respectu consequentis. Ex duabus ergo vel pluribus rationibus componi dicitur ratio quando ipsarum denominatores inter se multiplicati eam efficiunt. Ut duodecupla componatur ex dupla & sextupla, quia denominator duodecuplæ proportionis producitur ex mul-

multiplicatione denominatorum duplæ 2. & sextuplæ 6. Ideoq; quotcunq; magnitudinibus ordine positis, ratio extremorum componitur ex rationibus intermediorum.

PROPOS. I.

Theorema 1.

Triangula *abc*, item *def* parallelogramma *abdk*, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases *abc add ef*, & *ah add k*, *ut ac add f*.



Esto basis ac *dupla ad basin* df, & *a secetur bifariam in* g, *connectatur* g *ad* b. *Erunt Triangula* abg, gbc & def *æqualia*, & *Triangulum* abc *duplum Trianguli* def, *videlicet ut basis* ac *ad basin* df, *ita Triangulum* abc *ad Triangulum* def. *Quod primum est. Itaq; cum parallelogramma* ahy & dk *sint* γ *dupla Triangulorum* abc & def, *erit ut* abc *add* def, *ita parall.* ah *add* dk *parall. Quare etiam ut basis* ac *ad basin* df, *ita parall.* ah *ad parall.* dk. *Quod est secundum.*

a 10. I.
b 38. I.
c 41. I.
d 15. V.
e 11. V.

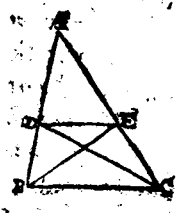
Hinc

Hinc patet Corollarium. Triangula item parallelogramma quæ æquales habent bases, sunt ut altitudines. *Si enim bases sumantur pro altitudinibus, tum ex prima hujus patet propositum.*

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si ad unum Trianguli *abc* latus *bc* parallela ducta fuerit recta quædam linea *de*, hæc proportionaliter *ut ad ad db, ita ae ad ec* secabit ipsius Trianguli latera. Et si Trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, *de*, erit ad reliquum ipsius Trianguli latus *bc* parallela.



α 37. I. ζ 7. V. β 1. VI. δ 11. V.

Ducantur rectæ b e, c d. *Est enim ut* α *æqualia Triangula* d b e *&* d c e β *ad Triangulũ* d a e; γ *ita bases* b d *ad* d a, *&* c e *ad* e a. *Quod est primũ. Et rursus: ut basis* b d *ad basin* d a; γ *ita* b e d *ad* e a d: *Qua-*

d: *Quare Triangula* a b d & c e d *erunt aequalia, & erit* d e *ipsi* b c *parallela: Quod erat fecundum.* 39. I.

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si Trianguli *a b c* angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea *a d* secuerit & basin: basis segmenta *b d*, ad *d c* eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera *b a* ad *a c*. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius Trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat Trianguli ipsius angulum.



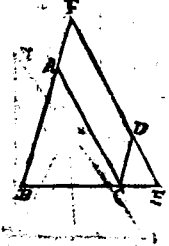
Per punctum b *agatur ipsi* a d *parallela* b e, *concurrens cum* c a *producta in* e. *Quia ergò a sunt aequaliter anguli* d a b & a b e; d a c & c e; *erunt quoq; his opposita latera* e a & a b *aequalia, Quare* β *ut* e a, *hoc est* b a *ad* a c, *ita* b d *ad* d c. *Quod primum. Rursus etiam est, ut* b d *ad* d c, *sic* a ex hypot. & 29. β 2. VI.

d c, *ita* b a *vel* e a *ad* a c; *erunt rectæ* b a *&* e a
δ 5. I. *æquales anguli* e b a *&* b a d, e *&* d a c *erunt æquales. Angulus nimirum* a *bifariam est sectus per* d a. *Quod erat propositum.*

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Æquiangulorum *a b c, a e f* Triangulorum proportionalia sunt latera, *ut a b ad d c; ita c d ad d e, ut b c ad c a; ita e a ad e d, ut b a ad a c; ita c d ad d e*, quæ circum æquales angulos, *b & d c e, b c a & e, a & d*, & homologa sunt latera, *a b ad d c, b c ad c e, a c ad d e*, quæ æqualibus angulis *b c a & e a & c d, b & d c e*, subtenduntur.



Sint bases b c *&* c e *Triangulorum & secundum angulorum æqualitatem similiter positorum, in directum, &*
α 28. I. *concurrant* b a *&* e d *productæ*
β 34. I. *in* f. *Quia ergò anguli* d c e *&*
γ 2. VI. b, *item* a c b *&* e *sunt æquales,*
δ 7. V. *erunt parallelæ* b f *&* c d,
ε 16. V. *item* a e *&* c f, *&* a c d f *parallelogrammum.*
ζ *Erit ergò ut* b a *ad* a f, *ò hoc est*, c d, *ita* b c *ad* c e; *&* e *permutandò ut* a b *ad* b c, *ita* d c *ad* c e.

Rursus

Rursus γ *erit etiam, ut* b c *ad* c e, *ita* f d δ *hoc est,* a c *ad* d e, *&* ε *permutando ut* b c *ad* c a, *ita* c e *ad* e d. *Erit ergò etiam ex* ζ *æquali, ut* a b *ad* a e, *ita* c d *ad* d e. ζ 22. V.

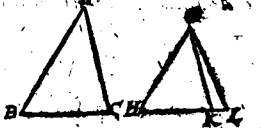
Corollarium.

Hinc patet: Recta a c *uni laterum* f e *Trianguli* b f e *parallela, aufert Triangulum* b a x, η 29. I. *Simile toti* b f e η *æquales enim sint anguli* f & a, e & c, & b *communis. Quare latera* θ *proportionalia & ipsa Triangula* ι *similia.* θ 4. VI. ι 21. def. VI.

PROPOS: V.

Theorema 5.

Si duo *abc bgk* Triangula latera proportionalia habeant, *ut ab ad bc, ita gb ad bk, ut bc ad ca, ita bk ad kg, ut ba ad ac, ita bg ad gk*, æquiangula erunt Triangula, *a & g, b & b, c & k*, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera *bc ad bk; ac ad gk; ab ad gb* subtenduntur.



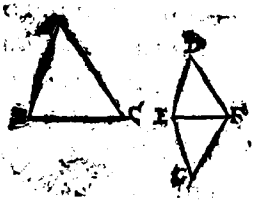
Conversa præcedentis. Si Triangulo a b c *non Triangulum* b g k, *sed* b g l *esset æquiangulum: & essent ergò* g h *ad* h l, *& sicut & g h & h k, ut* a b *ad* b c; *&* h l β *ex hypothesi æquale ipsi* h k; *totum parti. Quod absurdum.* a 4. VI. β por. 7. V.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duo *a b c, d e f* Triangula unum *b* angulum uni *e* angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, *ut a b ad b c, ita d e ad e f*, habuerint: æquiangula erunt Triangula, æqualesque habebunt *a* & *d*, *c* & *f* angulos, sub quibus homologa *bc ad ef, ab ad de*, latera subtenduntur.



Ad e f *rectæ puncta* e & f *fiant anguli æquales angulis* b & c. *Erit* g *æqualis* a; & *Triangula* a b c & e f g *æquiangula*. *Ideoq; ut* a b *ad* b c, *ita* g e *vel* d e *ad* e f; *eruntque* g e & d e *æquales*; & *reliqui anguli reliquis angulis*, & *Triangula* a b c, d e f *æquiangula*.

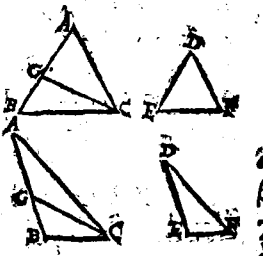
α 23 I.
β 32. I.
γ 4. VI.
δ ex hypot.
ε 9. V.
ζ 4. I.

PROPOS: VII.

Theorema 7.

Si duo *a b c, d e f* Triangula unum *a* an-

ζ angulum uni *d* æqualem; circum autem alios angulos *c* & *f* latera proportionalia habeant; *ut a c ad c b, ita d f ad f e:* reliquorum verò simul utrumque *b* & *c* aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt Triangula, & æquales habebunt eos angulos, *c* & *f*, circum quos proportionalia sunt latera.



Esto primùm uterq; ipsorum reliquus angulus b & e *acutus. Si* a b c & d e f *non sunt æquiangula* α *fiat angulus* a g c *æqualis angulo* e; β *erit ergò* b g c *obtusus, &* γ *ut* d f *ad* f e, *ita* a c *ad* γ c g & c b, & sic g c & c b, *angulis ad basin* b g *sunt æquales; obtusus acuto. Quod absurdum. Idem absurdum sequitur, si* b & e *anguli sint obtusi.*

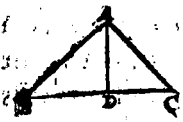
α 23. I.
β 13. I.
γ 4. VI.
ζ ex hypot. 15. I.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si in Triangulo *a b c* rectangulo, ab angulo *a* recto in basin *b c* perpendicu-

dicularis *a d* ducta sit: quæ ad perpendicularem Triangula *b d a*, & *a d c* tum toti *b a c* Triangulo, tum ipsa inter se similia sunt, *b d a* & *a d c*.



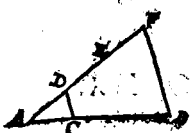
Quia enim b a c *&* b d a *rectangula præter angulum rectum & cõmunem habent* b, *etiam tertius, tertio est æqualis, & Triangula illa sex æquiangula, latera*q; *habent circa æquales angulos proportionalia, laterum homologia observata, videlicet, ut* c b *ad* b a, *ita* a b *ad* b d; *& ut* b a *ad* a c, *ita* b d *ad* d a. *Itaq; sunt Triangula similia. Eadem etiam Trianguli* d a c *est demonstratio.*

α 32. I.
β 4. VI.
γ 1. def. VI.

PROPOSITIO IX.

Problema 1.

A data recta *a b* linea imperatam partem auferre *a g*.



Auferenda sit pars tertia. Ex a ergo ducatur sub quovis angulo recta infinita a c, *in qua auferantur trẽs æquales partes* a d, d e, e f, *& f connectatur cum* b, *cui per* d *agatur a parallela* d g. *Erit* a g *pars tertia desiderata. Quia enim est, & ut* a d *ad* d f, *ita* a g *ad* g b; *erit γ cõponendo; ut tota* a f *ad*

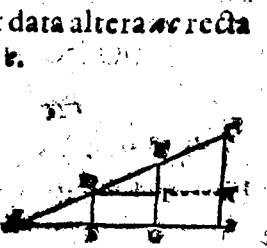
α 31. I.
β 2. VI.
γ 18. V.

df *ad partem* ad; *in data* ab *ad partem desinentem* ag. *Quod erat faciendum.*

PROPOSITIO X.

Problema 2.

Datam *ab* rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera *ac* recta secta fuerit *in d & e.*



Efficiant duae rectae a b *&* a c *angulum quemcunq;* a, *& ducatur* c b, *cui per* d *&* e *agantur parallelae* e g *&* d f: *item per* d *ipsi* a b *parallela* d h. *Est ergo* β *ut* a d *ad* d e, *sic* a f *ad* f g: *item ut* d e *ad* e c; γ *ita* d i *ad* i h, γ *id est,* f g *ad* g b: *atq; ita* a b *ipsi* a c *similiter secta. Quod erat faciendum.*

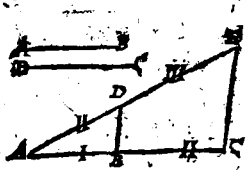
α 31. I.
β 2. VI.
γ 34. I.

PROPOSITIO XI.

Problema 3.

Duabus datis rectis lineis *a b, b c,* tertiam proportionalem adinvenire.

Datae duae rectae a b, b c *ponantur in directum, & quovis angulo* c a e *ducatur recta* a



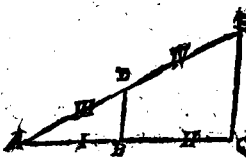
α 31. I.
β 2. VI.

infinita a e, *à qua abscindatur* a d *æqualis ipsi* b c *ductaq;* d b *agatur* c e *α parallela per* c. *β Erit ergò, ut* a b *prima ad* b c *secundam; ita huic æqualis* a d *ad* d e *tertiam quæsitam.*

PROPOSITIO XII.

Problema 4.

Tribus datis lineis, quartam proportionalem invenire.



α 31. I.
β 2. VI.

Datæ duæ a b *prima, &* b c *secunda ponantur in directum, & quovis angulo* c a e *ducatur recta infinita, in qua sumatur tertia* a d *ductaq;* d b *parallela* c e *per* c *α agatur. β Erit ut* a b *prima, ad* b c *secundam; ita* a d *tertia, ad* d e *quartam quæsitam.*

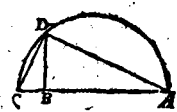
PROPOSITIO XIII.

Problema 5.

Duabus *à b, b c*, datis rectis, mediam proportionalem adinvenire.

Datæ

Date duæ rectæ a b, b c *ponantur in directum, & super tota* a c *describatur semicirculus* a d c, *& erigatur*, *ex* b *perpendicularis* b d, *& ducantur* a d, c d. *Erit ergò* a d c *in semicirculo rectus: & si* d b *perpendicularis efficit duo Triangula* a b d *&* c b d *æquiangula, Ideoq; & proportionalia; Ut* a b *ad* b d, *ita* b d *ad* b c. *Est ergò* b d *media proportionalis.*



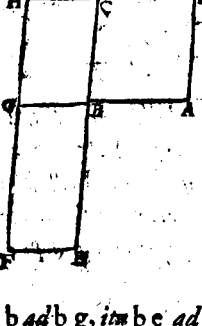
α 11. I.
β 31. III.
γ 8. VI.
δ 4. VI.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 9.

Æqualium, & unum *a b c*, uni *e b g* æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, *b d, b f*, reciproca sunt latera, *ut a b ad b g; ita e b ad b c* quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum *b d b f* unum *a b c* angulum, uni *e b g* angulo æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia *b d, b f.*

Ponantur anguli æquales ita, ut fiant verticales ad b, *& ita* α *in directum erunt* a b, b g, α 14. I.



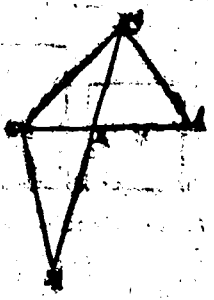
item b c, & b e: *complea-*
turq; gnomon a h e. *Ha-*
bebunt æqualia parallelog.
b d & b f β *eandem ra-*
β 7. V. *tionem ad* b h, *quam ba-*
γ 1. VI. *ses* a b *ad* b g, & b e, *ad*
δ 2. def. b c, *i. e. sunt* δ *reciproca.*
VI. *Contra sint latera circum*
æquales angulos ad b *re-*
ciprocè proportionalia, ut
a b *ad* b g, *ita* b e *ad* b c, *erunt parall.* b d & b f
æqualia. Habent enim b d & b f *ad* b h ε *eam-*
ε 1. VI. *dem rationem. Ideoq; sunt* ζ *æqualia.*
ζ 9. V.

PROPOSITIO XV.

Theorema 10.

Æqualium *a b c*, *e b g*, & unum *a b c* uni *e b g* æqualem habentium angulum, Triangulorum, reciproca sunt latera, *ut a b ad b g*, *ita e b ad b c*, quæ circum æquales angulos. Et quorum Triangulorum *a b c*, *e b g*, unum angulum *a b c* uni *e b g* æqualem habentium reciproca sunt latera, *ut a b ad b g*; *ita e b ad b c*, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

Demonstratio cum priore coincidit, quod Parallelogramma sint Triangulorum dupla. Rursum



sum ergò anguli æquales fiant verticales, ut a b, b g *&* c b, b e *sint* α *in directum, & ducatur* c g. *Erit ut æqualia Triangula* a b e *&* e b g *ad Triangulum* c b g, γ *ita bases erunt ad bases, & ut* a b *ad* b g, *ita* a b *ad* b c, *id est, reciprocè. Et contra: Lateribus datis reciprocis vel sibi*

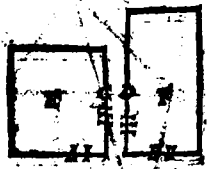
α 14. I.
β 7. V.
γ 1. VI.
δ 11. V.

bus, Erit ut æquales rationes datæ basium a b *ad* b g, *vel* e b *ad* b c, *ita* ε *triangulum* a c b, *vel* b g c *ad triangulũ* b e g. ε 1. VI.
Ideoq; triangula a c b *&* b e g, *erunt* ζ *æqualia.* ζ 9. V.
Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 11.

Si quatuor rectæ lineæ *a, b d, c*, proportionales fuerint: *ut a ad b; ita d ad c* quod sub extremis *a* & *c* comprehenditur rectangulũ *e*, æquale est ei, quod sub mediis *b* & *d* cõprehenditur, rectangulo *f*. Et si sub extremis *a* & *c* cõprehẽsum rectangulum *e* æquale fuerit ei *f*, quod sub mediis *b* & *d* cõtinetur, rectangulo illæ 4. lineæ rectæ *a, b, d, c* proport. erunt, *ut a ad b, ita d ad c.*



Quia enim, 4. datæ rectæ proportionales, ut a ad b, ita d ad c; ponuntur in duobus rectangulis e & f, circa æquales rectos α reciproca; erunt rectangula e & f β æqualia. Et contrà rectangula e & f æqualia habebunt circa æquales angulos latera reciprocè proportionalia, ut a ad b, ita d ad c; & ut a ad d, ita b ad c. Idem de Rhombo & rhomboide verum est in hac & sequenti proportione.

α 2. def. VI.

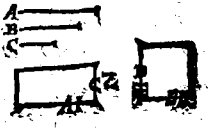
β 14. VI.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 12.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: *ut a ad b; ita b ad c*; quod sub extremis *a* & *c* comprehenditur rectangulum *e*, æquale est ei, quod à media *b* describitur, quadrato *f*; Et si sub extremis *a* & *c* comprehensum rectangulum *e* æquale sit ei, quod à media *b* describitur quadrato *e*: illæ tres rectæ lineæ *a, b, c*, proportionales erunt, *ut a ad b; ita b ad c.*

Quia



Quia etiam media proportionalis b *bis est ponenda erunt in præcedente propositione 4. rectæ circum angulos æquales rectos* α *reciprocè proportionales. Ideoque rectangula* β *æqualia. Et contrà, æqualia rectangula circa angulos rectos habent latera* β *reciprocè proportionalia, videlicet, ut* a *ad* b, *ita eadem* b *ad* d. *Quod erat ostendendum.*

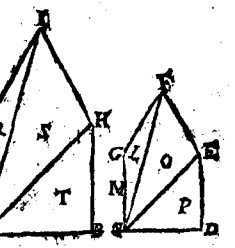
α 2. def. VI.

β 4. VI.

PROPOSITIO XIIX.

Problema 6.

A data recta *ab* linea, dato rectilineo *cdefgm* simile similiterque positum rectilineum *abhikn* describere.



Rectilineum datum m *resolvatur in Triangula per lineas occultas* c e, c f, *ex eodē angulo* c, α *Fiant æquales angulis* d c e *quidem* h a b, *&* d *ipsi* b; *erunt Triangula* a b h *&* c d e

α 23. I.

β aquiangula & latera γ proportionalia, ut e x ad c d, ita h a ad a b, atq; ita Triangula similia similiterq; posita (secundum eundem situm quoad latera & angulos) ita Triangulo c e f super
γ 4. V.
δ 2. ax. a h, fiat simile similiterq; positum triangulum a h i, & ò erit quadrangulum a b h i, quadrangulo c d e f aequiangulum. Ideoq; cum ex similitudine Triangulorum, ex quibus sunt facta, sit
ε 4. VI. aut c d ad c e, & c e ad c f: ita a b ad a h & a h
ζ 22. V. ad a i, ζ erit ex aequali, ut c d ad c f, ita a b ad a i, latera nimirum circa aequales angulos sunt proportionalia; & ita etiam quadrangulum a b h i simile est similiterq; positum quadrangulo c d e f. Denig; super a i simile similiterq; positum fiat Triangulo e f g Triangulum a i k, quod ad-
η 1. def. VI. ditum quadrangulo efficiat pentagonum pentagono m e aquiangulum & simile similiterq; positū. Quia enim rursus ut γ c d ad c f & e f ad c g: ita a b ad a i, & a i ad a k; ζ ergò ex aequali ut c d ad c g, ita a b ad a k: atq; ita circa reliquos angulos reliqua latera sunt proportionalia; & ipsum simili similiterq; positum Pentagonum. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 13.

Similia *a b c*, *d e f* Triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum *b c* & *e f* (hoc est quadrata quam refert b c ad tertiam propor. b g.



Lateribus duabus homologis b c *&* e f *quaratur tertia proportionalis* b g, *ducaturq́* a g. *Quia ergo est* β *ut* a b *ad* b c, *ita* d e *ad* e f; *ergò* γ *permutando, ut* a b *ad* d e, *ita* b c *ad* e f; δ *ita* e f *ad* b g *videlicet reciprocando circa æquales angulos* b *&* e. *Itaq́ s æqualia erunt Triangula* b a g *&* d e f, *ad quæ utraq́* ζ *eandem habet rationem* a b c; *eam videlicet* η *qua est basis* b c *ad basin* b g, *id est, prima* b c *ad tertiam* b g, *& duplicatam rationem homologorum laterum* b c *ad* e f. *Itaq́ etiam triangula* b a c *&* d e f *habebunt rationem duplicatam homologorum laterum.*

α 11. VI.
β 4. VI.
γ 1. 6. VI.
δ ex conſtr.
& 11. V.
ε 15. VI.
ζ 7. V.
η 1. VI.
θ 10. def. V.
ι 11. V.

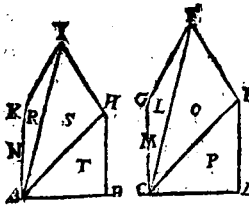
Hinc patet. Si tres b c, e f, b g, *rectæ ſint proportionales, ut* d c *ad* e f, *ad* b g, *ut est prima* b c *ad tertiam* e f, *ita est Triangulum* a b *ſuper primam* b c, *deſcriptum ad Triangulum* d e f *ſuper ſecundam* e f, *ſimile ſimiliterq́ deſcriptum: Ita etiam Triangulum ſuper ſecundam* e f *ad Triangulum ſuper tertiam* b g.

PROPOSITIO XX.

Theorema 14.

Similia polygona *m & n* in ſimilia triangula dividuntur, *l & r, o & s, p & t* & numero æqualia; & homologa totis: *m & n &*

& polygona duplicatam *quadratam*, habent eam rationem inter se quam latus homologum *c d* ad homologum latus *a b*.



Ab angulis æqualibus c & a *ad angulos oppositos* f & e h & i, *ducantur lineæ dividentes polygona* m & n *in totidem æqualia Triangula* l o p & r s t. *Quæ Triangula bina inter se ut* p & t, *quia circum æquales angulos* b & d *sunt latera proportionalia, sunt* α *æquiangula &* β *similia: Ita cum sit, ex similitudine figurarum,* e c *ad* d e & d e *ad* e f; *ita* h a *ad* h b & h b *ad* h i; *etiam ex æquali sit, ut* c e *ad* e f, *ita* a h, *ad* h i, *latera circa residuos æquales angulos ex toto* h i p f e *æquali;* α & β *erunt* o & s *Triangula æquiangula æquè similia ac* p & t. *Ità denig;* α & β *æquè similia sunt* l & r *ut* p & t. *Cum ergò sint in ratione duplicata* p & t, & o & s *communium laterum homologorum* c e, *ad* a h. *Item ut* o & s, *sunt etiam* l & r *in ratione duplicata communium homologorum laterum* c f & a i; *erunt etiam, ut* p *ad* t, *ita* l *ad* r, & o *ad* s. *Ideoque etiam ita ut* m *ad* n, *ut* p *ad* t, *id est, Triangula similia sunt etiam*

α 6. VI.
β 1. def. VI.
γ 22. V.

tiam homologa ipsis polygonis; Proindeque ipsa etiam polygona in duplicata ratione laterum homologorum videlicet, c d *ad* a b. *Quod erat propositum.*

Hinc sequitur.

Si tres rectæ sint proportionales, ut est prima ad tertiam, ita est figura super primam descripta, ad figuram super secundam similem similiterq; descriptam: Et ita figura super secundam descripta, ad figuram super tertiam similem similiterque descriptam.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 15.

Quæ eidem *a* & *b* rectilineo *c* sunt similia, & inter se *a ipsi b* sunt similia.



Quia enim triangulum a *& b est similе tertio* c, *eidem erit a aqui angulum, & ita* β *inter se erunt æquiangula, & habebunt circa æquales angulos latera proportionalia, & inter se erunt similia. Quod erat propositum.*

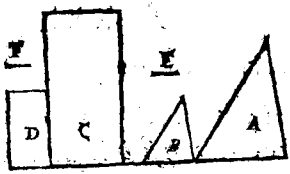
α 1. def. VI
β 1. ax.
γ 21. VI.
δ 1. def. VI.

PRO-

PROPOS: XXII.

Theorema 16.

Si 4. rectæ proportionales fuerint, *ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam,* & ab eis rectilinea ũmilia similiterq; descripta, proportionalia erunt, *ut a ad b, ita c ad d.* Et si à rectis lineis similia similiterq; descripta proportionalia fuerint rectilineæ, *ut a ad b, ita c ad d:* ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt, *prima ad secundam, ut tertia ad quartam.*



Quaratur primæ & secundæ tertiæ proportionalis e, item tertiæ & quartæ, tertia proport f. Aequalium ergò rationum prima ad secundam, & tertia ad quartam, etiam duplicatæ rationes a prima ad e, & tertiæ ad f: ea a ad b & c ad d γ æquales erunt.

a 10. def. V.
β 19. V.
γ 20. VI.

Deinde, sunt figuræ similes ut a ad b, ita c ad d β duplicatæ rationi homologorum laterum eadem, ut prima ad e, ita tertia ad f; erunt etiam dimidiatæ rationes eadem, ut prima ad secundam, ita tertia ad quartam. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 17.

Aequiangula *ad verticem c*, parallelogramma *a* & *b* inter se habent rationem eam, quæ ex lateribus cõponitur.



Compleatur parallelogrammum h. *Quia extremorũ parallelogrammorum a ad b ratio* α *componitur ex intermediis a ad* h, *&* h *ad* b, *quibus* β *eædem sunt rationes laterum* d *ad* f *&* e *ad* g: *Itaq; ex his* γ *rationibus laterum composita erit ratio a ad* b. *Quod erat propositum.*

α 5. def. VI.

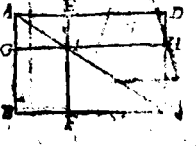
β 1. VI.

γ 11. V.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 18.

In omni parallelogrammo, *bd*, quæ circa diametrum *ac* sunt parallelogramma *ge*, & *fb* & toti *bd* & inter se sunt similia.



(*Diagonale est, quod & angulos & diagonium habet communem cum toto*)

α *Aequales sunt ang.* a ig & eai, eih & icf; *Itẽ anguli* gai, aie, fic &

α 29. I.

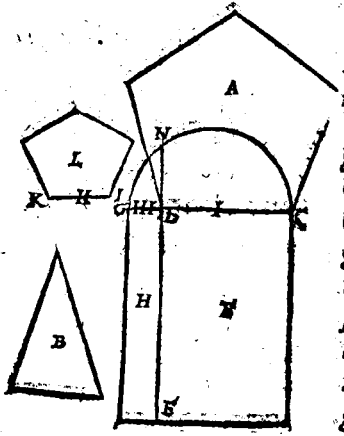
β an-

c 34. I. *B anguli item, e, g, h, f; ideog, 4. illa Triangula sunt aequiangula, & latera habent circum aequales angulos, & proportionalia, ut a e ad e i, ita* y 4. VI. *i h ad h c, & ut a g ad g i, ita i f ad f c. Sunt ergò Diagonalia & inter se & toti similia.*

PROPOSITIO XXV.

Problema 7.

Dato rectilineo, simile, similiterque positum & alteri dato aequale constituere.



b 44. VI. 45. I. *Dato rectilineo a cui construendum est simile ad latus c d sub angulo quovis c d e & applicetur parallelogrammum f aequale, rursus ad hujus latus d e sub angulo contiguo e d g applicetur paral-*

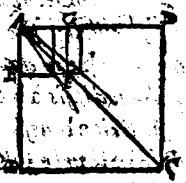
h *æquale rectilineo* b, *cui æquale est construendum. Inter* c d & d g β *quantur media proportionalis* d n *vel* i k, *super qua rectilineo* a *simile rectilineum* l γ *construatur, quod erit æquale ipsi* b. *Quia enim est, ut prima* c d *ad tertiam* d g, δ *ita* f *ad* h, ε *id est,* a *ad* b, ζ & a *ad* l; *etiam ex* η *æquali est* l *æquale ipsi* b, *quod etiam est constructum simile ipsi* a. *Quod erat faciendum.*

β 13. V.
γ 18. VI.
δ 1. VI.
ε ex cõstr. & 7. V.
ζ 11. V.
η 22. V.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 19.

Si à parallelogrammo *b d* parallelogrammum ablatum sit *e g*, & simile toti & similiter positum, communem cum eo habens angulum, hoc circum eandem cum toto diametrum *a c* consistit.



Si quis e i *dicat diagonale, et erit illud simile toti* b d. *Itaque* β *ut* b a *ad* a d; *ita* e a *ad* a g γ & a l *æqualia partium & totum. Quod absurdum. Igitur non* e i *sed* e g *est diagonale. Quod erat demonstrandum.*

α 24. VI.
ε 1. def. VI.
γ 9. V.

PROPOS. XXVII.

Theorema 20.

Omnium *ae*, *ab* parallelogrāmorum ad eandem rectam *ab* applicatorum, deficientiumq; parallelogrammis *cf* & *im* similibus similiterq; positis, ei *ae* quod à dimidia *ac* describitur; maximum id est *ae*, quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum simile existens defectui *im*.



Ad data a b *dimidiam* a c *quodcunq; constituatur parallelogrammum* a e, *& à completo parallelogrammo* a f *deficiat* a e *simili parall.* c f, *dico* a e *esse maximum applicatorum secundum rectum* a b, *deficientiumq; parallelog. similibus. Postea enim ducatur Diagonius* b e *in qua servatur ubicunq; punctum* h, *per quod ipsis* a b *&* b f *agantur parallelæ* l m *&* k i. *Erit* a h *deficiens parallelogr. & simili* i m *minus* a e *& vel* c f. *Quia enim complementa* c h *&* h f *sunt* γ *æqualia, erit* n f *vel* δ n d ε *majus, quàm* c h, *additoq; communi* a n, *erit* a e *totum majus toto* a h. *Quod erat propositum*,

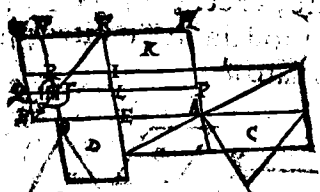
α 24. VI.
β 43. I.
γ 34. I.
δ 36. I.
ε 9. ax.

PRO-

PROPOSITIO XXIIX.

Problema 8.

Ad datam lineam *a b* rectam, dato rectilineo *c* æquale parallelogrammum *c* applicare, deficiens figura parallelogramma *d*, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato *d*. Oportet autem datum rectilineum *c*, cui æquale applicandum est, non majus esse eo *k f*, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus cui simile *e g* & *o q* deesse debet.



Super dimidia a b, *fiat parallelogrammum* e g *simile* d, *compleatur* a g & *describatur* f g. *Si* c *æquale fuerit parallelogrammo* a f *vel* e g, *factum erit, quod jubet propositio. Sin minus &* a i *sit minus* a f, *cum excessui* k *&* c *construatur æquale* 25. VI. 18. VI.

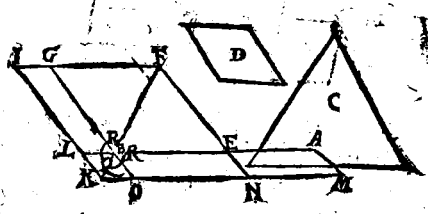
γ 26. VI. *parallelog. ipsi* c g *vel* d *simile similiterq; positũ* γ *erit q;* l n *ex* e g *secundum communẽ angulum allatum diagonale ipsius* e g, *Completa tota figura* ponq; *Dico* a m *ipsi* c *aquale èsse.*

δ ex cõstr. ε 3. ax. ζ 43. & 36. I. η 24. VI. *Ablatis enim ab* δ *aqualibus* a f & c g, *aqualibus* k & l n, ε *relinquitur* a i *vel rectilineum* c *aqualé gnomoni* r s t; *vel* ζ *huic aquali parallelogrammo* a m, *quod illi sunt parallelogrammo* o q η *simili similiterq; posito ipsi* e g *vel dato* d. *Quod erat faciendum.*

PROPOSITIO XIX.

Problema 9.

Ad datam rectam *a b*, dato rectilineo *c*, æquale parallelogrammum applicare, excedens parallelogrammo *o l*, quod simile similiterq; situm sit alteri dato *d*.



ϰ 18. VI. β 25. VI. *Ad datã* a b *dimidiam* e b *applicetur* ϰ *parallelogrammum* e g, *simile similiterq; situm dato* d. *Deinde* β *fiat*, *parallelo-*

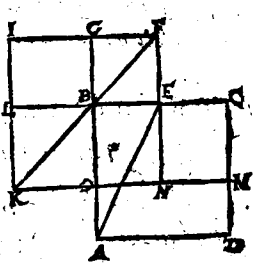
parallelogrammum n i *æquale duobus rectilineis* c & e g, *simile verò eidem* e g; *erit* e g *diagonale* γ *ipsius* n i; *inventa nimirum recta* f i *ponatur homologa lateri* f g, & *compleatur figura* a k g e. *Dico* m l *æquale esse ipsi* c. γ 26. VI.

Æqualia enim erunt rectilineo c *gnomon* δ p g r & *parallelog.* m l, *quod excedit datum* a b *parallelogrammo* o l, *simili similiterq; sito, ipsi* e g, *sive dato* d. *Quod erat faciendum.* δ ex cõstr. 36. & 43. I. & 2. ax.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 10.

Propositam rectam *a b* lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.



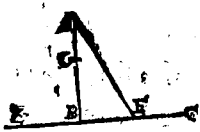
A data a b α *describatur quadrangulum* b d, *cui adrectam* c b *applicetur* β *æquale parallelogr.* m l *excedens ipsam* c b *similiter quadrato* o l (*super dimidia nimirum* b, e *construatur quadratum* e g, & *ducatur* e a, *quæ erit latus quadrati* f k, *quod quadratis duobus* b d & e g *est* α 46. I. β 29. VI.

γ 47. I. e g *est* γ *æquale. Ideoq; ipsi* e a *sit similis* & *homologa lateri* f g, *& compleatur Figura*, f m l. *Dico* a b *sectam esse proportionaliter.*

Si enim ab æqualibus b d *&* l m *auferatur commune* m b, δ *relinquetur rectangulum* d o *subtensa* a d *sive* a b *& segmento* o *comprehensum æquale quadrato* o l *facto à segmento* o b.

δ 3. ax.

ε 17. VI. ζ 3 def. VI. *Ideoq; tres rectæ* a b, b o *&* o a *sunt* 3 *proportionales, adeoq; a b in* o ζ *secta secundum mediam & extremam rationem. Quod erat faciendum.*



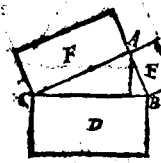
In praxi commodissimè adhibetur 11. *11. ut ad datam* a b *ad punctum* b *erigatur perpendicularis æqualis* b c, *quæ secetur æqualiter in* e, *intervallo*q; e a *ponatur æqualis* e l, *& ipsi* b l *æqualis* b o, *erit* o *sectio ipsius* a b.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 21.

In rectangulis *a b c* triangulis, figura *d* quævis, à latere *b c* rectum angulum *b a c* subtendente descripta, æqualis est figuris *e* & *f*, quæ priori illi similes, & similiter positæ, à lateribus

bus *ab* & *ac* rectum angulum continentibus describuntur.



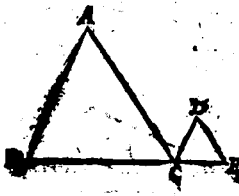
α 8. VI.
β cor. 20. VI.

Quia enim bis terna sunt α *proportionales* b c, b a, b g; & b c, c a, c g: *erit ut* b c *ad* b g *ita* d *ad* β e, *item ut* b c *ad* c g, *ita* d *ad* f. *Est autem recta* b c *aequalis ipsis* b g & g c *simul sumtis: ideoq; & figura* d *aequalis erit figuris* e & f *simul sumtis. Quod erat ostendendum.*

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 22.

Si duo triangula, *a b c, d e c* quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, *ut b a ad b c, ita c d ad d e* (secundum unum angulum *a c d* composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela *b a* & *c d*, *a c* & *d e*: tum reliqua illorum triangulorum latera *b c* & *c d* in rectam lineam collocata reperientur.



α 29. I.
β 6. VI.

Quia enim æquales sunt anguli a *alterni* a c d, d & a; β *erunt Triangula æquiangula & d c e & b aquales; quibus adduntur æquales alterni* a c d & a; *erit totus* a c e *duobus* b & a *æqualis; rursumq; addito communi* a c b, γ *erunt duo* a c b & a c e *tribus trianguli* a b c *angulis, hoc est, duobus* δ *rectis æquales. Ideoque baſes* b c, c e *erunt in* ε *directum ſeu linea una* b e. *Quod erat oſtendendum.*

γ 2 ax.
δ 32. I.
ε 14. I.

PROPOSITIO XXXIII.

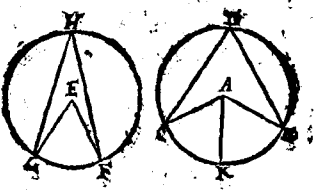
Theorema 23.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis *b c* & *f g*, quibus inſiſtunt, ſive ad centra *b a c*, *f e g*, ſive ad peripherias *b d c*, *f b g* conſtituti inſiſtant: Inſuper verò & ſectores *b c a* & *f g e*, quippe qui ad centra conſiſtunt.

α 30. III.
β 27. III.
γ 41. V.

Sit enim duplus arcus b c *ipſius* f g, & b c *a ſecetur biſariam in* f *per rectam* a k: *Erunt anguli* b a k, k a c, f e g *æquales; ideoq; totus* b a c *duplus anguli* f e g, γ *hoc eſt, ut arcus* b c *ad arcum* f g;

im-



ita angulus ad centrum b a c *ad alterum* f e g. *Quia verò bis ad centrum & duplis & proportionales sũt anguli ad peripherias* d & h, *rursus ζ erit: ut arcus* b c *ad arcum* f g, *ita angulus* d *ad angulũ* h. *Denig; sectores* b k a, k c a, g e *sibi mutuò congruentes erunt η æquales, ideo ϑ & sector* b c a *duplus erit sectoris* f g e, *id est, & sector ad sectorem est, ut arcus* b c *ad arcum* f g.

δ 20. III.
ε 15. V.
ζ 11. V.
η 8. ax.
ϑ 4 def. V

Corollarium. 1.

Ut angulus ad angulum, κ sic sector ad sectorem.

κ 11. V.

Corollarium 2.

Vt angulus in centro ad 4. rectos; λ ita arcus eidem angulo subtensus ad totam peripheriam scil. 4. rectos subtendentem.

λ 33. VI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER VII.

Definitiones.

1.



Nitas est, secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur. *Ita secundum unitatem unam dicimus ulnam, unum corpus, &c. Hæc indivisibilis esse concipitur, ut & punctum.*

2. Numerus autem ex unitatibus composita multitudo. *Ita 7. ex septem unita-*

unitatibus seu partibus constat. Qua earundem partium ut unitatum participatio facit, ut omnes numeri sint inter se commensurabiles. Quod magnitudinibus negatum est.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem. *Ita 5 est numeri 20 pars, quae tamen denominationem habet ab eo, per quem metitur numerum, cujus est pars, ut 5 est pars quarta 20, quia metitur illum per 4.*

4. Partes autem, cum non metitur. *Si nimirum minor majorem non metiatur, ut 5 numerum 18 tum ipsius non pars sed partes dicitur, quia continet quinque unitates quae singula sunt decimae octavae partes numeri 18. Nomen partium est ex illis numeris, per quos communis mensura utrumq; metitur, ut cum 3. metiatur & 6 partes & 9 cujus non est partes per 2 & 3. senarius dicitur duae tertiae partes novenarij. Euclides partes retinuit in magnitudinibus lib. V. quia non qualibet magnitudo alterius inaequalis vel*

pars

pars vel partes est, quia sæpè sunt incommensurabiles.

5. Multiplex verò major minoris, cum majorem metitur minor. *Talis est omnis qui partes habet aliquotas, Vt 9. multiplex est 3.*

6. Par numerus est, qui bifariam dividitur. Ut 24.

7. Impar verò qui bifariam non dividitur; vel qui unitate differt à pari: *Ut 3. 5. 7. Vnde indivisibilem hic intelligi debere unitatem constat, aliàs quilibet numerus esset par. Ut 3. haberet dimidium $1\frac{1}{2}$ unitatem cum semisse.*

8. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem; *Ut 24. est pariter par, quia 4. eum metitur per 6. parem.*

9. Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per imparem: *Vt 24, etiam est pariter impar quia 8. metitur, illum per 3 imparem. Ideoq; multi sunt numeri, qui & pariter pares & pariter impares sunt.*

10. Impariter verò impar numerus

rus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem, *Ut 21. metitur 3. per 7.*

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur. *Tales sunt, qui nec pariter nec impariter pares vel impares possunt dici, ut 2. 5. 7.*

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas communis mensura metitur. *Etiam intelliguntur numeri, qui per se primi non sunt, modo ut inter se praeter unitatem nullam habeant communem mensuram; ut 7. 10. 15. sunt inter se primi.*

13. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur. *Sic 15. est compositus numerus, quia illum 5. & 3. metiuntur. Omnes primi praeter binarium sunt impares & omnes pares praeter binarium compositi.*

14. Compositi autem inter se sunt numeri, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur. *Etiam de iis accipitur, qui per se compositi non sunt, ut 7. 14. 21. quia 7. eos metitur.*

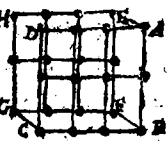
15. Nu-

15. Numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis: *Ut 4. dicetur multiplicare 5, si quinarius fuerit quater compositus, quot in 4. sunt unitates, &c. Inde constat productum habere ad alterum multiplicantium eandem rationem quam alter ad unitatem, quia toties continet, quot alter continet unitates. Vt ratio 20 ad 5 est eadem, quadrupla, quæ 4. ad 1.*

16. Cum autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur. *Possunt enim ita proponi numeri disponi in formam parallelogrammi rectanguli, cujus latera respondent numeris inter se multiplicatis. Ita 12 est numerus planus, quia ex ductu 3 in 4 nascitur. Reliqua pene infinita planorum numerorum genera hic in Euclide nullius usus prætermitto.*

17.

17. Cum verò tres numeri mutuò se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur. Qui autem numeri mutuò se multiplicarint, latera illius dicentur.



Vt, 2. 4 efficiunt 8. numerum solidum, cujus basis b f *latitudo est,* b c *longitudo* 4. *cui alia basis similis & æqualis superposita facit, ut totus numerus habeat* 8 *& altitudo* a b *duas unitates. Vnitas impropriè & planus & solidus numerus appellari solet, eò quod & ex duabus unitatibus & tribus inter se multiplicatis producatur.*

18. Quadratus numerus est; qui æqualiter æqualis, vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur. *Vt 16. est numerus quadratus, cujus dispositio refert accuratum quadratum cujus radix est quaternarius.*

19. Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur. *Sic 8 est cubus, cujus dispositio refert*

refert accuratum cubum, cujus longitudo, latitudo & altitudo vel latera, sint æqualia, ex quarum multiplicatione numerus producitur.

20. Numeri proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè cum primus secundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemque insuper illius partem vel easdem partes. *Vt* $\frac{6}{3}\frac{12}{6}\frac{24}{12}\frac{48}{24}$ *numeri sunt proportionales, quia primus secundi æquè duplus est, ac tertius quarti, & rursum primus secundi æquè dimidiū est ac tertius quarti. Ita 5. 4. 10. 8. sunt proportionales, quia primus æquè secundum continet semel cum* $\frac{1}{4}$ *ac tertius quartum.*

21. Similes plani & solidi sunt, qui proportionalia habent latera. *Cum unius plani numerus possit variis modis disponi, non requiritur, ut in omnibus modis illa reperiatur laterum proportio, sed sufficit, ut uno quoque modo*

ita

ita similes sunt planè 6. & 24. quia laterum 2. ad 3 & 4 ad 6. eadem est proportio, etiamsi 3. ad 8. in alia dispositione non habeant eandem. Similiter 92 & 24. sunt similes solidi, quia 8. 6. 4. eandem proportionem, quam 4 3 2.

22. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis. *Loquitur de parte aliquota, de quâ & tertia definitio, alias omnes numeri essent perfecti futuri secundùm quartam definitionem partium. Ut 6 est numerus perfectus, quia ipsius partes aliquotæ 1. 2. 3 simul sumtæ illum restituunt, ita 28 & 496. Illi in quibus partes aliquotæ simul sunt majores, dicuntur abundantes; Diminuti, in quibus sunt minores. Ad has Euclideas definitiones addit Clavius ex Campano sequentes.*

23. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum producit. *Sic 2. metitur 14. per 7. quia 2. multiplicatus per 7. producit 14.*

24. Proportio numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex vel pars, partesve; vel certè illum continet semel aut aliquoties & aliquam insuper illius partem vel partes. *Sic si numerus 24 comparetur cum 6 ea ratione qua ipsius multiplex est, nimirum quadruplus, dicetur illa habitudo proportio.*

25. Termini, sive radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione nequeunt sumi minores.

26. Cum tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; primus ad quartum, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad secundum: & semper deinceps uno amplius, quam diu proportio extiterit. *In eo, def. V. dicebantur eadem de magnitudinibus.*

27. Quot-

27. Quotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio. *Eadem in def. 5. VI. fuerunt declarata. Ex V. verò etiam libro possunt peti argumentorum forma, quæ etiam hoc VII. in numeris demonstrantur.*

POSTULATA.

I.

Postuletur, cuilibet numero posse quotlibet sumi æquales vel multiplices.

II.

Quolibet numero posse sumi majorem; *Quia additione unitatis numerus in infinitum augeri potest.*

AXIOMATA.

I.

Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

Qui numeri æqualium numerorum vel ejusdem eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IV.

Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur. *Quia unitas toties sumta, quot in ipso sunt unitates, ipsum numerum constituit.*

Omnis

VI.

Omnis numerus se ipsum metitur per unitatem. *Semel enim sumtus numerus quilibet, sibi ipsi est aequalis.*

VII.

Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

VIII.

Si numerus numerum metiatur, & ille per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem. *Ut quia 3 metitur 12 per 4 metietur etiam eundem 12 4 per 3.*

IX.

Si numerus numerum metiens, multiplicet eum per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet. Ut *3 metiens 12*

per 4, multiplicatus per 4 producit 12 quem metitur.

X.

Numerus quotcunque numeros metiens, compositum quoq; ex ipsis metitur. *Ut quia 3 metitur 6 & 9: Ideoq; & metitur 15 ex 6 & 9 compositum.*

XI.

Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoq; omnem numerum, quem ille metitur. *Ut quia 3 metitur 6 qui metitur 12 Ideoque etiam 3 metitur 12.*

XII.

Numerus metiens totum & ablatum, metitur etiam reliquum. *Ut quia 3 metitur & 15 totum & 9 ablatum, ergo etiam metitur reliquum 6.*

PRO-

PROPOS. I.

Theorema 1.

Si duobus numeris *ab*, *cd* inæqualibus propositis, detrahatur semper minor *cd* de majore *ab*, alterna quadam detractione *cd ex ab*, *eb ex cd*; *fd ex eb*, neque reliquus *eb* unquam metiatur præcedentem *cd*, quoad assumta sit unitas *gb*; qui principio propositi sunt numeri, *ab* & *cd* primi inter se erunt.

A.....E..G.B
C...F..D
H---

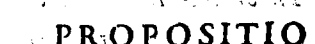
Sin minus, metietur eos numerus, ceu communis mensura ut h. *Cum itaque* h *α metiatur* α *ex hyab &* cd; cd *verò metiatur* ae, *etiam* h *& β pot.* ag *& eb γ reliquum metietur. Cumque* eb *α &* 11. axio. *metiatur* cf, *etiam* eb *γ metitur* cf *& ipsius γ* γ 12. axio. *reliquum* fd. *Cum denique* fd *α metiatur* eg *etiam* h *metietur &* eg *& ipsius reliquum γ* gb *unitatem numerus ceu totum suam partem*

Quod absurdum. Sunt ergò inter se primi, Quod erat propositum.

PROPOSITIO II.

Problema 1.

Duobus numeris *a b*, *c d* datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram *f d* invenire.



Detrahatur minor c d *ex majore* a b *& residuum* e b *ex minore* c d *& ita alternatim procedendo propos. dum perveniatur ad numerum* f d, *qui præcedentem* e b *metiatur. Erit* f d *communis mensura maxima.* α ex hyp. *Cum enim* f d α *metiatur* e b, *& e b ipsum* c f *etiam* f d *metietur* c f; β 11. axio. *Cumq; & seipsum, etiam totum* c d γ 10. axio. *tur. Metitur autem* c d *ipsum* a e, *ergo & f d eundem* a e, *& cum etiam* e b *metiatur, totum quoq;* a b, *& ita utrumq;* a b, c d *metietur.*

Quod si quis etiam maximam hanc communem mensuram esse neget, esto g *major quàm* f d. *Cùm ergò* g *metiatur &* a b *&* c d; c d *verò ipsum*

ipſum ae; *itaq;* & eb *reſiduum*: & *cum* eb *metiatur* cf, *etiam* g *metietur* cf & *reſiduum* fd, *major minorem, quod abſurdum.*

Hinc patet Corollarium. Quod numerus metiens duos numeros etiam communem eorum maximam menſuram metiatur. Si enim totum & ablatum metiatur, metitur etiam reliquum, quod communis eſt menſura maxima.

PROPOS. III.

Problema 2.

Tribus numeris *abc*, datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram *de* reperire.

A.....
B.....D....
C.....E..F...

Sid ω inventa communis menſura a & b *etiam metiatur* c *erit maxima communis menſura inventa. Si enim major quadam ſit quæm* d, *eadem cum metiatur* a, b, c β *etiam communem menſuram* d *metitur, major minorẽ. Quod abſurdum. Quod ſi* d *non metiatur* c *erunt inter ſe compoſiti. Proinde cum eadem menſura*

α 2. VII.

β ax. 2. VII.

ζ cor. 2. VII. communis quæ a,b,c metitur, etiam ζ metiatur d maximam mensuram a & b. α erit c mensura communis ipsius d & c, etiam communis maxima mensura numerorum a,b,c. Quia enim e metitur c & d, d, verò a & b. α metietur etiam e ipsos a & b. Cæterum quod maxima communis mensura sit c patet, si aliam f esse velimus: Tum enim f metiens a & b, β metietur etiam d eorum communem mensuram: & cum metiatur d & c, etiam horum communem mensuram e metietur. Non igitur esset hæc major. Atque ita e est communis mensura maxima trium numerorum a,b,c. Quod erat faciendum.

α 2. VII.

Vnde nascitur Corollarium, quòd numerus metient tres numeros, communem etiam illorum mensuram metiatur.

PROPOS: IV.

Theorema 2.

Omnis numerus omnis numeri minor a, majoris b, aut pars est, aut partes.

IIV. 1

A.....

B.....

IIV

A.....

B.....

A.....
B.....
C...

Si a & b sint inter se primi, minoris a unitates erunt partes majoris b. Si sint compositi, & a metiatur b, a erit ipsius pars. Si a non metiatur b, sed c, & sit communis eorum mensura, quoties numerus c continet b, tot partes continere dicitur b numeri a. Sic patet propositum.

a 3. def. VII.
b 2. VII.

PROPOS. V.

Theorema 3.

Si numerus *a* numeri *bc* pars fuerit, & alter *d* alterius *ef* eadem pars; & simul uterque *a* & *d* utriusque *bc* & *ef* simul eadem pars erit, quæ unus *a* unius *bc*.

A..... D....
B..... G..... C E.... H.... F

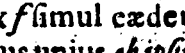
Quia enim eadem pars est a ipsius b c quod ipsius e f, continebit b c tot a, i. e b g & g c quot d est e h, h f continet e f. Itaq; quot numeri a sunt in b c totidem numeri a & d simul sunt in b c & e f simul.

PROPOSITIO. VI.

Theorema 4.

Si numerus *a b* numeri *c* partes fuerit,

rit, & alter *d e* alterius *f* eædem partes: & simul uterque utriusque *a b & d e*, *c* & *f* simul eædem partes erit, quæ unus unius *a b ipsius c*.



Cum æquales numero partes sint a b & d e, *quæ pars est* a g *ipsius* c & g h *ipsius* f, *eadem sint* a g & d h *ipsorum* c & f. *Similiter prioribus æquales* g b & h e. *Itaq; uterq; a b* & d e *ipsorum* c f *eadem partes erit, quæ unus* a b *unius* c. *Quod erat ostendendum.* 5. VI.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si numerus *a b* numeri *c d* pars fuerit, qualis ablatus *a e* ablati *c f*: etiam reliquus *e b* reliqui *f d* eadem pars erit, qualis totus *a b* totius *c d*.



Sit enim e b *numeri* g c *eadem pars, quæ est* a e

est a e *ipsius* c f *vel* a b *ipsius* c d *æque multiplex*, a e, e b *simul eadem pars utriusq;* g c & c f, *id est, qua totius* a b *totius* c d. *Cum ergo* a b *sit eadem pars utriusq;* g f & c d, *erunt numeri æquales, à quibus ablato communi* c f, *relinquuntur* g c & f d *æquales. Itaq; eadem pars est* e b *ipsius* f d *qua* a b *ipsius* c d. *Quod erat propositum.* a 5. VII.

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si numerus *a b* numeri *c d* partes fuerit, quales ablatus *a e* ablati *e f*: & reliquus *e b* reliqui *f d* eædem partes erit, quales totus *a b* totius *c d*.

A.....E.....B
C.....F.....D

Assumto g c, *cujus eadem partes sit* e b, *ac* a e *ipsum* c f, *erit utrumq;* a e, e b *simul utriusq;* c f & g c *eadem partes, qua* a e *ipsius* c f *vel* a b *ipsius* c d, *ideoq;* & a b *utriusq;* c d & g f *eadem partes erit,* & f g, c d *erunt æquales; communique adempto* c f, g c & f d *æquales erunt. Quare propter* e b *etiam ipsius* f d *erit eadem pars qua totus* a b *totius* c d. *Quod erat propositum.* a 7. VII.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si numerus *a* numeri *b c* pars fuerit, & alter *d* alterius *e f*, eadem pars: & vicissim, quæ pars est, aut partes primus *a* tertij *d*, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus *b c* quarti *e f*.

A....
B....G....C
D.....
E.....H.....F

Divisis b c *&* e f *in partes* b g, g c, *&* e h, h f *æquales ipsis* a *&* d, *erit multitudo partium numerorum* b c *&* e f *æqualis. Cumq; æquales inter se* b g, g c, *sint minores ipsis* e h, h f *inter se æqualibus, quia totus* b c *ponitur minor toto* e f: *erit* b g *ipsius* e h *eadem pars aut partes, quæ* g c *ipsius* h f, *id autem* b g, g c *simul, id* [a] 5. v. 6. VII. *est,* b c *secundus utriusq;* e h, h f *simul, id est,* e f *quarti eadem pars vel partes erit, quæ* b g *ipsius* e h, *id est, quæ a primi ipsius* d *tertij. Quod erat propositum.*

PRO-

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si numerus *a b* numeri *c* partes fuerit, & alter *d e* alterius *f* eædem partes: & vicissim, quæ partes est primus *a b*, tertij *d e* aut pars; eædem partes erit & secundus *c*, quarti *f*, aut pars.

A..G..B
C.....
D..... H .....E
F.....

Divisis a b & d e *in partes* a g, g b & d h, h e *numerorum* c & f: *erit multitudo partium* a b & d e *æqualis & tam* a g *quàm* g b *eadem pars numeri* c, *quotùm* d h *quam* h e *numeri* f. *Itaq; alternè vicissim eadem pars vel partes, erit* a g *ipsius* d h & g b *ipsius* h e, *quæ* c *ipsius* f *est*: *ac propterea eadem pars vel partes erit* a g *ipsius* d h, *quæ* g b *ipsius* h e, *& adeo uterq; uterq;* a g, g b *simul, utrumq; d h, h e simul eadem pars vel partes erit, quæ* a g *ipsius* d h, *id est, quæ* c *ipsius* f. *Quod erat demonstrandum.* a 9. VII. & 5. v. 6. VII.

PROPOSITIO XI.

Theorema 9.

Si fuerit ut totus *a b* ad totum *c d* ita

ita ablatus *ae* ad ablatum *cf*. Et reliquus *eb* ad reliquum *fd* erit, ut totus *ab* ad totum *cd*.

A.....E.....B
C.....F...D

α 20.def. VII. *Quia enim proportionales sunt* a b *ad* c d *ut* a e *ad* c f, *α erit primus* a b *secundi* c d, *ut tertius* a e *quarti* c f, *vel æquè multiplex vel eadem pars, aut partes, vel continet æquáliter cum aliqua parte vel partibus. Cum ergò* c f *eadem pars sit* a e, *quæ* c d *ipsius* a b, *& igitur & reliquus* f d *reliqui* e b *eadem pars erit, quæ totius* c d *totius* a b. *Erit ergò, ut totus* a b *ad totum* c d, *ita reliquus* e b *ad reliquum* f d.

β 7.v.8. VII.

PROPOSITIO XII.

Thorema 10.

Si sint quotcunque numeri proportionales *ut a ad b, ita c ad d & e ad f*, erit quemadmodum unus *a* antecedentium, ut unum consequentium *b*; ita omnes antecedentes *ace* ad omnes consequentes *bdf*.

Quia

A. . . C. . E. . .
B. . . . . D. . . . F. . . . .

Quæ enim a *vel multiplex est vel eadem pars vel partes* a *ipsius* b *quæ* c *ipsius* d *&* e *ipsius* f; *& erit &* a c *simul utrius q;* b d *simul æquè multiplex, eadem pars vel partes, quæ* a *ipsius* b *vel* e, *ipsius* f, *Sic &* a c *tanquam unus &* e *simul, amborum* b d *tanquam unius &* f *simul æquè multiplices erunt vel eadem pars aut partes, quæ* a *ipsius* b. *Itaq; & omnium* a c e *simul eadem est proportio ad omnes* c, d, f *simul, quæ* a *ad* b. *Quod erat propositum.*

a 20. def. VII.
β 5. v. 6. VII.

PROPOSITIO XIII.

Theorema ii.

Si quàtuor numeri proportionàles sint: *ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d, & viciſſim proportionales erunt, *ut* a *ad* c, *ita* b *ad* d.

A. . . C. . . . .
B. . . . D. . . . . .

Propter eandem proportionem a *ipsius* b *&* c *ipsius* d *eadem pars aut partes vel æquè multiplex est. Itaq; viciſſim* a *ipsius* c *&* b *ipsius* d *vel*

à 20. def. VI.
β 9. v. 10. VII.

d *vel eadem pars aut partes vel æquè multiplex erit, α at q, ideò ut* a *ad* c *ita* b *ad* d. *Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XIV.

Theorema 12.

Si sint quotcunque numeri *a b c*, & alii *d e f* illis æquales multitudine, qui bini sumantur & in eadem ratione *ut ad b, ita d ad e & ut b ad c, ita e ad f:* etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt *ut a ad c ita d ad f.*

A..... D.....
B..... E.....
C..... F.....

α 13. VII. β ex hyp. *Quia enim est, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* e; *etiam α vicissim erit ut* a *ad* d, *ita* b *ad* e, *& ob β rationem eandem* b *ad* e, *ut* c *ad* f. *Itaq; ut* a *ad* d, *ita* c *ad* f, *& α vicissim ut* a *ad* c, *ita* d *ad* f. *Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si

Si unitas *a* numerum *b c* quempiam metiatur, æquè autem alter *d* numerus alterum *e f* quendam numerum metiatur: & vicissim æquè unitas *a*, tertium numerum *d* metietur, & secundus *b c* quartum *e f*.

A. D.
B. G. H. C. E. I. K. F

Diviso b c *in unitates* b g, g h, h c, *& ei* e f *in partes* e i, i k, k f, *ipsi* d *æquales, æqualis fit multitudo unitatum numeri* b c, *multitudini partium numeri*, e f, *& a unitas æque metitur numerũ* d, *ac* b g *ipsum* e i; g h, *ipsum* i k *&* h c *ipsum* k f. *Ideoq; unitas* a *a erit eadem pars numeri* d, *quæ totus* b c, *totius* e f; *ac proinde* a *numerus* d *&* b c *numerum* e f *æquè metitur. Quod erat ostendendum.* ax. 5. VII.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo numeri *a*, *& b* sese mutuò multiplicantes fecerint *d & c* aliquos, gebiti *d* & *c* ex ipsis æquales inter se erunt.

E.

A.... B....
C..... D.....

Sumta unitate e, *cum* a *multiplicans* b *faciat* c, *erit* c *ex* b *toties compositus, quot in* a *sunt unitates, & unitas* e *numerum* a, & b *numerum* c *æquè metitur; Ergo* β *vicissim unitas* e *numerum* b, & a *numerum* c *æquè metitur. Quoniam ergo quia* b *multiplicans* a *facit* d, *erit* d *ex* a *toties compositus, quot in* b *sunt unitates, & æquè metitur* b *ea* a *ipsum* d. *Ideoq;* β *vicissim unitas* e *numerum* a, & b *numerum* d *æquè metitur. Ergo æquè metitur æquè* & d & c, *quæ proinde sunt inter se æquales. Quod erat propositum.*

α 15. def. VII.

β 15. VII.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 15.

Si numerus *a* duos numeros *b* & *c* multiplicans fecerit aliquos *d* & *e*; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, *ut b ad c, ita d ad e* quam multiplicati.

F.

A...

B.. C....

D..... E.....

Assumta unitate f, *erit* d *ex* b *compositus toties, quoties unitas* f *est in* a: *similiterq; toties* e *compositus ex* c, *quoties unitas eadem est in eadem* a. *Itaq;* b *ipsum* d & c *ipsum* e *aquè metitur. Quare* b *ipsius* d & c *ipsius* e *eadem pars est, & a sit, ut* b *ad* d, *ita* c *ad* e, & *permutando, ut* b *ad* c, *ita* d *ad* e. *Quod erat ostendendum.* α 20. def. VII. β 13. VII.

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Si duo numeri *a* & *b* quempiam numerum *c* multiplicantes, fecerint aliquos *d* & *e*: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, *ut a ad b, ita d ad e*, quam multiplicantes.

A.... B....

C..

D..... E.....

Cum enim ex a *in* c *fiat* d, *idem* α *fiat ex* α 16. VII.

β 17. VII. c in a. *Eodem modo cum ex* b in c *fiat* e, *idem* a *fiat ex* c in b. *Quoniam igitur idem* c *multiplicans ipsos* a *&* b *facit* d *&* e, β *erit ut* a *ad* b *ita* d *ad* e.

PROPOS. XIX.

Theorema 17.

Si quatuor *a, b, c, d* numeri proportionales fuerint *ut a ad b, ita c ad d*, qui ex primo *a* & quarto *d* fit numerus *e*, æqualis erit ei, qui, ex secundo *b* & tertio *c* fit numero *f*. Et si qui ex primo *a* & quarto fit, numerus *e* æqualis fuerit ei, qui ex secundo *b* & tertio *c* fit numero *f*; ipsi 4 numeri proportionales erunt *ut a ad b, ita c ad d*.

A...
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

Fiat g *ex* a *in* c. *Quia idem* a *multiplicans* d
α 17. VII. *&* c *facit* e *&* g, α *erit* c *ad* d, *ut* g *ad* e. *Erat autem*

tem a *ad* b, *ut* c *ad* d: *Est igitur & a ad b ut g ad e. Rursus, quia* a *& b multiplicantes idem* c *faciunt* f *& g,* β *erit ut* a *ad b, ita* g *ad* f. *Erat etiam* g *ad* e, *ut* a *ad* b. *Ergò* e *&* f *sunt* γ *æquales.* β 18. VII. γ 9. V.

Sint jam æquales e *&* f, *Erunt* 4 *illi numeri proportionales. Quia enim* a *multiplicans* c *&* d *facit* g *&* e α *erit, ut* c *ad* d, *ita* g *ad* e *vel* f *ipsi æqualem. Rursus cum* a *&* b *multiplicantes* c *faciant* g *&* f, β *erit* a *ad* b, *ut* g *ad* f. *Quare ad eandem proportionem* g *&* f *eadem* a *&* b; c *&* d *erunt eædem. Quod erat ostendendum.*

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si tres numeri *a, b, c,* proportionales fuerint, *ut a ad b, ita b ad c,* qui sub extremis *a* & *c* continetur; æqualis est ei, qui à medio *b* efficitur: Et si qui sub extremis *a* & *c,* continetur æqualis fuerit ei, qui à medio *b* describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt *ut a ad b, ita b ad c.*

A.....
B.....D.....
C....

Sumto d *æquali* b, *erit ut* b *ad* c, *hoc est, ut*
a 19. VII. a *ad* b; *ita* d *ad* c, *& erit* 3 *numerus ex* a *in* c *æqualis numero ex* b *in* d, *hoc est ex* b *in seipsum.*

Sit jam etiam productus ex b *in seipsum æqualis producto ex* a *in* c, *erunt tres numeri proportionales. Rursum enim assumto* d *æquali ipsi* b *erit ut* b *ad* c *ita* d *ad* c. *Quia ergò numerus factus ex* a *primo in* c *quartum æqualis est facto ex* b *secundo in* d *tertium, & erunt* 4 *numeri* a b d c *proportionales. Sed* b *est idem cum* d. *Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Minimi numeri *a b*, *c d* omnium *e & f* eandem cum eis rationem habentium, *ut a b ad c d, ita e ad f*, metiuntur æquè numeros, eandem cum eis rationem habentes, major *a b*, quidem majorem *e*, minor verò *c d* minorem *f*.

A...

A...G..B
C..H.D
E.....
F.....

Cum enim sit a b *ad* c d, *ut* e *ad* f, *etiam* α *vicissim est* a b *ad* e, *ut* c d *ad* f; *& cum* a b, c d *sint minores ipsis* e *&* f, β *erit* a b *ipsius* e, *&* c d *ipsius* f *eadem pars vel partes. Sed partes esse non possunt. Divisis enim* a b *&* c d, *si fieri potest in partes* a g, g b *&* c h, h d, *quæ multitudine erunt æquales, atq; ideò* a g *ipsius* e, *&* c h *ipsius* f *eadem pars.* β *Erit ergò, ut* a g *ad* e, *ita* c h *ad* f, *&* α *vicissim ut* a g *ad* c h, *ita* e *ad* f, *vel* a b *ad* c d: *ac proinde numeri* a g, c h, *minores quàm* a b, c d *eandem quam* a b, c d *minimi illius proportionis, habebunt rationem. Quod absurdum.* α 5. VII. β 20. def. VI.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres numeri, *a, b, c,* & alij ipsis multitudine æquales, *d e f,* qui bini sumantur, & in eadem ratione; fuerit autem perturbata eorum proportio; *ut a ad b, ita e ad f, & ut b*

a d c, ita d ad e; Etiam ex æqualitate, in eadem ratione erunt *ut a ad c, ita d ad f.*

A..... D....
B..... E.....
C..... F..

Cum enim sit, ut a ad b ita e ad f, a erit numerus ex a in f genitus æqualis numero ex b in e.; Ita ex b in e facto æqualia erit ex c in d procreatus, cum sit, ut b ad c, ita d ad e; adeoque numerus ex a primo in f quartum productus, numero ex e secundo in d tertium genito æqualis erit. Quare ut a ad c ita d ad f. Quod ostendendum erat.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Primi inter se numeri *a* & *b* minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

A..... B....
C..... D...
E...

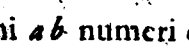
Sint minus, sint c, d in eadem proportione ipsis

ipſis a, b *minores minimi* α. *Metietur ergò* c *ipſum* a, & d *ipſum* b *æquè*; c *videlicet ipſum* a *per tot unitates per quot* d *metitur ipſum* b. *Quæ unitates ſint in* e. *Cum ergò* c & d *metiantur* a & b *per* e *unitates*, β *metietur* e *ipſos* a & b *per unitates ipſorum* c & d. *Idem enim* e *per* c, *quod* c *per* e *efficit. Itaq;* a & b *contra hypotheſin non erunt primi, ſed compoſiti.* α 21. VII. β 25. VII.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Minimi *a b* numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.



Sin minus, eſto communis ipſorum menſura c. *Itaq; quoties* e *eſt in* a & b *tot erunt unitates in* d & e. & c α *multiplicans* d & e *producit* a & b. *Proinde eſt* a *ad* b *ut* d *ad* e, *Adeoque cum* d & e *partes ipſorum* a & b *minores ſint*, a & b *non ſunt minimi in eadem ratione. Quod eſt contra hypotheſin.* α 9. IX. & 18. VII.

PRO-

PROPOS: XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri *a b* primi inter se fuerint; qui unum *a* eorum metitur numerus *c*, ad reliquum *b* primus erit.

A.....B.....
C.... D----

Sin minus, esto communis eorum mensura d *Quia ergo* d *metitur* c, *& ipsum* a, *etiam* d *a metitur* a. *Cum q, idem* d *metiatur etiam* b. *Non igitur* a *&* b *erunt inter se primi contra hypothesin.*

q. 11. 8.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Si duo numeri *a, b* ad quempiam *c* primi fuerint; etiam ex illis genitus *d* ad eundem *c* primus erit.

A.....B...
C.....
D.....
E----F----

Sin minus esto communis ipsorum mensura e, qua

quæ d *metiatur toties, quot in* f *sunt unitates. Itaq;* e *multiplicans* f *producit* d. *Sic* d *est factus ex* a *in* b. *Ergò cum ex* e *primo in* f *quartum fiat idem numerus* d, *qui ex* a *secundo in* b *tertium, erit ut* e *ad* a, *ita* b *ad* f. *Cumq;* a *&* c *sint primi, & ponatur* e *metiri ipsum* c, *erit* e *ad* a *primum, adeoq;* e *&* a *tanquam primi in sua proportione erunt minimi. Proinde æquè metientur* b *&* f *eandem proportionem habentes,* e *ipsum* b *&* a *ipsum* f; *Et* e *metiens* b *&* c *faciet illos contra hypothesin compositos.*

α 9. ax.

β 19. VII.

γ 25. VII.

δ 23. VII.

ε 21. VII.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si duo numeri *a* & *b* primi inter se fuerint: Etiam ex uno *a* eorum genitus *ad* reliquum *b* primus erit.

A....B.....
C.....
D....

Sumto d *ipsi* a *æquali, erit* d *ad* b *primus. Quia ergò* a *&* d *ad* b *sunt primi, & erit* c *genitus ex* a *in* d, *id est, ex* a *in seipsum ad eundem* b *primus. Similiter ex* b *in se genitus ostenditur primus ad* a.

α 10. VII.

PRO-

PROPOS: XXX.

Theorema 28.

Si duo numeri *a b*, *b c* primi inter se fuerint: Etiam uterque simul *a c* ad quem libet illorum *a b* vel *b c* primus erit: & si uterque simul *a c* ad unum aliquem illorum *a b* primus fuerit; etiam qui in principio, *a b* & *b c*; numeri primi inter se erunt.



Si a c *ad* b c *non est primus, metiatur eos communis mensura* d. *Quia ergò* d *metitur* a c *totum & a* b *ablatum, etiam* d *metitur reliquum* b c. *Ideog;* a b, b c *contra hypothesin non sunt primi. Similiter si* a c *sit primus ad* a b, *dico etiam* a b, b c *esse primos inter se. Sin minus mensor communis* d *metiens* a b & b c, *etiam* a c *ex ipsis compositum* β *metietur. Ideog; contra hypothesin* a c a b *primi non erunt.*

α 1. ax.

β 2. ax.

Hinc patet Corollarium; Si numerus metitur duos numeros, metitur etiam ex illis compositũ.

Ut quia d *metitur* a b *&* b c *etiam metitur ex illis compositum* a c.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Omnis primus numerus *a* ad omnem numerum *b*, quem non metitur, primus est.

A.....B.....
C---

Sin minus, esto communis mensor c. c *ergo metiens* a *&* b *non potest esse idem cum* a, *qui non metitur* b. *Proinde cum alius numerus* c *metiatur ipsum* a, *non potest esse primus contra hypothesin.*

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 30.

Si duo numeri *a* & *b* sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem *c*: genitum *c* autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus *d*: is etiam unum eorum, *a* vel *b*, qui in principio metietur.

A.... B.....
C.....
D..E.....

Si d *non metiatur* a, *erunt* d *&* a *primi. Sint autem in* e *tot unitates, quotes* d *cõtinetur in* c. *Itaque* d *multiplicans* e *producit* c *ut &* a *multiplicans* b, *& eſt ut* d *ad* a, *ita* b *ad* e. *Cum* d *ad* a *ſit primus, ut ſupra patet,* β *erunt* d *&* a *in ſua proportione minimi, & aquè* γ *metientur ipſos* b *&* e. *Proinde ſi* d *non metitur ipſum* a, *metitur ipſum* b. *Idem inferretur de* a *ſi* d *non metiretur* b.

α 19. VII.
β 23. VII.
γ 21. VII.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Omnem compoſitum numerum α aliquis numerus metitur.

A.....
B..... C...

Si b *metiens* a *eſſet primus, pateret propoſitum. Sed cum ſit compoſitus, metitur ipſum* c, *qui vel primus, vel compoſitus eſt. Si primus, ipſe metiens* b *&* a *metitur etiam* a. *Sin compoſitus, alius ipſum metiens eſſet primus. Quia oportet*

α 11. axio.

nu-

tandem venire ad numerum primum nisi infinitè diminui numeros posse statuerimus.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 22.

Omnis *a* numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

C.....

Cum enim omnis numerus sit vel primus; aut vel compositus: compositum autem omnem metiatur primus. Igitur omnis numerus primus est, aut eum primus metitur. a 31. VII.

PROPOSITIO XXXV.

Problema 3.

Numeris datis quotcunque *a, b, c,* reperire minimos omnium, eandem rationem habentium cum ipsis *sive sit a ad b, ut b ad c, sive non.*

A..... B.... C.....

D..

E... F.. G...

H---. I---K---

L-----

O 2 si a

α 21. VII. β 3. VII. γ 1.5. VII.

Si a, b, c *essent primi, α pateret propositum. Si non primi, β inveniatur mensor eorum maximus* d, *qui ipsos* a, b, c, *metiatur per* e, f, g, *quos in eadem ratione minimos dico. Cum enim* e, f, g *multiplicantes eundem* d *producant* a, b, c, *eos in γ eadem ratione esse oportet. Si autem* e, f, g *negentur minimi, ipsis minores in eadem ratione sint* h, i, k, *qui ipsos* a, b, c *α aequè metientur per* l, *& vicissim* l *ipsos* a, b, c *per* h, i, k. *Ideoq; multiplicans* h, i, k *producit* a b c *& multiplicans* l *metitur* a b c *per* h i k. *Cum ergò eundem* a *producãt* e *primus multiplicans* d, *quartum; &* h *secundus multiplicans* l *tertium, δerit ut* e *primus, ad* h *secundum; ita* l *tertius, ad* d *quartum. Sed* e *major est quàm* h, *igitur & multiplicans* l *major est quàm* d; *adeoq; multiplicante ipsos* a, b, c, *non erit* d *communis maxima mensura contra hypothesin.*

δ 19. VII.

Hinc patet maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros in eadem proportione minimos.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 4.

Duobus numeris *a* & *b* datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum *c*.

A.... B.....
C.....
D.....
E----- F---

Si a & b *dati sunt primi, ex ipsorum inter se multiplicatione factus* c *est minimus omnium, quos* a & b *metiuntur. Cum enim* c *factus sit ex* a *in* b, *patet, quod* a *ipsum* c *per* b, & b *ipsum* c *per* a *metiantur. Si quis autem* c *neget etiam minimum metiantur* a & b *alium* d *minorem ipso* c, *per* e & f. *Cum ergò idem* d *fiat ex* a *primo in* e *quartum, & ex* b *secundo in* f *tertium,* ζ *erit ut* a *ad* b, *ita* f *ad* e; *adeoq;* a & b *tanquam primi & in sua proportione minimi æquè metientur ipsos* f & e. *Quoniam verò & multiplicans* b & e *facit* c & d, ε *erit* c *ad* d, *ut* b *ad* e: *ac propterea cum* b *metiatur ipsum* e, *metietur & ipsum* d, *major minorem. Quod absurdum.*

α 7. axio.
β 19. VII.
γ 23. VII.
δ 21. VII.
ε 17. VII.

A.... B.....
C.. D...
E.....
G---- H.---

Deinde dati numeri a & b *non sint primi:* ζ 35. VII.
& ζ *inveniantur* c, d *in eadem proportione mini-*

mi, & erunt 4 numeri proportionales, ex quorum primo a *& quarto* d ∈ *fiet idem* e *qui ex* b *secundo in* c *tertium; eritque factus* e *minimus quem* a *&* b *metiuntur. Cum enim* e *ex* a *in* d, *& ex* b *in* c *sit factus, utrumq;* a *&* b *ipsum* e *metiri constat. Si quis minimum eum esse negaverit, esto* f *minor ipso* e, *quem metiantur* a *&* b *per* g *&* h. *Cum ergò idem* f *fiat ex* a *primo in* g *quartum, &* b *secundo in* h *tertium.* ∃ *erit ut* a *ad* b *ita* h *ad* g, *adeoq;* c *&* d *minimi in proportione* a *ad* b, *vel* h *ad* g, *à metientur ipsos* h *&* g *eaquè. Quoniam verò* a *multiplicans* d *&* g *facit* e *&* f, ε *erit* e *ad* f, *ut* d *ad* g; *ac propterea cum* d *ipsum* g *metiatur, metietur &* e *ipsum* f, *major minorem. Quòd absurdum.*

Hinc patet Corollarium. Si duo numeri *a b* multiplicent minimos *c d* eandem rationem habentes, major *b* minorem *c*, & minor *a* majorem *d* producitur minimus *e*, quem illi metiuntur.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 33.

Si duo numeri *a b* numerum quempiam *c d* metiantur: Et jam minimus

minus e quem illi metiuntur *a, b*, eundem *c d* metietur.

A..B..
C.....F-----D
E.....

Sin minus, auferatur e *ex* c d *quoties potest, & relinquatur* f d *minor ipso* e. *Cum itaq; tum* a *quam* b *metiatur ipsum* e, *& ipsum* c f, *a metietur etiam tum* a *tum* b *ipsum* c f. *adeoq;* a *& b metientes & c d totum & c f ablatum, etiam & metientur reliquum* f d. *Sed* f d *est minor, quam* e. *Non igitur* e *est minimus quem* a *& b metiuntur, contra hypothesin.* a 11. axio. b 12. axio.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema 5.

Tribus numeris *a b c* datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum *d*.

A...B....C.....
D.....
E----------

a Invento d *minimo, quem* a *& b metiantur, eundem etiam vel metietur* c *vel non. Si metiatur, factum est quod jubebatur. Sig.* d *non sit minimus, minor ipso fiat* e, *quem* a b c *metiantur.* a 36. VII.

a d c, ita d ad e; Etiam ex æqualitate, in eadem ratione erunt *ut a ad c, ita d ad f.*

A..... D....
B..... E.....
C..... F..

Cum enim sit, ut a ad b ita e ad f, & erit numerus ex a in f genitus æqualis numero ex b in e.; Ita ex b in e facto æqualia erit ex c in d procreatus, cum sit, ut b ad c, ita d ad e; adeoque numerus ex a primo in f quartum productus, numero ex e secundo in d tertium genito æqualis erit. Quare ut a ad c ita d ad f. Quod ostendendum erat.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Primi inter se numeri *a* & *b* minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

A..... B....
C..... D...
E...

Sint minimi, sint c, d in eadem proportione ipsis

ipſis a, b *minores minimi* α. *Metietur ergò* c *ipſum* a, & d *ipſum* b *æquè*; c *videlicet ipſum* a *per tot unitates per quot* d *metitur ipſum* b. *Quæ unitates ſint in* e. *Cum ergò* c & d *metiantur* a & b *per* e *unitates*, β *metietur* e *ipſos* a & b *per unitates ipſorum* c & d. *Idem enim* e *per* c, *quod* c *per* e *efficit. Itaq;* a & b *contra hypotheſin non erunt primi, ſed compoſiti.* α 21. VII. β 25. VII.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Minimi *a b* numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

A.....B.....
D----E---

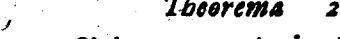
Sin minus, eſto communis ipſorum menſura c. *Itaq;* quoties e eſt in a & b *tot erunt unitates in* d & e. & c α *multiplicans* d & e *producit* a & b. *Proinde eſt* a *ad* b *ut* d *ad* e, *Adeoque cum* d & e *partes ipſorum* a & b *minores ſint*, a & b *non ſunt minimi in eadem ratione. Quod eſt contra hypotheſin.* α 9. IX. C 18. VII.

PRO-

PROPOS: XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri *a b* primi inter se fuerint; qui unum *a* eorum metitur numerus *c*, ad reliquum *b* primus erit.

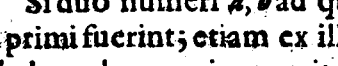


Sin minus, esto communis eorum mensura d *Quia ergò* d *metitur* c, *& ipsum* a, *etiam* d *a metitur* a. *Cumq; idem* d *metiatur etiam* b. *Non igitur* a *&* b *erunt inter se primi contra hypothesin.* ¶ 11. 8x.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Si duo numeri *a, b* ad quempiam *c* primi fuerint; etiam ex illis genitus *d* ad eundem *c* primus erit.



Sin minus esto communis ipsorum mensura e, *quæ*

quæ d *metiatur toties, quot in* f *sunt unitates. Itaq;* e *multiplicans* f *producit* d. *Sic* d *est factus ex* a *in* b. *Ergò cum ex* e *primo in* f *quartum fiat idem numerus* d, *qui ex* a *secundo in* b *tertiam,* β *erit ut* e *ad* a, *ita* b *ad* f. *Cum* α a & c *sint primi, & e ponatur metiri ipsum* c, γ *erit* e *ad* a *primum, adeoq;* δ e & a *tanquam primi in ſua proportione* ε *erunt minimi. Proinde æquè* ζ *metientur* b & f *eandem proportionem habentes,* e *ipsum* b & a *ipsum* f; *Et* e *metiens* b & c *faciet illos contra hypotheſin compoſitos.*

α 9. ax.
β 19. VII.
γ 25. VII.
δ 23. VII.
ε 21. VII.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Si duo numeri *a* & *b* primi inter ſe fuerint: Etiam ex uno *a* eorum genitus *a* ad reliquum *b* primus erit.

A....B.....;
C.....
D....

Sumto d *ipſi* a *æquali, erit* d *ad* b *primus. Quia ergò* a & d *ad* b *ſunt primi,* α *erit* c *genitus ex* a *in* d, *id eſt, ex* a *in ſeipſum ad eundem* b *primus. Similiter ex* b *in ſe genitus oſtenditur primus ad* a.

α 10. VII.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Theorema 26.

Si duo numeri *a* & *b* ad duos numeros *c* & *d*, uterque ad utrumque primi fuerint, qui ex eis *e* & *f* gignentur, primi inter se erunt.

A.... B...
E.....
C....D..
F.....

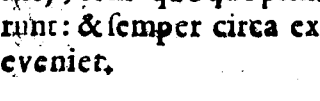
Ex a *in* b *fiat* c *&* ex e *in* d *fiat* f, *erunt* e *&* f, *inter se primi. Cum enim uterq;* a *&* b *ad* c *sit primus, genitus ex ipsis ad eundem* c *primus* a *erit; & ita etiam* e *ad* d *primus* a *erit. Quia ergò uterq;* c *&* d *ad* e *est primus, etiam* f *ex ipsis genitus ad* e *primus* a *erit.* 28. VII.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si duo *a* & *b* numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque seipsum fecerit aliquem, & genitus ex

ipſis *c* & *d* primi inter ſe erunt: Et ſi, qui in principio *a* & *b* genitos *c* & *d* ipſos multiplicantes, fecerint aliquos *e* & *f*; & hi quoque primi inter ſe erunt: & ſemper circa extremos hoc eveniet.



Cum enim a, b *ſint inter ſe primi, a erit* b *ex* a *in ſe factus ad reliquum* b *primus: Sic etiam* d *factus ex* b *in ſe erit ad* c *primus, quia* b & c *ſunt inter ſe primi, adeoq; duo facti* c d *inter ſe primi. Rurſus, quia* b & a *inter ſe ſunt primi, erit* & c *ex* a *in ſe factus, ad* b, & d *genitus ex* b *in ſe ad* a *primus: Eſt autem* & c *ad* d *primus. Vterq; igitur* a c *ad utrumq;* b d *primus* & *erit,* & e *factus ex* a *in* c *primus ad* f *factum ex* b *in* d. *Ita ſi ex* a *in* e *fiat* g, & *ex* b *in* f *fiat* h, & *erunt* g & h *primi. Item ſi ex* a *in* g & *ex* b *in* h *fiant* i & k, *erunt* & *ipſi primi; idemq; circa extremos ſemper eveniet.*

PRO-

PROPOS. XXX.

Theorema 28.

Si duo numeri *a b*, *b c* primi inter se fuerint: Etiam uterque simul *a c* ad quem libet illorum *a b* vel *b c* primus erit: & si uterque simul *a c* ad unum aliquem illorum *a b* primus fuerit; etiam qui in principio, *a b* & *b c*, numeri primi inter se erunt.

A..... B.....C
D.---

Si a c *ad* b c *non est primus, metiatur eos communis mensura* d. *Quia ergò* d *metitur* a c *totum & a* b *ablatum, etiam a metitur reliquum* b c. *Ideoq;* a b, b c *contra hypothesin non sunt primi. Similiter si* a c *sit primus ad* a b, *dico etiam* a b, b c *esse primos inter se. Sin minus mensor communis* d *metiens* a b *&* bc, *etiam* a c *ex ipsis compositum* β *metietur. Ideoq; contra hypothesin* a c a b *primi non erunt.*

Hinc patet Corollarium; Si numerus metitur duos numeros, metitur etiam ex illis compositũ.

Vt

Ut quia d *metitur* a b *&* b c *etiam metitur ex illis compositum* a c.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Omnis primus numerus *a* ad omnem numerum *b*, quem non metitur, primus est.

A.....B.....
C---

Sin minus, esto communis mensor c. c *ergo metiens* a *&* b *non potest esse idem cum* a, *qui non metitur* b. *Proinde cum alius numerus* c *metiatur ipsum* a, *non potest esse primus contra hypothesin.*

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 30.

Si duo numeri *a* & *b* sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem *c*: genitum *c* autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus *d*: is etiam unum eorum, *a* vel *b*, qui in principio metietur.

A.... B.....
C.....
D..E.....

Si d *non metiatur* a, *erunt* d & a *primi. Sint autem in* e *tot unitates, quoties* d *cõtinetur in* c. *Itaque* d *multiplicans* e *producit* c *ut* & a *multiplicans* b, *& est ut* d *ad* a, *ita* b *ad* e. *Cumq;* d *ad* a *sit primus, ut supra patet,* β *erunt* d & a *in sua proportione minimi, & aquè* γ *metientur ipsos* b & e. *Proinde si* d *non metitur ipsum* a, *metitur ipsum* b. *Idem inferretur de* a *si* d *non metiretur* b.

α 19. VII.
β 23. VII.
γ 21. VII.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Omnem compositum numerum α aliquis numerus metitur.

A.....
B..... C...

Si b *metiens* a *esset primus, pateret propositum. Sed cum sit compositus, metitur ipsum* c, *qui vel primus, vel compositus est. Si primus, ipse metiens* b & a *metitur etiam* a. *Sin compositus, alius ipsum metiens esset primus. Quia oportet*

α 11. aut 10.

eun-

mandem venire ad numerum primum nisi infinitè diminui numeros posse statuerimus.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 22.

Omnis *a* numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

C.....

Cum enim omnis numerus sit vel primus; ea vel compositus: compositum autem omnem metiatur primus. Igitur omnis numerus primus vel, aut eum primus metitur. a 31. VII.

PROPOSITIO XXXV.

Problema 3.

Numeris datis quotcunque *a, b, c,* reperire minimos omnium, eandem rationem habentium cum ipsis *sive sit a ad b, ut b ad c, sive non.*

A..... B.... C.....

D..

E... F.. G...

H---. I---- K----

L-----

α 21. VII. β 3. VII. γ 1. 5. VII.

Si a, b, c *essent primi, α pateret propositum. Si non primi, β inveniatur mensor eorum maximus* d, *qui ipsos* a, b, c, *metiatur per* e, f, g, *quos in eadem ratione minimos dico. Cum enim* e, f, g *multiplicantes eundem* d *producant* a, b, c, *eos in γ eadem ratione esse oportet. Si autem* e, f, g *negentur minimi, ipsis minores in eadem ratione sint* h, i, k, *qui ipsos* a, b, c *α aequè metientur per* l, *& vicissim* l *ipsos* a, b, c *per* h, i k. *Ideoq; l multiplicans* h, i, k *producit* a b c *& l metitur* a b c *per* h i k. *Cum ergò eundem* a *producat* e *primus multiplicans* d, *quartum; & h secundus multiplicans* l *tertium, erit ut* e *primus, ad* h *secundum; ita* l *tertius, ad* d *quartum. Sed* e *major,* δ 19. VII. *est quàm* h, *igitur & l major est quàm* d; *adeoq; l metiente ipsos* a, b, c, *non erit* d *communis maxima mensura contra hypothesin.*

Hinc patet maximam mensuram quotlibet numerorum metiri ipsos per numeros in eadem proportione minimos.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 4.

Duobus numeris *a* & *b* datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum c.

A.... B.....
C.....
D.....
E----- F----

Si a & b *dati sunt primi, ex ipsorum inter se multiplicatione factus* c *est minimus omnium, quos* a & b *metiuntur. Cum enim* c *factus sit ex* a *in* b, *patet, quod* a *ipsum* c *per* b, & b *ipsum* c *per* a *quoque metiantur. Si quis autem* c *neget etiam minimum, metiantur* a & b *alium* d *minorem ipso* c, *per* e & f. *Cum ergò idem* d *fiat ex* a *primo in* e *quartum, & ex* b *secundo in* f *tertium, erit ut* a *ad* b, *ita* f *ad* e; *adeoq;* a & b *tanquam primi & in sua proportione minimi æquè metientur ipsos* f & e. *Quoniam verò & multiplicans* b & e *facit* c & d, *erit* c *ad* d, *ut* b *ad* e: *ac propterea cum* b *metiatur ipsum* e, *metietur & ipsum* d, *major minorem. Quod absurdum.*

α 7. axio.
β 19. VII.
γ 23. VII.
δ 21. VII.
ε 17. VII.

A.... B.....
C.. D...
E.....
G---- H.---

Deinde dati numeri a & b *non sint primi:* & *inveniantur* c, d *in eadem proportione minimi,*

ζ 35. VII.

mi, & erunt 4 numeri proportionales, ex quorum primo a *& quarto* d *fiet idem* e *qui ex* b *secundo in* c *tertium; eritque factus* e *minimus quem* a *&* b *metiuntur. Cum enim* e *ex* a *in* d, *& ex* b *in* c *sit factus, utrumq;* a *&* b *ipsum* e *metiri constat. Si quis minimum eum esse negaverit, esto* f *minor ipso* e, *quem metiantur* a *&* b *per* g *&* h. *Cum ergo idem* f *fiat ex* a *primo in* g *quartum, &* b *secundo in* h *tertium. erit ut* a *ad* b *ita* h *ad* g, *adeoq;* c *&* d *minimi in proportione* a *ad* b, *vel* h *ad* g, *& metientur ipsos* h *&* g *aquè. Quoniam verò* a *multiplicans* d *&* g *facit* e *&* f, *e erit* e *ad* f, *ut* d *ad* g; *ac propterea cum* d *ipsum* g *metiatur, metietur &* e *ipsum* f, *major minorem. Quòd absurdum.*

Hinc patet Corollarium. Si duo numeri *a b* multiplicent minimos *c d* eandem rationem habentes, major *b* minorem *e*, & minor *a* majorem *d* producitur minimus *e*, quem illi metiuntur.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 33.

Si duo numeri *a b* numerum quempiam *c d* metiantur: Et jam minimus

nimus *e* quem illi metiuntur *a, b*, eundem *c d* metietur.

A..B..
C.....F----D
E.....

Sin minus, auferatur e *ex* c d *quoties poterit, & relinquatur* f d *minor ipso* e. *Cum itaq; tum* a *quam* b *metiatur ipsum* e, *&* e *ipsum* c f, *a metietur etiam tum* a *tum* b *ipsum* c f. *adeoq;* a *&* b *metientes &* c d *totum &* c f *ablatum, etiam & metientur reliquum* f d. *Sed* f d *est minor, quam* e. *Non igitur* e *est minimus quem* a *&* b *metiuntur, contra hypothesin.*

a 11. axio. & 12. axio.

PROPOSITIO XXXVIII.

Problema 5.

Tribus numeris *a b c* datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum *d*.

A...B....C.....
D.....
E.....

a Invento d *minimo, quem* a *&* b *metiantur, eundem etiam vel metietur* c *vel non. Si metiatur, factum est quod jubebatur. Sig* d *non sit minimus, minor ipso fiat* e, *quem* a b c *metiantur.*

a 36. VII.

β 37. VII. *Quoniam igitur* a & b *metiuntur* e, & d *est minimus, quem* a & b *metiuntur*, β *metietur quoq;* d *ipsum* e *major minorem. Quod est absurdum.*

A. . B. . . C. . . .
D. . . . .
E. . . . . .
F. . . . . .

Deinde, *si* c *non metiatur ipsum* d, & *inuento* e *minimo, quem* c & d *metiantur, erit* e *numerus minimus, quem* a, b, c *metiuntur. Cum enim* a & b *metiantur ipsum* d, & d *ipsum* e,
γ 11. VII. *etiam* a & b *ipsum* e γ *metientur, metitur autem* & c *eundem* e. *Ergò omnes* a, b, c *ipsum* e *metiuntur.*

Si c *non esset minimus, minor ipso sit* f *quem* a, b, c *metiantur. Quia igitur* a & b *ipsum* f *metiuntur*, β *metietur etiam eundem* f *numerus* d, *adeoq; cum* c & d *metiantur ipsum* f *minorem, quàm* e, *non erit* e *minimus, quem* c & d *metiuntur. Quod est contra hypothesin.*

Hinc nascitur Corollarium: Si tres *a, b, c,* numeri numerum quempiam *f* metiantur, etiam minimum *e*, quem illi metiuntur, eundem *f* metiri.

In ultima enim parte demonstrationis ostensum

sum est ex eo, quod a, b, c *ponebantur metiri ipsum* f; *etiam* e *minimum, quem* a, b, c *metiuntur, eundem* f *metiri.*

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si numerum *a* numerus *b* quispiam metiatur; ille *a*, quem metitur, partem habebit à dimetiente *b* denominatam.

A.....
B....C...

Quoties b *metitur* a, *tot sint in* c *unitates. Quia ergò* b *ipsum* a *metitur per unitates ipsum* c, *idem* c *α metietur* a *per unitates* b. *Itaq; unitas toties metitur* b, *quoties* c *ipsum* a. *Sed unitas* β *metitur* b *per partem à* b *denominatam; Ergò &* c *metitur* a *per partem à metiente* b *denominatam. Quod erat propositum.*

α 15. VII.
β 23. def. VII.

PROPOS: XL.

Theorema 35.

Si numerus *a* partem *b* habuerit

quamlibet; metietur illum *a* numerus *c* à parte *b* denominatus.

A.....
B...C....

Cum enim pars b *denominetur à* c; *sit autem & unitas pars ipsius* c, *ab eodem* c *denominata*; *metietur unitas ipsum* c *&* b *ipsum* a *æque. Vicissim ergò & unitas ipsum* b; *&* c *ipsum* a *α metietur.*

α 3. VII.

PROPOSITIO XLI.

Problema 9.

Numerum *g* reperire, qui minimus cum sit, habeat partes datas *a b c.*

D.. A secunda
E... B tertia.
F... C quarta
G.....
H---------

Numeri à partibus a, b, c *denominati sint* d, e, f, *qui minimum suum* g *α metiantur. Erit hic minimus partes datas continens. Partes quidem habet: Cum enim* d, e, f *ipsum* g *metiantur, β habebit* g *partes à* d, e, f *denominatas, hoc est,* a, b, c, *quæ à* d, e, f *denominantur. Si autem minimus non sit, erit* h *minor habeas eosdem partes*

α 38. VII.
β 39. VII.
γ 40. VII.

a, b, c.

a, b, c. *Has ergò cum habeat, γ metientur ipſum* d, e, f *numeri, à partibus illis denominati; adeoq; cum* h *ſit minor, non erit* g *minimus quem* d, e, f *metientur contra hypotheſin.*

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER VII.

PROPOS: I.

Theorema 1.

SI fuerint quotcunque numeri *a, b, c, d,* deinceps proportionales, extremi verò *a* & *d* ipſorum primi inter ſe fuerint, [1]ipſi minimi ſunt omnium, eandem cum eis rationem habentium.

Sin

A..... E....
B..... F....
C..... G....
D..... H....

Sin minus, sint in eadem ratione minores e f g h. *Quod ergò ipſis* a, b, c, d *bini & in eadem*
α 14. VII. *ratione ſumti ſunt alij* e, f, g, h *multitudine e-*
β 23. VII. *quales, ex æquali* α *erit, ut* a *ad* d, *ita* e *ad* h. *Sed*
γ 21. VII. a *&* d *ſunt in ſua ratione* ξ *minimi quia primi. Ergò tam* a *ipſum* e, *quàm* d *ipſum* h γ *aquè metietur, major minorem. Quod abſurdum.*

PROPOSITIO II.

Problema I.

Numeros *e de* reperire deineeps proportionales minimos, quotcunque jusſerit quiſpiam in data ratione *a ad b.*

A, 2.	C. 4.	F, 8.	K, 16.
B, 3.	D, 6.	G 12.	L, 24.
	E, 9.	H, 18.	M, 36.
		I, 27.	N, 54.
			O, 81.

Tres

Tres ita inveniuntur a multiplicans seipsum & b; producit c & d; b in se tertium e. Quia ergò ex a in a & b facti sunt c & d. α *ergò est, ut a ad b, ita c ad d. Ita cum d & e sint ex b in a & b erit, ut a ad b, ita d ad e. Sunt itaq; continuè proportionales in ratione a ad b, Sed minim etiam sunt in ratione eadem Quia enim extremi c & e facti sunt ex* β *primis a & b in seipsos etiam c, e* γ *erunt inter se primi & in eadem ratione minimi. Iam ex a in inventos c, d, e fiant f, g, h & ex b in ultimum e fiat i. Erunt quatuor f, g, h, i in ratione data minimi. Quia enim f, g, h, ex a in c, d, e, sunt facti* δ *retinent eandem rationem; & quia a & b multiplicantes e fecerunt h & i, erunt etiam h i in ratione a ad b. Sunt verò etiam minimi ex modò data ratione. Non aliter ex a in f, g, h. i fiunt k, l, m, n, & ex b in l ultimus o, ut sint quinq; continuè proportionales in ratione a, b proposita. Ita consequenter quotcunq; sex, 7, 8 vel 9. & c. continuè proportionales in ratione proposita possunt inveniri. Hinc sequuntur Corollaria.*

α 17. VII.

β 24. VII.

γ 29. VII.

δ 1. IIX.

ε 18. VII.

Corollarium 1.

Si tres minimi numeri sint continuè proportionales, extremi erunt quadrati: Si autem quatuor fuerint, cubi. Quia extremi illi trium fiunt

ex

ex ductu *a* & *b* in se: Extremi verò ipsorum quatuor fiunt ex ductu radicum *a* & *b* in quadratos *c* & *f*. Quare *fS* necessùm est esse cubos.

Corollarium 2.

Extremi numeri quotcunque proportionalium, ex hujus proportionis sensu inventorum in data ratione minimorū, inter se sunt primi. Hoc patet ex multiplicatione, qua numeri proportionales producuntur ex 29. VII.

Corollarium 3.

Duo numeri minimi in data ratione metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione. Producuntur enim ex illorum multiplicatione in alios numeros.

PROPOS. III.

Theorema 2.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales *a*, *b*, *c*, *d*. minimi omnium eandem cum eis rationem

nem

habentium; illorum extremi *a d*, sunt inter se primi.

A, 8.			K, 8.
B, 12.	E, 2.	G, 4.	L, 12.
C, 18.	F, 3.	H, 6.	M, 18.
D, 27.		I, 9.	N, 27.

Inventis duobus in data ratione a *ad* b *vel* b *ad* c, *vel* c *ad* d. *minimis* e, f. *& in eadem ratione* e *ad* f *tribus minimis* g, h, i, *& quatuor ejusdem rationis* k l, m, n, *& ita si opus foret, etiam quinq; vel sex; donec respondeant multitudine initio propositis* a; b, c, d. *Quoniam ergo & a, b, c, d, & k, l, m, n, sunt minimi in data ratione, oportet ut singuli singulis sint æquales,* a *ipsi* k *&* d *ipsi* n. *Cum q;* k *&* n β *sint inter se primi, etiam* a d *inter se primi erunt.* a 2. IIX. β 2. cor. 21 IIX.

PROPOSITIO VI.

Problema 2.

Rationibus datis quotcunque *a ad b, c ad* in minimis numeris, reperire numeros *f, e, g*, deinceps minimos in datis rationibus.

Pro

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ---- K . --- L ---.

α 36. VII. *Pro tribus a inveniatur* e *minimus, quem* b *secundus &* c *tertius metiantur: & quoties* b *metitur* e, *toties* a *ipsum* f, *& quoties* c *eundem* e, *toties* d *metiatur* g. *Erunt* f, e, g *continuè proportionales in rationibus datis. Quia enim* a *&* b *ipsos* f *&* e *aque metiuntur, per eundem* h, *etiam* a *&* b *multiplicantes* h *producunt* f *&* e: *&* ℄ *est, ut* a *ad* b, *ita* f *ad* e. *Ita cum* c *&* d
β 18. VII. *aque metiantur ipsos* e *&* g ℄ *erit etiam, ut* c *ad* d, *ita* e *ad* g; *adeoq;* f, e, g *in rationibus* a *ad* b *&* c *ad* d *sunt continuè proportionales.*

γ 21. VII. *Quod si ijdem negentur esse minimi, minores sint* i, k, l. *Quia ergo* a *&* b *sunt minimi, in sua ratione,* γ *aque metientur ipsos* i *&* k, *in eadem ratione constitutos consequens* b *ipsum* k, *consequentem: Sic etiam* c *&* d *ipsos* k *&* l, *antecedens* c *antecedentem* k. *Ita q;* cum b *&* c *metiantur ipsum* k, *minimus* e *quem* b *&* c *me-*
δ 37. VII. *tiuntur, eundem* k, *major minorem* δ *metietur. Quod absurdum.*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.

Deinde

Deinde trium rationum daturum a ad b, c ad d, e ad f quatuor minimi deinceps proportionales inveniantur. Primò quidem g a minimus, quem b & c metiuntur, & simul h & k ut prius. Quod si e metiatur ipsum i, toties etiam f metiatur k, erunt g, h, g, i, k minimi in rationibus datis ijsdem fundamentis ut prius.

A, 6. B, 5 C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.

Si e non metiatur i, a invento minimo k, quem e & i metiantur, quoties i ipsum k, g ipsum l & h ipsum m; & quoties e ipsum k, toties f ipsum n metiatur. Erunt m, l, k, n minimi in rationibus datis ex eadem demonstratione.

Denig; 4 rationum daturum in numeris minimis inveniuntur quing; directè proportionales, expeditis primum, juxta præcedentem modum, quæ pro quatuor erant facienda; & denig. cum ratione quarta s ad t fiat, ut antea cum tertia. Ut in exemplis patet, in quorum priore s metitur n; in posteriore non.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 4. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105 O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48 L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

PROPOSITIO V.

Theorema 3.

Plani numeri *a* & *b* rationem inter se habent ex lateribus compositam *c ad e, & d ad f; vel ex c ad f, & d ad e.*

A, 24. B, 48.
G, 18.
C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. F, 3.

Et multiplicatione d *in* e *fiat* g. *Cum ergò* d *multiplicans* c *& e producat* a *&* g, *a erit* a *ad* g, *ut* c *ad* e; *&* g *ad* b, *ut* d *ad* f, *quia* c *in* d *&* f *illos producit. Sunt ergo deinceps proportionales* a, g, b *in laterum* c *ad* e, *&* d *ad* f *proportionibus. Sed ratio* a *ad* b *componitur ex rationibus* a *ad* g, *&* g *ad* b, *ergò & ex rationibus laterum* c *ad* e, *&* d *ad* f. *Eodem modo ostenditur* a *ad* b *ratio composita ex rationibus* c *ad* f, *&* d *ad* e.

α 17. VII.

ζ 27. def. VII.

PRO-

PROPOS. VI.

Theorema 4.

Si sint quotcunque numeri *a, b, c, d, e*, deinceps proportionales, primus, *a* autem secundum *b* non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

A, 16. B, 24 C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

Quia enim eadem duorum proximorum sunt rationes, patet, si primus secundum non metiatur, quod nec secundus tertium & hic quartum, & hic quintum possit metiri. Quod verò nec quisquam quemquam reliquorum metiatur, ita patet: α Sumtis enim f, g, h *minimis in* α 2. VIII.
a, *ad* b *ratione; erit ex aequo, ut* a *ad* c, *ita* f *ad* h, *Cumq; sit etiam ut* a *ad* b, *ita* f *ad* g, *Ergò* f *non* e *&* a *non metiatur* b; *Ergo nec* f *metiatur* g; *& proinde non est unitas. Quare cum* f *&* h β *sint primi,* f *non metitur* h, *adeoq; nec* a *ipsum* c. β 1. VIII.
Quod ipsum de reliquis etiam demonstratur.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Si sint quotcunq; numeri *a, b, c, d, e*

deinceps proportionales, primus autem *a* extremum *e* metiatur; is *a* etiam metietur secundum *b*.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

a 6. VIII. *Si enim a non metiretur b neq; a metiretur aliorum quenquam, atq; ita nec a ipsum e, contra hypothesin.*

PROPOSITIO IIX.

Theorema 6.

Si inter duos numeros *a*, *b*, medii *c*, *d* continua proportione ceciderint; quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios *e*, *f* eandem cum illis habentes rationem medii, *l*, *m*, continua proportione cadent.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27 H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

α *Sumtis enim totidem* g, h, i, k *in ratione* a *ad* c *minimis, ex æquo est, ut* a *ad* b, & e *ad* f, *ita* g *ad* k. *Cum* g, g & k *inter se sint primi tanquam extremi minimorum & in sua ratione* β *minimi,* γ *aquè metientur,* g *ipsum* e, & k *ipsum* f. *Quoties autem* g & k, *metiuntur* e & f, *toties metiantur* h & i *alios* l & m. *Itaq; cum* g, h, i, k. *per eundem numerum metiantur* e, l, m, f, *erunt hi producti ab illo numero* δ *in* g, h, i, k, *in eadem cum ipsis ratione. Sunt autem* g, h, i, k *continuè proportionales. Ergò &* e, l, m, f. *Et cum multitudine sint pares numeris* a, c, d, b, *cadent tot medij inter* e f, *quot inter* a b.

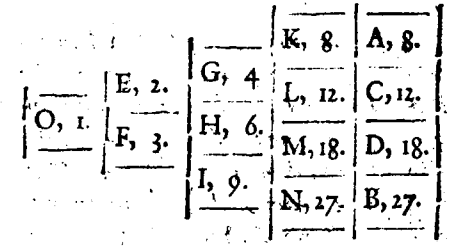
α 2. VII.
β 23. VII.
γ 21. VII.
δ 18. VII.

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Si duo numeri *a, b* sint inter se primi, & inter eos medii, *c, d,* conti-

nua proportione cecíderint numeri; quot inter eos medii continua proportione cadũt numeri, totidem & inter utrumq; eorum *a* & *b*, ac unitatem *g*, medii *e g*, & *f i* continua proportione cadent.



α 2. VIII. *Imentis* e, f *in ratione* a *ad* c *minimis, a sumantur in eadem ratione tres* g, h, i *& quatuor* k, l, m, n *vel plures, dum multitudine æquales fiant initio positis* a, c, d, b. *Itaq; cum* a b *sint primi,* β *erunt* a, c, d, b *minimi in ratione* e *ad* f; *sine verò &* k, l, m, n *in eadem ratione minimi; erunt ipsis* a, c, d, b *æquales, singuli singulis. Cæterum quia* e *multiplicans seipsum produxit* g; *multiplicans verò ipsum* g *facit* k; γ *metietur* e *ipsum* g *per* e, *&* g *ipsum* k *per eundem* e. δ *Metitur verò &* o *ipsum* e *per* e. *Æquè igitur metitur* o *ipsum* e, *&* e *ipsum* g, *&* g *ipsum* k. *Ideoq; eadem pars erit* o *ipsius* e, *&* e *ipsius* g, *&* g *ipsius* k; *ad hoc, ε proportionales deinceps* o, e, g, k; *Perinde*

β 1. VIII.

γ 7. axio.

δ 5. axio.

ε 20. def. VII.

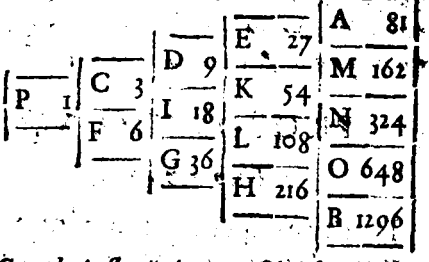
ut

ut & o, f, i, n. Cum 3 *& o, e, g, k,* 4 *& o, f, i, n sint multitudine æquales ipsis k, l, m, n vel a, b, c, d cadent tot medij continuè proportionales inter o, k vel o, a, ac inter o, n vel b, o, quot inter a, b.*

PROPOS. X.

Theorema 8.

Si inter duos numeros *a, b* & unitatem *p* continuè proportionales ceciderint numeri *c d e;* quot inter utrumque ipsorum *a vel b,* & unitatem *p* deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos *a & b* medii, *m, n, o* continua proportione cadent.



a Completis ſpatijs intermedijs i, k *&* h, m, n *&* o, *ut* i *fiat ex* c *in* F; k l *ex* c *in* i, g, m, n, o *& 2. VIII. ex* c *in* k, l, h. *Cum ergò ſit ut* p *ad* c, *ita* c *ad* d, *&* d *ad* e, *&* e *ad* a, *ꝑ æquè* p *multetur ipſum*

c, & c ipſum d, & ſic deinceps. Sed d metitur e per c: Ergo & c ipſum d, & d ipſum e, & e ipſum a per c metietur. γ Quare c multiplicãs ſeipſum fecit d, multiplicans d fecit e, & multiplicans e fecit a. Idemq; de f, g, h, b eſt ſtatuendum. Proinde, cum c multiplicans c & f, faciat d & i, δ erit ut c ad f, ita d ad i; itemq;, ut c ad f, ita i ad g. Sunt ergo d i g continuè proportionales in ratione, c ad f. Rurſus & e, k, l, h ſunt continuè proportionales: quia enim c in d, i, g fecit e, k, l ejuſdem δ erunt e k l rationis cujus d i g, id eſt, c ad f; itemq; & c & f in g fecerint l & h; erit, ut c ad f, ita l ad h. Eodemq; modo continuè proportionales oſtenduntur a, m, n, o, b in ratione c ad f, quia ex c in e k, l, h fiunt a, m, n, o, & ex c & f in h, fiunt o & b. Tot itaque medij proportionales inter a & b cadent, quot inter a vel b & unitatem p, quia multitudine conveniunt.

γ 9. axio.

δ 18. VII.

PROPOSITIO XI.

Theorema 9.

Duorum quadratorum numerorum *a* & *b*, unus *c* medius proportionalis eſt numerus; & Quadratus *a* ad Quadratum *b* duplicatam habet lateris *c* ad latus *b* rationem.

A, 9. E, 21, B, 49.
C, 3. D, 7.

Ex c in d fiat e: & erit, ut c ad d, ita a ad e & c ad b, adeoq; tres continuè proportionales in ratione c ad d, caditq; inter a & b medium proportionalis e. Cum verò a ad b habeat rationem, & duplicatam ejus, quam a ad e, habet quoq; duplicatam a quadratus ad b quadratum ejus, quam c latus, ad d latus, quod eadem hic sit ratio, quæ ibi. α 17. VII. β 16. def. VII.

PROPOS: XII.

Theorema 10.

Duorum cuborum numerorum *a* & *b*, duo medij proportionales sunt numeri, *h*, *i*, & cubus *a* ad cubum *b* triplicatam lateris *c* ad latus *d* habet rationem.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

Compleantur spacia e, g, f, & h, i, ut in 10. hujus fiebat. Et erunt c, g f, tres continuè proportionales in ratione c ad d, ut & a, h, i, b, α 17. VII.

quatuor; cadent g, inter cubos a, b *duo medij;*
C 26. def. VIIIr *Cum verò primus* a *ad quartum* b *habeat rationem triplicatam ejus quam primus* a *ad* h *secundum; habebit etiam* a *cubus, ad* b *cubum, rationem triplicatam, laterum* c *ad* d, *cum* a *ad* h *sit, ut* c *ad* d.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 11.

Si sint quotlibet numeri *a, b, c* deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, faciat aliquos *d, e, f;* qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri, *a b c*, primùm positi multiplicantes jam factos *d, e, f*, fecerint aliquos *g, h, k* ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circà extremos hoc eveniet.

| A, 2. | B, 4. | C, 8. |

| D, 4. | N, 8. | E, 16. | O 32. F, | 64. |

G, 8: | P, 16 | Q, 32. | H. 64. | R. 128. | S, 256. | I, 512.

K, 16 | T, 32, V 64, X, 128 | L 256 | Y 512 | Z. 1024 | 22048 m, 4096

Ex

Ex a *in* b *fiant* n, *&* o *ex* b *in* c: *Fiant item* p, q *ex* a *in* n, o; & r, s, *ex* b *in* o, f: *Item* t, u, x, *ex* a *in* p, q, b; *&* y, z, a *ex* b *in* r, s, i. *Cum ergò* a *multiplicans seipsum &* b *fecerit* a *&* n; a *Erit, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* n: *Ita, cum* n *&* e *sint ex* b *in se &* a; *erit etiam, ut* a *ad* b, *ita* n *ad* e; *&* *ita* d, n, e *continuè proportionales sunt in ratione* a *ad* b. *Proportionales etiam sunt continuè* e, o, f, *quia ex* b *in se &* in c *fieret* e *&* o; *ex* c *in se &* in b *fiant* o *&* f, *ejusdem rationis cum* b, c, *id est, cum* a, b. *Quoniam ergò* d, n, e, *&* e, o, f *sunt in eadem ratione continuè proportionales, ex æquo erit, ut* d *ad* e; *ita* e *ad* f; *&* *ita* d, e, f *continuè proportionales erunt.* *Deinde in eadem ratione continuè proportionales sunt* g, p, q, h, *cum* g, p, q *fiant ex* a *in* d, n, e; *&* *ex* a, b *in* e *fiant* q *&* h: *Similiter &* h, r, s, i, *cum* h, r, s, *fiant ex* b *in* e, o, f, *&* s, i *ex* b, c *in* f. *Est ergò ex æquo ut* g *ad* h, *ita* h *ad* i. a 17. VII.

Eodemq; modò k, l, m, *continuè demonstrantur proportionales.*

PROPOS. XIV.

Theorema 12.

Si Quadratus numerus a Quadra-

dratum numerum *b* metiatur: & latus *c* unius *a* metietur latus *d*, alterius *b*. Et, si unius Quadrati *a* latus *c* metiatur latus *d* alterius *b*: & Quadratus *a* Quadratum *b* metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

Fiat e ex c ind. *α Erunt* a a e b, *continè proportionales in ratione* c *ad* d. *Cumq;* a *primus* b *tertium metiatur,* β *metietur etiam* e *medium. Ideoq;, cum sit, ut* a *ad* e, *ita* c *ad* d, β *metietur etiam latus* c *latus* d. *Rursus, si latus* c *metiatur latus* d, *metietur etiam quadratus* a *quadratum* b, *cum in eadem ratione continuè* α *proportionalibus existentibus* a, e, b; a *ipsum* e *aquè* ζ *metietur, atq;* c *ipsum* d, & *ita* η *etiam* a *quadratus* b *quadratum.*

α n. IIX.
β 7. IIX.

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si cubus numerus *a* cubum numerum *b* metiatur; & latus *c* unius *a* metietur latus *d* alterius *b*. Et si latus *c* unius *a* cubilatus *d* alterius *b* meti-

metiatur; & cubus *a* cubum *b* metietur.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

Completis iterum ſpacijs e,g,f, & h,i *ut in 10. huius factum eſt.* α *Erunt &* e,g,f & *a*,h, i, b *continuè proportionales. Cumq; a primus metiatur extremum* b, *& metietur etiam ſecundum* h *& propter eandem rationem latus* c *quoq;* d *latus metietur. Rurſus ſi* c *latus metiatur latus* d *metietur etiam cubus* a *cubum* b. *Continuè enim exiſtentibus proportionalibus* a,h,i,b *in ratione* c *ad* d, *aque metietur* c *ipſum* d, *&* a *ipſum* h, *& ſic etiam extremum* b, *cubus cubum.*

α 12. VIII.
β 7. VIII.

PROPOS. XVI.

Theorema 14.

Si Quadratus numerus *a* Quadratum numerum *b* non metiatur; neque latus *c* unius *a* metietur alterius *b* latus *d*. Et ſi latus β *c* unius *a* quadrati non metiatur latus *d* alterius

us *d*, neque quadratus *a* quadratum *b* metietur.

A, 16. B, 81.
C. 4. D, 9.

Si Clatus metiretur latus d, *etiam a quadra-*
a 14. IIX. *tus* c, *a metiretur quadratã* b *contra hypothe-*
sin. Et contra, si quadratus a quadratũ b *meti-*
retur, etiam c *latus* d; *itidem contra hypothesin.*

PROPOSITIO. XVII.

Theorema 15.

Si cubus numerus *a* cubum numerum *b* non metiatur: neq; latus *c* unius *a* latus *d* alterius *b* metietur. Et si latus *c* cubi unius *a* latus *d* alterius *b* non metiatur: neq; cubus *a* cubum *b* metietur.

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

Si enim latus c, *metiretur latus* d, *etiam a*
a 15. IIX. *metiretur* a *cubus Cubum* b *contra hypothesin*
Et contra, si cubus a *cubum* b *metiretur*; *etiam*
latus c *latus* d *metiretur, itidẽ contra hypothesin.*

PROPOSITIO XIIX.

Theorema 16.

Duorum similium planorum numerorum *a* & *b* unus *g* medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris ho-

mo

mologi c *vel* d ad latus homologum e *vel* f rationem.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 8. E, 9. F, 3.

Fiat g ex d in e. *Cum sit ut* c ad d, *ita* e ad f, *erit permutando* c ad e, *ut* d ad f. *Cum ergo* d *multiplicans* c & e *producat* a & g, *erit* a ad g, *ut* c ad e. *Sic etiam erit* g ad b, *ut* d ad f, *quia* e *multiplicans* d & f *producit* g & b. *Itaq; a, g, b sunt proportionales in rationibus* c ad e & d ad f, *adeoq; inter* a & b *cadit* g *medius proportionalis. Et quia proportionales sunt* a, g, b, *habebit* a ad b *rationem duplicatam ejus, quam* a ad g, *i. e.* c ad e *vel* d ad f. *Itaq; planus* a ad *planum* b *duplicatam habet rationem laterum homologorum.* a 17. IIX.

PROPOS. XIX.

Theorema 17.

Duorum similium solidorum numerorum *a, b* duo *m, n* medij proportionales sunt numeri: Et solidus *a* ad solidum *b* triplicatam habet rationem lateris homologi *c vel* d *vel* e ad latus homologum f *vel* g, *vel* h.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C. 2. D, 3. E. 4. F. 5. G, 6. H. 10.

Fiat i ex c in d, & k ex f in g, & l ex d in f. & m, n ex e, h in l. *Cum ipsis* f, g, h *proportionales sint* c, d, e, *etiam permutando proportionales erunt, ut* c ad f, *ita* d ad g & e ad h. *Et quia* d *multiplicans* c & f *producit* i & l, *erit, ut* c a 17. IIX.

ad f, ita i ad l: & ut d ad g, ita l ad k; quia l & k fiunt ex f in d, g, adeoq; i, l, k sunt continuè proportionales in ratione c ad f, vel d ad g. Quia verò a solidus factus est ex c, d, e lateribus, & i ex c in d, fit, ut e multiplicans i, faciat a. Ita cum b solidus sit factus ex f, g, h lateribus, k verò ex f in g, fit ut b solidum faciat, h multiplicans k

C 18. VII. *Quare cum e multiplicans i, l fecerit a, m; erit a ad m ut i ad l, id est, ut c ad f, vel d ad g, vel e ad h; Sic etiam n ad b, ut l ad k, id est, ut c ad f; cum h multiplicans l, k, fecerit n, b. 3. Est autem & m ad n, ut c ad h, quod e, h multiplicantes l fecerint m, n. Sunt ergò a, m, n, b continuè proportionales in ratione c ad f; adeoq; inter a*

γ 26. def. VII. *b similes solidos cadunt medij proportionales m, n. Et quia a, m, n, b sunt 4 continue proportionales γ habebit solidus a ad solidum b similem rationem ejus, quam a ad m id est, c ad f, d ad g, & e ad h, id est, triplicatam ex ratione c ad f laterum homologorum.*

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si inter duos *a b* numeros unus medius proportionalis cadat numerus *c*; similes plani erunt illi numeri *a & b*.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

Sumti minimi d, e *in ratione* a, c *a metiuntur æquè ipsos* a, c *per* f, *& ipsos* c, b *per* g. *Itaq;* f *multiplicans* d, e *producit*, a, c, *&* g *eosdem* d, e *multiplicans producit* c, b. *Itaq; cum* e *multiplicans* f, g *faciat* c, b, *erit, ut* c *ad* b, *id est, ut* d *ad* e, *ita* f *ad* g; *& permutando, ut* d *ad* f, *ita* e *ad* g. *Cùm verò* a *fiat ex* d *in* f, *erit planus, cujus latera* d *&* f, *sunt proportionalia lateribus* e *&* g, *ex quibus fit* b *planus. Erunt itaq;* a b *plani similes.* α 21. VII. ζ 9. axio. γ 17. VII.

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Si inter duos numeros *a, b* duo medii proportionales cadant numeri *c, d;* similes solidi sunt illi numeri *a, b.*

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

Cum a sumtis tribus minimis e, f, g *in ratione* a, c, d, b, *inter* e *&* g *cadat medius proportionalis* α 9. VIII.

β 20. IIX. *nalia* f; β *erunt* e & g *plani similes, quarum latera sint* h, i, k, l. *Et quia* e, f, g *sunt in ratione data minimi, aquè metiuntur ipsos* a, c, d *rationis ejusdem per* m; & *eodem modo* e, f, g *minimi ipsos* c, d, b, *ejusdem rationis metiuntur per* n; *ita ut* m & n *multiplicantes* e, f, g *producant* a, c, d & c, d, b. *Facti autem sunt* e & f *ex suorum laterum* h, i, & k, l, *multiplicatione mutua. Ergò* a, b *producũtur ex multiplicatione mutua* h, i, m, & k, l, n, *& sunt solidi. Quia verò ex* m, n *in* f
γ 18. VII. δ 17. VII. *fiunt* c, d, *ut suprapatet,* γ *erit* c *ad* d, *ut* m *ad* n: *Sed* c *ad* d δ *est, ut* e *ad* f, (*quia* n *multiplicans* e f *facit* c d) *id est, ut* h *ad* k, *vel* i *ad* l. *Inter planos enim similes* e, g, *est medius proportionalis*
ε 19. IIX. f e *in ratione laterum homologorum* h, k *vel* i, l: *Igitur* h *ad* k & i *ad* l *erunt, ut* m *ad* n; & *permutando* h *ad* i, *ut* k *ad* l; & i *ad* m, *ut* l, *ad* n. *Sunt ergò latera* h, i, k *proportionalia lateribus* k, l, n; *ac propterea similes* a, b *solidi.*

PROPOSITIO XXII.

Theorema 20.

Si tres numeri *a, b, c* deinceps sint proportionales, primus *a*, autem sit quadratus; & tertius *c* quadratus erit.

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.

Quia

Sumto d *latere quadrati* a, *cum* d *in se faciat* a *a erunt* d & a *ab* f *unitate continuè proportionales, & convertendo* a *ad* d, *ut* d *ad* f. *Cum ergò inter* a & c *cadant tot medij, quot inter eundem* a & f β *cadent etiam inter* c & f *tot; videlicet* e. *Cum itaq;* f, e, c *continuè proportionales sint, producetur* c *ex* e *in se, eritq; quadratus.* α 9. VIII. β 10. VIII.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Si quatuor numeri *a, b, c, d* sint deinceps proportionales, primus *a* autem sit cubus; Et quartus *d* cubus erit.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
I, 1.

Sumto e *latere cubi* a, *ex* e *in se fiat* f; *& ex* f *in* e, *cubus* a. *Quia ergò in se facit* f, *& in* f *facit* a, *a erunt* e f a *ab unitate continuè proportionales; & convertendo* a, f, e, i *continuè proportionales. Cum ergò inter eundem* a & d, *tot medij continuè proportionales, quot inter* à & i, β *cadent inter* d & 1 *totidem. Quare cum* i, g, h, d *sint continuè proportionales, fiet* h *ex* g *in se, &* d *ex* g *in* h, *eritq;* d *cubus.* α 9. VIII. β 10. VIII.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Si duo numeri rationem habeant inter se, *ut a ad b*, quam Quadratus numerus ad Quadratum numerum *ita c ad d*, primus *a* autem sit Quadratus, & secundus *b* Quadratus erit.

A,36. F,48. B,64.
C,9. E,12. D,16.

Cum enim sit a *ad* b, *ut* c *ad* d, *interq;* c & d *a* cadat *medius proportionalis*, *etiam inter* a, b, *β* cadet *medius* f. *Cum ergò* a, f, b *sint continuè proportionales*, *&* a *primus Quadratus*, *etiam* b *tertius Quadratus* γ *erit.*

α 11. VIII.
β 8. VIII.
γ 22. VIII.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 23.

Si duo numeri rationem inter se habeant *a ad b*, quam cubus numerus ad cubum numerum *c ad d*, primus *a* autem sit cubus, & secundus *b* cubus erit.

A, 8. G,12, H,18. B,27.
C,64. E,96. F,144. D,216.

Cum enim sit a *ad* b, *ut* c *ad* d; *interq;* c *&* d *cadant duo medij proportionales,* e *&* f, *cadent etiam* g, h *inter* a *&* b. *Cùm ergo* a, g, h, b *sint continuè proportionales, &* a *primus cubus sit, erit &* b *quartus cubus.*

α 12. VIII.
β 8. VIII.
γ 23. VIII.

Corollarium I.

Proportio cujusvis numeri Quadrati ad quemlibet non quadratum, non potest reperiri in duobus numeris Quadratis. *Quia ex 24. hujus ipsi quoq; Quadrati essent.*

Corollarium II.

Nec inter cubum & non cubum cadit ratio euborum, *ob eandem causam ex 25.*

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Similes plani numeri inter se rationem habent *a ad b*, quam quadratus numerus ad quadratum numerum *ut d ad f.*

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

Cum a & b *sint plani similes, &* cadit inter eos unus medius proportionalis c: *Sumtis ergò tribus minimis in* a, c, b, *ratione cõtinua,* & erunt *extremi* d, f *quadrati. Quare cum sit ex æquo* a *ad* b, *ut* d *ad* f, *patet* a *ad* b *esse ut* d *quadratus ad* f *quadratum.*

a 18. VIII.
β 1. Cor. 2. VIII.

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 25.

Similiter solidi numeri *a* ad *b* rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum *c ad b.*

A, 240. C, 360. D, 540. B. 810.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

Cum a & b *sint solidi similes, &* cadunt inter eos duo *medij proportionales* c, d. *Sumtis ergò quatuor minimis* e, f, g, h *in ratione continua* a, c, d, b, & *erunt extremi* e, h *cubi. Quare cum sit ex æquo* a *ad* b, *ut* e *ad* h *patet,* h; *ad* b *esse, ut* e *cubus ad* h *cubum. Quod erat propositum.*

α 19. VIII.
β 1. Cor. 2. VIII.

EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER IX.

PROPOS. I.

Theorema 1.

SI duo similes plani numeri *a*, *b* multiplicantes se mutuo faciant quendam *c*; productus *c* erit Quadratus.

A, 6. B, 54.

D, 36. E, 108. C, 324.

A multiplicans seipsum faciat d *quadratum.* *Cum itaque ex* a *in* a *&* b *fiant* d *&* c *erit,* a 17. VII. *ut* a *ad* b, *ita* d *ad* c. *Sed inter* a *&* b

ζ 18 VIII. γ 8. VIII. γ 22. VIII.

ceu planos similes unus ζ *cadit medius proportionalis. Ergo & inter* d *&* c *unus* γ *cadit, nempe E. Itaq; cum tres* d, e, c *sint continuè proportionales, & primus sit quadratus,* δ *erit etiam* c *tertius quadratus.*

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duo numeri *a b*, se mutuò multiplicantes, faciant Quadratum *c*; similes plani erunt *a, b.*

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

α 17. VII. β 11. VIII. γ 8. VIII. δ 20. VIII.

A multiplicans seipsum faciat d *quadratum. Erit, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* c, *quia* a *multiplicans* a *&* b, *produxit* d *&* c. *Sed inter* d, c *quadratos cadit unus medius proportionalis: Ergo & inter* a, b γ *cadit unus, ac propterea* a, b δ *erunt plani similes.*

PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si cubus numerus *a* seipsum multiplicans, procreet aliquem *b*; productus *b* cubus erit.

A, 8.

A, 8.
E, 16. D, 4.
F, 32. C, 2.
B, 64. I, 1.

Sit clatus cubi a, *ex qua in se fiat* d, *& ex* c *in* d *ipse cub*9 a. *Ita*ꝫ *a metietur* c *ipsum* d *per* c. *Sed & unitas* i *eundem* c *& metitur per* c. *Ergo unitas ipsius* c *est eadem pars, quæ* c *ipsius* d. *γ Quare ut unitas ad* c *ita* c *ad* d. *Rursus etiam* d *a metitur* a *per* c. *quod* c *multiplicans* d *fecit* a. *Sed quia etiam* c *metiebatur* d *per* c, *Ergo* d *ipsius* a *erit eadem pars, quæ* c *ipsius* d. *γ Ergò est ut* c *ad* d, *ita* d *ad* a. *Sed ut est* c *ad* d, *ita erat unitas ad* c. *Ideoqꝫ ut unitas ad* c *ita* c *ad* d *& ad* a: *adeoque inter unitatem & a cadunt duo medij proportionales.* α 7. ax. β 5. ax. γ 20. dif.

Caterum quia a *metitur* b *per* a; *quod* a *in se producebat* b, *& unitas eundem* a *per* a *metitur, erit unitas eadem pars ipsius* a, *quæ* a *ipsius* b; *& sic, ut* i *ad* a, *ita* a *ad* b. *Sed cum inter* i *& a cadant duo medij proportionales, ergò totidem inter* a *& b,* δ *cadent* f *& e. Cum itaqꝫ inter quatuor* a, e, f, b *continuè proportionales primus sit cubus,* ε *erit etiam quartus* b *cubus.* δ 8. IIX. ε 23. IIX.

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si cubus numerus *a* cubum numerum *b* multiplicans, faciat aliquem; factus cubus erit.

A, 8,	B, 27.
D, 64.	C, 216.

A in se producat d. *Quia ergò ex* a *in* a & b *fiunt* d & c, *α erit ut* a *ad* b, *ita* d *ad* c. *Sed inter* a & b *cubos* β *cadunt duo medij proportionales*: γ *Ergò & inter* d & c. *Quare cum* d *primus* δ *sit cubus*, & c *quartus* ε *cubus erit.*

α 17. VII.
β 12. IIX.
γ 8. IIX.
δ 3. IX.
ε 23. IIX.

PROPOS. V.

Theorema 5.

Si cubus numerus *a* numerum quendam *b* multiplicans faciat cubum *c*; & multiplicatus *b* cubus erit.

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

α 3. IIX.
β 17. VII.
γ 12. IIX.

A in se producat d, *α cubum. Cum ergò ex* a *in* a & b *fiant* d & c, *& erit, ut* a *ad* b, *ita* d *ad* c. *Sed inter* d, c, *cubos cadunt duo medij propor-*

cio-

tionalis, & Ergò & totidem inter a & b; adeoq; δ 8. IIX.
a *existens cubo etiam* b *cubus* ε *erit.* ε 23. IIX.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si numerus *a* seipsum multiplicans, faciat cubum *b*; Et ipse *a* cubus erit.

A, 8. B, 64. C, 512.

Fiat in b *fiat* c, *qui ex definitione est cubus. Quoniam ergò* b *cubus multiplicans* a, *fecit* c, *a erit & a cubus.* α 3. IIX.

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

Si compositus numerus *a* aliquem *b* multiplicans, quempiam *c* faciat: factus *c* solidus erit.

A, 6. B, 7. C, 42.
D, 2. E, 3.

Quia enim a *est solidus, a metitur ipsum a-* α 13. def.
lius præter unitatem, ut d *per* e; *Ergò & in* β VII.
prodatit a. *Cùm ergò* b *in* a *faciat* c, *erit* c *ex tri-* β 9. ax.
um d, e, b, *cen laterum multiplicatione mutuò ortus, adeoq; ex definitione solidus.*

PRO-

PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si ab unitate quotcunque numeri *a, b, c, d, e, f, g b, i, k, l, m,* deinceps proportionales fuerint : Tertius *b* quidem ab unitate Quadratus est, & unum intermittentes *d, f, h. k, m*, omnes : Quartus *c*, autem est cubus, & duos intermittentes *f, i, m*, omnes : Septimus *f* verò cubus simul & Quadratus, & quinque intermittentes *m* omnes.

Vn. 1. A, 3. B, 9. C. 27. D, 81, E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

Cum enim unitas α *metiatur* a *per* a, *metietur quilibet sequentem per ipsum* a, *quia continuè proportionales sunt* : & *Ideoq;* a *multiplicans seipsum producit* b *quadratum. Cumq;* b, c, d *sint continuè proportionales, &* b *Quadratus, metiam* d γ *erit Quadratus : ita & trium sequentium proportionalium tertius* f *erit Quadratus, & iterum* h, k, m *&c. Rursus cùm* a *in se faciat* b, *& idem* a *in* b *faciat* c, *erit ex definitione* c

α 5. ax. β 9. ax. γ 22. IIX.

cubus

cubus. Ergò cum 4. proportionalium c, d, e, f primus c sit cubus & erit & quartus f cubus. Deniq; cum septimus ab unitate f & Quadratus & cubus sit demonstratus; etiam intermissis quinq; g, h, i, k, l, m erit & Quadratus & cubus. δ 23. IIX.

PROPOS: IX.

Theorema 9.

Si ab unitate quoteunque numeri *a, b, c, d, e, f,* deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem *a* sit Quadratus; & reliqui omnes, *b, c, d, e, f,* Quadrati erunt. Ac si qui post unitatem *a* sit cubus, & reliqui omnes *b, c, d, e, f,* cubi erunt.

A, 4. B, 16. C, 64. D, 256, E, 1024.
i. Vnitas. F, 4096.

A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768
F, 262144.

Quia enim b tertius ab unitate α est Quadratus, & unũ intermittentes, omnes d, f, sunt q; a, b, c continuè proportionales, & a primus quadratus, β erit & c Quadratus. Eodem modo inter c

α 8. IX.
β 12. IIX.

ter c,d, e *proportionales* e *existente quadrato, etiam* e *quadratus erit, & sic deinceps reliqui erunt quadrati. Ita si* a *primus ab unitate sit cubus: Quia* c *ab unitate quartus* a *est cubus & duos intermittentes omnes, etiam* f *erit cubus. Cumq; unitas metiatur* a *per* a, *&* a *cubus metiatur* b *per seipsum,* γ *erit &* b *cubus. Cum item* a,b,c, d *sint 4. continuè proportionales, &* δ *a primus sit cubus,* δ *erit &* d *quartus cubus. Eodemq; modo reliqui ordine cubi ostendantur, sumtis semper continuè proportionalibus, ut* b,c,d,e. *Quia enim* b *est cubus. Ergò &* e *&c.*

γ 3. IX.
δ 23. IIX.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si ab unitate quotcunque numeri (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *b*, *i*, *k*, *l*, *m*,) deinceps proportionales fuerint, qui *a* verò post unitatem non sit quadratus, neque alius ullus quadratus erit, præter tertium *b* ab unitate & unum intermittentes omnes *d*, *f*, *b*, *k*, *m*. At si post unitatem non sit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter quartum *r* ab unitate, & duos intermittentes omnes *f*, *i*, *m*.

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.
1. *Unitas.* G, 128. H, 256.
I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

Si enim aliquis alius esse potest quadratus, esto c. *Quoniam est, ut* a *ad* b, *ita* b *ad* c; *convertendo* c *ad* b *erit, ut* b *ad* a. *Sed* c *est quadratus ex hypothesi:* α *Ergò &* a. *Quod absurdum. Quia ponitur non quadratus. Idem etiam de cæteris concludendum. Ita, si quis alium,* α 22. IIX.
ut d *præter* c *ponat cubum, quia* a, b, c, d, *sunt continuè proportionales, conversim proportionales erunt. Ita ag; cum* d *primus sit cubus, etiam* a *quartus cubus* β *erit. Quod est contra hypothesim.* β 23. IIX.

PROPOS. XI.

Theorema 11.

Si ab unitate quotcunque numeri *a, b, c, d, e, f,* deinceps proportionales fuerint, minor *b* majorem *f*, metitur per aliquem *d* eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

1. *Vn* A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 242.
F, 729.

Cũ ex æquo sit ut b *ad* f, *ita unitas ad* d, *quod* 5. *numeri* b, c, d, e, f, *cũ* 5. *numeris & unitate* a b c d e *ande* rati-

α 20. def. VII. β 5. ax. *rationem habeant α aquè etiam Vnitas metietur numerum* d, *at* d_3 b *ipsum* f. *Sed* ζ *unitas metitur* d *per* b, d *per* b, *ergò & b ipsum* f *per* d *metitur. Eodem modo* d *metitur ipsum* e *pro* a, *quod fit, ut* d *ad* e, *ita unitas ad* a. *Sic &* a *ipsum* f *per* e *metietur cum sit ut* a *ad* f, *ita unitas ad* e. *Et ita de cæteris.*

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si ab unitate quotcunque numeri *a, b, c, d,* deinceps proportionales fuerint; quicuique primorum numerorum ultimum *d* metiuntur, ijdem & eum *a*, qui unitati proximus est, metientur.

f. *Vn.* A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E. 3.

α 31. VII. β 27. VII. γ 26. VII. *Sin minus Si primus numerus* e *metiens quidem* d, *non* a *metitur erunt* a *&* e *primi; & cum* a *multiplicans seipsum producat* b_3 β *erunt &* e b *inter se primi;* γ *utem* g_3 *&* e *&* c; *cum* c *ex* a *in* b *primis ad numerum* e *fiat.* γ *adeo* g_3 *&* e *&* d *inter se erunt primi, cum* d *ex* a *in* c *fiat. Quod est contra hypothesin, quæ* e *ipsum* d *metiri ponebat.*

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si ab unitate quotcunque numeri *a, b, c, d,* deinceps proportionales fuerint, qui verò *a* post unitatem, primus sit; Maximum *d* nullus alius metietur, præter eos *a, b, c,* qui sunt in numeris proportionalibus.

1 *Un.* A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
H---- G---- F---- E---

Metiatur ipsum d, *diversus ab* a, b, c, *qui sit* e; *erit ille vel primus, vel compositus. Si sit primus, metiens extremum* d, *ά metietur etiam* a *primum. Quod absurdum. Cum ergò* e *non sit primus,* ἐsto *compositus,* β *metiens ipsum primus alius præter* a *nullus erit. Nam cum* e *metiatur extremum* d, *quilibet primus metiens* e, γ *metietur &* d, *metiens verò* d *maximum,* ά *metitur &* a *unitati proximum; proinde duo primi se mutuò metientur, quod absurdum, aut metiens ipsum* e *primus, erit ipse* a. ά n. IX. β 33. VII. γ 11. axio.

Porrò metiatur a *ipsum* e *per* f. *Itaque* a *multiplicans* f *&* c *binos faciet binos* e *&* d; δ *unitq;* e *ad* d, *ut* f *ad* c. *Quare si* e *metitur* d, *etiã* f δ 17. VII.

metitur c: *adeoq;* & f *eodem modo, ut* e, *compositus erit, quem solus* a *metitur. Metiatur ergò* a *ipsum* f *per* g. *Ideoq;* a *binos* g & b *multiplicans producet* f & c, *ǒ eritq;* f *ad* c, *ut* g *ad* b: *Sed* f *metitur ipsum* c, *ergò & g metitur* b. *Si jam* g *esset primus metiens* b, *α metiretur etiam* a. *Quod absurdum. Nullus ergò alius metitur* g *præter* h. *Denig; metiatur* a *ipsum* g *per* h. *Binos ergo* a & h *multiplicans* a *producet* b & g, *ǒ eritq;* g *ad* b, *ut* h *ad* a. *Sed* g *metitur ipsum* b. *Ergo & h ipsum* a *primum. Itaq;* h *æqualis est ipsi* a. *Cum autem ex* h & g *producatur idem* b, *qui ex* a *in seipsum, ε erit* a *medius proportionalis inter* h & g; *cumq;* a *metiatur* g, *etiam* h *metietur* a, *primus primum. Quod absurdum. Itaque præter proportionales* a, b, c, *nullus alius extremum* d *metitur.*

ε 20. VII.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Si minimum numerum *a*, primi numeri *b*, *c*, *d* metiantur: nullus alius primus numerus illum metietur, præter eos *b*, *c*, *d* qui à principio metiebantur.

A

A.....

B..C...D.....

E---F---

Si potest, metiatur e primus ipsum a per f. Idem ergo e multiplicans f a facit a. Ideoq; singuli b, c, d alterum illorum e vel f ℰ metientur. Non ipsum e primum; ergo ipsum f minorem ipso a. Quod contra hypothesin.

α 9. axio. β 32. VII.

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Si tres numeri *a, b, c* deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum eis rationem habentium, duo quilibet *a b simul, b c, a c* numeri ad reliquum *c, a, b* primi erunt.

A, 9. B, 12.

C, 16.

D, 3. E, 4.

Sumtis duobus d, e *in eadem cum illis proportione minimis, a patet* d *in seipsum & e producere* a & b, *& e in se facere* c. *Cum itaq; d & e in sua proportione minimi, etiam β sint primi & erit & uterque d e simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus, ex d e*

α 2. VIII. ℰ 24. VII. γ 30. VII.

δ 26. VII. *quam ipſe* d *ad* e *primus ſit, & erit quoq; ex* d, e *tanquam uno factus numerus in* d *ad eundem* e
ε 3. II. *primus.* ε *Qui autem ſit ex* d e *tanquam uno in*
ζ 27. VII. d *æqualis eſt & numero* a *facto ex* d *in ſe & numero* b *facto ex* d *in* e. *Igitur* a b *compoſiti primi ſunt ad* e, *& ita ad* c, *qui fit ex* e *in ſeipſum.*

B, 12. C, 16.
A, 9.
D, 3. E, 4.

Deinde quia uterque d e *ſimul* γ *eſt primus ad quemlibet ipſorum* d, e; *fit, ut numerus ex* d e *tanquam uno, factus in* e, δ *primus ſit ad* d (*cum tam ex* d e *compoſitus, quam ipſe* e *primus ſit ad* d) *Sed qui fit ex* d e, *tanquam uno in* e ε *æqualis eſt & numero* c *facto ex* e *in ſe; &* b *facto ex* d *in* e. *Ergò &* b c *ſimul compoſiti ad* d *primi ſunt,* ζ *adeoq; ad ipſum* a, *qui ex* d *in ſe eſt factus; primi ſunt* b *&* c *ſimul compoſiti.*

A, 9. C, 16.
B, 12.
D, 3. E, 4.

Denique quia, ut antea uterq; d *&* e *ſimul ad quemlibet ipſorum* γ *primus eſt, & è contrario quilibet ipſorum* d, e *primus eſt ad compoſitum*

ex

ex d e; & erit etiam factus ex d in e ad compositum ex d e primus, & sic ex d in e factus ad eum, qui ex d e tanquam uno in se primus erit. Sed qui fit ex d e tanquam uno in se aequalis est eis, 14. II.
qui fiunt ex d & e in se ipsos, una cum eo qui ex d in e bis. Quoniam itaq; duo numeri simul, nempe compositus ex ijs, qui fiunt ex d & e in seipsos; & ex eo, qui fit ex d in e, atq; is qui fit d in e primi sunt ad aliquem ipsorum, eum videlicet, qui fit ex d in e, ut ostensum est, & erunt etiam duo illi, compositus ex ijs qui fiunt ex d & e in seipsos & ex eo, qui fit ex d in e atq; is qui fit ex d in e inter se primi. Rursus, quia duo numeri simul, utpote compositus ex ijs, qui fit ex d & e in seipsos, atq; is, qui fit ex d in e ad aliquem ipsorum, eum nimirum, qui fit ex d in e, primi sunt ostensi; & erunt etiam duo illi, compositus ex ijs, qui fiunt ex d & e in in seipsos, atq; is, qui fit ex d in e, inter se primi. Itaque cum ex d & e in seipsos fiunt a & c, item ex d in e fiat b; erunt a & c simul compositi primi ad b. & 37. VII.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 16.

Si duo numeri *a* & *b* primi inter se fuerint: Non erit, ut primus *a* ad secundum *b*, ita secundus *b* ad alium quendam *c*.

A.....

B.....

C--------

α 23. VII. β 21. VII.

Esto, si potest tertius proportionalis c. *Cum ergò* a & b *sint primi, & in sua ratione* α *minimi; ipsi* β *aquè metientur* b & c *numeros in eadem ratione;* a *ipsum* b, & b *ipsum* c. *Cumque* a *etiam metiatur seipsum. Duos ergò* a & b *inter se primos metietur numerus* a. *Quod absurdum.*

PROPOSITIO XVII.

Theorema 17.

Si fuerint quotcunque numeri *a, b, c, d,* deinceps proportionales, extremi autem ipsorum *a, d* primi inter se sint: Non erit, ut primus *a* ad secundum *b*, ita ultimus *d*, ad alium quempiam *e*.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E---

α 23. VII. β 21. VII. γ 11. axio.

Esto, si potest, ut a *ad* b, *ita* d *ad* e. *Erit ergò permutando, ut* a *ad* d, *ita* b *ad* e: *sunt autem* a, d *primi sua rationis* α *minimi: igitur* β *aquè metientur, ipsos* b e. *Est verò, ut* a *ad* b, *ita* b *ad* c. *Si ergò* a *metitur* b, *etiam* b γ *metitur* c. *Quia item est, ut* b *ad* c, *ita* c *ad* d; *cum* b *metiatur*

tiatur c *etiam* c *metietur* d: *Quare* a *metiens* c, *metietur etiam* d. *Metitur verò & a seipsum*. *Ergò metitur* a, d *inter se primos. Quod absurdum*.

PROPOSITIO XVIII.

Problema 1.

Duobus numeris *a*, *b* datis, considerare, an ipsis possit tertius proportionalis inveniri.

A, 4. B, 7.

Si a & b *dati sint primi*, a *non potest reperiri tertius proportionalis. Si non primi, tum* b *multiplicans seipsum faciet* c. *Aut ergò* a *metitur* c, *per* d, & d *est ipse tertius proportionalis: Cum enim* a *metitur* c *per* d, β *fiet* c *ex* a *in* d. *Fit autem idem* c *ex* b *in* b: *Ergò qui sub extremis* a, d *continetur* c *facto ex* b *in seipsum medio aequalis est. Quare erit ut* a *ad* b, *ita* b *ad* d. a 16. IX. β 9. axio. γ 20. VII.

A, 4. B, 6. C, 36.

Aut a *non metitur* c, & *tum nequit reperiri tertius proportionalis. Si verò ponatur* d *tertius. Quia est, ut* a *ad* b, *ita* b *ad* d, *ideò numerus sub extremis* a, d *contentus, aequalis est ei, qui fit* a *medio* b, *id est*, c. *Cum itaq;* c *ex* a *in* d *fiat, metietur* a *ipsum* c *per* d, *quod absurdum*. *Quia ponebatur non metiri.*

A, 6. B, 4. D. - - - C, 16.

PROPOSITIO XX.

Problema X.

Tribus numeris a *b*, *c*, datis; considerare, an possit ipsis quartus proportionalis invenir (*Sive deinceps proportionales sint sive non.*)

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
A, 4 B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

B *multiplicans* c *faciat* d, *Aut* a *metitur* d *per* e *quartum proportionalem.* α *Fit enim* d *ex* a *in* e, β & *ex* b *in* c. *Ideoque cum sub extremis* a, e *comprehensus, æqualis sit ei, qui sub intermedijs,* γ *erit, ut* a *ad* b, *ita* c *ad* e.

α 9. axio.
β per constr.
γ 19. VII.

A, 4. B, 6. C, 9. E - - - D, 54.
A, 3. B, 4. C, 10. E - - - D, 40.

Aut a *non metiatur* d, & *tum nequit inveniri quartus proportionalis. Si tamen posset fieri* e. *Cum* 4, a, b, c, e *sint proportionales, extremis* a, e *contentus, æqualis* β *erit contento intermedijs* b, c, *hoc est,* d. *Cum itaque* d *ex* a *in* b *factus, metietur* a *ipsum* d *per* e, *quod est absurdum. Quia ponebatur non metiri.*

β 7. axio.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum *a, b, c.*

A 2. B 3. C 5.

D .....

a Sumto minimo d, *quem* a, b, c *metiantur, apponatur ipsi unitas* e. *Si totus* d e *est primus, factum est, quod vult propositio, quia tum plures sunt primi* a, b, c, d, e. ε 35. VII.

A 3. B 5. C 7.

D, 105. E.

G 53.

Si totus d e *sit non primus,* ζ *metietur ipsum* g, *qui nulli propositorum* a, b, c, *idē esse potest. Si tamē sit, metietur etiam* g *ipsum* d, *sicut eū metiuntur* a; b, c. *Ideoq;* g *metiens totum* d e, ζ *detractum* d, *metietur etiam reliquum* e *unitatem quod absurdum. Ergo* g *primus, idem non est,*

ζ 33. VII. γ 11. dis.

qui unus ipsorum a,b,c. *Sunt ergò* a, b,c,g *primi plures, quam* a,b,c. *Adeoq; & in infinitum plures primi inveniri possunt.*

PROPOSITIO XXI.

Theorema 19.

Si pares numeri quotcunque *ab, bc, cd* componantur; totus par erit *ad.*

A.....B....C.....D

Cum enim quilibet par habeat partes duas aquales; si aqualibus addantur aquales, omnes dimidiæ dimidijs fiunt aquales. Quare totus a d *erit par, dimidiorum compositorum duplus ex definitione.*

PROPOS: XXII.

Theorema 20.

Si impares numeri quotcunque *ab, bc, cd, de* componantur; multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit *a e.*

A... B.....C.....D.....E

Cum propositi numeri sint impares, quilibet differt unitate à pari, ex definitione. Singulis unita-

unitate detracta, quilibet reliquorum erit par. a 21. IX.
Quare & à reliquis compositus a *par erit. Sed unitatum detractarum multitudo est par. Ergo & totus* a e *par erit.*

PROPOSITIO XXIII.

Theorema 21.

Si impares numeri quotcunque *a b, b c, c e,* componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus *a e* impar erit.

A...B.....C.....D.E

Ablata unitate d e *ex* c e, *erit* c d *par. Sed* a c *ex imparibus multitudine paribus est compositus. Ergo & par* a *erit, huic si addatur* c d *totus* ad *par* & *erit. Sed addita unitate* d e *numero* a d, *totus* a e *impar erit, quia par à pari differt per unitatem.* a 22. IX. & 21. IX.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 22.

Si à pari numero *a b* detrahatur par. *c b*: & reliquus *a c* par erit.

A. D. ! ... C. ...B

Si non detracta a d *unitate erit* d c *par. Ideoq; & compositus* d b *erit par: ac proinde composito* d b *addita unitate* ad, *totus* ab *impar fiet. Quod est absurdum, quia ponitur par.* a 21. IX.

PRO-

PROPOS: XXV.

Theorema 23.

Si à pari numero *a b* impar *c b*, detrahatur; & reliquus *a c* impar erit.

A.....C. D....B

Ex impari c b *ablata unitate* c d, *reliquus*
a 24. IX. d b *par erit. Qua ergò totus* a b *ponitur par ablato pari* d b, *reliquus* a b *par* α *erit, ablataque unitate* c d *reliquus* a c *impar erit.*

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 24.

Si ab impari numero *a b* impar *c b* detrahatur: reliquus *a c* par erit.

A...C.....D.B

a 24. IX. *Ex imparibus* a b, c b *unitate* d b *detracta, reliqui* a d, c d *pares erunt. Ex pari* a d *ablato pari* c d, *reliquus* a c *par* α *erit.*

PROPOSITIO. XXVII.

Theorema 25.

Si

Si ab impari numero *a b* par *c b* detrahatur; reliquus *a c* impar erit.

A. C.... D.... B

Ab impari a b *unitate* a d *sublata, erit reliquus* d b *par*, *cui* d b *rursus auferatur* c b *par, reliquus* d c *par quoq; a erit: ac proinde unitate* a d *addita, fiet* a c *impar.* a 24. IX.

PROPOS: XXIIX.

Theorema 26.

Si impar *a* numerus parem *b*, multiplicans, fecerit aliquem *c* factus par erit.

A... B....
C .....

Cum c *fiat ex* a *in* b; *componetur* c *ex tot numeris ipsi* b *æqualibus, quot fuerint unitates in* a. *Est autem* b *par. Ergò & c ex tot* b *paribus compositus, quot in* a *sunt unitates, par quoque a erit.* a 22. IX.

PROPOS: XXIX.

Theorema 27.

Si impar numerus *a* imparem *b* mul-

multiplicans fecerit aliquem c; factus c impar erit.

A...B.....
C.....

Cum c *ex* a *in* b *fiat, componetur* c *ex tot numeris ipſi* b *æqualibus, quot in* a *fuerint unitates.* Eſt autem b *impar. Ergo &* c *ex tot imparibus compoſitus, quot in* a *ſunt unitates, impar quoque erit. Hinc naſcuntur duo Corollaria.*

a 23. IX.

Corollarium 1.

Par numerus in ſe multiplicatus, producit parem.

Corollarium 2.

Impar numerus in ſe multiplicatus producit imparem.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 28.

Si impar numerus *a* parem *b* metiatur, & illius *b* dimidium *d* metietur.

A...C...E..
B.....
D.....

Me-

metiatur a ipsum b per c. Erit ut igitur c par
si enim esset impar, sequeretur a imparem in c
imparem α efficere imparem. Quod absurdum, α 29. IX.
quia b ponitur par: Ergò & c erit par. Itaq; cum a per omnes c unitates efficiat totum b: Idem a per dimidium unitatum c ipsum d efficiet, ipsius b dimidium. Metietur ergò a ipsum d per dimidium unitatum c, id est, e.

PROPOSITIO XXXI.

Theorema 29.

Si impar numerus *a* ad aliquem numerum *b*, primus sit: & ad illius duplum *c* primus erit.

A.....B.....
C.....
D---

Si a non sit primus ad c, metiatur eos d. qui omninò erit impar. Si enim esset d par, cum α 28. IX. & 30. IX. metiatur imparem, a α erit a, factus ex d pari, in eum numerum, per quem metitur, par. Quod absurdum, quia ponebatur a impar. d ergò impar metiens c parem, & metietur quoq; dimidium numeri c. Idem autem d metitur & a. Ergò & a, b inter se primos metietur d. Quod absurdum. a ergò ad c est primus.

Hinc

Hinc patet Corollarium: Numerum imparem, qui ad numerum aliquem est primus, primum quoque esse, non solum ad duplum ejus (*ex 31. IX.*) sed etiam ad quadruplum, octuplum, & ita per proportionem duplam in infinitum excurrendo. *Quia semper sequentes præcedentium sunt dupli.*

PROPOSITIO XXXII.
Theorema 30.

Numerorum *a*, *c*, *d*, à binario *a* duplorum, unusquisque est pariter partantum.

1. Vn. A, 2. B, 4. G, 8, D. 16.

a 11. IX. *Exposita enim unitate fiunt numeri ab unitate a deinceps proportionales: Quare a quemlibet* b, c, d. *& minor majorem per aliquem ipsorum* a, b, c, d *metietur; Qui cũ omnes sint pares, a binarij nimirum dupli ipsorum quemlibet a metietur numerus par per parem. Erit ergò quilibet pariter par ex definitione. Sed quod sint pariter pares tantũ ita ostẽditur. Cũ enim ab unitate sint cõtinuè proportionales, & unitati proxim*ꝰ *primus*

sit primus, utpote binarius, nullus praeter ipsos a, b, c, d *quemlibet ipsorum* β *metietur. Quia cum omnes sint pares, quemlibet ipsorum par numerus per parem* γ *metietur.* β 13. IX. γ 15. IX.

Scholium.

Hinc deducitur Ars Arithmeticorum inveniēdi omnes numeros pariter pares. *Nulli enim praeter duplos à binario* a, b, c, d, e, f, *&c. tales esse possunt. Si enim esset quispiam* g, *ejus* h *dimidium par esset; quia si impar esset,* g *esset* f *& pariter impar contra hypothesin; ipsius* h, *dimidium sit* i, *qui ob eandem rationem par erit, & sic deinceps usq; ad unitatem. Cum ergo dimidium* i *sit unitas,* h, g *erunt dupli ab unitate atque ita in ordine priorum, contra hypothesin.* δ 32. IX.

A 4. B 4. C 16. D 32. E 64. F 128.
I - - - H - - - - G - - - - -

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 31.

Si numerus à dimidium *b* habeat imparem: pariter impar est tantum.

A.....
B.....
D - - - - E - - -

Cum a *habeat dimidium* b *imparem, metietur binarius* c *par numerus ipsum* a *per* b. a *itaq;*

ex definitione erit pariter impar. Quod si tamen esse talis negetur, erit quoq; pariter par. Ideoque ipsum aliquis par per d *parem* e α *metitur, &*
α 9. axio. *ex* d *secundo in tertium* e *fiet* a *qui ex* c *primo in*
β 19. VII. b *quartum* β *erit*q;, *ut* c *ad* d. *ita* e *ad* b. *Metitur autem* c *parem* d. *Ergò &* e *par metitur ipsum* b *imparem. Quod absurdum.*

Scholium.

γ 33. IX. Imparium omnium dupli omnes sunt γ
δ 34. IX. pariter impares δ tantùm.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 32.

Si par *à* numerus neque à binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem: pariter par est, & pariter impar. A.....

Cum enim dimidium habeat parem per eum metietur ipsum binarius par, & sic pariter par est. Sed & pariter impar. Diviso enim a *bifariam, ejusq; dimidio rursus bifariam & sic deinceps, tandem in imparem aliquem incidemus. Si*
α 32. IX. *enim ultimò occurreret binarius* α *esset* a *duplus à binario, quod contra hypothesin. Cum ergò occurrat impar, ille metietur à per parem, non per*
ζ 29. IX. *imparem,* β *quia impar multiplicans imparem, produceret imparem* a; *Contra hypothesin. Est itaq; & pariter impar.*

Scholium. Omnes, relictis duplis à bina-

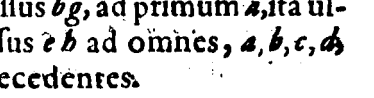
rio;

rio, & qui dimidios habet impares, pares; reliqui & pariter pares & pariter impares sunt.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 33.

Si sint quotcunq; numeri *a, b c, d, e, f,* d einceps proportionales, detrahantur autem à secundo *b c*, & ultimo *e f*, *g c, b f*, æquales ipsi primo *a*: Erit ut secundi excessus *b g*, ad primum *a*, ita ultimi excessus *e b* ad omnes, *a, b, c, d*, ipsum antecedentes.



Ab e f *detrahantur* f i, & f k *ipsis* b c & d *æquales. Quoniam* f i *est æqualis* b c *& ablatus* f h *ablato* g c, *etiam reliquus* h i, *reliquo* g b *æqualis erit. Sed quia est, ut* a *ad* b c, *ita* b c *ad* d, *&* d *ad* e f; *convertendo quoq; ut* e f *ad* d, *ita* d *ad* b c, *&* b c *ad* a: *est quoq;* k f *ipsi* d *&* i f *ipsi* b c, *&* h f *ipsi* a *æqualis; erit etiam ut* e f *ad* k f, *ita* k f *ad* i f *&* i f *ad* h f. *Igitur dividendo ut* e k *ad* k f, *ita* k i *ad* i f, *&* i h *ad* h f, *ac proinde ita etiam erunt omnes* e k, k i, i h *ad omnes* k f, i f, h f, *id est, totus* e h *ad* d, b c, a *simul (quibus* k f, i f, h f, *sumti sunt æquales) ut* i h *ad* h f, *hoc est, ut* b g *ad* a, *qui illis sunt æquales.* a 12. VII.

Scholium 3.

Per hoc theorema ſummam continuè proportionalium ex primo, ſecundo & ultimo terminis datis invenire licet.

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 34.

Si ab unitate quotcunque *a, b, c, d* numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus *e*; & totus *e* hic in ultimum *d* multiplicatus faciat aliquem *f*, Factus erit perfectus.

1. *Un.* A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G---62. H, 124. I, 248. F----496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O---- P----

Sumantur ab e *tot dupli; quot ſunt* a, b, c, d *videlicet* e, g, h, i: *& erit ex æquo ut* a *ad* d, *ita* e *ad* i, *factus ex* a, *in* i ☾ *æqualis eſt facto ex* d *in* e. *Sed* f *eſt factus ex* d *in* e. *Idem ergò* f *ex* a *in* i *fit. Itaq;* i *metitur* f *per* a *binarium, & ita* f *ipſius* i *eſt*

α 14. VII.
β 19. VII.

i *est duplus. Quare* e, g, h, i, f, *deinceps sunt dupli. Ex secundo* g *& ultimo* f *determinantur aquales ipsi* e, *qui sint* k, l, *relictis* m, n *excessibus*; γ *Erit ut* m *ad* e; *ita* n *ad omnes antecedentes* e, g, h, i *simul. Sed* m *est aqualis ipsi* e, *dimidius videlicet dupli* g. *Ergò &* n *aqualis ipsis* e, g, h, i *simul. At unitas &* a, b, c, d *aquales sunt* l, l *ipsi* e *&* k *aqualis. Itaq; totus* l, n, *id est,* f *aqualis erit unitati & numeris* a, b, c, d, e, g, h, i *simul. Quare cum unitas &* a, b, c, d, e, g, h, i *metiantur ipsum* f (*Quia enim* f *ex* e *in* d *est factus,* δ *metietur* d *ipsum* f e *eundemq;* f, *unitas &* a, b, c, d, *qui ipsum* d *metiuntur. Rursus cum* i *metiatur ipsum* f, *eundem* f ζ *metientur* e, g, h, *qui ipsum* l *metiuntur* ε *ob proportionẽ duplam*) *nec alius ullus metiatur ipsum* f. *Erunt ergò unitas & numeri* a, b, c, d, e, g, h, i *omnes partes quas* f *habere potest; quibus simul sumtis aqualis cum sit* f, *erit* f *perfectus ex definitione. Si alius quidã numerus potest metiri ipsum* f, *esto* o *per* p, *ex quibus* η *fiat idem* f, *qui ex* e *in* d. *Cum ergò ex* e *primo in* d *quartum fiat idem numerus, qui ex* p *secundo in* o *tertium. Ergò ut* e *ad* p, *ita* o *ad* d. *Cum autem* a, b, c, d *sint proportionales ab unitate, & a primus, nullus præter illos* θ *metitur* d, *Ergo nec* o *alius ab ipsis* a, b, c *positus;* ϰ *& cum sit* e *ad* p, *ut* o *ad* d, *neque* e *ipsum* p *metietur, qui, cum* e *sit primus,* λ *inter se sunt primi,*

γ 35. IX.

δ 7. IX.

ε 11. IX.

ζ 11. axio.

η 9. axio.

θ 13. IX.

ϰ 31. VII.

λ 23. VII. μ 21. VII.

& in ſua ratione λ minimi, & o ipſum e aquè ac p ipſum d μ metiantur. Ergò cum d nullus præter a b c, metiatur, p erit illorum aliquis. Sit idem qui b, & quot b, c, d, totidem e, g, h, ſumantur, α eritq; ut b ad d ita e ad h, & idem numerus fiet ex b in h, qui ex d in e, id eſt, qui ex o in p. Itaq; ut p ad b ita h ad o. Sed p eſt idem qui b. Ergò & o idem qui h. Quod abſurdum. Ponebatur enim alius.

EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER X.

Definitiones.

I.

OMmensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur. *Ita etiam 21 & 13. palmorum lineæ sunt commens. quia & unus palmus & dimidius & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsas metitur. Idem & de superficiebus, quas superficies eadem, & corporibus, quæ corpus idem metitur, intelligitur.*

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam communem mensuram

contingit reperiri. *Tales sunt latus & Diagonius quadrati, ut in propositione ultima demonstratur, & multæ aliæ lineæ de quibus in propositionibus. Itemq; & superficies & corpora.*

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spacium metitur. *Antea lineæ commensurabiles longitudine sunt in 1. definitione explicatæ: hic verò longitudine aliàs incommensurabiles insuper intelliguntur, quarum quadrata per superficiem communem commensurabilia. Quæ quadrata in 47. I. appellantur potentia laterum vel linearum. Tales lineæ etiam sunt omnes longitudine commensurabiles non contra.*

4. Incommensurabiles autem potentia, cum quadratis earum nullum spacium, quod sit communis illorum mensura, contingit reperiri. *Intelligit eas, quæ neq; mensuram communem, quoad longitudinem, neque quoad quadrata habent.*

5. His positis, ostenditur, cuicunque

que rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia; alias verò potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis. *Dicit ad datam rectam alias infinitas & commensurabiles tum longitudine, tum potentia, & incommensurabiles posse inveniri, eamq; cujus respectu reliqua tales sunt dici ῥητήν, Rationalem, quod semper ponatur certa & nota in quavis menura assumta certa & nota, reliquis ut plurimum ignoratis.*

6. Et huic commensurabiles sive longitudine & potentia, sive potentia tantùm Rationales. *Omnes linea quæ data quomodocunq; sunt commensurabiles dicuntur Rationales, non quidem positione, ut illa, sed quia in illa comparatione cum data commensurabiles inveniuntur. Ideoq; & lineas quarum quadrata 20. & 1000 sunt cuilibet quadrato, ut 16. vel 100. commensurabiles, recte etiam rationales appellamus.*

7. Huic verò incommensurabiles,

irrationales vocentur. *Itidem hic ex adverso omnibus modis incommensurabiles ostendit; quas nec in longitudine neq; in potestate exactus aliquis numerus exprimit.*

8. Et Quadratum, quod à proposita dicta recta fit, dicatur Rationale. *Non secus enim; ac linea illa certa & nota, dicebatur rationalis, etiam quadratum ex ea factum Rationale est dicendum.*

9. Et huic commensurabilia quidem, Rationalia. *Ita & omnes superficies planæ, Quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales sunt dicendæ non positione sed collatione.*

10. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur. *Etiam superficies quæcunq; irrationales dicuntur, quarum lineæ sunt incommensurabiles rationali lineæ.*

11. Et rectæ, quæ ipsa possunt, irrationales. *Si vim rum sunt quadrata ipsa, intelliguntur hic latera per lineas; si verò sint alia quæpiam rectis lineis, rectæ*

Eæ, describentes æqualia quadrata spatijs incommensurabilibus.

POSTULATUM.

Quælibet magnitudo toties potest multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

AXIOMATA.

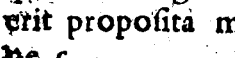
1. Magnitudo quotcunque magnitudines metiens, compositam quoq; ex ipsis metitur.
2. Magnitudo quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.
3. Magnitudo metiens magnitudinem totam & ablatam, metitur & reliquam.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Duabus magnitudinibus *a b, c*, inæqualib. propositis, si à majore *a b* auferatur majus *a b* quã dimidiũ; & ab eo, quod

quod reliquum *b b* est, rursus detrahatur majus *b i*, quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, *i b*, quæ minor erit propositâ minore magnitudine. *c.*



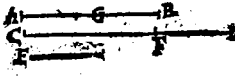
Sumatur ipsius c *multiplex* d e *proximè major quàm* a b, *in partes ipsi* c *æquales divisa, quibus partibus multitudine æquales sint partes* a h, h i, i b, *in linea* a b. *Cum ergo* d e *sit major quàm* a b, *& ex* d e *minus dimidio* d g (*vel etiam dimidium, si* d e *esset dupla ipsius*) *ex* a b *verò plus dimidio* a h *sit ablatum, erit reliquum* g e *reliquo* h b *majus. Rursus cum* h b, *quam* g e *sit minor, & ex* g e *ablatum sit dimidium* f g (*vel minus dimidio*) *ex* h b *verò majus dimidio* h i *erit reliquum* f e *id est* c *reliquo* i b *majus. Quod erat propositum.*

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

Si duabus magnitudinibus *a b*, *c d* inæqualibus propositis, detrahatur semper minor *a b* de majore *c d*, alterna quadam detractione, & reliqua

reliqua *fd* minimè præcedentem *ab* metiatur: incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines *ab*, *cd*.



Sin minus, *esto cõmunis mensor* e, *qui vel æqualis est*, *ipsi* a b *vel minor. Facta ergò detractione* a b *ex* c d *quoties* α *potest*, *& relinquat* f d, *se minorem*, *& detracta* f d *ex* a b *relinquat se minorem* g b *&c. adeoq; relinquetur tandem vel ex* c d *vel* a b *quadam ut* g b *minor ipsa* e: *Quoniam itaq;* e *metitur ipsam* a b, *& a b ipsam* c f, *etiam* e β *metietur ipsam* c f, *cum & e metiatur etiam* c d, γ *metietur totam etiam reliquam* f d. *Sed* f d *metitur ipsam* a g β *ergò & e metitur ipsam* a g, *cum & metiatur* a b γ *metietur etiam reliquam* g b, *major minorem. Quod absurdum.*

α 1. X.

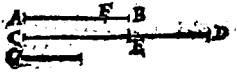
β 2. ax.

γ 3. ax.

PROPOSITIO III.

Problema 1.

Duabus *a b*, *c d* magnitudinibus commensurabilibus datis; maximam earum communem mensuram *fb* invenire.



Facta detractione alterna, metietur tandē f b *ipsam* e *d, nisi datæ duæ*

α 2. X. *duas* a b, c d, *voluerimus esse incommensurabiles, eritq;* b f *maxima communis mensura. Cum*
ζ 2. ax. *enim* f b *metiatur* e d, e d *verò ipsam* a f, *etiam* f b ζ *metietur* f a, & *quia metitur seipsam, γ etiam totam* a b; & *ita etiam ipsam* c e *quam metitur* a b; *adeoq; cum* & c e & e d *metiatur* f b, γ *metietur totam* c d, *eritq; utriusq;* a b &
γ 1. ax. c d *mensura communis. Si quis verò etiam neget eam esse maximam, major sit* g, *quæ* & a b & c d *metietur, &* β *ipsam* c e, *quam metitur,* a b; *Cumq; metiatur* & c d & c e, *etiam* δ *metietur* e d *reliquam; qua cum metiatur* a f, *eandem*
δ 3. ax. a f ζ *metietur etiam* g: *sed cum* & a b & a f *metiatur* δ *metietur etiam* f b *reliquam, major minorem. Quod absurdum.*

Hinc patet Corollarium.

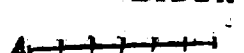
Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

PROPOS: VI.

Problema 2.

Tribus magnitudinibus *a, b, c,* commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Esto



Esto communis mensura a & b; *quæ si* & *metitur* c, *habebitur propositum. Si enim major quædam quàm* d *esset communis mensura,* β *metietur* & d *communem mensuram* a & b *majorem minorem. Si autem* d *non metiatur* c, *erunt saltem commensurabiles: Cum enim* a, b, c, *sint commensurabiles, quælibet earum communis mensura, maximam mensuram dipsarum* a & b β *metietur.* α *Sit itaq; communis* e *inter* c & d *quæ erit maxima trium* a, b, c *communis mensura. Sin minus, major quàm* e *sit* f. *Quia ergò* f *metitur* a & b, *metietur etiam* d. *Cumq; metiatur etiam* c & d, β *metietur communem earum mensuram.* e, *majorem minorem. Quod absurdum.*

α 3. X.

β cor. 3. X.

Hinc manifesta sunt Corollaria.

1. Magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum communem mensuram.

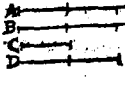
2. Pluribus quam tribus magnitudinibus datis, illarum communis maxima mensura inveniri potest. *Si enim sunt 4, inventur prius trium.*

LEMMA.

Si sint quotcũq; magnitudines, *a, b, c, d,* & totidẽ etiã numeri, *e f g h,* qui bini

in

in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines; & ex æqualitate in eadem ratione erunt, *A* ad *D* magnitudines & numeri *e* ad *b*.



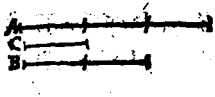
E 3
F 4
G 1
H 2

Demonſtratio eſt ex V. & VII. manifeſta.

PROPOS: V.

Theorema 3.

Gommenſurabiles *a b* magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.



D 3
unitas.
E 2

α 3. X. α *Sit* c *earum menſura communis maxima, qua quoties metietur* a & b, *toties unitas metiatur* d & e *numeros. Eam igitur magnitudo* c *metiatur magnitudinem* a *quoties unitas numerum* d, *erit ut* c *ad* a *ita unitas ad* d: *ſed ut* β Lem. X *eſt* c *ad* b *ita eſt unitas ad* e. β *Ergò ex æquo ut magnitudo* a *ad magnitudinem* b *ita numerus* d *ad numerum* e.

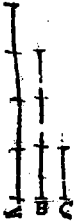
PRO-

PROPOS. VI.

Theorema 4.

Si duæ magnitudines *a*, *b*, proportionem habeant, quam numerus *d* ad numerum *e*; commensurabiles erunt *a*, *b*, magnitudines.

D 4 E 3. *Unitas.*



Quot unitates sunt in d, *in tot partes æquales ipsi* c *sit divisa a magnitudo. Cum ergò sit ut* c *ad* a *ita unitas ad* d, *quia æquè metiuntur* c *ipsam* a *& unitas ipsum* d; *cum q; ponatur ut* a *ad* b, *ita* d *ad* e, *& erit ex æquo ut* c *ad* b *ita unitas ad* e. *Sed unitas metitur numerum* e. *Igitur &* c *metitur magnitudinem* b. *Sed &* c *metitur ipsum* a. *Ergò* a *&* b *eandem communem mensuram* c *habent, & β sunt commensurabiles.*

α Lemma 4. X.

β 1. def. X

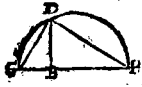
Corollarium.

Si fuerint duo numeri & recta; dari potest alia recta, ad quam prior recta rationem habeat, quam numerus ad numerum. Si enim data recta secetur in tot partes æquales, quot

unitates continet alteruter numerorum; assumaturq; earundem partium alia, quot unitates continet alter numerus habetur propositum.

LEMMA.

Duobus numeris datis *c* & *e*, & linea recta *b b*, oportet efficere ut numerus *c* ad numerum *e*, sic quadratum lineæ *b b* datæ ad quadratum alterius *b d*.



α 13. VI. *Reperiatur* b g, *quæ sit ad* h b *ut* e *ad* c: α *sitq; inter* h b & b g *media proportionalis* b d. *Cum er-*

C 5. E 2. *gò sit ut* c *ad* e, *ita* h b *ad* b g; *sed*

β 20. VI. *ut* h b *ad* b g, ℭ *ita quadratum ex* h b *ad quadratum ex* b d. *Itaq; ut* c *ad* e, *ita quadratum ex* h b *ad quadratum ex* b d.

PROPOSITIO VII.

Theorema 5.

Incommensurabiles magnitudines *a*, *b* inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

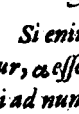
α 6. X. *Si haberent* a *essent commensurabiles. Quod est contra hypothesin.*

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Theorema 6.

Si duæ magnitudines *a b* proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines. (*longitud. scil.*)

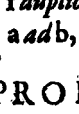


Si enim commensurabiles acciperentur, & esset earum proportio, qua numeri ad numerum, contra hypothesin. ✠ 5. X.

LEMMA.

Si sint tres quantitates *a, b, c*, continuè proportionales, & aliæ tres *d e f* continuè quoque proportionales; sitq; ut prima illarum *a*, ad tertiam *c*, ita prima *d* harum ad tertiam *f*; erit & ut prima *a* illarum ad secundum *b*; ita prima harum *d* ad secundam *e*.

D 29 E 42 F 36

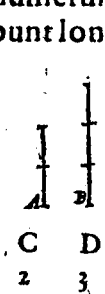


Cum enim rationes a ad c & d ad f duplicatæ sint eædem, etiam dimidiæ a ad b, & d ad e eædem erunt.

PROPOSITIO IX.

Theorema 7.

Quæ à rectis lineis *a b*, longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se rationem habent, quam quadratus numerus *e* ad quadratum *f* numerum: Et quadrata ex *a* & *b* inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus *e* ad quadratum numerum *f*; & latera *a b* habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis *a b* longitudinem cõmensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus *e* ad quadratum numerum *f*: & quadrata ex *a* & *b* inter se proportionem non habẽtia, quam quadratus numerus *e* ad quadratum numerum *f*; neque latera *a* & *b* habebunt longitudine commensurabilia.



a 5. X. *Cum rectæ* a, b *sint commensurabiles longit. a erunt ut numerus ad numerum. Sit autem* a *ad* b *ut* c *numerus ad numerum* d; *quarũ quadrati sint* e & f. *Quoniam ergò* a *ad* b *est ut* c *ad* d; *quadratum autem ex* a *ad quadratum*

datum ex b β *habet duplicatam rationem laterum* γ *ſicut & numerus quadratus* e *ad numerum quadratum* f *laterum* c *&* d, *erit eadem proportio quadratorum ex* a *&* b, *quæ eſt numerorum quadratorum* e *&* f. β 20. VI.

Deinde *ſit quadratum ex* a *ad quadratum ex* b *ut numerus quadratus* e *ad numerum quadratum* f, *erunt recta* a *&* b *longitudine commenſurabiles. Cum enim rationes eadem quadratorum ex rectis* a *&* b, *& numerorum quadratorum* e f β *&* γ *ſint duplicatæ ſuorum laterum* a, b, *&* c, d, *erit, ut numerus* a *ad numerum* d, *ita recta* a *ad rectam* b, δ *erunt* d, a, b, *commenſurabiles.* γ 11. VIII. δ 6. X.

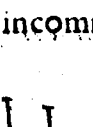
Tertiò ſint a b *incommenſurabiles, etiam quadrata ex ipſis non erunt ut numerus quadratus ad numerum quadratum; quia ita forent* a, b, *commenſurabiles contra hypotheſin. Denig; quadratum ex* a *non habeat rationem ad quadratum ex* b, *quam numerus quadratus ad quadratum, erunt etiam longitudine incommenſurabiles* a *&* b; *ſi enim eſſent commenſurabiles, etiam quadrata ex ipſis eſſent ut numerus quadratus, ad quadratum, contra hypotheſin.*

PROPOSITIO X.

Theorema 8.

Si quatuor *a b c d* magnitudines

proportionales fuerint, prima *a* verò secundæ *b* fuerit commensurabilis; & tertia *c* quartæ *d* commensurabilis erit. Et si prima *a* secundæ *b* fuerit incommensurabilis, & tertia *c*, quartæ *d* incommensurabilis erit.

α 5. X. 

Cum enim a & b *sint commensurabiles,* α *habebunt rationem numerorum,* e ad f. *Est verò etiam* c ad d ut a ad b, *ergo etiam* c ad d *est ut* e ad f. β *Sunt ergò inter se commensurabiles.*

β 6. X.

γ 7. X. E F

3 2

Contra si a & b *sint incommensurabiles, etiam* γ *non sunt ut numerus ad numerum. Ideoq; nec* c ad d, *quæ ponuntur ut* a ad b, *erunt ut numerus ad numerum, adeoq; etiam* c & d *incommensurabiles erunt.*

LEMMA.

Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quam Quadratus numerus ad Quadratum numerum.

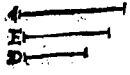
α 26. IIX. *Inventi plani non similes, omnes non* α *habent rationē quam quadratus ad quadratum. Sunt ḡ tales*

talis numeri primi omnes, & quorum unus quadratus, alter non, &c.

PROPOSITIO XI.

Problema 3.

Propositæ rectæ lineæ *a* invenire duas rectas lineas *d e* incommensurabiles, alteram *d* quidem longitudine tantùm, alteram *e* verò etiam potentia.



a Assumtis numeris b c, *& inuestigetur recta* d, *ad cujus quadratum sit quadratum rectæ* a, *ut* b *ad* c, *erit* d *ipsi* a *longitudine tantùm incommensurabilis. Quia enim quadratum ex* a *ad quadratum ex* d *est, ut numerus* b, *ad numerum* c, *sed* b *& c non sunt quadrati: Ergò quadratum ex* a *ad quadratum ex* d *non erit ut numerus quadratus ad numerũ quadratum: γ Ideoq;* a *& d sunt rectæ longitudine incommensurabiles; & lõgitudine quidem tantùm. Cùm n. quadrata earum habeant proportionem numerorũ* b *ad* c, *δ erunt commensurabilia. Deinde inter rectas* a *& d longitudine tantùm incommensurabiles*

a per lem. ma 10. X. & per lemma 6. X.

γ 9 X.

δ 6. X.

ε 13. X. *a inveniatur media proportionalis* e, *quæ & longitudine & potentia incommensurabilis erit ipsi* a. *Quia enim quadratum ex* a, *ad quadratum ex* e *est, ut* a *ad* d; *sed* a *ipsi* d *est longitudine in-*
ζ 10. X. *commensurabilis;* ζ *erit ergo quadratum ex* a *quadrato ex* e *incommensurabile, & ita recta* a e *etiam potentia incommensurabiles.*

PROPOSITIO XII.

Theorema 9.

Quæ *a b*, eidem *c* magnitudini sunt commensurabiles, & inter se *a* & *b* sunt commensurabiles.



α 5. X. *Cum enim* a, c *sint commensurabiles, a habent rationem numerorum* d, e, *sicut &* c b *numerorum* f, g. β *Assumtis autem* h, i, k,
β 4. VIII. *tribus numeris minimis in rationibus datis* d *ad* e, *&* f *ad* g; *erit* h
D 10 E 8 *ad* i, *ut* d *ad* e, *id est,* a *ad* c; *&* i
F 2 G 3 *ad* k, *ut* f *ad* g, *id est* c *ad* b. *Itaq;*
H 5. I 4. K 6 *ex æquo erit* a *ad* b, *ut* h *ad* k. *Id est, ut numerus*
γ 6. X. *ad numerum, & ita* γ *commensurabiles.*

PROPOSITIO XIII.

Theorema 10.

Si

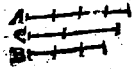
Si sint duæ magnitudines *a b*, & altera *a* quidem eidem *c* sit commensurabilis, altera *b* verò incommensurabilis: incommensurabiles erunt magnitudines *a b*.

Si minus, & eidem a sit commensurabilis b, *a erunt etiam* b & c *commensurabiles, contra hypothesin.* a 11. X.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 11.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera *a* autem ipsarum magnitudini cuipiam *e* incommensurabilis fuerit: & reliqua *b* eidem *c* incommensurabilis erit.



Sin minus, cum a ipsi b *sit commensurabilis, & erunt etiam* a & c *commensurabiles, contra hypothesin.* a 12. X.

Scholium.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

LEMMA.

Duabus datis rectis inæqualibus *bg* & *c*; invenire id, quo major *bg* plus poteſt quàm minor, *c*.

α 1. IV. X



Deſcripto ſemicirculo ſuper h g *aptetur* h d *æqualis ipſi* c, *junctis* d g; *plus poterit recta* h g *quàm* h d *vel* c *quadrato rectæ* d g. *Cum enim* h d g *angulus* ζ *ſit rectus erit quadratum ex* h g *æquale* γ *quadratis ex* d h. & d g. *Atq; ſic* h g *recta plus poteſt quàm* c *quadrato* d g.

ζ 31. III.
γ 47. I.

PROPOS: XV.

Theorema 12.

Si quatuor *a*, *b*, *d*, *e*, rectæ lineæ proportionales fuerint, prima *a*. verò tantò plus poſſit, quàm ſecunda *b*, quantum eſt Quadratum rectæ lineæ *e*, ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia *d* tantò plus poterit; quàm quarta *e*, quantum eſt quadratum rectæ *f*, lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine: Quod ſi prima *a* tantò plus

poſ-

posſit quàm ſecunda *b*; quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: Et tertia *d* tantò plus poterit, quàm quarta *e*, quantum eſt quadratum rectæ lineæ *f* ſibi longitudine incommenſurabilis.



Cum ſit ut a *ad* b, *ita* d *ad* e, *erunt etiam ex illis rectis deſcripta quadrata ut recta*; *ſed quadratum ex* a *eſt* β *æquale quadratis ex* b c, *& quadratum ex* d *quadratis ex* e, f. *Ergò erit ut quadrata ex* b, c *ad quadratum ex* b; *ita quadrata ex* e f, *ad quadratum ex* e: *Et dividendo, ut quadratum ex* c *ad quadratum ex* b; *ita quadratum ex* f *ad quadratum ex* e. *Ergò ut recta* c *ad rectam* b; *ita recta* f *ad rectam* e. *Et convertendo ut* b *ad* c, *ita* e *ad* f. *Cùm autem ſit ut* a *ad* b, *ita* d *ad* e, *& ut* b *ad* c, *ita* e *ad* f, *erit etiam ex æquo, ut* a *ad* c, *ita* d *ad* f. γ *Quare* a *ſi fuerit longitudine commenſurabilis ipſi* c, *etiam* d *ipſi* f *commenſurabilis longitudine erit, & ſi incommenſurabilis, incommenſurabilis.*

α 22. VI.

β ex hypotheſi.

γ 10. X.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Theorema 13.

Si duæ magnitudines *a b*, *b c* commensurabiles componantur; & tota magnitudo *a c* utriq; ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo *a c*, uni *a b* ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines *a b* & *b c* commensurabiles erunt.



α 3. X. α *Sit communis mensura* d. *Cum ergò* d *metiatur* a b, b c, *etiam* a c *totam* β *metietur, eruntq;* a c & a b *commensurabiles propter communem mensuram* d; *sicut &* a c & b c; *eaq; propter utrique* a b & b c *commensurabilis est* a c. *Deinde si tota* a c *alteri; ex quibus composita est ut* a b *commensurabilis, erunt* a b & b c *commensurabiles. Assumta enim communi mensura* d, *erit eadem* d *reliquæ* b c *mensura. Ideoq; commensurabiles sunt* a b, b c *propter communem mensuram* d.

β 3. ax.

Corollarium.

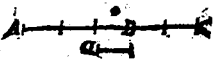
Si tota magnitudo *a c* ex duabus *a b*, *b c*, composita, commensurabilis fuerit

fuerit alteri *ab* ipsarum, eadem *ac* & reliquæ *bc* commensurabilis erit.

PROPOS. XVII.

Theorema 14.

Si duæ magnitudines *ab*, *bc* incommensurabiles componantur, & tota magnitudo *ac* utrique *ab*, & *bc* ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo *ac* uni ipsarum *ab* incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines *ab*, & *bc* incommensurabiles erunt.



Si non utriq; tantùm alteri, ut a b, *sit commensurabilis, habens* d *mensuram communem. Itaq;* d *metiens totam* a c, & *ablatam* a b, *etiam* a *metietur reliquam* b c, & *commensurabiles erunt* a b, b c, *contra hypothesin. Deinde tota* a c *uni ipsarum* a b *incommensurabilis existens, eciam alteri* b c *incommensurabilis erit. Si non, etiam contra hypothesin ipsi* a b *commensurabilis* & *foret.* 03. X. 016. X.

Corollarium.

Si tota magnitudo ex duabus compo-

compoſita, incommenſurabilis ſit alteri illarum, eadem & reliquæ incommenſurabilis eſt.

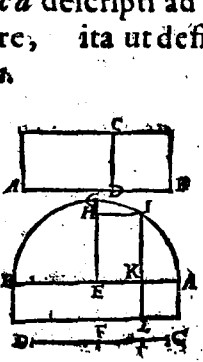
LEMMA 1.

Si ad aliquam rectam *a b* applicetur parallelogrammum *a c*, deficiens quadrata figura *b c*; parallelogrammum *a c* applicatum æquale eſt ei rectangulo quod ſub ſegmentis *a d*, *a b*, vel *d c*, rectæ *a b*, ex applicatione factis continetur.

Quod patet ex 28. VI.

LEMMA 2.

Duabus datis rectis *a b*, *c d*, inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore *c d* deſcripti ad majorem *a b* applicare, ita ut deficiat figura quadrata *l a*.



Supra

Supra a b *describatur semicirculus, sitq;* e g *radius ad* b *perpendicularis. Secta* c d *bifariam in* f, *sumatur* e h *aqualis* c f *rectæ; & per* h *puncto agatur* h i *parallela ipsi* a e, *& per* i *puncto* i k l *parallela ipsi* g e, *sumtaque* k l *aquali ipsi* a k, *perficiatur* l b *rectangulum, &* l a *quadratum. Dico* l b *rectangulum quartæ parti quadrati* c d *esse æquale, applicatum ad rectam* a b; *deficiens figura quadrata* l a. *Quoniam* k i *media proportionalis est inter* a k, k b *erit rectangulum* a k b *quadrato* k i *æquale; id est, quadrato ex* β e b *vel* c f, γ *quod quarta pars est quadrati* c d.

α 13. VI.

γ 34. I. 4. II.

LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ *a b*, *c d*, inæquales, & ad majorem *a b* applicetur quarta pars *l b* Quadrati, ex minore *c d* descripti, deficiens figura quadrata *l a*, non erunt segmenta *a k*, *k b*, quæ ex applicatione sunt, æqualia.

Si æqualia sunt segmenta a k, k b *& siquidem parallelogrammum applicatum ad* a b *deficiens figura quadrata ex* a k *descripta, æquale est rectangulo* a k b: *Est verò sub æqualibus* a k, k b *quadratum; erit parallelogrammum dictam*

α per Lemma 17. X.

dictum quadratum ex b k, *dimidio ipsius* a b *descriptum, & quadratum ex* a b *quadratum ipsius parallelogrammi. Cum autem ex hypothesi quadratum ex* c d *ejusdem parallelogrammi applicati sit quadruplum, nempe quarta partis quadrati ex* c d. *Igitur quadrata rectarum* a b, c d *sunt æqualia, ipsæque rectæ contra hypothesin æquales.*

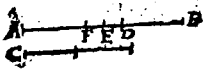
PROPOSITIO XIX.

Theorema 15.

Si fuerint duæ rectæ lineæ *a b* & *c* inæquales, quartæ autem parti Quadrati, quod fit à minori *c* æquale parallelogrammum ad majorem *a b* applicetur, deficiens figurâ quadrata, & in partes *a d*, *d b*, longitudine commensurabiles ipsam dividat; major *a b* tantò plus poterit, quàm minor *c*; quantum est quadratum rectæ lineæ *f d* sibi longitudine commensurabilis. Quod si major *a b* tantò plus possit, quàm minor quantum est quadratum rectæ lineæ *f d* sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati,

a 2. Lem. 17. X.

drati, quod fit à minori c æquale parallelogrammum ad majorem a applicetur, deficiens figura quadrata, in partes ad, db longitudine commensurabiles ipsam dividet. a 1. lem. 17. X.



Quoniam enim a d β *major est quàm* d b, *secetur* a b *bifariam in* e, *ipsiq;* e d *sumatur aequalis* e f. *Cum autem tota* a e *&* e b, *ablatae* ad *&* e f *sint aequales, erunt & reliqua* a f, d b *aequales. Cumq; recta* a b *in aequalia in* e, *item in inaequalia in* d, *sit secta,* γ *erit rectangulum super* a d b *unà cum quadrato* e d *aequale quadrato ex* e b: *& quadruplum rectanguli* a d b *& quadrati ex* e d *aequale erit quadruplo quadrati ex* e b. *Sed quadruplo rectanguli* a d b *aequale est quadratum ex* c: *& quadruplo quadrati ex* e d *aequale est quadratum ex* f d (*cum quarta pars quadrati ex tota aliqua rectâ descripti aequalis sit quadrato ex totius rectae dimidio descripto*) *& quadruplo quadrati ex* e b *aequale est quadratum ex* a b. *Quadrata igitur ex* c *&* f d *sunt aequalia sunt quadrato ex* a b; *rectaq; ab potest recta* c *quadrato rectae* f d. *Hanc dico commensurabilem toti* a b. *Cum enim* a d, d b *sint commensurabiles, erit tota* a b *parti* d b *commensurabilis longitudine: cum item ipsa* d b *composita ex* δ 16. X.

d b

d b & a f *sit longitudine cõmensurabili (quæ dupla est ipsius* d b) *Ergò cum utraq;* a b & *composita ex* d b, a f *longitudine sit commensurabilis*
ipsi d b, *erunt etiam* a b & *composita ex* d b, a f *longitudine inter se cõmensurabiles: adeoq; cum* a b *composita ex* a f, d b *tanquam una recta &* f d *commensurabilis sit longitudine compositæ ex* a f, d b, *eadem* a b *reliquæ* f d *longitudine commensurabilis erit* ζ. *Ergò* a b *plus potest quàm* c *quadrato rectæ* f d *longitudine sibi commensurabilis.*

Contra si a b *plus potest quàm* c *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis &c. erunt segmenta* a d, d b *commensurabilia. Eodem nimirũ modo ostendetur* a b *plus posse quàm* c *quadrato rectæ* f d, *longitudine sibi commensurabilis. Cum autem* a b *tota composita ex* f d, a f & d b *tanquam una sit lõgitudine commensurabilis ipsi* f d, *eadem commensurabilis* ζ *erit reliqua ex* a f, d b *compositæ. Est verò &* a f, d b, *composita etiã dupla commẽsurabilis ipsi* d b. *Itaq; cum utraq;* a b & d b *compositæ ex* a f, d b *longitudine sit commensurabilis, erunt etiam* a b, d b *longitudine commensurabiles: adeoq; cum tota* a b, *ex* a d, d b *composita ipsi* d b *sit commensurabilis longitudine, ipsa* a d, d b *etiam inter se commensurabiles* ὁ *erunt longitudine.*

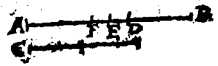
ζ m. X.

ζ Cor. 16. X.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 16. 51

Si fuerint duæ rectæ lineæ *a b*, & *c* inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore *c*, æquale parallelogrammum ad majorem *a b* applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major *a b* tantò plus poterit quam minor *c*, quantum est quadratum rectæ lineæ *f d* sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major *a b* tantò plus possit, quàm minor *c*, quantum est quadratum rectæ lineæ *f d* sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore *c*, æquale parallelogrammum ad majorem *a b* applicetur, deficiens figura quadrata, in partes *a d d b* longitudine incommensurabiles ipsam dividet.



Omnia constituantur ut in præcedenti propositione, nisi ut a d, d b *fiant incommensurabiles longitudine. Quod cum ita fit* a *erit etiam tota* a b *parti* d b *longitudine incommensurabilis. Sed* d b *ei commensurabilis sua dupla ex* d b, a f *compositæ.* a 17. X.

Igitur cum duarum commensurabilium, d b & *composita ex* d b, a f, *una* d b *incommensurabilis sit ipsi* a b, *etiam reliqua ex* d b, a f *compositæ eidem* a b *incommensurabilis* β *erit: adeoq; cum* a b *ex* a f, f d & d b *composita sit incommensurabilis longitudine compositæ ex* a f; d b; *erit eadem* a b *etiam reliquæ* f d *incommensurabilis, atq; sic* a b *plus potest quàm* c, *quadrato rectæ* f, d *longitudine sibi incommensurabilis.*

β 14. X.

Contra in partes a d, d b *incommensurabiles divisa ostenditur linea* a b. *Iisdem enim, ut prius retentis, erit* a b *ipsi* f d *incommensurabilis. Itaq; cum tota* a b, *ex* f d, a f, d b *composita, ipsi* f d *longitudine sit incommensurabilis, eadem etiam* a b *reliquæ ex* a f & d b *compositæ incommensurabilis erit. Sed una recta ex* a f & d b *ipsi* d b *longitudine est commensurabilis, utpote dupla. Duarum itaq; commensurabilium, compositæ ex* a f, d b & d b; *ipsâ compositâ ex* a f, d b *incommensurabili ipsi* a b, β *erit etiam reliqua* d b *eidem* a b *incommensurabilis. Cum itaq; tota* a b, *composita ex* a d, d b *longitudine incommensurabilis sit ipsi* d b, α *erunt* & *ipsæ* a d, d b *inter se incommensurabiles.*

Hactenus actum est de commensurabili & incommensurabili. Nunc transeundum est ad Rationales & Medias.

LEM-

LEMMA I.

Quoniam demõstratum est, lineas longitudine cõmensurabiles, omninò & potentia cõmensurabiles esse, potentia verò commensurabiles non omninò & longitudine, sed posse & longitudine commẽsurabiles esse & incõmensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit lõgitudine, illam vocari Rationalem, & ipsi cõmensurabilem non solùm longitudine, sed etiam potẽtia: longitudine enim cõmẽsurabiles, omninò & potentia cõmensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, siquidem & longitudine, dicetur & sic, Rationalis & commensurabilis ipsi longitudine & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

LEMMA II.
EX PROCLO.

Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solùm cõmensurabiles; atq; ob id rursus dicũtur Rationales & cõmensurabiles inter se, quatenus Rationales; cõmensurabiles, inquam, inter se, vel longitudine & potẽtia vel potentiâ solùm: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; si verò potẽtia inter se solum sunt commensurabiles: dicũtur ipsæ quoque Rationales, potentia solùm inter se commensurabiles.

LEMMA III.

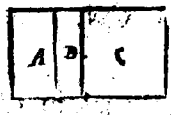
Si sint duæ rectæ lineæ, *cd*, *bd*; erit, ut prima *cd* ad secundam *db*: ita quadratum *df*, quod fit à prima *cd*, ad rectan-

gangulum *dg*, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: & ut secunda *db* ad primam *dc*; ita rectangulum *dg* sub ipsis, ad quadratum *ce* ex prima.



Cum enim rectangula ce, cg *sint æque alta, & sint ut* α I. VI. *latitudines.*

LEMMA IV.



Spacium *a* Rationali spacio *b* commensurabile & *a* ipsum Rationale est.

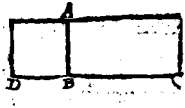
Sit enim c *quadratum rationale, Cum ergo* b *sit rationale, &* α *erit Rationali* c *commensurabile:* α 9. def. X. *Cum* β *& a ipsi* b *sit commensurabile, etiam* a *&* c *tanquam commensurabilia ipsi* b, *inter se* β *commensurabilia erunt, & sic etiam Rationali* c *commensurabile* a, *ipsum quoq; rationale erit.* β 12. X.

PROPOSITIO XX.

Theorema 17.

Quod sub Rationalibus, longitudine commensurabilibus, rectis lineis *a b*, *b c*, secundum aliquem prædictorum modorum, (*in lemmate secundo propositorum, ut longit.*) continetur Rectangulum, *a c*, rationale est.

α 9. def.
β 1. VI.
γ 10. X.



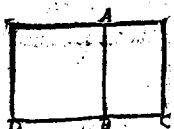
Super alterutra illarum, ut a b *fiat quadratum* a d *rationale. Quia autem* a b, *id est,* b d, *&* b c *rationales commensurabiles sunt longitudine, &* β *est, ut* d b *ad* b c, *ita* a d *ad* a c, *erunt etiam* a d *&* a c *commensurabilia, atq;* a d *rationali, commensurabile* a c *etiam Lemma rationale.*

PROPOSITIO XXI.

Theorema 18.

Si Rationale *a c* ad Rationalem *a b* applicetur, latitudinem *b c* efficit Rationalem, & ei *a b*, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

α 12. X.
β 1. VI.
γ 6. def. X.



Ex a b *fiat quadratum* a d, *quod est rationale, erunt* a d, *ac rationalia; adeoq; α commensurabilia. Sed* β *ut* a d *ad* a c, *ita est* d b, *id est,* a b *Rationalis ad* b c γ *rationalem.*

LEMMA I.

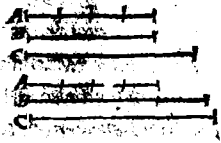
Recta linea potens spacium irrationale, irrationalis est.

Si

Si enim lineæ illius quadratum æquale sit ſpatio irrationali, ipſum irrationale eſſe oportet, aut quadratum illud foret contra hypotheſin rationale, propter ipſam lineam rationalem. α,20.X. 12.def.X.

LEMMA 2.

Duas rectas *b c* Rationales potentia ſolum commenſurabiles invenire.



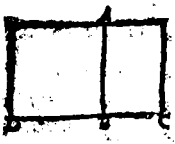
Ha, ut & rationales longitudine commenſurabiles, duplices tantùm ſunt: aut enim illarum una, ut b, *longitudine eſt commenſurabilis datæ* a, *& tum ipſi* a *æquali aſſumtæ* b *rationali* α *inveniatur potentia tantùm commenſurabilis, vel longitudine tantùm incommenſurabilis, quæ eſt ipſa* β *rationalis eſt: Aut neutra illarum longitudine ipſi* a *eſt commenſurabilis, & tum primum* b: *& huic* c α *inveniatur potentia cõmenſurabilis. Erunt ergò rationali* a *potentia commenſurabiles* γ b *&* δ c, *ipſæ quoq; rationales.* αII.X. β6.def.X γ ex cõſtr. δII. X.

PROPOSITIO XXII.

Theorema 19.

Quod ſub Rationalibus *ab, b c* potentia tantùm commenſurabilibus

rectis lineis continetur rectangulum a c, Irrationale est: & recta linea ipsum potens, rationalis est. Vocetur autem Media.



α 1. VI. β 10. X. γ 10. def. X. δ per Lemma 1. 21. X. ε 17. VI.

Ex altera, ut a b, *descriptum sit quadratum* a d, *quod rationale est. Quoniam vero* a *est ut* b d *id est*, a b *ad* b c; *ita* a d *ad* a c; & a b, b c *sunt longitudine incommensurabiles*; β *erunt &* a d, a c *incommensurabilia; cum* δ *quadratum* a d *sit rationale*, γ *irrationale erit* a c *rectangulum*, & *ipsi aequale quadratum describens linea* δ *irrationalis. Hac autem linea cuiuscunque* a b & b c *sit media proportionalis, vocatur Media*, ε *& rectangulum dicitur medium, quod vel sub duabus potentia tantum commensurabilibus continetur, ut* a c: *vel quod alteri cuipiam, sub talibus lineis comprehenso, aequale est, quia aequale est quadrato super media proportionali descripto.*

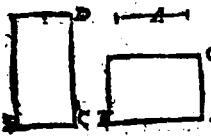
PROPOSITIO XXIII.

Theorema 20.

Quod à Media *a* fit, ad Rationalem *b e* applicatum, latitudinem efficit Rationalem *c d*, & *e i b c*, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

α 45. I.

Quoniam



Quoniam a est Media, potest rectang. c g duabus rationalibus e f, f g potentia tantùm commensurabilibus cõtentum, & rectangula b d, a g sunt aequalia, latorum & reciprocè proportionalium, ut b c ad e f; ita f g ad c d. γ Et ut quadratum ex b c, ad quadratum ex e f, quae super rationalibus lineis sunt commensurabilia; ita quadratum ex f g, ad quadratum ex c d inter se commensurabilia, ipsae q rectae f g & c d δ commensurabiles; & cum f g sit rationalis, utraq; etiam Rationalis erit. Sed c d ipsi b c est incommensurabilis. Cum enim e f, f g sint rationales potentia tantùm commensurabiles; & sit q, ut e f ad f g, ita quadratum ex e f, ad rectang. e g, ε erit quadratum ex e f rectangulo e g incommensurabile, & sic rectangulo b d. At quadratum ex e f commensurabile est quadrato ex c d (quia lineae illae sunt rationales & potentia tantum commensurabiles.) Itaq; cum eidem quadrato ex e f rectangulum b d sit incommensurabile, etiam b d rectang. ζ erit incommensurabile quadrato c d. Cum verò c d & b c sint ut quadratũ c d & rectang. b d incommensurabilia; & erunt ipsae quoq; longitudine incommensurabiles. Est ergo rationalis c d, & rationali b c potentia tantũ commensurabilis sed longitudine incommensurabilis.

γ 22. VI.

δ 10. X.

ε Lemma 19. X.

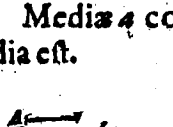
ζ 14. X.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 21.

Media *a* commensurabilis, *b*, Media est.



Sit d *rationalis, ad quam* *a applicetur rectang.* d e *æquale quadrato ex* a, *β erit* c e *rationalis ipsi* d *longitudine incōmensurabilis. Et* d e *a applicetur rectangulū* d f *æquale quadrato ex* b. *Cum ergò* a, b *sint commensurabiles; ipsarum quadrata, id est, rectangula* d e, d f *etiā commensurabilia erunt.* γ. *Est autem, ut* d e *ad* d f, *ita recta* c e *ad rectam* c f, *& e c & c f) longitudine sunt commēsurabiles. Sed* c e *est rationalis, ipsi* c d *potētia tantùm commensurabilis.* δ. *Ita d & & c f eidem* c *longitudine incommensurabilis* ε *erit. Et quia rationalis est* c f, *cum rationali* c d *commensurabilis sit potentia, potentia etiam commensurabiles erunt* c d, f. ζ *Ac proind* b *recta potens rectangulum* d f *sub rectis* c d, c f *potentia tantùm commensurabilibus, media est.*

α 45. I.
β 13. X.
γ 1. VI. & 10. X.
δ 14. X.
ε 11. X.
ζ 21. X.

Corollarium.

Spacium *d f* Medio spacio *de* commensurabile, medium est.

Patebat

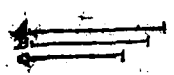
Patebat, quod utraq; continebantur rectis potentia tantum commensurabilibus.

LEMMA 1.

Congruit hoc omniquaq; cum lemmate 1, 19. propos. nisi quod loco Rationalis semper legendum est Medium.

LEMMA 2.

Duas rectas Medias *a b* longitudine commensurabiles; item duas *a c* potentia tantùm commensurabiles invenire.



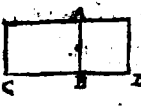
Si b ipsi a Media longitudine; c verò eidem a potentia tantùm commensurabilis inveniatur, utraq; etiam a erit Media, a b quidem longitudine, a c verò potentia tantum commensurabiles media. a 14. X.

PROPOSITIO XXV.

Theorema 22.

Quod sibi Mediis Longitudine commensurabilibus rectis lineis *a b, b c* continetur rectangulum *a c*, Medium est.

Ex



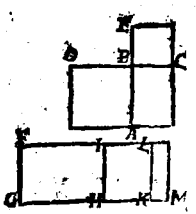
Ex a b *medijs fiat quadratum* a d, *quod erit Medium, cum a ſit, ut* d b *ad* b c, *ita* a d *ad* a c: *ſunt autem* d b *id eſt* a b & b c *longitudine commenſurabiles.* I. *tag.* a d, a c & *erunt commenſurabiles.* γ *Quare ſpacium* a c *medio* a d *commenſurabile Medium eſt.*

& 1. VI.
& 10. X.
γ Cor. 24. X.

PROPOSITIO XXVI.

Theorema 23.

Quod ſub mediis potentia tantum commenſurabilibus rectis lineis *a b, b c* continetur rectangulum, *a c*, vel Rationale eſt, vel Medium.



Deſcripto quadrato ex a b & b c *a mediis ad Rationalem* f g *applicentur rectangula* f h, h l, l m *aqualia ſpacijs* a d, a c, c e, *ut* f m *fiat rectangulum unum. Cum itaque* a d & c e *ſint media, etiam* f h, l m *erunt media,* γ *eorum* δ *latitudines* g h, k m *rationales propter* f g, k l δ *aquales rationales, quibus ſunt applicata,* & *potentia cõmenſurabiles erunt. Cum* δ a b, b c *ſint potentia commenſurabiles, etiam earum quadrata* a d, c e, & *his aqualia rectangula* f h, l m

& 22. X.
& 25. I.
γ 23. X.
δ 34. I.

com-

commensurabilia erunt. ε Sed ut fh ad l m ita recta g h ad k m. ζ Sunt igitur g h, k m longitudine inter se commensurabiles. Et quia rationalis fg potentia sunt commensurabiles, etiam rectangulum sub gh, k m comprehensum η rationale erit. θ Quia verò est, ut d b ad b c, ita a d ad a c: & ut a b ad b e, ita a c ad c e, erit ut a d ad ac, ita a c ad c e; cum sit b d ad b c, ut a b ad b e, quia utrique utrique æqualis. Praeterea & ipsis æqualia rectangula fh, h b, l m erunt proportionalia, ut & ipsorum Bases g h, hk, k m: & adeò rectangulum sub g h, k m rationale quadrato ex h k erit æquale quod & ipsum & ipsius latus h k rationale est; & ob id fg rationali expositæ longitudine vel potentia κ commensurabilis est h k. Et si h k ipsi h i id est fg longitudine commensurabilis fuerit, μ erit rectangulum h l rationale: Sed si tantum potentia α erit Medium. Est ergò rectangulum sub Medijs potentia tantum commensurabilibus vel Rationale vel Medium.

ε 1. VI. ζ 10. X. η 20. X. θ 17. VI. κ 6. def. α 21. VI. ζ 16. V.

Scholium.

Facilius quàm per 45. I. potest dato a c rectangulo æquale fieri ad b rationalem datam, si tribus his α applicetur quarta proportionalis b k. Rectangulum enim sub extremis b i, b k æquale est rectangulo a c ex inter mediis, signi-

Siquidem verò rectangulum sub duabus mediis potentia tantum commensurabilibus vel rationale vel medium est, docetur propos. 28. quando inveniendæ sint illæ medias, quæ comprehendunt rationale; & 29. quæ Medium: Et sic ex

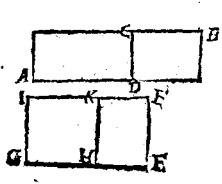
γ 10. X. *hactenus demonstratis colligitur, γ Rectangulum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus; Rationale esse, potentia verò*

δ 22. X. *Medium. Rursus δ rectangulum sub Mediis longitudine commensurabilibus esse Medium. Sub Mediis verò potentia tantum commensurabilibus vel Rationale vel Medium esse. (Sub Mediis verò nec potentia nec longitudine commensurabilibus, est Medio Medium æquale rectangulo sub Rationali & Irrationali Media; quam speciem Euclides non habet.)*

PROPOSITIO XXVII.

Theorema 24.

Medium *ab* non superat Medium *ac* Rationali. *db.*



α 45. I. *Si enim* db *est Rationale, posita* ef *linea rationali* α *applicetur* eg *medio* ab *æquale, & medio* ac *rectangulo* eh *æquale, erit* δ db *rationa-*

tionali aquale k g. Cùm ergò Media e g, e h ad β. 23. X.
tionalem e f sint applicata β, erunt f g, f h Ra-
tionales incõmensumbiles longitudine ipsi e f ra-
tionali. Cum item rationale h i ad rationalem
h k, id est, e f sit applicatum, γ erit h g rationa- γ. 21. X.
lis longitudine ipsi e f cõmensurabilis. Sed e f ipsi
f h longitudine est incommensurabilis. Ergò h g
eidem f h lõgitudine incõmensurabilis δ erit. ε Ve- δ. 14. X.
rùm ut f h ad h g, ita quadratum ex f h, ad re- ε. 3 Lem-
ctangulum f h g. Itaq; quadratũ ex f h incõmen- ma 19 X.
surabile ζ erit rectangulo f h g. Sed quadrato ζ. 10. X.
ex f h cõmensurabile est quadratum ex h g (quia
utraq; ex rationalibus lineis sunt descripta) ad-
traq; duo quadrata ex f h, h g simul commensura-
bilia sunt quadrato ex f h; & η rectãgulum f h g η. 16. X.
commensurabile est bis sub f h, h g sumto rectan-
gulo (quia duplum) Itaq; quadrata f h, h g simul
incõmensurabilia δ erũt rectangulo bis sumto sub
f h, h g. δ Quare & compositum ex quadratis ϑ. 17. X.
rectarum f h, h g, & ex bis sumto rectangulo
f h g incõmensurabile est composito ex quadratis
rectarum f h, h g. Sed quadratis f h, h g, unà
cum rectangulo f h g bis sumto κ aquale est qua- κ. 4. II.
dratum f g. Ergo quadratum ex f g; composi-
to ex quadratis rectarum f h, g h incommensu-
rabile erit. Quod compos. cum sit λ rationale, λ. 4 Lem-
etiam ipsi incommensurabile quadratum ex f g ma 19. X.
erit irrationale, & sic etiam recta f g irratio-

nali, contra hypothesin, quæ illam longitudine incommensurabilem ipsi e f ponebat.

Scholium.

Rationale *eg* superat Rationale *eh*, *kg* Rationali.

α 9. def. X. γ 12. X. γ cor. 16. X. δ 4. Lemma 19. X.

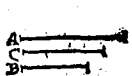
Quia enim e g, e h *sunt rationalia, & erunt eadem commensurabilia quadrato rationalis expositæ; & quare & inter se commensurabilia. Itaq; cum totum* e g *ex* e h, k g *compositum, ipsi* e h *sit commensurabile; erit quoq; idem* e g *reliquo* k g *γ commensurabile. Sed* e g *est rationale.* δ *Ergo &* k g *Rationale erit.*

PROPOSITIO XXIIX.

Problema 4.

Medias *c d* invenire, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

α Lemma 2. 21. X. β 13. VI. γ 12. VI.



Inter α assumtas a, b *rationales potentia tantùm commensurabiles, β cadat media* c, *& γ fiat, ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d. *Erunt* c d *mediæ potentia tantùm commensurabiles, quæ comprehendunt Rationale. Rectangulum sub* a b *rationalibus*

poten-

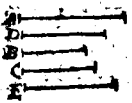
potentia tantùm commensurabilibus δ Medium est, & c illud potens ε Media. Sed ut a ad b, ita c ad d: a & b sunt potentia tantùm commensurabiles. ζ Ergò & c, d: & propter c Mediam etiam d η Media. Sunt itaq; inventæ c d mediæ potentia tantùm commensurabiles; Quæ etiam Rationale continebunt. Cùm enim sit ut a ad b, ita c ad d; etiam permutando est, ut a ad c, ita b ad d. Sed ut a ad c, ita c ad b. Ergo ut c ad b, ita b ad d: ideoq; b media proportionalis inter c & d: poterit rectangulum sub c d comprehensum. Sed quadratum ex rationali, est rationale. Ergò & rectangulum sub c d, rationale est.

δ 22. X. ε 17. VI. ζ 10. X. η 24. X.

PROPOSITIO XXIX.

Problema 5.

Medias de invenire, potentiâ tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant.



α Sumtis tribus potentia tantùm commensurabilibus, inter a, b β Media d: γ fiat, ut b ad c, ita

α Lemma 2. 21. X. β 13. VI. γ 12. VI.

c, ita d ad e. *Erunt* d, e *media potentia tantùm commensurabiles continentes Medium. Cum* a, b *rationales potentia tantùm commensurabiles sint*
δ 22. X. *ex illis rectangulum* δ *erit medium. & illud*
ε 17. VI. *potens* d *media. Sed, quia, ut* b ad c *potentia tan-*
ζ 10. X. *tum commens. ita* d ad e ζ *etiam potentia tantum commensurabiles sunt* d *&* e, *&* Media d cõmen-
η 24. X. *surabilis* e η *media. Sic itaq;* d, e *mediæ potentia tantum cõmensurabiles, sunt inventæ; quæ etiam continebunt Medium. Quia enim est, ut* b ad c, *ita* d ad e; *& permutando, ut* b ad d, *ita* c ad e *erit. Ut autem* b ad d, *ita* d ad a; *erit ergò* d ad a
θ 16. VI. *ut* c ad e. *Itaq; rectangulum sub* d, e, θ *æquale est ei, quod sub* a, c. *Hoc autem sub rationalibus potentia solum commensurabilibus &* δ *Irrationale est & Medium. Ergò & rectangulum sub* d, e.

Scholium. i.

Duos numeros planos similes invenire.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

Assumptis quatuor quibuvis numeris proportionalibus, ut a ad c, *ita* b ad d, *ex* a *in* b, *ut & ex* c *in* d *facti numeri* e *&* f *sunt similes plani, quia constant lateribus proportionalibus, ut patet ex constructione.*

LEM-

LEMMA I.

Duos numeros Quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis Quadratus etiam sit.

A..... E.... D..... B

C.....

Inveniantur per Scholion precedens duo plane similes a b & c, *ambo pares vel impares.* α
Cuiq; sublato pari à pari vel impari ab impare semper remaneat par, ex a b *sublato* d b *ipsi* c *aquali reliquus* a d *par erit. Quo diviso bifariam in* e, *dico factum ex* a b *in* b d, *(qui quidem* β *quadratus est) cum quadrato ex* e d *compositum, facere quadratum. Quia enim numerus* a d *bifariam sectus est in* e, *ipsiq; additus* d b, γ *erit qui fit ex* a b *in* b d *quadratus, una cum quadrato* d e, *aequalis numero quadrato ex* e b.

α 24. & 26. IX.

β 1. IX.

γ 6. II.

Corollarium.

Quando *a b* & *c* sunt plani similes, quadrati ex *e b* & *e d* se excedunt quadrato ex *a b* in *b d*. Cum autem *a b* & *c* non sunt similes, sed tamen vel pares simul; quadrati *e b* & *e d* non excedunt se quadrato: Si enim excessus hic ex *a b*, *b d* factus esset quadra-

22. IX. tus, essent *ab* & *ca* plani similes, contra hypoth.

Scholium 2.

Hinc facilè inveniuntur duo numeri quadrati, qui se excedunt quadrato, si sumantur duo plani similes vel pares vel impares, ut lemma præcedens jubebat; Itemq; alii duo quadrati, qui se non quadrato excedunt, si duo dissimiles sumuntur plani. Quod tamen facilimè fit secto numero quadrato in quadratum & non quadratum, ut 25, in 4, & 21.

LEMMA 2.

Duos Numeros quadratos invenire, ita, ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

A..H..I..E..F..G..I..D.....B

C.....

Sint plani similes a b & c, *eademq; adhibita eõstructione ut in lemmate præcedente, auferatur ex* d e *unitas* e f. *Erit quadratus ex* d f *minor quadrato ex* d e *propter inæqualitatem laterum. Dico quadratos ex* a b *in* d b, *& ex* d f *in se compositos non efficere quadratũ. Si enim quadratus esset, esset quadrato* b f *vel major vel æqualis vel minor. Primò si esset major, latus ipsius esset*

majus

majus latere b f, esset q̃ ipsi b e vel aquale vel maius, (quia minus esse nequit, cum inter b f & b e unitate tantùm differentes non cadat medius) Si aquale, ita, ut quadrato ex b e aqualis sit quadratus, cõpositus ex quadrato facto ex a b in b d & ex quadrato d f. Cum eidem quadrato ex b e ex precedente lemmate aqualis sit numerus factus ex a b in b d & ex d e inse, erunt, factus ex a b in b d cum quadrato ex d f, & ex a b in b d cum quadrato ex d e aquales. Ablatoq̃ cõmuni, qui ex a b in b d fit, erunt quadrati ex d e, & d f aquales, ipsaq̃ latera d e, totum & d f pars aquabia. Latus itaq̃ quadrati ex quadratis compositi, quorum alter ex a b in b d, alter ex f e in se fit, nequit esse aquale numero b e. Neq̃ eodem est majus. Si tamen esset, ut aquale b i. Cum quadratus ex latere majore, major sit quadrato ex b e minore latere, etiam cõpositus ex quadratis, quorum alter ex a b in b d, alter ex d f in se fit, major quadrato ex b e, cui per lemma precedens aqualis est numerus ex a b in b d cum quadrato ex d e. Itaq̃ ablato communi ex a b in b d, erit reliquus quadratus ex d f reliquo quadrato ex d e major, latusq̃ d f latere d e majus, pars toto. Cõpositi ergò ex quadratis a b in b d & ex d f in se quadrati latus majus esse nequit latere b e: adeoq̃, ut ostensum, nec aquale, nec minus. Ideoq̃ quadrat. ille compositus non est maior quadrato ex b f.

Deinde ponatur quadratus ex a b *in* b d *& d f in se, æqualis quadrato ex* b f, *& a h sit duplus unitatis* e f. *Quoniam totus* a d *totius* e d *est duplus (quia* a d *in* e *est bifariam sectus) & ablatus*
ax7. VII. a h *ablatæ unitatis* e f; *& erit & reliquus* h d, *reliqui* f d *duplus, &* h d *in* f *bifariam sectus. Factus itaq; ex* h b *in* b d, *unà cum quadrato ex* d f, *æqualis erit quadrato ex* b f. *Sed eidem æqualis*
β 6. II. *ponitur factus ex* a b *in* β b d *& quadrato ex* d f. *Itaq; ablato cõmuni quadrato ex* d f, *relinquuntur ex* a b, *in* b d *& ex* h b *in* b d *æquales. Atque sic* a b *&* h b *eundem* b d *multiplicantes, producentes numeros æquales, γ erũt ipsi quoq; æqua-*
γ 18. VII. *les, pars toti. Non ergò factus ex* a b *in* b d *cum quadrato ex* d f *quadrato ex* b f *æqualis est.*

Denig; ponatur quadratus ex a b *in* b d *cum quadrato* d f *minor quadrato* b f; *unde & latus ejus latere* b f *minus erit, ut* b g; *sumatur d; ipsius* e g *duplus* a i. *Quoniã ergò totus* a d *totius* e d *duplus est, & ablatus* a i *ablati* e g; *erit & reliquus* i d *reliqui* g d *duplus; &* i d *in* g *divisus bifariam. Numerus ergò ex* i b *in* b d *cum quadrato ex* d g *æqualis quadrato ex* b g. *Sed eidem quadrato ex* b g *æqualis ponitur ex* a b *in* b d *cum quadrato ex* d f. *Ablatis igitur quadratis* d g, d f, *quorum* d g *minor est; remanebit ex* i b *in* b d *major eo qui ex* a b *in* b d, *pars toto. Non est ergò ex* a b *in* b d *cum quadrato ex* d f *minor quadrato ex* b f. *Sicut neq; major, neq; æqualis*

ostend-

*æ*ſtenſus eſt. Nõ itaq; eſt quadratum ex a b in b d cum quadrato ex d f. *Quod erat propoſitum.*

Scholium. 3.

Hinc inventu faciles ſunt duo numeri, ut compoſitus ex illis ad neutrum illorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum. Talis enim eſt compoſitus non quadratus ex duobus quadratis. Tales etiam ſunt numeri non quadrati, in quos quadratus aliquis dividi tſir.

PROPOS: XXX.

Problema 6.

Invenire duas Rationales *a b*, *a f*, potentia tantùm commenſurabiles, ita ut major *a b*, quàm minor *a f*, plus poſſit quadrato rectæ lineæ *b f* longitudine ſibi commenſurabilis.

Aſſumta recta Rationali a b, & *duob. numeris quadratis totis* c d, c e *quorum exceſſus* d e *non ſit quadratus*; & *fiat, ut* c d *ad* d e, *ita quadratum rectæ* a b *ad quadratum* [a] 2. Scholi. propoſ. præced. & per lemma 6. X.

tum a f quæ semicirculo super a b aptetur. & f b
γ 31. III. connectatur. Cũ ergo f in semicirculo γ sit rectus,
æquale est quadratum a b quadratis a f, f b & a b, quàm a f plus potest quadrato f b. Cum q; quadratum ex a b sit ad quadratum a f, ut c d
δ 6. def. ad d e, δ erunt illa quadrata inter se commensurabilia, ε ideoq; erit æquè quadratum a f Rationale, & ipsi a f Rationalis; atq; quadratum a b super Rationali a b descriptum Rationale est. Rationales ergò sunt a b, a f & potentia tantùm
ε 9. X. commensurabiles. Longitudine enim commen-
ζ 24. IIX. surabiles esse ε nequeunt, ζ cum non habeant rationem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quia d e non est quadratus.

Iam verò quoniam est ut c d ad d e, ita quadratum ex a b ad quadratum ex a f, etit convertendo, ut numerus quadratus c d ad numerum quadratum c e, sic quadratum ex a b ad quadratum ex b f. ε Sunt ergò f b, a b longitudine commensurabiles.

PROPOS. XXXI.

Problema 7.

Invenire duas *a b*, *a f* Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita, ut major *a b* quàm minor *a f* plus possit Quadrato rectæ lineæ *f b* sibi Longitudine incommensurabilis.

Assumta



C144. E. 16. D C. 166. D.
C..... E... D.

Assumta Rationali a b, & *inveniantur duo quadrati numeri* c e, e d, *quorum summa* c d *non sit numerus quadratus: vel quadratus* c d *in duos* c e, e d *non quadratos dividatur*; β *habebit* c d *ad neutrum* c e, *vel* c d *proportionem numerorum quadratorum* γ *fiatq;, ut* c d *ad* d e *ita quadratum* a b *ad aliud, ut* a f; & *applicata* a f *ad semicirculum supra* a b *descriptum, connectatur* f b *Iam poterit* a b *plus quam* a f *quadrato rectæ* f b. *eruntq;* a b, a f *Rationales potentia tantum commensurabiles. Sed cum convertendo sit, ut prius quadratum* a b *ad quadratum* f b, *ut* c d *ad* c e; c d *autem ad* d e *non sit ut quadratus ad quadratum. Non ita q;* a b *ad* a f *habet rationem numeri quadrati ad numerum quadratum*, ε & *sunt Longitudine incommensurabiles. Inventæ ergo sunt duæ rectæ* a b, a f *potentia solum commensurabiles, ut* a b *major plus possit quam minor* a f *quadrato rectæ* f b *sibi longitudine incommensurabilis.*

α per Lemma 2 29. X.

β 24. IIX.

γ Lemma 6. X.

δ 30. X.

ε 9. X.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut major ad minorem; ita

ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris.

Demonstratio eadem est cum Lemmatis 3. in propos. 19. demonstratione.

PROPOS: XXXII.

Problema 8.

Invenire duas Medias *c*, *d* potentia tantùm commensurabiles, quæ rationale contineant; ita, ut major *c*, plus possit quàm minor *d*, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

α. 30 X. *Inveniantur duæ Rationales* a, b *potentia tantùm commensurabiles, ut* a *major plus possit quàm minor* b, *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, inter quas sit media proportionalis* c; *fiat* g_2, *ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d. *Quoniam*

β. 22. X. *ergò* a b *Rationales potentia tantùm sunt commensurabiles; erit sub ipsis rectangulum* c *irrationale, &* c *recta illud potens Media. Et quia est* c *ad* d, *ut* a *ad* b, *quæ potentia tantùm sunt*

γ 10. X. *commensurabiles, etiam* c *&* d *potentia tantùm commensurabiles* γ *erunt. & Media* c com-

δ 24. X. *mensurabilis* d δ *Media. Comprehendent ha-*

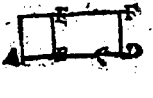
dua

dua Media c,d *potentia tantùm commensurabiles Rationales quodex* 28. *hujus patet. Quia enim est ut* a *ad* b, *ita* c *ad* d: *Sed* a *quàm* b *s pl*9 *potest, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis*; ζ *poterit &* c *plus quàm* d *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Patet ergò propositum. Si autem* à,b, *rationales se excederent quadrato rectæ sibi incommensurabilis longitudine, eodem numero ostenderetur* c,d *mediæ potentia tantùm commensurabiles continere Rationale, ut major* c *plus possit quàm* d, *quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis.*

s ex constr.
ζ 15. X.

LEMMA.

Si sint tres lineæ rectæ *a b, b c, c d*, erit ut prima *a b* ad tertiam *c d*, ita rectangulum *a e* sub prima *a b* & secunda *b c* contentum, ad id *c f*, quod sub secunda *b e* & tertia *c d* continetur.



Describatur ex b c, *quadratum* c e *compleatur*, *rectangulum* a f. α *Erit* a e, *ad* c f *ut* a b *ad* c d.

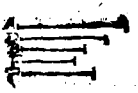
α VI.

PROPOSITIO XXXIII.

Problema 9.

Invenire duas Medias *de* potentiâ solùm

solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita ut major *d* plus possit quàm minor, *e*, quadrato rectæ lineæ, sibi longitudine commensurabilis.



α 30. X. β per Lemma. 2.21. X. γ 13. VI. δ 12. VI. ε per Lemma 32. X. ζ 17. VI. η 16. VI. θ 3. Lem. 19. X. κ 10. X. λ 22. X. μ 24. X.

α Inventis duabus a c, *assumatur* b *ζ utri* [illegible] *longitudine incommensurabilis, ut habeantur tres Rationales* a b c *potentia tantum commensurabiles; ut aut* a *plus possit quam* c *quadrato rectæ sibi longitudine cõmẽsurabilis. γ Sumatur* [illegible] *d media proportionalis inter* a & b, *δ & sit* d *ad* b, *ut* c *ad* e. *Quia ergò ε est, ut* a *ad* c, *ita rectangulum sub* a b, *ad rectangul. sub* b c. *Sed rectangulo sub* a b, *ζ æquale est quadratum ex* d, *η & rectangulo sub* b c, *rectangulum sub* d e. *Ergò ut* a *ad* c, *ita quadratum ex* d, *ad rectangulum sub* d e; *Sed ut quadratum* d, *ad rectangulum* d e, *ϑ ita recta* d *ad rectam* e. *Est ergo* d *ad* e, *ut* a *ad* c: *quarum potentia tantùm sint commensurabiles; κ Ergò &* d e. *Et quia* d *potens spacium, sub Rationalibus* a b *potentia solùm commensurabilibus, λ irrationalis est: & Media. μ erit etiam ipsi commensurabilis Media. Sunt ergò* d, e *duæ Mediæ potentia solùm cõmensurabiles. Cùm verò ostenderim ϑ rectangulo sub* b c *Medio æquale esse rectangulum sub*

de

d e, λ erit hoc quoq; medium. Deniq; cum ostensum sit esse d ad e, ut a ad c; Sed a plus possit quàm c, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; similiter plus etiam poterit d quàm e. Quod erat faciendum.

Prop. X.

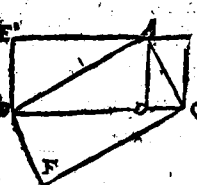
Quod si Rationalium a b c *assumtarum potentia commensurabilium* a *plus posset quàm* c, *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, similiter ostenderetur,* d, e, *duas medias inventas potentia solùm commensurabiles, continere medium, ut major* d *plus possit quàm minor* e, *quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.*

LEMMA. I.

Sit Triangulum rectangulum *a b c*, angulum habens *b a c* rectum, à quo perpendicularis *a d* esto demissa. Dico, rectangulum sub *c b*, *b d* æquale esse quadrato *a b*; & contentum sub *b c*, *c d* æquale quadrato *a c*, & contentum sub *b d*, *d c*, æquale quadrato *a d*: contentum deniq; sub *b c*, *a d*, æquale contento sub *a b*, *a c*.

Quia

α 8. VI.
β 17. VI.
γ 16. VI.
δ 41. I.



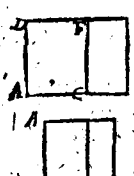
Quia enim a b *est inter* b c *&* b d, *α media proportionalis; rectangulũ ex* b c *&* b d *æquale est quadrato* a b. *Eodemq; modo rectangula ex* b c, c d, *& ex* b d, d c *æqualia sunt quadratis* c a *&* d a. *Denique quia trianguli* a b c, a b d *γ sunt similia, erit, ut* b c *ad* a c; *ita* a b *ad* a d, *quare rectangulum ex* b c, a d *æquale est rectangulo sub* a b, a c; *vel δ ejusdem trianguli* a b c *duplo rectangulis* c e, c b *sunt æqualia.*

LEMMA 2.

Si recta linea *a b* secetur in duas partes inæquales *a c*, *c b*, erit; ut major pars *a c* ad minorem *c b*, ita rectangulum *a f*, sub tota *a d* & majore parte, *a c* ad rectangulum *c e* sub tota a d & minore parte *c b* contentum.

α 1. VI.

Super a b *describatur quadratum, & ex* c *erigatur perpendicularis. Quoniam* α *est, ut* a c *ad* c b, *ita* a f *ad* c d, *patet propositum.*



LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales *a b*; *b c*, minor autem *b c* secetur

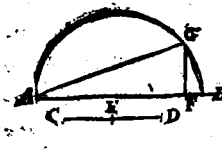
cetur in *d* bifariam; erit rectangulum *a c* sub ipsis contentum, duplum rectanguli *a d*, quod sub majori linea *a b* & dimidia parte *b d*, minoris *b c* continetur.

Completo a c *rectangulo, & ducta parallela per* d *ipsi* a b, *patet propositum*. ⓐ 1. VI.

PROPOSITIO XXXIV.

Problema 10.

Invenire duas rectas lineas *a b*, *g b*, potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.



ⓐ *Inveniantur duæ Rationales lineæ* a b, c d, ⓑ *quarum minor* c d *secetur bifariam in* e, & *fiat* ⓒ *rectangulum sub* a f, f b *æquale quadrato* c e. *Describatur etiam semicirculus* a g b *& ipsi* a b *perpendicularis* f g *agatur, connectanturque* a g, g b. *Quia ergo* a b *plus potest quàm* c d *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad* a b *rectangulum* a f b, *æquale quartæ parti quadrati* c d, *de-*

ⓐ 31. X. ⓑ Lemma 2. ⓒ 17. X.

ficiens figura quadrata: γ erit a f ipsi f b longitudine incommensurabilis. δ Sed ut a f ad f b, ita rectangulum b a f ad a b f rectang. Quæ duo rectangula ε æqualia sunt quadratis a g, g b. quia g in semicirculo ζ est rectus. Erit igitur, ut a f ad f b, ita quadratum a g, ad quadratum g b. Sed a f, f b sunt longitudine incommensurabiles. η Ergò & quadrata a g, g b, ipsæ q; rectæ a g, g b potentia θ incommensurabiles. Et quia quadratum ex a b Rationali Rationale ι æquale est quadratis a g, g b, etiam ex ipsis compositum Rationale erit. Rursus, quia a f b rectangulum, æquale quadrato c e λ æquale est quadrato f g, erunt quadrata f g, c e, æqualia, & ipsa rectæ f g, c e æquales; eritq; c d dupla ipsius e c, etiam dupla ipsius f g. μ Quare rectangulum sub a b, c d, duplum erit rectanguli sub a b, f g. Sed sub a b, c d Rationalibus contentum est ν Medium: Ergò & sub a b, f g ipsi commensurabile, utpote duplum, est ξ Medium. Sed sub a b, f g rectangulo ο æquale est rectangulum sub a g, g b: Ergò sub a g, g b est medium. Sed ex eorum quadratis compositum erat Rationale. Ergò inventæ sunt duæ a g, g b potentia incommensurabiles, quæ faciunt ex ipsarum quadratis compositum Rationale, sed Rectangulum sub ipsis Medium. Quod erat propositum.

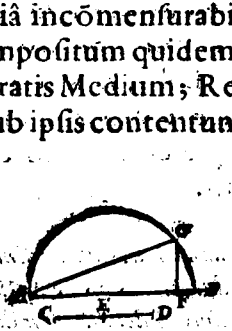
γ 19. X.
δ Lema 2. 33. X.
ε Lema 1. 33. X.
ζ 31. III.
η 10. X.
θ 4. def.
ι 47. I.
λ 17. VI.
μ Lema 3. 33. X.
ν 22. X.
ξ Coroll. 24. X.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

Problema 11.

Invenire duas rectas lineas *ag*, *gb*, potentiâ incõmensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum Quadratis Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.



Inveniantur duæ Mediæ a b, c d *ad mentem partis posterioris prop.* 32. *fiantq; reliqua, ut in præcedenti; erunt* a g, g b *potentiâ incommensurabiles. Quia enim Media* a b *quadratum æquale a rectarum* a g, g b *quadratis est Medium*, *etiam compositum ex* a g, g b *quadratis est Medium. Rursus q, ut in antecedenti propositione ostendatur rectangulum sub* a b, c d, *duplum esse rectanguli sub* a b, f g; *Eo verò existente Rationali, erit & hoc ipsi commensurabile: & huic æquale ex* a g, g b *Rationale*. *Cum ergò sub* a g, g b *etiam sit Medium, patet propositum*.

a 47. I.

β Lēma 2. 33. X.

PROPOSITIO XXXVI.

Problema 12.

Invenire duas rectas lineas, *a g*, *g b* potentiâ incommensurabiles, quæ faciant & cõpositum ex ipsarum Quadratis Medium, & Rectangulum sub ipsis contentum Medium, incõmensurabileque composito ex ipsorum Quadratis.

Inveniantur iterum ex sententia 2. partis propos. 33. duæ Mediæ a b, c d, *& reliquæ fiant, ut in 34. hujus. Ostenditur similiter* a g, g b *rectas incommensurabiles esse potentiâ; compositumq; ex ipsarũ quadratis esse Medium, ipsumq; rectangulum sub* a g, g b *esse Medium. Sed quia* a b *ipsi* c d *est* α *incommensurabilis longitudine,* c e *verò ipsi* c d, *ut dupla commensurabilis longitudine, etiam* a b *ipsi* c e *longitudine incommensurabilis erit.* γ *Sed ut* a b *ad* c e; *ita quadratum ex* a b, *ad rectangulum sub* a b, c e, *id est, ad* a b, f g, *vel* a g, g b. *Ergò quadratum* a b *est* δ *incommensurabile rectangulo* a g, g b. *Quæ sunt duæ rectæ inventæ.*

α ex hyp.
β 13. X.
γ 3. Lẽma 29. X.
δ 1. Lẽma 33. X.
ε 10. X.

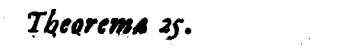
Princi-

Principium Senariorum per Compositionem.

PROPOSITIO XXXVII.

Theorema 25.

Si duæ Rationales *a b, b c* potentiâ tantùm commensurabiles componantur; tota *a c* Irrationalis erit. Vocetur autem ex Binis nominibus.



α *Inventæ duæ* a b, b c *componantur. Fiet tota* a c *Irrationalis. Quia enim* a b *ipsi* b c *est longitudine incommensurabilis, est* β *ut* a b *ad* b c, *ita* a b c *rectangulum ad* b c *quadratum,* γ *erit rectang.* a b c *quadrato* b c *incommensurabile: Sed rectangulo* a b c *ipsius duplum est cõmensurabile; & quadrato* b c *quadratum* a b *est cõmensurabile (quia sunt Rationalia) adeoq; ex quadratis* a b, b c *cõpositum eidem* b c *quadrato commensurabile* δ *est. Itaq; quod bis sub* a b, b c *continetur, cõposito ex quadratis rectarum,* a b, b c *incommensurabile* ε *erit. Quare & compositum ex eo, quod bis sub* a b, b c *& ex composito quadratorum* a b, b c, ζ *id est, ex tota* a c *quadratum, composito ex quadratis rectarum* a b, b c *incõmensurabile* η *erit. Sed quod ex quadratis rectarum*

α 2. Lem. 2. X.
β Lem. 1. X.
γ 10. X.
δ 16. X.
ε 14. X.
ζ 4. II.
η 17. X.

earum a b, b c, *est Rationale; quia commensurabile est quadrato rationalis* b c. *Igitur ex* a c *quadratum, Rationali ex* b c *quadrato incommensurabile &, irrationale est, ipsaq; recta* a c *Irrationalis. Vocetur autem ex* binis nominibus *vel* Binomium, *quia ex duobus nominibus nempe duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus componitur.*

& 10. def. X.

Scholium.

Ex duabus Rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus duæ Irrationales procreantur. Media enim inter eas α est Irrationalis, β itemq; ex ipsis composita seu Binomium.

α 21. X. β 37. X.

PROPOSITIO XXXIIX.

Theorema 26.

Si α duæ Mediæ *a b, b c* potentiâ tantùm commensurabiles α componantur, quæ Rationale contineant; tota *a c* Irrationalis erit. Vocetur autem, ex binis Mediis prima.

α 28. X.

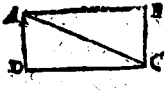
Quia enim a b *ad* b c *est, ut* a b, c *rectangulum ad quadratum* b c: *Sed* a b, b c *sunt longitudine incom-*

incommensurabiles. β *Sunt ergò* a b c *rectangulum & quadratum* b c *incõmensurabilia. Est autem rectangulo* a b c *bis sub* a b, b c *commensurabile;* & γ *quadruplo* b c *cõpositum ex quadratis* a b, b c. *Igitur rectangulum sub* a b, b c *bis,* & *compositum ex quadratis rectarum* a b, b c, *sunt* δ *incommensurabilia inter se. Ergo compositum ex quadratis* a b, b c *una cum rectangulo* a b c *bis,* ε *id est, quadratum* a c ζ *incommensurabile est rectangulo* a b c *bis sumto. Sed eidem* a b c *rectangulo bis, est commensurabile ipsum semel.* η *Igitur quadratum ex* a c *est incommensurabile rectangulo* a b c. *Sed* a b c *rectangulum ponitur Rationale. Ergò quadratum* a c *est* θ *Irrationale, ipsa* ι a c κ *Irrationalis Vocetur autem ex Binis Mediis prima vel Bimediale prius.*

β 10. X.
γ 16. X.
δ 14. X.
ε 4. II.
ζ 17. X.
η 13. X.
θ 10. def. X.
κ 11. def.

LEMMA.

Quod sub Linea Rationali *ab* & Irrationali *bc* continetur rectangulum, Irrationale est.



Sin minus, ipsum Rationale ad Rationalem a b *applicatum,* α *faciet latitudinem* b c *Rationalem contra hypothesin.*

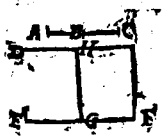
α 21. X.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 27.

Si duæ Mediæ *a b*, *b c* potentiâ tantùm commensurabiles *a* componantur, quæ Medium contineant; tota *a c* Irrationalis erit, Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

α 29. X.



β 45. I.

γ 4. II.

δ ex hypot.

ε cor. 24. X.

ζ 16. X.

η 23. X.

ϑ 3. Lem. 19. X.

κ 10. X.

Exposita Rationali d e, applicetur rectangulum d f æquale quadrato, a c; & composito ex quadratis a b, b c æquale sit d g. γ Erit itaq; h f æquale bis sumto rectanguio a b c. Quod cum sit ò Medium; ε erit & h f ipsius duplum medium. Et quia quadrata mediarum a b, b c commensumbilia sunt potentia, etiam ex ipsis cõpositum rectangulũ d g utrivis ipsorum ζ cõmensumbile erit. Sed utrumq; quadratum ex Mediis est Medium. Ergò & d g erit Medium: Quoniam ergò d g, h f Media ad d e Rationalem applicãtur, η erũt latitudines eorũ e g, g f Rationales ipsi d e longitudine incommensumbiles. Rursus quia longitudine incõmẽsurabiles sunt a b, b c, & ϑ est, ut a b ad b c, ita quadratũ a b ad rectangulum, a b c; κ erunt, quadratũ a b & rectang. a b c longitudine incommẽsurabilia.

Sed

Sed quadrato a b *compositum ex* a b, b c *quadratis, & rectangulo* a b c *simul duplum ostensum est commensurabile.* λ *Ergò compositum ex quadratis* a b, b c *id est* d g *incommensurabile est bis sumto rectangulo* a b c *id est* b f, μ *Est verò ut* d g *ad* h f, *ita* e g *ad* g f. ν *Sunt itaq; e g, g f longitudine incommensurabiles. Quæ cum sint ostensæ Rationales, erunt Rationales potentiâ tantum commensurabiles, & composita* e f, *Irrationalis.* ξ *Est itaq; rectangulum* d f *sub Rationali* d e *& e f irrationali, irrationale & ipsi æquale quadratum* a c *irrationale, ipsaq; a c irrationalis. Hæc vocetur ex Binis mediis, vel Bimediale posterius.*

λ 14. X. μ 1. VI. ν 37. X. ξ Lemma 38. X.

LEMMA.

Si Recta linea *a d* non secetur bifariam in *b*, erit compositum ex quadratis partium *a b, b d* majus, quàm Rectangulum sub partibus *a b, b d* bis comprehensum, quadrato ejus lineæ *a c*, qua major pars *a b* minorem *b d* superat.



Quoniam quadrata a b, b c *æqualia sunt rectangulo* a b c *bis sumto, cum quadrata* a c; *est & b c ipsi* b d *æqualis, erunt quoque quadrata* a b, b d *æqualia rectangulo* a b d *bis*

ο 7. II.

sumto unà cũ quadrato a c: *Quare ex* a b, b d. *quadrata majora sunt rectangulo* a b c *bis sumto quadrato* a c. *Quoderat propositum.*

Corollarium 3.

Quadrata partium inæqualium simul, majora sunt rectangulo bis sub partibus inæqualibus contento.

PROPOSITIO XL.

Theorema 28.

α 34. X. Si α duæ rectæ *ab*, *bc* potentia incommensurabiles cõponantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota *ac* recta linea irrationalis erit. Vocetur autem Major.

Quia a b c *rectangulum ponitur Medium,*
β Cor. 24. X. *ejus etiam duplum* β *erit Medium & Irrationale. Sed compositum ex quadratis* a b, b c *ponitur Rationale: Bis ergò sumtum* a b c *rectangulum*

gulum illi est γ incommensurabile. Quare & rectangulum a b c bis cum quadratis a b, b c, id est δ quadratum a c ε incommensurabile est compositae ex quadratis a b, b c. Cum autem compositum ex quadratis, ponatur rationale, erit ζ e c quadratum irrationale, η ipsaq; a c recta irrationalis, quae vocetur Major: Quia, cum possit duo quadrata ex a b, b c & rectangulum a b c bis, compositum ex quadratis a b, b c ϑ majus est rectangulo a b c bis. Quare cum compositum ex quadratis sit rationale, & a b c rectangulum Medium, rectè dicitur a c Major, siquidem à Rationali, quod majus est, convenit imponere nomen.

γ 10. X.
δ 4. II.
ε 17. X.
ζ 10. def.
η 11. def.
ϑ Lemma 39. X.

PROPOS. XLI.

Theorema 29.

Si duæ rectæ lineæ *a b*, *b c* potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea *a c* irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

35. X.

Quo

sumto unà cũ quadrato a c: *Quare ex* a b, b c. *quadrata majora sunt rectangulo* a b c *bis sumto quadrato* a c. *Quoderat propositum.*

Corollarium 3.

Quadrata partium inæqualium simul, majora sunt rectangulo bis sub partibus inæqualibus contento.

PROPOSITIO XL.

Theorema 28.

α 34. X. Si α duæ rectæ *ab*, *bc* potentia incommensurabiles cõponantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota *ac* recta linea irrationalis erit. Vocetur autem Major.

Quia a b c *rectangulum ponitur Medium,*
β Cor. 24. X. *ejus etiam duplum* β *erit Medium & Irrationale. Sed compositum ex quadratis* a b, b c *ponitur Rationale: Bis ergò sumtum* a b c *rectangulum*

gulum illi est γ incommensurabile. Quare & rectangulum a b c bis cum quadratis a b, b c, id est δ quadratum a c ε incommensurabile est composito ex quadratis a b, b c. Cum autem compositum ex quadratis, ponatur rationale, erit ζ e c quadratum irrationale, η ipsaq; a c recta irrationalis, quæ vocetur Major: Quia cum possit duo quadrata ex a b, b c & rectangulum a b c bis, compositum ex quadratis a b, b c θ majus est rectangulo a b c bis. Quare cum compositum ex quadratis sit rationale, & a b c rectangulum Medium, rectè dicitur a c Major, siquidem à Rationali, quod majus est, convenit imponere nomen.

γ 10. X.
δ 4. II.
ε 17. X.
ζ 10. def.
η 11. def.
θ Lemma 39. X.

PROPOS: XLI.

Theorema 29.

Si duæ rectæ lineæ *a b*, *b c* potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea *a c* irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

35. X.

Quo



Quoniam compositum ex quadratis a b, b c *est Medium, rectangulum vero* a b c *bis sumtum Rationale,* β *erit compositum ex quadratis incommensurabile rectangulo bis sumto. Igitur & compositum ex quadratis cum bis sumto rectangu* ɣ *id est, quadratum* a c δ *erit duplo rectangulo* a b c *incommensurabile. Cum autem duplum rectanguli* a b c *sit Rationale,* ε *erit* a c *quadratum irrationale, ipsaq;* a c ζ *irrationalis, Quæ vocetur,* Rationale aç Medium potens, *quia potest Medium ex quadratis* a b, b c *compositum, & Rationale scilicet bis sumtum rectangulum* a b c. *Verùm Rationale anteponitur irrationali quod natura sit prius, ut ut ordine hîc sit posterius.*

β 10. X.
γ 4. II.
δ 17. X.
ε 10. def.
ζ 11. def.

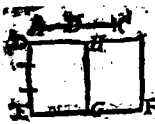
PROPOSITIO XLII.

Theorema 30.

Si *a* duæ lineæ rectæ *ab, bc* potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea *ac* irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

α 36. X.

Ite-



Iterum exponatur Rationalis d e, *ad quam* β *applicatum sit rectangulum* d f *æquale quadrato* a c; & d g *æquale compositio ex quadratis* a b, b c, γ *erit*, h f *æquale bis sumto rectangulo* a b c. *Quoniam igitur tam compositum ex quadratis* a b, b c *id est* d g, *quàm rectangulum* a b c *bis sumtum id est* h f *sunt Media*, δ *facient* d g, h f *applicata ad rationalem* d e *latitudines* e g, g f. *Rationales longitudine incommensurabiles. Et quia compositum ex quadratis* a b, b c *id est* d g *incommensurabile ponitur rectangulo* a b c, *cujus duplum est* h f, ε *erunt* d g, h f *incommensurabilia.* ζ *Sed ut* d g *ad* h f, *ita* e g *ad* g f, η *erunt itaq;* e g, g f *rationales longitudine incommensurabiles vel potentiâ commensurabiles, adeoq; tota* e f, θ *irrationalis.* ϰ *Est ergò* d f *sub rationali* d e *& irrationali* e f *contentum irrationale, & quadratum ex* a c *illi æquale irrationale, ipsaq;* a c *irrationalis, quæ vocetur* Bina Media potens, *quia & compositum ex quadratis* a b, b c *& rectangulum* a b c *erant Media.*

β 45. I.

γ 4. II.

δ 23. X.

ε 13. X.

ζ 1. VI.

η 10. X.

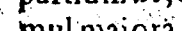
θ 37. X.

ϰ Lemma 38. X.

LEMMA.

Si recta linea *a b* in partes inæquales in *c* & *d* secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata par-

partium *a c*, *c b* magis inæqualium simul majora quadratis partium *a d*, *d b* minus inæqualium simul.



Bisecta a b *in* e, *cadit* d *punctum vel inter* e c, *vel inter* e a. *Primò cadat inter* e c. *a Quoniam* a c b *rectangulum cum quadrato* e c *æquale est quadrato* e b, *ut &* a d b *rectangulum cum* e d *quadrato eidem* e b *quadrato æquale erunt, rectangulum* a c b *cum quadrato* e c, *& rectangulum* a d b *cum quadrato* d e *æquale. Ablatis autem inæqualium rectarum* e c, e d *quadratis, cum quadratum ex sit majus quadrato* e d, *reliquum rectangulum* a c b *minus erit reliquo* a d b, *& propterea bis sumtum* a c b *rectangulum, bis sumto* a d b *erit minus. Sed quadratum* a b *tàm rectangulo* a c b *bis cum quadratis* a c, c b, *quàm rectangulo* a d b *bis cum quadratis* a d, d b *est & æquale. Sunt ergò æqualia rectangulum* a c b *cum quadratis* a c, c b *& rectangulum* a d b *cum quadratis* a d, d b: *& cum* a c b *sit minus quàm* a d b, *erunt residua quadrata* a c, c b, *majora quadratis* a d, d b. *Quod erat propositum. Deinde cadat* d *intra* a e. *Quoniam* a c, c b *partes magis sunt inæquales quàm* a d, d b, *erit* a d *major quàm* c b, *ac proinde cum* a e, e b *sint æquales, erit* e c *reliqua major reliqua* e d. *Itaque rectangulum* a c b *cum quadrato* e c *quadrato*

a 5. II.

a 4. II.

dato ex c b *æquale est, item* $\frac{1}{4}$ a d b *rectangulum cum quadrato* c d, *æquale eidem quadrato* c b *erit* a c b *rectangulum cum quadrato ex* c c *æquale rectangulo* a d b *cum quadrato* c d. *Ergò ut prius,* a c, c b *quadrata, majora sunt quadratis* a d, d b.

PROPOSITIO XLIII.

Theorema 31.

Quæ *a b* ex binis nominibus, ad unum duntaxat punctum *c* dividitur in nomina *a c, c b.*

Si potest in duas alias Rationales potentiâ, tantùm commensurabiles juxta 37 *X* divisi, *fiat illa divisio in* d. *Neq;* c *neq;* d *divisi lineam* a b *æqualiter, quia ita æquales etiam commensurabiles essent longitudine* a d, d b *contra hypothesin, sed partes inæquales* a c, c b *vel magis vel minus inæquales sunt partibus* a d, d b *aut* $\frac{1}{4}$, *ita quadratum* a c, c b *sunt vel minora vel majora quadratis* a d, d b. *Quia verò si ab æqualibus demantur inæqualia, residuum excessu est ablatorum excessui æquale.* ℭ *Sunt autem ex* a c, c b *quadrata cum rectangulo* a c b *bis sumto, æqualia quadratis* a d, d b *cum* a d b *rectangulo bis sumto, sit ut quæ fuerit excessus compositorum ex quadratis,*

a Lemma 42. X.

β 4. II.

idem

idem sit bis sumtorum rectangulorum: Sed excessus compositorum ex quadratu est spacium Rationale (γ Rationalium enim a c, c b quadrata & ex ipsis δ compositum sunt Rationalia; item ᾱ & ex a d, d b quadrata una cum suo composito sunt rationalia. ε Cum ergò Rationale superet Rationale rationali, manifestum est rationalem esse excessum compositorum ex quadratis) Igitur & excessus rectanguli a c b & a d b quòlibet bis sumto, est spacium Rationale. Sed a c b rectangulum est ζ Medium. Ergò & duplum, sicut & a d b rectangulum. η Cum verò Medium non superet medium Rationali; non potest excessus rectangulorum esse Rationale, quod tamen in præcedentibus concludebatur. In alio itaq; puncto quàm c secari a b in sua nomina impossibile est.

γ 8. 9. Def. δ 34. X.

ε 27. X. Schol.

ζ 22. X. η 27. X.

PROPOSITIO XLIV.

Theorema 32.

Quæ ex binis medijs prima a b, ad unum duntaxat punctum d dividitur in nomina a d, d b.

Dividatur, si potest, in alia ad c nomina vel duas Medias potentiâ cõmensurabiles, quæ comprehendant Rationale juxta 38. hujus. Patebit ratione, ut in præced. alij propositione erit idem excess-

excessus rectangulorum abc & adb bis, qui compositorũ ex quadratis ac, cb & ad db. Sed Rationalium rectangulorum bis excessus α est Rationale spacium. Ergò & excessus compositorũ ex quadratis & spacium Rationale. Cum verò a d, d b sint Media & potentia commensurabiles, erunt & eorum quadrata Media & commensurabilia, atq; ipsa ex ipsis compositũ utrumq; erit & β commensurabile & γ Medium. Cum verò medium non superet Mediũ rationali. Itaq; excessus compositorum ex quadratis non erit Rationale spacium, quod tamen modo concludebatur. In alio itaq; puncto quam c secari a b in sua nomina impossibile.

α 2. Scholi. 27. X.

β 16. X.

γ 24. X.

δ 27. X.

PROPOS. XLV.

Theorema 33.

Quæ ex binis Mediis, Secundã $a b$, ad unum dumtaxat punctum c dividitur in nomina $a c$, $b c$.



Dividatur, si potest in alia ad d, ut respondeant sensui 39. hujus. Ubicunq; ergò sit d, ut in 43. astenditur, quadrata ex a c, c b vel majora vel minora sunt quadratis a d, d b. Exponatur autem Rationalis e f, ad quam, applicetur e g rectang. § 45. I.

æquale quadrato ab, & e h *æquale quadratis* ac, c b, & e k *quadratis ex* a d, d b. β *Erit ergò* i g *æquale duplo rectanguli* a c b & l g *æquale duplo rectanguli* acb & l g *æquale duplo rectanguli* a d b. *Et quia quadrata ex* a c, c b *quadratis* a d, d b γ *sunt inæqualia, etiam rectangula* e h, e k *erunt inæqualia: ô quare & recta* f h, f k *sunt inæquales. Rursus, quia quadrata ex* ac, c b *sunt majora rectang.* a c b *bis, erit* e h *majus ipso* i g, *atq; ita* f h *major dimidio ipsius* f g, *quod de* f k *ostendetur. Quare* b g, f h, h g *sunt partibus* f k, k g *inæquales singulis singula. Quia verò* a c, c b *sunt Media potentia cõmensurabiles, erunt etiam ipsarum quadrata media & cõmensurabilia,* ε *adeoq; compositũ ex ipsis utriq; ipsorum cõmensurabile;* ideoq; & e h, & e k ζ *sunt media. Cumq; ita* e f *sit Rationalis,* η *erunt* f h, f k *Rationales longitudine ipsi incommensurabiles. Sic etiam rectanguli* a c b *Medii duplum* i g *erit medium &* h g *Rationalis longitudine incõmensurabilis; perinde ut &* l g *Medii,* k g *Rationalis longitudine incõmensurabilis ipsi* e f *ostendetur. Rursus quia* a c, c b *longitudine sunt incõmensurabiles, &* ε *est,* θ *ut* a c *ad* c b, *sic quadratum* a c *ad rectangulum* a c b, ι *erunt hæc etiam incommensurabilia. Sed quadrato* a c *compositũ ex quadratis* a c, c b *est commensurabile, ut antea constat, & rectangulo* a c b *suum duplum est commensu-*

β 4. II. γ Lemma 39. X. δ 1. VI. ε 16. X. ζ cor. 24. X. η 23. X. θ 3. Lem. 19. X. ι 10. X.

mensurabile. λ Itaq; compositum ex quadratis ac, cb, id est, eh, est incommensurabile duplo rectanguli acb, id est, ig. ∂ Sed ut eh ad ig, ita fh ad hg. x Sunt ergò fh, hg longitudine incommensurabiles. Cum verò etiam sint Rationales, erunt Rationales potentia solùm commensurabiles. μ Tota ergò fg est Irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur, divisaq; in nomina ad punctũ; ν nec potest fg in alio puncto k dividi in alia nomina. Itaq; nec ab bimediale posterius in alio puncto quàm c dividi potest in nomina. λ 14. X. μ 37. X. ν 43. X.

PROPOSITIO XLVI.

Theorema 34.

Major *ab* ad unum duntaxat punctum c dividitur in nomina *ac cb*.

Si potest, dividatur in d *in nomina, qualia 40. prop. requirit.* α *Erit excessus quadratorum* ac, cb *&* ad, db *idem cum excessu rectangulorum* acb *dupli &* adb *dupli. Sed excessus binorum compositorum ex quadratis binis est spatium Rationale. Itaq; & excessus rectangulorum binorum. Sed rectangulum* acb *ponitur Medium, β ideoq; duplum ipsius etiam est Medium; eodemq; modo &* adb *Medium erit.* γ *Sed Medium non superat Medium Rationali. Itaq; excessus binorum rectangulorum non erit spatium Rationale, quod tamen in rem sequebatur. Non ergò in alio quàm c puncto scabitur Major.* α 43. X. β cor. 24. X. γ 27. X.

PROPOS. XLVII.

Theorema 35.

Rationale ac Medium potens *a b* ad unum duntaxat *c* punctum dividitur in nomina *a c*, *c b*.

α 43. X. *Si potest, dividatur in nomina, qualia 41. præpos. requirit. Erit excessus quadratorum a c, c b & a d, d b idem cum excessu rectangulorum a c b, & a d b duplorum. Qui excessus in rectangulis est spacium Rationale. Ergò & incompositis quadratorum. Quæ compositæ ex quadratis;* β 27. X. *ac, cb, & a d, d b cum ponantur Media. & Itaq; excessus non potest esse spatium Rationale, ut jam sequebatur. Non ergò in alio quàm a punctoc cadet Rationale & Medium potens.*

PROPOS. XLIIX.

Theorema 36.

Bina Media potens *a b*, ad unum duntaxat punctum *c* dividitur in Media nomina, *a c*, *c b*.

Si potest, dividatur in d in nomina, qualia requirit 42. hujus. Constructione adhibita cadet, quæ



in 45. patet, partibus fh, hg, partes fk, kg singulis singulas esse inæquales. Cum ergo compositū ex quadratis ac, cb ponatur Medium, erit & ch Medium, cum & rectangulū acb duplum sit Medii, erit & ig Medium: & Erunt & fh, gh Rationales longitudine incommensurabiles ipsi ef ut & fk & kg. Cum verò compositū ex quadratis ac, & cb id est, ch βsit incommensurabile rectanguli acb duplo, id est, ig, sitq; ut ch ad ig ita fh ad hg, γ erunt & hæ longitudine incommensurabiles. Cum q; sint ostensa Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles, totaq; fg, Irrationalis est ex binis nominibus, divisa in h puncto in nomina. Sed eodem modo dividi eam non patitur 43. in puncto k. Igitur nec ab in alio puncto quàm c dividitur in nomina. Quod erat propositum.

α 23. X.

& ex hypothes.

γ 10. X.

δ 37. X.

Definitiones secundæ.

Iam investigat autor omnia binomia, quorum sex habet ideas. Quia enim Nomina Binomii sunt duæ Rationales, quæ nequeunt ambæ esse expositæ Rationali commensurabiles, nisi ipsæ quoq; velint esse longitudine inter se α commensurabi-

α 12. X.

les, vel una tantum sive Major sive Minor, vel neutra tria sunt genera binomiorum. Quoniam etiam Nomina sunt inæqualia, poterit majus minore plus quadrato vel longitudine commensurabile, vel incommensurabile. Unde si plus possit quadrato longitudine commensurabilis una cum dictis tribus generibus tres diversæ lineæ binomiales; Sed si plus quadrato longitudine incommensurabilis, cum iis tribus, itidem tres oriuntur.

Expositâ ergò Rationali, & quæ ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quàm minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

1. Si majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus prima.

2. Si minus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali, vocetur ex binis nominibus Tertia.

Rursus

Rursus si majus nomen plus possit quam minus quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Si majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus quarta.

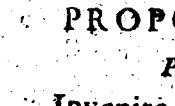
5. Si verò Minus nomen, vocetur Quinta.

6. Quod si neutrum ipsorum nominum, vocetur sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Problema 13.

Invenire ex binis nominibus primam.



α *Inventis duobus numeris* a b, c b *quorum excessus* a c *non sit quadratus, ita ut* a b, c b *proportionem habeant numeri quadrati ad quadratum* a b, a c *non. Exponatur autem Rationalis* β *quæpiam* d, *cui,* ef *sumatur longitudine commensurabilis, quæ* ef *ob id quoq; Rationalis erit. Fiat deinde ut* a b *ad* a c *ita quadratum* ef *ad quadratum* fg. *Erit* eg *ex binis nomin.*

α 2. Schol. 29. X.

β cor. 6. X

PROPOS. XLVII.

Theorema 35.

Rationale ac Medium potens a b ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina a c, c b.

a 43. X. *Si potest, dividatur in nomina, qualia 41. propos. requirit. Erit excessus quadratorum a c, c b & a d, d b idem cum excessu rectangulorum a c b, & a d b duplorum. Qui excessus in rectangulis est spacium Rationale. Ergò & in compositis quadratorum. Quæ composita ex quadratis;*

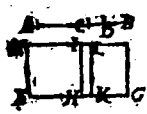
b 17. X. *ac, cb, & a d, d b cum ponantur Media. Et inter excessus non potest esse spacium Rationale, ut jam sequebatur. Non ergò in alio quàm c punctò scabitur Rationale & Medium potens.*

PROPOS. XLIIX.

Theorema 36.

Bina Media potens a b, ad unum duntaxat punctum c dividitur in Media nomina, a c, c b.

Si potest, dividatur in d in nomina, qualia requirit 42. hujus. Constructione adhibita eadē, quæ



in 45. patet, partibus fh, hg, partes fk, kg singulis singulas esse muquales. Cum ergo compositū ex quadratis ac, cb ponatur Medium, erit ☐ ch Medium, cum☐ rectanguli acb duplum sit Mediū, erit ☐ ig Medium: Erunt☐ fh, gh Rationales longitudine incommensurabiles ipsi ef ut ☐ fk ☐ kg. Cum verò compositū ex quadratis ac, ☐ cb id est, ch ßsit incommensurabile rectanguli acb duplo, id est, ig, sitq; ut ch ad ig ita fh ad hg, γ erunt ☐ ba longitudine incommensurabiles. Cum☐ sint potentia Rationales, erunt Rationales potentia tantum commensurabiles, totum☐ fg. Irrationalis est ex binis nominibus, divisa in h puncto in nomina. Sed eodem modo dividi eam non patitur 43. in punctō k. Igitur nec ab in alio puncto quàm c dividitur in nomina. Quod erat propositum.

a 23. X.

b ex hypothes.

γ 10. X.

δ 37. X.

Definitiones secundæ.

Iam inpestigat autor omnia binomia, quorum sex habet ideas. Quia enim Nomina Binomii sunt duæ Rationales, quæ nequeunt ambæ esse expositæ Rationali commensurabiles, nisi ipsa quoq; velint esse longitudine inter se ☐ commensurabi-

a 12. X.

les, vel una tantum sive Major sive Minor, vel neutra: tria sunt genera binomiorum. Quoniam etiam Nomina sunt inæqualia, poterit majus minore plus quadrato vel longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Unde si plus possit quadrato longitudine commensurabilis una cum dictis tribus generibus tres diversæ lineæ binomiales; Sed si plus quadrato longitudine incommensurabilis, cum iis tribus, itidem tres oriuntur.

Expositâ ergò Rationali, & quæ ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quàm minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

1. Si majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus prima.

2. Si minus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali, vocetur ex binis nominibus Tertia.

Rursus

Rursus si majus nomen plus possit quam minus quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Si majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine, vocetur ex binis nominibus quarta,

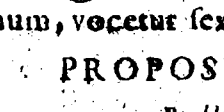
5. Si verò Minus nomen, vocetur Quinta.

6. Quod si neutrum ipsorum nominum, vocetur sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Problema 13.

Invenire ex binis nominibus primam.



α *Inventis duobus numeris* a b, c b *quorum excessus* a c *non sit quadratus, itaut* a b, c b *proportionem habeant numeri quadrati ad quadratum* a b, a c *non. Exponatur autẽ Rationalis* β *quæpiã* d, *cui,* ef *sumatur lõgitudine cõmensurabilis, quæ* ef *ob id quoq; Rationalis erit. Fiat deinde ut* ab *ad* a c *ita quadratũ* ef *ad quadratũ* fg. *Erit* eg *ex binis nomin.*

α 2. Scholi. 29. X.

β cor. 6. X

Quoniam quadrata e f, f g *sunt* γ *commensurabilia, erunt & sua recta etiam commensurabiles solùm potentia. Sed* e f *est Rationalis. Ergò &* f g. *Quia vero* a b *ad* a c *non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, etiam quadrata* e f, f g *non habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum.* δ *Sunt ergò* e f, f g *longitudine incommensurabiles; atq; ita Rationales potentia solùm cõmensurabiles: ipsa* e g ε *irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur. Erit etiam prima. Cum sit ut numerus* a b *ad* a c *ita quadratum* e f *ad quadratum* f g, *sit etiam* a b *major quàm* a c. *etiam quadratum* e f *erit majus quadrato* f g ζ *& quidem quadrato* h. *Quia ergò est, ut* a b *ad* a c, *ita quadratum* e f *ad quadratum* f g; *etiam convertendo erit, ut* a b *ad* ζ h, *nempe ad excessum, quo antecedens* a b *superat consequentem* a c, *ita quadratum* e f *ad quadratum* h. *Habet autem* a b *ad* c b *rationem quam quadratus numerus ad quadratum; Itaque & quadrata* e f *&* h; *erunt & commensurabiles longitudine* e f, *&* h. *Quoniam majus nomen* e f *expositæ Rationali* d *est longitudine commensumbile, ut patet; & potest plus quàm minus* f g *quadrato rectæ* h *sibi longitudine cõmensurabilis: erit* e g *per defin.* ex binis nominib. prima.

γ 6. X.

δ 9. X.

ε 37. X.

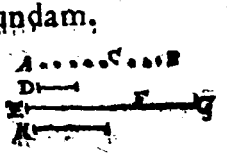
ζ Lemma 14. X.

PROPOSITIO L.

Problema 14.

Inven-

Invenire ex binis nominibus secundam.



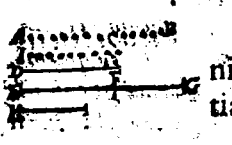
Repertis duobus a b, c b *quadratis, sumtaq; d Rationali, cui longitudine commensurabilis sit* f g, *qua ideo est Rationalis,* [a] *Fiat ut* a c *numerus ad* a b, *ita quadratum* g f *ad quadratum* f e: *Erit eodem modo ut in præcedenti* e g binomialis. *Quæ & erit* secunda. *Cum enim sint ut* a c, a b. *Quadrata rectarum* g f, f e; *etiam sunt convertendo ut* a b *ad* a c *ita quadratum* e f *ad* f g. *Sed* a b *quàm* a c *est major, erit ergò quadratum* e f *majus quadrato* e f, [β] *& quidem sit quadrato rectæ* h. *Iterum hic ut in præcedenti ostendetur* h *ipsi* e f *longitudine commensurabilis esse. Quoniam ergo majus nomen* e f *plus potestate quàm minq* f g *expositæ rationali* d *longitudine commensurabile, ut patet ex prioribus, quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis: Erit* e g ex binis nominibus *per defin.* secunda.

[a] Cor. 6. X.

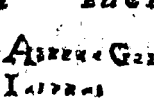
[β] Lemma 14. X.

PROPOSITIO LI.

Problema 15.



Invenire ex binis nominibus tertiam.



Repertis duobus quadratis a b, c b *ut antea, fumatur alius* i *qui ad neutrum habeat proportionem quam quadratus ad quadratum. Assumm* d *rationali* a *fiat, ut* i *ad* a b, *ita quadratum rectæ ad ad quadratum* e f, *quæ quadrata* β *erunt commensurabilia, cum habeant proportionem numerorum. Sed cum non quadratorum* γ *erunt* d *& ef longitudine incommensurabiles. Fiat rursus ut* a b *ad* a c, *ita quadratum* e f *ad quadratum* f g, *quæ etiam erunt* β *commensurabilia, & latera ipsa* γ *incommensurabilia. Sunt ergo* e f, f g *Rationales potentia tantùm commensurabiles,* δ *& tota* e g δ *irrationalis ex binis nominibus. Quæ & erit* tertia. *Quia enim* δ, *ut* i *ad* a b, *ita quadratum* d *ad quadratum* e f. *Sed* i *ad* a b *non est ut numerus quadratus ad quadratum. Ergò nec* d *ad* e f, *& sunt longitudine* γ *incommensurabiles. Quia etiam est ut* a b *ad* a c, *ita quadratum* e f, *ad quadratum* f g; *Sed* a b *major est quàm* a c, *etiam* e f *erit majus* f g. ε *Sit autem majus quadrato rectæ* h. *Erit ut quartus* h *ipsi* e f *longitudine incommensurabilis. Quoniam majus nomen* e f *plo potest quàm minor* f g *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis, & neutrum* e f, g f *expositæ Rationali*

d *est*

α Cor. 6. X.
β 6. X.
γ 9. X.
δ 37. X.
ε Lemma. 14. X.

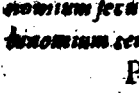
est longitudine incommensurabile. Erit ergò c g *per def.* ex binis nominibus tertia.

Binomia secunda & tertia inveniuntur facilius si similes plani numeri à semunciâ auferantur, reliquus enim vel est quadratus, & oritur binomium secundum, vel non quadratus, & oritur binomium tertium.

PROPOS. LII.

Problema 16.

Invenire ex Binis nominibus Quartam.



a Inventis duobus numeris a c, c b *ex quibus compositus* a b *ad neutrum ipsorum habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum, & assumta rationali* d, *cui longitudine commensurabilis sit* e f *perficiantur, & cætera ut in 49. hujus. Erit ut ibi* e g ex binis nominibus: *& quidem* Quarta. *Majus sit quadratum ex* e f *quàm* f g *quadrato* h. *Quia autem convertendo est, ut in 49. ut* a b *ad* c b, *ita quadratum* e f *ad quadratum* h. *Sed* a b *ad* c b *non est ut quadratus ad quadratum: Ergò nec quadrata* e f, *&* h *habebunt proportionem quadratorum; & erunt* e f *&* h *incommensurabiles. Ita enim majus nomen* e f, *quod & expositæ rationali* d *commensurabile est, plus possit quàm minus* f g *quadrato rectæ* h *sibi longitudine incommensurabili, erit* e g *per def. ex binis nominibus quar-*

a 35. schol. 29. X.

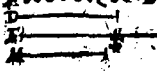
β 9. X.

Propo-

PROPOS. LIII.

Problema 17.

Invenire ex binis nominibus quintam.

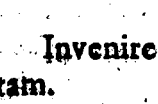


Inventis numeris a c, c b ut in præcedenti & adhibitis reliquis ut in 50. hujus: Erit c g ex binis nominibus & quidem Quinta. Sit quadratum e f majus quam quadratum f g, quadrato h. Erit, ut in 49. convertendo, ut a b ad c b, ita quadratum e f ad quadratum h. Erunt e f & h incommensurabiles ut in 9. Quia ergo major e f nomen quàm minus f g, quod & propositæ rationali commensurabilis est, plus potest quadrato rectæ h sibi longitudine incommensurabilis, erit per defin. e g ex binis nominibus quinta.

PROPOSITIO LIV.

Problema 18.

Invenire ex binis nominibus sextam.



Inventis a c, c b plurimis non similibus, quorum neuter sit quadratum, nec ex ipsis compositum quadratus sit, habeatur ad aliquem eorum quidem

fraterum proportionem; sumatur alig quicunq; numerus 1, *qui nec ad* a b, *nec ad* a c *quadratorum proportionem habeat, qualis est quivis quadratus; assumtusque rationalis* d; *fiat* ut *autem in* 51. *hujus. Patet ut ibi* e f, f g *longitudine incommensurabiles & totum* e g, ex binis nominibus. *Et quidem est* sexta. *Quia, si quadratum* e f *quàm quadratum* f g *majus sit quadrato* h, *ut in* 52. e f *&* h *sunt longitudine incommensurabiles. Imò, cum majus nomen* e f *plus possit quàm* f g, *quorum neutrum positâ rationali sit commensurabile, quadrato rectæ* h *sibi longitudine incommensurabilis, erit* ex binis nominibus *per defin.* sexta.

Sæpè promtui Binomia quinta & sexta occurrunt, si dissimiles plani à se invicem auferantur, reliquum vel quadratus est & oritur binomium quintum, vel non, & nascitur binomium sextum.

LEMMA.

Si recta linea *be* secta sit utcunq; in *d*; erit rectangulum *e h* sub partibus *e l, l h* contentum, medium proportionale inter earum quadrata *ld, gk*; item rectangulum *de* contentum sub tota & una parte, medium proportionale inter quadratum *ee*, totius lineæ, & quadratum *dl* dictæ partis.



Descripto quadrato c e *super* b c, *è sectionis puncto* d *erigatur perpendicularis* d g *ducaturq; diagonius* b f, *& parallela ipsi* b c. Erit *e b* medium proportionale inter g k, l d quadrata. *a Quia ergo est ut* k h *ad* h l; *ita tam* g k *ad* e h, *quàm* c h *ad* d l, *erit, ut* g k *ad* e h, *ita* c h *ad* d l. *Sed* c h *&* e h *sunt æqualia. Est ergò rectangulum sub partibus medium proportionale inter earundem partium quadrata. Rursus a quia est ut* c b *ad* b d, *ita tam* c e *ad* d e, *quàm* c l *ad* d l. *Sed* d e *&* c l *sunt æqualia. Est ergò rectangulum* d e *sub tota & una parte, Medium proportionale inter quadratum totius* c e *& dictæ partis quadratum* d l.

a 1. VI.

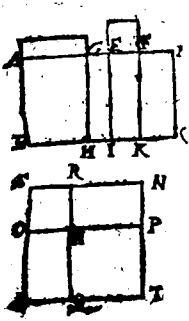
b 43. I.

PROPOSITIO LV.

Theorema 37.

Si spacium *ac* contineatur sub Rationali *ab*, & ex binis nominibus prima *ad*; Recta linea *op* spacium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Divi-



Diuisa a d *in nomina-*
a e *majus &* e d *minus, sõ-*
cetur a d *in* f *bifariam.*
a *Quia ergò* a e *plus potest* α def. bi.
quàm e d *quadrato rectæ si-* primi.
bi longitudine commensura-
biles. Si ad eam quarta par-
ti quadrati e d *i. e. quadrato*
e f *æquale Parallelogrammũ*
a g *& applicetur, & diuidat* β 2. Lem.
ipsum a e *in partes* a g, g e 17. X.
longitudine commensurabiles. Perpuncta g e f γ 18. X.
ducantur ipsi a b *parallelæ* g h, e i, f k δ *fiant* δ 14. II.
a h, g i *rectangulis æqualia quadrata* l m, m n
juncta ad angulum m *ita, ut* o m, m p *unam*
efficiant rectam & compleatur totum l n *qua-*
dratum. Quoniam itaq; rectangulum a g e
ε *æquale est quadrato* e f, ζ *erit ut* a g *ad* e f, *ita* ε ex cõstr.
e f *ad* g e; η *quarent* a h *ad* e k, *ita* e k *ad* g i. ζ 17. X.
Est itaque e k *inter* a h, g i *medium propor-* η 1. VI.
tionale. Sed ipsis a h, g i *sunt æqualia* l m, θ Lemma
m n *quadrata,* θ *inter quæ medium proportio-* præcedẽs.
nale est t m. *Itaque* t m *est æquale ipsi* e k. κ 43. I.
Cum itaque t m *sit* κ *æquale* m s λ *&* e k *ipsi* λ 36. I.
f c, *erit &* m s *ipsi* f c *æquale, totumque* l n
quadratum toti rectangulo a c *æquale, &* o
p *potest spacium* a c *sub Rationali* a b *&*

bino-

binomiali prima a d contentũ. Erit ea irratio-
nalis ex binis nominibus. Quoniam enim a g
μ 16. X. g e ostensæ sunt longitudine commensurabiles,
μ erit a e totius ipsarum longitudine com-
mensurabilis. Sed a e, cum sit majus nomen bi-
nomialis primæ a d, rationali a b longitudine
est commensurabilis. Ergò a g, g e eidem a b
ν 20. X. longitudine sunt commensurabiles, ipsæque ut a b
erunt Rationales. ν Sunt itaque rectangula
a h, g i sub rationalibus rationalia, ipsisque æqua-
lia quadrata l m, m n rationalia, rationales &
recta o m, m p. Et quia a e ipsi e d est longi-
tudine incommensurabilis; sed eidem a e longi-
tudine commensurabilis ostensa est a g, & ipsi e d
ξ 14. X. longitudine commensurabilis est e f; utpote ip-
ϐ 1. VI. sius dimidia. ξ Ergò a g, e f sunt longitudine
π 10. X. incommensurabiles. Quare a h, e k, ejusdem
rationis cum a g, e f π incommensurabilia e-
runt, & proinde l m, m t ipsis æqualia incom-
mensurabilia, ipsaque recta o m, m p æqualem
habentes rationem quam l m, m t, erunt longi-
tudine incommensurabiles. Cum autem eadem
sint ostensæ rationales, Igitur o m, m p sunt ra-
tionales potentia solum commensurabiles. Quare
ne o p potens spatium a c est irrationalis quæ
ex binis nominibus dicitur.

Sed Euclides voluit aliquam binomialium ſpeciem determinare, cum posſit & prima & ſecunda, & tertia, quarta, quinta ſexta eſſe.

Sequitur

Sequentibus propositionibus quinque dotentur inventiones omnis generis Irrationalium linearum.

PROPOSITIO LVI.

Theorema 38.

Si spacium *a c* contineatur sub Rationali *a b*, & ex binis nominibus secunda, *a d*, Recta linea *o p* spacium potens, Irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur.

Divisa a d *in nomina* a e *majus*, & e d *minus adhibeatur etiam reliqua præcedentis propositionis cõstructio. Erit* o p *ex binis mediis prima. Quoniam enim* a e, e d *sunt longitudine incommensurabilia*, & e d *rationali* a b *longitudine cõmensurabile*, α *erunt* a e, a b *longitudine incommensurabiles. Et quia* a g, g e *in præcedenti sunt ostensæ commẽsurabiles longitudine, tota* a e *utrique ipsarum erit* β *cõmensurabilis. Quare cum* a e *ceu majus nomen binominalis secundæ* a d *sit linea Rationalis, erunt &* a g, g e *rationales longitudine commensurabiles. Sed* a e *rationali*, a b *est longitudine incommensurabilis. Utraq; ergò* a g, g e, *eidem* a b *incõmensurabilis* γ *erit longitudine. Quare tam* a b, a g *quàm* a b, g e *rationales sunt potentiâ tantũ cõmensurabiles*, & *rectangu-*

α 13. X.

β 16. X.

γ 14. X.

& rectangula a h, g i *Media, ipsis* q̃ *æqualia quadrata* l m, m n *Media, &* o m, m p *rectæ media.*

∂ 22. X.

Quia autem a g, g e *sunt longitudine cõmensurabiles, &* ε *erunt* a h, g i *ejusdem rationis, ipsis* q̃ *æqualia quadrata* l m, m n *commensurabilia, adeoq;* o m, m p *rectæ potentia tantùm commensurabiles. Cum* q̃ a e, e d, *sint longitudine incommensurabiles, quibus longitudine sunt commensurabiles ostensa* a g, e f: *Ergò* a g, e f *sunt longitudine incommensurabiles, cum quibus in eadem ratione* a h, e k *etiam sunt* ε *incommensurabilia, & ipsis æqualia* l m, m t *incommensurabilia, ipsæ* q̃ ζ *rectæ ejusdem rationis* o m, m p *longitudine sunt incommensurabiles. Sunt itaque* o m, m p Mediæ & potentia commensurabiles. *Quia autem* e d *minus nomen, binomialis secunda* a d, *est commensurabile longitudine Rationali* a b *vel* e i, *etiam ipsius dimidium* e f *cõmensurabile est ipsi* e d; *&* e i, e f η *commensurabiles sunt longitudine. Sed* e i *est Rationalis. Ergò &* e f *&* e k *rectang* ϑ *rationale. Sed* m t *sub* o m, m p *contentum ipsi* e k *est æquale. Ergò &* m t *est rationale. Quare* o m, m p *sunt Mediæ potentia solùm cõmensurabiles, Rationale* q̃ *continentes; adeoq;* o p Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima κ *appellatur.*

ε 10. X.

ζ 1. VI.

η 12. X.

ϑ 20. X.

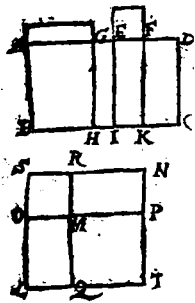
κ 38. X.

PRO-

PROPOSITIO LVII.

Theorema 39.

Si ſpacium *ac* contineatur ſub Rationali *ab*, & ex binis nominibus tertia *ad*; Recta linea *op* ſpacium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis Secunda dicitur.



Diviſa a d *in nomina* a e *majus &* e d *minus, reliqua fiant ut in* 55. *propoſ. Oſtendetur eodē modo, ut ibi,* o p *poſſi ſpacium* a c; *& ut in* 56. *rectas* o m, m p *eſſe Medias potentia tantùm commenſurabiles, eò quod* a e *ponatur rationali* a b *hîc ut illic longitudine incommenſurabilis. Sed quia* e d, e f *longitudine ſunt cōmenſurabiles, eſtq;* e d *rationalis* a b *longitudine incōmenſurabilis; & erit etiam* e f *eidem* a b, *id eſt,* e i *longitudine incōmenſurabilis. Sunt autem rationalia* e f *dimidia rationalis* e d *& ei potētia tantum cōmenſurabiles. Quare* e k *erit Medium, ipſiq; æquale* m t *medium, contentum ſub Medijs* o m, m p. *Quare cum* o m, m p *ſint Medias potentia tantùm commenſurabiles, contineantq; ſpacium Medium, erit* o p Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda *appellatur.*

α 14. X.

β 22. X.

γ 39. X.

PROPOS. LIIX.

Theorema 40.

Si ſpacium *a c* contineatur ſub Rationali *a b*, & ex binis nominibus quarta *a d*: Recta linea *o p* ſpacium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Major.

Diviſa a d *in nomina* a e *majus & minus* e d, *cætera fiant ut in* 55. *propoſ. Erunt* a g, g e *longitudine incommenſurabiles. Oſtenditurque* o p *poſſe ſpacium* a c. *Quoniam* a g, g e *ſunt longitudine incõmenſurabiles,* β *&* a h, g i *rectangula ejuſdem cum illis rationis & ipſis æqualia quadrata* l m, m n *incõmenſurabilia erunt, & rectæ* o m, m p *potentiâ incommenſurabiles. Sed quia majus nomen* a e *Rationali* a b *eſt longitudine cõmenſurabile, erit ipſa* a e *rationalis, & rectangulum* a i γ *rationale*, δ *&* e c *rectangulum Medium propter* e d *ipſi* a b *longitudine incommenſurabilem, ipſiq;* e c *commenſurabile* e k *Medium & huic æquale* t m *medium*. *Quare cum* o m, m p *ſint incommenſurabiles potentiâ, faciantq; cõpoſitum ex ipſarum quadratis* l m, m n *rationale, rectangulumq; ſub ipſis Medium, tota* o p *Irrationalis erit, quæ appellatur* Major.

a 19. X.
β 10. X.
γ 20. X.
δ 22. X.
ε 40. X.

PRO-

PROPOSITIO LIX.

Theorema 41.

Si ſpacium *ac* contineatur ſub Rationali *ab*, & ex binis nominib. quinta *ad*; Recta linea *op* ſpacium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

Diviſa a d *in nomina* a e *majus &* e d *minus, fiant cætera ut in* 55 *propoſ. α Erunt* a g, g e *longitudine incõmenſurabiles; &* o p *poterit* a c *ut in* 55; *quæ & Irrationalis erit, potens rationale & Medium. Erunt etiam ut in* 58. o m, m p *potentia incommenſurabiles. Ergò* a i *eſt ζ Medium, quia nomen majus* a e *b nomÿ quinti* a d *eſt incõmenſurabile longitudine Rationali* a b *per deſin. Sed* a i *quadratis* l m, m n *ſimul eſt æquale; Sunt ergò Media. Rurſus rectangulum* e c *eſt Rationale, quia minus nomen* e d *longitudine cõmenſurabile eſt Rationali* a b *ex deſin tione, ipſiusq; dimidium* e f *γ Rationale & ipſi æquale* m t *Rationale, ſub* o m, p m *contentum. Quare cum* o m, p m *ſint potentiâ incommenſurabiles, faciantq; ex ipſarum quadratis* l m, m n *compoſitum Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum* m t *Rationale; erit* o p *δ* irrationalis, *quæ δ* Rationale & Medium potens *dicitur.*

α 19. X.

ζ 22. X.

γ 10. X.

δ 41. X.

PROPOSITIO LX.

Theorema 42.

Si ſpacium *ac* continetur ſub Rationali *ab*, & ex binis nominibus ſexta, *ad*, recta linea *op* ſpacium potens, Irrationalis eſt, quæ bina Media potens appellatur.

α 19. X. *Diviſa* a d *in nomina* a e *majus &* e d *minus, cætera fiant ut in* 55. *Erunt* a g, e g *longitudine incommenſurabiles, &* o p *poterit ſpacium* a c. *Erunt &* o m, m p *potentia incommenſurabiles ut in* 58. *Compoſitum ex quadratis* l m, m n *erit Medium, ut in* 59. *& ut in* 58. m t *ſub* o m, m p *contentum, Medium. Quia verò ſpacium* a e, e f *rectarum, illa quidem longitudine eſt incommenſurabilis ipſi* e d; *hæc verò commenſurabilis;*
β 13. X. *&* a e, e f *longitudine incommenſurabiles,*
γ 16. X. *Ergò & in eadem cum his ratione* a i, e k *ſunt incommenſurabilia. Quare & compoſitum ex* l m, m n *quadratis ipſi* a i *æquale, &* m t *ipſi* e k *æquale erunt incommenſurabilia. Quamobrem cum* o m, m p *ſint potentiâ incommenſurabiles, faciantq; & ex ipſorum quadratis* l m, m n *compoſitum Medium &* m t *ſub ipſis cõtentum Medium, incommenſurabileq; ex ipſarum quadratis*

compo-

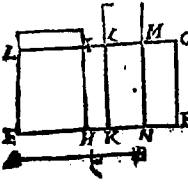
compositæ, erit totum o p *Irrationalis quæ bina Media potens vocetur.* δ 42. X.

Porrò docetur, quasnam Irrationales Latitudines faciant Irrationalium primo Senario propositarum, ad rationalem lineam applicata quadrata.

PROPOSITIO LXI.

Theorema 43.

Quadratum ejus *a b*, quæ ex binis nominibus *a c*, *c b* ad rationalem *d e* applicatum *d f*, latitudinem *d g* facit ex binis nominibus *d l*, *l g* primam.



Applicato ad d e *rectangulo* d h *quadrato* a c *æquali & ad* i h *alio,* i k *quadrato* c b *æquali; a erit* l f *rectangulo* a c b *bis sumto æquale; Sic, ex puncto* m *inter* l g *medio agatur parallela* m n *ipsi* d e, *erit tam* l n *quàm* m f *æquale* a c b *rectangulo.* ☞ *Quoniam itaq; a c, c b potentia solùm cõmensurabiles sunt, erũt eorũ quadrata rationalia & cõmẽsurabilia, quorũ utriq; cum ex ijs cõpositũ* γ *fit cõmensurabile, erit & quadratorum* a c, c b *cõpositum* d k *Rationale, quod ad Rationalem* d e *applicatũ, & facit latitudinẽ* d l *rationalem, ipsiq; longitudine cõmẽsurabilem.* ∝ 4. II. β 47. X. γ 16. X. δ 21. X.

Qui verò a c, c b *sunt Rationales potentia tantum cōmensumbiles, rectangulum sub ipsis* s *erit*
ε 22. X. *Medium,* ζ *ejusq; duplum* l f *Medium.* η *Itaque*
ζ cor. 24. X. *Latitudo* l g *est Rationalis, ipsi* l k, *id est,* d e
η 23. X. *longitudine incōmensumbilis. Sed* d l *ipsi* d e *est*
ϑ 13. X. *ostensa longitudine commensurabilis.* ϑ *Ergò* d l, l g *longitudine sunt incōmensurabiles, adeoq; rationales potentia solùm cōmensurabiles,* ϰ *&* d g
ϰ 37. X. ex binis nominibus composita. *Erit etiam* Prima. *Quia enim* a c b *rectangulum inter*
λ cor. 54. X. *quadrata* a c, c b λ *est medium proportionale, erit &* l n *inter* d h, i k *Medium proportionale,*
μ 1. VI. μ *&* l m *inter* d i, i l. ν *Itaq; rectangulum* d i l
ν 17. VI. *quadrato* l m *est æquale: Et cum quadrata* a c,
ξ 10. X. c b *sint commensurabilia,* ξ *rectæ* d i, i l *eandem cum illis habentes rationem longitudine sunt cō-*
ο Lemma 39. X. *mensurabiles.* ο *Et quia* d k *quàm* l f *est majus, quadrataq; a c, c b rectarum, rectangulo* a c b *bis sumto sunt majora,* μ *etiam* d l *quàm* l g *erit major. Itaq; cum* d l *sit major quàm* l g, *&* d i l *rectangulum quadrato* l m *ostensum æquale. dividens rectam* d l *in* i *in partes longitudine com-*
π 18. X. *mensurabiles, ut patet,* π *poterit* d l *major plus quàm* l g *minor quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis. Quare cum* d g *sit ostensa ex binis nominibus, &* d l *majus plus posse, quàm* l g *minus, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; atq; idem* d l *nomen majus expositæ rationali* d e *longitudine commensurabile est, erit* d g *per defin.* ex binis nominibus Prima. PRO-

PROPOSITIO LXII.

Theorema 44.

Quadratum ejus, quæ est ex binis *a c*, *c b*, medijs prima *a b*, ad *d e* Rationalem applicatum *d f*, Latitudinem *d g* facit ex binis *d l*, *l g* nominibus secundam.

Repetatur eadem constructio, quæ in præcedenti est adhibita. α *Quia ergò* a c, c b *sunt Media potentia tantùm commensurabiles, quæ continent Rationale, erunt earum quadrata Media & commensurabilia, & ipsis æqualia* d h, i k, *media, quare & totum* d k *illis* β *commensurabile* γ *Medium; ipsius* δ *Latitudo* d l *rationalis ipsi* d e, *Longitudine incommensurabilis. Et cum* a c b *rectangulum* α *sit rationale, ejus etiam duplum* l f *rationale erit.* ε *Ergò* l g *Latitudo est rationalis longitudine commensurabilis ipsi* l k, *id est,* d e. *Cum itaque duarum* d l, l g, *hæc longitudine sit commensurabilis ipsi* d e, *illa verò incommensurabilis,* ζ *erunt inter se longitudine incommensurabiles. Sunt autem & rationales* d l, l g *ut patet: Itaq; sunt Rationales potentia tantùm commensurabiles* η: *& tota* a d g *est* ex binis nominibo. *Erit etiam* secunda. *Similiter enim, ut in præcedenti, ostenditur* d l *esse nomen majus & plus esse quàm minus* l g *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.*

α 38. X.
β 16. X.
γ cor. 24. X.
δ 23. X.
ε 21. X.
ζ 13. X.
η 37. X.

Sed ostensum est nomen minus l g *esse longitudine commensurabile rationali* d e *posita.* η *Erit igitur* d g ex binis nominibus secunda.

PROPOSITIO LXIII.

Theorema 45.

Quadratum ejus, quæ ex binis mediis secunda *a b*, ad Rationalem *de* applicatum *d f*, Latitudinem *d g* facit ex binis nominibus *d l, l g* tertiam.

α 39. X. *Constructio ijsdem ut in* 61. *quia* a c, c b α *sunt media potentia tantum commensurabiles, quæ contineant Medium, erunt eorum quadrata media & commensurabilia; & ipsis æqualia* d h, i k

β 16. X. *media, illiúsq; totũ* d k β *commensurabile* γ *me-*

γ Cor. 24 X. *dium. Ergò* d l *Latitudo est rationalis, ipsi* d e *longitudine incommensurabilis. Et cum* a c b *rectangulum sit Medium, ejus duplum* l f *erit medium &* l g *latitudo longitudine* δ *incommen-*

δ 23. X. *surabilis ipsi* l k *vel* d e. *Cum verò* a c, c b *sint longitudine incommensurabiles, sitq; ut* a c *ad*

ε 3. Lemma 19. X. c b, ε *ita quadratum* a c *ad rectangulum* a c b, ζ *erunt hæc inter se commensurabilia.* η *Sed* a c

ζ 10. X. *quadrato, compositum ex ipsis, id est* d k *est*

η 16. X. *commensurabile, ut patet, & rectangulo* a c b

com-

commensurabile est ejus duplum l f: ϑ *Ergò* d k *ipsi* l f *est incommensurabile, & ipsa* d l, l g *sunt longitudine incommensurabiles: Cum & etiam rationales, ut patet. Ergò* d l, l g *sunt rationales potentia tantùm commensurabiles, & tota* d g κ *ex binis nominibus. Erit etiam tertia. Similiter enim ut in 61 ostenditur* d l *esse nomen majus, potens & plus quàm minus* l g, *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Sed ostensum est neutrum nomen* d l, l g *esse posita rationali* d e *longitudine commensurabile.* λ *Erit itaq;* d g *ex binis nominibus tertia.*

ϑ 14. X.

κ 37. X.

λ per definitionem.

PROPOSITIO LXIV.

Theorema 46.

Quadratum Majoris *a b* ad Rationalem *d e* applicatum *d f*, latitudinem *d g* facit ex binis nominibus *d l*, *l g* quartam.

Constitutis ijsdem ut in 61, α quia a c, c b *potentia sunt incommensurabiles, continentes Medium, faciunt & compositum ex quadratis suis Rationale, erit* d k *rationale &* l f *duplum rectanguli* a b c *Medium; adeoque* d l β *rationalis ipsi* d e *longitudine commensurabilis:*

α 40. X.

β 11. X.

γ *Sed*

γ *Sed* l g *rationalis ipsi* l k, *id est*, d e *longitudine incommensurabilis, ipsæq;* d l, l g *longitudine incommensurabiles, δ vel Rationales potentia tantùm commensurabiles & dg* binomi alis. *Erit etiam* quarta. *Quadratum enim* l m, *ut in 61, est æquale rectangulo* d i l. *Et quia quadrata* a c, c b *sunt incommensurabilia, etiam* d h, i k *ipsis æqualia sunt incommensurabilia, ε & d i, i l longitudine incommensurabiles. Ita, ut in 61, ostenditur* d l *major quam* l g; *& ad* d l *applicatum rectangulum* d i l *æquale quadrato* l m, *quod* d l *dividit ad* i *in partes longitudine incommensurabiles. Ita q; & potenit* d l *plus quàm* l g *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed majus nomen* d l *longitudine commensurabile est positæ Rationali* d e. η *Erit ergò* d g *ex* binis nominibus quarta.

γ 10. X.

δ 19. X.

ε per defin.

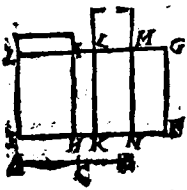
PROPOSITIO LXV.

Theorema 47.

Quadratum ejus *a b*, quæ Medium & Rationale potest, ad Rationalem *de* applicatum *df*, Latitudinem *dg* facit ex binis nominibus *d l, l g* quintam.

Peractis cæteris ut in 61, quia a c, c b α *sunt potentia incommensurabiles, facientes quidem ex suis quadratis Medium, ac sub se contentum ratio-*

α 41. X.



rationale erit d k *æquale compoſito quadratorum Medium, & l n duplum rectanguli* a c b *Rationale. Ergò Latitudo* d l *eſt Rationalis longitudine* β *commẽſurabilis poſitæ* d e; l g *verò Rationalis eidem longitudine* γ *commenſurabilis; & ſic* d l, l g *ſunt longitudine* δ *incommenſurabiles; & quia Rationales, ſunt Rationales potentia tantùm cõmenſurabiles, ex quibus compoſita* d g ε *eſt* ex binis nominibus *& quidem* quinta. *Rurſus enim; ut in* 61. *oſtẽditur,* d l *rectangulum æquale eſſe quadrato* l m, *& ut in* 64. d l *nomen majo plus poſſe quam* l g, *quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Sed minus nomen* l g *oſtenſum eſt poſitæ Rationali* d e *longitudine commenſurabile.* ζ *Erit itaq;* d g ex binis nominibus quinta.

β 23. X.

γ 21. X.

δ 19. X.

ε 37. X.

ζ per definitionem.

PROPOSITIO LXVI.

Theorema 48.

Quadratum ejus *ab*, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem *de* applicatum *df*, facit Latitudinem *dg* ex binis *dl, lg* nominibus Sextam.

Peractis cæteris ut in 61, *quia* a c, c b *potentia ſunt incõmenſurabiles,* α *faciunt & ex ſuis quadratis*

α 42. X.

dratis compositum medium, & sub se contentum Medium, incommensurabile ex quadratis composito, id est, d k composito quadratorum æquale & l f rectangulo a c b bis sumto æquale; erunt Media, & latitudines d l, l g rationales ipsi d e longitudine incommensurabiles. Quoniam verò d k, incommensurabile est rectangulo a c b, etiam ipsius dupli l f, incommensurabile erit, & ipsæ d l, l g, incommensurabiles longitudine, quæ sunt Rationales potentia solùm commensurabiles, ac ob id d g ex binis nominibus, & quidem Sexta. Nam d l, ut in 65; nomen majus plus potest quam l g quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed neutrum illorum nominum d l, l g, est ostensum Rationali posita d e commensurabile longitudine. Ergò d g est ex binis nominibus Sexta.

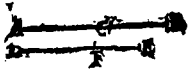
β 23. X.
γ 13. X.
δ 10. X.
ε 37. X.
ζ per defin.

PROPOSITIO LXVII.

Theorema 49.

Ei *a b*, quæ ex binis nominibus *a c*, *c b* Longitudine commensurabilis *d e*, & ipsa ex binis nominibus *d f*, *f e* est, atque ordine eadem.

Fiat



α *Fiat, ut tota* a b *ad totam* d e; *ita ablata* a c *ad ablatam* d f. β *Ergò & reliqua* c b *ad reliquam* f e *erit, ut tota* a b *ad* d e *totam. Cum* q d e *ipsi* a b *sit longitudine commensurabilis* : γ *Erit &* d f *ipsi* a c; *&* f e *ipsi* c b. δ *Sunt verò* a c, c b *nomina binomialis* a b *rationalia. Ergò &* d f, f e *sunt Rationalia. Rursus, cum sit ut* a c *ad* d f, *ita* c b *ad* f e: *& permutando, ut* a c *ad* c b, *ita* d f *ad* f e. *Sed* a c, c b *sunt potentia solùm commensurabiles. Ergò &* d f, f e. *Atq; ita* d f, f e *sunt Rationales potentia solùm commensurabiles, &* d e ex binis nominibus. *Erit & ipsi* a b *ordine eadem. Aut enim* a c *plus potest, quàm* c b, *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Si poterit* a c *plus quàm* c b *quadrato rectæ longitudine commensurabilis, & poterit &* d f *quàm* f e; *atq; si nomen majus ac longitudine commensurabile fuerit ipsi Rationali positæ; erit &* d f *&* *utraq;* a b d e *binomialis prima: Si minus* c b *etiam* f e, *&* *utraq;* a b, d e *est binomialis secunda; Si neutrum* a c, c b *vel* d f, f e *erit ex binis nominibus tertia. Sed si* a c *plus possit quàm* c b *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, etiam* d f *quàm* f e, *& ita, ut antea, utraq; vel quarta vel quinta vel sexta binomialis erit per definitionem.*

α 12. VI.
β 19. V.
γ 10. X.
δ 37. X.
ε 15 X.

Scho-

Scholium.

Si *de* binomiali *ab* tantùm potentia sit commensurabilis, idem quidem concluditur, sed loco longitudine commensurabilis ubique legendum est potentia commensurabilis, id est, *de* quidem concluditur Binomialis, sed non eadem ordine cum *ab*. In sequentibus autem propositionibus *de* cum *a* semper est eadem, etiamsi potentia sint commensurabiles.

PROPOS. LXIIX.

Theorema 50.

Si *ab*, quæ ex binis Medijs, *ac*, *cb*, Longitudine commensurabilis *de*, & ipsa ex binis medijs *df*, *fe* est, atque ordine eadem.

α 12. VI. β 19. V. γ 10. X.

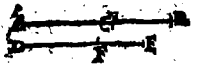
α *Fiat ut* a b *ad* d e, *ita ablata* a c *ad ablatum* d f, β *erit, etiã reliqua* c b *ad reliquam* f e, *ut tota ad totam. Sed* d e *ponitur ipsi* a b *longitudine commensurabilis*; γ *Ergò* d f, f e *ipsis* a c, c b, *sunt longitudine commensurabiles. Sunt autem*

tem a c, c b *media*. δ *Ergò* & d f, f e. *Rursus cum* δ 24. X.
sit, ut a c *ad* d f, *ita* c b *ad* f c, & *permutando, ut*
a c *ad* c b, *ita* d f *ad* f e; *sint q*, a c, c b *potentiâ cõ-* ε 38. X.
mensurabiles, γ *erunt* & d f, f e. *Sunt autem* d f,
f e *etiam ostensæ Mediæ; sint ergò Mediæ potentia tantum cõmensurabiles,* ζ & d e *ex binis me-* ζ 38. vel
diis, & *quidem cum* a b *eodem ordine. Quia e-* 39. X.
rum est, ut a c *ad* c b *ita* d f *ad* f e. η *Sed ut* a c *ad* η Lemma
c b, *ita quadratum* a c *ad rectãgulum* a c b, ϑ & 59. X.
ut d f *ad* f e, *ita* d f *quadratum ad* d f e *rectangulum; erit etiam, ut quadratum* a c *ad rectang.* a c b, *ita* d f *quadratum ad* d f e *rectang.* & *permutando, ut quadrata* a c, d f, *ita rectangula* a ç b, d f e; *Sed* a c *quadratũ quadrato* d f, (*quia* a c, d f *sunt longitudine cõmensurabiles*) *est commensurabile.* γ *Ergò* & *rectangula. Si ergò* a c b *fuerit rationale, erit* & d f e *rationale.* ε & d e *ex binis Mediis prima: Si verò Medium.* ϑ *Medium,* κ & d e *ex binis Mediis secunda.* ϑ cor. 24. X.

PROPOSITIO LXIX. κ 39. X.

Theorema 51.

Majori *a b* commensurabilis *d e* & ipsa *d e* Major est.



Fiant, quæ in antecedenti. Quia ergo a b, d e *longitudine vel potentiâ tantum sunt commen-*

α 10. X. *surabiles, α eodem modo ram* a c, d f, *quàm* c e, f e *commensurabiles erunt. Rursus, cum sit, ut* a c *ad* d f, *ita* c b *ad* f e: *& permutando, ut* a c *ad* c b, *ita* d f *ad* f e, *β erit, ut quadratum* a c *ad quadratum* c b, *ita quadratum* d f *ad quadratum* f e; *& cõponendo: ut cõpositum ex quadratis* a c, c b, *ad quadratum* c b; *ita compositum ex quadratis* d f, f e, *ad quadratum* f e: *& convertendo, ut quadratum* c b, *ad compositum quadratorum* a c, c b, *ita quadratum* f e *ad compos. Quadratorum* d f, f e. *Sed* c b *quadratum, quadrato* f e *est commensurabile, quia ipsa rectæ vel longitudine vel potentia sunt commensurabiles: α Ergò & compositum quadratorum* a c, c b, *composito quadratorum* d f, f e *commensurabile erit. γ Sed compositum illud est Rationale, quia rectæ* a c, c b, *componunt Majorem* a b. *δ Igitur & hoc est Rationale. Rursus quia est, ut* a c *ad* c b, *ita* d f *ad* f e, *ut in præcedenti; rectangulo* a c b, *rectangulum* d f e *ostenditur commensurabile; illudq; cum sit γ Medium, erit & hoc Medium. Sed cum sit, ut* a c *ad* c b, *ita* d f, *ad* f e; *γ Sintq; a c, c b, potentia incommensurabiles, α erunt & d f & f e. Itaq; cum* d f, f e *potentia sint incommensurabiles, faciamq; ex earum quadratis compositum Rationale; quod verò sub ipsis continetur, Medium; γ erit totum* d e *Major.*

β 22. VI.

γ 40. X.

δ 9. def.

PRO-

PROPOS. LXX.

Theorema 52.

Rationale *a c* Medium potenti *a b* commensurabilis *d e*, & ipsa *d e* Rationale ac Medium potens est.

Constructis ijsdem, ut prius, etiam ut in praecedenti compositum ex quadratis a c, c b *composito ex quadratis* d f, f e *commensurabile esse ostenditur. Sed illud compositum est* a *Medium: & Ergo & hoc. Eodemq; modo rectangulo* a c b *Rationali commensurabile & Rationale erit Rectangulum* d f e, *& d f, f e* a *potentia incommensurabiles. Itaq; tota* de Rationale ac Medium potens a *eris, (propter affectiones ipsi competentes.)*

a 41. X. & cor. 24. X.

PROPOSITIO LXXI.

Theorema 53.

Bina Media potenti *a b* commensurabilis, *d e*, & ipsa *d e* bina Media potens est.

Constructis ijsdem, ut prius, etiam ut antea, composito ex quadratis a c, c b *compositum ex quadratis* d f, f e a *commensurabile & Medium esse ostenditur: & rectangulo* a c b *Medio commensurabile, & Medium rectangulum* d f e. a *Sunt verò* d f, f e *potentia incommensurabiles, ut prius.*

a 42. X.

α 42. X. *a Deniq; cum quadratorum* a c, c b *cõpositorectangulum* a c b *sit incommensurabile: sed cõpositoquadratorum* a c, c b, *rectangulog;* a c b *cõmensurabilia sunt compositum quadratorum* d f, f e, *& rectangulum* d f e; β *erit etiam compositum quadratorum* d f, f e *incommensumbile rectangulo;* α *Erit q;* d e *binà Media potens.*

β 14. X.

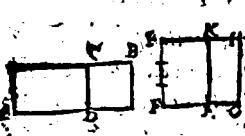
Propositionibus duabus exponit aliam differentiam Senarij primi sex Irrationalium. Vocantur autem hactenus proposita Senaria per compositionem, quod signo † componantur nomina: Sed à 74 sequuntur Senaria per detractionem, quia per signum ∸, subducentur nomina. De quibus eadem quæ in illis docentur.

PROPOSITIO LXXII.

Theorema 54.

Si Rationale *a c* & Medium *d b*, componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus; vel quæ ex binis Mediis prima; vel Major; vel Rationale ac Medium potens.

Erit a c *quàm* d b *vel majus vel minus: æquale enim esse nequit, quia* d b *æquale rationali* a c; *foret*



foret Rationale. Sit ergò Majus Applicentur ad rationalem e f, e h aquale ipsi a c; & k g aquale ipsi d b, ut totum f i sit aquale toti a b. Erit e k α rationalis ipsi e f longitudine commẽ- α 21. X.
surabilis β, sed k i rationalis eidem longitudine β 23. X.
incommensurabilis. Rursus quia e h rationale & h i Medium sunt incommensurabilia, erunt in eadem ratione e k, k i, longitudine γ incommensu- γ 10. X.
rabiles. Itaq; ex Rationalibus potentiâ incommẽ- δ 37. X.
surabilibus compositum e i δ erit binomialis. Sed cum a c quam d b ponatur majus, e h quàm h i, γ erit etiam e k major quàm k i. Jam majus nomen e k plus poterit, quàm minus k i quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis vel incommensurabilis. Si e k plus potest quàm k i quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Sit ζ ε 55. X.
e k nomẽ majus rationali e f commẽsurabile longitudine, ut patet, erit e i per defin. ex binis nominibus prima. Itaq; recta potens spacium e g, ipsi a b aquale, sub rationali a b & binis nominibus prima e i contentum, erit Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur.

Si verò e k plus potest quam k i, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sit ζ e k posita rationali e f longitudine commensurabili, erit e i ex binis nominib. quarta per defin. Quare

recta potens e g *ſpacium æquale ipſi* a b *ſpacio, cõtentum ſub Rationali* e f *& ei ex binis nominibus quarta, & Irrationalis eſt, quæ vocetur* Major. *Sit jam* a c *majus Irrationale & Medium,* d b *vero minus Rationale, conſtructis iisdem, erit* e k *longitudine ipſi* e f *incommenſurabilis, &* k i *commenſurabilis, adeoq;* e k, k i *rationales poteſtia tantum cõmenſurabiles, &* e i *ex binis nominibus. Itaq;* e k *nomen majus plus poteſt, quàm minus* k i, *quadrato rectæ ſibi longitudine vel cõmenſurabilis vel incommenſurabilis. Si commenſurabilis, ſitq;* e k *rationali* e f *poſitæ incommenſurabilis, erit* e i *ex binis nomibus ſecunda. Quare recta potens ſpacium* e g, *ſive* a b, *ſub rationali* e f *& ei ex binis nominibus ſecunda, contentum, Irrationalis eſt quæ* ex binis Mediis prima *appellatur.*

§58. X.

§56. X.

Si commenſurabilis, erit e i *ex binis nominibus quinta. Quare recta potens ſpacium* e g *ſive* a b *ſub rationali* e f, *& ex binis nominibus quinta* e i *contentum,* Irrationalis, *eſt, quæ* Rationale ac Medium potens *dicitur.*

§59. X.

PROPOSITIO LXXIII.

Theorema 55.

Si duo Media, *ac*, *db* inter ſe incommẽſurabilia componantur, duæ reli-

reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis ſecunda, vel bina Media potens.

Adhibita præcedentis conſtructione, erit a c *quàm* d b *vel majus vel minus, & nullo modo æqualis, quia contra hypotheſin forent commenſurabilia. Cum ergò* a c, d b *ponantur ſpacia Media,* α *erunt ipſis æqualia* e h, h i *media; quare* e k, k i β *ejuſdem rationis rationales & longitudine* γ *incommenſurabiles ſunt ipſi* e f, *poſitæ, &* ex e k, k i *rationalibus potentia tantum commẽſurabilibus compoſitum* e i *eſt ex* δ *binis nominibus.*

α 10. X.
β 1. VI.
γ 23. X.
δ 37. X.

Cum a c *quàm* d b *ponatur majus, erit* e k *nomen majus,* k i *minus. Itaq;* e k *plus poterit quàm* k i *quadrato rectæ ſibi longitudine vel cõmenſurabilis vel incommenſurabilis. Si cõmenſurabilis & utrumque ſit rationali expoſitæ incommenſurabile, erit* e i *ex binis nominibus tertia: Quare recta potens ſpacium* e g *quod* a b *eſt æquale contentum ſub rationali* e f *& ex binis nominib. tertia, Irrationalis eſt, quæ* ex binis Mediis ſecunda *dicitur. Si incommẽſurabilis, & utrunq;* e k, k i *incommenſurabile ipſi* e f *poſitæ, erit* e i *ex binis nominibus ſextæ. Quare recta potens* e g *ſpacium ſub rationali* e f *& binominali ſextæ* e i *comentum,* Irrationalis *eſt, quæ* ζ bina Media potens *vocatur.*

ε 57. X.
ζ 60. X.

Corollarium.

Ex his colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales, neque Mediæ, neque inter ſe easdem eſſe.

Nam quadratum Media ad Rationalem applicatum, α latitudinẽ efficit rationalem, ipſi Rationali longitudine incõmenſurabilem. At Quadratũ ejus, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, β latitudinem efficit ex binis nominibus primam. Et quadratum ejus, quæ eſt ex binis Medijs prima, ad rationalem applicatum, γ latitudinem facit ex binis nominibus ſecundã. Quadratũ deinde ejus, quæ ex binis mediis ſecunda ad Rationalem applicatum, δ latitudinẽ facit ex binis nominibus tertiam. At Quadratũ Majoris ad Rationalem applicatum, ε latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum vero ejus, quæ Rationale & Medium poteſt, ad rationalem applicatum, facit ζ latitudinẽ ex binis nominibus quintã. Poſtremò quadratum ejus, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatũ, η latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. Itaq;, cum hæ latitudines differant & à latitudine Media & inter ſe; à Latitudine quidem Media, quòd hæc ſit Rationalis; illæ verò Irrationales; inter ſe verò, quod ordine non ſint eadem

α 23. X.

β 61. X.

γ 62. X.

δ 63. X.

ε 64. X.

ζ 65. X.

η 66. X.

dem ex binis nominibus, perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

Hactenus itaq; de 7. Senarijs est actum. In primo à 37. ad 42. docuit Euclides ortum sex Irrationalium. In secundo à 43. ad 48. docuit earum divisiones in uno puncto. In tertio à 49. ad 54. docuit inventionem Sex binomialium. In quarto à 55. ad 60. ostendit, quomodo primi Senarij sex irrationales differant, docens, quæ sit illa irrationalis, quæ potest spacium contentum sub Rationali & binomiali prima, secunda &c: In quinto à 61. ad 66. docuit, quas latitudines irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium primo Senario explicatarum ad rationalem lineam applicata. In sexto à 67. ad 71. ostendi commensurabilem alicui Irrationalium esse eandem cum illa. In 70. duabus propositionibus 72 & 73 aliam differentiam sex illarum linearum docuit.

Sequuntur jam 7 alij Senarij, in quibus Euclides demonstrat eadem de sex aliis Irrationalibus lineis, quæ per detractionem generantur, quæ hactenus de Irrationalibus per compositionem factis docuit.

Principium Senariorum per Detractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

Theorema 56.

Si à Rationali *ac* Rationalis *ab* auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua *bc* Irrationalis est. Vocatur autem Apotome.



a 3. Lemma 19. X.

a Quia enim est ut ac *ad* ab, *ita quadratũ* ac *ad* cab *rectangulum*; *Sunt* α ac, ab *longitudine incommensurabiles*, β *erunt quadratum* ac *&* cab *rectangulum incommensurabilia. Sed quadrato* ac *compositum ex quadratis rectarũ* ac, ab *est* γ *commensurabile, quia lineæ illæ sunt potentia commensurabiles*; *& rectangulo* cab *suum duplum est commensurabile.* δ *Compositum itaq; ex quadratis* ac, ab, *& rectangulum* cab *bis sumtum sunt incommensurabilia Sed compositum ex quadratis rectarum* ac, ab ε *est æquale rectangulo* cab *bis sumto unà cum quadrato* cb. *Itaq; compositum ex quadratis rectarum* ac, ab, *reliquo quadrato* cb *est* ζ *incommensurabile. Cum itaq; ex rectarum* ac, ab *quadratis compositum sit rationale, utpote cõmensurabile quadrato* ac *Rationali, erit* cb *Irrationale & ipsa* cb *Irrationalis. Vocetur autem* Apotome, Resecta vel Residuum.

β 10. X.

γ 16. X.

δ 14. X.

ε 7. II.

ζ Cor. 17. X.

PROPOSITIO LXXV.

Theorema 57.

Si à Media *a b*, Media *ac* auferatur potentia tantùm commensurabilis existens

existens toti, quæ cum tota Rationale *b a c* contineat; Reliqua *b c* Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

Cum a b, ac *sint potentiâ commensurabiles, eorum quadrata commensurabilia erunt, & ex quadrat. compositum quadrato* a c *commensurabile. Sed quadratum* a c *Medium est Irrationale & Medium. Ergò & compositum ex quadratis* a b, a c. *Et cum* b a c *rectangulum ponatur rationale, ejus etiam duplum erit rationale. Ergo compositum ex quadratis & rectang.* b a c *bis sumtum sunt incommensurabilia. Sed compositum ex quadratis,* a b, a c *est æquale rectangulo* b a c *bis sumto cum quadrato* b c. *Ergo rectang.* b a c *bis cum quadrato* b c *incommensurabile erit rectangulo* b a c *bis sumto: & rectang.* b a c *bis incommensurabile est quadrato* b c. *Sed* b a c *rectangulum est rationale. Ergo quadratum* c b *est Irrationale & recta* c b *Irrationalis, quæ vocatur* Mediæ Apotome prima *(quia relinquitur post detractionem. Minoris nominis lineæ ex binis Mediis prima, à majori nomine.)*

X

a 16. X.

b cor. 24. X.

X

γ 7. II.

PROPOS. LXXVI.

Theorema 58.

Si à Media *b a* Media *a c* auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum totâ Medium *b a c* contineat; Reliqua *b c* Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

Quo-

α 16. X.



Quoniam quadrata a b, a c *potentia commensurabilium sunt commensurabilia; erit & compositum ex ipsis utrig; ipsorum* α *commensurabile. Sed utrumq; super Medijs est Medium. Ergò utriq; commensurabile compositum est* β *Medium.*

β cor. 24. X.

Quia verò rectangulum b a c *ponitur Medium, ejus etiam duplum erit Medium. Sed compositum ex quadratis* a b, a c γ *æquale est rectangulo* b a *bis sumto cum quadrato* b c. *Compositum ergò ex quadratis Medium est majus rectangulo* b a c *bis sumto Medio, quadrato* b c. δ *Sed Medium non superat Medium rationali. Itaq; quadratum* b c *non est rationale, ipsaq;* b c *linea irrationalis quæ vocetur* Mediæ Apotome secunda.

γ 7. II.

δ 27. X.

PROPOSITIO LXXVII.

Theorema 59.

Si à recta *a b* linea recta *a c* auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum Quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur *b a c* Medium: Reliqua *b c* Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

Quo

Quoniam compositum ex quadratis a b, a c *est Rationale, & rectangulum* b a c *Medium, etiam hujus rectanguli duplum a Medium erit vel Irrationale; Compositum verò ex quadratis* a b, a c β *incommensurabile rectangulo* b a c *bis sumto Sed Compositum quadratorum* a b, a c γ *æquale est rectangulo* b a c *bis sumto cum quadrato* b c. δ *Erit itaq; compositum quadratorum incommensurabile quadrato* b c. *Sed compositum quadratorum est Rationale. Ergò quadratum* b c *est Irrationale, ipsaq;* b c *Irrationalis, quæ vocetur* Minor.

α cor. 24 X.
β 10. def.
γ 7. II.
δ Cor. 17. X.

PROPOSITIO LXXIIX.

Theorema 60.

Si à recta *a b* recta *a c* auferatur potentiâ incommensurabilis existens toti, quæ cum totâ faciat compositum quidem ex ipsarum *a b, a c* Quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur Rationale *b a c*: Reliqua *b c* Irrationalis est. Vocetur autem *cum Rationali medium totum efficiens.*

Quoniam compositum ex quadratis rectarum a b, a c *est medium vel Irrationale, & comprehensum sub ipsis* b a c *rationale, sicut & ipsius duplum*

α 10. def. *plum α erunt compositum quadratorum &* b a c *rectangulum* b a c *bis sumtum incommensurabile. Sed compositum ex quadratis est rectangulo* b a c *bis sumto cũ quadrato* b c, β *æquale. Itaq;* γ 17. X. *rectang.* b a c *bis sumtum cum quadrato* c b *rectangulo* b a c *bis sumto est* γ *incommensurabile: & rectangulum* b a c *bis, quadrato* b c *incommensurabile. Cum itaq;* b a c *rectangulum sit Rationale, erit quadratũ* b c *irrationale, ipsaq; recta* a b c *Irrationalis, quæ vocetur* cum Rationali medium totum efficiens.

β 7. II.

PROPOSITIO LXXIX.

Theorema 61.

Si à recta *a b* recta *a c* auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis *a b*, *a c*, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium *b a c*, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua *b c* Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

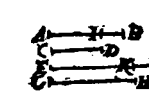
Quoniam ex quadratis rectarum a b, a c, cõ- α 7. II. *positũ α æquale est rectang.* b a c *bis sumto cum quadrato* b c; *superabit compositũ ex quadratis Medium, rectangulum* b a c *bis sumtum* γ *Medi-*

um

rum quadrato b c. γ *Sed medium non superat* β cor. 24. X.
Medium Rationali. Itaq; b c *erit Irrationale,* γ 27. X.
ipsaq; b c *Irrationalis, qua vocetur cum* Medio
Medium totum efficiens.

LEMMA.

Si idem excessus *ib* sit inter primam *ab* magnitudinem & secundam *cd*, qui *kf* inter tertiam *ef* magnitudinem & quartam *gh*; erit & vicissim idem excessus *kf* inter primam *ab* magnitudinem & tertiam *ef*, qui inter secundam *cd* magnitudinem & quartam *gh*.



Quoniam i b *est excessus inter* a b, c d; *erunt* a i, c d *æquales*; *ut &* e k, g h. *Erit ergò idem excessus inetr* a i *&* e k, *qui inter* c d *&* g h, *cum magnitudines singulæ singulis sint æquales. Est autem totorum* a b, e f *excessus idem, qui inter* a i, e k, *qui* i b *&* k f, *ponuntur æquales. Idem itaq; erit excessus inter* ab, ef, *qui inter* cd *&* gh.

Corollarium.

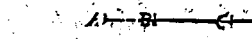
Hinc constat: Quatuor magnitudines Arithmeticam analogiam habentes, vicissim quoq; Arithmeticam analogiam habebe. *Hæc enim in excessu eodem consistit, quem jam ostendimus.*

PRO-

PROPOSITIO LXXX.

Theorema 62.

Apotomæ *a b* una *b c* tantùm congruit recta linea Rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti *a c*.



Congruat ipsi a b, *si potest, alia Rationalis* b d *toti* a d *potentia solùm commensurabilis. Quia* b c *est rationalis, erit* a c *illi potentia solùm cõmensurabilis rationalis. Sunt ergo* a c, b c *potentia tantùm commensurabiles, ut &* ad, bd. *Cum verò idem sit excessus, inter compositum ex quadratis rectarum* ac, bc *& rectangulum* a c b *bis sumtum, qui inter compositum ex quadratis rectarũ* a d, b d, *& rectangulum* a d b *bis sumtum, a quia utrumq; superat utrumq; quadrato* a b; *& erit permutando etiã idem excessus compositorum ex quadratis* a c, b c, *&* a d, b d, *qui rectangulorum bis sumptorum* a c b *&* a d b. *γ Est autem excessus inter illa composita ſpaciũ rationale, quod utrumq; sit rationale. Igitur & excessu bis sumtorum rectangulorum est ſpacium rationale. Sed cum* a c, b c *sint rationales potentia solùm commensurabiles, δ erit rectangulũ* a c b *medium;*

α 7. II.
β Lem. 79. X.
γ 27. X.
δ 22. X.

medium, ejusq; duplum medium. Sic eadem de causa a d b rectangulum bis erit medium. γ Sed medium non superat Medium rationali. Ergò excessus rectangulorum a c b & a d b, id est, quadratum ex a b erit spacium Medium, id est, Irrationale, quod tamen modò rationale ostendebatur. Quod absurdum. X.

PROPOSITIO LXXXI.

Theorema 63.

Mediæ Apotomæ primæ *a b* una *b c* tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens *a c* toti, & cum tota Rationale *a c b* continens.

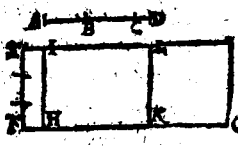
Congruat ipsa a b *alia* b d. *Quia* b c *est Media* α 24. X.
ipsi a c *potentia solùm cõmensurabile, erit &* a c, *media; &* a c, c b *Media potentia solùm com-* β 7. II.
mensurabiles. ℘ *Quoniam verò inter compositũ quadratorum* a c, b c, *& compositum quadra-* γ Schol.
torum a d, b d *idem est excessus, nempe quadratũ* 27. X.
a b, *qui inter rectangula* a c b & a d b *quovis bis sumta. Sed excessus rectangulorum* γ *est spacium rationale. Ergò & excessus compositorum ex quadratis. Sed cum* a c, b c *sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, erunt ipsarum qua-*

ζ16.X. *drata commensurabilia & compositum ex ipsis*
ε cor. 24. X. *utrisq; ipsorum δ commensurabile, atq; ob id & ε*
Medium. Nec aliter Medium erit compositum
ζ 27.X. *quadratorum* a d, b d ζ *Sed medium non superat Medium rationali. Ergò excessus compositorum ex quadratis erit Medium Irrationale, quod modo ostendebatur Rationale. Quod absurdum.*

PROPOSITIO LXXXII.

Theorema 64.

Mediæ Apotomæ Secundæ *a b*, una *b c* tantùm congruit rectæ lineæ. Media potentia solùm commensurabilis existens toti *a c*; & cum tota Medium *a c b* continens.



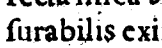
Congruat ipsi a b, *si potest, alia* b d; *& ad Rationalem* e f *applicetur rectangulum* e k *æquale cõposito quadratorum* a c, b c *& aliud* e h *æquale quadrato* a b, *& aliud* e g *æquale compositi quadratorum* a d,
α 7.II. b d. *Quoniam itaque compositum ex quadratis rectarum* a c, b c *rectangulo* a c b *bis sumto cũ quadrato* a b *æquale est; erit* i k *æquale rectangulo* a c b *bis sumto, &* i g *æquale rectangulo*

gulo a d b bis sumpto. Cum autē a c, b c sint Media β 24. X.
potentia commensurabiles β erunt earum quadrata Media & commensurabilia, γ atq; ex ipsis γ 16. X.
compositum utriq; eorum commensurabile & δ cor. 24.
δ Medium. Igitur & e k, composito illi æquale X.
erit Medium. Quòd cum sit applicatum ad Rationalem e f, ε erit f k rationale ipsi e f longitudine incommensurabilis; neq; aliter h k rationalis ε 23. X.
est ipsi e f longitudine incommensurabilis. ζ Lēma.
Et quia a c, b c longitudine sunt incommensurabiles, & est, ζ ut a c ad b c, ita quadratum η 9. X.
a c ad rectangulum a c b, η erit quadratum a c θ 10. X.
rectangulo a c b incommensurabile. Sed quadrato a c compositum ex quadratis a c, b c est
commensurabile, id est, e k rectangulum; &
a c b suum duplum, id est, i k rectangulum commensurabile: Ergò e k, i k sunt incommensura- ι 14. X.
bilia; atq; sic f h, h k rectæ θ incommensurabiles. Quæ cum sint ostensæ rationales: erunt
f h & h k rationales potentiâ solùm commen- κ 74. X.
surabiles. Cùm ergò ex Rationali f k auferatur rationalis h k ipsi f k potentia tantum commensurabilis, λ erit f h Apotome & illi cōgruens
h k. Similiter ostendetur f h apotōme, illiq; cōgruens h g. Atq; ita apotomæ f h non una tantum congruet recta potentia solùm commensu- λ 80. X.
rabilis existens toti. Quod λ absurdum.

PROPOSITIO LXXXIII.

Theorema 65.

Minori *a b* una tantùm congruit recta linea *b c* potentia incommensurabilis existens toti *a c*, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum *a c*, *b c* quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur; Medium *a c b*.



Congruat ipsi a b, *si potest, alia* b d. *Quoniam ut in* 80. *propos. idem est excessus compositorum ex quadratis* a c, b c *& ex quadratis* a d, b d *qui inter rectangula* a cb, *&* adb *quolibet bis sumto;* α *sed excessus compositorum ex quadratis est Rationale, quia utrumq; ponitur rationale. Ergò & excessus rectangulorum* a c b *&* a d b *est spatium Rationale. Idem verò etiam est non rationale, quia rectangula ponuntur Media,* β *quæ se non excedunt rationali. Ne ergò absurdum hoc sequatur, vera erit propositio.*

α Schol. 23. X.

β 27. X.

PROPOSITIO LXXXIV.

Theorema 66.

Ei *a b*, quæ cum Rationali Medium to-

tum facit, una tantum congruit recta linea *b c* potentia incommensurabilis existens toti *a c*, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur *a c b* Rationale.

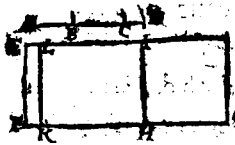
Praestet hoc, quod b c, *alia* b d. *Quoniam ut in* 80. *propos. idem est excessus compositorum ex quadratis* a c, b c, *& ex quadratis* a d, b d, *qui inter rectangula* a c b *&* a d b *quolibet bis sumto, Sed inter haec rectangula ut in* 81. *propòs. spacium est rationale. Igitur & compositorum ex quadratis excessus est spacium rationale. Sed idem etiam est non rationale, quia utrumq; est medium quae se non excedent rationali. Ne ergò absurdum hoc sequatur, vera erit propositio.* a 27. X.

PROPOSITIO LXXXV.

Theorema 67.

Si *a b*, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea *b c* potentia incommensurabilis existens toti *a c*, & cum tota faciens & compositum ex ipsa-

rum Quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur *a c b* Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum Quadratis.



Præstet hoc, si potest, quod b c, *alia* b d; *eadem adhibeatur construction, quæ in* 2. *Quoniam compositum ex quadratis* a c, b c, *est Medium, ipsi æquale,* e h *erit Medium, & recta* f h *rationali ipsi* e f *longitudine incommensurabilis. Rursus cum* a c b *rectangulum sit Medium, & ipsius duplum, id est,* i k *Medium; erit & recta* h k *Rationalis longitudine incommensurabilis ipsi* e f *rationali. Et quoniam* i k *rectangulo* a c b, *tanquam duplum, est commensurabile, quod rectangulum* a c b *incommensurabile ponitur composito ex quadratis,* a c, b c, *id est, ipsi* e h, *erit* i k *eidem* β *composito* e h ζ *incommensurabile, & recta* f h, h k, *eandem habentes rationem, longitudine* γ *incommensurabiles. Quæ cum etiam sint Rationales. Erunt ergo rationales potentia solum commensurabiles.* δ *Quare cum ex* f h *rationali auferatur rationalis* h k, *erit* f k *apotome, & ipsi congruens* h k. *Nec aliter ostendemus* f k *esse apotomen,*

α 23. X.

β 14. X.

γ 10. X.

δ 74. X.

tamen & ipſi congruentem g k. Vnde fieret, ut Apotoma uni non una tantum congrueret. Quod 180. X. eſt abſurdum.

Definitiones Tertiæ.

Expoſita Rationali & Apotoma; ſi tota plus poſsit quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

1. Si quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; vocetur Apotome prima.

2. Si verò congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; vocetur Apotome Secunda.

3. Quod ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; vocetur Apotome tertia.

Rursus si tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur Apotome Quarta.

5. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur Apotome Quinta.

6. Quod si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur Apotome Sexta.

PROPOSITIO LXXXVI.

Problema 19.

Invenire primam Apotomen.

α 2. Schol. 29 X. β cor. 6. X.



α *Inventis duabus numeris quadratis* ab, bc *quorum excessus* ac *sit non quadratus, assumtæ* d *Rationali* d, & *ipsi longitudine commensurabili* ef *fiat, ut* ab *ad* ac, β *ita quadratum* ef *ad quadratum* gf *non secus ac in* 29. X. *Erit* eg *Apotome. Quoniã quadrata* ef, gf *sunt*

g f sunt, ut numeri a b, a c, γ erunt potentia sal- γ 6. X.
tem commensurabiles rectâ e f, g f. Sed e f est
rationalis, quia posita d rationalis longitudine
est commensurabilis. Ergò & g f rationalis. Cùm
verò a b & a c proportio non sit numerorum δ 9. X.
quadratorum, erunt e f, g f longitudine incom-
mensurabiles & sic e f, g f rectâ potentia tantum
commensurabiles: ε Reliqua igitur Apotome, ε 74. X.
& quidem prima. Possit enim e f plus quàm g f
quadrato rectæ h: Quia est, ut numerus a b ad
numerum a c, ita quadratum e f ad quadratum
g f; erit & convertendo, ut a b ad c b ita qua-
dratum ex e f, ad quadratum ex h. Sed a b, c b
habent rationem quadratorum. Ergò & qua-
drata e f & h, & sic e g & h sunt longitudine
δ commensurabiles. Quoniam igitur tota e f
plus potest, quàm congruens g f, quadrato rectæ
h sibi commensurabilis longitudine, erit e g per
defin. Apotome prima.

PROPOS: LXXXVIII.

Problema 30.

Invenire Secundam Apotomen.

Fiant omnia ut in 30. propos. Erit e g *Apotome* α 6. X.
Secunda. Quoniam enim quadrata g f, e f *pro-*
portionem habentia numerorum a c, a b *commen-*
surabilia sunt, erunt rectæ g f, e f *commensura-*

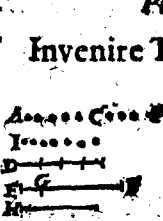
biles saltem potentia. Sed g f est rationalis, quia posita rationali d commensurabilis longitudine; erit ergò e f etiam Rationalis, & quia a c, a b, & sic quadrata g f, e f, proportionem non habent quam numeri quadrati: & erunt recta g f, e f longitudine incommensurabiles & sic rationales potentia solùm commensurabiles. γ Ideoq; e g reliquum est Apotome: & quidem Secunda. Possit enim e f plus quàm g f, quadrato h: erit ut in antecedenti h ipsi e f longitudine commensurabilis. Quare, cum tota e f plus possit, quàm congruens g f, quadrato rectæ h sibi longitudine commensurabilis, erit e g Apotome Secunda.

β 9. X.
γ 47. X.

PROPOSITIO LXXXIIX.

Problema 21.

Invenire Tertiam Apotomen.



Fiant omnia, ut in 51. Erit e g Apotome. Quoniam enim quadrata e f, g f proportionem habentia numerorum a b, a c, cõmensurabilia sunt; erũt e g, g f rectæ commensurabiles saltem potentia: & quia e f rationalis, erit & g f rationalis. Quia verò a b, a c & sic quadrata e f, g f proportionẽ nõ habent, quadratorũ numerorũ non erunt e f, g f longi-

α 9. X.

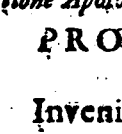
longitudine incommensurabiles & sic rationales potentia solùm commensurabiles β *Ideoq;* e g *reliqua* Apotome *est, & quidem* Tertia. β 74. X.

Quoniam est, ut i *ad* a b, *ita quadratum* d *ad* e f; *& ut* a b *ad* a c *ita quadratum* e f *ad quadratum* g f; *erit ex aquo; ut* i *ad* a c : *ita quadratum* d *ad quadratum* g f. *Sed* i *& a c non habent rationem numerorum quadratorum; ergò nec* d *& g f; & sic* d *& g f rectæ sunt longitudine incommensurabiles. Neutra igitur ipsarum* e f, g f *posita rationali* d *longitudine commensurabilis est. Possit iam* e f *plus quàm* g f *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis; erit, ut in* 86. h *ipsi* e f *longitudine incommensurabilis. Quare, cum* e f *plus possit quàm* g f *(neutra earum posita rationali existente commensurabili) quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabilis; erit* e g *ex definitione Apotome tertia.*

PROPOSITIO LXXXIX.

Problema 22.

Invenire Quartam Apotomen.



Fiant omnia, ut in 52. *Erit; ut in* 86, e g *Apotome; & quidem quarta. Posit enim* e f *plus quã* g f *quadrato rectæ* h.

Quia

Quia ergò est, ut a b *ad* a c, *ita quadratum* e f *ad quadratum* g f; *erit convertendo, ut* a b *ad* c b, *ita quadratum* e f *ad quadratum* h. *Cum ita q; tota* a b, c b *non habeant proportionem numerorum quadratorum, erunt* e g *&* h *rectæ longitudine* a *incommensurabiles. Quoniam ita q; tota* e f *posita rationalis existens commensurabilis longitudine, plus potest quàm* g f *quadrato rectæ* h *sibi longitudine commensurabili, erit* e g *ex defin.* Apotome Quarta.

a 9. X.

PROPOS: XC.

Problema 23.

Invenire Apotomen Quintam.

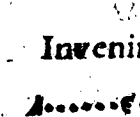
Fiant omnia ut in 53. *Erit, ut in* 87. e f *Apotome, & quidem Quinta. Possit* e f *plus quàm* g f *quadrato rectæ* h. *Et quia similiter ut in* 86. *ostendemus per conversionem rationis esse, ut* a b *ad* c b; *ita quadratum* e f *ad quadratum* h; *erunt rursus, ex* 89. *rectæ* e f *&* h *incommensurabiles longitudine: Est autem congruens* g f *rationali positæ* d *longitudine commensurabilis. Ergò ex definitione* e g Apotome Quinta.

PROPOS: XCI.

Problema 24.

Inve-

Invenire Apotomen Sextam.



Fiant omnia ut in 54. Erunt, ut in 88, d & e f longitudine commensurabiles, & e g Apotome, eadq; Sexta. Nam d & g f sunt longitudine incommensurabiles, adeoq; neutra ipsarum e f, f g commensurabilis expositæ rationali d. Possit e f plus quam g f quadrato rectæ h, quæ ut in 89, ipsi e f longitudine incommensurabilis est. Est ergò e g ex definitione Apotome Sexta.

Scholium.

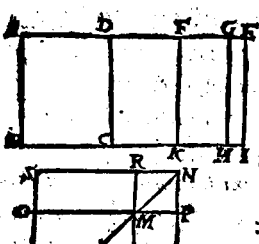
Theon invenit Apotomas promptius, subductis binomiorum nominibus minoribus ex majoribus; atque ita apotomarum ordo respondet ordini binomiorum.

PROPOS: XCII.

Theorema 86.

Si spacium *a c* contineatur sub Rationali *a b* & Apotoma prima *a d*, recta linea *o m* spacium potens, Apotoma est.

Ipsi a d *congruat* d e, *& erunt ex definitione*



apotoma prima a e, de potentia tantùm cõmensurabiles, & ad positã rationalẽ longitudine commensurabilis. Secta de bifariam in f; quadrato ef ad ae æ applicetur æquale rectangulum ag ge. Et quia ae plus potest quàm de

α 2. Lemma 17. X.

quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & erunt ag, ge rectæ longitudine commensurabiles, γ & sic utraq; toti ae longitudine commensurabilis. Sed ae rationali ab longitudine est commensurabilis: ∂ Ergò & utraq; ag, ge, rationali commensurabilis est longitudine, & ε rationalis. Quare ductis gh, ei ipsi ab parallelis, ζ erunt ah, gi rectangula rationalia. Rursus quia utraq; df, fe longitudine commensurabilis est ipsi de; de verò longitudine incommensurabilis rationali ab; η erit utraq; ipsarum df, ef ipsi ab θ longitudine incommensurabilis. Ita q; rectangulum fc sive fi, sub Rationali & potentiæ commensurabilibus contentum erit θ Medium. Iam κ fiant ipsi ah, gi quadratæ st, rp æqualia ad commune angulum n juncta, λ erunt quadratæ st, rp circa eandem diametrum lm.

β 13. X.
γ 16. X.
∂ 12. X.
ε 6. def.
ζ 10. X.
η 14. X
θ 22. X.
κ 14. II.
λ 26. VI.

Quoni-

Quoniam itaq; rectangulum a g e, quadratæ e f est æquale, μ *erunt a g, e f, g e rectæ proportionales,* ν *adeoq; f i medium proportionale inter a h, g i, id est, inter s t, r p quadrata: Sed s p inter eadem quadrata est* ξ *Medium proportionale. Sunt itaq; rectangulum s p & f i æqualia: Sed ipsi f i æquale est f e, & ipsis s p æquale r t: Ita q; totum d i gnomonio n q, cum quadratis p r est æquale. Est autem totum a i* ϖ *æquale quadratis s t, r p. Ita q; reliquum a c quadratis o q æquale est,* & *o m potest spacium a c. Dico esse Apotomen. Quia enim a h, g i sunt spacia rationalia, ut pater; ipsis æqualia quadrata s t, r p rationalia, & rectæ o p, m p, Rationales erunt. Cum q; f i sit medium, & ei æquale s p erit Medium; adeoq; incommensurabilia sunt s p, r p;* ρ *& ν ejusdem cum ipsis rationis rectæ o p, m p,* σ *incommensurabiles, & reliqua o m Apotome.*

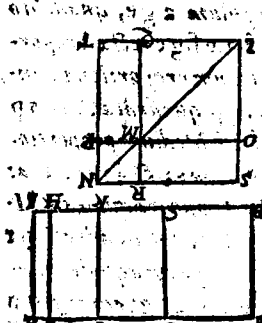
μ 17. II.
ν 1. VI.
ξ lem. 4. X.
ex constr.
ρ 10. X.
σ 74. X.

PROPOSITIO XCIII.

Theorema 69.

Si spacium *ac* contineatur sub Rationali *ab* & Apotoma secunda *ad*; Recta linea *om* spacium potens, Mediæ est apotome prima.

Ipsi



Ipſi ad congruat de, quibus conueniunt, quæ habet definitio apotomæ ſecundæ. Secta de bifariam in f reliqua omnia conſtruantur ut in g 2. c. Erunt rurſus ag, ge longitudine, & commenſurabiles inter ſe, tum ipſi ae. Sed ae poſita rationali ab longitudine eſt incommenſurabilis, γ ergo & ag, ge, quæ cum rationali ae commenſurabiles ſunt, δ ipſa ab potentia tantùm commenſurabiles ſunt. Rectangula itaq; ah, gi ſunt ε media. Rurſus cum de, ab ζ ſint Rationales longitudine commenſurabiles, ſint & df, fe longitudine tùm inter ſe, tum ipſi de commenſurabiles, erunt fc, fi rectangula ſub rationalibus longitudine cõmenſurabilibꝰ contenta rationalia. Iam verò, ut in præcedenti, oſtenderetur om poſſe ſpacium ac. Erit autem om Media Apotome prima. Quoniam ag, ge commenſurabiles ſunt longitudine, η erunt & ah, gi ſiue st, rp commenſurabilia. Ergo & op, mp erunt commenſurabilia potentia tantùm: & quidem Media, quod quadrata st, rp, æqualia Mediæ ah, gi Mediæ ſint. Cumq; fi, & ipſi æquale sp

α 18. X.
β 6. X.
γ 14. X.
δ 6. defin.
ε 22. X.
ζ ex hyp.
η 10. X.

ſit

g rationale; & sic medio r p *incommensurabile, erunt* o p, m p *ejusdem cum ipsis rationis incommensurabiles longitudine. Cum verò etiam sint Media, ut patet, & commensurabiles, erunt* o p. m p *Media potentia tantùm commensurabiles, quia continent rationales* s p, *& erit* o m Mediæ Apotome prima, 957. X.

PROPOSITIO XCIV.

Theorema 70.

Si spacium *a c* contineatur sub Rationali *a b*, & Apotoma *a d*, tertia Recta linea *a m* spacium potens, Mediæ est Apotome secunda.

Ipsi a d *congruat* d e, *quibus conveniant proprietates definitionis Apotomæ tertiæ. Secta* d e *bifariam in* f, *fiant omnia ut in 92; & eruntque rursus* a g, g e *tam inter se, tum ipsi* a e *longitudine commensurabiles. Quare cum* a e *ipsi* a b *longitudine incommensurabili, eidem & ag, g e longitudine incommensurabiles erunt. Sed* a e *est rationalis: Ergò & ipsi potentia commensurabiles* a g, g e *sunt rationales; atque ita rectangula* a h, g i *sunt Media. Rursus cum* d e *ponatur longitudine incommensurabilis rationali* a b; *utraque* d f, f e *huic* d e *commensurabilis, erit ipsi* a b *longitudine incommensurabilis; ipsaque rectangula* f c,

α 18. X. β 16. X. γ ex hypot. δ 22. X. ε 14. X.

f l *media.* *Ostendetur autem, ut in* 92, *rectam* o m *posse spacium* a c; *quam dicemus* Mediæ Apotomæ Secundam. *Quoniam enim* a h, g *sunt Media, quadrata etiam* s t, r p *ipsis æqualia erunt Media,* ζ *ipsaq; latera* o p, m p *Media. Sed* a g, g e *sunt ostensæ commensurabiles: Ergò &* a h, g i, *vel* s t, r p *commensurabilia sunt, ipsæq;* o p, m p *potentia tantum commensurabiles. Et quia ipsi* a e *ostensa est* g e *commensurabilis longitudine &* f e *ipsi* d e, *erunt,* g e, f e *longitudine incommensurabiles, & sic ejusdem rationis* g i, f i, *id est,* r p, s p *incommensurabilia; ipsaq;* o p, m p ζ *incommensurabiles longitudine. Cumq; etiam sint Mediæ & commensurabiles, erunt* o p, m p *Mediæ potentia tantum commensurabiles, & quia continet* s p *Medium;* 10. X. 76. X. *erit* o m Mediæ Apotome Secunda.

PROPOSITIO XCV.

Theorema 71.

Si spacium *a c* contineatur sub Rationali *a b*, & Apotoma *ad* quarta, recta linea *o m* spacium potens, Minor est.

Ipsi a d *congruat* d e, *quibus conveniunt proprietates Apotomæ quartæ. Secta* a d e *bifariam*

fian-

sunt omnia ut in 92; eruntq; a g, g e longitudine incommensurabiles, cum a e plus possit quam d e quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et quia a e est rationalis, rationalis a 20. X. a b longitudine commensurabilis, a erit a i rationale. Rectangulum verò d i β medium (quia d e rationalis ipsi a b longitudine incommensurabilis est) ipsius q; dimidium f i Medium. Incommensurabilia autem erunt a h, g i, cum a g, g e ostensæ sint incommensurabiles. Jam ostendetur ut in 92. rectam o m posse spacium a c, quam & Minorem dicemus. Quoniam enim a i rectangulum est rationale etiam compositum ex quadratis s t, r p ipsi γ æquale erit rationale. Et quia f i est Medium, ut patet; erit & γ ex constr. o p, sub quadratorum lateribus o p, m p comprehensum Medium. Cumq; a h, g i sint incommensurabilia ostensa, ipsis etiam æqualia quadrata s t, r p incommensurabilia erunt & rectæ o p, m p potentia incommensurabiles; Proinde quia o p, m p sunt potentia incommensurabiles, & compositum ex quadratis Rationale, rectangulum q; sub ipsis Medium, ò erit reliqua δ 77. X. o m Minor.

PROPOSITIO XCVI.

Theorema 72.

Si ſpacium *ac* contineatur ſub Rationali *ab* & Apotome quinta *ad*, Recta linea *om* ſpacium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Ipſi ad *congruat* de, *quibus conveniant proprietates Apotomæ quintæ Sectæ* de *bifariam ſiant omnia ut in* 92; *Erunt* g, *ut in* 95. ag, g *longitudine incommenſurabiles*, & ai *ut in* 93 *Medium*; di *verò Rationale ipſiusq; dimidium* fi *rationale. Erunt &* ah, gi *ut in* 95 *incommenſurabilia, poterit* fo m, *ut in* 92. *ſpacium* ac, *quæ* om *dicitur cum rationali Medium totum efficiens. Quoniam enim* ai *eſt Medium, erit compoſitum ex quadratis* st, rp *Medium: Cumq;* fi *ſit rationale, etiam* sp, *ſub* op, mp *rationale erit. Sunt autem* op, mp *potentia incommenſurabiles, ut in* 95 *patet. Itaq; cum* op, mp *ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis medium, rectangulum verò ſub ipſis Rationale; reliqua* om *a* 78. X. *erit, quæ cum rationali Medium totum efficit.*

PROPOS: XCVII.

Theorema 73.

Si ſpacium ar contineatur ſub Rationali

tionali *a b* & Apotoma ſexta *a d*, Recta linea *o m* ſpacium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.

Ipſi a d *congruat* d e, *quibus conveniant proprietates Apotomæ ſextæ. Secta* d e *bifariam, ſitque reliqua, ut in* 92, *erunt* g, g, *ut in* 95, a g, g e *longitudine incommenſurabiles, &* a i, d i *ut in* 49, *Media, hujus* g *dimidium* f i *Medium. Erunt etiam* a h, g i, *ut in* 95, *incommenſurabilis, poteritq; o m, ut in* 92, *ſpacium* a c. *Quæ* o m *dicetur* cum Medio Medium totum efficiens. *Quoniam enim* a i *eſt Medium, erit & compoſitum ex quadratis rectarum* o m, m p *Medium. Et cum* f i *ſit Medium, erit &* s p *ſub* o p, m p *contentum Medium. Cumq;* f i *ipſi* a i *ſit incommenſurabile, etiam* s p *incommenſurabile erit compoſito ex quadratis* s t, r p. *Denique* o p, m p *ſunt incommenſurabiles potentia, ut in* 95. *Quare cum* o p, m p *ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, rectangulumq; ſub ipſis Medium, & compoſito ex ipſarum quadratis incommenſurabile* : *reliqua* o m *a erit ea, quæcum Medio, Medium totum efficit.* a 79. X.

PROPOS. XCIIX.

Theorema 74.

Quadratum Apotomæ *a b* ad Rationalem *de* applicatum *df*; latitudinem *dg* facit Apotomen primam.

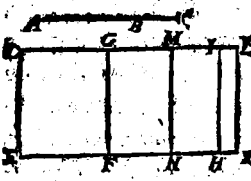
Apotomè a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *sint rationales potentia solùm commensurabiles, & ad* d e *rationalem* e *applicetur* d f *æquale quadrato* a b, *cujus latitudo* d g *erit Apotome prima. Applicetur enim ad eandem* d e *rectâ ang.* d h *æquale quadrato* a c, *& ik ad* ih *æquale quadrato* b c, *ut totum* d k *æquale sit quadratis* a c, b c. *Quoniam ergò hoc quadratorum compositum æquale est rectangulo* a cb *bis sumto, cum quadrato* a b; *tollato hoc quadrato* d f, *erit reliquum* g k *æquale rectangulo* a cb *bis sumto: ideoq; divisa* g l *bifariam per* m n *erit* m k *rectângulo* a cb *æquale. Cumq; a c, b c sint rationales, erunt & earum quadrata rationalia, & ex ipsis* γ *compositum, id est,* d h *rationale, adeoq; & intexse, & huic commensurabilia: & erit* d l *ipsi* δ *de longitudine commensurabilis. Rursus, quia* a c, b c *sunt rationales potentia solùm commensurabiles, erunt, & earum rectangulum* m k *& hujus duplum* g k *Media, & sic latitudo* g l

α 45. I.

β 7. II.

γ 16. X.

δ 21. X.



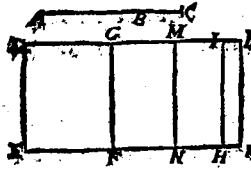
gd rationalis ipsi g f, id est, de longitudine s incommensurabilis. Et cum d k sit rationale, g k Irrationale & Medium, erunt inter se incommensurabilia, & sic d l, g l incommensurabiles vel Rationales potentia tantum commensurabiles, adeoq; d g η Apotome, & quidem prima. Quoniam enim rectangulum a c b, id est, m k est medium proportionale inter quadrata a c, b c, id est, d h, i k, erunt d h, m k, i k, continuè proportionalia, & d i, m l, i l rectæ proportionales. Itaque d i l rectangulum quadrato m l est æquale. Cum & quadrata a c, b c, id est, d h, i k sint commensurabilia & erunt d i, i l longitudine commensurabiles. Cum ergò d l, g l sint inæquales & ad majorem d l applicatum sit d i l rectangulum æquale quadrato m l, id est, quartæ parti g l: Sint verò d i, i l ostensæ commensurabiles λ poterit d l plus quam g l quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum d g sit ostensa apotome, totæ & d l plus possit quàm g l congruens quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, eademq; tota rationali d e longitudine commensurabilis sit. Erit ex defin. d g Apotome prima.

ß 23. X.
ζ 10. X.
ϑ 47. X.
9 Lema 54. X.
κ 17. VI.
λ 18. X.

PROPOSITIO XCIX.

Theorema 75.

Quadratum Mediæ Apotomæ primæ a b ad Rationalem d e applicatum latitudinem d g facit Apotomen secundam.



Mediæ Apotomæ primæ a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *sint Mediæ potentia solùm commensurabiles continentq; Rationale &* ad d e *rationalem applicetur* d f *æquale quadrato* a b; *Erit* d g *Apotome. Iisdem enim constructis, ut in præcedenti: Quoniam* a c, b c *sunt mediæ potentia commensurabiles, erunt earum* quadrata, *id est,* d h, i k *Media & commensurabilia, & totum* d k *utriq; ipsorum commensurabile & β medium. Hoc ad* d e *rationale applicatum γ facit* d l *rationalem ipsi* d e *longitudine incommensurabilem. Rursus, quia rectangulum* a c b *ponitur rationale, erit ejus duplum* g k *rationale, ejusq; latitudo* g l *rationalis, ipsi* g f, *id est,* d e *longitudine δ commensurabilis. Sed quia* d k *est Medium,* g k *verò rationale,* d l *& g l ε sunt incommensurabiles; & quia etiam rationales, sunt rationales potentia tantùm commensurabiles; ac* d g ζ Apotome eaque Secunda. *Ostenditur enim, ut in* 98. *inter* d l *plus posse quàm* g l *congruens quadrata*

16. X. cor. 24. X. 23. X. δ 11. X. ε 10. X. ζ 14. X. 98.

drato rectæ sibi longitudine commensurabilis; quæ g l *cum sit longitudine commensurabilis rationali posita* d e; *ex definitione igitur* d g *est* Apotome Secunda.

PROPOS: C.

Theorema 76.

Quadratum Mediæ Apotomæ secundæ, *a b* ad Rationalem *de* applicatum *df*, Latitudinem *dg* facit Apotomen Tertiam.

Media Apotome secunda a b, *congemat* b c, *ut* a c, b c *sint Media potentia solùm commensurabiles, continentes Medium; & ad* d e *rationalem applicetur* d f *æquale quadrato* a b: *Exit* d g *apotome. Iisdem enim, quæ prius, constructis, ut in* 99, d k *est Medium, &* d l *rationalis longitudine & incommensurabilis ipsi* d e. *Est* a c b *rectangulum sit Medium, etiam ipsius duplum* g k, *& latitudo* g l *longitudine incommensurabilis rationali* d e. *Sed quia* a c, c b *sunt longitudine incommensurabiles; & est, ut* a c *ad* b c, *ita quadratum* a c *ad rectangulum* a c b; *erunt & hæc inter se incommensurabilia. Et quia quadrato ex* a c *compositum ex quadratis* a c, b c *est & commensurabile, rectangulo verò* a c b *summ duplum; erunt compositum ex quadratis, id est,* d k *&*

a 23. X.

b 9. Lemma 19. X.

γ 10. X.

δ 16. X.

ε 14. X.

rectangulum bis, id est, g k *incommensurabilia, rectæ* g l, d l *longitudine incommensurabiles.*

ζ74. X. *Quæ cum etiam sint rationales; Erunt rationales potentia tantùm commensurabiles & d g* ζ Apotome, eaque Tertia. *Ostenditur enim, ut in* 98, d l *totam plus posse applicatâ* g l *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Sed cum neutra illarum* d l, g l *sit longitudine commensurabilis positæ rationali* d e, *erit ex definit.* Apotome Tertia.

PROPOSITIO CI.

Theorema 77.

Quadratum Minoris *a b* ad Rationalem *d e* applicatum *d f*, Latitudinem *d g* facit Apotomen Quartam.

Minori a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *potentia incõmensurabiles sint, facientes ex suis quadratis compositum rationale; sed rectangulum* a c b *Medium, & ad* d e *rationalem applicetur* d f, *ut antea, erit* g d *apotome. Iisdem enim ut prius constructis in* 100; *Quoniam* d k *æquale composito quadratorum* a c, b c *est rationale, erit* d k *rationalis rationali* d e *longitudine commensu-*

β 23. X. *rabilis*: a c b *autem medium; erit & ejus duplum, id est,* g k *medium, &* g l *rationalis, ipsi* d e *longitudine* β *incommensurabilis. Rursus, quia* d k *rationale,* g k *medium, erunt incommensurabilia, ipsæ* g d l, g l *longitudine incommen-*

mensurabiles, atq; ita Rationales potentia tantum commensurabiles, & dg ad Apotome, eaq; Quarta. *Quoniam enim* a c, b c *potentia sunt incommensurabiles, earum quadrata* d h, i k *incommensurabilia* γ *&* d l, i l *longitudine incommensurabiles sunt. Cum itaq;* d i l *rectangulum æquale sit quadrato* m l, *ut ex* 98 *patet, & poterit* d l *plus quàm* g l *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Itaq; cum tota* d l *posita rationali* d e *longitudine commensurabilis, plus possit, quàm congruens* g l *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: erit* d g *reliqua ex definitione,* Apotome Quarta. δ 74. X. ε 19. X.

PROPOSITIO CII.

Theorema 78.

Quadratum ejus *ab*, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem *de* applicatum *df*, Latitudinem *dg* facit Apotomen Quintam.

Rectæ cum Rationali Medium totum efficienti a b *congruat* b c *ut* a c, b c *sint potentia incommensurabiles; facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum verò rationale; & ad* d e *rationalem applicetur* d f *ut antea. Erit* d g *apotome. Quoniam enim ex quadratis rectarum* a c, b c *compositum* i d f, d k *est Medium, & erit* d l *rationalis posita longitudine incommensurabilis: Rectangulum autem* a c b, ζ 23. X.

β21.X. ejusq; duplum g k rationale, & erit g l positæ longitudine commensurabilis. Cum itaq; d k sit Medium, & g k rationale, incommensurabilia sunt;
γ10.X. & d l, g l longitudine γ incommensurabiles, adeoq; Rationales potentia tantùm commensu-
δ74.X. rabiles, & d g δ Apotome eaque quinta. Ostenditur enim, ut in 101, d l plus posse quàm g l congruens, quæ positæ rationali longitudine commensurabilis est, quadrata rectâ sibi longitudine incommensurabili. Erit ergo ex definitione d g Apotome quinta.

PROPOSITIO CIII.

Theorema 79.

Quadratum ejus *a b*, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem *d e* applicatum *d f*, Latitudinem *d g*, facit Aporomen Sextam.

Rectæ cum Medio medium totum facienti a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *potentia sint incommensurabiles, facientes compositum ex suis quadratis & rectangulum medium, & ad rationalem* d e *applicetur ut antea. Erit* d g *apotome. Quo-*
ε23.X. *niam enim tam compositum ex quadratis* a c, b c, *id est* d k, *quàm rectangulum* a c b *ipsius duplum* g k *sunt Media, & erunt* d l & g l *rationa-*

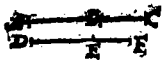
les.

les longitudine incommensurabiles posita rationali d e. Cum q; a c b rectangulum compositum quadratorum sit incommensurabile, erunt g k, d k incommensurabiles, β & g l, d l longitudine incommensurabiles, adeoq; rationales potentia solum commensurabiles, & d g γ Apotome eaq; Sexta. Ostenditur enim, ut in 101, d l plus posse quàm congruens g l quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: & quia neutra illarum posita rationali d e longitudine commensurabilis est, erit ex definitione d g Apotome Sexta. β 10. X. γ 74. X.

PROPOSITIO CIV.

Theorema 80.

Recta linea de Apotomæ ab Longitudine commensurabilis, & ipsa ab Apotome est, atque ordine eadem.



Apotoma a b congruens sit b c, ut a b, b c sint rationales potentia commensurabiles, sitq; d e commensurabilis ipsi a b: Erit d e apotome ordine eadem cum a b. Fiat, ut a b ad d e, sic d c ad e f. Ergò etiã est ut a c ad d f, ita b c ad e f. Quoniam igitur a b, d e sunt longitudine commensurabiles, & erunt & b c, e f, & a c, d f lon- α 11. VI. β 12. V. γ 10. X.

d f *longitudine commensurabiles. Et cum* a c, b c *sint rationales,* γ *etiam* d f, e f *ipsis commensurabiles rationales erunt. Rursus, quia est, ut* a c *ad* d f *ita* b c *ad* e f: *& permutando, ut* a c *ad* b c, *ita* d f *ad* e f, *erunt hæ, ut illæ potentia tantum commensurabiles. Et, quia etiam sunt rationales,* δ *Erit reliqua* d e *Apotome, & quidem ordine eadem cum* a b. *Si enim possit* a c *plus quàm* b c *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: etiam* d f *quàm* e f, *si jam* a c *tota fuerit rationali positæ longitudine commensurabilis,* ζ *erit &* d f, *& sic* Apotome prima; *Si verò congruens* b c, *etiam* e f; *& sic* Secunda: *si neutra, etiam neutra, & sic* Tertia. *Sed si* a c *plus possit, quam* b c *quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; Ergò etiam* d f *quàm* e f; *sig,* a c *tota fuerit rationali positæ longitudine commensurabilis;* ε *Erit &* d f; *& sic* d e *eodem modo* Apotome quarta: *Si verò congruens* b c, *etiam* e f; *& sic* Apotome quinta, sexta *& ostenditur prout* a b.

δ 74. X.

δ 15. X.

ζ 12. X.

ε 14. X.

Scholium.

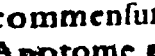
Eædem observationes, ad 67, de potentia commensurabilibus sunt additæ, possunt huc quoque transferri.

PROPOS: CV.

Theorema 81.

Recta

Recta linea *de* Mediæ Apotomæ *ab* commensurabilis, & ipsa *de* Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.



Mediæ apotomæ a b *congruat* b c, *ut* a c, b c, *sint Mediæ potentia tantùm commensurabiles: & ipsi* a b *sit* d e *commensurabilis vel vel longitudine vel potentia tantùm; Factis ijsdem quæ in præcedenti,* α *erunt* b c, e f: & a c, d f *eodem modo vel longitudine vel potentia commensurabiles prout* a b, d e *fuerint. Cum* β a c, b c *sint Mediæ, etiam* d f, e f *ipsis commensurabiles* β *Mediæ erunt. Rursus cum sit, ut* a c *ad* d f, *ita* b c *ad* e f: *& permutando; ut* a c *ad* b c *ita* d f *ad* e f; *erunt ha, ut illa, potentia tantùm commensurabiles: & quia etiam Mediæ,* γ *erit* d e *reliqua Mediæ apotome, & quidem ordine eadem cum* a b. *Quoniam est, ut* a c *ad* c b, *ita* d f *ad* e f: *& ut* a c *ad* c b, δ *ita quadratum* a c *ad rectang.* a c b: *ita ergò etiam erit quadratum* d f *ad rectang.* d f e; *& permutando, ut quadratum* a c *ad quadratum* d f, *ita rectangulum* a c b *ad rectang.* d f e; *& hæc, ut illa, commensurabilia. Si itaq; rectangulum* ε a c b *fuerit rationale, erit & quadratum* d f e; *& linea* d e ζ Mediæ Apotome prima: *Sed si Medium, & linea* d e ζ Mediæ apotome secunda.

α 10. X.

β 24. X.

γ 75. vel 76. X.

δ 3. Lem. 19. X.

ε 75. X.

ζ 76. X.

PRO-

PROPOS: CVI.

Theorema 82.

Recta linea *de* Minori *ab* commensurabilis, & ipsa *de* Minor est.

Minori a b *congruat* b c, *ut* a c, b c *sint potentia incommensurabiles facientes ex suis quadratis compositum rationale, rectangulum verò Medium, sed ipsi* a b *sit* d e *commensurabilis sive longitudine, sive potentia tantum. Factis ijsdem, quæ in prioribus, erunt* d f, e f *ipsis* a c, b c *eodem modo ut in* 105. *commensurabiles. Cum* 22. VI. *sit, ut* a c *ad* d f; *ita* b c *ad* e f; *& permutando, ut* a c *ad* b c: *ita* d f *ad* e f; a *Ergò, ut quadratum* a c, *ad quadratum* b c; *ita quadratum* d f *ad quadratum* e f; *& componendo; ut compositum ex quadratis* a c, b c, *ad quadratum* b c, 10. X. *ita compositum quadratorum* d f, e f *ad quadratum* e f; *& permutando, ut compositum ex quadratis* a c, b c, *ad compositum ex quadratis* d f, e f; *ita quadratum* b c *ad quadratum* e f; *& Ergo ut hæc sibi; ita illa sibi commensurabilia erunt. Sed compositum ex quadratis* a c, c b *est rationale: Ergò & ex* d f, f e *compositum. Rursus, quia, ut in* 105. a c b *&* d f e *sunt commensurabilia; hoc, ut illud,* γ *erit Medium. Denique cum sit, ut* a c *ad* b c, *ita* d f *ad* e f; γ Cor. 24. X. *Sed* a c, b c *sint potentia incommensurabiles; erunt & d f, e f: Quæ cum faciant ex suis*

quadra-

quadratis compositum rationale; rectangulum vero sub ijsdem d f, e f *Medium, erit* d e Minor. ā 77. X.

PROPOS: CVII.

Theorema 83.

Recta linea *d e* commensurabilis *a b*, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa *d e* cum Rationali Medium totum efficiens est.

Rectæ a b *cum rationali Medium totum efficienti, congruat* b c; *ut* a c, b c *potentia sint incommensurabiles, facientes compositum quadratorum Medium, rectangulum vero rationale; sitq;* d e *ipsi* a b *quocunq; modo commensurabilis. Factis ijsdem, quæ in prioribus, ostenditur, ut in 106. compositum ex quadratis* a c, b c, *composito quadratorum* d f, e f *commensurabile esse. Cumque illud ponatur Medium, erit & hoc Medium. Rursus ostendetur etiam rectangulum* a c b *commensurabile esse rectangulo* d f e, *& hoc, ut illud Rationale, ex 105. Sunt denig;* d f, b f *eodem modo, ut in 106, potentia incommensurabiles; quæ tum ex suis quadratis compositum* ā 78. X. *efficiant Medium, rectangulum vero sub ipsis rationale; & erit* d e *quæ cum Medio rationale efficit.*

PROPOSITIO CVIII.

Theorema 84.

Recta linea *d e* commensurabilis ei *a b*, quæ cum Medio Medium totum efficit, & ipsa *d e* cum Medio Medium totum efficiens est.

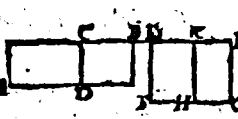
Recta a b cum Medio Medium totum efficienti congruat b c, ut a c, b c potentia sint commensurabiles, facientes compositum quadratorum Medium & rectangulum Medium incommensurabile composito quadratorum. Factis ijsdem, ut antea, ostenditur ut in 106, compositum ex quadratis a c, b c composito quadratorum d f, e f commensurabile esse; quorum illud, cum sit Medium, etiam hoc est Mediũ. Rursus, ut in 105, rectangulum a c b rectangulo d f e commensurabile, & hoc, ut illud, Medium ostenditur: Sunt etiam d f, e f, ut in 106. potentia incommensurabiles. Denig, etiam ut compositum ex quadratis a c, b c incommensurabile est rectangulo a c b, α 14. X. *ex hypothesi; & ita compositum ex quadratis d f, e f rectangulo d f e.* β 79. X. *Ergò est d e, quæ cum Medio Medium totum efficit.*

PROPOS: CIX.

Theorema 85.

Medio *b d* à Rationali *a b* detracto; Recta linea, quæ reliquum spacium *a c* potest, una ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome vel Minor.

Ad



Ad Rationalem e f *applicentur rectangula* e h, k g *æqualia rectangulis* a c, d b *ut totum* f i *sit æquale toti rationali* a b; *& erit* g, e i *rationalis rationali* e f *longitudine commensurabilis*; *& quia* k g *Medio* d b *est æquale, erit* ki *rationalis longitudine commensurabilis rationali* e f. *Itaq; & e i, k i sunt longitudine incommensurabiles, & sic rationales potentia tantùm commensurabiles: ipsa* e k *Apotome, & congruens* k i. *Si jam* e i *plus potest quàm* k i *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, erit* e k *Apotome prima, at* g, *sit recta potens spacium* f k *contentum sub rationali* e f *& Apotome prima, id est,* a c *ipsi* e *Apotome.* *Si verò plus potest quadrato rectæ incommensurabilis, cum tota* e i *posita* e f *longitudine sit commensurabilis, erit* e k Apotome quarta, *& recta potens spacium* e k *sub rationali* e f *& Apotome quarta* e k *erit* Minor.

α 21. X.
β 23. X.
γ 73. X.
δ 74. X.
ε 92. X.
ζ 95. X.

PROPOSITIO CX.

Theorema 86.

Rationali *d b* à Medio *a b* detracta, aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum rationali Medium totum efficiens.

Con-



Constructis iisdem, ut in præcedenti; quia f i medio a b est æquale erit, ei latitudo ra-
α 23.X. tionali rationali e f longitudine incommensu-
β 21.X. rabile; k i verò β commensurabilis, quia h i ra-
tionali d b est æquale: dtag. ei, k i rationales potentia tantum commensurabiles & reliqua
γ 74.X. e k γ apotome, eiq; congruens k i. Si e i plus pos-
sit quàm k i quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & congruens k i commensu-
rabilis longitudine rationali e f, erit e k apoto-
me secunda; quare rectæ potens spacium e k
δ 93.X. contentum sub rationali e f, & apotome secundæ, δ erit Mediæ Apotome prima. Si verò plus quadrato rectæ longitudine incommensurabilis, erit e k apotome quinta; & rectæ potens hoc spacium f k contentum sub rationali & apoto-
ε 96.X. me quintæ, ε erit cum rationali Medium to-
tum efficiens.

PROPOS: CXI.

Theorema 87.

Medio *d b* à Medio *a b* detracto, quod *d b* sit commensurabile *a b* toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt; vel Mediæ Apotome secunda; vel cum Medio Medium totum efficiens.

Constru-

Constructis iisdem, ut antea; erunt e l, k i rationales, rationali e f longitudine incommensurabiles. Sed cum f i, h i ipsis a b, d b aequalia ponantur incommensurabiles; erunt e i, k i longitudine incommensurabiles, & sic rationales potentia tantùm commensurabiles; & reliqua e k & apotome. Si ergò e i, plus possit quàm k i quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & auferatur e i, k i rationali e f sit incommensurabilis, ut patet, erit e k apotome tertia & recta potens spacium f k contentum sub rationali e f & apotoma quartæ e k, γ erit Mediæ Apotome Secunda: Si verò plus possit quadrato rectæ longitudine incommensurabilis, erit e k apotome Sexta; & recta potens spacium f k contentum sub rationali & apotoma Sexta, δ erit ea quæ cum Medio Medium totum efficit. α 23. X. β 74. X. γ 94. X. δ 97. X.

PROPOSITIO CXII.

Theorema 85.

Apotome a non est eadem, quæ ex binis nominibus.



Rationali b c posita applicetur rectangulum c d æquale quadrato a. Quoniam ergò a est apotome, erit b d apotomæ primæ, cui congruat d c. Erunt α 93. X.

b c, d e, ex definitione apotomæ primæ rationalis potentia tantùm commensurabilis, quarum prior posita ex commensurabili longitudine, plus valeat quadrata rectæ sibi longitudine commensurabili. Rursus, quia & a ponitur esse ex binis nominibus, eadem latitudo b d erit ex binis nominibus prima. Sit autem majus nomen b f. Ergò & ex definitione binomij primi b f, f d sunt rationales potentia solùm commensurabiles, quarum prior posita existens longitudine commensurabilis, plus potest quàm f d quadrato rectæ sibi longitudine commensurabili. Itaq; cum tam b e, quàm b f longitudine sint commensurabiles eidem b c, erunt quoq; b e, b f inter se commensurabiles longitudine: Ergò & eadem b e, reliqua partis f e longitudine à commensurabilis est, & f e ut b e rationalis erit. Sed quia duarum commensurabilium longitudine b e, f e, una b e ipsi d e est incommensurabilis, erit & altera f e eidem d e incommensurabilis longitudine: & sic f e, d e sunt rationales potentia solùm commensurabiles. Itaq; f d reliqua est apoteme & sic Irrationalis, quæ antea erat rationalis. Nunc ergò a existens apoteme, est eadem quæ ex binis nominibus.

β 61. X.

γ 12. X.

δ 16. X.

ε 14. X.

ζ 74. X.

Corollarium.

Ex his colligitur Apotomen & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas neq; Mediæ neq; inter se esse easdem.

Nam quadratum Mediæ ad rationalem lineam appli-

...appotēatum, latitudinem α efficit rationalē, posi-
...te longitudine incōmensurabilem. Quadratum
autem apotomæ ad rationalem applicatum, lati-
tudinem β facit apotomen primam; quadratum
Mediæ apotomæ primæ, γ apotomen secundam;
Mediæ apotomæ secundæ δ Apotomen tertiam:
Minoris, ε apotomen quartā. Ejus, quæ cum ra-
tionali Mediū totum efficit, ζ apotomen quintā:
Ejus, quæ cum Medio Medium totum efficit, η a-
potomen sextam. Cum itaq; hæ latitudines differ-
rant à Media latitudine, quia hæc rationalis, illæ
irrationales sunt; & inter se, quia ordine nō sunt
eadem apotoma, patet Apotomē & reliquas illā
consequentes, & à Media & inter se differre.

α 23. X.
β 98. VI.
γ 99. X.
δ 100. X.
ε 101. X.
ζ 102. X.
η 103. X.

Cum verò, ut in hoc Theoremate ostensum est,
Apotome non sit eadem, quæ ex binis nominibus:
quadrata autem apotomæ & reliquarum ipsam
consequentium faciant latitudines; Apotomen
primam, secundam, tertiam, quartam, quintam
sextam: Sed quadrata Binomialis & reliquarū
consequentium faciant latitudines ex binis no-
minibus primam, secundam, tertiam, quartam,
quintam, & sextam, constat, latitudines Apotomæ &
aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem
non esse, latitudinibus ejus, quæ ex binis nomini-
bus & reliquarum post ipsam Irrationalium; a-
deoq; inter se differre. Quare, cum & hæ & illæ
à Media differant, patet, rationali posita Medi-
um Irrationales esse lineas esse lineas inter se dif-
ferentes, de quibus hactenus. 1. Me-

1. est Media, 2. Ex binis nominibus cum ℓ speciebus. 3. ex binis Medijs prima. 4. ex binis Mediis secunda. 5. Major. 6. Rationale ac Medium potens. 7. Bina Media potens. 8. Apotome cum sex speciebus. 9. Mediæ apotome prima, 10. Mediæ apotome secunda 11. Minor 12. Cum rationali Medium totum efficiens. 13. Cum Medio Medium totum efficiens. *Pergit jam Euclides exposita Irrationalium proprietatibus, inter se conferre Apotomas & binomiales propos.* 113. 114. 115.

PROPOS: CXIII.

Theorema 89.

Quadratum Rationalis *a* ad eam *bc*, quæ ex binis nominibus *bd*, *cd*, applicatum *be*, latitudinem *bf* facit apotomen, cujus nomina tota *fk* & congruens *bk* commensurabilia sunt nominibus *bd*, *dc*, ejus, quæ ex binis nominibus & in eadem proportione, & adhuc Apotome *bf*, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea *bc*, quæ ex binis nominibus.

Ad nomen minus d c *recta* b c, *applicetur eidem*

[illegible] *dem quadrato rationalis* [illegible] a, *rectangulum* c g *æquale, sit* g h *æquale ipsi* [illegible]. *Cum ergo* c f, c g *sint æ-* α 14. vel
[illegible] *rit, ut* b e *ad* d c, *ita* f g, *id est* b h *ad* 16. VI.
[illegible] *endo : ut* b d *ad* d c, *ita* f h *ad* b f:
[illegible] *jor quam* b f, *sicut* b d *major est*
[illegible] *umpta* f i *ipsi* f b *æquali*, β *fiat, ut* h i β 12. VI.
[illegible] k. *& componendo, ut* h f *ad* f i, *id*
[illegible] k *ad* b k. *Ostensum vero est esse, ut* h f γ
[illegible] d *ad* d f. *Sed hæ sunt nomina* [illegible]
[illegible] *nales potentia tantum commen-* X
[illegible] *bilis, &* h f, b f *sunt potentia commensu-*
[illegible] *biles. Ergo, quia est, ut* h f *ad* b f, *ita* f k *ad* γ 10. X.
b k : *erunt* h f, f k *antecedentes simul, id est* X
h k *ita ut ad consequentes* f b, b k *simul, id est,* δ 12. X.
b k, *ut* h f *ad* b f. *Quare ut* h k *prima ad* b k
[illegible] *secundam, ita quadratum primæ ad quadra-* ε 20. VI.
[illegible] *tum secundæ. Sed cum* c g *sit rationale, utpote*
[illegible] *quale rationali* a *æquale, rationali* d c *ap-*
[illegible] *plicatum* ζ *faciens* d g *rationalem ipsi* c d *lon-*
[illegible] *gitudine commensurabilem; erunt* h b, *id est,* d g,
& d c *rationales longitudine commensurabiles.* ζ 11. X.
Cum sit ostensum esse, ut b d *ad* d c, *ita* f k *ad*
b k, *ut* f k *ad* b k, *ita* h k *ad* f k. η *Ergo ut*
quadratum b d *ad quadratum* d c, *ita quadra-* η 22. VI.
tum h k *ad quadratum* f k. γ *Et sic commensu-*
rabilia sunt hæc atq; illa. Sed fuit, ut quadratum
hk, *ad*

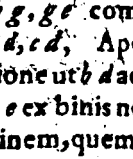
hk, ad quadratum fk, ita recta hk ad bk: γ ideoq; sunt longitudine commensurabiles inter se & reliqua bh. Sed bh est ostensa rationalis: 9 cor. 19. X. Ergò & hk ipsi commensurabilis est rationalis, quare & hb, bk rationales erunt. Cum itaque fk ipsi bk potentia tantùm commensurabilis sit, erit & fk rationalis. Quare cum fk, bk sint rationales potentia tantùm commensurabiles, erit reliqua bf x apotome, cõgruens, bk. Quod primum. Cum q; hb, bk ostensa sint longitudine inter se cõmensurabiles; λ ergò & ipsi hk: ipsa q; hb sit longitudine commensurabilis dc, erit eidem dc longitudine commensurabilis bk. μ. 12. X. Rursus, quia est, ut bd ad dc, ita fk ad bk; & permutando, ut bd ad fk; ita dc ad bk; γ ita q; ut ha, ita & illa sunt longitudine commensurabiles; erunt ½ ipsius bf Apotomæ nomina fk, bk, nominibus bd, dc binomialis longitudine commensurabilia. Quod secundum. Rursus, quia est, ut bd ad dc ita fk, ad bk; erunt apotomæ bf nomina fk, hk in eadem ratione cum bd, dc nominibus ipsius bc Binomialis. Quod est tertium. Denique vel bd plus potest quàm dc quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis. Si commensurabilis, cum sit, ut bd ad dc, ita fk ad bk, poterit etiam fk plus quàm bk quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si incõmensurabilis, poterit plus quàm quadrato rectæ longitudine incõmensura-

surabilis. Quare, si rationali posita longitudine commensurabilis fuerit b d, erit & f k, quare vel prima vel quarta apotome erit, cũ illa prima vel quarta sit: Si d c, *etiam* b k, *quare secunda vel quinta: Si neutra* b d, d c, *etiam neutra* f k, b k, *quare tertia vel sexta. Ergò apotome eadem ordine cum Binomiali.*

PROPOSITIO CXIV.

Theorema 90.

Quadratum Rationalis *a* ad Apotomen *b c* applicatum *b i*, latitudinem *b e* facit eam, quæ ex binis nominibus *b g, g e* cujus nomina *b g, g e* commensurabilia sunt nominibus *b d, c d*, Apotomæ *b c*, & in eadem proportione ut *b d* ad *c d*, ita *b h*, ad *h e*, & adhuc, quæ *b e* ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome *b c*.



Applicetur ad b d, b f *rectangulum æquale ipsi* b i *faciens latitudinem* b g. *α Erit ut* b e *ad* b g, *ita* b d *ad* b c; *& convertendo, ut* b e *ad* g e, *ita* b d *ad* c d. *β Secetur etiã* g e *ad* h *juxta proportionẽ* b e *ad* g e. *Quia est, ut* b e *tota ad* g e *totã, ita* e h *ex* b e *ablata, ad* h g *ex* g e *ablatam. Erit ergò etiã reliqua* b h *ipsius* b e, *ad reliquã* h e *ipsius* g e, *ut tota* a b e, *ad totam* g e. *Sed ut* b e *ad* g e, *ita erat* e h *ad* h g. *Ergò ut* b h *ad* h e, *ita* e h *ad* h e, *ipsa*que e h *est media proportionalis inter* b h, g h.

α 14. vel 16. VI.

β 10. VI.

γ Quare

cor.20. VI. γ *Quare ut* b h *prima ad* g h *tertium, ita quadratum primæ, ad quadratum tertiæ. Quia autem fuit, ut* b d *ad* c d; *ita* a e *ad* g e, *id est ad* h e; *Sunt autem* b d, c d *nominatæ potentia rationales potentia solum commensurabiles.*

δ 10. X. *Erunt etiam* b h, h e *& ex his quadratis commensurabilia; adeoq;* b h, h e *propter commensurabilia longitudine, commensurabiles*;

ε 16. X. *& tota* b h *longitudine commensurabilis parti* g h, *etiam ipsi* b g *longitudine commensurabilis erit. Sed cum quadrato rationali* a *æquale rationale* b f *sit applicatum ad rationalem* b d, *erit* b g *latitudo rationalis longitudine ab* b d *commensurabilis: Eidem ergo &* b h *longitudine commensurabilis* η *erit & rationalis. Quare cum* b h, h e *sint ostensæ potentia solum commensurabiles, &* b h *rationalis; erit &* h e *rationalis,*

η Scho. 12. X. *& sic* b h, h e, *sunt rationales potentia solum commensurabiles,* ϑ *ipseq;* b e *ex binis nominibus. Quod primum est. Quia vero & patet esse* b h *ad* h e, *ut* b d *ad* c d; *&* ι *permutando,*

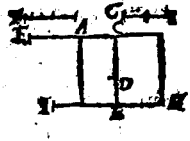
ι 17. X. b h *ad* b d, *ut* h e *ad* c d, *Sunt* κ *autem* b h, b d *longitudine commensurabiles:* λ *Ergo &* h e, c d. *Itaq; nomina* b h, h e *binomialis* b e, *nominibus* b b, c d *Apotomæ* b c *longitudine sint commensurabilia. Quod secundum. Imo & in eadem ratione, cum sit ut* b h *ad* h e, *ita* b d *ad* c d. *Quod est tertium. Denique* b d *plus potest, quam* c d *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis*

rabilis, vel incommensurabilis. Si cõmensurabilis, etiam b h *plus potest quam* h e *quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si incommensurabilis, incommensurabilis; unde ordine sex binomia singula ejusdem ordinis cum apotomis inveniuntur. Quod est quartum.*

PROPOSITIO CXV.

Theorema 91.

Si spacium *a b* contineatur sub Apotoma *a c* & ea *c b* quæ ex binis nominibus, cujus nomina *c d, d b*, commensurabilia sunt nominibus *c e, a e*, Apotomæ *a c*, & in eadem proportione, ut *c d* ad *b d*, ita *c e* ad *a e*, rectalinea *f* spacium *a b* potens est Rationalis.



Quadrato rationalis g *æquale rectangulum* b h *applicetur ad* c b, *& erit* b h *apotome, cujus nomina* h k, b i *sint longitudine commensurabilia nominibus* c d, d b, *& in eadem ratione, nempe* h i *ad* b i, *ut* c d *ad* d b, *adeoq; ut* c e *ad* a e: a iij. X.

β 19. V. *& permutando, ut tota* h i *ad totam* c e, *ita ablata* b i *ad ablatam* a c. ζ *Ergò & reliqua* b h

γ 12. X. *ad reliquam* a c, *ut* h i *ad* c e. *Quæ cum* γ *sint commensurabiles longitudine, quia utraq; ipsi* c d *longitudine commensurabilis est, erunt &*

δ 10. X. ε 1. VI. f b, a c *& h c ipsi* a b *cum sint in eadem ratione. Sed* h c *æquale quadrato rationalis* g *est rationale. Ergò & a b ipsi commensurabile est rationale, & ipsum potens recta* f *rationale.*

Corollarium.

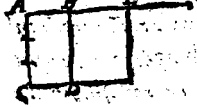
Constat hinc, rationale spacium includi posse duabus Irrationalibus ut hic binomiali & apotomæ inclusum est rationale *a b.*

PROPOS. CXVI.

Theorema 92.

A Media *a b* infinitæ Irrationales sunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

α 38. X. Lemma. β 11. def.



Sub rationali a c *& Media,* a b *comprehensum spacium* a d *a Irrationale possit* b e *& Irrationalis quæ nulli* ζ 13 *Irrationalium eadem erit.*

Medium

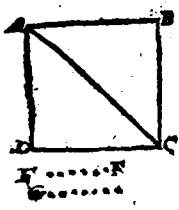
Medium enim ad rationalem applicatum γ faciet latitudinem rationalem; reliquarum 12. *Irrationalium quadrata applicata ad rationalem facerent latitudines vel binomiales vel apotomas. Sed Quadratum* b e *applicatum ad* a c *facit latitudinem* a b *Mediam differentem à reliquis omnibus Irrationalium quadratorum latitudinibus. Ergò* b e *Irrationalis differt ab illis* 13 *Irrationalibus. Si autem compleatur rectangulum* d e, *erit illud sub rationali, & irrationali comprehensum Irrationale, quod cum possit* e f, β *erit & hac irrationalis, & differt à reliquis omnibus Irrationalibus. Cum enim hujus quadratum applicatum ad rationalem* b d, *faciant latitudinem* b e *distinctam à reliquarum Irrationalium quadratorum applicatorũ latitudinibus, ut patet ex præcedentibus, ipsam quoque* e b *Irrationalem peculiarem à reliquis esse oportet.*

γ 23. X.

δ à 61. ad 66. X. & à 97. ad 103. X.

PROPOSITIO CXVII.

Theorema 93.



Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris *d b* diametrum *a c* lateri *a b* incommẽsurabilem esse longitudine.

Si non

Si non, ſito commenſurabilis habeatur ag ad ab *proportionem quam* ef *ad* g *numeri ſuadrationis minimi & primi: quarum* g *unitas non erit (cum enim ex* ac *quadratum ſit duplum quadrati* ab, *ſitq; ut quadratum* ac *ad quadratum* ab, *ita numerus quadratus ex* ef, *ad*
* 47. I. *quadratum numerum ex* ag, *erit etiam ille huius duplus; ideo ſi* g *eſſet unitas, eſſet ipſius quadratum unitas, numerusq; quadratus ex* ef *binarius, quod abſurdum;) Sed numerus. Et*
§ 14. IIX. *quia, ut jam oſtenſum eſt, ex* ef *eſt duplus quadrati ex* g; β *metietur quadratus ex* g *quadratum ex* ef *& latus* g *metietur latus* ef. *Cum verò* g *etiam metiatur ſeipſum, erunt* ef *&* g *numeri inter ſe compoſiti, habentes communem menſuram* g: *qui tamen inter ſe erant primi. Quod abſurdum. Non ergò* ac *&* ab *inter ſe commenſurabiles ſunt.*

ELE-

ELEMENTORUM EUCLIDIS

LIBER XI.

Definitiones.

1.

SOlidum est, quod longitudinem & latitudinem & crassitudinem habet.

2. Solidi autem extremum est superficies.

3. Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum rectum est cum rectæ lineæ quæ communi pla-

norum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur alteri plano ad rectos sunt angulos. Hoc enim modo non magis inclinabit in unam partem quàm in alteram, sed æqualiter illi insistet.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta, est, inquam angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis Lineis contentus, quæ in utroq; planorum ad idem sectionis communis punctũ ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

7. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur atque alterum ad alterum; cum dicti intersectionum anguli inter se fuerint æquales.

6. Paral-

8. Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

10. Æquales similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

11. Solidus angulus est plurium quam duarū linearum, quæ se mutuo cōtingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel: solidus angulus est, qui plurib. quàm duobus planis angulis in eodem non consistentib9 plano, sed ad unum punctum constituris, continetur.

12. Pyramis est figura solida, quæ planis cōtinetur ab uno plano ad unum punctū constituta. Potest autē illud unū planū, à quo omnia tendunt, esse vel triangulum, vel quadrangulū, vel pentag. Unde Pyramis vel triangula, vel quadrāgula solet dici. Reliqua omnia ad unum punctum constituta sunt triangula numero respondentia lateribus plani.

13. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia & parallela; alia verò parallelogramma. *Est nimirum columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cujus bases oppositæ sunt æquales, similes & parallelæ, sive hæ sint triangula, sive quadrata, sive pentagona. Itaque tot continebit parallelogramma quod libet: Prisma, quot latera sive anguli in uno quorumvis oppositorum planorum reperiuntur.*

14. Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus, in seipsum rursum revolvitur, unde moveri cæperat, circumassumta figura: vel, Sphæra est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam, ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

15. Axis autem sphæræ est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

16. Cen-

16. Centrum sphæræ est idem, quod est semicirculi.

17. Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

18. Conus est, quando rectanguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat circumassumtâ figurâ. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, orthogonius erit conus. Si verò minor, amblygonius: Si verò major, Oxygonius: tum enim angulus ad verticem vel rectus sit, vel obtusus, vel acutus.

19. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

20. Basis verò coni, est circulus, quia circumducta recta describitur.

21. Cylindrus est, quando rectangu-

li parallelogrammi manente uno latere, eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde coeperat moveri, circumassumptâ figurâ.

22. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases verò cylindri, sunt circuli, à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

24. Similes coni & cylindri, sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida, sub sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraëdrum, est figura solida, sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

27. Octaedrum, est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

28. Dodecaëdrum, est figura solida sub

da, sub 12. pentagonis æquilateris & æquiangulis contenta.

29. Icosaëdrum, est figura solida, sub 20. triangulis æqualibus & æquilateris contenta. *Hæc 5. corpora sola appellant regularia. Quia omnia plana quibus continentur, sunt æqualia, æquilatera & æquiangula: quorum constructiones in decimo tertio libro docebuntur.*

30. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso, parallelæ sunt, contenta. *Horum tot sunt genera, quot sunt parallelogrammorum, ut cubus, altera parte longius Rhombus, Rhomboides.*

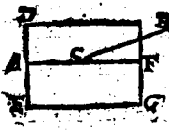
31. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

32. Solida figura, solidæ figuræ viciſſim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ, tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

PROPOSITIO I.

Theorema 1.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam verò in sublimi.

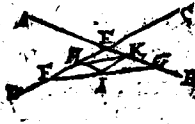


Sit, si potest, a c pars in plano d g, pars c b extra planum. Si ergò continuetur a c in illo plano d g usq; in f, erunt eidem a c lineæ duæ diversæ c b, e f ad eandem partem adjectæ quod 14. I. *est absurdum.*

PROPOSITIO II.

Theorema 2.

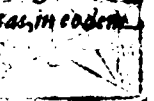
Si duæ rectæ lineæ *a b, c d*, se mutuo secent *in* e uno sunt plano: Atque triangulum omne *e f g* in uno est plano.



A lineis a b, c d connectantur puncta f, g, ut fiat triangulum f e g, cujus si pars quæcunque, ut h i f, dicatur esse extra illud planum, erunt linearũ e f, f b partes, supra partes in plano, a quod absurdũ. Quod 1. XI. *si jam totũ triangulum e f g, est in eodem plano,*

oportet

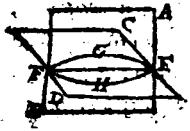
portet & ipsius terminos, lineas e f, e g, & adeo quarum sunt partes, a b, c d, rectas, in eodem plano esse.



PROPOSITIO III.

Theorema 3.

Si duo plana *a b, c d*, se mutuo secent; communis eorum sectio *e f* est linea recta.

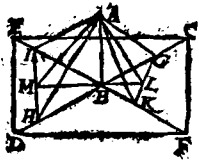


Si quis e f lineam neget in utroq; plano existere, ex e vel in neutro, & intra terminos, e & f ducta in alterutro planorum recta e g f includens 11. ax. l. *rectas e f & e g f figuram, quod est absurdum; vel in alterutro, intra eosdem terminos ducta in altero recta e g f, idem sequetur absurdum.*

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si recta linea *a b*, rectis duabus *c d, e f* lineis se mutuo secantibus, in communi sectione *b* ad angulos rectos insistat: illa *a b* ducto etiam per ipsas plano *c d, e f* ad angulos rectos erit.



α 3. XI. *Quia enim se mutuo secant* e d, o f *lineæ, & erunt in eodem plano. Sumpti*ş b g & b h, *itemq;* b i & b k *æqualibus, ductiq;* g k, i h & l m, *quæ in punctis* l & m *illas duas* g k, ih *secet; demittantur ex a puncto sublimi* a g, a l, a k, a h, a m, a i. *Cum ergo latera* b g, b k, *trianguli* b g k *æqualia sint lateribus* b h, b i, *trianguli* b h i, *cum angulo comprehenso ad* b β *æquali. Erunt &* g k, & i h *bases* γ *æquales. Angulis* b k g, & b h i *æquales; Rursus cum in triangulis* b k l, & b i m, *æqualium angulorum ad* β b, & l k b *ipsis* b i m, *latera interjacentia* b k, bi, *sint ∂ æqualia; erunt &* Ex con. *reliqua latera* k l, l b, *reliquis* i m, m b *æqualia. Eodemq; modo in triangulis & rectangulis* a b g, a b h, *æqualium laterum* b g & b h, & a b *communis; etiam* a g, a h *bases fiunt* γ *æquales. Secut &* a i & a k. *Amplius in triangulis* a k g & a i h *æqualium laterum* g k & i h, a k & a i, & *basium* a g & a h; ζ *erunt anguli comprehensi* a i h, a k g *æquales. Itaq; cum in triangulis* a k l, & a i m, *æquales angulos* i & k *comprehendentia latera sint æqualia;* γ *erunt & bases* a l, a m *æquales. Deniq; cum in triangulis* a b l & a b m, *æqualia sint latera* b l & b m, & a b *commune,* & *bases* a l, a m ζ *erunt; & anguli ad* b *æquales;* & *quia deinceps; etiam* η *recti. Erit ergo recta*

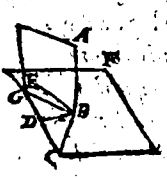
α 3. XI.
β 4. I.
γ 4. I.
Ex con.
α 26. I.
ζ 4. I.
η 10. def.

ab perpendicularis ipsi lm; adeoq; omnibus ipsam tangentibus in plano cde, df, ipsi etiam plano cde, df perpendicularis.

PROPOS. V.

Theorema 5.

Si recta linea *ab*, rectis tribus lineis *bc*, *bd*, *be*, se mutuo tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat; illæ tres rectæ in uno sunt plano.



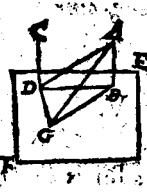
Cum qualibet duarum illarum per sectionum mutuam sint in eodem plano, ut bc, bd, in plano cbd; a 2. XI.
natura si posset tertia ab extra planum illud in sublimi. Quoniam ab, be sunt in eodem plano, sive in plano abe. Quoniam ergo plana fbc, abe, sibi mutuo occurrunt in b, necessario productæ se mutuo secabunt, & B quidem sectione communi bg. Sed quia ab ponitur ad angulos rectos ipsis bc, bd; γ erit etiam plano fbc, per ipsas ducto, & 3. XI. ad angulos rectos; δ Et sic etiam recta bg, quæ ipsam in b tangit. Itaq; duo recti anguli abg, γ 4. XI. abe in eodem plano ag constituti, pars & totum erunt æqualia. δ 3. def. XI.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Si duæ rectæ lineæ *ab*, *cd*, eidem plano *ef* ad rectos sint angulos, parallelæ erunt rectæ illæ lineæ.

Ducta



Ducta a b *in plano* e f, *erunt anguli* d & b *recti in eodem plano* e f. *Ducatur* d g *perpendicularis ad* b d, *aqualis ipsi* a b: *connectantur* g, *rectæ* b g, a g, d a. *Iam in triangulo* a b d, b d g *æquilium laterum* a b & d g; & b d *communis cum angulo comprehenso recto*; *erunt et bases* b g, a d, *æquales. Rursus in triangulis* a b g, a d g *æqualium laterum* a b & b g, & *basis communis* a g; *erunt anguli* a b g & g d a *æquales. Sed ille* α *rectus. Ergò & hic. Sed ex eadem definitione etiam anguli* g d c *est rectus. Est ergò* g d *tribus rectis* d b, d a, d c *ad angulos rectos. Quare recta* d b, d a, d c, *in uno sunt plano*; *Est autem* a b *in eodem plano, in quo* d b, d a; *Itaq; recta* c d *in eodem erit plano cum* a b. *Sed cum interni anguli* b & d *sint recti*; η *Erunt* a b, c d *parallelæ. Quod erat propositum.*

α 3. def. XI.

β ex constr.

γ 4. I.

δ 8. I.

ε 5. XI.

ζ 2. XI.

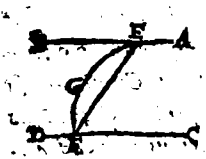
η 28. I.

PROPOS. VII.

Theorema 7.

Si duæ sunt parallelæ rectæ lineæ *a b*, *c d*, in quarum utraque sint quælibet puncta *e f*; illa linea *e f* quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano.

Sint

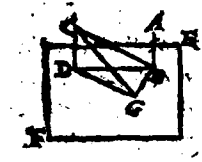


Sin minus, recta e f, *erit in eodem plano, sed extra, ut quidem aliud secet planum, cuius cum plano harum parallelarum communis sectio sit* e g *b a recta. Itaq; duæ rectæ* e f *&* e g f *intra eandem terminos* e *&* f *includant superficiem. Quod* β *absurdum. Vera etiam est propositio de non parallelis in eodem plano.* α 3. XI. β 14. ax. I.

PROPOSITIO VIII.

Theorema 8.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ *a b, c d*, quarum altera *c d* ad rectos cuidam plano *e f* sit angulos, & reliqua *a b* eidem plano *e f* ad rectos angulos erit.



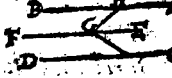
Ducta b d, *angulus* c d b *sit* α *rectus. Sed* c d b, *&* a b d β *sunt* β *duobus rectis æquales: Ergò &* a b d *est rectus. Ducatur in plano* e f *perpendicularis* b g *ad* b d, *æqualis ipsi* c d; *jungantur* γ g d, g c, b c. *Iam in triangulis* c d b, g b d, γ *rectangulis, æqualium laterum* g b, c d *& communis* b d, γ *erunt & bases* g d, b c *æquales. Sic* α 3. def. XI. β 29. I. γ 4. I.

in triangulis, c d g & c b g *aqualium laterum* e d, b g & b c, g d & *basis communis* g c: *anguli* d c g & c d g *ideo fiunt aquales. Cum igitur hic sit* β 8. I. α *rectus. Ergo & ille. Quare recta* g b, *duabus rectis* b d, b c *se mutuo secantibus in* b, *ad angulos rectos insistit, & sit plano per* b d, b c *ducto: erit ad angulos rectos. In quo plano cum sit* γ 4. XI. & a b, *quia* ∠ b d, b c, *in eodem sunt plano, in quo parallelæ* a b, c d. *Itaque & recta* g b *recta* a b *ad angulos rectos* α *insistit. Quare cum* a b *sit recta* δ 6. XI. *ad rectas* b g, b d: *erit recta ad planum per* b g, b d: *& erit recta ad planum per* b g, b d, *id est, ad planum* e f.

PROPOSITIO IX.

Theorema 9.

Quæ eidem *e f* rectæ lineæ *a b*, *c d* sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano hæ *a b*, *c d* quoque inter se sunt parallelæ.



A quolibet puncto g, *rectæ* e f, *ducantur duæ perpendiculares* g h, *quod in plano parallelarum* a b, e f; *ac* g i *in plano parallelarum* e f, c d. *Quoniam ergo* e g *est recta ad* g h & g i α 4. XI. *tangentes se in puncto* g: α *erit etiam recta plano per illas* g h, g i *ducto: cum igitur* f e *una parallelarum sit illi plano per* g h, g i, *perpendicularis:* ζ 8. XI. β *erit & altera* a b; *& per eandem causam etiam* c d, *quia eidem* e f *est parallela. Cum itaque* a b,

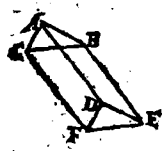
c d

cd eidem plano sint ad angulos rectos, γ erunt etiam parallelæ. Debuit autem propositio hæc sumere duas parallelas extra planum, quia aliàs cum 30. 1. coincidisset quæ de parallelis in eodem plano loquitur. γ 6. XI.

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si duæ rectæ lineæ *a b*, *ac* se mutuò tangentes *in a*, ad duas rectas *de*, *df* se mutuò tangentes *in d*, sint parallelæ, non in eodem plano; illæ angulos *bac*, *edf*, æquales comprehendent.



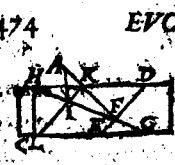
Ponantur a b, d e; & a c, d f *æquales*: *Ducantur* b c, e f; b e, a d, c f. *Erunt ergo* b e, a d, *æquales parallelas* b a, e d *connectentes æquales*, *ut* & a d, c f: & *adeo* & b e, c f, *quia eidem* a d *parallelæ*. *Ac eædem* b c, e f. *Atqui ita in Triangulis* b a c, e d f, *æquilium laterum*, a b, d e & a c, d f; *æqualium* & *basium* b c, e f; *anguli* b a c, & e d f *æquales*. α 33. I. β 9. XI. γ 8. I.

PROPOS: XI.

Problema 1.

A dato puncto *a* in sublimi; ad subjectum planum *bc*; perpendicularem rectam ducere.

α 11. I.
β 12. I.
γ 31. I.
ex const.
δ 4. XI.
ζ 8. XI.
η 2. XI.
θ 3. def. XI.



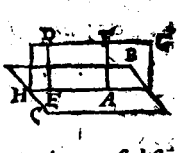
In plano c b *ducatur recta* α *cuiuis* d e, *ad quam ex* a *demittatur perpendicularis* a f, ζ *& in plano* b c, *per* f, *ad* d e *ducatur perpendicularis* g h, *ad quam ex* a *demittatur perpendicularis* a i, *quæ ad planum subiectum perpendicularis est.* γ *Ducta enim in plano* b c, *per* i, *ipsi* d e *parallela* k l; *cum* d f *sit* ∂ *ad angulos rectos duabus* f a, f h: *& ergo ad planum per illas* f a, f h: ζ *erit etiam* k i *ad idem planum recta. Sed quia* a i *cum* f a, f h, *in* η *eodem est plano, tangit* γ *recta* k i *in* i: *erit* θ *angulus* k i a *rectus; adeoq;* a i *ad angulos rectos ipsis* k i, i f. ε *Igitur & ad planum* b c *erit recta.*

PROPOSITIO XII.

Problema 2.

Dato plano *b* c à puncto *a*, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

α 11. XI.



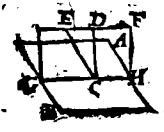
Ex quovis puncto sublimi d *demittatur* α *ad planum* b c *perpendicularis* d e, *quæ, si ceciderit in* a, *factum est quod quæritur: sed si ceciderit in punctum aliud* e, *extensa recta per* e *& a, ducatur per* a *ipsi* d e β *parallela*

recta a f, *in plano* g h *per* d e, e a, *ducto* : *erit* a f *recta ad planum datum erecta. Cum enim* d e, a f *sint parallelæ, & recta* d e *ad planum* b c *y rectos angulos sit etiam* a f *recta ad idem planum* b c. y ex cõ. 8. XI.

PROPOS. XIII.

Theorema 11.

Dato plano *a b* à puncto *c* quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eandem partes.

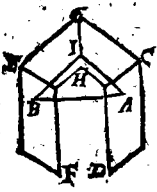


Ducantur, si potest fieri, c d c e *ad planum* a b *perpendiculares. a Erunt ergò ambæ parallelæ, quæ tamen in puncto* c *concurrunt, quod absurdum. Eodem modo ex uno puncto sublimi impossibile est, ad idem planum, duas perpendiculares demittere.* a 6. XI.

PROPOS. XIV.

Theorema 12.

Ad quæ plana *c d, e f* eadem *a b* recta linea, recta est; illa sunt parallela.

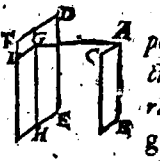


α 3. XI. *Si non sunt, concurrant tandem producta illa plana ad partes c, e &. faciant communem sectionem* g h *lineam rectam, in qua sumto puncto utcunq;* i, *ducantur* i a, i b, *in plano* g c d *&* g e f. *Itaq; cum* a b, β 17. I. *ponatur recta, ad utrumq; planum erunt trianguli* a i b, *anguli* i a b, *&* i b a *recti, qui tamen sunt duobus rectis* β *minores.*

PROPOSITIO XV.

Theorema 13.

Si duæ rectæ lineæ *a b, a c* se mutuò tangentes *in a*, ad duas rectas *d e, d f* se mutuò tangentes *in d*, sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: parallelæ sunt, quæ per illa ducuntur plana *b c, e f.*



α 11. XI. *α Ducatur ex* a *in planum* e f *perpendicularis* a g, *&* β 31. I. *per punctum* g β *ducantur* g h, g i *parallelæ ipsis* d e, d f. *Cum itaq;* g h, a b, *sint parallelæ ipsi &* c; γ 9. XI. γ *etiam inter se sunt parallelæ, anguli* b a g, a g h, *duobus rectis* δ 29. I. δ *æquales: ac propter hunc rectum, etiam ille rectus. Eodemq; modo* c a g ε 3. def. XI *angulus est rectus.* ζ *Itaq; cum* g a *ad* a b, *&* a c *sit* ζ 4. XI. *recta,*

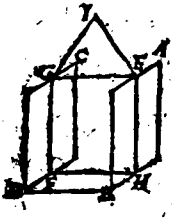
recta, recta etiam erit g a, ad planum b c, per illas ductum. Eadem autem g a, etiam η est recta ad planum e f, & ita q̃ b c & e f sunt plana parallela.

η ex constr. & 14. XI.

PROPOSITIO XVI.

Theorema 14.

Si duo plana parallela *a b*, *c d*, plano quopiam *e f* secentur: communes illorum sectiones *e b*, *e f*, sunt parallelæ.



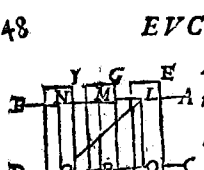
Si non sunt parallelæ, convenient tandem productæ, ut in puncto I. & Quoniam linea b e i tota est in plano uno a b; linea verò f g i tota in plano c d producto: Producta ita q̃ illa plana concurrent quæ tamen ponuntur parallela.

α 1. XI.

PROPOSITIO XVII.

Theorema 15.

Si duæ rectæ lineæ *a b*, *c d* parallelis planis *e f*, *g h*, *i k*, secentur; in easdem rationes secabuntur, videlicet, ut segmenta inter plana dicta sint proportionalia, ut *l m*, ad *m n*, ita *o p*, ad *p q*.



Ducantur enim recta l o *in planis* e f, i k, *& coniungantur recta* l q, *quæ occurrit plano* g h, *in* r *puncto, à quo ad puncta* m p *ducantur in eodem* g h *plano* r m, r p: *α erit* q, *triangulum* l n q, *in uno plano. Cumq; parallela plana* g h, i k *secentur plano trianguli* l n q *βerunt communes sectiones* m r, n q *parallelæ; ut &* r p *&* l o, *quamobrem erit, ut* l r *ad* r q; *ita* l m, *ad* m n. *Item, ut* l r *ad* r q; *ita* o p *ad* p q: *ac proinde, ut* l m *ad* m n; *ita* o p, *ad* p q.

α XI.
β 16. XI.

PROPOS: XVIII.

Theorema 16.

Si recta linea *a b* plano cuipiam *c d* ad rectos sit angulos, & omnia, quæ per ipsam *a b* plana, eidem *c d* ad angulos rectos erunt.



Sit enim per a b *ductum planum* e f, *secans planum* c d *per rectam lineam* f g: *ex puncto* h *utcunq; sumpta in linea* f g, *ipsi* a b, *parallela* h i *α erigatur. Quoniam itaq;* a b, i h *sunt parallelæ, illa ad planum* c d *ductæ existente, β erit & hæc recta. Et a*

α per 31. I.
β 8. XI.

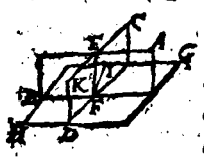
con

communem sectionem f g γ perpendicularis: eodemq; modo recta omnes in plano g f ipsi a b parallela erunt ad communem sectionem f g γ perpendiculares, ipsumq; planum g f ad planum c d δ rectum. Nec aliter habet cum omnibus alijs planis per a b g ductis, sed & illa omnia ad planum c d recta sunt. γ 3. defi. XI. δ 4. defi. XI.

PROPOSITIO XIX.

Theorema 17.

Si duo plana *a b, c d* se mutuo secantia, plano cuidam *g b* ad rectos sunt angulos, communis etiam illorũ sectio *e f* ad rectos eidem plano angulos erit.



Aut enim e f *ad* b f, d f, *Communes sectiones planorum* a b, c d *cum plano* g h *est recta, aut non. Si est ad illas recta, & etiam ad planum* g h, *per ipsas ductum: si ad alteram tantum* b f, *recta dicatur* e f; *quoniam* e f *in plano* a b, *ad planum* g h *recto perpendicularis est communi eorum sectioni* b f; *& erit & ad ipsum planũ* g h *recta: Et ita, si ad alteram* d f *tantum poneretur recta, idem inferretur. Si autem* e f *ad neutram* b f, f d *credatur esse recta, & ducatur ex* f *in plano* a b, *ad* b f *sectionem communem, cum plano* g h *perpendicularis* f i: *& in plano* c d *perpendicularis* f k. *Quoniam ergò planum* a b *est* α 4. XI. β 3. defi. XI. γ 11. I.

est rectum ad planum g h; *erit & i f ad b f sectionem communem perpendicularis, ut & k f, ad idem planum* g h: *adeoq; ex puncto* f *ad planum* g h *duæ erectæ sunt perpendiculares,* δ *Quod absurdum.*

δ 13. XI.

PROPOSITIO XX.

Theorema 18.

Si solidus angulus *a* tribus angulis planis *b a c, c a d, d a b,* contineatur: ex his duo quilibet, ut ut assumti, tertio sunt majores.



Si enim omnes tres sint inæquales inter se, patet duos esse tertio majores. Si autem duo tantùm æquales & tertius minor, itidem duo quilibet tertio sunt majores. Si unus, ut b a c, *sit maximus: reliqui autem sive æquales sive inæquales, quilibet horum cum illo reliquo est major. Quo maximo* b a c, *majores etiam sunt duo reliqui* b a d & d a c. *In plano enim per* a b, a c, *ducto,* α *fiat angulus* b a e, *æqualis angulo* b a d, *& recta* a d *æqualis* a e, *& per* e *extendatur recta* b c, *secans ipsas* a b, a c, *in* b *& c, & connectantur rectæ* b d, c d.

α 23. I.

Quoniam in triangulis b a d, *&* b a e, *latera* a d *&* a e *sunt æqualia &* a b *commune, illiq; comprehensi anguli æquales,* β *Ergò & bases* b e, b d *erunt æquales. Sed quia latera* d b, d c *sunt majora latere* b c; γ *demtis æqualibus* b d, b e; *erit* d c, *major quam* e c. *Itaq; cum in trian-*

β 4. I

γ 3. I.

gulis d a c & e a c, *latera* d a, e a *sint aqualia, & a c commune*; *basis autem* d c *major basi* e c; *erit & angulus* d a c *major quam* e a c, *& aqualibus additis, erunt duo* b a d *&* d a e *simul majora angulis* b a e, e a c *simul, id est, angulo*, b a c *maximo*: β 25. I.

PROPOS: XXI.

Theorema 19.

Omnis solidus angulus *a* sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

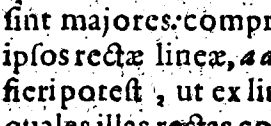


Ductis rectis b c, c d, d b, *erunt tres anguli* b, c, d *solidi, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, ut* b *sub* c b a, a b d *&* b d c: e, *sub* b c a, a c d, d c b: d *sub* c d a, a d b, b d c. *a* *Quoniam duo anguli* c b a, a b d, *majores sunt angulo* d b c; *similiter duo* a d b, a d c *majores angulo* b d c; *& duo* a c d, a c b *majores angulo* d c b. *Sed tres bi* c b d, b d c, *&* d c b. *sunt duobus rectis aquales*; *β erunt illis sex duobus rectis majores. Sed cum ijdem sex una cum tribus ad a angulis sint sex rectis β aequales, ablatis illis sex, qui majores sunt duobus rectis: erunt tres reliqui ad a, constituentes angulum solidum, minores quatuor rectis. Nec diversa est demonstratio si angulus solidus constet ex pluribus, quàm tribus planis angulis.* a 20. XI. β 32. I.

PROPOS. XXII.

Theorema 20.

Si fuerint tres anguli plani *a*, *b*, *c*; quorum duo, ut libet, assumti reliquo sint majores: comprehendant autem ipsos rectæ lineæ, *a d*, *a e*, *b f*, *b g*, *c a*, *c i*, fieri potest, ut ex lineis *d e*, *f g*, *b i*, æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.



Si tres anguli dati, a, b, c, *sunt æquales*, α *erunt quoq; bases* d e, f g, h i, *æquales*, *& illarum qualibet duæ tertiâ majores: si verò duo anguli sint æquales, & tertius minor*, α *erunt etiam duæ bases æquales. Et basis tertij utrâq;* α 4. I. β *minor; Et sic rursum qualibet duæ tertiâ sunt majores. Si autem unus* a *sit maximus; reliqui* b, c *vel æqualibus vel inæqualibus; erit & d e basis omnium maxima, & sic* d e, f g, *majo-* β 24. I. *res tertia* h i, d e, *tem & h i majores quàm* f g. *Erunt etiam* f g, h i *majores quam* d e. γ *Fiat enim* d a k *angulus æqualis angulo* b. *& a k sit æ-* γ 23. I. *qualis ipsi* a d, *quia ex* a *per punctã* d k e *transit peripheria circuli ob trium illarum rectarum* a d, a k, a e *æqualitatem, connectantur* ℓ d k, k e. *Quoniam ergò duo anguli* b, c, *ponuntur*

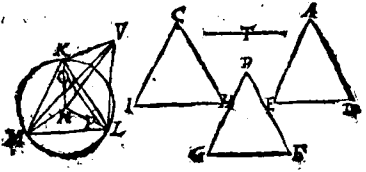
majo-

majores angulo d a e, & b aequalis est angulo d a k; erit angulus c major reliquo k a c, basis d k aequalis basi f g: basis verò k e minor quam h i. Cum ergò d k, k e sint ∂ majores quàm d e, eàdem d e majores etiam erunt f g, & h i. Tribus ergò hisce ita cōparatis, ut duæ quælibet tertia sint majores, facilè erit inde triangulum ę efformare. ∂ 20. I. ę 22. I.

PROPOSITIO XXIII.

Problema 3.

Ex tribus angulis planis *a b c*, quorum duo quomodocunq; assumpti, reliquo sunt majores, solidum angulum constituere.



Tres illos angulos a, b, c *comprehendentes lineæ omnes ponantur æquales; & subtendantur bases* d e, f g, h i, *ex quibus potest triangulum a constitui, quod sit* k l m, *ut latus* k l, *basi* d e, l m *basi* f g, & k m, *basi* h i *sit æquale; ac circa il-*

lud & describatur circulus, ex cujus centro n, ducantur n k, n c, n m, quibus majores sunt quælibet rectarum, ut a d, a e, angulos planos includentium. Primò γ cadat centrum n intra illud triangulum k l m, quia Oxygonium. Si ergò a d, a e, non sunt majores, quam n k, n l, sint vel æquales: δ erunt, propter bases etiam æquales d e & l k, anguli k n l & a, ut & l n m & b, & m n k & c æquales. Cum, tres illi circa centrum n sint quatuor rectis ε æquales: erunt & a, b, c quatuor rectis æquales, contra hypothesin: vel minores a d & a e, quàm n k & n l, & tum n o, n p, æqualibus abscissis; ducta o p parallela erit ipsi k l, propter ζ proportionalem sectionem trianguli l n k, & trianguli l n k, p n o, æquiangula. η Cum, sit, ut n k, ad k l: ita n o ad o p: & erit l k, id est, d e major quàm o p: sicut n k, quàm n o. Cum ergò in laterum æqualium triangulis, d a e & o n p, basis d e sit major basi o p; ι erit & angulus a major, angulo o n p; & sic angulo b major angulo l n m, angulus q, c major angulo m n k. Erunt proinde a b c anguli, quatuor rectis, quibus illi tres circa n sunt æquales, majores, contra hypothesin; Itaq; a d, a e nec æquales, nec minores, sunt ipsis n l, n k.

γ Cor. 5. IV.

δ 8. I.

ε corol. 15. I.

ζ 2. VI.

θ 14. V.

η 4. VI.

ι 25. I.

Deinde cadat centrum n in latus l m, quod sic; si angulus k sit rectus, sintq; a d, a e, id est, b f, b g; vel æquales ipsis n l, n k, id est, linea l m, quæ æqualis

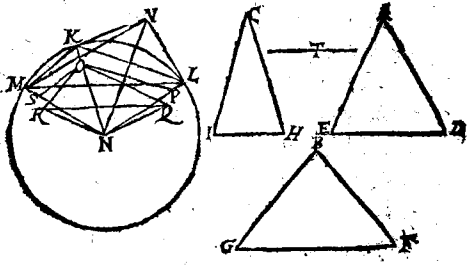
qualis est ipsi f g. Erunt ergò b f, b g æquales ipsi f g, quod λ absurdum; vel sint minores, eruntq; b f, b g minores ipsis n l, n k, id est, ipsa l m, vel f g, quod iterum absurdum. λ 20. I.



Postremò cadat centrum n extra triangulum k l m, quod fit, si angulus k sit obtusus: sintq; a d, a e, vel æquales ipsis n l, n k; erunt propter bases d e, k l, æquales, etiam anguli a & k n l æquales δ, & angulus c angulo k n m, totus q; l n m, angulis a & c, qui duo simul ex hypothesi, tertio b sunt majores. Rursus idē angulus l n m propter bases l m & f g æquales, æqualis est angulo b, contra hypothesin. Vel minores sint a d, a e, quàm l n, n k; abscissis æqualibus n o, n p, μ 23. I. erit ut in primo casu, angulus a major angulo o n p, angulusq; c major quàm angulus k n m. Itaq; fiat μ angulo a æquális o n q, & angulo c angulus o n r, ponanturq; n q, n r æquales ipsis a d, a e, & connectantur o q, o r; cadet q; o q ν 29. I. infra a p, quia per o, p, q ex centro n transit circulus, ν quare cum angulus, p o n, æqualis sit angulo n k l, externus interno, erit angulus q o n, minor angulo n k l. Eodemq; modo n o r minor, quàm n k m. Si ducatur o s parallela ipsi k m, Totus ergò l k m, tota q o r, major erit.

Sunt

Sunt autem in triangulis o n q *&* d a e *æqualium laterum, & anguli æquales* a *&* o n q *etiam bases* d e *&* o q *ξ æquales, id est,* o q *&* l k, *&*
ξ 4. I. *sic* o r *&* k m. *Connexa jam recta* q r, *quoniam in triangulis* q o r *&* l k m, *æqualia sunt latera* k l, k m; *ipsis* o q, o r l *& angulus* q o r *minor quàm* l k m: o *Erit basis* l m, *id est,* f g, *major*
o 24. I. *basi* q r. *Sed quia* b f, b g, *sunt æquales ipsis* n q, n r; *basis autem* f g, *major basi* q r: *Erit angulus* b *major angulo* q n r. *Rursus, quia anguli* o n q *&* a; *item* o n r *&* c *facti sunt æquales: erit totus* q n r *æqualis duobus,* a *&* c. *Sed* a *&* c *ponuntur majores angulo* b: *Igitur &* q n r *eodem* b, *major est, qui tamen modò ipso* q n r *major est demonstratus. Itaq; majores esse oportet* a d, a e *ipsis* n k, n l.



Iam cum rectæ a d, a e *majores sint rectis* n k e l n *ubicunq; centrum trianguli existat, posßit recta* a d *plus quã recta* n k, *quadrato lineæ* t *per lemma*

lemma propositionis 15. Xſita ut quadratum rectæ a d *æquale ſit quadratis rectarum* n k. *Et ex centro* n *π excipiatur* n u, *ad planum circuli* k l m *æqualis ipſi* ι, *connectanturq́;* u k, u l, u m. π n. XI.
Quoniam ergò n u *eſt recta ad planum* k l m; *recta etiam ę erit ad rectas* n k, n l, n m; *ac proinde quadratum rectæ* u k σ *æquale quadratis rectarum* k n, u n. *Cumq́; & quadratum* a d *æquale ſit, ex conſtructione, ijſdem quadratis* k n, n u, *erunt ergò* u k *&* a d *quadrata æqualia, ipſaq́; rectæ* u k, a d *æquales. Rurſus, quia latera* u n, n k, *trianguli* u n k *æqualia ſunt lateribus* u n, l n, *trianguli* u n l, *& anguli ipſius contenti* u n k, u n l *recti: Erunt baſes* u k, u l *ę æquales, ut &* u m. *Sunt ergò tres,* u k, u l, u m, *æquales* a d; *ipſis etiam* a e, b f, b g, c h, c i, *æquales: adeoq́; in triangulis* u k l, l u m, k u m, *æqualium laterum & baſium, cum triangulis* d a e, f b g, h c i: *erunt & anguli,* a, b, c *anguli ad* u d *æquales; ipſeq́; angulus ſolidus* u, *tribus illis angulis continetur, quod erat propoſitum.* π n. XI. ρ 3. XI. σ 47. I.

PROPOSITIO XXIV.

Theorema 21.

Si ſolidum *a b, e f,* parallelis planis *a e, e f, f b, b a, a f, b e* contineatur; adverſa illius plana parallelogramma, ſunt ſimilia & æqualia.

Cum



α 16. XI. *Cum enim parallela plana* a f, b e *secentur plano* a c: *erunt communes sectiones* a b, c d *parallelæ. Similiter cum plana* a f, b e *secentur plano* a c; *erunt communes ipsorum sectiones* a d, b c *parallelæ*; *& sic figura quadrilatera* a b c d *est parallelogramma, adeoq; & reliqua omnes. Sed & opposita parallelogramma sunt similia & æqualia. Cum enim rectæ* a b, b h, *parallelæ sint rectis* d c, c e *in opposito plano*; β *erunt* a b h, b c e *anguli æquales, & sic etiam reliqui anguli*

ζ 11. XI. *parallelogrammi* b g *reliquis parallelogrammi* c f. *Cumq;* a b *ipsi* d c *in parallelogrammo* a c: *& b h ipsi* c e *in parallelogrammo* b e *æqualis* γ *sit: erit, ut* a b *ad* b h; *ita* d c *ad* c e: *ac propterea, ut* b h *ad* h g, *ita* c e *ad* e f. *Ob eandem causam erunt latera parallelogrammorum* b g, c f

γ 34. I. *circa æquales angulas proportionalia & parallelogramma ipsa similia. Ductis jam diametris* a h, d e; *cum in triangulis* a b h, *&* d c e γ *æqualia sint latera* a b, b h *lateribus* d c, c e, *& angulus* a b h, *angulo* d c e: *erunt tota triangula*

δ 4. I. *æqualia, ipsorumq; dupla parallelogramma* b g, c f *æqualia. Idem de oppositis reliquis*

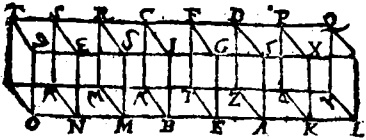
paral-

parallelogrammis demonſtrabitur, quod & ſimilia & æqualia inter ſe ſint.

PROPOS: XXV.

Theorema 22.

Si ſolidum parallelepipedum *a b c d*, plano *e f* ſecetur adverſis *a d b c* planis parallelo; erit, quemadmodum baſis *a g* ad baſin *g b*, ita ſolidum *a e f d*, ad ſolidum *b c f e*.



Intelligatur parallelepipedum a b cd *utring; producta, ſumanturq; in* a b, *utring; protracta, quotcunq; rectæ* ak, kl *ipſi* a e: *& quotcunq; rectæ* b m n, n o *ipſi* e b *æquales: ducanturq; per puncta* k, l, m, n, o *plana* k p, l q, m r, n s, o t, *parallela planis* a d, e f, b c. *Quoniam igitur ſolidum* aefd *continetur planis parallelis ex hypotheſi; ipſum erit parallelepipedum, ex definitione; & habebit; plana oppoſita parallelogramma ſimilia; ut & reliqua omnia* a k p d, k l q p, e b c f, b m r c, m n s r, n o t s, e l q f, e o t f. a 24. XI.

Sed

Sed cum parallelogramma a g, k u, l x *super æqualibus baſibus* a e, a k, k l *ſint & æqualia ſimi-*
liaq; propter angulos æquales, & latera circum illos æqualia & proportionalia erunt. Sic æ-
qualia & ſimilia ſunt parallelogramma a y, k z, l a. *Itaq; cum & æqualia & ſimilia ſint pa-*
rallelogramma a d, k p, l q; *erunt tria plana* a g, a y a d *ſolidi* a e f d, *æqualia & ſimilia tribus*
planis k u, k z, k p, *ſolidi* a k p d: *hiſce vel tri-*
bus in uno quoque ſolido planis oppoſita ſunt æ-
qualia & ſimilia, nempe a g *ipſi* z f; a y, *ipſi* u f; *&*
10. defin. a d *ipſi* e f. *Itaq; & æqualia ſunt ſolida* a e f d,
IX. a k p d, k l q p. *Eademq; ratione &* e b c f, b m
r c, m n s r, n o t s. *Quare quam multiplex eſt*
baſis l g, *baſis* a g, *tam multiplex erit ſolidum*
l e f q, *ſolidi* a e f d, *& quam multiplex baſis*
o g, *baſis* b g, *tam multiplex ſolidum* o e f t *ſoli-*
di b e f c. *Quoniam verò ſi baſis* l g, *æqualis eſt*
baſi o g; *æquale etiam eſt ſolidum* l e f q *ſolido*
o e f d; *quia baſibus* l g, o g *exiſtentibus æqua-*
libus, æqualia quoq; ſunt & ſimilia ſex paralle-
logramma ſolidi o e f t: *Si autem baſis eſt ma-*
jor baſe, ſolidum quoq; ſolido majus eſt, & ſimi-
nor, minus; in quacunque hoc fiat multipli-
catione. Erit ergò, ut baſis a g *prima magni-*
tudo, ad baſin b g, *ſecundam magnitudinem; ita*
ſolidum a f c d, *tertia magnitudo, ad ſolidum*
b e f c, *quartam. Eadem ratione demonſtra-*
tur eſſe ſolidum ad ſolidum, ut baſis d y *ab baſi*
c y; *&*

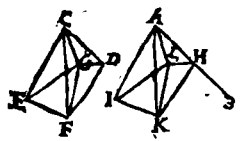
æqualibus baſibus a e, a k, k l *ſint & æqualia ſimi-*
liaq; propter angulos æquales, & latera circum
illos æqualia & proportionalia erunt. ζ 36. I.
Sic æ-
qualia & ſimilia ſunt parallelogramma a y, k z,
l a. ζ 29. I.
Itaq; cum & æqualia & ſimilia ſint pa-
rallelogramma a d, k p, l q; *erunt tria plana* a g,
a y a d *ſolidi* a e f d, *æqualia & ſimilia tribus*
planis k u, k z, k p, *ſolidi* a k p d: *hiſce vel tri-*
bus in uno quoque ſolido planis oppoſita ſunt æ-
qualia & ſimilia, nempe a g *ipſi* z f; a y, *ipſi* u f; *&*
10. defin. a d *ipſi* e f. *Itaq; & æqualia ſunt ſolida* a e f d,
IX. a k p d, k l q p. *Eademq; ratione &* e b c f, b m
r c, m n s r, n o t s. *Quare quam multiplex eſt*
baſis l g, *baſis* a g, *tam multiplex erit ſolidum*
l e f q, *ſolidi* a e f d, *& quam multiplex baſis*
o g, *baſis* b g, *tam multiplex ſolidum* o e f t *ſoli-*
di b e f c. *Quoniam verò ſi baſis* l g, *æqualis eſt*
baſi o g; *æquale etiam eſt ſolidum* l e f q *ſolido*
o e f d; *quia baſibus* l g, o g *exiſtentibus æqua-*
libus, æqualia quoq; ſunt & ſimilia ſex paralle-
logramma ſolidi o e f t: *Si autem baſis eſt ma-*
jor baſe, ſolidum quoq; ſolido majus eſt, & ſimi-
nor, minus; in quacunque hoc fiat multipli-
catione. Erit ergò, ut baſis a g *prima magni-*
tudo, ad baſin b g, *ſecundam magnitudinem; ita*
ſolidum a f c d, *tertia magnitudo, ad ſolidum*
b e f c, *quartam. Eadem ratione demonſtra-*
tur eſſe ſolidum ad ſolidum, ut baſis d y *ab baſi*
c y; *&*

c y; & ut baſis a y, ad baſin b y; & ut baſis b g ad baſin c g.

PROPOSITIO XXVI.

Problema 4.

Ad datam rectam *a b*, ejusq; punctum *a*, angulum ſolidum conſtituere, angulo ſolido dato *c* æqualem.



Ex f ad planũ per c d c e ductũ, perpendicularis α f g erigatur; cõnectantur q́, d f, d g, e f, e g, c g; & abſciſſa a h æqualis c d, β fiat angulus h a i, angulo d c e, æqualis, & recta a i, rectæ c e æqualis. Iterumq́, in plano per a h, a i ductum, conſtituatur angulus h a l, æqualis angulo d c g, & a l ipſi c g Sed ex l ad planum, in quo ſunt a h, a l, a i, γ erigatur perpendicularis l k, quæ ipſi f g ponatur æqualis; & conjũgatur recta k a. Erit angulus ſolidus a, contentus tribus planis h a k, h a i & k a i æqualis ſolido dato c. Connexis enim rectis h k, h l, i k, i l, cum latera a h, a l, trianguli a h l, æqualia ſint lateribus c d, c g trianguli c d g; anguli q́, h a l & c d g æquales ex conſtructione: δ erunt baſes h l, d g æquales. Rurſus ablatis æqualibus angulis h a l & d c g, ex æqualib9 h a i, d c e; reliqui

α 11. XI.

β 23. I.

γ 12. XI.

δ 4. I.

æqualibus l a i & g c e *qui comprehenduntur æqualibus lateribus* a b. a i *ipſis* c g, c e: *Erunt &* l i & g e *æquales. Et ſic in triangulis rectangulis* hlk, dgf, *æquales baſes*, hk, & d f; *iterumq; in triangulis rectangulis* a h k, & c d f *æquales baſes* a k, c f *Erunt ergò &* h a k & d c f *anguli æquales.* ε *Denig; etiam in rectangulis* k l i & f g e *baſes* k i & f e *æquales: Iterumq; in triangulis* k a i, & f c e, *æqualium laterum & baſium,* ε *æquales erunt anguli,* k a i, & f c e. *Sunt ergò tres anguli plani ſolidum angulum* a *includentes, æquales tribus planis angulum ſolidum* c *includentibus: Et ſolidus* a *ſolido* c *æqualis. Quod erat faciendum.*

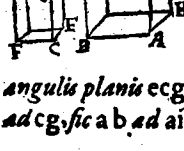
δ 4. I.
ε 8. I.

PROPOS: XXVII.

Problema 5.

A data recta linea *a b*, dato ſolido *c d* parallelepipedo, ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

α 26. XI.
β 12. VI.



Ad rectæ a b *punctum* a, *fiat* α *angulus ſolidus æqualis angulo ſolido* c, *ut tres anguli plani* h a i, i a b, b a h *æquales ſint tribus angulis planis* e c g, g c f, f c e. *Deinde fiat* β *ut* c f *ad* c g, *ſic* a b *ad* a i; & *ut* c g *ad* c e, *ita* a i *ad* a h:

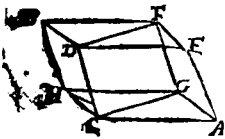
erit

erit ex æquo, ut c f ad c e, ita a b ad a h: Posteà parallelogrammis completis absolvatur parallelepipedum a k, quod parallelepipedo c d simile similiterq; positum erit. Cùm enim æquales sint anguli b a h, & f c e, latera q; b a, a h, proportionalia lateribus f c, c f. Erunt parallelogramma h b e, f, Similia similiterq; posita: itemq; h i, e g; & i b, g f: quibus tribus similibus similiterque positis inter se erunt & opposita eorum plana similia similiterq; posita: & sic solida a k, c d, similia similiterq; posita. γ 24. XI. δ 9. def. XI.

PROPOSITIO XXVIII.

Theorema 23.

Si solidum parallelepipedum *a b* plano *c f* secetur per diagonios *c g*, *d f*, adversorum planorum *a b*, *e b*: bifariam secabitur solidum *a b* ab ipso plana *b c*.



Quoniam utraq; c d, g f parallela & æquales est ipsi a e, erunt etiam inter se parallelæ & æquales, & ipsas q; connectentes c g, d f, parallelæ, per quas ductum planum c f, bifariam secat ipsum parallelepipedum a b. α 34. I. β 9. XI. γ 33. I.

δ 24. XI. *Cum enim plana* a h, e b *sint parallelogramma æqualia & similia: erunt & eorum dimidia, seu triangula* a g c, g c h; e f d, f d b, *æqualia, & propter latera circum æquales angulos proportionalia etiam & similia. Cum item &* ε 6. VI. *parallelogrammum* a f, *ipsi æquale sit, & simile parallelogrammo* c b: *&* a d *ipsi* g b *&* c f *commune; erunt duo triangula* a g c, e f d, *& parallelogramma* a f, a d, c f, *prismatis* a c g f e d, *æqualia & similia duobus triangulis*, h c g, b d f, *& parallelogrammis* c b; b g, c f *prismatis* h g d c b f: ζ 10. def. X. *Ipsaq; prismata inter se* ζ *æqualia. Quæ cum componant parallelepipedum* a b; *Erit ipsum bifariam sectum plano* c f.

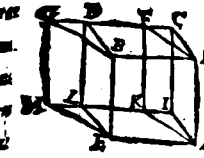
PROPOS: XXIX.

Theorema 24.

Solida parallelepipeda *a c d e, a f g e* super eandem basin *a b* constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes *a i, a k, e l, e m*, & *b c, b f, b d, b g*, lineæ in ijsdem collocantur rectis lineis *i m* & *c g*; sunt inter se æqualia.

α 35. I. *Quia enim* α *æqualia sunt parallelogramma* al. am, *erunt communi trapezio* a k l e *ablato, æqualia triangula* a i k, e l m. *Quia item æqualia*

sunt



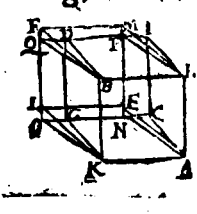
Cſunt omnia latera triangulorum a i k *&* h c f; *item* e l m *&* b d g: *erunt* γ *aquiangula, & propter latera circum aequales angulos* δ *proportionalia, inter ſe ſimilia.* ε *Rurſus &* π *parallelogramma* a c e d *inter ſe ſunt aequalia & ſimilia,* ζ *ſicut &* i f, *&* l g *propter aequales baſes* i k, l m: *adeoq; omnia plana Prismatis* a i k, f c h, *aequalia ſunt omnibus planis Prismatis* e l m, g d b; *ipſaq; priſmata aequalia. Quibus ſi addatur commune ſolidum* a h f k, l d b e; *parallelepipeda ſuper eadem baſi in eadem altitudine ſunt aequalia.*

β 34. I.
γ 8. I.
δ 4. VI.
ε 24. XI.
ζ 36. I.
π 10. defi. XI.

PROPOSITIO XXX.

Theorema 25.

Solida parallelepipeda *a i d k, a m f k* ſuper eandem baſin *a b* conſtituta & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes *a c, a e, k g, k l: b i, b m, b d, b f*, lineæ non in ijſdem collocantur rectis lineis *c g, i d*: inter ſe ſunt æqualia.



Quia enim plana c d, e f, *oppoſita baſi* a b, *ſunt in eodem plano ob eandem parallelepipedorum altitudinem: pertractis in eodem*

plano rectis c g, i d; *illam quidem* e m & l f *protractæ secent in* n & o; *hanc verò* i d *in punctis* p, q: *jungantur* & *rectæ* a n, k o, h p, b q. *Quia igitur* p q, m f *rectæ sunt æquales & parallelæ, sicut &* m f, h b: *erunt &* p q, h b *æquales &* α *& parallelæ, &* h p q b *est parallelogrammum. Sicut eadem de causſa &* h p n a, a n o k, k o q b. *Est autem &* n o q p *parallelogrammum. Igitur* a p q k *est parallelepipedum. Cui æquale* γ *est parallelepipedum* a i d k, *propter eandē baſin* a b *& lineas inſiſtentes in ijſdem rectis* c o, i q. *Sed eidem* a p q k *propter eandem baſin* a b, *& lineas inſiſtentes in ijsdem rectis* n m, o f, *æquale est parallelepipedum* a m f k. *Igitur* a i d k *&* a m f k *etiam inter ſe ſunt æqualia.*

α 34. I.

β 33. I.

γ 92. XI.

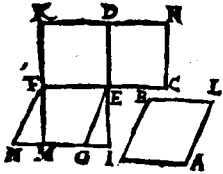
PROPOSITIO XXXI.

Theorema 26.

Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes *a b*, *c d*, conſtituta, & in eadem altitudine; æqualia inter ſe ſunt.

Protractis duobus lateribus d e, c e *ad partes* c, *fiat angulus* f e g *æqualis angulo* l: *recta* e f, *rectæ* l b; *&* *recta* e g *rectæ* l a: *Erit parallelogrammum* e h *æquale & ſimile parallelogrammo* a b. *Conveniat autem producta* h g

cum



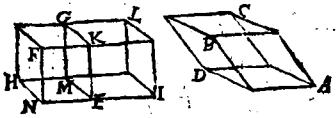
cum d e *ini, & cõpleatur parallelogrammũ* i k. *Iam concipiantur super bases* e h, i f, c k *æquè alta parallelepipeda ipsis super* a b, c d *constructis parallelepipedis, ut omnium insistentes lineæ ad bases sint perpendiculares. Erunt super* a b *&* e h *propter æqualia & similia plana inter sæ æqualia*, *item & super* e h, *&* i f, *β æqualia. Cum & parallelogramma* e h, c d, *&* f i *sint γ æqualia, eidem & æquale* c d; *erũt & c a &* i f *æqualia δ Erit igitur, ut* i f, *ad* e k, *ita* c d *ad* e k. *ε Sed, ut* i f *ad* e k, *ita est solidum super* i f, *ad solidum super* e k: *quia planum super* e f *secans totum solidum super* i k, *est parallelum planis adversis super* d k, i m, *erectis. Eadem & ratione ut* c d *ad* c k, *ita solidum super* c d *ad solidum super* e k. *Itaq; erit, ut solidum super* i f, *ad solidum super* e k, *& solidum super* c d, *ad solidum super* e k: *Erunt & solida super* i f *&* c d *ζ æqualia. Sed parallelepipedum super* i f *est æquale parallelepipedo super* a b. *Æqualia igitur erunt & parallelepipeda super* a b, c d.

α 10. def. XI.
β 29. XI.
γ 35. I.
δ 7. V.
ε 25. XI.
ζ 9. V.

PROPOSITIO XXXII.

Theorema 27.

Solida parallelepipeda *a b c d, e f g h*, sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases, *a b, e f.*



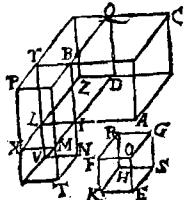
Super rectam ek *α constituatur parallelogrammum* ik *aequale parallelogrammo* a b, *in angulo* iek, *aequali ipſi* enf: *ita, ut* if *fiat unum parallelogrammum. Completo autem parallelepipedo* if lh; *erunt* a b cd *&* ik lm, *aequalia β parallelepipeda. γ Erit igitur ut ſolidum* ik lm, *ad ſolidum* e f gh. *δ Sed ſolidum* ik lm, *ad ſolidum* e f, gh *eſt, ut baſis* i k, *vel ipſi aequalis* a b, *ad baſin* e f. *Igitur etiam ſolidum* a b cd, *ad ſolidum* e f gh, *eſt ut baſis* a b, *ad baſin* e f.

α 45. I.
β 31. XI.
γ 7. XI.
δ 25. XI.

PROPOSITIO XXXIII.

Theorema 28.

Similia ſolida parallelepipeda *a b cd, e f g h* inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum *a i, e k.*



Producatur a i, *ad l, ut* i l *ſit aequalis ipſi* e r *vel* g r. *Item* d i *ad* m, *ut* i m *ſit aequalis ipſi* h k *vel* g o: *Item* b i *ad* n; *ut* i n *ſit aequalis ipſi* k f, *vel* g s. *Et completis parallelogrammis* l m, l n, i t

perficia-

perficiatur parallelepipedum t x i u. *Erunt parallelogramma propter angulos & latera aequalia* i x & g f, l n & r s, i t & g e *similia & aequalia, quibus cum sua opposita in illis parallelepipedis* & 24. XI.
e f g h, & t x i u *sint* α *similia & aequalia; erunt* β 10. def.
ζ *ipsa illa parallelepipeda inter se aequalia & si-* XI.
milia. Rursus completis parallelogrammis m b, b l, m l, *perficiatur parallelepipedum* m p, b l. *Item completis parallelogrammis* i y, d l, i q *perficiatur parallelepipedum* i y q z, *Quoniam ergo ex similitudine parallelepipedorum* a b c d, γ 1. VI.
e f g h, *est; ut* a i *ad* e k, *id est,* i l; *ita* d i *ad* h k *vel* i m: & b i *ad* f k *vel* i n. γ *Sed ut* a i *ad* i l, *ita est parallelogrammum* a d *ad* d l; & *ut* d i *ad* i m, *ita parallelogrammum* d l *ad* l m; & *ut* b i *ad* i n, *ita parallelogrammum* b l *ad* l n. *Erit ergo* δ 32. XI.
ut a d *ad* d l, *ita* d l *ad* l m; & b l *ad* l m. δ *Sed ut* η 10. def.
basis a d *ad basin* d l, *ita est parallelepipedum* XI.
a d c b, *ad parallelepipedum* d l y q. *Atque ut basis* d l, *ad basin* l m, *ita parallelepipedum* d l y q *ad parallelepipedum* l m b p: & *ut bases* b l, l n; *ita parallelepipeda* l m b p: & n l t x. *Quare erit, ut parallelepipedum* a d c b *ad parallelepipedum* d l y q; *ita parallelepipedum* d l y q *ad* b l n p, & *hoc ad* l n t x. *Quare quatuor sunt continuè proportionales quantitates* a d c b, d l y q, l m p b, l n t x: & *proportio prima* a d e b *ad quartam* l n t x, *i.e. ad* e f g h, *est triplicata, proportionis prima* a d c b, *ad secundam* d l y q. ζ *Ut autem* a d e b

ad dlyq, *ita est basis* ad *ad basin* d l; γ *& ut* a d *ad* d l, *ita est* a i *a* d i l, *ideſt* e k. *Eſt ergo proportio parallelepipedorum* adcb *&* e f g h, *triplicata proportionis homologorum laterum* a i *&* e k.

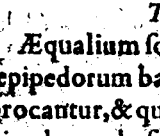
Corollarium.

Datis quatuor lineis continuè proportionalibus, ut eſt prima ad quartam: *ita ſunt* parallelepipeda primæ ad quartæ, ſimilia ſimiliterque deſcripta.

PROPOSITIO XXXIV.

Theorema 29.

Æqualium ſolidorum *ad c b, ehg f*, parallelepipedorum baſes *ab, eh*, & altitudines reciprocantur, & quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur, illa ſunt æqualia.



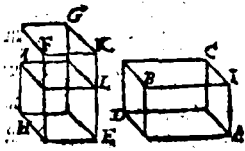
α per 4. defin. VI.

Ad baſes ab, eh, *ſint inſiſtentes* ai, ek *perpẽdiculares, quæ ſunt parallelepipedorum daterũ* α *altitudines: quæ ſi fuerint æquales, erunt & propter ipſa* β *parallelepipeda æqualia, ipſa baſes* ab, eh *æquales* γ. *Adeoq; ut baſis* a d *ad baſin* e h, *ita* e k *ad* a i, *id eſt, baſes & altitudines ſunt reciproca.*

β 31. XI.

γ 7. V.

Sit autem altitudines ſint inæquales, ex ek *majore abſcindatur ipſi* a i *æqualis* e l, *& per* l *ipſi baſi* eh *ducatur planum parallelum* l m. *Quoniam ergò æqualia ſunt ſolida* a c d b *&* e h g f, *patet ut* a c d b, *ad* e h l m, *ita* e h g f *ad* f h l m. *& Ve autem*



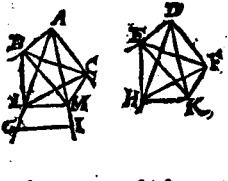
autem solidum ad eb ad solidum ehlm; ita c basis ad basin e h, propter altitudines ai, el aequales. δ Atq; ut chgf ad ghlm, ita basis k n ad basin l n. δ 32. XI.

Igitur, ut basis ad ad basin eh; ita est k n ad lm: Et sic ek ad el, id est, ad ai ipsi aequalē. Quare est, ut basis a d, ad basin e h; ita altitudo ek, ad altitudinē ei, id est, reciproca sunt bases altitudinib. Sint jā bases & altitudines reciprocæ, erunt etiā parallelepipeda aequalia. Si enim altitudines ek, & ai sint equales, cum sit, ut altitudo ad altitudinē, ita basis ad basin: erunt etiam bases ad, eh, aequales & sic parallelepipeda ipsa aeque alta aequalia. Quod si inaequales sint altitudines, abscindatur, ut antea, aequalis. Quoniā ergo est ex hypothesi, ut basis ad ad basin eh; sic altitudo ek ad altitudinem ai, id est, el. Ut autē est basis ad ad basin eh, ita est solidū ad cb, ad solidū ehlm, propter altitudines el, ai aequales: Et ut ek ad el, ita kn ad ln δ. Ut autē kn ad ln, ita est solidū chgf, ad solidum ehln. Ideoq; erit, ut solidum adcb, ad solidum ehlm; ita chgf, ad ghlm. Et sic adcb & chgf sunt aequalia. Poterat idem ostendi si insistentes, vel altitudines parallelepipedorum non sint perpendiculares, sed ad eas demittantur perpendiculares. Eadem hac etiam de prismatib. ijsdem servatis principijs vera sunt. ε 1. VI. ζ 9. V.

PROPOSITIO XXXV.

Theorema 30. Si

Si fuerint duo plani anguli æquales *b a c*, *d e f*, quorum verticibus *a*, *b*, sublimes rectæ lineæ *a g*, *d h*, insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales *b a g* & *c a g* utrumque utrique: In sublimibus autem lineis *a d*, *g b* quælibet sumta fuerint puncta *g b*, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli *b a c*, *d e f* primum positi, ductæ fuerint perpendiculares *g i*, *b k*; à punctis verò *i*, *k* quæ in planis à perpendicularibus *g i*, *b k* fiunt ad angulos *b a c*, *d e f* primùm positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ *i a*, *k d*; hæ *i k*, *k d* cum sublimibus *a g*, *d h* æquales angulos comprehendent.



Si enim a g, d h, *sunt inæquales, auferatur ex* a g *ipsi* d h *æqualis* a l, & *ex* l *ad planum* b a c *demittatur perpendicularis* l m. *Quoniam igitur*

a 6. XI. g i, l m, *sunt ad idem planum perpendiculares, erunt* a *parallelæ, & in eodē plano trianguli* g a i, *cadet* g, l m *in rectam* a i. *Iam ducantur ex punctis* m, k *ad rectas* a b, a c, d e, d f *perpendiculares*

lares m b, m c, k e, k f, *& connectantur rectæ* b c, b l, c l, c f, e h, h f. *Et quia* l m *est rectæ ad planum anguli* b a c, *ipsa rectum angulum efficiet* β *cum rectæ* a m *in eodem plano ductæ.* *Quare quadratum* a l *erit* γ *æquale quadratis* am, lm. *Sed quadratum* a m *est* γ *æquale quadratis*, a c, c m. *Igitur quadratum* a l *æquale est quadratis* a c, c m, m l. *At quadratis* c m, m l *æquale est quadratum* c l. *Quia*, c m l *angulus est* β *rectus. Igitur quadratũ* a l *æquale est quadratis* a c, c l. *Ideoq;* a c l *angulus erit* δ *rectus. Rursus, quia quadratũ* a c *æquale est quadratis* am, ml: *Sed* a m γ *æquale est quadratis* a b, b m: *Igitur quadratum rectæ* a l, *æquale est quadratis rectarum* a b, b m, m l: *at quadratis* b m, m l *æquale est quadratum* b l. *Ergò quadratum* a l *æquale est quadratis* a b, b l *angulusq;* a b l *erit* δ *rectꝰ. Nec aliter anguli* d f h, *&* d e h, *ostendẽtur recti. Quoniam itaq;* a b l *&* l a b *anguli trianguli* a b l *sunt æquales angulis* d e h, h d e, *trianguli* d e h; *Sunt q; latera* a c, d h *æqualia*; ε *erunt & reliqua latera* a b, b l, *reliquis lateribus* d e, h e *æqualia. Eodemq; modo æquales erunt rectæ* a c, c l, *rectis* d f, f h. *Quare in triangulis* a b c, d e f *æqualium laterum* a b, a c, *ipsis* d e, d f, *& angulorũ* b a c *ipsi* e d f; ζ *Erunt & bases* b c, e f *inter se, & anguli* a b c, a c b, *angulis* d e f, d f e, *æquales.* *Sunt autem & toti anguli* a b m, a c m

β 3. def. XI.
γ 47. I.
δ 48. I.
ε 47. I.
ζ 4. I.
η 8. I.

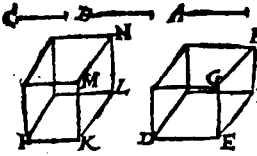
a cm *æquales totiè* d ek, dfk, *cum sint recti. Itaque & reliqui* m b c *&* mcb, *reliquis* k e f, k f e, *erunt æquales; propterea & cum* bc, ef *sint ostensa æqualia.* ε *Erunt latera* bm, cm *lateribus* ek, f k *æqualia. Quia ergò latera* a c, c m *æqualia sunt lateribus* df, f k, *anguli* acm, dfk; *erunt & bases* a m, dk *æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectæ* b l, eh; *erunt & earum quadrata æqualia. Sed quia quadratum* b l, *æquale est quadratis* bm, ml; *& quadratum* eh, *quadratis* ek, kh: *Erunt & quadrata* bm, ml *æqualia quadratis* ek, kh. *Ablatis ergò quadratis* bm, ek *æqualibus, reliqua quadrata* l m h k *erunt æqualia, rectæ* lm, h k *æquales. Quamobrem cum latera* a l, a m *æqualia sint lateribus* d h, dk; *& basis* l m, *basi* h k: ϗ *erunt & anguli* lam, hdk *æquales. Quod erat propositum.*

PROPOSITIO XXXVI.

Theorema 32.

Si tres rectæ lineæ *a, b, c*, proportionales fuerint, quod ex tribus his fit solidum *e b* parallelepipedum, æquale est descripto à media linea *b* solido parallelepipedo, *i m*, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto.

Cum



Cum enim sit, ut d e *ad* i k, *ita* k m *ad* e g (*quia* d e *ipsi* a, & i k, k m, *ipsi* b; & e g *ipsi* c *sumta sunt æquales*) & *angul.* d e g, i k m *æquales*: α *Erunt parallelogramma* d g, i m, *æqualia quia, latera habent circum æquales angulos reciproca. Quoniam verò anguli plani* d e g, i k m *sunt æquales, quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales* e f, k l, *quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primò positis, utrum ad, utrique ex constructione : erunt perpendiculares ex* f, l, *ad plana basium* d g, i m, *demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum* d h, in, *si bases sint* d g, i m *inter se æquales.* β *Quare parallelepipeda* d h, in, *propter bases* d g, im *æquales altitudines, inter se sunt* γ *æqualia. Quod erat propositum.* α 14. XI. β 35. XI. γ 31. XI.

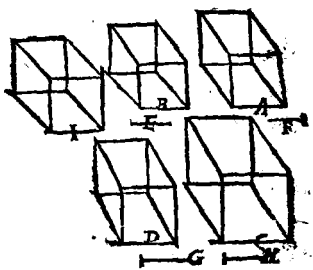
PROPOS: XXXVII.

Theorema 32.

Si quatuor rectæ lineæ *a, b, c, d* proportionales fuerint, ut *a* ad *b*, ita *b* ad *c* & solida parallelepipeda *a b c d*, quæ ab ipsis & similia & similiter describuntur, proportionalia erunt.

Et

& si solida parallelepipeda, quæ & similia similiterq; describuntur, fuerint proportionalia, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



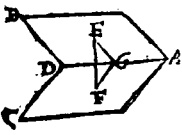
a 33. XI. *Cum eadem sit proportio* a *ad* b, *quæ* c *ad* d, *eadem quoq; erunt solidorum* a *ad* b, *&* c *ad* d, *a quia sunt proportiones triplicatæ ejusdē proportionis. Contra cum* a *ad* b, *&* b *ad* c *solida habeant eandē proportionem triplicatam proportionis lineæ* a *ad* b, *&* c *ad* d. *Erunt etiam lineæ rum* a *ad* b *&* c *ad* d *eadem proportiones.*

PROPOS: XXXVIII.

Theorema 33.

Si planum *ab*, ad planum *ac*, rectum fuerit, & ab aliquo puncto *e* eorum, quæ in uno sunt planorum *ab* ad

ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem *ad* cadet planorum ducta perpendicularis.

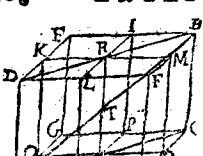


Si ex puncto e *dato in plano, demissa perpendicularis ad planum* a c *non cadit in communem sectionem* a d, *sed in punctum* f *extra illam, ducatur ex* e *ad rectam* a d *perpendicularis* e g. *quæ & ad planum* a c *a recta erit. Quare ex puncto* e *extra planum* a c *ducta sunt ad ipsum planum* a c *duæ perpendiculares* e f, f g. *Quod absurdum.* a 4. def. XI. β 13. XI.

PROPOSITIO XXXIX.

Theorema 34.

Si solidi parallelepipedi *a b* eorum, quæ ex adverso planorum *ac*, *bd* latera bifariam secta sint in *i*, *k*, l, *m*, *n*, *o*, *p*; per sectiones autem plana *in*, *ko*, sint extensa: communis sectio *r s* planorum, & solidi parallelepipedi diameter *a b* bifariam se mutuò secabunt.



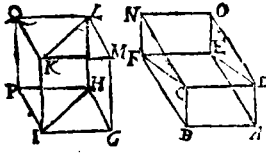
Connexis enim rectis r b, r d, s a, s c, *in triangulis* a q s, c o s, *propter* α *æqualia latera* a q, q s, *ipsis* c o, o s, *& angulum* a q s β *æqualē alterno angulo* c o s: *Erunt & baſes* a s, c s, γ *æquales, angulíq;* a s r, & c s o *æquales. Sed* a s q & a s o *ſunt duobus rectis* δ *æquales: Igitur &* c s o & a o s. *At propterea* a s, c s *unam rectam lineā* ε *conſtituēt. Eodēq; modo æquales oſtendemur* b r, d r; *& unam conſtituere rectam* b d. *Rurſus, quia utraq;* a d, b c *parallela eſt æqualis rectæ* f h, *ob parallelogrāma* a f, f c; *ipſa quoq; parallela & æquales* ζ *erunt.* η *Quare & rectæ* a c, b d *eiuſdē extrema cōjungentes, parallelæ ſūt & æquales ipſarumq; dimidiæ* a s, b r *æquales. Quia verò* a c, b d *ſunt parallelæ:* ϑ *erunt rectæ* a b, r s *in eadem cum ipſis plano. Ideoq; ſe mutuò ſecabunt in puncto* t. *Cum autem duo anguli* a s r, a t s, ι *æquales ſint duobus angulis* b r t *&* b t r, *& latus* a s *lateri* b r; λ *erunt & reliqua latera* r a, t s *reliquis* t b, t r *æqualia: ac propterea* a b, r s, *ſe mutuò bifariam ſecant in* t. *Quod erat propoſitū. Hinc efficitur in omniparallelepipedo:* Diametros omnes ſe mutuò bifariam ſecare in uno puncto, in quo bifariam dividuntur.

α 34. I.
β 29. I.
γ 4. I.
δ 13. I.
ε 14. I.
ζ 9. XI.
η 33. I.
ϑ 7. XI.
ι 29. & 15. I.
λ 26. I.

PROPOSITIO XL.

Theorema 35.

Si fuerint duo prismata *abcdef, gbiklm*, æqualis altitudinis; quorum hoc quidem habeat basin parallelogrammum *abcd*, illud verò triangulum *gbi*: duplum autem fuerit parallelogrammum *abcd* trianguli *gbi*: æqualia erunt ipsa prismata.



Perficiatur enim parallelepipeda an, gq; *extensis triangulorum planu, & perfectis parallelogrammis* bn, ao; gp mq: *ac duo* on, pq *quæ æque alta sunt parallelepipeda cum ipsis prismatis. Quoniam igitur parallelogrammum* gp, *α duplum est trianguli* gh. *Sed &* ac *α 34. I. parallelogrammum ejusdem trianguli* gh *est duplum. Erunt illa inter se æqualia: ipsaq; parallelepipeda æquè alta super æqualib. basib. æqualia, β 31. XI. & ipsorum dimidia, quæ sunt data prismata, æqualia. γ Quia parallelepipeda* am, gk *per diametros* cf, de, hi, lk *planorum adversorum secantur bifariam in bina videlicet prismata. Quod erat propositum. Quæ demonstratio ostendit, propositionem tantummodo loqui de illis prismatis, quæ duo triangula habent opposita, quia jubet parallelepipeda complere, quod non fieret, nisi utrumq; prisma oppositum haberet triangula, quia jam aurea esset completum, parallelepipedum.* γ 32. XI.

EU-

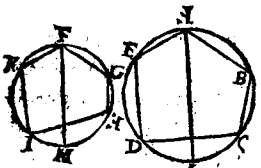
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Theorema. I.

QUæ in circulis polygona similia *abcde, fghik*, inter se sunt, ut à diametris *al, fm* quadrata



Angulis æqualibus a b c, f g h, *subtendantur rectæ* a c, f h; *& connectantur rectæ* b l, g m. *Quoniam ob similitudinem polygonorum est, ut* a b *ad* b c; *sic* f g *ad* g h: *erunt*

α 6. VI. *triangula* a b c, f g h, *æquiangula. Est autem*

β 21. III. *angulus* a c b, *& æqualis angulo* a l b; *& similis* f h g, *ipsi* f m g. *Erunt igitur & anguli* a l b *&* f m g *æquales. Sed cum & anguli* a b l, f m g, *sint*

γ 31. III. *æquales,*

an-

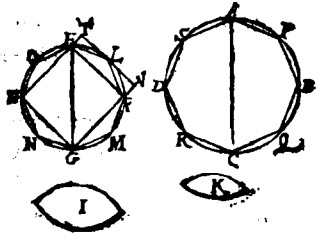
tanquam in semicirculo recti: & erunt & reliqui b a l, g f m *æquales.* ε *Erit ergò, ut* a l *ad* a b, *ita* f m *ad* f g. *Et permutando, ut* a l *ad* f m; *ita* a b, *ad* f g. ζ *Igitur est, ut quadratum ex* a l, *ad quadratum ex* f m: *Ita polygonum* a b c d e, *super* a b, *ad polygonum* f g h i k *super* f g; *cum tam quadrata quàm polygona sint figuræ similes.*

δ 32. I.
ε 4. VI.
ζ 22. VI.

PROPOS. II.

Theorema 2.

Circuli *a b c d, e f g b,* **inter se sunt, quemadmodum à diametris** *a c, e b* **quadrata.**



Sin minus, esto, ut quadratum diametri a c, *ad quadratum diametri* e g; *ita circulus* a b c d, *ad aliam magnitudinem* i, *quæ vel major vel minor erit circulo* e f g h. *Si enim esset æqualis,* α *habebunt circuli* a b c d, & e f g h *eam rationem, quam diametri* a e, e g; *quod tamen nõ concedi-*

α 7. V.

tur. Sit ergò i minor circulo efgh, magnitudine k ut quidem i & k simul sint circulo e f g h, æquales. Circulo ergò e f g h inscribatur quadratum efgh, quod quia quadrati, circulo eidem circumscripti, β dimidium est, majus erit semicirculo, lũ his secẽtur peripheriæ e f, fg, gh, he, in punctis l, m, n, o; adjungãturq; rectæ le, lf, mf, mg, ng, nh, ho, oe: Ducaturq; per l. Tangens t u, quæ ipsi e f erit parallela, occurrens rectis he, gf. Protractis in t & p. Quoniam itaq; triangulum elf, δ dimidium est parallelogrammi tefu, majus erit dimidio segmenti elf. & sic reliqua singula triangula dimidiis segmentorũ sunt majora, & omnia simul majora dimidio omniũ segmẽtorum simul. Eodemq; modo bisectis bisce peripheriis el, lf, iterũ adjunctæ lineæ efficerẽt triangula dimidiis segmẽtorum majora. Quoniam autem si à circulo efgh, auferatur plus dimidio, nempe quadratum efgh, & à reliquis segmentis rursum plus dimidio, nempe triangula e l f, f m g: & in hunc modũ semper fiat detractio, tandem relinqueretur minor magnitudo quã est k excessus inter circulum e f g h, & magnitudinem i. Sint itaq; segmenta circuli relicta e l, l f, f m, simul sumta, minora magnitudine k. Cùm ergò circulus efgh, ponatur æqualis ipsis i & k: simul segmenta illa minora magnitudine k, subtracta ex circulo, relinquunt polygonum e l f m g n h o; majus magnitudine reliqua i. Hinc polygono simile inscribatur

β 9. IV.

γ 27. III.

δ 41. I.

ε 1. X.

batur circulo abcd. ζ Quoniã hæc polygona inter ζ 1. XII.
se sunt ut ex eorundem circulorũ diametris quadrata, id est, η: ut circulus abcd ad i sed polygo- η ex hy-
num apbqcrds, minus est circulo abcd. θ Igitur & polygonum, elfmgnho, minus erit θ 14. V.
quam i: quod tamen modò demõstratum est majus, Quod absurdum. Deinde magnitudo i ponatur major circulo efgh. Cum itaq; ponatur abcd circulus ad i ut quadrata diametrorum ac & eg: erit & convertendo i ad circulum abcd, ut ex eg & ac diametrorum quadratum. Ponatur autẽ circulus efgh, ad magnitudinem k, ut i ad circulum abcd. Quoniam ergo i est major circulo efgh, major etiam θ erit circulus abcd ma- θ 14. V.
gnitudine k. Mag, erit ut diametrorum eg ac, quadratum, ita circulus efgh, ad magnitudinem k minorem circulo abcd. Quod absurdum, Quia ostensum modo est, non posse esse, ut quadratum diametri ad quadratum diametri; ita circulum ad magnitudinem minorẽ circulo. Sic patet etiam, nunquã habere posse quadrata duorum circulorum eandem rationem, quam circuli prior ad magnitudinem posteriore majorẽ. Idem enim sequetur absurdum, ut quod quadratũ diametri ac ad quadratum diametri eg, habeat eandem rationẽ, quam circulus abcd, ad magnitudinem circulo efgh minorem: quod falsum esse jã constat. Cùm ergò magnitudine i, neq; majore neq; minor esse possit circulo efgh, patet, eandẽ esse

circulorum rationem, quæ & ex ipsorum diametris quadratorum. Hinc etiam patet.

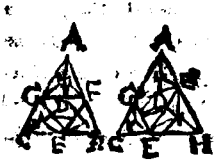
Corollarium.

Esse circulum ad circulum, ut polygona similia ipsis inscripta, quia ipsa quoq; sunt, ut ex diametris quadrata.

PROPOS. III.

Theorema 3.

Omnis Pyramis *abcd*, triangularem habens basin *abc* dividitur in duas pyramides *aegh*, *bikd* æquales & similes inter se, triangulares habentes bases *aeg*, *bik*, & similes toti, & in duo prismata *ebfghi*, *cfg bik* æqualia; quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.



Omnia latera pyramidis secentur bifariam in e, f, g, h, i, k, connectantur e, f, f g, g e, h i, i k, k h, h e, e i, i f: erunt duæ pyramides a e g h, h i k d, & æquales & similes inter se &

& toti: *Sicut & duo prismata* aebfghi, cfgh ik *inter se æqualia, & majora dimidio totius pyramidis. Quia enim* ad, bd, *latera sectæ sunt bifariam, & sic proportionaliter, & erunt* hi, ab, *parallela, & eadem ratione parallela* ik, bc: hk, ac: eg, be: ef, ac: fg, ab: eh, bd: ei, ad: if, dc: hg, dc: β *Sunt autem & fg, hi, inter se parallela, quia eidem* ab, *parallela sunt. Sicut & gh, fi, quia eidem* dc. *Sunt ergò parallelogramma* aeih, hebi, idhe, ebfg, ghkc, ckif, fghi. *Quia verò* he, hg *rectis* db, bc *sunt parallelæ: γ erunt anguli* ehg, bdc *æquales: sicut &* heg, dbc & hge, dcb. δ *Sunt ergò triangulorum* heg, dbc *latera circum æquales angulos proportionalia, & triangula similia. Sed & triangula* hae, hag, aeg; *triangulis* dab dac, abc *sunt δ similia: Sunt ergò pyramides* aegh. abcd *similes. Rursus, quia rectæ* hi, hk, *rectis* ab, ac, *sunt parallelæ; erunt anguli* ihk, bac *æquales: γ item* hik, abc; hki, acb. *Quare triangula* hik, abc *habent circum æquales angulos latera proportionalia, & sunt similia.* δ *Sunt autem & triangula* dhi, dik, dkh, *triangulis* dab, dbc, dca *similia: Ergo & pyramides* hikd, abcd *sunt similes. Quoniam autem triangula* ahe, hdi, δ *sunt similia triangulo* adb; *ipsa etiam inter se ζ erunt similia. Et quia super æquales rectas* ah, hd, *sunt constitutæ: η erunt etiam æqualia. Ita etiam*

α 2. VI. β 9. XI. γ 10. XI. δ 4. VI. 29. def. XI ζ 21. VI. η Lemma

a h g, h d k, *triangula similia, super æquales bases* a h, h d *constituunt sunt etiam æqualia; ut* θ 34. I. a e g & h i k, *super* a e & h i θ *æquales.* ‖ *Et denique* x 20. def. e h g, i d k, *super* h e, d i θ *æquales, æqualia sunt.* XI. x *Itaq; Pyramides similes* a e g h, & h i k d, *etiam sunt æquales. Rursus quia* e h, h g, g e, *sunt* θ *æquales & parallelæ rectis* b i, i f, f b, : λ *erunt triangula* e h g, b i f, *æquiangula inter se & æqualia & similia.* μ *Sunt etiã parallela, quia* e h, h g *per quas planum* e h g e *est ductum, parallelæ sunt rectis* b i, i f, *per quas planum* b i f, *est ductũ. Igitur solidum* b i f, g h e, *sub duobus his triangulis ex adverso æqualibus parallelis & similibus, & ex ijs parallelogrammis* e g f b, b e h i, i f g h, *contentũ est prisma. Eademq; modo propter triangula* c f g, h i k, *ex adverso* λ *æqualia parallela &* μ *similia, & propter parallelogramma* c f i k, μ 15. XI. k h g c, i f g h, *quibus continetur; solidum* c f g h r k, *est prisma. Quod cùm cum priore* b i f g h e *sit ejusdem altitudinis, utpote inter plana parallela* b c g e, h i k *& parallelogrammum* e b f g *est* ν 41. I. *duplum trianguli* c f g, ξ *erunt hæc inter se æqualia.* ξ 40. XI. *Denique quia prisma* e b f g h i *majus est pyramide* e b f i; *totum parte, quæ æqualis & similis est pyramidibus* a e g h *&* h i k d. *Ex æqualitate & similitudine triangulorum erunt illa duo prismata pyramidibus* a e g h, *&* h i k d

majo-

majora: adeoq; excedēt quidem dimidium pyramidis abcd: *hæc verò à dimidio ejus deficiēt. Toto enim in partes inæquales diviso, dimidiū quidem superat pars major: sed à dimidio deficit minor.*

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si fuerint duæ pyramides *abcd*, *efgb* ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases *abc*, *efg*; Sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides *ailm*, *mnod*, & *eprs*, *stub*, æquales inter se & similes toti & in duo prismata æqualia *ibklmn*, *klmnos*, & *pfqrst*, *gqrstu*, ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum *ailm*, *mnod* & *eprs*, *stub*, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idque semper fiat; erit, ut unius pyramidis *abcd* basis *abc*, ad alterius pyramidis *efgb* basin *efg*; ita & omnia, quæ in una pyramide prismata ad omnia, quæ in altera pyramide prismata multitudine æqualia.

Con-



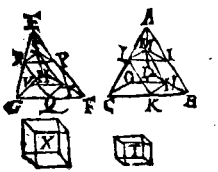
Constructio cum præcedente coincidit. Cum ergo sit, ut b c *ad* c k, *ita* f g *ad* g r. *Quia ut rag.* b c &
α 4. VI. f g *linea est bifariam secta:* α. *Sint autem* a b c, l k c: *item* g e f g & r q g *similia, similiterq; posita;* β *erit, ut* a b c, *ad* l k c, *ita* e f g *ad* r q g.
β 22. VI. *Et permutando, ut* a b c, *ad* e f g, *ita* l k c *ad* r q g. *Sed ut* l k c *ad* r q g, *ita est prisma* c k l m n o, *ad prisma* g q r s t u, *ita etiam prisma* i b k l m n, *ad prisma* p f q r s t, *tanquam illis æqualia. Et ut unum prisma* i b k l m n, *ad unum prisma* p f q
γ 5. VI. r s t: γ *ita sunt duo prismata* i b k l m n, c k l m n o, *ad duo prismata* p f q r s t, g k r t s u. *Erunt igitur duo prismata in pyramide* a b c d, *ad duo prismata in pyramide* e f g h, *ut basis* a b c d *ad basin* e f g h. *Eodem modo demonstrabitur, ita esse duo prismata in pyramide* a i l m, m n o d, *factis in pyramide* a b c d, *ad bina prismata in pyramidibus* e p r s, s t u h *factis in pyramide* e f g h, *ut sunt pyramidum illarum bases* a i l, & m n o, *ad bases harum* e p r & s t u. *Et sic porrò eadem adhibita divisione. Sed ut sunt illæ bases, ad has: ita est* l k c, *basis, illis æqualis, & similis, ad basin* r q g, *his similem & æqualem, hoc est, ita est* a b c *ad* e f g. *Itaq; erunt quoq; prismata cujuslibet pyramidis factæ, in pyramide* a b c d, *ad prismata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide* e f g h, *ut basis* a b c, *ad basin* e f g:

propterea erunt etiam, ut prismata pyramidis a b c d, ad prismata pyramidis e f g h: ita prismata pyramidis a i l m, ad prismata pyramidis p r s, quam prismata pyramidis m n o d, ad prismata pyramidis s t u h: & sic deinceps. Quare, cum sint, ut duo prismata pyramidis a b c d, ad duo prismata pyramidis e f g h: γ ita omnia prismata in pyramidibus a b c d, a i l m, m n o d simul, ad omnia prismata in pyramidibus e f g h, e p r s, i t u h simul: si hæc illis multitudine sint æqualia. Erunt etiam, ut basis a b o, ad basin e f g, ita omnia prismata in pyramide a b c d, ad omnia prismata in pyramide e f g h. Quod erat propositum. γ 12. V.

PROPOS. V.

Theorema 5.

Sub eadem altitudine existentes pyramides *a b c d, e f g h*, & triangulares habentes bases *a b c, e f g*, inter se sunt, ut bases.



Sin minus, esto, ut basis a b c ad basin e f g; ita pyramis a b c d, ad solidum x, quod majus vel minus est pyramide e f g h. Sit primo minus magnitudine

α 3. XII. dine y. α Dividatur ergò pyramis efgh in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia. Rursusq; hæ factæ pyramides in alias duas pyramides & prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide efgh, auferatur plus quàm dimidium. duo nempe prismata pfqrst, gqrstn, à majora dimidio pyramidis efgh: Itemq; è reliquis pyramidibus eprs, tuh, plus dimidio, utpote illarũ prismata; Et sic deinceps;
β 1. X. β relinquitur tandẽ minor magnitudo, magnitudine y, seu excessu, quo pyramis efgh, superat solidum x. Relicta ergo magnitudo jam sit minor. Cùm verò pyramis efgh, ponatur æqualis solidis x & y: Erunt reliqua prismata in pyramide efgh, majora solido x. Dividatur pyramis abcd in duas pyramides æquales & duo prismata æqualia. Itemq; factæ pyramides alm, mnod, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia. Quod toties fiat, quoties in pyramide
γ 4. XII. efgh est factum. γ Quoniam ergò omnia prismata in pyramide abcd, ad omnia prismata numero æqualia, in pyramide efgh sunt, ut basis abc, ad basin efg, id est, ut pyramis abcd; ad solidum x; omniaq; prismata in pyramide abcd
δ 14. V. minora quàm pyramis tota abcd: δ erunt etiam omnia prismata in pyramide efgh, minora solido x; quæ tamen modo ostensa sunt majora. Minus ergò nequit esse solidum x pyramide efgh.

Deinde

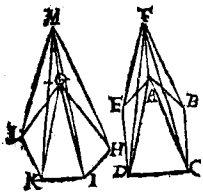
Deinde fit eâdem majus. Quoniam ergò ponitur pyramis a b c d, *ad solidum* x, *ut basis* a b c, *ad basin* e f g. *Erit convertendo solidum* x, *ad* a b c d, *ut* e f g, *ad* a b c. *Ponatur autem solidum* x, *ad pyramidem* a b c d, *ut* e f g h *pyramis ad solidum* y. *Quoniam ergò solidum* x, *majus ponitur pyramide* e f g h: *erit & pyramidis* a b c d *major solido* y. *Quare erit, ut basis* e f g *ad basin* a b c; *ita pyramis* e f g h, *ad solidum* y *quod minus est pyramide* a b c d. *Quod absurdum. Quia ostensum est, esse non posse, ut basis ad basin, ita pyramidē ad solidū pyramide minus. Cum ergò pyramis* e f g h *nec minor nec major sit solido* x, *erit ipsis aequalis.* ‖ *Erit ergo, basis* a b c, *ad basin* e f g, *ita pyramis* a b c d, *ad pyramidem* e f g h, *id est, ad* x. *Manifesta etiam hinc est conversa, quod si pyramides triangulares sint ut bases, quod sint sub eadem altitudine: Et quod si pyramides super eadem sive aequalibus basibus, ejusdemq; sint altitudinis, etiam ‖ sint aequales.* ‖ 7. V.

PROPOSITIO VI.

Theorema 6.

Sub

Sub eadem altitudine existentes pyramides *a b c d e f, g h i k l m*, & polygonas habentes bases *a b c d e, g h i k l*; inter se sunt ut bases.



Resolutis basibus in triangula numero æqualia: erit quælibet pyramis divisa in totidem pyramides triangulares. α *Quia vero est, ut basis* a b c, *ad basim* a c d; *ita pyramis* a b c f, *ad pyramidem* a c d f. α *Rursusq; ut bases* a c d, a d e, *ita pyramides* a c d f, a d e f. *Igitur ex æquo, ut* a b c d, *ad* a d e; *ita* a b c d f, *ad* a e d f. *Et componendo, ut bases* a b c d e, a d e; *sic pyramides* a b c d e f, & a e d f. *Similiter erit, ut bases* g h i k l, & g k l; *ita pyramides* g h i k l m. & g k l m: *Et convertendo, ut bases* g k l, g h i k l, ; *ita pyramides* g k l m, & g h i k l m. α *Rursus quoniam est, ut bases*, a d e *ad* g k l; *ita pyramides* a d e f, *ad* g k l m: *erunt quatuor bases*, a b c d e, a d e, g k l, g h i k l, *cum quatuor pyramidibus* a b c d e f, a d e f, g k l m, g h i k l m, *in eadem ratione. Erit ergò ex æquo, ut bases* a b c d e *ad* g h i k l; *ita pyramides* a b c d e f *ad* g h i k l m. *Quod erat propositum.*

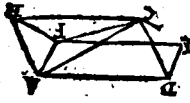
a 5. XI.

PRO

PROPOSITIO VII.

Theorema 7.

OMne prisma *a b c d e f*, triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides *a b c f*, *a d c f*, *e f d c* æquales inter se, triangulares bases habentes.



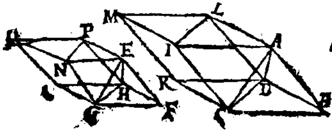
Ducantur in tribus parallelogrammis tres diagonij a c, c f, f d, *& dividentes ea in triangula inter se æqualia.* α 34. I.

Est ergò, ut bases a b c, a d c *æquales; ita pyramides* a b c f, a d c f *ejusdem altitudinis, quæ est perpendicularis ex* f *demissa in planum* a b c d β *æquales. Ita vtriam æquales sunt pyramides* a d f c, e f d c, *super æquales bases* a d f, d e f *constitutæ, sub eadem altitudine, ceu perpendiculari à vertice* c *ad planum* a d e f *demissa. Sed pyramis* a d c f, *est eadem pyramidi* a d f c, *quippe ijsdem contenta planis. Igitur tres pyramides* a b c f, a d c f, e f d c *vel* c d e f, *æquales inter se sunt; & sic prisma* a b c d e f *in tres æquales pyramides est divisum. Vnde patet*: Quamque pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum ipsa habentis basin & altitudinem. β 5. XI.

PROPOS. VIII.

Theorema 8.

Similes pyramides *a b c d, e f g h*, quæ triangulares habent bases *a b c*, *e f g*; in triplicata sunt homologorum laterum *b c, f g*, ratione.



Extendantur plana triangulorum a b c, c d b, d a b, *perficianturq; parallelogramma* b i, b k, b l: & *ducantur recta ipsis* a i, a l *æquales & parallela* l m, i m: *connectaturq;* k m, *ut parallelepipedũ completum sit* b m *ejusdem altitudinis cum pyramide, ut parallela plana* α *ostendunt. Eodemq; modo perficiatur parallelepipedum* f q. *Quoniam igitur*

α 15. XI.

propter similitudinem pyramidum & anguli a b c, e f g *sunt æquales, estq; ut* a b *ad* b c, *ita* e f *ad* f g; *erunt parallelogramma* b i, f n *similia: Ita, cum anguli* a b d, e f h *sint æquales; & sit, ut* a b *ad* b d; *ita* e f *ad* h f: *item anguli* d b c, h f g *æquales, & sicut* d b *ad* b c; *ita* h f *ad* f g; *erunt & parallelogramma* b l, b k *parallelogrammis* f p, f o *similia. Sed tam tria* b i, b k, b l, *parallelepipedi* b m, *reliquis tribus oppositis* d m,

β 4. XI.

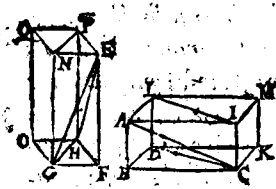
a m, c m; *quàm tria* f n, f o, e p, *parallelepipedi* f q, *reliquis oppositis tribus* h q, f q, g q, *sunt æqualibus* β & *similia; adeoq; sex plana parallelepipe-*

ipipedorum bm, & fq *sunt inter se similia, ipsaq;* γ 9. def.
parallelepipeda similia γ. *Quoniam verò ducta* XI.
rectis l i, pn, *Prismata* d b c i l a, h f g n p e *habent*
δ *eandem proportionem, quam ipsorum dupla* δ 15. V.
b m & f q. *Et pyramides* a b c d, e f g h, *eandem quam prismata dicta earum tripla: & habebunt quoq; pyramides eandem proportionem,*
quam parallelepipeda. ζ *Sed cum proportio pa-* ε 11. V.
rallelepipedorum b m, f q *sit triplicata rationis* ζ 33. XI.
homologorum laterum b c, f g: *erit etiam proportio pyramidum triplicata eorundem laterum* b c, f g. *Quod ipsum quoq; locum habet in pyramidibus similibus plurium laterum, sicut & in prismatibus similibus.*

PROPOS. IX.

Theorema 9.

Æqualium pyramidum *a b c d, e f g h*, & triangulares bases *a b c, e f g* habentium, reciprocantur bases & altitudines; & quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales.



Perſicantur, ut in præcedenti, parallelepipeda b m, f q, *eorundem altitudinũ cum pyramidibus; cõnectantur q; rectæ* l i, p n; *erunt priſmata* a d b c i l a, h f g n p e, *tanquam tripla pyramidum æqualium inter ſe æqualia, ipſaq; parallelepipeda* b m, f q *priſmatũ dupla, æqualia: & eorum itaq; baſes reciprocantur altitudinibus, id eſt, erit, ut baſis* b i, *ad baſin* f n: *ita altitudo ſolidi* f q, *ad altitudinem ſolidi* b m. *Sed ut ſunt baſes* b i *&* f n, *ita ſunt triangula* a b c, e f g. *Itaq; ut ſunt baſes* a b c, e f g; *ita ſunt altitudines pyramidum* e f g h *&* a b c d. *Quippe eadem cum parallelepipedorum altitudinibus; & ſic reciprocantur baſes altitudinibus. Ita ſunt baſes & altitudines reciprocæ. Erunt etiam pyramides æquales. Conſtructa figura ut prius, ſit, ut* a b c *ad* e f g; *ita parallelogrammum* b i, *ad* f n. *Sint q; eadem altitudines parallelepipedorum & pyramidum; erunt etiam baſes & altitudines parallelepipedorum reciprocæ. Et ſit* a *æqualia* b m, f q. *Quare & ipſorum dimidia priſmata, & horum partes tertiæ pyramides, ſunt æquales. Quod ipſum de reliquis non triangularibus pyramidibus & priſmatis quibuscunq; poteſt oſtendi.*

XI.

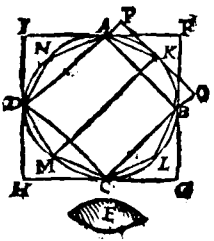
15. V.

PRO-

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin *abcd*, habentis & altitudinem æqualem.



Sin minus est cylindrus coni triplo, erit vel major vel minor triplo coni. Sit ergò major magnitudine e, & sic æqualis triplo coni & magnitudine e simul. Circulo ceu basi utriusq; inscribatur quadratum a b c d, *& circa eundem quadratum* e f g h i, *super quæ quadrata intelligantur sub altitudine coni & cylindri erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum* a b c d, α *dimidium est quadrati* f g h i; β *est autem ut basis ad basin: ita parallelepipedum, ad parallelepipedum ejusdem altitudinis. Erit etiam unum alterius duplum. Et minus super basi* a b c d, *majus dimidio cylindri. Iam secentur peripheriæ* a b, b c, c d, d a, *bifariam in punctis* k, l, m, n: *conjungantur quoq; rectæ* k a, k b, l b, l c, m c, m d, n d, n a, *& per* k *agatur tangens* o p, γ *parallela ipsi* a b, *occurrens rectis* d a, c b *productis in punctis* o, p: *& super* a k b, a b o p, *intelligantur pri-*

α 9. IV.
β 32. XI.
γ 27. III.

∂ 41. I. ∈ 7. XII. *sm sta æquè altæ cono vel cylindro. Quoniã ergò* a k b *est ∂ dimidium* a b o p, *erit & illius prisma, hujus ∈ dimidium: Erit q̃ prisma basis* a k b *majus, quàm dimidium segmenti cylindri, cujus basis contineatur lineâ* a b, *& arcu* a k b. *Quod ipsum de reliquis segmentis tribus verum est. Erunt q̃ omnia prismata quatuor triangulorum simul majora dimidio omnium segmentorum cylindri simul. Idem q̃ sequeretur, si peripheriæ hæ iterum bifariam secarentur, & fierent triangula &c. Si ergò à cylindro, cujus basis est circulus* a b c d, *auferatur plus, quam dimidium, ut parallelepipedum basis* a b c d, *& à reliquis segmentis plus, quàm dimidium, nimirum prisma-*

ζ per. I. X. *ta basium* a k b, b l c. *Et sic fiat ulterius detractio: ζ relinquitur tandem minor magnitudo, quàm* e, *excessus cylindri supra triplum coni. Sint jam segmenta cylindri relicta basium* a k, k b, b l *simul sumpta minora, quàm* e. *Cùm ergò cylindrus ponatur æqualis triplo coni & magnitudini* e *simul, ablatis segmentis illis ex cylindro, & ex triplo coni una cum magnitudine* e, *ipsa* e, *quæ major est dictis segmentis, erit reliquum prisma basis multangula* a k b l, c m d n, *ejusdem altitudinis cum cono & cylindro, majus quàm reliquum triplum coni. Erit ita q̃ conus minor tertia parte Prismatis sey Pyramide, cujus eadẽ ipso, cum est basis & altitudo, totum parte minus, quod absurdum. Non ergò major est cylindrus triplo coni.*

Sit

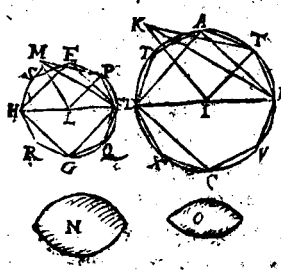
sit jam minor, & sic conus major tertiâ parte cylindri, & magnitudine e, ut conus sit æqualis tertiæ parti cylindri, & magnitudini e simul. Constructis ijsdem Pyramis super α dimidia basi a b c d *descripta erit & dimidia pyramidis super* f g h i. § 6. XII. *Major ⅔ pyramis super* a b c d, *coni super* a b c d *circulo descripti dimidio. Rursus jam, ut antea, divisis peripheriis, & completis triangulis, pyramis super* a k b *major est dimidio segmenti coni æquè alti, super basi linea* a b *& peripheria* a k b *contenta. Quod ipsum de reliquorum triangulorũ pyramidibus, & segmentorũ conis dimidijs verũ est. Quæ omnes pyramides simul majores sunt quam dimidia omniũ segmentorum coni simul. Idem sequeretur, si peripheriæ harum sectarentur bifariam. Si jam ex cono super circulo* a b c d *facto auferatur pyramis dimidio major, cujus basis* a b c d *æquè alta: relinquitur minus dimidio, & à reliquis segmentis iterum plus dimidio, ut pyramides super* a k b, b l c, c m d *&c. Et sic ulteriùs fiat detractio, & relinquitur tandem minor magnitudo quam* e, *excessus coni supra tertiam partem cylindri. Sint jam segmenta coni relicta* a k, k b, b l *simul sumta minora quàm* e. *Cum igitur Conus ponatur æqualis cylindri parti tertiæ, & magnitudini e simul; Si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte una cum magnitudine* e, *quàm major est prædictis coni segmentis*

erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum a k b l, c m d n, ejusdē altitudinis cū cono & cylindro, major tertia parte cylindri reliqua. Et sic triplum pyramidis majus cylindro. Proindè cum prisma ejusdem baseos cum pyramide, & altitudinis cum cono & cylindro, & triplum sit pyramidis: erit prisma majus cylindro, pars toto. Non ergò cylindrus est minor triplo coni. Sed neq; major, ut antea patet. Ergò æqualis. Et sic conus quilibet cujuslibet cylindri æquè alti, & ejusdem basis, est pars tertia. Quod erat propositum.

PROPOS. XI.

Theorema 11.

Sub eadem *i k l m*, altitudine existentes coni & cylindri inter se sunt ut bases *a b c d*, *e f g h*.



Sin minus, esto, ut basis a b c d, *ad basim* e f g h, *sic Conus, super* a b c d, *ad aliam magnitudinē* n, *quæ vel minor vel major est cono* e f g h m. *Sit ergò minor*

minor magnitudine o, ut conus sit aqualis ipsis n & o simul. Inscripto quadrato e f g h in circulum secentur quadrantes bifariam in p, q, r, s, quæ puncta connectantur cum e, f, g, h. Quoniam ergò, si ex cono e f g h m detrahatur pyramis super basin e f g h ejusdemq; altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides ejusdē altitudinis bases e p f, f q g: eodem modo semper fiat detractio, semperq; plus dimidio subtrahatur, ut in præcedenti propositione, & relinquitur tandem minor magnitudo quàm o, ex cessu coni e f g h m super n. Sint ergò relicta segmenta bases coni e p, p f, f q simul sumpta, minora quàm o. Cum igitur Conus e f g h m ponatur æqualis ipsis n & o simul; si ex cono detrahantur dicta ipsius segmenta, sed ex n o simul ipsa o major dictis segmentis simul, erit reliqua pyramis cujus basis est polygonum e p f q g h s ejusdem altitudinis cum Cono, major quàm n. Huic ergò polygono simile inscribatur etiam circulo, a b c d, ut in secunda propositione est factum, & ducantur diametri b d, f h. & Quoniam ergò est, ut circulus a b c d, ad circulum e f g h; ita polygonum a t b u c x d y, ad polygonum e p f q g r h s. Sed ut est circulus ad circulum; ita ponitur conus a b c d k, ad magnitudinem n; & ut γ polygonū ad polygonum: ita est pyramis ad pyramidē ejusdem altitudinis cū Conis. Erit etiam pyramis ad pyramidem, ut conus a b c d k ad

α 1. XII.

β 2. XII.

δ 6. XII.

n. *Cumq; Conus* a b c d k *sit major pyramide* a t b u c x d y k: *& erit &* n *major pyramide* e p f q g r h s m: *quæ tamen modo ostensa est minor. Quod absurdum. Non ergò minor est* n, *quàm cono* e f g h m. *Hinc ponatur major magnitudo* n *cono* e f g h m. *Cùm sit, ut circuli,* a b c d, *ad* e f g h; *ita conus* a b c d k *ad* n: *etiam convertendo erit, ut circuli* e f g h, *ad* a b c d; *ita* a *ad conum* a b c d k; *Iam ponatur: ut* n *ad Conum* a b c d k; *ita conus* e f g h m *ad* o: *Et quia* n *major ponitur cono* e f g h m; *& erit conus* a b c d k *major, quam* o, *Quare erit, ut circuli;* e f g h, *ad* a b c d: *ita conus* e f g h m, *ad magnitudinem* o, *quæ minor cono* a b c d h *est. Quod absurdũ, quia ostensum modo est, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut basis est hujus coni, ad basin illius coni. Itaq;* n *non est major* e f g h m: *ac proinde aqualis. Quare cum sit, ut circuli* a b c d, *ad* e f g h: *ita conus* a b c d k *ad* n, *id est* a *ad conum* e f g h m: *erit, ut basis ad basin, ita canus ad conum, si sint æquè alti.*

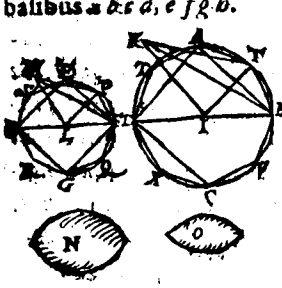
ε 9. V. ζ 10. XII. η 15. V. *Cumq; super ijsdem basibus æquè alti cylindri cum conis sint ζ eorum tripli. η Erit etiam, ut basis ad basin, ita cylindrus ad cylindrum, si sint æquè alti.*

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Similes

Similes Coni & Cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum *b d, f b*, quæ in basibus *a c d, e f g*.



Sin minus, habeat conus a b c d k, *ad aliquã magnitudinem* n, *triplicatam rationem diametrorum* b d, f h; *erit ergò vel minor vel* [*major cono* e f g h m. *Primum sit* n *minor, cono* c f g h m, *magnitudine*; *& adhibitaq; præcedentis constructione, erit rursus pyramis* e p f q g r h s m, *major quam* n. *Iam ducantur* k b, k t, m f m p t, *ut fiant triangula* b k t, f m p; *connectanturq;* t i, p l. *Quoniam igitur Coni* a b c d k, e f g h m *ponuntur similes; erit, ut diameter* b d, *ad diametrum* f h: *vel, ut semidiameter* b i *ad semidiametrũ* f l, *ita axis* i k, *ad axem* m l. *Cumq; anguli* b i k, f l m *sint recti, quod & coni ponantur recti; & ipsorum axes ad bases recti: erunt triangula* b i k, f m l *æquiangula: adeoq; ut* k b *ad* b i, *ita* m f *ad* f l. *Sed ut* b i b t, *ad ita* f l *ad* f b, *ob similitudinem triangulorum* b i t, f l p (*quia anguli* b i t, f l p, *similibus arcubus insistentes sunt æquales, circumq; ipsos latera proportionalia.*)

α 24. def. fin. XI.
β 15. V.
γ 3. def. XI.
δ 6. VI.
ε 4. VI.
ζ 4. I.
η 7. V.

Itaq;

Itaq; ex æquo, ut k b *ad* p t, *ita* f a m *ad* f p. *Rursus, quia latera* k i, i b, *trianguli* k i b, *æqualia sunt lateribus* k i, i t, *trianguli* k i t, *& anguli ipsi, comprehensi rectis* y. *Erunt basis* k b, k t, *æquales.* ζ *Eodemq; modo æquales erunt rectæ* m f, m p, *atq; sic rectæ* k b, k t, *rectis* m f, m p, *proportionales: Quia verò, ut* k b, *ad* b t; *ita* k t, *ad eandem* b t: *item, ut* m f *ad* f p, *ita* m p, *ad eandem* f p. *Erat autem ut* k b *ad* b t; *ita* m f *ad* f r; *erit quoq; ut* k t, *ad* b t, *ita* m p *ad* f b: *& convertendo, ut* b t *ad* t k, *ita* f p *ad* p m. *Quare cũ sit ut* t k *ad* k b; *ita* p m *ad* f m; *& ut* k b *ad* b t; *ita* m f *ad* f p. *Et, ut* b t *ad* t k, *ita* f p *ad* p m; *habebunt triangula* b k t, f m p, *latera proportionalia: Erunt q; & æquiangula & similia, Neq; aliter reliqua triangula pyramides* a t b u c x d y k *&* e p f q g r h s m, *ambientia, inter se similia ostendentur. Cumq; multitudine sint æqualia, erunt dictæ pyramides & similes & in x. triplicata proportione homologorum laterum. Vt autẽ* b t *ad* f p, *ita est* b i *ad* f l, *ob similitudinem triangulorum* b i t, f l p: β *Et ut* b i *ad* f l, *ita* b d *ad* f h. *Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatam diametrorum.* b d, f h. *Sed earundem diametrorum proportionem triplicatam habebat Conus* a b c d k *ad* n: *Erit igitur, ut pyramis* a t b u c x d y k *ad pyramidem* e p f q g r h s m; *ita conus* a b c d k *ad* n. *Cum igitur pyramis prior sit minor Cono*

ζ. def. XI. & 1. XII.

a b c d k,

abkdk, *pars toto: erit etiam posterior minori magnitudine* n, *qua tamen modò ostensa est major. Quod absurdum. Non ergò minor est magnitudo* n. *Cono* efghm. *Iam, si* n *major cono* efghm. *Cum ergò Conus* abcdk *habeat proportionem triplicatam diametri* bd *ad diametrum* fh; *Sicut & pyramis* atbucxdyk *ad pyramidem* epfqgrhsm: *erit, ut conus* abcdk *ad* n, *ita pyramis ad pyramidem: & convertendo, ut* n *ad conum* abcdk, *ita pyramis* epfqgrhsm *ad pyramidem* atbucxdyk. *Quare cum pyramides illa habeant rationem triplicatam homologorum laterum* pf *ad* tb, *id est, diametri* fh, *ad* db, *habebit etiam* n *ad conum* abcdk *rationem triplicatam diametri* fh *ad* bd. *Ponatur ergò ut* n *ad conum* abcdk: *ita conus* efghm, *ad* o. *Erit etiam inter hac ratio triplicata diametrorum* fh *ad* bd. *Cum autem* n *ponatur major cono* efghm: λ *erit & conus* abcdk *major quam* o, *Itaq; conus* efghm *ad* o *minorem cono* abcdk, *proportionem habet triplicatam diametrorũ* fh *ad* bd. *Quod absurdum: quia ostensum est modo non posse Conũ ad magnitudinẽ alio cono minorem; proportionem habere triplicatam diametrorũ baseos. Itaq; nec major est* n, *quã conus* efghm *sed sunt aquales. Ideoq; conus* abcdk, *ad* n & μ *conum* efghm, *habet rationẽ triplicatam diametrorum* fh *ad* λ .4. V

bd. *Et* μ .7. V.

b d, Et quæ eorundem conorum cylindri fuêre tripli, & habebunt ipſi quoq; eandem rationem triplicatam diametrorum baſium fh *ad* b d.

PROPOSITIO XIII.

Theorema 13.

Si Cylindrus *a b c d*, plano *g b*, ſecetur, adverſis planis *a b*, *c d*, parallelo: Erit ut cylindrus *a b b g*, ad cylindrum *g b c d*; ita axis *c i*, ad axem *i f*.



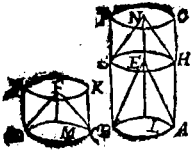
Intelligatur enim Cylindrus a b c d *utring; protractus, unà cum axe & rectangulo* e g, *ex cujus revolutione eſt genitus. Sumanturq; in axe productio rectæ* e k; k l, *æquales ipſi* e l: *& aliæ* f m, m n, n o, *æquales ipſi* i f, *& per puncta* i, k, l, m. n, o, *ducantur rectæ* i h, k p, l q, m t, n u, o x *æquales & parallelæ ipſis* e b, f c; *quæ ad revolutionem rectanguli deſcribent circulos* g h, p r, q s, t a, u z, x y, *parallelos & æquales circulis* a b, c d: *erunt ergò* s p, p a, a h, h d, d t, t z, z x, *cylindri, ex definitione, componentes cylindrum totum* s q x y. *Quoniam verò tam cylindri* s p, p a, a h, *ſuper æquales baſes* q s, p r, b a, *& ſub æqualibus*

æqualibus altitudinibus, kl, ek, ie, sunt æquales; quàm cylindri xz, zt, td, dh, *sub æquales bases* xy, uz, ta, cd, *& sub altitudinibus æqualibus* no, mn, fm, if. *Erit tàm multiplex cylindrus* xg *cylindri* cg, *quàm multiplex est axis* io, *ipsius* if: *Et tam multiplex cylindrus* sh *cylindri* ah, *quam multiplex axis* il *ipsius* ie. *Si ergò æ*xes il *&* io *sunt æquales æ*: *æquales etiam sunt cylindri* sh *&* xg; *si verò axis axe est major, & cylindrus cylindro major est; & si minor, minor, in quacunq; multiplicatione.* [*Erit*] *igitur axis* ie, *ad axem* if, *ut cylindrus* ah, *ad cylindrum* gh. lib. XII. 7. def. V.

PROPOSITIO XIV.

Theorema 14.

Super æqualibus basibus *ab, cd* existentes coni *abc*, *cdf*, & cylindri *abgh*, *cdik*, inter se sunt ut altitudines *le*, *mf*.



Extenso cylindro abgh, *ad partes* gh, *una cum axe* le, *& rectangulo* ag, *abscindatur axi* mf, *æqualis* en, *ut* n *sit centrum circuli, æqualis & paralleli ipsi* gh:

α 11. XII. β 7. V. γ 13. XII. δ 14. XII. ε 15. V.

& fiat cylindrus g h o p *ejusdem altitudinis cum cylindro* c d i k, *qui & inter se sunt æquales* α: *ad quos cylindrus* a g β *habet eandem rationem. Est* γ *autem cylindrus* a g *ad cylindrum* a p *ut axis vel altitudo* l e, *ad axem vel altitudinem* e n, *id est, ad* m f *huic æqualem. Igitur & cylindri* a g, c i *sunt ut altitudines* l e, m f. *Cum* δ *coni* a b e, c d f *sint partes tertiæ cylindrorum, erunt etiam coni hi, ut altitudines* l e *ad* m f.

PROPOSITIO XV.

Theorema 15.

Æqualium conorum *a b c, d e f*, & cylindrorum *a b g h, d e i k*, reciprocantur bases *a b, d e*, & altitudines *l c, m f*: & quorum conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

α 11. XII.

In cylindris enim si altitudines l c, m f *sint æquales* α, *erunt & bases æquales. Erit* β *ut basis* a b *ad* d e, *ita altitudines æquales* m f *ad* l c, *id est, bases erunt altitudinibus reciprocæ. Si verò altitudines* l e,

l c, m f, *sint inæquales, abscindatur ex* m f, m n, *æqualis ipsi* l c, *& centro* n *describatur planum ipsi basi* d e *æquale & parallelum, ut fiant duo cylindri* d o, o k. *Quoniam ergo æquales ponuntur cylindri* a g, d i, *habebunt ad eundem cylindrum* d ō, *eandem rationem. Sunt autem cylindri* a g, d o, *ut bases* a b, d e, *propter æquales altitudines; & cylindri* d i, d o, *ut altitudines* m f *&* m n *propter identitatem basis & cylindri. Erit ergò ut basis* a b *ad* d e; *ita altitudines* m f *ad* m n, *vel huic æqualem* l c, *id est, bases & altitudines sunt reciprocæ. In conis, si ponantur æquales,* a b c, d e f; *erunt & eorum cylindri* a h d i, *quorum sunt partes ⅓ tertiæ, æquales. Et quia horum bases & altitudines reciprocantur. Ergo & conorum. Si verò ponantur bases & altitudines reciprocæ, etiam coni & cylindri erunt æquales. In cylindris ergò* a g, d i, *si altitudines* i c, m f *sint æquales, cum bases* a b, d e *sint, ut altitudines: erunt & ipsa & ⅓ cylindri æquales: si verò altitudines sint inæquales, cum ponantur altitudines* m f *ad* l c, *id est,* m n *ut bases* a d *ad* d e: *& Sint & bases* a b *ad* d c *ut cylindri* a g *ad* d o, *propter altitudines æquales, & ut altitudines* m f, *ad* m n, *ita cylindri* d i *ad* d o *propter identitatem basis* d e. *Erunt cylindri* a g, d i *in eadem ratione, ad cylindrum* d o, *& sic æquales. In conis verò reciprocis positis basibus, & altitudinibus; ipsorum quoq; tri-*

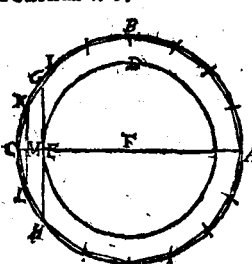
β 7. V.
γ 14. XI.
δ 10. XII.
ε 9. V.

pli cylindri reciprocantur propter easdem baſes, & altitudines reciprocas, ex quibus cum cylindri concludantur æquales, etiam æquales erunt ipſorum partes tertia vel 10ni.

PROPOSITIO XVI.

Problema 1.

Duobus circulis *a b c, d e,* circa idem centrum *f* exiſtentibus, in majori circulo *a b c,* polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum *d e.*



Extendatur per f cẽtrum diameter a c, *qui ſecet circulum* d e *in* e, *per quod* A *punctum ducatur perpendicularis ipſi* a c, *qua* α *tangens erit circuli* d e. *Quoniam arcus* a g c *major eſt arcu* g c, *ſubtracto dimidio* a b *& ex reſiduo* b c, *dimidio* b i, *& ex reſiduo* i c *dimidio* i k, *& relinquitur* c k *minor quam* g c: *eritq;* c k *ſubtenſa ipſi* c k *arcui lateris polygoni inſcribendi. Si enim arcus* b i *impartes numero & magnitudine æquales ipſius* c i *dividatur, & quadrans* a b *in æquales partibus* b c *quadrantis, &* a h c *ſemi-*

α 13. III.

β 1. X.

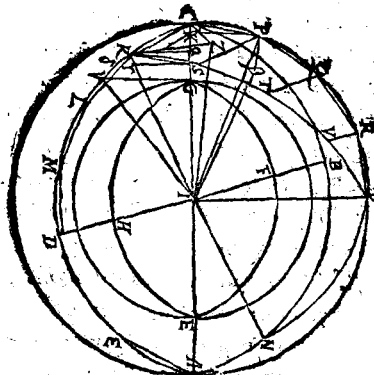
semicirculus in æquales semicirculi a b c *partibus, quibus arcubus subtensæ lineæ omnes erunt* γ *æquales rectæ* c k : *& sic polygonum æquilaterum erit perfectum, quod minorem circulum* γ 29. III.
d *e non tangit. Demissâ perpendiculari* i k l *per*
k *in* a c, *quam secat in* m. *Quoniâ anguli* g e m,
k m e *sunt recti:* δ *erunt* g h, k l, *parallelæ.*
Quare cum g h *tangat circulum* g e i n e, *erit* k l δ 28. I.
tota extra illum circulum; eumq; nunquam
attinget, quia nunquam cum recta g h *conve-*
nire potest. Ideoq; multò minus k *longius ab eo-*
dem circulo remota tanget illum circulum. Pro-
inde nec reliquorum polygoni laterum ullum
huic c k *æqualium, æqualiter quippè à centro* f
distantium, circulum d e s *continget.* ε 14. III.

PROPOSITIO XVII.

Problema 2.

Duabus sphæris *a b c d, e f g h,* circa idem centrum *i* existentibus, in majori sphæra *a b c d,* solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minores *e f g h,* sphæræ superficiem.

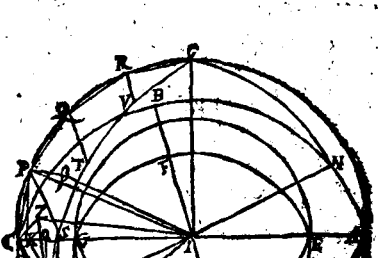
Ambæ sphæræ secentur plano aliquo per centrum, sintq; communes sectiones factæ in sphæris
planæ a b cd, e f gh; *quæ circuli sunt ex definitione sphæræ, idem habentes centrum* i *cum ipsis*
sphæris. In his circulis ducantur diametri a c, *&*
b d *in centro* i *ad angulos rectos se secantes;*



ut sint quadrantes a b, b c, c d, d a. *Postea in*
α 16. XII. *majori circulo* α *inscribatur polygonum non*
& cor 16. III. *tangens minorem, quod pro demonstrationis facilitate ita fiat. Ex* g *ad* e g *ducatur perpendicu-*
γ 1. IV. *laris* g γ *usq; ad circumferentiam circuli* a b c d
δ 19. I. *quæ circulum* e f g h β *tangit in* g: *cui* g γ *æqualis applicetur* a ε *in circulo* a b c d, *quia verò ſi arcui,* c γ *intelligatur ſubtendi recta, ut fiat triangulum* g c γ, *eſt* c γ *latus majori ceu rectum angulo oppoſitum majus latere* g γ, ε *erit &* ε *ipſo* a ε. *Abſcindatur ergò* c δ *arcus æqualis ipſi*
ε 28. III. a ε, *ſi jam ex quadrante* c d *auferatur dimidium* d l *& ex reliquo* c l *dimidium* l k, *& ſic deinceps, relinquetur* ζ *tandē arcus minor arcu* c δ, *ſeu*
ζ 1. X. η 29. III. *arcu* a ε. *Sit ergò arcus* c k *minor arcu* c δ, *ſeu arcu*

a l

a e *erit etiã* ck *ſubtenſa minor rectâ* ae, *id eſt*, g y, *& ck erit inſcribendi polygoni latus. Nã cum recta* c ò *arcũ ſubtendens minorem arcu* c γ, *nõ tangat circulum* e f g h, *multò minus* ck *arcũ* c ò *minorem ſubtendens eundem circulũ tanget. Rurſus ducta diametro* km, *erigatur ex centro* i *perpendicularis* i ϙ, *ad plana circulorum* a b c d, e f g h, *occurrens ſuperficiei ſphæræ majoris in* o, *& per rectas* o ι, a e, *&* o i, kμ *ducantur plana, quæ ad circulũ* abcd μ *erunt recta, efficientq; cõmunes ſectiones circulos, quorũ ſemicirculi ſunt* a o c, n o k. *Quia verò anguli* o ic, oik *ſunt* ζ μ 18. XI. *recti*; ξ *erunt* o c, oki *quadrantes, & quidem* ν 3. def. XI *quia* aoc, nok, *circuli æquales ſunt ipſi* a b c d, ξ 22. III. *propter æquales diametros: erũt ipſi* cd, oc, ok, *æquales quadrantes. Si ergò* d l *arcus dividatur in tot partes, in quot diviſus eſt* c l; *& quadrantes* oc, ok *in partes numero & magnitudine æquales arcubus quadrãtis* cd: ϰ *erunt illis omnibus ſubtenſæ rectæ* ck, kl, lm, md; cp, pq, qr, ro, rs, st, tu, uo *æquales. Cõjunctis autẽ rectis* ps, qr, ru, *demittantur ex* p *&* s *ad planũ circuli* a b cd *perpendiculares* px, sy, *quæ in communes ſectiones* a c, nk, ο *cadent, eruntq; inter ſe* ϖ *parallela. Quoniam ergò triangulorum* p c x, sky *anguli* x *&* y *ſunt* γ *recti, angulíq;* pcx, skx, ρ *æquales, quod peripheriæ* a o p, n o s; *quibus inſiſtunt, æquales ſint.* σ *Erũt ergò propter illos an-* o 58. XI. π 6. XI. ρ 27. III. σ 26. I.



gulos æquales & latera pc, sk *æqualia, etiam reliqua latera reliquis æqualia. Cum itaq; æquales sint* p x, sy *& parallelæ erunt* τ *& ipſas connectentes* ps, xy, *æquales & parallelæ.* υ *Sed quia etiam* ck, xy, *ſunt parallelæ propter latera* ic, ik; *proportionaliter ſectæ erunt* Φ *&* ps, ck *parallelæ, & has connectentes* cp, ks *in eodem cum ipſis plano erunt,* χ *& tocum quadrilaterum* ck s p *in uno plano erit. Si ex* q *&* t *demittantur perpendiculares in planum* abcd, *cõnectantur ipſis rectæ* qc, tk, *quæ ſimiliter parallelas, ipſaq; ps, qt, tanquam eidem* ck *parallelas, inter ſe parallelas, totum ſolidum quadrilaterum* p s t q *in uno plano eſſe oſtenderemus; ſicut & quadrilaterum* qtur *& triangulum* ψ r u o. *Quæ ipſa conſtru-*

τ 33. I.
υ 2. VI.
Φ 9. XI.
χ 7. XI.

ctio

ctio si & super reliqua latera kl, lm, md, dictis videlicet quadrantibus, ol, om, od exhibeatur, nec non & in reliquis quadrantibus & reliquo hemisphærio, ut tota sphæra major quadrilateris & triangulis repleatur similibus & æqualibus modo prædictis super latus ck inter quadrantes oc, ok constructis, inscriptũ erit in majori sphæra solidum polyedrum circumscriptũ dictis quadrilateris atq; triangulis. Dico hoc sphærã minorem efgh non tangere, ducatur iγ. Quoniam igitur ex constructione ck, ω est minor recta cγ: est enim ck major, quàm cz, quòd anguius czk est α obtusus, multò major erit quam cz & quadratũ rectæ gγ majo quadrato zc. Quoniã verò quadratũ iγ, β æquale est quadratis rectarum ig, gγ, & quadratum ic, quadratis iz zc: sunt autẽ æqualia quadrata iγ, ic, æqualia: ergò sunt etiã ig, γg, ipsis iz, zc: demptoq; illinc quadrato gγ, & hinc quadrato zc, relinquetur quadratum ig minus quadrato iz; rectæq; ig minor recta iz. Quocirca cum ig sit sphæra minoris efgh semidiameter, existet punctum z, extra eandem sphæram, ipsumq; planum cksp, sphæram efgh minimè tanget, quod & reliqua omnia ipsius puncta longiùs absint à sphæra illa quàm z. Ducatur rursus ex i ad planum pstq, perpendicularis iζ; erit ζ centrũ circuli circa pstq, descripti, connexiq; βp, ip, cũ angulus iβp, sit γ recta. Erit quadratũ ip æquale quadratis iζ; ζp.

ψ 2. XI.

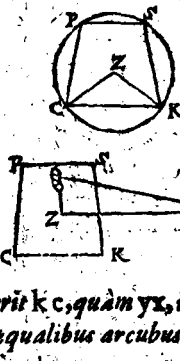
ω 19. I.

α per schol. sequens.

β 47. I.

Quia verò ☐ *quadratum* ic *æquale quadrato* ip *æquale est quadrato* iz, zc: *Est autem quadratum* zc *majus quadrato* ☐p, *quod* ☐ *linea* zc *major sit quam linea* β p. *Reliquum ergò quadratum rectæ* i☐ *majus est quàm* iz: *adeoq; multò magis punctum* ☐ *extra sphæram* efgh, *existet, quàm* z: *multoq; minus planum* pstq *quam* cksp, *tanget sphæram* efgh. *Eodemq; modo demonstratur, nullum reliquorum planorum attingere posse sphæram* efgh. *Quod erat faciendum.*

Scholium.

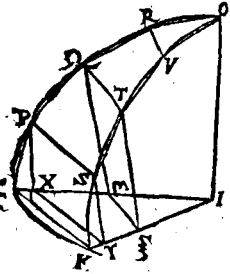


In quadrilatero cksp *ponebatur angulus* czk *obtusus, quod ita probatur*: *Circũscripto circulo circa illud quadrilaterum, accidit, ut* ik *ad* kc, *ita* iy *ad* yx: yk *autem* ☐ *major sit quam* iy; *major etiam erit* kc, *quàm* yx, *id est, quàm* sp. *Quare cum æqualibus arcubus subtensæ* sk, pc *ipsi* kc *sint æquales, γ erunt arcus illi singuli majores quadrante, ipseq; angulus* czk *δ obtusus. Deinde etiam sumptum est, omnia alia puncta quadrilateri* cksp *longius abesse, quàm* z, *quod patet. Punctũ enim quodcunq; & connectatur cũ i, que-*

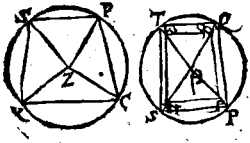
a 4. VI.
β 14. V.
γ 28. III.
δ 13. III.

quoniam i z θ *est* ε *rectus.* ζ *Erit ipsi oppositum* 43.def.XI
latus ε θ *majus latere* i z. *& sic* ζ *remotius* i z. ζ 19. I.

Denig; probabitur, quemodo recta z c *major sit recta* β p; *si tamen prius fuerit ostensum,* p s *esse majorem recta* q t. *Opus autem est nobis hîc figuræ superioris parte intra semidiametros* ic, io *contenta, & quadrantibus* o c, ok, *demissione g; perpendicularium* μ, τ ξ *quæ ad communes circulorũ sectiones* ic, ik, η *cadunt, ac parallelæ* θ *sunt,* η 28. XI.



quas æquales & parallelæ qt & μ ξ *connectunt.* ϑ 6. XI.
Quæ μ ξ *cum* u *sit parallela ipsi* ck, *quia* ic *& ik latera similiter per* μ ξ *sunt secta, etiam parallela* λ *erit* xy. u *Erit itag; ut* i y *ad* yx, *ita* i ξ, *ad* ξ μ. *& sit* vx *vel* sp *major quam* ξ μ *vel* q t. κ 2. VI. λ 30. I. μ cor. 4. VI.



Hoc ostenso ex centris z, β, *circa quadrilatera* cksp, pstq, *describantur circuli cum semidiametris.* Si z c *non credatur major quàm* β p, *erit vel æqua is, vel minor. Si æqualis, cũ lateribus* ck, zc *ponantur æqualia latera* β s, β p, *& basis* kc *major quàm* sp; *erit angulus* k z c *major angulo* s β p. *Eo* ν 25. I.

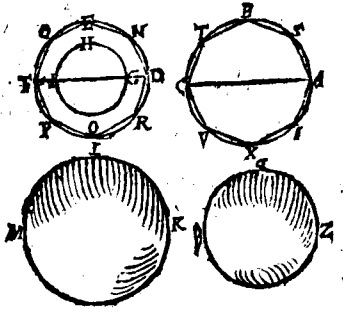
ξ 22. I. dem q, modo ozp, major est angulo β q. Sed propter bases s k, p c, t s, q p æquales, & æquales sunt
4 cor. 15. I. anguli kzs, czp, s ζ t, p ζ q. Igitur quatuor anguli ad z, qui quatuor rectis sunt o æquales, majores sunt angulis quatuor ad β, qui & ipsi quatuor rectis, o æquales sunt. Quod absurdum. Si verò minor sit z c quàm β p, abscindantur β π,
π 14. V. ζ ρ, ζ ω, ζ Φ æquales ipsis zc, zk, zs, zp, connectantur q, puncta π, ρ, ω, Φ lineis quadrilateri s p q t lateribus x parallelis. μ Erit itaq; ut ζ s ad s p, ita ζ ρ, ad ρ π; & π nimirum π minor quàm β ρ, sicut & ρ ω, ω Φ, Φ ρ minores sunt quàm s t, t q, q p. At cum s p sit minor, quàm c k; & s t, p q, æquales rectis k s, c p; t q & minor, quàm p s: erunt recta ρ π, π ω, ω Φ, Φ ρ minores rectis c k, k s, s p, p c; sed propter ζ π, β ω, ζ ρ, ζ Φ æquales positas ipsis zc, zk, zs, zp, anguli ad z, ν majores angulis ad β, quibus tamen o æquales sunt. Itaq; nec β p ipsâ z c minor erit; & quia nec æquales sunt: Proinde z c major erit quàm β p. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVIII.

Theorema 16.

Sphæræ sunt *a b c*, *d e f* in triplicata ratione suarum diametrorum, *a c*, *d f*.

Sin minus, erit sphæra a b c *ratione eadem, ad aliam vel majorem vel minorem sphæram. Primum*



mum ergò habeat rationem triplicatam a c ad d f, *ſphæra* a b c, *ad ſphæram* g h i *minorem ſphærâ* d e f. α *Inſcribatur autem in majori ſphæra* d c f *polyedrum* d n e o f p q r, *non tãgens minorem* g h i, *atq; huic ſimile* a b c, *ſphæra* a s b t e u x y; *quæ cum ſint* β *in triplicata ratione* a c *ad* d f; *ſicut ſphæra* a b c, g h i: *erit, ut* a b c, *ad* g h i, *ita polyedrum ad polyedrum. Itaq; cum ſphæra* a b c *ſit major polyedro ſibi inſcripto,* γ *erit &* g h i *ſphæra major altero polyedro,* d n e o f p q r, *pars toto. Quod abſurdũ, nõ ergò major ſphæra* a b c, *ad minorem* g h i, *ipſâ* d e f *habet rationẽ triplicatam diametrorum* a c *ad* d f. *Habeat porrò rationem hanc ad quandã majorem* k l m, *ipſa* d e f. *Rurſus eſt, ut polyedrum,* a s b t c u x y *ad polyedrum* d n e o f p q r, β *id eſt, ut* a c *ad* d f, *ita ſphæra* a b c *ad ſphæram* k l m:

α 17. XII.

coroll. β

17. XII.

γ 14. V.

&

& *convertendo, ut* klm *ad* a b c, *ita polyedrum posterius ad prius, id est,* β d f *ad* a c. *Ponatur autem ut* klm *ad* a b c, *sit* d e f *ad* z α β. *Quia ergò sphæra* klm *major ponitur ipsa* d e f. *Erit & a b c major ipsa* z α β. *Itaq; sphæra* d e f *ad sphæram* z α β, *ipsa* a b c *minorem, habet rationem triplicatam diametrorum* d f *ad* a c. *Quod absurdum; quia ostensum est, non posse sphæram ad sphæram aliâ sphærâ minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Cùm ergò sphæra* a b c, *neq; ad minorem neq; ad majorem sphæram, ipsâ* d e f, *habeat rationem triplicatam diametrorum* a c *ad* d f: *habet itaq; ad ipsam* d e f. *Et sic sphæra quavis ad quamvis triplicatam diametrorum rationem habet. Hinc fit*: sphæras esse inter se, ut in ipsis similia polyedra descripta *propter proportionem eandem triplicatam diametrorum.*

FINIS.

ELEMETORUM EUCLIDIS,

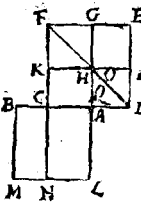
LIBER XIII.

Propositio I.

Theorema 1.

SI linea recta *a b* secundum extremam & mediam rationem *a* secetur in c: majus segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest ejus, quod à dimidia totius describitur quadrati.

a 10.II. vel 30.VI.



Super c d *fiat quadratum* c e, *in quo ducta diametro* d f, *ducatur* a g *ipsi* d e *parallela, secans diametrum in* h *puncto, per quod ducatur* i k *parallela ipsi* c d. *Deinde super* ab *perficiatur qua-*

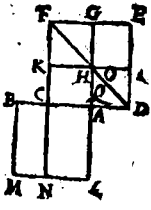
β cor. 4. II. *quadrātū* am *pertrahatur*, q fc *ad* n. β *Erunt* a i, k g *quadrata rectarū* a d, a c. γ *Quia ergò est*, γ 3. 2 def. VI. *ut* a b *ad* a c, *ita* a c *ad* c b: δ *erit rectangulum* δ 17. VI. c m *sub extremis æquale ipsi* k g *quadrato mediæ* a c. *Cum*q, ab, *id est*, a l *ponatur dupla ipsius* ε 1. VI a d, *id ist*, ah; *& sit*, *ut* a l *ad* a h, *ita rectangulum* a n *ad* a k: *erit* a n, *ipsius* a k *duplum*. *Quia verò* a k *&* i g *sunt* ζ *æqualia*, *erit* a n *æquale duobus* a k, i g. *Ideoq*, *additis æqualibus*, ζ 43. I. c m, k g *erit quadratum* a m, *æquale gnomoni* o p q. *Quare cum quadratum* a m *sit quadruplum* κ a i, *quia* a b *est dupla ipsius* a d: *Erit* κ Schol. 4. II. *etiam gnomon* o p q, *quadruplus ejusdem quadrati*: *additoq*, *quadrato* a i, *erit quadratum* d f *quintuplum quadrati*.

PROPOS. II.

Theorema 2.

Si recta linea *d c* sui ipsius segmenti *d a* quintuplum posit; duplæ *a b* prædicti *d a*, segmenti extrema & media ratione sectæ in *c*; majus segmentum *a c* reliqua pars est ejus, quæ à principio, rectæ.

Super d c *fiat quadratum* d f *& diametrum* d f *secet* ag *parallela ipsi* c f *in* h, *per quod ducatur* i k *parallela ipsi* d c, *producta*q, a c *fiat super* a b *du-*



a b *dupla ipſius* d a *quadratum* a m, *& continetur* c f in n. *Erunt* α *ergò* a i, k g *quadrata rectarum* d a, a c. *Quia autem quintuplum ponitur quadratũ* c e *quadrati* a i; *relinquitur gnomon* o p q *quadruplus ejuſdem quadrati* a i. *Sed & a m quadratum, eſt quadruplum ejuſdem quadrati* a i. *Quia* a b *eſt dupla ipſius* d a. *Sunt igitur gnomon* o p q *& quadratum* a m *æqualia. Rurſus, quoniam* a b, *id eſt*, a l, *ponitur ipſius* d a, *id eſt*, a h, *dupla; &* β *eſt, ut* l a *ad* a h; *ita rectangula* l c *ad* a k. *Erit quoque illud hujus duplum, & ſic æqualibus* a k, h e, *rectangulis ſimul, æquale* l c, *& reliquum rectangulum* c m *reliquo quadrato* k g. *Cumq; ſint tres rectæ* a b, a c, c b: *& rectangulum* c m *ſub* a b, c b *ſit æquale quadrato rectæ* a c: δ *erit, ut* a b *ad* a c, *ita* a c *ad* c b. *Secta itaq; eſt* a b *extrema & media ratione in* c, *eſtq; majus ſegmentum* a c.

α cor. 4. lib. 2.

β 1. VI.

γ 43. I.

δ 17. VI.

PROPOS: III.

Theorema 3.

Si recta linea *ab*, ſecundum mediam & extremam rationem ſecetur in *c*; minus ſegmentem *c b* aſſumens dimidiam *c d* majoris ſegmenti *a c*, quintuplũ poteſt ejus, quod à dimidia majoris ſegmẽti deſcribitur quadrati.

Quoni-



α 6. II. *Quoniam* a c *est bisecta in* d, *eiq; addita* c b; *erit* α *rectangulum sub* a b, b c, *una cum quadrato rectæ* c d, *æquale quadrato rectæ* b d. *Sed rectangulum sub* a b, b c *est quadruplum quadrati* c d, *quia intermedia quadratum* a c, *huic æquale, est quadruplum quadrati ejusdem* c d. *Idem ergò rectangulum sub* a b : b c *una cum quadrato* c d, *est quintuplum quadrati* c d. *Ideoq; & quadratum rectæ* b d, *segmenti minoris cum dimidio majoris quintuplum est ejusdem* c d *quadrati.*

PROPOSITIO IV.

Theorema 4.

Si recta linea *a b*, secundum mediam & extremam rationem secetur in *c*: quod à tota *a b*, quodque à minore segmento *c b* simul, utraquè quadrata *a b*, *c b* tripla sunt ejus quod à majore segmento *a c* describitur quadrati.



α 17. VI. β 7. II. *Quia enim rectangulum sub* a b, b c α *æquale est quadrato* a c; *& illud rectangulum bis, cum quadrato* a c, *triplum est quadrati* a c: *erunt & bis* β *æqualia quadrata* a b, b c *tripla ejusdem quadrati* a c.

PRO-

PROPOS. V.

Theorema 5.

Si recta linea *ab*, secundum mediam & extremam rationem secetur in *c*, ponaturq; ei *db* æqualis major ipsarum segmento: tota recta linea *bd* secundum mediam & extremam rationem secatur, & majus segmentum est, quæ à principio recta linea *ab*.



Quia enim est, ut a b *ad* a c, *vel* a d, *ita* a c *ad* c b: *etiam convertendo est, ut* d a *ad* a b, *ita* b c *ad* c a: *& componendo, ut* d b, *ad* a b, *ita* a b, *ad* c a, *vel ad* d c. *Sella itaq; est* b d *ita* a, *extrema & media ratione*.

PROPOS. VI.

Theorema 6.

Si recta linea *ab* Rationalis extremâ ac media ratione secetur in *c*, utrumq; segmentorum *ac*, *cb* irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.



Addatur majori segmento a c, *rectæ* a d, *æqualis dimidia totius* a b. *Quoniam ergo quadratum rectæ* c d *est* 1/4 *quintuplum* a l. XIII. *quadrati rectæ* a d; *habebūt quadrata* c d *ad* a d,

β 6. X. rationem, quam numerus ad numerum: βerantq; inter se commensurabilia. ipsæ quoq; rectæ c d, a d commensurabiles saltem potentia. Sed ad dimidia Rationalis a b, est Rationalis. Ergo & c d.

γ 24. IIX. Quæ vero, quadratum c d; ad non γ habentem rationem, quam numerus quadratus, ad quadratum, cum sit quinarii ad unitatem; erunt c d, a d rectæ longitudine incommensurabiles, ac proinde rationales potētia solum commensurabiles. Quare, stet Rationali c d detrahatur a d rationalis po-

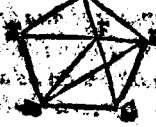
δ 74. X. tentia solum commensurabilis; erit reliqua a c Irrationalis, quæ vocatur Apotome. Rursus, ap-

ζ 98. X. plicato ad a b rectangulo a c, comprehendatur sub a c b: cum sit, ut a b ad a c; Sic a c ad c b: erit hoc rectangulum a c æquale quadrato rectæ a c. Quare quadratum Apotomæ a c, in rectam a c applicatum ad a b Rationalem ζ facit alterum latus b e, vel huic æquale segmentum minus c b, Apotomen primam.

PROPOS. VII.

Theorema 7.

Si pentagoni a b c d e æquilateri, tres anguli a b c sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: æquiangulum erit ipsum pentagonum.



Primò sint tres anguli a, b, c deinceps. Angulis dictis æqualium subtendatur rectæ b e, a c, b d; acq; ex f intersectione illarum ducto-

ducatur recta a f d. *Iam in triangulis* a b e & c b d, *æqualium laterum, ex hypothesi* a b, a e *ipsis* b c, c d: *& anguli contenti æquales, a ipsis erunt & bases* b e, b d; *& anguli* a e b, c d b, *æquales.* α 4. I.
Sed propter b e, b d *æquales, etiam anguli* b e d, b d e *sunt* β *æquales. Igitur toti* a e d, c d e *sunt* β 5. I.
æquales: Eodem modo in triangulis a b e, a b c, *fiunt æquales bases* b e, a c. α *Et anguli* a b e, a c b, *æquales angulis* b a c, b c a. *Itaq; cum anguli* b a c & a b e, *trianguli* b f a, *sint æquales: erunt* & b f, f a *æquales* γ: *quæ demta ex* b e, a c, *æ-* γ 6. I.
qualibus, relinquunt æquales f e, f c. *Cum ergò trianguli* f e d *latera* f e, e d *sint æqualia trianguli* f c d *lateribus* f c, c d, *& basis* f d *communis; erunt & anguli contenti* f e d, f c d *æ-* δ 8. I.
quales. Ideoq; a e d, b c d, *quadrati sunt æquales. Adeoq; cum ipsi* b c d, *ponantur æquales* b a c *& a* b c *ipsi* a e d *ostensus etiam sit æqualis* c d e: *erunt omnes quinq; æquales & pentagonum æquilaterum. Deinde tres anguli* a, c, d, *sunt non deinceps. Rursus ergò in triangulis* b a c, b c d, α *fiunt bases* b e, b d *& anguli* a e b, c d b, *æquales. Sunt autem &* b c d *&* b d e β *æquales. Igitur toti* a e d, c d e *sunt æquales: & sic tres* d, e, a, *sunt deinceps æquales. Ideoq; ut prius pentagonum æquilaterum.*

PROPOSITIO IIX.

Theorema 8.

Si pentagoni *abcde* æquilateri & æquianguli duos *c*, *d* angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ *db*, *ce*; hæ media & extrema ratione se mutuò secant, & majora ipsarum segmenta *fb fe*, æqualia sunt pentagoni lateri.



α 14. IV. β 28. III. *Descripto circulo circa pentagonum. βErunt quoq; arcus* ab, bc, cd, de, ea *æquales. In triangulis autem* cdb, & dce *propter æqualia latera* bc, cd, de; *& æquales contentos angulos* c, d, *æquales fiunt bases* bc, de, *& anguli* cdb, ecd: *quibus cum sit externus* bfe, γ 32. I. *æqualis* γ: *Erit etiam anguli* dce *duplus*: *Sicut & bce, propter duplum arcum* bae, *ejusdem* d ce δ *duplus est. Ideoq;* bfc, *& bcf, erunt æquales, rectæq;* bf, bc, ε *æquales, id est, lato pentagoni* bc *æquale est segmento majori* bf, *subtensæ* bd. δ 33. VI. ε 6. I. *Sunt autem & anguli* cbd, *anguli* cdb, *æqualibus peripheriis* bc, cd *insistentes* ζ *æquales. Proinde triangula* bcd, cfd, *propter angulos* cdb, cbd *æquales, ipsis* fcd, *& fdc, erunt* γ *æquiangula. Eritq;* η *ut* bd *ad* dc, *id est*, bf: ita

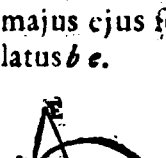
ζ 27. III. η 4. VI.

c, id est, b f, *ad* f d. *Ideoq;* b d *in* f *secta est extremâ & mediâ ratione. Eodem modo & e c in* f *eadem ratione secta esse ostenderetur.*

PROPOS. IX.

Theorema. 9.

Si hexagoni latus *b e*, & decagoni *a f*, eiusdem circulo *a b e* describitorum, componantur: tota recta linea *a e* extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus *b e*.



Ex a per centrum d *ducatur diameter* a c, *& conjungantur rectæ* d b, d e. *Quoniam igitur* ab *arcq est decima pars circuli: Semicirculus* a c *continebit eum quinquies, eritq;* b c *quadruplus ipsius* a b: *α angulus q;* b d c *quadruplus anguli* b d a. *Rursus in triangulo* d b e *æqualium laterum* d b, b e; *β erunt* b d e, *&* e *æquales, quib. æqualis γ externus* d b a, *duplus erit ipsius* c: *Sicut &* d b a *æqualis* β b a d. *Et sic ambo simul quadrupli anguli* c: *adeoq; his γ æqualis externus* b d c, *ejusdem* e *quadruplus. Qui cum & anguli* a d b *fuerit quadruplus: erunt* c *&* a d b *æquales. Et sic propter angulos* e *&* a *æquales ipsis* b d a, *&* a, *triangula* a e d, *&* a d b, *æquiangula.*

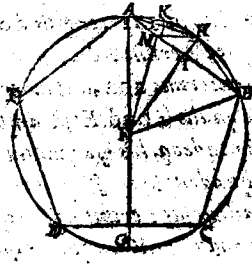
α 33. VI.
β 5. I.
γ 32. I.
δ 42. I.

Erit igitur a c *ad* a d, *id est*, o b; *ita* a d, *vel* c b, *ad* a b. *Secta nimirum est* a c *secundum extremam & mediam rationem, cujus segmentum majus est latus hexagoni. Hinc patet, cum per quintam hujus detractum minus segmentum ex majore, relinquat majus segmentum, datum secundum extremam & mediam rationem; quod subtracto latere decagoni ex hexagoni latere fiat decagoni latus segmentum majus lateris hexagoni, media & extrema ratione secti.*

PROPOSITIO X.

Theorema 10.

Si in circulo *a b c d e*, pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus *a b*, potest & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo descriptorum.

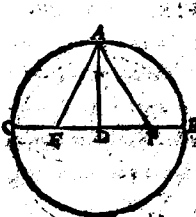


Ducatur diameter a g, *& semidiameter* f b, *& bisecta arcu* a b *in* h, *erit* a h *latus decagoni, &* b f *hexagoni. Rursumq; bisecto arcu* a h, *in* k. *Ducatur* f k *secans* a h

a h in k, & b a, in m: *jungatur* h m. *Propter* *arcus ergò* a b, b h, *æquales erunt anguli insi-* α 27. III.
stentes a f h, f h b. *Et sic in triangulis* b f i, a f i *propter æqualia latera* a f, f b, & f i *communne æ-* *quales* β *sunt bases* b i, b a, & *anguli* b i f, a i f, β 4. I.
id est, recti. sitque & l a, l h *sunt æquales, anguli* γ f l h, & f l h, γ *recti. Si jam ex semicirculis* a b c g, γ 1. V.
& a e d g *auferantur æquales arcus* a b c, a e d; *relinquuntur* c g, g d *æquales inter se: Et sic æ-* *quales ipsis* b h, a h. *Quorum* b h, *cum sit duplus* *arcus* h k; *ejusdem duplus erit* c g. *Eodemq; modo* *ut* a b, *ita &* b c *duplus est arcus* b h. *Quare ar-* *cus* c g, b c, *sunt æquè multiplices arcuum* h k, b h, *dupli:* γ *adeoq; totus* b g *duplus totius* b k: *angu-* *lusq;* b f g δ *duplus anguli* b f k. *Cumque* δ 33. VI.
idem b f g *ad centrum* ε *duplus sit anguli* b a f *ad* ε 20. III.
peripheriam: erunt ergò b f m, f a b *æquales. Et* *triangula* b a f, b f m, *propter æquales angulos* *b a f, b f m, &* a b f *communem,* ζ *æquiangula:* ζ 32. I.
η *Quocirca ut* a b *ad* b f: *ita* b f *ad* b m. *Ideoq;* *rectangulum sub* a b, b m, *æquale erit quadrato* η 4. VI.
rectæ b f. *Rursus in triangulis rectangulis* a l m, *&* h l m, *propter latera æqualia* a l, l h, *&* l m *commune,* β *æquales fiunt bases* m a, m h, *&* *anguli* l a m, l h m: *sed* l a m *est ipsi* h b a æ- *qualis. Igitur &* l h m. ζ *Ideoque triangula* *a h b, &* a m h *sunt æquiangula.*

η 4. VI. *Quamobrem* η, *ut* a b *ad* a h, *ita* a h *ad* h m. *Et sic sub* a b, a m, *contentum rectangulum æquale* θ 17. VI. *quadrato* a h. *Sed sub* a b, b m *est æquale quadrato* b f. *Itaq; rectangula sub* a b, b m, *&* a b, a m, *æqualia sunt quadratis* b f, a h, *mul. Sed illa duo rectangula sub* a b, b m, a b, a m *sunt* λ *æqualia quadrato* a b. *Ergo* [illegible] *est quadratum* a b, *quadratis* b f, a h, *latera* [illegible] *xagoni & decagoni. Hinc patet primo, quod linea* ex centro bisecans arcum, ejus quoq; subtensam bisecet. *Secundo quòd* diameter circuli ex uno angulorum pentagoni latus ipsi oppositum bifariam secet.

Scholium.



Ex Ptolemæo usitata est praxis, qua una eademq; opera in dato circulo & pentagonum & decagonum describantur. Ejus demonstratio hæc est. In circulo a b c, *super diametro* b c *erigatur perpendicularis ex centro* d a, & d c *bifariã secta in* e *ducatur* e a: *ipsiq; æqualis abscindatur* e f; & *ducatur* f a. α *Erit* f a *latus pentagoni, &* f d *decagoni. Quia enim* d c *bisecta est in* e, *ipsiq; adjecta* d f, α 4. II. *erit rectangulum sub* c f, d f, *una cum quadrato* d e, *æquale quadrato rectæ* e

ca, β quod æquale est quadratis rectarũ cd, ζ 47. I.
ca. Demptis itaq; quadrato communi de: relinquitur rectangulum sub cf, df, æquale quadrato
ex ad, id est, quadrato cd. γ Erit igitur, ut cf γ 17. VI.
ad cd, ita cd ad df, & sic cf diuisa est secundũ extremam & mediam rationem in d. Cum igitur
eius segmentum majus cd sit latus δ hexagoni: δ 15. IV.
erit df latus decagoni ejusdem circuli. Rursus quoniam quadratum fa æquale est quadrilaterum hexagoni ad, & pentagoni df, ζ erit ζ 10. XIII.
fa latus pentagoni.

11. PROPOS. XI.

Theorema 11.

Si in circulo *abcde* Rationalem habente diametrum *ag*, pentagonum *abcde*, æquilaterum describatur: Pentagoni latus *ab* Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.



Per centrum f *ducãtur* f *diametri* ag, bh: *quorum* ag *secet* cd *latus in* i: *connectantur* d_3 ac, ah; *Quarum* ab *secet diametrum* bh *in* k. *Abscindatur quoq; ex semidiametro* fh *quarta ipsius pars* fl; *item* a_3 *ex recta* ac *quarta ejus pars* cm. *Quoniam igitur dia-*

meter b h *Rationalis est; erunt & ipsius aliquota partes* b f, f l *rationales. Totaq;* b l *utrique cõmensurabilis, & Rationalis. Rursus, quia* f b *ex centro secat arcum* a c *bifariam in* b; *ergò* a b *& ipsius subtensam* a c *in* k, *& ad angulos rectos. Sicut & a g ipsum* c d *in* i. *Atq; tum triangula* a c i, a f k, *rectangula, propter communem angulum* a *fiunt æquiangula* γ. *Erit q; ut* c i *ad* c a; *ita* f k *ad* f a: *& permutando, ut* c i, *ad* f k; *ita* c a *ad* f a. *Ut autem* c a *ad* f a, *ita* c m, *quarta pars ipsius* c a *ad* f l, *quartam partem ipsius* f a. *Erit ergò ut* c i *ad* f k, *ita* c m *ad* f l: *& permutando ut* c i *ad* c m, *id est, harum dupla* c d *ad* c k, *ita* f k *ad* f l: *& componendo, ut* c d c k *simul, ad* c k. *ita* f k, f l *simul, id est,* k l *ad* f l. *Quod erit, ut quadratum rectarum* c d, c k *simul, ad quadratum* c k; *ita quadratũ* k l *ad quadratũ* f l. *Quia verò, si* a c *secetur media & extrema ratione, ducta videlicet recta* b d, *majus ipsius segmentum* γ *æquale est lateri pentagoni, ut* c d: θ *erit quadratum compositæ ex* c d *segmento majore &* c k, *dimidia totius, quintuplũ quadrati rectæ* c k *seu dimidiæ totius. Quare & quadratum* k l *quintuplũ est quadrati* f l. *Ideoq; quadrata* k l, f l *commensurabilia sunt, & rectæ* k l, f l *potentia saltem commensurabiles. Sed* f l *erat Rationalis. Ergò &* k l. *Deindè, quia* b : *tenet quatuor partes ipsi* f l

aqua-

a 16. X.
β cor. 10. XIII.
γ 32. I.
δ 4. VI.
ε 15. V.
ζ 22. VI.
η 8. XIII.
θ 1. XIII.
κ 6. X.
λ 10. VI.

æquales fit b l *talium quinq;; a habebit q;* b l *quadratum talium 25. qualium* f l, *unã propter rationem duplicatam quadratorũ ad latera, &* k l *quinq;. Cum igitur quadrata* b l, k l, *non habeant rationem numerorum quadratorum: Sũt enim ut 25. ad quinque, vel quinque ad unum:* μ. *erunt recta* b l, k l *longitudine incommensurabiles. Ideoq; tùm & Rationales; erunt Rationales potentia solùm commensurabiles. Si imq; ex rationali* b l, *detur Rationalis* k l, *potentia tãtùm cõmensurabilis; erit reliqua* b k *Irrationalis & Apotome, cujus congruens est* k l. *Iam recta* b l *posita plus, quàm* k l, *quadrato rectæ* n. *Quoniam quadratũ* b l, *æquale est quadratis* k l *& n, sed qualium* b l *fuit 5. talium* k l *est una: Erit* n *reliqua talium 4; habebunt igitur quadrata* b l *&* n *proportionem numeri ad numerum. Ideoq; erunt* x. *commensurabilia, ipsæq;* b l *&* n *rectæ commensurabiles sãltẽ potentia: Sed* b l *est ostensa Rationalis. Erit igitur &* n *rationalis. Quoniam illa* b l *ad* n *ratio, non est numerorum quadratorum. Est enim qua quinq; ad quatuor.* μ. *Erunt* b l *&* n *longitudine incõmensurabiles, ac proinde rationales potentia solùm cõmensurabiles. Quare cum tota* b l *rationalis longitudine sit commensurabilis rationali* b h: (*Qualium enim* b h *est octo, talium* b l *est quinque.*) *posita*

μ. 9. X.
ν 47. X.

possit d, plus quam congruens k l *quadrato rectæ* a u *sibi longitudine incommensurabilis, erit* bk *Apotome quarta ex definitione. Demq; quia* a b ξ *media proportionalis inter* b h, bk; *Quia* b h *est rectangulum* o *propter angulum recti* a, *ex quo demissa perpendiculari* a k, π *erit* ab, *quadratum æquale rectangulo sub* bh, bk. *Cum igitur superficies sub Rationali* bh, *& Apotoma quarta* bk, *possit rectæ* a b, ρ *erit* ab *Minor.*

ξ cor. 8. VI.
o 31. IV.
π 27. IV.
ρ 98. X.

PROPOSITIO XII.

Theorema 12.

Si in circulo *a b c*, triangulum æquilaterum *a b c* describatur; trianguli latus *a b* potentia triplum est ejus lineæ *d b*, quæ ex centro circuli *d* ducitur.



Ducta diametro a e, *secetur* a c *& arcus* b c *in* f, *& subtendatur* b c *in* f *bifariam, & ad angulos rectos: erit* b e *dimidium lateris tertiæ* b c, *pars sexta circuli, ipsius d, subtensa* a b e *latus hexagoni, æquale* β *semidiametro circuli. Quoniam ergo quadratum* a g γ *æquale est quadratis* a b, b e, *quod angulus* a b e *in semicirculo sit rectus* δ. *Est autem*

a coroll. 10. XIII.
β cor. 15. IV.
γ 47. I.
δ 21. III.

autem rectæ a e, quadruplum rectæ b e dimidiæ. Quadratorum, partium quadratæ a b, b e sunt quatuor, aliarum b e est una, & a b tres: adeoque quadratum a b triplum quadrati b e, vel semidiametri b d. Hinc patet 1. Diametrum circuli potentiâ esse sesquitertiam ad latus trigoni æquilateri, quia ipsius partes sunt quatuor, quia hujus sunt tres. 2. Semidiametrum d c, bifariam secari in f, à latere trianguli b c. Cum enim quadratum a b, sit triplum ipsius b e, sta b ponatur partium 12. erit b e talium 4. Est autem quadratum b e æquale quadratis f b, f e, & talium partium tres habet b f, quia quartæ pars quadrati a b; Una igitur illarum est f e, ipsius quadruplum c b, id est, d e, ac proinde f e dimidia est ipsius d e. 1 Schol. 4. 11.

PROPOSITIO XIII.

Problema 1.

Pyramidem constituere & datâ sphæra complecti, & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentiâ sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.



In diametro sphæræ a d *fit dupla ipsius* d b: *ducatur* f *perpendicularis* c d, *& lineæ* c a,

c a, c b. *Iamq; intervallo* h e, *id est*, d c *ducatur circulus* e f g, *in quo inscribatur triangulum aquilaterum* e f g. *Iungantur quoq;* h f, h g *aequales ipsi* d c, *super* h *erigatur perpendicularis* h i, *aequalis rectae* a d: *& ex* i *demittantur* i e, i f, i g. *Erit quatuor hisce triangulis comprehensum solidum pyramis sive Tetraedrum.* α *Quoniam enim quadratum* a d *est duplum quadrati* β *& quadratum* c a *triplum & ejusdem* c d: γ *erit etiam ipsarum* i e, i f, i g *aequalium* γ *ipsi* c a *quadrata erunt* δ *tripla quadratorum* h e, h f, h g, *semidiametrorum. Erunt triangula quatuor* e f g, e f i, f g i, g e i, *aequilatera & aequiangula, ex quibus constituta pyramis, datae sphaerae, cujus diameter* a b *est, inscripta. Extensa enim* i h, *quae aequalis ipsi* a d *in* k, *dum* i k *fiat aequalis ipsi* a b. *Quia inter* i h, h k *mediae proportionales sunt* h e, h f, h g (*Sunt enim aequales ipsis* a d, d b, d c) *ejusdem sphaerae sub* i k, *id est,* a b *diametro semicirculi transibunt puncta* i, k, e, f, g; *erit* ε *sphaera data diametri* a b, *inscripta pyramide* e f g i, *cujus latus quodvis ipsius sphaera diameter sesquialtera. Cum enim* a c, a d; ζ *erit, ut* a b *ad* a d; *ita quadratum* a b *ad quadratum. Sed* a b *est sesquialtera ipsius* a c. *Igitur &* a b, *id est, ipsius* i k *diametri sphaera quadratum erit sesquialterum quadrati* a c, *id est, cujusq; lateris pyramidis. Quod erat faciendum.*

α 17. VI.
β 47. I.
γ 4. I.
δ 12. XIII.
ε 18. VI.
ζ 20. VI.

Corollarium.

1. Eri

1. Erit etiam diameter ſphæræ potentiâ quadrupla ſeſquilatera ſemidiametri circuli circa baſin pyramidis deſcripti.

Quia enim a b *eſt oſtenſa ſeſquilatera ipſius* a c, *id eſt*, e f: *Erit quadratum* e f: *talium partium 6. qualium* a b *novem. Talium autem* he *centùm eſt 2. quia quadratum* ef *ipſius* he *eſt triplum. Quadratum igitur* ab *9. eſt quadrati* ab 2. *quadruplum ſeſquilaterum.*

2. Perpendicularis ex centro *l* ſphæræ ad planum baſis *efg* pyramidis *efg* demiſſa ſextæ pars erit diametri *a b* ſphæræ & tertia ſemidiametri *al*.

Quia enim a d *4. eſt dupla ipſius* b d z: *erit i. ipſius* a b, *6.* ld, *1. pars ſexta; & ipſius* al *pars tertia. Cum autem altitudo* h i *ſit ipſa* a d, *continebit hæc duas tertias diametri; & proinde quadratum diametri 9. ad altitudinem 4. exhibet illorum proportionem duplicatam ad 3. ad 2. Si ex materia fiant 4 triangula æquilatera quæ hunc in modum diſponantur, fiet inde pyramis ut docet Durerus.*

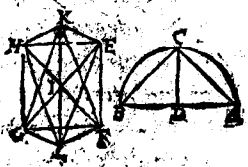


PRO-

PROPOSITIO XIV.

Problema I.

Octaedrum constituere, & sphæra comprehendi, qua & pyramidem, & demonstrare quòd sphæræ diameter potentiâ sit dupla lateris ipsius octaedri.



Circa diametrum ab, data sphæra, describatur semicirculus, erigatur ex centro perpendicularis dc, & connectantur ca, cb æ-
α 4. I. *quales. Super ef æquali ipsi ac fiat quadratum efgh, diametris eg, fh, sectionibus se in i æqualiter. Jam ad planum hoc quadratum utrinq; ex i erigantur perpendiculares ik, il æquales ipsi ie. Jungantur q; puncta k & l cum efgh punctis: erit ex octo triangulis æqualibus & æquilateris*
β 8. & 4. I. *ke f, kfg, kgh, keh, ile, lef, lfg, lgh constitutum solidum octaedrum, quod utiq; diametro ab sphæræ inscriptum est. Quia super kl, idest, ab diametro mobilis semicirculus omnino transit per e, f, g, h, tanquam æqualiter à centro sphæræ*
γ 47. I. *puncta remotus, est q; sphæræ diameter ab dupla ipsius ac, idest, ef vel cujusq; lateris octaedri.*

Corol-

Corrollaria.

1. In octaedro tres diametri *kl, ef, gb* se mutuò ad angulos rectos secant in *i* centro sphæræ. *Quia omnes ad 1. anguli sunt ostensi recti.*

2. Octaedrum dividitur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis est quadratum *efgb* Et vertices *k, l*, altitudines q; *ik, il*, semidiametri. *Habent enim plana similia & æqualia.*

3. Si Tetraedrum & Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, Tetraedri latus potentia sesquitertium est lateris octaedri. *Quia enim potentia diametri* ab *ó est sesquialtera ô lateris Tetraedri 4. & dupla 4 Octaedri 3: Erit potentia laterum illorum 4. ad 3. id est sesquitertia.* ó 13. XIII. 4 14. XIII.

4. Bases octaedri oppositæ sunt parallelæ ζ. Scholium. ζ 16. XI.

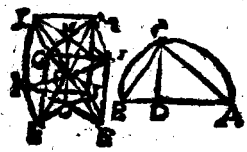


Durerus ex materia vult fieri, si ita inter se complicentur octo triangula.

PROPOS. XV.

Problema 5.

Cubum constituere, & sphærâ complecti, qua & priores figuras, & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.



Circa diametrum data sphæra a b describo semicirculo auferatur ex a b pars tertia d b, & ad d erigatur perpendicularis d c, jungatur c a, c b. Jam super e f æquali ipsi b c, fiat quadratum e f g h, ad cujus angulos 4. erigantur 4. perpendiculares rectæ e i, f k, g l, h m æquales ipsi e h, & extremæ connectantur lineis i k, k l, l m, m i, quæ & inter se æ sunt æquales & parallelogramma æquales & parallelas connectũt: & planum e f i k: eodemq; modo & f k l g, g l m h, & m i e h: proinde γ i k l m æquatum e f g h, simili & æquale erit quadratum. Jungantur præterea latera opposita δ parallela: sic parallelepipedũ fiet etiam cubus, & quidẽ comprehensus sphæra.

æ 43. I.
β 6. XI.
γ 24. XI.
δ 15. XI.

Oppos-

Oppositorum enim planorum e f k i, g h l m diametri sint e k, f i, g m, h l per quas ducantur plana e k, l h, f i, m g; quorum utrumq; cum s secet ε 15. XI.
Cubum, transibit & utrumq; per centrũ p, in quo & schol.
etiam omnes cubi diametri se bifariam secãt, & 39. XI.
per idem punctũ p cõmunis planorum sectio no
incedet. Quia verò plana e k, l h, f i, m g sunt
rectangula, quod & h e aquè ad e k, quam e f,
ad e i perpendicularis η est; & aqualia propter la- η 4. XI.
tera aqualia. Adeoq; diametri sibi e l, f m, h k,
g i θ aquales; ut & semidiametri p e, p l, p h, p k, θ 34. I.
p f, p m, p g, p i. Quare ex centro p descriptus
semicirculus, circa e l circũductus, describet sphæ-
ram omnes Cubi angulos attingentem. Hæc ergò
e l est ipsi a b aqualis. Quia enim quadratum
e k ж aquale est quadratis e f, f k, id est, duplum ж 47. I.
quadrati e f, vel k l: Erunt quadrata e k, k l
tripla quadrati k l, & sic quadratis e k, k l, ж a-
quale quadratum e l etiam est triplum quadrati
k l, vel b c, cujus quadrati b c etiam triplum
est quadratum a b. Cum enim a b, b c, b d,
sint proportionales; erit, ut a b prima ad b d ter-
tiam: ita quadraeum a b, ad quadratum secun-
dæ b c, id est, a b est triplum ipsius b c; sicut &
e l. Erunt ergò a b, e l aqualia. Cumq; qua-
dratum e l fuerit triplum quadrati k l, patet dia-
metrum sphæræ potentia triplam esse lateris Cubi.

Corollaria.

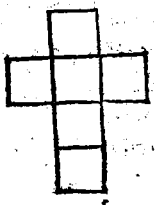
1. Omnes diametri cubi inter se sunt æquales, seq́; mutuò bifariam secant in centro sphæræ, eodemq; modo lineæ centra oppositorum quadratorum continentes secantur bifariam in centro.

2. Potentia diametri sphæræ seu cubi, æqualis est potentiis laterum Tetraedri, & Cubi simul sumptis.

α 13. XIII. *Quadratum enim partium quadratum diametri est 3, latus vero sex est quadratum lateris Tetraedri* β 15. XIII. *latus vero 3, quadratum lateris cubi.*

Scholium.

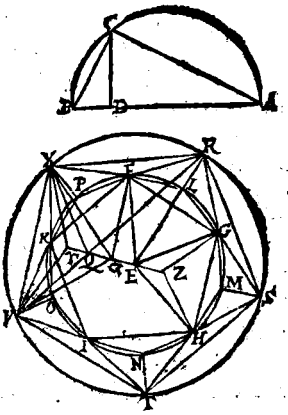
Ex materia aliqua in 6 quadrata æqualia in hunc modum divisa optimè fiet cubus seu figura 8. angulorum tribus a similis.



PROPOSITIO XVI.

Problema 4.

Icosaedrum constituere, & sphæra complecti, quâ & ante dictas figuras; & demonstrare quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.



Circa diametrum datæ sphæræ a b *descripto semicirculo, auferatur ex* a b *pars quinta* d b, *ut* a b *ipsius* b d *sit quintupla: Ipsius* a d *verò sesquiquarta; &* a d *ipsius* d b *quadrupla. Ex* d *erectâ perpendiculari* d c *connectantur* c a, c b. *Interuallo* c f *id est,* b c *describatur circulq cui* a *inscribatur* a n. IV.

pentagonum aquilaterum f g h i k, *diuisis* arcubus f g, g h, h i, i k, k f, *bifariam in punctis* l, m, n, o, p *connectantur* f l, l g, g m, m h, *ea latera decagoni. Deinde ex illis punctis ad planum circuli* g h i k *erigantur perpendiculares* e q, l r, m s, n t, o u, p x, *aequales semidiametro* e f *vel*

β 6. XI. b c; *& sic* β *parallela ipsi* e q, *quam cum singulis*

γ 33. I. *opposita bina aequales & parallelae* γ *connectunt*

δ 6. XI. *semidiametro aequales; ut sic* δ *plana duo opposita parallela* f g h i k *&* r s t u x *contineant quinque semidiametros aequalium parallelorum circulorum. Connectantur jam puncta* r, s, t, u, x, *per lineas* r s, s t, t u, u x, x r, *quae* β *parallelae sunt lineis oppositis ut* r x *ipsi* l p, *&* γ *aequales, aequales*

ε 28. III. *que* ε *in circulis aequalibus subtendunt arcus: est* r x *pars quinta circuli* r s t u x, *sicut* l p *pars quinta est circuli* f g h i k. *Eodemq; modo reliquae omnes etiã quintae partes eorum circulorũ auferunt, & sic pentagono* f g h i k *aequilaterum aequale est* r s t u x. *Ductis* r f, r g, s g, s h, t h, t i, u i, u k, x k,

ζ 47. I. x f; *quae omnes possunt* ζ *& semidiametros seu perpendiculares* l r, m s; *& latera decagoni ut* f l,

η 10. XIII l g. η *Ideoq; sunt aequales lateri pentagoni ejus dẽ circuli, id est, ipsi* f g r x; *& sic decem triangula* r f x, r f g, r g s, s g h, s h t, t h i, t i u, u i k, u k x, x k f, *aequilatera & aequalia sunt. Jam* e q *perpendicularis utrinq; extendatur ut* q y *&* e z, *sint aequales lateri decagoni quae puncta* z y *connectan-*

tur

tur cum singulis angulorum pentagoni f,g,h,i,k, & r,s,t,u,x; qua rursum omnes ℄ possunt semidiametros & latera decagoni illorum circulorũ: Ideoq; ης aequales sunt lateri pẽtagoni, ut sic fiãt utrinq; 5 triãgula aquilatera & aequalia prioribus 10. Hac ergò 20 triangula, si suis lateribus cõnectãtur, efficient Icosaedrum. Dico hoc ipsum cõprehendi sphæra diametri a b. Divisa enim e q in æ, ducantur æ f, æ x, æ u. Quoniam latera æ q, p u. trianguli æ qu, aequalia sunt lateribus æ q, q x trianguli æ q x, cum q u, u x sint semidiametri circuli r s t u x, & anguli æ qu, æ q x ϑ recti. ℄ Erunt bases æ u, æ x æquales. Itaq; ducantur ær, æs, æt. aequales ostenderentur, ipsis æ u, æ x. Rursum quia trianguli æ q x latera æ q, q x aequalia sunt lateribus æ e, e f, trianguli æ e f, quia e f & q x aequalium circulorũ sunt semidiametri, & anguli æ q x, & æ e f, ϑ recti: Erunt bases æ x, æ f, aequales. Quibus eodem modo æquales ostenderentur æ h, æ g, æ i, æ k. Sunt ergò omnes decem lineæ, ex æ ad decem angulos f, g, h, i, k, r, s, t, u, x ductæ aequales. Quia verò q e est semidiameter seu latus hexagoni & e z decagoni: λ erit q z divisa in e, secundum extremam & mediam rationem, & minus segmentum e z, assumens e æ dimidium majoris, id est, æ z, quintuplum μ potest quadrati e æ.

ϑ 3. def. XI
κ 4. I.
λ 9. XIII.
μ 3. XIII.

Poteſt autem & α f quintuplū ejusdem quadrati
e α, quia e f dupla ipſius e α quadruplū, eſt quadratum ipſius e α, & utrius q; ſimul quintuplum ejusdē e α. Erunt ergò quadrata α f, α z æqualia ipſaq; recta æquales: & cum zy ſecta ſit bifariam in α, erūt omnes rectæ ex α, ad omnes Icoſaedri angulos ductæ æquales, & ſphæræ illiq; diameter erit
ρ 15. V. æqualis diametro ſphæræ ab. ρ Cum n. ſit, ut α z ad
ξ 22. V I. e α, ita yz dupla ipſius α z ad q e dupla ipſius α e; ξ ejusdē rationis erunt, earūq; quadrata, cumq; quadratum rectæ α ſit quintuplum ipſius e α, erit etiam quadratum yz quintuplū quadrati rectæ q e, id eſt, b c, cui poſita eſt æqualis. Sed & ejusdem quadrati b c quintuplum eſt quadratum a b, σ cum
σ cor. 8. IV. ſit, ut a b ad b c, ita b c ad b d: erit etiam, ut a b, ad b d, ita quadratum a b ad quadratum b c; adeoq; quadratum a b, quadrati b c quintuplum eſt, ſicut a b ipſius b d eſt quintupla. Ideoq; quadratis rectarum yz, a b, æqualibus erūt ipſa quoque æquales; & ſphæra circa ipſas æquales. Quia deniq; diameter ſphæræ a b ponitur Rationalis, & poteſt quintuplum quadrati b c vel e f: erit & e f
π per 6. VI. ſemidiameter circuli f g h i k Rationalis; eū ſint π, ut numerus ad numerum 5 ad 1 & ſic cōmenſurabiles ſaltem potentia: Et tota diameter ejusdem
ρ 11, XIII. circuli Rationalis erit: propterea q; latus pēntagoni, id eſt, Icoſaedri Irrationalis ρ erit linea vocata Minor.

Coro-

Corollaria.

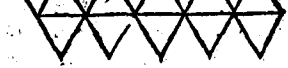
Diameter sphæræ est potentia quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis. *Quadratum enim* a b *quintuplum est extensum quadrati* b c, *id est, semidiametri* e f.

2. Diameter sphæræ componitur ex latere *e q*, hexagoni, & duobus lateribus *q y*, *e z* decagoni ejusdem circuli *f g h i k*.

3. Latera Icosaedri opposita *k x*, *h i* sunt parallela. *Quia eidem* l p *sunt parallela.*

Scholium.

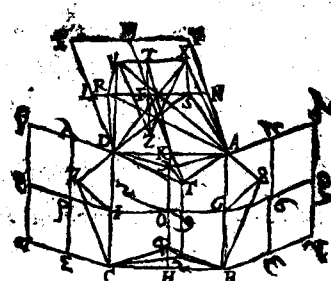
Si triangula 20. *disponantur hoc modo, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem.*



PROPOSITIO XVII.

Problema 5.

Dodecaedrum constituere & sphæra complecti, qua & prædictas figuras: & demonstrare, quod dodecaedri latus est Irrationalis linea, quæ vocatur Aporome.

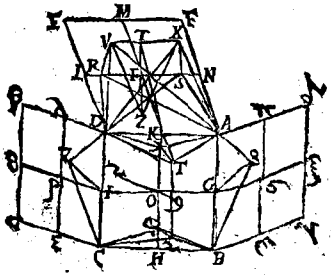


Sit una basis cubi, data sphæra comprehensi, quadratum abcd *cui aliud æquale ad angulos rectos insistat* adef *quorum communis sectio sit* ad. *Divisis cunctis lateribus bifariã in* g, h, i, k, l, m, n, *punctis, iisq; connexis & secantibus se rectis in punctis* op, *secentur* ok, pl, pn, *extremã & media ratione in punctis* qrs *ex quib. ad plures quadratorũ educantur extra cubum perpendiculares* qt, ru, sx, *æquales segmentis majoribus* oq, pr, ps, *& conjungantur rectis* at, dx, et, du, ux. *Erit* atdux, *unũ ex duodecim pentagonis æquilateris & æquiangulis dodecaedri constituendi. Esse hoc in uno plano constat. Quia cum* rusx, *ad quadra-*

13. IV.

dratum adef, *sint recta & parallela & aquales* β 6. XI.
inquam aequalium segmẽta eadem: γ *Erunt et-* γ 33. I.
iam rsux *illas connectentes aquales & parallela.*
Et quia a d, r s; *etiam aquales rectas parallelas*
a n, d l *connectentes, sunt parallela;* δ *erunt &* δ 9. XI.
ad, ux *parallela, & has connectentes* ax, du, *in-*
s eodem cum ipsis plano. Et sic Trapezium a d u x ε 7. XI.
in uno est plano Sed quia & triangulum a t d *in*
uno est plano; erit etiam in eodem cum trapezio.
Ducta enim py, *perpendiculari parallela ipsi* r u;
connectantur kt, ky. *Quoniam est, ut* o k *ad* q q;
Ita o q *ad* q k: *&* k p *aequalis est ipsi* o k. *Quia*
laterum cubi sunt dimidia. & p y *ipsi* o q, *id est,*
r u: *erit etiam ut* k p *ad* p y, *ita* o q, *id est,* q t,
ad q k. *Quare cum triãgula* p k y, q t k *duo latera*
duobꝰ circum angulos conjunctis, proportionalia
habeant; latera q, p k, q k. *homologa* β *parallela,*
quia utrunq; est rectum ad quadratum a b c d; *&*
p y, q k, *parallela, quia utrumq; est rectum ad*
quadratum a d e f: ζ *erunt reliqua latera* k y, k t, ζ 32. VI.
in eandem rectam collocata. Et η *recta* t y, *in uno* η 1. XI.
erit plano, & sic plana a d t, & a d u x, *unum*
sunt planum per rectas a d, t y *ductum. Est ergò*
pentagonum a t d u x *in eodem plano. Sed &* a-
quilaterum esse ita patet. Triangula enim re-
ctangula a n s, a k q, *duorum aequalium la-*
terum a n, n s *ipsis* a k, k q; *etiam bases* a s, a q θ 4. I.
habent aequales θ.

Rursus



Rursus triangula rectangula asx, aqt, *duorum aequalium laterum* as, sx, *ipsis* aq, qt, (*quia* sx, qt *aequalium eadem sunt segmenta*) *etiam bases* ax, at *aequales* θ *habent. Idemq; in triangulis* dqt, dru, *ostenderetur de lateribus* td, du, *quod aequalia sint ipsi* at. *Erunt ergo 4. pentagoni latera aequalia, quibus aequale etiam ostendetur* u x, *x quadrata rectarum* p n, n s, *simul sunt tripla quadrati* ps *vel* sx. *Sed quadrato rectae* pn *aequale est quadratum rectae* an. *Igitur & quadrata* a n, n s *simul sunt tripla quadrati* s x; *& illis aequale quadratum* a s *ejusdem quadrati* s x *triplum: & quadrata* as, s x *simul quadrupla quadrati* s x: *& sic eisdem aequale* λ *quadratum* a x *quadruplū quadrati* sx, *id est quadrati* ps μ *vel* sy. *Sed quia dupla ipsius* x y, *id est* x u; *Quadratum etiã est* γ *quadruplum. Erunt quadrata* a x, x u *aequalia, ipsaq; recta aequales; cui* a x *cùm &*

θ 4. I.

χ 4. XIII.

λ 47. I.

μ 34. I.

reli-

reliquatria at,td,du *sint aequalia; Erit pentagonũ* atdux *aequilaterum. Est verò & aequiangulum.* Ductis *enim* ar,au,*cum* pn *sit in s ſecta media & extremâ ratione, eiq; additâ* pr *aequalis majori ſegmẽto* ps, *erit quo-q;* nr *ſecta in p extrema & media ratione, majus-q; ſegmentum* np. *Erunt igitur quadrata rectarum* nr,rp, *ſimul tripla quadrati* np, *id eſt,* an. *Eſt autem quadratum* ru *aequale quadrato* rp. *Ideo-q;* nr,ru *etiam ſimul ſũt tripla quadrati* an; *& proinde quadratũ* nr, ru, an, *quadrupla ſunt ejusdẽ quadrati* an. *Sunt autem quadrata* nr, an *aequalia quadrato* ar. *Igitur &* ar; ru *quadrupla ſunt quadrati* an, *& illi γ aequale quadratum* au, *quadruplũ rectæ* au. *Cum-q; ejusdẽ* an *duplæ* ad *quadratũ ſit etiã quadruplũ quadrati* an. *Igitur quadratũ* ad, au *ſunt aequalia ipſaq; rectæ aequales. Eodem-q; modo* dx, ad *ſunt aequales; & ſic tres* ad, au, dx *ſunt aequales. Jam in triangulis* tad, *&* dux, *aequalium laterum ejusdem pentagoni, & baſium* ad, dx; *erunt & anguli* atd, dux *æquales. Eidem-q;* dux *aequalis* axu. *Proinde, cum tres pentagoni aequilateri anguli ſint æquales, erunt omnes inter ſe æquales. Et ſic pentagonum aequilaterum & aequiangulũ. Quod ſi ſumantur alia duo cubi quadrati* cαβd, bγδa, *recta ad quadratum* abcd, *quorum ſingula latera ſecentur bifariam in* e,θ,λ,i,μ,ξ,π,g *punctis; quæ jungantur rectis ſecan-*

ν por ſch. 4. II.

ξ 5. XIII

o 8. I.

π 7. XIII.

secantibus se mutuò in certis quadratorum ϱ, σ. *Secentur jam* o h, o k, ϱ i, σ g, *extrema & media ratione in punctis* Φ, q, 3, 4, *ex quibus plana quadratorum ad partes cubi exteriores perpendiculares* Φ 2, q t, 37, 48 *aquales segmentis majoribus* Φ o, q o, 3 ϱ, 4 σ, *junganturque* t z, 2 c, c 7, 7 d, d t, t a, a 8, 8 b, b 2: *eodemque modo ostendentur pentagona* t 2 c 7 d *&* t 2 b 8 a, *esse aquilatera & aquiangula, & aqualia priori ob latera communia* t d, t a. *Et sic habent tria pentagona tangentia cubi tria latera* a d, d c, a b, *sibiq; mutuò cohærentia lateribus communibus* t d, t a.

Qua methodo alia novem sunt fabricanda pentagona similia tangentia reliqua novem cubi latera, & habebitur sphærâ comprehensum Dodecaedrum.

Jam intelligantur plana cubi opposita secari planis a d e f, *&* a b c d; *per rectas planorum latera bifariam secantes* k m *&* l n, g i *&* h k *ductis.*

Hæc plana secantia cum sint recta ad plana cubi, utpote parallela basibus cubi, rectis ad
ϱ 19. XI. *plana* a d e f, a b c d; ϱ *erunt & sectiones eorum communes ad cubi plana recta.*

Ideoq;

Ideoq; cum y p *sit recta ad planum* a d e f, *ipsa versus* z *producta erit communis sectio planorum per rectas* k m, l n *ductorum.*

Itm, si ex o *ad planum* a b c d *erigatur perpendicularis* 9 o z: *Erit ipsa communis sectio planorum per rectas* g i, h k, *ductorum. Sed quia dictæ omnes sectiones & diametri cubi sese mutuò bifariam secant* σ: *Secent se in* z; *& bifariam sese diametri cubi secant* τ *in centro ßbæra cubum complectentis.* σ 39. XI. τ cor. 1. 15. XIII.

Erit igitur z *centrum ßbæra circa cubum descriptæ, & omnes lineæ* z, *ad omnes angulos cubi erunt æquales.*

Sed & ad omnes angulos Dodecaedri ex z *ductæ rectæ erunt iisdem omnes æquales.*

Ductæ enim z x: *quoniam parallelæ* β *sunt* k p, o z, *cùm utraque sit recta ad planum* a b c d:

Item ϱ, *&* o k, z p *tanquam rectæ ad planum* a d e f: *erit* p k o z (*quia duo* z *conjunctæ debent intelligi*) *parallelogrammum, &* p z μ *æqualis* k o, *vel* n p, *dimidio lateri cubi.*

Est autem p y, *ipsi* p r: *æqualis tota ergò* z y, *toti* n r *æqualis erit.*

Quare

Quare cum quadrata nr, pr, *simul sint tripla quadrati* np, *quod* nr *in* p *media & extrema ratione est secta; erunt etiam quadrata* zy, py; *id est*, zy, xy, *simul tripla quadrati* ps, *quia* xy, *æqualis est ipsi* ps *vel* py. *Sed quadratis* zy, xy, λ *æquale est quadratum* zx: *Erit igitur & hoc triplum quadrati* zp, *id est, quadrati dimidii lateris cubi; cujus etiam triplum est quadratum semidiametri sphæræ cubum cõprehendentis* (*ut* υ *enim diameter ad latus cubi*: *Ita* υ. 15. V. *semidiameter ad dimidium cubi. Ideoq; Ut quadratum diametri, ad quadratum lateris cubi, ita* φ. 12. VI. *quadratũ semidiametri ad quadratũ dimidii lateris. Cum ergò quadratum diametri sit triplum quadrati lateris; erit & semidiametri quadratũ tripluũ quadrati dimidii lateris.*) *Erit itaq; quadratum* zx, *quadratò semidiametri sphæræ seu cubi æquale: Ipsaq;* zx, *æqualis semidiametro. Eidem semidiametro & zu, quia* zu *&* zx *rectangulorum æquilaterorum* zyx, *&* zyu *bases sunt, est θ æqualis: cumq; & za, zd, ad angulos cubi; semidiametro sphæræ sint æquales, ut antea dictũ erunt jam ex centro* z, *ad 4. angulos pentagoni,* a, d, u, x, *æquales semidiametro sphæræ. Sed quod eidem semidiametro æqualis etiam sit* zt, *ad angulum* t, *quintum, ità patet; si circà pentagonum æquilaterum illud describatur circulus* atdux; *in cujus planũ ex* z *centro sphæræ demittatur perpendi-*

pendiculariꝰ ζω, & ω connectatur cum a,t,d,u,x *punctis. Quoniam quadratum* ζa *æquale eſt quadratis* z ω, a; *& quadratum* z x *æquale quadratis* ω z, ω x; *erunt ſubtracto communi quadrato* z ω, *ex quadratis æqualium rectarum* z a, z x, *æqualia quadrata* ωa, ω x; *ipſarum verò rectæ* ω a, ω x *æquales. Nec aliter rectæ* ω u, ω d, *& inter ſe ipſis* ω a; *& ω x æquales ſunt, quia* z u, z d *ſunt oſtenſæ æquales. Cum ergò ex* ω *plures duabus æquales cadant in* χ 9. III.



peripheriam; χ *erit* ω *centrum circuli. Ideoq; ω* t, *reliquis ex centro æqualis erit, & quadrata* z ω, ω t, *æqualia quadratis* z ω, ω a, *efficient æquales* a t, z a. *Ex* z *igitur centro ſphæra deſcripta complectens cubum, comprehendit etiam pentagonum* a t d u x. *Eodemq; modo & omnia dodecaedri latera, adeoq; & ſphæra eadem comprehenduntur cubo & dodecaedro. Denique cum ſit, ut* n p *ad* p s *ita* p s *ad* s m. u *Erit quoq; ut* n l *dupla ipſius* n p, *ad* r s *duplam ipſius* p s: *ita* r s *ad compoſitum ex* b n, r l, *ſeu duplam ipſius* s n. *Si igitur latus cubi* n l *ſecetur extrema & media ratione, majus ſegmentum erit* r s; *ſed* n l *tota ita ſecta, eſt* Rationalis, *cum ipſius quadratum quadrato diametri ſphæra Rationalis ſit*

commensurabile, tanquam hujus pars tertia. Majus igitur segmentum s r, *id est, latus dodecaedri* x u, *illi aequale, Irrationalis est linea, quae vocatur Apotome.*

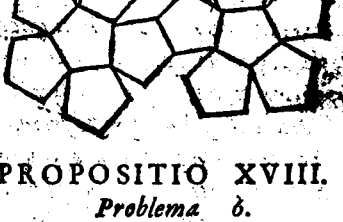
Corollarium.

Si latus cubi secetur extrema & media ratione, majus segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphaera descripti.

Recta enim ln, *aequalis lateri cubi, secta extrema & media ratione, majus segmentum habet* r s *latus dodecaedri.*

Scholium.

Si duodecim Pentagona hoc modo disponantur aequiangula & aequilatera; componetur ex illis dodecaedrum secundum totam soliditatem.

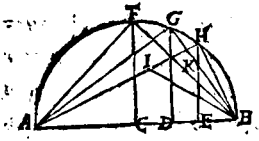


PROPOSITIO XVIII.

Problema 6.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

Diame-



Diameter a b *secetur bifariam in* c, *& abscindantur* b d, *pars tertia*, *&* b e *pars quinta diametri*; *super* a b *describatur semicirculus*, *& erigantur perpendiculares* c f, d g, e h; *connectantur* g, f g h, *cum* a *&* b. *Hinc ex* a h *abscindatur æqualis lateri decagoni* h i, *cujus semidiameter seu latus hexagoni est* b h: *connectantur* b i. *Denig.* b g *secetur media & extrema ratione in* k, *ut* b k *sit segmentum majus*: *erit* a g *latus pyramidis*, *vel Tetraedri*: a f *latus Octaedri*; b g *latus cubi*; b i *latus Icosaedri*, b k *latus Dodecaedri*. *Quia* α *enim* a g *est media proportionalis inter* b a, a d, β *erit*, *ut* b a *ad* a d *ita*, *quadratum* a b *ad quadratum* a g. *Est autem* a b *ad* a d *sesquialtera*: *Igitur & quadratum* a b, *quadrati* a g *sesquialterum erit*. *Et* γ *sic* a g *est latus Tetraedri*, *cujus lateris est sesquialtera potentia diameter*. *Rursus* α *quoniam* a f *est media proportionalis inter* b a, a c, *erit rursum*, *ut* b a *ad* a c, *ita quadratum* b a, *ad quadratum* a f. *Est autem* b a *dupla ipsius* a c: *Igitur & quadratum* a b, *quadrati* a f. *Et* δ *sic* a f *est latus octaedri*, *quippe diameter est potentia dupla lateris octaedri*. *Deinde cum* b g α *sit media proportionalis inter* a b, b d, β *erit*, *ut* a b *ad* b d, *ita quadratum* a b *ad quadratum* b g. *Est autem* a b

a

α cor. 8. VI. & conv. VI.

γ 13. XIII.

δ 14. XIII.

ε 15. XIII. *tripla ipsius* b d: *Ergo & quadratum* a b *quadrati* b g: *& sic* b g *latus cubi: quia diameter sphæræ potentia est tripla lateris cubi. Fossa proportionales & etiam sunt* a b, b h, b e; *& est* ut a b ad b e, *ita quadratum* a b *ad quadratum* b h. *Est autem* a b *quintupla ipsius* b e: *Ergo* ζ cor. 16. XIII. *& quadratum* a b *quadrati* b e. *Cum* ζ *ergo diameter sphæra potentia sit quintupla semidiametri circuli quinq; latera Icosaedri ambientis, erit* b h *dicti circuli semidiameter, vel latus hexagoni. Est autem* b i *latus decagoni ejusdem circuli. Ideoq;* b i *potens* η *latus hexagoni* b h *&* η 47. I. Θ 18. XIII. *decagoni* h i, *erit & latus pentagoni ejusdem circuli, Et sic* b i *latus Icosaedri. Deniq; cum* b g ϰ 16. XIII. λ cor. 17. XVI. *latus cubi sit extrema & media ratione sectum in* k, λ *erit* b k *segmentum majus latus dodecaedri. Quinq; ergo figurarum regularium latera sunt exposita. Comparatio eorundem sic habet: Quoniam diameter sphæra est potentia sesquialtera lateris pyramidis: & potentia dupla lateris octaedri; & potentia tripla lateris cubi; erunt partium talium quadrata laterum Tetraedri 4, Octaedri trium, Cubi duarum, qualium diameter est sex. Proindeq; latus Tetraedri ad latus Octaedri potentia sesquitertium est: Et ad latus Cubi potentia duplum. Latus autem Octaedri ad latus Cubi potentia sesquialterum. Harum ergo figurarum laterum*

quadra-

quadrata & diametri sphæra sunt inter se ut numerus ad numerum. Ideoq; sunt lineæ inter se μ commensurabiles. Et propter diametrum Rationalem reliqua etiam rationales sunt, ν Cumq; non sint ut numerus quadratus ad quadratum, ξ nec erunt longitudine commensurabiles. Et sic Rationales potentia solùm commensurabiles. At verò latera Icosaedri & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud Minor, hoc Apotome, nec longitudine nec potentia productæ sunt commensurabiles. Si enim essent lateribus tribus prioribus commensurabiles, quæ diametro Rationali sunt commensurabilia, essent ipsæ quoq; Rationales quod absurdum, quia sunt Irrationales. Sed nec inter se sunt commensurabilia latera Icosaedri & Dodecaedri. Si enim longitudine inter se essent commensurabilia, o Essent utraq; ejusdem speciei vel Minores vel Apotomæ. Si autem solùm potentia, π eodem modo latus dodecaedri erit Minor; quia Icosaedri latus est Minor ρ. Quod σ absurdum, quia nulla Irrationales specie differentes, eadem sunt. Quanquam itaq; trium priorum quidem figurarum latera tum inter se, tum ipsi diametro sphæra sunt commensurabilia & Rationalia: duo verò posteriora ijsdem & diametro & inter se incommensurabilia & Irrationalia: Inter eas tamen figuras occurrit hic or-

μ 6. X.
ν coroll. 25. VIII.
ξ 9. X.
o 104. X.
π 106. X.
ρ 16. XIII.
σ 102. X.

do, ut eodem ordine se excedant earum latera, quo ipsas construximus. Quanquam cum ordinem in definitionibus, non observavit Euclides. Majus τ enim est latus Tetraedri a g, *latere Octaedri* a f: *quia majorem subtendit arcum: Et hoc majus τ latere cubi* b g, *cubi autem latus majus esse latere Icosaedri ita patet.*

τ 28. III. *Quoniam* a b *ponitur tripla ipsius* b d, υ *erit*
υ 20. VI. *propter duplicatam quadratorum rationem, quadratum* a b, *nuncuplum quadrati* b d; *quia nuncupla est duplicata tripla. Propterea, qualium partium quadratum est novem, talium unum habet* b d. *Earundem autem est quadratum* b g *trium, quod illud hujus sit* Φ *triplum.*
Φ 15. XIII. *Erunt igitur quadrata* g d *&* d b, *etiam talium trium: sublato quadrato* b d, *unius; erit* d g *talium duarum. Sed quia quadratum* a b *est quintuplum quadrati* b h, χ *erit hoc minus quã*
χ 10. V. *talium 2; quia 9. ad 2. minorem quintupla habent proportionem. Ideoq; quadratum* g d *majus est quadrato* b h, *&* g b *major quam* b h.

Rursus quia diameter sphæræ ψ *componitur ex* b h *semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum*
ψ corol. 2. 16. XIII. *constituitur, & duplo decagoni* h i: *Erit latus decagoni* h i *minus tertia parte* b d *diametri* a b, *Si enim credatur æqualis ipsi* b d, *tum duplum decagoni esset æquale ipsi* a d, *&* h b *ipsi* d b. *Ideoq; quadratum* a b *nuncuplum quadrati* b d,

erit

erit etiam nuncuplum quadrati b h, cujus modo erat quintuplum. Non ergò est h i tertia pars ipsius a b. Sed neq; major. Si enim ducatur major tertia parte b d, erit etiam ipsius dupla major dupla partis tertiæ a d. Et sic b h erit minor parte tertia a d. Adeoq; quadratum a b, majus quàm nuncuplum quadrati b d; quod magis est absurdum. Cum ergò h i nec æqualis sit nec major tertia parte, erit necessariò minor. Itaq; cum g d, d b sunt majores rectâ b h, h i, ut ostensum est: erunt etiam ipsarum quadrata majora, harum quadratis, sed quadratum rectæ b g est æquale quadratis g d, d b; & quadratum b i æquale quadratis b h, h i: Ergò quadratum b g majus erit quadrato b i. Latus cubi latere Icosaedri. Deniq; Icosaedri latus b i majus est latere Dodecaedri b k, quod est segmentum majus lineæ b g extrema & media ratione sectæ. Est enim rectangulum sub b g, b k majus rectangulo sub b g, k g; adeoq; rectangula sub b g, b k & sub b g, g k simul, id est, ω quadratum b g, majora sunt duplo rectanguli sub b g, g k, id est, A quadrato b k bis. (quia b g, b k, g k sunt proportionales, & quadratum b k, æquale est rectangulo sub b g, g k.) Idcirco majora erunt tria quadrata rectæ a b g, sex quadratis rectæ b k; sed tribus quadratis b g æqualia sunt 5. Quadrata b h. (quia quadratum a b tam est triplum quadra-

ω 2. I.
A 17. VI.

drà-

drati gb, quàm quintuplum quadrati bh) unumq; quadratum bg majus erit uno quadrato bh. (Si enim esset æquale quadratum bh, quadrato bk, vel minus; 5 quadrata bh essent minora sex quadratis bk; quibus tamen majora sunt ostensa.) Et recta abh major, quàm recta bk: cumq; bi major sit quàm bh; erit etiam major quàm bk. latus Icosaedri. Exposita itaq; sunt latera quinq; figurarum & inter se comparata.

Quod erat faciendum.

FINIS.

Corrigenda præcipua.

Pag. 151. l. 13. Lege æqualibus pro sabibus
p. 333. l. 9. modo pro numero.