

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EUCCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI VI. PRIORES

PLANORUM,

AC

XI. ET XII.

SOLIDORUM,

Cum Explicationibus, & Demon-
strationibus

CHRISTOPHORI CLAVII,

In usum Auditorum suorum
adornati & editi;

A

JOANNE HENRICO VAN LOM.

Philos. Doctore, ejusdemque Facultatis,
ut & Mathes. Professore Ordinario.

*Qui brevem Narrationem Historicam, de vita,
ac Elementis Euclidis, addidit.*

Adiectis tabulis æneis nitidioribus &
accurationibus.



AMSTELODAMI,

Apud HENRICUM VIEROOT,

MDCCXXXVIII.





**ILLUSTRISSIMIS, NOBILISSIMIS,
GENEOSISSIMIS**

VIRIS,

A C A D E M I Æ

**DUCATUS GELRIÆ, ET COMITATUS
ZUTPHANIÆ,**

CURATORIBUS.

D. ADRIANO COMITI DE LYNDEN,
Domino in Nederhemert, Burg-gravio
Neomagensis Imperii; Satrapæ Regionis
Cuikenfis; &c. Ad confessum potentiffi-
morum ordinum Foederati Belgii dele-
gato. &c. &c. &c.

D. LEONARDO ESSENIO,
Medicinæ Doctori; Civitatis Bommeliensis
Consuli; ad redditus publicos Tetrarchiæ
Neomagensis curandos, ac quondam ad
Collegium Ordinum Generalium septem
unitarum Regionum Delegato. &c. &c. &c.

D. FRANCISCO JOANNI BARONI

DE

HEKEREN,

Domino de Enghuyfen; Civitatis Dodeche-
mi Consuli; urbis atque agri Does ur-
gensis Judici; Ducatus Gelriæ quæstori
supremo; & ad concilium ordinum foe-
deratorum, quod est Hagæ comitum,
Delegato. &c. &c. &c.

D. EVERH. JOANNI BENJAMINI
BARONI DE GOLSTEIN.

Domino in Appel ; Ordinis Teutonici
Magistro ; Civitatis Zutphaniensis consuli ;
cameræ rationum , ducatus Gelriæ , &
comitatus Zutphanicæ præfidi. &c. &c. &c.

D. ALEXANDRO BARONI DE DEDEM ;
Domino in Vosbergen , & Werfhorst ,
Arnhemæ , & oræ Velavicæ judici ;
Præfecturæ Dornspyeckentis ex Equestri
Ordine Præfidi ; confessus Præpotentium
Procerum , qui reditus publicos Tetrarchiæ
Velavicæ curant , Præfidi ; Gymnasii Ve-
lavici Curatori. &c. &c. &c.

D. ANTONIO à WESTERVELT,
Domino in Essenburg ; Civitatis Hardero-
vicenæ Consuli ; ad collegium Ordinum
Generalium , septem unitarum Regionum ,
& Cameram Tributorum Velaviæ quon-
dam Delegato ; Gymnasii Velavici Cura-
tori. &c. &c. &c.

N E C N O N

*VIRO AMPLISSIMO, NOBILISSIMO,
CONSULTISSIMO.*

D. SAMUELI ESSENIO,
J. U. Doctori , Curiae Ducatus Gelriæ ,
& Comitatus Zutphanicæ , Senatori extra-
ordinario ; Publicorum Redituum Maes-
landiæ , & Oosterwyck quæstori ; & Cu-
ratoribus Gelro-Zutphanicæ Academicæ à
secretis &c. &c. &c.

S. P. D.
JOANNES HENRICUS VAN LOM.

DEDICATIO.



Um novam Eu-
clidis Elemen-
torum , cum
Christophori Cla-
vii , præclari sa-
ne Mathematici , Demon-
strationibus adornatam Edi-
tionem ; privatis nostris In-
stitutionibus destinatam , in
lucem produco publicam :
Vestro illustri Nomini, VI-
RI NOBILISSIMI ET
AMPLISSIMI ! consecra-
re eam , ac dicare meum es-
se officium censui. Justissi-
mæ enim mihi causæ sunt
variæ , quibus hoc opuscu-
lum

DEDICATIO.

lum vestris illustribus inscribere nominibus , me obstrictum esse sentio. Etenim si mecum reputo , Vos Academiae nostrae curandae praepositos esse , eique augendae & amplificandae egregiam & maxime laudabilem operam navare ; nemini majori jure , hunc libellum nostra cura , ea qua apparet forma , primum edendum , in Academia vestra paratum , quam Vobis , quibus Academiae nostrae cura commissa est , offerre ac dicare me potuisse judicavi. Cui enim plus deberem , quam Vobis , qui nobis ad hanc ornanda , publici-

DEDICATIO.

blicique juris facienda, otia dedistis? Accessit, Vos jure optimo à me exigere posse specimen aliquod eorum, quæ cum Auditoribus nostris, super Matheseos principiis tracto: ac mihi Geometricorum exercitiorum, quibus studiosam juventutem imbuerestudeo, Vobis rationem esse reddendam. Et quod incrementa addit, est, quod Vobis etiam Temporis ex occupationibus quotidianis erepti, rationem aliquam persolvere officii mei esse existimavi. Præterea cum ab eo tempore, à quo ad Vestram Academiam accessi,

DEDICATIO.

me maximis beneficiis cumulaſtis, & etiamnum favore veltro proſequimini; primam, quæ ſeſe mihi offerret, occaſionem amplectendam eſſe putavi, ut debitæ meæ obſervantiæ, reverentiæ, & grati animi, pro acceptis adeo multis beneficiis, & gratiis, publicum exſtaret monumentum. Merito Itaque gratam memoriam beneficiorum, quæ in me contuliſtis, declaro, hacque inſcriptione pie agnoſco, quod benignitatis Veſtræ, erga me, quibus multa debeo, documenta maxima ſint ac ſingularia.

Non

DEDICATIO.

Non dicam opusculum Vestris Illustribus Nominibus ornatum, ac comptum, ex ipsa inscriptione firmum sibi conciliare præsidium. Accipite ergo **GENEROSISSIMI & ILLUSTRISSIMI, Patriæ & Academiæ PATRES!** hoc quaecunque munusculum, vobis lubentissime dicatum & consecratum. Quod animo humili, obsequioso & devoto offero: Accipite hoc Vos animo sereno, placido & benigno. Clementer accipite; credite nihil aliud me egisse, quam quod officii mei rationem postulare censui. Vestro
† 5. vero

DEDICATIO.

vero AMPLISSIMI AC
GENEROSISSIMI VI-
RI ! me, meaque studia, fa-
vori commendo. Ego vero
me intra musei mei parietes
recipiam , Deumque im-
mortalem , supplicibus exo-
rabo precibus , ut Vobis ,
quos non tantum Generis
splendor , & muneris dig-
nitas , sed & meritorum in
Rempublicam , magnitudo
illustres fecit ; tribuere tem-
pus quam longissime, Vos-
que cum illustribus vestris
familiis salvos , & omni fe-
licitatis genere cumulatos ,
incolumes servare velit ; ut
gravibus hisce temporibus
pru-

DEDICATIO.

prudentissimis consiliis vestris
& curis Decus Reipublicæ,
Ecclesiæ, & Academiæ hu-
jus tueri & augeri possitis,
tandemque læti ac lubentes,
certa beatioris vitæ in cœlis
spe solutas corporis viculo
animas tradere Deo. Valete
& Favete. Dabam Har-
dervici A. D. 12. Julii.
MDCCXXXVIII.

PRÆ-

PRÆFATIO.

LECTORI BENEVOLO

S.



Isto tibi , *benevole*
Lector , novam E-
ditionem Elemen-
torum Geometrico-
rum , ab Euclide
Geometra quondam
adornatam ; verum Christophori
Clavii Expositionibus , & De-
monstrationibus munitam. Ut
scias tamen velim , me non vo-
luntarie , ac sponte mea , ad
hæc Elementa publici juris faci-
enda , sed necessitate quadam
coactum , pervenisse. Quare pau-
cis te in limine morari debeo ,
ut

P R Æ F A T I O.

ut referam *primo* rationes , quæ me ad hæc Elementa edenda impulerunt , & urserunt : *dein* quid in hoc opere proferendo præstiti.

A quo Tempore mihi in hac Academia , publice Philosophiam ac Mathesin docere , demandatum est : in id omni ope , industria & alacri studio incumbere officium meum esse putavi , ut quovis modo possem , Studiosæ Juventuti , vel Philosophiam , vel Mathesin discere cupienti , facilem simul ac utilem navare operam , ejusque commodis pro virili servire. Verum cum inter Viros Eruditos hodie convenit , Studium Geometricum , basin & fundamentum esse ponendum Philosophiæ , vel saltem partis ejus principalis , Scientiæ nempe Rerum Naturalium , id primum mihi curæ cordique esse censui ;
ut

P R Æ F A T I O.

ut Juventutem Studiosam puris & sinceris Geometriæ principiis, quibus dein ad altiora, tam Veterum, quam Recentiorum Dogmata intelligenda pervenire possunt, erudirem. Interim memor dicti præclari sane Mathematici, *Davidis Gregorii* in Dedicatione, ubi dicit, *memini vero quam sæpe reclamares Viris in re Mathematica, novitatis, compendii, & forte sui nimium amantibus; cum interim juventutem ad ipsos fontes remittendam, Veterumque libros diligentius esse versandos, terendosque, vehementer urgeres.* Ideo ad hunc Scopum assequendum, Euclidea Elementa, probe intellecta imprimis nos ducere rebar; utpote tam Scriptores Antiqui, quam Recentiores super hæc Elementa, sua condunt Ædificia, cum Geometrica, cum Rerum Naturalium; propterea

PRÆFATIO.

reaque ea intra privatos parietes , cum Auditoribus nostris tractanda esse necessarium duxi. Sed cum non perinde erat , cujusnam Commentatoris vel Editoris sequeretur ductum , in exponendis coram Auditoribus nostris Elementis istis , cum seligendum esse existimavi , qui se præ cæteris Demonstrationum perspicuitate , & demonstrandi rigore ac evidentia commendabat. Inter cæteros Christophori Clavii Demonstrationes , ac demonstrandi Methodum , mecum pensitans , ambo mihi arrisere , & placere valde. Tum ob elegantem , ac sane perspicuum modum , cum facilitate singulari conjunctum , quo in adstruendis & probandis utitur propositionibus. Tum ob robur & efficacitatem , quæ singulis inest demonstrationibus , ad persuadendum

P R Æ F A T I O .

dum de veritate rei propositæ ,
ad quas nihil excipi potest , cum
per omnes casus possibiles , rem
contemplandam veram & fir-
mam esse ostendit , & ad con-
victionem evincit. Quibus porro
accessit , Eum Euclidis Scopo
præ multis aliis etiam optime sa-
tisfacere , remque ab Euclide
propositam , secundum ejus men-
tem , acu tangere. Eo nomine
laudatur à Reyhero in *Dissert. de*
Euclide pag. 40. 41. Quod Clavi-
us optime commentatus est in *Eucli-*
dem ; ac uti ait , in ejus commen-
tariis , quicquid fere ad penitio-
rem *Elementorum* cognitionem requiritur ,
invenitur. Suum etiam adjicit cal-
culum Ricciolus in Tomo primo *Al-*
magesti novi de Clavio scribens ,
quod in *Geometria* adeo excelluit , ut
illum plurimi Mathematici velut Ora-
culum consuluerint ; propter eximiam
in

P R Æ F A T I O.

in scriptis suis perspicuitatem, cum solida doctrina conjunctam, dum ipsa Sole clariora sunt. Adstipulatur his Janus Nicius Erythreus in pinacotheca sua notans, quod ex omnibus Clavii lucubrationibus, quibus in lucem prolatis, nominis sui memoriam, omnium seculorum posteritati commendavit, est commentarius, quo Euclidem illustravit, qui talis est, ut in Arce poni possit, quasi Minerva illa Phediae; in qua nihil est nisi absolutum & perfectum. Et ut alia silentio præteream testimonia, Vossii tantum adducam, de Scientiis Mathem. pag. 69. Ubi de Clavio affirmat, quod Eruditis omne punctum ferre visus sit, cum variis monumentis nominis sui decus ad posteros propagavit. Quare non dubitabam, ad ipsius commentarii ductum in Euclidis Elementa, Geometrica principia Auditoribus meis tradere: cum
†† per-

P R Æ F A T I O.

persuasum mihi habebam , in demonstrandi ordine , me nec commodiorem nec clariorem , in ipsa re probanda , nec firmiorem nec evidentiorum Autorem sequi posse. Verum brevi tempore percipiebam Clavianorum Elementorum Euclidis penuriam esse , cum Studiosa juvenus ubique exemplaria sollicitè quærentes , vix ac ne vix quidem unius , alteriusque exempli compotes fieri possent. Accedebat etiam , quod si hic vel illic exemplum unum in angulo lateret , illud nimio pretio solvendum erat. Unde factum est , ut quidam me audientes , aut audituri , quotidie queritarentur , quod Autoris , cujus vestigia legebam , participes fieri non possent. Porro Editiones Clavianæ , sexcentis & pluribus erroribus scatent , seu vitiis Typographi-

PRÆFATIO.

graphicis innumeris laborant, qui Tyronibus in Demonstrationibus perlegendis, ac imitandis omnino moram injicere debent; si non aliquando ad propositionis intelligentiam insequendam, prorsus impedimento sint. Ulterius Figuræ, quæ ad propositiones illustrandas adjectæ sunt, quæ omnino claræ & distinctæ, ad faciliorem intelligentiam desiderantur; sunt confusæ & vitiosæ admodum, immo quandoque exiguæ nimis; uti sunt eæ solidorum, quæ sane ob linearum multitudinem, & varias superficies in quibus jacent, præpripis accuratæ & justæ magnitudinis existere debent. Desunt aliquando lineæ, quæ ad constructionem requiruntur, desunt sæpe litteræ, quæ in verbis demonstrationum citantur, & non

P R Æ F A T I O.

raro perverso loco sunt positæ ; quare necesse est ut Tyrones sæpe confundant , ac ineantes constructionem moram iis injiciant , quod profecto molestum , & in nonnullis fastidium movet , præcipue iis qui prima vice Autoris demonstrationes imitantur. Præterea citationes , quæ in margine , juxta demonstrationum verba , positæ reperiuntur , suis etiam non carent vitiis , in iis autem indicantur ea , quæ in præcedentibus concessa vel demonstrata , jam Elementa existunt ac principia , eorum quæ in ista demonstratione adstruuntur , quorum nostra scire interest ; quapropter eos , qui non satis familiares habent Euclidean propositiones , sæpe ob præposteram citationem , privant fundamento vero , super quod tamen condita est

P R Æ F A T I O.

est probatio. Denique licet Clavii Commentarius in Elementa Euclidis sit omni laude dignus, tamen Tyronibus prolixus nimium est, si nempe oculos nostros convertamus vel in Definitionum expositiones, vel in ea, quæ singulis fere adjunxit demonstrationibus propositionum. Ea quamvis in se bona & laudanda sunt, Incipientes tamen, qui Euclidea Elementa scire cupiunt, iis carere possunt; cum haud raro tales, multiplici materia, quam in iis adducit, obruuntur, non distinguentes ea quæ Euclidis, ab iis quæ Clavius de se addidit, vel ex aliis mutuo desumpsit; hinc mira in Tyronibus confusio, quæ cane pejor & angue deterior in Mathesi evitanda, ac omni conatu cavenda. Quæ omnia etsi cum animo meo sapiuscule vol-

† † ;

ve-

P R Æ F A T I O.

vebam ac revolvebam , tamen
refugiebam initio novam adorna-
re Editionem Clavianam ; verum
cum quotidie de penuria Exem-
plarum Auditorum meorum quæ-
relæ ad meas perveniebant Au-
res , in angustiam redigebam , vel
Clavium ducem in Geometria
exponenda relinquere , ejusque
loco alium seligere , quod repug-
nanter facerem ; vel efficere ut
recuderentur Elementa Euclidea
à Clavio confecta. Verum cum
utrumque ponderarem , magis è
re auditorum meorum fore judi-
cabam , Clavium porro ducem præ-
euntem , in contemplationibus
nostris Geometricis , sequi. Id-
circo in usum tantum Auditorum
meorum , ac eorum gratia no-
vam hanc Editionem , in qua
vitiis supra memoratis obviam ire ,
& quantum in me est , evitare
flu-

P R Æ F A T I O.

studui ; ex Clavii commentariis collectam , parare decrevi. En rationes *benevole Lector* , quæ me impulere ad hanc Editionem publici juris faciendam. Super est ut nunc etiam brevibus enarrem , quid in hac Editione præstiti , vel saltem præstare conatus fui. Et quidem *primo* è libris tredecim ab Euclide conscriptis , in quos omnes etiam commentatus est Clavius , *sex priores , ac undecimum & duodecimum librum* solummodo edi curavi ; quia cum Planorum Elementis , Solidorum conjungenda esse , tanquam cognitu summe necessaria , sic firma mihi stabat sententia. In qua tantum præclaros in Geometria Viros præeuntes secutus fui , nempe Tacquetos , Dechalesios , Moreos , Ozanamos , Keilios , aliosque. Non tamen prætermisi reliquos , quia

P R Æ F A T I O.

eos inutiles judicabam. Verum cum Tyronibus, qui institutionibus nostris privatis se committunt, hæc Elementa solummodo paravi, illi intellectis Planorum & Solidorum Elementis, reliquis in libris, si ipsis ita visum sit, dein cum fructu se exercere possunt. Illorum permagni interest, scire Elementa Planorum, ac Solidorum, quæ sex prioribus, & duobus reliquis, undecimo ac duodecimo libro continentur; utpote ea fundamenta sunt, quibus nostra Rerum naturalium Doctrina nititur. *Secundo* explicationes, quas Clavius super Definitionibus, Axiomatibusque Euclideis dedit, quales definitionibus ac axiomatis addidit, quasque prolixas nimium judicavi, ac quæ vel praxin aliquam, vel aliud quid ad Euclidis verba, & verborum sensum in-

P R Æ F A T I O.

intelligendum non directe ducens, continebant, pro captu meo contraxi. Ita tamen, ut secundum Clavii sententiam, sensum verborum Euclidis, satis clare declararent; nimiam interim evitavi breviter, ne dum brevis esse volo, obscurus fio. *Tertio* Scholia, Praxes, aliaque, quæ Clavius Propositionibus Euclideis, suisque demonstrationibus subjunxit, omisi pleraque omnia; exceptis tamen iis Scholiis, Lemmatibusque, quibus in suis demonstrationibus utitur Clavius: dum iis carere non possumus, quia ad ea, tanquam ad principia & fundamenta probationum, in iis provocat. Ob eandem rationem, quia è multis Corollariis petit argumenta demonstrationis suæ, plurima servavi Corollaria, quæ Clavius è probationibus suis elicit.

† † †

P R Æ F A T I O.

cuit. *Quarto* Definitiones , Postulata , Axiomata , & Propositiones , quæ in Clavii Commentario in Euclidem occurrunt , omnes typis mandavi. Verum eas omnes contulimus cum definitionibus , axiomatibus , postulatis & Propositionibus , quæ in Gregorii Editione Græco-latina expressæ exstant ; quas vero in Gregoriana reperire mihi non licuit , quasque Clavius vel de suo adjecit , vel ex aliis mutuo defumfit , eas omnes duabus ejusmodi [] uncinulis includi curavimus. Ut scilicet illi , qui Euclidem purum desiderant , unico obtutu videre possint , ea , quæ Euclidis sunt , eaque distinguere ab iis , quæ à Clavio sunt addita. *Quinto* quantum in me fuit , errores quos detexi in Editione Clavii , tum in ipso textu , tum in

P R Æ F A T I O.

in litteris, quæ respondent iis, quæ in schematibus sunt expressæ, quæ lineas necessarias figurarum annexarum declarant, corrigere sedulo studui: uti & citationes omnes in margine positas, male allatas, restituere omni ope nixus fui; forte hic vel illic mendum aliquod remansit; verum quis omnes potest cavere errores? cum ne Argus quidem sufficeret. Id saltem effeci, ut nunc multo correctior, quam priores omnes Clavii Editiones, lucem adspiciat. *Sexto* Figuras, ad propositionum intelligentiam facilem reddendam, accommodatas, separatim æri incidi curavi; in iis elaborandis, id præprimis studui, ut clare & distincte ante oculos ponerent, omnes lineas ad constructionem, ac ad ejus compositionem necessarias; ne ve-

P R Æ F A T I O.

ro lineæ inter se confunderentur majusculas depinxi ; ac quæ ad solidorum ducunt notitiam , quæ in prioribus Editionibus , præcipue quæ in forma octava, ut ajunt , sunt , confusæ ac vitiosæ admodum erant ; distinctiores multo elaboravi , ut Tyrones sibi magis vivide constructionem figurarum repræsentare possint. Interea sedulo cavi , ut litteræ in figuris expressæ responderent iis , quæ in Demonstrationibus occurrunt. *Septimo* his Elementis præmisimus , Historicam narrationem brevem de Euclidis vita , ac Elementis , de qua tamen non multum polliceri audemus , quoniam extra forum meum est , accuratam ac omnibus numeris absolutam tradere historiam , quare à Lectore comiter expetimus , ut si forte ea non arrideat , vel
errores

P R Æ F A T I O.

errores quosdam in ea detegat; in meliorem partem interpretari velit, cum nimis sero in ea incidi cogitata, ut de vita Euclidis quædam narrare in animum induxerim. In reliquis Clavium sumus secuti, cum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis Propositionibus. Alter vero in ipsa Propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, seu potius ipsius Euclidis, qui etiam observatur in codicibus Græcis. Id vero eo consilio factum est, quoniam cum à quibusdam Geometris propositiones Euclidis juxta ordinem Campani, ab aliis vero juxta Theonis seriem citentur; ideo

P R Æ F A T I O.

ideo necessarium esse duximus, ut utriusque interpretis numerus apponeretur. Denique ne cursus demonstrationum interrumperetur, citavimus principia & propositiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, cui similis literula respondet in demonstratione, ut facilius cognoscatur, ad quem locum quælibet citatio sit referenda. Citationes vero ipsæ hoc modo intelligendæ sunt; I. *Def.* significat prima definitio; I. *Pet.* prima petitio, vel primum postulatum, I. *Prim.* prima propositio primi libri, 23. *Undec.* significat propositio vigesima tertia undecimi libri: & sic de reliquis; ex quibus reliquæ citationes facile intelliguntur. Vale, Lector benevole, & conatibus nostris fave: simul peto, ut si quædam supersint errata, benigne excuses. Scribebam Hard. mense julio CXCXCCXXXVIII.

BREVIS

Errata typographica quæ inter relegendum
- mihi occurrere, hoc modo corrigat Be-
nevolus Lector.

Pag.	Lin.	Pro	Lege
20.	6.	Onnis	Omnis
31.	ultima.	sitalterius.	sit alterius
33.	19.	utrumqu.	utrumque
38.	13.	que BA	quæ BA.
39.	2.	om nia	omnia
59.	18.	rectis	rectis.
61.	23.	externus DCF,	externus DCE,
93.	17.	ipsi CF,	ipsi CE,
96.	17.	rectaugulo	rectangulo
105.	24. in marg.	10. def.	10. def. primi
107.	22. in marg.	10. def.	10. def. primi
109.	12. in marg.	15. def.	15. def. primi
	28. in marg.	15. def.	15. def. primi
124.	5.	recta quædem	recta quædam
154.	20.	describendns	describendus
156.	9.	Quareq uadratum	Quare quadratum
165.	35.	THEOR.	PROBL.
171.	5.	habituto	habitudō
173.	2. à fine	æquemultiplicia	æque multiplicia
174.	4.	æquemultiplicia	æque multiplicia
	7.	æquemultiplicia	æque multiplicia
189.	28.	nna	una
208.	2. a fine	primo	prima
220.	23.	permutando	permutando
227.	5. a fine	constituantur	constituatur
237.	4. a fine	ad CA,	ad DA,
267.	17.	cnm sexta	cum sexta
274.	7.	imagininemur	imaginemur
277.	22.	angulii	anguli
380.	27.	circulus	circulis

EVIS

HIST

U C

V I

HE M



Ubi, auditori
tibus in Ge
pararem;
ele puravi,
a Elementis,
compulsi, q
et uiam salte
oris, a Operis
sint, qz nos e

BREVIS NARRATIO
HISTORICA
DE
EUCLIDIS
VITA,
AC
ELEMENTIS.

S. I.  Um novam hanc Elementorum *Euclidis*, ex *Christophori Clavii Bambergensis*, insignis sane Geometræ, in *Euclidis* Elementa, commentariis, collectam

Editionem, auditoribus, qui privatis nostris institutionibus in Geometriæ scientia erudiri cupiunt, pararem; haud ab instituto alienum esse putavi, breviter de Autore nostro, ac Elementis, quæ de rebus Geometricis composuit, quædam recensere. Scilicet ut aliquam saltem habere cognitionem Autoris, ac Operis, quem tractemus, illi possint, qui nos ea Elementa exponentes

au-

audient. Tum ut eorum, quæ de Euclide narrantur, ac quæ de his Elementis à Viris Doctissimis foveantur sententiæ, non sint penitus rudes. Tum ut aliquantum intelligant, quæ de iis tenenda, vel rejicienda videntur. Antequam vero ad ipsam de *Euclide* narrationem me accingam, cum in sequentibus nobis usui futura sint, & verbo referre de Geometriæ natalibus, secundum quorundam sententiam; & perbrevider eorum clarorum Mathematicorum, qui ante *Euclidem* suis inventis præ cæteris excellere, mentionem facere; haud incongruum fore duximus.

In Geometriæ Originem, unde Mortales primo de ejusmodi studii genere cogitandi ansam cepere; & Autorem à quo primum inventa est nobilis hæc scientia; & quo demum tempore elucere inchoavit præclarum hoc studium, si inquiremus: Multa nobis in iis occurrent, quæ ut certo assumentur, non satis manifesta & evidentiæ videntur. Non enim latet, quosdam asserere, eam Doctrinam ab Ægyptiis, necessitate quadam coactis, ab initio fuisse inventam. Opinatur scilicet eos ob annuas Nili inundationes, quibus agrorum limites operirentur limo, ac sic confunderentur; arte quadam ac scientia, qua rursus agri dividerentur, opus habuisse. Verum hanc rite pensitantes opinionem, speciem magis veri habere, quam ut certum aliquid de Originis causa probet, cuilibet attendenti apparebit. Desunt enim nobis Veterum testimonia sufficientia, quibus

bus de ortus ratione firmo suo stat talo hæc sententia. Si JOSEPHO *antiquitatum lib. 1. cap. 9.* fidem habeamus, studium hoc Geometricum à *Chaldeis*, *Assyriisque* fuisse excultum, ac ab *Abrahama*, jussu Dei in Palæstinam, ac inde in Ægyptum profecto, in illud Regnum tum primum fuisse translatum; ibidem testatur. Ægyptii vero ipsi, certi cujusdam auctoris forte inficii, Deo suo, *Thentb* dicto, inventionis gloriam tribuunt, uti refert PLATO in *Phædro operum pag. m. 268. col. 1. in princ.* ubi ita scribit de *Thentb* loquens; *Hunc primum omnium numerum, & numeri computationem invenisse, Geometriamque, & Astronomiam, &c.* Verum dubia licet ea sint, quæ de Origine apud Ægyptios querenda, narrant Auctores; id tamen satis certo constat, Ægyptios hoc Doctrinæ genus coluisse. Etenim *Thaletem Milesum*, qui fere sexcentis ante natum Christum annis, secundo ab Urbe condita seculo, in Græcia floruit; in Ægyptum iter facientem, indeque in Græcum Solum reversum, traduxisse Geometriæ Scientiam, ex LAERTIO discimus. Qui simul nobis auctor est, *Euphorbum Phrygem* præcedenti seculo Contemplationes Geometricas de lineis jam composuisse; monente DECHALES in *Tractatu Proœmiali de progressu Mathes. cap. 2.* *Thaletem* proxime secutus est *Mamertinus*, qui præclarus celebratur Geometra. Quo eodem tempore, *Amethisum* hujus scientiæ præprimis gnarum, vixisse statuunt. Hos eodem seculo excepit excellens ille Geometria

triæ Stator *Pythagoras Samius* ; qui à multis, Geometriæ in Græciam advehtë autor habetur : quocum secundum effluxit seculum.

Tertium quod sequitur ab Urbe condita seculum , plures produxit in hoc studiorum genere præstantes viros ; inter quos primo numerantur *Anaxagoras Clazomenius* , qui *Pythagora* successit ; dein *Oenopides Chius* , hujusque discipulus *Zenodorus* ; & qui *Zenodorum* proxime secutus est , è mercatore Geometra , *Hippocrates Chius* : Hic imprimis celebratur , quod primus Elementorum Geometricorum , quæ temporis injuria periere , Scriptor exstiterit. Hos excepere *Theodorus Cyreneus* , *Timaus Locrus* , Mathematicum Scriptor.

Quantum , quod post hos Autores , illuxit seculum , Geometriæ studioforum & inventorum valde fuit fertile. In eo claruere *Democritus Milesius* , hujusque æqualis *Protagoras* ; Hos secutus *Plato Atheniensis* , divinus cognominatus , strenuus Matheseos cultor ; de quo referunt , Eum singulis diebus Geometricum Problema , discipulis suis exposuisse. Quem deinceps insecuti , *Amiclas Heracleotes* , *Leodamas Thasius* , & *Neoclides* ; *Platonis* aut auditores , aut familiares ; *Leon* porro illis successit , qui secundus dicitur , à quo Elementa Geometrica , auctiora , quam ea *Hippocratis* , quæ simul ac priora , temporis injuriam passa , non exstant ; scriptis exposita fuere. Postea exstiterere *Eudoxus Gnidius* , vel ut alii scribunt , *Cnidius* , *Platonis* in Ægyptum comes , qui quintum Elementum Euclidis

dis de Proportionibus invenisse dicitur; ac *Theaetetus Atheniensis*, cui de quinque solidis corporibus scriptum tribuitur, verum ejus non exstat lucubratio; insecuti sunt dein *Bryso*, & *Antiphon*.

In quinto ab Urbe condita seculo florere, *Theudius Magnes*, tertius qui numeratur Elementorum Geometricorum scriptor: *Hermotimus Colophonius*; *Cyzicinus Atheniensis*; *Aristaus Senior*; *Philippus Meteus*; *Platonis* magistri discipulus: *Menechmus*; *Eudoxi* discipulus; *Geminus*; *Perseus Cithicus*; *Aristoteles*; ac tandem Geometriæ illud sydus eluxit EUCLIDES; qui licet his Geometris posterior fuerit; ac ex iisdem nonnulli Elementa Geometrica Scriptis reliquerint, tamen omnium antiquissimus habetur à VOSSIO de *Scientiis Mathematicis* cap. 15. §. 1. quorum labores in Geometria habemus; ac omnium Græcorum primus, qui omnia collegit, collectaque digessit. Hunc Autorum catalogum partim me texere docuere, CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES in tractatu *Prooem. de progressu Matheseos*, præmisso tom. 1. *Mundi Mathematici*; qui eum se è PROCLI libro 2. *Commentariorum in Euclidem* habuisse dicit: partim TACQUET in *Historica narratione de ortu & progressu Matheseos*.

§. II. Ex his vero omnibus Geometris, licet cuncti clari celebrentur, propter Doctrinæ Geometricæ peritiam; quam tum suis inventis ditarunt, tum sua notitia & cultu auctiorem, ac firmiorem reddiderunt; EU-

CLIDEM tamen solum elegimus , de quo pauca hisce paginis referremus. In vitam hujus Geometrae itaque inquirentes , Solum ejus natale , quod tulit hunc Atlantem Geometricum , sese investigandum sponte nobis sistit. Sed super hoc Autorum sententias rogantes , quod capita , tot fere sententiae reperimus ; adeo dissentiunt inter se Autores de statuenda Patria *Euclidis* nostri. Quidam ejus Patriam , **GELAM** , civitatem *Sicilia* , fuisse putant ; ac ea de re *Euclides Geometra* , *Gelous* apud illos audit : inter quos est Scriptor Bibliothecae Veteris Siculae , anno 1700. à Messanenſi quodam editae , referente **FABRICIO** *Biblioth. Graec. Lib. III. Cap. XIV. §. 1.* Eam opinionem , qua *Euclidem* è *Gela* oriundum censent , forte è *Laërtio* colligere ; quia **LAERTIUS** *Lib. II. segm. 106.* de *Euclide* Megarenſi scribit , quod secundum quosdam *Gelous* sit habitus. Verum hæc sententia suo videtur privari fundamento , si in sequentibus §. 9. palam constiterit , cum , de quo scribit *Laërtius* , *Euclidem* , diversum esse à nostro *Geometra* ; quare ex eo principio *Geometra* *Euclidis* Terram parentem , *Gelam* fuisse , asserere non auderem. **HARDUINUS** ad *Plinium* Autorem nostrum **PERGA** , civitate *Pamphilia* oriundum censet ; at monet **FABRICIUS** loco citato , *Apollonium* Conicorum Scriptorem , in animo tum habuisse *Harduinum* , cum id de *Euclidis Geometra* patriis scripsit sedibus. Nam inter Scriptores tam Veteres quam Recentiores id satis manifesto constat ; *Apollonium* , *Pergam* sedem

solam natalem habuisse ; Verum defunt nobis testimonia , in quibus *Euclidem Perga* natum , educatumque fuisse , asseritur. Alia porro , sed incerti Auctoris , de *Euclidis Geometra* patriæ Solo est cogitatio ; videtur tamen ea esse Historici cujusdam Arabis , ex quo illam depromptit GREGORIUS ABULPHARAJUS in *hisor. compend. Dynastiarum arabice* edita , & latine versa à Pocokio. In qua Autor ille hanc fovet opinionem , quod *Euclides Geometra* è civitate TYRO ortum duxerit , ac propterea eum *Tyrium* facit. Monente KONIGIO in *Bibliotheca Veteri & Nova*. Sed præterquam quod hujus sententiæ Autor sit incognitus , præterea etiam Veterum defunt judicia , quibus hæc corroboranda foret. Longe vero vulgarior , quæ etiam plurimos nacta est , inter Viros Doctos , Patronos , est existimatio ; *Euclidem Geometram* , MEGARÆ , quæ *Græcia* oppidum est , juxta Isthmum Corinthiacum , natum fuisse : ideo *Megarensen* Eum vocare solent. Hanc opinionem CAMPANUS habuisse videtur , uti ex inscriptione Elementorum à se editorum haud obscure colligere est ; cum ea inscribit *Euclidis Megarensis Mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum libri xv.* Cui calculum suum adjecit FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA , inscribens commentarium suum in *Euclidem ; Euclidis Megarensis Mathematici clarissimi Elementa Geometrica.* Idem sensere GESNERUS in *Bibliotheca*. Uti & ABDIAS TREW ei-

VIII BREVIS NARRATIO HISTORICA

dem huic sententiæ favet , quod sequentia
versicula satis declarant.

*Fundamenta , quibus consurgit tota Mathesis ,
Cyclum cum numero , tu Megaræ , doces.*

In eandem accipiunt partem , RICCIOLUS in *Chronici parte secunda* , *præmissi Tomo primo Almagesti novi* , ad vocabulum *Euclides* ; ac multi alii. Fortasse horum multum labefactabitur cogitatio , si in posterum §. 8. & 9. constiterit , *Euclidem Megarenses* , qui sæpe confunditur cum *Geometra* nostro , omnino distinguendum esse ab *Euclide* Elementorum Scriptore. Dissentiunt ab his pariter multi Viri Eruditi , existimantes *Euclidem* nostrum *Alexandrinum* fuisse ; cum ALEXANDRIÆ , *Ægypti* prænobilis urbis ; quæ hodie Turcis *Scanderia* , Italis vero *Alessandria* appellatur , in illa planitie , quæ Mareotem Lacum , & mare mediterraneum interjacet : ab *Alexandro Magno* , per *Dinocratem* Architectum Macedonem , condita ; præclarum hunc *Geometram* vel lucem adspexisse primo ; vel , quæ magis manifesta , monumentis Veterum fulcita , in ea ipsum floruisse civitate asserunt. Nam *Alexandria* Eum fuisse genitum difficile asserere auderem , cum disertum nullum de natalitio isto *Euclidis* oppido , Veteris alicujus Scriptoris testimonium habemus ; observante FABRICIO in *Biblioth. Græc. lib. III. cap. XIV. §. I. ac GREGORIO in præfat. in Euclidem*. Potius subscriberem sententiæ , affirmanti , minime certo

certo constare, quo Genere aut Patria oriundus sit *Euclides Geometra*: à cujus partibus stant GREGORIUS *loc. cit.* & CLAVIUS *in proleg. in Euclidem*. Quippe penes Autores Veteres, expressis nihil reperitur verbis, ubi locorum ortus est *Euclides Geometra*. Si vero conjecturis, & quidem plausibilibus, hic ullus sit locus, forte *Alexandria*, *Euclidis* nostri incunabula haberi possunt; si saltem, ubi imprimis floruerit, ibidem etiam primo lucem adspexisse statuatur. Nam quamvis Scriptores Veteres taceant, de natali urbe nostri Geometræ, tamen manifesto satis, ubi inclaruit nostrum Geometriæ sidus, in suis monumentis declarant. Etenim PROCLUS *in secundo comment. in Euclid.* nobis testis est, *Euclidem Geometram* in Ægypto vixisse; referente VOSSIO *de scientiis Mathematicis. cap. 15. §. 1.* Ac præterea PAPPUS ALEXANDRINUS, qui circa annum Domini 390. vel 400. floruit, teste RICCIOLLO *Chron. pars. 2. ad vocabulum Pappus*; autor est, *Euclidem Geometram Alexandria* Scholam celebrem habuisse, ac discipulis ibidem operam dedisse. *vid. ejus collect. Mathem. lib. 7. pag. m. 240.* idem referunt VOSSIUS *loc. cit.* quod *Alexandria* nempe Mathesin docuerit *Euclides Geometra*. Consentiente GRONOVIO *in notis ad Gellii lib. 1. cap. 20.* Immo GREGORIUS *loc. cit.* scribit. *Primum Eum fuisse qui ista in urbe Mathesin felicibus auspiciis docuit.* Quin & hæc Schola Mathematica *Alexandria* primo, *Euclidis* ductu, condita, optime de re Geometrica merita, quam plurimos

* BREVIS NARRATIO HISTORICA

rimos produxit discipulos. De qua sequentia notat VOSSIUS *loc. cit.* Valde autem illud commendat Scholam ab Euclide erectam Alexandria, quod non solum multos reliquerit discipulos; sed ab ejus tempore usque ad tempora Saracenica, vix ullum invenire sit nobile Mathematicum; quin vel Patria fuerit Alexandrinus, vel saltem Alexandria dederit operam Mathesi. Ex quibus haud collectu difficile est, Euclidem Geometram multum ac diu Alexandria versatum fuisse, istoque in oppido fixam tenuisse sedem; ac forte ibidem prognatum esse. Quapropter eo nomine Alexandrinum Eum merito dici posse conjicio.

§. III. Ætatem ejus quod attinet, de ea iterum varias in partes abeunt Viri Docti. Etenim GEORG. REISKIUS in *Margarita sua Philosophica lib. vi. cap. 1.* de tempore quando floruit Euclides noster miram alit opinionem; dum asserit, Euclidem Geometram Hippocrate esse antiquiorem; cum ejus patrem fuisse scribit. At vero exigui momenti hæc videtur sententia, quæ auctoritate nulla Veteris alicujus Scriptoris nititur. VALERIUS MAXIMUS vero *lib. 8. cap. 12.* longe ab eo dissensit, qui Euclidis Geometra ætatem incidisse in Platonis tempora statuit; eumque Platoni coævum facit: scribit enim *loc. cit.* conductores aræ sacræ à Platone ad Euclidem Geometram fuisse missos. Quibus verbis manifesto declarat, quod existimaverit, cum Plato inter vivos superesset, Euclidem Geometram vixisse. Hujus Autoris vestigia

stigia sequuntur illi, qui *Euclidem* ad *Platonis* tempora referunt. Sed notant Viri Docti ad hunc locum *Valerii Maximi*, Eum ibidem commisisse errorem; uti §. 8. adducemus. Quapropter, cum præter *Valerium*, alium nullum habemus Scriptorem præeuntem, dubia omnino, ac penitus rejicienda est sententia ea, qua *Euclides Geometra* ætatis ejusdem cum *Platone* censetur. In diversam iterum abit partem GREG. ABULPHARAJUS in *Hist. comp. Dynast. Euclidem Geometram*, *Platone* multo juniorem statuens, cum natu minorem *Apollonio*, qui longe post Tempora *Platonis* claruit, eum fuisse scribit. Verum neque hæc de vitæ tempore *Euclidis* omnibus numeris perfecta est opinio; Contradicunt enim unanimi consensu Veterum monumenta, in quibus *Apollonius Archimede Syracusano*, qui *Euclide Geometra* natu minor est, posterior ætate ponitur. Quibus addi meretur *Apollonium* sua scripta, super *Euclidea Elementa* tanquam firma principia, & fundamenta ædificasse; quæque idcirco tempore priora esse debuerint. Sed missis iis omnibus, quæ à Recentioribus Scriptoribus, de tempore, quo floruisse putant *Euclidem Geometram*, narrantur; ad Veteriores confugiendum esse censemus, illosque audiendos esse, quid de ætate *Euclidis* loquuntur, ut verum, vel saltem veritati proximum, vitæ tempus Autoris nostri ex illis intelligamus. Quare meo judicio haud contemnenda sunt *Procli*, & Antiquorum Græcorum, è quibus *Proclus* sua hausit, testimonio-

XII BREVIS NARRATIO HISTORICA

stimonia. Illi autem scribunt, *Euclidem Geometram*, Hippocrate, Leonte, Theudio, Hermotimo, Socrate, Platone, Eudoxo, Platonis discipulo, Menachmo, Eudoxi discipulo, natu minorem esse; verum Eratosthene, & Archimede, quia is *Euclidis* mentionem facit, natu majorem. Etenim PROCLUS in lib. 2. comment. in *Euclid.* commemoratis aliquot, Platone antiquioribus, æqualibus, ac discipulis, subjicit *Euclidem*, qui *Elementa* conscripsit, non multo ætate posteriorem illis fuisse; immo addit dein, *Euclidem* natu minorem esse Platone, minimum nonaginta annis. Porro ex eodem autore *Proclo* specialius discimus, *Euclidem* nostrum in Ægypto, sub *Ptolemao Lagi*, post *Alexandri Magni* mortem, primo Ægypti Rege, floruisse. Quam sententiam amplectuntur GREGORIUS in *præfat. in Euclid.* ac CLAVIUS in *Proleg. Euclidem.* ut & COMMANDINUS in *præfat. in Euclid.* RAMUS in *Schola Mathematica* & multi alii. Immo si RAMO loc. cit. lib. 1. pag. 22. & 23. & FABRICIO in *Bibl. Græc. lib. III. cap. XIV. §. 1.* credimus, noster Geometra huic *Ptolemao* fuit notus: addunt præterea è *Proclo* eum à *Ptolemao* Rege interrogatum fuisse; num quid esset via ad Geometriam magis compendiaria, quam sit ista σοιχειώ-εις? (Ita à *Proclo* fere semper vocatur) ad quam quæstionem ipsi à Rege propositam, eum respondisse refert *Proclus*: μη εἶναι βασιλικὴν ἁγρεύον ἐπὶ γεωμετρίαν: id est, non esse Regiam viam ad Geometriam. Conferatur SAMUEL TENULIUS in notis suis ad *jamblichi*

com-

comment. in *Nicomachi Arithmeticam*. Ubi etiam sub *Ptolemao Lagi* filio in *Ægypto Euclidem* fuisse professum affirmat. Hanc autem de ætate *Euclidis* è *Procli* scriptis sententiam collectam perpendentes, ei plus ponderis & firmitatis inesse, quam cæteris antea recensitis, qui ad sequentia attendit, facile concedet. Nam nobiscum recolentes tempus, quo vixit *Proclus Lycius*, cognominatus *Diadochus*, id est successor, quod circa annum Christi quingentesimum incidit; teste *Vossio de scient. Math. cap. 33. b. §. 26.* & *BLANCANO in Chronol. Mathem.* optime hac de re ex scriptis Græcorum antiquis, quæ successu temporis periere, erudiri potuit. Accedit quod ea, quæ de ætate *Euclidis* refert *Proclus*, ex *Theophrasti* & *Eudemi* scriptis Historiarum Geometricarum, quæ dein perditæ sunt, mutuo desumpsit: testante *COMMANDINO loc. cit.* *RAMO loc. cit.* & *TACQUET de ortu & Progressu Mathes. pag. 21.* Quod vero hi Autores Historiarum Geometricarum composuerint libros, *LAERTIUS* in vita *Theophrasti Erissii* narrat; Eum quatuor libros Historiarum Geometricarum scripto reliquisse; pariter *Eudemi* Historiæ Geometricæ laudantur à *SIMPLICIO ad lib. 1. Phys. Aristotelis*. Conferatur *JONSIUS de Scriptis Histor. Philos. lib. 1. cap. xv.* Ex horum scriptis de vero vitæ tempore *Euclidis* certo informari potuit *PROCLUS*; cum hi Viri eodem tempore ac *Euclides* floruerint; *Euclidis* cœtaneos eos fuisse *MENAGIUS ad Diog. Laërt. lib. 5. segm. 42.* observat; utpote

pote *Theophrastum* & *Eudemum Aristotelis* discipulos fuisse asserit. GRONOVIVS vero in not. ad *Auli Gellii lib. 13. cap. 5. Aristotelis* sodales fuisse notat. Porro VOSSIUS loc. supra cit. cap. 15. §. 1. scribit *Theophrastum* eodem ac *Euclides* tempore vixisse. Quibus juste ad lancem æquissimam ponderatis, in errores nos non incidere existimamus, si *Alexandrinum Mathematicum* nostrum, sub *Ptolemaeo Lagi* filio celebrem fuisse, cum *Proclo* statuamus. *Ptolemaus* autem, mortuo *Alexandro Magno*, primus *Ægypti* Rex, translato in *Philadelphum* filium regno, obiit anno primo Olympiadis cxxiv. ante Christum natum anno 282. notante PETAVIO *Ration. Temp. part. 1. lib. III. cap. xv.* Vel secundum *Fabricii* computum loc. cit. post quadraginta annorum imperium; animam egit anno 277. ante natum Salvatorem, Olympiade cxxiii. Quocirca plus quam trecentis ante æram Christianam annis, *Ægypto* imperare coepit *Ptolemaus* primus, uti recte censet GREGORIUS. in *præfat. laud.* seu uti CLAVIUS in *proleg.* scribit, ante nativitatem Christi anno 319. imperare incepit *Ptolemaus Lagi*. Itaque *Euclides Geometra* inter annum 319. & 282. ante nativitatem Christi inclaruisse habendus est; eoque temporis intervallo, *Alexandriæ* famosam suam Scholam Mathematicam erexisse, ac publice Geometriam discipulos docuisse; cum autore TACQUET loc. supra cit. vitam posuit *Euclides* noster anno 284. ante Christum; ideo circa annum 300. ante Christum natum imprimis floruit.

§. IV. Cum vero iis temporibus imprimis celebris erat *Platonis* Schola; Platoniorum usus est institutionibus, in quorum doctrina ita versatus est, ut summam facile sibi comparaverit laudem. Testatur enim **CLAVIUS** in *proleg. in Euclid.* Ipsum summa laude in Academicorum disciplina fuisse versatum. Ac cum in Academia *Platonis*, præceptoris instituto, Matheseos studium tunc maxime vigeat; *Euclides*, postquam Platoniorum dogmatibus satis instructus fuerat, totum animum ad disciplinas Mathematicas transtulit; in quibus sic eruditus est, quotidiana fere *Platonis* discipulorum consuetudine, ut progressus admirabiles, ac sempiterna ævi memoria dignissimos, in iis fecerit. Vid. **COMMANDINUS** in *Euclid. Elem. proleg.* Nihilominus ea, quibus imbutus erat, principia, Academicorum institutionibus sibi comparata; postea servavit. Itenim Platoniorum Doctrinam sectatus est. Quoniam enim Sectæ Platonice Patroni, cuncta corpora mundana, præcipue ad quinque corpora regularia, Pyramidem, sive Tetraëdron, Cubum sive Hexaëdron, Octaëdron, Dodecaëdron, & Icosaëdron, reducebant: quæque propterea corpora Platonica sæpe audiunt. Cum omnia ex quatuor Elementis constare credebant, Tetraëdron Igni, propter ejus cum acumine ignis similitudinem; Octaëdron Aëri, qui sicut aër igni, ita octaëdron Pyramidi levitate formaque proximum est; Icosaëdron Aquæ ob mobilitatem, quæ hæc

hæc figura huic Elemento similis est; Hexædron Terræ, ob stabilitatem ejus assignarunt; & Dodecaëdron denique Coelo compararunt, quod, sicut coelum duodecim signis Zodiaci cingitur, ita Dodecaëdron duodecim habet bases; item sicut Coelum suo ambitu reliqua in se comprehendit Elementa, ita Dodecaëdron inter quinque ista corpora regularia, quæ in eandem includi possunt Sphæram omnium est maximum, & quod reliqua omnium aptissime circumscribit. Videatur SAMUEL REYHERUS in *Dissert. de Euclide cap. 3. §. 4.* & MARSILIUS FICINUS in *Compendio in Platonis Timæum cap. 40.* Hinc etiam Euclides noster *Geometra*, totam suam Elementarem institutionem, ad hæc quinque corpora regularia reduxit. Etenim in suis Elementis, quinque hæc corpora Platonica, sub Geometrici examinis incudem, vocare studuit: & hunc sibi proposuisse, primarium Scopum, in Elementis suis condendis viderur. Scilicet ut omni ni-
 su examinaret quinque ista corpora Platonica, ac ut eorum rigidam daret apodeixin; propterea duodecim priores adornavit libros. Qua de re ita loquitur KEPLERUS, omnes omnino Propositiones, omnium librorum; exceptis iis, quæ ad numerum perfectum ducunt; ad mundanarum figurarum constitutionem referuntur: cum Elementorum institutionis finem statuerit, * κοσμητῶν σχημάτων
 habitudinem & compositionem. confer. GREGORIUS in *Prefat. in Euclid.* Ex quibus haud obscure quilibet facile derivare potest,
 Eucli-

Euclidem Geometram Sectæ Platonicae additum fuisse; ejusdemque Institutionis & Doctrinæ, quod ad Rerum Naturalium Scientiam, sectatorem haud contemnendum fuisse. Quapropter PROCLUS in *comm. in Euclid.* Eum Platicum fuisse disertis testatur verbis. Non igitur conjectura quadam hic nobis opus est, ut sciamus, qualisnam fuerit *Euclides Geometra*. Eum enim fuisse Philosophum Platicum, qui rerum naturalium Scientiæ, secundum Præceptoris sui præcepta, imprimis operam navavit, ac Geometricæ scientiæ studiosissimum; in qua summa laude excelluit, omnibus, ex antè dictis, clarum esse existimo. Ad hanc autem in Scientiis Naturalibus, & Geometricis peritiam, porro ei accesserant plura animi bona; quibus Natura Eum bearat. Erat enim Vir suavissimi ingenii, & contentionis minime amans. Nam de eo scribit PAPPUS *collect. Mathem. lib. 7. pag. m. 240.* *Quod Euclides, qui Elementa tradidit, ac qui Alexandria discipulis operam dedit, fuerit vir mitissimus, & benignissimus erga omnes, nullo modo infensus, sed accuratus, non arrogans.*

§. V. Præter hunc à nobis descriptum *Euclidem*, in Schola Platonica, Rerum Naturalium doctrinis, secundum Præceptoris mentem, cum institutum optime, tum etiam perfectè planeque eruditum; ac præterea rerum mathematicarum scientia instructum, & doctrina excultum: Scriptores tam Veteres, quam Recentiores, etiam
 * * *
 mep:

XVIII BREVIS NARRATIO HISTORICA

mentionem faciunt *Euclidis* : qui eo nomine celebratur , quod Philosophus fuerit Socraticus ; & Auditor ipsius *Socratis* describitur. Eum ajunt , *Megaris* , Græciæ oppido , ortum fuisse ; ibidemque habitasse , & Scholam habuisse publicam , ac idcirco *Euclidem Megarensē* appellari. Etenim de eo , recitato prius Atheniensium decreto , ita scribit **GELLIUS** *noct. attic. lib. 6. cap. 10.* Tum *Euclides* , qui indidem *Megaris* erat , quique ante id decretum , & esse *Athenis* , & Audire *Socratem* consueverat ; postquam id decretum sanxerunt , sub noctem , quum advesperasceret , tunica longa muliebri indutus , & pallio versicolore amictus , & caput rica velatus , è domo sua *Megaris* ad *Socratem* commeabat ; ut vel noctis aliquo tempore consiliorum , sermonumque ejus fieret particeps. Præterea **DIOG. LAERT.** qui ejus vitam describit , *lib. II. segm. 106.* similiter asserit *Euclidem* hunc *Socraticum* *Megarensē* esse , eo quod *Megaris* natus ac veritatus sit ; Sectamque condidit , ab ipso Autore , *Megaricam* dictam. Porro **STRABO** *Geogr. lib. 9. pag. 602.* Eundem *Megaris* oriundum statuit , quum de eo scribit , *habuit aliquando* , urbs scilicet *Megarensium* , *Scholam Philosophorum* , qui *Megarici* dicebantur , *successores Euclidis Socratici* , *Patria Megarensis*. Denique , ut alios omittam , **CICERO** *Academ. Quest. lib. 2. cap. 42.* testatur illum *Euclidem* , qui *Socratis* discipulus fuit , *Megaram* Patriam habuisse , ait enim ; *Post Euclides* , *Socratis discipulus* , *Megareus* &c. Quæ itaque testimonia istorum Scriptorum consona , Patriam

triam *Euclidis Socratici* Megaras fuisse abunde fati comprobant. Licet alii sedem ejus natalem in *scilia* quærant; ac ejus origines ex urbe Gela repetant, quum Eum Geloum faciunt. vid. DIOG. LAERT. *loc. cit.*

S. VI. In hujus vero *Euclidis Socratici* Ætatem, quando inclaruit, inquirendum jam nobis venit; ad quam determinandam multum nos juvant GELLII verba, paragrapho præcedenti 5ta. adducta: in quibus inter cætera ait, Eum *Athenas* ire, & *Socratem* audire fuisse solitum. Quibus addi merentur ea, quæ scribit DIOG. LAERT. in *Vita Euclidis lib. II. segm. 106.* Nam, inquit, post *Socratis Mortem*, venisse *Platonem*, ac reliquos *Philosophos*, metu *Atrocitatis Tyrannorum* compulso, ad hunc *Euclidem Megarenses*; à quo hospitio humanissime fuere excepti; notante STANLEJO in *Histor. Philos. in Vita Euclid.* Ex quibus allatis verbis attendenti manifesto apparere posse puto; *Euclidem Socraticum*, post mortem *Socratis* Præceptoris sui, vixisse; ac *Platonis* tempore *Socratis* discipuli nomine celebratum fuisse; cum vero eodem Præceptore *Socrate* usi sunt; *Platoni* notum fuisse. Unde *Socraticus* noster *Euclides Platonis* coætaneus ponitur. *Socrates* autem teste DIOG. LAERT. *lib. II. seg. 44.* mortuus est anno primo Olympiadis xcv. postquam septuaginta annos exegisset. Ac *Plato* annos natus duo de triginta adiit *Euclidem Megarenses*, autore FABRICIO *Biblioth. Græc. lib. III. cap. I. §. I.* Verum

Eu-

Euclides Megarensis, ante decretum, de quo loquitur GELIUS loco §. 5. cit. quo caverant Athenienses, qui *Megarum* civis esset, si intulisset *Athenas* pedem deprehensus esset, ut ea res ei homini capitalis esset; ante hoc decretum *Euclides Megarensis Athenis* esse, & *Socratem* audire consueverat. Quapropter suspicor clarum ac celebrem tum præ cæteris fuisse *Socraticum Euclidem*; cum *Plato* ad Eum *Megaras* venit; ac ni fallor Scholam suam jam *Megaræ* erexisse, cum una cum *Platone* reliqui Philosophi ad Eum confugiunt. Hinc videtur sequi *Euclidem Megarenses* quidem dicendum esse *Platonis* coætaneum, quod *Platonis* tempore adhuc in vivis esset; Verum eam *Platone* seniore fuisse; Quocirca imprimis circa annum 400. ante Christum natum, *Euclidem Socraticum* floruisse ponendum est.

§. VII. Cognitis jam Patria, & Ætate hujus *Euclidis Megarensis*; porro ejus Doctrinas, quibus excelluit, & mores, quibus à natura donatus fuit, investigare utile nobis futurum esse existimamus. Super his rebus DIOG. LAERTIUM rogantibus, in suis scriptis respondet, lib. II. *segm.* 106. Eum litigiosis disputationibus cum primis addictum fuisse; ac ea propter in *Socratis* reprehensionem incurrisse: qui LAERTIO teste lib. II. *segm.* 30. O, inquit, *Euclide, sophistis quidem uti poteris, hominibus non poteris.* Ideo ab ejus contentiosa indole Secta ejus *Eristica* dicebatur; quapropter LAERT. lib. II. *segm.*

24. in ejus Scholam ita invehit, quod ait, non σχολή *Scholam*, sed μόνη *Merum* fel eam esse. Quo videntur respicere ea, quibus *Timon* illum una cum cæteris *Socraticis* mordet, quæ *LAERT. lib. II. segm. 107.* refert.

*Non ego horum nugatorum curam gero, nec
alterius*

*Cujusquam; non Phadonis, quisquis ille sit,
nec litigiosi*

*Euclidis, qui Megarensibus contentionis rabiem
invexit.*

In argumentationibus non assumptionibus, sed conclusionibus utebatur. Disputationes ex similibus institutas penitus tollebat. Unum esse bonum ajebat, cujus diversa sunt tantum nomina, prudentia scilicet, *Dei, mentis*, & cætera. Conferatur *STANLEJUS. in Histor. Philos. in vita Euclidis.* Quæ è *Laërtio* allata, hujus *Euclidis* disciplinas, quibus maxime se exercuit; ac quas publice tradidit, satis manifesto declarant; quum ex iis tantum mihi colligere posse videor; Eum imprimis *Dialecticam* professum fuisse; ac discipulos suos in disputandi arte exercuisse; totumque suum studium Dialecticæ peritiæ impendisse; ac ejus rei imprimis gnarum fuisse. Quapropter, ni fallor, apud *SUIDAM, in Lexico ad vocabulum Euclides*, titulo *Philosophi Megarensis* tantum notatur; nequæ apud ullum Autorem reperio eum Geometriæ studium vel primis labiis

* * 3

gustasse.

gustasse, vel ejus scientia imbutum fuisse. Immo SUIDAM Eum solummodo *Philosophi* nomine appellasse, non absque ratione factum esse conjicio; quia nempe apud Veteres Scriptores Græcos, è quibus *Suidas* sua collegit, tantummodo *Philosophi* nomine occurrit. Absit itaque ut Eum *Geometra* nomine ornaremus, quum plus arti sophisticæ, quæ à quolibet *Geometra* quam longissime remota esse debet, quam severo rerum examini tribuisse visus sit. Porro *Laërtii* verba hujus *Euclidis Philosophi* indolem & mores haud obscure cognoscere faciunt; vehementem scilicet Eum ac litigiosum fuisse; insuper disputandi eum per cupidum adeo fuisse, ut *Megarensis* contentionis rabiem invexerit.

§. VIII. Quod si ea, quæ de utroque *Euclide* reperire potui, hucusque enarrata, introspeciamus, illi, qui *Euclidem Geometram*, *Megaris* ortum fuisse sentiunt; ac propterea *Megarenses* vocant; *Geometram* nostrum, cum *Philosopho* illo *Megarico*, seu *Socratico* confundere mihi videntur. In his vero me parum, aut omnino nihil à recta via aberrare, si fontem ac originem, unde istam suam sententiam deduxere, sciscitemur; illa me persuadere videntur. Nam cum *Euclidem Geometram Platonis* tempore floruisse statuunt, & *Euclides* ille qui ad *Platonis* tempora refertur; ac propterea ab illis *Platonis* æqualis habetur, fuit *Philosophus Socraticus*, *Megaris* natus, ac educatus, disci-

discipulosque ibidem instituens; sicuti §. 5. è Veterum monumentis apparuit; ac proin-
 cujus Patria erat urbs illa *Megara*, vel *Me-*
gara dicta; inde n̄ fallor, quia haud rite à
 se invicem ambo distinguunt *Euclides*, in
 eam opinionem, affirmandi *Euclidem Geome-*
tram Megareum esse, adducti sunt. Funda-
 mentum itaque hujus conjecturæ in eo præ-
 cipue situm est; quod *Euclidis Geometra* æ-
 tatem in *Platonis* tempora incidisse opinan-
 tur. Verum observantibus VOSSIO de
Scient. Math. cap. 15. §. 1. CLAVIO in
Proleg. in Euclid. & DECHALES in tract.
Prooem. de ortu & progressu Mathes. pag. 8.
 ad hunc errorem circa Ætatem *Euclidis* no-
 stri committendum, omnibus prævit VA-
 LERIUS MAXIMUS lib. 8. cap. 12. scri-
 bens. *Platonis quoque eruditissimum pectus hac*
cogitatio attigit; qui conductores Sacra ara de
modo & forma ejus secum sermonem confer-
re conatos, ad EUCLIDEM GEOMETRAM
ire jussit. Ex quibus itaque collegere, *Eucli-*
dem Geometram iisdem Temporibus cum
Platone inclaruisse. Sed notant Viri docti
 ad hunc Locum, mendum esse in iis *Valerii*
 verbis: quippe observat PERIZONIUS quod
Mitallerius, emendavit EUDOXUM: quo-
 niam à PLUTARCHO appellatur *Eudoxus*
Gnidius ad quem *Plato* eos oblegavit. Idem
 laudatur in nobis ad GELLII lib. 6. cap. 10.
 dicitur enim ibidem; *Memini quidem Vale-*
rius Maximus loc. cit. Platonem quosdam ad
Euclidem Geometram misisse, sed mendum ibidem
laet; & recte Mitallerius in Editione sua re-
finnit

fituit EUDOXUM Geometram. Ita legendum offendit Plutarchus de Deo Socratis, qui in Geometrica questione Eudoxi Cnidii Platonis discipuli meminit. Idem sentit MENAGIUS ad DIOG. LAERT. lib. II. scgm. 106. scribens, illa lectio Mitalleri temporum rationi optime congruit. Vixit enim Eudoxus Cnidius nobilis ille Geometra iisdem temporibus, quibus Plato, cujus etiam auditor fuit; sicuti ex catalogo Mathematicorum, à Proclo ornato §. I. colligere est. Quare Valerius de vero nomine Geometra parum sollicitus fuerit, & Celeberrimi Geometra nomen haud satis circumspecte arripuerit. Monente TORRENIO ad hunc locum. Observat porro VOSSIUS loc. cit. Delios ad Euclidem Geometram missos, nequidem de Socratico verum esse; sed quod Plato rejecerit illud Problema ad discipulos suos. Denique PETRUS RAMUS in Schola Mathem. lib. I. pag. m. 22. 23. existimat, quod hac in re major fides sit habenda Eratostheni, qui Euclidem Geometram proxime secutus est; quam Valerio: ERATOSTHENES autem in Epistola quadam ad Regem Ptolemaum, inter cætera hæc scribit verba. Aliquando vero post ajunt Delios grassante morbo, secundum Oraculum, duplicare quandam Aram jussos, incidisse in eandem anxietatem, tumque implorando Platonicos in Academia Geometras oravisse, ut questionem dissolverent. &c. Quapropter hinc etiam liquido attendenti cuilibet constare potest, omnino errasse in nominis descriptione Valerium. Nam nec quidquam duplicati Cubi ad
Eu-

Euclidem Geometram ab Autoribus refertur ; nec *Euclides* in *Elementis* quidquam nominatim de duplicando Cubo proposuit. Cum itaque hæc omnia æqua lance ponderentur , nullus inficias ire potest ; quin ille locus *Valerii* vitio laboret ; nomenque *Euclidis Geometra* ibidem delendum sit. Verum destructo VALERII citato loco , corruere eorum sententiam , qui *Euclidis Geometra* Ætatem ad *Platonis* tempora referunt , meo iudicio videtur : cum præter *Valerium* è Veteribus testem nullum alium pro hac opinione habent. Sed quia ex eadem conjectura manifesto satis orta est ; ea cogitatio de Patria *Euclidis Geometra* , qua *Megaram* fuisse statuitur ; cum binos hos inter se confundunt *Euclides* ; idcirco *Euclidem Geometram* , *Megarensen* dicere non auderem.

§. IX. Non autem inter se confundendos esse binos hos *Euclides* , sed à se invicem omnino distinguendos esse , multa sunt quæ id suadent. In utroque enim *Euclide* tot characteres differentes licet reperire , qui abunde alterum ab altero diversum fuisse , sine ullo dubio palam ostendunt. Etenim tam *Geometra Euclidis* , quam *Philosophi Socratici* Patriam , in qua quilibet floruit , Domicilium habuit , ac Publice Scientias docuit ; si nobis ob oculos ponamus ; ea quæ §. 2. 5. & 8. adduximus , ut utriusque eandem fuisse putaremus , non permittunt. Quum *Euclides* , qui Geometriam exercuit , ac publice eam professus fuit , *Alexandria*

XVI. BREVIS NARRATIO HISTORICA

Scholam suam habuit, ibidemque vitam degit. Alter vero *Euclides*, qui *Socratis* Auditor fuit, ac Philosophiam publice docuit, *Megara* discipulos instituit, & erudit, patriosque eo in oppido habuit Lares. Præterea magis eos à se invicem distinguere facit utriusque *Ætas* diversa. Quippe *Socraticus* ille *Philosophus*, Tempore *Socratis* jam erat notus. §. 6. ejusque Auditor fuit, ac *Megara* eo tempore, Philosophiæ partem eam, quæ *Dialectica* vocatur, instituit. *Geometra* autem *Euclides* sub *Ptolemaeo Lagi* filio demum clarus fuit, §. 3. eoque tempore *Geometriam* docuit. A morte vero *Socratis* usque ad *Ptolemaum* primum elapsi sunt anni xcv. monente STANLEJO in *vita Euclidis*. Quare ad minimum xc. anni effluxere, inter *Euclidem Socraticum*, & *Euclidem Geometram*; uti censet VOSSIUS de *Scient. Mathem. loc. cit.* Multo itaque junior fuit *Euclides Geometra*, quam *Megarensis Euclides*. Confer. CLAVIUS in *Proleg. in Euclid.* GREGORIUS in *præfat.* COMMANDINUS in *Euclid. Elem. Proleg.* & multi alii. Porro inter illos discrimen licet observare, si Scholas, in quibus quilibet eruditus fuit, contemplemur. Prodiit enim *Megarensis Euclides* è *Socratis* Schola, *Mathematicus* vero *Euclides* è *Platonica*. Augetur illud discrimen inter ambos illos *Euclides*, si diversa studiorum genera, in quibus se primo exercuere; si diversas doctrinarum species, quas dein publice professi sunt, cogitemus. Fuit enim *Euclides Socraticus Parmenidis*

nidis librorum valde studiosus, Autore LA-
 ERTIO in ejus vita, ac in disputandi arte
 imprimis versatus est; *Alexandrinus* autem
Euclides, *Platonis* ac *Platoniorum* de Rerum
 Naturalium scientia, sententias & rationes
 investigavit, easque omni nisu studuit, iis-
 que percipiendis & examinandis totus in
 cubuit; dein Geometriam adiit, eamque
 maxima cum laude excoluit. Docuit *Mega-*
rensis Euclides artem Dialecticam, in eaque
 scientia suos præcipue erudit discipulos;
 Informavit *Alexandrinus Euclides* Quantorum
 contemplationes, & in iis speculandis &
 rimandis Auditores suos occupatos tenuit.
 Nec parum exaggerabunt differentiam inter
 ambos hos homines statuendam, monumen-
 ta, quibus famam suam longam effecere.
 Celebratur *Euclides Megarensis*, quod Dialo-
 gos sex composuerit, ac scriptis reliquerit,
 qui recensentur à DIOG. LAERT. in ejus
 vita, ac sunt sequentes, *Lamprias*, *Aeschines*,
Phoenix, vel ut apud *Suidam*, *Phoeni-*
ces, *Crito*, *Alcibiades*, *Eroticus*. Laudatur
Alexandrinus Euclides, quod scripta ad rem
 Mathematicam omnia spectantia composue-
 rit, litterisque mandaverit. Distinguuntur
 ulterius à se invicem bini hi Autores, quate-
 nus *Megarensis* Philosophi tantum nomine
 occurrit, *Alexandrinus* autem, Geometra
 ubique audit. Tandem mores quibus uter-
 que donatus erat, facile inter ambos nota-
 bilem efficient distinctionem. Sicuti enim
 natu major *Euclides* vehemens ac litigiosus
 fuit, sic minor natu, *Geometra* nempe no-
 ster

ster suaviſſimi ingenii Vir fuit , ab omni contentione abhorrens. Quod ſi itaque ea, quæ in utroque obſervavimus *Euclide*, inter ſe comparemus , aſſerere neminem audere ſuſpisor , ambos illos , qui *Euclidis* nomine apud prædictos Autores veniunt , pro uno eodemque habendos eſſe ; contra diſtinctas omnino fuiſſe perſonas , neutiquam inter ſe confundendas ; aſſirmare omnes optimo jure teneri. Conſentiunt GREGORIUS *in præfat.* SAVILIUS. *in præleſt. in Euclid.* CLAVIUS *in proleg.* COMMANDINUS *in proleg.* & VOSSIUS *loc. cit.* multique alii.

§. X. Præter jam dictos binos *Euclides*, *Philophum* nempe, & *Geometram*, alii apud Scriptores leguntur , qui nomine *Euclidis* celebrantur: quos ob nominis convenientiam hic brevibus recensere à propoſito noſtro non alienum foret. Quorum primus eſt *Euclides Archon* qui Athenis fuit anno 2do Olympiadis LXXXVII. Secundus fuit itidem *Euclides Archon* , ſub quo triginta Tyranni expulſi , ille vixit anno 2do Olympiadis XCIV. Tertius *Euclides Athenienſis*, ſed forte non diverſus à prioribus. Quartus fuit *Euclides Vates* , *Xenophonti* amicus. Quintus *Euclides Lapidæ*, cujus mentio in *Platonis* Teſtamento exiſtat. Sextus fuit *Euclides Frater Cleomedis*, Lacedæmoniorum Regis. Septimus vocatur *Euclides Pacatanus* , cujus antidotum refertur à *Galeno* in antidotis. Octavus eſt *Euclides Platonicus*. Nonus fuit *Euclides Maximi Byz.* filius. Decimus appellatur

tur *Euclides Parasitus*, *Smicrini filius*, cognomento *σεῦτλον*. Undecimus fuit *Euclides Laco*. Duodecimus fuit *Euclides Rhetor*, cujus meminit STRABO *Geogr. lib. 14. pag. 969*. Confer. FABRICIUS in *Bibliotheca Grac. lib. 3. cap. 14. §. 1. in notis*. & STANLEJUS in *Vita Euclidis Megarensis*

§. XII. Sed missis reliquis omnibus, de *Euclide Geometra* tantum scribere nobis animus est: cujus scripta, quibus sui nobis commendaverit memoriam, recensere ordinis & instituti ratio postulare videtur. Ea vero GREGORIUS in *præfat. in Euclid. partim* è *Pappo Alexandrino*, *lib. 7. collect. Mathem.* Partim è *Proclo lib. 2. Comment. in Euclid. collegit*: eaque porro recensentur à DECHALES in *tractatu de Ortu & progressu Mathes.* CLAVIO in *Proleg. in Euclid.* FABRICIO in *Biblioth. Grac. lib. 3. cap. 14.* VOSSIO de *Scientiis Mathem.* multis aliis: ac sequentia enumerantur. Inter *Euclidis Geometra* scripta, quæ partim periere, partim supersunt; primo numerantur *Libri tres Porismatum*; Verum hi magno rei Geometricæ, præsertim loci resoluti, damno periere. Quædam tamen eorum apud *Pappum* in *lib. 7. Collect. Mathem.* supersunt; reliqua autem hodie non exstant. Secundo recensentur libri duo *Locorum ad superficiem*, ad Analysis Geometricam pertinentes; hi etiam libri temporum injuria periere, præterquam quod *Pappus Alexandrinus* horum quatuor lemmata notavit. Tertio conscripsit *Librum Falla-*

Fallaciarum, neque hic hodie reperitur; in eo vero rationes falsa deprehendendi, & paralogismos arguendi ostendit; quod scriptum, non sine notabili rei Logicæ ac Mathematicæ jactura, perditum est. *Quarto* composuit quatuor libros *Conicorum*, quos *Apollonius Pergæus* explevit, eisque alios quatuor libros adjecit, qui hodie sub *Apollonii* nomine leguntur. *Quinto* refert DECHALES *librum de sphaera* ab Euclide ornatum, qui cum cæteris periit. Præter hos libros perditos alii sunt, qui feliciori fato ab interitu servati sunt: inter eos tamen varii reperiuntur, de quibus valde dubitatur an quidem sint *Euclidis*. *Sexto* Euclidi tribuitur liber unicus *Datorum*, quæ ad analysin Geometricam sunt comparata, & ejus quasi *Elementa* Veteribus Geometris familiaria. Inter alios hunc *Datorum* librum succincte demonstratum in lucem emisit *Isaacus Barrow*; Ac olim à *Claudio Hardy* cum *Marini Philosophi* Commentario Græcè emissus, ac Latine versus est, additis obscurioribus locis Scholiis necessariis. vid. VOSSIUS *de Scient. Math. in addendis pag. m. 433*. Idque felicius præstitit *Hardy*, quam antea *Zambertus*, qui itidem hunc *Datorum* librum Latine vertit. *Septimo* Ei adscribuntur *Tractatus duo Musici*, nempe *Introductio Harmonica* & *Sectio Canonis*: dubitat autem GREGORIUS an uterque ab *Euclide* sit scriptus; qui hodie eo nomine *Euclidi* ab aliis adjudicantur; nam MEIBOMIUS eos tractatus musicos *Euclidis* tribuit; cui assentitur FABRICIUS *loc. cit.*

cis. MEIBOMIUS omnium optime in eos Commentatus est; eosque Volumini suo *Versum Musicorum* inseruit. *Octavo* inter ejus Scripta occurrit liber unicus *Phaenomenorum*; in quo solo Coelestia, sive Astronomiae principia attingit. Hunc VOSSIUS *loc. cit.* à Bartholomeo Zamberto cum reliquis quibusdam Opusculis Latine versum fuisse, refert. Graece & Latine sine Demonstrationibus inter cætera Euclidis Scripta *Phaenomena* edidit Conradus Dasypodius. Nono scripto reliquit Euclides *Opticam*, & *Catoptricam*; verum GREGORIUS & SAVILIUS multa se suadere dicunt, ad suspicandum opus illud, quod hodie *Optica* & *Catoptrica* Euclidis vocatur, spurium esse; vel temporis lapsu prorsus corruptum. Interpretatus est *Opticam* & *Catoptricam* Joannes Pena; tum Hetrusco idiomate, ex interpretatione Ignatii Dantis lucem vidit hic libellus; sed Autore *Blancano*; Ignatii expositio mutila est & manca. *Decimo* additur Scriptis Euclidis editis liber *de Divisionibus*, qui latine tantum exstat: Multi censent librum *Euclidis de Divisionibus* eundem esse libellum Arabica Lingua scriptum de superficierum divisionibus, *Machometo Bagdedino* vulgo adscriptum; qui cura & studio Joannis Dee Londinensis, & Fredrici Commandini latine versus lucem vidit. Savilius autem & Gregorius illum libellum non *Euclidis* esse opinantur; constat tamen *Euclidem de Divisionibus* librum scripsisse. *Undecimo* his adjungit Gregorius, Fragmentum, quod in *Zamberti* editione latina Euclidi addicitur;

in quo agitur de *Levi & Ponderoso*; sed pro spurio id habet SAVILIUS in *praef. in Euclid.* Duodecimo Scripsit *Euclides* absolutum opus *Elementorum*, cum Sole & Luna duraturum; quod plusquam 2000. annos magnam æstimationem obtinuit. De hujus editionibus & commentariis in sequentibus in specie §. 32. agere constituimus. Super his *Euclidis* Scriptis omnino legi merentur quæ de iis notarunt GREGORIUS in *præfat.* & FABRICIUS in *Biblioth. Græc. lib. III. cap. 14. §. XI-XVI. pag. 377-381.*

§. XII. Ex his vero omnibus Scriptis enumeratis, quæ *Euclidis* nomine veniunt, *Elementorum* librum elegimus; de quo pauca differemus, cætera silentio prætereuntes. Quippe sunt *Elementa Euclidis*, quæ præ reliquis præcipue in omnium versantur manibus; quæque à cunctis Geometriæ studiosis nocte dieque tractentur. Sunt *Elementa tantum Planorum, & Solidorum*, quæ in hac editione occurrunt; de iis itaque permagni nostra interest scire, quid Autores sentiunt. *Euclidem Geometram Elementorum* opus construxisse, inter omnes, tam Antiquiores, quam Recentiores convenit Autores. Et quamvis ante Eum à diversis *Elementa* sint composita Geometrica, ac scriptis consignata; sicuti ex *Procli* & aliorum testimonius constat; cum multi ante Eum inclauere Viri, de rebus Geometricis optime meriti, non solum in *Ægypto*, sed etiam in *Græcia*, qui sua super Mathematica disci-

disciplina cogitata & inventa litteris notarunt: tamen VOSSIO teste *de Scient. Math. cap. 14. Euclidis Elementa* sunt opus vetustissimum quod in Geometria habemus; cum reliquorum præclarorum Geometrarum opera, temporis injuria periere. Præterea opus, quod *Elementa* inscripsit, omnium Græcorum absolutissimum est corpus principiorum Geometriæ; non obstantibus aliis Geometriæ Elementis, à diversis compositis. Quippe in Græcis primus ille fuit, qui omnia fundamenta, ad Geometriæ Scientiam ducuntia, in *Elementari* suo corpore collegit; ac collecta digessit. Hac de causa depingebatur *Euclides* digitis demetiens; unde SIDONIUS APOLLINARIS *lib. 9. Epist. 9.* ait, *per Gymnasia pingi Euclidem, propter mensurarum spatia, digitis laxatis.* In his autem *Elementaribus* institutionibus, adornandis, non omnium Problematum, & Theorematum unicus Inventor & Autor statuendus est *Euclides*; verum aliorum Autorum tum inventis, tum scriptis, in suis Elementis componendis, usus est; quorum ea, quæ invenerunt, vel in ordinem redegit; vel quæ non satis valide demonstrata erant, firmissimis munivit demonstrationibus. Quapropter *Elementa Euclidea*, quo ad maximam partem, originem suam traxere, ex Scriptis Geometrarum, vel ante *Euclidis* tempora, vel iisdem temporibus inclarescentium; quæ consuluit. Ita ut hoc corpus *Elementorum* sit compositum, partim ex Problematibus, & Theorematibus ab aliis excogitatis; quæ ex

iis

iis selegit, utpote ad propositum suum assequendum ducentia; ac quæ in convenientem ordinem redegit; vel si firmæ desissent probationes, evidentibus Demonstrationibus confirmavit; partim ex Propositionibus à se inventis, probationibus invictis, iis additis. Quæ tamen omnia in concinnum istum ordinem adduxit, quo hodie *Elementa Euclidea* sunt ornata. Etenim PROCLUS *lib. 2. Comment. in Euclid.* nobis autor est, *Euclidem* multa in suis Elementis ab aliis inventa collegisse, multa *Eudoxi* ordinasse, multa *Theæteti* perfecisse; ea præterea quæ laxius à prioribus demonstrata erant, firmissimis Apodeixibus, quæ nec coargui, nec convinci possunt, munivisse. Ea propter à *Proclo* aliisque Veteribus Scriptoribus κατ' ἐξοχὴν dictus est σοφιστικῆς, Elementorum Constructor, & Demonstrator scilicet, ac Geometra: conferantur RICCIOLUS *Chron. pars. 2.* GREGORIUS *in præfat.* COMMANDINUS. *proleg. in Euclid.* CLAVIUS *Proleg. in Euclid.* DECHALES, *loc. cit.* VOSSIUS *loc. cit.*

§. XIII. Quod vero *Euclidis Elementa* multum debeant aliorum cogitatis, ac inventa pristinorum Geometrarum contineant, è quibus sunt conflata; extra omnem dubitationis aleam ponunt Propositiones & Demonstrationes, quæ in ipsis Elementis occurrunt: quarum Inventores passim apud Veteres nominantur, quibus etiam Inventionis gloria tribuitur. Etenim celebratur
THA-

THALES MILESIUS, qui primus nomine Sapiientis est appellatus, Eum invenisse Ifo-
 scelium Triangulorum angulos ad basin esse
 æquales : quæ est PROPOSITIO 5. ELE-
 MENTI. I. Eandem propositionem univer-
 saliore reddidit GEMINUS. Geometra.
 Laudatur itidem OENOPIDES CHIUS,
 ob inventum illud præclare, perpendicula-
 rem nempe ad datam lineam ex puncto ex-
 tra eam dato ducere; illaque est PROPO-
 SITIO. 12. ELEMENTI. I. Memoratur,
 æqualitatem angulorum ad verticem opposi-
 torum THALETEM MILESIUM detexisse;
 quam PROPOSITIONEM *Euclides* 15. ELE-
 MENTI. I. fecit. Laus debetur EUPHOR-
 BO PHRYGI, quod modum, cujuslibet
 Trianguli ex tribus lineis componendi, in-
 venerit; eaque est in ordine Euclideo 22.
 PROPOSITIO ELEMENTI. I. Quæ hanc
 proxime sequitur 27. PROPOSITIO citati
 Elementi, inventis OENOPIDIS CHII
 debetur; cum Geometra ille demonstravit
 ad datum punctum lineæ propositæ, angulo
 dato, æqualem angulum rectilineum consti-
 tuere. *De thales* autem existimat, Eum non
 invenisse ipsam Propositionem, sed Demon-
 strationem aliquam reperisse. Inter THA-
 LETIS MILESII inventa Geometrica, nu-
 meratur porro æqualitas omnimoda Trian-
 gulorum, unum latus, & duos angulos ad
 invicem æquales habentium; quæ est apud
Euclidem PROPOSITIO. 26. ELEMENTI.
 I. Præterea, nullus est, qui vel primis, ut
 ajunt, labiis, Geometricum gustavit studium,

vel parum se in eo exercuit, quin PYTHAGORÆ in Geometria merita, propter inventa ejus utilissima, quæ inter *Euclidis Elementa* reperiuntur, extolli admodum animadverterit. Ille enim Autor est, Trianguli cujuscunque rectilinei tres angulos simul sumtos duobus rectis æquales esse; quæ est 32. PROPOSITIO. ELEMENTI. I. Eidem huic præclaro Geometræ acceptas referimus PROPOSITIONES. 44, 47. ejusque conversam 48. ELEMENTI. I. Quarum 47. PROPOSITIO speciali notatur denominatione, satis indicante, PYTHAGORAM primum Autorem habere; cum *Hecatombes Pythagorici* nomen gerit, sub eoque titulo passim apud Scriptores celebratur. Hujus vero denominationis originem petunt ab oblatione Boum, à *Pythagora* Musis facta, in gratiarum actionem, pro ejus Demonstrationis inventione. Hæc est illa adeo celebris Propositio, quæ ob ingentem suam utilitatem, Inventoris sui famam immortalem reddidit. Præter has recitatas Propositiones in Elemento primo *Euclidis* occurrentes, aliæ etiam sunt, quæ in sequentibus Euclidis Elementis reperiuntur. Nam THALETEM MILESIUM, angulum in semicirculo esse rectum, invenisse referunt; eaque est apud *Euclidem* PROPOSITIO 31. ELEMENTI. III. Porro inter ejusdem THALETIS inventa variæ Propositiones Elementi Quarti enumerantur. Etenim tribui Ei solent à multis Scriptoribus PROPOSITIONES. 2, 3, 4. & 5. ELEMENTI. IV.

Qui-

Quibus addunt, Eam reperisse modum, Triangulum Æquilaterum in Circulo inscribendi; cujus inventi lætitia elatus, Bovem Musis immolasse dicitur. Porro sunt qui statuunt, QUINTUM EUCLIDIS ELEMENTUM ab EUDOXO CNIDIO esse compositum: quia EUDOXO à veteribus, de Proportionibus à se inventis, multa ascribuntur. Certum enim est è testimoniis antiquorum, EUDOXUM de Proportionibus scripsisse. Si itaque omnia, quæ in ELEMENTO V. EUCLIDIS occurrunt, non sunt EUDOXI, saltem pleraque ab ipso profecta esse, *Proclus* clare satis testatur. Quare *Euclides* ea, quæ de Proportionibus habet, ex EUDOXI scriptis hausisse, si non omnia, saltem plurima, censendus est; cum *Proclus* ait, *Euclidem* multa *Eudoxi* in suis Elementis in ordinem redegis-
 se. Memoratur etiam THEÆTETUS, ob Demonstrationem PROPOSITIONIS. 10. ELEMENTI. X. à se primo datam. Denique quæ de SOLIDIS, tribus ultimis ELEMENTIS, nempe XI, XII, XIII. demonstravit *Euclides*, in iis THEÆTETUM, ARISTÆUM, aliosque secutum esse *Euclidem*, Autores referunt. Verum inde non derogatur, ejus laudi, quod aliorum placita consuluerit; cum inconcussis fundamentis Autorum inventa, ordine nunquam corrigendo, superstruxerit. Videantur PROCLI *Comments. in Euclid.* DECHALES in *Tract. de ortu & Progressu Mathes.* pag. 7. 8. & TACQUET

QUET in *Historica* narrat de ortu & progressu
Mathes. aliique plures.

§. XIV. Hoc vero Elementorum corpus, secundum multorum Doctorum sententiam, *Euclides* divisit in *Tredecim* libros; licet vulgo à nonnullis *quindecim* enumerentur Elementorum libri: immo in quibusdam exemplaribus *Sedecim* *Euclidis* nomen ferunt. Verum observat VOSSIUS de *Scient. Math. cap. xv. §. 3.* etiamsi multi putent Elementa hæc constare libris xv. rem tamen non ita apertam esse de duobus postremis. Ansam dubitandi de XIV. & XV. Elementis, an quidem *Euclidis* sint, præbet *Theonis* in *Euclidem* Commentarius. Etenim *Theon Alexandrinus*, *Euclidis* Elementorum valde studiosus, qui ea suis exposuit Discipulis, claruit *Theodosio Magno* imperante, anno Christi 395. mortuo, uti refert VOSSIUS *loc. cit. cap. 16. §. 9.* Ille vero *Theon* in *tredecim* *Euclidis* priores libros, tantum commentatus est; uti *Campani* secundum *Theonis* expositionem, Editio Elementorum *Euclidis* testatur. Qua itaque expositione in hæc Elementa manifesto indicasse videtur, Eum *tredecim* tantum agnovisse libros Elementorum ab *Euclide* conscriptos. Præterea *Marinus Philosophus*, *Procli Diadochi* discipulus, circa annum Christi 500. florens, in *Protheoria* ad *Data* *Euclidis*, *Tredecim* Elementorum libros *Euclidi* solummodo tribuit. Tot etiam libri reperiuntur, in Elementorum *Euclidis* versione Arabica *Nasîridîni Tusini*

ſini Perſæ, quæ luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ anno 1594. ex Typographia Medicea. Sicuti multa alia ſunt exemplaria, uti *Rhodiis*, *Richardi*, aliorumque, in quibus ultimi duo nempe XIV. & XV. non reperiuntur libri. Accedit quod ultima propositio Elementi XIII. veluti colophonem operi imponit. Conferatur FABRICIUS in *Biblioth. Græc. lib. III. cap. 14.* Sed porro obſervandum venit, Librum decimum quartum propriam habere præſationem, quam nec primum Euclidis Elementum habet; *non vano argumento* inquit GREGORIUS in *præſat. in Elem. Euclid. duos ultimos libros alterius eſſe quam Euclidis.* Conſentiente VOSSIO de *ſcient. Math. cap. xv. §. 3.* & DECHALES in *Tract. de ortu & progreſſ. Math. pag. 8. 9.* Ex quibus abunde videtur conſtare, Tredecim Elementorum libros, ab Euclide tantum fuiſſe compositos; binos reliquos ſcilicet XIV. & XV. alium agnoſcere Autorem. Hi vero poſteriores bini libri, à quamplurimis, Commentarii HYP- SICLIS ALEXANDRINI habentur. Vixit *Hypſicles* circa Tempora *Ptolemæi Labyri* (nempe toto ſeculo, vel paulo ulterius, ante natum Chriſtum.) *Iſidori* ſummi Mathematici diſcipulus. VOSSIUS *loc. cit. cap. 54. §. 7.* Ipſa præſatio quæ Elemento XIV. præmittitur, eſt proœmium *Hypſiclis Alexandrini* ad *Protarchum*: ex quo haud diffi- culter colligere eſt, illud neutiquam convenire *Euclidis*, at bene *Hypſicli Alexandrino*, de quo in iſto loquitur Proœmio. Ut cæ-

tera tacere, quot verba, tot argumenta, Euclidem non esse ejus Autorem arguentia, reperiuntur. Etenim mentionem injicit scriptorum *Apollonii*; de comparatione Dodecaëdri, & Icosaëdri, eidem sphaeræ inscriptorum: id neutiquam de *Euclide*, qui ante *Apollonium* scriptis inclaruit, prædicari potest; sed quidem de *Hypsicle* qui multo post vixit. Conferatur FABRICIUS *loc. cit.* Sicut etiam GEORGIUS VALLA, & BARTHOLOMÆUS ZAMBERTUS VENETUS, qui sub *Hypsiclis Alexandrini* nomine, posteriores duos Elementorum libros, latine verterunt. Eisdem ob *Hypsicle Alexandrino* compositos esse censent, SAVILIUS, GREGORIUS, CLAVIUS, DECHALES; locis jam jam citatis; & innumeri alii. Decimus Sextus Liber, qui in nonnullis codicibus, non tamen in omnibus, prioribus annectitur, nunquam *Euclidi* fuit adscriptus; licet in ordine Elementorum in Clavii Editione Euclidis Elementis annumeretur; sed ille est adjectus à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA; uti in fronte hujus libri à quolibet legere est. Ac ob materiæ convenientiam Elementis adjungitur, sicuti duo præcedentes libri, de simili argumento, cum Elemento decimo tertio Euclidis tractantes, propterea à nonnullis cum Euclidis Elementis XIII. connectuntur, iisque adjunguntur.

S. XV. Tredecim hi Elementorum libri, respectu Doctrinarum, quas *Euclides* de
Quan-

Quantitatibus in iis pertractavit, cum CLAVIO & GREGORIO commode in quatuor dispecsi possunt partes: licet bipartita divisio, in *Superficientium* & *Solidorum* contemplationem, sufficiens esset; quia PROCLUS nobis Autor est, nullam peculiarem suis in Elementis, de Punctis & Lineis tractationem instituisse *Euclidem*. Verum Solidorum *Euclidis* speculationes, de corporibus regularibus Sphaerae includendis, rite intelligi nequeunt, nisi praecesserit notitia Linearum Commensurabilium, & Incommensurabilium; cum diametri ad latus proportio non semper rationalis est. Harum vero Linearum intelligentia, Numerorum scientiam praevidiam ultro efflagitat; ac cum corpora illa solida, basibus planis, lateribus, & angulis planis continentur; cumque omne Solidum praesupponit Planum, ex quo Originem ducit, oportebat Doctrinam Planorum primo loco tradere: inde nata est Divisio horum Elementorum in partes quatuor. In prima parte, *Plana* contemplatur; quorum Doctrinam Sex prioribus absolvit libris: & quidem ita, ut Quatuor primis Elementis *Plana* absolute speculetur; sequente vero Elemento Quinto Magnitudinum Proportiones in genere tractat; easque Figuris nonnullis Planis in Sexto Elemento applicat. Secunda pars, *Numerorum* affectiones exponit, quorum notitiam tribus sequentibus libris, Scilicet Septimo, Octavo, & Nono comprehendit. Tertia in parte, *Summetriam*, sive de Lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus

* * * 5

Scien-

XLII BREVIS NARRATIO HISTORICA

Scientiam docet , hancque unico , Decimo nempe libro complexus est. *Quarta* denique *in parte* , *Stereometriam* , seu solidorum doctrinam examini subjicit , eorumque contemplationem tribus ultimis libris , Undecimo , Duodecimo , & Decimo tertio , proponit ac demonstrat. Quibus peractis cum ultima propositione Libri Decimi tertii Elementa sua claudit.

§. XVI. Continent hi libri in se principia & fundamenta ad Geometriæ intelligentiam scitu necessaria ; sicuti singulorum librorum contenta quemlibet attentum facile docere possunt.

Etenim *primo in libro* , Triangulorum ; omnium figurarum planarum simplicissimarum & primarum ortus , affectionesque primum *Euclides* considerat ; tum juxta angulos , tum juxta latera ipsa inter se comparans ; quibus subjungit anguli & lineæ bisectionem ; addens perpendicularis constructionem ; angulos rectos , obtusos , acutos , deincepspositos , adverticem , externos , internos. Dein linearum æquidistantium proprietates investigans , ad ipsa descendit parallelogramma ex iis nata ; eorum ortus , & symptomata , quæ illis insunt , declarat. Porro Triangula cum parallelogrammis comparat , ac quonam pacto parallelogrammum æquale fiat Triangulo assignat. Tandem in Triangulo Rectangulo quadrati , quod à latere rectum angulum subtendente , describitur , cum quadratis , quæ à reliquis lateribus fiunt , proportionem investigat. In

In *secundo libro*, parallelogrammi rectanguli, gnomonisque definitionem tradit; lineæque divisæ, quanta sint quadrata ostendit; illaque cum parallelogrammis segmentorum confert; dein quadratorum, quæ à lateribus triangulorum obtusangulorum, & acutangulorum describuntur, proportionem cum quadratis, quæ fiunt à subtendentibus angulum obtusum & acutum, expendit. Denique ostendit qua ratione construatur quadratum rectilineo dato æquale. Hujus libri propositiones, præter linearem, qualem in plerisque codicibus habent, demonstrationem, etiam decem priores in numeris demonstrari possunt; quod jam olim præstitit *Barleamus Monachus*, ac post linearum demonstrationem in commentario suo numeralem subjungit *Clavius*. Nonnulli per Algebram speciosam easdem resolvunt, uti *Sturm* in *Archimede Germanico*, alique.

Tertius liber, agit de iis, quæ circulis accidunt, ac de rectis lineis in circulo vel ad circulum ductis; itemque angulos tam ad circulorum centra, quam ad peripherias constitutos rimatur; ultimo æqualitatem angulorum æqualibus arcibus chordisque insistentium demonstrat.

Quartus qui subjungitur *liber* quasi tertii praxis est, figurarum planarum, Trianguli, Quadrati, Pentagoni, Hexagoni, Quindecagoni inscriptiones in circulo, & circumscriptiones docens.

Quintus qui sequitur *liber* Magnitudinum Proportiones generales tradit; modosque
argu-

argumentandi quosdam, in proportionibus apud Geometras frequentissime usitatos: alternam seu permutatam rationem, inversam, compositionem, divisionem, conversionem, ex æqualitate ordinatam ac perturbatam; firmos ac validos esse ostendit.

In sexto libro, proportionibus figurarum planarum commonstrat, ostendens Phænomena Triangulorum proportionalium, æqualium, similitumque; sectionem lineæ in tot, quot, volueris, partes; inventionem tertiæ, quartæ, ac mediæ proportionalis; rationes figurarum reciprocarum, & parallelogrammorum ad se invicem, nec non polygonorum, parallelogrammorum applicationes ad rectas lineas, quæ vel deficiunt parallelogrammis similibus, vel excedunt: porro quomodo recta linea terminata extrema ac media ratione secetur; ultimo proportionibus circumferentiarum, angulorum, ac sectorum in circulis æqualibus inquirat.

Septimus liber, numerorum indicat proprietates, in eo agitur de numeris primis & compositis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura invenitur; de numerorum parte, & partibus; de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcunque in libro quinto de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

Octavus liber, numeros deinceps proportionales, numeros planos, quadratos, cubos, & solidos; similes planos, atque similes solidos indicat.

Nonus

Nonus, numeros similes planos, cubos, solidos, numeros deinceps proportionales, sive ab unitate, sive simpliciter; numeros primos, numeros pares, impares, pariter pares, pariter impares, numeros perfectos declarat.

De hisce tribus numerorum libris, qui Arithmeticorum vocantur, dissentiunt inter se Viri Docti. Quidam putant *Euclidem* in iis plus præstitisse, quam ejus præstare fuit intentio; ac ex iis profluxisse quidquid hætenus de numeris scitur, aut deinceps sciri potest; quam sententiam amplectitur TACQUET in præfat. *Arithmetica sua*. Quidam vero contendunt, *Euclidem* tantum de *Arithmetica* iis in libris tractasse, quantum rei *Geometricæ* infervit; ut planius ac plenius commensurabilium & incommensurabilium demonstrationes fieri possent: inter quos CLAVIUS, RHODIUS, FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA; scribit enim CLAVIUS ad Def. 1. Elem. 10. *Absolvit Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas; idem sentit FLUSSAS in præfat. in lib. 7.*

Decimus liber, magnitudines commensurabiles & incommensurabiles, itemque rationales & irrationales explorat.

In *Undecimo*, tandem ad *Stereometriam* devolvimus, in qua pertractanda, eodem quo in planis processerat, usus est modo; à simplicissimis, *Geometrarum* more incipiens, lineis scilicet, quatenus ad corpora soli-

solida referuntur; quando in uno plano positis, iisque ad planum vel rectis, seu perpendicularibus, vel parallelis; item de planis sese mutuo secantibus; quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendicularares ducuntur; denique differuntur tum de planis, tum de solidis angulis, de parallelepipedis, & prismatibus æqualibus nonnulla.

Duodecimus, ac solidorum secundus liber, doctrinam de corporibus fufius persequitur, in eo prismata & pyramides, cylindri & coni invicem comparantur, simulque edocet inscriptionem polygoni in circulo, & Polyedri in sphaera; sphaerasque triplicatam suarum diametrorum habere rationem.

Decimus Tertius, corporum regularium quinque, seu Platoniorum dictorum, constitutionem contemplatur, ea corpora quidem Platonica appellantur, à Pythagora vero jam defecta sunt, uti patet ex veteri Epigrammate in *Synopsi Geometrica* MICH. PSELLI allegato,

Σχήματα πέντε Πλάτωνος, αὐτὸς Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε.

Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε, Πλάτων δ' ἀριδὴλ ἐδίδαξεν.

Εὐκλείδης ἐπὶ τοῖσι κλέος περικαλλές ἔτευξεν.

hoc est,

Figura quinque (sunt) Platonis, quos Sapiens Pythagoras invenit.

Pythagoras sapiens eas invenit, Plato vero manifeste docuit.

Eu-

Euclides super his gloriam splendidam struxit.

Conferatur GREGORIUS *loc. cit.* Ad horum corporum evidentiorē intelligentiam præmittuntur quædam de lineis extrema ac media ratione factis, subsequuntur relationes Pentagonorum, Hexagonorum, Decagonorum, triangulorum regularium circulis inscriptorum: tandem Pyramidem, Octaëdram, Hexaëdram, Icosaëdram, ac Dodecaëdram construere assignet, horumque corporum latera proponit, eaque inter se componit.

Decimus Quartus, & decimus quintus libri, qui licet in nonnullis exemplaribus *Euclidis* nomine veniunt, HYPsiclis ALEXANDRINI esse videntur; simile tamen fere tractant argumentum. In *quarto decimo* enim comparantur Dodecaëdram, & Icosaëdram in eadem sphaera descripta. In *quinto decimo* quinque corpora indicata inscribuntur, ac eorum latera & anguli inveniuntur.

Decimus sextus, liber à CANDALLA adornatus, quique aliquando præcedentibus annectitur, varias solidorum regularium, sibi mutuo inscriptorum, & laterum eorundem comparationes explicat. Conferantur COMMANDINI in *Elementa Euclidis Prolegomena*, circa finem; & GEORGE MATHIAS BOSE in *Scediasmate literario de contentis Elementorum Euclidis*.

§. XVII. Hanc per Elementa distributam, materiam conveniente Ordine ac Methodo dispo-

disposuit *Euclides*; in quo indagando, eum, quo *Euclides* ipse usus est, cum primum, ad hanc doctrinam speculandam sese accingeret, puto destinguendum esse ab illo, quem jam in illis *Elementis* tenemus. Quando, enim mecum reputo *Euclidem* sibi Scopum & Finem constituisse, corporum mundanorum constitutionem speculationi suæ subicere; inde haud obscure colligere mihi videor, primo intendisse eum, ac sibi ad contemplandum proposuisse *Elementum decimum tertium*; nempe quinque corpora regularia Platonica in eandem includere sphaeram, quæque eorum invicem sit proportio, demonstrare. Ad quod autem præstandum, necesse ei fuit extremas illas de corporibus regularibus propositiones in simpliciores, causas & principia earum propositionum continentes, semper resolvere; atque hac methodo pedetentum ad prima tandem devolvere principia. Cum vero Methodus Analytica est, quæ rem in sua principia sive Elementa, & conclusionem quamcunque in propositiones, quæ continent causas & principia conclusionis reducit; inde manifesto cuilibet apparere suspicor, *Euclidem* omnium primo *Methodo Analytica* processisse in suis *Elementis* adornandis. Nos autem qui iis utimur *Elementis*, quando eorum auxilioducimur, ad Propositiones in iis propositas demonstrandas & intelligendas, à principijs ejus incipientes, & gradatim ad ultimas usque adscendentes; cumque sic ex principiis, ad id, quod ex iis fit, progredimur;

mur; *Methodum* sequimur *Syntheticam*. Quod vero ipsam spectat dispositionem eorum, quæ per hæc distribuit Elementa, sciendum omnino est; sanas omnes Scientias certa quædam & definita habere principia, ex quibus ea, quæ sequuntur demonstrant. Quare rite distinguendum est inter id, quod principiorum fungitur officio, & id, quod a principiis iis fluit; & quidem eo magis, quod principia Scientiarum debent esse per se clara, & evidentia magis quam quæ ex iis derivantur. Cum per sese sibi fidem faciunt, nulla principiorum reddenda est ratio; Quæ vero Principia consequuntur omnino rationibus confirmanda; quippe illa deinceps per principia prius intellecta cognoscimus. Hæc enim qui inter se confundit, & principia cum iis, quæ ab his fluunt, commiscet, is totam perturbat cognitionem; ea conjungens quæ nullo modo inter se conveniunt. Hac de re probe edoctus *Euclides* in suis Elementis componendis, seorsum & principia, & quæ ea sequuntur pertractavit; talia statuens principia, quæ ob evidentiam suam per sese fidem mereant, nulla eorum adhibita demonstratione. Eaque præmisit vel generalia ad omnia Elementa spectantia, vel singulis libris propria; quæ in fronte suorum librorum collocavit. E quibus præviis dein rationes petit eorum quæ principia consequuntur; cum Propositionum demonstrationes ex iis hauriens, probatam præcedentem, sequentis demonstrandæ principium statuit;

* * * *

tali-

ralique ordine Elementarem suam disposuit Institutionem.

S. XVIII. Ipsa autem *principia* quod attinet, quæ *Euclides* posuit fundamenta, quibus Geometriæ Doctrinam superstrueret, in tria divisit genera; *Definitiones*, *Petitiones seu postulata*, & *Axiomata* seu *communes notiones*. In *Definitionibus* vocabula artis exponit, seu quem sensum fundet hoc vel illud vocabulum, in iis declarat; ac Geometrarum more vocis explicatione semel indicata, eadem semper significatione per totum Elementare corpus utitur: ne dein eorum ambiguitate aut obscuritate circumventi, in falsas incidamus conclusiones. Tales vocum Expositiones singulis Elementorum libris, ad ejus intelligentiam pernecessariarum, ac ad unumquemque librum proprie respicientium, præmisit. *Postulata*, quæ & alias *Petitiones* dicuntur, sunt, quibus aliquid admitti petimus, quod perfacile fieri potest: eaque sunt adeo clara & perspicua in his Elementis, ut nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcunt; ne ulla sit in Demonstratione hæsitatio, aut difficultas. Tria suis in Elementis posuit *Postulata* *Euclides*, quibus id tantum intendisse videtur, ut ipsi concederetur usus *Regulæ* & *Circini*, ne dein de schemate eorum ope facto, quasi non sit Mathematicum, lis moveretur. Inde factum est, quod nulla *operatio Mathematica* creditur, nisi quæ per hæc instrumenta, nullo alio adhibito adminicu-

niculo mechanico, instituat; quæ vero figurarum delineatio aliis indiget instrumentis, *operatio Mechanica* dicitur. *Axiomata* vero quæ & *communes notiones* sæpe audiunt, sunt propositiones seu enunciationes potius per se manifestæ, cognituque perfaciles, quæ sine ulla demonstratione à quolibet concedi, & communi consensu assumi debent. Verum postulata inter & axiomata hoc intercedit discrimen, quale inter Problema & Theorema: ac sicuti in Problemate operatio fit, ita in Postulato; sicut in Theoremate aliquid contemplationi subjicitur, ita in axiome. Hæc bina ultima principiorum genera universaliter toti præmittit Elementorum Syſthemati, non autem peculiariter cuilibet eorum libro; confer. CLAVII *Prolegomena in Euclidis Elementa*.

§. XIX. Hisce Principiis præmissis ad ipsam rem sese accingit, ac aliquid tum ad faciendum, tum ad contemplandum adducit; idque *Propositiones* vocat: quas in duas distinguit species, alteram *Problema*, *Theorema* alteram nominat. *Problema* apud Mathematicos est Propositio, qua aliquid facere & operari jubemur; vel ad similitudinem Problematis Dialectici, in qua utraque contradictionis pars vera aut falsa esse potest. Sic quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid jubent construere, & cujus contrarium etiam effici potest, *Problema* appellatur. Vel secundum *Commandanum*, *Problema* illud est, in quo quippiam, cum

cum primum non sit, proponitur inven-
dum, ac construendum. Uti supra rectam
lineam finitam Triangulum æquilaterum con-
stituere, Problema est. In omni Problemate
duo notanda veniunt; *Datum*, & *Quæsitum*:
sic in assignato Problemate, datum est,
recta linea finita; quæsitum, trianguli æ-
quilateri super datam lineam constitutio.
Problematum tres species Veteres ponunt
Mathematici, *Planum*, *Solidum*, & *Lineare*.
Planum dicitur, quod per rectas lineas &
circuli circumferentiam solvi potest. *Solidum*
est, ad cujus resolutionem Sectiones Co-
nicæ requiruntur. *Lineare* denique, quod
præter jam dictas lineas alias etiam ad sui
constructionem desiderat. Ex his vero tri-
bus Problematum speciebus, prima tantum
in Elementis Euclideis reperitur, omis-
sis duabus reliquis. Problemata Euclidis dupli-
cia sunt, vel *determinata* vel *indeterminata*.
Determinata sunt, propositiones quæ cum re-
strictione fieri possunt, uti est 22. *Elementi*
I. Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus
datis rectis lineis æquales, triangulum con-
stituere; ubi additur hæc restrictio; opor-
tet autem duas reliqua esse majores omni-
fariam sumtas. *Indeterminata* sunt propositio-
nes, quæ universaliter fieri possunt. *Theo-*
rema est Propositio ad contemplandum pro-
posita, quæ passionem aliquam, proprieta-
temve unius, vel plurium simul quantita-
tum edit; sicuti Propositio hæc, quod in
omni Triangulo rectilineo tres anguli simul
sumti sunt æquales duobus rectis, non jubet
aut

aut docet triangulum vel aliquid construere; sed solummodo Trianguli cujuslibet constituti, passionem hanc contemplari proponit; quod anguli illi sint duabus rectis æquales: unde à contemplando talis Propositionio Theorema dicitur. Ideo Theorema, definiente *Commandino*, est in quo quippiam in constituta jam figura ita esse, vel non esse demonstratur. In Theoremate duo etiam notanda veniunt, *antecedens & consequens*; *Antecedens* dicitur id, quod conditiones proponit; & iis admissis, id, quod inde evenit, *Consequens* dicitur. Uti in 5. *prop. Elem.* I. Antecedens est, anguli ad basin triangulorum Isosceliorum constituti; Consequens, sunt inter se æquales. Hæc Theorematis bina membra sæpiissime nomine *datorum & quasitorum* occurrunt; quod prius dari seu concedi antecedens debeat, quam in sequentis veritatem inquiri possit. Inferunt aliquando Geometræ Theoremata vel Problemata minus principalia, ut alia brevius demonstrari possint, eaque *Lemmata* vocant; quæ dici possunt demonstrationes seu constructiones illius, quod ad demonstrationem, alicujus Theorematis vel Problematis principalis assumitur, ut demonstratio expeditior fiat ac brevior. Interdum subjungunt *Corollaria* vel *consectaria*, quæ sunt propositiones, immediate ex præcedenti demonstratione lucem accipientes, quæque peculiari demonstratione non egent. vid. CLAVIUS *Prolegomena in Euclidem*, & REYHERUS *in dissert. de Euclide. cap. 4.*

§. XX. Propositis Quantorum proprietatibus, earum *Demonstrationes*, quibus certo constat, rem in Propositione indicatam principiis positis convenientem esse, subjungunt cum *Euclide* Mathematici. Verum ut *Demonstrationum* adornatio facilius evadat, quædam demonstrationi ipsi, ex quibus plurimum lucis sæpe foenerantur ea, quæ demonstrationi inserviunt, Geometræ præmittunt. Etenim in Theorematis, recitatis iis in propositione propositis, enumeratisque datis ac quæsitis rerum indicatarum, priusquam proposita demonstranda suscipiunt, *præparationem* quandam instituunt, qua propositionis propositæ Schema illustratur. In Problematis vero, iisdem, ac in Theorematis, prius recensitis, eorum *constructionem* efficiunt; ac, ut demonstratio legitime fieri possit, quandoque etiam *præparationem* addunt. Quibus omnibus rite peractis, eorum, quæ proponuntur, ipsam demonstrationem incipiunt Geometræ. In *Demonstrationibus* suis instituendis duplici *Methodo* procedunt Geometræ, vel *directe* demonstrant ea, quorum in propositionibus fit mentio, vel *indirecte*. *Directa Demonstratio* quæ & *Ostensiva* appellatur, ea est, in qua aliquid probatur & scientifice cognoscitur, à principiis, tanquam causa ad effectum procedendo; eaque in scholis vocatur *demonstratio à priori*, quia causa effectus prior est. Ejusmodi probatio vera est, & proprie dicta demonstratio, quæ per se *directe*

recte ad scientiam ducit. *Indirecta*, sive ad *incommodum*, vel *impossibile* ducens, est, quando contrarium propositionis demonstrandæ assumimus, idque cum ipsa propositione conjungimus; ut fiat syllogismus conclusionem inferens, quæ cum principio quodam pugnat, adeoque contrarium propositionis falsum esse evincit; eaque est à *posteriori*, quia effectum, id est Hypothesin adversarii primo loco ponit, eamque examinat. Hæ binæ demonstrationum species si juxta æquam lancem ponderentur, plus roboris directæ demonstrationi inesse quemlibet facile concedere suspicor, modo pensitet ex principiis evidentibus apta idearum connectione, ostensivam petitam esse probationem. Verum ubique talis demonstratio ostensiva haberi nequit, in quo casu ad incommodum ducentibus argumentis utendum est; ubi vero directæ institui possunt Demonstrationes, illæ multum præferendæ sunt; ac indirectis abstinendum est. Ambo hæc Demonstrationum Genera suis in Elementis adhibuit *Euclides*; cum hoc tamen discrimine quod longe pluribus usus fuerit ostensivis; ubi autem commode directas habere non potuit apodeixes, indirectas seu ad absurdum ducentes dedit demonstrationes. Quod nullo modo *Euclidi* vitio vertendum est, cum eo loco tantum ad impossibile ducentes inseruerit; ubi commode directam demonstrationem tradere non potuit; videatur

REYHERUS in *dissert. de Euclid. cap. 4.*

§. XXI. *Laudatur valde à Viris Doctis ordo, ac veritatum, ad Geometriæ intelligentiam inde hauriendam, selectus, quem in Propositionibus suis disponendis tenuit Euclides. Etenim PROCLUS in commentario suo in Euclidem lib. 2. cap. 5. ordinem ac delectum eorum, quæ Euclides per Elementa distribuit Theorematum atque problematum, extollit, cum illum quempiam admirari debere ait; non enim (addit) ea assumptis omnia, quæ poterat dicere, sed ea duntaxat, quæ Elementari tradere potuit ordine: adhuc autem omnis Generis syllogismorum modos, alios quidem à causis fidem suscipientes, alios vero à certis notis profectos, omnes autem invincibiles, & certos ad scientiamque accommodatos, adduxit. Quod si COMMANDINUM in proleg. in Euclidis Elem. audiamus: Nonne, dicit insignis ille Mathematicus, quilibet summopere admiretur Euclidem propter ordinem in hac Elementari institutione; cum admirabili omnium dispositione, antecedentium & consequentium ordine, ac coherencia, ut nihil prorsus addi, aut detrahi posse videatur, ea inter se vinculo indissolubili connexit. Pariter celebris ille Astronomus TYCHO in Oratione de disciplinis Mathematicis, de Euclidis Elementis differens, Dispositionem Elementorum Euclidis debita laude describit; Euclides enim, ait, Elementa continuo ordine, & magna selectia ita tradidit, ut à quovis mediocri ingenii acumine prædito non difficulter percipi possent. Quibus addi merentur quæ* BLANCANUS

in sphaera mundi & quidem in apparatu ad Mathematicas scientias pag. m. 207. scribit. Inter Mathematica monumenta primum est Euclidis opus Elementorum, non tantum antiquitate & dignitate, verum etiam Doctrina ordine: est enim totius Matheos basis & fundamentum. Laudabilis porro iste est ordo à doctrinae compendio, quod neque propositionum multitudine luxuriat, neque earum paucitate sui studioſis obſcuritatem creat. Cum ex iis Elementis Geometricam scientiam liquido nobis comparare poſſumus: qua de re GREGORIUS loc. citato Quærit; Nullane igitur eſt Methodus compendioſior ad Geometriam addiſcendam, quam hacce per Euclidis Elementa quam adeo reformidant plerique? Huic certe quaſtioni reſpondeat ipſe Euclides. Ille à Ptolemao Aegyptii Rege interrogatus, an via eſſet aliqua ad Geometriam, magis compendiarie ſua ſοιχεωσει, reſponſiſſe fertur autore PROCLO in lib. 2. Μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίας. Verum quantumvis elegans & præclarus iſte eſt ordo, attamen taxatur à nonnullis; ſcribit enim de eo CLAUDIUS VERDER. in Auctorum Cenſione; Euclidem eſſe indigeſtum & incompoſitum, cum enim ab univerſalioribus proceſſus fieri debebat, ne vitioſa ſit repetitio, peſſime à Geometria auſpicatus eſt initium; quam poſt Arithmeticam tractare oportuit. Eandem de Euclidis Elementis fovet ſententiam famoſus Euclidis oppugnator PETRUS RAMUS, in Schola ſua Mathematica, & cum RAMO, LAZARUS SCHONERUS, qui Euclidis ordinem & ſelectum valde carpunt, ſed

monente VOSSIO de Scientiis Mathemat. cap. 16. §. 24. *Hi modum non tenuere in Euclide culpando.* His vero reponimus quæ GREGORIUS in *Prefat. sua Euclidi præmissa* hac de re scribit; *Hanc esse optimam veram Methodi Legem existimavit vir accuratissimus, ut nihil sumatur pro vero nisi demonstratum; nihil demonstretur nisi ex antecedentibus. Quo fit (inquit SAVILIUS) ut ordo, quem isti Methodista requirunt ab Euclide, quo nunquam vidit hic sol μεθοδικὸς ὁρδὸν, servari non potuerit, nisi si quis est adeo ineptus, ut nescio cujus imaginaria venustatis rationem habendam putet, neglecta sanitate. Quivis eorum, qui Geometriae Elementa alia Methodo tradenda suscepit, inter Euclideanum opus alteriusque cujusvis præter proprium iudex constituitur; illico patebit discrimen.*

§. XXII. Verum quantumvis apta veritatum dispositione illa coherent Elementa, quæ vulgo *Euclidis* nomine veniunt; dubitant nonnulli an quidem ea Euclidi sit ad scribenda Gloria, cum illa Elementa, quæ hodie in omnium versantur manibus, *Euclidem* Autorem habere negant. Sed ea à THEONE ALEXANDRINO, qui Senioris THEODOSII temporibus floruit, profecta esse affirmant. Saltem PETRUS RAMUS in diversam à longe plurimis Viris Doctis hac in parte abit sententiam; Propositiones in Elementis Euclideanis occurrentes, non *Euclidi* sed *Theoni* adscribens; quasi nullæ forent partes *Euclidis* in iis Elementis, quæ tamen vulgo *Euclidi* tribuuntur. Verum hæc

Rami

Rami opinio Veterum Mathematicorum Testimonio repugnat ; cum omnis Antiquitas eas Euclides , & non cujusdam Theonis Alexandrini , esse propositiones agnovit . Quae de re HENRICUS SAVILIUS in praefationibus in Euclidem Scribit , quod eadem haec quae nunc habemus , eodem ordine , iisdem verbis , agnoscunt sub Euclidis nomine Proclus & Boëtius Theone posteriores , & Anterior Theone Alexander Aphrodisens , & omnis antiquitas . Quare nullum superesse dubium potest , quin Euclides Propositionum quæ in Elementis obviæ sunt , Autor sit habendus , licet Proclus nullum referat Euclidis inventum ; uti RAMUS scribit .

§. XXIII. Alii vero , qui parum liberaliores sunt , Propositiones ab Euclide factas compositasque esse asserunt , sed Demonstrationes Euclidi abjudicant ; hac forsan de causa in errorem abducti , quod in nonnullis codicibus græcis , soli traduntur propositionum tituli cum figuris , sine ulla demonstratione , referente DECHALES de Progressu Matheseos. pag. 9. col. 1. His respondet HENRICUS SAVILIUS , dicens ; *homines stulti & perridiculi ; quasi ullus unquam artifex suas eds voluerit conclusiones , nullis adjectis probationibus . Hoc neque Philosophorum quisquam , nec Medicorum , ne dum Mathematicorum , fecit unquam . Quanto minus de Mathematicorum Principe id suspicandum . Immo testis est JOANNES DE BUTEON in suis annotationibus in Euclidem , quod apud antiquos nun-*

nunquam sine demonstratione Theoremata proferebantur ; ut quæ nullam, si nudæ fuerint, habeant utilitatem ac dignitatem. vid. COMMANDINUS in *proleg.* conferatur GREGORIUS in *præfat.* & VÖSSIUS de *Scientiis Mathematicis. cap. 15. §. 9.* Cum his etiam se conjungit PETRUS RAMUS, qui non contentus Propositiones omnes *Euclidis* subtrahere, & *Theoni* vindicare, verum etiam eum Demonstrationibus omnibus defraudare, easque in *Theonem* conferre omni studio nititur. Ita ut secundum RAMUM, *Euclides* in *Elementis* nihil præstiterit, sed omnia *Theon.* Quam suam sententiam, variis rationibus probabilem reddere studuit, in suo *Matheseos proœmio.* Et quidem *primo*, quod *Proclus* commemorat, Demonstrationes ab *Euclide* esse inventas, verum non refert inter *Euclidis* laudes ullam propositionem vel demonstrationem ab *Euclide* esse inventam. *Secundo*, THEON ipse suas editiones in *Elementa* nominatim laudavit, in *primo commentario. in Ptolemai magnam constructionem*, quo sibi vindicare videtur *Theon* ipsa *Elementa.* *Tertio*, quia *Euclidis* demonstrationes, quæ in *Procli* commentariis leguntur minime cum iis convenient, quas in *Elementis* habemus. *Quarto*, quia *Euclidis* *Elementorum* codicibus quibusdam, hæc adduntur verba in inscriptionibus, εκ των Θεωνος συνουσίων, id est ex *Theonis* colloquiis sive congressibus ; sicuti codex græcus *Euclidis Elementorum*, qui prodiit *Basilea apud Joan. Hervagium Anno. M. D. xxxiii.* inscribitur Εὐκλείδης Στοιχείων βιβλ. ιε. εκ των Θεωνος

ΘΕΩΝΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥΣ. Quæ sane verba multis occasionem de Euclideis demonstrationibus disputandi dedere; multisque ansam præbuere credendi, Demonstrationes Propositionibus *Euclidis* annexas ad *Theonem* pertinere. Licet vero *Proclus* non disertis verbis expreferit, quasnam *Euclides* invenerit Propositiones, & Demonstrationes, tamen manifeste fatis mentem suam declarat, multum invenisse *Euclidem*, quando de eo scribit, quod multa ab *Eudoxo* collecta in ordinem redegerit, ac à *Theateto* inchoata perfecerit, quæ mollius ab aliis demonstrata erant, ad firmissimas & certissimas apodeixes revocaverit. Quæ omnia profecto sine multarum propositionum & demonstrationum inventis præstari nequeunt. Secundam quod attinet rationem; verum est *Theonem* in *Commentario in Almagestum*, provocare ad Elementa à se edita; quod vero sectores, inquit, in circulis aequalibus sint proportionales angulis ad centrum constitutis, ostensum est à nobis in editione Elementorum, eudoxi, ad finem sexti libri. Ex quibus verbis, & novam Elementorum editionem adornasse *Theonem* constat, & nonnulla ab ipso adjecta; non autem quod ille autor fuerit, demonstrationum omnium in Elementis obviarum. vid. GREGORIUS in *Prefat. Euclidis Element. præmissa*. Tertiam perpendentes rationem, discrimen demonstrationum indicantem, non tanti ponderis ea esse videtur, ut propter eam *Euclidem* ex Elementis exterminaremus. Etenim idem discrimen in aliis *Euclidis* scriptis reperitur, de quibus non

LXII BREVIS NARRATIO HISTORICA

non controvertitur, an sint Euclidis, cum omnium consensu communi Euclidis scripta esse judicantur. Sic Data *Euclidis* non eodem prorsus habentur modo, quo apud PAPPUM in *septimo Mathematicarum collectionum libro*. Nec Optica, Catoptrica, quæ Romanæ in Vaticana Bibliotheca servantur, teste COMMANDINO in *proleg. in Euclid.* Quid itaque foret causæ, cur Elementorum Demonstrationes Euclidi abjudicaremus, cum cetera Scripta eodem discrimine laborantia, ei adjudicaremus? Sane si dicendum, quod res est; est nodum in scirpo quærere. Nec majoris momenti est quarta denique & ultima ratio, cum hæc verba *ex τῶν Θεωρῶν συντάσεων* in multis codicibus græcis non exstant; immo Autor est SAVILIUS quod hujus tituli in neutro codicum MSS. ullum reperit vestigium. Quare quæ Joannes Botæon de his verbis observat, veritati maxime consentanea esse videntur; cum verosimile esse putat verba illa *ex τῶν Θεωρῶν συντάσεων* ita intelligenda esse, ut dicamus, *Theoremata* conscripsisse quidem commentarios in Elementa, sed illos temporum calamitate periisse; quemadmodum quæ in Eundem Pappus Alexandrinus scripserat, conservato tamen titulo, qui postea *Euclidi* ipsi negligenter adjectus est. confer. COMMANDINUS in *Proleg. in Elem. Euclid.*

S. XXIV. Denique multi alii, & Propositiones, & Demonstrationes Elementorum, pro ut nunc ab omnibus teruntur, *Euclidi* attribuant,

buunt, quæque aut vera est, aut saltem veritati proxima sententia. Graves enim & ponderosæ sunt rationes, quæ pro hac sententia pugnant. Etenim PAPPUS ALEXANDRINUS, qui fere eodem ac *Theon Alexandrinus* tempore floruit, nobis autor est in *septimo libro Collect. Mathem. pag. m. 240. Euclidem* Elementa tradidisse. Ipse porro PAPPUS sæpe comparat demonstrationem ab *Euclide* traditam, cum aliorum demonstrationibus: quod sane fieri non potuisset, nisi *Euclides* & propositiones & Demonstrationes scriptis reliquisset. Accedunt, quæ PROCLUS, qui longe post *Theonem Alexandrinum* vixit, in *comm. in Euclid.* de Demonstrationibus Euclideanis scripsit; cum enim in commentariis in propositionem decimam retulisset *Apollonii Pergæi* demonstrationem, hæc subjungit verba, *longe melior est σοιξευ- τόν*, (ita enim *Euclidem* appellat) *Demonstratio, & simplicior, magisque ex principiis.* Ex quibus verbis manifesto colligimus, *Euclidis* Elementa post obitum *Theonis Alexandrini* scriptis divulgata fuisse. Porro DECHALES in *Tract. de progressu Mathes. pag. 12.* expressis verbis scribit, quod *Proclus* & *Boëtius*, *Theone* posteriores nonnullas Demonstrationes referunt, prout in ipso *Euclide* jacent; ac VOSSIUS de *Scientiis Mathematicis, cap. xv. §. 9.* cum retulisset, quosdam censere *Theonem* & conclusionum, & demonstrationum Autorem esse, hæc addit verba: *Qua sententia eo refellitur, quod Proclus, & Boëtius; immo & Alexander A-*
phro.

phrodiseus, qui *Theone* antiquior fuit; multa *Euclidi* tributa iisdem verbis, atque eodem ordine, sub *Euclidis* nomine citent. Uterius SAVILIUS, uti narrat GREGORIUS in *præfat.* nobis testis est, quod eadem quæ nunc habemus *Elementa*, sub *Euclidis* nomine, eodem ordine iisdem verbis ab universa Antiquitate, non solum *Theone* posterioribus, verum etiam anterioribus, fuere agnita. Sic enim *Alexander Aphrodiseus* qui circa initium Tertii seculi claruit, eadem quæ nunc habemus *Elementa* *Euclidea*, iisdem verbis *Euclidi* tribuit: uti & *Proclus* & *Boëtius* aliique qui post *Theonem* inclaruere. Quapropter veritati magis convenire videtur ea sententia, quæ statuit, quod *Elementa Euclidis* quæ possidemus, ac quæ hodie in manibus versantur, ab *Euclide* sunt adornata, quam ea, quæ à *Theone Alexandrino* ea petenda esse censet.

§. XXV. Sed cum vulgaris sit opinio, quæ etiam multos, in viris eruditis, nacta est Patronos; non uti *Ramus* inepte censuit; *Euclidem* nec Propositiones nec Demonstrationes scriptas tradidisse: verum *Euclidem* suorum *Elementorum* tam conclusiones, quam validissimas apodeixes scripto reliquisse; inque *Euclidem*, *Theonem Alexandrinum* commentaria sive demonstrationes scripsisse; quæstio est, quid *Theon* in suis commentariis, quæ vulgo ipsius nomine circumferuntur præstiterit, ac quænam ejus sint partes istis in *Elementis*? At vero difficilis determinatu

natu illa est, quænam sunt in his Elementis Theonis partes; cum tot diversæ, hæc super re, Virorum Eruditorum sunt sententiæ. Si DECHALES audiamus in *Tract. de Progressu Mathes. pag. 12.* ille multum tribuit Theoni, cum inquit, *liber Elementorum Euclidis multum debet Theoni, à quo est in ordinem digestus, & etiam auctus.* Quocum fere consentit incertus quidam Scholiastes, qui uti narrat HENRICUS SAVILIUS in uno codice MSS. ad oram marginis, ad decimum tertium librum, scripsit; collectionem Elementorum Euclidis, ordinationem & dispositionem Theonis esse. vid. GREGORIUS in *in Præfat. citata* Cui etiam sententiæ suam adjicere calculum videtur VOSSIUS de *Scientiis Mathem. pag. 59.* ita scribens; *vera autem de hoc opinio est, quod Theon novam Euclidis editionem adornavit; in qua Euclidea & melius digesserit, & aliquot locis auxerit.* Neque etiam ab eadem abludere videtur COM-MANDINUS in *Proleg. in Euclid. Elem.* cum ait, *Nos autem medium secuti, credimus libros de Elementis suis ornatos, Demonstrationibus ab Euclide nobis fuisse relictos.* Ac postquam id paucis probasset, hæc adjungit verba; *Ut autem hoc vere asserimus, ita illud merito concedemus, Theonem excellentis ingenii virum, Euclidis Demonstrationes fusius, planiusque explicatas, in lucem protulisse.* Tandem inferius paululum hæc subsequuntur verba, *Sunt igitur illa quidem Demonstrationes Euclidis, sed eo modo conscriptæ, quo olim Theon Euclidem secutus suis discipulis explicavit.* Sed isti opinio-

* * * * *

ni,

LXVI BREVIS NARRATIO HISTORICA

ni, qua asseritur *Theonem* Elementa Euclidea adornasse & disposuisse, immo fusius explicasse, videtur obstare *Procli* & Antiquorum omnium autoritas. Quia iisdem verbis, ac eodem ordine, pro ut in *Euclide* existant, tam qui ante *Theonem*, quam qui post eundem claruere, Euclidea citant. Obstat etiam mirabilis & concinna propositionum series, ex quibus unam loco si eximas, tota corruat compages, & structura necesse est. Potior videtur sententia, quod Elementa græca Euclidea, quæ vulgo commentaria *Theonis* nuncupantur, quæque nunc ab omnibus teruntur, nihil aliud sint, quam nova Editio *Euclidis*, à *Theone* adornata, nonnullis in locis ab ipso aucta. Nam *THEON* in *commentariis in Almagestum*, de Editione quadam à se edita loquitur; ubi simul mentionem injicit demonstrationis, de sectoribus in circulis æqualibus, quod sint proportionales angulis ad centrum constitutis, à se factæ. Quæ etiam in omnibus Græcis Exemplaribus annectitur ultimæ propositioni libri sexti. Idem iudicium ferendum putat de multis in libro decimo lemmatis *Savilius*, & fortasse propositionibus nonnullis. vid. *GREGORIUS* in *prefat.* Forte inquit hic insignis Geometra, & Definitiones quædam & Axiomata, libro Primo præposita, *Theonem*, vel alium præter *Euclidem* agnoscunt autorem, ex. gr. Axioma XI. Nam licet *Euclides* hoc pronunciatum adhibeat, in *Demonstratione* prop. 29. Elem. I. illud tamen pro Axiomate non habuit, sed pro conversa prop. 17. nupote qua ex illa manifesto consequatur.

itur. Fortasse & altera Demonstrationes, quæ passim occurrunt, sunt etiam Theonis: &c. Ex quibus omnibus concludit Savilius, Theonis fuisse partes, in Euclide paucis quidem in locis interpolando, explicando, augendo; ultra hoc nullas.

§. XXVI. Hæc vero Euclidis Elementa à multis retro seculis magni semper æstimata fuere, cum propter claritatem probationum, quæ in iis valde elucet, tum propter demonstrationum robur per tota Elementa dispersum; quibus accedit quod sit absolutum Elementorum opus. Etenim de iis testatur GREGORIUS in *præfat.* sæpe citata; corpus illud Elementorum ea claritate, & evidentia; eo judicio, ac firmitudine; esse compositum; ut singula in iis propositiones jam à bis-mille annis, ab omnibus habeantur pro evidentibus, & pro talibus passim ab omnibus cūentur. Quam Probationum evidentiam nonnulli suspicientes, firmissimis demonstrationibus, quæ auctore *Procto*, nec cōargui nec convinci possunt, omnia istis in Elementis occurrentia, munita esse, apud animum pensitantes Veteres quidam; ansam inde affirmandi, *Euclidem errare non posse*, nacti sunt. Quæ licet de mortali nimis superbe dicta, aliquantum conniveri possunt, si de Mathematicis *Euclidis* demonstrationibus tantum intelligantur. Præclarum est enim Testimonium PETRI RAMI, cæteroquin severi *Euclidis* castigatori, de Euclideis Probationibus: dicens, *nullus paralogismus, nulla ψευδογῆσις*

LXVIII BREVIS NARRATIO HISTORICA

in totis Elementis, nobis quanquam severe inquirantibus, animadverti potui: quam laudem esse singularem profiteor; quamquam nulli adhuc, neque Grammatico, neque Rhetori, neque Logico concedere potui, ut in Grammatica, Rhetorica, Logica nihil falsi docuisset. Hæc itidem Demonstrationum, invicta firmitas, & conclusionum absoluta perfectio, forte etiam in causa fuit; cur nonnulli in Euclidis vocabulo Mysterium quasi aliquod latitare opinati sunt; cum vocabuli Euclidis Etymon ex græca lingua derivandum censent; putantes illud ex Græco εὖ, quod bene denotat, & κλειω claudio, esse compositum; idemque denotaret Euclidis vocabulum, quasi quis diceret bene claudens, seu bene concludens. Licet vero Euclidis Demonstrationes firmissimas esse agnoscamus; non tamen existimarem eam ob rationem Antiquitatem eum nomine eo insignivisse, cum multi ante & post eum extiterint Euclides, in quas illa Etymologica derivatio non quadrat. Est sane elegans Elogium, quod de his Elementis verba faciens, recitat CARDANUS de mira subtilitate lib. 13. dum scribit, Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque absoluta adeo, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas. Quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis questionibus videantur posse à vero falsum discernere, qui Euclidem habent familiarem. Audiri etiam meretur CLAVIUS, in prolegomenis, asserens; Euclidis Elementa semper magni æstimata, neque ullus ante eum par ei extiterit, licet non pauci ante Eum Elementa

conscriptere teste Proclo. Quin & teste VERULAMIO de *Augmento scientiarum lib. 3.* Euclidis absolutum adeo est opus Elementorum, ut Euclideis laboribus in Geometricis nihil additum sit à sequentibus, quod intervallo tot seculorum dignum sit. Quare RAMUS in libro *tertia Scholæ Mathematicæ* notat. Duo fere millia Annorum existimatur toto terrarum orbe ab omni reprehensione liber & sacro sanctus fuisse Euclides, & si quid post homines natos solida scientia comprehensum & animadversum est, id Eucli acceptum refertur. Ut autem aliorum de Euclidis Elementis Testimonia silentio præteream, unicum adhuc adducere haud in congruum esse opinor; illudque sumam à GREGORIO ABULPHARATIO, quod in *Historia compend. Dynastiarum.* super Elementis Euclidis dicit. Sic enim ibidem loquitur Scriptor ille Arabs; Quod Euclidis liber qui vocatur στοιχεια celebris admodum est, & utilis; ac quod non est Græcis hoc in genere liber alius generalis, neque secutus est eum aliquis, qui non vestigia ejus sectatus est; idemque quod ille dixerit; nec inter homines, qui præstantiam ipsius confessus sit, vel multiplicis ejus Doctrina testimonium perhibuerit.

§. XXVII. Opus hocce Euclideum sua inscriptione etiam videtur ornatum fuisse: ex *Commandini* mente Proclus in fronte ejus Legisse censetur, *ευκλειδου στοιχειωσις*; seu Euclidis Elementaris institutio. VOSSIUS vero de *Scientiis Mathematicis cap. 15. §. 2.* inscriptum illum librum fuisse putat, *στοιχειων βιβλια*, *Elementorum*

torum libros, vel στοιχειωσιν, *Elementorum Do-*
ctrinam; omisso Geometriæ vocabulo, cum
 tamen Geometrica significare vellet στοιχεια.
 Alii vero codices inscribuntur. Ευκλειδης στοι-
 χειων βιβλ. ιε, εκ των Θεωνος συνουσιων. Quæ
 tamen verba ex *Theonis Colloquiis*, deinde
 sunt adjecta, non à *Theone* ipso uti existi-
 mat COMMANDINUS in *præf.* sæpe cita-
 ta, verum à quodam *Theonis* familiari, *Viro*
plane erudito, qui nobis *Euclidem*, eo quo nunc
 habetur modo legendum concessit. Neque etiam
 hæc verba in Vetustissimis reperiuntur Ma-
 nuscriptis; uti ante ex SAVILIO notavi-
 mus. Mirabuntur forsitan multi *Euclidis* In-
 scriptionem Legentes, Eum tantum opus
 suum appellasse στοιχεια, *Elementa*: non vero
 Geometriæ *Elementa*, quemadmodum hoc
Elementare corpus postea à Latinis ita est
 inscriptum; cum illud vocabulum de multis
 dici possit, uti de litterarum principiis, de
 rebus naturalibus, ac de multis aliis. Qua-
 re primo inspicientem, ac στοιχεια in titulo
 legentem, penitus dubium relinqueret, de
 quam materia istis in *Elementis* tractetur.
 Verum non absque ratione, *Euclides* tantum
 στοιχεια librum suum inscripsisse censendus est,
 omisso Geometriæ vocabulo. Nam præter-
 quam quod ex primis verbis hujus operis,
 in quibus à puncto initium facit; quam
 de re isto in libro tractetur, cuilibet legen-
 ti statim innotescit; eo præterea tempore,
 quo *Euclidis* hæc conscripsit, Geometriæ
 studium, erat maxime *Elementale & fun-*
damentale; cum fere juvenus omnis Græca
 pri-

primos suos conatus in Geometriæ studio
 exercendo instituerit ; ac una cum primis
 cognitionis principiis hanc Doctrinam con-
 junxerit ; nemini Elementa Legenti incog-
 nitum esse potuit ; cum frequens & perce-
 lebre tunc temporis erat Geometriæ exerci-
 tium ; quonam de subiecto in suis Elemen-
 tis ageret *Euclides* ; ac quodnam Thema in
 iis proponeret. Si non aliæ accesserint ra-
 tiones , quæ *Euclidem* Virum acutissimi inge-
 nii permoverint , suum opus tantum Ele-
 mentum nuncupare. Si ante dicta pensite-
 mus ; hæc σοιξεῖα sunt multorum de re Geo-
 metrica optime meritorum Scriptorum prin-
 cipia & fundamenta. Ea sunt fontes &
 scaturigines ex quibus tot effluxere Geome-
 triæ rivuli. Ea sunt fundamenta firma , qui-
 bus tot Geometriæ Veteres suum Mathema-
 ticum ædificium superstruxere ; ac adhuc
 hodie Recensiores super iis condunt. Ea
 sunt tot Elementa quotquot præclara habe-
 mus opera Geometrica. Forte etiam in ge-
 nere dixit suum opus σοιξεῖα , non ad Geo-
 metriam tantum , sed ad alias quascunque
 intellectum perficientes & ornantes Scientias
 sese extendentia. Forte plura sub isto Ele-
 mentorum vocabulo intellexit. *Commandinus*
 vero per excellentiam quandam hanc in-
 scriptionem de Geometria intelligendam esse
 putat : idemque esset ac Oratorem dicentes
Demosthenem ; Poëtam *Homerum* vel *Virgilium*
 intelligimus ; sic etiam Elementa dicentes ,
 Geometrica intelligenda esse , existimat.

§. XXVIII. Sunt interim quidam ; qui Geometriæ nomen Euclideis Elementis concedere nimis religiosi sunt , existimantes Geometriæ scientiam esse universaliorem quam his docetur Elementis ; ac propterea inepte hæc Elementa dici Geometriæ Elementa , potius servandum esse vocabulum Elementum , quam ea Geometriæ Elementa inscribere. Alii vero putant , jure optimo hæc Elementa , Geometriæ Elementa appellari. Cum Elementa *Proclo* autore dicuntur ea , quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam , & ex quibus apparet solutio eorum , quæ in ipsis dubitare contingit : vel uti ait *Menechmus* : Elementum dicitur , in quod cum sit magis simplex compositum resolvitur ; conferantur *COMMANDINI Prolegomena*. Jam vero hæc nostra Euclidea talia sunt Geometriæ Elementa , in eorum enim contemplatione solutionem acquirimus illorum , quæ in aliis dubitare contingit ; ex iis namque profluxit , quodcunque excellens Geometriæ inventum , quod Autoris famam quam maxime longam effecit , iisque tanquam certis innititur principiis. Ex iis hauritur , & intelligitur , quidquid ad solidam Geometriæ notitiam requiritur : sine horum scientia , frustra tentant Mathematicorum tam Veterum quam Recentiorum stупenda aggredi opera ; quæ ex his Elementis lucem foenerantur. Utuntur itidem Matheſeos Scriptores Veteres in suis Demonstrationibus his *Euclideis* Elementis tanquam

quam principiis, ita ut eorum de rebus Geometricis Theoremata & Problemata in hæc nostra resolvantur Elementa; ac ex his reliquæ Matheseos partes fluant. Videantur CLAVII *Prolegomena*. Verum quidem est, *Euclidem* suo in opere Geometrico non differtis verbis pertractasse omnia ad rem Geometricam pertinentia, sed uti ait CLAVIUS *loc. cit.* quæ visa sunt necessaria, atque utilia ad communem utilitatem; vel uti loqui amat COMMANDINUS, quæ Elementali tradere potuit ordine. Id autem non tollit, quo minus tamen hæc Elementa, Geometriæ nomen gerant; cum quidquid in Geometria docetur, ex his facile derivari possit Elementis. Nullum enim hucusque est in Geometria inventum; quin natales suos Euclideis debet Elementis, in iis sua habet principia & fundamenta, sine quibus nec intelligi nec demonstrari possunt.

§. XXIX. Ejusmodi Elementorum *Euclidis* conspectus, protinus nobis necessitatem quandam, ad ea Elementa cognoscenda, insinuat. Si enim perpendamus Elementa hæc ad universam Geometriam esse necessaria; quis iis, qui Geometrica imbui scientia studet, carere possit? Si teste COMMANDINO principalissima, simplicissimaque, ac primis principiis maxime affinia Theoremata Geometriæ iis in Elementis contineantur: Quis cognitionis Geometricæ avidus, non omnium primo hæc Elementa consulere teneatur? Ea ante omnia cum tractare oportet,

portet, qui in Geometricis Scientiis se erudiri velit; in iis se exercere, is debet, qui altiora cupit; ac Veterum & recentiorum Mathematicorum scripta intelligere percipit. Vel uti ait CLAVIUS in *proleg. citatis*, sicuti is qui legere vult, *Elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis utitur in vocabulis omnibus exprimendis*; sic qui alias disciplinas Mathematicas sibi reddere desiderat familiares, *Elementa hæc Geometrica plene ac perfecte prius calleat necesse est*. Frustra enim tentant Mathematicorum opera aggredi, qui hisce principiis non satis sunt muniti. Scriptores enim illi *Euclidis* demonstrationibus, tanquam fundamentis utuntur; ac testatur CLAVIUS sibi longa diuturnaque *Experientia* compertum esse, *eam esse necessitatem Elementorum Euclidis, ut frustra quisquam se speret sine illorum præsidio, Aristarchi, Archimedis, Apollonii, Theodosii, Autolyçi, Menelai, Ptolemai, Pappi, Sereni, Aliorum Celebrium Mathematicorum Demonstrationes intelligere vid.* COMMANDINUS in *Prolegom.* Immo cum hæc *Elementa Universæ Geometriæ* tradunt principia, sine quibus nec sciri nec percipi rite possunt abstrusiora istius scientiæ Theoremata ac Problemata; quis non mecum fateri tenetur *Elementa hæc Geometriæ studiosis scitu perquam necessaria esse?*

S. XXX. Quanti olim necessitatis & utilitatis *Euclidis* *Elementa*, ut rite studiosa juventus iis imbueretur, habita sunt, satis declarant Professiones Euclideæ, quæ antea
in

in Academiis & Gymnasiis fuere. Etenim creati fuere Professores, quibus Euclidæ exponere Elementa, demandatum erat. Sic enim refert DECHALES *in tract. de Progres. Mathes. cap. 2. pag. 14.* quod Joannes Scheubelius in Academia Tubingensi Euclidis Professor fuerit ordinarius; ac testatur CONRADUS DASYPODIUS *in præfat. in lib. 1. Euclidis*; primum illum librum in omnibus fere Gymnasiis prælectum fuisse; inque Schola Argentinenſi, iis, qui sunt in primæ curia propositum. Porro etiam notat SAMUEL REYHERUS *in dissert. de Euclide, cap. 2.* Lipsiæ olim moris fuisse, ut summos in Philosophica facultate honores ambientes, speciminis Mathematici loco *propositionem 47. Elem. 1.* demonstrarent, & propterea hanc propositionem dictam magistralem fuisse, illosque qui rite dictum Theorema demonstrare potuerunt, Magisterii titulo dignos fuisse habitos. Ac ni fallor in Academiis Patriæ nostræ, si non in omnibus, saltem in quam plurimis, constitutum est, ut, qui ad lauream Doctoralem Philosophiæ aspirant, Propositionem unam, vel duas, ex Elementis Euclidis, quibus suorum in Mathesi profectuum specimina dant, desumptas demonstrarent.

S. XXXI. Maximis laudibus *Euclidis* in Geometria peritiam ornant tam Antiqui quam Neoterici Matheseos Scriptores. Ne autem omnia commemorem, pauca quædam hic tantum adducam; & quidem è Veteribus
PAPPI

PAPPI ALEXANDRINI testimonium, tanquam sufficiens, referam. Scribit enim clarus hic Geometra in lib. 7. *Collectionum Mathem.* Quod Euclides operam dans discipulis Alexandria, longo tempore adeo excellentem in Mathematicis habitum sit affectus, ut nunquam fuerit deceptus. Ex Recentioribus CLAVIUS in *Proleg. in Euclid.* audiendus est; qui inquit, noster Geometra acutissimus, cum in *Doctrina Academicorum*, esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transfudit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium judicio principem inter Mathematicos sibi locum jure optimo vindicavit. Vocatur idcirco à SAVILIO insignis Geometra, ac à DECHALES summus Geometra. COMMANDINUS vero in *Euclidem*, in *proleg.* dicit, quod Mathesin ita præclaro animi impetu est aggressus, ut progressus admirabiles, ac sempiterna ævi memoria dignissimos in ea fecerit; constantique omnium Doctorum testimonio Geometrarum princeps habitus sit; immo majorem semper consecutus est laudem, quam omnes illi qui ante eum vixere.

§. XXXII. Quanti etiam semper, per totum terrarum orbem, æstimata fuere, & hodie ubique æstimentur *Euclidis nostri Elementa*; quæ super Geometrica Doctrina conscripsit; abunde testantur, tum *Commentaria* à multis Viris eruditis in *Elementa Euclidæa* adornata; tum *Editiones* illæ multiplices, quibus innumeris in locis eadem lucem adspexere. Ea vero quæ colligere potui, hic com-

commemorare non inutile fore duxi. Ad id autem efficiendum imprimis usus fui laboribus FABRICII in *Biblioth. Græc. lib. III. cap. XIV.* & M. GEORGII MATHIÆ BOSE in *Schediasmate literario, de variis Elementorum Euclidis Editionibus*, in quo partim de se, partim è WOLFIO recenset Editiones à FABRICIO omiffas. In hoc catalogo & Commentariorum, & Editionum adornando, hunc tenui ordinem, ut pro annorum numero, quo prodire, se mutuo sequantur.

Inter omnes, qui Euclidis Elementa commentariis suis illustrare conati fuere, Antiquissimus esse videtur THEON ALEXANDRINUS.

(Secundo loco commemorandus est PROCLUS DIADOCHUS, cujus commentarium latinitate donavit FRANCISCUS BAROCIUS.)

BOËTHIUS *Euclidem* translatus in Romanam Linguam dedit, quæ inter Boëthii opera hodie exstant, ac inscribitur *Euclidis Megarensis Geometria ab Anis. Manl. Severin. Boëthio translatus. Operum pag. m. 1179.* ubi tantum propositiones sine demonstrationibus exstant.

Verum *Euclidem* Latini prius ex Arabico translatus habuere, quam ex Græco fonte. Nam JOANNES CAMPANUS qui vixit circa salutis annum ML. uti Autor est *Raphaël Volaterranus*; vel anno Domini CIOXXX. uti censet *Trithemius*, ex Arabico in Latinum vertit. Illa autem versio reprehenditur

à CLAVIO in *præfat. in Euclid.* Quod Campanus in omnibus secutus sit, traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, & Methodum perverterunt, verbaque Propositionum ejusdem locis non paucis immutarunt; ut verus, germanusque Authoris sensus, perdifficile possit intelligi. Vid. VOSSIUS *de Scient. Mathem. pag. 61. 62.*

Pariter ATHELARDUS, sive ADELARDUS, Anglus, Monachus Bathoniensis *Euclidis* Geometriam ex Arabico transtulit Latine Anno CIOCCXXX.

Vetustissimum Elementorum Typis scriptorum exemplum esse videtur, quod prodiit græce & latine sub titulo. *Euclidis opus Elementorum in XV. libros divisum, cum Commentariis Campani, & Præfatione Erhardi Radholt, Augustani, ad Johannem Mocenicum, Urbis Venetæ Principem*; editum Venetiis, per dictum RADHOLTUM anno 1482. Cujus Editionis meminit CORNELIUS à BEUGHEM in *incunabulis Typographia.*

Prodiere libri XIII. latine, ex versione, & cum Commentario LUCÆ PACIOLÆ DE BURGO. Venet. 1489. fol.

Euclidis Elementa Latine, cum commentariis *Campani*; per LEONARDUM de Basilea, & GULIELMUM de Papia, socios; 20. Cal. Jun. edita sunt Vicent. 1491. fol.

ZAMBERTUS vertit libros. XIII. sub titulo Elementorum *Euclidis* ex traditione *Pappi* Philosophi, quæ versio prodierat. Venet. 1505. fol.

AM.

AMBROSIUS LACHER DE MERS-
PURGK Constanci diocesis Arcium libera-
lium Magister, sacreque Mathematicæ stu-
dii nostri Ordinarius in Academia Franck-
fordiana. *Euclidem* edidit anno 1506. 4.
plagulis novem; *Campanum* sequitur. Non
tamen nisi quatuor priores libros comparare
in hoc volumine voluit Autor.

Textus de sphaera *Johannis de Sacrobosco*,
& Geometria *Euclidis Megarensis*. Præmitti-
tur *Jacobi Fabri stapulen*. Præfatio ad splen-
didum virum *Carolus Berram* Thesaurarium
Regium; tribus ultimis paginis habes libros
quatuor Geometriæ *Euclidis* à *Boëtio* in Lati-
num translato. In fine exstat. Impressum
Parisi in officina *Henrici Stephani* è regione
scholæ decretorum sita. Anno Christi Syde-
rum conditoris 1507. fol.

LUCAS PACIOLUS, Elementorum li-
bros XV. interprete *Campano*, edidit, Ve-
net. 1509. in fol. impressi sunt apud *Paganini-
um Paganinum*, ac dedicati *Cardinali Volaterra-
no*.

Latine prodire *Euclidis* Elementorum libri
XV. interprete CAMPANO; & libri XIII.
interprete BARTHOLOMÆO ZAMBER-
TO Veneto, Parisiis 1516. apud *H. Stepha-
num* avum, fol. una cum aliis *Euclidis* scrip-
tis Basilæ. 1537. & 1546. fol.

ORONTIUS FINÆUS latine commenta-
tus est in VI. priores *Euclidis* libros, qui
prodiit Parisiis. 1530.

Euclidis Elementa vulgata sunt Græcè hoc
titulo, *ευκλείδου στοιχείων βιβλία α' τε τών Θεω-*

LXXX BREVIS NARRATIO HISTORICA

vos συνουσιῶν. Basilæ 1533. apud *Joannem Hernagium*, fol. edente SIMONE GRYNÆO, è duobus codicibus MSS. Quorum alterum Venetiis *Lazarus Baysius*, alterum Parisiis *Johannis Ruellius* suppeditaverat. Ad-diti etiam in illa editione, itidem Græce, è codice Oxoniensi *Joh. Claymundi* sunt, sed admodum inemendate, Commentariorum libri quatuor, Autore *Proclo* Philosopho.

Euclidis Elementorum libri Græcè tum Florentiæ, tum Romæ, excusi sunt. 1545. 8.

JOHAN SCHEUBEL. Professor Euclidis Tübingæ, latine edidit VI. priores libros in quorum figuris nullæ literæ. Basilæ 1550. fol.

Libri VI. priores latine prodire cum Demonstrationibus ORONTII FINÆI Parisiis apud Simon. Colineum. 1551. 4.

Libri XV. Græce & Latine excusi sunt cum præfatione *Stephani Græcisi*. Parisiis 1557. 1573. & 1598. 8.

JACOBUS PELETARIUS libros VI. Priores latine edidit cum suis demonstrationibus fol. Anno 1557.

FRANCISCUS BAROCCIUS, *Proeli* libros quatuor commentariorum in Euclidem, cum scholiis & figuris latine tantum edidit. Patavii. 1560.

WILHELM HOLTZMAM (*Guil. Xyl-andri*) libri sex priores Germanicè edidit Basel apud. J. *Operinum* 1562. fol.

Hanc sex priorum librorum, versionem Xyl-andri, JOHAN PETERSZ. DOU in Bel-

Belgicam Linguam transtulit. 1606. quæ verſio iterum in Germanicam Linguam translata eſt à SEBASTIANO CURTIO.

Libri XIII. Græcè & Latinè ex Editione CONRADI DASYPODII Argent. 1564. 8. additis, ad librum primum & ſecundum tantum, *Theonis* commentariis, & ad ſecundum *Barlaami* Monachi Demonſtrationibus, quibus ad numeros applicat, quæ de Lineis ac figuris planis *Euclides* docuerat.

Libri. XV. Italice verſi & Explicati à NICOLAO TARTAGLIA. Venet. 1565. 4. & cum Commentario *Campani* itidem in lingua Italica Venet. 1569. fol. Cum ſcholiis antiquis incerti Autoris correcti & illuſtrati à FREDRICO COMMANDINO 1575. fol. & Piſauri. 1619. itidem Italice primi ſex libri Mediolani. 8.

ARNOLDUS LENSÆUS Ifagogen in Elementa *Euclidis* compoſuit. Antw. 1565. 8.

CHRISTIANUS HERLINUS, & CONRADUS DASYPODIUS, publicarunt Argentinæ 1566. fol. Analyſes Geometricas VI. librorum *Euclidis*; ubi propoſitiones, Græcè, Demonſtrationes, mere latine.

Libri XV. latine demonſtrati à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA, & libro XVI. per ipſum addito aucti; de ſolidorum regularium inter ſe invicem collatione, itemque XVII. de compoſitis regularibus. Pariſiis 1566. fol. & 1578. fol.

Euclidis Elementa cum notis H. BILINGSLEY & præfat. *Joh. Dee* Londinenſis 1570. Lond. fol. idiomate anglicano apparuere.

CON-

CONRADUS DASYPODIUS inter alia *Euclidis* opera libros XV. Elementorum edidit Argent. 1571. 8. in ea editione nudæ propositiones græce & latine reperiuntur. Edidit & eodem anno librum primum *Theonis* commentariis illustratum græce, cum latina perspicua interpretatione, & *Heronis* vocabulis Geometricis.

FREDRICUS COMMANDINUS libros XV. *Euclidis* latine vertit, & cum suis commentariis edidit, Pisauri 1572. & 1619. fol.

FRANCISCUS MAUROLYCUS Opuscula Mathematica Venetiis 1575. 4. edidit, in quibus Theoremata XIII^{ti} Elementi.

Per CONRADUM DASYPODIUM libri VI. latine in lucem editi, cum Scholiis *Isaaci* Monachi Argentorati. 1579. 8.

CHRISTOPHORUS CLAVIUS libros XV. latine cum scholiis & commentariis insignibus edidit Coloniae 1591. fol. Romæ 1603. 2. Tom. in 8. Francofurti 1607. 8. ac inter opera ejus Mathematica Moguntiae. 1612. fol. iterum Coloniae 1627. 8. prodit, in quorum decimo quarto & quinto, *Campanum* imitatur, *Flussatis* decimum sextum addit, ubi 31. Theoromatibus, ac 5. problematibus quinque corpora, variè sibi inscripta & circumscripta considerantur; ad modum tamen *Dasypodii* propositiones solas, absque Demonstrationibus ostendit. Alia iterum *Clavii* editio prodit Francofurti 1654. 2. Tom. in 8.

NASIRIDINUS TUSINUS Perfa *Euclidis*

dis libros XIII. Arabicè vertit ; quæ versio luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ 1594. fol. ex Typographia Medicea.

Excusus est Typis *Euclides* Coloniae 1600. 8. In hac solæ Euclideæ Propositiones absque Demonstratione reperiuntur ; præfixa est præfatio *Gracilis*.

CHRISTOPHORUS DIBAUDIUS latine Demonstrationem dedit linealem VI. priorum librorum. Arnhemiae 1603. 4. eorundemque demonstrationem numeralem. Lugd. Bat. 1603. Lib. VII. VIII. IX. Demonstrationem Arnhemiae 1605. libri X. seu Arithmeticæ irrationalium , demonstrationem Linealem & numeralem. ibid. eod.

AMBROSIUS RHODIUS XIII. libros latine demonstravit Witteb. 1609. 8. 1634. 1661.

SIMON MARIUS , Germanice VI. priores *Euclidis* libros demonstratos dedit , Onoldi. 1610. fol.

FLORIMUNDUS PUTEANUS librum *Euclidis* decimum cum commentariis edidit Parisiis. 1612. fol.

JOH. CHRIST. KNOPFF. libros duos priores , cum explicatione JOH. PAULI RESENI edidit Witteb. 1612. 8.

DOUNOT DE BAR-LE DUC. Gallice *Euclidis* Elementa vertit , Paris. 1613. 4. m. In libro decimo ordo turbatus , ut in Heruagiana latina editione in libris 5. 14. & 15. *Euclidem* stricte sequitur.

D. HENRION libros. XV. in Linguam Gal-

Gallicam versus est , Paris. 1615. 8. (& 1632. in 4ta) ac 1631. 8.

Libri VI. priores cum commentario JOH. LANZ. S. J. prodire Ingolst. 1617. 8.

SEBASTIANUS CURTIUS Germanicam paravit Editionem Amst. 1618. 4. item 1634. 8. m.

Libri XIII. Lond. 1620. fol. græce & latine prodire , nitida editio , cum *Com-mandini* versione , adjectis figuris accuratis.

CAROLUS MALAPERTIUS. libros. VI. priores latine demonstravit. Duaci 1625. 12.

M. LUCAS BRUNN. Germanice *Euclidis* Elementa practica , oder auszug aller Problematum , und handarbeiten , aus den XV. büchern *Euclidis*. Norimb. 1625. 4. Definitiones nullæ , Theoremata nulla , sed nudæ Problematum solutiones.

PETRUS HERIGONIUS Gallice libros VI. priores vertit , ac edidit Paris. 1644. 8. & libros. XV. latine , & Gallice: in Tom. 1. Cursus Mathematici Paris. 1644. 8. m.

MARIUS MERSENNUS libros. VIII. latine in Synopsi sua Mathematica demonstratos dedit Paris. 1644. 4.

CLAUDIUS RICHARDUS latine in libros. XIII. commentatus est , Antwerp. 1645. fol.

MARIUS BETTINUS in *Ærario* Mathematico , Prolixos commentarios in VI. priores libros *Euclidis* dedit ; Bononiæ. 1648. 3. Tom. 4.

GEORGIUS FORNIER latine demonstra-

stravit VI. libros priores. Lond. 1654. 12.
& secunda editio Paris. 1654. 24.

ANDREAS TACQUET Elementa Geometrica Euclidea edidit Antwerp. 1651. 8. ac Amstel. 1701. 8. & cura WHISTONI recensita & locupletata est, Cantabrigie 1703. 8. (eadem recusa Amstel. 1725.) in quibus. VI. priores & XI. XII. continentur libri.

ISAACUS BARROUW librorum XV. editionem latinam paravit Cantabr. 1655. 8. Lond. 1659. 1678. Marburg. 1675. 8.

JOH. ALPHONSUS BORELLUS Euclidem restitutum, sive priscae Geometriæ Elementa brevius & facillius contexta elaboravit. Pisis. 1658. 4. Romæ 1670. 12.

CASPARUS SCHOTTUS libros VI. priores edidit in cursu Mathematico Illebp. 1662. Franc. 1674. & Bamb. 1677. fol.

CHRISTIANUS MELDER VI. priores Euclidis libros edi curavit Lugd. Bat. & Amstel. 1673. 12. *Furnerio* se multa debere ipse agnoscit.

CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES XIV. libros Elementorum edidit in mundo Mathematico, ejusque Tom. I. qui prodiit. 1674. nec non post Autoris obitum, editore *Amato Varcino*. Lugd. 1690. fol. (Gallice vero libros. VI. priores cum XI. & XII. Paris. 1683. in 12.)

(Liber 5. Elementorum Euclidis explicatus secundum Doctrinam Gallilæi, à VINCENTIO VIVIANI Florentiæ 1674. 4.)

Euclidis Elementa Geometrica, novo ordine

dine ac Methodo fere demonstrata, una cum *Nicolai Mercatoris* in Geometriam Introductione brevi. Lond. 1678. 12. Autor misso ordine Geometræ, in margine expressit librum, & numerum propositionis ex ordine *Euclidis*.

JONAS MOORE anglice libros VI. priores cum XI. & XII. edidit, in the new systeme of the Mathematicks. Lond. 1681. 4.

HENRICUS COETS latine VI. priores libros demonstravit Lugd. Bat. 1691. 8. & Amstel. 1705. 8.

A. E. B. V. P. Teutsch Redender Euclides, oder acht Bücher (1-6. ac 11. & 12.) von denen anfangen des Messkunst. Wien. 1694. 4.

OZANAM in cursu Mathematico libros VI. priores, una cum XI. & XII. Gallice interpretatus est, Paris. 1697. qui recusos Paris. 1699.

SAMUEL REYHERUS, germanice VI. priores libros edidit, Kiel. 1697. 4.

HENRICUS MEISNERUS Hamburgi Elementa *Euclidis* edere coepit Græcè & Germanicè, cum uberrimis Commentariis, itidem Germanicis A. 1699. fol. sed non editis ultra librum secundum.

DAVID GREGORIUS Græcè & Latine libros XV. *Euclidis* recensuit, ac edidit Oxoniæ 1703. fol. è Theatro Sheldoniano. nitidissima Editio.

JACOBUS GOODEN ex *Euclide* præcipua collegit Theoremata, ac edidit. Leod. 1704. 8.

Decha-

DE EUCLIDIS VITA, AC ELEMENTIS. LXXXVIII

Deebales par OZANAM Paris. 1709. 12. m.

The Elements of Euclid, With select Theorems out of Archimedes by the Learned Andrew Taquet, by WILLIAM WHISTON. the third edition Lond. 1714. 8. m.

JOANNES KEIL, ex versione *Commandini* libros VI. priores cum. XI. & XII. imprimi curavit. Oxon. 1715. 8.

P. JACOB KRESA *Euclidem* in linguam Hispanicam traduxisse fertur, in literariis novis Germanice 1721.

SAMUEL CUNN Keilianam editionem anglie traduxit Lond. 1723. 8.

Demonstration universelle des converses d'Euclide par Mr. SELLIER 1723.

Prodiit apud Woodward tomus secundus Elementorum Euclidis, ex editione *Gregorii* in linguam Anglicam verforum, per EDMUNDUM ROVAN 1732.

Euclids Elements of Geometry, from the Latin translation of *Commandine*, by Dr. *John Keill*, translated by *Samuël Cunn*, carefully revised and corrected by JOHN. HOM. the third. edition. 1733.

Præter has *Euclidis* Editiones etiam recensentur Elmenta *Euclidis* Arabice versa à THEBETO.

Perficam versionem Bodlejana; *Syriacam* Cantabrigiensis Bibliotheca servat.

Libri VII ex Arabico Ebraicè versi à JOH. JACOBO MFCHIR.

Alia Hebraica versio R. MOSIS ABEN TIBBON. Quam versionem *Buxtorfius* Mont-

CLXXXVIII BREVIS NARRATIO HISTORICA

speculi. A. C. 1210. factam esse testatur
vid. WOLFII. *Biblioth. Hebraea part. 1. pag.*
133.

Denique Sinice, ac Tartarice *Euclidis*
Elementa versa sunt.

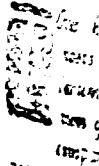
Plantavitius Romæ in Bibliotheca Me-
dicæ præclarissimum *Euclidis Exemplar*
Hebræum vidisse se ait, magnis in folio
membranis, iisque tersissimis, nobilique
charactere, & auctario duorum librorum,
qui non exstent in Græcis & Latinis exem-
plaribus uti refert WOLFIUS in *Biblioth.*
Hebraea part. 1. pag. 133. sunt & alia exem-
plaria Hebraica quæ à Wolfio loco citato
enumerantur.

EUCLIDIS



EU
ELE

P



Euclidis
Elementa
liber primus
propositiones
primæ
secundæ
tertiæ
quartæ
quintæ
sextæ
septimæ
octavæ
nonæ
decimæ
undecimæ
duodecimæ
tredecimæ
quoddecimæ
quintodecimæ
sexdecimæ
septendecimæ
octodecimæ
nondecimæ
viginti
viginti unæ
viginti duæ
viginti triæ
viginti quatuor
viginti quinæ
viginti sex
viginti septem
viginti octo
viginti novæ
triginti



E U C L I D I S

E L E M E N T U M

P R I M U M.



*I*stius hic primus liber in eo positus est, ut nobis tradat ortus proprietatesque triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdum, interdum vero unumquodque per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera, secundum æqualitatem atque inæqualitatem, rimatur. Idemque variis rationibus inquirat, in duobus quandoque triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumque contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, ut cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Ut autem hac omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet divisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaque ut uno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime prima, ac præcipua, triangula inquam, atque parallelogramma.

A

D E

DEFINITIO. I.

Punctum est, cujus pars nulla est.

ANte omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositam exorditur à principiis, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, unas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemve alteras. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturque sine omni parte, ita ut neque longum, neque latum, neque profundum esse cogitur, id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum.

DEFINITIO. II.

Linea verò, longitudo latitudinis expers.

Definit hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam.

Mathematici, ut nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum jam descriptum superiore definitione, è loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum om-

TAB. I. nis expers latitudinis. Ut si punctum *A*, fluere
Fig. 1. intelligatur ex *A*, in *B*, vestigium effectum *AB*,
 linea appellabitur, cum vere intervallum inter duobus
 punctis *A*, & *B*, comprehensum sit longitudo qua-

dam

dam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni privatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit.

DEFINITIO. III.

Lineæ autem termini, sunt puncta.

DOcet quod linea qualibet habens extrema, in TAB. I.
suis extremitatibus puncta recipiat. Ut linea fig. 1.
AB, extrema habet puncta A, & B.

DEFINITIO. IV.

Recta linea est, quæ ex æquo sua
interjacet puncta.

HOc est, in qua nullum punctum intermedium
ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc,
atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil
flexuosum reperitur.

Quemadmodum autem Mathematici per fluxum
puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita
per qualitatem fluxus puncti, qualitatem lineæ descripta
intelligunt. Si namque punctum recta fluere concipiatur
per brevissimum spatium, ita ut neque in hanc
partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem
quendam motum, atque incessum teneat, dicitur
linea illa descripta, Recta.

DEFINITIO. V.

Superficies est, quæ longitudinem, latitudi-
nemque tantum habet.

Post lineam, quæ est prima quantitatis continua
species, unicamque habet dimensionem, definit
A 2 super

4 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additque primæ dimensionis secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur, non solum longitudo, ut in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Ut quantitas $ABCD$, inter lineas AB , BC , CD , DA , comprehensa, considerataque secundum longitudinem AB , vel CD , & secundum latitudinem AD , vel BC , omnis expers profunditatis, appellatur superficies.

TAB. I.
fig. 2.

Mathematici vero, ut nobis eam ob oculos ponant, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in transversum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Ut si linea AB , fluat versus DC , efficietur superficies $ABCD$.

DEFINITIO. VI.

Superficiæ autem extrema, sunt lineæ.

Non dissimilis est hæc definitio superiori, quæ termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiæ esse lineas, quemadmodum lineæ fines extiterunt puncta. Ut superficiæ $ABCD$, extrema sunt lineæ AB , BC , CD , DA .

TAB. I.
fig. 2.

DEFINITIO. VII.

Planâ superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas.

Hæc quoque definitio, similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interjacet, ita ut media

media partes ab extremis sursum, deorsumve subsul-
tando, non recedant, appellabitur plana: qualis est
superficies perpoliti alicujus marmoris, in qua partes
omnes in rectum sunt collocatae, ita ut nihil habeat
incisum, angulis, nihil anfractibus, nihil eminens,
nihil lacunosum: In hac enim partes intermediae cum
extremis aequalem adeptae sunt situm, nec ulla est alia
sublimior, humiliorve, sed omnes aequabiliter pro-
tenduntur.

Hac autem superficies sola erit ea, quam imagi-
nari, & intelligere possumus describi ex motu linea
rectae in transversum, qui super duas alias lineas rectas
conficitur. Ut si linea recta AB , per duas rectas TAB. I.
 AD , BC , feratur, efficietur superficies perfecte plana. fig. 2.

Solent Mathematici superficiem planam frequenter
appellare planum, ita ut quando loquuntur de plano,
intelligenda semper sit superficies plana.

DEFINITIO VIII.

Planus vero angulus, est duarum linearum
in plano se mutuo tangentium, & non in di-
rectum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DEclarat, quidnam sit angulus planus, dicens;
quandocunque dua linea in plana aliqua
superficie invicem concurrunt, & non in directum con-
stituuntur, efficietur ex hujusmodi concursu, seu in-
clinatione unius ad alteram, angulus, qui dicitur
planus, propterea quod in plana constituatur superficie.
Verbi gratia, quia dua linea, AB , AC , concur-
runt in A , & non jacent in directum, ideo efficiunt TAB. I.
angulum A , planum in eadem existentem superficie, fig. 3.
in qua dua illa linea constituuntur. Dicuntur autem
dua linea non in directum jacere, quando altera ea-

6 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

rum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod si dua lineæ se mutuo tangant jacentes in directum, ita ut alterutra producta congruat toti alteri, non fiet ullus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed amba unam integram lineam constituent. Ut quia recta

TAB. I. AB, producta convenit cum recta BC, non efficitur
fig. 4. angulus in B. Quare in directum dicentur jacere. Itaque ut lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, ut post concursum productæ se mutuo secent.

Consistit autem anguli cujusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem.

DEFINITIO. IX.

Cum autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

Angulus omnis planus qui conficitur ex lineis duabus rectis, rectilineus dicitur.

DEFINITIO. X.

Cum vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum. Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ejus, cui insistit.

Docet hoc loco Euclides, quænam angulus rectilineus apud Geometras appellatur rectus, & quænam linea perpendicularis: si recta linea AB, recta CD, insistens efficiat duos angulos prope punctum B,

TAB. I.
fig. 5.

B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis esse deinceps, quod eos eadem linea *CD*, protracta, prope idem punctum *B*, efficiat) inter se aequales, quod tum demum fiet, quando recta *AB*, non magis in *C*, quam in *D*, inclinabit, sed aequaliter recta, *CD*, insistet, vocabitur uterque angulus *B*, rectus, & recta *AB*, perpendicularis recta, *CD*, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta *CB*, perpendicularis recta *AB*: quamvis enim *CB*, tantum faciat cum *AB*, unum angulum, tamen si *AB*, extenderetur in rectum & continuum versus punctum *B*, efficeretur alter angulus aqualis priori.

Itaque ut in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, qua ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, ut probemus angulum, qui est ei deinceps, aequallem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, qua ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps aequallem quoque esse.

DEFINITIO. XI.

Obtusus angulus est, qui recto maior est.

Quando recta *AB*, recta *CD*, insiciens non TAB. 2
fecerit angulos ad punctum *B*, aequales, & ob fig. 6
eam causam neutrum rectum, sed unum quidem recto
majorem, alterum vero minorem, dicitur major
angulus obtusus, qualis est angulus *B*, ad punctum
C, vergens, qui continetur rectis lineis, *AB*, *BC*.

DEFINITIO. XII.

Acutus vero, qui minor est recto.

TAB. I. **M**inor angulus B , ad punctum D , vergens,
fig. 6. qui continetur rectis lineis AB , BD , vocatur acutus.

Quoniam vero ad quemvis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, ut tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extrema vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, angulum obtusum intelligunt per angulum ABC , acutum vero, per angulum ABD , quod diligenter est notandum, ut facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

DEFINITIO. XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

Tres sunt termini juxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Omne siquidem terminatum superat terminum suum una dimensione, ut perspicuum est ex adductis exemplis.

DEFINITIO. XIV.

Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

Non omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare

lare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminata, & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt; ut solida finita, Figura nomine appellabuntur. Ha enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare.

DEFINITIO. XV.

Circulus, est figura plana sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur; ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

Definit hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, qua unica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab uno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Ut si superficies, seu spatium concludatur unica linea *ABC*, habueritque hanc conditionem, ut ab aliquo puncto intus suscepto, utpote à *D*, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum *ABC*, quales sunt *DA*, *DB*, *DC*, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non.

TAB. A
fig. 7.

Adjungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est *ABC*, appellari Peripheriam, seu, ut Latini exponunt, circumferentiam.

Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta finita

10 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, unde moveri cæperat. Ut si intelligatur recta

TAB. I. AD, circa punctum D, quiescens moveri, donec
fig. 7. ad eundem redeat locum, à quo dimoveri cæpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam ABC: Erit quoque punctum quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta AD, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur.

DEFINITIO. XVI.

Hoc vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCet, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ

TAB. I. sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est
fig. 7. punctum D.

DEFINITIO. XVII.

Diameter autem circuli, est recta quædam lineæ per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circum bifariam secat.

TAB. I. SI in circulo ducatur recta lineæ AB, per
fig. 8. centrum C, ita ut extrema ejus A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta lineæ ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum usque ad peripheriam utrinque extenditur.

Unde

Unde plures assignari poterunt in circulo diametri, unum vero centrum duntaxat.

Quod autem Euclides addit, circulum bifariam sceri à diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, utpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, ut propter directum diametri per centrum transitum, utrinque aequales circumferentia abscondantur.

DEFINITIO. XVIII.

Semicirculus vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

Exempli gratia, in circulo figura *ADB*, continetur sub diametro *AB*, & peripheria *ADB*, fig. 8. dicitur semicirculus; eadem ratione erit figura *AEB*, semicirculus. TAB. 1.

DEFINITIO. XIX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

Omnes igitur figura plana, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur.

DEFINITIO. XX.

Trilateræ quidem, quæ sub tribus.

Affirmans Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur.

D E.

EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

DEFINITIO. XXI.

Quadrilateræ quidem, quæ sub quatuor.

DEFINITIO. XXII.

Multilateræ autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

Quoniam species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras.

DEFINITIO. XXIII.

Trilaterarum autem figurarum, Æquilaterum est Triangulum, quod tria latera habet æqualia.

TAB. I. **Q**uando omnia tria latera inter se æqualia sunt, ut AB , BC , CA , dicitur triangulum Æquilaterum.
fig. 9.

DEFINITIO. XXIV.

Isoceles autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

TAB. I. **U**Ti, si duo latera AB & AC . tantum inter se sint æqualia, vel DE & DF , dicitur utrumque triangulum Isoceles.
fig. 10.
fig. 11.

DEFINITIO. XXV.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia
habet latera.

*Quando omnia tria latera inter se sunt inæqualia; TAB. 1.
ut AB, BC, & CA, dicitur triangulum fg. 12.
scalenum.*

DEFINITIO. XXVI.

Ad hæc etiam, trilaterarum figurarum,
Rectangulum quidem triangulum est, quod
rectum angulum habet.

*Quando triangulum aliquod habet angulum unum
rectum, vocatur ab Enclide, & aliis Geo-
metris Rectangulum. Ut, si triangulum ABC, TAB. 1.
unum angulum habeat ad B rectum, dicitur illud fg. 13.
triangulum rectangulum.*

DEFINITIO. XXVII.

Amblygonium autem, quod obtusum
angulum habet.

*Triangulum Amblygonium, sive obtusangulum
est, quod unum habet angulum recto majorem.
Ut si in triangulo ABC, angulus ad B recto major TAB. 2.
existat, vocetur triangulum amblygonium. fg. 14.*

DEFINITIO. XXVIII.

Oxygonium vero, quod tres habet acutos angulos.

IN omni porro triangulo, cujus duo quacunque latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari *Basis*, sive illud in situ infimum occupet locum, sive supremum.

DEFINITIO. XXIX.

Quadrilaterarum autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

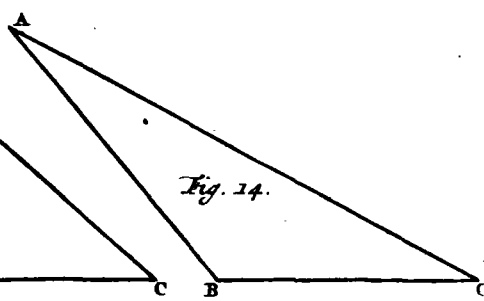
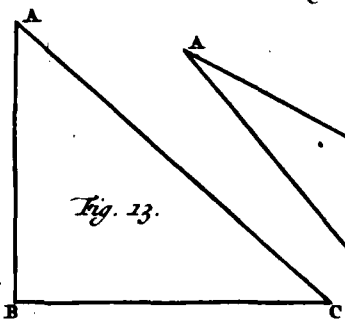
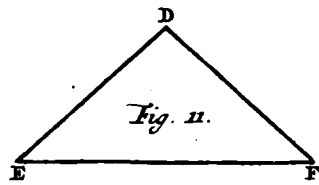
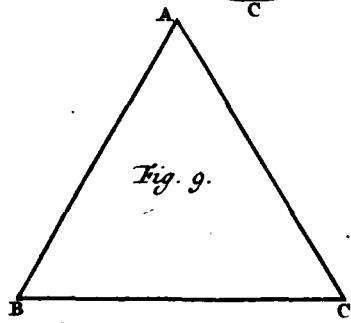
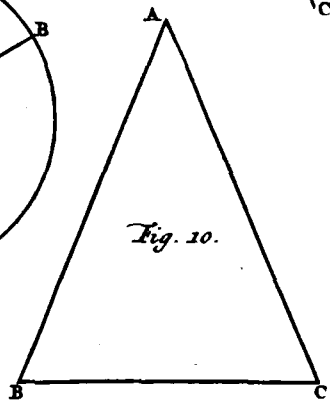
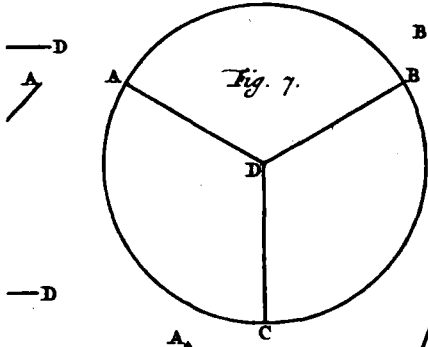
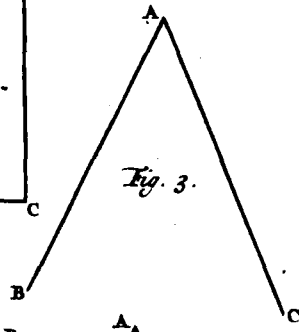
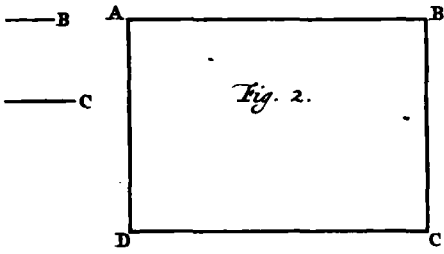
Figura quadrilatera dicitur *Quadratum*, cujus quidem omnia quatuor latera inter se aequalia existunt, omnesque anguli recti. Uti si in figura
TAB. II. quadrilatera *ABCD*, omnia, quatuor latera, *AB*,
fig. 1. *BC*, *CD*, & *DA*, sint inter se aequalia, & omnes anguli recti, erit illa *Quadratum*.

DEFINITIO. XXX.

Altera vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

Figura quadrilatera appellatur *Altera parte longior*, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se aequalia, quamvis bina opposita inter se aequalia existant. Ut, si in figura
TAB. II. *ABCD*, latera *AB*, *DC*, inter se, & *AD*,
fig. 2. *BC*, inter se quoque aequalia sint.

D E.



DEFINITIO. XXVIII.

Oxygonium vero, quod tres habet acutos angulos.

IN omni porro triangulo, cujus duo quacun- que latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari *Basis*, sive illud in situ infimum occupet locum, sive supremum.

DEFINITIO. XXIX.

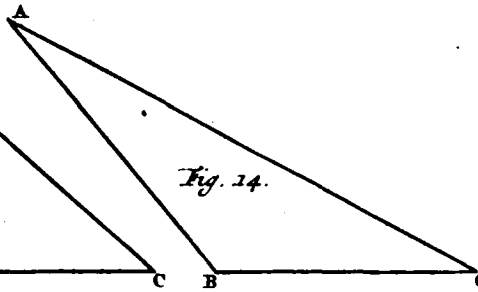
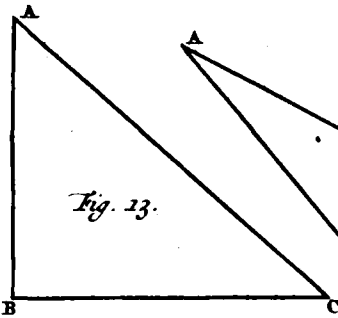
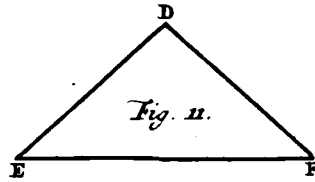
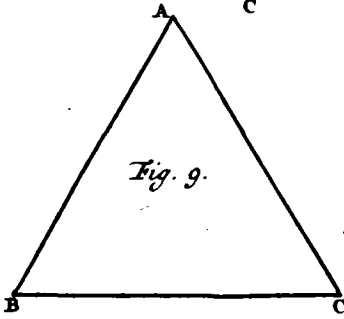
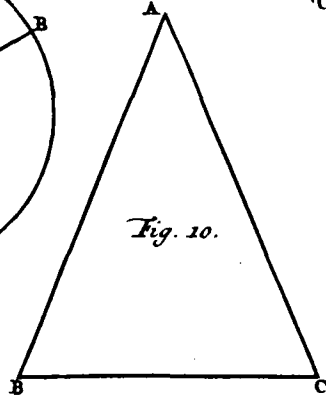
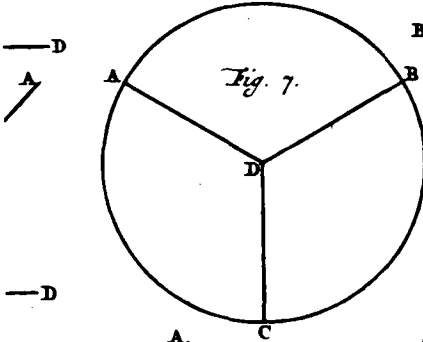
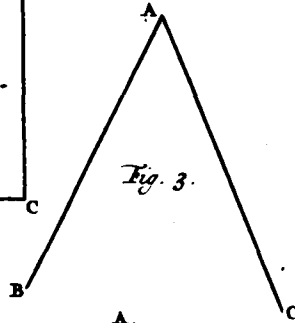
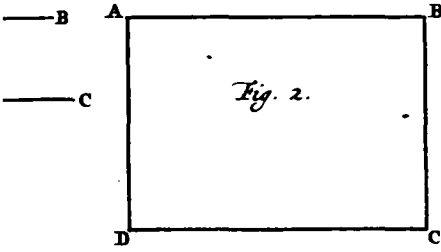
Quadrilaterarum autem figurarum, Quadra- tum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

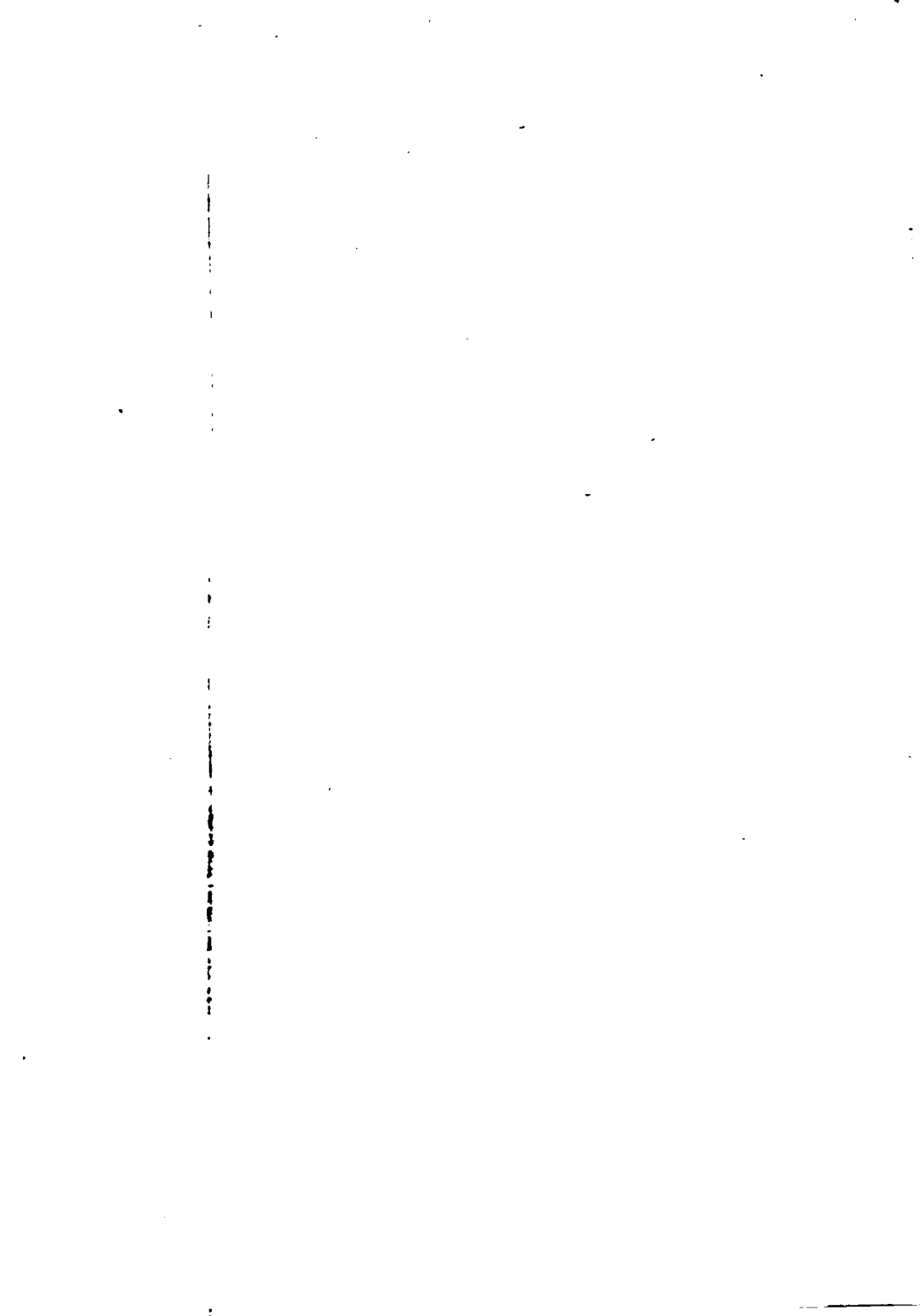
Figura quadrilatera dicitur *Quadratum*, cujus quidem omnia quatuor latera inter se aequalia existunt, omnesque anguli recti. Uti si in figura
TAB. II. quadrilatera *ABCD*, omnia, quatuor latera, *AB*,
fig. 1. *BC*, *CD*, & *DA*, sint inter se aequalia, & om- nes anguli recti, erit illa *Quadratum*.

DEFINITIO. XXX.

Altera vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

Figura quadrilatera appellatur *Altera parte lon- gior*, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se aequalia, quamvis bina oppo- sita inter se aequalia existant. Ut, si in figura
TAB. II. *ABCD*, latera *AB*, *DC*, inter se, & *AD*,
fig. 2. *BC*, inter se quoque aequalia sint.





DEFINITIO. XXXI.

Rhombus autem, quæ æquilatera, sed
rectangula non est.

Figura inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur,
oppositas prorsus habet conditiones, & diversas
à conditionibus figura altera parte longioris. Habet
enim omnia latera AB , BC , CD , & DA , TAB. II.
aqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, fig. 3.
quamvis bini oppositi A & C , B & D inter se
æquales existant.

DEFINITIO. XXXII.

Rhomboides vero, quæ aduersa & latera,
& angulos habens inter se æquales, neque
æquilatera est, neque rectangula.

Est hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, qua-
drato omni ex parte opposita. Nam neque
ejus latera omnia aqualia sunt, neque ullus angulus
rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt
 AB , DC , & AD , BC , in Rhomboides $ABCD$, TAB. II.
aqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales fig. 4.
sunt A , C , & B , D , inter se existunt æquales.

DEFINITIO. XXXIII.

Præter has autem, reliquæ quadrilateræ
figuræ, Trapezia appellentur.

Reliquas omnes figuras quadrilateras, quæ à
prædictis quatuor differunt, ita ut neque
latera omnia aqualia, neque omnes angulos æquales,
seu

seu rectos, neque latera bina opposita; neque angulos
binos oppositos habeant inter sese aequales, qualis est
TAB. II. figura ABCD, generali vocabulo Trapezia nominat:
fig. 5. quæ quidem infinitis modis variari queant.

DEFINITIO. XXXIV.

Parallelæ rectæ linæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

UT duæ, vel plures rectæ linæ dicantur parallelæ, sive æquidistantes, non satis est, ut in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad unum punctum coeant; sed necesse quoque est, ut in una plana superficie existant. Multæ siquidem linæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in unum conveniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ linæ in transversum posite in medio aere, & non se tangentes; hæc etenim nunquam coire possunt.

Dicuntur autem duæ linæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana uni earum accommodata, ita ut omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumvoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia ejus puncta, quamvis ipsa in duabus superficiebus diversis reperiantur; Ut propositis duabus rectis lineis AB, CD, si superficies aliqua plana rectæ AB, applicetur, omnia ejus tangens puncta, ita ut circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ CD; dicuntur hujusmodi rectæ duæ linæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæc duæ rectæ linæ eadem non coeant,

coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes *A*, *C*, quam ad, *B*, *D*, appellabuntur parallelae, seu aequidistantes.

Quod si dua recta linea per immensum aliquod spatium extensa non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex una parte longius protractas in unum punctum conventuras, quamvis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disjungantur, nequaquam appellandae erunt parallelae.

Hic finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figura, quae Parallelogrammum, nec non earum, quae complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duobus definitionibus adjunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quae sint parallelogrammi complementa, ut facilius demonstrationes percipiantur.

DEFINITIO. XXXV.

[Parallelogrammum est figura quadrilatera; cujus bina opposita latera sunt parallela, seu aequidistantia.]

UT figura quadrilatera *ABCD*, siquidem latus *AB*, aequidistet lateri *DC*, & latus *AD*, lateri *BC*, nuncupatur Parallelogrammum.

DEFINITIO. XXXVI.

[Cum vero in parallelogrammo diametret ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; ap-
B
pellan-

18 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

pellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.]

TAB. II.
fig. 7. **S**i parallelogrammum $ABCD$, in quo diameter AC , & linea EF , secans diametrum in G , & parallela existens lateribus AD , BC . Item linea HI , secans diametrum in eodem puncto G , parallelaque lateribus AB , DC , existens. Quæcum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum divisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo $EBIG$, $GFDH$, per quæ diameter AC , non transit, vocantur à Geometris complementa, sive supplementa reliquorum duorum $AEGH$, $GICF$, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, ut videre est in presenti figura.

PETITIO VEL POSTULATUM. I.

Postuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

TAB. II.
fig. 8. **P**rimum hoc postulatam planum admodum est, si recte considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, sit, ut si punctum quoddam ad aliud directo moveri intellexerimus, ducta sane sit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A , ductam esse rectam lineam ad punctum B ; ab eodemque aliam ad punctum C ; Item aliam ad punctum D ; & sic innumera alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.

PE.

PETITIO VEL POSTULATUM. II.

Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QUOD si punctum illud ferri adhuc cogitaverimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expertus, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis hujus productionis, cum punctum illud intelligere possimus moveri ad infinitam distantiam. Sic linea recta *AB*, producta est primo in continuum ad punctum *C*. Deinde ad punctum *D*, &c. TAB. II.
fig. 9.

PETITIO VEL POSTULATUM. III.

Item quovis centro, & intervallo
circulum describere.

JAM vero, si terminatam rectam lineam cujuscunque quantitatis, mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremum ad quodvis punctum, ipsamque circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum revertatur locum, à quo dimoveri coepit; descriptus erit circulus, effectumque, quod tertio petitio jubet. Exemplum habes in his quinque lineis *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, qua singula circa centrum *A*, circumvoluta, singulos circulos descripserunt juxta quantitatem, seu intervallum ipsarum. TAB. II.
fig. 10.

Præter hæc tria postulata, quibus Euclides conveniunt fuit, sunt multa alia æque facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decrevi illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ.

PETITIO VEL POSTULATUM. IV.

[Item quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.]

Omnis enim quantitas continua per additionem augeri, per divisionem vero diminui potest infinite: Unde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea major dari possit: neque tam parva, quin minor ea possit exhiberi.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

[Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus quoque est, aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.]

Nonnulla ratione potest, ut due quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum proposita quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario major illarum. Et si major æqualis fuerit proposita quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse.

AXIO.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. II.

Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.

SI enim quantitates constatz, sive composita, inæquales forent, proculdubio majori plus esset adjectum, quam minori, cum antea aequales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates aequales, conficiuntur quantitates quoque aequales.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. III.

Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAm si reliqua quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quam à majore.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. IV.

Et si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia.

[Et, si inæqualibus inæqualia adjecta sint, majori majus, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.]

Quin &, si æqualibus inæqualia adjecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam major quantitas addita uni æqualium, majorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adjecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adjiciantur, composita quantitas ex majore, major est, quam composita ex minore.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. V.

Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

[Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.]

Sic etiam, si ab equalibus inequalia ablata sint, reliqua erunt inequalia: quia major quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum majoris majus est residuo minoris, si equalia auferantur ab inequalibus.

In his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine equalium quantitatum intelligenda est etiam una & eadem multis communis. Si enim equalibus idem commune adjiciatur, tota fient equalia: Et si ab equalibus idem commune detrahatur, residua equalia erunt: Et si inequalibus idem commune adjiciatur; vel eidem communi addantur inequalia, tota fient inequalia: & si ab inequalibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inequalia auferantur, residua existent inequalia.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VI.

Et 'quæ ejusdem duplicia' sunt, inter se sunt æqualia.

[Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.]

Similiter, quæ ejusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter se sunt æqualia. Si enim inequalia forent, & majus eorum esset

esset duplex, vel triplex, &c. alicujus quantitatis, deficeret utique minus à duplici, vel triplici. &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cujuspiam, excederet sane majus duplex ipsum; vel triplex, &c.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VII.

Et quæ ejusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.

[Et contra, Quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia.]

Pari ratione, quæ ejusdem sunt partes tertia, vel quarta, vel quinta, &c. inter se æqualia sunt.

In his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

Hoc est, duæ quantitates, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit, sed amba inter se congruunt, æquales erunt. Ut duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando una alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita ut eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando uno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit,

nec ab eo exceditur, sed linea illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enimerunt inclinationes linearum aequales, quamvis lineæ interdum inter se inæquales existant.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. IX.

Et totum sua parte majus est.

Cum pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte majus.

In sequentibus porro pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. X.

[Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem segmentum commune.]

Non est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producat, fieri nullaratione potest, ut duæ lineæ rectæ habeant unam partem, quamvis minimam, communem, præter unicum punctum, in quo se mutuo intersecant.

Possunt tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando unam & eandem rectam lineam

TAB. II. **fg. 9.** constituunt. Ut in hac figura, rectæ AC, BD, commune habent segmentum BC, quia ambæ unam rectam constituunt lineam AD. At vero quando

TAB. II. **fg. 11.** duæ rectæ sunt diversæ, quales sunt AB, CD, non possunt possidere segmentum aliquod commune.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XI.

[Duæ rectæ in uno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto interfecabunt.]

HOc etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XII. X;

Item, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

HOc axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minui nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à lineâ perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, ut faciat utrobique angulos æquales, neque magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamvis lineæ sint inæquales interdum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIII. XI;

Et si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

UT si in duas lineas rectas *AB*, *CD*, incidens TAB. II.
alia recta *EF*, faciat duos angulos internos, & fig. 12.

16 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conventuras esse ad aliquod punctum unum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, ut appositum exemplum commonstrat. Ratio hujus perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte aequales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed equali semper spatio protenduntur, ut in propos. 28. hujus lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte distarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoque eas conventuras tandem esse aliquando in unum punctum.

XII. AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIV.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

TAB II.
fig. 13. **N**Ullam prorsus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ AB, & CR, ex una parte B, coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte A, & C, semper magis ac magis disjungentur, si producantur, ut in exemplo proposito perspicuum est. Quare ut superficies, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duobus rectis lineis tertia quadam adjungenda est.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XV.

[Si æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum excessus, adjunctorum excessui æqualis.]

HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaque quantitatibus,
AB,

*AB, CD, addantur inæquales BE, DF, sitque TAB. II.
BE, major quam DF. Et ex BE, auferatur BG, fig. 14.
æqualis ipsi DF, ut sit GE, excessus, quo quantitas
addita BE, superat quantitatem additam DF.
Quoniam igitur æqualibus AB, CD, addita sunt
æqualia BG, DF, æ erunt tota AG, CF, æqualia. a 1. prin.
Quare constat, totam quantitatem AE, superare
totam CF, eodem excessu GE, quo magnitudo DF,
adjuncta, à magnitudine adjuncta BE, superatur.
Quod est propositum.*

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVI.

[Si inæqualibus æqualia adjungantur, erit
totorum excessus, excessui eorum, quæ à
principio erant, æqualis.]

*IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, TAB. II.
DF, addantur æquales AB, CD. Et ex mi- fig. 14
jore BE, auferatur BG, æqualis ipsi DF, ut GE,
sit excessus; quo quantitas BE, quantitatem DF,
superat. Quoniam igitur æqualibus BG, DF, ad-
dita sunt æqualia AB, CD, æ erunt tota AG, CF, a 1. prin.
æqualia. Quamobrem tota quantitas AE, superabit
totam CF; eodem excessu GE, quo major quantitas
proposita BE, minorem DF, superat. Quod est
propositum.*

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVII.

[Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit
residuum excessus, excessui ablatorum æ-
qualis.]

*AB æqualibus AB, CD, auferantur inæqualia TAB. III.
BE, DF. Sitque EG, excessus, quo quanti- fig. 15
tas BE, superat quantitatem DF; ita ut BG,
æqualis sit ipsi DF. Quia igitur ab æqualibus AB,
CD, ablata sunt æqualia BG, DF, b remanebunt b 3. prin.
AG,*

18 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

AG, CF, æqualia. Perspicuum ergo est, residuum AE, superari à residuo CF, eodem excessu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, superat. Quod est propositum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVIII.

[Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.]

TAB. II. **Fig. 16.** **A** *B inæqualibus AB, CD, auferantur æqualia AE, CF. Siq̃ue BG, excessus, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD, ita ut AG, æqualis sit ipsi CD. Quoniam igitur ab æqualibus AG, CD, ablata sunt æqualia AE, CF, c remanebunt EG, FD, æqualia. Quare residuum EB, superabit residuum FD, eodem excessu BG, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD. Quod est propositum.*

In his quôque quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est una etiam sola quantitas multis communis.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIX.

[Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.]

Quoniam omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cujus sunt partes, manifesta est veritas hujus axiomatis.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XX.

[Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.]

U*T quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablati ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus est etiam reliqui hujus 7.*

P R O.



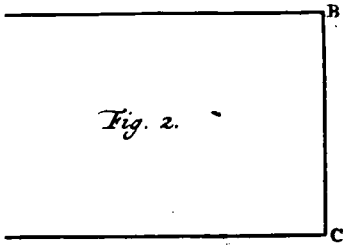


Fig. 2.

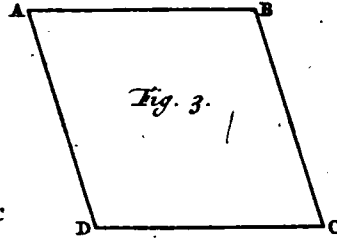


Fig. 3.

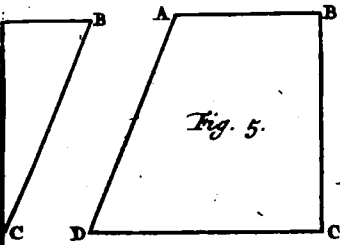


Fig. 5.

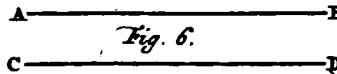


Fig. 6.

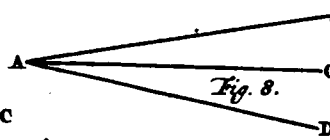


Fig. 8.

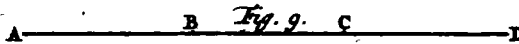


Fig. 9.

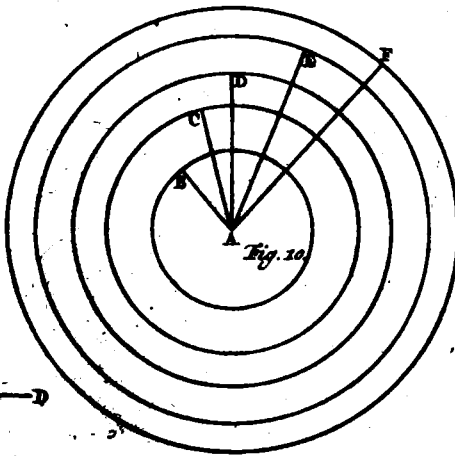


Fig. 10.

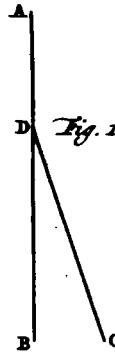


Fig. 11.



Fig. 14.

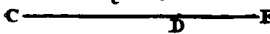
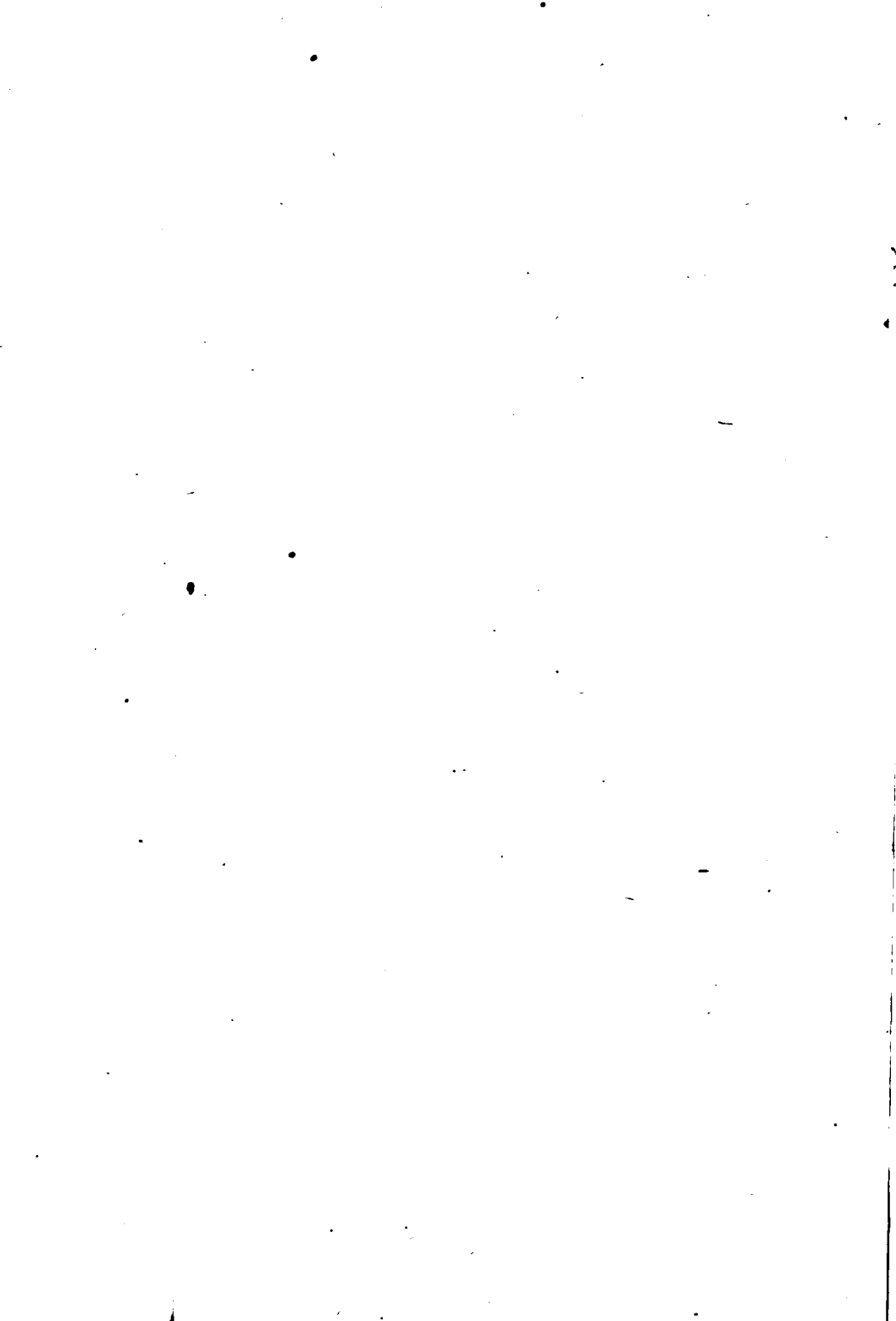


Fig. 15.





PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

Super data recta linea terminata triangulum
æquilaterum constituere.



It igitur proposita recta linea terminata *TAB. IH.*
AB, super quam constituere jubemur *fig. 1.*
triangulum æquilaterum. Centro A,
& intervallo rectae AB, a describatur *a 3. p. 1.*
circulus CBD: Item centro B, & in-
tervallo ejusdem rectae BA, alius circulus descri-
batur CAD, secans priorem in punctis C, & D.
Ex quorum utrovis, nempe ex C, a ducantur *a 1. p. 1.*
duae rectae lineae CA, CB, ad puncta A, & B;
Eritque super rectam AB, constitutum triangulum
ABC, hoc est, figura rectilinea contenta tribus
rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita con-
structum necessario esse æquilaterum. Quoniam
rectae AB, AC, ducuntur ex centro A, ad cir-
cumferentiam circuli CBD, b erit recta AC, rectae *b 15. def.*
AB, aequalis: Rursus, quia rectae BC, BA, du-
cuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli
CAD, erit recta BC, rectae BA, aequalis. Tam
igitur AC, quam BC, aequalis est rectae AB, c
Quare & AC, BC, inter se aequales erunt, atque *c 1. p. 1.*
idcirco triangulum ABC, erit æquilaterum. Super
data ergo recta linea terminata, &c. Quod fa-
ciendum erat.

PRO:

3^o EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

ii. PROBLEMA 2. PROPOSITIO. 2.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

TAB. III. **Fig. 2. 3.** Sit punctum datum A, & data recta linea BC, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ BC, nempe C, centro, *a* describatur circulus BE, intervallo rectæ BC. Et ex A, ad centrum C, *b* recta ducatur AC; (nisi punctum A, intra rectam BC, fuerit: ut in figura 3. Tunc enim pro linea ducta sumetur AC,) Super recta vero AC, *c* construatur triangulum æquilaterum ACD, sursum, aut deorsum versus, ut libuerit; cuius duo latera modo constituta DA, DC, versus rectam AC, *d* extendantur; DC, quidem oppositum puncto dato A, usque ad circumferentiam in E; DA, vero oppositum centro C, quantum libet in F. Deinde centro D, intervallo vero rectæ DE, *e* per C, centrum transeuntis, alter circulus describatur EG, secans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ BC. Quoniam DE, DG, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam EG, *f* ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur DA, DC, æqualibus lateribus trianguli æquilateri ACD, *g* remanebit AG, æqualis rectæ CE. Sed eadem CE, *a* æqualis est recta BC. (cum ambæ rectæ CB, CE, cadent ex centro C, ad circumferentiam BE.) Igitur rectæ AG, BC, quandoquidem utraque æqualis est ostensa rectæ CE, inter se *b* æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

Quod si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C. facile absolvetur problema. Si enim centro C, & intervallo CB, *c* describatur circulus, ad cuius circumferentiam *d* recta *d* ducatur utcumque; CE, erit hæc posita ad punctum datum C, *e* æqualis datæ rectæ BC, cum utraque & BC, & CE, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam BE.

PRO-

PROBL. 3. PROPOS. 3. iij.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de
 majore æqualem minori rectam lineam detra-
 here.

Sint duæ rectæ inæquales A, minor, & BC, TAB. III.
 major, oporteatque ex majore BC, detrahere fig. 4.
 lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extre-
 morum lineæ majoris BC, nempe ad punctum a 2. primi.
 B, a ponatur aliqua linea, quæ sit BD, æqualis
 minori A. Deinde centro B, intervallo autem
 BD, circulus b describatur secans BC, in E. b 3. per.
 Dico BE, detractam esse æqualem ipsi A. Quo-
 niam BE, c æqualis est rectæ BD, & eidem, c 15. def.
 BD, æqualis est recta A, per constructionem;
 d erunt A, & BE, inter se æquales. Duabus d 1. prim.
 igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

Quod si duæ rectæ datæ conjungantur in uno
 extremo, quales sunt BD, & BC, conjunctæ in
 extremo utriusque B; describendus erit circulus
 ex B, ad intervallum minoris BD. Hic enim
 auferet BE, æqualem ipsi BD, ut constet ex
 definitione circuli.

THEOREMA I. PROPOS. 4. iij.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus
 æqualia habeant, utrumque utrique; habeant
 vero & angulum angulo æqualem sub æquali-
 bus rectis lineis contentum: Et basi basi
 æqualem habebunt: eritque triangulum trian-
 gulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angu-
 lis æquales erunt, uterque utrique, sub qui-
 bus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, & unius utrum- TAB. III.
 que latus AB, AC, æquale sit alterius utrique fig. 6.
latet

32 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & utrumque angulum B, & C, utrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta AB, rectæ DE, ponitur æqualis, fit, ut si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, a ipsæ sibi mutuo congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, b quod est impossibile. Quod si quis dicat, posito puncto, A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, claudent duæ rectæ lineæ superficiem. c quod fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, ut dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, d congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, ut efficeretur recta EGF, EHF, clauderent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quam EHF, rectam esse, cum utraque ponatur esse eadem, quæ recta BC.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem e claudere non possunt. Quocirca f basis BC, basi EF, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 5. 13

Isoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.

Si triangulum Iſoſceles ABC, in quo latera, *TAB. III.*
 AB, AC, inter ſe ſint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, ſupra baſim BC, æquales inter *fig. 6.*
 ſe eſſe: Item ſi latera æqualia AB, AC, producantur quantum libuerit, uſque ad puncta D, & E, angulos quoque DBC, ECB, infra baſim eandem BC, eſſe æquales. Ex linea enim AE, producta infinite & abſcindatur AF, æqualis ipſi *a 3. prim.*
 AD, & ducantur rectæ BF, CD. Conſiderentur deinde duo trianguſa ABF, ACD. Quia *b 1. pñ.*
 ergo duo latera AB, AF, trianguſi ABF, æqualia ſunt duobus lateribus AC, AD, trianguſi ACD, utrumque utrique, nempe AB, ipſi AC, ex hypotheſi, & AF, ipſi AD, ex conſtructione; angulusque A, contentus lateribus AB, AF, æqualis eſt angulo A, contento lateribus AC, AD, immo angulus A, communis eſt utrique triangulo: Erit baſis BF, æqualis baſi CD, *c 4. prim.*
 & angulus F, angulo D, & angulus ABF, angulo, ACD; cum & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in diſtis triangulis, ut patet: Rurſus conſiderentur duo trianguſa BDC, CFB. Quoniam vero rectæ AD, AF, æquales ſunt, per conſtructionem, ſit ut, ſi auferantur ex ipſis æquales AB, AC, & reliquæ *d 3. prim.*
 BD, & CF, ſint æquales. Quare duo latera BD, DC, trianguſi BDC, æqualia ſunt duobus lateribus CF, FB, trianguſi CFB, utrumque utrique, videlicet BD, ipſi CF, & DC, ipſi FB, ut probatum eſt: Sunt autem & anguli D, & F, contenti diſtis lateribus æqualibus æquales, ut oſtenſum etiam fuit. Igitur: erit angulus
 C DBC,

34 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

4. primi. $\angle$ DBC, angulo FCB, æqualis; & angulus BCD, angulo CBF. Tam enim priores duo, quam posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntque supra communem basim BC, utriusque trianguli BDC, CFB. Quod si ex totis angulis æqualibus ABF, ACD, (quos æquales esse jam demonstravimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBF, BCD, (quos itidem in posterioribus triangulis modo probavimus esse æquales) remanebunt anguli ABC, ACB, supra basim BC, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos DBC, FCB, qui quidem sunt infra eandem basim BC, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt æquales; ac propterea Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres *TAB. III.* angulos cujuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. *fig. 7.* Sit enim triangulum æquilaterum ABC. Quoniam *25. primi.* igitur duo latera AB, AC, sunt æqualia, & erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera AB, BC, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.

vi. THEOR. 3. PROPOS. 6.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

TAB. III. *fig. 8.* IN triangulo ABC, sint duo anguli ABC, ACB, super latus BC, æquales. Dico duo latera illis opposita AB, AC, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum majus

jus altero ; sit igitur AB, majus quam AC, si fieri potest : Et ex AB, *b* abscindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur esse quam AB,) ducaturque recta CD. Considerentur jam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia sint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, utrumque utrique, nempe AC, ipsi DB, (abscidimus enim ex AB, ipsi AC, concessu adversarij, æqualem DB,) & CB, ipsi BC, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesein: Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum & pars, quod fieri non potest *d*. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, si anguli B, & C, super latus BC, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli, duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cujus omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conversum est corollarij quintæ propositionis, ut liquet. Sint enim trianguli ABC, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, erunt latera AB, AC, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera AC, BC, æqualia, & idcirco omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia. Quod ostendendum erat.

THEOR. 4. PROPOS. 7. vii.

Super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum: ad easdem partes, eodemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

Super recta AB, constituentur ad punctum quodvis C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico quod AC, BC, æquales sunt.

super eandem rectam AB, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, ut ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis AC, BC, utraque utrique. nempe AC, ipsi AD, quæ eundem habent terminem A; & BC, ipsi BD, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ AC, AD, inter se, & rectæ BC, BD, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita ut recta AD, in ipsam rectam AC, vel, BD, in ipsam BC, cadat; aut intra triangulum ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, ut AD, sit pars ipsius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. *f* Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC; & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, utque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera

TAB. III.
fig. 9.

f. 9. prim.

TAB. III.
fig. 10.

a f. primi.
b g. primi.

c f. primi.

AC, AD, æqualia, *a* erunt anguli ACD, ADC, super basim CD, æquales; *b* Est autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipsius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rursus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, *c* erunt anguli CDF, DCE, sub basi CD, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo sit minor angulo DCE. Idem ergo Angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum ABC.

TAB. III.
fig. 11.

TAB. III.
fig. 12.

Aut igitur in tali erit loco, ut una linea super alteram cadat, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, ut posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minorem

rem

rem esse angulo CDE, & eidem æqualem, ut
 perspicuum est. Aut denique punctum D, ita
 erit extra triangulum ABC, ut altera linearum TAB. III.
fig. 13.
 posteriorum, nempe AD, secet alteram priorum,
 ut ipsam BC. Ducta igitur recta CD, cum in
 triangulo ACD, latera AC, AD, ponantur æ-
 qualia, *d* erunt anguli ACD, ADC, supra basim d 5. primi.
 CD, æquales: Ac proinde *e* cum angulus ADC,
 minor sit angulo BDC, pars toto, erit & angu-
 lus ACD, minor eodem angulo BDC. Quare
 multo minor erit angulus BCD, pars anguli
 ACD, angulo eodem BDC. Rursus cum in
 triangulo BCD, latera BC, BD, ponantur æqua-
 lia, *e* erunt anguli BCD, BDC, super basim CD, a 9. primi.
 æquales: Est autem jam ostensum, angulum
 BCD, multo esse minorem angulo BDC. Idem
 igitur angulus BCD, & minor est angulo BDC,
 & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo
 æquales sunt inter se AC, AD, nec inter se quoque
 BC, BD. Quare super eadem recta linea, duabus
 eisdem rectis lineis. &c. Quod erat demonstran-
 dum.

THEOR. 5. PROPOS. 8. viii.

Si duo triangula duo latera habuerint duo-
 bus lateribus, utrumque utrique, æqualia, ha-
 buerint vero & basim basi æqualem: Angu-
 lum quoque sub æqualibus rectis lineis con-
 tentum angulo æqualem habebunt.

Sint duo latera AB, AC, trianguli ABC, duo- TAB. III.
fig. 14.
 bus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqua-
 lia, utrumque utrique, nempe AB, ipsi DE, &
 AC, ipsi DF; sit autem & basis BC, basi EF,
 æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo
 D, quorum videlicet uterque dictis lateribus
 continetur. Nam si mente intelligatur basis BC,
 superponi basi EF, *a* neutra excedet alteram, sed a 8. primi.
 punctum B, congruet puncto E, & punctum C,
 C 3 puncto

38 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum ABC, cogitetur cadere super triangulum DEF, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadet, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea *a* angulus A, æqualis erit Angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, ut ad G, quomodocumque id contingat, hoc est, sive in latus ED, sive intra triangulum EDF, sive extra, ut in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem est, quæ BA,) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA,) æqualis ipsi FD, propterea quod latera unius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, jam dudum *b* demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, terminum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

Si duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, utrumque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrumque utrique, qua videlicet æqualibus angulis subtienduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

TAB. III. Sit enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusque C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumque A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, a congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare

Quare omnia sibi congruent, propterea que omnia inter sese aequalia erunt.

COROLLARIUM.

Porro ex antecedente hujus octavæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, utrumque utrique, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F, immo totum triangulum toti triangulo, ut constat ex eadem superpositione unius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & cicti anguli, & tota triangula, ut perspicuum est. *TAB. III. fig. 14.*

PROBL. 4. PROPOS. 9. *ia*

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

SIt dividendus rectilineus angulus BAC, bifariam, *TAB. III. fig. 17.* hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, a secetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturque recta DE. Deinde super DE, b constituatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, dividens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, utrumque utrique, quod DA, ipsi EA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, constructum est æquilaterum: c Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, divisus bifariam, quod erat faciendum. *a 3. primi b 1. primi c 8. primi*

E P R O B L. 5. P R O P O S. 10.

Datam rectam lineam finitam bifariam fecare.

TAB. IV. **S**It recta finita AB, dividenda bifariam, id est
fig. 1. in duas partes æquales. *a* Describatur super
a 1. primi. AB, triangulum æquilaterum ABC, cujus angu-
b 9. primi. lus C, per rectam CD, *b* dividatur bifariam,
 rectaque CD, rectam AB, secet in D. Dico
 rectam AB, bifariam esse divisam in D. Quoniam
 duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia
 sunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD,
 utrumque utrique, nempe AC, ipsi BC, cum sint
 ambo latera trianguli æquilateri, & CD, est com-
 mune; Est autem & angulus ACD, angulo
c 4. primi. BCD, æqualis, per constructionem: *c* Erit basis
 AD, basi BD, æqualis. Datam ergo rectam
 AB, bifariam secimus in D, quod facere oport-
 cebat.

21. P R O B L. 6. P R O P O S. 11.

Data recta linea, à puncto in ea dato,
 rectam lineam ad angulos rectos excitare.

TAB. IV. **R**ecta linea data sit AB; & in ea punctum C,
fig. 2. à quo jubemur erigere super AB, lineam ad
 Angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto
a 3. primi. C, sumatur recta CD, *a* cui æqualis auferatur
b 1. primi. CE. Deinde super DE, *b* constituatur triangulum
 æquilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducatur
 recta FC, quam dico esse perpendicularem ad
 AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF,
 æqualia sunt lateribus EC, CF, trianguli ECF,
 utrumque utrique, nempe DC, ipsi EC, per con-
 structionem, & CF, commune; Est vero & ba-
 sis DF, basi EF, æqualis, ob triangulum æqui-
e 8. primi. laterum: *c* Erunt anguli ad C, contenti dictis
d 10. def. lateribus, æquales. *d* Quare dicetur uterque
 rectus,

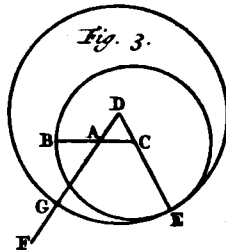
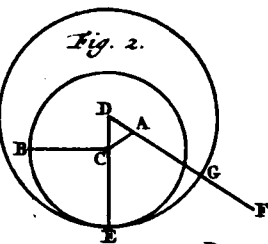


Fig. 5.

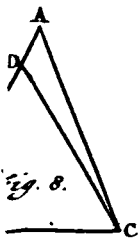
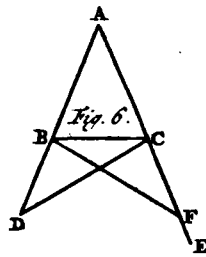
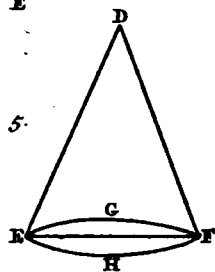


Fig. 8.

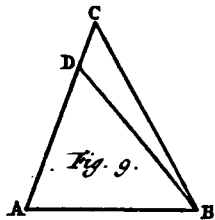


Fig. 9.

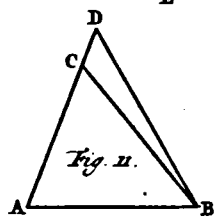


Fig. 11.

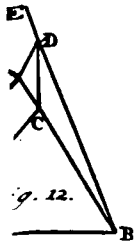


Fig. 12.

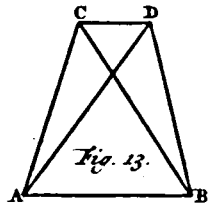


Fig. 13.

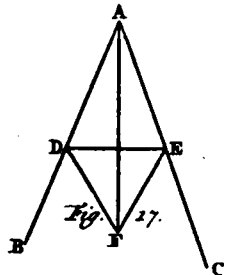


Fig. 17.

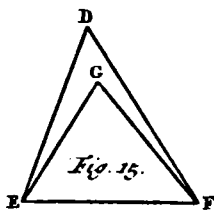


Fig. 15.

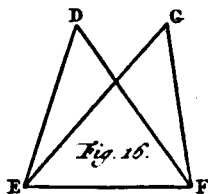


Fig. 16.

rectus, atque adeo FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

SIt recta AB, interminatæ quantitatis, & extra *TAB. IV.*
ipsam punctum C, à quo oporteat lineam *fig. 3.*
perpendicularem deducere ad rectam AB. Centro
C, intervallo vero quolibet circulus describatur
& secans AB, in D, & E, (quoniam intervallum *e 3. petis.*
assumptum tantum esse debet, ut transcendat
rectam AB; alias eam non secaret.) *a 10. prim.*
Divisa autem recta DE, bifariam in F, ducatur recta
CF, quam dico perpendicularem esse ad AB.
Si enim ducantur CD, CE, erunt duo latera
DF, FC, trianguli DFC, æqualia duobus lateri-
bus EF, FC, trianguli EFC, utrumque utriusque,
per constructionem; est autem & basis CD, basi
CE, æqualis, *d 15. def.*
cum hæ sint ex centro C, ad cir- *b 8. prim.*
cumferentiam. Quare *b* erit angulus DFC, an- *c 10. def.*
gulo EFC, æqualis, & propterea uterque rectus *c*:
Ducta est igitur CF, perpendicularis, quod fa-
ciendum erat.

THEOR. 6. PROPOS. 13. xij.

Cum recta linea super rectam consistens
lineam angulos facit, aut duos rectos, aut
duobus rectis æquales efficiet.

Recta linea AB, consistens super rectam DC, *TAB. IV.*
faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur *fig. 4.*
AB, fuerit perpendicularis ad CD, *e 10. def.*
erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit per-
pendicularis, faciet unum quidem angulum obtu-
sum,
C s sum,

42. EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

sum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. *d* Educatur enim BE, ex B, perpendicularis ad CD, ut sint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD, *e* æqualis est duobus DBA, ABE; ferunt, *f* 2. *pron.* appposito communi angulo recto EBC, duo recti EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC, *g* 19. *pron.* æquales. Rursus quia *g* angulus ABC, duobus *a* 2. *pron.* angulis ABE, EBC, æqualis est; *a* erunt, appposito communi angulo ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos EBD, EBC; quæ autem *b* 1. *pron.* eidem æqualia, *b* inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli ABC, ABD, æquales sunt duobus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea supra rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

xiv. THEOR. 7. PROPOS. 14.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, duæ rectæ lineæ non ad eandem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

TAB. IV. *fig. 5.* **A**D punctum C, lineæ rectæ AB, in diversas partes eductæ sint duæ rectæ CD, CE, facientes cum AB, duos angulos ACD, ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas CD, CE, inter se esse constitutas in directum, ita ut DCE, sit una linea recta. Si enim non est recta DCE; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum, cadet aut supra CE, ut sit recta DCF, aut infra CE, ut sit recta DCG. Si cadit supra, cum AC, consistat super rectam DCF, *a* fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo *b* 1. *pron.* anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; *b* & omnes

omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales, ablato igitur communi angulo ACD, *c* remanebunt anguli ACF, ACE, inter se æquales, pars & totum, *d* quod est absurdum. Non igitur recta DC, producta cadet supra CE; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; proptereaque, si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 15. iv.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficiant.

SEcent se duæ rectæ AB, CD, in puncto E, *TAB. 17.* utcunque. Dico angulos, quos faciunt ad *fig. 6.* verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED. Quoniam recta DE, consistit super rectam AB, *b* erunt duo anguli AED, DEB, *b13. prim.* æquales duobus rectis. Rursus quia recta BE, super rectam CD, consistit, erunt eadem ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis æquales. Cum igitur *c* omnes recti anguli inter se sint *c12. prim.* æquales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, æquales. Dempto igitur communi angulo DEB, *d* remanebit angulus *d* 3. *prim.* AED, angulo BEC, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC, BED, inter se æquales esse. Nam duo anguli AEC, CEB, *e* qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt *e13. prim.* duobus quoque angulis DEB, BEC, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC, *f* remanebunt anguli AEC, BED, æqua- *f* 3. *prim.* les inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIUM. I.

Euclides colligit ex demonstratione huius theorematidis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuo secantes, efficere ad punctum sectionis quatuor angulos, quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIUM. II.

Eadem ratione colligemus, omnes angulos circa unum & idem punctum constitutos, quotcumque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliz lineæ quotlibet educantur, dividuntur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti, in plurimas partes, & quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alii simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumscriptum, æquivalere quatuor rectis angulis, ut multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se invicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX PROCLO.

Si ad aliquam rectam lineam, ad ejusque signum, dua recta linea non ad easdem partes sumpta, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsa recta linea in directum sibi invicem erunt.

Tab. IV. Ex puncto E, recta AB, in diversa partes egro-
fig. 6. dianxit dua recta ED, EC, facientes angulos
 AED,

*AED, BEC, inter se aequales: Vel etiam duas
AEC, BED. Dico duas EC, ED, efficere unam
lineam rectam. Quoniam enim angulus AED,
aqualis est angulo BEC; addito communi angulo
BED, b erunt duo anguli AED, DEB, duobus b 2. prim.
angulis CEB, BED, aequales: Sed c anguli AED, c 13. prim.
DEB, sunt aequales duobus rectis. Igitur & duo
CEB, BED, duobus erunt rectis aequales. Quamo-
brem EC, ED, a erunt linea una recta. Hoc a 14. prim.
autem, ut vides, conversum est propositionis decima-
quinta.*

THEOR. 9. PROPOS. 16. xvj;

Cujuscunque trianguli uno latere producto,
externus angulus utrolibet interno, & oppo-
sito, major est.

TRIANGULI ABC, latus BA, producat ad D. *TAB. IV.*
Dico angulum externum DAC, majorem *fig. 7.*
esse interno, & opposito ACB, itemque majorem
interno, & opposito ABC. Dividatur a enim a 10. prim.
AC, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur
recta BEF, ita ut EF, b abscissa sit aequalis rectae b 3. prim.
EB; ducaturque recta FA. Quoniam igitur la-
tera CE, EB, trianguli CEB, aequalia sunt late-
ribus AE, EF, trianguli AEF, utrumque utri-
que, per constructionem; Sunt autem & Anguli
ad E, dictis lateribus comprehensi, c inter se c 15. prim.
aequales, cum sint circa verticem E, & oppositi:
Erit d basis CB, aequalis basi AF, & angulus d 4. prim.
ECB, angulo EAF; Est autem angulus DAC,
externus major angulo EAF, totum videlicet
parte. Igitur & externus angulus DAC, major
erit interno, & opposito angulo ACB. Quod si
latus CA, producat ad G; & AB, dividatur
bifariam in H; extendaturque recta CHI, ut HI,
aequalis sit rectae HC, & ducatur recta IA: de-
monstrabitur eadem prorsus ratione, angulum
externum GAB, majorem esse interno angulo,
& opposito ABC; Est autem e angulus DAC, e 15. prim.
angulo

46 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

angulo GAB, æqualis, cum lineæ BD, CG, se mutuo secent in A. Igitur & angulus DAC, major erit interno & opposito angulo ABC. Est autem idem angulus DAC, major quoque ostensus angulo interno & opposito ACB. Cujuscunque ergo trianguli uno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.

xvii. THEOR. 10. PROPOS. 17.

Cujuscunque trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

TAB. 17. fig. 8. **S**IT triangulum ABC; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos CBA, & CAB; Itemque duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quævis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur **d. 16. primi** angulus ABD, externus major est interno & opposito angulo ACB; si addatur communis **e. 4. prop.** angulus ABC, *e* erunt duo anguli ABD, ABC, majores duobus angulis ABC, ACB: **f. 13. primi** Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, **g. 16. primi** *g* major sit angulo CAB, interno, & opposito; **h. 4. prop.** *h* erunt, apposito communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, majores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo **i. 13. primi** *i* duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alii duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. **m. 16. primi** Cum enim angulus externus BAE, **m** major sit interno & opposito angulo BCA; si apponatur **n. 4. prop.** communis angulus BAC, **n** erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, **o. 13. primi** majores: ac proinde cum illi duo *o* sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cujusque igitur trianguli, &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLLO.

Hinc perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem TAB. IV. rectam lineam non posse deduci plures lineas perpen- fig. 11. diculares, quam unam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis aequales, cum sint duo recti, quod est absurdum. a 17. primi enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam una, ex A, ad BC, deduci possunt. Quod est propositum.

COROLLARIUM. I.

Constat etiam ex his, in omni triangulo, cujus unus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si unus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, & duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis majores esse fateamur.

COROLLARIUM. II.

Sequitur etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, unum acutum, & obtusum alterum, lineam perpendicularem ex quovis ejus puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta AB, cum recta CD, TAB. IV. angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, fig. 9. obtusum, & mittaturque ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat si fieri potest, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtusus & rectus, in triangulo ABC, majores sunt duobus rectis; b sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. b 17. primi Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.

COROLLARIUM. III.

Pari ratione fit ex hac propof. manifestum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli *e 5. primi* isoscelis supra basin, esse acutos. Nam *c* cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in isoscele *d 17. primi* supra basin sint inter se æquales; *d* sintque simul tam illi duo, quam hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut majores.

xviii. THEOR. II. PROPOS. 18.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

TAB. IV. fig. 10. **I**N triangulo ABC, sit latus AC, majus latere AB. Dico angulum ABC, subtensum à majori latere AC, majorem esse angulo ACB, qui à minori latere AB, subtenditur. Nam ex *a 3. primi* AC, *a* auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera *b 5. primi* AB, AD, æqualia sunt per constructionem, *b* erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem *c 16. primi.* *c* angulus ADB, major angulo ACB. Igitur & angulus ABD, major erit angulo ACB. Quamobrem cum *d 9. primi.* *d* angulus totus ABC, major adhuc sit angulo ABD; erit angulus ABC, multo major angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, majus ponatur latere BC, offendet angulum ABC, majorem esse angulo BAC; si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

TAB. IV. fig. 11. **E**x hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cujus

cujus maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico ejusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur majus latere AB, erit per hanc propos. angulus B, angulo C, major. Eadem ratione major erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, majus ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter utrumque tenens.

THEOR. 12. PROPOS. 19. XIX.

Omnis trianguli major angulus majori lateri subtenditur.

IN triangulo ABC, angulus B, major sit angulo TAB. IX.
 C. Dico latus AC, subtendens majorem fig. 12.
 angulum B, majus esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus AC, majus non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB, a erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem a 5. primi
 & major per hypothesin, quod est absurdum. Si vero AC, minus esse dicatur latere AB, d erit 418. primi
 angulus B, subtenfus à minori latere AC, minor angulo C, subtenso à majore latere AB; Ponitur autem major, quod magis est absurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit majus. Eadem ratione probabitur, latus AC, majus esse latere BC, si angulus B, major esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli major angulus majori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hac propos. omnium rectarum ex quovis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quocunque linea AD, AE, AF, & aliz, quarum AD, sola sit perpendicularis au
D
EG,
TAB. IX.
fig. 13.

96 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola una perpendicularis duci possit, ut ex Proclo ad propos. 17. demonstravimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli
b17. primi ADE, AED, *b* sint duobus rectis minores, ponaturque
e19. primi ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare *e* majus erit
 latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes
 alias rectas majores esse recta AD, ac proinde perpendi-
 cularis AD, omnium erit minima.

THEOR. 13. PROPOS. 20.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt
 majora, quomodocunque assumpta.

TAB. IV. *fig. 13.* Sit triangulum ABC. Dico quælibet ejus duo
 latera, nempe AB, AC, simul majora esse
 reliquo latere BC. Producat unum ex illis,
a3. primi ut CA, usque ad D, & sitque recta AD, æqualis
 alteri lateri non producto AB, & ducatur recta
f3. primi DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD,
 æqualia inter se sunt, per constructionem, ferunt
 anguli ABD, ADB, æquales inter se: Est autem
g9. primi angulo ABD, *g* major angulus CBD. Igitur &
 angulus CBD, major erit angulo ADB. In
 triangulo ergo CBD, latus CD, oppositum majori
h19. primi angulo CBD, *b* majus erit latere BC, quod minori
 angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera
 AB, AC, simul æqualia sint ipsi CD, (si enim
 æqualibus AB, AD, commune addatur AC,
i2. primi) fient tota æqualia; nimirum linea composita ex
 AB, AC, & linea composita ex AD, AC,) erunt quæque latera AB, AC, simul majora late-
 re BC. Eodem modo demonstrabitur, quælibet
 alia duo latera majora esse reliquo. Quare om-
 nis trianguli duo latera reliquo sunt majora, &c.
 Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 21. xxi.

Si super trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interior constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, super extremitates B, & C, TAB. 17.
 lateris BC, intra triangulum constituantur duæ *fig. 14.*
 rectæ lineæ BD, CD, in puncto D, concurren-
 tes. Dico BD, CD, simul minores esse duobus
 lateribus BA, CA, simul; At vero angulum
 BDC, majorem angulo BAC. Producat enim
 altera linearum interiorum, nempe BD, ad pun-
 ctum E, lateris CA. Quoniam igitur in trian-
 gulo BAE, duo latera BA, AE, *e* majora sunt *e 10. prim.*
 latere BE, si addatur commune EC, *a* erunt *a 4. prop.*
 BA, AC, majora, quam BE, EC. Rursus quia
 in triangulo CED, duo latera CE, ED, *b* majora *b 10. prim.*
 sunt latere CD, si commune apponatur DB,
 erunt CE, EB, majora, quam CD, DB. *c 4. prop.*
 Ostensum vero jam fuit, AB, AC, majora esse,
 quam BE, EC. Multo igitur majora erunt BA,
 CA, quam BD, CD, quod primo proponebatur.
 Præterea, quoniam angulus BDC, *d* major est *d 16. prim.*
 angulo DEC, externus interno; & angulus DEC,
 angulo BAC, major quoque est, eandem ob
 causam. Erit angulus BDC, multo major angulo
 BAC, quod secundo proponebatur. Si igitur
 super trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c.
 Quod erat ostendendum.

PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus da-
 tis rectis lineis æquales, triangulum consti-
 tuere. Oportet autem duas reliqua esse ma-
 jores

52 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

jores omnifariam sumptas: quoniam uniuscujusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt majora.

TAB. IV.
fig. 15.

Tres lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliquæ sint majores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, ut constat ex proposition. 20. in qua ostensum fuit, duo quævis latera trianguli reliquo esse majora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quavis DE, infinitæ magnitudinis a abscindatur recta DF, æqualis rectæ A. Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, intervallo vero FD, circulus describatur DIK. Item centro G, intervallo autem GH, alius circulus describatur HIK, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, majores ponantur rectæ FG; si ex FE, sumatur recta FL, æqualis ipsi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipsi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque

fig. 16.

TAB. V.

fig. 1.

M, caderet in L, punctum, essent eadem duæ FL, GM, hoc est, DF, GH, minores rectæ FG, quorum utrumque est contra hypothesein. Id

TAB. IV.

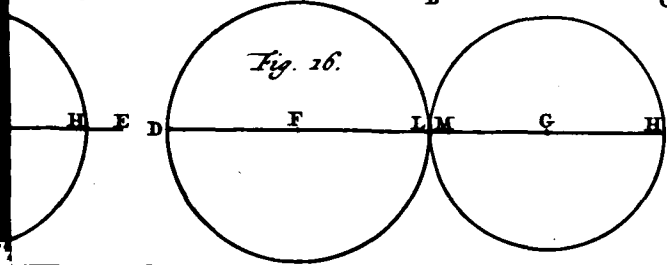
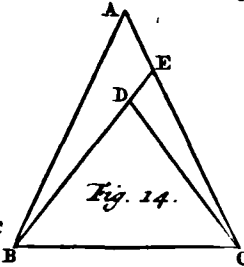
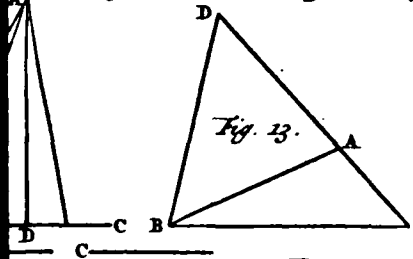
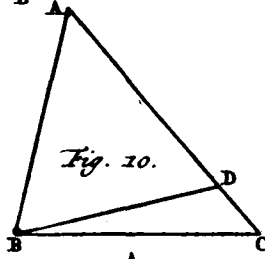
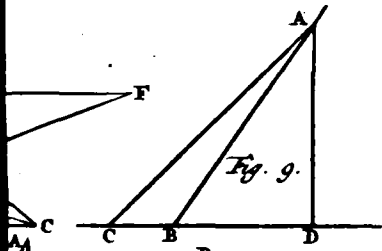
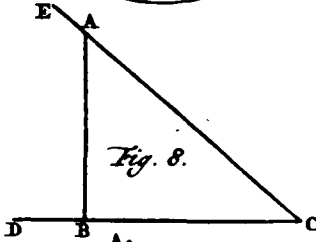
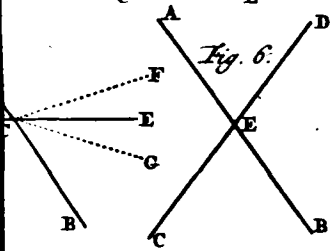
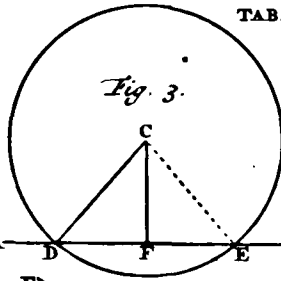
fig. 15.

quod ex apposis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta, F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cujus latera dico æqualia esse datis

b 15. def.

a 1. pron.

rectis A, B, & C. Cum enim recta FK, æqualis sit rectæ FD, & recta A, per constructionem eidem FD, æqualis; a erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt.





sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

PROBL. 9. PROPOS. 23. xxij.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit AB, datumque in ea punctum TAB. V. C, & datus angulus DEF. Oportet igitur *fig. 2.* ad rectam AB, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, duo puncta utcumque G, H, quæ recta GH, connectantur: Deinde *a* constituatur *a 22 primi* triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita ut CI, æquale sit ipsi EG; & CK, ipsi EH; & IK, ipsi GH. (Quod facile fiet, si CI, sumatur æqualis ipsi EG, & CL, ipsi EH, & IM, ipsi GH. Deinde ex centris C, & I, intervallis vero CL, & IM, circuli describantur secantes sese in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, utrumque utrique, & basis IK, basi GH, per constructionem; *b* erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. *b 8. primi*

THEOR. 15. PROPOS. 24. xxiv.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint; utrumque utrique, angulum vero angulo majorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi majorem habebunt.

DUO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint TAB. V. duobus lateribus, DE, DF, trianguli DEF, utrum- *fig. 3.*
D 3 que

queutrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF;
 Angulus vero A, major sit angulo EDF. Dico
 Basia BC; majorem esse base EF. Ad lineam
 b 13. primi enim DE, ad ejusque punctum D, h constituatur
 angulus EDG, æqualis angulo A; (cadetque re-
 cta DG, extra triangulum DEF, cum angulus
 EDF, minor ponatur angulo A) ponaturque
 c 3. primi DG, æqualis ipsi DF, e hoc est, ipsi AC. Ducta
 deinde recta EG, cadet ea aut supra rectam EF;
 aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum
 supra EF, ducaturque recta FG. Quia ergo
 latera AB, AC, æqualia sunt lateribus DE, DG,
 utrumque utrique, & angulus A, æqualis angulo
 d 4. primi EDG, per constructionem: d Erit basis BC, basi
 EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG,
 e 5. primi inter se sunt æqualia; e erunt anguli DFG, DGF,
 f 9. pron. æquales: Est autem angulus DGF, f major an-
 gulo EGF, major erit. Quare multo major erit
 totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In
 a 19. primi triangulo igitur EFG, a majus erit latus EG,
 latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse
 ipsi BC. Major igitur erit quoque BC, quam
 EF. Quod est propositum.

Cadat deinde EG, (utin figura 4.) in ipsam EF.
 b 4. primi Et quia rursus, ut prius, basis EG, b æqualis
 c 9. pron. est basi BC: & EG, e major quam EF, erit &
 BC, major, quam EF, quod est propositum.

TAB. V.
 fig. 5.
 d 4. primi Cadat tertio EG, infra EF, producanturque
 rectæ DE, DG, usque ad H, & I, & ducatur
 recta FG. Erit autem rursus, ut prius, d basis
 EG, basi BC, æqualis. Deinde quia duo latera
 DE, DG, æqualia sunt inter se, per constructio-
 nem, e erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG,
 e 5. primi æquales: Est autem angulus FGI, f major angulo
 FGE. Igitur & angulus GFH, eodem angulo
 FGE, major erit. Quare multo major erit totus
 angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangu-
 lo ergo EFG, e majus erit latus EG, latere EF.
 g 19. primi Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Ma-
 jor igitur erit quoque BC basis, basi EF. Si

igitur

igitur duo triangula duo latera duobus lateribus,
&c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 25. xxv;

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique, basin vero basi majorem: Et angulum sub æqualibus rectis lincis contentum angulo majorem habebunt.

DUO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia TAB. V. sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF; utrumque utrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, major sit base EF. Dico angulum A, majorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, major angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, utrumque utrique, per hypothefin; a erit & basis BC, æqualis basi EF; quod est absurdum. Ponitur enim basis BC, base EF, major: Si vero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis EF, b major base BC; quod magis est absurdum, cum EF, ponatur esse minor quam BC. Quare angulus A, cum neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit major. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 17. PROPOS. 26. xxvi;

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique, unumque latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque

D 4

utri-

utriusque, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

TAB. V.
fig. 7.

Sint duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, uterque utrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi EFD; Sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adjacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adjacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, utrumque utrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE, sit DE, majus, à quo *c* abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, EF, utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin: *d* Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars totius; Quod est absurdum. Non est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed æquale. Quamobrem, cum latera AB, BC, æqualia sint lateribus DE, EF, utrumque utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; *a* erunt & bases AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

TAB V
fig. 8.

Sint deinde latera AB, DE, subtendentia æquales angulos C, & EFD, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, esse æqualia, utrumque utrique, hoc est, BC, ipsi EF, & CA, ipsi FD; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non est æquale lateri EF, sit *b* 3. *primi* EF, majus: *b* ex quo sumatur recta EG, æqualis ipsi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus DE, EG, utrumque utrique, & anguli contenti B, & *c* 4. *primi* E, æquales, per hypothesin; *c* Erit angulus C, angulo

angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis; Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. *d* Est enim major. Non ergo est latus BC, lateri *d* 16 *primi* EF, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex 4. propos. hujus libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Sequitur ex demonstratione hujus theorematiss, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sint. ut ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, erunt tota quoque triangula æqualia inter se. *e* 4. *primi*

THEOR. 18. PROPOS. 27. *xxvij.*

Si in duas rectas lineas recta incidens linea, alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, *TAB. V. fig. 9.* faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent unquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conveniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est GIH, (cum AB, recta continuata sit, item recta CD, usque ad punctum I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & opposito DHG; quod est absurdum; & quoniam externus interno major *a* 16 *primi* est. Quod si AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis interno & opposito, AGH, quod est absurdum. Non igitur

D;

coi-

58. *EUCLIDIS GEOMETRIÆ.*

coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni BGH, CHG, æquales, demonstrabitur, lineas AB, CD, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.

xxviii. THEOR. 19. PROPOS. 28.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

TAB. V. fig. 19. IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, esse parallelas.

Quoniam enim angulo EGA, æqualis ponitur *a15. primi* angulus GHC; & eidem angulo EGA, *b 1. prop.* æqualis est angulus HGB; *b* erunt anguli alterui GHC, HGB, æquales. Quare lineæ AB, CD, *c17. primi* parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus EGB, æqualis ponatur interno GHD.

Deinde faciat recta EF; angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & *a13. primi* anguli AGE, AGH, a duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis *b12. prop.* AGE, AGH, æquales *b*. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare ut jam ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta

recta incidens linea externum angulum, &c.
Quod erat demonstrandum.]

THEOR. 20. PROPOS. 29. xxix.

In parallelas rectas lineas recta incidens
linea; Et alternatim angulos inter se æquales
efficit; & externum interno, & opposito,
& ad easdem partes æqualem; & internos,
& ad easdem partes, duobus rectis æquales
facit.

IN parallelas AB, CD, recta incidat EF. Dico *1. ad. V.*
primum, angulos alternos AGH, DHG, inter *fig. 10.*
se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit
alter, nempe AGH, major. Quoniam igitur an-
gulus AGH, major est angulo DHG, si addatur
communis angulus BGH, *a* erant duo AGH, *a* 4. *prop.*
BGH, majores duobus DHG, BGH: At duo
AGH, BGH, *b* æquales sunt duobus rectis Igi- *b* 13. *primi*
tur duo DHG, BGH, minores sunt duobus
rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem
partes, B, & D, *c* coibunt lineæ AB, CD, ad *c* 13. *prop.*
eas partes, quod est absurdum, cum ponantur
esse parallelæ. Non est igitur angulus AGH,
major angulo DHG: Sed neque minor. Eadem
enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes
A, & C. Igitur æquales erunt anguli, alterni
AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis
alternis BGH, CHG.

Dico secundo, angulum externum AGE, æ-
qualem esse interno, & ad easdem partes opposito
CHG. Quoniam enim angulo BGH, æqualis est
alternus CHG, ut ostensum est; & eidem BGH;
d æqualis est angulus AGE. Erunt anguli AGE, *d* 15. *primi*
CHG, *e* inter se quoque æquales. Eodem modo *e* 1. *prop.*
demonstrabitur, angulum BGE, æqualem esse
angulo DHG.

Dico tertio, angulos internos ad easdem par-
tes, AGH, CHG, æquales esse duobus rectis.
Quo-

Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse angulo CHE, interno; si addatur communis AGH, *a* erunt duo AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo AGE, AGH, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

XXX. THEOR. 21. PROPOS. 30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ & inter se sunt parallelæ.

TAB. V. fig. 11. Sint rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam in propof. 9. undecimi libri agitur de lineis in diversis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela ipsi EF, *e* erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursum quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, *d* erit angulus DKL, eidem angulo FLI, nempe internus externus, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKL, *e* æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, *f* erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.

XXXI. PROBL. 10. PROPOS. 31.

A Dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

TAB. VI. fig. 1. EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, ut-

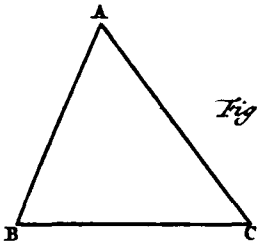
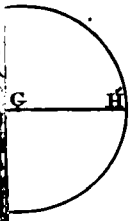


Fig. 3.

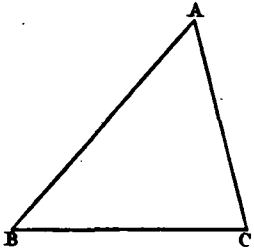
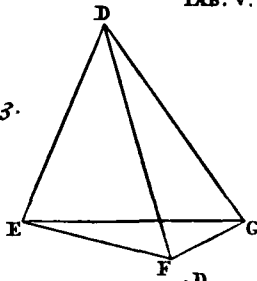


Fig. 4.

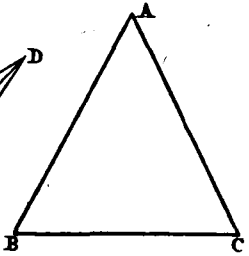
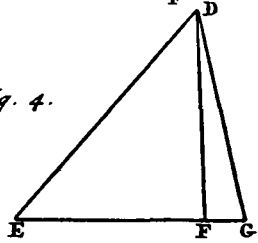


Fig. 6.

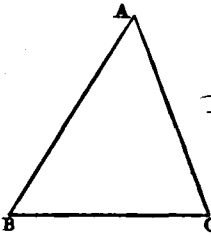
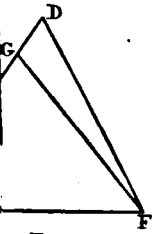
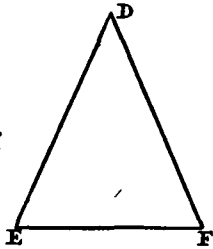
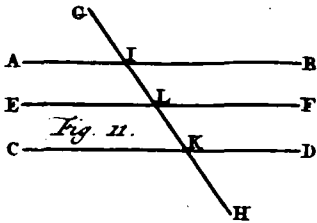
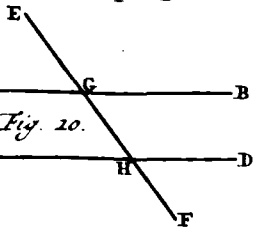
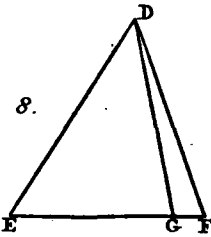


Fig. 8.



utrumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, ϵ æqualis constituatur EAD. Dico ϵ 23 *primi* rectam EA, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionem, f Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur f 27 *primi* puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. 22. PROPOS. 32. xxxij.

Cujuscunque trianguli uno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRoducatur in triangulo ABC, latus BC, ad *TAB. VI.* D. Dico primo, angulum externum ACD, *fig. 2.* æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. b Ducatur enim ex C, linea CE, parallelæ rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, b 31 *primi* incidit in parallelas AB, CE, a erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, b erit angulus externus DCF, æqualis interno B. Additis igitur b 29 *primi* æqualibus ACE, & A, itidem æqualibus ECD, & B. ϵ fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE; c 2. *primi* ACE, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.

Dico secundo, tres angulos internos ejusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, ut ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis ACB, d erunt duo anguli ACD, ACB, æquales tribus A, B, & ACB: Sed duo ACD, ACB, ϵ æquales sunt ϵ 13 *primi* duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, ACB, duobus sunt rectis æquales. Quare cujuscunque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

62 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

S C H O L I U M.

Omnēs anguli figura rectilinea cuiusvis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quos ipsa continet latera, seu angulos.

TAB. XV Hoc est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt *fig. 6. 7.* bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus *8.* rectis. Ita etiam anguli figura continentis 20 latera æquivalentur bis 20. angulis rectis minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonstratio autem hujus rei talis est. Si à quovis puncto *A*, intra figuram assumpto ad omnes angulos *B, C, D,* vel *B, C, D, E,* vel *B, C, D, E, F,* rectæ lineæ *AD, AB, AC,* vel *AB, AC, AD, AE,* vel *AB, AC, AD, AE, AF,* ducantur, efficientur tot triangula, quos latera, angulosque figura ipsa continet. Cum igitur anguli cuiuscunque trianguli 2 æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangularum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangularum circa punctum *A*, intra figuram assumptam consistentes non pertinent ad angulos figura rectilinea proposita, ut constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangularum anguli constituentes angulos figura proposita, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis circa punctum *A*, assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sunt, circa dictum punctum *A*, existentes æquales 4 rectis tantummodo, ut collegimus ex propo. 15. Quamobrem anguli cuiusque figura his tot rectis sunt æquales avlatis quatuor, quos ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.

C O R O L L A R I U M. I.

Ex hac propo. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres,

tres, quam hi g æquales sunt duobus angulis rectis. g 3^a prim^a
Unde si duo anguli unius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo hujus æqualis, æquiangulaque erunt ipsa triangula.

COROLLARIUM. II.

Constat etiam, in omni triangulo Iſoſcele, cujus angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt unum rectum, h cum omnes tres sint h 3^a prim^a æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare cum duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At vero si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt uno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, utrumque reliquorum majorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul majores erunt uno recto, &c.

COROLLARIUM. III.

Perſpicuum quoque est, quomodo angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes unius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, k quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, divisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes unius recti. k 3^a prim^a

COROLLARIUM. IV.

Liquet etiam, si ab uno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula ſcalena, quorum utrumquodque habet unum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes unius recti, illum ſcilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem unius recti.

THEOR.

XXXIIJ. THEOR. 23. PROPOS. 33.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem conjungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

TAB. VI.
fig. 3.

Sint rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipsas autem conjungant ad easdem partes rectæ AD, BC. Dico AD, BC, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta AC. Quoniam igitur AC, incidit in parallelas AB, CD, *a* erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Quare cum duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia sint duobus lateribus CD, CA, trianguli CDA, utrumque utrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; *a* erunt bases BC, AD, æquales, & angulus ACB, angulo DAC, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas AD, BC, *b* erunt AD, BC, parallelæ: Probatum autem jam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

XXXIV. THEOR. 24. PROPOS. 34.

Parallelogrammorum spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex adverso & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

TAB. VI.
fig. 3.

Sit parallelogrammum ABCD, quale definivimus definitione 35. Dico latera opposita AB, DC, inter se esse æqualia, nec non latera opposita AD, BC. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse; nec non & angulos oppositos DAB, & DCB: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim AB, DC, sint parallelæ, *c* erunt anguli

guli alterni BAC , DCA , æquales. Rursus quia AD , BC , sunt parallelæ, d erunt & anguli alterni BCA , DAC , æquales. Itaque cum anguli BAC , BCA , trianguli ABC , æquales sint duobus angulis DCA , DAC , trianguli ADC , uterque utrique, & latus AC , dictis angulis adjacens, commune utrique triangulo; e erit recta AB , æqualis oppositæ rectæ DC , & recta BC , oppositæ rectæ AD , quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B , angulo D , æqualis. Et quia si æqualibus angulis BAC , DCA , addantur æquales anguli DAC , BCA , toti quoque anguli BAD , BCD , a sunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB , BC , trianguli ABC , æqualia sunt duobus lateribus CD , DA , trianguli CDA , utrumque utrique, & angulus B , angulo D , æqualis, ut jam ostendimus; b erunt trianguia ABC , CDA , b æqualia, ideoque parallelogrammum $ABCD$, divisum erit bifariam à diametro AC , quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex adverso, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 25. PROPOS. 35. XXXV.

Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

INter duas parallelas AB , CD , super basi CD , $TAB. VI.$
 existant duo parallelogramma $CDEA$, $CDBF$. $fig. 4.$
 (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.)
 Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad arcam, seu capacitatem. Cadet enim primo punctum F , inter A , & E . Quoniam igitur in parallelogrammo

66 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

a 34. *primi* grammo CDEA, recta AE, *a* æqualis est rectæ CD, oppositæ, & eidem CD, æqualis est FB, in parallelogrammo CDBF, opposita; Erunt
b 1. *prom.* AE, *b* FB, inter se æquales. Dempta igitur
c 3. *prom.* communi FE, *c* remanebit AF, ipsi EB, æqua-
d 34. *primi* lis: *d* Est autem & AC, ipsi ED, oppositæ æ-
e 29. *primi* qualis in parallelogrammo CDEA; *e* & angulus
f 4. *primi* BED, angulo FAC, externus interno. *f* Quare
triangulum FAC; triangulo BED, æquale erit.
g 2. *prom.* Addito igitur communi trapezio CDEF, *g* fiet
totum parallelogrammum CDEA, toti parallelo-
grammo CDBF, æquale. Quod est propositum.
TAB. VI. Cadat secundo punctum F, in punctum E.
fig. 5. Dico rursus, parallelogramma CDEA, CDBE,
æqualia esse. Erunt enim, ut prius, rectæ AE,
EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC;
h 4. *primi* atque adeo *h* triangula, EAC, BED, æqualia.
i 2. *prom.* Addito igitur communi triangulo CDE, *i* fient
parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.
TAB. VI. Cadat tertio punctum F, ultra E, ita ut recta
fig. 6. CF secet rectam DE, in G. Quoniam igitur, ut
prius, rectæ AE, FB, sunt æquales; si commu-
k 2. *prom.* nis addatur EF; *k* erit tota AF, toti EB, æqua-
lis, nec non & anguli BED, FAC, æquales
l 4. *primi* erunt; atque adeo *l* triangulum FAC, triangulo
BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo
m 3. *prom.* EGF, *m* remanebit trapezium AEGC, trapezio
FGDB, æquale. Quocirca addito communi tri-
angulo CDG, fiet totum parallelogrammum
CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale.
Parallelogramma igitur super eadem basi, & in
eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqua-
lia. Quod erat demonstrandum.

XXXV. THEOR. 26. PROPOS. 36.

Parallelogramma super æqualibus basibus,
& in eisdem parallelis constituta; inter se
sunt æqualia.

TAB. VI. Sint duo parallelogramma ACEF, GHDB,
fig. 7. super æquales bases CE, HD, inter easdem
paral-

parallelas AB, CD. Dico ea esse æqualia. Con-
nectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad
easdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam
igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, &
eidem HD, o æqualis est GB, in parallelogram- o 34. primi
mo GHDB, opposita; erunt CE, GB, p æqua- p 1. primi
les inter se: Sunt autem & parallelæ, per hypo-
thesin. Quare & CG, EB, ipsas conjungentes;
q parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEEG, q 33. primi
parallelogrammum erit. Itaque cum parallelo-
gramma ACEF, GCEB, sint inter easdem paral-
lelas, & super eandem basin CE, r erit paralle- r 35. primi
logrammum ACEF, parallelogrammo GCEB,
æquale. Rursum quia parallelogramma GCEB,
GHDB, sunt inter easdem parallelas, & super
eandem basin GB, s erit quoque parallelogrammum s 35. primi
GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale.
Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, t in- t 1. primi
ter se æqualia erunt. Parallelogramma igitur
super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis
constituta, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 37. xxxvii.

Triangula super eadem basi constituta, &
in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

I nter parallelas AB, CD, & super basin CD, TAB. VI.
sint constituta duo triangula ACD, BCD. f. 8.
(Dicitur autem triangulum inter duas esse paral-
lelas constitutum, quando basis est pars unius, &
angulus oppositus alteram attingit.) Dico ea tri-
angula esse æqualia. Per D, enim i ducatur i 31. primi
DE, parallela rectæ AC, & DF, parallela rectæ
BC. t Erunt igitur parallelogramma ACDE, t 35. primi
BCDF, æqualia. Sunt enim super eandem basin,
CD, & inter easdem parallelas. Sed horum di-
midia sunt triangula ACD, BCD; l quod AD, l 34. primi
BD, diametri bifariam secant parallelogramma
ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD,
BCD, m æqualia erunt. Triangula igitur su- m 7. primi
E 2 per

68 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

per eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

xxviii.

THEOR. 28. PROPOS. 38.

Triangula super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

TAB. VI.

fig. 9.

a 31. primi

y 36. primi

e 34. primi

a 7. primi

Inter parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. x Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF: Eruntque y parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia. Cum igitur horum z dimidia sint triangula ACE, BFD; æ erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

xxxix.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

TAB. VI.

fig. 10.

a 31. primi

b 37. primi

c 1. primi

Sint duo triangula æqualia, ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam AD, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, a ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra AD, vel infra. Cadat primum supra, qualis est AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, b erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale; Est autem per hypothesin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur c erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AF; ducta recta FC, erunt eadem

eadem ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur AD, parallela ipsi BC. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 30. PROPOS. 40. xxx.

Triangula æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt parallelis.

Sint duo triangula æqualia ABC, DEF, super bases æquales BC, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ BF. Si enim non est, cadet parallela ipsi BF, per A, ducta vel supra AD, vel infra. Cadat primum supra, coeatque cum ED, producta in G, & ducatur recta GF. Quoniam igitur parallelæ sunt AG, BF, erit triangulum EFG, triangulo ABC, æquale: Ponitur autem & triangulum DEF, eidem triangulo ABC, æquale. Igitur triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est, AH; ducta recta HF, erunt eadem argumentatione triangula HEF, DEF, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur AD, parallela ipsi BF. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 41. xli.

Si parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

Inter parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & E 3 trian-

triangulum BCD. Dico parallelogrammum esse
duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro
a37. primi AD, in parallelogrammo, erunt *a* triangula
ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum
b34. primi ACDE, duplum est trianguli ACD; *b* quod
triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se
e 6. primi sint. Igitur & trianguli BCD, *c* duplum erit
idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem,
si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod
erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

TAB. VI. Idem hoc theorema Euclidis demonstrari potest eo-
dem modo, si parallelogrammum, & triangulum
fig. 13. æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque
in eisdem parallelis, ut cernis in parallelogrammo
ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD,
FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in
g38. primi parallelogrammo, *g* erunt triangula ACD, BFG,
æqualia Cum igitur parallelogrammum ACDE,
h34. primi duplum sit trianguli ACD: h quod diameter AD,
i 6. primi fecit parallelogrammum ACDE, bisariam: i erit
quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ra-
tione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B,
duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale,
quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli
BFG, &c.

ALIJ. P R O B L. II. P R O P O S. 42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum
constituere in dato angulo rectilineo.

TAB. VI. D Atum triangulum sit ABC, & datus angulus
fig. 14. rectilineus D. Oportet igitur constituere
parallelogrammum æquale triangulo ABC, ha-
bens angulum æqualem angulo D. Dividatur
a10. primi latus unum trianguli, nempe BC, *a* bisariam in
b13. primi L, & *b* fiat angulus CEF, æqualis angulo D,
pro ut

pro ut libet, hoc est, five angulus CEF, vergat ad partes C, five ad partes B, pro ut magis videbitur expedire. Ducatur item per A, & recta AF, c31. primi parallela ipsi BC, quæ secet EF, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G, Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum CEFG, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta EA, quoniam parallelogrammum CEFG, d duplum est trianguli AEC, & d41. primi triangulum ABC, duplum ejusdem trianguli AEC, e quod triangula AEC, ABE, super æ- e38. primi quales bases EC, BE, & in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum CEFG, & triangulum ABC, f æqualia inter se. Cum f6. primi igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constet propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

THEOR. 32. PROPOS. 43. xliij.

In omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

IN parallelogrammo ABCD, sint circa diametrum AC, parallelogramma AEGH, CFGI, fig. 1. & complementa DFGH, EBIG, ut in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum a enim triangula ABC, CDA, a34. primi æqualia sint; Itemque triangula AEG, GHA; si hæc ab illis demantur, b remanebunt trapezia b3. primi CBEG, CDHG, æqualia: c Sunt autem & trian- c34. primi gula CGI, CGF, æqualia. Quare si detrahantur ex trapeziis, d remanebunt æqualia complementa d3. primi DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa &c. Quod ostendendum erat.

cliv. PROBL. 12. PROPOS. 44.

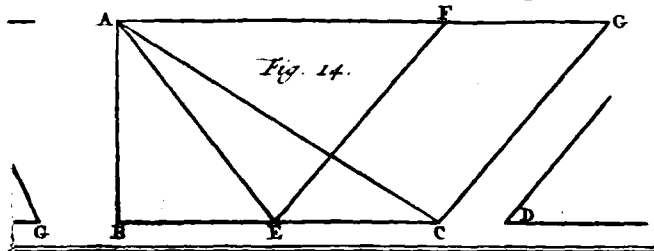
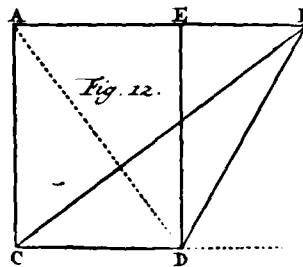
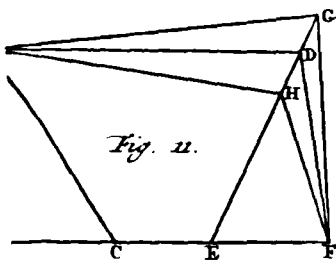
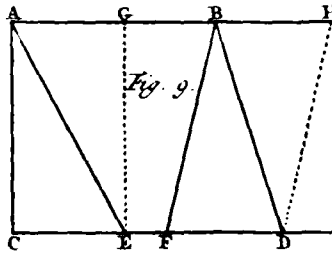
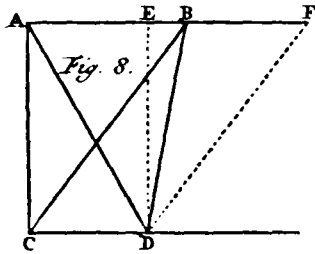
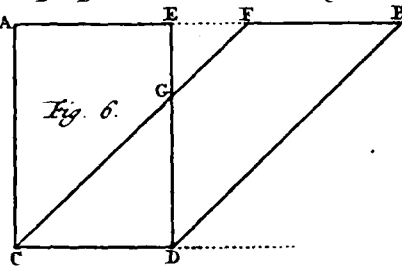
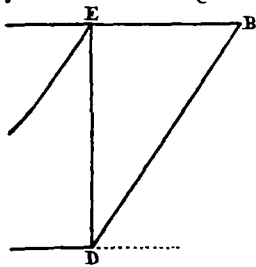
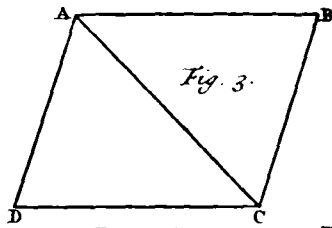
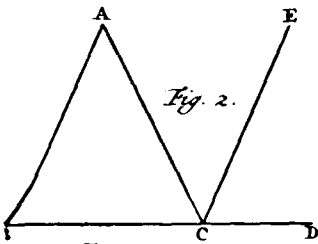
Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

TAB. VII. **D**Ata recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & unum latus æquale rectæ A. Constituatur tri-
fig. 2.
 41. *primi* angulo B, æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producatque GF, ad H, ut FH, sit æqualis rectæ A, & per H, ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ
 31. *primi* DG, productæ in K; & per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producatque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quaeritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, cum
 15. *primi* angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, cum
 43. *primi* æquale sit complemento DEFG, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

TAB. VII. **Q**Uamvis Euclides proponat hoc problema absolute, non adstringendo nos ad certam aliquam



quam rectam lineam datam, ut in præcedenti
 propof. 44. fecerat; tamen quia in fequentibus
 frequenter ufurpatur in data recta linea, placuit
 ipfum proponere una cum data recta linea. Sit
 ergo recta data EF, rectilineum ABC, & datus
 angulus D. Oportet igitur construere ad datam
 rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo
 ABC, quod habeat angulum æqualem angulo D.
 Refolvatur rectilineum in triangula A, B, & C.
 Deinde triangulo A, a æquale parallelogrammum
 constituatur EFGH, super rectam EF, habens an- 244. prim.
 gulum F, angulo D, æqualem. Item super re-
 ctam GH, parallelogrammum GHIK, æquale
 triangulo B, habens angulum G, æqualem angu-
 lo D. Item super rectam IK, parallelogrammum
 IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K,
 æqualem angulo D; Et fic deinceps procedatur,
 fi plura fuerint triangula in dato rectilineo: fa-
 ctumque erit, quod jubetur. Nam tria parallelo-
 grammata constructa, quæ quidem æqualia funt
 rectilineo dato ABC, conficiunt totum unum pa-
 rallelogrammum, quod fic demonstratur. Duo
 anguli EFG, HGK, b inter fe funt æquales, b 1. prim.
 cum uterque æqualis fit angulo D. Addito igitur
 communi angulo FGH, erunt duo anguli
 EFG, FGH, c qui duobus rectis æquivalent, c 29. prim.
 æquales duobus angulis HGK, FGH; ideoque hi d 1. prim.
 anguli duobus etiam rectis æquales erunt. c Quare c 14. prim.
 FG, GK, unam rectam lineam efficient. Eadem
 ratione ostendemus, EH, HI, unam rectam line-
 am efficere, propterea quod duo anguli EHG,
 HIK, æquales inter fe funt, (f cum fint æqua- f 34. prim.
 les oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.)
 g & duo anguli HIK, IHG, duobus funt rectis g 29. prim.
 æquales. &c. Cum igitur EI, FK, fint paralle-
 læ; b Itemque EF, IK, quod utraque parallela h 30. prim.
 fit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI.
 Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum
 IKLM, adjunctum parallelogrammo EFKI,
 constituere totum unum parallelogrammum EFLM.
 Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectili-

neo ABC, constituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

S C H O L I U M.

Datis duobus rectilineis inaequalibus, excessum majoris supra minus inquirere.

THEOR. *Sint data rectilinea A, & B, sitque A. majus.*
fig. 4. *Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum*
145. primi *A, superet rectilineum B, i* Fiat parallelogrammum
CDEF, in quocunque angulo D, æquale majori
rectilineo A. Et super rectam CD, parallelogram-
mum CDGH, in eodem angulo D, æquale rectilineo
minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF,
superat parallelogrammum CDGH, parallelogrammo
EFHG, superabit quoque figura A, figuram B,
eodem parallelogrammo EFHG. Quod est propo-
situm.

xlv. P R O B L. 14. P R O P O S. 46.

A Data recta linea quadratum describere.

LAB VII.
Æ. 5.
a 11. primi
g 2. primi
g 3. primi
d 34. primi

SIt data recta AB, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, a educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintque ipsi AB, æquales, & connectatur recta CD. Dico ABCD, esse quadratum. Cum enim anguli A, & B, sint recti, & erunt AD, BC, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis sit ipsi AB. Igitur & AB, DC, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est ABCD, in quo, cum AD, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existunt; sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, & æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratum igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

THEOR.

THEOR. 33. PROPOS. 47. *alij*

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit re- *TAB. VII. fig. 6.*
 ctus & describanturque super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratum BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, sive hæc duo latera æqualia sint, sive inæqualia: Ducatur enim recta AK, *b 31. primæ* parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & jungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, erunt rectæ GA, AC, una linea recta; *c 14. primæ* eodemque modo IA, AB, una recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus ABC, fiet totus angulus CBF, toti angulo *d 2. primæ* ABE, æqualis; similiterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE; trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, utrumque utriusque, ut constet ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, ut ostendimus; Erunt triangula *e 4. primæ* ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, *f 41. primæ* duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quod sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basin BE. Quare *g 6. primæ* æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione ostendetur

76 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

detur, æqualia esse quadratum $ACHI$, & parallelogrammum $CDKL$. *b* Erunt enim rursus tri-
 h 4. primi angula ACD , HCB , æqualia, ideoque eorum
 dupla, parallelogrammum videlicet $CDKL$, &
 quadratum $ACHI$, æqualia erunt. Quamobrem
 totum quadratum $BCDE$, quod componitur ex
 duobus parallelogrammis $BEKL$, $CDKL$; æquale
 est duobus quadratis $ABFG$, $ACHI$. In rectan-
 gulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod
 demonstrandum erat.,

S C H O L I U M.

*Si in quadrato quovis diameter ducatur, quadra-
 tum à diametro descriptum duplum erit prædicti
 quadrati.*

*TAB. VII. In quadrato $ABCD$, ducatur diameter AC . Dico
 quadratum diametri AC , duplum esse quadrati $ABCD$.
 fig. 5. Cum enim in triangulo ABC , angulus B , rectus
 247. primi sit, & eris quadratum lateris AC , æquale duobus
 quadratis laterum AB , BC . Cum igitur quadrata
 linearum AB , BC , æqualia sint, quod linea AB ,
 BC , sint æquales; eris quadratum diametri AC ,
 duplum cujuslibet illorum, ut quadrati linea AB ,
 hoc est, quadrati $ABCD$. Quod est propositum.*

xlvi. T H E O R. 34. P R O P O S. 48.

1. Si quadratum, quod ab uno laterum trian-
 guli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis
 trianguli lateribus describuntur, quadratis;
 Angulus comprehensus sub reliquis duobus
 trianguli lateribus, rectus est.

*TAB. VII. Detur triangulum ABC , sitque quadratum la-
 teris AC , æquale quadratis reliquorum late-
 rum BA , BC . Dico angulum ABC , esse re-
 ctum. Ducatur namque BD , perpendicularis
 ad*

ad BA *i*, & æqualis rectæ BC , connectaturque k *ii. prim*
 recta AD . Quoniam igitur in triangulo ABD ,
 angulus ABD , rectus est; *g* erit quadratum re-
 ctæ AD , æquale quadratis rectarum BA , BD : *g 47. primi*
 Est autem quadratum rectæ BD , quadrato rectæ
 BC , æquale, ob linearum æqualitatem. Quare
 quadratum rectæ AD , quadratis rectarum BA ,
 BC , æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ
 AC , eisdem quadratis rectarum BA , BC , æquale
 ponatur; *h* erunt quadrata rectarum AD , AC , *h i. prim*
 inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ AD ,
 AC , æquales. Quoniam igitur latera BA , BD ;
 trianguli ABD , æqualia sunt lateribus BA , BC ,
 trianguli ABC ; basis AD , ostensa est æqualis
 basi AC ; *i* erunt anguli ABD , ABC , æquales: *i 8. primi*
 Est autem angulus ABD , ex constructione rectus.
 Igitur & angulus ABC , rectus erit. Si igitur
 quadratum, quod ab uno laterum trianguli de-
 scribitur, &c. Quod demonstrandum erat.





E U C L I D I S

E L E M E N T U M

S E C U N D U M.

Agit Euclides secundo hoc libro de potentiis linearum rectorum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cujuscvis lineæ rectæ divisa, & parallelogramma rectorangula sub partibus ejusdem lineæ divisa comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus quæ ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

D E F I N I T I O. I.

Omne parallelogrammum rectorangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

HAc definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectorangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectorangulum, cujus

cujus omnes anguli sunt recti. Cujus quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, ut perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si unus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo $ABCD$, angulus A , TAB. VII.
fig. 8. rectus. Dico reliquos tres angulos B , C , D , rectos quoque esse. Nam cum parallela sint AD , BC , a erunt anguli A , & B , interni duobus 119. primi rectis aequales: At angulus A , rectus est, ex hypothesis. Igitur & B , rectus erit. Quoniam vero b quilibet suo opposito est aequalis, us angulus A , b 34. primi angulo C , & angulus B , angulo D ; erunt & anguli C , & D , recti.

Disit itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quae unum ejus angulum rectum continent. Ut parallelogrammum rectangulum $ABCD$, contineri dicitur sub duabus lineis rectis AB , AD ; vel sub AD , DC ; vel sub DC , CB , vel denique sub AB , BC : quoniam qualibet hujusmodi duae lineae exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, una quidem ut AB , vel DC , ejus longitudinem, altera vero, ut AD , vel BC , ejus latitudinem. Unde expressis duabus lineis, quae angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota ejus quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario unius lineae in alteram hujusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta AB , deorsum secundum rectam AD , moveri in transversum, ita ut semper angulum rectum cum AD , conservet, donec punctum A , ad punctum D , & punctum B , ad punctum C , perveniat, descriptum erit

80 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

erit totum parallelogrammum $ABCD$. Idem fiet, si AD , ponatur moveri transversum secundum rectam, AB , &c. Quamobrem jure optimo sub talibus duabus lineis rectis continere dicitur parallelogrammum rectangulum.

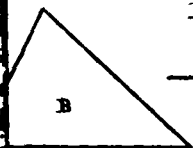
Itaque parallelogrammum rectangulum; quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, ejus duo latera circa unum angulum rectum equalia sunt duabus illis rectis lineis, utrumque utrique. Ut
TAB. VII. parallelogrammum rectangulum sub rectis E , & F ,
fig. 9. contentum, erit idem, quod parallelogrammum $ABCD$: quoniam latus AB , aequale est rectæ E , & latus AD , rectæ F .

Perspiciuum autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis equalibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarum linearum equalium equalis sit linea opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera equalia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

Item manifestum est, si dua rectæ linea aliis duabus rectis lineis aequales fuerint, utraque utrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, aequale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera unius equalia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint
TAB. VIII. rectæ AB , BC , aequales rectis DE , EF , utraque
fig. 1. utrique. Dico parallelogrammum rectangulum $ABCG$, contentum sub AB , BC , aequale esse parallelogrammo rectangulo $DEFH$, contento sub DE , EF . Ductis etenim diametris AC , DF , cum latera AB , BC , trianguli ABC , equalia sint lateribus DE , EF , trianguli DEF , & anguli B , & E , equalis,

A

Fig. 2.



C

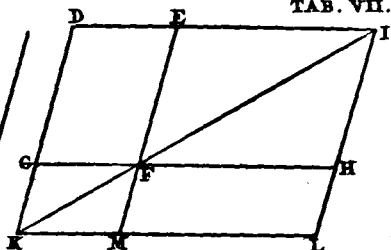
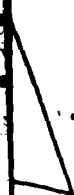


Fig. 3.



D

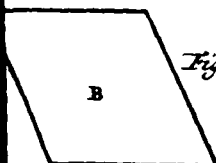
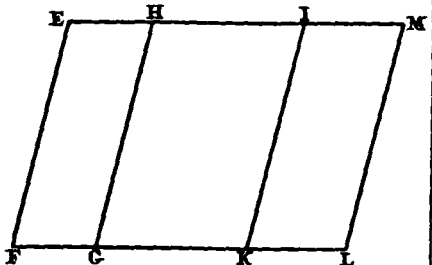


Fig. 4.

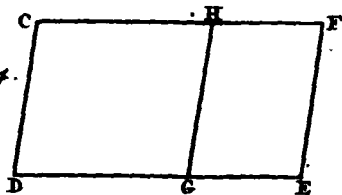


Fig. 6.

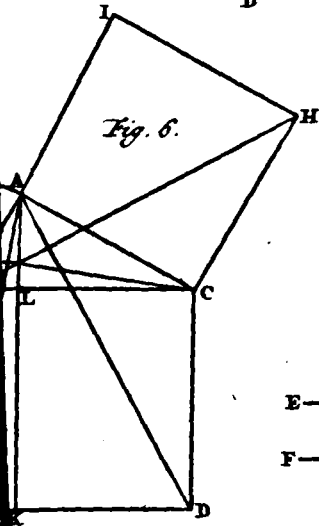
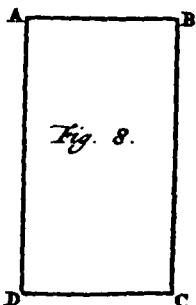


Fig. 8.



E

Fig. 9.

F

les, nempe recti; cerunt triangula ABC , DEF , c. 4. primi aequalia. Eadem ratione aequalia erunt triangula AGC , DHF . Quare tota parallelogramma $ABCG$, $DEFH$, aequalia erunt.

Obiter quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in aliis, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam ceteri Geometrae observant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem littera repetantur, solent Geometrae exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duobus duntaxat litteris, quae per diametrum opponuntur. Ut appositum parallelogrammum appellant AC , vel BG . TAB. VIII
fig. 1.

DEFINITIO. II.

In omni parallelogrammo spatium, unumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo $ABCD$, siue rectangulum TAB. VIII. illud sit, siue non, ducatur diameter, AC , ex fig. 2. 3, cujus puncto quolibet G , ducantur rectæ EF , HI , parallela lateribus parallelogrammi, ita ut parallelogrammum divisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo EH , IF , dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo BG , GD , complementa, ut manifestum est ex ultima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo utrolibet circa diametrum, ut ex IF , una cum duobus complementis BG , GD , qualis est figura $EBCDHGE$, quam complectitur circumferentia KLM , dicitur Gnomon. Eadem ratione figura $FDABIGF$,

F

compo

composita ex parallelogrammo EH, circa diame-
trum, & duobus complementis BG, GD, Gnomon
appellabitur.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si fuerint duæ rectæ linæ, seceturque ipsa-
rum altera in quocunque segmenta: Rectan-
gulum comprehensum sub illis duabus rectis
lineis, æquale est eis, quæ sub infecta, &
quolibet segmentorum comprehenduntur, re-
ctangulis.

TAB. VII.
fig. 4.

Sint duæ rectæ A, & BC, quarum BC, secetur
quomodocunque in quolibet segmenta BD,
DE, EC. Dico rectangulum sub A, & BC,
comprehensum æquale esse omnibus rectangulis
simul sumptis, quæ sub linea indivisa A, & quo-
libet segmento comprehenduntur, nempe rectan-
gulo sub A, & BD; Item sub A, & DE; Item
sub A, & EC, comprehenso.

Rectangulum enim BF, comprehendatur sub
A, & BC, hoc est, recta GB, æqualis sit rectæ
A. Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ
perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, du-
caturque recta FG. Nam rectæ BG, CF, ap-
parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed &
a 18. primi b æquales inter se sunt, quod utraque rectæ A,
c 33. primi æqualis ponatur. c Igitur erunt quoque FG,
BC, parallelæ, & æquales inter se: ac proinde
rectangulum erit BF, contentum sub A, sive
GB, & BC, ex defin. 1. hujus lib. Deinde ex
D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipsi
BG, vel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ
d 30. primi sint ipsi BG, d inter se quoque parallelæ erunt.
Rursus eadem, cum ex constructione parallelo-
e 34. primi gramma sint BH, BI, æquales erunt rectæ BG,
ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG,
æqualis

LIBER SECUNDUS. 83

æqualis est rectæ A, erit rectangulum BH, comprehensum sub infecta linea A, & segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE. Item rectangulum EF, sub A, & segmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF; perspicuum est, rectangulum comprehendentem sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si recta linea secta sit utcumque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur: æqualia sunt ei, quod à tota sit, quadrato.

Recta linea AB, dividatur utcumque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ AB. TAB. VIII. fig. 5.
 Describatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ æqualis erit rectæ AE, hoc est, rectæ AB, cui æqualis est recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehensum sub tota AB, & segmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia sint quadrato AD, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit utcumque, &c. Quod demonstrandum erat. c 46. primi a 34. primi

Aliter. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. TAB. VIII. fig. 6.
 Quoniam igitur AB, divisa est in C, erit rectangulum F 2 gulum

84 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

b *Fig. 6.* gulum comprehensum sub infecta D, & recta AB, hoc est, quadratum rectæ AB, b æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, infecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB, quod est propositum.

iii. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si recta linea secta sit utcunque: Rectangulum sub tota, & uno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

TAB. VIII. **Fig. 7. 8.** **L** Inea recta AB, divisa sit utcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & utrovis segmento, ut AC, (sive hoc segmentum majus sit uti in fig. 7. sive minus uti in fig. 8.) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta, rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit utcunque, &c. Quod erat ostendendum.

TAB. VIII. **Fig. 9.** **Aliter.** Accipiat recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, divisa est in C, erit

LIBER SECUNDUS. 85

erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, *a* æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv;

Si recta linea secta sit utcumque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

Recta linea AB divisa sit utcumque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, divisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales sunt duobus rectis, & *d* angulus EFG, rectus est, *e* cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum sint *f* æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia ejus latera sint

TAB. VIII.
fig. 10.

a 5. primi
b 32. primi

c 32. primi
d 19. primi

e 6. primi
f 34. primi

sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod existente uno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti sunt, ut ad defin. 1. huius lib. demonstravimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quomobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod latus HG, & æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sunt rectæ CB, ob quadratum CI: & FG æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc est, b rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis AC, CB, b's sumpto. Igitur si recta linea secta sit utcumque, quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

TAB. VIII. Aliter. Quoniam recta AB, divisa est in C, fig. 11. i erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, i 2. sec. quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub AB, AC, k 3. sec. comprehensum, k æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.

COROLLARIUM. I.

Hinc manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

COROLLARIUM. II.

Sequitur etiam ex demonstratione huius propos. 4. diametrum cuiusvis quadrati dividere ejus angulos bifariam.

riam. Probatum enim fuit angulos AEB, DEB, esse TAB. VII.
semirectos, uti angulos DEB, & DBE. fig. 10.

THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

Dividatur recta AB, bifariam in C, & per TAB. VII.
inæqualia in D, ut sectionum intermedia sit fig. 12.
recta CD, qua nimirum dimidia CB, minus segmentum DB, superat, vel quamajus segmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus AD, DB, comprehensum, una cum quadrato rectæ CD, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ CB. Describatur enim CF, quadratum super dimidia CB; & ducta diametro BE, ducatur ex D, recta DG, parallela rectæ BF, secans diametrum BE, in H, puncto, per quod ducatur recta BC, parallela IK: Item ex A, rectæ CE, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. precedentis propos. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta rectæ DB, æqualis: a 34. primi
Quare rectangulum AH, comprehendetur sub AD, DB, & KG, crit quadratum rectæ CD; Probandum itaque est, rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale esse quadrato CF. Quoniam ergo b complementa CH, FH, æqualia b 43. primi
sunt; si addatur commune quadratum DI, crit parallelogrammum DF, parallelogrammo CI, æquale: c Est autem & AK, eidem CI, æquale, c 36. primi
quod & bases AC, CB, æquales sint. Igitur DF, AK, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur CH, crit gnomon MNO, rectangulo AH æqualis. Quocirca cum gnomon MNO.

88 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

& quadratum KG, æqualia sint quadrato CF; erit & rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur, Rectangulum comprehensum sub tota cum adjecta & adjecta, una cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adjecta componitur, tanquam ab una, descripto.

TAB. VIII.
fig. 13.

SECetur recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita AD, & DB, adjecta, una cum quadrato dimidiæ CB, æquale esse quadrato linæ CD, quæ ex dimidia CB, & adjecta BD, componitur. Describatur namque CE, quadratum super CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, secans diametrum DF, in H, puncto, per quod agatur IK, parallela rectæ CD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium i. propof. 4. hujus lib. BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: a Est autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur sub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque est, rectangulum AI, una cum quadrato KG, æquale esse quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, b æquale est parallelogrammo CH, quod bases AC, CB, æquales sint: c Est autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter se. Addito ergo communi CI, erit rectangulum

a 34. primi

b 36. primi

c 43. primi

gulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, sint æqualia; erit & rectangulum AI, una cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si recta linea secetur utcunque; Quod à tota, quodque ab uno segmentorum, utraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

SECetur recta AB, utcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti TAB. VIII.
 five majoris, five minoris AC, æqualia esse re- fig. 14. 15.
 ctangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto
 segmento AC, una cum quadrato reliqui seg-
 menti CB. Describatur enim super AB, quadra-
 tum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C,
 recta CF, parallela rectæ AE, secans diametrum
 in puncto G, per quod agatur HI, parallela re-
 ctæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. pro-
 pos. 4. hujus lib. CI, HF, quadrata: & quia
 recta GH, æ æqualis est rectæ AC, erit HF, 234. p. 15.
 quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æ-
 qualis est ipsi AB, erit rectangulum AF, com-
 prehensum sub tota AB, & segmento AC. Ea-
 dem ratione rectangulum HD, comprehensum
 erit sub eisdem rectis AB, AC, quod rectæ DE,
 EH, æquales sint rectis AB, AC, ob quadrata
 AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI,
 una cum quadrato CI, hoc est, gnomoni KLM,
 una cum quadrato CI, æquale est quadratum
 AD; si apponatur commune quadratum HF,
 erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis
 AF, F 5

AF, DH. (quorum quodlibet comprehenditur sub tota AB, & segmento AC,) una cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur utcumque, &c. Quod erat demonstrandum.

viii. THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si recta linea secetur utcumque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab una linea describitur, quadrato.

TAB. VIII. **fig. 16, 17.** Sit recta AB, in C, divisa utcumque. Dico rectangulum quater comprehensum sub AB, & segmento sive majore, sive minore CB, una cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento CB, componitur. Producatur enim AB, versus dictum segmentum CB, ad D, sitque BD, recta æqualis segmento CB; & super tota AD, quadratum describatur AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipsi DE, secantes diametram in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipsi AD, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. hujus lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, a æqualis est rectæ AC, erit OI, quadratum segmenti AC. Rursus b quia NH, æqualis est rectæ CB, erit NQ, quadratum segmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ BH, HQ, æquales sunt segmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehensa erunt sub AB, & segmento CB, c cum LH, sit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cum

cum NH , HM , rectæ d æquales sint rectis CB , BD ; & rectæ GH , EM , rectæ FL , hoc est, rectæ LH , hoc est, rectæ AB . Et quia quadrata NQ , BM ; æqualia sunt; si addatur commune KG , erunt BM , KG , simul æqualia rectangulo NG . Quapropter quinque rectangula AH , LQ , HE , BM , & KG , gnomonem RST , componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB , & segmento CB . Cum igitur gnomon RST , & quadratum OI , æqualia sint quadrato AE ; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB , & segmento CB , una cum quadrato reliqui segmenti AC , æquale quadrato lineæ AD , compositæ ex AB , & dicto segmento CB . Quamobrem, si recta linea secetur utcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 9. PROPOS. 9. viij.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt, & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

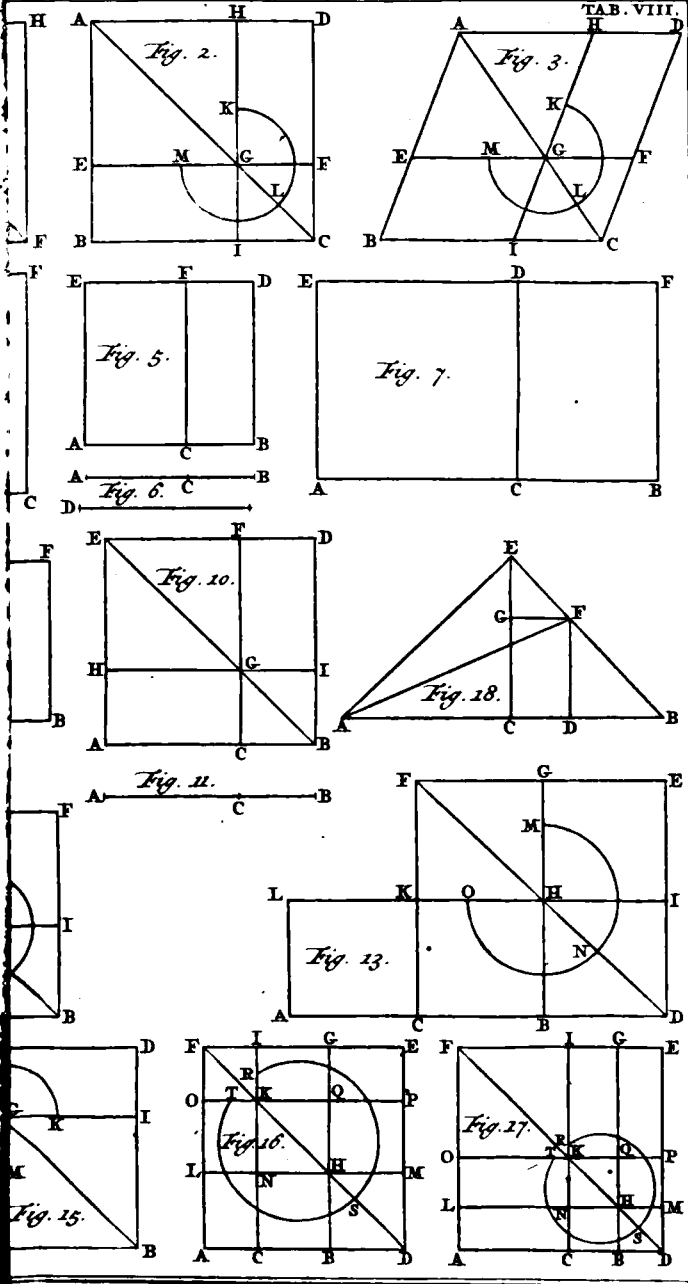
SECetur recta AB , bisariam in C , & non bisariam in D . Dico quadrata segmentorum inæqualium AD , DB , simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia AC , & ex intermedia sectionum CD . Educatur enim ex C , ad AB , perpendicularis CE , quæ sit æqualis dimidiæ AC , vel CB , ducanturque rectæ EA , EB . Deinde ex D , ducatur quoque ad AB , perpendicularis DF , secans EB , in puncto F , per quod ducatur FG , parallela ipsi AB , secans CE , in G , ducaturque tandem AF . Quoniam igitur in triangulo ACE , latera CA , CE , æqualia sunt, erunt anguli CAE , CEA , æquales: Est autem a angulus ACE , rectus: Reliqui igitur b anguli alium rectum conficiunt, ideoque AEC , semirectus

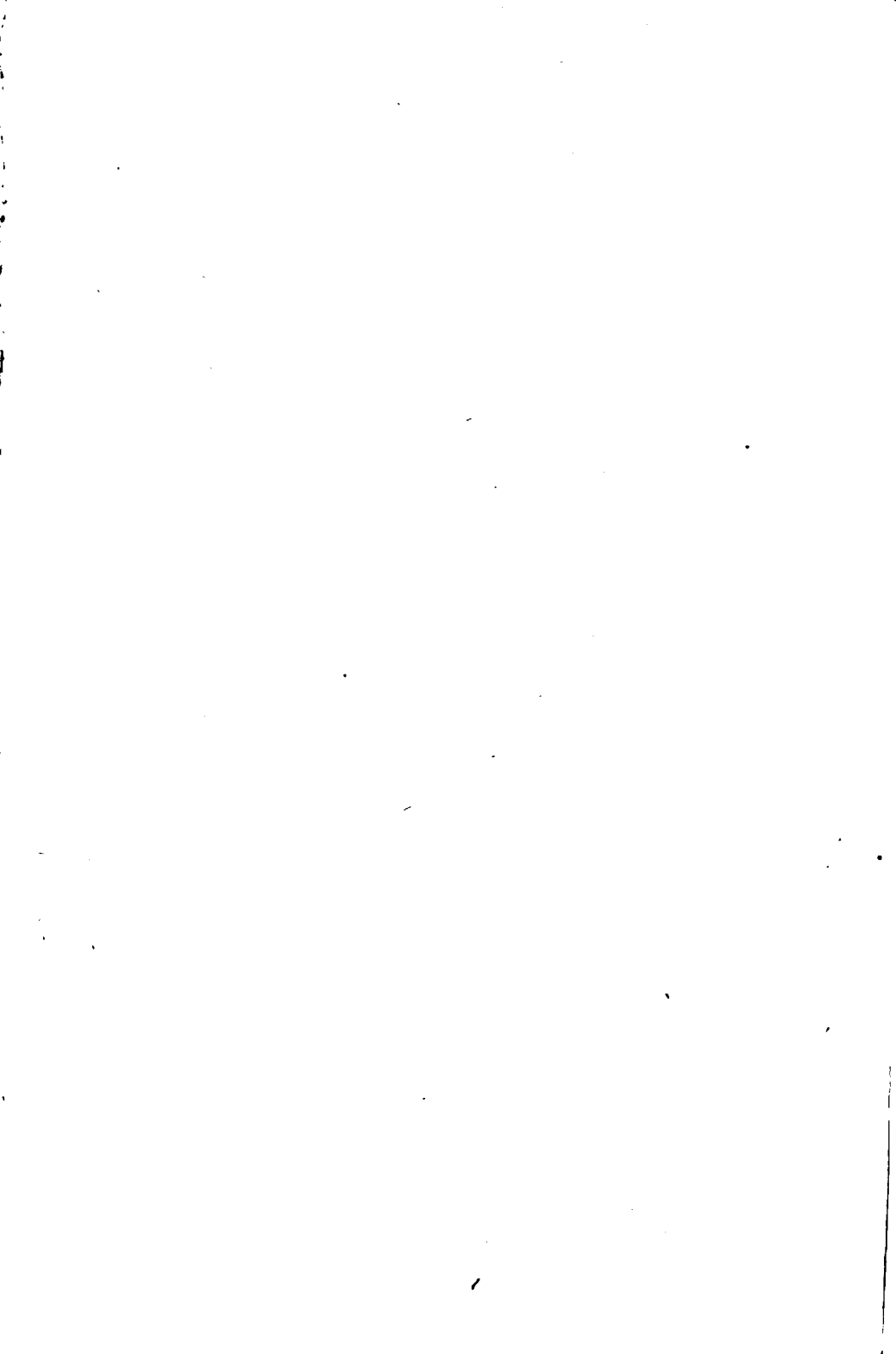
TAB. VIII.
fig. 18.

a 5. prim.
 b 32. prim.

ctus erit. Eadem ratione angulus BEC, semi-
 rectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rur-
 e 19. primi sus, quia trianguli FGE, angulus EGF, & æqua-
 d 32. primi lis est recto ECB, externus interno; & erunt reli-
 qui duo anguli uni recto æquales: Ostensum au-
 tem est, angulum FEG, esse semirectum. Igitur
 & EFG, semirectus erit, proptereaque anguli
 e 6. primi EFG, FEG, æquales erunt, & ideoque & latera
 EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo osten-
 detur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse
 æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B,
 semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE,
 f 47. primi angulus C, rectus sit, & erit quadratum lateris
 AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE:
 Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia,
 quod & lineæ AC, CE, æquales sint. Igitur
 quadratum lateris AE, duplum erit quadrati la-
 teris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, an-
 gulus G, rectus est, & erit quadratum lateris EF,
 g 47. primi æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At
 duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æ-
 qualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum
 lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc
 h 34. primi est, quadrati lineæ CD. Est enim CD, & recta
 rectæ FG, æqualis; cum CF, sit parallelogram-
 mum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF,
 dupla sunt duorum quadratorum linearum recta-
 rum, AC, CD: Sunt autem duo quadrata recta-
 rum AE, EF, & æqualia quadrato rectæ AF; &
 i 47. primi quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis
 rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata re-
 ctarum AD, DF, dupla sunt duorum quadrato-
 rum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectæ
 DF, æquale est quadrato rectæ DB. Ostensum
 enim est rectas DF, DB, esse æquales. Quare
 duo quoque quadrata rectarum AD, DB, seg-
 mentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum
 rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ, & interme-
 diæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æ-
 qualia, & non æqualia &c. Quod erat demon-
 strandum.

THEOR.





THEOR. 10. PROPOS. 10. x

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adjuncta, & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt, & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod à composita ex dimidia & adjuncta, tanquam ab una, descriptum sit, quadrati.

Secetur recta AB, bifariam in C, & ei in rectum *TAB. IX.*
addatur BD. Dico duo quadrata rectarum *fig. 1.*
AD, BD, simul dupla esse quadratorum simul,
quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Super
AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE,
quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & jun-
gantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur
DF, ipsi CF, parallela, occurrens rectæ EB,
protractæ in G, & per E, ducatur rectæ CD,
parallela EF, secans DF, in F, jungaturque re-
cta AG. Ostendetur jam, angulum AEB, esse
rectum, ut in præcedenti propos. & CEB, semi-
rectum; *a* ideoque ejus alternum EGF, semire-
ctum quoque; *b* Est autem angulus F, rectus, *a 19. primi*
cum in parallelogrammo CF, recto angulo C,
opponatur. *c* Igitur & reliquus FEG, semirectus *b 34. primi*
erit, & propterea ipsi EGF, æqualis. Quare
d rectæ EF, FG, angulis FEG, EGF, oppositæ, *c 31. primi*
æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes,
rectas BD, DG, esse æquales, propterea quod
angulus BDG, sit rectus, & BGD, semirectus,
&c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, *e* æ-
quale est quadratis æqualibus rectarum æqualium *c 47. primi*
AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum
quadrati rectæ AC. Rursus quia quadratum re-
ctæ EG, *f* quadratis æqualibus rectarum æquali-
um EF, FG, æquale est, erit quoque quadra-
tum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc
est, rectæ CD, *g* cum CD, recta æqualis sit *g 34. primi*
estæ

ctæ EF. Duo igitur quadrata rectarum AE, EG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, æquale est *b* quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ AG, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis AD, DG, describuntur. Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ DG, æquale sit quadrato rectæ BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Itaque si recta linea secetur bisariam, &c. Quod ostendendum erat.

xi. PROBL. I. PROPOS. II.

Datam rectam lineam secare, ut comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

TAB. IX. **D**ata sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero ejus segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum majoris. Describatur ex AB, quadratum AC, & diviso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bisariam in E, jungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, major, quam AF. Nam cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; a sint autem latera AE, AB, majora latere EB; Erunt quoque rectæ EA, AB, majores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, major erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub AB, BG, æquale sit

fit quadrato rectæ AG; adeo ut AG, fit majus segmentum, & BG, minus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela FH, secans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum segmenti AG, cum omnia ejus quatuor latera sint æqualia, quippe cum b FH, $b_{34} \text{ prim}$ GH, æqualia sint oppositis AG, AF, æqualibus; omnesque anguli ejusdem recti ob rectum A, ut ad defin. 1. hujus libri ostendimus. Rectangulum quoque CG, comprehensum erit sub AB, & segmento BG; quod AB, æqualis sit ipsi BC. Itaque probandum est, rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia esse. Quoniam igitur recta DA, divisa est bisariam in E, & ei addita in rectum AF; c erit rectangulum sub DF, FA, hoc $c \text{ 6. sed.}$ est, rectangulum DH, (cum FH, sit æqualis ipsi FA;) una cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc est, quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis est: Est autem quadratum rectæ EB, d æquale quadratis rectarum AE, AB. $d \text{ 47. prim}$ Quare rectangulum DH, una cum quadrato rectæ AE, æquale quoque est quadratis rectarum AE, AB. Dempso ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc est, quadrato AC. Abiatis igitur rursus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam AB, secuimus, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. II. PROPOS. 12. αj ;

In amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subten-dente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendenti-bus, rectangulo bis comprehenso, & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angu-lum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TAB. IX. **fig. 3. 4.** **TR**iangulum ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, majus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, una cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta CD, divisa sit in B, utcumque *a* erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD : *b* Est autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod sit, &c. Quod erat ostendendum.

xlij. **T H E O R. 12. P R O P O S. 13.**

In oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis com-

comprehenſo, & ab uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

Sint omnes anguli trian-
 culi ABC , acuti & ex
 A , perpendicularis AD , demiffa cadat in la-
 tus BC . Dico quadratum lateris AB , quod acu-
 to angulo ACB , opponitur, minus eſſe quadra-
 tis laterum AC , CB , circa angulum acutum
 dictum, reſtangulo bis comprehenſo ſub BC , CD ,
 hoc eſt, quadratum lateris AB , una cum re-
 ſtangulo bis comprehenſo ſub BC , CD , æquale
 eſſe duobus quadratis laterum AC , CB . Cum
 enim reſta BC , diviſa ſit in D , utcunq̃, erunt
 quadrata reſtarum BC , CD , a æqualia reſtangulo
 comprehenſo bis ſub BC , CD ; & quadrato re-
 ſtæ BD . Addito ergo communi quadrato reſtæ
 DA , erunt tria quadrata reſtarum BC , CD , DA ,
 æqualia reſtangulo bis comprehenſo ſub BC ,
 CD , & duobus quadratis reſtarum BD , DA :
 Duobus autem quadratis reſtarum CD , DA ,
 b æquale eſt quadratum reſtæ CA . Duo igitur
 quadrata reſtarum BC , CA , æqualia ſunt re-
 ſtangulo bis comprehenſo ſub BC , CD , & duo-
 bus quadratis reſtarum BD , DA . Cum ergo
 duobus quadratis reſtarum BD , DA , c æquale
 ſit quadratum reſtæ AB ; erunt duo quadrata re-
 ſtarum BC , CA , æqualia reſtangulo bis compre-
 henſo ſub BC , CD , & quadrato reſtæ AB , quod
 eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur, qua-
 drata reſtarum AB , BC , æqualia eſſe reſtangulo
 bis comprehenſo ſub CB , BD , & quadrato reſtæ
 AC , hoc eſt, quadratum lateris AC , minus eſſe
 quadratis laterum AB , BC , reſtangulo compre-
 henſo bis ſub CB , BD . In oxygoniis ergo tri-
 angulis, quadratum à latere, &c. Quod de-
 monſtrandum erat.

TAB. IX.

fig. 5, 6,

7,

a 7. fig.

b 47. prim.

c 47. prim.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

TAB. IX. **fig. 8, 9.** **a 45. primi** Sit datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. *a* Constituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cujus unum latus, ut DC, producat ad F, sitque CF, recta æqualis rectæ BC. Dividatur quoque DF, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non.

fig. 8. Si cadit in punctum C, erit recta BC, (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB, *b* æqualia sint oppositis lateribus BC, CD; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur intervallo GD, vel GF, semicirculus FHD, producatque BC, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ CH, esse æquale rectilineo A. Duçta enim recta GH; quia recta DF, dividitur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub DC, CF, hoc est, rectangulum BD, una cum quadrato rectæ GC, *c* æquale quadrato rectæ GF, hoc est, quadrato rectæ GH; cum rectæ GF, GH, sint æquales: At quadratum rectæ GH, *d* æquale est quadratis rectarum GC, CH. Igitur rectangulum BD, una cum quadrato rectæ GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC, CH. Quamobrem dempto communi quadrato rectæ GC, remanebit rectangulum BD, hoc est, rectilineum A; quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.



E U C L I D I S

E L E M E N T U M

T E R T I U M.

D E F I N I T I O. I.

Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

Quoniam Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est usus. Primum itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumvolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, ut lib. 1. diximus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales sunt. Ut si diametri AB , BC , vel rectæ DF , EG , TAB. IX. è centris D , & E , ductæ sint æquales, æquales sũt. 10. 11. erunt circuli AFB , & BGC . Sic etiam e contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ æquales. Ex his liquet, circulos,

los, quorum diametri, vel recta ducta ex centris sunt inæquales, inæquales esse; ut si diametri BC , HI , vel recta EG , KL , è centris E , & K , ducta sint inæquales, inæquales erunt circuli BGC , & HLI ; atque adeo illum, cujus diameter, vel semidiameter major, majorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosve inæquales esse, majoris quidem majorem, & minoris minorem.

D E F I N I T I O. II.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producat, circulum non secat.

TAB. IX. **U**T recta AB , si ita circulum BFD , tangat in
fig. 13. B , ut producta ad C , nulla ratione circulum secet, sed tota jaceat extra ipsum, dicitur tangere circulum. At vero recta EF , quia ita eundem circulum tangit in F , ut producta ad G , secet circulum, caditque intra ipsum, non dicitur circulum tangere, sed secare.

D E F I N I T I O. III.

Circuli se se mutuo tangere dicuntur, qui sese mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

TAB IX. **E**Odem modo duo circuli AC , BC , se mutuo
fig. 14 15 dicuntur tangere in C , si ita sese contingant in C , ut neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, ut quando unus extra alterum est positus; aut interius, quando unus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, ut unus alterum

alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo TAB. IX.
secare, & non tangere. Uti circuli ED, & fig. 16.
FD.

DEFINITIO. IV.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam major perpendicularis cadit.

Quoniam inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; alia vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Ut distantia puncti A, à recta TAB. X. BC, dicitur esse perpendicularis AD, non autem fig. 1. AE, vel AF, vel alia quævis, quæ non perpendicularis est; quia AD, omnibus est brevior, ex coroll. propof. 19. lib. 1. Immo non solum AE, AF, majores sunt, quam AD, sed etiam ipsa inter se inæquales sunt. Est enim AF, a major, a19. primi quam AE, cum angulus AEF, sit obtusus, & AFE, acutus, & sic de aliis lineis non perpendiculæ. Quod enim AFE, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, b minores sunt duobus rectis. Hinc enim b17. primi fit, cum ADF, rectus sit, angulum AFD, recto esse minorem. Eadem ratione angulus AED, ostenditur acutus. Propterea quod in triangulo ADE, c duo anguli ADE, AED, minores sunt duobus c17. primi rectis, & ADE, rectus est, ac proinde, cum ambo AED, AEF, d æquales sint duobus rectis, eris d13. primi AEF, obtusus. Hinc factum est, ut Eustides æ-

TAB. X.
fig. 2. *qualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definitur per aequales perpendiculares, & inaequalem distantiam per inaequales. Ut duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, æqualiter dicuntur distare à centro E, si perpendiculares EF, EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abesse dicitur à centro E, quam linea HI, si perpendicularis EG, major fuerit perpendiculari EK.*

D E F I N I T I O. V.

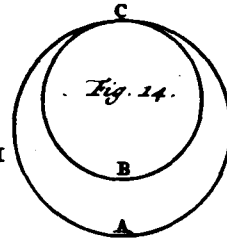
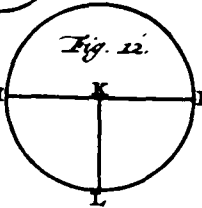
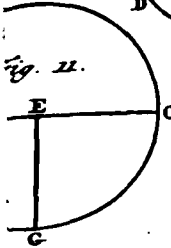
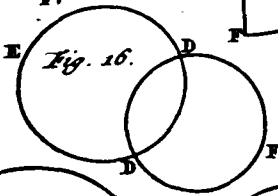
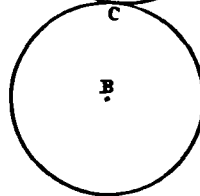
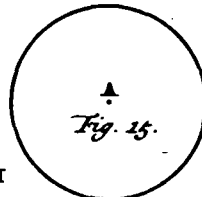
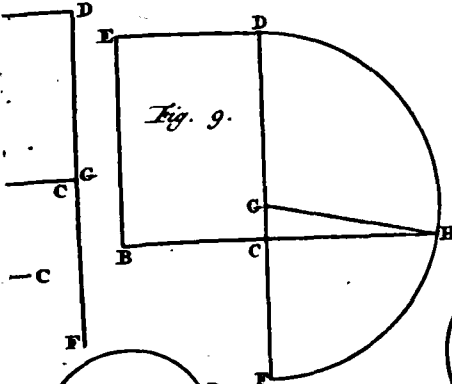
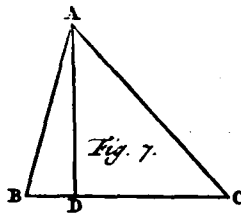
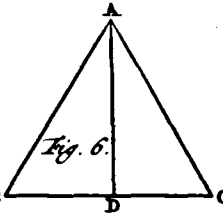
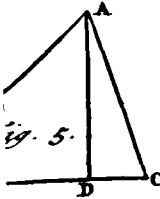
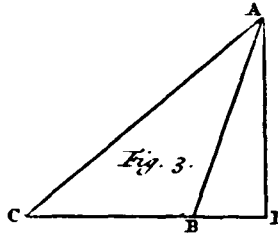
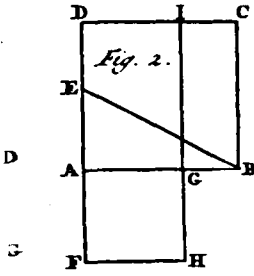
Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

TAB. X.
fig. 3. *UT si ducatur in circulo ABCD, recta BD, utcumque, dicitur tam figura BAD, contenta circumferentia BAD, & recta BD; quam figura BCD, comprehensa recta BD, & circumferentia BCD, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum. Semicirculus, quando recta BD, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo majus, quando recta BD, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum BAD; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cujusmodi est segmentum BCD. Vocatur à plerisque Geometris recta BD, chorda, & circumferentia BAD, vel BCD, arcus.*

D E F I N I T I O. VI.

Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

Definit jam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmen-



segmenti, dicens angulum mixtum ABD , vel ADB , TAB. X. contentum sub recta linea BD , & circumferentia fig. 3. BAD , appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus BAC , semicirculi: Si vero segmentum majus semicirculo extiterit, vocabitur angulus ABD , segmenti majoris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus CBD , segmenti minoris nuncupabitur.

DEFINITIO. VII.

In segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ ejus lineæ, quæ segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adjunctis illis lineis comprehensus angulus est in segmento.

Si segmentum circuli quodcunque ABC , cujus TAB. X. basis recta AC . Ex suscepto quolibet puncto, fig. 5. B , in circumferentia, ducantur ad puncta A , & C , extrema basis, rectæ lineæ BA , BC . Angulus igitur rectilineus ABC , dicitur existere in segmento ABC .

DEFINITIO. VIII.

Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

EX puncto A , quolibet suscepto in circumferentia TAB. X. circuli $ABCD$, ducantur rectæ duæ lineæ AB , fig. 6. AD , ad duo extrema B , & D , circumferentia BCD , cujusque, quam quidem duæ rectæ AB ,
G 4
AD,

AD, assumunt. Angulus itaque rectilineus *BAD*, insistere dicitur circumferentia *BCD*.

Præter tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentia, qui continetur linea recta tangente circum, & circumferentia circuli; vel certe duobus circumferentiis se mutuo tangentibus, sive hoc exterius fiat, sive interius. Exemplum.

TAB. X. Si recta *AB*, tangat circumulum *CDE*, in *C*; angulus mixtus *ACD*, vel *BCE*, dicitur angulus contingentia, sive contactus: Rursus, si circumulus *CED*, tangat circumulum *EFG*, exterius in *E*; Item circumulus *HFI*, circumulum *EFG*, interius in *F*; appellabitur tam angulus curvilineus *CEF*, quam *EFH*, vel *GFI*, angulus contactus, seu contingentia. Sunt itaque, ut vides, tres anguli contingentia, unus quidem mixtus, reliqui vero duo curvilinei.

DEFINITIO. IX.

Sector autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

TAB. X. **fig. 3.** SI in circulo *ABCD*, cujus centrum *E*, rectæ *AE*, *CE*, constituant angulum *AEC*, ad centrum *E*; nominabitur figura *AECD*, contenta rectis *AE*, *EC*, & circumferentia *ADC*, quam prædicta linea assumunt, Sector circuli.

DEFINITIO. X.

Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

TAB. X. **fig. 9.** Segmenta videlicet *ABDF*, *DCAE*, ejusdem circuli *ABCDEF*, quæ capiunt hos duos angulos *ABF*,

ABF, DCE, æquales: vel, quod idem est, in quibus iidem anguli æquales existunt, juxta 7. definitionem, similia dicuntur, & ipsa circumferentia quoque ABDF, DCAE, similes.

PROBL. I. PROPOS. I. 11

Dati circuli centrum reperire.

SIt circulus datus ABCD, cujus centrum oportet invenire. Ducatur in eo linea utcumque AC, & quæ bifariam dividatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, utrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam dividat inæqualiter, quandoquidem in F, divisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basibus AG, basi CG; (à centro enim duci dicuntur) *b* erunt anguli AEG, CEG, *b* *8. primæ* quales; & ideoque recti: Erat autem & angulus *c* 10. *def.* AEF, rectus, ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta, rectam AC, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum ejus medium F, necessario esse circuli centrum.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. 2.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

TAB. X. **fig. 11.** **I**N circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in ejus circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam, cadere intra circulum, ita ut ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, ut vult adversarius. Invenio *a* igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quodvis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetque ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cujus basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) *b* erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus EDA, *c* angulo ECD, major externus interno opposito, cum latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, major erit idem angulus EDA. Quare recta EA, majori angulo ADE, opposita, (hoc est, recta EB, sibi æqualis;) *d* major erit, quam recta ED, minori angulo DAE, opposita, pars quam totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita ut eadem sit, quæ circumferentia ABC. Effet enim recta EA, major, quam recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curva, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, lineam rectam, quæ circum tangit, ita ut eum non secet, in uno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, g caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra *g 2. 1. 1. 1.* circum. Quare circum secaret, quod est contra hypothésin.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iii.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER centrum A, circuli BCD, recta CE, ex-TAB. X. extensa dividat rectam BD, non per centrum *fig. 12.* extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales. *a 8. prime* Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc est, *a 10. def.* recti. Quod erat primo propositum.

Sit jam AF ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, *b 5. primi* erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, AFD, trianguli AFB, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: *c 26. primi* erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

C O.

C O R O L L A R I U M.

Ex hac demonstratione facile inferemus, in quovis triangulo duorum laterum æqualium, five æquilaterum illud sit, five Iſoſceles, lineam, quæ baſim bifariam ſecet, perpendicularẽ eſſe ad baſim. Et contra, lineam, quæ ad baſim ſit perpendicularis, baſim ſecare bitariam. Nam in triangulo ABD, cujus duo latera AB, AD, æqualia ſunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus deſcribi poteſt: ex eo, quod recta AF, ſecat baſim BD, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quod anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſim BD, à recta AF, bifariam ſecari.

TAB. X.
fig. 12.

iv. T H E O R. 3. P R O P O S. 4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, non per centrum extenſæ; ſe ſe mutuo bifariam non ſecabunt.

TAB. X.
fig. 13.

DUæ rectæ AB, CD, ſe mutuo in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, ut mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim una earum per centrum tranſit, certum, eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bitariam dividitur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamvis una earum nonnunquam bifariam ab altera dividatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diviſa enim ſit & AB, & CD, ſi fieri poteſt, bifariam in E.

a 1. tertii. a Invento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta EF. Quoniam ergo FE, ponitur ſecare rectam AB, bifariam in E, b ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur CD, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam dividi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 5. vi

Si duo circuli sese mutuo secant, non
erit illorum idem centrum.

DUO circuli ABD, EBD, se mutuo secant in TAB. X.
B, & D. Dico ipsos non habere idem centrum. fig. 14.
Sit enim, si fieri potest, idem centrum
utriusque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB,
quidem ad sectionem B; CA, vero secans utram-
que circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur
C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta
EC, rectæ CB, *b* æqualis. Rursus quia C, cen- *b* 15. def.
trum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta
AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ
EC, AC, *a* æquales inter se erunt, pars, & totum *a* 1. prm.
se se mutuo secant, &c. Quod ostendendum
erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6. vi

Si duo circuli sese mutuo interius tan-
gant; eorum non erit idem centrum.

DUO circuli AB, BC, se interius tangant in TAB. X.
B. Dico eos non habere idem centrum. fig. 15.
Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D,
à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad tan-
ctum B. At DC, secans utramque circumferen-
tiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur
centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, *b* *b* 15. def.
æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum cir-
culi BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æ-
qualis. Quare rectæ AD, & CD, *a* inter se *a* 1. prm.
erunt æquales, pars & totum, quod est absur-
dum. Si igitur duo circuli se se mutuo interius
tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

vij.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper major est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.

TAB. X. **fig. 16.** **I**N diametro AB, circuli ACDEB, cujus centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quocunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam esse GA, in qua est centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus distat; & eadem ratione GD, maiorem recta GE, atque ita de aliis lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad utrasque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, & maiora sunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc est, toti rectæ GA; erit & GA, major, quam GC. Eadem ratione major erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

Deinde, quoniam in triangulo EFG, latus EF, minus est duobus lateribus FG, GE. Est autem EF,

EF, ipsi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

Rursus, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, major est angulo GFD; erit basis GC, major base GD. Eadem ratione major erit GC, quam GE; Item major erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major est ea, quæ remotior.

Fiat jam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; erunt rectæ GE, GH, ex utraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, major quam GH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, ut ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

viii.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero ut libet:

libet : In cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa , quæ per centrum ducitur ; aliarum autem propinquior ei , quæ per centrum transit , remotiore semper major est ; In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa , quæ inter punctum , & diametrum interponitur ; aliarum autem ea , quæ propinquior est minimæ , remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt , ad utraq; partes minimæ , vel maximæ.

748. X. **fig. 17.** **EX** puncto A, extra circulum BCDEFI, cujus centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum transeat, aliæ vero AH, AG, AF, utcunque. Dico omnium esse maximam AI, quæ per centrum incedit : Deinde rectam AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior existit, majorem recta AG, quæ remotior est ab eadem AI : Et eadem ratione AG, majorem quam AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse : Deinde rectam AC, quæ vicinior est minimæ AB, minorem esse recta AD, remotiore ; Et eadem ratione, ipsam AD, minorem quam AE. Denique ex A, ad utraq; partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera AK, KH, trianguli AKH, a majora sunt recta AH ; Sunt autem rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc est, toti rectæ AI ; erit & AI, major, quam AH. Eadem ratione erit AI, major, quam AG, & quam AF. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima. Deinde,

Deinde, quoniam latera AK , KH , trianguli AKH , æqualia sunt lateribus AK , KG , trianguli AKG ; Et angulus totus AKH , major est angulo AKG ; *b* erit basis AH , base AG , major. Eadem ratione major erit AH , quam AF : Item AG , major, quam AF . Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major est linea remotiore.

Rursus, quia in triangulo ACK , recta AK , minor est duabus AC , CK ; si auferantur æquales BK , CK : remanebit adhuc AB , minor, quam AC . Simili ratione erit AB , minor, quam AD , & quam AE . Quare AB , omnium linearum extra circulum, quæ ex A , ducuntur, minima est.

Rursus, cum intra triangulum ADK , cadant duæ rectæ AC , CK , ab extremitatibus lateris AK ; *d* erunt AC , CK , minores, quam AD , DK . Sublatis igitur æqualibus CK , DK , remanebit adhuc AC , minor, quam AD . Pari ratione erit AC , minor, quam AE , item AD , minor quam AE . Quare linea propinquior minimæ lineæ AB , minor est, quam remotior ab eadem.

Postremo fiat angulo AKC , angulus AKL , æqualis, & ducatur recta AL . Quoniam igitur latera AK , KC , trianguli AKC , æqualia sunt lateribus AK , KL , trianguli AKL ; Sunt autem & anguli AKC , AKL , dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ AC , AL , ex utraque parte minimæ AB , vel maximæ AI , inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A , ducatur recta cadens ultra L , erit ipsa, cum sit remotior à minima major quam AL . Quod si cadat inter B , & L , erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam AL , ut ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

H

THEOR.

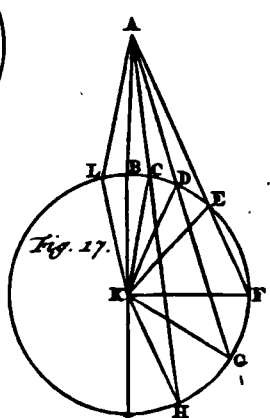
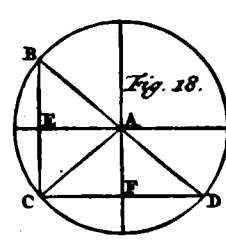
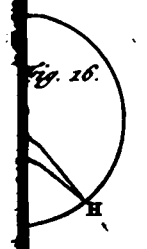
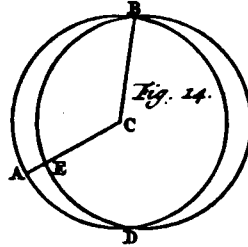
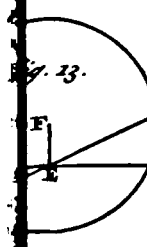
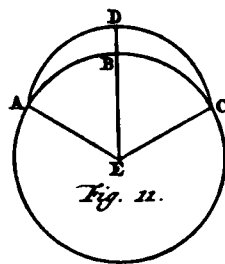
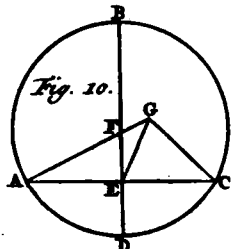
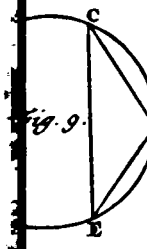
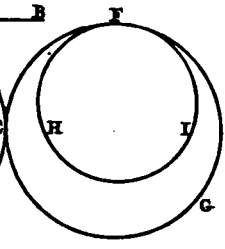
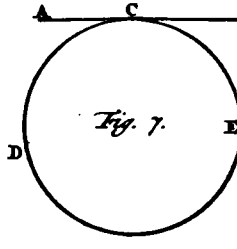
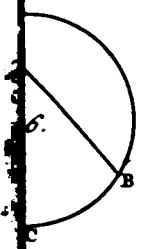
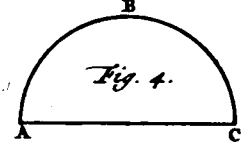
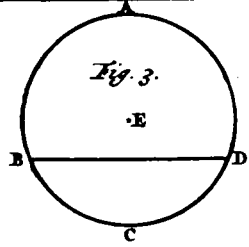
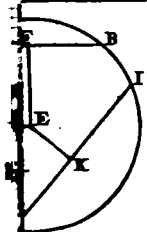
THEOR. 8. PROPOS. 9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

Fig. 18. **X.** A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus divisis bisariam in E, & F, *b 10. primi* ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales; *a 8. primi* erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ AE, AF, dividant rectas BC, CD, bisariam, & ad angulos rectos, transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. hujus lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

TAB. XI. Aliter. Si punctum A, non est centrum circuli, *fig 1.* sit centrum inventum E, ex quo per A, agatur diameter FG. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum est punctum A, *b 1. tertii.* a quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; *c 7. tertii.* erit recta AD, quæ propinquior est rectæ AG, per centrum E, ductæ major, quam recta AC, remotior ab AG, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter, A, centrum ponatur.

Quod si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum una trium æqualium



lium datarum, ut si dicantur æquales tres AB, AF, AC, ubi EA, coincidit cum AF; *a* erit *d* 7. *tertiū* AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & AC, quod est absurdum. Ponitur enim utrique æqualis.

THEOR. 9. PROPOS. 10. 2.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, TAB. XI. circulum AGBDHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ jungantur rectis AB, BD: quibus *a* bitariam divis in I, & K, *a* 10. *primū* *b* educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendicularares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bitariam, & ad angulos rectos; transibit utraque, ex corollario propof. 1. hujus lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se dividunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, *c* quod *c* 5. *tertiū* est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

Aliter. Secent se iidem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. *a* Inven- TAB. XI. tum autem sit I, centrum circuli AGBDHE, *fig.* 3. à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defn. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ rectæ æquales, *e* erit *e* 9. *tertiū* I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. *f* Quod est absurdum. *f* 5. *tertiū*

H 2

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. II.

Si duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adjuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TAB. XI. **Fig. 4.** Tangat circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diversum erit, cum duo circuli interius se tangentes, & non possint idem centrum habere. **a 6. tertii.** Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit fecet utrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, & majora sunt latere GA; **b 10. primi** Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ majores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, major, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC,) erit & FB, major, quam FD, pars quam totum, quod est absurdum.

Quod si quis velit contendere, F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, & majora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectæ FE, æqualis, (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, majores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, major, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC: (propterea quod G, ponitur esse centrum circuli ABC,) erit quoque GC, major, quam GE, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum majoris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG,

FG, extensa utrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli sese intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 12. xxi.

Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adjungitur, per contactum transibit.

Circuli duo ABC, DBE, tangant se exterius TAB. XL in B, & centrum circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centrīs F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, & majora sunt latere FG: Est autem recta BF, recta FC, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta GB, recta GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE,) erunt & rectæ FC, GE, majores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 12. PROPOS. 13. xlii.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, sive intus, sive extra tangat.

Tangant sese circuli ABCD, AEFC, intus, fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, quæ diversa erunt, per quæ recta GH, in utramque partem extendatur, quam

H 3

neccesse

lib. III. necesse est b cadere in contactus A , & C . Itaque cum G , sit centrum, & recta $AGHC$, diameter, dividetur $AGHC$, bifariam in puncto G . Simili ratione dividetur eadem AC , bifariam in H , quod est absurdum. Una enim recta in uno duntaxat puncto dividitur bifariam. Si namque GC , est dimidium totius AC , erit necessario HC , dimidio minor, eum sit pars dimidii GC .

TAB. XI. Quod si quis dicat rectam GH , extensam ad partes quidem G , cadere in contactum A ; At vero ad partes H , minime perungere ad contactum C , sed fecare utrumque circulum in I , & K , ut in 7ma figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in unum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo recte affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. utrique contactui conveniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse:) ducendæ erunt ex centrīs G , H , ad contactum C , rectæ GC , HC . Ponatur igitur primo G , centrum circuli $ABCD$: & H , centrum circuli $AECF$. Et quia in triangulo GHC , duo latera GH , HC , & majora sunt latere GC : Sunt autem rectæ GH , HC , æquales ipsi GK : (quod HC , HK , ex centro H , sint æquales, & GH , communis) & recta GC , rectæ GI ; (quod sint ex G , centro,) erit quoque recta GK , major quam GI , pars quam totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G , centrum circuli $AECF$; & H , centrum circuli $ABCD$. Quoniam igitur rectæ HG , GC , & majores sunt recta HC ; Est autem HC , æqualis rectæ HA : (cum utraque ducta sit ex centro H ,) erunt quoque HG , GC , majores recta HA . Quare dempta communi HG , erit GC , major, quam GA , quod est absurdum; cum utraque ex centro G , ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno.

TAB. XI. Tangant se jam circuli AB , CB , exterius in pluribus

pluribus punctis, quam uno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli CB, recta DE, & quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc est ipsi DE: *f* Sunt autem & majores, quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno. c12. *tertia*

Aliter. Si circuli AB, CB, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipsa intra unum circulorum, per 2. propos. hujus tertii lib. & ideo extra alium, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum. fao. *primi*

THEOR. 13. PROPOS. 14. xiv:

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

Sint in circulo ABCD, cujus centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & jungantur rectæ EA, ED. Secantur rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA, æquale est quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE; æqualia, ideoque & rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur TAB. XL
fig. 9.
a 3. *tertia*.
b 47. *primi*

per 4. defin. hujus lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

Rursus distant rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. hujus lib. æquales erunt; & dividantque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, *a* æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 15.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper major.

TAB. XI. **FIG. 10.** IN circulo ABCDEF, cujus centrum G, diameter sit AF; & rectæ ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, majorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, major quam GL, per 4. defin. hujus lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. hujus lib. *a* & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, *b* majores quidem sunt

sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, major, quam BE. Eadem ratione ostendetur AF, major omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, major est angulo CGD; erit recta BE, major quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE, major quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 15. PROPOS. 16. xvi.

Quæ ab extremitate diametri cujusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circumulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cujus centrum D, diameter TAB. XI.
sit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circumulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est AB; ducta DB, ærunt duo anguli DAB, DBA, æquales, a 5. primæ sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo b minores sunt duobus b 17. primæ rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circumulum: neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico jam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, secans circumferentiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1.

H 5

Quo-

- 217.*primi* Quoniam igitur in triangulo DAH, *c* duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc
- 219.*primi* est, recta illi æqualis DI, *d* major erit, quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, majorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentia, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum AC, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cum AE, angulum rectilineum acutum majorem angulo contingentia, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quodpiam respectu anguli contingentia. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, ut demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo semicirculi contento sub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille hujus sit pars: Angulus vero contingentia contentus sub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille hujus pars sit. Eademque ratio est de omnibus aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, ut demonstravimus. Angulus igitur semicirculi major est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentia, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cujusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circumulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circumulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circumulum attingit.

Quare si jubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circumulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circumulum tanget in A, ut demonstratum est. TAB. XI.
fig. 14.

PROBL. 2. PROPOS. 17. xvii.

A dato puncto rectam lineam ducere,
quæ datum tangat circumulum.

EX puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circumulum BC, cujus centrum D. Ducatur recta AD, secans circumulum BC, in B. Deinde centro D, intervallo autem DA, describatur circumulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, secans circumulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circumulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circumulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, utrumque utrique, ut constet ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, summi per ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circumulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circumulum BC, in C, quod faciendum erat. TAB. XI.
fig. 13.

THEOR.

xviii. THEOR. 16. PROPOS. 18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adjungatur recta quædem linea; quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

TAB. XI. fig. 14. **R**ecta linea AB, tangat in C, circulum CD, cujus centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare & major erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

Aliter. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum major sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum.

ci 6. tertii. Omnis siquidem angulus semicirculi & major est omni acuto.

xviiiij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAB. XI. fig. 15. **T**angat recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est

extra

LIBERTERTIUS. 13

extra CE, sit F, centrum; à quo ad C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 22

In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cujus centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, æqualis duobus angulis internis DAB, DBA: Quare BDE, duplus erit alterius eorum, ut anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregatum ex his duplum. Constat ergo propositum.

Deinde non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

Tertio recta AB, secet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur

TAB. XI.
fig. 16.

a 5. primi
b 32. primi

TAB. XI.
fig. 17.
c 32. primi

d 5. primi

TAB. XII.
fig. 1.

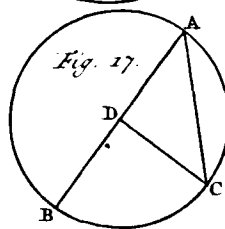
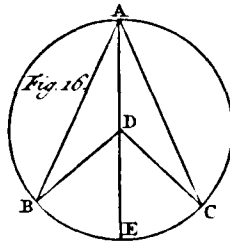
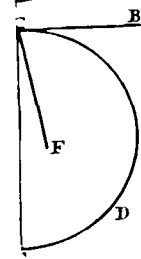
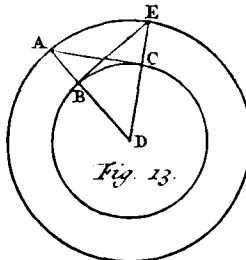
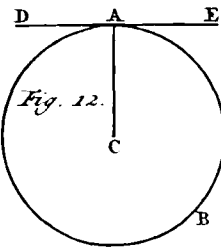
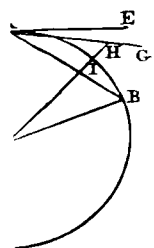
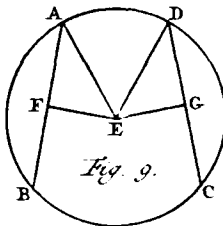
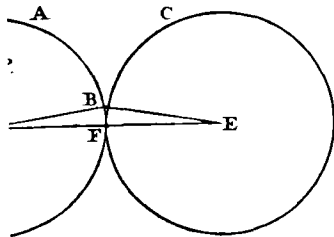
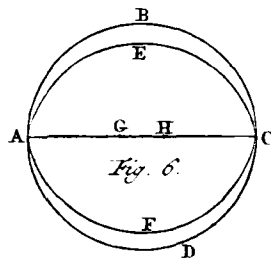
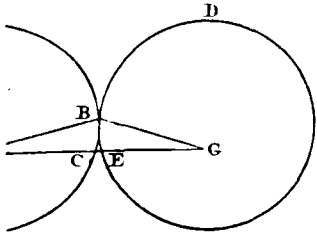
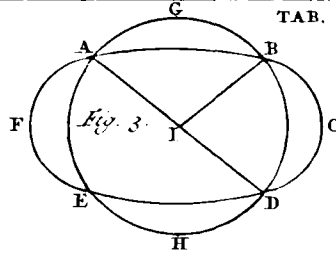
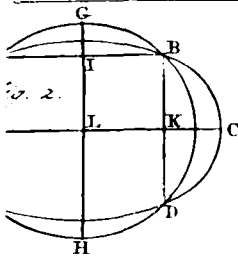
igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, ut ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, *210. prop.* duplus erit reliqui anguli BAC. Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.

xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inter se æquales.

TAB. XII. *fig. 2.* IN circulo ABCD, cujus centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo majus; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, *210. servii.* duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatae partes anguli E. *b 7. prop.* Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alii anguli existentes in segmento DABC, ostenduntur esse æquales.

TAB. XII. *fig. 3, 4.* Sit deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, *210. servii.* duplus est anguli DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli simul DEF, CEF, duorum angulorum simul DAF, CAF, dupli erunt, hoc est, totius anguli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF:



DEF : erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli DBC. *a* Quare *d 7. primi* æquales erunt anguli DAC, DBC.

Aliter. Secent se rectæ AC, BD, in F, & TAB. XII. connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi *fæ- f 32. primi* quales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, qui æquales sunt; erunt reliqui *g 15. primi* ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento majori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.

Aliter. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quodvis F, includentibus centrum E, ita ut tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum majus; jungantur quoque rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento majori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam majori FDABC, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 20. PROPOS. 22. *xxii*

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex adverso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cujus centrum E, inscriptum sit TAB. XII. quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, *a 22. primi* erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC,

ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. *b* Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. *c* Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I U M.

Anguli insistentes arcibus circulorum similibus sive ad centra, sive ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales sive ad centra, sive ad circumferentias insistant, similes sunt.

TAB. XII. Sint in circulis ABCD, EFGH, quorum centra
fig. 11. I, K, primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcibus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, *k* æquales erunt. *k* Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablati igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui *120. tertii* A, E, æquales. Quorum *120. tertii* leum dupli sunt anguli I, *in 6. prop.* K, merunt bi quoque æquales. Quod est propositum. Deinde sint tam anguli I, K, quam A, E, insistentes arcibus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, *sint*

*sint æquales: sint n autem tam duo anguli A, C, 011. 1011.
quam duo E, G, duobus rectis æquales, erunt &
reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin.
similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus
anguli æquales A, E, ad circumferentias insistant,
similes. Si vero anguli I, K, ad centra sint æqua-
les, oerunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, 0 7. 1011.
anguli A, E. Quare ut prins, arcus BCD, FGH,
similes sunt. Quod erat ostendendum.*

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxij.

Super eadem recta linea, duo segmenta
circularum similia, & inæqualia, non con-
stituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB, constitu- TAB. XII.
antur ad easdem partes duo segmenta similia, fig. 12,
& inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem,
quod se solum intersecant in punctis A, & B;
Circulus enim circulum non secant in pluribus a 10. 1011.
punctis, quam duobus. Unde peripheria unius
segmenti tota erit extra peripheriam alterius.
Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias
in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB.
Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit
per 10. defin. hujus lib. angulus ACB, æqualis
angulo ADB, externus interno: b quod est ab- b 16. 1011.
surdum. Non igitur segmenta sunt similia: Qua-
re super eadem recta linea, &c. Quod erat de-
monstrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiv.

Super æqualibus rectis lineis, similia cir-
culorum segmenta sunt inter se æqualia.

Super rectis lineis æqualibus AB, CD, consti- TAB. XII.
tuta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico fig. 13.
ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD,
I
cum

cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum AEB, segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia, quorum unum totum extra aliud cadit, quod est absurdum. *a* Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quam duobus nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. *b* *10. tertii.* Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

xxv. PROBL. 3. PROPOS. 25.

Circuli segmento dato, describere circum, cujus est segmentum.

TAB. XII. *16. 14.* Sit segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bisariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel major est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum major, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propof. 1. hujus lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, major, quam DB, cum *a* *7. tertii.* DB, perficiens diametrum *a* sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. *a* *18. primi.* Quare angulus DBA, *b* major erit angulo DAB) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cujus segmentum ABC.

ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. Quare bases EA, EC, æquales erunt; c 4. *primi* Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli d 6. *primi* EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, e ac propterea E, e 9. *terti* centrum erit circuli ABC, quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

Sit deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare f & anguli DAB, t 5. *primi* DBA, æquales erunt.) g Erunt igitur rectæ DA, g 6. *primi* DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quod recta AC, secta sit bisariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam, h erit D, centrum. h 9. *terti*

Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, TAB. XII. (quod quidem eveniet, si segmentum ABC, semicirculo majus exstiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. hujus lib. quod quidem intra segmentum, cum majus esse ponatur, existit; i erit DB, omnium, i 7. *terti* quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; major igitur erit quam DA, k ideoque angulus DAB, major angulo DBA,) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & fecet recta AE, rectam BD, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus DBA, major erat angulo DAB, ut constet, si recta ducatur EC. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cujus est segmentum. Quod facere oportebat.

xxvi. THEOR. 23. PROPOS. 26.

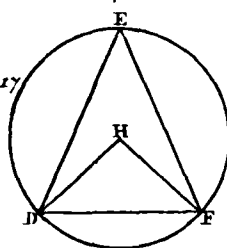
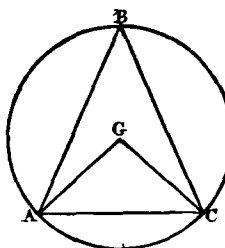
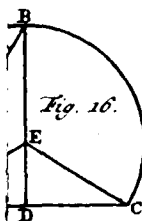
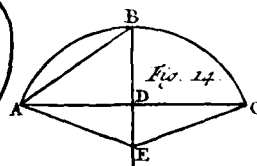
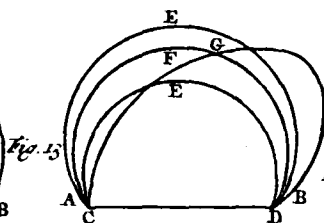
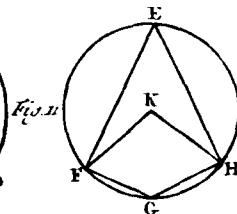
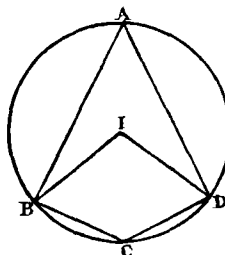
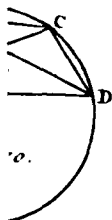
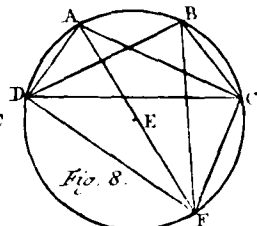
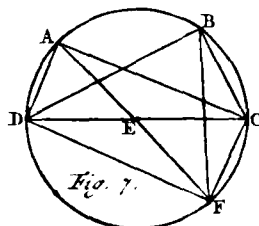
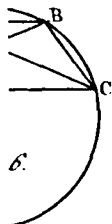
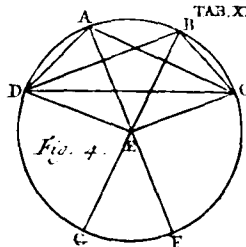
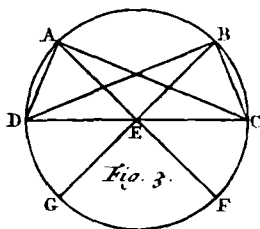
In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistant, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

TAB. XII.
fig. 17.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistant, sive super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur
a anguli B, & E, dimidii sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypothesi; b erunt bases AC, DF, æquales. Cum igitur segmenta similia ABC, DEF, sint
c super lineas æquales AC, DF, e erunt ipsa inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta AC, DF, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF. Quod est propositum.

Sint deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E: Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: d (cum enim anguli G, H, æquales sint, & quod sunt dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, ut prius rectæ AC, DF, æquales) e erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.



THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvii.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistant, sunt inter se æquales, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum *TAB. XIII*
centra G, H, insistant primum anguli ad cen- *fig. 1.*
tra AGC, & DHF, æqualibus peripheriis
AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF,
æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit an-
gulus G, major, fiatque angulus AGI, æqualis
angulo DHF. *a* Erunt igitur peripheriæ AI, DF, *a26. tertii*
æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis
ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI,
AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est
absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æ-
quales.

Insistant deinde eisdem peripheriis æqualibus
AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias: quos
rursus dico æquales esse. Nam si alter, ut ABC,
major est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI,
& eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, *b26. tertii*
ut prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales,
pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo
anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus
igitur circulis, anguli, qui æqualibus per-
ipheriis insistant, &c. Quod demonstrandum
erat.

SCHOLIUM.

*Si vero peripheria fuerint inæquales, insistet majori
major angulus. sive ad centrum, sive ad circumferentiam,
quam minori. Sit peripheria AC, major, quam periphe- TAB. XIII
ria DF. Dico angulum AGC, majorem esse angulo *fig. 2.*
DHF, & angulum ABC, majorem angulo DEF.
Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF,
I 3 ducan-*

134 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

ducanturque rectæ IG , IB , erant ut ostensum est, tam anguli ad centrum CGI , DHF , quam anguli ad circumferentiam CBI , DEF , æquales. Quare & angulus AGC , angulo DHF , & angulus ABC , angulo DEF , erit major.

Linea recta, qua ex medio puncto peripheria alicujus ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, qua peripheriam illam subten dit.

TABXIII In circulo ABC , cujus centrum D , ducatur ex fig. 3. A , puncto medio peripheriæ BAC , linea EF , tangens circulum. Dico EF , parallelam esse rectæ BC , arcum BAC , subtendenti. Ducta enim ex centro D , ad punctum contactus A , recta DA , secante rectam BC , in G , connexisque rectis DB , DC , h erunt anguli ADB , ADC , circumferentiis equalibus AB , AC , insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD , DC , trianguli BDG , lateribus CD , DC , 1. 4. primi trianguli CDG , equalia, utrumque utrique. 1. 1. tri- tur & anguli ad G , æquales sunt super bases GB , GC , ac propterea recti. Igitur & AGB , AGC , illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli 2. 1. primi GAE , GAF , recti. k quod DA , perpendicularis sit 1. 28. primi ad EF . 1 Ergo EF , BC , parallela sunt. Quod est propositum.

Angulus rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante majori. Es contra, angulus in centro quadranti insistent, rectus est; insistent vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante majori, obtusus.

TABXIII Rectus angulus ABC , insistat arcui AC , in cen- tro B , circuli $ACDE$. Dico arcum AC , quadrante esse, &c. Productis enim rectis AB , CB , ad D , E , erant quoque anguli ABE , CBD , recto ABC , deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non 1. 15. primi & angulus DBE , rectus; in eum equalis sit recto angulo

angulo ABC , ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B , æquales sunt, æspote recti: ac propterea nactus AC , CD , DE , EA , quibus na6smj8 insistant, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB , in B , constituitur angulum acutum, cadit in arcum AC : recta vero cum eadem AB , in B , continens angulum obtusum, cadit in arcum CD ; liquido constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum vero majori.

Sed insistas jam quadranti AC , angulus ABC , in centro B . Dico angulum ABC , esse rectum, &c. Producis enim rursus rectis AB , CB , ad D , E ; quoniam tam CAE , quam ACD , & AED , semicirculus est, estque AC , quadrans; erit tam AE , quam CD , quadrans quoque, ac proinde & DE , in semicirculo AED , quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC , CD , DE , EA , æquales, & ac 027smj8 proinde anguli ad centrum B , illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB , auferens minorem arcum quadrante AC , facit in centro B , cum AB , minorem angulum recto angulo ABC ; recta vero cum eadem AB , auferens maiorem arcum quadrante AC , constituit in centro B , angulum recto angulo ABC , maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; majori vero, obtusum. Quod est propositum.

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxviii.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem majori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus ABC , DEF , quorum TARXIII centra G , & H , sint rectæ æquales AC , DF . fig. 5. Dico maiorem peripheriam ABC , æqualem esse majori DEF , & minorem AC , minori DF . Ductis enim rectis AG , GC , DH , HF ; erunt latera

latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem a 8. primi & bases AC, DF, æquales. Igitur anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ b 6. tertii. AC, DF, quibus insistant, bæquales erunt; quæ ablatae ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

Quod si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet major lineæ, majorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli majoribus sermo habeatur, major lineæ auferet minorem TAB. XIII. peripheriam, quam minor. In circulis enim æqualibus fig. 6. ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta AC, major, quam DF. Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, majorem esse peripheriam DF: At peripheriam ABC, minorem peripheriam DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem basis cas. primi AC, major base DF. Igitur angulus AGC, major erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo ca 6. tertii. DHF, æqualis; eritque propterea & peripheria CI, peripheria DF, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, major, quam peripheria DF: Ideoque reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.

xxii. T H E O R. 26. P R O P O S. 29.

In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

TAB. XIII. I N circulis eisdem æqualibus ponantur æquales fig. 5. peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales.

æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, æquales, quod æqualibus peripheriis AC, DF, insistant. Igitur bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet majorem major linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis majoribus semicirculo loquamur, subtendet majorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, TABXIII. & H, sint peripheriæ semicirculo minores AC, DF; fig. 6. fitque AC, major, quam DF; Ac proinde ABC minor, quam DEF. Dico lineam AC, majorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, major angulo DHF, ex scholio propo. 27. bujus lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, erit basis AC, major base DF, &c.

PROBL. 4. PROPOS. 30. XXX.

Datam peripheriam bifariam secare.

Sit peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua divisa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur bases AB, CB, æquales erunt; Ac propterea peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.

xiii. THEOR. 27. PROPOS. 31.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus minor est recto.

TAXIII. **fig. 8.** **C**irculi enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturque in semicirculo angulus ABC, existeretque angulus BAC, in maiori segmento CAB. Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiori segmento, minorem recto, & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem. At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, a erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. b 32. primi Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

c 17. primi Quoniam vero in triangulo ABC, duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

Rursus quia in quadrilatero ABEC, intra circulum

culum descripto, *ad* duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto major; quod est tertium.

Amplius cum angulus rectus ABC, pars sit anguli segmenti majoris ABC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus segmenti majoris, recto major, quod est quartum.

Postremo, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quoque anguli recti FBC; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est, eo quod illi contriguus (qui producto latere extra triangulum sit) eisdem sit æqualis.

THEOR. 28. PROPOS. 32. xxxii.

Si circumulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producat quædam recta linea circumulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

T Angat recta AB, circumulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, dividens circumulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, recta CE, per centrum. *a* Erit igitur uterque angulus ACE, BCE, rectus: *b* Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo

TAB. XIII.
fig. 9.

a 18. *seriæ*
b 31. *seriæ*

angulo CGE ; & angulus BCE, angulo CDE , æqualis est.

TAB. XIII. Non transeat jam CE, recta per centrum. Du-
fig. 10. Sta igitur recta CF, per centrum, connectatur
c18. tertii. recta EF : eritque CF, perpendicularis ad AB,
d31. tertii. & angulus CEF, rectus ; ac propterea reliqui
 anguli ECF, EFC, æquales erunt uni recto, ut
 angulo recto ACF. Dempto ergo communi an-
 gulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE,
e21. tertii æqualis : Est autem angulo CFE, æqualis quo-
 que angulus CGE, cum uterque sit in segmento
 CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æ-
 qualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG,
f22. tertii. duo anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æ-
g13. primi quales : Sunt autem & duo anguli ACE, BCE,
 duobus rectis æquales ; si auferantur æquales an-
 guli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, an-
 gulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit
 aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod
 erat ostendendum.

xxxij. PROBL. 5. PROPOS. 33.

Super data recta linea describere segmen-
 tum circuli, quod capiat angulum æqualem
 dato angulo rectilineo.

TAB. XIII. Recta data sit AB, & datus angulus primum
fig. 11. rectus C. Oportet igitur super AB, seg-
 mentum describere, in quo angulus existens sit
 æqualis angulo recto dato C. Divisa AB, bifa-
 riam in D, describatur centro D, intervallo au-
 tem DA, vel DB, semicirculus AEB ; factumque
a31. tertii. erit, quod proponitur. Nam angulus AEB,
 in descripto semicirculo rectus est, ideoque æ-
 qualis angulo C, recto.

TAB. XIII. Sit deinde angulus datus acutus C. Ad pun-
fig. 12. ctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C,
 acuto ; & agatur ad DA, perpendicularis AE,
 quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB,
 æqualis angulus FBA, secetque BF, rectam AE,
 in

in F. *b* Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. *b 6. primæ*
 Quare si centro F, & intervallo FA, circulus
 describitur AGB, transibit is per B. Dico igitur
 angulum in segmento AGB, quod descriptum
 est super AB, esse æqualem angulo C. Fiat
 enim angulus in dicto segmento AGB. Quia
 igitur AE, per centrum F, transit, & ei perpen-
 dicularis est DA, tanget DA, recta circulum in
 A, per coroll. propos. 16. hujus lib. Quapropter
 angulus DAB, hoc est, angulus datus C, *c 32. tertiæ*
 æqualis erit angulo G, in segmento alterno
 AGB.

Sit tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus
 angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA,
 perpendicularis AE, quæ supra AB, cadet. Re-
 liqua omnia fiant, ut prius, descriptumque erit
 super AB, segmentum AKB, in quo angulus
 K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam
 angulus IAB, hoc est, angulus datus H, *d æ- d 32. tertiæ*
 qualis est angulo K, in alterno segmento AKB.
 Eadem enim est demonstratio. Itaque super data
 recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod
 efficiendum erat.

P R O B L. 6. P R O P O S. 34. xxxiv.

A dato circulo segmentum abscindere ca-
 piens angulum æqualem dato angulo rectili-
 neo.

Datus circulus sit ABC, à quo auferre oportet
 segmentum, in quo angulus existens *TAB. XIII*
 æqualis sit dato angulo D. Ducatur recta EF, *fig. 13.*
 tangens circulum in A. Fiat deinde angulus *a 17. tertiæ*
 FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur an-
 gulum ACB, in segmento ablato ACB, æqua-
 lem esse dato angulo D. Est enim *b 32. tertiæ*
 FAB, æqualis angulo C, in alterno segmento
 ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit
 æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C,
 angulo D, æqualis. A dato ergo circulo absci-
 dimus

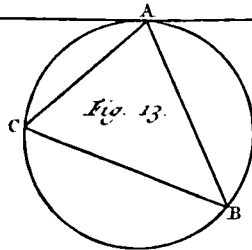
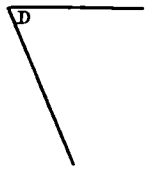
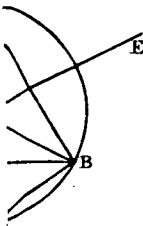
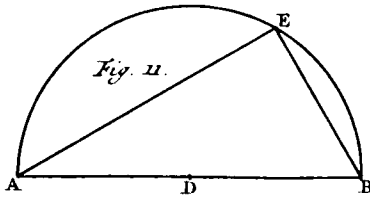
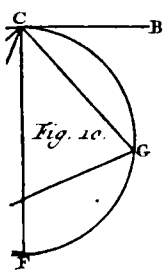
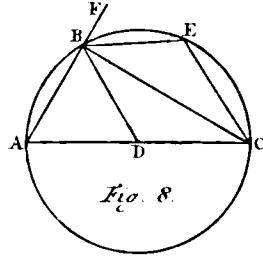
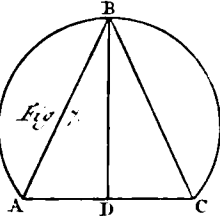
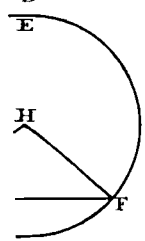
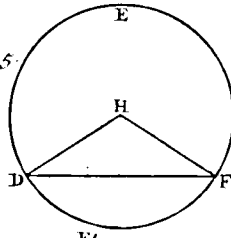
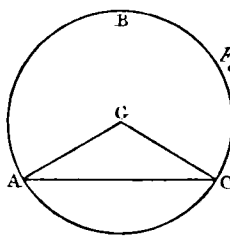
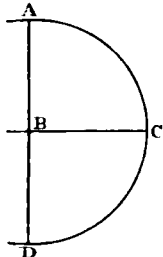
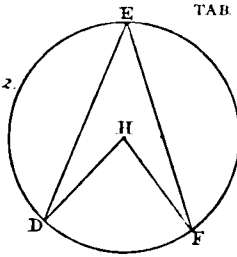
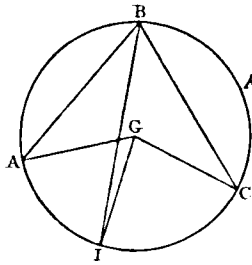
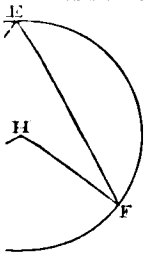
dimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.

XXXV. THEOR. 29. PROPOS. 35.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

TAB. XIV. In circulo ACBD, secent se mutuo rectæ
fig. 1. AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Transeat primum utraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus unius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex iis, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

fig. 2. Transeat deinde CD, sola per centrum F, dividatque primum rectam AB, bisariam, & ac propterea ad angulos rectos, conjungaturque recta BF.
a 3. sec. Quoniam igitur CD, divisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E, *b* erit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB, cum rectæ FD, FB, sint æquales: Est autem
b 5. sec. quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB, cum AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex iis, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus. Divi-





Dividat jam CD, transiens per centrum rectam *fig. 3. 4.*
 AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam
 in G, ducanturque rectæ FG, FB, & eritque FG, *d 3. tertü.*
 perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectangu-
 lum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ FE,
 æquale est quadrato rectæ FD, hoc est, qua- *e 9. sec.*
 drato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE,
 æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadra- *f 47. prim.*
 tum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG,
 GB: erit quoque rectangulum sub CE, ED,
 una cum quadratis rectarum FG, GE, æquale
 quadratis rectarum FG, GB. Dempso ergo
 communi quadrato rectæ FG, remanebit rectan-
 gulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ
 GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam
 rectangulum sub AE, EB, una cum quadrato
 rectæ GE, *g 5. sec.* æquale est eidem quadrato rectæ
 GB: propterea quod recta AB, secta est bifariam
 in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum
 sub CE, ED, una cum quadrato rectæ GE, æ-
 quale est rectangulo sub AE, EB, una cum
 quadrato ejusdem rectæ GE. Quare ablato com-
 muni quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum
 sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB..
 Quod est propositum.

Tertio neutra per centrum transeat, sive una *fig. 5. 6.*
 illarum bifariam dividatur, sive neutra. Ducatur
 per centrum F, & punctum sectionis E, recta
 GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum
 sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE,
 EH: sive AB, dividatur bifariam, sive non: Item
 rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque
 eidem rectangulo sub GE, EH; sive CD, secta
 sit bifariam, sive non; Erit rectangulum sub
 AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED, quod
 est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ
 lineæ sese mutuo secant, &c. Quod demon-
 strandum erat.

THEOR.

xxxvi. THEOR. 30. PROPOS. 36.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ linæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

TAB. XIV. Extra circulum ABC, punctum sumatur D, *fig. 7.*
a 17. tertii. à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primum recta *b 18. tertii.* DA, per centrum E, & jungatur recta EB, *b* quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, divisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum *c 6. sec.* & continuum CD, *c* erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE: *d 47. primi.* Est autem quadratum rectæ DE, *d* æquale quadratis rectarum EB, BD. Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale. Quod est propositum.

TAB. XIV. Non transeat jam DA, secans per centrum E. *fig. 8, 9.*
e 18. tertii. Divisa ergo AC, bisariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF; *e* eritque EB, ad BD, perpendicularis; *f* & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, divisa est per æqualia in F, & ei addita recta *g 6. sec.* CD, *g* erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF,

DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, *b47. primi*
 æquale quadratum rectæ EC, ideoque & qua- *i 47. primi*
 dratum rectæ EB; Et i quadratis rectarum DF, *b47. primi*
 FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare
 rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato
 rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum
 igitur quadratum rectæ DE, æquale sit quadra- *b47. primi*
 tis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub
 DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale
 quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo com-
 muni quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum
 sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod
 est propositum. Si igitur extra circulum sumatur
 punctum aliquod, &c. Quod erat demonstnan-
 dum.

COROLLARIUM. I.

Hinc manifestum est, si à puncto quovis extra circulo assumpto plurius lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus inter se esse æqualia. Ut si ex A, *TAB. XII.*
 ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in *fig. 10.*
 F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub
 AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam
 ducta AB, tangente circulum, terunt quadrato rectæ *136. tertii.*
 AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se
 omnia æqualia erunt.

COROLLARIUM. II.

Constat etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum: *TAB. XII.*
 quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, *fig. 10.*
 quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ
 AB, quam quadratum rectæ AC, æquale rectangulo *m36. tertii.*
 sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter
 se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales
 quoque erunt.

COROLLARIUM. III.

Perfpicuum quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE, erit angulus ADE, maior angulo ABE.

Aliter. Si tertia AD, circulum etiam tangat; erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, ut ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum secet in F, perit AD, cum sit propinquior minimæ AF, minor, quam AB, quæ à minima AF, remotior est. Vel sic. Si AB, AD, sunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipsis AD, DE, æquales, quod est absurdum. Sunt enim majores AB, BE. Solum igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

COROLLARIUM. IV.

Illud denique constat etiam, si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in convexam peripheriam incendant, & earum una circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Ut si duæ rectæ AB, AC, sint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, eruntque ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod est absurdum.

Aliter. Ponantur duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & basis DE, communis. Igitur anguli B, F, æquales erunt: Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit, atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propof. 16. hujus lib.

THEOR.

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvij.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum fecet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & convexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXtra circulum ABC, cujus centrum E, punctum sumatur D, a quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidens in circulum ejusque punctum B; sitque rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. *a* Ducatur enim DF, tangens circulum, & jungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans non transeat per centrum E, jungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo sub DA, DC, æquale est quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo sub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & basis DE, communis, erunt anguli DFE, DBE, æquales. Atqui angulus DFE, rectus est, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. hujus lib. DB, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

TABXIV.
fig. 13.

a 17. tertii.

fig. 14.

b 36. tertii.

c 8. primi
d 18. tertii.



E U C L I D I S

E L E M E N T U M

Q U A R T U M.

D E F I N I T I O. I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera ejus, in qua inscribitur, tangunt.



Gens Euclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circumulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris: Si igitur anguli

TAB. XIV. D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera
fig. 15. AB, AC, BC, trianguli externi ABC; dicetur
triangulum DEF, in triangulo ABC, esse inscrip-
fig. 16. tum. At quoniam angulus M, trianguli KLM,
non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur
triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI,
quamvis totum illud sit intra hoc, duoque anguli
K, L, tangant duo latera GH, GI.

DEFI-

DEFINITIO. II.

Similiter & figura circum figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumferibitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E Contrario dicetur triangulum ABC , describi **TAB. IX.** circa triangulum DEF ; quoniam singula latera **fig. 15. 16.** illius singulos hujus angulos tangunt; At triangulum GHI , non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM , propterea quod latus illius HI , angulum hujus M , non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

DEFINITIO. III.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

UT si tangant anguli A, B, C , trianguli ABC , **TAB. X.** peripheriam circuli ABC , dicetur triangulum **fig. 1.** in circulo esse inscriptum. Quod si vel unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

DEFINITIO. IV.

Figura vero rectilinea circa circumulum describi dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero si latera trianguli ABC , singula tangant **TAB. X.** peripheriam circuli DEF ; dicetur triangulum **fig. 2.** circa circumulum esse descriptum.

D E F I N I T I O. V.

Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ, cui inscribitur.

D E F I N I T I O. VI.

Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit ejus figuræ, quam circum scribit, angulos.

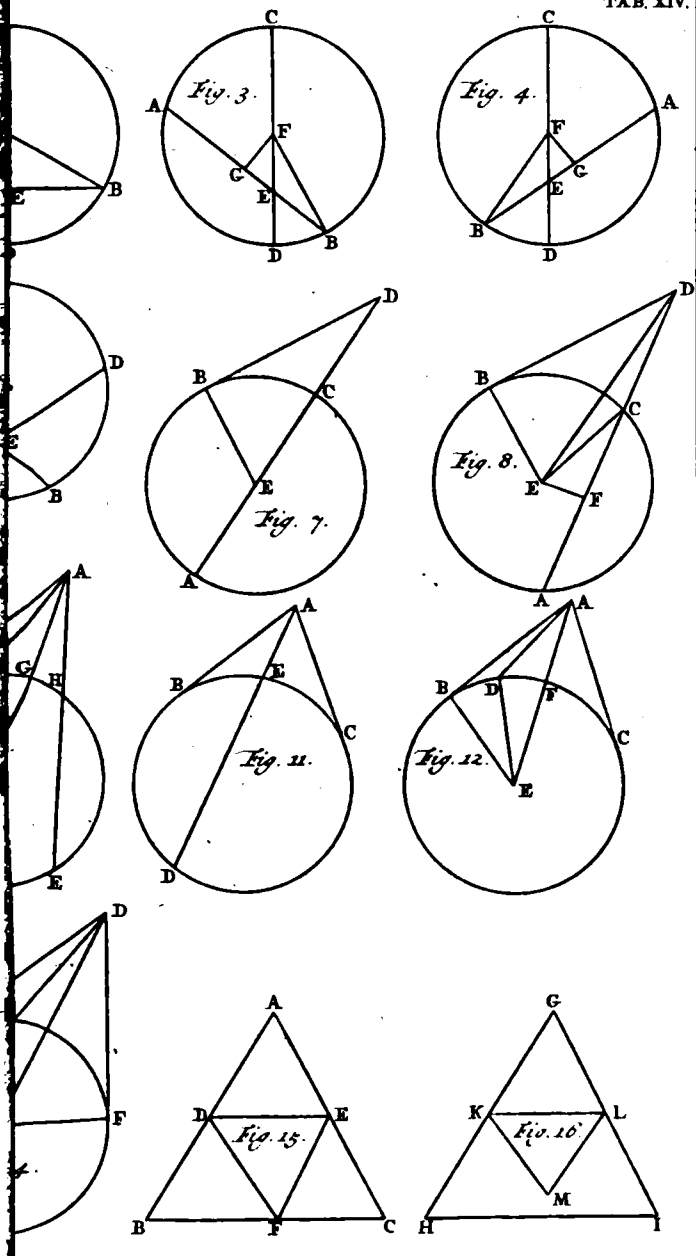
TAB. X^p. fig. 2, 1. **V**icissim dicetur circulus DEF, inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, descriptus esse circa triangulum ABC. Idem judicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

D E F I N I T I O. VII.

Recta linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.

TAB. XV. fig. 3. **U**T recta linea AB, quoniam ejus extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicitur: Non autem recta E, vel CD; quia hac alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

PROBL.



PROBL. I. PROPOS. I. ij.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit major.

IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea æ- *TAB. XV.*
qualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen major *fig. 4.*
non sit diametro circuli dati. Cum enim diame-
ter æ sit omnium rectarum in circulo maxima, si *a 15. tertii.*
data recta diametro major foret, non posset in
circulo aptari illi una æqualis. Ducatur ergo
diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis
fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si
vero D, minor fuerit diametro, abscindatur BE, *b 3. primi*
æqualis ipsi D, & centro B, intervallo autem
BE, circulus describatur EA, secans circum-
ulum ABC, in A, ducta igitur recta BA, erit ea ap-
tata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D.
Est enim BA, æqualis ipsi BE, & D, æqualis *c 15. def. primi.*
eidem BE, per constructionem. Quare AB, &
D, inter se æquales quoque erunt. In dato er-
go circulo rectam lineam accommodavimus, &c.
Quod faciendum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 2. ij.

In dato circulo triangulum describere
dato triangulo æquiangulum.

SIt in circulo ABC, dato describendum trian- *TAB. XV.*
gulum æquiangulum triangulo dato cuicun- *fig. 5.*
que DEF. Ducatur recta GH, tangens circum-
ulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqua-
lis; & angulus HAC, angulo E, atque exten-
dantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam us-
que in puncta B, & C, junganturque recta
BC. (Non cadet autem recta AC, in rectam
AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quod
K 4 anguli

a 17. primi anguli GAB, HAC, hoc est anguli F, E, & minores sunt duobus rectis. *b 13. primi* Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in AB, caderet; vel majores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet.) Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim *c 32. tertii.* angulus C, æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, *d 32. tertii.* æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF, *e 32. primi* erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

iiij. PROBL. 3. PROPOS. 3.

Circa datum circum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

TAB. XV. *fig 9. 10.* **C**irca circum datum ABC, describendum fit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF. Producto latere EF, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta utcunque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares KL, LM, MK, quæ circum tangunt in punctis A, B, C, per coroll. propof. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores, ac proinde AK, CK, *d 13. primi.* coibunt, &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet supra rectas AI, CI, quod hæc angulum constituent in I. Cum enim spatium circa I, æquale

æquale sit quatuor rectis ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F, sint-
 que duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æ-
 quale: Sed *a*hi minores sunt duobus rectis. Igi-
 tur & spatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC. Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, unam rectam lineam constituerent; vel majus duobus rectis, si recta AI, producta, caderet supra IC. Cadit igitur necessario AI, producta infra CI, atque idcirco angulus fiet AIC, ad partes K, & ducta recta AC, faciet cum AK, CK, duos angulos minores duobus rectis, & ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non
 secus ostendimus, AL, BL, coire in L, & CM, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales sunt quatuor rectis, ut ad 32. propof. lib. 1. ostensum fuit, & anguli IAL, IBL, sunt duo recti, erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur *b*& anguli DEG, DEF, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo DFE. Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL. 4. PROPOS. 4. iv.

In dato triangulo circulum inscribere.

Si describendus circulus in dato triangulo ABC. TAB. XV.
 Divisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam
 K 5 rectis

b 9. *primi* rectis BD, CD *b*, quæ intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendicularares DE, DF, DG *c*. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt duobus angulis DBF, DFB, trianguli DBF, uterque utrique; & latus BD, commune; æerunt quoque latera DE, DF, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad intervallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G *d*; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propof. 16. lib. 3. quod latera perpendiculararia sunt ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

v. PROBL. 5. PROPOS. 5.

Circa datum triangulum circulum describere.

TAB. XV. *fig. 11, 13, 14.* Sit circulus describendus circa datum triangulum ABC. Dividantur duo latera AC, AB, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamvis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quævis latera bifariam possunt secari) bifariam in D, & E *e*, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; æerunt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad intervallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa

Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in majori segmento circuli: si vero sit in latere BC, angulum BAC, ei lateri oppositum, esse rectum quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulum oppositum BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

Contra vero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum calere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, sive absurdum. Quia si in acutangulo caderet centrum in unum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectangulo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra, esset angulus oppositus obtusus. Denique si in obtusangulo caderet in unum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte hujus coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothesis.

PROBL. 6. PROPOS. 6. vi.

In dato circulo quadratum describere.

Sit in dato circulo ABCD, cujus centrum E, TAB. XV
in scribendum quadratum. Ducantur duæ diagonales AC, BD, secantes se ad angulos rectos in centro E, & jungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; ærunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB.

196 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod brevius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; *b16.terti.* erunt quatuor arcus, quibus insunt, æquales: *c29.terti.* ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt. *d31.terti.* Sunt autem *d* & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit ABCD, *e19.def.* proptereaque in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum. *primi.*

vij. P R O B L. 7. P R O P O S. 7.

Circa datum circulum quadratum describere.

TAB. XV
fig. 16. **S**It circa datum circulum ABCD, cujus centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. *d13.pron.* Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FEB, sint recti, *a28.primi* erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. *b30.primi* Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur *c34.primi* parallelogrammum est ACHF, erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse: & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH,

FGIH, quadratum erit; cujus quidem latera circulum tangunt, per corollarium propof. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8. viij.

In dato quadrato circulum describere.

SIt in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Divisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales & parallelæ. Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semiffes æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad intervallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propof. 16. lib. 3. b quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat. TAB. XV. fig. 17. a 33. primi b 19. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9. ix.

Circa datum quadratum circulum describere.

SIt describendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sunt & erunt anguli ABD, ADB, æquales: TAB. XV. fig. 18. a 5. primi

b32. *primus* les : Est autem angulus BAD, rectus. Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; c 6. *primus* erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, intervallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

S C H O L I U M.

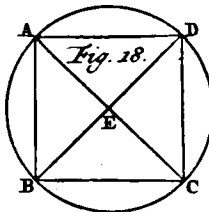
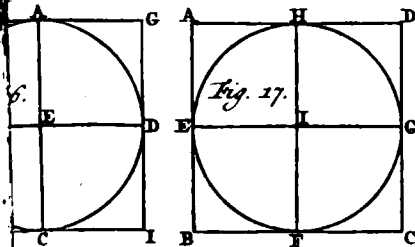
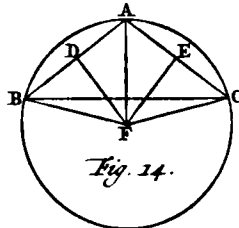
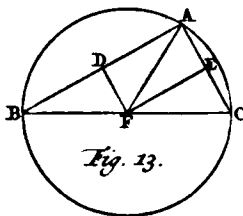
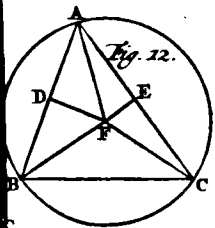
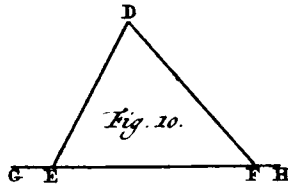
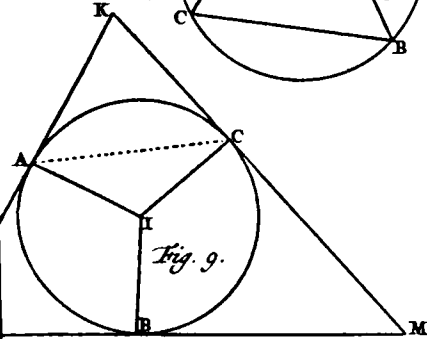
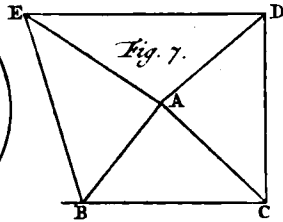
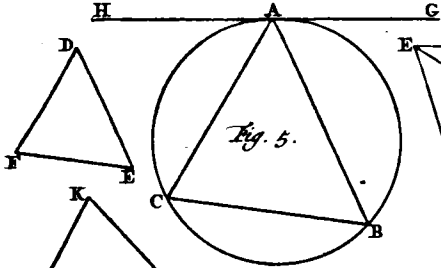
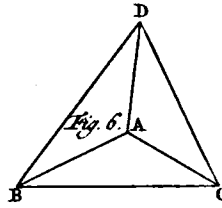
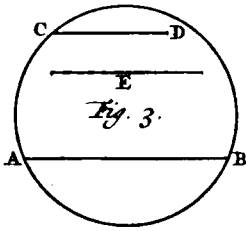
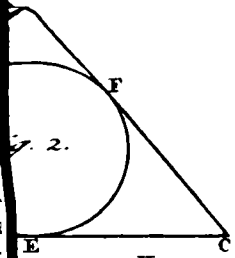
TAB. XVI. Quod si circa datum circulum EFGH, describatur fig. 1. quadratum ABCD, & in eodem circulo aliud quadratum EFGH, inscribatur, erit quadratum circumscriptum ABCD, quadrati inscripti HEFG, duplum. Quoniam enim latus AB, quadrati circumscripti æquale est diametro HF, circuli, ut ex 7. propof. hujus lib. constat, hoc est, diametro HF, quadrati inscripti HEFG: quadratum vero diametri HF, duplum est quadrati HEFG, cujus est diameter, ut ad 47. propof. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.

x.

P R O B L. IO. P R O P O S. IO.

Isofceles triangulum constituere; quod habeat utrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum duplum reliqui.

TAB. XVI. SUMatur quævis recta linea, AB, quæ fig. 2. a dividatur in C, ita ut rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, intervallo vero AB, circulus describatur, in quo accommodetur recta BD, æqualis ipsi AC, jungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isofceles. Dico utrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A.



A. Ducta enim recta CD, & describatur circa c5. *quart.* triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD, & recta AB, secatur circulum DCA, d tanget recta BD, eundem circulum d37. *tertiu.* DCA, in D. Quare angulus BDC, e æqualis c32. *tertiu.* est angulo A, in alterno segmento CAD. Ad-
dito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA : Sed his eisdem fæqualis est etiam angulus exter- f32. *primi*
nus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est, angulo ABD, g cum g5. *primi*
ABD, ADB, æquales sint; ac propterea h rectæ h6. *primi*
CD, BD, æquales erunt: Est autem BD, æ-
qualis posita rectæ AC. Igitur & CD, ipsi CA,
æqualis erit; i ac propterea anguli CAD, CDA, i5. *primi*
æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis
ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus
erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare
& angulus ABD, duplus erit ejusdem anguli A.
Isoceles ergo Triangulum constituimus, habens,
&c. quod erat efficiendum.

COROLLARIUM.

Quoniam vero tres anguli trianguli ABD, k æquales k32. *primi*
sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis eorum
rectorum: perspicuum est, angulum A, esse quintam
partem duorum rectorum; utrumlibet autem B, D, duas
quintas partes. Item A, esse duas quintas partes unius
recti, & utrumvis B, D, quatuor quintas partes; quan-
doquidem omnes tres l æquales sunt duobus rectis, hoc l32. *primi*
est, decem quintis unius recti.

PROBL. II. PROPOS. II. xi.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum,
& æquiangulum inscribere.

Sit in dato circulo ABCDE, inscribendum pen- TAB. XVI.
tagonum æquilaterum, & æquiangulum. fig. 3.
a Con-

- a10. quart.** *a* Construat^r triangulum Iſoſceles, FGH, ita ut uterque angulorum G, H, duplus ſit reliqui F, & in circulo *b* inſcribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & uterque angulorum ACD, ADC, *c* biſariam dividatur rectis CE, DB, atque rectæ jungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum ACD, ADC, duplus ſit anguli CAD, & diviſus biſariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. *d* Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, ſuper quos aſcenderunt, atque
- e29. tertii.** idcirco *e* & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt, æquilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. Rurſus quia arcus AB, ED, æquales ſunt; addito communi BCD, ſient æquales
- f27. tertii.** ABCD, EDCB. *f* Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus inſiſtentes, æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſinguli ex ternis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod faciendum erat.

C O R O L L A R I U M.

- Siquitur hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas unius recti *g* Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales ſint, utpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, inſiſtant, ſit autem CAD, per coroll. præcedentis propoſ. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ unius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum, vel ſex quintæ unius recti.

PROBL.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIt circa datum circulum ABCDE, describen- *TAB. XVI.*
 dum pentagonum æquilaterum, & æquiangu- *fig. 4*
 lum. *a* Inscribatur in eo pentagonum æquilate- *a. u. quart.*
 rum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro
 F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad
 quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK,
 KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum
 enim anguli GAE, GEA, duobus sint rectis
 minores, partes nimirum angulorum rectorum
 FAG, FEG; *b* coibunt rectæ AG, EG, ad par- *b. 13. prim.*
 tes G, & sic de aliis. Et quia ipsæ tangunt
 circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit de-
 scriptum pentagonum GHIKL, circa circulum;
 quod dico esse æquilaterum atque æquiangulum.
 Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL,
 erunt quadrato rectæ FH, *c* æqualia tam quadrata *c. 47. prim.*
 rectorum FA, AH, quam rectorum FB, BH.
 Quare quadrata rectorum FA, AH, æqualia
 erunt quadratis rectorum FB, BH. Demp-
 titur quadratis æqualibus rectorum æqualium
 FA, FB, remanebunt quadrata rectorum AH,
 BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æqua-
 les erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2.
 propos. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem
 puncto H, ducantur circulum tangentes in A,
 & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli
 AFH, æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli
 BFH. Est autem & basis AH, basi BH, æqua-
 lis, ut ostensum est; *d* erunt anguli AFH, BFH, *d. 8. prim.*
 æquales. Igitur *e* & anguli AHF, BHF. Du- *e. 14. prim.*
 plus igitur est angulus AFB, anguli BFH; &
 angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo
 ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli
 BFI, & angulum BIC, anguli BIF. Cum igitur
 anguli AFB, BFC, sint æquales, quod in- *f. 27. tert.*
 L. stant

28. 2^o 3^o 4^o 5^o 6^o 7^o 8^o 9^o 10^o 11^o 12^o 13^o 14^o 15^o 16^o 17^o 18^o 19^o 20^o 21^o 22^o 23^o 24^o 25^o 26^o 27^o 28^o 29^o 30^o 31^o 32^o 33^o 34^o 35^o 36^o 37^o 38^o 39^o 40^o 41^o 42^o 43^o 44^o 45^o 46^o 47^o 48^o 49^o 50^o 51^o 52^o 53^o 54^o 55^o 56^o 57^o 58^o 59^o 60^o 61^o 62^o 63^o 64^o 65^o 66^o 67^o 68^o 69^o 70^o 71^o 72^o 73^o 74^o 75^o 76^o 77^o 78^o 79^o 80^o 81^o 82^o 83^o 84^o 85^o 86^o 87^o 88^o 89^o 90^o 91^o 92^o 93^o 94^o 95^o 96^o 97^o 98^o 99^o 100^o

C O R O L L A R I U M.

Sequitur ex huius problematis demonstratione ; si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excutitur linearum perpendiculares : has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosque conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, ut in pentagono factum est : quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

In

S C H O L I U M.

In figura aequilatera, & equiangulari, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quovis angulo demissa secans oppositum latus bisariam, dividit quoque angulum bisariam; Et contra, recta linea dividens angulum bisariam, secat quoque latus oppositum bisariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quovis angulo ad oppositum angulum ducta secat utrumque angulum bisariam: Et contra, recta linea secans quemvis angulum bisariam cadit in oppositum angulum, eumque bisariam quoque dividit.

Sit primum figura aequilatera, equiangularque imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa TABXV recta AH, secet latus oppositum DE, bisariam. fig. 5. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bisariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, equalia sunt angulosque continent aequales, ex hypothesis; ierunt & bases AC, AF, i 4. primae aequales, & tam anguli BAC, GAF, quam BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur aequales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, aequales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, equalia sunt, continentque angulos aequales, ut ostensum est; kerant & k 4. primae bases AD, AE, aequales, & tam anguli CAD, FAE, quam CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum perventum sit. Ubi quia rursus toti anguli CDE, FED, aequales sunt; erunt quoque reliqui ADH, AEH, aequales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, equalia sint, angulosque aequales contineant, lerant etiam anguli DAH, EAH, aequales. Quo- l 4. primae circa cum quovis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint aequales, singuli singulis; erit quoque totus angulus BAH,

toti angulo GAH equalis; ac proinde angulus BAG , sectus erit bisariam. Quod est propositum.

Sed jam recta AH , secet angulum BAG , bisariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE , bisariam. Si enim dicatur latus DE , non secari bisariam, si ex A , ducatur alia recta secans DE , bisariam, secabit eadem & angulum BAG , bisariam, ut jam ostendimus. Duae igitur rectæ eundem angulum BAG , secabunt bisariam, quod est absurdum, cum una medietas major esset quam altera. Recta ergo AH , secans angulum BAG , bisariam, secat quoque latus DE , bisariam. Quod est propositum.

Sit deinde figura æquilatera, & æquiangula pentagonum laterum $ABCDEFGH$, & ex angulo A , ad fig. 6. angulum oppositum E , ducatur recta AE . Dico rectam AE , secare tam angulum BAH , quam DEF , bisariam. Ductis enim ex A , ad omnes angulos non proximos rectis, demonstrabimus, ut in antecedente figura, quovis angulos BAC , CAD , DAE , totidem angulis HAG , GAF , FAE , esse æquales singulos singulis; ideoque totum angulum BAE , toti angulo HAE , æqualem esse, nec non & angulum DEA , FEA , esse æqualem. Uterque igitur angulus BAH , DEF , secatur bisariam. Quod est propositum.

Sed jam recta EA , secet angulum BAH , bisariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E , eumque dividere bisariam. Si enim non dicatur cadere in E , si ex A , ad E , ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH , bisariam, ut jam ostendimus. Duae igitur rectæ eundem angulum BAH , bisariam secabunt, quod est absurdum. Recta ergo AE , secans angulum BAH , bisariam, cadit in E , secatque propterea, ut demonstratum est proxime, angulum DEF , bisariam quoque. Quod est propositum.

xij.

P R O B L. 13. P R O P O S. 13.

In dato pentagono æquilatero & æqui-
angulo circulum inscribere.

TAB. XVI. **S**it inscribendus circulus in dato pentagono
fig. 7. $ABCDE$. Dividantur duo ejus anguli BAE ,
 ABC ,

ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ a 9. primi
 cocant in F. Cum enim ex scholio præcedentis
 propositionis rectæ AF, BF, secant opposita latera
 CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas AF,
 BF, se mutuo intra pentagonum secare, prius-
 quam rectis CD, DE, occurrant. Connectan-
 tur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur
 latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt la-
 teribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex
 constructione, & anguli ipsis contenti æquales
 ABF, CBF, erunt bases AF, CF, & anguli b 4. primi
 BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE,
 BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit
 anguli BAE, per constructionem; erit & BCF,
 dimidium anguli BCD. Divisus est ergo angu-
 lus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus,
 reliquos duos angulos CDE, DEA, divisos esse
 bifariam. Ducantur jam ex F, ad singula Pen-
 tagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK,
 FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG,
 trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis,
 FLA, FAL, trianguli FAL; estque latus AF,
 subtensum uni æqualium angulorum commune
 erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque c 16. primi
 ostenduntur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK,
 æquales cuilibet istarum. Circulus igitur de-
 scriptus ex centro F, & intervallo FG, transibit
 per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero
 latera pentagoni circulum hunc tangunt, per
 coroll. propos. 16: lib. 3. eo quod angulos re-
 ctos faciant cum semidiametris FG, FH, &c.
 erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod
 faciendum erat.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Circa datum pentagonum æquilaterum,
 & æquiangulum circulum describere.

Sit circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, TAB. XVI.
 & æquiangulum, circulus describendus. Di- fig. 8.
 L 3 visis

b 9. primi visis duobus angulis BAE, ABC, bifariam *b* rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, ut in antecedente propos. demonstratum est; & conjunctis rectis FC, FD, FE, ostendamus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA. sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidii inter se æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt
a 6. primi FAB, FBA; *a* erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, intervallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

xv. PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere.

TAB. VII.
fig. 9. **S**It in dato circulo ABCDEF, cujus centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, intervallo vero DG, qui secet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli: erunt & rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare *a* tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se
a 5. primi erunt: qui cum *b* æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum: Sunt autem
b 31. primi tres

tres anguli CGD, DGE, EGF, æquales duo- c 13. *primi*
 bus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia
 quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo
 tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æqua-
 les; quibus cum etiam æquales sint ad verticem d 15. *primi*
 anguli FGA, AGB, BGC; erunt sex anguli ad
 centrum G, æquales. Quare circumferentiæ, e 26. *tertiæ*
 quibus insistant, fac propterea rectæ AB, BC, f 29. *tertiæ*
 CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter
 æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus
 quia circumferentia BC, æqualis est circumfe-
 rentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt
 circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. An-
 guli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, æquales g 27. *tertiæ*
 erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos
 BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet
 istorum, quia nimirum quilibet insitit arcui, com-
 posito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum
 ex tot, quot latera continet figura inscripta,
 demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes
 æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum
 quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo
 circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum
 descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, Hexagoni latus æquale esse se-
 midiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale
 est semidiametro DG, ex definitione circuli.

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvi.

In dato circulo, quintidecagonum & æ-
 quilaterum, & æquiangulum describere.

SI in dato circulo ABC, inscribendum Quin- TAB. XVI.
 tidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. fig. 10.
 Constituto triangulo æquilatere D, quod ex co-
 rol. propos. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum;
 inscribatur ei æquiangulum triangulum ABC. a 2. *quartæ*

in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum;
 b 16. *vel* ex coroll. propof. 6. lib. 1. *beruntque* tres arcus
 28. *tertiū.* AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas
 AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales
 angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium
 igitur partium æqualium quindecim est circumfe-
 rentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB,
 c11. *quart.* qui tertia pars est totius circumferentiæ. Inſcri-
 batur rursus in dato circulo pentagonum æquila-
 terum, & æquiangulum AEF^{GH}, applicans u-
 num angulorum ad punctum A, *deruntque* quin-
 que arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales.
 Qualium igitur partium æqualium quindecim est
 tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus
 AE, quinta pars existens totius circumferentiæ.
 Itaque cum arcus AB, contineat tales partes
 quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus
 e30. *tertiū.* arcus EB, duas. Diviſo ergo arcu EB, bifariam
 in I, erit arcus BI, pars decima quinta totius
 circumferentiæ: Quare ducta recta BI, ſubtendet
 decimam quintam partem totius circumferentiæ;
 f 1. *quart.* cui ſi aliæ quatuordecim, f æquales in circulo
 accommodentur, inſcriptum erit in circulo quin-
 27. *tertiū.* tidedecagonum æquilaterum, quod 2 & æquiangu-
 lum eſt, cum ejus anguli ſubtendant arcus æqua-
 les, compoſitos videlicet ex 13. arcibus æqualibus
 omnes, ut perſpicuum eſt, In dato igitur circulo
 quintidedecagonum, &c. Quod faciendum erat.

Similiter autem per ea, quæ dicta ſunt de pen-
 tagono ſupra, propof. 12. 13. & 14. deſcribemus
 circa datum circulum quintidedecagonum æquilate-
 rum, & æquiangulum. Item in dato quintideca-
 gono æquilatere, & æquiangulo circulum inſcri-
 bemus; & tandem circa datum quintidedecagonum
 deſcribemus circulum.



E U C L I D I S

E L E M E N T U M

Q U I N T U M.

Erit in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportionem quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad ullam quantitatis speciem, neque ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circumferentia circulorum, triangula, & alia figura plana. Ut igitur institutum suum servet, definit prius vocabula, quae ad demonstrationes proportionum adhibentur.

D E F I N I T I O. I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur maiorem.

Itaque ait magnitudinem illam minorem, quae maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Ut quoniam magnitudo *A*, ter sumpta, metitur

metitur magnitudinem B , sexies autem sumpta, magnitudinem C , dicetur magnitudo A , pars magnitudinum B , & C . At vero quia magnitudo D , non metitur magnitudines E , & F , sed sumpta bis, excedit magnitudinem E , & sumpta ter, deficit à magnitudine F , sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D , pars magnitudinum E , & F .

D E F I N I T I O. II.

Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

TAB. XVI. fig. 11. **U**T in superiori exemplo tam magnitudo B , quam magnitudo C , multiplex est magnitudinis A , quoniam hac utramque illam metitur. At vero neque magnitudo E , neque magnitudo F , multiplex est dicenda magnitudinis D , propterea quod hac neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita ut minor quantitas mensurans majorem, dicatur pars majoris; Major vero mensurata à minori, dicatur minoris multiplex.

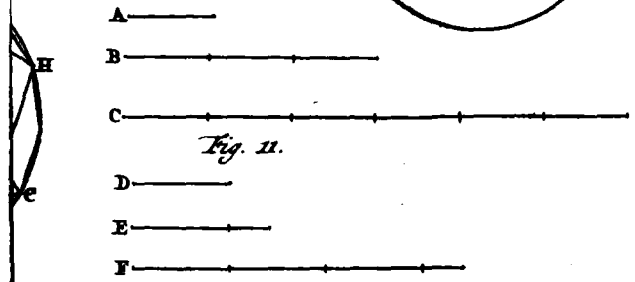
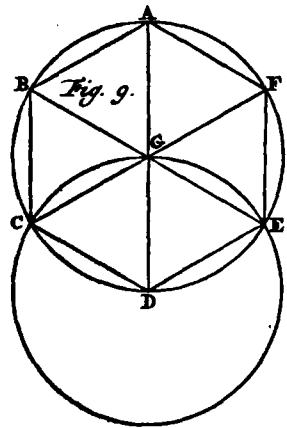
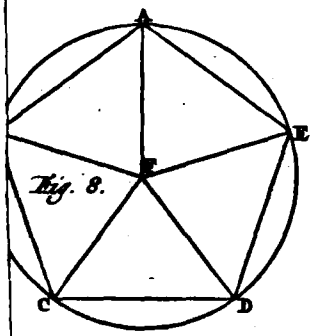
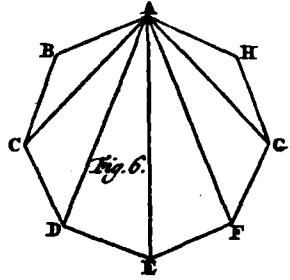
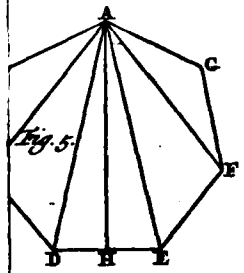
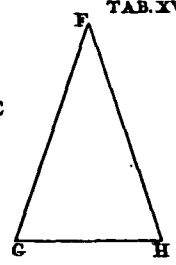
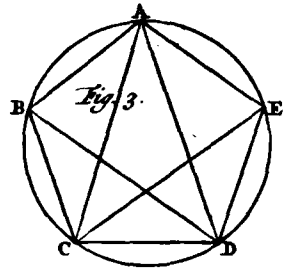
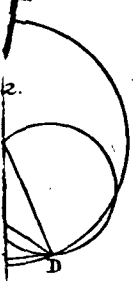
Ceterum quando due magnitudines minores duas alias majores aequè metiuntur, hoc est, una minor in una majore toties continetur, quoties altera minor in altera majore; dicuntur due hæ majores duarum illarum minorum aequè multiplices. Quod idem dices, si plures minores aequè metiantur plures majores.

D E F I N I T I O. III.

Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundum quantitatem, habitudo.

Quando due quantitates ejusdem generis, ut duo numeri, due lineæ, due superficies, duo solida,

2.



da, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod una major est, quam altera, vel minor, vel aequalis; appellatur hujusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio; seu (ut aliis placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicitur ea comparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint ejusdem generis quantitatis. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est secundum quod una est alba, & altera nigra; aut quod una est calida, & altera frigida, &c. quamvis amba sint ejusdem generis, non dicitur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

Quamquam autem in solis quantitibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, qua aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cujusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Ut cum dicimus, tempus tempore esse majus, vel minus, vel duo temporu esse aequalia, &c. appellatur ejusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quadam.

Ceterum in omni proportionem ea quantitas, quae ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris aliis antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Ut in proportionem linea 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, et linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si e contrario consideretur proportio linea 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, consequens vero linea 6. palmorum, & sic in ceteris.

DEFI.

DEFINITIO. IV.

Proportio vero est rationum similitudo.

QUOD hoc loco interpretes proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Ut si proportio quantitatis *A*, ad quantitatem *B*, similis fuerit proportioni quantitatis *C*, ad quantitatem *D*, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio *E*, ad *F*, proportioni, *F*, ad *G*, appellabitur hæc similitudo proportionalitas.

TAB.

XVII.

fig. 1.

fig. 2.

fig. 2.

fig. 1.

Euclides de sola Geometrica, agit hoc libro; qua quidem duplex est, continua altera, in qua singula quantitates intermedia bis sumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequens, consequens vero quantitatis antecedentis. Ut si dicatur, quæ est proportio *E*, ad *F*, ea est *F*, ad *G*, vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singula quantitates intermedia semel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Ut si dicatur, quæ proportio *A*, ad *B*, ea est *C*, ad *D*, appellabitur proportionalitas hæc, discreta, sive nam continua.

DEFI.

DEFINITIO. V.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

Quoniam Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum ejusdem generis, vocaverat rationem, quam nos cum aliis auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates ejusdem generis, ut proportionem dicantur habere. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum utravis multiplicata ita augetur; ut alteram tandem superet, adeo ut si alterutra quantumvis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur.

DEFINITIO. VI.

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque vel una deficient, vel una æqualia sunt, vel una excedunt; si ea simantur, quæ inter se respondent.

Explicat hoc loco Euclides, quoniam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportionem magnitudinum, tam

TAB.
XVII.
fig. 3.

tam rationales, quam irrationales. Sim igitur quatuor magnitudines *A*, prima; *B*, secunda; *C*, tertia; & *D*, quarta: sumanturque prima, & tertia aequemultiplicia quacunque; *E*, quidem ipsius *A*; & *F*, ipsius *C*: Item sumantur secunda, & quarta alia quacunque aequemultiplicia; *G*, quidem ipsius *B*; & *H*, ipsius *D*, sive hac duo posteriora sint ita multiplicia secunda, & quarta, sicut priora duo multiplicia sunt prima, & tertia, sive non. Quod si jam inter se conferantur sumpta aequemultiplicia ea, quae inter se respondent, ut multiplex prima, & multiplex secunda inter se, hoc est, *E*, & *G*; Item multiplex tertia, & multiplex quarta inter se, hoc est, *F*, & *H*; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se habere, ut si *E*, multiplex primae magnitudinis *A*, minus fuerit, quam *G*, multiplex secunda magnitudinis *B*; etiam *F*, multiplex tertia magnitudinis *C*, minus sit quam *H*, multiplex quarta magnitudinis *D*: Aut si *E*, aequale fuerit ipsi *G*; etiam *F*, aequale sit ipsi *H*: Aut denique si *E*, majus fuerit quam *G*; etiam *F*, majus sit quam *H*: (quod est utrumque ab utroque vel una deficere, vel una aequalia esse, vel una excedere) ita ut in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, ut nunquam *E*, minus sit quam *G*, quin & *F*, minus sit quam *H*; & ut nunquam *E*, aequale sit ipsi *G*, quin & *F*, ipsi *H*, sit aequale. Denique ut nunquam *E*, majus sit quam *G*, quin & *F*, majus sit, quam *H*. Si inquam deprehensum fuerit, aequemultiplicia quavis accepta, perpetuo se se ita habere, ut dictum est; dicetur eadem esse proportio prima magnitudinis *A*, ad secundam magnitudinem *B*, quae est proportio tertia magnitudinis *C*, ad quartam magnitudinem *D*. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo uno genere multiplicium, multiplex

tipler E, deficere à multiplici G, non autem multiplex F, deficere à multiplici H; Aut E, aequale esse ipsi G, at F, non aequale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamvis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiat, nulla ratione dicuntur quantitates propofita eandem habere proportionem, fed diverfas, ut ex defin. 8. fiet perfpicuum.

Itaque ut demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc §. lib. & in aliis fervatur) quacunque aque multiplicia prima, & tertia collata cum quibuscunque aque multiplicibus fecunda, & quarta, habere femper conditionem prædictam defectus, aequalitatis, aut excessus; ita ut nunquam contrarium ejus inveniri poffit. Similiter fi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, qualibet aque multiplicia prima, & tertia collata cum quibulibet aque multiplicibus fecunda, & quarta, habere eandem defectus, aequalitatis, aut excessus conditionem.

DEFINITIO. VII.

Eandem autem habentes rationem magnitudines; Proportionales vocentur.

UT fi magnitudinum A, B, C, D, eadem fit proportio A, ad B, qua C, ad D, dicuntur ea magnitudines proportionales. Eadem ratione, fi eadem fit proportio E, ad F, qua F, ad G, dicuntur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quadam magnitudines proportionales continua inter quas reperitur proportionalitas continua, quales funt magnitudines E, F, G: Quadam vero proportionales

T A B
XVII.
fig. 1, 2.

tionales sunt non continue, sed discrete, cujusmodi sunt magnitudines A , B , C , D . In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, ut dictum est in 4. definitione.

DEFINITIO. VIII.

Cum vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

DEclarat hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ut majorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint æque multiplicia prima & tertia; Item alia æque multiplicia secunda & quarta; deprehensumque fuerit aliquando, (licet non semper multiplex prima majus esse multiplice secunda, multiplex autem tertia non esse majus multiplice quarta, sed vel minus, vel æquale; dicitur major esse proportio prima magnitudinis ad secundam, quam tertia ad quartam: ut perspicuum est in appposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A , & tertia C , sumpta sunt triplicia E , & F ; secunda vero B , & quarta D , quadruplicia G , & H . Et quoniam E ; multiplex primæ majus quidem est quam G , multiplex secundæ; At F , multiplex tertiæ majus non est quam H , multiplex quartæ, dicitur major esse proportio A , primæ magnitudinis; ad B , secundam; quam C , tertia, ad D , quartam.

TAB.
XVII.
fig. 4.

Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum,
prima

prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem quam tertia ad quartam, aequè multiplicia secundum quamvis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem prima excedat multiplex secunda, at multiplex tertia non excedat multiplex quarta; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, ut tam multiplex prima majus sit multiplice secunda, quam multiplex tertia multiplice quarta. Item ut & multiplex prima minus sit multiplice secunda, & multiplex tertia multiplice quarta: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex prima superat quidem multiplex secunda, at multiplex tertia vel minus est, vel aequale multiplici quarta: propterea maiorem dicitur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, non autem eandem.

Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, ut aequè multiplicia earum, juxta quasvis multiplicationes accepta, vel una deficiant, vel una aequalia sint, vel una excedant, ut in 6. def. fuit expositum: Ut autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex secunda, multiplex vero tertia non superet multiplex quarta quamvis juxta innumeras alias multiplicationes, aequè multiplicia prima, ac tertia una excedant aequè multiplicia secunda, & quarta.

Quod si quando è contrario multiplex prima deficiat à multiplice secunda, non autem multiplex tertia à multiplici quarta, dicitur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamvis secundum plurimas alias multiplicationes, aequè multiplicia prima & tertia una

deficiant ab aque multiplicibus secunda, & quarta.

DEFINITIO. IX.

Proportio autem in tribus terminis paucissime consistit.

Quoniam omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, ut dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, ut minimum, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, sive magnitudines; At vero si fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens terminus unius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunque solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

DEFINITIO. X.

Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, uno amplius, quam diu proportio extiterit.

TAB. XVII.
fig. 5. **V**eluti si sint magnitudines *A, B, C, D, E,*
continue proportionales, ita ut ea sit proportio
A,

A, ad *B*, quæ *B*, ad *C*; & *C*, ad *D*: & *D*, ad *E*: proportio *A*, magnitudinis primæ ad *C*, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata ejus proportionis, quam habet *A*, magnitudo prima ad *B*, magnitudinem secundam: quoniam inter *A*, & *C*, duæ proportionēs reponuntur, quæ æquales sunt proportioni *A*, ad *B*; nimirum proportio *A*, ad *B*, & *B*, ad *C*, ut propterea proportio *A*, ad *C*, intercipiat quodammodo proportionem *A*, ad *B*, duplicatam, id est, bis ordine positam. At proportio *A*, magnitudinis primæ ad *D*, magnitudinem quartam, dicitur triplicata ejus proportionis, quam habet *A*, magnitudo prima ad *B*, magnitudinem secundam: quia inter *A*, & *D*, reperiuntur tres proportionēs, quæ æquales sunt proportioni *A*, ad *B*; nimirum proportio *A*, ad *B*; *B*, ad *C*; & *C*, ad *D*, atque ideo proportio *A*, ad *D*, includit quodammodo proportionem *A*, ad *B*, triplicatam, id est, ter ordine positam: Sic quoque proportio *A*, ad *E*, dicitur quadruplicata proportionis *A*, ad *B*: propterea quod quatuor proportionēs interjiciuntur inter *A*, & *E*, quæ æquales sunt proportioni *A*, ad *B*, &c.

Quod si è contrario ea sit proportio *E*, ad *D*, quæ *D*, ad *C*; & *C*, ad *B*; & *B*, ad *A*; dicetur proportio *E*, ad *C*, duplicata proportionis *E*, ad *D*; At vero proportio *E*, ad *B*, dicetur triplicata proportionis *E*, ad *D*; sic quoque proportio *E*, ad *A*, dicetur quadruplicata proportionis *E*, ad *D*, &c.

DEFINITIO. XI.

Homologæ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Definitur supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet jam, non solum in proportionalitate quavis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportionem inter se, nec non consequentes inter se, ut intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quam latere figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quam consequentia, ut in

TAB.
XVII.
fig. 6.

6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicitur quantitas A, similis quantitati C, & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, utramque magnitudinem antecedentem vel æqualem esse utrique consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias non haberet utraque antecedens ad utramque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes majores sunt eo tenore consequentibus. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, ubi tam E, & F, homologæ sunt, quam F, & G, ut constet. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æque multiplicia prima & tertia magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secunda, & quarta magnitudinum, nimirum consequentium. Haec enim similes sunt in mag-

magnitudinibus proportionalibus, ut ex hac definitione constat: in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

DEFINITIO. XII.

Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

A Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, inferitur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem hujus. Ut si ponamus proportionem A , ad B , quam C , ad D , & propterea concludamus, eandem esse proportionem A , ad C , quæ est B , ad D , dicemur argumentari à permutata proportionem. Græci scriptores in hac argumentatione utuntur hoc fere modo loquendi: Ut est A , ad B , ita C , ad D ; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A , ad C , ut B , ad D . Firmam autem esse hujusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. libri hujus. Cæterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse ejusdem generis, ut inter binas ut ut assumptas proportio esse possit.

DEFINITIO. XIII.

Inversa ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

UT si ex eo, quod est A , ad B , ut C , ad D , inferamus, ita esse B , ad A , ut D , ad C , hoc

hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inversa proportionione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Ut est A , ad B , ita C , ad D ; Igitur convertendo, vel è contrario, erit quoque B , ad A , ut D , ad C ; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propof. 4. hujus lib. Porro due priores magnitudines possunt esse unius generis, & posteriores alterius.

D E F I N I T I O. XIV.

Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

TAB. XVII. *Si proportio AB , ad BC , quæ DE , ad EF ;*
 fig. 8. *Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius AC , nempe antecedentis cum consequente, ad BC , consequentem, quam habet tota DE , antecedens nimirum cum consequente, ad EF , consequentem; dicetur hujusmodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud novum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , componendo ergo erit & AC , ad BC , ut DE , ad EF . Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propof. 18.*

D E F I N I T I O. XV.

Divisio rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

TAB. XVII. *UT si dicatur, quæ proportio est totius AB , ad*
 fig. 9. *CB , ea est totius DE , ad FE ; Igitur erit & AC ,*

AC, excessus, quo antecedens consequentem superat; ad *CB*, consequentem, ut *DF*, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad *FE*, consequentem. In divisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo dividendo, &c. Hac porro illatio ostendetur propos. 17. hujus lib.

DEFINITIO. XVI.

Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

Quod si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo *AB*, ad *CB*, ita tota *DE*, ad *FE*; *TAB.* Igitur ita etiam erit eadem *AB*, ad *AC*, excessum, *XVII.* quo consequentem superat antecedens, ut *DE*, ad *DF*; Dicemur per conversionem rationis argumentari. Unde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conversionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. hujus lib.

DEFINITIO. XVII.

Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit.

Vel aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

Sint plures magnitudines duabus *A, B, C*, & *TAB.* totidem *D, E, F*, sintque binæ ac binæ in eadem *XVII.* proportionem, hoc est, *A*, ad *B*, ut *D*, ad *E*, *fig. 10.*

E, & *B*, ad *C*, ut *E*, ad *F*. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem *A*, ad *C*, prima ad ultimam in primis magnitudinibus, qua est *D*, ad *F*, prima magnitudinis ad ultimam in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, sive ex æqualitate, in qua scilicet extrema magnitudines, subductis mediis, colliguntur habere unam, eandemque inter se proportionem, ut in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, uno quidem, quando summimus binas ac binas magnitudines in eadem proportionem, ordinate procedendo, altero vero, cum ordo invertitur; explicat Eucledes duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.

DEFINITIO. XVIII.

Ordinata proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

TAB. XVII.
fig. 11. **UT** quando fuerit *A*, ad *B*, ut *D*, ad *E*; Rursus ut *B*, consequens ad aliud quidpiam, ut ad *C*, ita *E*, consequens ad *F*, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quam in secundis servatur; cum utrobique conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate servatur Ordinata proportio, demonstratur proposit. 22. hujus lib. eam argumentationem esse bonam.

DEFI-

DEFINITIO. XIX.

Perturbata autem proportio est, cum tribus politis magnitudinibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, TAB. ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B, XVIII. consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur hujuscemodi proportio, Perturbata: quod non servetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate servatur Perturbata proportio, demonstratur eam argumentationem esse bonam, propos. 23. hujus lib.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SInt quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. TAB. XVIII. Dico fig. 2.

M 5

Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F, si AB, dividatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi E, æquales, & CD, quoque in magnitudines CI, IK, KD, ipsi F, æquales; (Dividi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, CD, sint ipsarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfecte contineatur, quoties F, in CD, ut ex iis, quæ in defin. 2. hujus lib. scripsimus, constat) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot sunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales CI, & F, ærunt AG, CI, simul, æquales ipsi E, & F, simul. Eodem modo erunt GH, & IK, simul æquales ipsi E, & F, simul; Nec non HB, & KD, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, simul, in AB, CD, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul, ipsarum E, & F, simul, ut constat ex iis, quæ in defin. 2. lib. hujus scripsimus. Quare si sint quocunque magnitudines quocunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.

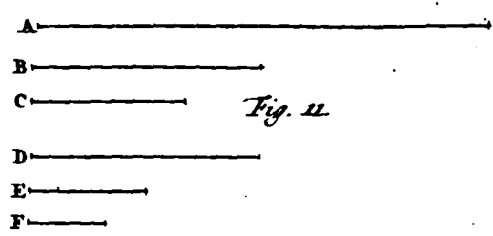
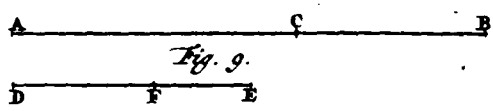
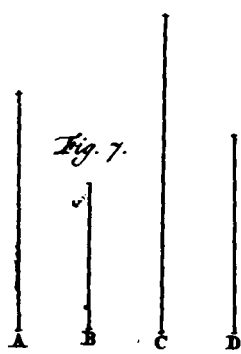
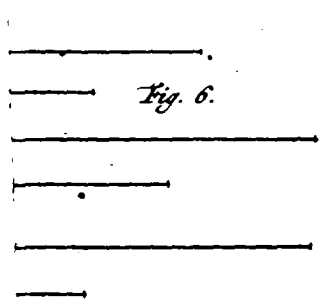
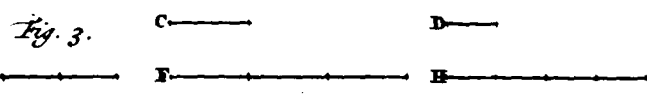
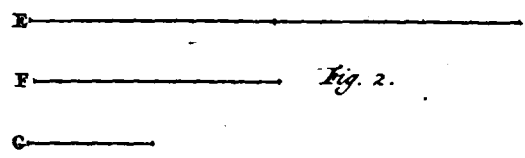
ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ, erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

TAB. XVIII. **S**It magnitudo prima AB, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex DE, tertia, quartæ.

fig. 3.

TAB. XVII.



tæ F; Rursus tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est EH, sexta ipsius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex est, DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, & DE, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales magnitudines BG, EH, erunt totæ magnitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH: Ideoque tam multiplex est AG, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est DH, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iii.

Si sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIt prima magnitudo A, tam multiplex secundæ TAB. B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; XVII. sumanturque E, F, æque multiplices primæ & F. 6 tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, ut in EG, GH, HI, & FK, KL, LM, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in

in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL. Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex est ejusdem secundæ B, quam multiplex est KL, sexta ejusdem quartæ D, ^{a 1. quint.} Erit & EH, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex FL, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum sit EH, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est FL, tertia quartæ D, ut proxime demonstratum est; sit autem & HI, quinta tam multiplex secundæ B, quam est LM, ^{b 1. quint.} sexta multiplex quartæ D; Erit & EI, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est FM, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.

iv. THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

^{TAB. XVIII.}
^{fig. 5.} **S**It proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, juxta quamvis mul-
tipli-

tiplicationem : five E, F, ita multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, five non. His positis constat ex defin. 6. hujus lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H; Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æque multiplicia non semper ita se haberent. Dico jam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum una deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut una æqualia esse, aut una excedere, ut diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, ut F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia, & H, quarta; sumanturque ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipsarum G, H, quæcunque etiam æque multiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere, ut vult definitio 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æque multiplicia sumpta diximus, vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ; Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam, ostensæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ A, C. Item L, M, æque multiplices secundæ & quartæ B, D, & fit ut si I, multiplex c 6. def. primæ quinti.

b 3. quinq.

c 6. def. primæ quinti.

primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiz necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsum L, etiam K, excedat necessario ipsum M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æque multiplicia, quæcunque sint, æque multiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiz F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiz K, minorem quoque esse, quam M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione; Erit, ut E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

d 3. quinti.

e 6. def. quinti.

COROLLARIUM.

Hinc facile demonstrabitur inversa ratio, quam Euclides defin. 13. explicavit; hoc est si quatuor magnitudines fuerint proportionales, eadem & contra, seu inversa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico esse convertendo, ut B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æque multiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertiz; Item G, H, æque multiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, ut C, tertia ad D, quartam, necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel major, etiam F, multiplicem tertiz minorem esse, vel æqualem vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, major fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si utraque E, F, minor est, quam utraque G, H, erit contra utraque G, H, major quam utraque E, F, & si utraque

T AB.

XVIII.

fig. 6.

f 6. def. quinti.

utraq̃ue E , F , æqualis est utrique G , H , erit è contrario , utraq̃ue G , H , utrique E , F , quoque æqualis : Et denique si utraq̃ue E , F , major est , quam utraq̃ue G , H , erit vice versâ , utraq̃ue G , H , minor , quam utraq̃ue E , F . Itaque quoniam primæ B , & tertiæ D , sumptæ sunt , æque multiplicia G , H ; Item secundæ A , & quartæ C , æque multiplicia E , F , ostensumque est , G , H , vel una excedere E , F , vel una æqualia esse vel una deficere , secundum quamcumque multiplicationem ea multiplicia sumantur ; gerit ut B , prima ad A , secundam , ita D , tertia ad C , quartam . Quod erat demonstrandum. g 6. def. quinti.

THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex , atque ablata ablatae ; Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit , ut tota totius.

ITa multiplex sit tota AB , totius CD , ut est multiplex AE , ablata ablatæ CF , sive AE , CF , ablatae sint totis AB , CD , commensurabiles , ut in 7ma figura , sive incommensurabiles , ut in 8va figura . Item sive AE , CF , compositæ sint ex eisdem partibus , ex quibus totæ AB , CD , componuntur , ut in 7ma figura , sive non ex eisdem , ut in 8va figura . Dico reliquam EB , ita esse multiplicem reliquæ FD , ut est tota AB , totius CD . Ponatur enim EB , ita multiplex cuiuspiam magnitudinis , videlicet ipsius GC , ut est AE , multiplex ipsius CF , vel tota AB , totius CD . Quoniam igitur AE , EB , æque sunt multiplices ipsarum CF , GC ; ærit tota AB , totius GF , ita multiplex , ut AE , ipsius CF , hoc est omnes omnium , ut una unius : Sed tam multiplex etiam ponitur AB , ipsius CD , quam est multiplex AE , ipsius CF . Igitur AB , tam est multiplex ipsius GF , quam multiplex est ipsius CD ; atque idcirco æquales sunt GF , CD . Ablata igitur communi CF , æquales erunt GC , FD . Tam multiplex igitur erit EB , ipsius FD , quam multiplex TAB. XVIII. fig. 7, 8.
a 1. quinti.
b 6. primi.

tiplez est ipſius GC. Sed ita multiplex poſita fuit EB, ipſius GC, ut AE, ipſius CF, hoc eſt, ut tota AB, totius CD. Quare tam multiplex eſt reliqua EB, reliquæ FD, quam eſt tota AB, totius CD, quod eſt propoſitum.

TAB. Aliter. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, ut ablata AE, ablata CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, eſſe ſic multiplicem, ut eſt tota totius. Poſita enim GA, ita multiplici ipſius FD, ut eſt AE, ipſius CF, vel ut tota AB, totius CD, quoniam AE, GA, æque multiplices ſunt ipſarum CF, FD; erit tota GE, ſic multiplex totius CD, ut AE, ipſius CF: Sed ita quoque multiplex eſt AB, ejuſdem CD, ut AE, ipſius CF, ex hypotheſi. Æque multiplices ſunt igitur GE, AB, ipſius CD; & atque adeo inter ſe æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB, Ideoque æque multiplices ipſius FD; cum GA, ſit multiplex poſita ipſius FD: Atqui ita eſt multiplex poſita GA, ipſius FD, ut AB, ipſius CD. Igitur & EB, reliqua ſic erit multiplex ipſius FD, reliquæ ut AB, tota totius CD; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.

vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

TAB. Sint magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG,

AG, ejusdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipsi E, vel ejus multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim, CI, æqualis ipsi F. Et quia prima AG, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia multiplex est quartæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; ærit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, ut HI, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F: Atqui CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex est ipsius E. Æque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. Ideoque æquales inter se. Quare dempta CH, communi remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod est propositum.

Sit deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namque CI; ita multiplici ipsius F, ut est multiplex GB, ipsius E; ærit ut prius AB, ita multiplex ipsius E, ut HI, multiplex est ipsius F. Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, ut GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

Sint duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quævis C. Dico A, & B; habere

N

bere

a 2. quini.

b 6. prop.

TAB.

XXVII.

fig. 12.

c 2. quini.

d 6. prop.

TAB. XIX.

fig. 1.

bere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum æqualium A, B; æruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, utcumque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sunt, fit ut utraque vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel major, juxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel majores; erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

a 6. *prop.*
b 6. *def.*
quinti.

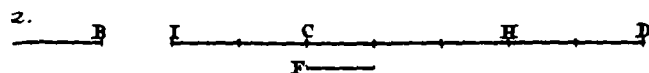
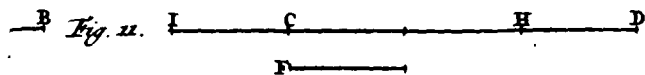
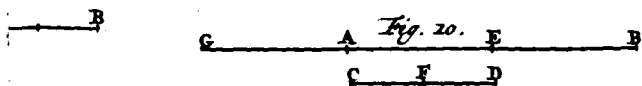
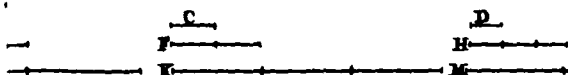
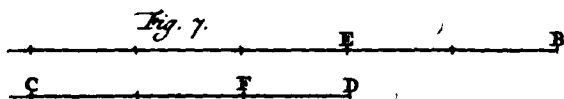
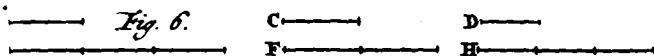
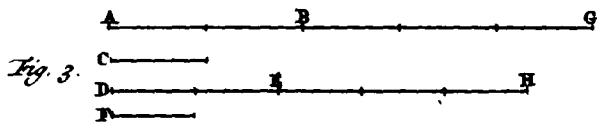
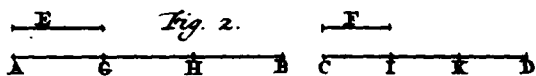
Eodem pacto ostendemus F, vel minorem esse utraque D, E, vel utrique æqualem, vel majorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat à D, & E, æque multiplexibus secundæ A, & quartæ B, vel una æqualis sit, vel major; erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset brevis secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. proposit. ex inversa ratione. Cum enim ostensum jam sit, esse A, ad C, ut B, ad C, erit convertendo C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. Quod erat demonstrandum.

a 6. *def.*
quinti.

S C H O L I U M.

Eodem fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur dua æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omisit, utitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ sequuntur, perinde ac si in hac proposit. 7. esset demonstratum.

TABXIX. Sine enim tam A, & B, inter se æquales, quam
fig. 2. C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus
ipsarum



ipsarum *A*, & *B*, prima, & tertia. Item *G*, & *H*, aequae multiplicibus ipsarum *C*, & *D*, secundae & quarta; decerunt tam *E*, & *F*, inter se d. 6. pro:
 aequales, quam *G*, & *H*, inter se. Quare si *E*, multiplex primae deficiat à *G*, multiplice secundae, etiam *F*, multiplex tertiae, ab *H*, multiplice quartae deficiet; & si aequalis, aequalis; & si superat, superabit. eadem ergo est proportio *A*, primae ad *e* 6. def. *C*, secundam; quae *B*, tertia ad *D*, quartam. Quod quinti, est propositum.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij;

Inaequalium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

Sint magnitudines inaequales, *AB*, maior & TAB. XIX.
C, minor, tertia autem quaelibet *D*. Dico fig. 3. 4.
 proportionem *AB*, ad *D*, maiorem esse proportionem *C*, ad *D*. At è converso, maiorem esse proportionem *D*, ad *C*, quam *D*, ad *AB*. Intelligatur enim in *AB*, magnitudine maiore, magnitudo *AE*, aequalis minori *C*, ut sit reliqua *EB*. Utraque deinde *EB*, *AE*, aequaliter multiplicetur, hac lege, ut *GF*, multiplex ipsius *EB*, maior quidem sit, quam *D*; At *HG*, multiplex ipsius *AE*, non sit minor eadem *D*, sed vel maior, vel aequalis. In 3ta figura necesse fuit sumere *GF*, *HG*, triplas ipsarum *EB*, *AE*; quia dupla ipsius *AE*, esset minor, quam *D*. Loco triplarum potuissent accipi quaecunque aliae aequae multiplices maiores. In 4ta autem figura satis est, sumere ipsarum *EB*, *AE*, duplas *GF*, *HG*; quia utraque *GF*, *HG*, maior est, quam *D*. Possent tamen pro duplis sumi quaecunque aliae maiores aequae multiplices. Quoniam igitur duae *FG*, *GH*, aequae multiplices sunt duarum *BE*, *EA*; erit & tota *FH*, ita multiplex totius *AB*, a 1. quina

N 2

ut

ut GH, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ, C, & AE. Capiatur quoque ipsius D, multiplex IK, quæ proximè major sit, quam HG, nempe dupla, ut in 3ta figura. Quod si dupla major non fuerit quam HG, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In 4ta figura accepta est IK, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla quam tripla minor est, quam HG, at quadrupla jam major est. Abscissa ergo LK, quæ æqualis sit ipsi D, non erit IL, major quam HG, (alias IK, non esset multiplex ipsius D, proximè major quam HG; sed & IL, major quoque esset quam GH. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse majorem, quam HG; cum HG, posita sit non minor quam D, hoc est quam IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipsi IL, vel major. Et quia FG, major est posita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, major quam LK. Cum ergo HG, non minor sit quam IL, ut demonstratum est, sed vel æqualis, vel major; erit tota FH, major quam IK. Itaque cum FH, HG, sint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, major quam IK, multiplex secundæ; At HG, multiplex tertiæ, non sit major, quam IK, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesis; (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, major quam HG,) berit major proportio AB, primæ ad D, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

b 8. def.
quinti.

Quoniam vero è contratio IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda & AB, quarta) major est quam HG, multiplex secundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, major non est, quam FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, major sit, quam IK, ut ostensum est; erit major proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium

c 8. def.
quinti.

qualium igitur magnitudinum major ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix:

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eandem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

Habeant primum A, & B, eandem rationem *TAB. XIX* ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. *fig. 5.*
Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, major & B, minor. *a* Erit igitur major proportio a *8. quint.* A, majoris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales.

Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset major, & B, minor; *b* haberet b *8. quint.* C, ad B, minorem, majorem proportionem, quam ad A, majorem: quod est contra hypothesin. Non igitur major erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Habeat primum A, ad C, majorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, *TAB. XIX* majorem esse, quam B: Si enim A, foret ipsi *fig. 6.* B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, *a* *7. quint.* haberet B, major ad C, proportionem majorem, *b* *8. quint.*

jorem, quam A, minor ad eandem C, quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis vel minor quam B, sed major.

- Habeat secundo C, ad B, majorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque vero B, major erit quam A, d. alias haberet C, ad minorem A, majorem proportionem quam ad B, majorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quam A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

xi. THEOR. II. PROPOS. II.

Quæ eidem sunt eadem rationes,
& inter se sunt eadem.

- TAB. XIX.** **fig. 7.** Sint proportionēs A, ad B, & C, ad D, eadem proportioni E, ad F. Dico & proportionēs A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. hoc est sumptis æque multiplicibus ipsarum A, C; Item æque multiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, ut multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel una deficient, vel una æquales sint, vel una excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam ut E, tertia ad F, quartam; a 6 def. a sit ut si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel major, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel major: b 6. def. b Sed (ut eodem modo ostenditur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel

vel major est quoque H, minor quam L, vel æqualis, vel major; propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et si G, æqualis est, vel major quam K, etiam H, æqualis erit, vel major quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque aliis æque multiplicibus. Quapropter erit A, prima c 6. def. ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. quinti. Quæ igitur eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Quod erat ostendendum.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

Si sint magnitudines quocunque proportionales: quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Quod in propos. 1. de proportionem multiplici TAB.XIX. demonstravit, ostendit hic de omni genere fig. 8. proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quocunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales hoc est, sit A, ad B, ut C, ad D, & E, ad F. Dico ut est una antecedentium ad unam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, a 1. quinz. E, simul ita multiplices, ut una unius, nempe ut G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut alia E, tertia ad
N 4 aliam

b 6. def.
quinti.

aliam F, quartam; b fit ut si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertix ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et si G, æqualis est ipsi K, vel major, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel major. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel major quam K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, vel æquales vel majores. Quocirca ut est A, prima ad B, secundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quocunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

vij. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam majorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

TAB. IX.
fig. 9.

Si prima A, ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertix ad D, quartam major, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse majorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsarum A, E; Item æque multiplicibus ipsarum B, F, contingere posse, ut multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam; a fit ut si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertix ipsam L, multiplicem quartæ, &c.

&c. At quando H, excedit ipsam L, non ne- b 8. *def.*
cessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquan- quinti.
do erit, vel minor; quod major ponatur propor-
tio C, primæ ad D, secundam, quam E, tertiæ
F, quartam. Igitur si G, excedit K, non ne-
cessario I, excedit M. c 8. *def.*
Major est ergo propor- quinti.
tio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ
ad F, quartam. Quamobrem si prima ad secun-
dam eandem habuerit rationem, quam tertia ad
quartam, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Si prima ad secundam eandem habuerit
rationem, quam tertia ad quartam; Prima
vero quam tertia major fuerit, erit & se-
cunda major quam quarta. Quod si prima
fuerit æqualis tertiæ; erit & secunda æqua-
lis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

Sit enim A, prima ad B, secundam ut C, tertia TAB. XIX
ad D, quartam. Dico si A, major fuerit fig. 10, 11,
quam C, fore quoque B, majorem quam D. 12.
Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quo-
que esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerit
quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit fig. 10.
primum A, major quam C, æritque propterea a 8. *quint.*
proportio A, majoris ad B, major quam C,
minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C,
prima ad D, secundam ut A, tertia ad B, quar-
tam, proportio autem A, tertiæ ad B, quartam
major est, ut ostendimus, quam C, quintæ ad
B, sextam: Major quoque erit proportio C, b 13. *quint.*
primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B,
sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque c 10. *quint.*
B, major erit quam D. Quod est propositum.

Sit deinde A, æqualis ipsi C; æritque idcirco fig. 11.
A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur propor- d 7. *quint.*
tiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt pro-
portioni A, ad B, ærunt quoque inter se eædem e 11. *quint.*

f 2. quint. proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est propositum.

fg. 12. Sit tertio A, minor quam C, *g* eritque ob
g 8. quint. hoc major proportio C, majoris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam:

b 13. quint. *b* Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam;

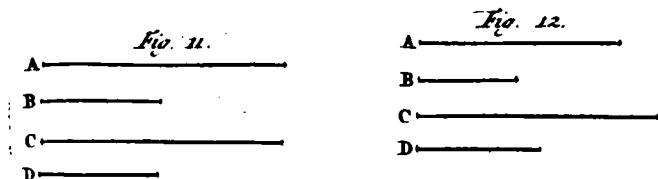
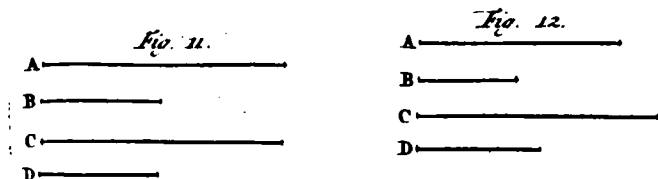
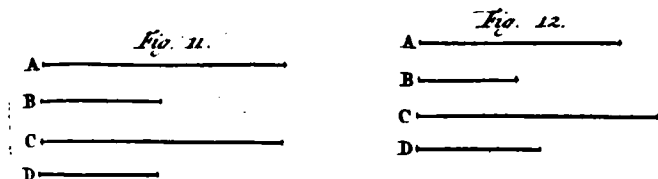
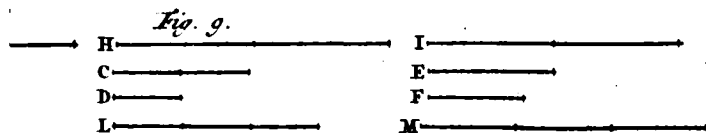
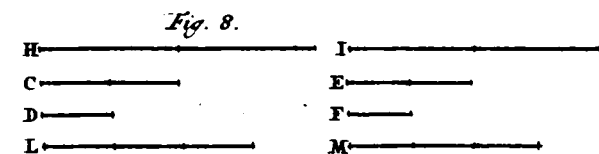
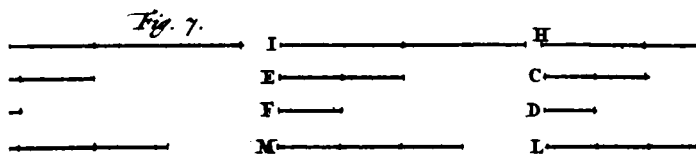
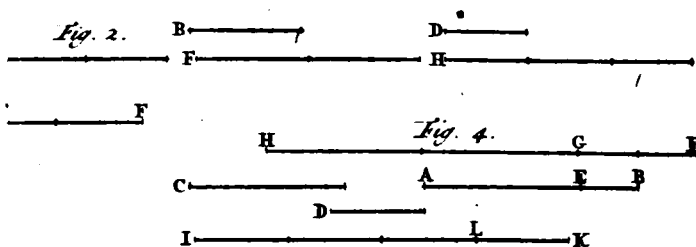
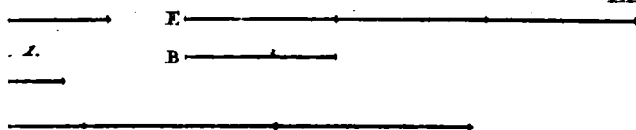
i 10. quint. *i* Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

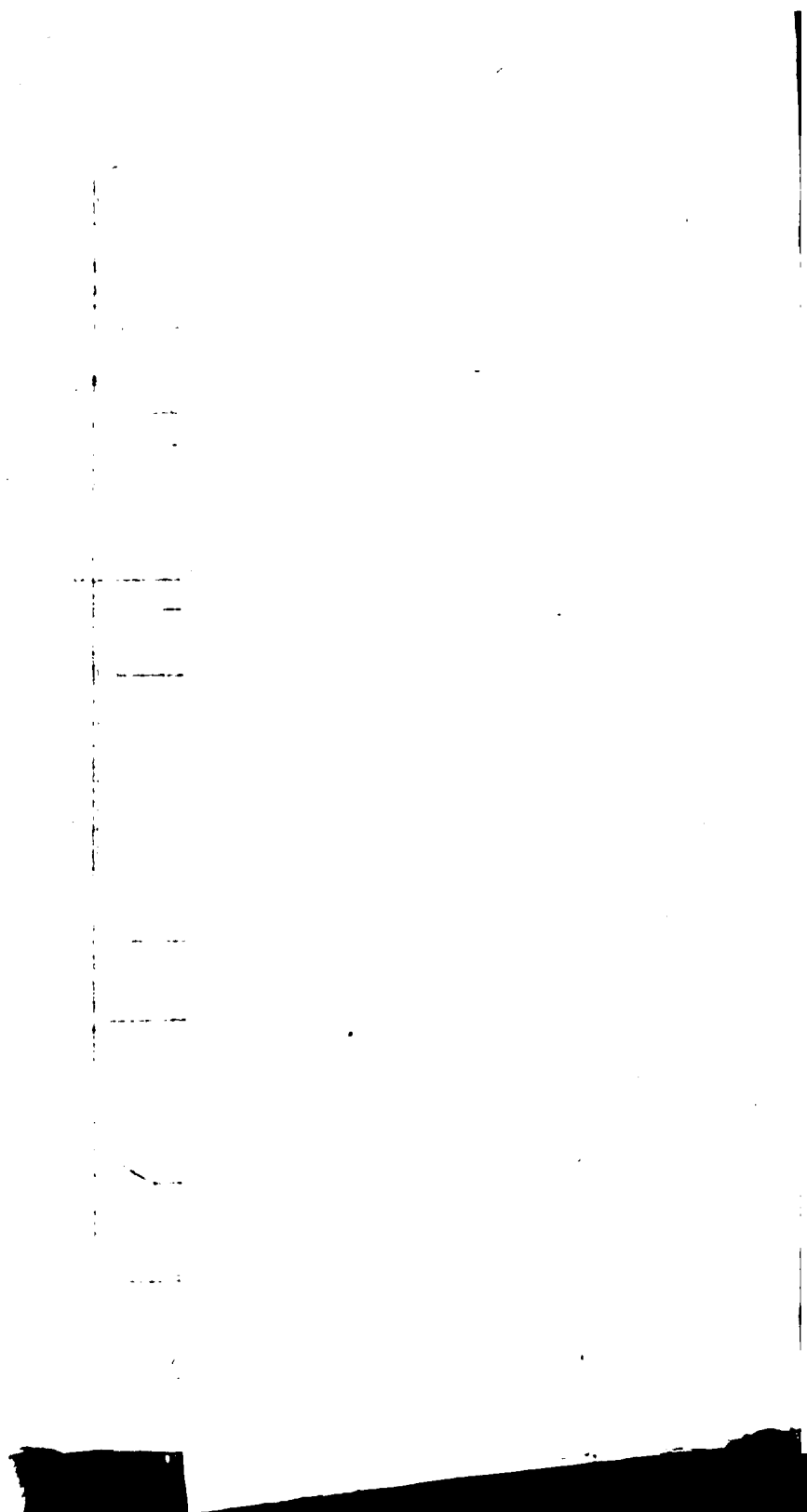
THEOR. 15. PROPOS. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

TAB. XX. *fg. 1.* **S**Int partium A, & B, æque multiples CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, ut A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiples ipsarum A, & B, continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Dividatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipsi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B, *a 7. quint.* *a* eritque CG, ad EI, ut A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, nec non EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & HD, ad *b 11. quint.* KF, ut A, ad B, *b* ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca ut CG, ad EI, hoc est, ut A, ad B, *c 13. quint.* ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.





THEOR. 16. PROPOS. 16. xvi.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

Hic demonstratur alterna, sive permutata pro- *TAB. XX.*
 portio, seu ratio, quæ defin. 12. explicata *fig. 2.*
 est. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico vi-
 cissim, seu permutando, esse quoque A, ad C,
 ut B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B,
 primæ ac secundæ, æque multiplices E, F. Item
 ipsarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices
 G, H; eritque E, ad F, ut A, ad B, cum *15. quint.*
 E, & F, sint pariter multiplices partium A, &
 B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D.
 Cum igitur proportionem E, ad F, & C, ad D,
 sint eadem proportioni A, ad B; erunt & ipsæ
 inter se eadem. Rursus quia proportionem E, *b. 11. quint.*
 ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C,
 ad D; erunt & ipsæ eadem inter se; hoc est, *c. 11. quint.*
 ut est E, prima ad F, secundam, ita erit G,
 tertia ad H, quartam. Quare si E, prima ma- *d. 14. quint.*
 jor est quam G, tertia, vel æqualis, vel minor,
 erit quoque F, secunda major quam H, quarta,
 vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplica-
 tione accepta sint æque multiplicia E, F, & æ-
 que multiplicia G, H. Est igitur A, prima ad *e. 6. def.*
 C, secundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum *quinti.*
 E, & F, sint æque multiplices primæ A, ac
 tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, se-
 cundæ & D, quartæ, & illæ ab his una defici-
 ant, vel una æquales sint, vel una excedant,
 &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur
 magnitudines proportionales fuerint, & vicissim
 proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

THEOR.

xvij. THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque divisæ proportionales erunt.

TAB. XX. **H**Oc loco demonstrat Euclides Divisionem rationis, quam defin. 15. explicavit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, EF, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, ut DE, ad EF. Dico & divisas easdem proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiples capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; æritque GI, ita multiplex ipsius AB, ut est GH, ipsius AC, hoc est, ut KL, ipsius DF, ita quoque multiplex est KM, ipsius DE. Æque multiples ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æque multiples ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, ut LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE; ærit & HN, sic multiplex secundæ CB, ut LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB, secundam, ut DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æque multiples GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item secundæ & quartæ CB, FE, æque multiples HN, LO, ærit ut si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab LO, ablati communibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablati communibus

communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, exceſſerit ipſam HN, & KM, ipſam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipſam IN, & KL, ipſam MO. Quam ob rem cum GH, KL, ſumptæ ſint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF: Item IN, MO, æque multiplices ſecundæ CB, & quartæ FE, oſtenſumque ſit, (in quacunque multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptæ) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel unadeficere, vel una æquales eſſe, vel una excedere; *e* Erit AC, prima ad CB, ſecundam, ut DF, tertia ad FE, quartam, quod eſt propoſitum. Si compoſitæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

e 6. def.
quint.

THEOR. 18. PROPOS. 18. xviii.

Si diſiſe magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

DEmonſtrat hoc loco Euclides compoſitionem rationis, quam definitione 14. deſcripſit. *TAB XX. fig. 4.*
Sint enim diſiſe magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc eſt, AB, ad BC, ut DE, ad EF. Dico & compoſitas proportionales eſſe, hoc eſt, ut eſt AC, ad BC, ita eſſe DF, ad EF. Si enim non eſt, ut AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipſa EF, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipſa EF, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur eſt, ut AC, ad BC, ita DF, ad GF; *a* Erit dividendo quoque, ut AB, ad BC, ita DG, ad GF: Sed ut AB, ad BC, ita propoſita quoque eſt DE, ad EF. *b* Igitur erit etiam, ut DG, prima ad GF, ſecundam, ita DE, tertia ad

a 7. quint.

b 11. quint.

ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima major sit, quam DE, tertia, erit quoque GF, secunda major quam EF, quarta, pars quam totum. Quod est absurdum.

Habeat deinde, si fieri potest, DF, ad HF, maiorem ipsa EF, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, ut AC, ad BC, ita DF, ad HF; *d* erit dividendo quoque ut AB, ad BC, ita DH, ad HF. Sed ut AB, ad BC, ita posita etiam est DE, ad EF. *e* Igitur erit quoque, ut DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor sit quam DE tertia, eritque HF, secunda minor quam EF, quarta, totum quam pars, quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF, erit, ut AC, ad BC, quod est propositum. Itaque si divisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

xix. T H E O R. 19. P R O P O S. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum, ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

TAB. XX. *fig. 5.* Q Uod in propof. 5. demonstratum est de multiplici proportionem, hoc loco de omni proportionem, etiam irrationali demonstratur. Si enim tota AB, ad totam CD, ut ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, ut est tota AB, ad totam CD. Cum enim sit AB, ad CD, ut AE, ad CF, *a* erit & permutando AB, ad AE, ut CD, ad CF. *b* Dividendo ergo erit EB, ad AE, ut FD, ad CF, *c* Quare permutando rursus erit EB, ad FD, ut AE, ad CF. hoc est, ut tota AB, ad totam CD, cum posita sit AB, ad CD, ut AE, ad CF.

Si

LIBER QUINTUS. 207

Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c.
Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Hinc facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conversione rationis, juxta 16. defin.

Sit enim, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico *TAB XX: per conversionem rationis esse quoque, ut AB, ad AC, fig. 6.*
ita DE, ad DF. Cum enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE, erit quoque dividendo, ut AC, ad CB, *di 7. quinti;*
ita DF, ad FE. Igitur & convertendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF, *eac* propterea componendo quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est positum. *e 18. quinti;*

THEOR. 20. PROPOS. 20. 22.

Si sint tres magnitudines; & aliæ ipsiis æquales numero; quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia major fuerit, erit & quarta quam sexta, major. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem *TAB XX: D, E, F, sitque A, ad B, ut D, ad E; & fig. 7.*
B, ad C, ut E, ad F, sit autem primum A, prima major quam C, tertia. Dico & D, quartam esse majorem F, sexta. Cum enim A, major sit quam C, erit major proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem ut A, ad B, ita D, ad E. Major igitur proportio quoque *e 8. quinti;*
erit D, ad E, quam C, ad B. At ut C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit convertendo ut C, ad B, ita F, *b 13. quinti;*

F, ad E.) Major igitur quoque proportio erit
 c10. *quint.* D, ad E, quam F, ad E, & quare D, major
 erit, quam F. Quod est propositum.

TAB XX. Sit deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æ-
 fig. 8 qualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C.,
 d 7. *quint.* æqualis & erit A, ad B, ut C, ad B. Est autem
 e 11. *quint.* ut A, ad B, ita D, ad E. & Igitur erit & D,
 ad E, ut C, ad B: At ut C, ad B, ita est F,
 ad E, per inversam rationem, uti prius. Quare
 f 9. *quint.* erit quoque D, ad E, ut F, ad E: & ideoque
 æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

TAB XX. Sit tertio A, minor quam C. Dico & D, mi-
 fig. 9. norem esse, quam F. Cum enim A, minor sit
 g 8. *quint.* quam C, gerit minor proportio A, ad B, quam
 C, ad B. Sed ut A, ad B, ita est D, ad E.
 h 13. *quint.* Minor ergo quoque proportio est D, ad E,
 quam C, ad B. Est autem convertendo, ut
 prius, ut C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor
 est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E,
 i 10. *quint.* & proptereaque D, minor erit quam F. Quod est
 propositum. Si sint itaque tres magnitudines,
 & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat
 ostendendum.

xxi. THEOR. 21. PROPOS. 21.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis
 æquales numero, quæ binæ, & in eadem
 ratione sumantur, fueritque perturbata earum
 proportio; ex æquo autem prima quam
 tertia major fuerit: erit & quarta, quam
 sexta, major. Quod si prima tertiæ fuerit
 æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin
 illa minor; hæc quoque minor erit.

TAB XX. SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem
 fig. 10. D, E, F, quæ binæ & in eadem ratione suman-
 tur; sitque earum proportio perturbata, hoc est,
 sit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C,
 ita D, ad E: Sit autem primum A, primo ma-
 jor quam C, tertia. Dico & D, quartam esse
 majore

maorem sexta, F. Cum enim A, major sit quam C, a erit major proportio A, ad B, quam ^{a 8. quinti} C, ad B: Est autem ut A, ad B, ita E, ad F. b Major ergo quoque proportio est E, ad F, ^{b 13. quinti} quam C, ad B. Quoniam vero ut B, ad C, ita est D, ad E, erit convertendo ut C, ad B, ita E, ad D. Quare major quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. c Ideoque major erit ^{c 10. quinti} D, quam F. Quod est propositum.

Sit deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quo- ^{TAB. XX:} que ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit ^{fig. 11.} æqualis ipsi C, a erit A, ad B, ut C, ad B: Sed ^{d 7. quinti} ut A, ad B, ita est E, ad F. e Igitur erit ut C, ^{e 11. quinti} ad B, ita E, ad F: Est autem ex inversa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque ut E, ad F, ita E, ad D; ^{f 9. quinti} satque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est ^{f 9. quinti} propositum.

Sit tertio A, minor, quam C. Dico & D, ^{TAB. XX:} minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor ^{fig. 12.} quam C, g erit minor proportio A, ad B, quam ^{g 8. quinti} C, ad B: Ut autem A, ad B, ita est E, ad F. h Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ^{h 13. quinti} ad B. Quoniam vero, ut ante, ex inversa ratione, est ut C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ^{i 10. quinti} ac propterea D, minor erit quam F, quod est ^{i 10. quinti} propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxiij:

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

JAm hic demonstrat Euclides modum argumen-
tandi in proportionibus ex æqualitate, quando
pro-

TAB. XXI
fig. i:

a 4. quint.

b 4. quint.

c 10. quint.

d 6. def.
quinti.

proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, ut D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æque multiplicibus G, H: Item ipsarum B, E, æque multiplicibus I, K: Item ipsarum C, F, æque multiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, ut D, tertia ad E, quartam, erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, ut H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, ut E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, ut K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportionem sumuntur; erit ut si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficient una ab L, M, æque multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel una æquales sint, vel una excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia: erit A, prima ad C, secundam, ut D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

Deinde sint plures magnitudines tribus, ita ut sit etiam C, ad N, ut F, ad O. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim jam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut D, ad F: ponatur autem C, ad N, ut F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit per tres; Et sic de pluri-

Fig. 2.

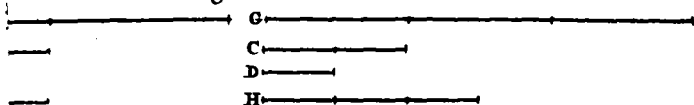


Fig. 3.

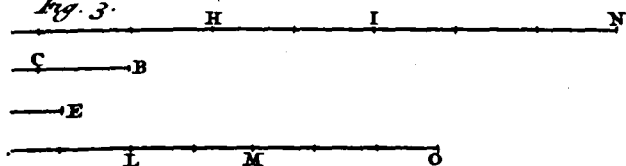


Fig. 5.

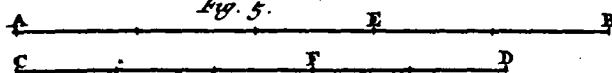


Fig. 9.

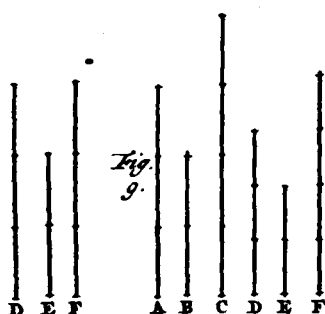


Fig. 10.

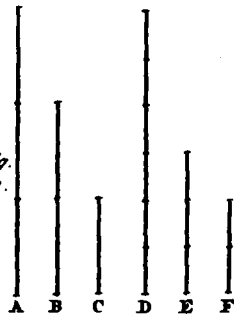
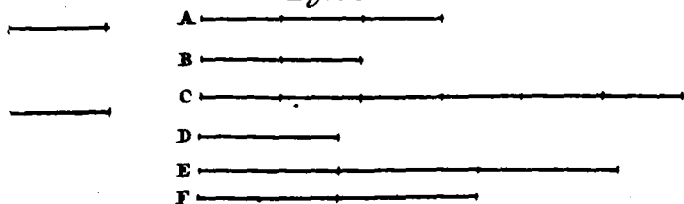


Fig. 12.



pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 23. xxij.

Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit ut TAB. XXI
fig. 2:
A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse ut A, ad C, ita D, ad F. Sumpris enim ipsarum A, B, D, æque multiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æque multiplicibus K, L, M. a 15. quint.
Erit ut A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A, B, æque multiplices: At ut A, ad B, ita est E, ad F; b 11. quint.
Igitur ut G, ad H, ita quoque est E, ad F; c 15. quint.
Sed ut E, ad F, ita est quoque L, ad M, quod L, M, sint ipsarum E, F, æque multiplices. d 11. quint.
Igitur erit quoque ut G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, ut D, tertia ad E, quartam; e 4. quint.
erit quoque ut H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumantur, citque earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse ut G, ad H, ita L, ad M: Et ut H, ad K, ita I, ad L; f 11. quint.
fit ut si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis, & si deficit deficiat. Itaque cum G, & I, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æque mul-

g 6. def. quinti. multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel una deficient, vel una æquales sint, vel una excedant; erit ut A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

xxiv. THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sextâ, ad quartam.

Quod propositione 2. demonstravit Euclides de sola proportionem multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportionem, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, ut DE, tertia, ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, ut EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, ut est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit ut BG, ad C, ita EH, ad F, erit convertendo ut C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, ut DE, ad F, & C, ad BG, ut F, ad EH, a erit ex æqualitate AB, ad BG, ut DE, ad EH. b Componendo igitur erit ut tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, ut DH, ad EH, & BG, ad C, ut EH, ad F: c erit ex æqualitate AG, ad C, ut DH, ad F. Quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 25. xxv

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

Sit enim AB, ad CD, ut E, ad F, sitque AB, TABXXV
 omnium maxima, & F, minima. Dico duas fig. 4.
 AB, & F, simul esse majores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, ut E, ad F, hoc est, ut AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, ut ablata AG, ad ablata CH: erit quoque ut tota AB, ad totam 219 quint.
 CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) major, quam CD. Igitur & GB, major erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E, fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul majores quam E, & CD, simul, cum GB, sit major quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

Hic finem Euclides imponit quinto libro. Veram quia Campanus, & nonnulli alii adjiciunt aliàs quasdam propositiones, quibus sæpenumero gravissimi Scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Joannes Regiomontanus, & alii utuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annexere; & maxima, qua fieri potest, brevitate demonstrare, nec non in numerum, ac seriem propositionum

tionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improporionalibus, quarum prima hac est.

xxvi.

[THEOR. 26. PROPOS. 26.]

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

TABXXXI.
fig. 5.

Habeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportionem D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, ut C, ad D; eritque proportio A, ad B, major quoque quam E, ad B; ^{a 10. quint.} ac propterea A, major erit quam E. ^{b 8. quint.} Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed ut est B, ad E, ita est convertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.]

xxvii.

[THEOR. 27. PROPOS. 27.]

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem; quam secunda ad quartam.

TABXXXII.
fig. 5.

Habeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, ut C, ad D; eritque proportio A, ad B, ^{a 10. quint.} major etiam quam E, ad B: ^{b 8. quint.} Ideoque A, major erit quam E. Quare major erit proportio A, ad C, quam B, ad D.

A, ad C, quam E, ad C. *c* Quoniam vero permutando est, ut E, ad C, ita B, ad D, (cum posita sit E, ad B, ut C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, major quoque erit quam B, ad D. Quod est propositum.] *c16quint.*

[THEOR. 28. PROPOS. 28. *xxvii.*]

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIt major proportio AB, ad BC, quam DE, *TAB. XXI.*
ad EF. Dico & componendo maiorem esse *fig. 6.*
proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF.
Intelligatur enim esse GB, ad BC, ut DE, ad
EF; eritque proportio AB, ad BC, major quo-
que, quam GB, ad BC; *a* Ideoque AB, major *a10 quint.*
quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC,
major quam GC; *b* maiorque propterea erit pro- *b8. quint.*
portio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed
componendo, cut est GC, ad BC, ita est DF, *c18. quint.*
ad EF, (quod posita sit GB, ad BC, ut DE, ad
EF.) Major ergo etiam erit proportio AC, ad
BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.]

[THEOR. 29. PROPOS. 29. *xxix.*]

Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque dividendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIt major proportio AC, ad BC, quam DF, *TAB. XXI.*
ad EF. Dico & dividendo maiorem esse *fig. 6.*
O 4 por-

portionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, ut DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, major quoque
 a 10. *quint.* proportionem GC, ad BC: *a* ideoque major erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC;
 b 8. *quint.* major erit AB, quam GB: *b* Ac propterea major erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC.
 c 17. *quint.* *c* Sed dividendo, ut est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, ut DF, ad EF.) Igitur major quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.]

xxx: [THEOR. 30. PROPOS. 30.

Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit majorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

TAB. XXI. *fig. 7.* **S**It major proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conversionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, major proportio, quam DF, ad EF; *a* erit & dividendo, major proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. *b* Quare convertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE; *c* Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.]
 a 19. *quint.*
 b 16. *quint.*
 c 18. *quint.*

THEOR.

[THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxi.]

Si sint tres magnitudines, & alix ipfis æquales numero, sitque major proportio primæ primorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam major, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines A, B, C, & alix tres D, E, F, sitque major proportio A, ad B, quam D, ad E: Item major B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut E, ad F, eritque propterea proportio B, ad C, major, quam G, ad C; Ideoque B, major erit quam G. Quare major erit proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, major quam D, ad E. Multo ergo major erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, ut D, ad E; eritque propterea major proportio A, ad G, quam H, ad G; Ideoque A, major erit, quam H. Quare major quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: Atqui ut H, ad C, ita est, ex æqualitate D, ad F. (quoniam ut D, ad E, ita est H, ad G; & ut E, ad F, ita G, ad C.) Major ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.]

xxxij. [THEOR. 32. PROPOS. 32.]

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque major proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam major, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

TAB-XXI. **fig. 9.** **S**int tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque major proportio A, ad B, quam E, ad F. Item major B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque majorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut D, ad E, eritque propterea proportio B, ad C, major quam G, ad C. *a* Ideoque major erit B, quam *a*10. *quint.* G. *b*8. *quint.* **Q**uare major erit proportio A, ad G, minorem, quam ejusdem A, ad B, majorem; Est autem proportio A, ad B, major quam E, ad F. Multo ergo major est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, ut E, ad F; Eritque propterea major proportio A, ad G, quam H, ad G; *c*10. *quint.* ideoque major erit A, quam H. *d*8. *quint.* Quocirca A, major ad C, majorem habebit proportionem, quam H, *e*13. *quint.* minor ad eandem C: *e* At ut H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita est G, ad C, & ut E, ad F, ita est H, ad G.) Major ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.]

THEOR.

[THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxij.]

Si fuerit major proportio totius ad totum, quam ablatis ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum major proportio, quam totius ad totum.

SIt major proportio totius AB, ad totam CD, *TAB.* quam ablatae AE, ad ablatam CF. Dico & **XXII.** proportionem reliquae EB, ad reliquam FD, majorem esse, quam totius AB, ad totam CD. *fig. 1.* Cum enim major sit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; erit quoque permutando, *a17-quis.* major proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; *b30-quis.* ac propterea, per conversionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD. *c17-quis.* Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est, EB, reliqua ad reliquam FD, majorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.]

[THEOR. 34. PROPOS. 34. xxxiv.]

Si sint quotcunque magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, sitque major proportio primae priorum ad primam posteriorum, quam secundae ad secundam; & haec major, quam tertiae ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, majorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum, majorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Sint primum tres magnitudines A, B, C, & *TAB.* aliae tres D, E, F. Sit autem major propor- **XXII.** *fig. 2.* tio

tio A, ad D; quam B, ad E; Item major B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportionem ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem vero, proportionem A, ad D; maiorem denique etiam proportionem C, ad F. Cum enim major sit proportio A, ad D, quam B, ad E; *a* erit permutando *ba8-quins.* major A, ad B, quam D, ad E. *b* Igitur componendo, major erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E; *ca7-quins.* *c* Permutando ergo rursus, major erit proportio A, B, simul ac D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; *d* habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, major erit proportio, B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. *ea7-quins.* *e* Permutando igitur, major erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; *fa8-quins.* *f* & componendo ergo major est proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F; *ga7-quins.* *g* Et rursus permutando major proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quam B, C, ad E, F, quod est primum.

Itaque cum sit major proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quam ablata B, C, ad ablatam E, F, *ha33-quins.* *h* erit & major proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

Quoniam vero major est proportio B, ad E, quam C, ad F; *ia7-quins.* *i* erit permutando major quoque *ka8-quins.* B, ad C, quam E, ad F; *k* & componendo, major totius B, C, ad C, quam totius E, F, ad F, *la7-quins.* *l* & rursus permutando, major B, C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem major proportio A, B, C, ad D, E, F, ut ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo major erit pro-

Fig. 3.

TAB. XXI.

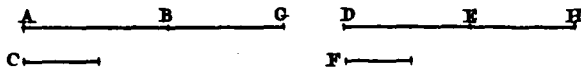


Fig. 4.

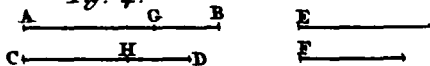


Fig. 5.



Fig. 6.

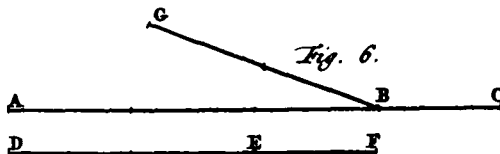


Fig. 7.

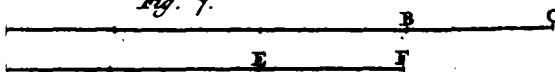
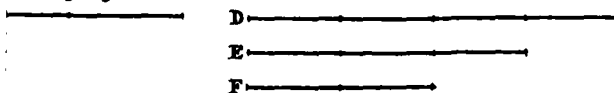


Fig. 8.



Fig. 9.



proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam ultimam C, ad ultimam F, quod est tertium.

Deinde sunt quatuor magnitudines utrobique cum eadem hypothese, hoc est, sit quoque major proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Ut enim jam in tribus est ostensum, major est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo major erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. Permutando ergo major erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H, & componendo major A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H, & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, major quam B, C, G, ad E, F, H, quod est primum.

Itaque cum sit major proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablata B, C, G, ad ablatam E, F, H, perit & reliquæ A, ad reliquam D, major proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod est secundum.

Quoniam vero, ut in tribus est demonstratum, major est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & major A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, ut fuit ostensum; multo major erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam ultimæ G, ad ultimam H; quod est tertium.

Eadem arte concludet, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.]



EUCLIDIS ELEMENTUM SEXTUM.

DEFINITIO. I.

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

TAB.
XXII.
fig. 4.

UT triangula ABG , DEF , similia dicentur si fuerint equiangula, ita ut *angulus* A , *angulo* D ; & B , ipsi E ; & C , ipsi F , æqualis sit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, ut AB , ad AC , ita DE , ad DF ; & ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , & ut AC , ad CB , ita DF , ad FE .

Quod si anguli unius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figurae similes: Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas equiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero equalia, esse similes, quanquam inter se maxime sint inæquales.

TAB.
XXII.
fig. 5.

Cujusmodi sunt triangula æquilatera GHI , KLM . Propter laterum enim æqualitatem, erit GH , ad GI ,

GI, ut KL, ad KM. Item GH, ad HI, ut KL, ad LM, & GI, ad IH, ut KM, ad ML, cum semper sit proportio aequalitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

DEFINITIO. II.

Reciprocae autem figurae sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

UT si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, ut utrobique sit & antecedens, & consequens diversarum proportionum, hoc est, ut sit ea proportio AB, ad EF, qua FG, ad BC, seu eadem AB, ad FG, qua EF, ad BC; (utroque enim modo AB, est antecedens unius proportionis & BC, consequens alterius, in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, est consequens unius, & FG, antecedens alterius; vel secundo modo FG, consequens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamvis similia non sint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, reciproca, si fuerit ut IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel ut IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neque memini me inuenisse apud Geometras usum reciprocarum figurarum in aliis figuris, quam in parallelogrammis, & triangulis.

TAB.
XXII.
fig. 6.

TAB.
XXII.
fig. 7.

DEFI-

DEFINITIO. III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum ut tota ad majus segmentum, ita majus ad minus se habuerit.

TAB. XXII. *SI* linea recta quævis AB , ita dividatur in C , inæqualiter, ut sit, quemadmodum tota AB , ad majus segmentum AC , ita AC , majus segmentum ad CB , minus segmentum; dicetur divisa esse secundum extremam, & mediam rationem.

DEFINITIO. IV.

Altitudo cujuscunque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.

TAB. XXII. *SI* à vertice A , trianguli ABC , ad basin BC , perpendicularis ducatur AG , dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC ; ita ut tantum dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis AG . Sic etiam perpendicularis DH , ducta à D , vertice trianguli DEF , ad basin EF , ad partes E , protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF . Itaque si duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad bases (sive hæc protractæ sint, sive non) demissa, fuerint æquales, eandem dicentur hujusmodi figura habere altitudinem. Tunc autem hujusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cujuscumque sunt perpendiculares AG , DH , triangulorum ABC , DEF , in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH , DHG ,

DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis
 aequales, immo duo recti; aerunt recta AG, DH, ^{a 28. primi}
 parallela; Sunt autem & AD, GH, parallela;
 eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis
 constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;
 hac propterea latera opposita AG, DH, ^{b 34. primi}
 erunt. Eandem igitur dicuntur ea triangula habere
 altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices
 ponantur C, & F, bases vero AB, & DE; non
 habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis
 enim ducta ex F, ad Basin DE, protractam aqua-
 lis non est perpendiculari ex C, ad basin AB, de-
 ducta, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis
 possint constitui, ut manifestum est.

Recte vero ab Euclide altitudo figura cujusvis de-
 finita est per lineam perpendicularem, qua à vertice
 ad basin deducitur: quoniam, ut scribit Ptolemaeus
 in libello de Analemmate, & referente Simplicio,
 in libro de dimensione, mensura cujuscunque rei
 debet esse stata, determinataque, & non indefinita:
 Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito
 Geometra, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola
 linea perpendicularis certa est, determinataque longi-
 tudinis, alia autem omnes incerta indeterminataque.

DEFINITIO. V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum
 rationum quantitates inter se multiplicatae,
 aliquam effecerint rationem.

Quoniam denominator cujuslibet proportionis ex-
 primit, quanta sit magnitudo antecedens ad
 consequentem; (ut denominator quadrupla proportio-
 nis, nempe 4. ostendit, in quavis proportionem qua-
 drupla

drupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadrupla, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; ut idem significet quantitas alicujus proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicata effecerint illam proportionem, seu (ut veris Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, sive denominatorem. Ut proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla; quoniam denominator proportionis duodecupla, nimirum 12. producit ex multiplicatione denominatoris dupla proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextupla, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producit idem denominator 12. duodecupla proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.

Porro quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio prima ad ultimam componi dicitur ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. cum illa ex his intermediis constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producat, ut quinto libro defin. 10. exposuimus: ita ut si fuerint due proportionibus æquales intermedia, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio prima magnitudinis ad ultimam duplicata proportionis prima ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiam

etiam in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio prima ad ultimam dicitur componi ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis prima magnitudinis ad ultimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

DEFINITIO. VI.

[Parallelogrammum secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat majorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, ut parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum unum parallelogrammum.]

Sit data recta linea AB , supra quam constituitur parallelogrammum $ACDE$, quod non occupet totam lineam AB , sed desit CB ; & ducta BF , parallela ipsi CD , donec cum ED , protracta conveniat in F , compleatur totum parallelogrammum $ABFE$. Parallelogrammum igitur AD , applicatum secundum rectam AB , deficere dicitur parallelogrammo DB , ita ut DB , appelletur defectus. TAB. XXII. fig. 10.

Rursus sit data recta linea AC , supra quam constituantur parallelogrammum $ABFE$, quod habeat latus AB , majus recta data AC ; & ducatur CD , ipsi BF , parallela. Parallelogrammum igitur AF , applicatum secundum rectam AC , excedere dicitur parallelogrammo DB , ita ut DB , vocetur excessus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.

TAB.
XXII.
fig. 11.

Sint duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, ejusdem altitudinis, quorum eadem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, ut est basis BC, ad basin EF. Hoc est, si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis EF, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æque multiplicia primæ ac tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere, ut definitio 6. libr. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN, (Nam ut in defia. 4. dictum est, triangula ac parallelogramma tam demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas, sic enim perpendiculares à verticibus ad bases demissæ æquales erunt,) & ex BL, sumantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipsi BC, æquales; Item ex FN, abscindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN, ærunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in

tor

tot triangula æqualia sunt divisa tota triangula
 ACL, DEN, in quot rectas æquales sectæ fue-
 runt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si ba-
 sis CL, æqualis fuerit basi EN, *b* necessario tri- *b 38. primi*
 angulum ACL, æquale est triangulo DEN, ac
 proinde si CL, major fuerit quam EN, necessario
 ACL, majus est quam DEN, & si minor, mi-
 nus; deficient propterea una CL, recta, & tri-
 angulum ACL, æque multiplicia primæ magni-
 tudinis BC, & tertię ABC, ab EN, recta & trian-
 gulo DEN, æque multiplicibus secundæ EF, &
 quartæ DEF, vel una æqualia erunt, vel una
 excedent, si ea sumantur, quæ inter se respon-
 dent. *a* Quare quæ proportio est primæ BC, ad *a 6. def;*
 secundam EF, basis ad basim, ea est tertię ABC, *quinti.*
 ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut
 igitur basis ad basim, ita est triangulum ad tri-
 angulum. Quod est propositum.

Quoniam autem *b* ut triangulum ABC, ad tri- *b 5. quint;*
 angulum DEF, ita est parallelogrammum CG,
 (æquod duplum est trianguli ABC,) ad paralle- *c 34. primi*
 logrammum EH; (æquod est duplum trianguli *d 34. primi*
 DEF,) perspicuum est, eita quoque esse paralle- *e 11. quint.*
 logrammum ad parallelogrammum, ut est basis
 ad basim. Quod tamen eodem argumento con-
 firmari potest, quo uti sumus in triangulis, si
 prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ pa-
 rallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, pa-
 rallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & paral-
 lelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita
 se habent inter se, ut bases. Quod erat demon-
 strandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. *q.*

Si ad unum trianguli latus parallela ducta
 fuerit recta quædam linea, hæc proportio-
 naliter secabit ipsius trianguli latera. Et si
 trianguli latera proportionaliter secta fuerint,

quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

TAB. XXII. **IN** triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse ut AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, *a* erunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta inter se æqualia. *b* Quare ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: *c* Atqui ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cum hæc triangula sint ejusdem altitudinis, ut constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, ut triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. *d* Ut igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæc duæ proportionēs eandem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & ejusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) Quod est propositum.

Secet deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE, *e* erit ut basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint ejusdem altitudinis: Ponitur autem ut AD, ad DB, ita AE, ad EC. *f* Igitur erit ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC: Sed rursum *g* ut basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis ejusdem. *h* Igitur ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. *i* Æqualia ergo sunt triangula DEB, & DEC: ac propterea, cum eandem habeant basin DE, & inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC, quod est propositum. Si itaque
ad

ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iii.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo ABC, recta AD, secet primo angulum BAC, bifariam. Dico esse ut BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cum CA; producta conveniat in E; (coibunt autem omnino BE, CA, propterea quod anguli C, & CBE, minores sunt duobus rectis i. Cum enim C, & CDA, a minores duobus rectis sint; b sit autem angulus CDA, angulo CBE, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & CBE, duobus rectis minores,) c eritque angulus EBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter se æquales; d Ideoque & rectæ BA, EA, inter se æquales. e Ut igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. f Atqui ut EA, ad AC, ita est BD, ad DC. Cum in triangulo BCE, recta AD, sit parallela lateri BE. g Igitur ut BA, ad AC, ita est BD, ad DC. Quod est propositum.

Sit deinde ut BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD,

TAB.

XXII.

fig. 13.

i. 19. primi

a 17. primi

b 29. primi

c 29. primi

d 6. primi

e 7. quint.

f 2. sext.

g u. quint.

b31. primi parallela *b* coiens cum *CA*, protracta in *E*.
 Quoniam igitur ut *BA*, ad *AC*, ita ponitur *BD*,
e 2. sent. ad *DC*. *e* Ut autem *BD*, ad *DC*, ita est *EA*,
 ad *AC*; (quod in triangulo *BCE*, recta *AD*,
f11. quint. sit lateri *BE*, parallela) ferit ut *BA*, ad *AC*,
g9. quint. ita *EA*, ad eandem *AC*. *g* Æquales igitur sunt
h 5. primi *BA*, & *EA*, inter se, *h* ac propterea anguli
i29. primi *ABE*, & *E*, æquales quoque erunt. Cum igitur
 angulus *ABE*, æqualis sit alterno *BAD*, &
 angulus *E*, externo *DAC*, erunt & duo anguli
BAD, *DAC*, inter se æquales, quod est propo-
 situm. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus
 sit, &c. Quod erat demonstrandum.

iv. THEOR. 4. PROPOS. 4.

Æquiangulorum triangulorum proportiona-
 lia sunt latera, quæ circum æquales angu-
 los, & homologa sunt latera, quæ æqua-
 libus angulis subtenduntur.

TAB. XXII.
fig. 14. **S**Int æquiangula triangula *ABC*, *DCE*, sintque
 æquales anguli *ABC*, *DCE*, & *ACB*, *DEC*,
BAC, *CDE*. Dico esse *AB*, ad *BC*, ut *DC*,
 ad *CE*, & *BC*, ad *CA*, ut *CE*, ad *ED*; & *AB*,
 denique ad *AC*, ut *DC*, ad *DE*: Ita enim latera
 circa æquales angulos sunt proportionaria, ho-
 mologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis
 subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia
 æquales respiciunt angulos, & consequentia si-
 militer. Constituantur latera *BC*, *CE*, secundum
 lineam rectam, ita ut angulus *DCE*, externus
 sit æqualis interno *ABC*, pariterque externus
ACB, interno *DEC*. Et quia duo anguli *ABC*,
a17. primi *ACB*, *a* minores sunt duobus rectis: est autem
 angulo *ACB*, æqualis angulus *DEC*, erunt &
b13. prom. anguli *B*, & *E*, duobus rectis minores. *b* Quare
 rectæ *BA*, & *ED*, productæ ad partes *A*, *D*,
 coibunt. Producantur ergo, & conveniant in *F*.
 Quoniam vero angulus externus *DCE*, æqualis
 est

est interno opposito ABC; & parallelæ erunt CD, c18.primi
& BF, Eadem ratione parallelæ erunt CA, &
EF, quod angulus externus ACB, sit æqualis in-
terno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF,
proptereaque recta AF, æqualis rectæ CD; & d34.primi
recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in trian-
gulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF,
erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æ- c 2. sext.
qualis est ipsi AF,) ut BC, ad CE. Permutan-
do figitur erit AB, ad BC, ut DC, ad CE. f16. quint.
Rursus quia in eodem triangulo BEF, recta CD,
parallela est lateri BF, g erit BC, ad CE, ut g 2. sext.
FD, hoc est, ut CA, (quæ æqualis est ipsi FD,)
ad ED. Permutando bigitur erit BC, ad CA, h16. quint.
ut CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC,
ut DC, ad CE, & BC, ad CA, ut CE, ad
ED: erit & ex æqualitate AB, ad CA, ut DC, i 22. quint.
ad ED. Quod est propositum. Æquiangulorum
ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c.
Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni
lateri in triangulo, aut re triangulum toti triangulo TAB.
simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, XXII.
parallela DE, Dico triangulum ADE, triangulo ABC, fig. 15.
esse simile. Æquiangula namque sunt, k cum anguli k19. primi
ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, exter-
nis; & angulus A, communis. Quare ut demo-
stratum est, habent latera circa æquales angulos propor- l 4. sext.
tionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

Si duo triangula latera proportionalia ha-
beant; æquiangula erunt triangula, & æ-
quales habebunt eos angulos, sub quibus &
homologa latera subtenduntur.

Habeant triangula ABC, DEF, latera propor- TAB.
tionalia, sitque AB, ad BC, ut DE, ad XXIII.
EF, fig. 15.
P 5

234 *EUCLIDIS GEOMETRIÆ.*

EF, & BC, ad CA, ut EF, ad FD, & AB, denique ad AC, ut DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. *h 13. primi* ¶ Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, convenientque rectæ EG, FG, in G: *a 31. primi* ¶ eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur sunt triangula ABC, GEF. Quare *b 4. sext.* but AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Ut autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. *e 11. quint.* ¶ Igitur ut GE, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: *d 9. quint.* ¶ proptereaque æquales erunt GE, DE. Rursus, quoniam ut BC, ad CA, ita est EF, ad FG: Ut autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; *f 7. quint.* ¶ ferit ut EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; *g 9. quint.* ¶ ideoque æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, utrumque utrique; & basis communis EF; *h 8. primi* ¶ erunt anguli G, & D, æquales, *i 4. primi* ¶ iac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus, G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit, quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

vi.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

TAB.
XXIII.
fig. 2.

¶ Sit angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera AB, BC, pro-

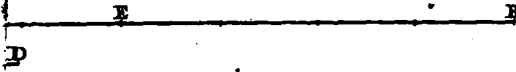


Fig. 3.

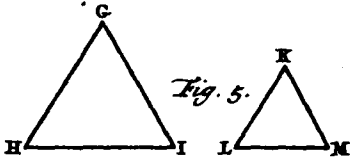
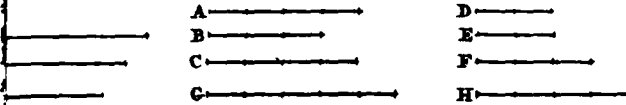


Fig. 5.

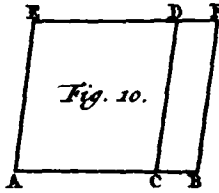


Fig. 10.

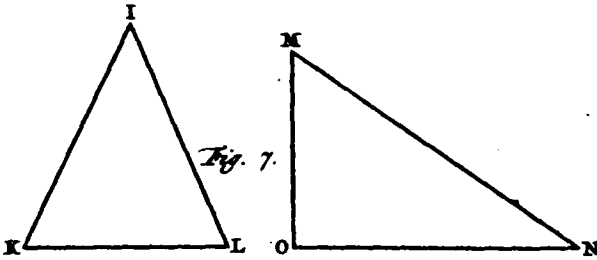


Fig. 7.

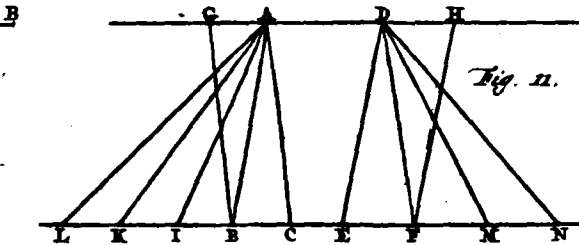


Fig. 11.

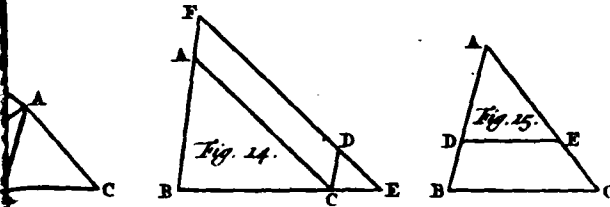
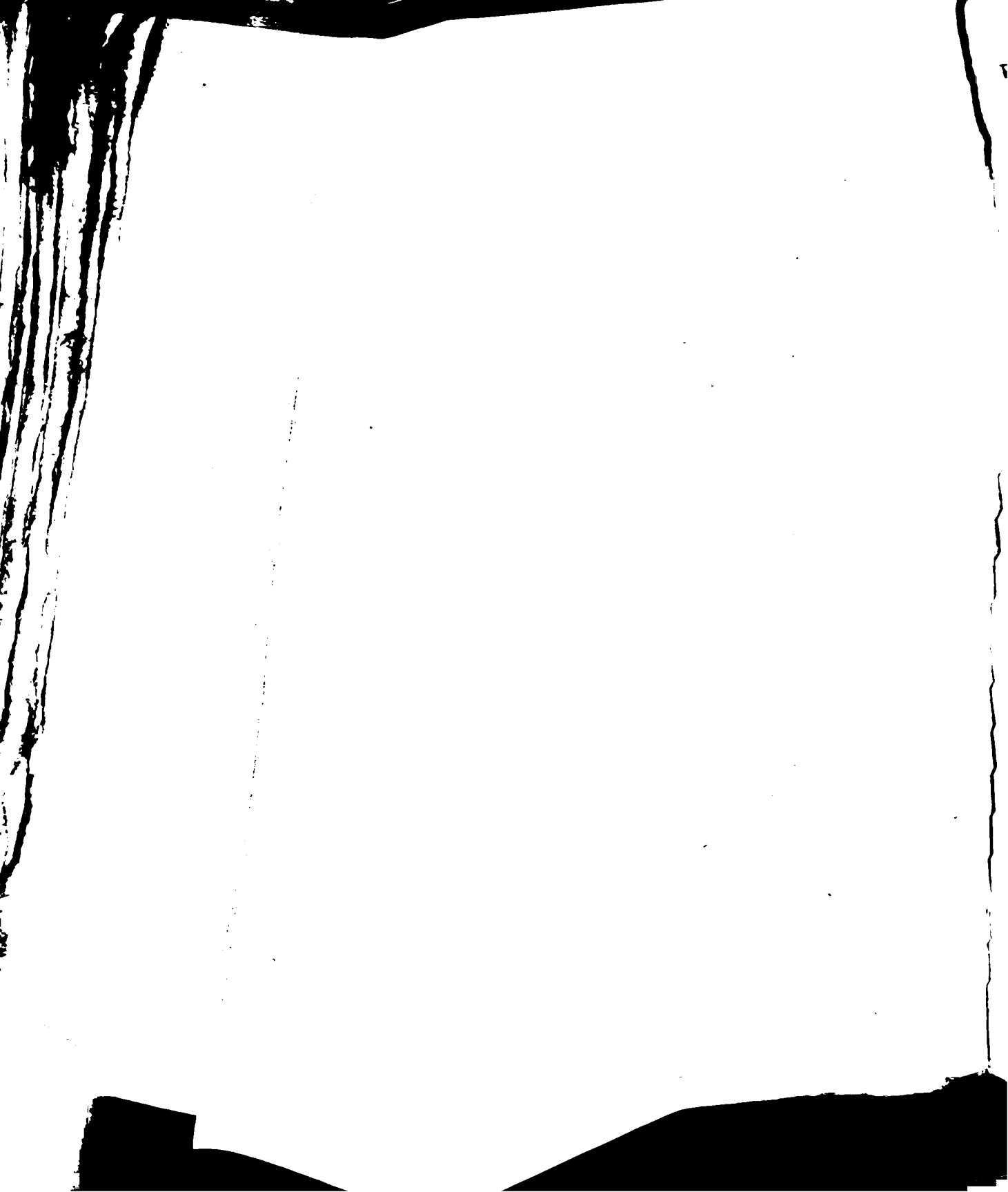


Fig. 14.

Fig. 15.



proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, ut DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; *a* & angulo C, angulus EFG, eritque ut in præcedenti propos. dictum est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare aut AB, ad BC, *a* 4. *sext.* ita est, GE, ad EF: Sed ut AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. *b* Igitur ut DE, ad EF, ita *b* 11. *quint.* est GE, ad eandem EF; *c* atque idcirco DE, *c* 9. *quint.* GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus DEF, proptereaque æquales ad invicem erunt anguli DEF, GEF.) *d* erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, EFD, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul utrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

Si angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF, & latera AC, CB, circa angulum C, æqualia sunt lateribus DF, FE, circa angulum F, trianguli DEF, & latera AC, CB, circa angulum C, trianguli ABC, erunt triangula ABC, DEF, æquiangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc est sit ut AC, ad CB, ita DF, ad FE; hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, & F, non sunt æquales, sit ACB, major quam F: fiatque ipsi F, æqualis AGC. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, a 31. primi a erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt. b 4. sext. Quare but AC, ad CG, ita erit DF, ad EF: Sed ut DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. c 11. quint. e Ut igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB, d 9. quint. ad CB, d ac propterea æquales erunt CG, CB, e 5. primi e & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, f 13. primi recto major; scum AGC, CGB, sint duobus rectis æquales: Est autem ostentus angulus AGC, angulo E, æqualis. Major igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

Sit deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque ut prius, angulus B, angulo CGB, æqualis, ideoque & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel majores, vel æquales duobus rectis, quod est absurdum. g 17. primi g Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli ACB, h 31. primi & F, sed æquales, atque hincirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt; quod est propositum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, TAB.
 à quo ad basin perpendicularis agatur AD. XXIII.
 Dico triangula ADB, ADC, similia esse & toti fig. 4.
 triangulo ABC, & inter se. Cum enim in tri-
 angulis ABC, DBA, anguli BAC, & ADB;
 sint recti, & angulus B, communis; erunt & a 32. primi
 reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Æqui-
 angulum est igitur triangulum DBA, triangulo
 ABC, & ac propterea habebunt latera circa æqua- b 4. sexti.
 les angulos proportionalia, &c. hoc est, erit ut
 CB, ad BA, ita BA, ad BD; & ut BA, ad
 AC, ita BD, ad DA; & ut BC, ad CA, ita
 BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqua-
 libus angulis opponuntur, ut vult propos. 4. hu-
 jus lib. Quare simile est triangulum ADB, toti
 triangulo ABC. Eodem modo ostendetur trian-
 gulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam
 anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus
 C, communis; & ac propterea anguli ABC, & c 32. primi
 CAD, æquales. Quare erit BC, ad CA, ita est d 4. sexti.
 CA, ad CD; & ut CA, ad AB, ita CD, ad
 DA, & ut CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic
 enim opponuntur quoque homologa latera angu-
 lis æqualibus, ex præscripto propos. 4. hujus lib.
 Non secus demonstrabitur, similia inter se esse trian-
 gula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC,
 sint recti, & anguli ABD, CAD, ostensi æqua-
 les, nec non anguli BAD, ACD; Atqui idcirco
 sit erit BD, ad CA, ita DA, ad DC; & ut e 4. sexti.
 DA, ad AB, ita DC, ad CA; & ut AB, ad
 BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo
 rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicu-
 laris

laris ducta sit , &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M .

Ex hoc manifestum est , perpendicularem , quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur , esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta : Item utrumlibet laterum angulum rectum ambientium , medium proportionale inter totam basin , & illud segmentum basis , quod ei lateri adjacet.

Ostensum est enim , esse ut BD , ad DA , ita DA , ad DC ; ac propterea DA , esse mediam proportionalem inter BD , & CD : Item esse ut CB , ad BA , ita BA , ad BD ; & idcirco BA , mediam esse proportionalem inter CB , & BD : Denique esse ut BC , ad CA , ita CA , ad CD ; ideoque CA , esse proportionalem mediam inter BC , & CD. Quod est propositum.

P R O B L . I . P R O P O S . 9 .

A data recta linea imperatam partem auferre.

TAB. **XXIII.** **fig. 5.** Imperetur , ut ex linea AB , auferamus partem tertiam. Ex A , ducatur recta AC , utcumque faciens angulum CAB ; & ex AC , abscindantur tot partes æquales cujuslibet magnitudinis , quota pars detrahenda est ex AB , ut in proposito exemplo tres AD , DE , EF. Deinde ex F , ad B , recta ducatur FB , cui per D , parallela agatur DG. Dico AG , esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF , lateri *a a. sent.* FB , parallela sit recta DG ; *a* erit ut FD , ad *b b8. quins.* DA , ita BG , ad GA. *b* Componendo igitur , ut FA , ad DA , ita BA , erit ad GA : Sed FA , ipsius AD , est tripla , ex constructione. Igitur & BA , ipsius AG , erit tripla ; ideoque AG , tertia pars erit ipsius AB , quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

THEOR.

PROBL. 2. PROPOS. 10. xij.

Datam rectam lineam infectam similiter
secare, ut data altera recta secta fuerit.

SIt recta AB, secanda similiter, ut secta est
recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, *TAB. XXIII.*
quæ sunt partibus AD, DE, EC, proportionales. *fig. 6.*
Conjungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes
angulum quemcunque BAC, & connectatur re-
cta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG,
parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter
esse sectam in F, & G, ut est secta AC, in D,
& E, aut AD, ad DE, ita est AF, FG. Pro-
portionales ergo sunt partes AF, FG, partibus *a 2. sec.*
AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, pa-
rallela, secans EG, in I; berit rursus, ut DE, *b 2. sec.*
ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad
GB; quod FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æ- *c 34. prim.*
qualis sit. Quare proportionales quoque erunt
partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque
ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C,
ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam
rectam lineam infectam similiter secuimus, ut
data altera recta secta fuit. Quod faciendum
erat.

PROBL. 3. PROPOS. 11. x.

Duabus datis rectis lineis tertiam pro-
portionalem adinvenire.

SInt duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, ut effi-
ciant angulum A, quemcunque, sitque inve-
nienda illis tertia proportionalis, sicut quidem *TAB. XXIII.*
AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producat *fig. 7.*
AB, quam volumus esse antecedentem, & ca-
piatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequens
esse debet, sive media. Deinde ducta recta BC,
agatur

240 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse ut AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, a 2. *sext.* lateri DE, parallela sit recta BC; a erit ut AB, ad BD, ita AC, ad CE: b Sed ut AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Ut igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum.

S C H O L I U M.

Inventa autem tertia linea continue proportionali, si primum omiseris, & aliis duabus tertiam inveneris, habebis quatuor lineas continue proportionales.
TAB. Ut si lineis A, & B, adinveniat tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octava; & sic in infinitum.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

TAB. **XXIII.** **fig. 8.** Sint tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus invenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponentur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo a 2. *sext.* ACE, lateri CE, acta sit parallela BD; a erit ut AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta

quarta est proportionalis ; ac propterea tribus datis rectis lineis , quartam proportionalem invenimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 5. PROPOS. 13. ix.

Duabus datis rectis lineis , mediam proportionalem adinvenire.

Sint duæ rectæ AB, BC, quibus media invenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Divisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & intervallo EA, vel EC, semicirculus describatur, ADC : Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam usque. Dico BD, esse, mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD ; ærit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB, erit per corollarium propos. 8. hujus lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis mediam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum. TAB. XXIII. fig. 9. a 31. tertii.

THEOR. 9. PROPOS. 14. xiiij.

Æqualium & unum uni æqualem habentium angulum , parallelogrammorum , reciproca sunt latera , quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera , quæ circum æquales angulos ; illa sunt æqualia.

Sint duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, TAB. XXIII. fig. 10.

Q

proca,

proca, hoc est, esse ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, & BG, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstravimus. Producantur jam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur
a 7. quint. æqualia sunt parallelogramma DB, BF: *a* erit ut DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed ut
b 1. sext. DB, ad BH, *b* ita est AB, basis ad basin BG, quod parallelogramma sint ejusdem altitudinis; & similiter ut BF, ad BH, ita est basis EB, ad basin BC. Igitur ut AB, ad BG, ita est EB, ad BC. Quod est propositum.

E contrario sint jam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cum sit, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC: *c 1. sext.* Ut autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & ut EB, ad BC, ita BF, ad idem BH; erit
d 9. quint. quoque DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. Atque ideo æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

xiv. THEOR. 10. PROPOS. 15.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

7 AB. XXIII. **S**int duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera
fig. 11. circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse
 ut

ut AB, ad BE, ita DB, ad BC. Conjungantur enim triangu-
la ad angulos æquales, ita ut AB, BE, efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, DBE, sint æquales; erunt & DB, BC, una recta linea, ut demonstratum est ad propof. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sunt triangu-
la ABC, DBE, a erit ut ABC, ad BCE, ita DBE, ad a 7. *quint.*
idem BCE. Sed ut triangulum ABC, ad trian-
gulum BCE, b ita est basis AB, ad basin BE, b 1. *sext.*
quod hæc triangu-
la ejusdem sint altitudinis; & similiter ut DBE, & BCE, ita est basis DB, ad BC. Quare ut AB, ad BE, ita est DB, ad BC. Quod est propositum.

Jam vero contra, sint latera circa angulos æ-
quales, qui ad B, reciproca, hoc est, ut AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangu-
la ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit ut AB, ad BE, ita DB, ad BC; ut autem AB, ad BE, c ita triangulum c 1. *sext.*
ABC, ad triangulum BCE; & ut DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE;
Erit ut ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, a proptereaque æqualia erunt triangu-
la ABC, DBE. d 9. *quint.*
Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. II. PROPOS. 16. xv

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fue-
rint: quod sub extremis comprehenditur re-
ctangulum, æquale est ei, quod sub me-
diis comprehenditur, rectangulo. Et si sub
extremis comprehensum rectangulum æquale
fuerit ei, quod sub mediis continetur, re-
ctangulo; illæ quatuor rectæ lineæ propor-
tionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; ut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. **TAB. XXIII.**
Q 2 ad *fig. 12.*

ad BC: Sitque rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis AB, BC; rectangulum vero EFGH, comprehensum sub mediis EF, FG: Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit ut AB, ad FG, ita EF, ad BC; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod est propositum.

Contra vero, sint jam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse ut AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F, erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

xvi. THEOR. 12. PROPOS. 17.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehendatur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

^{7 AB.}
^{XXIII.}
^{fig. 13.} Sint tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: ut quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD, contentum sub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; ut quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensum sub mediis EF, FG, propter æqua-

qualitatem rectarum EF, FG. Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub mediis EF, FG, comprehenso: Quod est propositum.

Sed sunt jam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; erit ut AB, ad EF, ita FG, ad BC: *b 16. scilicet.* Ut autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, *c 7. quins.* æqualis, ad eandem BC. Quare ut AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex posteriori hujus theorematism parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasvis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A data recta linea dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere.

Si data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resolvant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI; coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt

sunt, cum æquales sint duobus angulis FCD, *a* qui duobus rectis sunt minores) *a* 17. primi
b 32. primi *b* eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus BIH. Et *c* quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Cocant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: *d* Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, convenient in aliquo puncto. Convenient ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absolvantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut constat ex constructione; cum singulæ partes unius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, *e* 4. sext.
rectilineo CDEFG. Quoniam vero eita est AB, ad BI, ut CD, ad DF: & ita BI, ad BH, ut *f* 22. quint.
DF, ad DE: ferit ex æquo ita AB, ad BH, ut CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, *g* 4. sext.
quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula *h* 4. sext.
BHI, DEF. *b* Rursus ita est HI, ad IB, ut EF, ad FD, & ita IB, ad IA, ut FD, ad FC: *i* 22. quint.
& ita IA, ad IK, ut FC, ad FG. *i* Igitur
ex

ex æquo erit ita HI , ad IK , ut EF , ad FG , & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK , EFG , proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsimus. Quod faciendum erat.

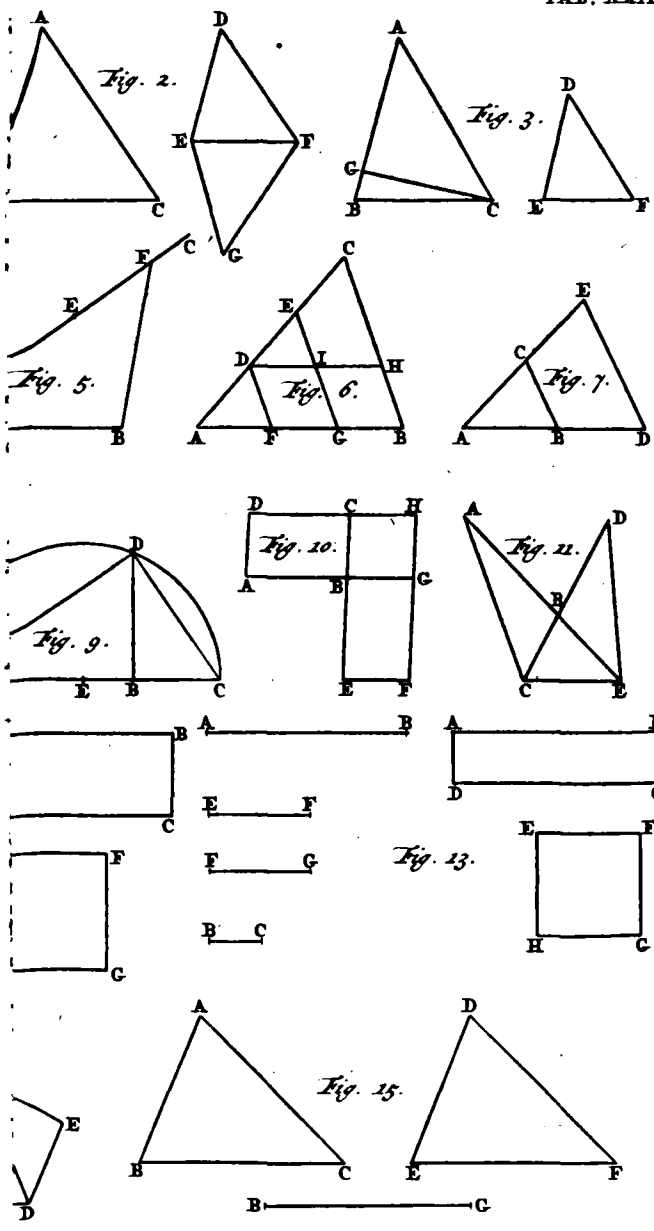
THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij:

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint triangula similia ABC , DEF , habentia ^{TAB.} angulos æquales B , & E : Item C , & F , &c. ^{xxiii.} Et sit ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , &c. ^{fig. 15.} Dico triangula inter se rationem habere duplicatam ejus, quam habent latera homologa BC , & EF , vel AB , & DE , vel AC , & DF ; Hoc est, si homologis lateribus BC , EF , inveniatur tertia proportionalis BG : ita esse triangulum ABC , ad triangulum DEF , ut rectam BC , ad rectam BG : ac proinde cum ex defn. 10. lib. 5. proportio BC , ad BG , dicatur duplicata proportionis BC , ad EF : proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC , EF . Ita ut nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, ut est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales in proportionem duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC , EF , BG , continue proportionales in proportionem homologorum laterum BC , EF . Sint ergo primum latera BC , EF , æqualia, ac proinde & tertia pro-

proportionalis BG, illis æqualis: ita ut proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triacula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adjacent: erit triangulum ad triangulum, ut recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicitur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam habet latus BC, ad latus EF, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, ut dictum est, triacula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicitur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, ut constat ex defin. 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam ejus, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod est propositum.

TAB. Sit deinde BC, latus latere EF, majus; & ex
XXIV. fig. 1. BC, abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturque recta AG. Quia igitur
b 11. sext. est ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando ut AB, ad DE, ita BC, ad EF: Ut autem BC, ad EF, ita est per constructionem EF, ad BG. Ut ergo AB, ad DE, ita erit EF, ad BG. Quare cum triacula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, ipsa inter se æqualia erunt; & propterea ut
d 15. sext. triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita erit
e 7. quins. idem triangulum ABC, ad triangulum ABG. Ut autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, ejusdem





eiusdem altitudinis, fita est basis BC, ad basin *f* 1. *sem*. BG. Igitur ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triacula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

Sint enim tres rectæ proportionales A, B, C; & TAB; sup. r primam A, & secundam B, constituta triacula XXIV. A, & B, similia, similiterque descripta. Dico, ut est *fig. 2.* recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem 10. lib. 5. *dup* duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. *g* Cum *g* 19. *sem*. igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

Eodem modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituentur triacula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est, recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. *h* Cum igitur & tri- *h* 19. *sem*. angulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa: Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

xxij. THEOR. 14. PROPOS. 20.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

- TAB. XXIV.**
fig. 3. **S**int polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & ut BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona dividi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, HI; divisæque erunt polygonæ in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; *a* æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Item angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppositos: *b* Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter se similia erunt. Eadem ratione erunt similia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde *c* quia est ut AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; ut autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo ut AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatu ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis, *e* Quare triangula ACD, FHI, cum habeant

beant latera circa æquales angulos ACD , FHI , proportionalia, æquiangula erunt, ideoque similia. Eademque ratio est de aliis omnibus triangulis, si plura fuerint.

Dico præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in uno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, ut polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC , FGH , erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC , FH . g Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD , FHI , duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC , FH . Quare ut triangulum ABC , ad triangulum FGH , ita erit triangulum ACD , ad triangulum FHI , cum utraque hæc proportio triangulorum sit duplicata ejusdem proportionis lateris AC , ad latus FH . Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE , ad triangulum FIK , ut ACD , ad FHI : Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula unius polygones cum triangulis alterius, ita ut triangula unius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Ut autem unum antecedens ad unum consequens sita sunt f 19. *sec.* omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygones ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. f 12. *quint.*

Dico postremo, polygones inter se proportionem habere duplicatam ejus, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB , FG , inveniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum $ABCDE$, ad polygonum $FGHIK$, ut est prima linea AB , ad tertiam inventam: ac proinde, cum proportio AB , ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB , ad FG , dici quoque proportionem poly-

polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim sit, ut triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, g. 19. scilicet habeat proportionem duplicatam ejus, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inventam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inventam. Itaque similia polygona in similia triangula dividuntur, &c. Quod demonstrandum est.

C O R O L L A R I U M.

Hinc manifestum est, si fuerint tres rectæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile
TAB. XXIV. similiterque descriptum; uti si A, B, & C, sint tres
fig. 4. proportionales, atque super A, & B, describantur duo polygona similia, uti sunt quadrata A, & B, erit A, ad C, ut quadratum super A, ad quadratum super B.

Hoc non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematibus ex suo theoremate. Ut perspicuum est in hac figura.

22. T H E O R. 15. P R O P O S. 21.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

TAB. XXIV. Sint rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia.
fig. 5. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI;
Item

Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis ejusdem rectilinei GHI; *a* erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet iis, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus ejusdem rectilinei GHI; *b* erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem primam hujus, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 22.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erant. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, ut quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. *a* Inveniat enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. *b* eritque ex æquo, ut AB, ad P, ita EF, ad Q: Ut autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex coroll. propof.

20. hujus lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propof. 19. Et eadem ratione, ut EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. *e* Igitur ut ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

Deinde sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, ut quidem
d 12. sext. AB, ad CD, ita EF, ad GH. *d* Inveniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterque positum; *e* & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, ut AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque ut jam est ostensum, ut ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Ut autem ABI, ad CDK, ita quoque ponitur EM, ad GO. *f 11. quint.* Igitur erit ut EM, ad RV, ita EM, ad GO; *g* Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus super rectas RS, GH, æ-
h 7. quint. quales. *b* Quare erit ut EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, ut AB, ad
i 11. quint. CD. *i* Igitur erit quoque ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

L E M M A.

Quod autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectis æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, major. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, major quam RS, erit quoque HO, major quam SV, & propterea rectilineum GO, majus rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constiui; quod est
 ab-

absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inaequales sunt recta GH , RS . Quod est propositum.

Aliter. Sint duo rectilinea ABC , DEF , & ^{TAB. XXIV.} similia similiterque posita. Dico latera ^{fig. 7.} homologa, cujusmodi sunt recta AB , DE , esse aequalia. Si enim non credantur aequalia, sit AB , majus, quam, DE , inveniaturque rectis AB , DE , tertia proportionalis G . Quoniam ergo est, ut AB , ad DE , ita DE , ad G . Est autem AB , major, quam DE . Erit quoque DE , major, quam G , ac propterea multo major AB , quam G . Ut vero AB , ad G , ita est rectilineum ABC , ad rectilineum DEF , per coroll. propos. 19. vel 20. hujus lib. Igitur cum AB , major sit, quam G , erit quoque rectilineum ABC , majus rectilineo DEF , quod est absurdum, cum positum sit aequale. Non ergo major est AB , recta quam recta DE . Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC , minus ostenderetur rectilineo DEF , quod est contra hypothesin. Quare aequales sunt recta AB , DE .

THEOR. 17. PROPOS. 23. ^{xxiv.}

Aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quae ex lateribus componitur.

Sint parallelogramma aequiangula AC , CF , habentia angulos BCD , ECG , aequales. Dico ^{TAB. XXIV.} proportionem eorum esse compositam ex duabus ^{fig. 8.} proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum aequalem, ad duo latera alterius circa angulum aequalem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno Parallelogrammo, & consequentia

quantia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita ut I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, ut latus DC, ad latus CE; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, ut est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. hujus lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdem proportionibus; hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut BC, CG, efficiant unam lineam rectam: Quo posito, cum anguli BCD, ECG, sint æquales, erunt & DC, CE, una recta linea, ut ad propof. 15. lib. 1. ex Proclo demonstravimus. Producantur deinde AD, FG, donec convenient in H; Sumptaque recta I, quacunque, *a 12. sent.* inveniantur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, *b 1. sent.* ut BC, ad CG, ita AC, ad CH. Ut autem *c 11. quint.* BC, ad CG, ita posita est I, ad K, erit quoque ut AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, ut HC, ad CF, ita K, *d 1. sent.* ad L. Nam ut DC, ad CE, ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, ut DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, ut K, ad L: *e 11. quint.* Ex æquo igitur erit, ut AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. hujus lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque ratione ostendemus, proportionem AC, ad

ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogramma ita conjungantur ad angulos æquales, ut BC, CG, efficiant unam rectam lineam, &c. Æquiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 18. PROPOS. 24. xxiii.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

ESto parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet ejus punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo & inter sese. Quod enim æquiangula sunt toti, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idem est; qui angulus BAD; & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, ut perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam ex coroll. propos. 4. hujus lib. erit ut AB, ad BC, ita AG, ad GI, & ita AE, ad EI, ut BC, ad CD, ita GI, ad IE. Ex æquo igitur, ut BC, ad CD, ita est GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt.

R

TAB.

XXIV.

Fig. 9.

a 19. primi

b 4. 1. 2.

c 4. 1.

d 11. 4.

existant. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales esse proportionalia. Quare per definitionem primam hujus, simile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD; *e 21. sext.* et atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

XXV. PROBL. 7. PROPOS. 25.

Dato rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

TAB. XXV. fig. 1. SInt data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, unum latus rectilinei, cui simile debet constitui, *a 44. vel 45. primi* constituatur parallelogrammum CE, in quovis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B, eritque tam CDG, quam FEH, linea una recta, ut demonstratum est propof. 45. lib. 1. *b 13. sext.* Inveniatur jam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK, *c 18. sext.* super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propof. 19. vel 20. hujus lib. ut CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterque descriptum: *d 1. sext.* Ut autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, ejusdem altitudinis. *e 11. quint.* Legitur erit ut CE, ad DH, ita A, ad L. *f 7. quint.* Ut autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A, & paral-

TAB. XXIV.

Fig. 2.

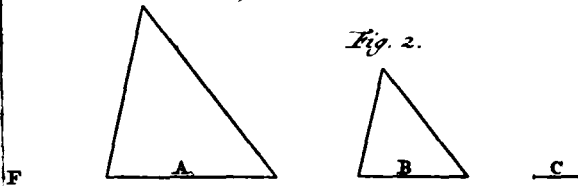
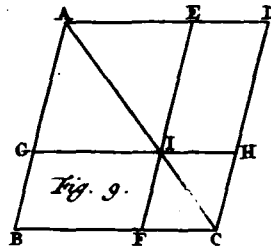
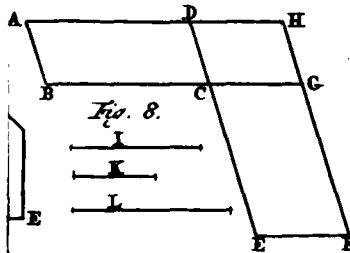
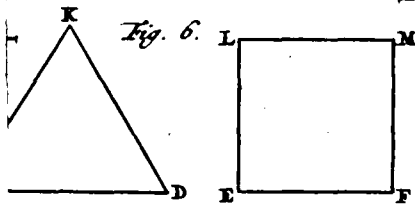
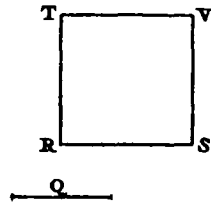
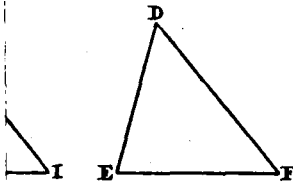
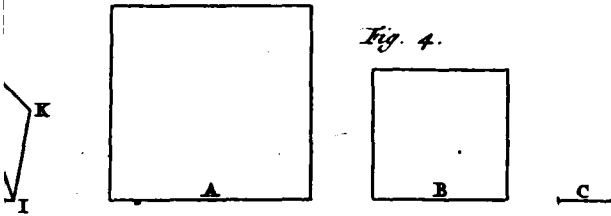


Fig. 4.



parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. *g* Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; *h* proptereaque æqualia erunt rectilinea B, & L: Est autem & L, simile ipsi A, similiterque positum per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

THEOR. 19. PROPOS. 26. xxij.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterque positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint una linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; ipsa erunt similia similiterque posita. *g* Quare erit ut BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed ut BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. *h* Igitur erit ut EA, ad AI, ita EA, ad AG, propterea æquales erunt rectæ, AI, & AG, pars, & totum: quod est absurdum.

R 2

Quod

TAB. Quod si dicatur recta AHC, secare alterum
XXV. latus FG. Tunc ducta HI, parallela ipsi EF,
fig. 3. erunt rursus similia parallelogramma BD, IG,
cap. 24. sext. similiterque posita. *f* Quare erit ut DA, ad AI,
f. 1. def. ita GA, ad AI: Sed ut DA, ad AB, ita quo-
sext. que est GA, ad AE, ob similitudinem parallelo-
gii. quint. grammorum BD, EG. *g* Igitur erit ut GA, ad
h. 9. quint. AI, ita GA, ad AE, hideoque æquales erunt
 rectæ AI, AE, pars & totum: Quod est absur-
 dum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, unam
 rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC,
 transit per punctum F; & ducta diameter AF,
 eaque producta cadit in punctum C. Itaque si à
 parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit,
 &c. Quod erat demonstrandum.

xxvi. THEOR. 20. PROPOS. 27.

Omnium parallelogrammorum secundum
 eandem rectam lineam applicatorum, defi-
 cientiumque figuris parallelogrammis simili-
 bus similiterque positis ei, quod à dimidia
 describitur; maximum, id est, quod ad
 dimidiam applicatur, parallelogrammum si-
 mile existens defectui.

TAB. **D**Etur recta AB, divisa bifariam in C, super-
XXV. que ejus dimidiam BC, constituatur quod-
fig. 4. cunque parallelogrammum CDEB, cujus diame-
 ter BD. Si igitur compleatur totum parallelo-
 grammum ABEH, erit parallelogrammum AD,
 super dimidiam AC, consistens, applicatum se-
 cundum AB, deficiens parallelogrammo CE, &
 existens simile defectui CE. Dico parallelogram-
 mum AD, ad dimidiam AC, applicatum defi-
 cientisque parallelogrammo CE, maximum esse
 omnium, quæ secundum AB, rectam applican-
 tur, deficientque parallelogrammis similibus si-
 militerque positis ipsi CE. Sumpto enim puncto
 G, utcunque in diametro BD, & ductis per G,
 rectis

rectis FGI, KG, quæ sint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, secundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, æquod ipsi CE, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum CE, diametrum. Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: Est autem CI, æquale ipsi CF, propter bases æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additaque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cum CE, majus sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, æquale existens ipsi CE, propter bases æquales AC, CB, majus quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo DG. Eodemque modo ostendetur AD, majus esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam AB, applicantur, ut punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant majorem lineam semisse AC, habentque minorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus similes sint ipsi CE.

Aliter demonstrabitur AD, majus esse parallelogrammo AG, hoc modo. Parallelogramma FD, DI, sunt æqualia, cum bases HD, DE, sint æquales: Est autem DI, majus quam GE, hoc est, quam complementum CG, (quod ipsi GE, æquale est,) parallelogrammo DG. Igitur & FD, majus erit, quam CG, parallelogrammo eodem DG. Atque idcirco addito communi CF, majus erit AD, quam AG, parallelogrammum eodem DG.

Quod si punctum G, sumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratque rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammum AG, applicatum secundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM,

g 14. *sext.* & quod ipsi CE, est simile similiterque positum, cum sit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc majus esse AD, ipso AG. Protracta enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, *b* cum *b* 34. *primi* æquales sint æqualibus AC, CB; *i* 36. *primi* ideoque æqualia parallelogramma HD, DM. *k* 43. *primi* Cum igitur DM, sit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, majus quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, majus erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, majus erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis concludes AD, majus esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse AC, habetque majorem altitudinem, quam AD: dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

xxvij.

PROBL. 8. PROPOS. 28.

Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus, cui simile deesse debet.

TAB.
XXV.
fig. 6.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo quod sit simile dato alteri parallelogrammo D: Secta AB, bifariam

riam in E, super medietatem EB, describatur a 18. *sext.*
 parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, simili-
 terque positum; & compleatur totum parallelo-
 grammum AHGB. Si igitur AF, æquale est
 ipsi C; cum sit applicatum ad AB, deficiens
 parallelogrammo EG, simile ipsi D, factum erit,
 quod jubetur. Si autem AF, majus est quam
 C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum
 per propof. præcedentem, ipsum sit omnium ap-
 plicatorum maximum, dummodo defectus sint
 similes, non posset applicari ullum ad AB, quod
 esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora.
 Propterea adjunxit Euclides; Oportet autem da-
 tum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale
 EG, majus quam C. Sit igitur majus rectilineo
 I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineo-
 rum sit inquirendus, docuimus ad propof. 45.
 lib. 1.) b & constituatur parallelogrammum b 25. *sext.*
 KLMN, simile quidem similiterque positum ipsi
 D, seu ipsi EG, æquale vero excessui invento
 I; ut sit EG, æquale rectilineo C, & parallelo-
 grammu KM, simul; & ob id majus quam KM.
 Cum igitur ob similitudinem sit ut EF, ad FG,
 ita NK, ad KL; erunt quoque latera EF, FG,
 majora lateribus NK, KL. Si enim his illa fo-
 rent æqualia, vel minora, esset etiam EG, æ-
 quale ipsi NL, vel minus, ut constat. Quare
 abscissis rectis FO, FQ, quæ sint æquales ipsis
 KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO,
 erit hoc ipsi LN, æquale, & eidem simile simili-
 terque positum, & propterea ipsi EG: atque c 26. *sext.*
 adeo circa eandem diametrum cum EG, con-
 sistet, quæ sit BF, productis jam rectis QP, OP,
 erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, ap-
 plicatum deficiens parallelogrammo PB, quod d 24. *sext.*
 simile est ipsi EG, similiterque positum, & prop-
 terea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse ipsi
 C, rectilineo. e Nam cum PG, æquale sit com- e 43. *primi*
 plemento PE; si addatur commune PB, erit &
 BQ, æquale ipsi ER, hoc est, ipsi ES, f quod f 36. *primi*
 æquale est ipsi ER, propter bases æquales EA,
 R 4 EB.

EB. Quare si æqualibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis est rectilineo C, (Nam cum EG, parallelogrammum æquale sit ipsi C, una cum LN, si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C, æqualis.) Igitur & AP, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

xxviii. PROBL. 9. PROPOS. 29.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

TAB. XXV. **A**D datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit Parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Divisa AB, bifariam in E; a super dimidiam EB, construatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum. b Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; c cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterque positum; eritque propterea IKLM, majus quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, una cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit ut MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, majora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque MK, vel æquale ipsi EG, vel minus, ut perspicuum est. Productis igitur FE, FG, ut rectæ FO, FN, æquales sint rectis IM, IK, & completo parallelo.

lelogrammo ON; erit hoc simile similiterque positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterque positum. Quare ON, EG, circa eandem diametrum consistent, quæ sit FP. Productis jam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipsi FO, parallela conveniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo QR, quod simile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. Nam cum AO, ER, sint æqualia, & ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cum MK, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, una cum EG, si auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

P R O B L. IO. P R O P O S. 30. xxix.

Propositam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

Si recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simile ipsi quadrato, ita ut sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si dematur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, utpote rectos, erunt latera b R s circa

circa illos reciproca, hoc est, erit ut EH, hoc est, ut AB, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, ut AH, ad HB. Quare cum sit, ut tota AB, ad segmentum AH, ita segmentum AH, ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem tertiam hujus. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

Aliter quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato medię AH; erunt ipsæ proportionales: ut AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

Aliter totum problema conficiemus. *Dividatur AB, in C, ita ut rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC.* Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. Erunt enim rursus, ut prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.

T H E O R. 21. P R O P O S. 31.

In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

TAB. XXV. fig. 10. a 18. sect. **T**riangulum rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectum; describaturque super BC, quæcunque figura rectilinea BCDE, cui similes similiterque positæ super AB, AC, constituentur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK, erit per coroll.

coroll. propof. 8. hujus lib. ut BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare ut BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primam, ad figuram CH, super secundam fimilem fimiliterque pofitam, per coroll. propof. 19. vel 20. hujus lib. & convertendo ut CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non fecus ostendetur, effe quoque ut BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, fint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur eft ut CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item ut BK, quinta quantitas ad BC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; *b* erit ut prima CK, cum *b* 24. quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia CH, cum sexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta BK, fimul æquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, fimul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod est est propositum.

Aliter. *e* Cum triangulo ABC, simile fit tri- c 8. *f* *sem*:
angulum KAC, fintque homologa latera ipso-
rum, BC, CA; (Nam est ut BC, ad CA, in
triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo
KAC,) *e* habebit triangulum KAC, ad triangu- d 19. *f* *sem*:
lum ABC, duplicatam proportionem ejus, quam
habet CA, ad BC, *e* habet autem & figura CH, e 19. *vel*
ad figuram BD, proportionem duplicatam pro- 20. *f* *sem*:
tionis CA, ad BC. *f* Quare erit ut triangulum f 11. *quint*:
KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad
figuram BD. Eadem ratione ostendetur effe, ut trian-
gulum KBA, ad ABC: ita figuram BG, ad figuram
BD. Quoniam ergo rursus est, ut KAC, prima
quantitas ad ABC, secundam, ita CH, tertia
ad BD, quartam; Item ut KBA, quinta ad ABC,
secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; *e* erit g 11. *quint*:
& prima KAC, composita cum quinta KBA,
ad secundam ABC, ut composita tertia CH,
cum sexta BG, ad quartam BD: Sunt autem
KAC, KBA, prima & quinta fimul, æquales
secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta
fimul,

simul, æquales quoque erunt quartæ BD. Quod est propositum.

Aliter. Ut quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem; *h 19. vel 20. sext.* cum utraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit ut quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem. *i 24. quint.* Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD: *k 47. prim.* Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod est propositum. In retriangulis igitur triangulis, figura quævis &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

1 AB. XXV. 78. tri. **H**abeant triangula ABC; DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componenturque ad angulum ACD, ita ut latera homologa AB, DC, item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ sint AB, DC, erit angulus A, alterno ACD, æqualis:

æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa *b* 6. *sex.* erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, æqualibus angulis B, & DCE, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: *c* 32. *primi* Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: *d* 14. *primi* Atque idcirco BC, CE, unam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxij;

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistent, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

Sint duo circuli æquales ABC, EFG, quorum *TAB.* centra D, H; sumanturque ex circulis duo *XXV.* arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC, FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico esse ex *fig. 12.* sententia defin. 6. lib. 5. ut arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG, & angulum BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, *a* 1. *quart.* applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC. At

At vero GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, & erunt quoque æquales arcus BC, CI, & ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales divisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, & necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, major fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, maior est angulo FHL, & si minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt, vel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se
 6. def. respondent. Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertie magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

Atque hoc verum etiam est de spatiis circa centra, hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, ut spatium ad centrum D, insitens arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insitens arcui FEG, ut ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt insistent æqualibus arcibus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.

Quoniam vero ut angulus BDC, ad angulum FHG, sita est angulus BAC, ad angulum FEG, cum

g cum illi horum sint dupli, perspicuum est, *20. servil.*
 hita esse quoque angulum, BAC, ad angulum *hii. quins.*
 FEG, ut est arcus BC, ad arcum FG. Quod
 tamen eisdem argumentis demonstrari potest,
 quibus usi fuimus in angulis ad centra constitutis,
 si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

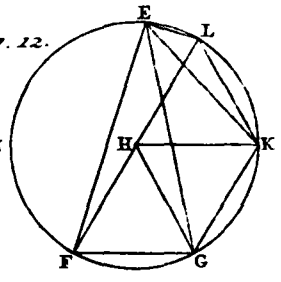
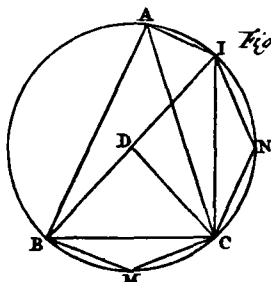
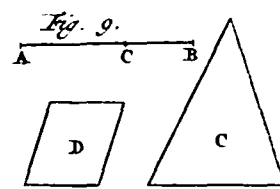
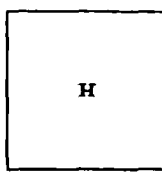
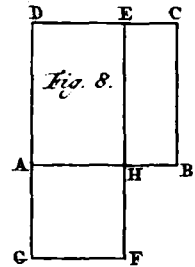
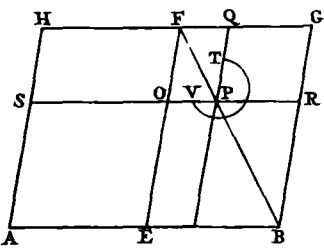
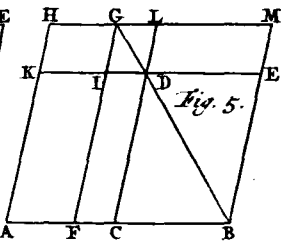
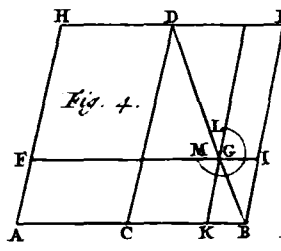
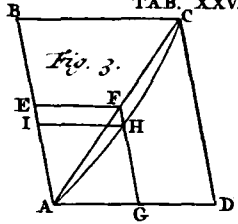
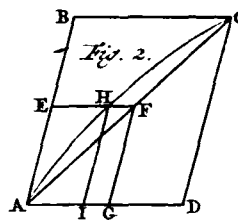
Quod si ad circumferentias constituti sint anguli ejusmodi BAC, FEG, ut rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non constituent angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erunt spatia BDC, FHG; quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias.

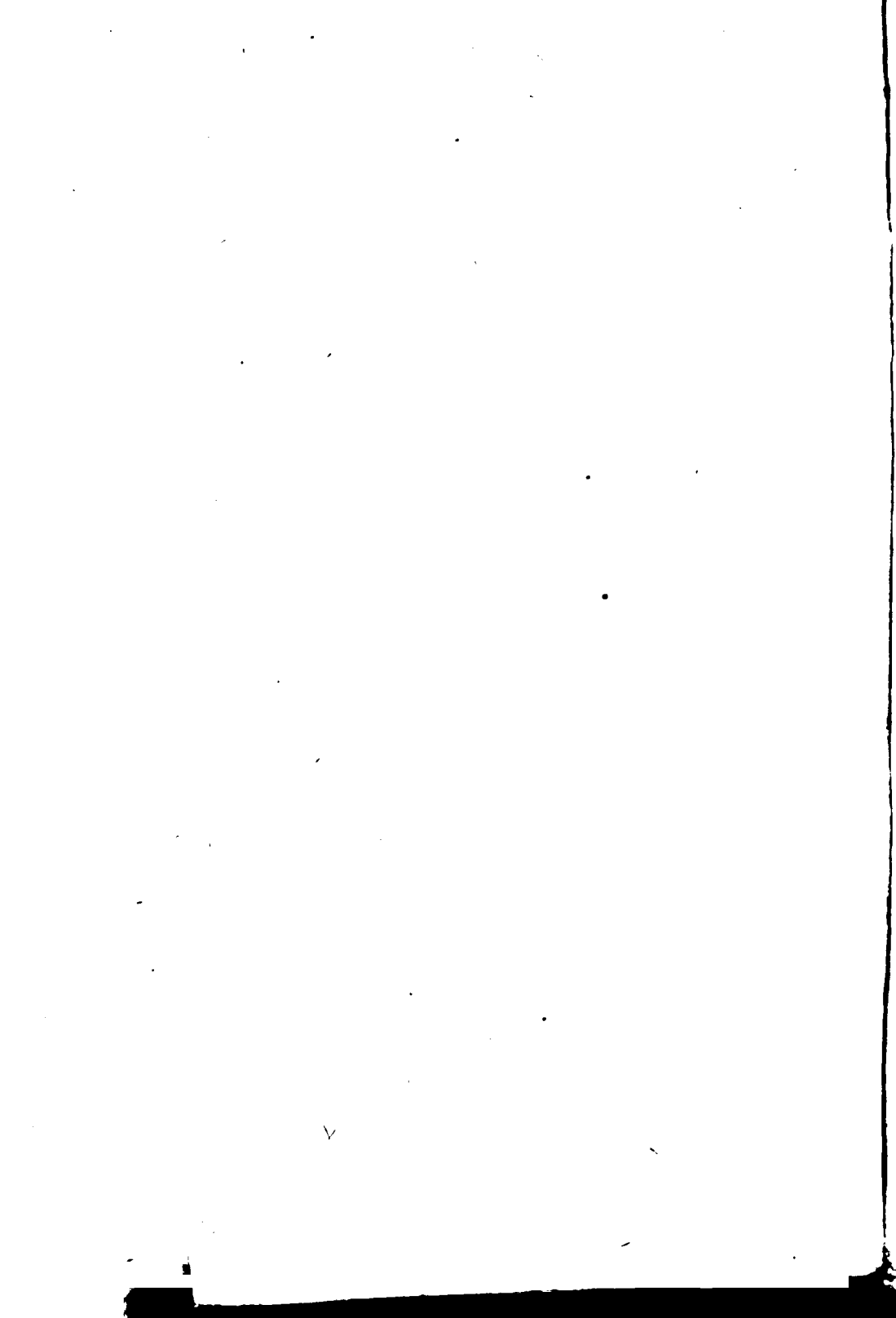
Constituuntur jam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, i qui æquales erunt, cum in *12. servil.*
 fistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare *12. servil.*
 similia erunt segmenta BMC, CNI, & atque adeo *12. servil.*
 inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, i quæ æqualia quoque sunt, sient *14. prim.*
 sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendimus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est, (ut in sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si major, major; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI, & sector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt: vel una excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. i Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, &c. Quod demonstrandum erat. Com.

Commodius fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotvis circuli æquales circulo ABC, atque in singulis capiantur singuli arcus arcui BC, æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quam ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus insistant: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, ut est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotvis circuli æquales circulo EFG, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quæ necessario oritur, quando arcus BC, FG, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, ut perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistant anguli BDI, FHL, ad centra, & BAI, FEL, ad circumferentias: non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, ut patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, ut diximus.

C O R O L L A R I U M.

Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, ut est angulus ad angulum. Utraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. *Quare & inter se eadem erunt.*







E U C L I D I S

E L E M E N T U M

U N D E C I M U M.

Et solidorum primum.

Postquam Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometria parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibi quæ nomen Geometriae. tanquam proprium, usurpavit; Nunc aggreditur in hoc libro undecimo eam partem Geometriae, quæ corpora, sive solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

D E F I N I T I O. I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

Explicat autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, sive corpus: nempe tertium genus quantitatis; docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita ut tres dimensiones possideat, unam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari

S solidum,

solidum, sive corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adjicit, superficies vocatur, ut in primo lib. diximus.

Porro quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imagininemur punctum aliquod è loco in locum moveri; hæc enim describit vestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis est magnitudinis expers; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; hæc enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in transversum est factus; carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponit corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trinæ dimensionis præditam, consulant, ut concipiamus superficiem aliquam equaliter elevari, sive in transversum moveri; hæc enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum vero seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficiem. Hæc ergo quantitas, solidum, sive corpus vocatur.

DEFINITIO. II.

Solidi autem extremum, est superficies.

QUemadmodum linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, sive corpus efficiatur
ex

ex illo motu imaginario superficies, perspicuum est
extremas partes illius esse superficies.

DEFINITIO. III.

Linea recta est ad planum recta, cum
ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangi-
tur, quæque in proposito sunt plano, rectos
angulos efficit.

UT linea recta AB , plano CD , insists, ita ut TAB.
XXVI.
 B , punctum sit in sublimi extra planum CD ,
at punctum A , in ipso plano, tum demum dicetur
recta seu perpendicularis ad planum CD , cum rectos
effecerit angulos cum lineis AE , AF , AD , AG ,
& cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano
ipsam tangunt in puncto A . Has enim ratione
fiet, ut AB , æqualiter insistas plano CD , & non
magis in unam partem, quam in aliam inclinet.
Nam producta recta DA , ad H , cum angulus
 BAD , ponatur rectus, erit quoque deinceps BAH ,
rectus, ideoque illi æqualis. Eademque ratione pro-
tracta quilibet linea in plano CD , faciet AB , cum
illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter
ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB ,
cum una linea ex A , in plano CD , educta non
efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus
rectum angulum constitueret, non diceretur AB ,
recta ad planum CD . Itaque quando conceditur
linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque
erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ
ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è
contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam
esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit
prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis,
quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

DEFINITIO. IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

TAB. XXVI. **FIG. 2.** **IN**sistat planum AB , plano CD , itaut linea AQ , sit in sublimi, hoc est, extra planum subiectum CD , at EB , in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio EB , quæ, ut demonstrabitur propos. 3. hujus lib. recta erit linea. In hac autem sumptis punctis quocunque G , I ; ex ipsis in plano AB , ducantur GF , IH , perpendiculares ad communem sectionem EB . Si igitur linea FG , HI , ad planum alterum CD , recta fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK , GL , GM ; IN , IO , IP , & cum aliis omnibus in plano CD , à punctis G , & I , ductis; dicetur planum AB , ad planum CD , rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG , producatetur ad R , cum angulus FGK , ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR , rectus; ideoque illi æqualis: Ea longque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD , fient utrobique à lineis FG , HI , anguli æquales. Quare planum AB , æquabiliter plano CD , insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quoddam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum
ad

ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

DEFINITIO. V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta: est, inquam angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

Insistat recta AB , plano CD , non ad angulos rectos, sed inclinata, ita ut punctum $XXVI.$ B , sit extra planum in sublimi, punctum vero A , sit in plano. Deinde ex B , termino sublimi rectæ AB , intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE , faciens in plano punctum E ; atque ab E , ad A , adjungatur recta EA ; eritque necessario angulus BAE , acutus, acum in triangulo ABE , duo angulii BAE , BEA , duobus sint rectis minores, & angulus BEA , rectus. Angulus igitur acutus BAE , comprehensus linea insistente AB , & adjuncta AE , dicitur inclinatio rectæ AB , ad dictum planum CD ; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio lineæ AB , ad planum CD , quantus est dictus angulus acutus BAE . TAB. 17. primi

DEFINITIO. VI.

Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis

punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

TAB.
XXVII.
fig. 4.

PLano namque *AB*, insistat planum *CD*, ita ut pars ad *C*, sit in sublimi extraplanum *AB*, & pars ad *D*, in ipso plano *AB*, sitque *CD*, inclinatum ad *AB*; & communis eorum sectio sit *DE*. Si igitur ad *DE*, communem sectionem ex ejus puncto *F*, dua perpendiculares dicantur, *FG*, quidem in plano *AB*, & *FH*, in plano *CD*; dicitur angulus acutus *GFH*, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani *CD*, ad planum *AB*, ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantum est dictus angulus acutus.

DEFINITIO. VII.

Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

Non obscura est hac definitio, precedente bene intellecta. Unde planum ad planum magis inclinatum esse dicitur, cujus angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis recesserit.

DEFINITIO. VIII.

Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

Intellige, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur: hoc est, sive ad dexteram, sive ad sinistram: & sive sursum, sive deorsum, &c. Sunt enim quadam plana quæ nec ad dexteram, nec ad
sini-

sinistram producta conveniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda, quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cujus fastigium intelligatur abscissum, remanentia duo plana non convenient, quamvis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

Sit enim tectum quodpiam *BACEDF*, contentum duobus planis *ABED*, *ACFD*, cujus basis *BCFE*, auferaturque fastigium *GAHKDI*. Quo facto perspicuum est, reliqua plana *GBEK*, *HCFI*, non convenire inter se, si ad partes *GB*, *HC*, vel ad partes *KE*, *IF*, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes *GK*, *HI*, convenient in fastigio *AD*. Ut igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se convenient.

TAB.
XXVI.
fig. 5.

DEFINITIO. IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

DEFINITIO. X.

Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

Quod si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur ejusmodi figura solida non solum similes, verum etiam æquales. Nam

si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter aequalitatem, ac similitudinem planorum.

D E F I N I T I O. XI.

Solidus angulus est plurius, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio.

TAB. **XXVII.** **fig. 6.** **D**Uæ linea in eodem existentes plano, quæ non in directum jacentes ad unum punctum conveniunt, efficiunt angulum planum, ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC , contentus duabus lineis AB , AC , in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quedam linea AD , quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D , sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A , angulus solidus, sive corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel demique plures adungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ AB , AC , AD , in eadem confisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A , sed planus duntaxat ex duobus planis BAD , DAC , compositus. Quod si AD , sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB , AC , jam non componetur angulus planus totus ex BAD , DAC , immo circa punctum A , tres plani consistent anguli BAD , DAC , CAB , qui ut mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem tamen, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALI-

A L I T E R.

Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

HÆc definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariae sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus solidus efficiatur, ut ex ipsa figura apparet. Angulus enim BAD , in plano est, in quo rectæ AB , AD , & angulus DAC , in plano, in quo rectæ AD , AC , angulus denique CAB , in plano, in quo rectæ AC , AB , atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A , constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad unum punctum consistent, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diversis sint planis. Hiabitis enim semper ex altera parte. Unde necesse est, ut tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli parvo solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pavimento domus, vel laqueari, ad unum punctum convenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Ubi manifestum est, si una earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad invicem inclinatas, & hiantes.

DEFINITIO. XII.

Pyramis est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

TAB. XXVI.
fig. 7, 8, 9. **V**idelicet figura solida à planis ABC , $ABCD$, $ABCDE$, ad puncta D , E , F , constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad unum punctum tendant, excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; ut videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quilibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Unde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Ut pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD , ACD , BCD : Quadrangula vero ABE , ADE , BCE , CDE : Pentagona denique ABF , AEF , BCF , CDF , EDF .

DEFINITIO. XIII.

Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero paralelogramma.

TAB. XXVI.
fig. 10, 11, 12. **F**igura scilicet solide, quarum plana adversa & æqualia, & similia, & parallela sunt, vel triangula sint ABC , DEF : vel quadrangula $ABCD$, $EFGH$:

EFHG: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel AEGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG, dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quam columna quadam laterata aequalis crassitudinis, cujus bases oppositae sunt aequales, similes, & parallelae, sive haec sint triangula, sive quadrangula, sive pentagona, &c. Unde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, sive anguli, in uno quoque oppositorum planorum reperiuntur, ut figura indicant.

DEFINITIO. XIV.

Sphaera est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus revolvitur, unde moveri coeperat, circumassumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum ejus extremum quiescens revoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum ejus extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometra sphaeram appellant. Unde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, à quo omnes linea recta in peripheriam cadentes sunt aequales; propterea quod omnes aequales existunt illi linea circumvoluta: ita quoque in sphaera punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes recta cadentes in peripheriam sunt aequales; eo quod omnes sunt semidiametro distanti semicirculi aequales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphaera definitur poterit hoc etiam modo.

Sphaera

Sphæra est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINITIO. XV.

Axis autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

DEFINITIO. XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi.

DEFINITIO. XVII.

Diameter autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæra posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra revolvatur. Unde quia in descriptione sphæra circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæra; propterea eam solum Euclides axem sphæra nominavit.

DEFINITIO. XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se

se ipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat, circumassumpta figura.

Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero major, Oxygonius.

UT si triangulum rectangulum ABC , circa latus quiescens AB , quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram revolutionem expleat, describetur solida quadam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari una ac plana, quam BC , latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit: & curva alia, eaque convexa, quam latus AC , recto angulo oppositum delineat. Hac igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

TAB.
XXVII.

fig. 13, 14, 15.

Quod si latus quiescens AB , æquale fuerit circumducto BC , ut in figura 13. dicitur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A , rectus est. Cum enim latera AB , BC , ponuntur equalia; ærunt & anguli BAC , BCA , æquales, qui cum æquivalent uni recto, eo quod ABC , rectus est, erit angulus BAC , semirectus. Eodemque modo angulus BAD , ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD , rectus erit. Si vero quiescens latus AB , minus fuerit circumducto BC , ut in figura 14. vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A , obtusus existit. Cum enim BC , latus latere AB , sit majus; ðerit angulus BAC , major angulo BCA . Quare cum hi duo æquipolleant uni recto, propterea quod angulus ABC , ponitur rectus, erit BAC , semi-

a 5. prim

b 18. prim

semirecto maior. Similiter BAD , major erit semirecto; atque adeo totus CAD , recto maior erit. Si denique quiescens latus AB , majus fuerit circumducto BC , ut in figura 15. appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus, quia nimirum angulus ad verticem A , acutus est. Cum enim latius AB , majus sit latere BC , cerit angulus BCA , angulo BAC , major. Quapropter cum hi duo uni recto equivalenceant, quod angulus ABC , rectus ponatur, erit BCA , semirecto maior, ideoque reliquus BAC , semirecto minor. Non secus ostendemus angulus BAD , minor esse semirecto. Igitur totus CAD , recto erit minor.

DEFINITIO. XIX.

Axis autem conï, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

TAB. XXVI.
fig. 13, 14, 15. **UT** in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB .

DEFINITIO. XX.

Basis vero conï est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

TAB. XXVI.
fig. 13, 14, 15. **N**imirum circulus CD , qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC , in superioribus conis. Itaque hujus circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

DEFI-

DEFINITIO. XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus revolvitur, unde cœperat moveri, circumassumpta figura.

Veluti si rectangulum parallelogrammum *ABCD*, *TAB. XXVI.* circa latus quiescens *AB*, circumvolvatur, de- nec integram expleat revolutionem, appellabitur figura descripta *DCFE*, cylindrus, quæ quidem tribus superficiibus continetur, duabus videlicet planis circularibus *DE*, & *CF*, quas latera *AD*, *BC*, describunt; & altera curva, eaque convexa, quam latus *CD*, describit. Igitur columna alicujus rotundæ. Unde factum est, ut Campanus cylindrum appellaverit columnam rotundam.

DEFINITIO. XXII.

Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

Nempe recta *AB*, in superiori figura, dicetur axis cylindri. *TAB. XXVI. fig. 16.*

DEFINITIO. XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

Quales sunt circuli *DE*, & *CF*, à lateribus *AD*, *BC*, oppositis descripti. *TAB. XXVI. DEF. fig. 16.*

DEFINITIO. XXIV.

Similes conī & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

R Estē Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eodem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo conī *ABC*, *EFG*; Item duo cylindri: in conis autem axes *AD*, *EH*, & basium diametri *BC*, *FG*; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, ut axis *AD*, ad axem *EH*, ita *BC*, diameter basis ad *FG*, diametrum basis, dicentur tam conī, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula *ADB*, *EHF*, ex quorum revolutione descripti sunt conī, nec non rectangula *AB*, *EF*, quorum conversiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit ut *AD*, ad *EH*, ita *BC*, ad *FG*; Sit autem ut *BC*, ad *FG*, a ita dimidia *BD*, ad dimidiam *FH*: erit quoque ut *AD*, *EH*, ita *DB*, ad *HF*: & permutando ut *AD*, ad *DB*, ita *EH*, ad *HF*. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum aequales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia invicem se erunt: Triangula quidem,

*dem, b propterea quod triangula unum angulum uni b 6. sex.
 angulo habentia aequalem, & circum aequales angulos
 latera proportionalia, aequiangula sunt, cideoque c 5. sex.
 latera omnia circa angulos aequales habent proportio-
 nalia, atque adeo inter se similia existunt: Rectan-
 gula vero, deo quod reliqua duo latera duobus late- d34. prim.
 ribus AD, DB, sunt aequalia, opposita oppositis, ac
 propterea eandem cum his proportionem habent.*

DEFINITIO. XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadra-
 tis æqualibus contenta.

DEFINITIO. XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor
 triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DEFINITIO. XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo tri-
 angulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DEFINITIO. XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duode-
 cim pentagonis æqualibus, & æquilateris,
 & æquiangulis contenta.

DEFINITIO. XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti
 triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HÆc sunt quinque corpora, quæ regularia vo-
 cantur, quod omnia plana, quibus continen-
 tur,

ur, equalia sint, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in *Tymæo* quinque mundi corpora, quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cælum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat.

D E F I N I T I O. XXX.

[Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex adverso, parallelæ sunt contenta.]

TAB.
XXVII.
fig. 1.

VELuti solida figura comprehensa sex quadrilateris *ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG*, quarum oppositæ *AC, FH*; Item *DF, CG*; Item *AG, DH*, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallelæ opposita, sunt & equalia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propos. 24. hujus lib.

D E F I N I T I O. XXXI.

[Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituentur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.]

D E F I N I T I O. XXXII.

[Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscrip-

LIBER UNDECIMUS. 291

scriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.]

Non est necesse, ut anguli interioris figura constituentur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: sed satis est, ut omnes anguli figura interioris tangant vel aliquos angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figura; ita ut nullus angulus figura interioris intus relinquantur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figura exterioris.

THEOR. 1. PROPOS. 1. E

Rectæ linæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

Sit enim, si fieri potest, rectæ linæ AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars vero CB, in sublimi, ita ut omnia puncta partis AC, in plano DE, jaceant, puncta vero omnia partis CB, supra planum DE, existant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipsi AC, rectæ linæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC. Quod est absurdum, ex pronuntiatio 10. lib. 1. Rectæ igitur linæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi. Quod erat demonstrandum. TAB. XXVII. fig. 2.

THEOR. 2. PROPOS. 2. H

Si duæ rectæ linæ se mutuo secent, in uno sunt plano. Atque triangulum omne in uno est plano.

Rectæ linæ AB, CD, se mutuo secant in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, TAB. XXVII. ut fig. 3.

utcumque, ducatur recta FG, ut fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in uno esse plano; Item rectas AB, CD, in uno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano uno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra, existent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in uno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra quod fieri non
a i. und. posse, jam supra a demonstratum est. Quod si ejusdem trianguli pars quidem EFIK, in uno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in uno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel contra. Si denique ejusdem trianguli pars quidem FHKG, in uno concedatur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in uno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, sed est demonstratum. Quare triangulum EFG, in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

Quia vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt ejus latera EF, EG: In quo
c i. und. autem sunt rectæ EF, EG: in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in uno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstravimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secant, in uno sunt plano. Atque triangulum omne in uno est plano. Quod erat demonstrandum.

III. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana se mutuo secant, communis eorum sectio est linea recta.

TAB. XXVII. *fig. 4.* SEcent se mutuo plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam

neam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eisdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, ex 14. pronunciato 1. lib. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secant, eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

Aliter. Secant se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in utroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cum eisdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EHF; includent iterum duæ rectæ EF, EHF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in utroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv;

Si recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat. Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quosque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secant in B; ærunt ipsæ in uno plano, quod sit CEDE. a 2. und
Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; item rectæ BI, BK; ducanturque rectæ GK, IH; &

in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex
bis. primi constructione sunt æqualia; *b* & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem
c 4. primi B, oppositi, æquales: *c* Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.

d 5. primi Rursus *d* cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL; trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adjacent æqualia, ex
e 26. primi constructione. *e* Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

Præterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, *f* erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hætenus demonstratis, *g* erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales
h 4. primi etiam, ut hætenus demonstravimus; *h* erunt quoque bases AL, AM, æquales.

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; *i* erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum re-
 cta

sta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B; Eademque ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiam si inter puncta G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ GI, KH, jungantur; vel certæ literæ disponantur, ut prius, quemadmodum in hac figura apparet, ubi eadem sunt literæ, & ta- TAB.
XXVII.
fig. 6.
men LM, non ducitur à sinistra in dexteram, ut in figura quinta, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. hujus lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 7.

Si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in uno sunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, TAB.
XXVII.
fig. 7.
BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos an-
gulos in communi earum sectione, seu tactu B.
Dico tres rectas BC, BD, BE, in uno plano esse. Cum enim quælibet duæ in uno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secant in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in uno sunt plano, cum se mutuo secant in B, sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos.

angulos erit rectæ BG, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. hujus lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in uno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

- TAB. XXVII.** **fig. 8.** **S**int duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. hujus lib. Jam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; ærunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Est autem & basis communis AG, ærunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos.
- ¶ 4. primi** Quare rectæ DB, DA, DC, in uno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: Est autem AB, in eodem plano,
- in

in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, sumantur utcumque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra, secet jam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, a quæ recta linea crit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eodem terminos E, & F, superficiem claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 8. PROPOS. 8. (viii.)

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano, ad angulos rectos.

T 5

cidem p. 103

eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF, erit per defin. 3. hujus lib. *a 9. primi* angulus CDB, rectus: *a* Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Jam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Conjungantur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione, & anguli quoque ipsis contenti CDB, GBD, æquales, nimirum recti: *b 4. primi* Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & basis est communis CG. *c 8. primi* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex definitione 3. hujus lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B. (Si namque producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD,) ad rectos angulos existit; *d 4. und.* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB; *e 7. und.* propterea quod rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cum puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex definitione 3. hujus lib. Quare cum AB, recta sit ad rectas BG, BD; *f 4. und.* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed

sed non in eodem cum illa plano : Illæ quoque sunt inter se parallelæ.

Sint rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non
sint autem in eodem cum EF, plano. Dico
AB, CD, parallelas quoque esse. Nam à quo-
libet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, du-
cantur duæ perpendiculares; GH, quidem in
plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano
parallelarum CD, EF. Quoniam igitur EG,
recta est ad duas rectas GH, GI, se tangentes
mutuo in G; *a* erit recta quoque ad planum per
ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cum sint
parallelæ AB, EF, & EF, sit recta ad planum
per GH, GI, ductum; *b* erit quoque AB, ad
idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ
CD, EF, sit autem EF, recta ad planum per
GH, GI, ductum; *c* erit etiam CD, recta ad
idem planum; Atque proinde rectæ AB, CD,
cum rectæ sint ad idem planum per GH, GI,
ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ
lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa
plano, hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod
erat demonstrandum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes ad
duas rectas se mutuo tangentes sint paralle-
læ, non autem in eodem plano: Illæ an-
gulos æquales comprehendent.

Sint rectæ AB, AC, se tangentes in A, paral-
læ rectis DE, DF, se tangentibus in D;
non sint autem AB, AC, in eodem plano, in
quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab
ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim
AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter
se, ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF.
Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æ-
quales;

a 33. *primi* quales; æ erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD, b 9. *und.* erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ & æquales; c 33. *primi* Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, ut modo demonstravimus; d 8. *primi* Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangent, &c. Quod erat ostendendum.

xi. PROBL. I. PROPOS. II.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

TAB. XXVII. **fig. 13.** *primi* **S**It à puncto A, in sublimi ad subjectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta utcumque DE, a ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF. b Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH, c ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subjectum BC. d Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL, cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, e 4. *und.* ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, ferit quoque KI, ad idem planum per f 8. *und.* FA, FH, ductum recta. g Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. hujus lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. b Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit à dato puncto *A*, in plano *BC*, ducenda perpendicularis ad datum planum *BC*, TAB. XXVII.
 quovis puncto *D*, in sublimi demittatur ad planum *BC*, perpendicularis *DE*, quæ si ceciderit in *A*, punctum, factum erit, quod proponitur: fig. 14. a 11. und.
 Si vero ceciderit in aliud punctum *E*; extensa recta per *E*, & *A*, educatur per *A*, ipsi *DE*, b 31. primi
 parallela *AF*, in plano *GH*, per *DE*, *EA*, ducto. Dico *AF*, rectam esse ad planum datum *BC*. Cum enim *DE*, *AF*, parallelæ sint; & *DE*, recta ad planum *BC*, ex constructione: erit quoque *AF*, ad idem planum *BC*, recta. c 8. und.
 Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

THEOR. II. PROPOS. 13. xij.

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

Sit datum planum *AB*. Dico à dato ejus puncto *C*, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum *AB*. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares *CD*, *CE*, ad planum *AB*, & per *CD*, *CE*, aquæ in uno, eodemque plano sunt, ducatur planum *FG*, secans planum *AB*, per rectam lineam *GH*. Cum igitur *EC*, *DC*, rectæ sint ad planum *AB*; erunt per defin. 3. hujus lib. anguli *ECG*, *DCG*, recti, ac proinde æquales pars, & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos TAB. XXVII. fig. 15. a 2. und.

ctos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

Aliter. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem
b 6. und. planum AB; *b* erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conveniant in puncto C. Quod est absurdum.

xiv. THEOR. 12. PROPOS. 14.

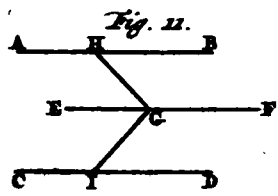
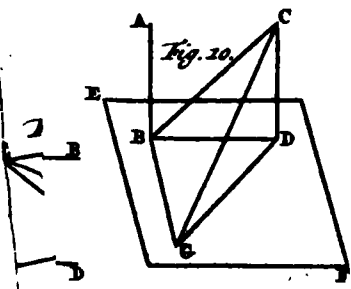
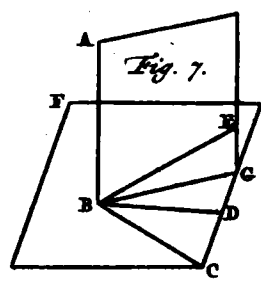
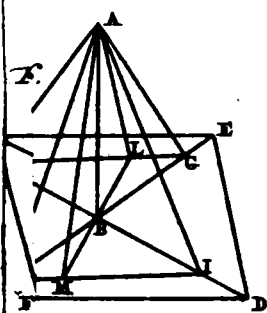
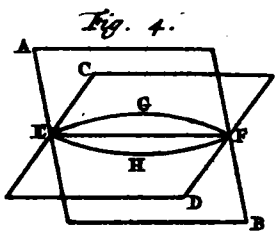
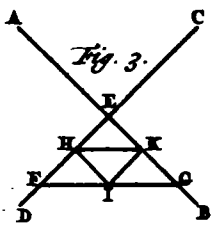
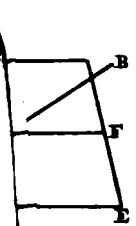
Ad quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallelæ.

TAB. XXVII. *f. 1.* *a 3. und.* *b 17. prim.* Sit recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallelæ, producta inter se convenient. Conveniant ad partes C, E, *a* & faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto utcumque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. *b* Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conveniunt. Parallelæ ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

xv. THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallelæ sunt, per quæ illa ducuntur, plana.

TAB. XXVII. *f. 2.* Sint duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, *f*



se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, a enim deducatur *a 11. und.* ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. b Deinde in plano *b 31. prim.* EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelae. Quoniam igitur rectae AB, GH, parallelae sunt ipsi DE; erunt & AB, GH, *c 9. und.* inter se parallelae. d Ac proinde anguli BAG, *d 19. prim.* AGH, duobus rectis aequales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. hujus lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC, e recta quoque *e 4. und.* erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. f Igitur parallela sunt plana BC, EF. Si ergo *f 14. und.* duae rectae lineae se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

Datum planum sit AB, punctumque extra ipsum TAB. sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, *XXVIII.* parallellum. In plano AB, ducantur utcumque duae *fig. 3.* rectae DB, DA, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, sagatur CE, ipsi DB, *f 31. prim.* parallela. Est in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallellum esse plano dato AB. Cum enim duae rectae DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallelae sint, g parallela erunt plana *g 15. und.* AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.

THEOR.

xvi. THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam secantur : communes illorum sectiones sunt parallelae.

TAB. XXVIII. **fig. 4.** **2. 1. mod.** Secantur plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelae, productae inter se convenient, cum sint in plano EF, secante. Convenient igitur in puncto I. Quia ergo tota recta HEI, in uno est plano, nimirum in AB, producta; Item tota recta FGI, in uno quoque est plano, videlicet in CD, producta; convenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectae EH, GF, parallelae. Quare si duo plana parallela plano quopiam secantur, &c. Quod erat demonstrandum.

xvii. THEOR. 15. PROPOS. 17.

Si duae rectae lineae parallelis planis secantur; In easdem rationes secabuntur.

TAB. XXVIII. **fig. 5.** **1. 2. mod.** **16. mod.** Rectae lineae AB, CD, secantur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectae LO, NQ, in planis EF, IK, & jungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectae ducantur RM, RP, in eodem plano GH. Eritque triangulum LNQ, in uno plano: similiter triangulum LOQ, in uno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, erunt commu-

nes

nes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Par
ratione parallelæ erunt RP, LO. Quam ob
rem erit ut LR, ad RQ, ita LM, ad MN;
Item ut LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac pro
inde ut LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur
duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur, &c.
Quod erat demonstrandum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvij.

Si recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit
angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana
eidem plano ad rectos angulos erunt.

Si recta AB, ad planum CD, recta. Dico
omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta
ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB,
planum EF, secans planum CD, per rectam li
neam FG. Sumpto deinde puncto H, utcunque
in recta FG, educatur in plano EF, ipsi AB,
parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, paralle
læ sunt; & AB, ponitur recta ad planum CD;
erit quoque IH, ad idem planum CD, recta;
ac proinde per defin. 3. hujus lib. ad communem
sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione
omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, du
centur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ;
ac proinde per defin. 3. hujus lib. ad communem
sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum
erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4.
hujus lib. Similique argumento ostendentur om
nia alia plana per rectam AB, ducta ad planum
CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cui
piam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat de
monstrandum.

THEOR. 17. PROPOS. 19. xix.

Si duo plana se mutuo secantia, plano
cuidam ad rectos sint angulos, communis
etiam

etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

TAB. XXVIII.
fig. 7. **S**int duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non.

a 4. und. Si recta est EF, ad BF, DF, recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. hujus lib. Idem concludes si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. hujus lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; educatur ex F, in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. hujus lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

c 13. und.

THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

121

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet ut ut assumpti tertio sunt majores.

Contineatur angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse majores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosvis duos majores esse reliquo: Si vero duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo majores esse. Quod si unus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem sive æquales, sive inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse majorem. Dico jam hoc angulo maximo BAC, majores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ, AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; junganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem æquales; erunt bases BD, BE, æquales. Quia vero latera DB, DC, majora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, major quam CE. Cum igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, major base CE; erit angulus CAD, angulo CAE, major. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, majores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo majores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus

TAB.

XXVIII.

fig. 21

a 13. prim.

b 4. prim.

c 10. prim.

d 15. prim.

angulus tribus angulis planis contineatur, &c.
Quod erat ostendendum.

xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

Omnis solidus angulus sub minoribus,
quam quatuor rectis angulis planis conti-
netur.

TAB. XXVIII. fig. 9. Sit angulus solidus A, contentus tribus planis
angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres
angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim
rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli
solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus an-
gulis planis continetur, nempe B, sub CBA,
ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB:
a 20. *ind.* D, vero sub CDA, ADB, BDC. Quoniam
vero duo anguli CBA, ABD, majores sunt
angulo CBD; similiterque duo anguli BCA,
ACD, majores angulo BCD; & duo anguli
CDA, ADB, majores angulo CDB: erunt sex
anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB,
tribus angulis CBD, BCD, CDB, majores.
b 32. *primi* Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi
ergo sex duobus rectis erunt majores. Cum igitur
sex illi, una cum tribus ad A, æquales sint
sex rectis propter triangula tria BAC, CAD,
c 32. *primi* DAB, (c sunt enim anguli cujuslibet trianguli
duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duo-
bus rectis majores, relinquentur tres ad A, soli-
dum angulum constituentes, quatuor rectis mino-
res. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod
erat demonstrandum.

xxij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo
ut libet assumpti reliquo sint majores; com-
prehendant autem ipsos rectæ linæ æquales;
fieri

fieri potest, ut ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur:

Sint tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, *TAB. XXVIII. fig. 10.* hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo sint majores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse majores. Nam hoc posito, *a* ex ipsis triangulum facile conficitur. Quod enim duæ DE, FG, majores sint, quam HI, ita ostendetur. *b* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita ut fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus; quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, major angulo C, propterea quod duo anguli DAE, & B, majores ponuntur angulo C; *d* erit & basis EK, major base HI: *d24. primi* *e* sunt autem rectæ ED, DK, majores recta EK. *e20. primi* Igitur multo majores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI. Quod est propositum.

Cadat deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE: quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipsi AD, æqualis rursus, & connectatur recta KD. *f* Erit, igitur ut prius KD, ipsi FG, æqualis. *g* Quoniam vero rectæ ED, DK, majores sunt recta KE, & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & con-

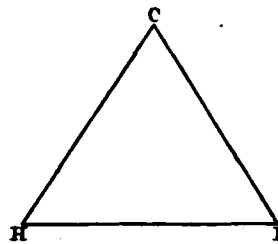
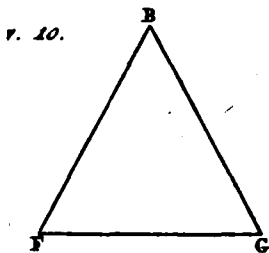
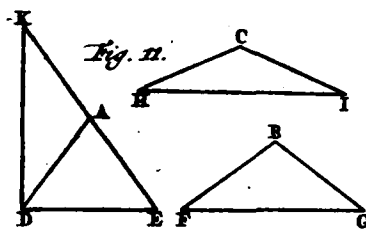
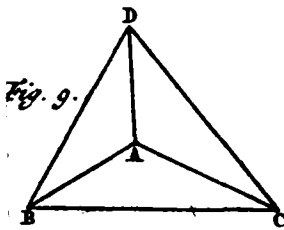
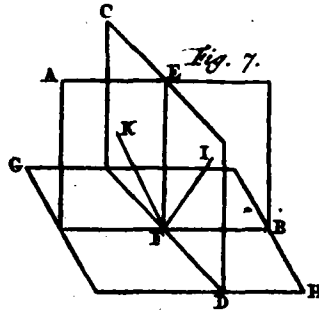
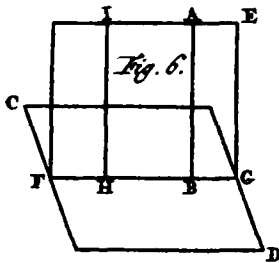
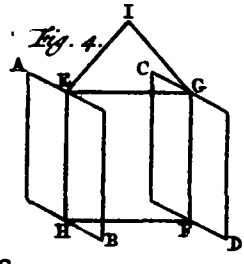
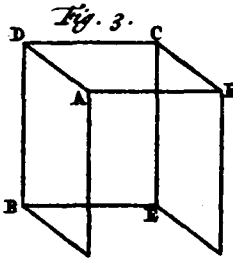
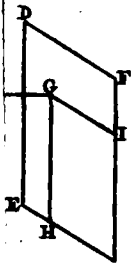
structione; erunt quoque ED, DK, majores duabus CH, CI: *b* Hæ autem majores sunt, quam HI. Igitur multo majores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI. Quod est propositum.

TAB. Cadat postremo AK, ad partes AE, ita ut nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK; quod demum evenit, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt majores. Ponaturque rursus AK, ipsi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE.

XXIX. fig. 1. *i 4. primi* Erit igitur, ut prius, KD, ipsi FG, æqualis. *h 11. primi* Quoniam vero duæ DE, DK, majores sunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & constructione; erunt quoque DE, DK, majores quam CH, CI:

120. primi Hæ autem majores sunt, quam HI. Igitur multo erunt majores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æquales ipsi FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI, quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, majores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, majores, quam DE, si angulo C, ad FB, constituitur angulus æqualis, &c. *m* Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonstrandum erat.

TAB. Aliter. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; *XXIX. fig. 2.* erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua majores. *n 4. primi* Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; *o 4. primi* erunt quoque duæ illorum bases æquales, *p 14. primi* & basis tertii utraque minor: Quare rursus quælibet duæ majores erunt reliqua. Quod si unus eorum, nempe A, sit maximus, sive reliqui B, & C, sint inter se æquales, sive inæquales; *q 14. primi* erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, majores erunt quam HI: Item, DE, HI, majores quam FG. Dico jam &



the same time, the fact that the *Journal* was published in the United States, and that it was published by a woman, was a significant factor in its reception.

The *Journal* was published in the United States, and it was published by a woman, which was a significant factor in its reception.

The *Journal* was published in the United States, and it was published by a woman, which was a significant factor in its reception.

The *Journal* was published in the United States, and it was published by a woman, which was a significant factor in its reception.

The *Journal* was published in the United States, and it was published by a woman, which was a significant factor in its reception.

The *Journal* was published in the United States, and it was published by a woman, which was a significant factor in its reception.

The *Journal* was published in the United States, and it was published by a woman, which was a significant factor in its reception.

The *Journal* was published in the United States, and it was published by a woman, which was a significant factor in its reception.

The *Journal* was published in the United States, and it was published by a woman, which was a significant factor in its reception.

& rectas FG, HI, majores esse recta DE. *Fiat* 123. *primi*
 enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad intervallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, majores ponuntur angulo DAE, & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, major reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia 4. *primi*
 latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE, & angulus C, ostensus major angulo KAE; erit & basis 124. *primi*
 HI, major base KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG, erunt FG, HI, majores quam DK, KE. 120. *primi*
 Sed DK, KE, majores sunt, quam DE. Igitur multo majores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

P R O B L. 3. P R O P O S. 23. xxij.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt majores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SInt tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, ut quilibet duo sint majores reliquo. 742
xxix.
 Oportet jam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehedentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque fig. 3.

22. *und.* turque bases DE, FG, HI. a Fieri ergo potest,
 ut ex DE, FG, HI, triangulum constituatur.
 Constituatur ex ipsis igitur triangulum KLM,
 sitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ
 55. *quart.* FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. b Descri-
 batur circa triangulum KLM, circulus, cujus
 centrum N, à quo ducantur rectæ NK, NL,
 NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos
 comprehendentium, nempe AD, AE, &c. major
 qualibet ductarum ex centro N. Quod ita osten-
 detur. Cadat primo centrum N, intra triangu-
 lum KLM; quod quidem fiet, quando triangu-
 lum est oxygonium, ut ex coroll. propos. 5.
 lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, majores non
 credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales,
 vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur
 latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt
 lateribus NK, NL, trianguli NKL; & basis DE,
 8. *primi* basi KL, æqualis: c erit angulus A, angulo
 KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus
 B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK,
 æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æqua-
 les sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib.
 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor
 rectis æquales. Quod est absurdum, ponuntur
 enim quatuor rectis minores. Non igitur æqua-
 les sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod
 neque minores. Si enim minores sint AD, AE,
 quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis
 AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quo-
 niam igitur est ut NK, ad NO, ita NL, ad NP,
 cum & antecedentia inter se, & consequentia
 sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, tri-
 2. *sext.* anguli NKL, secta proportionaliter, & ac proinde
 29. *primi* OP, ipsi KL, parallela erit. e Quare anguli
 NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt,
 & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangu-
 4. *sext.* lum. f Igitur erit ut NK, ad KL, ita NO, ad
 14. *quint.* OP. Est autem NK, major quam NO. g Igi-
 tur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi
 KL, major erit, quam OP. Quocirca cum la-
 tera

tera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, major base OP, herit & angulus A, major angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, major effe ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex corol. propof. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, majores quatuor rectis. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales. Igitur majores.

Cadat deinde centrum N, in latus LM, quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, ut ex eodem corol. propof. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL; erunt quoque BF, BG, æquales eisdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Posita autem fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. Sunt autem & majores BF, BG, quam FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, cum sint majores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur majores.

Cadat postremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, ut ex corol. dicto propof. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; herit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit.

Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo majores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit major. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; *m8. primi* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & majorem ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsi NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsi AD, AE, æquales, & ducatur recta OP, demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, major angulo ONP; & eadem ratio-
m13. primi ne angulus C, major angulo KNM. Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipsi AD, AE, & connectantur OQ, OR, cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transit circumferentia circuli ex N, ad intervallum NO, descripta, cum æqua-
m19. primi les sint rectæ NO, NP, NQ. Quare cum angulus PON; æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, major erit. Quoniam verò latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis,
p 4. primi per constructionem; & erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa jam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR, & angulus LKM, major angulo QOR, ut ostendimus: & erit basis LM, hoc est, FG, major base QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & basis FG, major base QR;
p 31 erit

erit angulus B, major angulo QNR. Rursus r 25. prim
quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR,
angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus
QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C,
maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus
QNR, major erit angulo B. Quod est absur-
dum, cum B, ostensus sit major angulo QNR.
Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK,
NL; sed neque æquales: Igitur majores.

Jam vero, cum rectæ AD, AE, majores sint TAB.
rectis NK, NL, ubicunque centrum N, existat; XXIX.
possit recta AD, plus quam recta NK, quadrato fig. 3. 4.
lineæ T, per lemma annexum, ita ut quadratum TAB.
rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, XXX.
& T. Ex centro N, excitetur ad planum cir- fig. 1.
culi KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqua- s 12. und.
lis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quo-
niam igitur NV, recta est ad planum circuli
KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3.
hujus lib. ad rectas NK, NL, NM, t 47. prim
de quadratum rectæ VK, quadratis rectarum
KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadra-
tum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eis-
dem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt
inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac
propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus
quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia
sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & an-
guli ipsis contenti VNK, VNL, recti; u 4. prim
erit basi VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione
rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM,
æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta
VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK,
VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id,
rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem,
cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia
sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis
KL, basi DE; x 8. prim
erit angulus KVL, angulo A,
æqualis. Nos secus demonstrabimus, angulum
LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo
C, esse æqualem. Quare angulus solidus V,
cont-

310 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo major plus potest, quam minor.

TAB. XXX. *Sint data dua recta linea inæquales AB, & C, quarum AB, major, oporteatque invenire, quo plus possit quam C. Divisa AB, bisariam in D, describatur ex centro D, & intervallo DA, vel DB, semicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, jungaturque recta ER. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato recta EB.* **b 31. ter. EB.** *Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit; cerit quadratum ex AB, æquale quadratis AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato recta EB. Quod est propositum.*

xxiv. THEOR. 21. PROPOS. 24.

Si solidum parallelis planis contineatur; adversa illius plana, parallelogramma sunt similia & æqualia.

TAB. XXIX. *Sit parallelepipedum ABEP, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum juxta defin. 30. hujus lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum adversa quælibet sint parallelæ. Dico quævis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, GF, secantur plano AC; a Erunt communes sectiones AB, CD, paral-*

parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secetur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ. Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico jam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; *b 10. und.* anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE. Ac propterea ut BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis jam diametris AH, DE, cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia *d 34. primi* sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est, erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. *e 10. und.* Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia *f 4. primi* sint parallelogrammorum BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, adversa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia, &c. Quod erat demonstrandum. *g 34. primi*

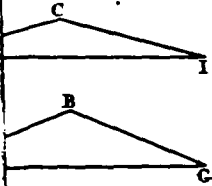
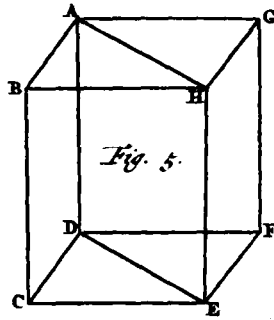
THEOR. 22. PROPOS. 25. xxv.

Si solidum parallelepipedum plano secetur adversis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

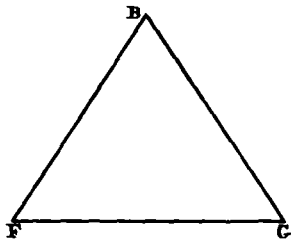
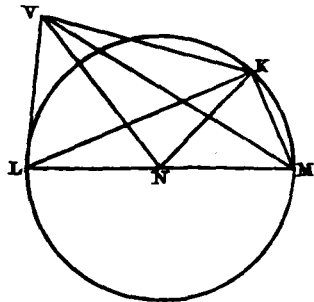
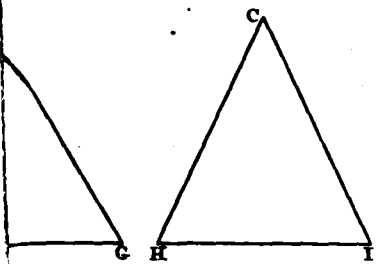
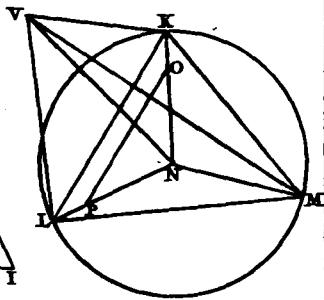
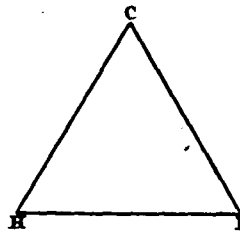
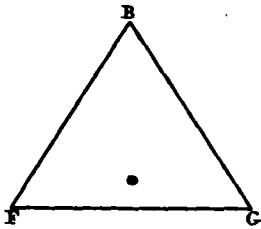
SECetur parallelepipedum ABCD, plano EF, *742.* parallelo oppositis planis AD, BC. Dico ut *xxx.* est *fig. 3.*

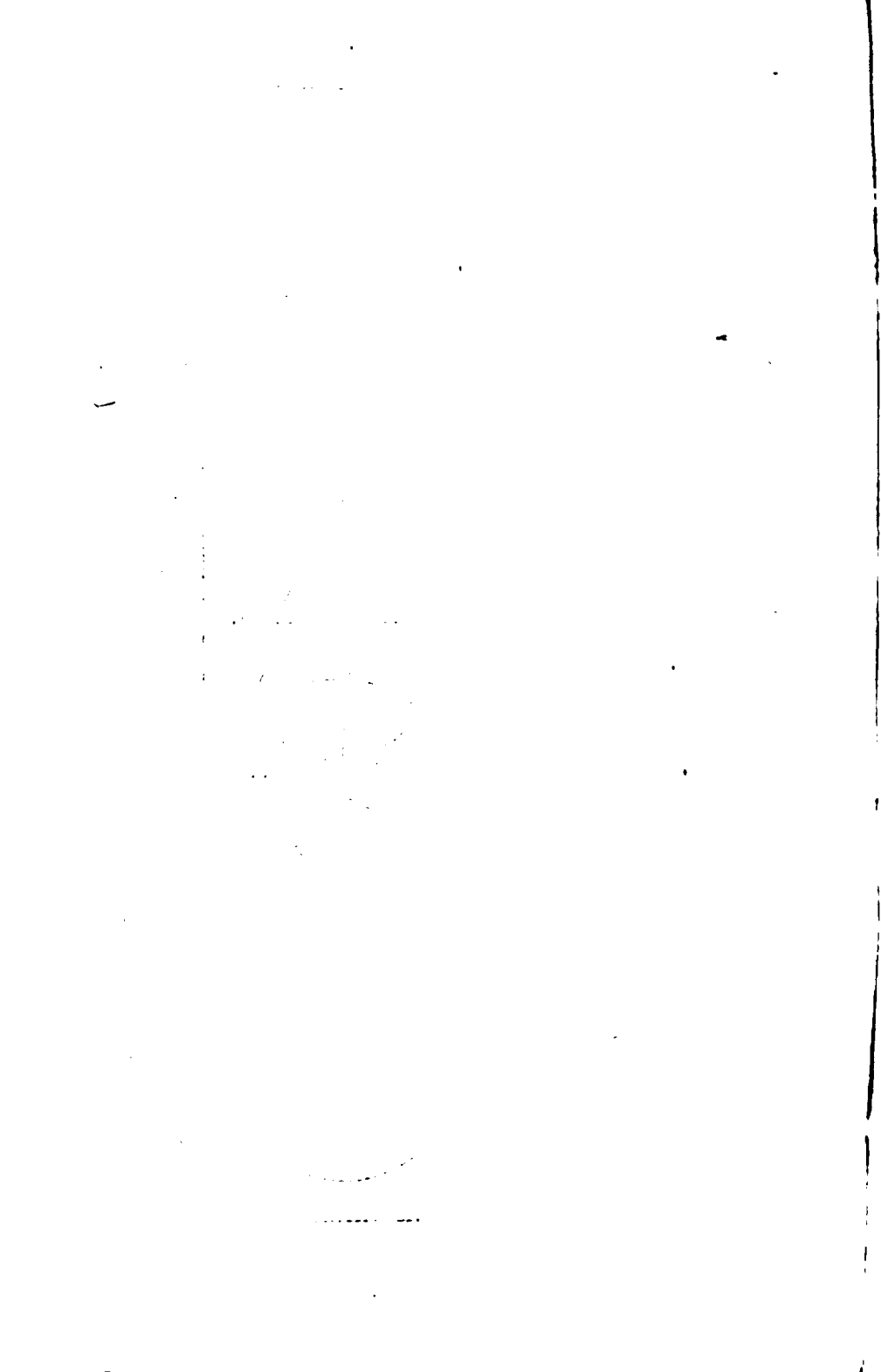
318 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in utramque partem quantumlibet, sumanturque in AB, protracta quocunque rectæ AK, KL, ipsi AE; & quocunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. hujus lib. Quoniam igitur solidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypothesi; **a24. mod.** ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, & habebitque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF, BMRC, MNSR, NOTS, ELQF, EOTF; habebuntque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. **b36. primi** Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AE, AK, KL, **c19. primi** æqualia sunt; & similia quoque cum anguli unius sint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia sunt parallelogramma AY, KZ, La. Cum igitur æqualia quoque sint, & similia parallelogramma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AEFD, æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD, & tribus planis LX, La, LQ, **d24. mod.** solidi KLQP: Sunt autem tria in unoquoque solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EF, &c. Igitur per defin. 10. hujus lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostenduntur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD. Et quam multiplex est basis OG, basis BG, tam multiplex erit solidum OEST, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG, (multiplex



2.





LIBER UNDECIMUS. 319

tipler basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BG, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoque sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis major est base, solidum quoque solido majus est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinem, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis DY, ad basin CY, & ut basis AY, ad basin BY, & ut basis DG, ad basin, CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

PROBL. 4. PROPOS. 26. , xxvi.

Ad datam rectam lineam, ejusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

It ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solidi C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. TAB. XXX.
Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG, connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, & sinque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ducto constituitur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. fig. 4. a 11. und. b 13. primi c 12. und.
Ex L, ve-

ro ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & jungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per constructionem;

d 4. *primi* Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablati angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli, HLK, DGF, recti ex defin. 3. hujus lib.

f 4. *primi* ferunt & bases HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex constructione, (cum enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia sint ex constructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos, ex defin. 3. hujus lib. g erunt bases AK, CF, æquales.)

h 8. *primi* Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti ex defin. 3. hujus lib. Erunt bases IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, sint æqualia ex constructione; erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum solidum C, componentibus. Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, ejusque punctum, angulum solidum constituiimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 5. PROPOS. 27. xxvj

A Data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit à data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. TAB. XXX.
 aFiat ad rectam AB, ejusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita ut tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis, ECG, GCF, FCE. Deinde ut est CF, ad CG, sic fiat AB, ad AI, & ut CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, ut CF, ad CE, ita AB, ad AH. fig. 5. 216. und.
 Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completens nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H. ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterque positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterque posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. b12. secund.
 cSunt autem tria cujuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD. Ac proinde ex definit. 9. hujus lib. similia sunt, similiterque posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum descripsimus. Quod erat faciendum. c24. und.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

Si solidum parallelepipedum plano fecetur
per diagonos adverforum planorum: Bifari-
am fecabitur solidum ab ipso plano.

74B. Sit parallelepipedum AB, in quo plana opposita
xxx. sint AH, EB, quorum diagonii, seu diame-
fig. 6. tri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur
a 34. primi utraque CD, GF, parallela est, & æqualis ipsi
b 9. und. AE, cum sint parallelogramma CE, GE; erunt
c 33. primi & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. Ac
 proinde, quæ ipsas conjungunt CG, DF, pa-
 rallelæ erunt & æquales, ideoque in uno plano.
 Dicoplanum, quod per CG, DF, ducitur, secare
d 24. und. bisariam parallelepipedum AB. Cum enim pla-
 na AH, EB, sint parallelogramma æqualia, &
 similia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC,
 GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: sunt au-
 tem & latera circa angulos æquales GAC, CHG,
 FED, DBF, proportionalia. Igitur similia quo-
 que erunt dicta triangula. Cum igitur & paral-
 lelogrammum AF, æquale sit & simile parallelo-
 grammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commu-
 ne: Erunt duo triangula AGC, EFD, & paral-
 lelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED,
 æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF,
 & parallelogramm's CB, BG, CF, prismatis
 HGCDBF, proptereaque prismata æqualia erunt,
 ex defin. 10. hujus lib. Quæ cum component
 parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipe-
 dum AB, bisariam. Itaque si solidum parallelepi-
 pedum plano secetur, &c. Quod erat demon-
 strandum.

xxix. THEOR. 24. PROPOS. 29.

Solida parallelepipedæ super eandem basin
constituta, & in eadem altitudine, quorum
infi-

insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis
lineis, sunt inter se æqualia.

Super basin AB, in eadem altitudine, hoc est, *TAB.*
inter eadem plana parallela, sint constituta *xxx.*
duo parallelepipeda ACDE, AFGE; quorum *fig. 7;*
insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes
in iisdem collocantur lineis, nempe AI, AK,
EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG,
in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, *...*
AFGE, esse inter se æqualia. *a* Cum enim æ- *a 35. primi*
qualia sint parallelogramma AL, AM, super
eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta;
erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia
quoque triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero *b 34. primi*
omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omni-
bus lateribus trianguli HCF; erit triangulum
AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale,
perca, quæ in collario 8. propos. lib. 1. ostendimus;
c Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt *c 4. sect.*
proportionalia, ideoque inter se erunt similia.
Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG,
æquale erit & simile. *d* Rursus parallelogrammum *da 4. und.*
AC, æquale est & simile parallelogrammo ED;
& eadem ratione parallelogrammum AF, pa-
rallelogrammo EG: *e* Sed & IF, ipsi LG, *e 36. primi*
æquale est cum bases IK, LM, sint æqua-
les. (*f* Nam cum rectæ, IL, KM, æquales sint *f 34. primi*
ipsi AE, erunt quoque inter se æquales: quare
communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.)
Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH,
æqualia & similia omnibus planis prismatis
ELMGDB. Igitur ex defin. 10. hujus lib. æqua-
lia erunt dicta prismata; *h* Ac propterea addito
communi solido AHFKLDDE, æqualia fient
parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod
erat demonstrandum.

XXX. THEOR. 25. PROPOS. 30.

Solida parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

TAB. Super basin AB, in eadem altitudine, hoc est, **XXXI.** inter eadem plana parallela, sint constituta **fig. 1.** parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protrahæ transcant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia. Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protrahæ in punctis N, O; Et ID, eandem in punctis P, Q; adjunganturque rectæ AN, KO, HP, BQ. Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallela, propter parallelogrammum HIBD. igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. **334. primi** Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cum utriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sunt in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, quum utriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. **b33. primi** Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt **c 29. 2nd.** æqualia.

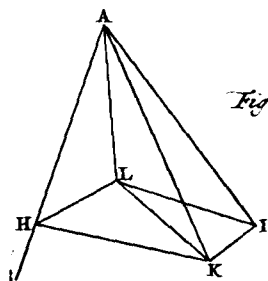
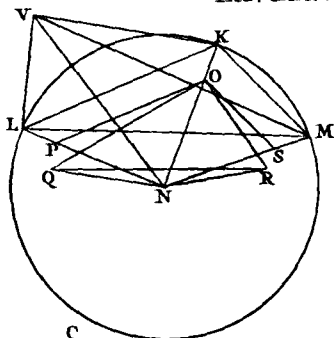
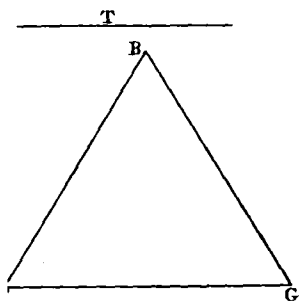


Fig. 4.

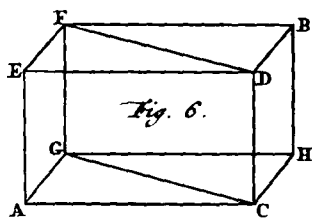
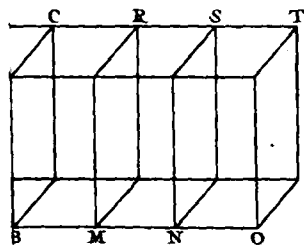
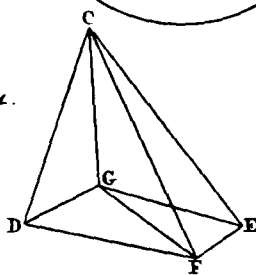


Fig. 6.

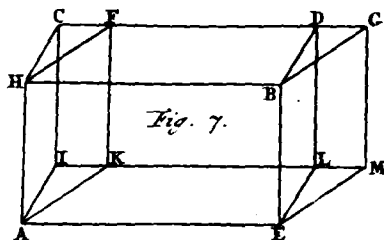
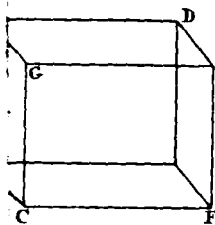


Fig. 7.

sunt æqualia. Solida igitur parallelepipedum super eandem basim, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 26. PROPOS. 31. xxi:
xxij:

Solida parallelepipedum super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

Super æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipedum AEBG, TAB;
XXXI.
CHIK. Dico hæc parallelepipedum esse æqualia fig. 2.
inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basim AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basim CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super quod ad altitudinem perpendicularis KQ, construatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & similia; Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. hujus lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. hujus lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & similia. Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedum QSTV, æqualia sint & similia, tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedum AEBG, tam autem illa, quam hæc b24. u24.
æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis.

X 3

Erunt,

326 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

Erunt, per defin. 10. hujus lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia.

Convenient rectæ DK, TS, productæ in d, & IQ, XY, in e; compleaturque parallelepipedum QdgV, Item HI, bV, protractæ convenient in a; & OD, gR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRa. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, QdgV, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, dX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kd, RT, Rg, QY, Qc, VX, Vb, colligantur in eisdem rectis dT, cX, ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum QdgV.

d35. primi. Quoniam vero parallelogramma KT, Kg, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kg, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales.

e 7. quint. Quare erit, ut CD, ad DR, ita Kg, ad DR:

f 25. und. f Ut autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KLaR; cum parallelepipedum CHaR, secetur plano IK, planis oppositis CH, aR, parallelo. Et eadem ratione ut Kg, ad DR, ita est solidum QdgV, ad solidum IKRa; cum & parallelepipedum Idga, secetur plano KV, oppositis planis Da, db, parallelo. Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, QdgV, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRa, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, Kg, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum QdgV, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG; æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum.

TAB. Sinæ jam neque insistentes lineæ AM, GN, XXXI. LE, BE, ad basin AB, neque CP, KQ, OH, f2. 3. DI, ad basin CD, perpendiculares: b Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, h 11. und. NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares;

lares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis, CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qa. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Ya, aZ, ZX, ut fiant parallelepipeda ETVF, HZaI, quæ cum sint ejusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, ut ostensum est. Sed parallelepipedum i 29. ~~est~~ ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum 30. ~~und.~~ hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZaI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I U M.

Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

Si enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine p̄sient æqualia abscissum, & alterum. Cum p 31. ~~und.~~ ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

Quod si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur major base alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum ejusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

X 4

THEOR.

xxxij. THEOR. 27. PROPOS. 32.

Solida parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases.

TAB. **XXXI.** **fig. 4.** **45. prim.** Sint duo parallelepipeda $ABCD$, $EFGH$, ejusdem altitudinis super bases AB , EF . Dico esse solidum ab solidum, ut est basis ad basim.
45. prim. Super rectam enim EK , construatur parallelogrammum IK , æquale parallelogrammo AB , in angulo IEK , qui sit æqualis angulo ENF . Constituent autem parallelogramma EF , IK , totum parallelogrammum unum FI , ut in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi $EFGH$, producantur ad parres EG , perficiaturque totum unum parallelepipedum
45. prim. $IFLH$; ærunt parallelepipeda $ABCD$, $IKLM$, æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem AB , IK , & eandem altitudinem, ex
45. prim. hypothesi. Quare erit ut solidum $IKLM$, ad solidum $EFGH$, ita solidum $ABCD$, ad idem
45. prim. solidum $EFGH$: Est autem solidum $IKLM$, ad solidum $EFGH$, ut basis IK , hoc est, illi æqualis basis AB , ad basim EF . Igitur & solidum $ABCD$, erit ad solidum $EFGH$, ut basis AB , ad basim EF . Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

xxxvi. THEOR. 28. PROPOS. 33.

Similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

TAB. **XXXI.** **fig. 5.** Sint similia parallelepipeda $ABCD$, $FEGH$, super bases similes AB , EF , in quibus latera homologa sint AI , EK . Dico proportionem parallelepipedi $ABCD$, ad parallelepipedum $EFGH$, esse

esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producat enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR; Item DI, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sunt lateribus GR, GO; & anguli contenti æquales, cum angulus LIM, sit æqualis angulo AID; æqui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt, & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: Sunt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. hujus lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, est ut AI, ad EK, hoc est, ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM; & BI, ad FK, hoc est, ad IN. Ut autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL; Et ut DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & ut BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit ut AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. Sed ut AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & ut basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & ut basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, ut parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP,

X 5

LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoque proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad secundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. *e 32. und.* Ut autem ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; *f 1. sent.* Et ut AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione laterum homologorum. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundum. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex defin. 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

xxxiv. THEOR. 29. PROPOS. 34.
xxxv.

Æqualium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia,

TAB. SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF,
xxxv. super bases AD, EH. Dico bases AD, EH,
fig. 6. & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse ut AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem solidi ADCB. Sint enim primum insistentes lineæ
AI,

AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita ut AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31. hujus lib. ostendimus. Quare erit, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde bases & altitudines sunt reciproca.

Quod si altitudines AI, EK, inæquales fuerint; sit EK, major, ex qua abscindatur EL, ipsi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH, per scholium propos. 15. hujus lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB, EHGF; ærit ut ADCB, ad solidum EHML, ita EHGF, ad idem solidum EHML: Ut autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL, ut solidum EHGF, ad solidum EHML, ita est eadem ratione basis KN, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: Sed ut KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciproca sunt bases, & altitudines.

Sint jam bases & altitudines reciproca. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.

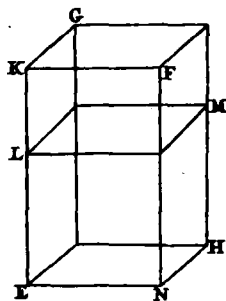
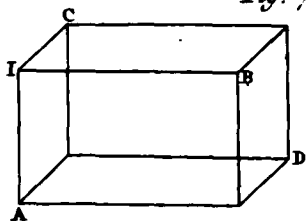
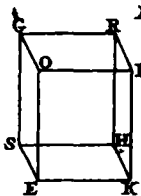
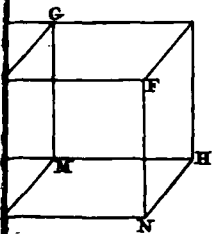
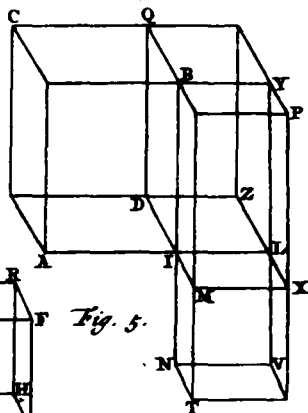
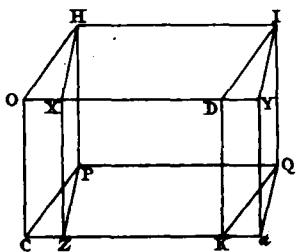
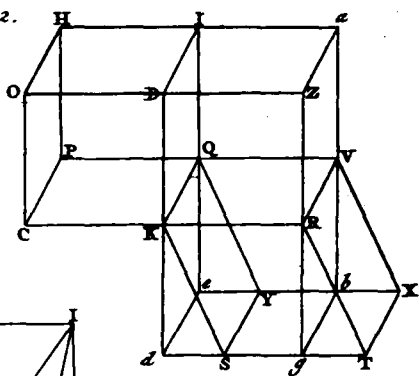
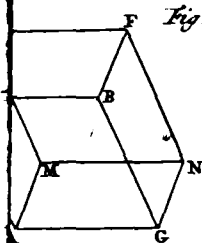
Quod si altitudo EK, major fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis. & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur

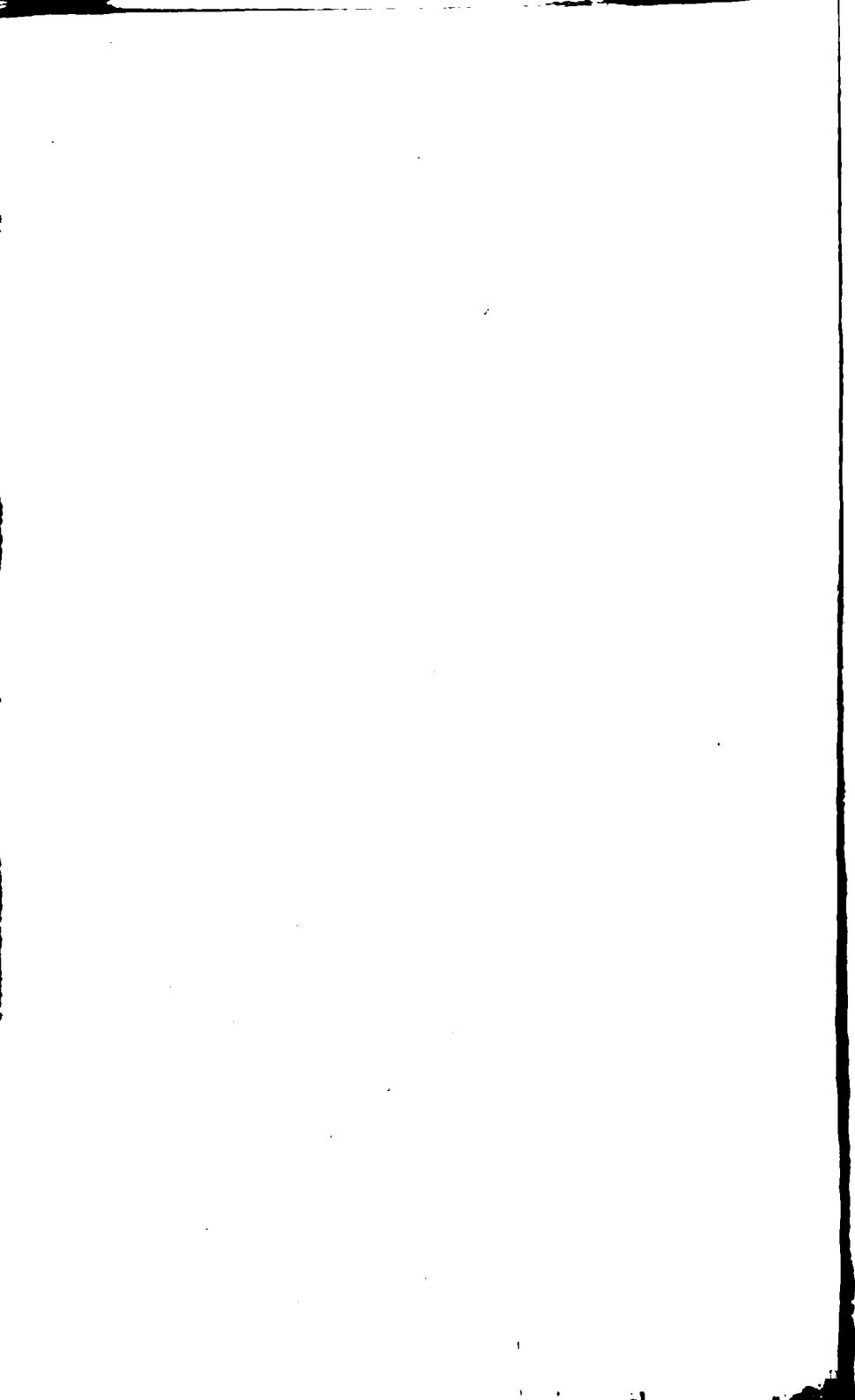
ex

ex hypothesi est, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad
 832. *ind.* EL, ipsi AI, æqualem; *c* Ut autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur. *f* Et ut EK, ad EL, ita est, KN, ad LN; *g* Ut autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum EHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit ut solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; *b* ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

TAB. Sed proponantur jam parallelepipeda ABCD, XXXII.
 EFGH, æqualia, quorum insistentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FO, PG, non sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum basis
 833. *ind.* AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; *n* Item à punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Qa, GZ: connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Za, XZ, Ya: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, ut basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinem XN, ad altitudinem RI. Cum enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi, sit autem ABCD, æquale solido RVCD, quod habeant eandem basin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale solido XaGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XaGH, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH; erit, ut jam demonstratum est, ut basis CD, ad basin GH, hoc est, ut basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocz.

Sint jam bases atque altitudines reciprocz. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, ut prius; Cum sit ut basis AB, ad basin EF,





ita altitudo XN , ad altitudinem RI ; / Sit $144. \text{m.}^2$
 m AB , ipsi CD , & EF , ipsi GH , æqualis;
 quoque ut basis CD , solidi $RVCD$, ad ba-
 s is GH , solidi $XaGH$, ita altitudo XN , ad alti-
 tudinem RI . Quare cum XN , RI , sint insisten-
 tiæ perpendiculares ad bases CD , GH ;
 , ut jam ostensum est, æqualia parallelepi-
 pipeda, $XaGH$. m Sunt autem hæc paral- $m 19. \text{vel}$
 lelepipedi $ABCD$, $EFGH$, æqua- $30. \text{m.}^2$
 litur quoque æqualia erunt parallelepipa-
 da, $EFGH$: Idemque ostendetur, si insisten-
 tiæ unius parallelepipedi fuerint perpendicu-
 lare basi, alterius vero non. Quamobrem,
 lorum solidorum parallelepipedorum bases,
 itudines reciprocantur, &c. Quod erat
 endum.

S C H O L I U M.

ia hæc quæ demonstrata sunt in sex proximis
 ionibus, nimirum 29, 30, 31, 32, 33, & 34.
 unt quoque prismatis, quæ habent duo plana
 triangularia, si prædictæ hypotheses serven-
 Nam si duobus prismatis ejusmodi ejusdem alti-
 tudinis, & super eandem basin, vel super æquales
 nstitutas, apponantur duo alia prismata illis
 & similia, conficiantur duo parallelepipeda
 altitudinis, & super eandem, vel æquales
 sistentia. m Quare æqualia erunt ejusmodi $m 19, 30.$
 pipeda; ac proinde & data prismata, eorum $\text{vel } 31.$
 dimidia. m.^2

s, si duobus prismatis prædictis ejusdem alti-
 tudinis, & super diversas bases constitutis adjici-
 untur alia prismata illis æqualia & similia,
 tur iterum duo parallelepipeda ejusdem alti-
 tudinis. Quare erit parallelepipedum ad parallele-
 pipedum, ut basis ad basin; & Asque adeo prismata
 a, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad
 alterius, ut eadem basis ad basin, si pris-
 mases fuerint parallelogramma, vel certe ut
 unum ad triangulum, dimidium scilicet unius
 dimidium alterius, si bases prismatum fue-
 rint triangula. $m 32. \text{m.}^2$
 Præterea $015. \text{quint.}$

834 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

Præterea, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis equalia & similia, p33. und. constituentur duo parallelepipeda similia, p quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Ititur & prismata, eorum minimorum dimidia, qcum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.
Denique si dictis duobus prismatis equalibus adjungantur, alia duo prismata illis equalia & similia, componentur duo parallelepipeda equalia earundem
134. und altitudinum cum prismatis. 1 Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangula earum
815. quint. dimidia seandem habentia proportionem; Erant quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca.

xxxvii. T H E O R. 30. P R O P O S. 35.

Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendunt.

TAB. XXXII. *fig. 2.* **S**int duo anguli plani æquales. BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana sublimes rectæ lineæ, AG, DH, ita ut angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: à sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur

tantur ad plana; in quibus anguli BAC, EDF,
 existunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in
 puncta I, K, & adjungantur rectæ IA, KD.
 Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter
 se; Nam si AG, DH, sunt inæquales auferatur
 à majori AG, ipsi DH, æqualis linea AL,
 & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipsi
 GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ
 sunt GI, LM, & est GI, ad planum anguli
 BAC, recta; ærit quoque LM, ad idem planum
 recta: ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas
 AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB,
 MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL,
 LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad
 planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet
 cum recta AM, in eodem plano ducta per
 defin. 3. hujus lib. *b* Quare quadratum rectæ
 AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML;
 c Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis
 rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit,
 ex constructione. Quadratum ergo rectæ AL,
 æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML:
 d At quadratis rectarum CM, ML, æquale est
 quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus sit
 per defin. 3. hujus lib. Igitur quadratum rectæ
 AL, æquale est quadratis rectarum AC, CL;
 e Ac proinde angulus ACL, rectus erit. *f* Rursus quia
 quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum
 AM, ML: g Est autem quadratum rectæ AM, æquale
 quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per
 constructionem, sit rectus. Igitur quadratum
 rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML:
 h At quadratis rectarum BM, ML, æquale est
 quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit
 rectus ex defin. 3. hujus lib. Quadratum ergo
 rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL;
 i proptereaque angulus ABL, erit rectus. Non aliter
 ostenduntur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur
 anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis
 DEH,

DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera
 k16. primi AL, DH, æqualia; & erunt & reliqua latera AB,
 BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem
 argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis
 DF, FH. Quare cum latera AB, AC, triangu-
 li ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trian-
 guli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æ-
 quales, ex hypothesi; & erunt & bases BC, EF,
 inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF,
 DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM,
 ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales; cum
 omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC,
 MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales
 erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF,
 sint ostensa æqualia; & erunt latera BM, CM,
 lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera
 AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa
 lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli
 ACM, DFK, sunt recti; & erunt & bases AM,
 DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint
 ostensa rectæ BL, EH, erunt etiam earum qua-
 drata æqualia. Quia vero quadratum rectæ
 BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML,
 & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK,
 KH, quod anguli BML, EKH, recti sint, ex
 defin. 3. hujus lib. Erunt & quadrata rectarum
 BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH.
 Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ
 æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensa sint
 æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK,
 æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æ-
 quales. Quam ob rem cum latera AL, AM,
 trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK,
 trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqua-
 lis; & erunt & anguli LAM, HDK, æquales.
 Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quo-
 rum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c.
 Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Itaque, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ linæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utriusque. Erunt à puræis extremis linearum sublimium ad planum angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & sublimes æquales AL, DH, constituunt angulos æquales LAB, HDE. Item LAC, HDF: demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK, esse æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. xxxviii]

Si tres rectæ linæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

Sint continue proportionales rectæ A, B, C. TAB.
Constituaturque angulus solidus E, ex tribus xxxii.
angulis planis quibuscunque DEF, DEG, FEG, fig. 3:
ita ut rectæ DE, ipsi A; & EF, ipsi B; & EG,
ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelo-
grammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepi-
pedum DH, quod sub tribus rectis A, B, C,
dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. a 26. m.
Deinde ad
rectam IK, ejusque punctum K, fiat solidus an-
gulus K, æqualis solido angulo E, ex tribus
angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales
sint tribus DEF, DEG, FEG, ita ut rectæ IK,
KL, KM, æquales sint mediæ linæ B. Com-
pletis vero parallelogrammis IL, LM, MI, per-
ficiatur parallelepipedum IN, quod contineri di-
citur sub linea B, seu ex ipsa describi. Dico so-
lidum DH, æquale esse solido IN. Cum enim
sit ut DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE,
ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C,
sumpta

338 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales. *b 14/ax.* Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum verticibus insistant sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propof. præcedentis. *e 31. mnd.* Quare parallelepipeda DH, IN; (Cum habeant bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines.) inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

xxxix. THEOR. 32. PROPOS. 37.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

TAB. *xxxii.* *fig. 4.* Sint quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; ut quidem A, ad B, ita C, ad D; constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta; item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, sive hæc sint illis similia, sive non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia; Ut quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inveniantur enim per scholium propof. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continue proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor

quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ alæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, ut A, ad F, ita C, ad H. Ut autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, & ut C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. hujus lib. Igitur erit ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

Sint jam è contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales: a Tribus enim rectis A, B, C, inveniatur quarta proportionalis I, b super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut jam est ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Ut autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit ut solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. c Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. hujus lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

Brevius tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. d Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ

rectæ C, ad rectam D: erunt proportionēs solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, ut rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportionēs rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportionēs triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in uno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

TAB. XXXII. **PLANUM** enim AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; & ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. hujus lib. atque adeo & ad rectam GE, per 3. defin. hujus lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG,

LIBER UNDECIMUS. 341

EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum, cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. b17. primi

THEOR. 34. PROPOS. 39. XXXX.

Si solidi parallelepipedum eorum, quæ ex adverso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedum diameter, bifariam se mutuo secabunt.

Sint parallelepipedum AB, plana opposita AC, TAB.
BD, quorum omnia latera bifariam secta sint XXXII.
in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ fig. 6.
extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio
communis sit recta RS: Ducatur item diameter
AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se
mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis
RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula
AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS,
trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS,
trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia
rectarum æqualium AG, CH, a & QS, OS, dua- a34. primi
bus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint pa-
rallelogramma AS, HS,) b & angulus AQS, æ- b29. primi
qualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, c 4. primi
CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales.
Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus d13. primi
rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis
æquales: Ac propterea AS, CS, unam rectam e14. primi
lineam constituent. Eodem modo ostenduntur
esse æquales BR, DR, & unam ex eis componi
lineam rectam. Rursus quia utraque AD, BC,
parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelo-
gramma

E 9. und. grammæ AF, FC, ipsæ quoque inter se parallelæ erunt, & æquales. Quare & rectæ AC, BD, earum extrema conjungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex adverso, &c. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in uno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam dividunt, ut hic demonstratum est, rectam RS.

xxxix. T H E O R. 35. P R O P O S. 40.

Si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basim, parallelogrammum: illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

TAB. XXXIII. *fig. 1.* SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, con-

Fig. 6.

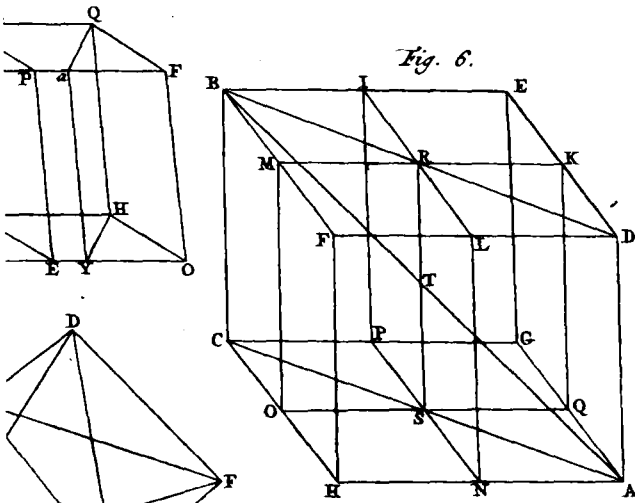
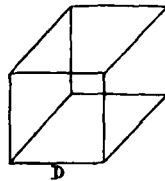
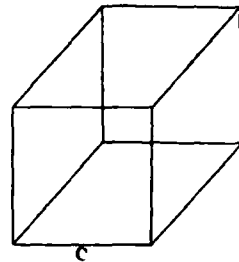
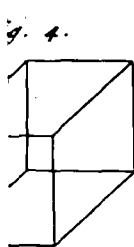
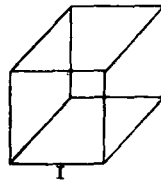
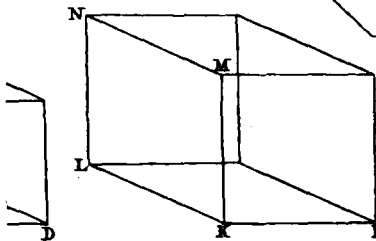
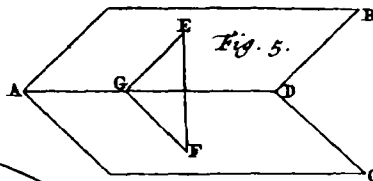


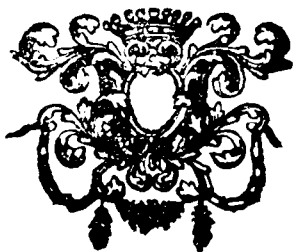
Fig. 5.



G——

H——

constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propof. 15. hujus lib. *a* Quoniam *a* 34. *prim* igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, ejusdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. *b* Quare paral- *b* 31. *und* lelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (*c* nam parallelepipedum AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum adverſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet prismata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.





EUCLIDIS ELEMENTUM DUODECIMUM.

Et solidorum secundum.

THEOR. I. PROPOS. I.

Quæ in circulis polygona similia; inter
se sunt, ut à diametris quadrata.

TAB.
XXXIII.
fig. 2.

SInt duo polygona similia $ABCDE$, $FGHIK$, descripta in circulis, quorum diametri AL , FM . Dico ita esse polygonum $ABCDE$, ad polygonum $FGHIK$, ut quadratum diametri AL , ad quadratum diametri FM . Subtendantur enim angulis æqualibus ABC , FGH , rectæ AC , FH , & connectantur rectæ BL , GM . Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est, ut AB , ad BC , ita FG , ad GH ; *a 6. sent.* erunt triangula ABC , FGH , æquiangula, cum circa angulos æquales ABC , FGH , habeant latera proportionalia: *b 21. sentii.* Est autem angulus ALB , angulo ACB ; & angulus FMG , angulo FHG , æqualis. Igitur & anguli ALB , FMG , æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL , FGM , æquales sint, *c 31. sentii.* nempe recti in semicirculis existentes; *d 31. primi.* erunt & reliqui BAL , GFM , æquales. *e 4. sent.* Quare erit ut AL , ad AB , ita FM , ad FG ; & persequendo, ut AL , ad FM , ita AB , ad FG .

FG. ſi igitur eſt ut quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHK, ſuper FG; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, ut à diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. Q.

Circuli inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.

Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita ſe habet; Sit ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel major circulo EFGH. Si enim eſſet æqualis, haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea eſſet circulus ABCD, ad circulum EFGH, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine ſcilicet K, ita ut circulus EFGH, æqualis ſit magnitudinibus I, & K, æmul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium eſt quadrati circa eundem circulum deſcripti, ut ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus, majus erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur biſariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adjunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi EF, ut ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V. Quia ergo triangulum TAB. XXXIII. fig. 2.
27. propoſ.
b4. p. 2.
Y 5 ELF,

11. **ELF**, dimidium est parallelogrammi **TEFV**; majus erit triangulum **ELF**, quam dimidium segmenti circuli **ELF**. Eadem ratione erunt reliqua triangula majora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul majora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ **EL**, **LF**, &c. secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ majora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si à circulo **EFGH**, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum **EFGH**; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula **ELF**, **FMG**, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam **K**, excessus inter circulum **EFGH**, & magnitudinem **I**, uti ex subiecto lemmate constat. Sint jam circuli segmenta relicta **EL**, **LF**, **FM**, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo **K**. Cum igitur circulus **EFGH**, æqualis ponatur magnitudinibus **I**, & **K**, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex **I**, & **K**, ipsa magnitudo **K**, quæ major est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum **ELFMGNHO**, majus reliqua magnitudine **I**. Inscribatur in circulo **ABCD**, polygonum **APBQCRDS**, simile polygono **ELFMGNHO**. Quod quidem facile fiet, si semicirculi **ABC**, **ADC**, bifariam secentur in **B**, & **D**; & rursus circumferentiæ **AB**, **BC**, **CD**, **DA**, bifariam in **P**, **Q**, **R**, **S**; & sic deinceps, donec in tot partes æquales divisa sit circumferentia **ABCD**, in quot distributa est circumferentia **EFGH**. Nam junctis rectis **AP**, **PB**, **BQ**, &c. erit figura inscripta similis figuræ **ELFMGNHO**, ut patet.

12. **Quoniam** igitur est polygonum **APBQCRDS**, ad polygonum **ELFMGNHO**, ut quadratum diametri **AC**, ad quadratum diametri **EG**, hoc est, per hypothesim, ut circulus **ABCD**, ad **I**: Est autem polygonum **APBQCRDS**, minus

erit circulo ABCD. Igitur & polygonum ^{Fig. 14. quint.} ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostentum autem est & majus. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

Quamquam autem in figura confertur major circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam major circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum majoris diametri AC; Ita ut generaliter & univérse demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor.

Sit deinde magnitudo I, major circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & convertendo I, ad circulum ABCD, ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur ut I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, major ponitur circulo EFGH, ^{Fig. 14. quint.} major quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostentum enim est jam in priori parte generaliter, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor. Quamvis autem circulus ABCD, major est, & EFGH, minor: eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem
circulo

circulo ABCD, majorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem, quod falsum esse jam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita ut generaliter & universe quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo majorem, sive prior circulus major sit posteriore, sive minor. Non ergo major est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri AG, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; *§ 7. quæst.* fit autem ut circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, sive circulus ABCD, circulo EFGH, major sit, sive minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est,

L E M M A.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis si à majore auferatur majus quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur majus quam

quam dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quadam magnitudo, qua minor erit proposita minore magnitudine.

Proposita sint duae magnitudines inaequales AB , C , quarum AB , sit major. Dico si ex AB , auferatur majus quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus majus quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinquitur tandem magnitudinem quandam, qua minor sit quam C . Multiplicetur enim C , toties, donec magnitudo facta DE , major sit quam AB , ita ut DE , sit multiplex ipsius C , proxime major quam AB . Divisa autem DE , in partes DF , FG , GE , ipsi C , aequales, detrahatur ex AB , majus quam dimidium AH , & ex reliqua HB , majus quam dimidium HI ; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB , multitudine aequales sint partibus ipsius DE . Sint ergo jam partes AH , HI , IB , tot, quot sunt ipsa DF , FG , GE . Quia igitur DE , major est quam AB ; At ex DE , ablatum est DF , minus quam dimidium, vel certe dimidium; si DE , ipsius C , sit duplex; ex AB , vero majus quam dimidium AH : Erit reliquum FE ; reliqua HB , majus. (Cum enim DE , major sit quam AB ; si ex DE , dimidium auferetur, nec non & ex AB , dimidium, esset quoque reliquum ex DE , majus reliquo ex AB . Si ergo ex DE , auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB , majus quam dimidium; erit reliquum ex DE , majus reliquo ex AB .) Rursus quoniam FE , major est quam HB , auferturque ex FE , dimidium FG , vel certe minus quam dimidium, si FE , major sit quam duplex ipsius C , at ex HB , majus quam dimidium HI , erit eodem modo reliquum GE , majus reliquo IB :
atque

TAB,
XXXIII,
fig. 4.

aque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hic est GE, majorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, major quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IR, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à majori auferatur majus, &c. Quod erat demonstrandum.

Idem demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, majus reliquo HB, nec non & reliquum GE, majus reliquo IB; cum ex majori DE, ablatum sit DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

iiij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Omnis pyramis triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

TAB. XXXIII.
fig. 5. 6.

Si pyramis, cujus basis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia ejus latera bitariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HG, HE, EI, IF. Divisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, vertexes H, D; nec non in duo solida prismata, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF; hujus vero basis est triangulum CFG, cui oppositur

nitur triangulum KIH , habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum $FGHI$; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, ut constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D , in sublimi, nec non ejus triangula circumjacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & majora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD , BD , trianguli ADB , secta sint bisariam, ac proinde proportionaliter, *a* erunt *a* 2. *sem*. HI , AB , parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK , BC , & HK , AC ; & EG , BC ; & EF , AC ; & FG , AB ; & EH , BD ; & EI , AD ; & IF , DC ; & HG , DC . *b* Sunt autem & rectæ *b* 9. *mod*. FG , HI , cum parallelæ sint ipsi AB , inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH , FI , cum sint parallelæ ipsi DC . Quare parallelogramma sunt $AEIH$, $HEBI$, $IDHE$, $EBFG$, $GHKC$, $CKIF$, $FGHI$. Quoniam vero rectæ HE , HG , rectis DB , DC , sunt parallelæ; erunt anguli EHG , BDC , æquales: Ac eadem *c* 10. *mod*. ratione æquales erunt anguli HEG , DBC ; & HGE , DCB . *d* Proportionalia igitur sunt latera *d* 4. *sem*. trianguli HEG , lateribus trianguli DBC , circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG , triangulo DBC : Sunt autem & triangula HAE , HAG , AEG , triangulis DAB , DAC , ABC , similia per coroll. propof. 4. lib. 6. Pyramis ergo $AEGH$, pyramidi $ABCD$, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI , HK , rectis AB , AC , sunt parallelæ, erunt anguli IHK , BAC , æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK , ABC ; & HKI , ACB . *f* Quare latera trianguli HIK , lateribus trianguli *f* 4. *sem*. ABC , circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK , triangulo ABC , simile est: Sunt autem & triangula DHI , DIK , DKH , triangulis DAB , DBC , DCA , similia, per idem coroll. propof. 4. lib. 6. Pyramis ergo $HIKD$, similis est quoque eidem pyramidi $ABCD$, per

32 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

- per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, ut
 g 21. *scut.* ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. *g* ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cum similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, h 34. *primi* & quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erunt & similia triangula EHG, IDK, cum sint ostensa similia triangulo i 34. *primi* BDC, & habeant rectas HE, DI, i quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius; ut demonstratum est.
- h 34. *primi* Rursus, quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea
 l 15. *und.* & similia: Sunt autem & parallelæ; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum
 m 34. *primi* CFGHIK. Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: Sunt autem & parallelæ, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planum
 KIH,

KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex adverso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam vero prisma EBFGHI, CFGHIK, sunt ejusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK, & parallelogrammum ECFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis hujus, per scholium propos. 41. lib. 1. Ipsa inter se æqualia erunt.

040-1714

Denique quia prisma EBFGHI, majus est pyramide EBF, totum parte; Est autem pyramis EBF, æqualis & similis pyramidi AEGH, nec non pyramidi HIKD, ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Majora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero à dimidio ejusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, major dimidium ejus superat, minor vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv;

Si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore divisione nate sunt, idque semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in una pyramide, prismata, ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

Si super bases triangulares ABC, EFG, duæ
pyramides ABCD, EFGH, ejusdem altitudinis,
Z XXX f8.

nis, quarum latera bifariam dividantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita ut pyramis utraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV; ut vult propositio præcedens: eodemque modo intelligantur esse divise pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH, & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, ut est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea divisa est bifariam, sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. prop. 4. lib. 6. *a* Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG, ita est prismata CKLMNO, ad prismata GQRSTV, ut mox ostendemus, atque ideo ita prismata IBKLMN, ad prismata PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prismata, videlicet IBKLMN, ad unam prismata PFQRST, *b* ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta divisione. Sed ut illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est

est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC , ad basin EFG . Igitur erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EFG , ita prismata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide $ABCD$, ad prismata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide $EFGH$: Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis $ABCD$, ad prismata pyramidis $EFGH$, ita prismata tam pyramidis $AILM$, ad prismata pyramidis $EPRS$, quam prismata pyramidis $MNOD$, ad prismata pyramidis $STVH$; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis $ABCD$, ad duo prismata pyramidis $EFGH$, ita omnia prismata ^{c12. quins;} in pyramidibus $ABCD$, $AILM$, $MNOD$, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus $EFGH$, $EPRS$, $STVH$, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EFG , ita omnia prismata in pyramide $ABCD$, ad omnia prismata in pyramide $EFGH$. Quocirca si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Quod autem sit LKC , ad QRG , ita prisma $CKLMNO$, ad prisma $GQRSTV$, ita ostendemus. Intelligentur ex verticibus D , H , ad bases ABC , EFG , demissa perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum $ABCD$, $EFGH$. Quoniam igitur plana parallela ABC , MNO , dsecant duas ^{d. 17. und.} rectas, nempe DC , & perpendicularem ex D , demissam proportionaliter, secatur autem DC , bisariam in O ; secabitur quoque perpendicularis ex D , demissa bisariam in puncto, cui planum MNO , occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H , demissa bisariam secabitur a plano STV . Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidia, nempe prismatum altitudines, æquales: Ac

proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propof. 34. lib. 11. demonstravimus.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases, inter se sunt, ut bases.

TAB. XXXIII.
fig. 7. **S**int pyramides ejusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis, ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; quod vel minus erit, vel majus pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Dividatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, juxta propof. 3. hujus lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV; quæ majora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. per lemma propof. 2. hujus lib. Sit ergo jam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, majora solido X. Dividatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide

de

de EFGH. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; & erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & majora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH. c 4. duod.

Sit deinde solidum X, pyramide EFGH, majus. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG: Erit convertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, majus ponitur pyramide EFGH, erit & pyramis ABCD, major solido Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam, non posse esse, ut est, basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo majus est solidum X, pyramide EFGH, sed neque minus, est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; & sit autem pyramis ABCD, ad solidum X, ut ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum. d 14. quint. e 14. quint. f 9. quint.

COROLLARIUM.

Hinc fit, pyramides ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

TAB. XXXIII.
fig. 8.
a 5. duod.
b 5. duod.
c 5. duod.

Sint pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares divisa. *a* Quia vero est, ut basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo ut basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: *b* Sed rursus est ut basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo ut basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit ut basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit ut basis GHIKL, ad basin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & convertendo ut basis GKL, ad basin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. *c* Rursus quoniam est, ut basis ADE, ad basin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, ut manifestum est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit ut basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

S C H O L I U M.

Quamvis huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus ejusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygonæ latera videntur multitudine aequalia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus ejusdem altitudinis quarum unus basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim duæ pyramides ejusdem altitudinis $ABCDEF$, $GHIK$, quarum illius basis sit polygonæ, **TAB.** nempe pentagonæ, hujus vero triangulæ. **XXXII.** pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. **fig. 9.** Resoluto enim pentagono in triangu-
la, erit $\&$ pyramis in pyramides numero æquales divisa. **Quoniam d 5. duod.** vero est, ut basis ABC , prima quantitas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ABCF$, tertia quantitas ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem; $\&$ eodem modo, ut basis ACD , quinta quantitas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ACDF$, sexta quantitas, ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem: e Erit ut basis **enq. quins.** $ABCD$, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ABCDF$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis $ABCD$, prima quantitas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ABCDF$, tertia quantitas, ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem, ut modo est ostensum: $\&$ ut basis ADE , quinta quan- **f 5. duod.** titas ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ADEF$, sexta quantitas ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem; g Erit etiam basis $ABCDE$, **ga. quins.** prima quantitas cum quinta, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ABCDEF$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangu-
la in basi polygonæ.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Omne prisma triangularem habens basim,

Z 4

divi-

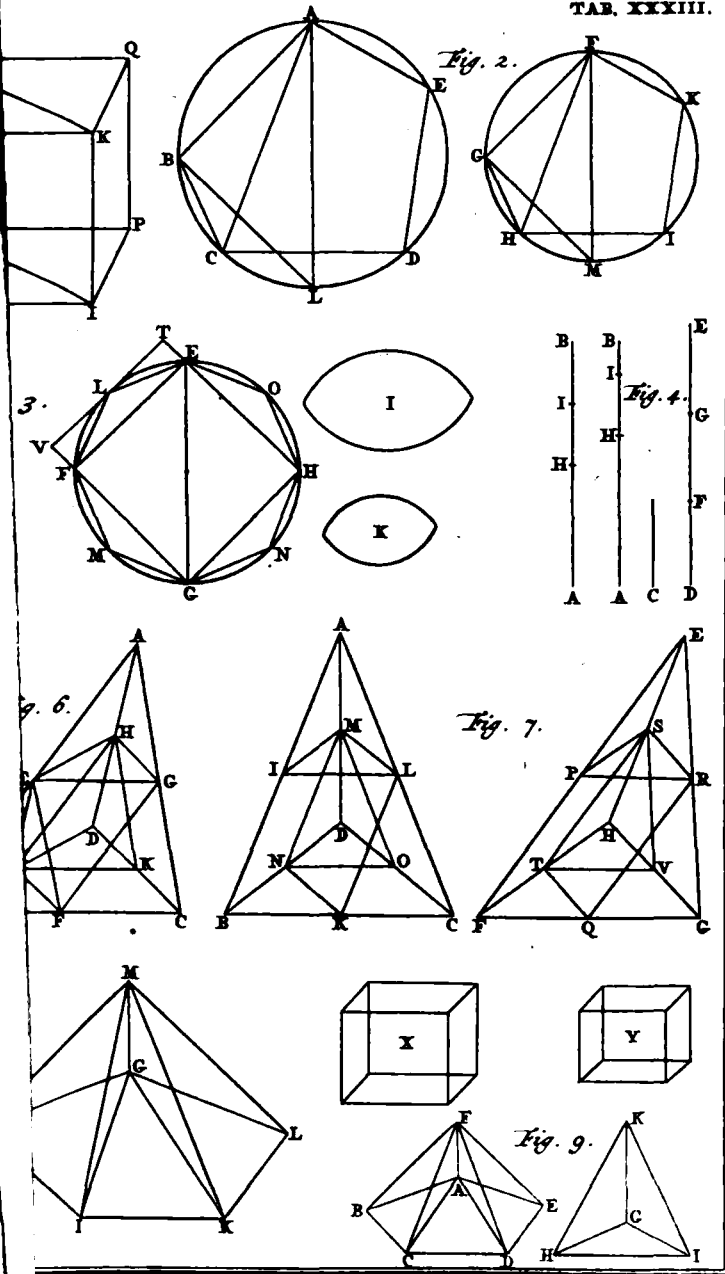
dividitur in tres pyramides æquales inter se,
triangulares bases habentes.

TAB. XXXIV. **fig. 1.** Sit prisma $ABCDEF$, cuius duo triacula opposita, æqualia, ac similia ABF , DCE . Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus paralleogrammis tres diametri, nempe AC , in $ABCD$; CF , in $BCEF$, FD , in $ADEF$. *a* Quoniam igitur triacula ABC , ADC , æqualia sunt; *b* estque ut basis ABC , ad basin ADC , ita pyramis $ABCF$, ad pyramidem $ADCF$, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F , vertice ad planum $ABCD$, demissam; Erunt & pyramides $ABCF$, $ADCF$, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides $ADFC$, $EFDC$, super æquales bases ADF , EFD , constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C , ad planum $ADEF$, demissa. Est autem pyramis $ADCF$, eadem pyramidi $ADFC$, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC , & triangulis ADF , ACF , DCF ; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF , & triangulis ADC , ACF , DCF . Igitur tres pyramides $ABCF$, $ADCF$, $EFDC$, seu $CDEF$, (quæ eadem est pyramidi $EFDC$, cum tam $EFDC$, quam $CDEF$, contineatur planis CDE , EFD , DCF , FCE), totum prisma componentes, ut perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma $ABCDEF$; in tres pyramides æquales est divisum. Quo circa omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basin, & altitudinem: Sive prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

Stk



Sit enim primum pyramis ABFC, triangularem habens *TAB.*
basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine *XXXIV.*
eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyrami- *fig. 2.*
dem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta
DF, erit prisma divisum in tres pyramides æquales
ABCF, ADCF, CDEF, & ut demonstratum est; Ac c 7. duod.
propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC,
(cum hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem
planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia
pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC,
æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudi-
ne, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll.
propof. 5. hujus lib. manifestum est, quamlibet pyra-
midem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum
illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea
prisma è contrario esse pyramidis triplum.

Sit deinde pyramis ABCDE, cujus basis rectilincum *TAB.*
quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & prisma *XXXIV.*
ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens ba- *fig. 3.*
sim: Dico rursus pyramidem esse prismatis partem ter-
tiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito
EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF,
FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia
triangulares divisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF,
CF, erit, ut demonstratum est, pyramis ADBH, tertia
pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia
pars prismatis CDHGFB. Quare erit ut pyramis ADBH,
ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma
CDHGFB; & Ac propterea ut una pyramis ad suam pris- *dia. quint.*
ma; ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est,
ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF,
simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH.
Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi
ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE,
super eandem basin, & super eadem altitudine, ni-
mirum inter plana parallela, sunt æquales, ex
coroll. propof. 5. hujus lib. Eademque ratione æquales
sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basin,
& super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides
ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE,
erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH.
Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunque alte-
ri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basin
ABCD, constituta, per coroll. propof. 5. hujus lib. per-
spicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem
prismæ

prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam divisus polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Unde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertie partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

S C H O L I U M.

Sub eadem altitudine existentia prismata, quas-
cunque habeant bases, inter se sunt, ut bases.

Quamvis enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangulara, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ: nec non de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstrabimus univ-
erse de omnibus prismatis, quorum duo plana ad-
versa, sive bases, sunt polygonæ, quamvis plura late-
ra, seu anguli in unius base reperiantur, quam in
base alterius. Sint igitur duo prismata ejusdem al-
titudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum
bases sint figuræ multilateræ. Dico ut est basis
TAB. XXXIV. ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad
fig. 4 prisma. Si enim ex omnibus angularis utriusque basis
ad unum punctum superioris plani, quod basi oppo-
nitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent due pyra-
midēs sub eadem altitudine cum prismatis habentes
easdem bases; Ac proinde per coroll. prædictum hu-
jus propof. qualibet pyramis tertia pars erit sui
prismatis. a Quam ob rem erit, ut pyramis ad py-
ramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad py-
ramidem est, ut basis ad basim, ut ostensum est propof.
6. ejusque scholio. Igitur erit quoque ut basis ad
basim, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viii:

Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

Sint pyramides similes triangulares ABCD, TAB. XXXIV,
 EFGH, ita ut bases ABC, EFG, sint simili- fig. 5.
 les, & reliqua triangula unius similia reliquis
 triangulis alterius. Dico proportionem pyrami-
 dum esse triplicatam proportionis, quam habent
 latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur
 enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB,
 perficianturque parallelogramma BI, BK, BL.
 Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL,
 parallelæ convenientes in M, connectaturque re-
 cta KM. Erit igitur completum parallelepipedum
 BM, ejusdem cum pyramide altitudinis; cum
 plana solidi BM, sint parallela, ut facile colligi-
 tur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo
 perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur
 ob similitudinem pyramidum, anguli plani ABC,
 EFG, sunt æquales, estque ut AB, ad BC, ita
 EF, ad FG; erant parallelogramma BI, FN,
 similia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH,
 sint æquales, sitque ut AB, ad BD, ita EF, ad
 FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & ut
 DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & paralle-
 logramma BL, BK, parallelogrammis FP, FO,
 similia. Sed tam tria BI, BK, BL, parallele- a 24. und.
 pipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM,
 CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi
 FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ,
 sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana cir- b 24. und.
 cumferentia solidum BM, similia sunt sex pla-
 nis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex
 defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM,
 FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, & pri- c 15. quatuor.
 mata DBCILA, HFGNPE, habent eandem pro-
 portionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eo-
 rum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, ean-
 dem

- an. quint.* dem, quam prismata dicta, earum tripla; *d* habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. *e* Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

- TAB. XXXIV.* Sinr pyramides similes, quarum bases rectilineæ similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent *fg. 6.* latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC, LH, LI, *f. 20. sext.* *f* dividæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita ML, ad LG: Ut autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam *g. 5. sext.* ex æquo, ut FE, ad FB, ita ML, ad MH. *g* Quare æquiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABFE, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; *h. 8. duod.* Item CDEF, IKLM. *h* Quapropter, ut demonstratum est, pyramides ABFE, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM,

GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; Atque ideo erit ut una pyramis ABEF, ad unam *i 12. quatuor;* pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, & cum pyramis *k 8. duod;* ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

THEOR. 9. PROPOS. 9. vij.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, recipiuntur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium recipiuntur bases & altitudines, illæ sunt æquales.

Sint æquales pyramides triangulares ABCD, *TAB.* EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & *XXXIV.* altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut ABC, *fig. 7.* ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, ut in præcedenti propositione dictum est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. *a 34. una;* Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: *bis, quatuor;* Ut autem basis BI, ad basin FN, ita est trian-

triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

Sint jam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, *est. quint.* ut prius; cum sit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sinque eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ; *d 34. und.* Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

viii. THEOR. 10. PROPOS. 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

TAB. XXXIV. fig. 8. HABeant conus & cylindrus basin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel major, vel minor triplo coni. Sit primum major quam triplus coni, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscrubatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI,

ut

ut ad propof. 9. lib. 4. offendimus; & eſtque ut a 31. und.
 baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum
 ejuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD,
 dimidium parallelepipedum baſis FGHI; Ac proinde parallelepipedum
 baſis ABCD, majus erit, quam dimidium cylindri,
 cujus baſis circulus ABCD. Secentur bifariam
 peripherie AB, BC, CD, DA, in punctis K,
 L, M, N, adjunganturque rectæ KA, KB, LB,
 LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque
 per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ
 parallela erit ipſi AB, ut ad propoſ. 27. lib. 3.
 offendimus, occurratque rectis DA, CB, produ-
 ctis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelli-
 gantur priſmata ſub altitudine conſi & cylindri.
 6 Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt pa- b 41. primi
 rallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis
 AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedum baſis
 ABOP: cum ſit priſma, ad priſma ut baſis ad baſim,
 quemadmodum, ad propoſ. 7. hujus lib. demon-
 ſtravimus; Ac propterea priſma baſis AKB, ma-
 jus erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cujus
 baſis figura contenta linea recta AB, & periphe-
 ria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quo-
 rum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA,
 & altitudo eadem, quæ conſi & cylindri, majo-
 ra, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum
 baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſ-
 mata ſimul majora ſunt, quam dimidia omnium
 ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurfus pe-
 ripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariam, & ad-
 jungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem mo-
 do priſmata ejuſdem altitudinis cum cono, &
 cylindro, quæ majora erunt ſimul, quam dimi-
 dia omnium ſegmentorum cylindri ſimul, quo-
 rum baſes circuli ſegmenta, & ſic deinceps.
 Quoniam vero ſi à cylindro, cujus baſis circulus
 ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe
 parallelepipedum baſis ABCD; & à reliquis ſeg-
 mentis plus quam dimidium, nimirum priſmata
 baſium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum
 ſemper

semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E , excessus cylindri supra triplum coni, per lemma propof. 2. hujus lib. Sint jam segmenta cylindri relicta basium AK , KB , BL , &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E . Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E , simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni una cum magnitudine E , ipsa magnitudo E , quæ major est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ $AKBLCMDN$, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, majus quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cujus eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propof. 7. hujus lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur major est cylindrus triplo coni.

Sit deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus major quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus major quam tertia pars cylindri, magnitudine E ; ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E , simul. Inscríbatúr rursus in circulo quadratum $ABCD$, & circa eundem, quadratum $FGHI$; intelliganturque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum $ABCD$, dimidium est quadrati $FGHI$, ut ad propof. 9. lib. 4. demonstravimus, *delitque ut basis ad basin,* ita pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super $ABCD$, dimidium pyramidis super basin $FGHI$; ac proinde pyramis super basin $ABCD$, major erit dimidio coni, cujus basis circulus $ABCD$. Secentur peripheriæ AB , BC , CD , DA , bisariam in K , L , M , N , adjunganturque rectæ AK , KB , BL , LC , CM , MD , DN , NA . Ducatur quoque per K , recta OP , tangens circulum in K , quæ parallela erit ipsi AB , ut ad propof. 27. lib. 3. demonstravimus;

stravimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & super AKB, ABOP, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. *e 41. prim.* Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis super basin AKB, dimidium pyramidis super basin ABOP, & cum pyramides habeant proportionem eandem, *f 6. duodec.* quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB, major erit dimidio segmenti coni, cujus basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, majores; quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul majores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides ejusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ majores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si à cono, cujus basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin ABCD, quam majorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cujus basis est circulus ABCD; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: per lemma propof. 2. hujus lib. Sint jam segmenta coni relicta basium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine

A a

E,

E, ipsa magnitudo E, quæ major est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum *AKBLCMDN*, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, major quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis majus erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in coroll. propos. 7. hujus lib. à nobis est demonstratum, erit hujuscemodi prisma majus cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque major triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, proptereaque conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

THEOR. II. PROPOS. II.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases.

TAB. XXXIV.
fig. 9.
a 7. quint.
Sint sub eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli *ABCD*, *EFGH*, altitudines vero æquales *IK*, *LM*. Dico ut est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit ut basis *ABCD*, ad basim *EFGH*, ita conus *ABCDK*, ad aliquam magnitudinem, nempe ad *N*, quæ vel major erit, vel minor cono *EFGHM*. Si enim esset æqualis, haberet conus *ABCDK*, ad conum *EFGHM*, & ad *N*, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum, ut basis ad basim: quod non conceditur. Sit ergo primum *N*, minor quam conus *EFGHM*, magnitudine *O*, ita ut conus *EFGHM*, æqualis sit magnitudinibus *N*, & *O*, simul. Inscrubatur in circulo *EFGH*, quadratum *EFGH*, dividanturque

que peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adjungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, ejusdem altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, ut in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus cono EFGHM, super N, per lemma propof. 2. hujus lib. Sint ergo jam segmenta cono relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta cono segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti cono segmentis major est, erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum EPFQGRHS, ejusdem altitudinis cum cono, major quam N, reliqua magnitudo. Inferibatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, ut in propof. 2. hujus lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propof. 2. hujus lib. est ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Ut autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N. & ut polygonum, ad po- c 6. duod.
lygonum, ita est pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis cum conis; Erit quoque ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N: Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, detrit & pyramis EPFQGRHSM, minor d 14. quibus
quam N: Ostensa autem fuit & major. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

Sit secundo N, major cono EFGHM. Cum
A a 2 igitur

igitur ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & convertendo ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, major ponitur cono EFGHM; major quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis illius coni ad basin hujus coni. Non ergo major est N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque minor est ostensa; Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; e Sit autem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM, erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

e 7. quint.

f 15. quint.

f Quoniam autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM.) Erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo usi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc fit, conos & cylindros ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

Item sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales

Fig. 3.

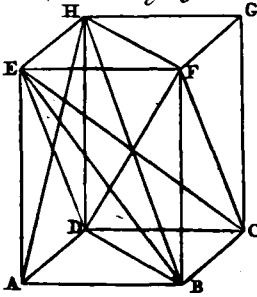


Fig. 2.

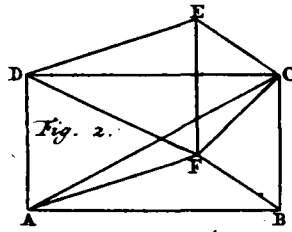


Fig. 5.

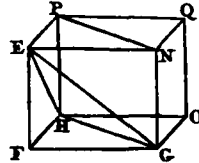
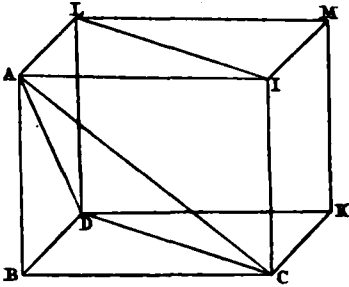


Fig. 7.

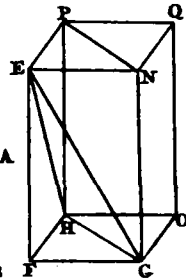
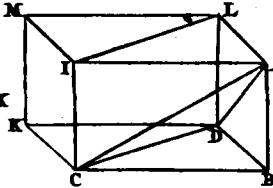
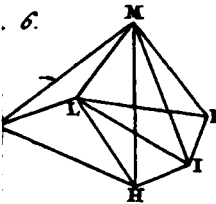
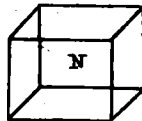
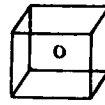
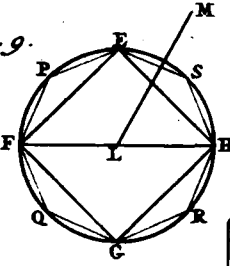
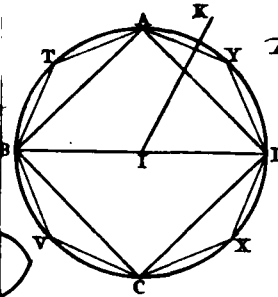
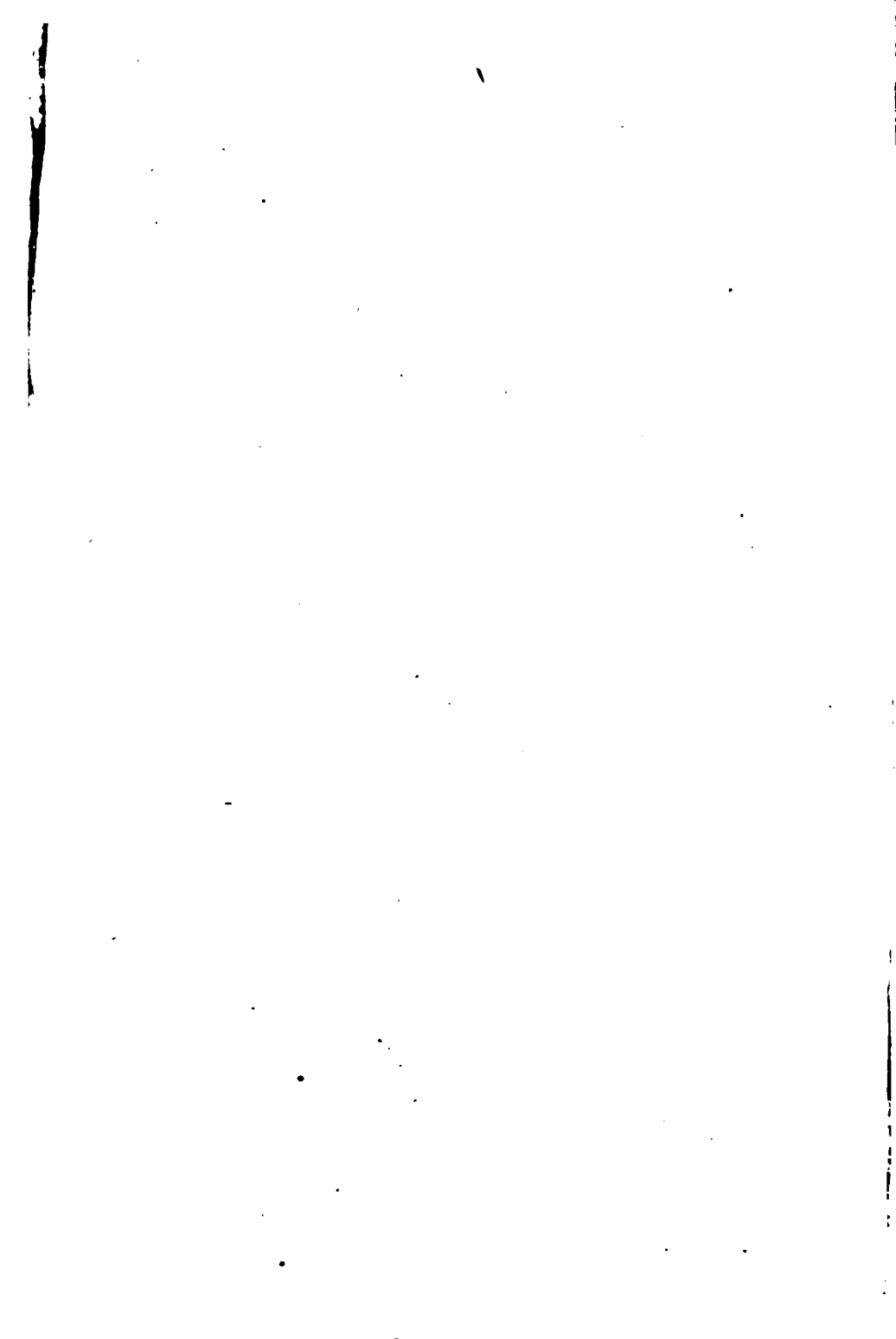


Fig. 9.





æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, & non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac converſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12. x.

Similes conī, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

Sint ſimiles conī, & cylindri, quorum baſes TAB: circuli ABCD, EFGH, axes vero IK, LM, XXXV. & diametri baſium BD, FH. Dico conum ad fig. 1. conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel major cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, haberet conus ABCDK, a 7. quinq. ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio conī ABCDK, ad conum EFGHM, eſſet quoque triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorſus conſtructio figuræ, quæ in præcedenti propoſitione, ita ut ruruſ pyramis EPFQGRHSM, major oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, ut habeantur duo triangula BKT, FMP, pyramidum ATBV CXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur conī ABCDK, EFGHM, ſimiles ponuntur; erit, ex 24. defin. lib. 11. ut diameter BD, ad diametrum FH. hac propterea ut ſemidiameter BI, ad ſemidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutando ut BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quod conī recti ponantur, proptereaque axes recti ad eorum baſes; Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula c 6. ſext. la; Ac propterea ut KB, ad BI, ita erit MF, d 4. ſext.

ad FL. Ut autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcibus BT, FP, sint æquales, ut in scholio propof. 22. lib. 3. ostensum est; sitque ut BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP; erunt triangu-
la BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, ut KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur, ad circulum, ABCD, ferunt bases KB, KT, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum utrobique sit proportio æqualitatis. Quoniam vero ut KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item ut MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem ut KB, ad BT, ita MF, ad FP: Erit quoque ut KT, ad BT; ita MP, ad FP; Et convertendo ut BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cum sit ut TK, ad KB, ita PM, ad MF, & ut KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et ut BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti ostensum est; habebunt triangu-
la BKT, FMP, latera proportionalia, bideoque æquiangu-
la erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostenditur reliqua triangu-
la ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quæcirca in triplicata proportionem erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propof. 8. hujus lib. Ut autem BT, ad FP, ita est, BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP; Et ut BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur

erit ut pyramis $ATBVCXDYK$, ad pyramidem $EPFQGRHSM$, ita conus $ABCDK$, ad N . Quare cum pyramis $ATBVCXDYK$, minor sit cono $ABCDK$, pars toto; & erit & pyramis $EPFQGRHSM$, minor quam N . *14. quist.* Ostensa autem est & major. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N , cono $EFGHM$.

Sit deinde N , major cono $EFGHM$. Cum ergo ponatur conus $ABCDK$, ad N , habere proportionem triplicatam diametri BD , ad diametrum FH ; Habeat autem & pyramis $ATBVCXDYK$, ad pyramidem $EPFQGRHSM$, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus $ABCDK$, ad N , ita pyramis $ATBVCXDYK$, ad pyramidem $EPFQGRHSM$; & convertendo ut N , ad conum $ABCDK$, ita pyramis $EPFQGRHSM$, ad pyramidem $ATBVCXDYK$. Quare cum ex coroll. propof. 8. hujus lib. pyramis $EPFQGRHSM$, ad pyramidem $ATBVCXDYK$, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF , ad TB , hoc est, diametri FH , ad diametrum BD ; habebit quoque N , ad conum $ABCDK$, proportionem triplicatam diametri FH , ad diametrum BD . Ponatur ut N , ad conum $ABCDK$, ita conus $EFGHM$, ad magnitudinem O . Habebit igitur & conus $EFGHM$, ad O , proportionem triplicatam diametri FH , ad diametrum BD . Et quia N , major ponitur quam conus $EFGHM$, *14. quist.* erit quoque conus $ABCDK$, major quam O . Quapropter conus $EFGHM$, ad magnitudinem O , minorem cono $ABCDK$, proportionem habet triplicatam diametri FH , ad diametrum BD . Quod est absurdum. Ostensum est enim, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam ejus, quam habent basium diametri. Non ergo major est magnitudo N , cono $EFGHM$. Sed neque minor est ostensa. *14. quist.* Aequalis igitur est; nam proinde conus $ABCDK$, eandem habet proportionem ad conum $EFGHM$, & ad N . Cum ergo ponatur conus $ABCDK$, ad N , in triplicata

proportione diametrorum BD , & FH ; erit quoque conus $ABCDK$, ad conum $EFGHM$, in eandem diametrorum proportionem triplicata.

Fig. quint. * Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si cylindrus plano secetur adversis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

TAB. XXXV. fig. 2. SECetur cylindrus $ABCD$, plano GH , parallelo adversis planis AB , CD , quod quidem secet axem EF , in I . Dico ut est cylindrus $ABHG$, ad cylindrum $GHCD$, ita esse axem EI , ad axem IF . Intelligatur enim cylindrus $ABCD$, in utramque partem, una cum ejus axe & rectangulo EC , ad cujus revolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet: Sumanturque in axe producto quocunque rectæ EK , KL , æquales ipsi EI : Item quocunque rectæ FM , MV , NO , æquales ipsi FI . Deinde per puncta I , K , L , M , N , O ducantur rectæ IH , KP , LQ , MT , NV , OX , parallelæ, & æquales rectis EB , FC ; quæ quidem ad revolutionem rectanguli EC , describent circulos GH , PR , QS , Ta , VZ , XY , parallelos & æquales circulis AB , CD , ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP , PA , AH , HD , DT , TZ , ZX , ex definitione, componen-

ponentes totum cylindrum SOXY. Quoniam vero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Ta, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propof. 11. hujus lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertię magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propof. 11. hujus lib. liquet. Si vero axis major est axe, cylindrus quoque cylindro major est; Et si minor, minor in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit per defn. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axem IF, secundam magnitudinem, ut cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur adverfis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xl.

Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, ut altitudines.

Sint super bases æquales AB, CD, duo coni 74D
 ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, XXXV.
 quorum axes, seu altitudines, Nam in conis fig. 31
 & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE,
 MF: Dico, si conum ABE, ad conum CDF,
 & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, ut
 est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extenda-

A a 5 tus

378 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

tur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, una cum ejus axe LE, & rectangulo AG; abscindaturque axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, ut fiat cylindrus GHOP, ejusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll.
a 7. quins. b 13. duod. propof. 11. hujus lib. *a* cylindrus AG, ad ipfos eandem habebit proportionem. *b* Est autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, ut axis, seu altitudo LE, ad axem, seu altitudinem EN, hoc est, altitudinem MF, sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, ut altitudo LE, ad altitudinem MF.
c 10. duod. d 15. quins. Quia vero coni ABE, CDF, sunt tertiz partes cylindrorum AG, CI; ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, ut altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut altitudines. Quod ostendendum erat.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

TAB. XXXV. fig. 4. Sint æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes altitudinesve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propof. 11. hujus lib. Quare erit ut basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad

ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.

Quod si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, major, ex qua abscindatur MN, ipsi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum, ut in scholio propof. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: Item ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad huius æqualem LC; Ac propterea reciprocæ sint bases & altitudines.

In conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, cum coni sint cylindrorum tertiz partes. Quare ut ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo usi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituentur duo coni, ut in figura apparet.

Sed jam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit ut basis AB, ad basin, DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propof. 11. hujus lib.

Quod

Quod si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN.

ē 11. dnd. Est autem ut basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: sicut ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales: erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; *g 9. qm.* ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

At vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eadem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut ostensum fuit, cylindri, ideoque cono, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

xij.

P R O B L. I. P R O P O S. 16.

Duobus circulus circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

T AB.
XXXV.
fig. 5.

Sint duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propof. 16.

lib.

lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, major est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, & sic deinceps; relinquetur tandem minor arcus quam CG, per lemma propof. 2. hujus lib. Sit igitur jam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectam CK, esse unum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, dividatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales dividatur, in quot divisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcibus rectæ lineæ subtendantur, quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt; erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipsum contingeret, quod nunquam cum recta GH, conveniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, adeoque æqualiter cum CK, à centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nulla modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere.

Eu.

Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, convenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostendit non tangere circulum DE.

xiv. PROBL. 2. PROPOS. 17.

Duabus sphaëris circa idem centrum existentibus, in maiori sphaëra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphaëre superficiem.

TAB. XXXVI. fig. 1. Sint duæ sphaëre ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphaëram EFGH. Secentur ambæ sphaëre plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphaëris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphaëre, habentes idem centrum sphaërarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumvolutionem sphaëre describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphaërarum, ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, sese in centro I, secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem ut facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gg, ad circumferentiam usque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. **lib. 1. quart. propos. 16. lib. 3.** Et rectæ Gg, applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Ae. Quia vero si arcui Cg, intelligatur subtendi recta, ut fiat tri-
angulo,

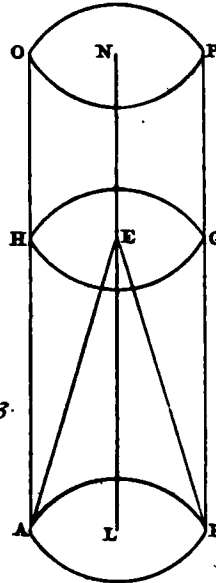
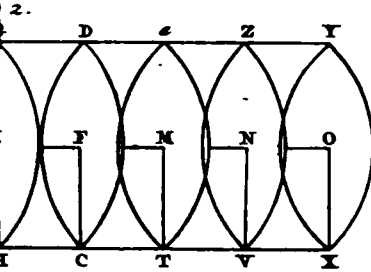
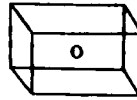
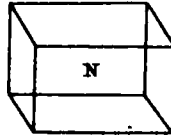
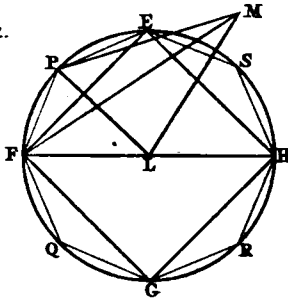


Fig. 3.

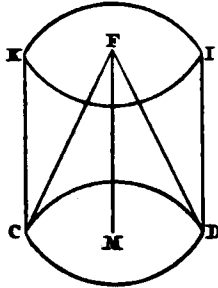
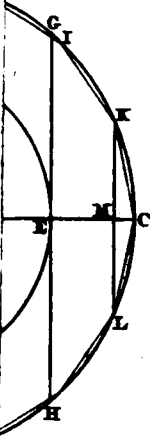
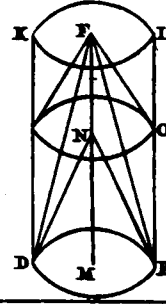
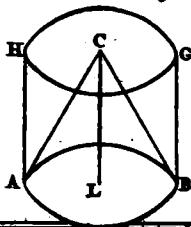
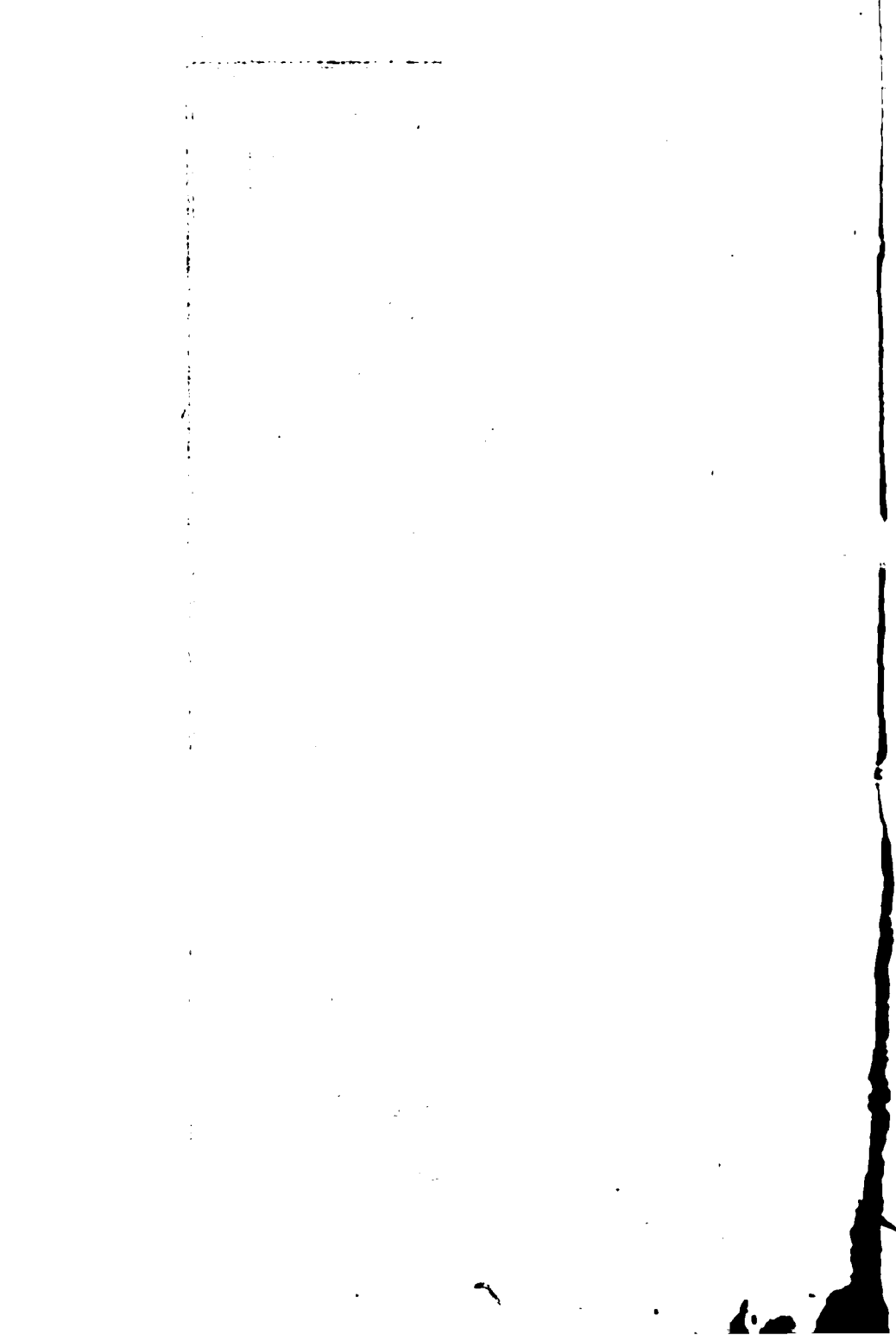


Fig. 4.





gulo, nempe recto, majus est latere Gg, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cg, major recta Ae; ac proinde arcus Cg, arcu Ae, major erit, ut constet ex scholio propof. 28. lib. 3. Abfcindatur ergo arcus Cd, arcui Ae, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidium LK, & sic deinceps; relinquatur tandem arcus minor arcu Cd, seu arcu Ae, per lemma propof. 2. lib. hujus. Sit ergo jam arcus CK, minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta Ae, hoc est, quam Gg, ex scholio propof. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, esse unum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cd, minorem arcu Cg, non tangat circumulum EFGH, ut ex demonstratione præcedentis propof. patet; multo minus recta CK, subtendens arcum minorem arcu Cd, eundem circumulum tanget. Rursus ducta diametro KN, erigatur ex centro I, ad plana circumulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiiei sphaeræ majoris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, squæ ad circumulum ABCD, f 18. *und.* recta erunt, efficientque communes sectiones, circumulos, ut jam dictum est, quorum semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. g quadrantes erunt OC, OK; atque adeo cum circumuli ABCD, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphaeræ majoris diametri, erunt quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot divisus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; b Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD, CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Conjunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circumuli ABCD, perpendiculares PX, SY, quæ

324 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

138. *and.* quæ in communes sectiones AC, NK, cadent;
6. *and.* eruntque inter se parallelæ.

Quoniam igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PCX, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. / & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insunt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia; Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY, æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter sese. At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, ut IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erunt parallelæ quoque PS, CK, inter se, cum utraque parallela sit ipsi XY, & ideoque eas conjungentes rectæ CP, KS; in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in uno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atque adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem CK, sint parallelæ, totumque quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterum QTVR. Est autem & triangulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, MO, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, ut tota sphaera major repleatur quadrilateralis, & triangulis, quæ similia sunt predictis inter qua-

quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis, inscriptum erit in sphaera majori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateralis atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphaeram minorem EFGH.

Ducatur enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectae ZC, ZK. Cadere autem perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequenti ostendemus. Quoniam igitur ex d. fig. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; erit quadratum rectae IC; quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectae IK, quadratis rectarum IZ, ZK, aequale. Cum ergo quadrata rectarum aequalium IC, IK, aequalia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, aequalia. Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, aequalia erunt, ideoque & ipsae rectae ZC, ZK, aequales. Similiter ostendemus rectas, quae ex Z, ad PS, ducentur, aequales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam vero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectae CK, majus quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum haec quadrata aequalia sint, majus erit quadratum rectae CK, duplo quadrati rectae ZC. s 47. prim.

Ducatur ex K, ad rectam AC, perpendicularis Ka. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aa, major sit, quam AI, erit AC, minor duplo ipsius Aa. Quam ob rem cum sit, sicut AC, ad Aa, ita rectangulum sub AC, aC, ad rectangulum sub Aa, aC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aa, & eadem altitudo aC; erit quoque rectangulum sub AC, aC, minus duplo rectanguli sub Aa, aC. Est autem rectangulum sub AC, aC, aequale quadrato rectae t 12. sec.

B b

CK,

CK, & rectangulum sub Aa, aC, æquale quadrato rectæ Ka; quod recta CK, inter AC, aC, sit media proportionalis; & recta Ka, inter Aa, aC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim conduceretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Ka. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, ostensum sit majus esse duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ Ka, majus quadrato rectæ ZC. *747. primi* Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Ia, aK; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Ia, aK. Si ergo ex his dematur quadratum majus, nempe rectæ aK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, majus quadrato reliquo rectæ Ia; ideoque recta IZ, major quam recta Ia. Quapropter cum punctum a, non tangat sphaeram minorem EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta Ka, tota sit extra dictam sphaeram; multo minus punctum Z, longius distans eandem sphaeram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius absint à sphaera EFGH, quam punctum Z, ut mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphaeram EFGH.

Sed & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphaeram minorem EFGH, si prius ducatur recta Ig, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Gg: *219. primi* Est autem CK, major quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, ut mox demonstrabitur; multo major erit Gg, quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gg, majus quadrato rectæ ZC. *247. primi* Quia vero quadratum rectæ Ig, æquale est quadratis rectarum IG, Gg; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Ig, IC, æqualium æqualia; erunt

erunt & quadrata rectorum IG, Gg, quadratis rectorum IZ, ZC, æqualia: Demp̄to ergo illinc quadrato rectorum Gg, & hinc quadrato rectorum ZC; relinquetur quadratum rectorum IG, minus quadrato rectorum IZ; Ac propterea rectorum IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, sit sphaerae minoris EFGH, semidiameter, existit punctum Z, extra eandem sphaeram; Et proinde, ut prius, planum CKSP, sphaeram EFGH, nequaquam continget.

Ducatur rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Ib, eritque b, centrum circuli circa PSTQ, descripti, ut demonstratum est; Connexis autem rectorum bP, IP, cum angulus IbP, rectorum sit, ex 3. defin. lib. 11. erit quadratum rectorum IP, æquale quadratis rectorum Ib, bP. Quia vero & quadratum rectorum IC, (quod æquale est quadrato rectorum IP, ob æqualitatem rectorum IC, IP,) æquale est quadratis rectorum IZ, ZC; erunt quadrata rectorum Ib, bP, quadratis rectorum IZ, ZC, æqualia; Est autem quadratum rectorum ZC, majus quadrato rectorum bP, quod & linea ZC, major sit, quam linea bP, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectorum Ib, reliquo quadrato rectorum IZ, majus erit; ideoque & linea Ib, major quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum b, extra sphaeram, EFGH, existet, quam punctum Z: proptereaque multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget sphaeram minorem EFGH. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphaeram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in majori sphaera solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphaerae superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Ex his, quae demonstrata sunt, manifestum est, si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum simile

B b 2

præ-

præ isto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphaera ad polyedrum in altera sphaera esse triplicatam ejus, quam habent sphaerarum diametri. Nam si ex centris sphaerarum ad omnes angulos basium, dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuuntur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphaerarum; ut constat, si intelligatur harum sphaerarum minor intra majorem circa idem centrum descripra. Congruunt enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos; ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficiuntur similes. Quare cum singulæ pyramides in una sphaera ad singulas pyramides illis similes in altera sphaera habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphaerarum, ut constat ex coroll. propos. 8. hujus lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphaeræ ad polyedrum alterius sphaeræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphaerarum, cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

Cis. quins.

S C H O L I U M.

Quonium vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, ut vera; qua tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breviter à nobis erunt demonstranda.

TAB. Primum itaque ostendendum est. punctum Z. ca-
XXXVI. dere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK,
fig. 2. in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod ut
commodius fiat, describatur circa dictum quadrilate-
rum ex centro Z, circulus. Quonium igitur in fi-
gura prima est ut IK, ad KC, ita IT, ad TX,
(quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK,
IXT, similia sint.) Est autem IK, major, quam
duq. quins. IT; derit & KC, major quam TX. Cum igitur
TX, aequalis sit ostensa ipsi SP; erit quoque KC,
major quam SP. Ac propterea in hac secunda figura, arcus
CK, major erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib.

3. eQuare cum arcus CP , KS , arcus CK , sint cas $tertio$
 aequales, quod & linea CP , KS , ipsi KC , linea
 sint aequales demonstrata; (subtenduntur enim arcu-
 bus circulorum aequalibus, ut ex constructione figure
 prima constat) erunt quoque arcus CP , KS ,
 arcu PS , majores; Atque idcirco quilibet arcus
 CK , CP , KS , quadrantem circuli $CKSP$, exce-
 det; atque à semicirculo superabitur; ac proinde mul-
 to magis segmentum SP , minus erit semicirculo. Ex
 quo fit, centrum Z , non esse in illis segmentis, sed
 extra, nimirum intra quadrilaterum $CKSP$. Ea-
 dem ratione ostendemus, perpendiculares ex I , ad
 plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est
 Ib cadere intra quadrilatera; nec non & perpendi-
 cularem ex I , ad triangulum OKV , ductam, cadere
 intra ipsum. Quia igitur arcus CK , quadrante ma-
 jor est; angulus CZK , obtusus erit, nempe recto
 major, cum angulo recto in centro subtendatur qua-
 drans circuli, ut perspicuum est ex scholio propo-
 s. 27.
 lib. 3.

Secundo demonstrandum est, omnia alia puncta
 quadrilateri $CKSP$, longius à centro I , abesse, quam **TAB.**
 punctum Z . Sumatur enim quodcumque aliud pun- **XXXVI.**
 ctum b , in quadrilatero $CKSP$, & adjungantur **fig. 3.**
 rectæ Ib , Zb . Quoniam ergo angulus IZb , rectus
 est, ex defin. 3. lib. 11. ¶ Erit litus illi oppositum **¶ 19. primus**
 Ib , majus latere IZ , quod minori angulo IbZ , ni-
 mirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum b ,
 longius à centro I , distat, quam punctum Z . Simi-
 li argumento concludemus, omnia alia puncta longius
 distare.

Tertio, ac ultimo probandum est, rectam ZC ,
 majorem esse recta bP . Quod ut aptius fiat, demon-
 strandum prius erit, rectam PS , majorem esse recta
 QT . Describatur igitur pars prima figura, ea **TAB.**
 videlicet, quæ continetur semidiametris IC , IK , **XXXVII.**
 IO , & quadrantibus OC , OK , &c. Demittantur **fig. 4.**
 deinde ex Q , & T , ad planum circuli $ABCD$, in
 quo est triangulum ICK , perpendiculares QI , TI ,
 & quæ in communes sectiones IC , IK , cadunt, **¶ 38. und.**
 & erantque inter sese parallele, ut de rectis PX , **¶ 6. und.**
 BT ,
 Bb 3 ST ,

ST, dictum est. Quod si adjungatur recta *Im*; erunt *QT*, *ml*, parallele & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales *PS*, *XT*. i Quia vero *ml*, ipsi *CK*, parallela est; quod latera *IC*, *IK*, proportionaliter sunt secta in *l*, & *m*, veluti diximus de recta *XT*; erunt quoque *ml*, *XT*, parallela. Quare erit ex coroll. propof. 4. lib. 6. ut *IT*, ad *IX*, ita *Im*, ad *ml*, est autem *IT* major
 114. quins. quam *Im*. Igitur & *IX*, major erit quam *ml*; Ac proinde & *PS*, quæ æqualis est ipsi *XT*, major erit quam *QT*, quæ æqualis est ipsi *ml*.

T A B
XXXVI.
fig. 5. Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris *Z*, *b*, circa quadrilatera *CKSP*, *PSTQ*, circuli, egredianturque e centris recta *ZC*, *ZK*, *ZS*, *ZP*, *bP*, *bS*, *bT*, *bQ*. Si igitur *ZC*, non credatur major, quam *bP*, eris vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera *ZK*, *ZC*, æqualia ponuntur lateribus *bS*, *bP*, & basis *KC*, major est base *PS*; meritis angulus *KZC*, major angulo *SbP*: Eadem ratione major eris angulus *SZP*, angulo *TbQ*. At quoniam bases *KS*, *CP*, basibus *ST*, *PQ*, sunt æquales neriunt anguli *KZS*, *CZP*, angulis *SbT*, *PbQ*, æquales. Igitur quatuor anguli ad *Z*, majores erunt quatuor angulis ad *b*: Sunt autem & æquales, cum tam *bi*, quam illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta *ZC*, recta *bP*.

Sit deinde *ZC*, minor, quam *bP*. Et abscindantur *bn*, *bq*, *br*, *bt*, ipsis *ZC*, *ZK*, *ZS*, *ZP*, æquales, connectanturque recta *nq*, *qr*, *rt*, *tn*, o quæ parallela erunt rectis *PS*, *ST*, *TQ*. *QP*, eo quod recta ex centris secta sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propof. 4. lib. 6. erit ut *bS*, ad *SP*, ita *bq*, ad *qn*. Cum ergo *bS*, major sit quam *bq*, perit & *SP*, major quam *qn*. Eademque ratione majores erunt *ST*, *TQ*, *QP*, rectis *qr*, *rt*, *tn*; Ac propterea cum *PS*, minor sit, quam *CK*, & *ST*, *PQ*, æquales rectis *KS*, *CP*; & *TQ*, minor quam *PS*, erunt recta *qn*, *qr*, *rt*, *tn*, minores rectis *CK*, *KS*, *SP*, *PG*. Quare cum recta
bn,

*bn, bq, br, bt, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint
 aequales; qerunt anguli ad Z, majores angulis ad,
 b: Sunt autem & aequales, quod tam illi, quam bi
 sunt quatuor rectis aequales, ex coroll. 2. propos. 15.
 lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est
 recta ZC, quam bP: Sed neque aequalis est ostensa;
 Major igitur est. Quod erat ostendendum.*

THEOR. 16. PROPOS. 18. xv.

Sphæræ inter se sunt in triplicata ra-
 tione suarum diametrorum.

Int duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri *TAB.*
 AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram *XXXVI.*
 DEF, habere proportionem triplicatam diametri *fig. 6.*
 AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non con-
 cedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram
 GHI, minorem, vel KLM, majorem, quam
 DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad
 diametrum DF. Habeat primum sphæra ABC,
 ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, pro-
 portionem triplicatam diametri AC, ad diametrum
 DF; intelligaturque sphæra GHI, concentrica
 sphæræ DEF. *a 17. dand.* Inscribebatur in sphæra majori
 DEF, polyedrum DNEOPQR, non tangens
 minorem sphæram GHI; Atque huic simile po-
 lyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra
 ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ
 ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis
 diametri AC, ad diametrum DF: Est autem per
 coroll. precedentis propos. & proportio polyedri
 ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOPQR, tri-
 plicata proportionis diametri AC, ad diametrum
 DF: Est ut sphæra ABC, ad sphæram GHI,
 ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum
 DNEOPQR. Quare cum sphæra ABC, major
 sit polyedro ASBTCVXY, berit & sphæra GHI, *b 14. quæst.*
 major polyedro DNEOPQR, pars toto. Quod
 est absurdum. Non igitur habebit sphæra ABC,
 ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, propor-
 tionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

Habeat secundo sphæra ABC, ad sphæram

B b 4

KLM,

KLM, maiorem sphaera **DEF**, proportionem triplicatam diametri **AC**, ad diametrum **DF**. Cum igitur ex coroll. præcedentis propos. & polyedrum **ASBTCVXY**, ad polyedrum **DNEOFPQR**, habeat proportionem triplicatam diametri **AC**, ad diametrum **DF**; Erit ut sphaera **ABC**, ad sphaeram **KLM**, ita polyedrum **ASBTCVXY**, ad polyedrum **DNEOFPQR**: Et convertendo, ut sphaera **KLM**, ad sphaeram **ABC**, ita polyedrum **DNEOFPQR**, ad polyedrum **ASBTCVXY**: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propositionis polyedrum **DNEOFPQR**, ad polyedrum **ASBTCVXY**, in triplicata proportionem diametri **DF**, ad diametrum **AC**. Igitur & sphaera **KLM**, ad sphaeram **ABC**, erit in triplicata proportionem diametri **DF**, ad diametrum **AC**. Ponatur ut sphaera **KLM**, ad sphaeram **ABC**, ita sphaera **DEF**, ad aliam sphaeram **Zab**. Habebit igitur & sphaera **DEF**, ad sphaeram **Zab**, proportionem triplicatam diametri **DF**, ad diametrum **AC**. Et quia sphaera **KLM**, major ponitur, quam sphaera **DEF**, erit quoque sphaera **ABC**, maior quam sphaera **Zab**. Quapropter sphaera **DEF**, ad sphaeram **Zab**, minorem sphaera **ABC**, proportionem habet triplicatam diametri **DF**, ad diametrum **AC**. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse sphaeram ad sphaeram alia sphaera minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphaera **ABC**, ad sphaeram **KLM**, maiorem sphaera **DEF**, proportionem triplicatam diametri **AC**, ad diametrum **DF**: Sed neque ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphaeram **DEF**, proportionem triplicatam diametri **AC**, ad diametrum **DF**. Sphaerae itaque inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

✓ **C O R O L L A R I U M.**

Hinc fit, ita esse: sphaeram ad sphaeram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphaera ad sphaeram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.

F I N I S.

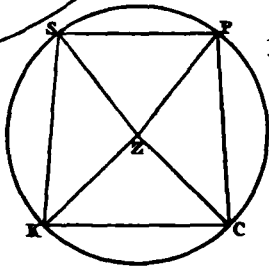
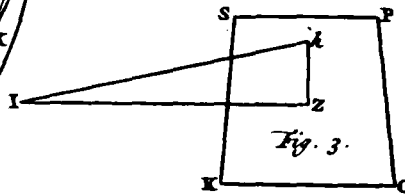
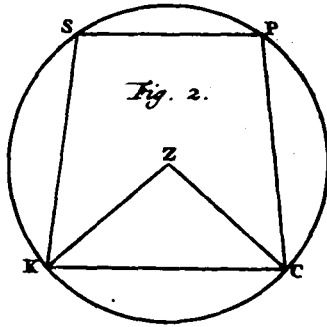
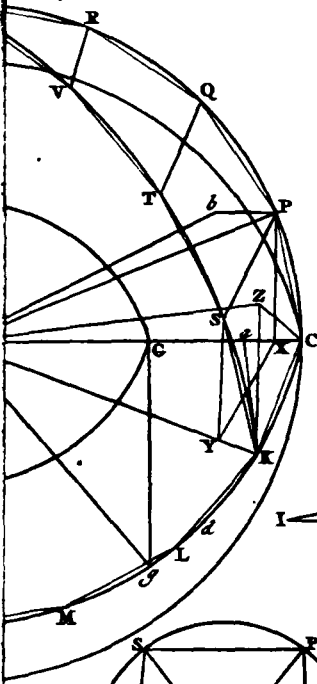


Fig. 5.

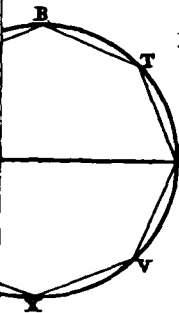
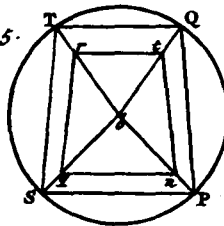


Fig. 6.

