

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

LIBRI VI. PRIORES
P L A N O R U M ,
A C

XI. E T XII.

S O L I D O R U M ,
Cum Explicationibus , & Demon-
strationibus

CHRISTOPHORI CLAVII,

In usum Auditorum suorum
adornati & editi;

A

JOANNE HENRICO VAN LOM.

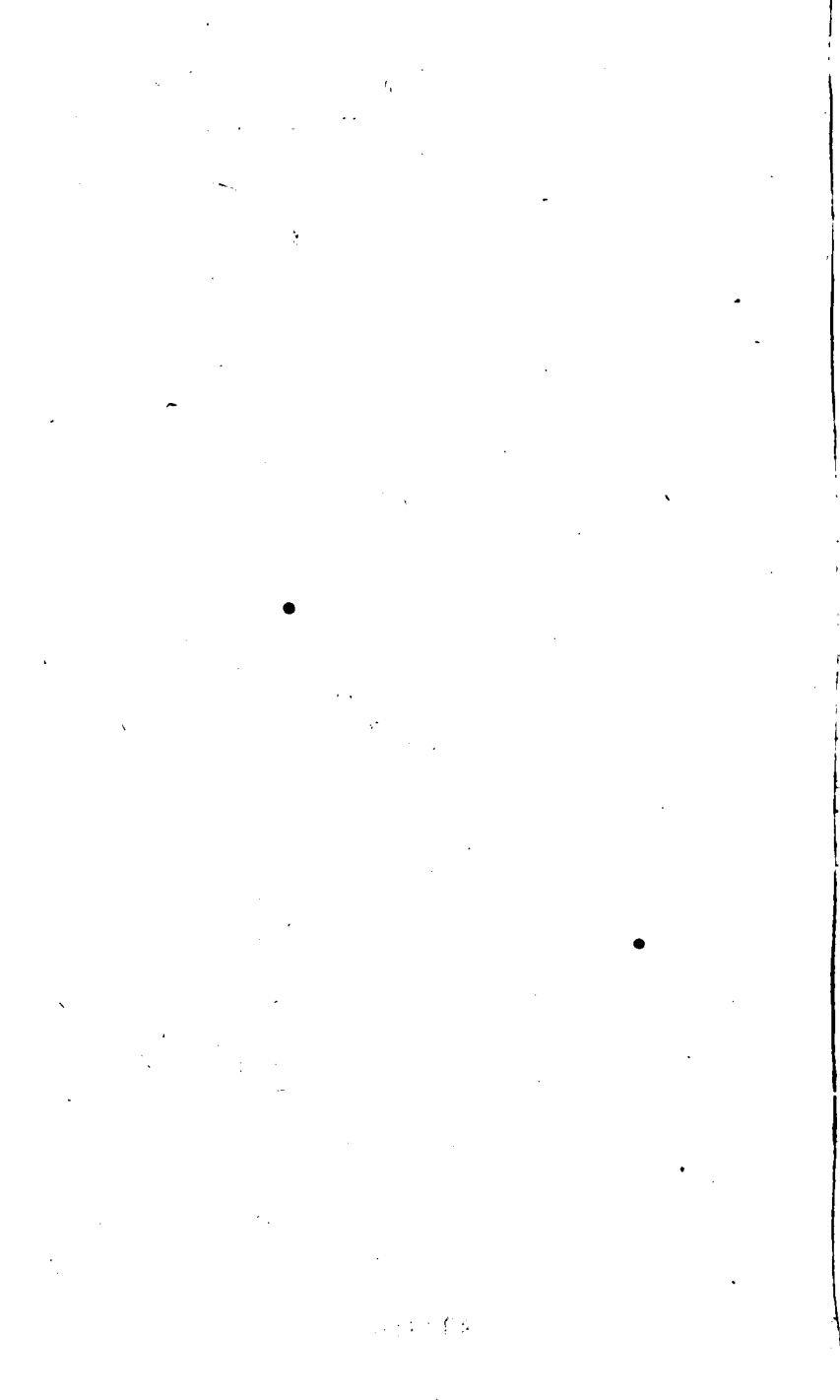
Philos. Doctore , ejusdemque Facultatis ,
ut & Mathes. Professore Ordinario.

*Qui brevem Narrationem Historicam , de vita ,
ac Elementis Euclidis , addidit.*

Adjectis tabulis æneis nitidioribus &
accurationibus.



A M S T E L O D A M I ,
Apud HENRICUM VIEROOT,
MDCCXXXVIII.



ILLUSTRISSIMIS, NOBILISSIMIS,

GENEOSISSIMIS

VIRIS,

A C A D E M I Æ

**DUCATUS GELRIÆ, ET COMITATUS
ZUTPHANIÆ,**

CURATORIBUS.

D. ADRIANO COMITI DE LYNDEN,
Domino in Nederhemert, Burg-gravio
Neomagensis Imperii; Satrapæ Regionis
Cuikensis; &c. Ad confessum potentissi-
morum ordinum Foederati Belgii dele-
gato. &c. &c. &c.

D. LEONARDO ESSENIO,
Medicinæ Doctori; Civitatis Bommeliensis
Consuli; ad redditus publicos Tetrarchiæ
Neomagensis curandos, ac quondam ad
Collegium Ordinum Generalium septem
unitarum Regionum Delegato. &c. &c. &c.

D. FRANCISCO JOANNI BARONI

DE

HEKEREN,

Domino de Enghuysen; Civitatis Dodeche-
mi Consuli; urbis atque agri Doesbur-
gensis Judici; Ducatus Gelriæ quæstori
supremo; & ad concilium ordinum foe-
deratorum, quod est Hagæ comitum,
Delegato. &c. &c. &c.

**D. EVERH. JOANNI BENJAMINI
BARONI DE GOLSTEIN.**

Domino in Appel ; Ordinis Teutonici
Magistro ; Civitatis Zutphaniensis consuli ;
cameræ rationum ; ducatus Gelriæ , &
comitatus Zutphanie præfidi. &c. &c. &c.

D. ALEXANDRO BARONI DE DEDEM ;
Domino in Vosbergen , & Werfhorst ,
Arnhemie , & oræ Velavicæ judici ;
Præfecturæ Dornspyckenfis ex Equestri
Ordine Præfidi ; confessus Præpotentium
Procerum , qui redditus publicos Tetrarchiæ
Velavicæ curant , Præfidi ; Gymnafii Ve-
lavici Curatori. &c. &c. &c.

D. ANTONIO à WESTERVELT,
Domino in Effenburg ; Civitatis Hardero-
vicenæ Confuli ; ad collegium Ordinum
Generalium , feptem unitarum Regionum ,
& Cameram Tributorum Velaviæ quon-
dam Delegato ; Gymnafii Velavici Cura-
tori. &c. &c. &c.

NEC NON

***VIRO AMPLISSIMO, NOBILISSIMO,
CONSULTISSIMO.***

D. SAMUELI ESSENI O,
J. U. Doctori , Curie Ducatus Gelriæ ,
& Comitatus Zutphanie , Senatōri extra-
ordinario ; Publicorum Redituum Maes-
landiæ , & Oosterwyck quæftori ; & Cu-
ratoribus Gelro-Zutphanicæ Academicæ à
secretis &c. &c. &c.

S. P. D.

JOANNES HENRICUS VAN LOM.

DEDICATIO.



Um novam Eu-
clidis Elemen-
torum , cum
Christophori Cla-
vii , præclari sa-
ne Mathematici , Demon-
strationibus adornatam Edi-
tionem ; privatis nostris In-
stitutionibus destinatam , in
lucem produco publicam :
Vestro illustri Nomini, VI-
RI NOBILISSIMI ET
AMPLISSIMI ! consecra-
re eam , ac dicare meum es-
se officium censui. Justissi-
mæ enim mihi causæ sunt
variæ , quibus hoc opuscu-
lum

DEDICATIO.

lum vestris illustribus inscribere nominibus , me obstrictum esse sentio. Etenim si mecum reputo , Vos Academiæ nostræ curandæ præpositos esse , eique augendæ & amplificandæ egregiam & maxime laudabilem operam navare ; nemini majori jure , hunc libellum nostra cura , ea qua apparet forma , primum edendum , in Academia vestra paratum , quam Vobis , quibus Academiæ nostræ cura commissa est , offerre ac dicare me potuisse judicavi. Cui enim plus deberem , quam Vobis , qui nobis ad hæc ornanda , publici-

DEDICATIO.

blicique juris facienda, otia dedistis? Accessit, Vos jure optimo à me exigere posse specimen aliquod eorum, quæ cum Auditoribus nostris, super Matheſeos principiis tracto: ac mihi Geometricorum exercitiorum, quibus studiosam juventutem imbuerestudeo, Vobis rationem esse reddendam. Et quod incrementa addit, est, quod Vobis etiam Temporis ex occupationibus quotidianis erepti, rationem aliquam persolvere officii mei esse existimavi. Præterea cum ab eo tempore, à quo ad Vestram Academiam accessi,

DEDICATIO.

me maximis beneficiis cum-
mulastis, & etiamnum favo-
re vestro prosequimini; pri-
mam, quæ sese mihi of-
ferret, occasionem ample-
ctendam esse putavi, ut de-
bitæ meæ observantiæ, re-
verentiæ, & grati animi,
pro acceptis adeo multis be-
neficiis, & gratiis, publi-
cum exstaret monumentum.
Merito Itaque gratam me-
moriæ beneficiorum, quæ
in me contulistis, declaro,
hacque inscriptione pie ag-
nosco, quod benignitatis Ve-
stræ, erga me, quibus mul-
ta debeo, documenta ma-
xima sint ac singularia.
Non

DEDICATIO.

Non dicam opusculum Vestris Illustribus Nominibus ornatum, ac comptum, ex ipsa inscriptione firmum sibi conciliare præsidium. Accipite ergo GENEROSISSIMI & ILLUSTRISSIMI, Patriæ & Academiae PATRES ! hoc qualecunque munusculum, vobis lubentissime dicatum & consecratum. Quod animo humili, obsequioso & devoto offero: Accipite hoc. Vos animo sereno, placido & benigno. Clementer accipite; credite nihil aliud me egisse, quam quod officii mei rationem postulare censui. Vestro

DEDICATIO.

vero AMPLISSIMI AC
GENEROSISSIMI VI-
RI ! me, meaque studia, fa-
vori commendo. Ego vero
me intra musei mei parietes
recipiam , Deumque im-
mortalem , supplicibus exo-
rabo precibus , ut Vobis ,
quos non tantum Generis
splendor , & muneris dig-
nitas , sed & meritorum in
Rempublicam , magnitudo
illustres fecit ; tribuere tem-
pus quam longissime, Vos-
que cum illustribus vestris
familiis salvos , & omni fe-
licitatis genere cumulos ,
incolumes servare velit ; ut
gravibus hisce temporibus
pru-

DEDICATIO.

prudentissimis consiliis vestris
& curis Decus Reipublicæ,
Ecclesiæ, & Academiæ hu-
jus tueri & augeri possitis,
tandemque læti ac lubentes,
certa beatioris vitæ in cœlis
spe solutas corporis viculo
animas tradere Deo. Valete
& Favete. Dabam Har-
dervici A. D. 12. Julii.
MDCCXXXVIII.

PRÆ-

PRÆFATIO.

LECTORI BENEVOLO

S.



Isto tibi , *benevole*
Lector , novam Editionem Elementorum Geometricorum , ab Euclide Geometra quondam adornatam ; verum Christophori Clavii Expositionibus , & Demonstrationibus munitam. Ut scias tamen velim , me non voluntarie , ac sponte mea , ad hæc Elementa publici juris facienda , sed necessitate quadam coactum , pervenisse. Quare paucis te in limine morari debeo ,
ut

P R Æ F A T I O.

ut referam *primo* rationes , quæ me ad hæc Elementa edenda impulerunt , & urserunt : *dein* quid in hoc opere proferendo præstiti.

A quo Tempore mihi in hac Academia , publice Philosophiam ac Mathesin docere , demandatum est : in id omni ope , industria & alacri studio incumbere officium meum esse putavi , ut quovis modo possem , • Studio-
sæ Juventuti , vel Philosophiam , vel Mathesin discere cupienti , facilem simul ac utilem navare operam , ejusque commodis pro virili servire. Verum cum inter Viros Eruditos hodie convenit , Studium Geometricum , basin & fundamentum esse ponendum Philosophiæ , vel saltem partis ejus principalis , Scientiæ nempe Rerum Naturalium , id primum mihi curæ cordique esse censui ;
ut

PRÆFATIO.

ut Juventutem Studiosam puris & sinceris Geometriæ principiis, quibus dein ad altiora, tam Veterum, quam Recentiorum Dogmata intelligenda pervenire possunt, erudirem. Interim memor dicti præclari sane Mathematici, Davidis Gregorii in Dedicatione; ubi dicit, *memini vero quam sæpe reclamares Viris in re Mathematica, novitatis, compendii, & forte sui nimium amantibus; cum interim juventutem ad ipsos fontes remittendam, Veterumque libros diligentius esse versandos, terendosque, vehementer urgeres.* Ideo ad hunc Scopum assequendum, Euclidea Elementa, probe intellecta imprimis nos ducere rebar; utpote tam Scriptores Antiqui, quam Recentiores super hæc Elementa, sua conduunt Ædificia, cum Geometrica, tum Rerum Naturalium; propterea

P R Æ F A T I O.

reaque ea intra privatos parietes , cum Auditoribus nostris tractanda esse necessarium duxi. Sed cum non perinde erat , cujusnam Commentatoris vel Editoris sequeretur ductum , in exponendis coram Auditoribus nostris Elementis istis , eum seligendum esse existimavi , qui se præ cæteris Demonstrationum perspicuitate , & demonstrandi rigore ac evidentia commendabat. Inter cæteros Christophori Clavii Demonstrationes , ac demonstrandi Methodum , mecum pensitans , ambo mihi arrisere , & placere valde. Tum ob elegantem , ac sane perspicuum modum , cum facilitate singulari conjunctum , quo in adstruendis & probandis utitur propositionibus. Tum ob robur & efficacitatem , quæ singulis inest demonstrationibus , ad persuadendum

P R Æ F A T I O .

dum de veritate rei propositæ ,
ad quas nihil excipi potest , cum
per omnes casus possibiles , rem
contemplandam veram & fir-
mam esse ostendit , & ad con-
victionem evincit. Quibus porro
accessit , Eum Euclidis Scopo
præ multis aliis etiam optime sa-
tisfacere , remque ab Euclide
propositam , secundum ejus men-
tem , acu tangere. Eo nomine
laudatur à Reyhero in *Dissert. de*
Euclide pag. 40. 41. Quod Clavi-
us optime commentatus est in *Eucli-*
dem ; ac uti ait , in ejus commen-
tariis , quicquid fere ad penitiorem
Elementorum cognitionem requiritur ,
invenitur. Suum etiam adjicit cal-
culum Ricciolus in Tomo primo *Al-*
magesti novi de Clavio scribens ,
quod in Geometria adeo excelluit , ut
illum plurimi Mathematici velut Ora-
culum consuluerint ; propter eximiam
in

PRÆFATIO.

*in scriptis suis perspicuitatem ; cum
solida doctrina conjunctam , dum ipsa
Sole clariora sunt. Adstipulatur his
Janus Nicius Erythreus in pinacotheca
sua notans , quod ex omnibus Clavii
lucubrationibus , quibus in lucem prola-
tis , nominis sui memoriam , omnium
seculorum posteritati commendavit , est
commentarius , quo Euclidem illustra-
vit , qui talis est , ut in Arce poni
possit , quasi Minerva illa Rhedie ;
in qua nihil est nisi absolutum &
perfectum. Et ut alia silentio præ-
teream testimonia , Vossii tantum
adducam , de Scientiis Mathem. pag.
69. Ubi de Clavio affirmat ,
quod Eruditis omne punctum ferre vi-
sus sit , cum variis monumentis no-
minis sui decus ad posteros propagavit.
Quare non dubitabam , ad ipsius
commentarii ductum in Euclidis
Elementa , Geometrica principia
Auditoribus meis tradere : cum*
† † per-

P R Æ F A T I O.

raro perverso loco sunt positæ ; quare necesse est ut Tyrones sæpe confundant , ac ineuntes constructionem moram iis injiciant , quod profecto molestum , & in nonnullis fastidium movet , præcipue iis qui prima vice Autoris demonstrationes imitantur. Præterea citationes , quæ in margine , juxta demonstrationum verba , positæ reperiuntur , suis etiam non carent vitiis , in iis autem indicantur ea , quæ in præcedentibus concessa vel demonstrata , jam Elementa existunt ac principia , eorum quæ in ista demonstratione adstruuntur , quorum nostra scire interest ; quapropter eos , qui non satis familiares habent Euclideas propositiones , sæpe ob præposteram citationem , privant fundamento vero , super quod tamen condita est

P R Æ F A T I O.

est probatio. Denique licet Clavii Commentarius in Elementa Euclidis sit omni laude dignus, tamen Tyronibus prolixus nimium est, si nempe oculos nostros convertamus vel in Definitionum expositiones, vel in ea, quæ singulis fere adjunxit demonstrationibus propositionum. Ea quamvis in se bona & laudanda sunt, Incipientes tamen, qui Euclidea Elementa scire cupiunt, iis carere possunt; cum haud raro tales, multiplici materia, quam in iis adducit, obruuntur, non distinguentes ea quæ Euclidis, ab iis quæ Clavius de se addidit, vel ex aliis mutuo desumpsit; hinc mira in Tyronibus confusio, quæ cane peior & angue deterior in Mathesi evitanda, ac omni conatu cavenda. Quæ omnia etsi cum animo meo sæpiusculè vol-

P R Æ F A T I O.

vebam ac revolvebam , tamen
refugiebam initio novam adorna-
re Editionem Clavianam ; verum
cum quotidie de penuria Exem-
plarium Auditorum meorum quæ-
relæ ad meas perveniebant Au-
res , in angustiam redigebam , vel
Clavium ducem in Geometria
exponenda relinquere , ejusque
loco alium seligere , quod repug-
nanter facerem ; vel efficere ut
recuderentur Elementa Euclidea
à Clavio confecta. Verum cum
utrumque ponderarem , magis è
re auditorum meorum fore judi-
cabam , Clavium porro ducem præ-
euntem , in contemplationibus
nostris Geometricis , sequi. Id-
circo in usum tantum Auditorum
meorum , ac eorum gratia no-
vam hanc Editionem , in qua
vitiis supra memoratis obviam ire ,
& quantum in me est , evitare
stu-

P R Æ F A T I O.

studui ; ex Clavii commentariis collectam , parare decrevi. En rationes *benevole Lector* , quæ me impulere ad hanc Editionem publici juris faciendam. Super est ut nunc etiam brevibus enarrem, quid in hac Editione præstiti , vel saltem præstare conatus fui. Et quidem *primo* è libris tredecim ab Euclide conscriptis , in quos omnes etiam commentatus est Clavius , *sex priores , ac undecimum & duodecimum librum* solummodo edi curavi ; quia cum Planorum Elementis , Solidorum conjungenda esse , tanquam cognitu summe necessaria , sic firma mihi stabat sententia. In qua tantum præclaros in Geometria Viros præeuntes secutus fui , nempe Tacquetos , Dechalesios , Moreos , Ozanamos , Keilios , aliosque. Non tamen prætermisi reliquos , quia

P R Æ F A T I O.

eos inutiles judicabam. Verum cum Tyronibus, qui institutionibus nostris privatis se committunt, hæc Elementa solummodo paravi, illi intellectis Planorum & Solidorum Elementis, reliquis in libris, si ipsis ita visum sit, dein cum fructu se exercere possunt. Illorum permagni interest, scire Elementa Planorum, ac Solidorum, quæ lex prioribus, & duobus reliquis, undecimo ac duodecimo libro continentur; utpote ea fundamenta sunt, quibus nostra Rerum naturalium Doctrina nititur. *Secundo* explicationes, quas Clavius super Definitionibus, Axiomatibusque Euclideis dedit, quales definitionibus ac axiomatis addidit, quasque prolixas nimium judicavi, ac quæ vel praxin aliquam, vel aliud quid ad Euclidis verba, & verborum sensum in-

P R Æ F A T I O.

intelligendum non directe ducens, continebant, pro capto meo contraxi. Ita tamen, ut secundum Clavii sententiam, sensum verborum Euclidis, satis clare declararent; nimiam interim evitavi breviter, ne dum brevis esse volo, obscurus fio. *Tertio* Scholia, Iraxes, aliaque, quæ Clavius Propositionibus Euclideanis, suisque demonstrationibus subjunxit, omisi pleraque omnia; exceptis tamen iis Scholiis, Lemmatibusque, quibus in suis demonstrationibus utitur Clavius: dum iis carere non possumus, quia ad ea, tanquam ad principia & fundamenta probationum, in iis provocat. Cb eandem rationem, quia è multis Corollariis petit argumenta demonstrationis suæ, plurima servavi Corollaria, quæ Clavius è probationibus suis elicit.

† † §

P R Æ F A T I O.

cuit. *Quarto* Definitiones , Postulata , Axiomata , & Propositiones , quæ in Clavii Commentario in Euclidem occurrunt, omnes typis mandavi. Verum eas omnes contulimus cum definitionibus , axiomatibus ; postulatis & Propositionibus , quæ in Gregorii Editione Græco-latina expressæ exstant ; quas vero in Gregoriana reperire mihi non licuit , quasque Clavius vel de suo adjecit , vel ex aliis mutuo desumpsit , eas omnes duabus ejusmodi [] uncinulis includi curavimus. Ut scilicet illi , qui Euclidem purum desiderant , unico obtutu videre possint , ea , quæ Euclidis sunt , eaque distinguere ab iis , quæ à Clavio sunt addita. *Quinto* quantum in me fuit , errores quos detexi in Editione Clavii , tum in ipso textu , tum in

P R Æ F A T I O.

in litteris , quæ respondent iis ,
quæ in schematibus sunt expressæ ,
quæ lineas necessarias figurarum
annexarum declarant , corrigere
sedulo studui : uti & citationes
omnes in margine positas , male
allatas , restituere omni ope ni-
sus fui ; forte hic vel illic men-
dum aliquod remansit ; verum
quis omnes potest cavere errores ?
cum ne Argus quidem sufficeret.
Id saltem effeci , ut nunc mul-
to correctior , quam priores
omnes Clavii Editiones , lucem
adspiciat. *Sexto* Figuras , ad pro-
positionum intelligentiam facilem
reddendam , accommodatas , se-
paratim æri incidi curavi ; in iis
elaborandis , id præprimis stu-
dui , ut clare & distincte ante
oculos ponerent , omnes lineas
ad constructionem , ac ad ejus
compositionem necessarias ; ne ve-
ro

P R Æ F A T I O.

ro. lineæ inter se confunderentur majusculas depinxi ; ac quæ ad solidorum ducunt notitiam , quæ in prioribus Editionibus , præcipue quæ in forma octava , ut ajunt , sunt , confusæ ac vitiosæ admodum erant ; distinctiores multo elaboravi , ut Tyrones sibi magis vivide constructionem figurarum repræsentare possint. Interea , sedulo cavi , ut litteræ in figuris expressæ responderent iis , quæ in Demonstrationibus occurrunt. *Septimo* his Elementis præmisimus , Historicam narrationem brevem de Euclidis vita , ac Elementis , de qua tamen non multum polliceri audemus , quoniam extra forum meum est , accuratam ac omnibus numeris absolutam tradere historiam , quare à Lectore comiter expetimus , ut si forte ea non arrideat , vel
errores

P R Æ F A T I O.

errores quosdam in ea detegat, in meliorem partem interpretari velit, cum nimis sero in ea incidi cogitata, ut de vita Euclidis quædam narrare in animum induxerim. In reliquis Clavium sumus secuti, cum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis Propositionibus. Alter vero in ipsa Propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, seu potius ipsius Euclidis, qui etiam observatur in codicibus Græcis. Id vero eo consilio factum est, quoniam cum à quibusdam Geometris propositiones Euclidis juxta ordinem Campani, ab aliis vero juxta Theonis seriem citentur; ideo

P R Æ F A T I O.

ideo necessarium esse duximus, ut utriusque interpretis numerus apponeretur. Denique ne cursus demonstrationum interromperetur, citavimus principia & propositiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, cui similis literula respondet in demonstratione, ut facilius cognoscatur, ad quem locum quælibet citatio sit referenda. Citationes vero ipsæ hoc modo intelligendæ sunt; I. *Def.* significat prima definitio; I. *Pet.* prima petitio, vel primum postulatum, I. *Prim.* prima propositio primi libri, 23. *Undec.* significat propositio vigesima tertia undecimi libri: & sic de reliquis; ex quibus reliquæ citationes facile intelliguntur. Vale, Lector benevole, & conatibus nostris fave: simul peto, ut si quædam supersint errata, benigne excuses. Scribebam Hård. mense julio CIOIOCCXXXVIII.

BREVIS

BREVIS NARRATIO
 HISTORICA
 DE
 EUCLIDIS
 VITA,
 AC
 ELEMENTIS.

S. I.  Um novam hanc Elementorum *Euclidis*, ex *Christophori Clavii Bambergensis*, insignis sane Geometræ, in *Euclidis Elementa*, commentariis, collectam Editionem, auditoribus, qui privatis nostris institutionibus in Geometriæ scientia erudiri cupiunt, pararem; haud ab instituto alienum esse putavi, breviter de Autore nostro, ac Elementis, quæ de rebus Geometricis composuit, quædam recensere. Scilicet ut aliquam saltem habere cognitionem Autoris, ac Operis, quem tractemus, illi possint, qui nos ea Elementa exponentes

audient. Tum ut eorum, quæ de Euclide narrantur, ac quæ de his Elementis à Viris Doctissimis foveantur sententiæ, non sint penitus rudes. Tum ut aliquantum intelligant, quæ de iis tenenda, vel rejicienda videntur. Antequam vero ad ipsam de *Euclide* narrationem me accingam, cum in sequentibus nobis usui futura sint, & verbo referre de Geometriæ natalibus, secundum quorundam sententiam; & perbreviter eorum clarorum Mathematicorum, qui ante *Euclidem* suis inventis præ cæteris excellere, mentionem facere; haud incongruum fore duximus.

In Geometriæ Originem, unde Mortales primo de ejusmodi studii genere cogitandi ansam cèpere; & Autorem à quo primum inventa est nobilis hæc scientia; & quo demum tempore elucere inchoavit præclarum hoc studium, si inquiremus: Multa nobis in iis occurrent, quæ ut certo affirmantur, non satis manifesta & evidentiâ videntur. Non enim latet, quosdam asserere, eam Doctrinam ab Ægyptiis, necessitate quadam coactis, ab initio fuisse inventam. Opinantur scilicet eos ob annuas Nili inundationes, quibus agrorum limites operirentur limo, ac sic confunderentur; arte quadam ac scientia, qua rursus agri dividerentur, opus habuisse. Verum hanc rite pensitantes opinionem, speciem magis veri habere, quam ut certum aliquid de Originis causa probet, cuilibet attendenti apparebit. Desunt enim nobis Veterum testimonia sufficientia, quibus

bus de ortus ratione firmo suo stat talo hæc sententia. Si JOSEPHO *antiquitatum lib. 1. cap. 9.* fidem habeamus, studium hoc Geometricum à *Chaldeis*, *Assyriisque* fuisse excultum, ac ab *Abrahamo*, jussu Dei in Palæstinam, ac inde in Ægyptum profecto, in illud Regnum tum primum fuisse translatum; ibidem testatur. Ægyptii vero ipsi, certi cujusdam autoris forte inscii, Deo suo, *Theuth* dicto, inventionis gloriam tribuunt, uti refert PLATO in *Phadro operum pag. m. 268. col. 1. in princ.* ubi ita scribit de *Theuth* loquens; *Hunc primum omnium numerum, & numeri computationem invenisse, Geometriamque, & Astronomiam, &c.* Verum dubia licet ea sint, quæ de Origine apud Ægyptios quærenda, narravit Autores; id tamen satis certo constat, Ægyptios hoc Doctrinæ genus coluisse. Etenim *Thalesem Milesum*, qui fere sexcentis ante natum Christum annis, secundo ab Urbe condita seculo, in Græcia floruit; in Ægyptum iter facientem, indeque in Græcum Solum reversum, traduxisse Geometriæ Scientiam, ex LAERTIO discimus. Qui simul nobis autor est, *Euphorbum Phrygem* præcedenti seculo Contemplationes Geometricas de lineis jam composuisse; monente DECHALES in *Traçtatu Prooemiali de progressu Mathes. cap. 2.* *Thalesem* proxime secutus est *Mamertinus*, qui præclarus celebratur Geometra. Quo eodem tempore, *Amethisum* hujus scientiæ præprimis gnarum, vixisse statuunt. Hos eodem seculo excepit excellens ille Geome-

triæ Stator *Pythagoras Samius* ; qui à multis, Geometriæ in Græciam advectæ autor habetur : quocum secundum efluxit seculum.

Tertium quod sequitur ab Urbe condita seculum , plures produxit in hoc studiorum genere præstantes viros ; inter quos primo numerantur *Anaxagoras Clazomenius* , qui *Pythagora* successit ; dein *Oenopides Chius* , hujusque discipulus *Zenodorus* ; & qui *Zenodorum* proxime secutus est , è mercatore Geometra , *Hippocrates Chius* : Hic imprimis celebratur , quod primus Elementorum Geometricorum , quæ temporis injuria periere , Scriptor exstiterit. Hos excepere *Theodorus Cyreneus* , *Timæus Locrus* , Mathematicum Scriptor.

Quartum , quod post hos Autores , illuxit seculum , Geometriæ studiosorum & inventorum valde fuit fertile. In eo claruere *Democritus Mileſius* , hujusque æqualis *Protagoras* ; Hos secutus *Plato Atheniensis* , divinus cognominatus , strenuus Matheſeos cultor ; de quo referunt , Eum singulis diebus Geometricum Problema , discipulis suis exposuisse. Quem deinceps infecuti , *Amiclas Heracleotes* , *Leodamas Thasius* , & *Neoclides* ; *Platonis* aut auditores , aut familiares ; *Leon* porro illis successit , qui secundus dicitur , à quo Elementa Geometrica , auctiora , quam ea *Hippocratis* , quæ simul ac priora , temporis injuriam passa , non exstant ; scriptis exposita fuere. Postea exstiterere *Eudoxus Cnidius* , vel ut alii scribunt , *Cnidius* , *Platonis* in *Ægyptum* comes , qui quintum Elementum Euclidis

dis de Proportionibus invenisse dicitur ; ac *Theætetus Atheniensis* , cui de quinque solidis corporibus scriptum tribuitur , verum ejus non exstat lucubratio ; insecuti sunt dein *Bryso* , & *Antiphon*.

In quinto ab Urbe condita seculo floruerunt , *Theudius Magnes* , tertius qui numeratur Elementorum Geometricorum scriptor : *Hermotimus Colophonius* ; *Cyzicinus Atheniensis* ; *Aristaeus Senior* ; *Philippus Metaus* ; *Platonis* magistri discipulus : *Menechmus* ; *Eudoxi* discipulus ; *Geminus* ; *Perseus Citicus* ; *Aristoteles* ; ac tandem Geometriæ illud sydus eluxit EUCLIDES ; qui licet his Geometris posterior fuerit ; ac ex iisdem nonnulli Elementa Geometrica Scriptis reliquerint , tamen omnium antiquissimus habetur à VOSSIO de *Scientiis Mathematicis* cap. 15. §. 1. quorum labores in Geometria habemus ; ac omnium Græcorum primus , qui omnia collegit , collectaque digessit. Hunc Autorum catalogum partim me texere docuere , CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES in tractatu *Prooem. de progressu Matheseos* , præmisso tom. 1. *Mundi Mathematici* ; qui eum se à PROCLI libro 2. *Commentariorum in Euclidem* hausisse dicit : partim TACQUET in *Historica narratione de ortu & progressu Matheseos*.

§. II. Ex his vero omnibus Geometris , licet cuncti clari celebrentur , propter Doctrinæ Geometricæ peritiam ; quam tum suis inventis ditarunt , tum sua notitia & cultu auctiorem , ac firmiorem reddiderunt ; EUCLIDES

VI. BREVIS NARRATIO HISTORICA

CLIDEM tamen solum elegimus , de quo pauca hisce paginis referremus. In vitam hujus Geometræ itaque inquirentes , Solum ejus natale , quod tulit hunc Atlantem Geometricum , sese investigandum sponte nobis sistit. Sed super hoc Autorum sententias rogantes , quod capita , tot fere sententiæ reperimus ; adeo dissentiunt inter se Autores de statuenda Patria *Euclidis* nostri. Quidam ejus Patriam , **GELAM** , civitatem *Sicilia* , fuisse putant ; ac ea de re *Euclides Geometra*, *Gelous* apud illos audit : inter quos est Scriptor Bibliothecæ Veteris Siculæ , anno 1700. à Messanenfi quodam editæ , referente **FABRICIO** *Biblioth. Græc. Lib. III. Cap. XIV. §. I.* Eam opinionem , qua *Euclidem* è *Gela* oriundum censent , forte è *Laërtio* colligere ; quia **LAERTIUS**. *Lib. II. segm. 106.* de *Euclide Megarensi* scribit , quod secundum quosdam *Gelous* sit habitus. Verum hæc sententia suo videtur privari fundamento , si in sequentibus §. 9. palam constiterit , cum , de quo scribit *Laërtius* , *Euclidem* , diversum esse à nostro *Geometra* ; quare ex eo principio *Geometra Euclidis* Terram parentem , *Gelam* fuisse , asserere non auderem. **HARDUINUS** ad *Plinium* Autorem nostrum **PERGA** , civitate *Pamphilia* oriundum censet ; at monet **FABRICIUS** loco citato , *Apollonium* Conicorum Scriptorem , in animo tum habuisse *Harduinum* , cum id de *Euclidis Geometra* patriis scripsit sedibus. Nam inter Scriptores tam Veteres quam Recentiores id satis manifesto constat ; *Apollonium* , *Pergam* sedem

fedem natalem habuisse ; Verum defunt nobis testimonia , in quibus *Euclidem Pergæ* natum , educatumque fuisse , asseritur. Alia potro , sed incerti Autoris , de *Euclidis Geometra* patriæ Solo est cogitatio ; videtur tamen ea esse Historici cujusdam Arabis , ex quo illam depromptit GREGORIUS ABULPHARAJUS in *hisor. compend. Dynastarum arabice* edita , & latine versa à Pocokio. In qua Autor ille hanc fovet opinionem , quod *Euclides Geometra* è civitate TYRO ortum duxerit , ac propterea eum *Tyrium* facit. Monente KONIGIO in *Bibliotheca Veteri & Nova*. Sed præterquam quod hujus sententiæ Autor sit incognitus , præterea etiam Veterum defunt judicia , quibus hæc corroboranda foret. Longe vero vulgarior , quæ etiam plurimos nacta est , inter Viros Doctos , Patronos , est existimatio ; *Euclidem Geometram* , MEGARÆ , quæ *Gracia* oppidum est , juxta Isthmum Corinthiacum , natum fuisse : ideo *Megarenses* Eum vocare solent. Hanc opinionem CAMPANUS habuisse videtur , uti ex inscriptione Elementorum à se editorum haud obscure colligere est ; cum ea inscribit *Euclidis Megarensis Mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum libri xv.* Cui calculum suum adjecit FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA , inscribens commentarium suum in *Euclidem* ; *Euclidis Megarensis Mathematici clarissimi Elementa Geometrica.* Idem sensere GESNERUS in *Bibliotheca*. Uti & ABDIAS TREW ei-

dem huic sententiæ favet , quod sequentia
versicula satis declarant.

*Fundamenta , quibus consurgit tota Mathesis ,
Cyclum cum numero , tu Megaræ , doces.*

In eandem accipiunt partem , RICCIOLUS in *Chronici parte secunda* , *præmissi Tomo primo Almagesti novi* , ad vocabulum *Euclides* ; ac multi alii. Fortasse horum multum labe-
factabitur cogitatio , si in posterum §. 8. & 9. consisterit , *Euclidem Megarenses* , qui sæpe confunditur cum *Geometra* nostro , omnino distinguendum esse ab *Euclide* Elementorum Scriptore. Dissentiunt ab his pariter multi Viri Eruditi , existimantes *Euclidem* nostrum *Alexandrinum* fuisse ; cum ALEXANDRIÆ , *Aegypti* prænobilis urbis ; quæ hodie Turcis *Scandaria* , Italis vero *Alessandria* appellatur , in illa planitie , quæ Mareotem Lacum , & mare mediterraneum interjacet : ab *Alexandro Magno* , per *Dinocratem* Architectum Macedonem , conditæ ; præclarum hunc *Geometram* vel lucem adspexisse primo ; vel , quæ magis manifesta , monumentis Veterum fulcita , in ea ipsum floruisse civitate asserunt. Nam *Alexandria* Eum fuisse genitum difficulter asserere auderem , cum disertum nullum de natalitio isto *Euclidis* oppido , Veteris alicujus Scriptoris testimonium habemus ; observante FABRICIO in *Biblioth. Græc. lib. III. cap. XIV. §. I. ac* GREGORIO in *præfat. in Euclidem*. Potius subscriberem sententiæ , affirmanti , minime certo

certo constare, quo Genere aut Patria oriundus sit *Euclides Geometra*: à cujus partibus stant GREGORIUS *loc. cit.* & CLAVIUS *in proleg. in Euclidem*. Quippe penes Autores Veteres, expressis nihil reperitur verbis, ubi locorum ortus est *Euclides Geometra*. Si vero conjecturis, & quidem plausibilibus, hic ullus sit locus, forte *Alexandria*, *Euclidis* nostri incunabula haberi possunt; si saltem, ubi imprimis floruerit, ibidem etiam primo lucem adspexisse statuatur. Nam quamvis Scriptores Veteres taceant, de natali urbe nostri Geometræ, tamen manifesto fatis, ubi inclaruit nostrum Geometriæ fidus, in suis monumentis declarant. Etenim PROCLUS *in secundo comment. in Euclid.* nobis testis est, *Euclidem Geometram* in Ægypto vixisse; referente VOSSIO *de scientiis Mathemat. cap. 15. §. 1.* Ac præterea PAPPUS ALEXANDRINUS, qui circa annum Domini 390. vel 400. floruit, teste RICCIOLÒ *Chron. pars. 2. ad vocabulum Pappus*; autor est, *Euclidem Geometram Alexandria* Scholam celebrem habuisse, ac discipulis ibidem operam dedisse. *vid. ejus collect. Mathem. lib. 7. pag. m. 240.* idem referunt VOSSIUS *loc. cit.* quod *Alexandria* nempe Mathesin docuerit *Euclides Geometra*. Consentiente GRONOVIO *in notis ad Gellii lib. 1. cap. 20.* Immo GREGORIUS *loc. cit.* scribit. *Primum Eum fuisse qui ista in urbe Mathesin felicibus auspiciis docuit.* Quin. & hæc Schola Mathematica *Alexandria* primo, *Euclidis* ductu, condita, optime de re Geometrica merita, quam plu-

✱ BREVIS NARRATIO HISTORICA

rimos produxit discipulos. De qua sequentia notat VOSSIUS *loc. cit.* Valde autem illud commendat Scholam ab Euclide erectam Alexandria, quod non solum multos reliquerit discipulos; sed ab ejus tempore usque ad tempora Saracenica, vix ullum invenire sit nobilem Mathematicum; quin vel Patria fuerit Alexandrinus, vel saltem Alexandria dederit operam Mathesi. Ex quibus haud collectu difficile est, Euclidem Geometram multum ac diu Alexandria versatum fuisse, istoque in oppido fixam tenuisse sedem; ac forte ibidem prognatum esse. Quapropter eo nomine Alexandrinum Eum merito dici posse conjicio.

§. III. Ætatem ejus quod attinet, de ea iterum varias in partes abeunt Viri Docti. Etenim GEORG. REISKIUS in *Margarita sua Philosophica lib. vi. cap. i.* de tempore quando floruit Euclides noster miram alit opinionem; dum asserit, *Euclidem Geometram Hippocrate* esse antiquiorem; cum ejus patrem fuisse scribit. At vero exigui momenti hæc videtur sententia, quæ auctoritate nulla Veteris alicujus Scriptoris nititur. VALERIUS MAXIMUS vero *lib. 8. cap. 12.* longe ab eo diffensit, qui *Euclidis Geometra* ætatem incidisse in *Platonis* tempora statuit; eumque *Platoni* coævum facit: scribit enim *loc. cit.* conductores aræ sacræ à Platone ad *Euclidem Geometram* fuisse missos. Quibus verbis manifesto declarat, quod existimaverit, cum *Plato* inter vivos superesset, *Euclidem Geometram* vixisse. Hujus Autoris vestigia

stigia sequuntur illi, qui *Euclidem* ad *Platonis* tempora referunt. Sed notant Viri Docti ad hunc locum *Valerii Maximi*, Eum ibidem commisisse errorem; uti §. 8. adducemus. Quapropter, cum præter *Valerium*, alium nullum habemus Scriptorem præcuntem, dubia omnino, ac penitus rejicienda est sententia ea, qua *Euclides Geometra* ætatis ejusdem cum *Platone* censetur. In diversam iterum abit partem GREG. ABULPHARAJUS in *Hist. comp. Dynast. Euclidem Geometram*, *Platone* multo juniorem statuens, cum natu minorem *Apollonio*, qui longe post Tempora *Platonis* claruit, eum fuisse scribit. Verum neque hæc de vitæ tempore *Euclidis* omnibus numeris perfecta est opinio; Contradicunt enim unanimi consensu Veterum monumenta, in quibus *Apollonius Archimede Syracusano*, qui *Euclide Geometra* natu minor est, posterior ætate ponitur. Quibus addi meretur *Apollonium* sua scripta, super *Euclidean* Elementa tanquam firma principia, & fundamenta ædificasse; quæque idcirco tempore priora esse debuerint. Sed missis iis omnibus, quæ à Recentioribus Scriptoribus, de tempore, quo floruisse putant *Euclidem Geometram*, narrantur; ad Vetusiores confugiendum esse censemus, illosque audiendos esse, quid de ætate *Euclidis* loquuntur, ut verum, vel saltem veritati proximum, vitæ tempus Autoris nostri ex illis intelligamus. Quare meo judicio haud contemnenda sunt *Procli*, & Antiquorum Græcorum, è quibus *Proclus* sua haurit, testimonio-

stimoniam. Illi autem scribunt, *Euclidem Geometram*, Hippocrate, Leonte, Theudio, Hermostimo, Socrate, Platone, Eudoxo, Platonis discipulo, Menachmo, Eudoxi discipulo, natu minorem esse; verum Eratosthene, & Archimede, quia is *Euclidis* mentionem facit, natu majorem. Etenim PROCLUS in lib. 2. comment. in *Euclid.* commemoratis aliquot, Platone antiquioribus, æqualibus, ac discipulis, subjicit *Euclidem*, qui Elementa conscripsit, non multo ætate posteriorem illis fuisse; immo addit dein, *Euclidem* natu minorem esse Platone, minimum nonaginta annis. Porro ex eodem autore Proclo specialius discimus, *Euclidem* nostrum in Ægypto, sub Ptolemao Lagi, post Alexandri Magni mortem, primo Ægypti Rege, floruisse. Quam sententiam amplectuntur GREGORIUS in præfat. in *Euclid.* ac CLAVIUS in Proleg. *Euclidem.* ut & COMMANDINUS in præfat. in *Euclid.* RAMUS in *Schola Mathematica* & multi alii. Immo si RAMO loc. cit. lib. 1. pag. 22. & 23. & FABRICIO in *Bibl. Græc.* lib. III. cap. XIV. §. 1. credimus, noster Geometra huic Ptolemao fuit notus: addunt præterea è Proclo eum à Ptolemao Rege interrogatum fuisse; num quid esset via ad Geometriam magis compendiaria, quam sit ista σοιχειωσις? (Ita à Proclo fere semper vocatur) ad quam quæstionem ipsi à Rege propositam, eum respondisse refert Proclus: μη εἶναι βασιλικὴν ἀπὸ πρὸς ἐπὶ γεωμετρίαν: id est, non esse Regiam viam ad Geometriam. Conferatur SAMUEL TENULIUS in notis suis ad *jamblichi* com-

comment. in Nicomachi Arithmetica. Ubi etiam sub *Ptolemaeo Lagi* filio in *Ægypto Euclidem* fuisse professum affirmat. Hanc autem de ætate *Euclidis* è *Procli* scriptis sententiam collectam perpendentes, ei plus ponderis & firmitatis inesse, quam cæteris antea recensitis, qui ad sequentia attendit, facile concedet. Nam nobiscum recolentes tempus, quo vixit *Proclus Lycius*, cognominatus *Dia-dochus*, id est successor, quod circa annum Christi quingentesimum incidit; teste *Vossio de scient. Math. cap. 33. b. §. 26.* & *BLANCANO in Chronol. Mathem.* optime hac de re ex scriptis Græcorum antiquis, quæ successu temporis periere, erudiri potuit. Accedit quod ea, quæ de ætate *Euclidis* refert *Proclus*, ex *Theophrasti* & *Eudemi* scriptis Historiarum Geometricarum, quæ dein deperdita sunt, mutuo desumpsit: testante *COM-MANDINO loc. cit.* *RAMO loc. cit.* & *TAC-QUET de ortu & Progressu Mathes. pag. 21.* Quod vero hi Autores Historiarum Geometricarum composuerint libros, *LAERTIUS* in vita *Theophrasti Erissii* narrat; Eum quatuor libros Historiarum Geometricarum scripto reliquisse; pariter *Eudemi* Historiæ Geometricæ laudantur à *SIMPLICIO ad lib. 1. Phys. Aristotelis.* Conferatur *JONSIUS de Scriptoribus Histor. Philos. lib. 1. cap. xv.* Ex horum scriptis de vero vitæ tempore *Euclidis* certo informari potuit *PROCLUS*; cum hi Viri eodem tempore ac *Euclides* floruerint; *Euclidis* coætaneos eos fuisse *MENAGIUS ad Diog. Laërt. lib. 5. segm. 42.* observat; ut-
pote

pote Theophrastum & Eudemum Aristotelis discipulos fuisse asserit. GRONOVIVS vero in *not. ad Auli Gellii lib. 13. cap. 5. Aristotelis* sodales fuisse notat. Porro VOSSIUS *loc. supra cit. cap. 15. §. 1.* scribit Theophrastum eodem ac Euclides tempore vixisse. Quibus iuste ad lancem æquissimam ponderatis, in errores nos non incidere existimamus, si *Alexandrinum Mathematicum* nostrum, sub Ptolemao Lagi filio celebrem fuisse, cum Proclo statuamus. Ptolemaus autem, mortuo Alexandro Magno, primus Ægypti Rex, translato in Philadelphum filium regno, obiit anno primo Olympiadis cxxiv. ante Christum natum anno 282. notante PETAVIO *Ration. Temp. part. 1. lib. iii. cap. xv.* Vel secundum Fabricii computum *loc. cit.* post quadraginta annorum imperium; animam egit anno 277. ante natum Salvatorem, Olympiade cxxiii $\frac{1}{2}$. Quocirca plus quam trecentis ante æram Christianam annis, Ægypto imperare coepit Ptolemaus primus, uti recte censet GREGORIUS. in *præfat. laud.* seu uti CLAVIUS in *proleg.* scribit, ante nativitatem Christi anno 319. imperare incepit Ptolemaus Lagi. Itaque Euclides Geometra inter annum 319. & 282. ante nativitatem Christi inclaruisse habendus est; eoque temporis intervallo, Alexandriæ famôsam suam Scholam Mathematicam erexisse, ac publice Geometriam discipulos docuisse; cum autore TACQUET *loc. supra cit.* vitam posuit Euclides noster anno 284. ante Christum; ideo circa annum 300. ante Christum natum imprimis floruit.

§. IV. Cum vero iis temporibus imprimis celebris erat *Platonis* Schola ; Platoniorum usus est institutionibus , in quorum doctrina ita versatus est, ut summam facile sibi comparaverit laudem. Testatur enim CLAVIUS in *proleg. in Euclid.* Ipsum summa laude in Academicorum disciplina fuisse versatum. Ac cum in Academia *Platonis* , præceptoris instituto , Matheseos studium tunc maxime vigeat ; *Euclides* , postquam Platoniorum dogmatibus satis instructus fuerat , totum animum ad disciplinas Mathematicas transtulit ; in quibus sic eruditus est , quotidiana fere *Platonis* discipulorum consuetudine , ut progressus admirabiles , ac sempiterna ævi memoria dignissimos , in iis fecerit. Vid. COMMANDINUS in *Euclid. Elem. proleg.* Nihilominus ea , quibus imbutus erat , principia , Academicorum institutionibus sibi comparata ; postea servavit. Etenim Platoniorum Doctrinam sectatus est. Quoniam enim Sectæ Platonice Patroni , cuncta corpora mundana , præcipue ad quinque corpora regularia , Pyramidem , sive Tetraëdron , Cubum sive Hexaëdron , Octaëdron , Dodecaëdron , & Icosaëdron , reducebant : quæque propterea corpora Platonica sæpe audiunt. Cum omnia ex quatuor Elementis constare credebant , Tetraëdron Igni , propter ejus cum acumine ignis similitudinem ; Octaëdron Aëri , qui sicut aër igni , ita octaëdron Pyramidi levitate formaque proximum est ; Icosaëdron Aquæ ob mobilitatem , qua hæc

hæc figura huic Elemento similis est ; Hexædron Terræ , ob stabilitatem ejus assignarunt ; & Dodecaëdron denique Coelo compararunt , quod , sicut coelum duodecim signis Zodiaci cingitur , ita Dodecaëdron duodecim habet bases ; item sicut Coelum suo ambitu reliqua in se comprehendit Elementa , ita Dodecaëdron inter quinque ista corpora regularia , quæ in eandem includi possunt Sphæram omnium est maximum , & quod reliqua omnium aptissime circumscribit. Videatur SAMUEL REYHERUS in *Dissert. de Euclide cap. 3. §. 4.* & MARSILIUS FICINUS in *Compendio in Platonis Timæum cap. 40.* Hinc etiam Euclides noster *Geometra* , totam suam Elementarem institutionem , ad hæc quinque corpora regularia reduxit. Etenim in suis Elementis , quinque hæc corpora Platonica , sub Geometrici examinis incudem , vocare studuit : & hunc sibi proposuisse , primarium Scopum , in Elementis suis condendis videtur. Scilicet ut omni nisu examinaret quinque ista corpora Platonica , ac ut eorum rigidam daret apodeixin ; propterea duodecim priores adornavit libros. Qua de re ita loquitur KEPLERUS , omnes omnino Propositiones , omnium librorum ; exceptis iis , quæ ad numerum perfectum ducunt ; ad mundanarum figurarum constitutionem referuntur : cum Elementorum institutionis finem statuerit , τὴν κοσμικῶν σχημάτων habitudinem & compositionem. confer. GREGORIUS in *Prefat. in Euclid.* Ex quibus haud obscure quilibet facile derivare potest ,
Euclid.

Euclidem Geometram Sectæ Platonicæ additum fuisse; ejusdemque Institutionis & Doctrinæ, quod ad Rerum Naturalium Scientiam, sectatorem haud contemnendum fuisse. Quapropter PROCLUS *in comm. in Euclid.* Eum Platicum fuisse disertis testatur verbis. Non igitur conjectura quadam hic nobis opus est, ut sciamus, qualisnam fuerit *Euclides Geometra*. Eum enim fuisse Philosophum Platicum, qui rerum naturalium Scientiæ, secundum Præceptoris sui præcepta, imprimis operam navavit, ac Geometricæ scientiæ studiosissimum; in qua summa laude excelluit, omnibus, ex antedictis, clarum esse existimo. Ad hanc autem in Scientiis Naturalibus, & Geometricis peritiam, porro ei accesserant plura animi bona; quibus Natura Eum bearat. Erat enim Vir suavissimi ingenii, & contentionis minime amans. Nam de eo scribit PAPPUS *collect. Mathem. lib. 7. pag. m. 240.* Quod *Euclides*, qui *Elementa* tradidit, ac qui *Alexandriæ* discipulis operam dedit, fuerit vir mitissimus, & benignissimus erga omnes, nullo modo infensus, sed accuratus, non arrogans.

§. V. Præter hunc à nobis descriptum *Euclidem*, in Schola Platonica, Rerum Naturalium doctrinis, secundum Præceptoris mentem, cum institutum optime, tum etiam perfectè planeque eruditum; ac præterea rerum mathematicarum scientia instructum, & doctrina excultum: Scriptores tam Veteres, quam Recentiores, etiam

**

men-

mentionem faciunt *Euclidis*: qui eo nomine celebratur, quod Philosophus fuerit Socraticus; & Auditor ipsius *Socratis* describitur. Eum ajunt, *Megar*, Græciæ oppido, ortum fuisse; ibidemque habitasse, & Scholam habuisse publicam, ac idcirco *Euclidem Megarensē* appellari. Etenim de eo, recitato prius Atheniensium decreto, ita scribit **GELLIUS** *noct. attic. lib. 6. cap. 10.* Tum *Euclides*, qui indidem *megaris* erat, quique ante id decretum, & esse *Athenis*, & Audire *Socratem* consueverat; postquam id decretum sanxerunt, sub noctem, quum advesperasceret, tunica longa muliebri indutus, & pallio versicolore amictus, & caput rica velatus, è domo sua *Megar* ad *Socratem* commeabat; ut vel noctis aliquo tempore consiliorum, sermonumque ejus fieret particeps. Præterea **DIOG. LAERT.** qui ejus vitam describit, *lib. II. segm. 106.* similiter asserit *Euclidem* hunc *Socraticum* *Megarensē* esse, eo quod *Megar* natus ac veritatus sit; Sectamque condidit, ab ipso Autore, *Megaricam* dictam. Porro **STRABO** *Geogr. lib. 9. pag. 602.* Eundem *Megar* oriundum statuit, quum de eo scribit, *habuit aliquando*, urbs scilicet *Megarensium*, *Scholam Philosophorum*, qui *Megarici* dicebantur, *successores Euclidis Socratici*, *Patria Megarensis*. Denique, ut alios omittam, **CICERO** *Academ. Quest. lib. 2. cap. 42.* testatur illum *Euclidem*, qui *Socratis* discipulus fuit, *Megar* Patriam habuisse, ait enim; *Post Euclides, Socratis discipulus, Megareus &c.* Quæ itaque testimonia istorum Scriptorum consona, Patriam

triam *Euclidis Socratici* Megaras fuisse abunde satis comprobant. Licet alii sedem ejus natalem in *ficilia* quærant; ac ejus origines ex urbe Gela repetant, quum Eum Geloum faciunt. vid. DIOG. LAERT. *loc. cit.*

§. VI. In hujus vero *Euclidis Socratici* Ætatem, quando inclaruit, inquirendum jam nobis venit; ad quam determinandam multum nos juvant GELLII verba, paragrapho præcedenti sta. adducta: in quibus inter cætera ait, Eum *Athenas* ire, & *Socratem* audire fuisse solitum. Quibus addi merentur ea, quæ scribit DIOG. LAERT. in *Vita Euclidis lib. II. segm. 106.* Nam, inquit, post *Socratis Mortem*, venisse *Platonem*, ac reliquos *Philosophos*, metu *Atrocitatis Tyrannorum* compulsos, ad hunc *Euclidem Megarenses*; à quo hospitio humanissime fuere excepti; notante STANLEJO in *Histor. Philos. in Vita Euclid.* Ex quibus allatis verbis attendenti manifesto apparere posse puto; *Euclidem Socraticum*, post mortem *Socratis* Præceptoris sui, vixisse; ac *Platonis* tempore *Socratis* discipuli nomine celebratum fuisse; cum vero eodem Præceptore *Socrate* usi sunt; *Platoni* notum fuisse. Unde *Socraticus* noster *Euclides* *Platonis* coætaneus ponitur. *Socrates* autem teste DIOG. LAERT. *lib. II. seg. 44.* mortuus est anno primo Olympiadis xcv. postquam septuaginta annos exegisset. Ac *Plato* annos natus duo de triginta adiit *Euclidem Megarenses*, autore FABRICIO *Biblioth. Græc. lib. III. cap. I. §. I.* Verum

Euclides Megarensis, ante decretum, de quo loquitur GELLIUS loco §. 5. cit. quo caverant Athenienses, qui *Megar*is civis esset, si intulisse *Athenas* pedem deprehensus esset, ut ea res ei homini capitalis esset; ante hoc decretum *Euclides Megarensis Athenis* esse, & *Socratem* audire consueverat. Quapropter suspicor clarum ac celebrem tum præ cæteris fuisse *Socraticum Euclidem*; cum *Plato* ad Eum *Megaras* venit; ac ni fallor Scholam suam jam *Megaræ* erexisse, cum una cum *Platone* reliqui Philosophi ad Eum confugiunt. Hinc videtur sequi *Euclidem Megarenssem* quidem dicendum esse *Platonis* coætaneum, quod *Platonis* tempore adhuc in vivis esset; Verum eum *Platone* seniore fuisse; Quocirca imprimis circa annum 400. ante Christum natum, *Euclidem Socraticum* floruisse ponendum est.

§. VII. Cognitis jam Patria, & Ætate hujus *Euclidis Megarensis*; porro ejus Doctrinas, quibus excelluit, & mores, quibus à natura donatus fuit, investigare utile nobis futurum esse existimamus. Super his rebus DIOG. LAERTIUM rogantibus, in suis scriptis respondet, lib. II. segm. 196. Eum litigiosis disputationibus cum primis addictum fuisse; ac ea propter in *Socratis* reprehensionem incurrisse: qui LAERTIO teste lib. II. segm. 30. O, inquit, *Euclide*, *sophistis* quidem *uti poteris*, *hominibus non poteris*. Ideo ab ejus contentiosa indole Secta ejus *Eristica* dicebatur; quapropter LAERT. lib. II. segm.

24. in ejus Scholam ita invehit, quod ait, non σχολήν *Scholam*, sed μόλην *Merum fel* eam esse. Quo videntur respicere ea, quibus *Timon* illum una cum cæteris *Socraticis* mordet, quæ *LAERT. lib. II. segm. 107.* refert.

*Non ego horum nugatorum curam gero, nec
alterius*

*Cujusquam; non Phadonis, quisquis ille sit,
nec litigiosi*

*Euclidis, qui Megarensibus contentionis rabiem
innoxit.*

In argumentationibus non assumptionibus, sed conclusionibus utebatur. Disputationes ex similibus institutas penitus tollebat. Unum esse bonum ajebat, cujus diversa sunt tantum nomina, prudentia scilicet, *Dei, mentis*, & cætera. Conferatur *STANLEY. in Histor. Philos. in vita Euclidis.* Quæ è *Laërtio* allata, hujus *Euclidis* disciplinas, quibus maxime se exercuit; ac quas publice tradidit, satis manifesto declarant; quum ex iis tantum mihi colligere posse videor; Eum imprimis *Dialecticam* professum fuisse; ac discipulos suos in disputandi arte exercuisse; totumque suum studium *Dialecticæ* peritiæ impendisse; ac ejus rei imprimis gnarum fuisse. Quapropter, ni fallor, apud *SUIDAM, in Lexico ad vocabulum Euclides*, titulo *Philosophi Megarensis* tantum notatur; neque apud ullum Autorem reperio eum *Geometriæ* studium vel primis labiis
* * 3 gustasse

gustasse, vel ejus scientia imbutum fuisse. Immo SUIDAM Eum solummodo *Philosophi* nomine appellasse, non absque ratione factum esse conjicio; quia nempe apud Veteres Scriptores Græcos, è quibus *Suidas* sua collegit, tantummodo *Philosophi* nomine occurrit. Absit itaque ut Eum *Geometra* nomine ornaremus, quum plus arti sophisticæ, quæ à quolibet *Geometra* quam longissime remota esse debet, quam severo rerum examini tribuisse visus sit. Porro *Laërtii* verba hujus *Euclidis Philosophi* indolem & mores haud obscure cognoscere faciunt; vehementem scilicet Eum ac litigiosum fuisse; insuper disputandi eum per cupidum adeo fuisse, ut *Megarensibus* contentionis rabiem invexerit.

S. VIII. Quod si ea, quæ de utroque *Euclide* reperire potui, hucusque enarrata, introspeciamus, illi, qui *Euclidem Geometram*, *Megaris* ortum fuisse sentiunt; ac propterea *Megarenses* vocant; *Geometram* nostrum, cum *Philosopho* illo *Megarico*, seu *Socratico* confundere mihi videntur. In his vero me parum, aut omnino nihil à recta via aberrare, si fontem ac originem, unde istam suam sententiam deduxere, sciscitemur; illa me persuadere videntur. Nam cum *Euclidem Geometram Platonis* tempore floruisse statuunt, & *Euclides* ille qui ad *Platonis* tempora refertur; ac propterea ab illis *Platonis* æqualis habetur, fuit *Philosophus Socraticus*, *Megaris* natus, ac educatus, disci-

discipulosque ibidem instituens; sicuti §. 5. è Veterum monumentis apparuit; ac proin-
 cujus Patria erat urbs illa *Megara*, vel *Me-
 gara* dicta; inde ni fallor, quia haud rite à
 se invicem ambos distinguunt *Euclides*, in
 eam opinionem, affirmandi *Euclidem Geome-
 tram Megareum* esse, adducti sunt. Funda-
 mentum itaque hujus conjecturæ in eo præ-
 cipue situm est; quod *Euclidis Geometra* Æ-
 tatem in *Platonis* tempora incidisse opinan-
 tur. Verum observantibus VOSSIO de
Scient. Math. cap. 15. §. 1. CLAVIO in
Proleg. in Euclid. & DECHALES in tract.
Prooem. de ortu & progressu Mathes. pag. 8.
 ad hunc errorem circa Ætatem *Euclidis* no-
 stri committendum, omnibus prævit VA-
 LERIUS MAXIMUS lib. 8. cap. 12. scri-
 bens. *Platonis quoque eruditissimum pectus hæc*
cogitatio attigit; qui conductores Sacra ara de
modo & forma ejus secum sermonem confer-
re conatos, ad EUCLIDEM GEOMETRAM
ire jussit. Ex quibus itaque collegere, Eucli-
dem Geometram iisdem Temporibus cum
Platone inclaruissse. Sed notant Viri docti
 ad hunc Locum, mendum esse in iis *Valerii*
 verbis: quippe observat PERIZONIUS quod
Mistallerius, emendavit EUDOXUM: quo-
 niam à PLUTARCHO appellatur *Eudoxus*
Cnidius ad quem *Plato* eos oblegavit. Idem
 laudatur in nobis ad GELLII lib. 6. cap. 10.
 dicitur enim ibidem; *Meminit quidem Vale-*
rius Maximus loc. cit. Platonem quosdam ad
Euclidem Geometram misisse, sed mendum ibideque
latet; & recte Mistallerius in Editione sua re-
stituit

stituit EUDOXUM Geometram. Ita legendum ostendit Plutarchus de Deo Socratis, qui in Geometrica questione Eudoxi Cnidii Platonis discipuli meminit. Idem sentit MENAGIUS ad DIOG. LAERT. lib. II. segm. 106. scribens, illa lectio *Mitalleri* temporum rationi optime congruit. Vixit enim Eudoxus Cnidius nobilis ille Geometra iisdem temporibus, quibus Plato, cujus etiam auditor fuit; sicuti ex catalogo Mathematicorum, à Proclo ornato §. I. colligere est. Quare Valerius de vero nomine Geometra parum sollicitus fuerit, & Celeberrimi Geometra nomen haud satis circumspecto arripuerit. Monente TORRENIO ad hunc locum. Observat porro VOSSIUS loc. cit. Delios ad Euclidem Geometram missos, nequidem de Socratico verum esse; sed quod Plato rejecerit illud Problema ad discipulos suos. Denique PETRUS RAMUS in Schola Mathem. lib. I. pag. m. 22. 23. existimat, quod hac in re major fides sit habenda Eratostheni, qui Euclidem Geometram proxime secutus est; quam Valerio: ERATOSTHENES autem in Epistola quadam ad Regem Ptolemaum, inter cætera hæc scribit verba. Aliquando vero post ajunt Delios grassante morbo, secundum Oraculum, duplicare quandam Aram jussos, incidisse in eandem anxietatem, tumque implorando Platonicos in Academia Geometras oravisse, ut questionem dissolverent. &c. Quapropter hinc etiam liquido attendenti cuilibet constare potest, omnino errasse in nominis descriptione Valerium. Nam nec quidquam duplicati Cubi ad

Euclidem Geometram ab Autoribus refertur ; nec *Euclides* in Elementis quidquam nominatim de duplicando Cubo proposuit. Cum itaque hæc omnia æqua lance ponderentur, nullus inficias ire potest ; quin ille locus *Valerii* vitio laboret ; nomenque *Euclidis Geometra* ibidem delendum sit. Verum destructo VALERII citato loco, corruere eorum sententiam, qui *Euclidis Geometra* Ætatem ad *Platonis* tempora referunt, meo iudicio videtur : cum præter *Valerium* è Veteribus testem nullum alium pro hac opinione habent. Sed quia ex eadem conjectura manifesto satis orta est ; ea cogitatio de Patria *Euclidis Geometra*, qua *Megaram* fuisse statuitur ; cum binos hos inter se confundunt *Euclides* ; idcirco *Euclidem Geometram*, *Megarensen* dicere non auderem.

§. IX. Non autem inter se confundendos esse binos hos *Euclides*, sed à se invicem omnino distinguendos esse, multa sunt quæ id suadent. In utroque enim *Euclide* tot characteres differentes licet reperire, qui abunde alterum ab altero diversum fuisse, sine ullo dubio palam ostendunt. Etenim tam *Geometra Euclidis*, quam *Philosophi Socratici* Patriam, in qua quilibet floruit, Domicilium habuit, ac Publice Scientias docuit ; si nobis ob oculos ponamus ; ea quæ §. 2. 5. & 8. adduximus, ut utriusque eandem fuisse putaremus, non permittunt. Quum *Euclides*, qui Geometriam exercuit, ac publice eam professus fuit, *Alexandria*

* * 5

Scho-

Scholam suam habuit, ibidemque vitam degit. Alter vero *Euclides*, qui *Socratis* Auditor fuit, ac Philosophiam publice docuit, *Megara* discipulos instituit, & erudit, patriosque eo in oppido habuit Lares. Præterea magis eos à se invicem distinguere facit utriusque Ætas diversa. Quippe *Socraticus* ille *Philosophus*, Tempore *Socratis* jam erat notus. §. 6. ejusque Auditor fuit, ac *Megara* eo tempore, Philosophiæ partem eam, quæ *Dialectica* vocatur, instituit. *Geometra* autem *Euclides* sub *Ptolemao Lagi* filio demum clarus fuit, §. 3. eoque tempore Geometriam docuit. A morte vero *Socratis* usque ad *Ptolemaum* primum elapsi sunt anni xcv. monente STANLEJO in *vita Euclidis*. Quare ad minimum xc. anni effluxere, inter *Euclidem Socraticum*, & *Euclidem Geometram*; uti censet VOSSIUS de *Scient. Mathem. loc. cit.* Multo itaque junior fuit *Euclides Geometra*, quam *Megarensis Euclides*. Confer. CEAVIUS in *Proleg. in Euclid.* GREGORIUS in *præfat.* COMMANDINUS in *Euclid. Elem. Proleg.* & multi alii. Porro inter illos discrimen licet observare, si Scholas, in quibus quilibet eruditus fuit, contemplemur. Prodiit enim *Megarensis Euclides* è *Socratis* Schola, *Mathematicus* vero *Euclides* è *Platonica*. Augetur illud discrimen inter ambos illos *Euclides*, si diversa studiorum genera, in quibus se primo exercuere; si diversas doctrinarum species, quas dein publice professi sunt, cogitemus. Fuit enim *Euclides Socraticus Permenidis*

quidam librorum valde studiosus; Autore LA-
 ERTIO in ejus vita, ac in disputandi arte
 imprimus versatus est; *Alexandrinus* autem
Euclides, *Platonis* ac *Platoniorum* de Rerum
 Naturalium scientia, sententias & rationes
 investigavit, easque omni nisu studuit, iis-
 que percipiendis & examinandis totus in-
 cubuit; dein Geometriam adiit, eamque
 maxima cum laude excoluit. Docuit *Mega-*
rensis Euclides artem Dialecticam, in eaque
 scientia suos præcipue erudit discipulos;
 Informavit *Alexandrinus Euclides* Quantonum
 contemplationes, & in iis speculandis &
 rimandis Auditores suos occupatos tenuit.
 Nec parum exaggerabunt differentiam inter
 ambos hos homines statuendam, monumen-
 ta, quibus famam suam longam effecere.
 Celebratur *Euclides Megarensis*, quod Dialo-
 gos sex composuerit, ac scriptis reliquerit,
 qui recensentur à DIOG. LAERT. in ejus
 vita, ac sunt sequentes, *Lamprias*, *Aeschines*,
Phoenix, vel ut apud *Suidam*, *Phoeni-*
ces, *Crito*, *Alcibiades*, *Eroticus*. Laudatur
Alexandrinus Euclides, quod scripta ad rem
 Mathematicam omnia spectantia composue-
 rit, litterisque mandaverit. Distinguuntur
 ulterius à se invicem bini hi Autores, quate-
 nus *Megarensis* Philosophi tantum nomine
 occurrit, *Alexandrinus* autem, Geometra
 ubique audit. Tandem mores quibus uter-
 que donatus erat, facile inter ambos nota-
 bilem efficient distinctionem. Sicuti enim
 natu major *Euclides* vehementer ac litigiosus
 fuit, sic minor natu, *Geometra* nempe no-
 ster

Vir suavissimi ingenii Vir fuit, ab omni contentione abhorrens. Quod si itaque ea, quæ in utroque observavimus *Euclide*, inter se comparemus, asserere neminem audere suspicor, ambos illos, qui *Euclidis* nomine apud prædictos Autores veniunt, pro uno eodemque habendos esse; contra distinctas omnino fuisse personas, neutiquam inter se confundendas; affirmare omnes optimo jure teneri. Consentiant GREGORIUS in præfat. SAVILIUS in prælect. in *Euclid.* CLAVIUS in proleg. COMMANDINUS in proleg. & VOSSIUS loc. cit. multique alii.

S. X. Præter jam dictos binos *Euclides*, *Philosophum* nempe, & *Geometram*, alii apud Scriptores leguntur, qui nomine *Euclidis* celebrantur: quos ob nominis convenientiam hic brevibus recensere à proposito nostro non alienum foret. Quorum primus est *Euclides Archon* qui Athenis fuit anno 2do Olympiadis LXXXVII. Secundus fuit itidem *Euclides Archon*, sub quo triginta Tyranni expulsi, ille vixit anno 2do Olympiadis xcv. Tertius *Euclides Atheniensis*, sed forte non diversus à prioribus. Quartus fuit *Euclides Vates*, *Xenophonti* amicus. Quintus *Euclides Lapidæa*, cujus mentio in *Platonis* Testamento exstat. Sextus fuit *Euclides Frater Cleomedis*, Lacedæmoniorum Regis. Septimus vocatur *Euclides Pacatianus*, cujus antidotum refertur à *Galeno* in antidotis. Octavus est *Euclides Platonius*. Nonus fuit *Euclides Maximi Byz.* filius. Decimus appellatur

tur *Euclides Parasitus*, *Smicrini filius*, cognomento *σεῦτλον*. Undecimus fuit *Euclides Leuco*. Duodecimus fuit *Euclides Rhetor*, cujus menunt STRABO *Geogr. lib. 14. pag. 969.* Confer. FABRICIUS in *Bibliotheca Grac. lib. 3. cap. 14. §. 1. in notis.* & STANLEJUS in *Vita Euclidis Megarensis*

§. XII. Sed missis reliquis omnibus, de *Euclide Geometra* tantum scribere nobis animus est: cujus scripta, quibus sui nobis commendaverit memoriam, recensere ordinis & instituti ratio postulare videtur. Ea vero GREGORIUS in *præfat. in Euclid.* partim è *Pappo Alexandrino*, lib. 7. *collectæ Mathem.* Partim è *Proclo* lib. 2. *Comment. in Euclid.* collegit: eaque porro recensentur à DECHALES in *traitain de Ortu & progressu Mathes.* CLAVIO in *Proleg. in Euclid.* FABRICIO in *Biblioth. Grac. lib. 3. cap. 14.* VOSSIO de *Scientiis Mathem.* multis aliis: ac sequentia enumerantur. Inter *Euclidis Geometra* scripta, quæ partim periere, partim supersunt; primo numerantur *Libri tres Porismatum*; Verum hi magno rei Geometricæ, præsertim loci resoluti, damno periere. Quædam tamen eorum apud *Pappum* in lib. 7. *Collectæ Mathem.* supersunt; reliquæ autem hodie non exstant. Secundo recensentur libri duo *Locorum ad superficiem*, ad *Analytim Geometricam* pertinentes; hi etiam libri temporum injuria periere, præterquam quod *Pappus Alexandrinus* horum quatuor lemmata notavit. *Tertio conscripsit Librum*
Falso

Fallaciarum, neque hic hodie reperitur; in eo vero rationes falsa deprehendendi, & paralogismos arguendi ostendit; quod scriptum, non sine notabili rei Logicæ ac Mathematicæ jactura, perditum est. *Quarto* composuit quatuor libros *Conicorum*, quos *Apollonius Pergæus* explevit, eisque alios quatuor libros adjecit, qui hodie sub *Apollonii* nomine leguntur. *Quinto* refert DECHALES *librum de sphaera* ab Euclide ornatum, qui cum cæteris periit. Præter hos libros perditos alii sunt, qui feliciori fato ab interitu servati sunt: inter eos tamen varii reperiuntur, de quibus valde dubitatur an quidem sint *Euclidis*. *Sexto* Euclidi tribuitur *liber unicus Datorum*, quæ ad analysin Geometricam sunt comparata, & ejus quasi *Elementa* Veteribus Geometris familiaria. Inter alios hunc *Datorum* librum succincte demonstratum in lucem emisit *Isaacus Barrow*; Ac olim à *Claudio Hardy* cum *Marini Philosophi* Commentario Græcè emissus, ac Latine versus est, additis obscurioribus locis Scholiis necessariis. vid. VOSSIUS *de Scient. Math. in addendis pag. m. 433.* Idque felicius præstitit *Hardy*, quam antea *Zambertus*, qui itidem hunc *Datorum* librum Latine vertit. *Septimo* Ei adscribuntur *Tractatus duo Musici*, nempe *Introductio Harmonica* & *Sectio Canonis*: dubitat autem GREGORIUS an uterque ab *Euclide* sit scriptus; qui hodie eo nomine *Euclidis* ab aliis adjudicantur; nam MEIBOMIUS eos tractatus musicos *Euclidis* tribuit; cui assentitur FABRICIUS *loc. cit.*

cit. MEIBOMIUS omnia optime in eod
 Commentatus est; eosque Volumini suo *Veterum Musicorum* inseruit. *Octavo* inter ejus
 Scripta occurrit liber unicus *Phanomenorum*; in quo solo Coelestia, sive Astronomiae
 principia attingit. Hunc VOSSIUS loc. cit. à *Bartholomeo Zamberto* cum reliquis quibus-
 dam Opusculis Latine versum fuisse, refert. Græcè & Latine sine Demonstrationibus in-
 ter cætera *Euclidis Scripta Phenomena* edidit
Conradus Dasypodius. Nono scripto reliquit
Euclides Opticam, & *Catoptricam*; verum
 GREGORIUS & SAVILIUS multa se sua-
 dere dicunt, ad suspicandum opus illud,
 quod hodie *Optica* & *Catoptrica Euclidis* voca-
 tur, spurium esse; vel temporis lapsu prorsus
 corruptum. Interpretatus est *Opticam* &
Catoptricam *Joannes Pena*; tum *Hetrusco* idio-
 mate, ex interpretatione *Ignatii Dantis* lu-
 cem vidit hic libellus; sed Autore *Blancano*,
Ignatii expositio mutila est & manca. De-
 cimo additur Scriptis *Euclidis* editis liber de
Divisionibus, qui latine tantum exstat: Mul-
 ti censent librum *Euclidis de Divisionibus* eun-
 dem esse libellum Arabica Lingua scriptum
 de superficierum divisionibus, *Machometo*
Bagdedino vulgo adscriptum; qui cura &
 studio *Joannis Dee* Londinensis, & *Fredrici*
Commandini latine versus lucem vidit. *Savi-*
lius autem & *Gregorius* illum libellum non
Euclidis esse opinantur; constat tamen *Eucli-*
dem de Divisionibus librum scripsisse. Undecimo
 his adjungit *Gregorius*, Fragmentum, quod
 in *Zamberti* editione latina *Euclidi* additur;

in quo agitur de *Levi & Ponderoso*; sed pro spurio id habet SAVILIUS in *praefat. in Euclid.* Duodecimo Scripsit *Euclides* absolutum opus *Elementorum*, cum Sole & Luna duraturum; quod plusquam 2000. annos magnam æstimationem obtinuit. De hujus editionibus & commentariis in sequentibus in specie §. 32. agere constituimus. Super his *Euclidis* Scriptis omnino legi merentur quæ de iis notarunt GREGORIUS in *praefat.* & FABRICIUS in *Biblioth. Græc. lib. III. cap. 14. §. XI-XVI. pag. 377-381.*

§. XII. Ex his vero omnibus Scriptis enumeratis, quæ *Euclidis* nomine veniunt, *Elementorum* librum elegimus; de quo pauca differemus, cætera silentio prætereuntes. Quippe sunt *Elementa Euclidis*, quæ præ reliquis præcipue in omnium versantur manibus; quæque à cunctis Geometriæ studiofis nocte dieque tractentur. Sunt *Elementa* tantum Planorum, & Solidorum, quæ in hac editione occurrunt; de iis itaque permagni nostra interest scire, quid Autores sentiunt. *Euclidem Geometram Elementorum* opus construxisse, inter omnes, tam Antiquiores, quam Recentiores conveniunt Autores. Et quamvis ante Eum à diversis *Elementa* sint composita Geometrica, ac scriptis consignata; sicuti ex *Procli* & aliorum testimoniis constat; cum multi ante Eum inclaruere Viri, de rebus Geometricis optime meriti, non solum in Ægypto, sed etiam in Græcia, qui sua super Mathematica disci-

disciplina cogitata & inventa litteris notarunt: tamen VOSSIO teste *de Scient. Math. cap. 14. Euclidis Elementa* sunt opus vetustissimum quod in Geometria habemus; cum reliquorum præclarorum Geometrarum opera, temporis injuriâ periere. Præterea opus, quod *Elementa* inscripsit, omnium Græcorum absolutissimum est corpus principiorum Geometriæ; non obstantibus aliis Geometriæ Elementis, à diversis compositis. Quippe in Græcis primus ille fuit, qui omnia fundamenta, ad Geometriæ Scientiam ducentia, in *Elementari* suo corpore collegit; ac collecta digessit. Hac de causa depingebatur *Euclides* digitis demetiens; unde SIDONIUS APOLLINARIS *lib. 9. Epist. 9.* ait, *per Gymnasia pingi Euclidem, propter mensurarum spatia, digitis laxatis.* In his autem *Elementaribus* institutionibus, adornandis, non omnium Problematum, & Theorematum unicus Inventor & Autor statuendus est *Euclides*; verum aliorum Autorum tum inventis, tum scriptis, in suis *Elementis* componendis, usus est; quorum ea, quæ invenire, vel in ordinem redegit; vel quæ non satis valide demonstrata erant, firmissimis munivit demonstrationibus. Quapropter *Elementa Euclidea*, quo ad maximam partem, originem suam traxere, ex Scriptis Geometrarum, vel ante *Euclidis* tempora, vel iisdem temporibus inclarescentium; quæ consuluit. Ita ut hoc corpus *Elementorum* sit compositum, partim ex Problematibus, & Theorematibus ab alijs excogitatis; quæ ex

* * *

iis

iis selegit, utpote ad propositum suum assequendum ducentia; ac quæ in convenientem ordinem redegit; vel si firmæ deessent probationes, evidentibus Demonstrationibus confirmavit; partim ex Propositionibus à se inventis, probationibus invictis, iis additis. Quæ tamen omnia in concinnum istum ordinem adduxit, quo hodie *Elementa Euclidea* sunt ornata. Etenim PROCLUS *lib. 2. Comment. in Euclid.* nobis autor est, *Euclidem* multa in suis Elementis ab aliis inventa collegisse, multa *Eudoxi* ordinasse, multa *Theateti* perfecisse; ea præterea quæ laxius à prioribus demonstrata erant, firmissimis Apodeixibus, quæ nec coargui, nec convinci possunt, munivisse. Ea propter à *Proclo* aliisque Veteribus Scriptoribus *ἐξοχὴν* dictus est *σοφιστικῆς*, Elementorum Constructor, & Demonstrator scilicet, ac Geometra: conferantur RICCIOLUS *Chron. pars. 2.* GREGORIUS *in præfat.* COMMANDINUS. *proleg. in Euclid.* CLAVIUS *Proleg. in Euclid.* DÉCHALES, *loc. cit.* VOSSIUS *loc. cit.*

§. XIII. Quod vero *Euclidis Elementa* multum debeant aliorum cogitatis, ac inventa pristinorum Geometrarum contineant, è quibus sunt conflata; extra omnem dubitationis aleam ponunt Propositiones & Demonstrationes, quæ in ipsis Elementis occurrunt: quarum Inventores passim apud Veteres nominantur, quibus etiam Inventionis gloria tribuitur. Etenim celebratur
THA;

THALES MILESIUS, qui primus nomine Sapientis est appellatus, Eum invenisse Iso-
 scelium Triangulorum angulos ad basin esse
 æquales : quæ est PROPOSITIO 5. ELE-
 MENTI. I. Eandem propositionem univer-
 saliore reddidit GEMINUS Geometra.
 Laudatur itidem OENOPIDES CHIUS,
 ob inventum illud præclare, perpendicula-
 rem nempe ad datam lineam ex puncto ex-
 tra eam dato ducere; illaque est PROPO-
 SITIO. 12. ELEMENTI. I. Memoratur,
 æqualitatem angulorum ad verticem opposi-
 torum THALETEM MILESIUM detexisse;
 quam PROPOSITIONEM *Euclides* 15. ELE-
 MENTI. I. fecit. Laus debetur EUPHOR-
 BO PHRYGI, quod modum, cujuslibet
 Trianguli ex tribus lineis componendi, in-
 venerit; eaque est in ordine Euclideo 22.
 PROPOSITIO ELEMENTI. I. Quæ hanc
 proxime sequitur 27. PROPOSITIO citati
 Elementi, inventis OENOPIDIS CHII
 debetur; cum Geometra ille demonstravit
 ad datum punctum lineæ propositæ, angulo
 dato, æqualem angulum rectilineum consti-
 tuere. *De thales* autem existimat, Eum non
 invenisse ipsam Propositionem, sed Demon-
 strationem aliquam reperisse. Inter THA-
 LETIS MILESII inventa Geometrica, nu-
 meratur porro æqualitas omnimoda Trian-
 gulorum, unum latus, & duos angulos ad
 invicem æquales habentium; quæ est apud
Euclidem PROPOSITIO. 26. ELEMENTI.
 I. Præterea, nullus est, qui vel primis, ut
 ajunt, labiis, Geometricum gustavit studium,

vel parum se in eo exercuit, quin **PYTHAGORÆ** in Geometria merita, propter inventa ejus utilissima, quæ inter *Euclidis Elementa* reperiuntur, extolli admodum animadverterit. Ille enim Autor est, Trianguli cujuscunque rectilinei tres angulos simul sumtos duobus rectis æquales esse; quæ est 32. PROPOSITIO. ELEMENTI. I. Eidem huic præclaro Geometræ acceptas referimus PROPOSITIONES. 44, 47. ejusque conversam 48. ELEMENTI. I. Quarum 47. PROPOSITIO speciali notatur denominatione, satis indicante, **PYTHAGORAM** primum Autorem habere; cum *Hecatombes Pythagorici* nomen gerit, sub eoque titulo passim apud Scriptores celebratur. Hujus vero denominationis originem petunt ab oblatione Boum, à *Pythagora* Musis facta, in gratiarum actionem, pro ejus Demonstrationis inventionem. Hæc est illa adeo celebris Propositio, quæ ob ingentem suam utilitatem, Inventoris sui famam immortalem reddidit. Præter has recitatas Propositiones in Elemento primo *Euclidis* occurrentes, aliæ etiam sunt, quæ in sequentibus *Euclidis* Elementis reperiuntur. Nam **THALETEM MILESIUM**, angulum in semicirculo esse rectum, invenisse referunt; eaque est apud *Euclidem* PROPOSITIO 31. ELEMENTI. III. Porro inter ejusdem **THALETIS** inventa variæ Propositiones Elementi Quarti enumerantur. Etenim tribui Ei solent à multis Scriptoribus PROPOSITIONES. 2, 3, 4. & 5. ELEMENTI. IV. Qui-

Quibus addunt, Eum reperisse modum, Triangulum Æquilaterum in Circulo inscribendi; cujus inventi lætitia elatus, Bovem Musis immolasse dicitur. Porro sunt qui statuunt, QUINTUM EUCLIDIS ELEMENTUM ab EUDOXO CNIDIO esse compositum: quia EUDOXO à veteribus, de Proportionibus à se inventis, multa adscribuntur. Certum enim est è testimoniis antiquorum, EUDOXUM de Proportionibus scripsisse. Si itaque omnia, quæ in ELEMENTO V. EUCLIDIS occurrunt, non sunt EUDOXI, saltem pleraque ab ipso profecta esse, *Proclus* clare satis testatur. Quare *Euclides* ea, quæ de Proportionibus habet, ex EUDOXI scriptis hausisse, si non omnia, saltem plurima, censendus est; cum *Proclus* ait, *Euclidem* multa *Eudoxi* in suis Elementis in ordinem rede-
gisse. Memoratur etiam THEÆTETUS, ob Demonstrationem PROPOSITIONIS. 10. ELEMENTI. X. à se primo datam. Denique quæ de SOLIDIS, tribus ultimis ELEMENTIS, nempe XI, XII, XIII. demonstravit *Euclides*, in iis THEÆTETUM, ARISTÆUM, aliosque secutum esse *Euclidem*, Autores referunt. Verum inde non derogatur, ejus laudi, quod aliorum placita consuluerit; cum inconcussis fundamentis Autorum inventa, ordine nunquam corrigendo, superstruxerit. Videantur PROCLI *Comment. in Euclid.* DECHALES in *Tract. de ortu & Progressu Mathes.* pag. 7. 8. & TAC-

QUET in *Historica* narrat de oriū & progressu
Mathes. aliique plures.

§. XIV. Hoc vero Elementorum corpus ,
secundum multorum Doctorum sententiam ,
Euclides divisit in *Tredecim* libros ; licet
vulgo à nonnullis *quindecim* enumerentur
Elementorum libri : immo in quibusdam
exemplaribus *Sedecim* *Euclidis* nomen ferunt.
Verum observat VOSSIUS de *Scient. Math.*
cap. xv. §. 3. etiamsi multi putent Elemen-
ta hæc constare libris xv. rem tamen non
ita apertam esse de duobus postremis. An-
sam dubitandi de XIV. & XV. Elementis ,
an quidem *Euclidis* sint , præbet *Theonis* in
Euclidem Commentarius. Etenim *Theon*
Alexandrinus , *Euclidis* Elementorum valde
studiosus , qui ea suis exposuit Discipulis ,
claruit *Theodosio Magno* imperante , anno
Christi 395. mortuo , uti refert VOSSIUS
loc. cit. cap. 16. §. 9. Ille vero *Theon* in
tredecim *Euclidis* priores libros , tantum
commentatus est ; uti *Campani* secundum
Theonis expositionem , Editio Elementorum
Euclidis testatur. Qua itaque expositione in
hæc Elementa manifesto indicasse videtur ,
Eum tredecim tantum agnovisse libros Ele-
mentorum ab Euclide conscriptos. Præterea
Marinus Philosophus , *Procli Diadochi* discipu-
lus , circa annum Christi 500. florens , in
Protheoria ad Data *Euclidis* , Tredecim Ele-
mentorum libros *Euclidi* solummodo tribuit.
Tot etiam libri reperiuntur , in Elemento-
rum *Euclidis* versione Arabica *Nasiridini Tu-*
sini

fini Persæ, quæ luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ anno 1594. ex Typographia Medicea. Sicuti multa alia sunt exemplaria, uti *Rhodii*, *Richardi*, aliorumque, in quibus ultimi duo nempe XIV. & XV. non reperiuntur libri. Accedit quod ultima propositio Elementi XIII. veluti colophonem operi imponit. Conferatur FABRICIUS in *Biblioth. Græc. lib. III. cap. 14.* Sed porro observandum venit, Librum decimum quartum propriam habere præfationem, quam nec primum Euclidis Elementum habet; *non vano argumento* inquit GREGORIUS in *præfat. in Elem. Euclid. duos ultimos libros alterius esse quam Euclidis.* Consentiente VOSSIO de *Scient. Math. cap. xv. §. 3. & DECHALES in Tract. de ortu & progres. Math. pag. 8. 9.* Ex quibus abunde videtur constare, Tredecim Elementorum libros, ab Euclide tantum fuisse compositos; binos reliquos scilicet XIV. & XV. alium agnoscere Autorem. Hi vero posteriores bini libri, à quamplurimis, Commentarii HYP-SICLIS ALEXANDRINI habentur. Vixit *Hypsicles* circa Tempora *Ptolemæi Lathyri* (nempe toto sæculo, vel paulo ulterius, ante natum Christum.) *Isidori* summi Mathematici discipulus. VOSSIUS *loc. cit. cap. 54. §. 7.* Ipsa præfatio quæ Elemento XIV. præmittitur, est proœmium *Hypsiclis Alexandrini* ad *Protarchum*: ex quo haud difficulter colligere est, illud neutiquam convenire *Euclidi*, at bene *Hypsicli Alexandrino*, de quo in isto loquitur Proœmio. Ut cæ-

tera taceam, quot verba, tot argumenta, Euclidem non esse ejus Autorem arguentia, reperiuntur. Etenim mentionem injicit scriptorum *Apollonii*; de comparatione Dodecaëdri, & Icosaëdri, eidem sphaeræ inscriptorum: id neutiquam de *Euclide*, qui ante *Apollonium* scriptis inclaruit, prædicari potest; sed quidem de *Hypsicle* qui multo post vixit. Conferatur FABRICIUS *loc. cit.* Sicut etiam GEORGIUS VALLA, & BARTHOLOMÆUS ZAMBERTUS VENETUS, qui sub *Hypsiclis Alexandrini* nomine, posteriores duos Elementorum libros, latine verterunt. Eosdem ob *Hypsicle Alexandrino* compositos esse censent, SAVILIUS, GREGORIUS, CLAVIUS, DECHALES; locis jam jam citatis; & innumeri alii. Decimus Sextus Liber, qui in nonnullis codicibus, non tamen in omnibus, prioribus annectitur, nunquam *Euclidi* fuit adscriptus; licet in ordine Elementorum in Clavii Editione Euclidis Elementis annumeretur; sed ille est adjectus à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA; uti in fronte hujus libri à quolibet legere est. Ac ob materiæ convenientiam Elementis adjungitur, sicuti duo præcedentes libri, de simili argumento, cum Elemento decimo tertio Euclidis tractantes, propterea à nonnullis cum Euclidis Elementis XIII. connectuntur, iisque adjunguntur.

§. XV. Tredecim hi Elementorum libri, respectu Doctrinarum, quas *Euclides* de
Quan-

Quantitatibus in iis pertractavit, cum CLAVIO & GREGORIO commode in quatuor dispecsi possunt partes: licet bipartita divisio, in *Superficerum* & *Solidorum* contemplationem, sufficiens esset; quia PROCLUS nobis Autor est, nullam peculiarem suis in Elementis, de Punctis & Lineis tractationem instituisse *Euclidem*. Verum Solidorum *Euclidis* speculationes, de corporibus regularibus Sphæræ includendis, rite intelligi nequeunt, nisi præcesserit notitia Linearum Commensurabilium, & Incommensurabilium; cum diametri ad latus proportio non semper rationalis est. Harum vero Linearum intelligentia, Numerorum scientiam præviam ultro efflagitat; ac cum corpora illa solida, basibus planis, lateribus, & angulis planis continentur; cumque omne Solidum præsupponit Planum, ex quo Originem ducit, oportebat Doctrinam Planorum primo loco tradere: inde nata est Divisio horum Elementorum in partes quatuor. *In prima parte, Plana* contemplatur; quorum Doctrinam Sex prioribus absolvit libris: & quidem ita, ut Quatuor primis Elementis Plana absolute speculetur; sequente vero Elemento Quinto Magnitudinum Proportiones in genere tractat; easque Figuris nonnullis Planis in Sexto Elemento applicat. *Secunda pars, Numerorum* affectiones exponit, quorum notitiam tribus sequentibus libris, Scilicet Septimo, Octavo, & Nono comprehendit. *Tertia in parte, Symmetriam*, sive de Lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus

*** 5 ***

Scien-

Scientiam docet, hancque unico, Decimo nempe libro complexus est. *Quarta* denique in parte, *Stereometriam*, seu solidorum doctrinam examini subjicit, eorumque contemplationem tribus ultimis libris, Undecimo, Duodecimo, & Decimo tertio, proponit ac demonstrat. Quibus peractis cum ultima propositione Libri Decimi tertii Elementa sua claudit.

§. XVI. Continent hi libri in se principia & fundamenta ad Geometriæ intelligentiam scitu necessaria; sicuti singulorum librorum contenta quemlibet attentum facile docere possunt.

Etenim *primo in libro*, Triangulorum; omnium figurarum planarum simplicissimarum & primarum ortus, affectionesque primum *Euclides* considerat; tum juxta angulos, tum juxta latera ipsa inter se comparans; quibus subjungit anguli & lineæ bisectionem; addens perpendicularis constructionem; angulos rectos, obtusos, acutos, deincepspositos, adverticem, externos, internos. Dein linearum æquidistantium proprietates investigans, ad ipsa descendit parallelogramma ex iis nata; eorum ortus, & symptomata, quæ illis insunt, declarat. Porro Triangula cum parallelogrammis comparat, ac quonam pacto parallelogrammum æquale fiat Triangulo assignat. Tandem in Triangulo Rectangulo quadrati, quod à latere rectum angulum subtendente, describitur, cum quadratis, quæ à reliquis lateribus fiunt, proportionem investigat. In

In *secundo libro*, parallelogrammi rectanguli, gnomonisque definitionem tradit; lineæque divisæ, quanta sint quadrata ostendit; illaque cum parallelogrammis segmentorum confert; dein quadratorum, quæ à lateribus triangulorum obtusangulorum, & acutangulorum describuntur, proportionibus cum quadratis, quæ fiunt à subtendentibus angulum obtusum & acutum, expendit. Denique ostendit qua ratione construatur quadratum rectilineo dato æquale. Hujus libri propositiones, præter linearem, qualem in plerisque codicibus habent, demonstrationem, etiam decem priores in numeris demonstrari possunt; quod jam olim præstitit *Barleamus Monachus*, ac post linearum demonstrationem in commentario suo numeralem subjungit *Clavius*. Nonnulli per *Algebram* speciosam easdem resolvunt, uti *Sturm* in *Archimede Germanico*, alique.

Tertius liber, agit de iis, quæ circulis accidunt, ac de rectis lineis in circulo vel ad circumulum ductis; itemque angulos tam ad circumulorum centra, quam ad peripherias constitutos rimatur; ultimo æqualitatem angulorum æqualibus arcubus chordisque insistentium demonstrat.

Quartus qui subjungitur *liber* quasi tertii praxis est, figurarum planarum, Trianguli, Quadrati, Pentagoni, Hexagoni, Quindecagoni inscriptiones in circulo, & circumscriptiones docens.

Quintus qui sequitur *liber* Magnitudinum Proportiones generales tradit; modosque argu-

argumentandi quosdam , in proportionibus apud Geometras frequentissime usitatos : alternam seu permutatam rationem , inversam , compositionem , divisionem , conversionem , ex æqualitate ordinatam ac perturbatam ; firmos ac validos esse ostendit.

In sexto libro , proportionum figurarum planarum commonstrat , ostendens Phænomena Triangulorum proportionalium , æqualium , similibusque ; sectionem lineæ in tot , quot , volueris , partes ; inventionem tertiæ , quartæ , ac mediæ proportionalis ; rationes figurarum reciprocarum , & parallelogrammorum ad se invicem , nec non polygonorum , parallelogrammorum applicationes ad rectas lineas , quæ vel deficient parallelogrammis similibus , vel excedunt : porro quomodo recta linea terminata extrema ac media ratione secetur ; ultimo proportionum circumferentiarum , angulorum , ac sectorum in circulis æqualibus inquit.

Septimus liber , numerorum indicat proprietates , in eo agitur de numeris primis & compositis ; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura invenitur ; de numerorum parte , & partibus ; de numeris multiplicibus , de proportionalibus , & quæcunque in libro quinto de magnitudinibus generatim , eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

Octavus liber , numeros deinceps proportionales , numeros planos , quadratos , cubos , & solidos ; similes planos , atque similes solidos indicat.

Notas

Nemus, numeros similes planos, cubos, solidos, numeros deinceps proportionales, sive ab unitate, sive simpliciter; numeros primos, numeros pares, impares, pariter pares, pariter impares, numeros perfectos declarat.

De hisce tribus numerorum libris, quī Arithmeticoꝝ vocantur, dissentiunt inter se Viri Docti. Quidam putant *Euclidem* in iis plus præstitisse, quam ejus præstare fuit intentio; ac ex iis profluxisse quidquid hactenus de numeris scitur, aut deinceps sciri potest; quam sententiam amplectitur TACQUET in præfat. *Arithmetica sua*. Quidam vero contendunt, *Euclidem* tantum de *Arithmetica* iis in libris tractasse, quantum rei Geometricæ infervit; ut planius ac plenius commensurabilium & incommensurabilium demonstrationes fieri possent: inter quos CLAVIUS, RHODIUS, FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA; scribit enim CLAVIUS ad Def. I. Elem. 10. Absolvit *Euclides* in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas; eadem sentit FLUSSAS in præfat. in lib. 7.

Decimus liber, magnitudines commensurabiles & incommensurabiles, itemque rationales & irrationales explorat.

In Undecimo, tandem ad Stereometriam devolvimus, in qua pertractanda, eodem quo in planis processerat, usus est modo; à simplicissimis, Geometrarum more incipiens, lineis scilicet, quatenus ad corpora soli-

solida referuntur ; quando in uno plano positis , iisque ad planum vel rectis , seu perpendicularibus , vel parallelis ; item de planis sese mutuo secantibus ; quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendiculares ducuntur ; denique differuntur tum de planis , tum de solidis angulis , de parallelepipedis , & prismatibus æqualibus nonnulla.

Duodecimus , ac solidorum secundus liber , doctrinam de corporibus fusius persequitur , in eo prismata & pyramides , cylindri & coni invicem comparantur , simulque edocet inscriptionem polygoni in circulo , & Polyedri in sphaera ; sphaerasque triplicatam suarum diametrorum habere rationem.

Decimus Tertius , corporum regularium quinque , seu Platoniorum dictorum , constitutionem contemplatur , ea corpora quidem Platonica appellantur , à Pythagora vero jam defecta sunt , uti patet ex veteri Epigrammate in *Synopsi Geometrica* MICH. PSELLI allegato ,

Σχήματα πέντε Πλάτωνος , αὐτὸς Πυθαγόρας σοφὸς εὔρε.

Πυθαγόρας σοφὸς εὔρε , Πλάτων δ' ἀριδὴλ ἐδίδαξεν.

Εὐκλείδης ἐπὶ τοῖσι κλέος περικαλλές ἔτευξεν.

hoc est ,

Figura quinque (sunt) Platonis , quos Sapiens Pythagoras invenit.

Pythagoras sapiens eas invenit , Plato vero manifeste docuit.

Eu-

Euclides super his gloriam splendidam struxit.

Conferatur GREGORIUS *loc. cit.* Ad horum corporum evidentio-rem intelligentiam præmittuntur quædam de lineis extrema ac media ratione sectis; subsequuntur relationes Pentagonorum, Hexagonorum, Decagonorum, triangulorum regularium circulis inscriptorum: tandem Pyramidem, Octaëd-
rum, Hexaëd-
rum, Icosaëd-
rum, ac Do-
decaëd-
rum construere assignet, horumque corporum latera proponit, eaque inter se componit.

Decimus Quartus, & decimus quintus libri, qui licet in nonnullis exemplaribus *Euclidis* nomine veniunt, HYP-
SICLIS ALEXAN-
DRINI esse videntur; simile tamen fere tractant argumentum. In *quarto decimo* enim comparantur Dodecaëd-
rum, & Icosaëd-
rum in eadem sphaera descripta. In *quinto decimo* quinque corpora indicata inscribuntur, ac eorum latera & anguli inveniuntur.

Decimus sextus, liber à CANDALLA ad-
ornatus, quique aliquando præcedentibus annectitur, varias solidorum regularium, sibi mutuo inscriptorum, & laterum eorumdem comparationes explicat. Conferantur COMMANDINI in *Elementa Euclidis Prolegomena*, circa finem; & GEORGE MATHIAS BOSE in *Scediajmate literario de contentis Elementorum Euclidis*.

§. XVII. Hanc per *Elementa* distributam, materiam conveniente *Ordine* ac *Methodo* dispo-

disposuit *Euclides*; in quo indagando, eum, quo *Euclides* ipse usus est, cum primum, ad hanc doctrinam speculandam sese accingeret, puto distinguendum esse ab illo, quem jam in illis Elementis tenemus. Quando, enim mecum reputo *Euclidem* sibi Scopum & Finem constituisse, corporum mundanorum constitutionem speculationi suæ subicere; inde haud obscure colligere mihi videor, primo intendisse eum, ac sibi ad contemplandum proposuisse *Elementum decimum tertium*; nempe quinque corpora regularia Platonica in eandem includere sphaeram, quæque eorum invicem sit proportio, demonstrare. Ad quod autem præstandum, necesse ei fuit extremas illas de corporibus regularibus propositiones in simplices, causas & principia earum propositionum continentes, semper resolvere; atque hac methodo pedetentim ad prima tandem devolvere principia. Cum vero Methodus Analytica est, quæ rem in sua principia sive Elementa, & conclusionem quamcunque in propositiones, quæ continent causas & principia conclusionis reducit; inde manifesto cuilibet apparere suspicor, *Euclidem* omnium primo *Methodo Analytica* processisse in suis Elementis adornandis. Nos autem qui iis utimur Elementis, quando eorum auxilio ducimur, ad Propositiones in iis propositas demonstrandas & intelligendas, à principiis ejus incipientes, & gradatim ad ultimas usque adscendentes; cumque sic ex principiis, ad id, quod ex iis fit, progredimur;

mur; *Methodum* sequimur *Syntheticam*. Quod vero ipsam spectat dispositionem eorum, quæ per hæc distribuit Elementa, sciendum omnino est; sanas omnes Scientias certa quædam & definita habere principia, ex quibus ea, quæ sequuntur demonstrant. Quare rite distinguendum est inter id, quod principiorum fungitur officio, & id, quod à principiis iis fluit; & quidem eo magis, quod principia Scientiarum debent esse per se clara, & evidentia magis quam quæ ex iis derivantur. Cum per sese sibi fidem faciunt, nulla principiorum reddenda est ratio. Quæ vero Principia consequuntur omnino rationibus confirmanda; quippe illa deinceps per principia prius intellecta cognoscimus. Hæc enim qui inter se confundit, & principia cum iis, quæ ab his fluunt, commiscet, is totam perturbat cognitionem; ea conjungens quæ nullo modo inter se conveniunt. Hac de re probe edoctus *Euclides* in suis Elementis componendis, seorsum & principia, & quæ ea sequuntur pertractavit; talia statuens principia, quæ ob evidentiam suam per sese fidem mereant, nulla eorum adhibita demonstratione. Eaque præmisit vel generalia ad omnia Elementa spectantia, vel singulis libris propria; quæ in fronte suorum librorum collocavit. E quibus præviis dein rationes petit eorum quæ principia consequuntur; cum Propositionum demonstrationes ex iis hauriens, probatam præcedentem, sequentis demonstrandæ principium statuit;

* * * *

tali-

talique ordine Elementarem suam disposuit Institutionem.

§. XVIII. Ipsa autem *principia* quod attinet, quæ *Euclides* posuit fundamenta, quibus Geometriæ Doctrinam superstrueret, in tria divisit genera; *Definitiones*, *Petitiones seu postulata*, & *Axiomata seu communes notiones*. In *Definitionibus* vocabula artis exponit, seu quem sensum fundet hoc vel illud vocabulum, in iis declarat; ac Geometrarum more vocis explicatione semel indicata, eadem semper significatione per totum Elementare corpus utitur: ne dein eorum ambiguitate aut obscuritate circumventi, in falsas incidamus conclusiones. Tales vocum Expositiones singulis Elementorum libris, ad ejus intelligentiam pernecessariarum, ac ad unumquemque librum proprie respicientium, præmisit. *Postulata*, quæ & alias *Petitiones* dicuntur, sunt, quibus aliquid admitti petimus, quod perfacile fieri potest: eaque sunt adeo clara & perspicua in his Elementis, ut nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcunt; ne ulla sit in Demonstratione hæsitatio, aut difficultas. Tria suis in Elementis posuit *Postulata* *Euclides*, quibus id tantum intendisse videtur, ut ipsi concederetur usus Regulæ & Circini, ne dein de schemate eorum operæ factæ, quasi non sit Mathematicum, his moveretur. Inde factum est, quod nulla *operatio Mathematica* creditur, nisi quæ per hæc instrumenta, nullo alio adhibito adminicu-

niculo mechanico, instituitur; quæ vero figurarum delineatio aliis indiget instrumentis, *operatio Mechanica* dicitur. *Axiomata* vero quæ & *communes notiones* sæpe audiunt, sunt propositiones seu enunciationes potius per se manifestæ, cognituque perfaciles, quæ sine ulla demonstratione à quolibet concedi, & communi consensu assumi debent. Verum postulata inter & axiomata hoc intercedit discrimen, quale inter Problema & Theorema: ac sicuti in Problemate operatio fit, ita in Postulato; sicut in Theoremate aliquid contemplationi subjicitur, ita in axiome. Hæc bina ultima principiorum genera universaliter toti præmittit Elementorum Systhemati, non autem peculiariter cuilibet eorum libro; confer. CLAVII *Prolegomena in Euclidis Elementa*.

§. XIX. Hisce Principiis præmissis ad ipsam rem sese accingit, ac aliquid tum ad faciendum, tum ad contemplandum adducit; idque *Propositiones* vocat: quas in duas distinguit species, alteram *Problema*, *Theorema* alteram nominat. *Problema* apud Mathematicos est Propositio, qua aliquid facere & operari jubemur; vel ad similitudinem Problematis Dialectici, in qua utraque contradictionis pars vera aut falsa esse potest. Sic quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid jubent construere, & cujus contrarium etiam effici potest, *Problema* appellatur. Vel secundum *Commandinum*, *Problema* illud est, in quo quippiam,

* * * * 2

cum

cum primum non sit, proponitur inven-
dum, ac construendum. Uti supra rectam
lineam finitam Triangulum æquilaterum con-
stituere, Problema est. In omni Problemate
duo notanda veniunt; *Datum*, & *Quæsitum*:
sic in assignato Problemate, datum est,
recta linea finita; quæsitum, trianguli æ-
quilateri super datam lineam constitutio.
Problematum tres species Veteres ponunt
Mathematici, *Planum*, *Solidum*, & *Lineare*.
Planum dicitur, quod per rectas lineas &
circuli circumferentiam solvi potest. *Solidum*
est, ad cujus resolutionem Sectiones Co-
nicæ requiruntur. *Lineare* denique, quod
præter jam dictas lineas alias etiam ad sui
constructionem desiderat. Ex his vero tri-
bus Problematum speciebus, prima tantum
in Elementis Euclideis reperitur, omissis
duabus reliquis. Problemata Euclidis dupli-
cia sunt, vel *determinata* vel *indeterminata*.
Determinata sunt, propositiones quæ cum re-
strictione fieri possunt, uti est 22. *Elementi*
I. Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus
datis rectis lineis æquales, triangulum con-
stituere; ubi additur hæc restrictio; opor-
tet autem duas reliqua esse majores omni-
fariam sumtas. *Indeterminata* sunt propositio-
nes, quæ universaliter fieri possunt. *Theo-*
rema est Propositio ad contemplandum pro-
posita, quæ passionem aliquam, proprieta-
temve unius, vel plurium simul quantita-
tum edit; sicuti Propositio hæc, quod in
omni Triangulo rectilineo tres anguli simul
sumti sunt æquales duobus rectis, non jubet
aut

aut docet triangulum vel aliquid construere; sed solummodo Trianguli cujuslibet constituti, passionem hanc contemplari proponit; quod anguli illi sint duabus rectis æquales: unde à contemplando talis Propositionis Theorema dicitur. Ideo Theorema, definiente *Commandino*, est in quo quippiam in constituta jam figura ita esse, vel non esse demonstratur. In Theoremate duo etiam notanda veniunt, *antecedens* & *consequens*; *Antecedens* dicitur id, quod conditiones proponit; & iis admissis, id, quod inde evenit, *Consequens* dicitur. Uti in 5. *prop. Elem.* I. Antecedens est, anguli ad basin triangulorum Isosceliorum constituti; Consequens, sunt inter se æquales. Hæc Theorematis bina membra sæpiissime nomine *datorum* & *quesitorum* occurrunt; quod prius dari seu concedi antecedens debeat, quam in sequentis veritatem inquiri possit. Inserunt aliquando Geometræ Theoremata vel Problemata minus principalia, ut alia brevius demonstrari possint, eaque *Lemmata* vocant; quæ dici possunt demonstrationes seu constructiones illius, quod ad demonstrationem, alicujus Theorematis vel Problematis principalis assumitur, ut demonstratio expeditior fiat ac brevior. Interdum subjungunt *Corollaria* vel *confectaria*, quæ sunt propositiones, immediate ex præcedenti demonstratione lucem accipientes, quæque peculiari demonstratione non egent. vid. CLAVIUS *Prolegomena in Euclidem*, & REYHERUS *in dissert. de Euclide. cap. 4.*

§. XX. Propositis Quatorum proprietatibus, earum *Demonstrationes*, quibus certo constat, rem in Propositione indicatam principiis positis convenientem esse, subjungunt cum *Euclide* Mathematici. Verum ut Demonstrationum adornatio faciliior evadat, quædam demonstrationi ipsi, ex quibus plurimum lucis sæpe foenerantur ea, quæ demonstrationi inserviunt, Geometræ præmittunt. Etenim in Theorematis, recitatis iis in propositione propositis, enumeratisque datis ac quæsitis rerum indicatarum, priusquam proposita demonstranda suscipiunt, *preparationem* quandam instituunt, qua propositionis propositæ Schema illustratur. In Problematis vero, iisdem, ac in Theorematis, prius recensitis, eorum *constructionem* efficiunt; ac, ut demonstratio legitime fieri possit, quandoque etiam *preparationem* addunt. Quibus omnibus rite peractis, eorum, quæ proponuntur, ipsam demonstrationem incipiunt Geometræ. In Demonstrationibus suis instituendis duplici Methodo procedunt Geometræ, vel *directe* demonstrant ea, quorum in propositionibus fit mentio, vel *indirecte*. *Directa Demonstratio* quæ & *Ostensiva* appellatur, ea est, in qua aliquid probatur & scientificè cognoscitur, à principiis, tanquam causa ad effectum procedendo; eaque in scholis vocatur *demonstratio à priori*, quia causa effectui prior est. Ejusmodi probatio vera est, & proprie dicta demonstratio, quæ per se di-

recte

recte ad scientiam ducit. *Indirecta*, sive ad *incommodum*, vel *impossibile* ducens, est, quando contrarium propositionis demonstrandæ assumimus, idque cum ipsa propositione conjungimus; ut fiat syllogismus conclusionem inferens, quæ cum principio quodam pugnat, adeoque contrarium propositionis falsum esse evincit; eaque est à *posteriori*, quia effectum, id est Hypothesin adversarii primo loco ponit, eamque examinat. Hæ binæ demonstrationum species si juxta æquam lancem ponderentur, plus roboris directæ demonstrationi inesse quemlibet facile concedere suspicor; modo pensitet ex principiis evidentibus apta idearum connectione, offensivam petitam esse probationem. Verum ubique talis demonstratio ostensiva haberi nequit, in quo casu ad incommodum ducentibus argumentis utendum est; ubi vero directæ institui possunt Demonstrationes, illæ multum præferendæ sunt; ac indirectis abstinendum est. Ambo hæc Demonstrationum Genera suis in Elementis adhibuit *Euclides*; cum hoc tamen discrimine quod longe pluribus usus fuerit ostensivis; ubi autem commode directas habere non potuit apodeixes, indirectas seu ad absurdum ducentes dedit demonstrationes. Quod nullo modo *Euclidi* vitio vertendum est, cum eo loco tantum ad impossibile ducentes inferuerit; ubi commode directam demonstrationem tradere non potuit; videatur REYHERUS in *dissert. de Euclid. cap. 4.*

§. XXI. *Laudatur* valde à Viris Doctis ordo, ac veritatum, ad Geometriæ intelligentiam inde hauriendam, *selectus*, quem in Propositionibus suis disponendis tenuit *Euclides*. Etenim PROCLUS in commentario suo in *Euclidem* lib. 2. cap. 5. ordinem ac deletum eorum, quæ Euclides per Elementa distribuit Theorematum atque problematum, extollit, cum illum quempiam admirari debere ait; non enim (addit) ea *assumpsit omnia*, quæ poterat dicere, sed ea duntaxat, quæ *Elementari* tradere potuit ordine: adhuc autem omnis Generis syllogismorum modos, alios quidem à causis fidem suscipientes, alios vero à certis notis perfectos, omnes autem invincibiles, & certos ad scientiamque accommodatos, adduxit. Quod si COMMANDINUM in proleg. in *Euclidis Elem.* audiamus: Nonne, dicit insignis ille Mathematicus, quilibet summopere admiretur *Euclidem* propter ordinem in hac *Elementari* institutione; cum admirabili omnium dispositione, antecedentium & consequentium ordine, ac cohærentia, ut nihil prorsus addi, aut detrahi posse videatur, ea inter se vinculo indissolubili connexuit. Pariter celebris ille Astronomus TYCHO in Oratione de disciplinis *Mathematicis*, de *Euclidis Elementis* differens, Dispositionem Elementorum *Euclidis* debita sua laude describit; *Euclides enim*, ait, *Elementa* continuo ordine, & magna solertia ita tradidit, ut à quovis mediocris ingenii acumine prædito non difficulter percipi possent. Quibus addi merentur quæ BLANCANUS

in sphaera mundi & quidem in apparatu ad Mathematicas scientias pag. m. 207. scribit. Inter Mathematica monumenta primum est Euclidis opus Elementorum, non tantum antiquitate & dignitate, verum etiam Doctrina ordine: est enim totius Matheseos basis & fundamentum. Laudabilis porro iste est ordo à doctrinæ compendio, quod neque propositionum multitudine luxuriat, neque earum paucitate sui studiosis obscuritatem creat. Cum ex iis Elementis Geometricam scientiam liquido nobis comparare possumus: qua de re GREGORIUS loc. citato Quærit; Nullane igitur est Methodus compendiosior ad Geometriam addiscendam, quam hacce per Euclidis Elementa quam adeo reformidant plerique? Huic certe questioni respondeat ipse Euclides. Ille à Ptolæmo Ægypti Rege interrogatus, an via esset aliqua ad Geometriam, magis compendiaria sua σοιχειώσεσσι, respondisse fertur autore PROCLO in lib. 2. Μη εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίας. Verum quantumvis elegans & præclarus iste est ordo, attamen taxatur à nonnullis; scribit enim de eo CLAUDIUS VERDER. in Auctorum Censione; Euclidem esse indigestum & incompositum, cum enim ab universalioribus processus fieri debebat, ne vitiosa sit repetitio, pessime à Geometria auspicatus est initium; quam post Arithmeticam tractare oportuit. Eandem de Euclidis Elementis fovet sententiam famosus Euclidis oppugnator PETRUS RAMUS, in Schola sua Mathematica, & cum RAMO, LAZARUS SCHONERUS, qui Euclidis ordinem & selectum valde carpunt, sed

monente VOSSIO *de Scientiis Mathematic. cap. 16. §. 24. Hi modum non tenuere in Euclide culpando.* His vero reponimus quæ GREGORIUS in *Præfat. sua Euclidi præmissa* hac de re scribit; *Hanc esse optimam vera Methodi Legem existimavit vir accuratissimus, ut nihil sumatur pro vero nisi demonstratum; nihil demonstretur nisi ex antecedentibus. Quo fit (inquit SAVILIUS) ut ordo, quem isti Methodista requirunt ab Euclide, quo nunquam vidit hic sol μεθοδικωτερον, servari non potuerit, nisi si quis est adeo ineptus, ut nescio cujus imaginaria venustatis rationem habendam putet, neglecta sanitate. Quivis eorum, qui Geometria Elementa alia Methodo tradenda suscepit, inter Euclidæ opus alteriusque cujusvis præter proprium judex constituatur; illico patebit discrimen.*

§. XXII. Verum quantumvis apta veritatum dispositione illa cohærent Elementa, quæ vulgo *Euclidis* nomine veniunt; dubitant nonnulli an quidem ea Euclidi sit ad scribenda Gloria, cum illa Elementa, quæ hodie in omnium versantur manibus, *Euclidem* Autorem habere negant. Sed ea à THEONE ALEXANDRINO, qui Senioris THEODOSII temporibus floruit; profecta esse affirmant. Saltem PETRUS RAMUS in diversam à longe plurimis Viris Doctis hac in parte abiit sententiam; Propositiones in Elementis Euclideanis occurrentes, non *Euclidi* sed *Theoni* adscribens; quasi nullæ forent partes *Euclidis* in iis Elementis, quæ tamen vulgo *Euclidi* tribuuntur. Verum hæc

Rami

Rami opinio Veterum Mathematicorum Testimonio repugnat ; cum omnis Antiquitas eas Euclidis , & non cujusdam Theonis Alexandrini , esse propositiones agnovit. Quæ de re HENRICUS SAVILIUS in prælectionibus in Euclidem Scribit , quod eadem hæc quæ nunc habemus , eodem ordine , iisdem verbis , agnoscunt sub Euclidis nomine Proclus & Boëtius Theone posteriores , & Anterior Theone Alexander Aphrodiseus , & omnis antiquitas. Quare nullum superesse dubium potest , quin Euclides Propositionum quæ in Elementis obviæ sunt , Autor sit habendus , licet Proclus nullum referat Euclidis inventum ; uti RAMUS scribit.

§. XXIII. Alii vero , qui parum liberaliores sunt , Propositiones ab Euclide factas compositasque esse asserunt , sed Demonstrationes Euclidi abjudicant ; hæc forsitan de causa in errorem abducti , quod in nonnullis codicibus græcis , soli traduntur propositionum tituli cum figuris , sine ulla demonstratione , referente DECHALES de Progressu Matheseos. pag. 9. col. 1. His respondet HENRICUS SAVILIUS , dicens ; *homines stulti & perridiculi ; quasi ullus unquam artifex suas edi voluerit conclusiones , nullis adjectis probationibus. Hoc neque Philosophorum quisquam , nec Medicorum , ne dum Mathematicorum , fecit unquam. Quanto minus de Mathematicorum Principe id suspicandum. Immo testis est JOANNES DE BUTEON in suis annotationibus in Euclidem , quod apud antiquos nun-*

nunquam sine demonstratione Theoremata proferebantur; ut quæ nullam, si nudæ fuerint, habeant utilitatem ac dignitatem. vid. COMMANDINUS in *proleg.* conferatur GREGORIUS in *præfat.* & VOSSIUS de *Scientiis Mathematicis. cap. 15. §. 9.* Cum his etiam se conjungit PETRUS RAMUS, qui non contentus Propositiones omnes *Euclidi* subtrahere, & *Theoni* vindicare, verum etiam Eum Demonstrationibus omnibus defraudare, easque in *Theonem* conferre omni studio nititur. Ita ut secundum RAMUM, *Euclides* in *Elementis* nihil præstiterit, sed omnia *Theon.* Quam suam sententiam, variis rationibus probabilem reddere studuit, in suo *Matheseos proœmio.* Et quidem *primo*, quod *Proclus* commemorat, Demonstrationes ab *Euclide* esse inventas, verum non refert inter *Euclidis* laudes ullam propositionem vel demonstrationem ab *Euclide* esse inventam. *Secundo*, THEON ipse suas editiones in *Elementa* nominatim laudavit, in *primo commentario. in Ptolemæi magnam constructionem*, quo sibi vindicare videtur *Theon* ipsa *Elementa.* *Tertio*, quia *Euclidis* demonstrationes, quæ in *Procli* commentariis leguntur minime cum iis conveniant, quas in *Elementis* habemus. *Quarto*, quia *Euclidis* *Elementorum* codicibus quibusdam, hæc adduntur verba in inscriptionibus, εκ των Θεωνος συνουσιων, id est ex *Theonis colloquiis sive congressibus*; sicuti codex græcus *Euclidis Elementorum*, qui prodiit *Basilæa* apud *Joan. Hervagium Anno. M. D. XXXIII.* inscribitur Εὐκλείδου Στοιχείων βιβλ. ιε. εκ των Θεωνος

ΘΕΩΝΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ. Quæ sane verba multis occasionem de Euclideanis demonstrationibus disputandi dedere; multisque ansam præbuere credendi, Demonstrationes Propositionibus *Euclidis* annexas ad *Theonem* pertinere. Licet vero *Proclus* non disertis verbis exprefserit, quasnam *Euclides* invenerit Propositiones, & Demonstrationes, tamen manifeste fatis mentem suam declarat, multum invenisse *Euclidem*, quando de eo scribit, quod multa ab *Eudoxo* collecta in ordinem redegerit, ac à *Theateto* inchoata perfecit, quæ mollius ab aliis demonstrata erant, ad firmissimas & certissimas apodeixes revocaverit. Quæ omnia profecto sine multarum propositionum & demonstrationum inventis præstari nequeunt. Secundam quod attinet rationem; verum est *Theonem* in *Commentario in Almagestum*, provocare ad *Elementa* à se edita; quod vero sectores, inquit, in circulis aequalibus sint proportionales angulis ad centrum constitutis, ostensum est à nobis in editione *Elementorum*, *eudoxei*, ad finem sexti libri. Ex quibus verbis, & novam *Elementorum* editionem adornasse *Theonem* constat, & nonnulla ab ipso adjecta; non autem quod ille autor fuerit, demonstrationum omnium in *Elementis* obviarum. vid. GREGORIUS in *Prafat. Euclidis Element. præmissa*. Tertiam perpendentes rationem, discrimen demonstrationum indicantem, non tanti ponderis ea esse videtur, ut propter eam *Euclidem* ex *Elementis* exterminaremus. Etenim idem discrimen in aliis *Euclidis* scriptis reperitur, de quibus
non

non controvertitur, an sint Euclidis, cum omnium consensu communi Euclidis scripta esse judicantur. Sic Data *Euclidis* non eodem prorsus habentur modo, quo apud PAPPUM in *septimo Mathematicarum collectionum libro*. Nec Optica, Catoptrica, quæ Romæ in Vaticana Bibliotheca servantur, teste COMMANDINO in *proleg. in Euclid.* Quid itaque foret causæ, cur Elementorum Demonstrationes Euclidi abjudicaretur, cum cætera Scripta eodem discrimine laborantia, ei adjudicaretur? Sane si dicendum, quod res est; est nodum in scirpo quærere. Nec majoris momenti est quarta denique & ultima ratio, cum hæc verba *ex τῶν Θεωνῶς συγγραμμάτων* in multis codicibus græcis non exstant; immo Autor est SAVILIUS quod hujus tituli in neutro codicum MSS. ullum reperit vestigium. Quare quæ *Joannes Beteon* de his verbis observat, veritati maxime consentanea esse videntur; cum verosimile esse putat verba illa *ex τῶν Θεωνῶς συγγραμμάτων* ita intelligenda esse, ut dicamus, *Theonem* conscripsisse quidem commentarios in Elementa, sed illos temporum calamitate periisse; quemadmodum quæ in Eundem *Pappus Alexandrinus* scripserat, conservato tamen titulo, qui postea *Euclidi* ipsi negligenter adjectus est. confer. COMMANDINUS in *Proleg. in Elem. Euclid.*

§. XXIV. Denique multi alii, & Propositiones, & Demonstrationes Elementorum, prout nunc ab omnibus teruntur, *Euclidi* attribuant,

buunt, quæque aut vera est, aut saltem veritati proxima sententia. Graves enim & ponderosæ sunt rationes, quæ pro hac sententia pugnant. Etenim PAPPUS ALEXANDRINUS, qui fere eodem ac *Theon Alexandrinus* tempore floruit, nobis autor est in *septimo libro Collect. Mathem. pag. m. 240. Euclidem* Elementa tradidisse. Ipse porro PAPPUS sæpe comparat demonstrationem ab *Euclide* traditam, cum aliorum demonstrationibus: quod sane fieri non potuisset, nisi *Euclides* & propositiones & Demonstrationes scriptis reliquisset. Accedunt, quæ PROCLUS, qui longe post *Theonem Alexandrinum* vixit, in *comm. in Euclid.* de Demonstrationibus Euclideis scripsit; cum enim in commentariis in propositionem decimam retulisset *Apollonii Pergæi* demonstrationem, hæc subjungit verba, *longe melior est σοφισμῶν*, (ita enim *Euclidem* appellat) *Demonstratio, & simplicior, magisque ex principiis.* Ex quibus verbis manifesto colligimus, *Euclidis* Elementa post obitum *Theonis Alexandrini* scriptis divulgata fuisse. Porro DECHALES in *Tract. de progressu Mathes. pag. 12.* expressis verbis scribit, quod *Proclus* & *Boëtius*, *Theone* posteriores nonnullas Demonstrationes referunt, prout in ipso *Euclide* jacent; ac VOSSIUS de *Scientiis Mathematicis*, cap. xv. §. 9. cum retulisset, quosdam censere *Theonem* & conclusionum, & demonstrationum Autorem esse, hæc addit verba: *Qua sententia eo refellitur, quod Proclus, & Boëtius; immo & Alexander Aphro-*

phrodiseus, qui *Theone antiquior fuit*; multa *Euclidi tributa iisdem verbis*, atque eodem ordine, sub *Euclidis nomine citent*. Uterius **SAVILIUS**, uti narrat **GREGORIUS** in *præfat.* nobis testis est, quod eadem quæ nunc habemus *Elementa*, sub *Euclidis nomine*, eodem ordine iisdem verbis ab universa Antiquitate, non solum *Theone* posterioribus, verum etiam anterioribus, fuere agnita. Sic enim *Alexander Aphrodiseus* qui circa initium Tertii seculi claruit, eadem quæ nunc habemus *Elementa Euclideæ*, iisdem verbis *Euclidi* tribuit: uti & *Proclus* & *Boëtius* alique qui post *Theonem* inclaruere. Quapropter veritati magis convenire videtur ea sententia, quæ statuit, quod *Elementa Euclidis* quæ possidemus, ac quæ hodie in manibus versantur, ab *Euclide* sunt adornata, quam ea, quæ à *Theone Alexandrino* ea petenda esse censet.

§. XXV. Sed cum vulgaris sit opinio, quæ etiam multos, in viris eruditis, nacta est Patronos; non uti *Ramus* inepte censuit; *Euclidem* nec Propositiones nec Demonstrationes scriptas tradidisse: verum *Euclidem* suorum Elementorum tam conclusiones, quam validissimas apodeixes scripto reliquisse; inque *Euclidem*, *Theonem Alexandrinum* commentaria sive demonstrationes scripsisse; quæstio est, quid *Theon* in suis commentariis, quæ vulgo ipsius nomine circumferuntur præstiterit, ac quænam ejus sint partes istis in *Elementis*? At vero difficilis determinatu

natu illa est, quænam sunt in his Elementis Theonis partes; cum tot diversæ, hac super re, Virorum Eruditorum sunt sententiæ. Si DECHALES audiamus in *Tract. de Progressu Mathes.* pag. 12. ille multum tribuit Theoni, cum inquit, *liber Elementorum Euclidis multum debet Theoni, à quo est in ordinem digestus, & etiam auctus.* Quocum fere consentit incertus quidam Scholiastes, qui uti narrat HENRICUS SAVILIUS in uno codice MSS. ad oram marginis, ad decimum tertium librum, scripsit; collectionem Elementorum Euclidis, ordinationem & dispositionem Theonis esse. vid. GREGORIUS in *in Præfat. citata* Cui etiam sententiæ suum adjicere calculum videtur VOSSIUS de *Scientiis Mathem.* pag. 59. ita scribens; *Vera autem de hoc opinio est, quod Theon novam Euclidis editionem adornarit; in qua Euclideæ & melius digesserit, & aliquot locis auxerit.* Neque etiam ab eadem abludere videtur COM-MANDINUS in *Proleg. in Euclid. Elem.* cum ait, *Nos autem medium secuti, credimus libros de Elementis suis ornatos, Demonstrationibus ab Euclide nobis fuisse relictos.* Ac postquam id paucis probasset, hæc adjungit verba; *Us autem hoc vere asserimus, ita illud merito concedemus, Theonem excellentis ingenii virum, Euclidis Demonstrationes fufius, planiusque explicatas, in lucem protulisse.* Tandem inferius paululum hæc subsequuntur verba, *Sunt igitur illa quidem Demonstrationes Euclidis, sed eo modo conscriptæ, quo olim Theon Euclidem secutus suis discipulis explicavit.* Sed isti opinioni,

ni,

ni, qua asseritur *Theonem* Elementa Euclidea adornasse & disposuisse, immo fufius explicasse, videtur obstare *Procli* & Antiquorum omnium autoritas. Quia iisdem verbis, ac eodem ordine, pro ut in *Euclide* exstant, tam qui ante *Theonem*, quam qui post eundem claruere, Euclidea citant. Obstat etiam mirabilis & concinna propositionum series, ex quibus unam loco si eximas, tota corruat compages, & structura necesse est. Potior videtur sententia, quod Elementa græca Euclidea, quæ vulgo commentaria *Theonis* nuncupantur, quæque nunc ab omnibus teruntur, nihil aliud sint, quam nova Editio *Euclidis*, à *Theone* adornata, nonnullis in locis ab ipso aucta. Nam *THEON* in *commentariis in Almagestum*, de Editione quadam à se edita loquitur; ubi simul mentionem injicit demonstrationis, de sectoribus in circulis æqualibus, quod sint proportionales angulis ad centrum constitutis, à se factæ. Quæ etiam in omnibus Græcis Exemplaribus annectitur ultimæ propositioni libri sexti. Idem iudicium ferendum putat de multis in libro decimo lemmatis *Savilius*, & fortasse propositionibus nonnullis. vid. *GREGORIUS* in *præfat.* Forte inquit hic insignis Geometra, & Definitiones quadum & Axiomata, libro Primo præposita, *Theonem*, vel alium præter *Euclidem* agnoscunt autorem, ex. gr. Axioma XI. Nam licet *Euclides* hoc pronunciatum adhibeat, in *Demonstratione* prop. 29. Elem. I. illud tamen pro Axiomate non habuit, sed pro conversa prop. 17. utpote qua ex illa manifesto consequatur.

eur. Fortasse & altera Demonstrationes, quæ passim occurrunt, sunt etiam Theonis: &c. Ex quibus omnibus concludit Savilius, Theonis fuisse partes, in Euclide paucis quidem in locis interpolando, explicando, augendo; ultra hoc nullas.

S. XXVI. Hæc vero Euclidis Elementa à multis retro seculis magni semper æstimata fuere, cum propter claritatem probationum, quæ in iis valde elucet, tum propter demonstrationum robur per tota Elementa dispersum; quibus accedit quod sit absolutum Elementorum opus. Etenim de iis testatur GREGORIUS in præfat. sæpe citata; corpus illud Elementorum ea claritate, & evidentia; eo judicio, ac firmitudine; esse compactum; ut singula in iis propositiones jam à bis mille annis, ab omnibus habeantur pro evidentibus, & pro talibus passim ab omnibus citentur. Quam Probationum evidentiam nonnulli suspicientes, firmissimis demonstrationibus, quæ auctore Proclo, nec coargui nec convinci possunt, omnia istis in Elementis occurrentia, munita esse, apud animum pensitantes Veteres quidam; ansam inde affirmandi, Euclidem errare non posse, nacti sunt. Quæ licet de mortali nimis superbe dicta, aliquantum conniveri possunt, si de Mathematicis Euclidis demonstrationibus tantum intelligantur. Præclarum est enim Testimonium PETRI RAMI, cæteroquin severi Euclidis castigatoris, de Euclideanis Probationibus: dicens, nullus paralogismus, nulla ψευδογῶσις in

* * * * *

2

in totis Elementis, nobis quanquam severe inquirantibus, animadverti potuit: quam laudem esse singularem profiteor; quamquam nulli adhuc, neque Grammatico, neque Rhetori, neque Logico concedere potui, ut in Grammatica, Rhetorica, Logica nihil falsi docuisset. Hæc itidem Demonstrationum, invicta firmitas, & conclusionum absoluta perfectio, forte etiam in causa fuit; cur nonnulli in *Euclidis* vocabulo *Mysterium* quasi aliquod latitare opinati sunt; cum vocabuli *Euclidis* Etymon ex græca lingua derivandum censent; putantes illud ex Græco *εὐ*, quod *benè* denotat, & *κλειω* claudio, esse compositum; idemque denotaret *Euclidis* vocabulum, quasi quis diceret *bene claudens*, seu *bene concludens*. Licet vero *Euclidis* Demonstrationes firmissimas esse agnoscamus; non tamen existimarem eam ob rationem Antiquitatem eum nomine eo insignivisse, cum multi ante & post eum extiterint *Euclides*, in quas illa Etymologica derivatio non quadrat. Est sane elegans Elogium, quod de his Elementis verba faciens, recitat *CARDANUS de mira subtilitate lib. 13.* dum scribit, *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque absoluta adeo, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas. Quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis questionibus videantur posse à vero falsum discernere, qui Euclidem habent familiarem.* Audiri etiam meretur *CLAVIUS*, in *prolegomenis*, asserens; *Euclidis Elementa semper magni æstimata, neque ullus ante eum par ei extiterit, licet non pauci ante Eius Elementa* (con-

conscribere teste Proclo. Quin & teste VERULAMIO de *Augmento scientiarum lib. 3.* Euclidis absolutum adeo est opus Elementorum, ut Euclideis laboribus in Geometricis nihil additum sit à sequentibus, quod intervallo tot seculorum dignum sit. Quare RAMUS in libro tertio *Schola Mathematica* notat. Duo fere millia Annorum existimatur toto terrarum orbe ab omni reprehensione liber & sacro sanctus fuisse Euclides, & si quid post homines natos solida scientia comprehensum & animadversum est, id Eucli acceptum refertur. Ut autem aliorum de Euclidis Elementis Testimonia silentio præteream, unicum adhuc adducere haud incongruum esse opinor; illudque sumam à GREGORIO ABULPHARAIO; quod in *Historia compend. Dynastarum.* super Elementis Euclidis dicit. Sic enim ibidem loquitur Scriptor ille Arabs; Quod Euclidis liber qui vocatur στοιχεια celebris admodum est, & utilis; ac quod non est Græcis hoc in genere liber alius generalis, neque secutus est eum aliquis, qui non vestigia ejus sectatus est; idemque quod ille dixerit; nec inter homines, qui præstantiam ipsius confessus sit, vel multiplicis ejus Doctrina testimonium perhibuerit.

§. XXVII. Opus hocce Euclideum sua inscriptione etiam videtur ornatum fuisse: ex Commandini mente Proclus in fronte ejus Legisse censetur, ευκλειδου στοιχειωσις; seu Euclidis Elementaris institutio. VOSSIUS vero de *Scientiis Mathematicis cap. 15. §. 2.* inscriptum illum librum fuisse putat, στοιχειων βιβλια, Elementorum

torum libros, vel στοιχειωσιν, *Elementorum Doctrinam*; omisso Geometriæ vocabulo, cum tamen Geometrica significare vellet στοιχεῖα. Alii vero codices inscribuntur. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ στοιχειων βιβλ. ιβ, εκ των Θεωνος συγγραμμάτων. Quæ tamen verba ex *Theonis Colloquiis*, deinde sunt adjecta, non à *Theone* ipso uti existimat COMMANDINUS in *præfat.* sæpe citata, verum à quodam *Theonis* familiari, *Viro* plane erudito, qui nobis *Euclidem*, eo quo nunc habetur modo legendum concessit. Neque etiam hæc verba in *Vetustissimis* reperiuntur *Manuscriptis*; uti ante ex SAVILIO notavimus. Mirabuntur forsitan multi *Euclidis* Inscriptionem Legentes, Eum tantum opus suum appellasse στοιχεῖα, *Elementa*: non vero Geometriæ *Elementa*, quemadmodum hoc *Elementare* corpus postea à *Latinis* ita est inscriptum; cum illud vocabulum de multis dici possit, uti de litterarum principiis, de rebus naturalibus, ac de multis aliis. Quare primo inspicientem, ac στοιχεῖα in titulo legentem, penitus dubium relinqueret, de quam materia istis in *Elementis* tractetur. Verum non absque ratione, *Euclides* tantum στοιχεῖα librum suum inscripsisse censendus est, omisso Geometriæ vocabulo. Nam præterquam quod ex primis verbis hujus operis, in quibus à puncto initium facit; quam de re isto in libro tractetur, cuilibet legenti statim innotescit; eo præterea tempore, quo *Euclidis* hæc conscripsit, Geometriæ studium, erat maxime *Elementale & fundamentale*; cum fere *juventus* omnis *Græca* pri-

primos suos conatus in Geometriæ studio
 exercendo instituerit ; ac una cum primis
 cognitionis principiis hanc Doctrinam con-
 junxerit ; nemini Elementa Legenti incog-
 nitum esse potuit ; cum frequens & perce-
 lebre tunc temporis erat Geometriæ exerci-
 tium ; quonam de subiecto in suis Elemen-
 tis ageret *Euclides* ; ac quodnam Thema in
 iis proponeret. Si non aliæ accesserint ra-
 tiones , quæ *Euclidem* Virum acutissimi inge-
 nii permoverint , suum opus tantum Ele-
 mentum nuncupare. Si ante dicta pensite-
 mus ; hæc σοιχημα sunt multorum de re Geo-
 metrica optime meritorum Scriptorum prin-
 cipia & fundamenta. Ea sunt fontes &
 scaturigines ex quibus tot effluxere Geome-
 triæ rivuli. Ea sunt fundamenta firma , qui-
 bus tot Geometræ Veteres suum Mathema-
 ticum ædificium superstruxere ; ac adhuc
 hodie Recensiores super iis condunt. Ea
 sunt tot Elementa quotquot præclara habe-
 mus opera Geometrica. Forte etiam in ge-
 nere dixit suum opus σοιχημα , non ad Geo-
 metriam tantum , sed ad alias quascunque
 intellectum perficientes & ornantes Scientias
 sese extendentia. Forte plura sub isto Ele-
 mentorum vocabulo intellexit. *Commandinus*
 vero per excellentiam quandam hanc in-
 scriptionem de Geometria intelligendam esse
 putat : idemque esset ac Oratorem dicentes
Demosthenem ; Poëtam *Homerum* vel *Virgilium*
 intelligimus ; sic etiam Elementa dicentes ,
 Geometrica intelligenda esse , existimat.

§. XXVIII. Sunt interim quidam ; qui Geometriæ nomen Euclidean Elementis concedere nimis religiosi sunt , existimantes Geometriæ scientiam esse universaliorē quam his docetur Elementis ; ac propterea inepte hæc Elementa dici Geometriæ Elementa , potius servandum esse vocabulum Elementum , quam ea Geometriæ Elementa inscribere. Alii vero putant , jure optimo hæc Elementa , Geometriæ Elementa appellari. Cum Elementa *Prælo* autore dicuntur ea , quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam , & ex quibus apparet solutio eorum , quæ in ipsis dubitare contingit : vel uti ait *Menechmus* : Elementum dicitur , in quod cum sit magis simplex compositum resolvitur ; conferantur COMMANDINI *Prolegomena*. Jam vero hæc nostra Euclidean talia sunt Geometriæ Elementa , in eorum enim contemplatione solutionem acquirimus illorum , quæ in aliis dubitare contingit ; ex iis namque profluxit , quodcunque excellens Geometriæ inventum , quod Autoris famam quam maxime longam effecit , iisque tanquam certis innititur principiis. Ex iis hauritur , & intelligitur , quidquid ad solidam Geometriæ notitiam requiritur : sine horum scientia , frustra tentant Mathematicorum tam Veterum quam Recentiorum stupenda aggredi opera ; quæ ex his Elementis lucem foenerantur. Utuntur itidem Matheseos Scriptores Veteres in suis Demonstrationibus his *Euclidean* Elementis tanquam

quam principiis, ita ut eorum de rebus Geometricis Theoremata & Problemata in hæc nostra resolvantur Elementa; ac ex his reliquæ Matheseos partes fluant. Videantur CLAVII *Prolegomena*. Verum quidem est, *Euclidem* suo in opere Geometrico non disertis verbis pertractasse omnia ad rem Geometricam pertinentia, sed uti ait CLAVIUS *loc. cit.* quæ visa sunt necessaria, atque utilia ad communem utilitatem; vel uti loqui amat COMMANDINUS, quæ Elementaliter tradere potuit ordine. Id autem non tollit, quo minus tamen hæc Elementa, Geometriæ nomen gerant; cum quidquid in Geometria docetur, ex his facile derivari possit Elementis. Nullum enim hucusque est in Geometria inventum; quin natales suos Euclideis debet Elementis, in iis sua habet principia & fundamenta, sine quibus nec intelligi nec demonstrari possunt.

§. XXIX. Ejusmodi Elementorum *Euclidis* conspectus, protinus nobis necessitatem quandam, ad ea Elementa cognoscenda, insinuat. Si enim perpendamus Elementa hæc ad universam Geometriam esse necessaria; quis iis, qui Geometrica imbui scientia studet, carere possit? Si teste COMMANDINO principalissima, simplicissimaque, ac primis principiis maxime affinia Theoremata Geometriæ iis in Elementis contineantur: Quis cognitionis Geometricæ avidus, non omnium primo hæc Elementa consulere teneatur? Ea ante omnia eum tractare oportet,

portet, qui in Geometricis Scientiis se erudiri velit; in iis se exercere, is debet, qui altiora cupit; ac Veterum & recentiorum Mathematicorum scripta intelligere percipit. Vel uti ait CLAVIUS in *proleg. citatis*, sicuti is qui legere vult, *Elementa literarum* discit prius, & illis assidue repetitis utitur in *vocabulis omnibus exprimendis*: sic qui *alias disciplinas Mathematicas* sibi reddere desiderat familiares, *Elementa hæc Geometrica* plene ac perfecte prius calleat necesse est. Frustra enim tentant Mathematicorum opera aggredi, qui hisce principiis non satis sunt muniti. Scriptores enim illi *Euclidis* demonstrationibus, tanquam fundamentis utuntur; ac testatur CLAVIUS sibi longa diuturnaue Experientia compertum esse, *eam esse necessitatem Elementorum Euclidis*, ut frustra quisquam se speret sine illorum presidio, *Aristarchi, Archimedis, Apollonii, Theodosii, Autolyi, Menelai, Ptolemai, Pappi, Sereni, Aliorum Celebrium Mathematicorum Demonstrationes* intelligere vid. COMMANDINUS in *Prolegom.* Immo cum hæc *Elementa Universæ Geometriæ* tradunt principia, sine quibus nec sciri nec percipi rite possunt abstrusiora istius scientiæ Theoremata ac Problemata; quis non mecum fateri tenetur *Elementa hæc Geometriæ studiosis scitu perquam necessaria esse?*

S. XXX. Quanti olim necessitatis & utilitatis *Euclidis Elementa*, ut rite studiosa juventus iis imbueretur, habita sunt, satis declarant Professiones Euclidæ, quæ antea
in

in Academiis & Gymnasiis fuere. Etenim creati fuere Professores, quibus Euclideæ exponere Elementa, demandatum erat. Sic enim refert DECHALES *in tract. de Progres. Mathes. cap. 2. pag. 14.* quod Joannes Scheubelius in Academia Tubingensi Euclidis Professor fuerit ordinarius; ac testatur CONRADUS DASYPODIUS *in prefat. in lib. 1. Euclidis*; primum illum librum in omnibus fere Gymnasiis prælectum fuisse; inque Schola Argentinenſi, iis, qui sunt in prima curia propositum. Porro etiam notat SAMUEL REYHERUS *in dissert. de Euclide, cap. 2.* Lipsiæ olim moris fuisse, ut summos in Philosophica facultate honores ambientes, speciminis Mathematici loco *propositionem 47. Elem. 1.* demonstrent, & propterea hanc propositionem dictam magistralem fuisse, illosque qui rite dictum Theorema demonstrare potuerunt, Magisterii titulo dignos fuisse habitos. Ac ni fallor in Academiis Patriæ nostræ, si non in omnibus, saltem in quam plurimis, constitutum est, ut, qui ad lauream Doctoralem Philosophiæ adspirant, Propositionem unam, vel duas, ex Elementis Euclidis, quibus suorum in Mathesi profectuum specimina dant, deſumtas demonstrent.

S. XXXI. Maximis laudibus *Euclidis* in Geometria peritiam ornant tam Antiqui quam Neoterici Matheseos Scriptores. Ne autem omnia commemorem, pauca quædam hic tantum adducam; & quidem è Veteribus
PAPPI

PAPPI ALEXANDRINI testimonium , tanquam sufficiens , referam. Scribit enim clarus hic Geometra in lib. 7. *Collectionum Mathem.* Quod Euclides operam dans discipulis Alexandria , longo tempore adeo excellentem in Mathematicis habitum sit affecutus , ut nunquam fuerit deceptus. Ex Recentioribus CLAVIUS in Proleg. in Euclid. audiendus est ; qui inquit , noster Geometra acutissimus , cum in Doctrina Academicorum , esset summa cum laude versatus , animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit , in quibus ita excelluit , ut concordii omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum jure optimo vindicavit. Vocatur idcirco à SAVILIO insignis Geometra , ac à DECHALES summus Geometra. COMMANDINUS vero in Euclidem , in proleg. dicit , quod Mathesin ita præclaro animi impetu est aggressus , ut progressus admirabiles , ac sempiterna ævi memoria dignissimos in ea fecerit ; constantique omnium Doctorum testimonio Geometrarum princeps habitus sit ; immo majorem semper consecutus est laudem , quam omnes illi qui ante eum vixere.

§. XXXII. Quanti etiam semper , per totum terrarum orbem , æstimata fuere , & hodie ubique æstimentur *Euclidis* nostri *Elementa* ; quæ super Geometrica Doctrina conscripsit ; abunde testantur , tum *Commentaria* à multis Viris eruditis in *Elementa* Euclidea adornata ; tum *Editiones* illæ multiplices , quibus innumeris in locis eadem lucem adspexere. Ea vero quæ colligere potui , hic com-

commemorare non inutile fore duxi. Ad id autem efficiendum imprimis usus fui laboribus FABRICII in *Biblioth. Græc. lib. III. cap. XIV* & M. GEORGII MATHIÆ BOSE in *Schediasmate literario, de variis Elementorum Euclidis Editionibus*, in quo partim de se, partim è WOLFIO recenset Editiones à FABRICIO omittas. In hoc catalogo & Commentariorum, & Editionum adornando, hunc tenui ordinem, ut pro annorum numero, quo prodire, se mutuo sequantur.

Inter omnes, qui Euclidis Elementa commentariis suis illustrare conati fuere; Antiquissimus esse videtur THEON ALEXANDRINUS.

(Secundo loco commemorandus est PROCLUS DIADOCHUS, cujus commentarium latinitate donavit FRANCISCUS BAROCIUS.)

BOËTHIUS *Euclidem* translatum in Romanam Linguam dedit, quæ inter Boëthii opera hodie exstant, ac inscribitur *Euclidis Megarensis Geometria ab Anst. Manl. Severin. Boëthio translatus*. Operum pag. m. 1179. ubi tantum propositiones sine demonstrationibus exstant.

Verum *Euclidem* Latini prius ex Arabico translatum habuere, quam ex Græco fonte. Nam JOANNES CAMPANUS qui vixit circa salutis annum MI. uti Autor est *Raphaël Volaterranus*; vel anno Domini CIOXXX. uti censet *Trithemius*, ex Arabico in Latinum vertit. Illa autem versio reprehenditur

à CLAVIO in *præfat. in Euclid.* Quod Campanus in omnibus secutus sit, traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, & Methodum perverterunt, verbaque Propositionum ejusdem locis non paucis immutarunt; ut verus, germanusque Authoris sensus, perdifficile possit intelligi. Vid. VOSSIUS *de Scient. Mathem. pag. 61. 62.*

Pariter ATHELARDUS, sive ADELARDUS, Anglus, Monachus Bathoniensis *Euclidis* Geometriam ex Arabico transtulit Latine Anno CIOCCXXX.

Vetustissimum Elementorum Typis exscriptorum exemplum esse videtur, quod prodit græce & latine sub titulo. *Euclidis opus Elementorum in XV. libros divisum, cum Commentariis Campani, & Præfatione Erhardi Radholt, Augustani, ad Johannem Mocenicum, Urbis Venetæ Principem*; editum Venetiis, per dictum RADHOLTUM anno 1482. Cujus Editionis meminit CORNELIUS à BEUGHEM in *incunabulis Typographia.*

Prodiere libri XIII. latine, ex versione, & cum Commentario LUCÆ PACIOLÆ DE BURGO. Venet. 1489. fol.

Euclidis Elementa Latine, cum commentariis Campani; per LEONARDUM de Basilea, & GULIELMUM de Papia, socios; 20. Cal. Jun. edita sunt Vicent. 1491. fol.

ZAMBERTUS vertit libros. XIII. sub titulo Elementorum *Euclidis* ex traditione *Pappi* Philosophi, quæ versio prodierat. Venet. 1505. fol.

**AMBROSIUS LACHER DE MERS-
PURGK** Constanti diocesis Arcium libera-
lium Magister, sacreque Mathematicæ stu-
dii nostri Ordinarius in Academia Franck-
fordiana. *Euclidem* edidit anno 1506. 4.
plagulis novem; *Campanum* sequitur. Non
tamen nisi quatuor priores libros comparare
in hoc volumine voluit Autor.

Textus de sphaera *Johannis de Sacrobosco*,
& Geometria *Euclidis Megarensis*. Præmittit-
ur *Jacobi Fabri Stapulen.* Præfatio ad splen-
didum virum *Carolus Berram* Thesaurarium
Regium; tribus ultimis paginis habes libros
quatuor Geometriæ *Euclidis* à *Boëtio* in Lati-
num translatos. In fine exstat. Impressum
Parisiis in officina *Henrici Stephani* è regione
scholæ decretorum sita. Anno Christi Syde-
rum conditoris 1507. fol.

LUCAS PACIOLUS, Elementorum li-
bros XV. interprete *Campano*, edidit, Ve-
net. 1509. in fol. impressi sunt apud *Paganum*
Paganinum, ac dedicati *Cardinali Volaterrano*.

Latine prodire *Euclidis* Elementorum libri
XV. interprete **CAMPANO**; & libri XIII.
interprete **BARTHOLOMÆO ZAMBER-**
TO Veneto, Parisiis 1516. apud *H. Stephe-*
num avum, fol. una cum aliis *Euclidis* scrip-
tis Basilie. 1537. & 1546. fol.

ORONTIUS FINÆUS latine commenta-
tus est in VI. priores *Euclidis* libros, qui
prodiit Parisiis. 1530.

Euclidis Elementa vulgata sunt Græcè hoc
titulo, *ἐὐκλείδους στοιχείων βιβλία* & τὰ τῶν στοι-

vos συνουσίαν. Basilæ 1533. apud *Joannem Heruagium*, fol. edente SIMONE GRYNÆO, è duobus cod. cibus MSS. Quorum alterum Venetiis *Lazarus Baysius*, alterum Parisiis *Johannis Ruellius* suppeditaverat. Ad-diti etiam in illa editione, itidem Græce, è codice Oxoniensi *Joh. Claymundi* sunt, sed admodum inemendate, Commentariorum li-bri quatuor, Autore *Proclo* Philosopho.

Euclidis Elementorum libri Græcè tum Florentiæ, tum Romæ, excusi sunt. 1545. 8.

JOHAN SCHEUBEL. Professor Eucli-dis Tubingæ, latine edidit VI. priores li-bros in quorum figuris nullæ literæ. Basi-leæ 1550. fol.

Libri VI. priores latine prodire cum Demonstrationibus ORONTII FINÆI Pari-siis apud Simon. Colineum. 1551. 4.

Libri XV. Græce & Latine excusi sunt cum præfatione *Stephani Graslis*. Parisiis 1557. 1573. & 1598. 8.

JACOBUS PELETARIUS libros VI. Priores latine edidit cum suis demonstratio-nibus fol. Anno 1557.

FRANCISCUS BAROCCIUS, *Procli* li-bros quatuor commentariorum in Euclidem, cum scholiis & figuris latine tantum edidit. Patavii. 1560.

WILHELM HOLTZMAM (*Guil. Xylan-landri*) libri sex priores Germanicè edidit Basel apud. J. *Operinum* 1562. fol.

Hanc sex priorum librorum, versionem Xylandri, JOHAN PETERSZ. DOU in Bel-

Belgicam Linguam transtulit. 1606. quæ versio iterum in Germanicam Linguam translata est à SEBASTIANO CURTIO.

Libri XIII. Græcè & Latine ex Editione CONRADI DASYPODII Argent. 1564. 8. additis, ad librum primum & secundum tantum, *Theonis* commentariis, & ad secundum *Barlaami* Monachi Demonstrationibus, quibus ad numeros applicat, quæ de Lineis ac figuris planis *Euclides* docuerat.

Libri. XV. Italice versi & Explicati à NICOLAO TARTAGLIA. Venet. 1565. 4. & cum Commentario *Campani* itidem in lingua Italica. Venet. 1569. fol. Cum scholiis antiquis incerti Autoris correcti & illustrati à FREDRICO COMMANDINO 1575. fol. & Pisauri. 1619. itidem Italice primi sex libri Mediolani. 8.

ARNOLDUS LENSÆUS Isagogen in Elementa *Euclidis* composuit. Antw. 1565. 8.

CHRISTIANUS HERLINUS, & CONRADUS DASYPODIUS, publicarunt Argentinae 1566. fol. *Analyses Geometricas* VI. librorum *Euclidis*; ubi propositiones, Græcè, Demonstrationes, mere latine.

Libri XV. latine demonstrati à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA, & libro XVI. per ipsum addito aucti; de solidorum regularium inter se invicem collatione, itemque XVII. de compositis regularibus. Parisiis 1566. fol. & 1578. fol.

Euclidis Elementa cum notis H. BILLINGSLEY & præfat. *Joh. Dee* Londinensis 1570. Lond. fol. idiomate anglicano apparuere.

CON.

CONRADUS DASYPODIUS inter alia *Euclidis* opera libros XV. Elementorum edidit Argent. 1571. 8. in ea editione *nudæ* propositiones græce & latine reperiuntur. Edidit & eodem anno librum primum *Theonis* commentariis illustratum græce, cum latina perspicua interpretatione, & *Heronis* vocabulis Geometricis.

FREDRICUS COMMANDINUS libros XV. *Euclidis* latine vertit, & cum suis commentariis edidit, Pisauri 1572. & 1619. fol.

FRANCISCUS MAUROLYCUS *Opuscula Mathematica* Venetiis 1575. 4. edidit, in quibus Theoremata XIII^{ti} Elementi.

Per CONRADUM DASYPODIUM libri VI. latine in lucem editi, cum Scholiis *Isaaci* Monachi Argentorati. 1579. 8.

CHRISTOPHORUS CLAVIUS libros XV. latine cum scholiis & commentariis insignibus edidit Coloniae 1591. fol. Romæ 1603. 2 Tom. in 8. Francofurti 1607. 8. ac inter opera ejus *Mathematica Moguntiae*. 1612. fol. iterum Coloniae 1627. 8. prodiit, in quorum decimo quarto & quinto, *Camporum* imitatur, *Flussatis* decimum sextum addit, ubi 31. Theoromatibus, ac 5. problematibus quinque corpora, variè sibi inscripta & circumscripta considerantur; ad modum tamen *Dasypodii* propositiones solas, absque Demonstrationibus ostendit. Aliæ iterum *Clavii* editio prodiit Francofurti 1654. 2. Tom. in 8.

NASIRIDINUS TUSINUS *Perfa Euclidis*

DE EUCLIDIS VITA, AC ELEMENTIS. LXXXIII

dis libros XIII. Arabicè vertit ; quæ versio
luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ
1594. fol. ex Typographia Medicea.

Excusus est Typis *Euclides* Coloniae 1600.
8. In hac solæ Euclideæ Propositiones abs-
que Demonstratione reperiuntur ; præfixa
est præfatio *Gracilis*.

CHRISTOPHORUS DIBAUDIUS latine
Demonstrationem dedit linealem VI. prio-
rum librorum. Arnhemiae 1603. 4. eorum-
demque demonstrationem numeralem. Lugd.
Bat. 1603. Lib. VII. VIII. IX. Demon-
strationem Arnhemiae 1605. libri X. seu
Arithmeticæ irrationalium , demonstrationem
Linealem & numeralem. ibid. eod.

AMBROSIUS RHODIUS XIII. libros
latine demonstravit Witteb. 1609. 8. 1634-
1661.

SIMON MARIUS , Germanice VI. prio-
res *Euclidis* libros demonstratos dedit , Q-
noldi. 1610. fol.

FLORIMUNDUS PUTEANUS librum
Euclidis decimum cum commentarijs edidit
Parisiis. 1612. fol.

JOH. CHRIST. KNOPFF. libros duos
priores , cum explicatione JOH. PAULI
RESENI edidit Witteb. 1612. 8.

DOUNOT DE BAR-LE DUC. Gallice
Euclidis Elementa vertit , Paris. 1613. 4. m.
In libro decimo ordo turbatus , ut in He-
ruagiana latina editione in libris 5. 14. &
15. *Euclidem* stricte sequitur.

D. HENRION libros. XV. in Linguam
***** 2 Gal-

LXXXIV BREVIS NARRATIO HISTORICA

Gallicam versus est , Paris. 1615. 8. (& 1632. in 4ta) ac 1631. 8.

Libri VI. priores cum commentario JOH. LANZ. S. J. prodire Ingolst. 1617. 8.

SEBASTIANUS CURTIUS Germanicam paravit Editionem Amst. 1618. 4. item 1634. 8. m.

Libri XIII. Lond. 1620. fol. græce & latine prodire , nitida editio , cum *Commandini* versione , adjectis figuris accuratis.

CAROLUS MALAPERTIUS. libros. VI. priores latine demonstravit. Duaci 1625. 12.

M. LUCAS BRUNN. Germanice *Euclidis* Elementa practica , oder auszug aller Problematum , und handarbeiten , aus den XV. büchern *Euclidis*. Norimb. 1625. 4. Definitiones nullæ , Theoremata nulla , sed nudæ Problematum solutiones.

PETRUS HERIGONIUS Gallice libros VI. priores vertit , ac edidit Paris. 1644. 8. & libros. XV. latine , & Gallice: in Tom. I. Cursus Mathematici Paris. 1644. 8. m.

MARIUS MERSENNUS libros. VIII. latine in Synopsi sua Mathematica demonstratos. dedit Paris. 1644. 4.

CLAUDIUS RICHARDUS latine in libros. XIII. commentatus est , Antwerp. 1645. fol.

MARIUS BETTINUS in *Ærario* Mathematico , Prolixos commentarios in VI. priores libros *Euclidis* dedit ; Bononiæ. 1648. 3. Tom. 4.

GEORGIUS FORNIER latine demonstra-

stravit VI. libros priores. Lond. 1654. 12.
& secunda editio Paris. 1654. 24.

ANDREAS TACQUET Elementa Geometrica Euclidea edidit Antwerp. 1654. 8. ac Amstel. 1701. 8. & cura WHISTONI recensita & locupletata est, Cantabrigiæ 1703. 8. (eadem recusa Amstel. 1725.) in quibus. VI. priores & XI. XII. continentur libri.

ISAACUS BARROUW librorum XV. editionem latinam paravit Cantabr. 1655. 8. Lond. 1659. 1678. Marburg. 1675. 8.

JOH. ALPHONSUS BORELLUS Euclidem restitutum, sive priscae Geometriæ Elementa brevius & facillius contexta elaboravit. Pisis. 1658. 4. Romæ 1670. 12.

CASPARUS SCHOTTUS libros VI. priores edidit in cursu Mathematico Herbip. 1662. Franc. 1674. & Bamb. 1677. fol.

CHRISTIANUS MELDER VI. priores Euclidis libros edi curavit Lugd. Bat. & Amstel. 1673. 12. *Furnerio* se multa debere ipse agnoscit.

CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES XIV. libros Elementorum edidit in mundo Mathematico, ejusque Tom. I. qui prædiit. 1674. nec non post Autoris obitum, editore *Amato Varcino*. Lugd. 1690. fol. (Gallice vero libros. VI. priores cum. XI. & XII. Paris. 1683. in 12.)

(Liber 5. Elementorum Euclidis explicatus secundum Doctrinam Gallilæi, à VINCENTIO VIVIANI Florentiæ 1674. 4.)

Euclidis Elementa Geometrica, novo ordine

dine ac Methodo fere demonstrata, una cum *Nicolai Mercatoris* in Geometriam Introductione brevi. Lond. 1678. 12. Autor misso ordine Geometræ, in margine expressit librum, & numerum propositionis ex ordine *Euclidis*.

JONAS MOORE anglice libros VI. priores cum XI. & XII. edidit, in the new systeme of the Mathematicks. Lond. 1681. 4.

HENRICUS COETS latine VI. priores libros demonstravit Lugd. Bat. 1691. 8. & Amstel. 1705. 8.

A. E. B. V. P. Teutsch Redender Euclides, oder acht Bücker (1-6. ac 11. & 12.) von denen anfangen des Messkunst. Wien. 1694. 4.

OZANAM in cursu Mathematico libros VI. priores, una cum XI. & XII. Gallice interpretatus est, Paris. 1697. qui recusus Paris. 1699.

SAMUEL REYHERUS, germanice VI. priores libros edidit, Kiel. 1697. 4.

HENRICUS MEISNERUS Hamburgi Elementa *Euclidis* edere coepit Græcè & Germanicè, cum uberrimis Commentariis, itidem Germanicis A. 1699. fol. sed non editis ultra librum secundum.

DAVID GREGORIUS Græcè & Latine libros XV. *Euclidis* recensuit, ac edidit Oxoniæ 1703. fol. è Theatro Sheldoniano. nitidissima Editio.

JACOBUS GOODEN ex *Euclido* præcipua collegit Theoremata, ac edidit. Leod. 1704. 8.

Descha-

Decales par OZANAM Paris. 1709. 12. m.

The Elements of Euclid, With select Theorems out of Archimedes by the Learned Andrew Taquet, by WILLIAM WHISTON. the third edition Lond. 1714. 8. m.

JOANNES KEIL, ex versione *Commandini* libros VI. priores cum. XI. & XII. imprimi curavit. Oxon. 1715. 8.

P. JACOB KRESA *Euclidem* in linguam Hispanicam traduxisse fertur, in literariis novis Germanice 1721.

SAMUEL CUNN Keilianam editionem anglie traduxit Lond. 1723. 8.

Demonstration universelle des convertes d'Euclide par Mr. SELIER 1723.

Prodiit apud Woodward tomus secundus Elementorum Euclidis, ex editione *Gregorii* in linguam Anglicam versorum, per EDMUNDUM ROVAN 1732.

Euclids Elements of Geometry, from the Latin translation of *Commandine*, by Dr. *John. Keill*, translated by *Samuel Cunn*, carefully revised and corrected by JOHN. HOM. the third. edition. 1733.

Præter has *Euclidis* Editiones etiam recensentur Elmenta *Euclidis* Arabice versa à THEBETO.

Persicam versionem Bodlejana; *Syriacam* Cantabrigiensis Bibliotheca servat.

Libri VII. ex Arabico Ebraicè versi à JOH. JACOBO MECHIR.

Alia Hebraica versio R. MOSIS ABEN TIBBON. Quam versionem *Buxtorfius* Mon-

LXXXVIII BREVIS NARRATIO HISTORICA

spessuli. A. C. 1210. factam esse testatur
vid. WOLFII. *Biblioth. Hebraea part. 1. pag.*
133.

Denique Sinice , ac Tartarice *Euclidis*
Elementa versa sunt.

Plantavitius Romæ in Bibliotheca Medicea præclarissimum *Euclidis Exemplar* Hebræum vidisse se ait , magnis in folio membranis , iisque tersissimis , nobilique charactere , & auctario duorum librorum , qui non exstent in Græcis & Latinis exemplaribus uti refert WOLFIUS in *Biblioth. Hebraea part. 1. pag. 133.* sunt & alia exemplaria Hebraica quæ à Wolfio loco citato enumerantur.

EUCLIDIS



E U C L I D I S

E L E M E N T U M

P R I M U M.

Ortus hic primus liber in eo positus est, ut nobis tradat ortus proprietatesque triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: qua quidem inter se comparat interdum, interdum vero unumquodque per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera, secundum equalitatem atque inaequalitatem, rimatur. Idemque variis rationibus inquirat, in duobus quandoque triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumque contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, ut cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Ut autem hac omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet divisionem anguli rectilinei, & linea recta in partes aequales, constitutionem linea perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat equalis, & alia huiusmodi. Itaque ut uno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime prima, ac praecipua, triangula inquam, atque parallelogramma.

DEFINITIO. I.

Punctum est, cujus pars nulla est.

ANte omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositam exorditur à principiis, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Qua quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, unas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemve alteras. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturque sine omni parte, ita ut neque longum, neque latum, neque profundum esse cogitetur, id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum.

DEFINITIO. II.

Linea verò, longitudo latitudinis expers.

Definit hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam.

Mathematici, ut nobis inculcent veram lineam intelligentiam, imaginantur punctum jam descriptum superiore definitione, è loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum om-

TAB. I. nis expers latitudinis. Ut si punctum *A*, fluere intelligatur ex *A*, in *B*, vestigium effectum *AB*, linea appellabitur, cum vere intervallum inter duo puncta *A*, & *B*, comprehensum sit longitudo quodam

dam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni privatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit.

DEFINITIO. III.

Lineæ autem termini, sunt puncta.

DOcet quod linea qualibet habens extrema, in **TAB. I.** suis extremitatibus puncta recipiat. Ut linea **fig. 11** *AB, extrema habet puncta A, & B.*

DEFINITIO. IV.

Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

HOc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur.

Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti, qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum recta fluere concipiatur per brevissimum spatium, ita ut neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem quendam motum, atque incessum teneat, dicitur linea illa descripta, Recta.

DEFINITIO. V.

Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

Post lineam, quæ est prima quantitatis continua species, unicamque habet dimensionem, definitur
 Λ 2 superæ

4 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

TAB. I.
fig. 2.

superficiem, qua secundam magnitudinis speciem constituit, additque primæ dimensionis secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur, non solum longitudo, ut in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Ut quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehensa, considerataque secundum longitudinem AB, vel CD, & secundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis, appellatur superficies.

Mathematici vero, ut nobis eam ob oculos ponant, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in transversum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Ut si linea AB, fluat versus DC, efficietur superficies ABCD.

DEFINITIO. VI.

Superficii autem extrema, sunt lineæ.

TAB. I.
fig. 2.

Non dissimilis est hac definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extiterunt puncta. Ut superficiiei ABCD, extrema sunt lineæ AB, BC, CD, DA.

DEFINITIO. VII.

Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas.

Hæc quoque definitio, similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interjacet, ita ut media

media partes ab extremis sursum, deorsumve subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicujus marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatae, ita ut nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermedia cum extremis aequalem adeptae sunt situm, nec ulla est alia sublimior, humiliorve, sed omnes aquabiliter protenduntur.

Hac autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineae rectae in transversum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Ut si linea recta AB, per duas rectas AD, BC, feratur, efficietur superficies perfecte plana. TAB. I. fig. 2.

Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita ut quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana.

DEFINITIO VIII

Planus vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DEclarat, quidnam sit angulus planus, dicens; quandocunque duae lineae in plana aliqua superficie invicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex hujusmodi concursu, seu inclinatione unius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duae lineae, AB, AC, concurrunt in A, & non jacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duae illae lineae constituuntur. Dicentur autem duae lineae non in directum jacere, quando altera ea-

TAB. I.
fig. 3.

6 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

rum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant jacentes in directum, ita ut alterutra producta congruat toti alteri, non fiet ullus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ unam integram lineam constituent. Ut quia recta

TAB. I. AB, producta convenit cum recta BC, non efficietur
fig. 4. angulus in B. Quare in directum dicentur jacere. Itaque ut lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, ut post concursum productæ se mutuo secant.

Consistit autem anguli cujusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem.

DEFINITIO. IX.

Cum autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

Angulus omnis planus qui conficitur ex lineis duabus rectis, rectilineus dicitur.

DEFINITIO. X.

Cum vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum. Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ejus, cui insistit.

Docet hoc loco Euclides, quisnam angulus rectilineus apud Geometras appellatur rectus, & quamam linea perpendicularis: si recta linea AB, recta CD, insistens efficiat duos angulos prope punctum B,

TAB. I.
fig. 5.

B, (qui quidem ideo dicantur à Mathematicis esse deinceps, quod eos eadem linea CD, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se aequales, quod tum demum fiet, quando recta AB, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed aequaliter recta, CD, insistet, vocabitur uterque angulus B, rectus, & recta AB, perpendicularis recta, CD, cui insistet. Eadem ratione nominabitur recta CB, perpendicularis recta AB: quamvis enim CB, tantum faciat cum AB, unum angulum, tamen si AB, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus aqualis priori.

Itaque ut in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quae ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, ut probemus angulum, qui est ei deinceps, aequalem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quae ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps aequalem quoque esse.

DEFINITIO. XI.

Obtusus angulus est, qui recto major est.

Quando recta AB, recta CD, insistens non TAB. 6
fecerit angulos ad punctum B, aequales, & ob fig. 6.
eam causam neutrum rectum, sed unum quidem recto majorem, alterum vero minorem, dicitur major angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis, AB, BC.

DEFINITIO. XII.

Acutus vero, qui minor est recto.

TAB. I. **M**INOR angulus B , ad punctum D , vergens, qui continetur rectis lineis AB , BD , vocatur acutus.

Quoniam vero ad quemvis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, ut tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extrema vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, angulum obtusum intelligunt per angulum ABC , acutum vero, per angulum ABD , quod diligenter est notandum, ut facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

DEFINITIO. XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

TRES sunt termini juxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Omne siquidem terminatum superat terminum suum una dimensione, ut perspicuum est ex adductis exemplis.

DEFINITIO. XIV.

Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare

lare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminata, & quæ profunditatem adepta quoque sunt, ut solida finita, Figura nomine appellabuntur. Hæ enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare.

DEFINITIO. XV.

Circulus, est figura plana sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur; ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEfinit hic circulum, figuram inter planas perfectissimam; docens figuram illam planam; quæ unica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab uno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Ut si superficies, seu spatium concludatur unica linea ABC, habueritque hanc conditionem, ut ab aliquo puncto intus suscepto, utpote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum ABC, quales sunt DA, DB, DC, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non.

TAB. 5
fig. 7.

Adjungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est ABC, appellari Peripheriam, seu, ut Latini exponunt, circumferentiam.

Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta

finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, unde moveri cæperat. Ut si intelligatur recta

TAB. I. AD, circa punctum D, quiescens moveri, donec
 fig. 7. ad eundem redeat locum, à quo dimoveri cæpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam ABC: Erit quoque punctum quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta AD, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur.

DEFINITIO. XVI.

Hoc vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ

TAB. I. sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est
 fig. 7. punctum D.

DEFINITIO. XVII.

Diameter autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam fecat.

TAB. I. SI in circulo ducatur recta linea AB, per cen-
 fig. 8. trum C, ita ut extrema ejus A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum usque ad peripheriam utrinque extenditur.

Unde



LIBER PRIMUS. 31

Unde plures assignari poterunt in circulo diametri, unum vero centrum duntaxat.

Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari à diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, utpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, ut propter directum diametri per centrum transitum, utrinque aequales circumferentiae abscindantur.

DEFINITIO. XVIII.

Semicirculus vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

Exempli gratia, in circulo figura *ADB*, contenta sub diametro *AB*, & peripheria *ADB*, fig. 2. dicitur semicirculus; eadem ratione erit figura *AEB*, semicirculus. TAB. II

DEFINITIO. XIX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

Omnes igitur figura plana, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur.

DEFINITIO. XX.

Trilateræ quidem, quæ sub tribus.

Affirmans Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur.

D E-

DEFINITIO. XXI.

Quadrilateræ quidem, quæ sub quatuor.

DEFINITIO. XXII.

Multilateræ autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QUoniam species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras.

DEFINITIO. XXIII.

Trilaterarum autem figurarum, Æquilaterum est Triangulum, quod tria latera habet æqualia.

TAB. I. **Q**Uando omnia tria latera inter se æqualia sunt, ut AB , BC , CA , dicitur triangulum Æquilaterum.

DEFINITIO. XXIV.

Isofceles autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

TAB. I. **U**Ti, si duo latera AB & AC . tantum inter se sint æqualia, vel DE & DF , dicetur utrumque triangulum Isofceles.

DEFINITIO. XXV.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia
habet latera.

Quando omnia tria latera inter se sunt inæqualia; TAB. I.
ut AB , BC , & CA , dicitur triangulum *fig. 12.*
scalenum.

DEFINITIO. XXVI.

Ad hæc etiam, trilaterarum figurarum,
Rectangulum quidem triangulum est, quod
rectum angulum habet.

Quando triangulum aliquod habet angulum unum
rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geo-
metris Rectangulum. Ut, si triangulum ABC , TAB. I.
unum angulum habeat ad B rectum, dicetur illud *fig. 13.*
triangulum rectangulum.

DEFINITIO. XXVII.

Amblygonium autem, quod obtusum
angulum habet.

Triangulum Amblygonium, sive obtusangulum
est, quod unum habet angulum recto majorem.
Ut si in triangulo ABC , angulus ad B recto major TAB. I.
existat, vocetur triangulum amblygonium. *fig. 14.*

DEFINITIO. XXVIII.

Oxygonium vero, quod tres habet
acutos angulos.

IN omni porro triangulo, cujus duo quacunque
latera expresse nominantur, solet reliquum latus
tertium à Mathematicis appellari Basis, sive illud
in situ infimum occupet locum, sive supremum.

DEFINITIO. XXIX.

Quadrilaterarum autem figurarum, Quadra-
tum quidem est, quod & æquilaterum, &
rectangulum est.

Figura quadrilatera dicitur Quadratum, cujus
quidem omnia quatuor latera inter se equalia
existunt, omnesque anguli recti. Uti si in figura
TAB. II. quadrilatera ABCD, omnia, quatuor latera, AB,
fig. 1. BC, CD, & DA, sint inter se equalia, & om-
nes anguli recti, erit illa Quadratum.

DEFINITIO. XXX.

Altera vero parte longior figura est, quæ
rectangula quidem, at æquilatera non est.

Figura quadrilatera appellatur Altera parte lon-
gior, in qua quidem anguli sunt recti, at
latera non sunt inter se equalia, quamvis bina oppo-
sita inter se equalia existant. Ut, si in figura
TAB. II. ABCD, latera AB, DC, inter se, & AD,
fig. 2. BC, inter se quæque equalia sint.

DEFINITIO. XXXI.

Rhombus autem, quæ æquilatera, sed
rectangula non est.

Figura inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diversas à conditionibus figura altera parte longioris. Habet enim omnia latera AB , BC , CD , & DA , TAB. II. equalia, angulos vero non rectos, & inæquales, fig. 3. quamvis bini oppositi A & C , B & D inter se æquales existant.

DEFINITIO. XXXII.

Rhomboides vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.

Est hac figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neque ejus latera omnia equalia sunt, neque ullus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt AB , DC , & AD , BC , in Rhomboide $ABCD$, TAB. II. equalia inter se, item anguli bini oppositi, quales fig. 4. sunt A , C , & B , D , inter se existunt æquales.

DEFINITIO. XXXIII.

Præter has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, Trapezia appellantur.

Reliquas omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita ut neque latera omnia equalia, neque omnes angulos æquales, sen

16 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

seu rectos, neque latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter sese aequales, qualis est

TAB. II. figura *ABCD*, generali vocabulo Trapezia nominat:
Fig. 5. quæ quidem infinitis modis variari queant.

DEFINITIO. XXXIV.

. Parallelae rectae lineae sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

UT dua, vel plures rectae lineae dicantur parallelae, siue aequidistantes, non satis est, ut in quacunque partem, etiam spatio infinito, productae nunquam ad unum punctum coeant; sed necesse quoque est, ut in una plana superficie existant. Multae siquidem lineae rectae non existentes in eadem superficie plana productae ad spatium infinitum, nunquam in unum conveniunt, & tamen non sunt parallelae dicendae; quales sunt, exempli gratia, dua rectae lineae in transversum posita in medio aere, & non se tangentes; haec etenim nunquam coire possunt.

Dicuntur autem dua lineae in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana uni earum accommodata, ita ut omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumvoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia ejus puncta, quamvis re ipsa in duabus superficiebus diversis reperiantur; **TAB. II.** Ut propositis duabus rectis lineis *AB*, *CD*, si superficies aliqua plana rectae *AB*, applicetur, omnia ejus tangens puncta, ita ut circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectae *CD*; dicuntur hujusmodi rectae dua lineae in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur haec dua rectae lineae eadem non
Fig. 6. coeant,

coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes *A*, *C*, quam ad, *B*, *D*, appellabuntur parallela, siue aequidistantes.

Quod si dua recta linea per immensum aliquod spatium extensa non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex una parte longius protractas in unum punctum conuenturas, quamvis ex altera semper magis ac magis inter se dissent, ac disjungantur, nequaquam appellanda erunt parallela.

Hic finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fit figura, qua Parallelogrammum, nec non earum, qua complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duobus definitionibus adjunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & qua sint parallelogrammi complementa, ut facilius demonstrationes percipiantur.

DEFINITIO. XXXV.

[Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela, seu aequidistantia.]

UT figura quadrilatera *ABCD*; siquidem latus *AB*, aequidistet lateri *DC*, & latus *AD*, lateri *BC*, nuncupatur Parallelogrammum. TAB. II.
fig. 4.

DEFINITIO. XXXVI.

[Cum vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; ap-
pellan-

18 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

pellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.]

TAB. II.
fig. 7. **S**it parallelogrammum $ABCD$, in quo diameter AC , & linea EF , secans diametrum in G , & parallela existens lateribus AD , BC . Item linea HI , secans diametrum in eodem puncto G , parallelaque lateribus AB , DC , existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum divisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo $EBIG$, $GFDH$, per quæ diameter AC , non transit, vocantur à Geometris complementa, sive supplementa reliquorum duorum $AEGH$, $GICF$, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, ut videre est in presenti figura.

PETITIO VEL POSTULATUM. I.

Postuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

TAB. II.
fig. 8. **P**rimum hoc postulatam planum admodum est, si recte considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit, ut si punctum quodpiam ad aliud directo moveri intellexerimus, ducta sane sit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A , ductam esse rectam lineam ad punctum B ; ab eodemque aliam ad punctum C ; Item aliam ad punctum D ; & sic innumera alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.

PE-

PETITIO VEL POSTULATUM. II.

Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

Quod si punctum illud ferri adhuc cogitaverimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis hujus productionis, cum punctum illud intelligere possimus moveri ad infinitam distantiam. Sic linea recta *AB*, producta est primo in continuum ad punctum *C*. Deinde ad punctum *D*, &c. TAB. II.
fig. 9.

PETITIO VEL POSTULATUM. III.

Item quovis centro, & intervallo
circulum describere.

Jam vero, si terminatam rectam lineam cujuscunque quantitatis, mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremum ad quodvis punctum, ipsamque circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum revertatur locus, à quo dimoveri coepit; descriptus erit circulus, effectumque, quod tertia petitio jubet. Exemplum habes in his quinque lineis *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, quae singula circa centrum *A*, circumvolutae, singulos circulos descripserunt juxta quantitatem, seu intervallum ipsarum. TAB. II.
fig. 10.

Præter hac tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia aequae facilia, & quibus dumtaxat in medium proferre decrevi illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriae.

PETITIO VEL POSTULATUM. IV.

[Item quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel majorem, vel minorem.]

Omnis enim quantitas continua per additionem augeri, per divisionem vero diminui potest infinite: Unde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea major dari possit: neque tam parva, quin minor ea possit exhiberi.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

[Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus quoque est, aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.]

Fieri nulla ratione potest, ut dua quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum proposita quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario major illarum. Et si major æqualis fuerit proposita quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse.

AXIO-

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. II.

Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.

Si enim quantitates conflata, sive composita, inæquales forent, proculdubio majori plus esset adjectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitarum ad quantitates æquales, conficiuntur quantitates quoque æquales.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. III.

Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

Nam si reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quam à majore.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. IV.

Et si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia.

[Et, si inæqualibus inæqualia adjecta sint, majori majus, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.]

Quin & si æqualibus inæqualia adjecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam major quantitas addita uni æqualium, majorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adjecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adjiciantur, composita quantitas ex majore, major est, quam composita ex minore.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. V.

Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

[Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.]

Sic etiam, si ab equalibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia major quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum majoris majus est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus.

In his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine equalium quantitatum intelligenda est etiam una & eadem multis communis. Si enim equalibus idem commune adjiciatur, tota fient equalia: Et si ab equalibus idem commune detrahatur, residua equalia erunt: Et si inæqualibus idem commune adjiciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VI.

Et 'quæ ejusdem duplicia' sunt, inter se sunt æqualia.

[Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.]

Similiter, quæ ejusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter se sunt equalia. Si enim inæqualia forent, & majus eorum
esset

esses duplex, vel triplex, &c. alicujus quantitatis; deficeret utique minus à duplici, vel triplisi. &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cujuscumque, excederet sane majus duplex ipsum; vel triplex, &c.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VII.

Et quæ ejusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.

[Et contra, Quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia.]

Pari ratione, quæ ejusdem sunt partes tertia, vel quarta, vel quinta, &c. inter se æqualia sunt.

In his duobus pronunciatis per eandem quantitatem; intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

Hoc est, quæ duæ quantitates, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit, sed amba inter se congruunt, æquales erunt. Ut duæ lineæ rectæ dicuntur esse æquales, quando una alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita ut eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando uno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit,

nec ab eo exceditur, sed linea illius cum lineis hujus prorsus coincidunt: Ita enimerunt inclinationes linearum aequales, quamvis linea interdum inter se inaequales existant.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. IX.

Et totum sua parte majus est.

Cum pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte majus.

In sequentibus porro pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. X.

[Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem segmentum commune.]

Non est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producat, fieri nullaratione potest, ut duæ lineæ rectæ habeant unam partem, quamvis minimam, communem, præter unicum punctum, in quo se mutuo interfecant.

Possunt tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando unam & eandem rectam lineam

TAB. II. fig. 9. constituunt. Ut in hac figura, rectæ AC, BD, commune habent segmentum BC, quia amba unam rectam constituunt lineam AD. At vero quando

TAB. II. fig. 11. duæ rectæ sunt diversæ, quales sunt AB, CD, non possunt possidere segmentum aliquod commune.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XI.

[Duæ rectæ in uno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto interfecabunt.]

Hoc etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XII. 2

Item, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

Hoc axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulorum rectum constituentium augeri, minui nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à lineâ perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, ut faciat utrobique angulos æquales, neque magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamvis lineæ sint inæquales interdum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIII. 21

Et si in duas rectas lineas altera recta incidens, interpos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

UT si in duas lineas rectas AB, CD, incidat TAB. II. alia recta EF, faciat duos angulos internos, C fig. 12.

~~6~~ EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conventuras esse ad aliquod punctum unum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, ut appositum exemplum commonstrat. Ratio hujus perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte aequales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed aequali semper spatium protenduntur, ut in propos. 28. hujus lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoque eas conventuras tandem esse aliquando in unum punctum.

XII. AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIV.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Nullam prorsus habet difficultatem hoc principium.

TAB. II.
fig. 13.

Si enim duæ rectæ lineæ AB, & CR, ex una parte B, coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte A, & C, semper magis ac magis disjungentur, si producantur, ut in exemplo proposito perspicuum est. Quare ut superficies, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quadam adjungenda est.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XV.

[Si æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum excessus, adjunctorum excessui æqualis.]

Hoc, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. *Æqualibus itaque quantitatibus,*
AB,

AB, CD, addantur inæquales BE, DF, sitque TAB. II.
BE, major quam DF. Et ex BE, auferatur BG, fig. 14.
æqualis ipsi DF, ut sit GE, excessus, quo quantitas
addita BE, superat quantitatem additum DF.
Quoniam igitur æqualibus AB, CD, addita sunt
æqualia BG, DF, æ erunt tota AG, CF, æqualia. a 2. pron.
Quare constat, totam quantitatem AE, superare
totam CF, eodem excessu GE, quo magnitudo DF,
adjuncta, à magnitudine adjuncta BE, superatur.
Quod est propositum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVI.

[Si inæqualibus æqualia adjungantur, erit
totorum excessus, excessui eorum, quo à
principio erant, æqualis.]

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, TAB. II.
DF, addantur æquales AB, CD. Et ex fig. 14.
jore BE, auferatur BG, æqualis ipsi DF, ut GE,
sit excessus; quo quantitas BE, quantitatem DF,
superat. Quoniam igitur æqualibus BG, DF, ad-
dita sunt æqualia AB, CD, æ erunt tota AG, CF, a 2. pron.
æqualia. Quamobrem tota quantitas AE, superabit
totam CF; eodem excessu GE, quo major quantitas
proposita BE, minorem DF, superat. Quod est
propositum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVII.

[Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit
residuum excessus, excessui ablatorum æ-
qualis.]

AB æqualibus AB, CD, auferantur inæqualia TAB. II.
BE, DF. Sitque EG, excessus, quo quanti- fig. 15,
tas BE, superat quantitatem DF; ita ut BG,
æqualis sit ipsi DF. Quia igitur ab æqualibus AB,
CD, ablata sunt æqualia BG, DF, b remanebunt b 3. pron.
AG,

28 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

AG, CF, æqualia. Perspicuum ergo est, residuum AE, superari à residuo CF, eodem excessu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, superat. Quod est propositum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVIII.

[Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.]

TAB. II. **FIG. 16,** **A**^B inæqualibus *AB, CD, auferantur æqualia AE, CF. Sitque BG, excessus, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD, ita ut AG, æqualis sit ipsi CD. Quoniam igitur ab æqualibus AG, CD, ablata sunt æqualia AE, CF, c remanebunt EG, FD, æqualia. Quare residuum EB, superabit residuum FD, eodem excessu BG, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD. Quod est propositum.*

In his quoque quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est una etiam sola quantitas multis communis.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIX.

[Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.]

Q*uoniam omnes partes simul sumptae constituunt totum, cujus sunt partes, manifesta est veritas hujus axiomatis.*

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XX.

[Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.]

U*T quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablati ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus est etiam reliqui hujus 7.*

P R O.



PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

Super data recta linea terminata triangulum
æquilaterum constituere.



It igitur proposita recta linea terminata *TAB. III.*
AB, super quam constituere jubemur *fig. 1.*
triangulum æquilaterum. Centro A,
& intervallo rectae AB, *a. 3. pr.* describatur
circulus CBD: Item centro B, & in-
tervallo ejusdem rectae BA, alius circulus descri-
batur CAD, secans priorem in punctis C, & D.
Ex quorum utrovis, nempe ex C, *a. 1. pr.* ducantur
duae rectae lineae CA, CB, ad puncta A. & B;
Eritque super rectam AB, constitutum triangulum
ABC, hoc est, figura rectilinea contenta tribus
rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita con-
structum necessario esse æquilaterum. Quoniam
rectae AB, AC, ducuntur ex centro A, ad cir-
cumferentiam circuli CBD, *b. 15. def.* erit recta AC, rectae
AB, æqualis: Rursus, quia rectae BC, BA, du-
cuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli
CAD, erit recta BC, rectae BA, æqualis. Tam
igitur AC, quam BC, æqualis est rectae AB, *c. 1. pr.*
Quare & AC, BC, inter se æquales erunt, atque
idcirco triangulum ABC, erit æquilaterum. Super
data ergo recta linea terminata, &c. Quod fa-
ciendum erat.

PRO-

30 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

PROBLEMA 2. PROPOSITIO. 2.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

TAB. III. Sit punctum datum A, & data recta linea BC, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ BC, nempe C, centro, a describatur circulus BE, intervallo rectæ BC. Et ex A, ad centrum C, b recta ducatur AC; (nisi punctum A, intra rectam BC, fuerit: ut in figura 3. Tunc enim pro linea ducta sumetur AC,) Super recta vero AC, c construatur triangulum æquilaterum ACD, sursum, aut deorsum versus, ut libuerit; cuius duo latera modo constituta DA, DC, versus rectam AC, d extendantur; DC, quidem oppositum puncto dato A, usque ad circumferentiam in E; DA, vero oppositum centro C, quantum libet in F. Deinde centro D, intervallo vero rectæ DE, per C, centrum transeuntis, e alter circulus describatur EG, secans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ BC. Quoniam DE, DG, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam EG, f ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur DA, DC, æqualibus lateribus trianguli æquilateri ACD, g remanebit AG, æqualis rectæ CE. Sed eidem CE, a æqualis est recta BC. (cum ambæ rectæ CB, CE, cadent ex centro C, ad circumferentiam BE.) Igitur rectæ AG, BC, quandoquidem utraque æqualis est ostensa rectæ CE, inter se b æquales erunt. •Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

fig. 2. 3. **a 3. pet.** **b 1. pet.** **c 1. primi.** **d 2. pet.** **e 3. pet.** **f 15. def.** **g 3. pron.** **a 15. def.** **b 1. pron.**

Quod si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absolvetur problema. Si enim centro C, & intervallo CB, c describatur circulus, ad cuius circumferentiam d 1. petit. recta d ducatur utcumque; CE, erit hæc posita e 15. def. ad punctum datum C, æqualis datæ rectæ BC, cum utraque & BC, & CE, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam BE.

PRO-

PROBL. 3. PROPOS. 3.

iii.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de majore æqualem minori rectam lineam detrachere.

Sint duæ rectæ inæquales A , minor, & BC , *TAB. III.*
 major, oporteatque ex majore BC , detrachere *fig. 4.*
 lineam æqualem minori A . Ad alterutrum extre-
 morum lineæ majoris BC , nempe ad punctum *a a. primi.*
 B , *c* ponatur aliqua linea, quæ sit BD , æqualis
 minori A . Deinde centro B , intervallo autem
 BD , circulus *b* describatur secans BC , in E . *b 3. per.*
 Dico BE , detractam esse æqualem ipsi A . Quo-
 niam BE , *c* æqualis est rectæ BD , & eidem, *c 15. def.*
 BD , æqualis est recta A , per constructionem;
d erunt A , & BE , inter se æquales. Duabus *d 1. prin.*
 igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

Quod si duæ rectæ datæ conjungantur in uno extremo, quales sunt BD , & BC , conjunctæ in extremo utriusque B ; describendus erit circulus ex B , ad intervallum minoris BD . Hic enim auferet BE , æqualem ipsi BD , ut constet ex definitione circuli.

THEOREMA I. PROPOS. 4.

iii.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC , DEF , & unius utrum- *TAB. III.*
 que latus AB , AC , æquale sit alterius utrique *fig. 1.*
 lateri

32. EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & utrumque angulum B, & C, utrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta AB, rectæ DE, ponitur æqualis, fit, ut si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, *a* ipsæ sibi mutuo congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, *b* quod est impossibile. Quod si quis dicat, posito puncto, A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, claudent duæ rectæ lineæ superficiem. *c* quod fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, ut dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, *d* congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, ut efficeretur recta EGF, EHF, clauderent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quam EHF, rectam esse, cum utraque ponatur esse eadem, quæ recta BC.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem *e* claudere non possunt. Quocirca *f* basis BC, basi EF, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis ob eandem causam, exister. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 5. 4

Isoſcelium triangulorum , qui ad baſim ſunt , anguli inter ſe ſunt æquales : Et productis æqualibus rectis lineis , qui ſub baſi ſunt , anguli inter ſe æquales erunt.

ſit triangulum Iſoſceles ABC , in quo latera, *TAB. III. fig. 6.*
 AB, AC , inter ſe ſint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, ſupra baſim BC , æquales inter ſe eſſe : Item ſi latera æqualia AB, AC , producantur quantum libuerit , uſque ad puncta D , & E , angulos quoque DBC , ECB , infra baſim eandem BC , eſſe æquales. Ex linea enim AE , producta infinite a abſcindatur AF , æqualis ipſi *a 3. prim.*
 AD , & ducantur rectæ BF , CD. Conſiderentur deinde duo triangula ABF , ACD. Quia *b 1. poſi.*
 ergo duo latera AB , AF , trianguli ABF , æqualia ſunt duobus lateribus AC , AD , trianguli ACD , utrinque utrique , nempe AB , ipſi AC , ex hypotheſi , & AF , ipſi AD , ex conſtructione ; angulusque A , contentus lateribus AB , AF , æqualis eſt angulo A , contento lateribus AC , AD , immo angulus A , communis eſt utrique triangulo : *c 4. prim.*
 Erit baſis BF , æqualis baſi CD , & angulus F , angulo D , & angulus ABF , angulo , ACD ; cum & priores duo , & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis , ut patet : Rurſus conſiderentur duo triangula BDC , CFB. Quoniam vero rectæ AD , AF , æquales ſunt , per conſtructionem , ſit ut , ſi auferantur ex ipſis æquales AB , AC , *d 3. prim.*
 & reliquæ BD , & CF , ſint æquales. Quare duo latera BD , DC , trianguli BDC , æqualia ſunt duobus lateribus CF , FB , trianguli CFB , utrumque utrique , videlicet BD , ipſi CF , & DC , ipſi FB , ut probatum eſt : Sunt autem & anguli D , & F , contenti dictis lateribus æqualibus æquales , ut oſtenſum etiam fuit. *e* Igitur : erit angulus *C*
 DBC ,

e 4. primi. $\angle$ DBC, angulo FCB, æqualis; & angulus BCD, angulo CBF. Tam enim priores duo, quam posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntque supra communem basim BC, utriusque trianguli BDC, CFB. Quod si ex totis angulis æqualibus ABF, ACD, (quos æquales esse jam demonstravimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBF, BCD, (quos itidem in posterioribus triangulis modo probavimus esse æquales) remanebunt anguli ABC, ACB, supra basim BC, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos DBC, FCB, qui quidem sunt infra eandem basim BC, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt æquales; ac propterea Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hac propositione quæta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque. Hoc est, tres angulos cujuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum ABC. Quoniam *TAB. III. fig. 7.* igitur duo latera AB, AC, sunt æqualia, æ erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera AB, BC, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.

vi. THEOR. 3. PROPOS. 6.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtenfa latera æqualia inter se erunt.

TAB. III. fig. 8. IN triangulo ABC, sint duo anguli ABC, ACB, super latus BC, æquales. Dico duo latera illis opposita AB, AC, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilo minus angulis dictis æqualibus, erit alterum majus

angu.
uo, qu
bus, e
utriuq
is angu
esse p
detraha
icidem
mus &
CB, sup
n in po
CB, qu
ie aequ
, & an
propterea
sunt au-

jus altero; sit igitur AB, majus quam AC, si
fieri potest: Et ex AB, *b* abscindatur in D, recta *b* 3. *primi*
BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur esse
quam AB,) ducaturque recta CD. Considerentur
jam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum
duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia sint
duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, utrum-
que utrique, nempe AC, ipsi DB, (abscidimus
enim ex AB, ipsi AC, concessu adversarij, æqua-
lem DB,) & CB, ipsi BC, cum sit unum & idem;
Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis
lateribus æquales, per hypothesin: *c* Erunt trian- *c* 4. *primi*.
gula ACB, DBC, æqualia, totum & pars, quod
fieri non potest *d*. Non igitur erunt latera AB, *d* 9. *primi*.
AC, inæqualia, si anguli B, & C, super latus
BC, æquales sunt, ne totum parti æquale esse
concedamus: sed æqualia existent. Quare si tri-
anguli, duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hac propositione, omne triangulum æqui-
angulum, id est, cujus omnes anguli sunt æquales, esse
æquilaterum. Quod quidem conversum est corollarii
quintæ propositionis, ut liquet. Sint enim trianguli *TAB III.*
ABC, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. *FE. 7.*
Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, *a* erunt *a* 6. *primi*.
latera AB, AC, æqualia. Rursus cum duo anguli A,
& B, sint æquales, erunt quoque latera AC, BC, æqua-
lia, & idcirco omnia tria latera AB, EC, AC, æqualia.
Quod ostendendum erat.

6.

inter se
substantia

THEOR. 4. PROPOS. 7.

vii.

ACB,
latera
tia. Si
nihil
n ma-
jus

Super eadem recta linea, duabus eisdem
rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales,
utraq; utrique, non constituentur, ad aliud
atque aliud punctum: ad easdem partes, eos-
demque terminos cum duabus initio ductis rectis
lineis habentes.

Super recta AB, constituentur ad punctum *TAB III.*
quodvis C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico *fig. 9. 10.*
C 2 super *11. 12. 13.*

super eandem rectam AB, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, ut ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis AC, BC, utraque utrique, nempe AC, ipsi AD, quæ eundem habent terminem A; & BC, ipsi BD, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ AC, AD, inter se, & rectæ BC, BD, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita ut recta AD, in ipsam rectam AC, vel, BD, in ipsam BC, cadat; aut intra triangulum

*TAB. III.
fig. 9.*

f. 9. prem.

*TAB. III.
fig. 10.*

a. 5. primi.

b. 9. prem.

c. 5. primi.

ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, ut AD, sit pars ipsius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. *f.* Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC; & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, utque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia, *a* erunt anguli ACD, ADC, super basim CD, æquales; *b* Est autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipsius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rursus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, *c* erunt anguli CDF, DCE, sub basi CD, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo sit minor angulo DCE. Idem ergo Angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum ABC.

*TAB. III.
fig. 11.* Aut igitur in tali erit loco, ut una linea super alteram cadat, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur

*TAB. III.
fig. 12.* pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, ut posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minore

rem

rem esse angulo CDE, & eidem æqualem, ut
perspicuum est. Aut denique punctum D, ita TAB. III.
erit extra triangulum ABC, ut altera linearum fig. 13.
posteriorum, nempe AD, secet alteram priorum,
ut ipsam BC. Ducta igitur recta CD, cum in
triangulo ACD, latera AC, AD, ponantur æ-
qualia, & erunt anguli ACD, ADC, supra basim d 5. primi.
CD, æquales: Ac proinde & cum angulus ADC, e 9. primi.
minor sit angulo BDC, pars toto, erit & angu-
lus ACD, minor eodem angulo BDC. Quare
multo minor erit angulus BCD, pars anguli
ACD, angulo eodem BDC. Rursus cum in
triangulo BCD, latera BC, BD, ponantur æqua-
lia, & erunt anguli BCD, BDC, super basim CD, a 5. primi
æquales: Est autem jam ostentum, angulum
BCD, multo esse minorem angulo BDC. Idem
igitur angulus BCD, & minor est angulo BDC,
& eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo
æquales sunt inter se AC, AD, nec inter se quoque
BC, BD. Quare super eadem recta linea, duabus
eisdem rectis lineis. &c. Quod erat demonstran-
dum.

THEOR. 5. PROPOS. 8. viii.

Si duo triangula duo latera habuerint duo-
bus lateribus, utrumque utrique, æqualia, ha-
buerint vero & batur basi æqualem: Angu-
lum quoque sub æqualibus rectis lineis con-
tentum angulo æqualem habebunt.

Sint duo latera AB, AC, trianguli ABC, duo- TAB III.
bus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqua- fig. 14.
lia, utrumque utrique, nempe AB, ipsi DE, &
AC, ipsi DF; sit autem & basis BC, basi EF,
æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo
D, quorum videlicet uterque dictis lateribus
continetur. Nam si mente intelligatur basis BC,
superponi basi EF, & neutra excedet alteram, sed a 8. primi.
punctum B, congruat puncto E, & punctum C,
C 3 puncto

puncto F, cum hæc bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum ABC, cogitetur cadere super triangulum DEF, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadet, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea *a* angulus A, æqualis erit Angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, ut ad G, quomocumque id contingat, hoc est, sive in latus ED, sive intra triangulum EDF, sive extra, ut in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem est, quæ BA,) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA,) æqualis ipsi FD, propterea quod latera unius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, jam dudum *b* demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, terminum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

Si duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, utrumque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrumque utrique; quæ videlicet æqualibus angulis subtienduntur, angulosque reliquos hæc lateribus inclusos æquales.

TAB. III. *Sit enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusque C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumque A, angulo D. Nam*
a 8. *proponitur. si basis basi superponatur, æ congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium.*
Quare

Quare omnia sibi congruent, propterea que omnia inter sese equalia erunt.

COROLLARIUM.

Porro ex antecedente hujus octavæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, utrumque utrique, ut angulum B, angulo *TAB. III.* E, & angulum C, angulo F, immo totum triangulum *fig. 14.* toti triangulo, ut constat ex eadem superpositione unius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & cuncti anguli, & tota triangula, ut perspicuum est.

PROBL. 4. PROPOS. 9. ix.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit dividendus rectilineus angulus BAC, bifariam, *TAB. III.* hoc est, in duos angulos æquales. In recta *fig. 17.* AB, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, a secetur ex AC, recta AE, æqualis, du- *a 3. primi.* caturque recta DE. Deinde super DE, b consti- *b 1. primi.* tuatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, dividens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, utrumque utrique, quod DA, ipsi EA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, constructum est æquilaterum: c Erit angulus DAF, angulo *c 8. primi.* EAF, æqualis, idèoque angulus BAC, divisus bifariam, quod erat faciendum.

PROBL. 5. PROPOS. 10.

Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

TAB. IV. **S**it recta finita AB, dividenda bifariam, id est
fig. 1. in duas partes æquales. *a* Describatur super
a 1. primi. AB, triangulum æquilaterum ABC, cujus angu-
b 9. primi. lus C, per rectam CD, *b* dividatur bifariam,
 rectaque CD, rectam AB, secet in D. Dico
 rectam AB, bifariam esse divisam in D. Quoniam
 duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia
 sunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD,
 utrumque utrique, nempe AC, ipsi BC, cum sint
 ambo latera trianguli æquilateri, & CD, est com-
 mune; Est autem & angulus ACD, angulo
c 4. primi. BCD, æqualis, per constructionem: *c* Erit basis
 AD, basi BD, æqualis. Datam ergo rectam
 AB, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat. •

PROBL. 6. PROPOS. 11.

Data recta linea, à puncto in ea dato,
 rectam lineam ad angulos rectos excitare.

TAB. IV. **R**ecta linea data sit AB; & in ea punctum C,
fig. 2. à quo jubemur erigere super AB, lineam ad
 Angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto
a 3. primi. C, sumatur recta CD, *a* cui æqualis auferatur
b 1. primi. CE. Deinde super DE, *b* constituatur triangulum
 æquilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducatur
 recta FC, quam dico esse perpendicularem ad
 AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF,
 æqualia sunt lateribus EC, CF, trianguli ECF,
 utrumque utrique, nempe DC, ipsi EC, per con-
 structionem, & CF, commune; Est vero & ba-
 sis DF, basi EF, æqualis, ob triangulum æqui-
c 8. primi. laterum: *c* Erunt anguli ad C, contenti dictis
d 10. def. lateribus, æquales. *d* Quare dicetur uterque
 rectus,

rectus, atque adeo FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Si recta AB, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam AB. Centro C, intervallo vero quolibet circulus describatur secans AB, in D, & E, (quoniam intervallum assumptum tantum esse debet, ut transcendat rectam AB; alias eam non secaret.) Divisa autem recta DE, bisariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem esse ad AB. Si enim ducantur CD, CE, erunt duo latera DF, FC, trianguli DFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC, utrumque utrique, per constructionem; est autem & basis CD, basi CE, æqualis, cum hæ sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare erit angulus DFC, angulo EFC, æqualis, & propterea uterque rectus: Ducta est igitur CF, perpendicularis, quod faciendum erat.

TAB. IV.
fig. 3.

3. p. 10.

10. prim.

15. def.

8. prim.

10. def.

THEOR. 6. PROPOS. 13. xij.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

Recta linea AB, consistens super rectam DC, faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur AB, fuerit perpendicularis ad CD, erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet unum quidem angulum obtusum, & alterum acutum.

TAB. IV.
fig. 4.

10. def.

C

sum,

42. EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

sum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos
d 11. primi duobus esse rectis æquales. *d* Educatur enim BE,
 ex B, perpendicularis ad CD, ut sint duo anguli
 EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus
e 19. prop. EBD, *e* æqualis est duobus DBA, ABE; ferunt,
f 2. prop. appposito communi angulo recto EBC, duo recti
 EBD, EBC; tribus angulis DBA, ABE, EBC,
g 19. prop. æquales. Rursus quia *g* angulus ABC, duobus
a 2. prop. angulis ABE, EBC, æqualis est; *a* erunt, appo-
 sito communi angulo ABD, duo anguli ABC,
 ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æqua-
 les. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales
 etiam esse duos rectos EBD, EBC; quæ autem
b 1. prop. eidem æqualia, *b* inter se sunt æqualia. Duo
 igitur anguli ABC, ABD, æquales sunt duobus
 rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea supra
 rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere
 oportebat.

xiv. THEOR. 7. PROPOS. 14.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad
 ejus punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaf-
 dem partes ductæ eos, qui sunt deinceps,
 angulos duobus rectis æquales fecerint; in
 directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

TAB. IV.
 fig. 5.

AD punctum C, lineæ rectæ AB, in diversas
 partes eductæ sint duæ rectæ CD, CE, fa-
 cientes cum AB; duos angulos ACD, ACE,
 vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ip-
 sas CD, CE, inter se esse constitutas in di-
 rectum, ita ut DCE, sit una linea recta. Si enim
 non est recta DCE; producta DC, ad partes C,
 in directum, & continuum, cadet aut supra CE,
 ut sit recta DCF, aut infra CE, ut sit recta
 DCG. Si cadit supra, cum AC, consistat super
a 12. primi rectam DCF, *a* fient duo anguli ACD, ACF,
 duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo
b 12. prop. anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; *b* &
 omnes

omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli ACD , ACF , duobus angulis ACD , ACE , erunt æquales, ablato igitur communi angulo ACD , c remanebunt anguli ACF , ACE , inter se æquales, pars & totum, d quod est absurdum. c 3. *prop.* d 9. *prop.*
 Non igitur recta DC , producta cadet supra CE ; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE , ACG , æquales. Igitur DC , producta eadem efficietur, quæ CE ; proptereaque, si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

xv.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficiunt.

SEcent se duæ rectæ AB , CD , in puncto E , *TAB. IV.*
 utcunque. Dico angulos, quos faciunt ad *fig. 6.*
 verticem E , inter se esse æquales, angulum videlicet AED , angulo BEC , & angulum AEC , angulo BED . Quoniam recta DE , consistit super rectam AB , b erunt duo anguli AED , DEB , *b* 13. *prop.*
 æquales duobus rectis. Rursus quia recta BE , super rectam CD , consistit, erunt eadem ratione duo anguli CEB , BED , duobus rectis æquales. Cum igitur c omnes recti anguli inter se sint *c* 12. *prop.*
 æquales; erunt duo anguli AED , DEB , duobus angulis DEB , BEC , æquales. Dempto igitur communi angulo DEB , d remanebit angulus *d* 3. *prop.*
 AED , angulo BEC , æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC , BED , inter se æquales esse. Nam duo anguli AEC , CEB , *e* qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt *e* 13. *prop.*
 duobus quoque angulis DEB , BEC , qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC , f remanebunt anguli AEC , BED , æqua- *f* 3. *prop.*
 les inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

44 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

COROLLARIUM I.

Euclides colligit ex demonstratione huius theorematís, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas líneas rectas se mutuo secantes, efficere ad punctum sectionis quatuor angulos, quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent his duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIUM II.

Eadem ratione colligemus, omnes angulos circa unum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, alie linee quotlibet educantur, dividuntur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti, in plurimas partes, & quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alii simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumstans, æquivalere quatuor rectis angulis, ut multi auctores allerunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet líneas rectas se invicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX PROCLO.

Si ad aliquam rectam lineam, ad ejusque finem, dua recta linea non ad easdem partes sumpta, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsa recta linea in directum sibi invicem erunt.

TAB. IV. Ex puncto E, recta AB, in diversa partes ex-
 st. 6. ducantur dua recta ED, EC, facientes angulos
 AED,

*AED, BEC, inter se aequales: Vel etiam duae
AEC, BED. Dico duae EC, ED, efficere unam
lineam rectam. Quoniam enim angulus AED,
aequalis est angulo BEC; addito communi angulo
BED, b erunt duo anguli AED, DEB, duobus b 2. prim.
angulis CEB, BED, aequales: Sed c anguli AED, c 13. prim.
DEB, sunt aequales duobus rectis. Igitur & duo
CEB, BED, duobus erunt rectis aequales. Quamo-
brem EC, ED, a erunt linea una recta. Hoc a 14. prim.
autem, ut vides, conversum est propositionis decima-
quinta.*

THEOR. 9. PROPOS. 16. xvj.

Cujuscunque trianguli uno latere producto,
externus angulus utrolibet interno, & oppo-
sito, major est.

Trianguli ABC, latus BA, producat ad D. *TAB. IV.*
Dico angulum externum DAC, a majorem *fig. 7.*
esse interno, & opposito ACB, itemque majorem
interno, & opposito ABC. Dividatur e enim a 10. prim.
AC, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur
recta BEF, ita ut EF, b abscissa sit aequalis rectae b 3. prim.
EB; ducaturque recta FA. Quoniam igitur la-
tera CE, EB, trianguli CEB, aequalia sunt late-
ribus AE, EF, trianguli AEF, utrumque utri-
que, per constructionem; Sunt autem & Anguli
ad E, dictis lateribus comprehensi, c inter se c 15. prim.
aequales, cum sint circa verticem E, & oppositi:
Erit d basis CB, aequalis basi AF, & angulus d 4. prim.
ECB, angulo EAF; Est autem angulus DAC,
externus major angulo EAF, totum videlicet
parte. Igitur & externus angulus DAC, major
erit interno, & opposito angulo ACB. Quod si
latus CA, producat ad G; & AB, dividatur
bifariam in H; extendaturque recta CHI, ut HI,
aequalis sit rectae HC, & ducatur recta IA: de-
monstrabitur eadem prorsus ratione, angulum
externum GAB, majorem esse interno angulo,
& opposito ABC; Est autem e angulus DAC, e 15. prim.
angulo

46. EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

angulo GAB, æqualis, cum lineæ BD, CG, se mutuo secant in A. Igitur & angulus DAC, major erit interno & opposito angulo ABC. Est autem idem angulus DAC, major quoque ostensus angulo interno & opposito ACB. Cujuscunque ergo trianguli uno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.

xvij. THEOR. 10. PROPOS. 17.

Cujuscunque trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

TAB. IV. fig. 8. Sit triangulum ABC; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos CBA, & CAB; Itemque duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quævis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur *d* 16. *primi* angulus ABD, externus major est interno & opposito angulo ACB; si addatur communis *e* 4. *prom.* angulus ABC, *e* erunt duo anguli ABD, ABC, *f* 13. *primi* majores duobus angulis ABC, ACB: *f* Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, *g* major sit angulo CAB, interno, *h* 4. *prom.* & opposito; *h* erunt, apposito communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, majores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo *i* duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alii duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. *m* 16. *primi*. Cum enim angulus externus BAE, *m* major sit interno & opposito angulo BCA; si apponatur *n* 4. *prom.* communis angulus BAC, *n* erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA; BAC, *o* 13. *primi* majores: ac proinde cum illi duo *o* sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cujusque igitur trianguli, &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLLO.

Hinc perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem TAB. IV. rectam lineam non posse deduci plures lineas perpen- fig. 4.
diculares, quam unam. Si enim fieri potest, du-
cantur ex A , ad rectam BC , duæ perpendiculares
 AB , AC . Erunt igitur in triangulo ABC , duo
anguli interni B , & C , duobus rectis aequales,
cum sint duo recti, quod est absurdum. a Sum a 17. primi
enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque
ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures per-
pendiculares, quam una. ex A , ad BC , deduci
possunt. Quod est propositum.

COROLLARIUM. I.

Constat etiam ex his, in omni triangulo, cujus unus
angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos.
Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint
duobus rectis minores, necesse est, si unus fuerit rectus,
vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne
duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis
majores esse fateamur.

COROLLARIUM. II.

Sequitur etiam ex hac propos. si linea recta cum alia
recta angulos inaequales faciat, unum acutum, & obtu-
sum alterum, lineam perpendicularem ex quovis ejus
puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes
acuti anguli: Faciat enim recta AB , cum recta CD . TAB. IV.
angulos inaequales, nempe ABD , acutum, & ABC , fig. 9.
obtusum, amittaturque ex puncto A , quocunque ad
 CD , perpendicularis AD . Dico AD , cadere ad partes
anguli acuti ABD . Nam si non cadit ad partes acuti
anguli ABD , cadat si fieri potest, ad partes anguli
obtusi ABC . Igitur duo anguli ABC , ACB , obtusus &
rectus, in triangulo ABC , majores sunt duobus rectis;
sed & duobus rectis sunt minores; quod est absurdum. b 17. primi
Non ergo ex A , perpendicularis ad CD , deducta cadit
ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli
cadit.

¶ EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

C O R O L L A R I U M. III.

Pari ratione fit ex hac propoſ. manifeſtum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Iſcoſcelis ſupra baſin, eſſe acutos. Nam *c* cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Iſcoſcele ſupra baſin ſint inter ſe æquales; *d* ſintque ſimul tam illi duo, quam hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc eſt, acutus. Si enim rectus foret, aut obtuſus, eſſent ambo vel duobus rectis æquales, aut majores.

xviii. T H E O R. II. P R O P O S. 18.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

TAB. IV. **IN** triangulo ABC, ſit latus AC, majus latere *fig. 10.* AB. Dico angulum ABC, ſubtenſum à majori latere AC, majorem eſſe angulo ACB, qui à minori latere AB, ſubtenditur. Nam ex *a 3. primi* AC, *a* auferatur AD, æqualis ipſi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera *b 5. primi* AB, AD, æqualia ſunt per conſtructionem, *b* erunt anguli ABD, ADB, æquales: Eſt autem *c 16 primi.* c angulus ADB, major angulo ACB. Igitur & angulus ABD, major erit angulo ACB. Quamobrem cum *d 9. primi.* d angulus totus ABC, major adhuc ſit angulo ABD; erit angulus ABC, multo major angulo ACB. Eadem ratione, ſi latus AC, majus ponatur latere BC, oſtendes angulum ABC, majorem eſſe angulo BAC; ſi nimirum ex CA, abſcindatur linea æqualis ipſi CB, &c. Quare omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit. Quod demonſtrandum erat.

C O R O L L A R I U M.

TAB. IV. Ex hoc ſequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni *fig. 11.* eſſe inæquales. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cujus

cujus maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico ejusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur majus latere AB, erit per hanc propof. angulus B, angulo C, major. Eadem ratione major erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, majus ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter utrumque tenens.

THEOR. 12. PROPOS. 19. lib.

Omnis trianguli major angulus majori lateri subtenditur.

IN triangulo ABC, angulus B, major sit angulo TAB. IV.
C. Dico latus AC, subtendens majorem fig. 11.
angulum B, majus esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus AC, majus non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB, & erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem a 5. primi
& major per hypothesin, quod est absurdum. Si vero AC, minus esse dicatur latere AB, & erit d 18. primi
angulus B, subtenfus à minori latere AC, minor angulo C, subtenso à majore latere AB; Ponitur autem major, quod magis est absurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit majus. Eadem ratione probabitur, latus AC, majus esse latere BC, si angulus B, major esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli major angulus majori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hac propof. omnium rectarum ex quovis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quocunque linea AD, AE, AF, & alix, quarum AD, sola sit perpendicularis ad TAB. IV.
fig. 12.
BC,

EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola una perpendicularis duci possit, ut ex Proclo ad propof. 17. demonstravimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli *b* 17. *primi* ADE, AED, *b* sint duobus rectis minores, ponaturque *c* 19. *primi* ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare majus erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas majores esse recta AD, ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

THEOR. 13. PROPOS. 20.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, quomodocunque assumpta.

TAB. IV. *fig. 13.* Sit triangulum ABC. Dico quælibet ejus duo latera, nempe AB, AC, simul majora esse reliquo latere BC. Producat unum ex illis, ut CA, usque ad D, & sitque recta AD, æqualis alteri lateri non producto AB, & ducatur recta DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia inter se sunt, per constructionem, ferunt anguli ABD, ADB, æquales inter se: Est autem angulo ABD, *g* 9. *primi* major angulus CBD. Igitur & angulus CBD, major erit angulo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppositum majori angulo CBD, *h* 19. *primi* majus erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi CD, (si enim æqualibus AB, AD, commune addatur AC, *i* 2. *primi* s. fient tota æqualia; nimirum linea composita ex AB, AC, & linea composita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, simul majora latere BC. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera majora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 21. xxi.

Si super trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiorius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, super extremitates B, & C, TAB. IV.
lateralis BC, intra triangulum constituantur duæ fig. 14.
rectæ lineæ BD, CD, in puncto D, concurren-
tes. Dico BD, CD, simul minores esse duobus
lateralibus BA, CA, simul; At vero angulum
BDC, majorem angulo BAC. Producatúr enim
altera linearum interiorum, nempe BD, ad pun-
ctum E, lateris CA. Quoniam igitur in trian-
gulo BAE, duo latera BA, AE, & majora sunt c 10 prim.
latere BE, si addatur commune EC, & erunt a 4. prim.
BA, AC, majora, quam BE, EC. Rursus quia
in triangulo CED, duo latera CE, ED, & majora b 10 prim.
sunt latere CD, si commune apponatur DB,
& erunt CE, EB, majora, quam CD, DB. c 4. prim.
Ostensum vero jam fuit, AB, AC, majora esse,
quam BE, EC. Multo igitur majora erunt BA,
CA, quam BD, CD, quod primo proponebatur.
Præterea, quoniam angulus BDC, & major est d 16. prim.
angulo DEC, ext. rñus interno; & angulus DEC,
angulo BAC, major quoque est, eandem ob
causam. Erit angulus BDC, multo major angulo
BAC, quod secundo proponebatur. Si igitur
super trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c.
Quod erat ostendendum.

PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus da-
tis rectis lineis æquales, triangulum consti-
tuere. Oportet autem duas reliqua esse ma-
jores

52 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

jores omnifariam sumptas: quoniam uniuscujusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt majora.

TAB. IV.
fig. 15.

TRes lineæ rectæ datæ sint A , B , & C , quarum quælibet duæ reliquæ sint majores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, ut constat ex proposition. 20. in qua ostensum fuit, duo quævis latera trianguli reliquo esse majora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quavis DE , infinitæ magnitudinis a abscindatur recta DF , æqualis rectæ A . Et ex reliqua FE , recta FG , æqualis rectæ B ; & ex reliqua GE , recta GH , æqualis rectæ C . Deinde centro F , intervallo vero FD , circulus describatur DIK . Item centro G , intervallo autem GH , alius circulus describatur HIK , qui necessario priorem secabit in punctis I , & K , (cum enim duæ FD , GH , majores ponantur recta FG ; si ex FE , sumatur recta FL , æqualis ipsi FD : & ex GD , recta GM , æqualis ipsi GH , cadet punctum M , inter L , & D . Si namque M , caderet in L , punctum, essent GM , FL , hoc est, GH , & FD , æquales rectæ FG : Si vero M , caderet inter G , & L , essent eadem duæ FL , GM , hoc est, DF , GH , minores recta FG , quorum utrumque est contra hypothesein. Id quod ex apposis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K , ducantur ad puncta, F , G , rectæ KF , KG , factumque erit triangulum FGK , cujus latera dico æqualia esse datis rectis A , B , & C . Cum enim rectæ FK , b æqualis sit rectæ FD , & recta A , per constructionem eidem FD , æqualis; a erit latus FK , rectæ A , æquale. Rursus quia GK , æqualis est ipsi GH , & recta C , eidem GH ; erit quoque latus GK , rectæ C , æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG , reliquæ rectæ B , æquale. Omnia igitur tria latera FK , FG , GK , tribus datis rectis A , B , C , æqualia sunt.

a 3. primi

fig. 16.

TAB. V.

fig. 1.

TAB. IV.

fig. 15.

b 15. def.

a 1. prop.

sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

PROBL. 9. PROPOS. 23. xxiii;

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Data recta sit AB, datumque in ea punctum TAB. V. C, & datus angulus DEF. Oportet igitur *fig. 2.* ad rectam AB, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, duo puncta utcumque G, H, quæ recta GH, connectantur: Deinde a constituitur *a 22. primi* triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita ut CI, æquale sit ipsi EG; & CK, ipsi EH; & IK, ipsi GH. (Quod facile fiet, si CI, sumatur æqualis ipsi EG, & CL, ipsi EH, & IM, ipsi GH. Deinde ex centris C, & I, intervallis vero CL, & IM, circuli describantur secantes sese in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, utrumque utrique, & basis IK, basi GH, per constructionem; *b 8. primi* erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

THEOR. 15. PROPOS. 24. xxiv;

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint; utrumque utrique, angulum vero angulo majorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basi basi majorem habebunt.

Duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint TAB. VI. duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, utrum- *fig. 3.*
D 3 que

æque utrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF;
 Angulus vero A, major sit angulo EDF. Dico
 Basin BC; majorem esse basem EF. Ad lineam
 enim DE, ad ejusque punctum D, *b* constituatur
 angulus EDG, æqualis angulo A; (cadetque re-
 cta DG, extra triangulum DEF, cum angulus
 EDF, minor ponatur angulo A) ponaturque
 DG, æqualis ipsi DF, *c* hoc est, ipsi AC. Ducta
 deinde recta EG; cadet ea aut supra rectam EF;
 aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum
 supra EF, ducaturque recta FG. Quia ergo
 latera AB, AC, æqualia sunt lateribus DE, DG,
 utrumque utrique, & angulus A, æqualis angulo
 EDG, per constructionem: *d* Erit basis BC, basi
 EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG,
 inter se sunt æqualia; *e* erunt anguli DFG, DGF,
 æquales; Est autem angulus DGF, *f* major an-
 gulo EGF. Igitur & angulus DFG, eodem an-
 gulo EGF, major erit. Quare multo major erit
 totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In
 triangulo igitur EFG, *a* majus erit latus EG,
 latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse
 ipsi BC. Major igitur erit quoque BC, quam
 EF. Quod est propositum.

Cadat deinde EG, (utin figura 4.) in ipsam EF.
 Et quia rursus, ut prius, basis EG, *b* æqualis
 est basi BC; & EG, *c* major quam EF, erit &
 BC, major, quam EF, quod est propositum.

TAB V.
 fig. 5
 d 4. primi
 Cadat tertio EG, infra EF, producanturque
 rectæ DF, DG, usque ad H, & I, & ducatur
 recta FG. Erit autem rursus, ut prius, *d* basis
 EG, basi BC, æqualis. Deinde quia duo latera
 DF, DG, æqualia sunt inter se, per constructio-

nem, *e* erunt anguli GFH, BGI, infra basin FG,
 æquales; Est autem angulus FGI, *f* major angulo
 FGE. Igitur & angulus GFH, eodem angulo
 FGE, major erit. Quare multo major erit totus
 angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangu-

lo ergo EFG, *a* majus erit latus EG, latere EF.
 Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Ma-
 jor igitur erit quoque BC, basi EF. Si
 igitur

igitur duo triangula duo latera duobus lateribus,
&c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 25. xxv;

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique, basin vero basi majorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo majorem habebunt.

DUO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia TAB. P.
sint duobus lateribus DE, DF, trianguli fig. 6.
DEF; utrumque utrique, hoc est, AB, ipsi DE,
& AC, ipsi DF; Basis autem BC, major sit base
EF. Dico angulum A, majorem esse angulo D.
Si enim non est angulus A, major angulo D, erit
vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum
etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus
circa D, utrumque utrique, per hypothesin; a erit
& basis BC, æqualis basi EF; quod est absurdum. a 4. primi
Ponitur enim basis BC, base EF, major: Si vero
angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit,
propter æqualitatem laterum circa istos angulos,
basis EF, b major base BC; quod magis est ab- b 24. primi
surdum, cum EF, ponatur esse minor quam BC.
Quare angulus A, cum neque possit æqualis esse
angulo D, neque minor, erit major. Si igitur
duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia
habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 17. PROPOS. 26. xxvi;

Si duo triangula duos angulos duobus
angulis æquales habuerint, utrumque utrique,
unumque latus uni lateri æquale, sive quod
æqualibus adjacet angulis, seu quod uni æ-
qualium angulorum subtenditur: & reliqua
latera reliquis lateribus æqualia, utrumque

utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

TAB. 7.
fig. 7.

Sint duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, uterque utrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi EFD; Sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adjacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adjacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, utrumque utrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE, sit DE, majus, à quo *c* abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, EF, utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin: *d* Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum *e*. Non est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed æquale. Quamobrem, cum latera AB, BC, æqualia sint lateribus DE, EF, utrumque utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; *a* erunt & bases AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

TAB. 7.
fig. 8.

Sint deinde latera AB, DE, subtendentia æquales angulos C, & EFD, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, esse æqualia, utrumque utrique, hoc est, BC, ipsi EF, & CA, ipsi FD; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non est æquale lateri EF, sit EF, majus: *b* ex quo sumatur recta EG, æqualis ipsi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus DE, EG, utrumque utrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; *c* Erit angulus C, angulo

angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis; Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. *Est enim major.* Non ergo est latus BC, lateri *dispositum* EF, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex 4. propos. hujus libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Sequitur ex demonstratione hujus theorematidis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sint, ut ostensum fuit, contineantque ex hypothese angulos æquales B, E, erunt tota quoque triangula æqualia inter se. *c. 4. prius*

THEOR. 18. PROPOS. 27. *xxvii.*

Si in duas rectas lineas recta incidens linea, alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, *TAB. 7.* faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter *fig. 9.* se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent unquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conveniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est GIH, (cum AB, recta continuata sit, item recta CD, usque ad punctum I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & opposito DHG; quod est absurdum; & quoniam externus interno major est. Quod si AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis interno & opposito, AGH, quod est absurdum. Non igitur

D 5 con

58 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt: Eodem modo, si ponantur anguli alterni BGH, CHG, æquales, demonstrabitur, lineas AB, CD, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.

xxviii. THEOR. 19. PROPOS. 28.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

TAB. V.
fig. 1.

IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim angulo EGA, æqualis ponitur angulus GHC; & eidem angulo EGA, a æqualis est angulus HGB; b erunt anguli alterni GHC, HGB, æquales. Quare lineæ AB, CD, c, parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus EGB, æqualis ponatur interno GHD.

a 15. primi
b 1. prop.

c 17. primi

Deinde faciat recta EF; angulos internos eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales ponantur; Sunt autem & anguli AGE, AGH, a duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis AGE, AGH, æquales b. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare ut jam ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta

a 13. primi

b 12. prop.

c 17. primi

recta

recta incidens linea externum angulum, &c.
Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 29.

In parallelas rectas lineas recta incidens
linea; Et alternatim angulos inter se æquales
efficit; & externum interno, & opposito,
& ad easdem partes æqualem; & internos,
& ad easdem partes, duobus rectis æquales
facit.

IN parallelas AB, CD, recta incidat EF. Dico
primum, angulos alternos AGH, DHG, inter
se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit
alter, nempe AGH, major. Quoniam igitur an-
gulus AGH, major est angulo DHG, si addatur
communis angulus BGH, *a* erant duo AGH,
BGH, majores duobus DHG, BGH: At duo
AGH, BGH, *b* æquales sunt duobus rectis igitur
duo DHG, BGH, minores sunt duobus
rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem
partes, B, & D, *c* coibunt lineæ AB, CD, ad
eas partes, quod est absurdum, cum ponantur
esse parallelæ. Non est igitur angulus AGH,
major angulo DHG: Sed neque minor. Eadem
enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes
A, & C. Igitur æquales erunt anguli, alterni
AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis
alternis BGH, CHG.

Dico secundo, angulum externum AGE, æ-
qualem esse interno, & ad easdem partes opposito
CHG. Quoniam enim angulo BGH, æqualis est
alternus CHG, ut ostensum est; & eidem BGH;
d æqualis est angulus AGE. Erunt anguli AGE,
CHG, *e* inter se quoque æquales. Eodem modo
demonstrabitur, angulum BGE, æqualem esse
angulo DHG.

Dico tertio, angulos internos ad easdem par-
tes, AGH, CHG, æquales esse duobus rectis.
Quo-

Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse angulo CHE, interno; *si* addatur communis AGH, *a* erunt duo AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo AGE, AGH, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

XXX. THEOR. 21. PROPOS. 30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ & inter se sunt parallelæ.

TAB. V. *fig. 11.* SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam in propof. 9. undecimi libri agitur de lineis in diversis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur *c* 29 primi parallela ipsi EF, *c* erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursus quia CD, ponitur etiam *d* 29 primi parallela ipsi EF, *d* erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, *e* 1. *prop.* *e* æquales inter se quoque erunt. Cum igitur *f* 27 primi sint alterni, *f* erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.

XXXI. PROBL. 10. PROPOS. 31.

A Dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

TAB. VI. *fig. 1.* EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, ut

utcumque, faciens angulum quemcumque ADB; Cui ad A, ϵ æqualis constituatur EAD. Dico ϵ 23 primi rectam EA, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionem, f erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur f 27 primi puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. 22. PROPOS. 32. xxxij.

Cujuscunque trianguli uno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRoducatur in triangulo ABC, latus BC, ad TAB. VI. D. Dico primo, angulum externum ACD, fig. 2. æqualem esse duobus internis, & oppositis, simul A, & B. b Ducatur enim ex C, linea CE, parallelæ rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, b 31 primi incidit in parallelas AB, CE, a erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, b 29 primi erit angulus externus DCF, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus ACE, & A, itidem æqualibus ECD, & B, ϵ fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE; c 2. primi ACE, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.

Dico secundo, tres angulos internos ejusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, ut ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis ACB, d 2. primi erunt duo anguli ACD, ACB, æquales tribus A, B, & ACB: Sed duo ACD, ACB, ϵ æquales sunt e 13 primi duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, ACB, duobus sunt rectis æquales. Quare cujuscunque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

6 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

S. C. H. O. L. I. U. M.

Omnes anguli figura rectilinea cujusvis, aequales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

TAB. XV **Fig. 6. 7.** Hoc est, anguli cujuslibet trianguli aequales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figura continentis 20 latera aequalebunt bis 20. angulis rectis minus quatuor, videlicet 36. rectis angulis, &c. Demonstratio autem hujus rei talis est. Si à quovis puncto *A*, intra figuram assumpto ad omnes angulos *B, C, D*, vel *B, C, D, E*, vel *B, C, D, E, F*, rectæ lineæ *AD, AB, AC*, vel *AB, AC, AD, AE*, vel *AB, AC, AD, AE, AF*, ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, anguloſve figura ipsa continet. Cum igitur anguli cujuscunque trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum aequales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum *A*, intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figura rectilinea proposita, ut constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figura proposita, bis quoque tot rectis aequales, demptis illis circa punctum *A*, assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum *A*, existentes aequales 4. rectis tantummodo, ut collegimus ex propof. 15. Quamobrem anguli cujuscunque figura bis tot rectis sunt aequales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.

C. O. R. O. L. L. A. R. I. U. M. I.

Ex hac propof. 31. colligitur, tres angulos cujuslibet trianguli simul sumptos aequales esse tribus angulis cujuscunque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres,

LIBER PRIMUS. 83

tres, quam hi α quales sunt duobus angulis rectis. **g 32 primus**
Unde si duo anguli unius trianguli fuerint α quales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius α qualis, α quiangulaque erunt ipsa triangula.

COROLLARIUM. II.

Constat etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius α angulus lateribus α qualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul faciunt unum rectum, β cum omnes tres sint β 32 primus
 α quales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare cum duo reliqui inter se sint α quales, erit quilibet eorum semirectus. At vero si angulus α qualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores sunt uno recto, &c. Si denique dictus angulus existerit acutus, utrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt uno recto, &c.

COROLLARIUM. III.

Perspicuum quoque est, quicunque angulum trianguli α quilateri esse duas tertias partes unius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, α quibus α quales sunt tres anguli trianguli α quilateri, **k 32 primus**
divisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes unius recti.

COROLLARIUM. IV.

Liquet etiam, si ab uno angulo trianguli α quilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum unumquodque habet unum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes unius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli α quilateri; reliquum denique tertiam partem unius recti.

THEOR.

4 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas
lineas ad partes easdem conjungunt; Et ipsæ
æquales, & parallelæ sunt.

TAB. VI. **Fig. 3.** **§ 19 primi** Sint rectæ lineæ AB, CD, æquales, & paralle-
læ; Ipsas autem conjungant ad easdem partes
rectæ AD, BC. Dico AD, BC, æquales quo-
que esse, & parallelas. Ducatur enim recta AC.
Quoniam igitur AC, incidit in parallelas AB,
CD, *a* erunt anguli alterni BAC, DCA, æqua-
les. Quare cum duo latera BA, AC, trianguli
BAC, æqualia sint duobus lateribus CD, CA,
trianguli CDA, utrumque utrique, & anguli
a 4. primi quoque dictis lateribus inclusi æquales; *a* erunt
bases BC, AD, æquales, & angulus ACB, an-
gulo DAC, æqualis. Cum igitur hi anguli sint
b 27 primi alterni inter rectas AD, BC, *b* erunt AD, BC,
parallelæ: Probatum autem jam fuit, easdem esse
æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, &
parallelas lineas, &c. Quod erat demonstran-
dum.

THEOR. 24. PROPOS. 34.

Parallelogrammorum spatiorum æqualia sunt
inter se, quæ ex adverso & latera, & an-
guli; atque illa bifariam secat diameter.

TAB. VI. **Fig. 3.** **§ 19 primi** Sit parallelogrammum ABCD, quale definivi-
mus definitione 35. Dico latera opposita AB,
DC, inter se esse æqualia, nec non latera oppo-
sita AD, BC. Item angulos oppositos B, & D,
æquales inter se esse; nec non & angulos oppo-
sitos DAB, & DCB: Denique ducta diametro
AC, parallelogrammum ipsum bifariam secari.
Cum enim AB, DC, sint parallelæ, *c* erunt an-
guli

guli alterni BAC , DCA , æquales. Rursus quia AD , BC , sunt parallelæ, d erunt & anguli alterni BCA , DAC , æquales. Itaque cum anguli BAC , BCA , trianguli ABC , æquales sint duobus angulis DCA , DAC , trianguli ADC , uterque utrique, & latus AC , dictis angulis adjacens, communè utrique triangulo; e erit recta AB , æqualis oppositæ rectæ DC , & recta BC , oppositæ rectæ AD , quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B , angulo D , æqualis. Et quia si æqualibus angulis BAC , DCA , addantur æquales, anguli DAC , BCA , toti quoque anguli BAD , BCD , f sunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB , BC , trianguli ABC , æqualia sunt duobus lateribus CD , DA , trianguli CDA , utrumque utrique, & angulus B , angulo D , æqualis, ut jam ostendimus; g erunt triangula ABC , CDA , b æqualia, ideoque parallelogrammum $ABCD$, divisum erit bisariam à diametro AC , quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex adverso, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 25. PROPOS. 35. XXXV

Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

Inter duas parallelas AB , CD , super basi CD , TAB. VI.
 existant duo parallelogramma $CDEA$, $CDBF$. fig. 4.
 (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.)
 Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad arcam, seu capacitatem. Cadet enim primo punctum F , inter A , & E . Quoniam igitur in parallelogrammo

- a 34. primi** grammum CDEA, recta AE, *a* æqualis est recta CD, opposita, & eidem CD, æqualis est FB, in parallelogrammo CDBF, opposita; Erunt
b 1. prom. AE, *b* FB, inter se æquales. Dempta igitur
c 3. prom. communi FE, *c* remanebit AF, ipsi EB, æqua-
d 34. primi lis: *d* Est autem & AC, ipsi ED, opposita æ-
e 32. primi qualis in parallelogrammo CDEA; *e* & angulus
f 4. primi BED, angulo FAC, externus interno. *f* Quare
 triangulum FAC; triangulo BED, æquale erit.
g 2. prom. Addito igitur communi trapezio CDEF, *g* fiet
 totum parallelogrammum CDEA, toti parallelo-
 grammo CDBF, æquale. Quod est propositum.

TAB. VI. Cadat secundo punctum F, in punctum E.
fig. 5. Dico rursus, parallelogramma CDEA, CDBE,

- æqualia esse. Erunt enim, ut prius, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC;
h 4. primi atque adeo *h* triangula, EAC, BED, æqualia.
i 2. prom. Addito igitur communi triangulo CDE, *i* fient
 parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.

TAB. VI. Cadat tertio punctum F, ultra E, ita ut recta
fig. 6. CF secet rectam DE, in G. Quoniam igitur, ut

- prius, rectæ AE, FB, sunt æquales; si commu-
k 2. prom. nis addatur EF; *k* erit tota AF, toti EB, æqua-
 lis, nec non & anguli BED, FAC, æquales
l 4. primi erunt; atque adeo *l* triangulum FAC, triangulo
 BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo
m 3. prom. EGF, *m* remanebit trapezium AEGC, trapezio
 FGDB, æquale. Quocirca addito communi tri-
 angulo CDG, fiet totum parallelogrammum
 CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale.
 Parallelogramma igitur super eadem basi, & in
 eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqua-
 lia. Quod erat demonstrandum.

XXXVI. T H E O R. 26. P R O P O S. 36.

Parallelogramma super æqualibus basibus,
 & in eisdem parallelis constituta; inter se
 sunt æqualia.

TAB. VI. **S**int duo parallelogramma ACEF, GHDB,
fig. 7. super æquales bases CE, HD, inter easdem
 paral-

parallelas AB, CD. Dico ea esse æqualia. Con-
nectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad
easdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam
igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, &
eidem HD, o æqualis est GB, in parallelogram-
mo GHDB, opposita; erunt CE, GB, p æqua-
les inter se: Sunt autem & parallelæ, per hypo-
thesin. Quare & CG, EB, ipsas conjungentes,
q parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEEG,
parallelogrammum erit. Itaque cum parallelo-
gramma ACEF, GCEB, sint inter easdem paral-
lelas, & super eandem basin CE, r erit paralle-
logrammum ACEF, parallelogrammo GCEB,
æquale. Rursus quia parallelogramma GCEB,
GHDB, sunt inter easdem parallelas, & super
eandem basin GB, s erit quoque parallelogrammum
GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale.
Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, t in-
ter se æqualia erunt. Parallelogramma igitur
super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis
constituta, &c. Quod ostendendum erat.

o 34. primi
p 1. prop.

q 33. primi

r 35. primi

s 35. primi

t 1. prop.

THEOR. 27. PROPOS. 37. xxxvii.

Triangula super eandem basi constituta, &
in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

[Nter parallelas AB, CD, & super basin CD, TAB. VI.
sint constituta duo triangula ACD, BCD. 18. 8.
(Dicitur autem triangulum inter duas esse paralle-
las constitutum, quando basis est pars unius, &
angulus oppositus alteram attingit.) Dico ea tri-
angula esse æqualia. Per D, enim i ducatur i 31. primi
DE, parallela rectæ AC, & DF, parallela rectæ
BC. k Erunt igitur parallelogramma ACDE, k 35. primi
BCDF, æqualia. Sunt enim super eandem basin,
CD, & inter easdem parallelas. Sed horum di-
media sunt triangula ACD, BCD; l quod AD, l 34. primi
BD, diametri bifariam secant parallelogramma
ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD,
BCD, m æqualia erunt. Triangula igitur su- m 7. prop.
per

68 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

per eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

xxviii. THEOR. 28. PROPOS. 38.

Triangula super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

TAB. VI.
fig. 9.
x 31. primi
y 36. primi
z 34. primi
a 7. pron.
Inter parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. *x* Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF: Eruntque *y* parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia. Cum igitur horum *z* dimidia sint triangula ACE, BFD; *a* erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

xxxix. THEOR. 29. PROPOS. 39.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

TAB VI.
fig. 10.
a 31. primi
b 37. primi
c 1. pron.
Sint duo triangula æqualia, ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam AD, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, *a* ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra AD, vel infra. Cadat primum supra, qualis est AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, *b* erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur *c* erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AF; ducta recta FC, erunt eadem

eadem ratiocinatione triangula BFC , BDC , æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur AD , parallela ipsi BC . Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 30. PROPOS. 40. : XXX.

Triangula æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt parallelis.

Int duo triangula æqualia ABC , DEF , super *TAB. VI.*
bases æquales BC , EF , (quæ in eadem recta *fig. 11.*
linea collocantur,) & ad easdem partes constituta.
Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam
ex A , ad D , ductam parallelam esse rectæ BF .
Si enim non est, cadet parallela ipsi BF , per A ,
ducta vel supra AD , vel infra. Cadat primum
supra, coeatque cum ED , producta in G , &
ducatur recta GF . Quoniam igitur parallelæ sunt
 AG , BF , i erit triangulum EFG , triangulo *i 38. prim.*
 ABC , æquale: Ponitur autem & triangulum
 DEF , eidem triangulo ABC , æquale. Igitur
triangula DEF , GEF , æqualia erunt, pars & *k 1. prop.*
totum. Quod est absurdum. Quod si parallela
ducta per A , cadat infra AD , qualis est, AH ;
ducta recta HF , erunt eadem argumentatione tri-
angula HEF , DEF , æqualia, pars & totum,
quod est absurdum. Est igitur AD , parallela ipsi
 BF . Quare triangula æqualia super æqualibus ba-
sibus, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 41. xli.

Si parallelogrammum cum triangulo ean-
dem basin habuerit, in eisdemque fuerit pa-
rallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius
trianguli.

Inter parallelas AB , CD , & super basin CD , *TAB. VI.*
constituantur parallelogrammum $ACDE$, & *fig. 12.*
E 3 trian-

72 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

triangulum BCD. Dico parallelogrammum esse
duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro
a37. primi AD, in parallelogrammo, erunt *a* triangula
b34. primi ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum
c. 6. prop. ACDE, duplum est trianguli ACD; *b* quod
triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se
sint. Igitur & trianguli BCD, *c* duplum erit
idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem,
si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod
erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

TAB. VI. Idem hoc theorema Euclidis demonstrari potest co-
fig. 13. dem modo, si parallelogrammum, & triangulum
æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque
in eisdem parallelis, ut cernis in parallelogrammo
ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD,
FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in
g38. primi parallelogrammo, *g* erunt triangula ACD, BFG,
æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE,
h34. primi duplum sit trianguli ACD: *h* quod diameter AD,
i 6. prop. secet parallelogrammum ACDE; bifariam: *i* erit
quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ra-
tione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B,
duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale,
quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli
BFG, &c.

alii. P R O B L. II. P R O P O S. 42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum
constituere in dato angulo rectilineo.

TAB. VI. D Atum triangulum sit ABC, & datus angulus
fig. 14. rectilineus D. Oportet igitur constituere
parallelogrammum æquale triangulo ABC, ha-
bens angulum æqualem angulo D. Dividatur
a10. primi latus unum trianguli, nempe BC, *a* bifariam in
b13. primi E, & *b* fiat angulus CEF, æqualis angulo D,
pro ut

pro ut libet, hoc est, five angulus CEF, vergat ad partes C, five ad partes B, pro ut magis videbitur expedire. Ducatur item per A, *c* recta AF, *c* 31. *primi* parallela ipsi BC, quæ secet EF, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G, Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum CEFG, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta EA, quoniam parallelogrammum CEFG, *d* duplum est trianguli AEC, & *d* 41. *primi* triangulum ABC, duplum ejusdem trianguli AEC, *e* quod triangula AEC, ABE, super æ- *e* 38. *primi* quales bases EC, BE, & in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum CEFG, & triangulum ABC, *f* æqualia inter se. Cum *f* 6. *prox.* igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constet propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

THEOR. 32. PROPOS. 43. xliij.

In omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

IN parallelogrammo ABCD, sint circa diame- *TAB VII.*
trum AC, parallelogramma AEGH, CFGI, *fig. 1.*
& complementa DFGH, EBIG, ut in 36. defin.
diximus. Dico complementa hæc inter se esse
æqualia. Cum *a* enim triangula ABC, CDA, *a* 34. *primi*
æqualia sint; Itemque triangula AEG, GHA;
si hæc ab illis demantur, *b* remanebunt trapezia *b* 3. *prox.*
CBEG, CDHG, æqualia: *c* Sunt autem & trian- *c* 34. *primi*
gula CGI, CGF, æqualia. Quare si detrahantur
ex trapeziis, *d* remanebunt æqualia complementa *d* 3. *prox.*
DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogram-
mo, complementa &c. Quod ostendendum
erat.

PROBL. 12. PROPOS. 44.

Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

TAB. VII. fig. 2. **D**Ata recta linea sit *A*, datum triangulum *B*, & datus angulus rectilineus *C*. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo *B*, angulum habens æqualem angulo *C*, & unum latus æquale rectæ *A*. Constitutur triangulo *B*, *a* æquale parallelogrammum *DEFG*, habens angulum *EFG*, angulo *C*, æqualem, producatque *GF*, ad *H*, ut *FH*, sit æqualis rectæ *A*, & per *H*, *b* ducatur *HI*, parallela ipsi *FE*, occurrens *DE*, productæ in *I*. Extendatur deinde ex *I*, per *F*, diameter *IF*, occurrens rectæ *DG*, productæ in *K*; & *c* per *K*, ducatur *KL*, parallela ipsi *GH*, secans *IH*, protractam in *L*, producatque *EF*, ad *M*. Dico parallelogrammum *LMFH*, esse id, quod quæritur. Habet enim latus *FH*, æquale datæ rectæ *A*, & angulum *HFM*, angulo dato *C*, æqualem, *d* cum angulus *HFM*, æqualis sit angulo *EFG*, qui factus est æqualis angulo *C*: Denique parallelogrammum *LMFH*, æquale est triangulo *B*, *e* cum æquale sit complemento *DEFG*, quod factum est æquale triangulo *B*. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

TAB. VII. fig. 3. **Q**Uamvis Euclides proponat hoc problema absolute, non adstringendo nos ad certam aliquam

quam rectam lineam datam, ut in præcedenti
 propof. 44. fecerat; tamen quia in fequentibus
 frequenter ufurpatur in data recta linea, placuit
 ipfum proponere una cum data recta linea. Sit
 ergo recta data EF, rectilineum ABC, & datus
 angulus D. Oportet igitur construere ad datam
 rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo
 ABC, quod habeat angulum æqualem angulo D.
 Refolvatur rectilineum in trianguia A, B, & C.
 Deinde triangulo A, a æquale parallelogrammum
 constituatur EFGH, super rectam EF, habens an- a 44. primi
 gulum F, angulo D, æqualem. Item super re-
 ctam GH, parallelogrammum GHIK, æquale
 triangulo B, habens angulum G, æqualem angu-
 lo D. Item super rectam IK, parallelogrammum
 IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K,
 æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur,
 fi plura fuerint trianguia in dato rectilineo: fa-
 ctumque erit, quod jubetur. Nam tria parallelo-
 grammata constructa, quæ quidem æqualia sunt
 rectilineo dato ABC, conficiunt totum unum pa-
 rallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo
 anguli EFG, HGK, b inter se sunt æquales, b 1. primi
 cum uterque æqualis fit angulo D. Addito igitur
 communi angulo FGH, erunt duo anguli
 EFG, FGH, c qui duobus rectis æquivalent, c 19. primi
 & æquales duobus angulis HGK, FGH; ideoque hi d 1. primi
 anguli duobus etiam rectis æquales erunt. e Quare e 14. primi
 FG, GK, unam rectam lineam efficient. Eadem
 ratione ostendemus, EH, HI, unam rectam line-
 am efficere, propterea quod duo anguli EHG,
 HIK, æquales inter se sunt, (f cum sint æqua- f 34. primi
 les oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.)
 g & duo anguli HIK, IHG, duobus sunt rectis g 19. primi
 æquales. &c. Cum igitur EI, FK, sint paralle-
 læ; h Itemque EF, IK, quod utraque parallela h 30. primi
 fit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI.
 Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum
 IKLM, adjunctum parallelogrammo EFKI,
 constituere totum unum parallelogrammum EFLM.
 Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectili-

neo ABC, constituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

S C H O L I U M.

Datis duobus rectilineis inæqualibus, excessum majoris supra minus inquirere.

Sint data rectilinea A, & B, sitque A, majus. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B, i *Fiat parallelogrammum CDEF, in quocunque angulo D, æquale majori rectilineo A. Et super rectam CD, parallelogrammum CDGH, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, superat parallelogrammum CDGH, parallelogrammo EFHG, superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo EFHG. Quod est propositum.*

P R O B L. 14. P R O P O S. 46.

A Data recta linea quadratum describere.

Sit data recta AB, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintque ipsi AB, æquales, & connectatur recta CD. Dico ABCD, esse quadratum. Cum enim anguli A, & B, sint recti, erunt AD, BC, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis sit ipsi AB. Igitur & AB, DC, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est ABCD, in quo, cum AD, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existunt; sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, & æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratum igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

THEOR.

THEOR. 33. PROPOS. 47.

xlv

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus & describanturque super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratum BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, sive hæc duo latera æqualia sint, sive inæqualia. Ducatur enim recta AK, b parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & jungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, c erunt rectæ GA, AC, una linea recta; eodemque modo IA, AB, una recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus ABC, d fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE; trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, utrumque utrique, ut constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, ut ostendimus; e Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, f duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quod sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basin BE. Quare g æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione ostenditur

TAB. VII.

fig. 6.

a 46. primi

b 31. primi

c 14. primi

d 2. primi

e 4. primi

f 42. primi

g 6. primi

h 4. primi detur, æqualia esse quadratum $ACHI$, & parallelogrammum $CDKL$. *b* Erunt enim rursus tri-
angula ACD , HCB , æqualia, ideoque eorum
dupla, parallelogrammum videlicet $CDKL$, &
quadratum $ACHI$, æqualia erunt. Quamobrem
totum quadratum $BCDE$, quod componitur ex
duobus parallelogrammis $BEKL$, $CDKL$; æquale
est duobus quadratis $ABFG$, $ACHI$. In rectan-
gulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod
demonstrandum erat.,

S C H O L I U M.

*Si in quadrato quovis diameter ducatur, quadra-
tum à diametro descriptum duplum erit prædicti
quadrati.*

*TAB. VII. In quadrato $ABCD$, ducatur diameter AC . Dico
fig. 5. quadratum diametri AC , duplum esse quadrati $ABCD$.
Cum enim in triangulo ABC , angulus B , rectus
§47. primi sit, g erit quadratum lateris AC , æquale duobus
quadratis laterum AB , BC . Cum igitur quadrata
linearum AB , BC , æqualia sint, quod lineæ AB ,
 BC , sint æquales; erit quadratum diametri AC ,
duplum cujuslibet illorum, ut quadrati lineæ AB ,
hoc est, quadrati $ABCD$. Quod est propositum.*

xlvii. THEOR. 34. PROPOS. 48.

Si quadratum, quod ab uno laterum trian-
guli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis
trianguli lateribus describuntur, quadratis;
Angulus comprehensus sub reliquis duobus
trianguli lateribus, rectus est.

*TAB. VII. D*etur triangulum ABC , sitque quadratum la-
fig. 7. teris AC , æquale quadratis reliquorum late-
rum BA , BC . Dico angulum ABC , esse re-
ctum. Ducatur namque BD , perpendicularis
ad

ad BA k , & æqualis rectæ BC , connectaturque k *ii. prim*
 recta AD . Quoniam igitur in triangulo ABD ,
 angulus ABD , rectus est; g erit quadratum re-
 ctæ AD , æquale quadratis rectarum BA , BD : *g 47. prim*
 Est autem quadratum rectæ BD , quadrato rectæ
 BC , æquale, ob linearum æqualitatem. Quare
 quadratum rectæ AD , quadratis rectarum BA ,
 BC , æquale: erit. Cum ergo quadratum rectæ
 AC , eisdem quadratis rectarum BA , BC , æquale
 ponatur; b erunt quadrata rectarum AD , AC , *h 1. prim*
 inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ AD ,
 AC , æquales. Quoniam igitur latera BA , BD ;
 trianguli ABD , æqualia sunt lateribus BA , BC ,
 trianguli ABC ; basis AD , ostensa est æqualis
 basi AC ; i erunt anguli ABD , ABC , æquales: *i 8. prim*
 Est autem angulus ABD , ex constructione rectus.
 Igitur & angulus ABC , rectus erit. Si igitur
 quadratum, quod ab uno laterum trianguli de-
 scribitur, &c. Quod demonstrandum erat.





EUCLIDIS

ELEMENTUM

SECUNDUM.

Agit Euclides secundo hac libro de potentiis linearum rectorum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cujusvis lineæ rectæ divisæ, & parallelogramma rectorangula sub partibus ejusdem lineæ divisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

DEFINITIO. I.

Omne parallelogrammum rectorangulum contineri dicitur sub rectoris duabus lineis, quæ rectorum comprehendunt angulum.

HAc definitione exponit, sub quibus rectoris lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectorangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectoris. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectorangulum, cujus

cujus omnes anguli sunt recti. Cujus quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, ut perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si unus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo $ABCD$, angulus A , rectus. Dico reliquos tres angulos B , C , D , rectos quoque esse. Nam cum parallela sint AD , BC , a erunt anguli A , & B , interni duobus rectis aequales: At angulus A , rectus est, ex hypothesis. Igitur & B , rectus erit. Quoniam vero b quilibet suo opposito est aequalis, ut angulus A , angulo C , & angulus B , angulo D ; erunt & anguli C , & D , recti.

Dicit itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quae unum ejus angulum rectum continent. Ut parallelogrammum rectangulum $ABCD$, contineri dicitur sub duabus lineis rectis AB , AD ; vel sub AD , DC ; vel sub DC , CB , vel denique sub AB , BC : quoniam qualibet hujusmodi duae lineae exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, una quidem ut AB , vel DC , ejus longitudinem, altera vero, ut AD , vel BC , ejus latitudinem. Unde expressis duabus lineis, quae angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota ejus quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario unius lineae in alteram hujusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta AB , deorsum secundum rectam AD , moveri in transversum, ita ut semper angulum rectum cum AD , constituat, donec punctum A , ad punctum D , & punctum B , ad punctum C , perveniat, descriptum erit

80 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

erit totum parallelogrammum $ABCD$. Idem fiet, si AD , ponatur moveri transversum secundum rectam, AB , &c. Quamobrem jure optimo sub talibus duabus lineis rectis continere dicitur parallelogrammum rectangulum.

Itaque parallelogrammum rectangulum; quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cujus duo latera circa unum angulum rectum equalia sunt duabus illis rectis lineis, utrumque utrique. Ut
TAB. VII. parallelogrammum rectangulum sub rectis E , & F ,
fig. 9. contentum, erit idem, quod parallelogrammum $ABCD$: quoniam latus AB , aequale est rectæ E , & latus AD , rectæ F .

Perspicuum autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis equalibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarum linearum equalium equalis sit lineæ oppositæ, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera equalia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

Item manifestum est, si duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, utraq; utrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera unius equalia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint
TAB. VIII rectæ AB , BC , æquales rectis DE , EF , utraq;
fig. 1. utrique. Dico parallelogrammum rectangulum $ABCG$, contentum sub AB , BC , æquale esse parallelogrammo rectangulo $DEFH$, contento sub DE , EF . Ductis etenim diametris AC , DF , cum latera AB , BC , trianguli ABC , equalia sint lateribus DE , EF , trianguli DEF , & anguli B , & E , equalis,

les, nempe recti; cerunt triangula ABC , DEF , c. 4. primi aequalia. Eadem ratione aequalia erunt triangula AGC , DHF . Quare tota parallelogramma $ABCG$, $DEFH$, aequalia erunt.

Obiter quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in aliis, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam ceteri Geometra observant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem littera repetantur, solent Geometra exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duobus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Ut appositum parallelogrammum appellant AC , vel BG .

TAB. VIII
fig. 1.

DEFINITIO. II.

In omni parallelogrammo spatio, unumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo $ABCD$, sive rectangulum TAB. VIII illud sit, sive non, ducatur diameter, AC , ex fig. 2, 3. cujus puncto quolibet G , ducantur rectæ EF , HI , parallela lateribus parallelogrammi, ita ut parallelogrammum divisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo EH , IF , dicuntur esse circa diametrum, alia vero, duo BG , GD , complementa, ut manifestum est ex ultima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo utrolibet circa diametrum, ut ex IF , una cum duobus complementis BG , GD , qualis est figura $EBCDHGE$, quam complectitur circumferentia KLM , dicitur Gnomon. Eadem ratione figura $FDABIGF$,

F

com-

82 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

composita ex parallelogrammo EH, circa diametrum, & duobus complementis BG, GD, Gnomen appellabitur.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quocunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub infecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

TAB. VII.
fig. 4.

Sint duæ rectæ A, & BC, quarum BC, secetur quomocunque in quolibet segmenta BD, DE, EC. Dico rectangulum sub A, & BC, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indivisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & BD; Item sub A, & DE; Item sub A, & EC, comprehenso.

Rectangulum enim BF, comprehendatur sub A, & BC, hoc est, recta GB, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturque recta FG. Nam rectæ BG, CF, a parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & æquales inter se sunt, quod utraque rectæ A, æqualis ponatur. Igitur erunt quoque FG, BC, parallelæ, & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit BF, contentum sub A, sive GB, & BC, ex defin. 1. hujus lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipsi BG, vel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ sint ipsi BG, d inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eadem, cum ex constructione parallelogramma sint BH, BI, æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG, æqualis

a 28. primi

b 1. pron.

c 33. primi

d 30. primi

e 34. primi

æqualis est rectæ A, erit rectangulum BH, comprehensum sub infecta linea A, & segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE. Item rectangulum EF, sub A, & segmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si recta linea secta sit utcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur: æqualia sunt ei, quod à tota sit, quadrato.

Recta linea AB, dividatur utcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ AB. TAB. VIII. fig. 5.
 Describatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD; quæ æqualis erit rectæ AE, hoc est, rectæ AB, cui æqualis est recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehensum sub tota AB, & segmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia sint quadrato AD, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit utcunque, &c. Quod demonstrandum erat. c 46. primi a 34. primi

Aliter. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. TAB. VIII. fig. 6.
 Quoniam igitur AB, divisa est in C, erit rectangulum F 2 gulum

b 1, *sec.* gulum comprehensum sub infecta D, & recta AB, hoc est, quadratum rectæ AB, b æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, infecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB, quod est propositum.

uj. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si recta linea secta sit utcunque: Rectangulum sub tota, & uno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

TAB. VIII. *fig. 7. 8.* **L** Inea recta AB, divisa sit utcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & utrovis segmento; ut AC, (sive hoc segmentum majus sit uti in fig. 7. sive minus uti in fig. 8.) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta, rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constet, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit utcunque, &c. Quod erat ostendendum.

TAB. VII. *fig. 9.* Aliter. Accipiat recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, divisa est in C, erit

erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, *a* æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

iv.

Si recta linea secta sit utcumque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

Recta linea AB divisa sit utcumque in C. *TAB. VIII, fig. 10.* Dico quadratum totius rectæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, divisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales sunt duobus rectis, & *d* angulus EFG, rectus est, cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare, *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum sint *f* æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia ejus latera
F 3
sint

TAB. VIII, fig. 10.

a 5. primi
b 32. primi*c* 32. primi
d 19. primi*e* 6. primi
f 34. primi

sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod existente uno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti sunt, ut ad defin. 1. hujus lib. demonstravimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod latus HG, g æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sunt rectæ CB, ob quadratum CI: & FG æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc est, h rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis AC, CB, b's sumpto. Igitur si recta linea secta sit utcunque, quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

TAB VII. Aliter. Quoniam recta AB, divisa est in C, *fig. 11.* i erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, *i 2. sec.* quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub AB, AC, *k 3. sec.* comprehensum, k æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.

COROLLARIUM. I.

Hinc manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

COROLLARIUM. II.

Sequitur etiam ex demonstratione hujus propos. 4. diametrum cujusvis quadrati dividere ejus angulos bifariam.

riam. Probatum enim fuit angulos AEB, DEB, esse TAB. VIII.
semirectos, uti angulos DEB, & DBE. fig. 10.

THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

Dividatur recta AB, bifariam in C, & per TAB. VIII.
inæqualia in D, ut sectionum intermedia sit fig. 12.
recta CD, qua nimirum dimidia CB, minus segmentum DB, superat, vel quamajus segmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus AD, DB, comprehensum, una cum quadrato rectæ CD, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ CB. Describatur enim CF, quadratum super dimidia CB; & ducta diametro BE, ducatur ex D, recta DG, parallela rectæ BF, secans diametrum BE, in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela IK: Item ex A, rectæ CE, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta rectæ DB, æqualis: a Est autem & KH, ipsi CD, æqualis, a 34. primi. Quare rectangulum AH, comprehendetur sub AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CD; Probandum itaque est, rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale esse quadrato CF. Quoniam ergo b complementa CH, FH, æqualia b 43. primi sunt; si addatur commune quadratum DI, erit parallelogrammum DF, parallelogrammo CI, æquale: c Est autem & AK, eidem CI, æquale, c 36. primi quod & bases AC, CB, æquales sint. Igitur DF, AK, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur CH, erit gnomon MNO, rectangulo AH æqualis. Quocirca cum gnomon MNO, &

& quadratum KG , æqualia sint quadrato CF ; erit & rectangulum AH , una cum quadrato KG , æquale eidem quadrato CF . Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur, Rectangulum comprehensum sub tota cum adjuncta & adjuncta, una cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adjuncta componitur, tanquam ab una, descripto.

TAB. VIII.
fig. 13.

SECetur recta AB , bifariam in C , & ei in rectum addatur BD . Dico rectangulum comprehensum sub tota composita AD , & DB , adjuncta, una cum quadrato dimidiæ CB , æquale esse quadrato lineæ CD , quæ ex dimidia CB , & adjuncta BD , componitur. Describatur namque CE , quadratum super CD , & ducta diametro DF , ducatur ex B , recta BG , parallela rectæ DE , secans diametrum DF , in H , puncto, per quod agatur IK , parallela rectæ CD : Item ex A , ducatur rectæ CF , parallela AL , secans IK , productam in L . Erunt igitur per corollarium. propos. 4. hujus lib. BI , KG , quadrata, ideoque recta DI , rectæ DB , æqualis: *a* Est autem & KH , rectæ CB , æqualis. Quare, rectangulum AI , comprehendetur sub rectis AD , DB ; & KG , erit quadratum rectæ CB . Probandum itaque est, rectangulum AI , una cum quadrato KG , æquale esse quadrato CE . Quoniam ergo parallelogrammum AK , *b* æquale est parallelogrammo CH , quod bases AC , CB , æquales sint: *c* Est autem & parallelogrammum HE , eidem CH , æquale, complementum complemento; erunt AK , HE , æqualia inter se. Addito ergo communi CI , erit rectangulum

gulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, sint æqualia; erit & rectangulum AI, una cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

vij.

Si recta linea secetur utcumque; Quod à tota, quodque ab uno segmentorum, utraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

SECetur recta AB, utcumque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti five majoris, five minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, una cum quadrato reliqui segmenti CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. hujus lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehensum erit sub eisdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, una cum quadrato CI, hoc est, gnomoni KLM, una cum quadrato CI, æquale est quadratum AD; si apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF,

TAB. VIII.
fig. 14. 15.

234. prim.

235.

F 5

AF,

AF, DH. (quorum quodlibet comprehenditur sub tota AB, & segmento AC,) una cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur utcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

viii. THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si recta linea secetur utcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab una linea describitur, quadrato.

TAB. VIII. **fig. 16, 17.** Sit recta AB, in C, divisa utcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub AB, & segmento sive majore, sive minore CB, una cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento CB, componitur. Producaturs enim AB, versus dictum segmentum CB, ad D, sitque BD, recta æqualis segmento CB; & super tota AD, quadratum describatur AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipsi DE, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipsi AD, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. hujus lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, a æqualis est rectæ AC, erit OI, quadratum segmenti AC. Rursus b quia NH, æqualis est rectæ CB, erit NQ, quadratum segmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ BH, HQ, æquales sunt segmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehensa erunt sub AB, & segmento CB, c cum LH, sit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cum

cum NH , HM , rectæ d æquales sint rectis CB , BD ; & rectæ GH , EM , rectæ FL , hoc est, rectæ LH , hoc est, rectæ AB . Et quia quadrata NQ , BM , æqualia sunt; si addatur commune KG , erunt BM , KG , simul æqualia rectangulo NG . Quapropter quinque rectangula AH , LQ , HE , BM , & KG , gnomonem RST , componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB , & segmento CB . Cum igitur gnomon RST , & quadratum OI , æqualia sint quadrato AE ; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB , & segmento CB , una cum quadrato reliqui segmenti AC , æquale quadrato lineæ AD , compositæ ex AB , & dicto segmento CB . Quamobrem, si recta linea secetur utcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

viii.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt, & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECetur recta AB , bifariam in C , & non bifariam in D . Dico quadrata segmentorum inæqualium AD , DB , simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia AC , & ex intermedia sectionum CD . Educatur enim ex C , ad AB , perpendicularis CE , quæ sit æqualis dimidiæ AC , vel CB , ducanturque rectæ EA , EB . Deinde ex D , ducatur quoque ad AB , perpendicularis DF , secans EB , in puncto F , per quod ducatur FG , parallela ipsi AB , secans CE , in G , ducaturque tandem AF . Quoniam igitur in triangulo ACE , latera CA , CE , æqualia sunt, & erunt anguli CAE , CEA , æquales: Est autem a 5. primi angulus ACE , rectus: Reliqui igitur b anguli b 32. primi alium rectum conficiunt, ideoque AEC , senarius
 etus

TAB. VIII.
fig. 18.

ctus erit. Eadem ratione angulus BEC, semi-
 rectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rur-
 e 19. primi
 d 32. primi
 sus, quia trianguli FGE, angulus EGF, *c* æqua-
 lis est recto ECB, externus interno; *d* erunt reli-
 qui duo anguli uni recto æquales: Ostensum au-
 tem est, angulum FEG, esse semirectum. Igitur
 & EFG, semirectus erit, proptereaque anguli
 e 6. primi
 EFG, FEG, æquales erunt, *e* ideoque & latera
 EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo osten-
 detur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse
 æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B,
 semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE,
 f 47. primi
 angulus C, rectus sit, *f* erit quadratum lateris
 AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE:
 Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia,
 quod & lineæ AC, CE, æquales sint. Igitur
 quadratum lateris AE, duplum erit quadrati la-
 teris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, an-
 gulus G, rectus est, *g* erit quadratum lateris EF,
 æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At
 duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æ-
 qualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum
 lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc
 h 34. primi
 est, quadrati lineæ CD. Est enim CD, *h* recta
 rectæ FG, æqualis; cum CF, sit parallelogram-
 mum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF,
 dupla sunt duorum quadratorum linearum recta-
 rum, AC, CD: Sunt autem duo quadrata recta-
 rum AE, EF, *i* æqualia quadrato rectæ AF; &
 i 47. primi
 quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis
 rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata re-
 ctarum AD, DF, dupla sunt duorum quadrato-
 rum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectæ
 DF, æquale est quadrato rectæ DB. Ostensum
 enim est rectas DF, DB, esse æquales. Quare
 duo quoque quadrata rectarum AD, DB, seg-
 mentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum
 rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ, & interme-
 diæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æ-
 qualia, & non æqualia &c. Quod erat demon-
 strandum.

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 2.

Si recta linea fecetur bifariam, adjiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adjuncta, & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt, & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod à composita ex dimidia & adjuncta, tanquam ab una, descriptum sit, quadrati.

SECETUR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum *TAB. IX.*
addatur BD. Dico duo quadrata rectarum *fig. 1.*

AD, BD, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Super AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & jungantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur DF, ipsi CF, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G, & per E, ducatur rectæ CD, parallela EF, secans DF, in F, jungaturque recta AG. Ostendetur jam, angulum AEB, esse rectum, ut in præcedenti propos. & CEB, semirectum; a ideoque ejus alternum EGF, semirectum quoque; b Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo CF, recto angulo C, opponatur. c Igitur & reliquus FEG, semirectus erit, & propterea ipsi EGF, æqualis. Quare d rectæ EF, FG, angulis FEG, EGF, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas BD, DG, esse æquales, propterea quod angulus BDG, sit rectus, & BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, e æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rursus quia quadratum rectæ EG, f quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG, æquale est, erit quoque quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc est, rectæ CD, g cum CD, recta æqualis sit re- g 34. primi
ctæ

94 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

ctæ EF. Duo igitur quadrata rectarum AE, EG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum *b47. primi* AE, EG, æquale est *b* quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ AG, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis AD, DG, describuntur. Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ DG, æquale sit quadrato rectæ BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Itaque si recta linea secetur bitariam, &c. Quod ostendendum erat.

xi.

PROBL. I. PROPOS. II.

Datam rectam lineam secare, ut comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

TAB. IX.
fig. 1.

a20. primi **D**ata sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero ejus segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum majoris. Describatur ex AB, quadratum AC, & diviso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, jungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, major, quam AF. Nam cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; a sint autem latera AE, AB, majora latere EB; Erunt quoque rectæ EA, AB, majores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, major erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub AB, BG, æquale sit

fit quadrato rectæ AG; adeo ut AG, sit majus segmentum, & BG, minus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela FH, secans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum segmenti AG, cum omnia ejus quatuor latera sint æqualia, quippe cum *b* FH, *b* 34. *probat* GH, æqualia sint oppositis AG, AF, æqualibus; omnesque anguli ejusdem recti ob rectum A, ut ad defin. 1. hujus libri ostendimus. Rectangulum quoque CG, comprehensum erit sub AB, & segmento BG; quod AB, æqualis sit ipsi BC. Itaque probandum est, rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia esse. Quoniam igitur recta DA, divisa est bisariam in E, & ei addita in rectum AF; *c* erit rectangulum sub DF, FA, hoc *c* 6. *fov.* est, rectangulum DH, (cum FH, sit æqualis ipsi FA;) una cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc est, quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis est: Est autem quadratum rectæ EB, *d* æquale quadratis rectarum AE, AB. *d* 47. *probat* Quare rectangulum DH, una cum quadrato rectæ AE, æquale quoque est quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc est, quadrato AC. Ablato igitur rursus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam AB, secuimus, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. II. PROPOS. 12. xij.

In amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, majus est quadratis, quæ sunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TAB. IX. **Fig. 3. 4.** **TR**iangulum ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, majus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, una cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta CD, divisa sit in B, utcumque a erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD : b Est autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, c æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

xiii. THEOR. 12. PROPOS. 13.

In oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis

com-

comprehensio, & ab uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interiori linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

Sint omnes anguli trianguli ABC, acuti & ex
 A, perpendicularis AD, demissa cadat in la- TAB. IX.
fig. 6.
7.
 tus BC. Dico quadratum lateris AB, quod acu-
 to angulo ACB, opponitur, minus esse quadra-
 tis laterum AC, CB, circa angulum acutum
 dictum, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD,
 hoc est, quadratum lateris AB, una cum re-
 ctangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale
 esse duobus quadratis laterum AC, CB. Cum
 enim recta BC, divisa sit in D, utcumque, erunt
 quadrata rectarum BC, CD, æqualia rectangulo
 comprehenso bis sub BC, CD, & quadrato re- a 7. fig.
 ctæ BD. Addito ergo communi quadrato rectæ
 DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA,
 æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC,
 CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA:
 Duobus autem quadratis rectarum CD, DA,
 b æquale est quadratum rectæ CA. Duo igitur b 47. primi
 quadrata rectarum BC, CA, æqualia sunt re-
 ctangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duo-
 bus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo
 duobus quadratis rectarum BD, DA, c æquale c 47. primi
 sit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata re-
 ctarum BC, CA, æqualia rectangulo bis compre-
 hensio sub BC, CD, & quadrato rectæ AB, quod
 est propositum. Eodem modo ostendetur, qua-
 drata rectarum AB, BC, æqualia esse rectangulo
 bis comprehenso sub CB, BD, & quadrato rectæ
 AC; hoc est, quadratum lateris AC, minus esse
 quadratis laterum AB, BC, rectangulo compre-
 hensio sub CB, BD. In oxygoniis ergo tri-
 angulis, quadratum à latere, &c. Quod de-
 monstrandum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

PROP. IX. Sit datum rectilineum A, cui quadratum æquale
 8, 9. constituendum est. *a* Constituatur parallelo-
 45. *primi* grammum BCDE, æquale rectilineo A, habens
 angulum rectum, cuius unus latus, ut DC,
 producat ad F, sitque CF, recta æqualis rectæ
 BC. Dividatur quoque DF, bisariam in puncto
 G, quod cadet aut in punctum C, aut non.
 8. Si cadit in punctum C, erit recta BC; (cum
 æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis.
 Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum
 14. *primi* latera DE, EB, æqualia sint oppositis lateribus
 BC, CD; atque adeo constitutum erit quadratum
 9. æquale rectilineo A. Si vero punctum G; non
 cadit in C; facto G, centro, describatur inter-
 vallo GD, vel GF, semicirculus FHD, produca-
 turque BC, donec circumferentiam secet in H.
 Dico igitur, quadratum rectæ CH, esse æquale
 rectilineo A. Ducta enim recta CH; quia recta
 DF, dividitur bisariam in G, & non bisariam in
 C; erit rectangulum comprehensum sub DC,
 CF, hoc est, rectangulum BD, una cum qua-
 14. *sec.* drato rectæ GC, æquale quadrato rectæ GF,
 hoc est, quadrato rectæ GH; cum rectæ GF,
 GH, sint æquales: At quadratum rectæ GH,
 47. *primi* æquale est quadratis rectarum GC, CH. Igi-
 tur rectangulum BD, una cum quadrato rectæ
 GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC,
 CH. Quamobrem dempto communi quadrato
 rectæ GC, remanebit rectangulum BD, hoc est,
 rectilineum A; quadrato rectæ CH, æquale. Da-
 to ergo rectilineo æquale quadratum constituimus:
 Quod facere oportebat.



EUCLIDIS

ELEMENTUM

TERTIUM.

DEFINITIO. I.

Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

Quoniam Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est usus. Primum itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumvolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, ut lib. 1. diximus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu recta ex centris ducta, sunt æquales; vel etiam quorum tota diametri æquales sunt. Ut si diametri AB , BC , vel recta DF , EG , TAB. IX. è centris D , & E , ducta sint æquales, æquales fig. 10. 11. erunt circuli AFB , & BGC . Sic etiam e contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel recta è centris ducta æquales. Ex his liquet, circulos,

los, quorum diametri, vel recta ducta ex centris sunt inaequales, inaequales esse; ut si diametri BC, TAB. IX. HI, vel recta EG, KL, è centris E, & K, fig. 11. 12. ducta sint inaequales, inaequales erunt circuli BGC, & HLI; atque adeo illum, cujus diameter, vel semidiameter major, majorem. Et contra, circulo- rum inaequalium diametros, semidiametrosve inaequa- les esse, majoris quidem majorem, & minoris mi- nores.

DEFINITIO. II.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producat, circu- lum non fecat.

TAB. IX. UT recta AB, si ita circulum BFD, tangat in fig. 13. B, ut producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota jaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, ut producta ad G, secet cir- culum, cadatque intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

DEFINITIO. III.

Circuli se se mutuo tangere dicuntur, qui sese mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

TAB IX. Eodem modo duo circuli AC, BC, se mutuo fig. 14 15. dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C, ut neuter alterum secet. Est autem hic contactus fig. 15. circulo- rum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, ut quando unus extra alterum est positus; fig. 14. aut interius, quando unus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, ut unus alterum

alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo *TAB. IX.*
secare, & non tangere. Uti circuli *ED*, & *FD*. *fig. 16.*

DEFINITIO. IV.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam major perpendicularis cadit.

Quoniam inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; alia vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Ut distantia puncti *A*, à recta *TAB. X.*
BC, dicitur esse perpendicularis *AD*, non autem *fig. 1.*
AE, vel *AF*, vel alia quævis, quæ non perpendicularis est; quia *AD*, omnibus est brevior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum *AE*, *AF*, majores sunt, quam *AD*, sed etiam ipsa inter se inæquales sunt. Est enim *AF*, a major, a 19. primi
quam *AE*, cum angulus *AEF*, sit obtusus, & *AFE*, acutus, & sic de aliis lineis non perpendiculæ.
Quod enim *AFE*, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo *ADF*, duo anguli *ADF*, *AFD*, b minores sunt duobus rectis. Hinc enim b 17. primi
fit, cum *ADF*, rectus sit, angulum *AFD*, recto esse minorem. Eadem ratione angulus *AED*, ostendetur acutus. Propterea quod in triangulo *ADE*,
c duo anguli *ADE*, *AED*, minores sunt duobus c 17. primi
rectis, & *ADE*, rectus est, ac proinde, cum ambo *AED*, *AEF*, d æquales sint duobus rectis, erit d 13. primi
AEF, obtusus. Hinc factum est, ut Euclides æ-

qualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definieris per aequales perpendiculares, & inaequalem distantiam per inaequales. Ut dua recta AB , CD , in circulo $ABCD$, equaliter dicentur distare à centro E , si perpendiculares EF , EG , aequales fuerint. At linea CD , longius abesse dicetur à centro E , quam linea HI , si perpendicularis EG , major fuerit perpendiculari EK .

D E F I N I T I O. V.

Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

TAB. X. **U**T si ducatur in circulo $ABCD$, recta BD , utrunque, dicetur tam figura BAD , contenta circumferentia BAD , & recta BD ; quam figura BCD , comprehensa recta BD , & circumferentia BCD , circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum. Semicirculus, quando recta BD , per centrum E , incedit; Segmentum semicirculo majus, quando recta BD , non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum BAD ; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cujusmodi est segmentum BCD . Vocatur à plerisque Geometris recta BD , chorda, & circumferentia BAD , vel BCD , arcus.

D E F I N I T I O. VI.

Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

Definit jam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmen-

segmenti, dicens angulum mixtum ABD , vel ADB , TAB. X.
 contentum sub recta linea BD , & circumferentia fig. 3.
 BAD , appellari angulum segmenti. Quod si seg- fig. 4.
 mentum circuli fuerit semicirculus, dicitur angulus
 BAC , semicirculi: Si vero segmentum majus semi- fig. 3.
 circulo extiterit, vocabitur angulus ABD , segmenti
 majoris: Si denique segmentum minus fuerit semi-
 circulo, angulus CBD , segmenti minoris nuncupabitur.

DEFINITIO. VII.

In segmento autem angulus est, cum in
 segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam
 punctum, & ab illo in terminos rectæ ejus
 lineæ, quæ segmenti basis est, adjunctæ fue-
 rint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab ad-
 junctis illis lineis comprehensus angulus, est in
 segmento.

Si segmentum circuli quodcumque ABC , cujus TAB. X.
 basis recta AC . Ex suscepto quolibet puncto, fig. 5.
 B , in circumferentia, ducantur ad puncta A , &
 C , extrema basis, rectæ lineæ BA , BC . Angu-
 lus igitur rectilineus ABC , dicitur existere in seg-
 mento ABC .

DEFINITIO. VIII.

Cum vero comprehendentes angulum re-
 ctæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi
 angulus insistere dicitur.

EX puncto A , quolibet suscepto in circumferentia TAB. X.
 circuli $ABCD$, ducantur rectæ duæ lineæ AB , fig. 6.
 AD , ad duo extrema B , & D , circumferentiæ
 BCD , cujusque, quam quidem duæ rectæ AB ,
 AD ,

AD, assumunt. *Angulus* itaque *rectilineus BAD*, *insistere* dicitur *circumferentia BCD*.

Præter tres dictos *angulos* consideratur etiam à *Geometris* *angulus* *contingentia*, qui continetur *linea recta tangente circum*, & *circumferentia circuli*; vel certe *duobus circumferentiis* *se mutuo tangentibus*, sive hoc *exterior* fiat, sive *interius*. *Exemplum*.

TAB. X. Si *recta AB*, tangat *circulum CDE*, in *C*; angulus mixtus *ACD*, vel *BCE*, dicetur *angulus contingentia*, sive *contactus*: Rursus, si *circulus CED*, tangat *circulum EFG*, *exterior* in *E*; Item *circulus HFI*, *circulum EFG*, *interius* in *F*; appellabitur tam *angulus curvilineus CEF*, quam *EFH*, vel *GFI*, *angulus contactus*, seu *contingentia*. Sunt itaque, ut vides, tres *anguli contingentia*, unus quidem mixtus, reliqui vero duo *curvilinei*.

DEFINITIO. IX.

Sector autem *circuli* est, cum ad ipsius *circuli* *centrum* constitutus fuerit *angulus*, comprehensa nimirum *figura* & à *rectis lineis* *angulum* continentibus, & à *peripheria* ab illis assumpta.

TAB. X. SI in *circulo ABCD*, cujus *centrum E*, *rectæ* *AE*, *CE*, constituent *angulum AEC*, ad *centrum E*; nominabitur *figura AECD*, contenta *rectis AE*, *EC*, & *circumferentia ADC*, quam prædictæ *lineæ* assumunt, *Sector circuli*.

DEFINITIO. X.

Similia circuli segmenta sunt, quæ *angulos* capiunt *æquales*: Aut in quibus *anguli* inter se sunt *æquales*.

TAB. X. SEGMENTA videlicet *ABDF*, *DCAE*, ejusdem *circuli ABCDEF*, quæ capiunt hos duos *angulos ABF*,

ABF, DCE, æquales: vel, quod idem est, in quibus iidem anguli æquales existunt, juxta 7. definitionem, similia dicuntur, & ipsa circumferentia quoque ABDF, DCAE, similes.

PROBL. I. PROPOS. I.

Dati circuli centrum reperire.

Si circulus datus ABCD, cujus centrum oportet invenire. Ducatur in eo linea utcumque AC, a quæ bifariam dividatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, utrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam dividat inæqualiter, quandoquidem in F, divisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (à centro enim duci dicuntur) erunt anguli AEG, CEG, æquales; ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus, ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

TAB. X.

fig. 10.

a 10. prim.

b 8. prim.

c 10. def.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta, rectam AC, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum ejus medium F, necessario esse circuli centrum,

THEOR.

ij. THEOR. I. PROPOS. 2.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

TAB. X. fig. 11. IN circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in ejus circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam, cadere intra circulum, ita ut ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, ut vult adversarius. Invenio *a* igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quodvis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetque ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cujus basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) *b* erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus EDA, *c* angulo ECD, major externus interno opposito, cum latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, major erit idem angulus EDA. Quare recta EA, majori angulo ADE, opposita, (hoc est, recta EB, sibi æqualis;) *d* major erit, quam recta ED, minori angulo DAE, opposita, pars quam totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta, extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita ut eadem sit, quæ circumferentia ABC. Effet enim recta EA, major, quam recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curva, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, lineam rectam, quæ circum tangit, ita ut eum non secet, in uno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, gaderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra g 2. *tertiu.* circum. Quare circum secaret, quod est contra hypothesis.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iii.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER centrum A, circuli BCD, recta CE, ex TAB. X. fig. 12.
tensa dividat rectam BD, non per centrum
extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse
ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis
AB, AD; erunt duo latera AF, FB, trianguli
AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia;
& bases AB, AD, æquales. a 8. *primi*
AFB, AFD, æquales erunt, hoc est, d recti. Quod d 10. *def.*
erat primo propositum.

Sit jam AF ad angulos rectos ipsi BD. Dico
rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE.
Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera
AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, b erunt b 5. *primi*
anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur
duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales
sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF;
& latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus
opponuntur, æqualia quoque: c erunt latera FB, c 26. *primi*
FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si
igitur in circulo recta quædam linea per centrum
extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

C O R O L L A R I U M.

Ex hac demonstratione facile inferemus, in quovis triangulo duorum laterum æqualium, five æquilaterum illud sit, five Iſosceles, lineam, quæ baſim bifariam ſecet, perpendicularẽ eſſe ad baſim. Et contra, lineam, quæ ad baſim ſit perpendicularis, baſim ſecare bifariam. Nam in triangulo ABD, cujus duo latera AB, AD, æqualia ſunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus deſcribi poteſt: ex eo, quod recta AF, ſecat baſim BD, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quod anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſim BD, à recta AF, bifariam ſecari.

TAB. X.
fig. 12.

iv.

T H E O R. 3. P R O P O S. 4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, non per centrum extenſæ; ſe ſe mutuo bifariam non ſecabunt.

TAB. X.
fig. 13.

Duæ rectæ AB, CD, ſe mutuo in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, ut mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim una earum per centrum tranſit, certum, eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam dividitur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamvis una earum nonnunquam bifariam ab altera dividatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diviſa enim ſit & AB, & CD, ſi fieri poteſt, bifariam in E. *a* 1. tertii. *a* Invento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta EF. Quoniam ergo FE, ponitur ſecare rectam AB, bifariam in E, *b* ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur CD, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam dividi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 1. tertii.

b 3. tertii.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

Si duo circuli sese mutuo secant, non
erit illorum idem centrum.

DUO circuli ABD, EBD, se mutuo secant in TAB. X.
B, & D. Dico ipsos non habere idem cen- fig. 14.
trum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum
utriusque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB,
quidem ad sectionem B; CA, vero secans utram-
que circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta
EC, rectæ CB, *b* æqualis. Rursus quia C, cen- b 15. def.
trum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta
AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ
EC, AC, *a* æquales inter se erunt, pars, & to- a 1. prm.
tum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli
se se mutuo secant, &c. Quod ostendendum
erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6. vi.

Si duo circuli sese mutuo interius tan-
gant; eorum non erit idem centrum.

DUO circuli AB, BC, se interius tangant in TAB. X.
B. Dico eos non habere idem centrum. fig. 15.
Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D,
à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad ta-
ctum B. At DC, secans utramque circumferen-
tiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur
centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, *b* b 15. def.
æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum cir-
culi BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æ-
qualis. Quare rectæ AD, & CD, *a* inter se e- a 1. prm.
runt æquales, pars & totum, quod est absur-
dum. Si igitur duo circuli se se mutuo interius
tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

vij. THEOR. 6. PROPOS. 7.

Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliquæ; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper major est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.

TAB. X.
fig. 16.

IN diametro AB, circuli ACDEB, cujus centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam esse GA, in qua est centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior est, majorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus distat; & eadem ratione GD, majorem recta GE, atque ita de aliis lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad utrasque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, & majora sunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc est, toti rectæ GA; erit & GA, major, quam GC. Eadem ratione major erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

Deinde, quoniam in triangulo EFG, latus EF, minus est duobus lateribus FG, GE. Est autem EF,

EF, ipsi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiâ cadunt.

Rursus, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, major est angulo GFD; erit basis GC, major base GD. Eadem ratione major erit GC, quam GE; Item major erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major est ea, quæ remotior.

Fiat jam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; erunt rectæ GE, GH, ex utraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, major quam GH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, ut ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum. ♦

THEOREMA 7. PROPOSITIONES 8.

viii.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero ut libet:

libet : In cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa , quæ per centrum ducitur ; aliarum autem propinquior ei , quæ per centrum transit , remotiore semper major est ; In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa , quæ inter punctum , & diametrum interponitur ; aliarum autem ea , quæ propinquior est minimæ , remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt , ad utrasque partes minimæ , vel maximæ.

TAB. X. **EX** puncto A , extra circulum BCDEFI , cujus
fig. 17. centrum K , lineæ secantes circulum ducantur , quarum AI , per centrum transeat , aliæ vero AH , AG , AF , utcunque. Dico omnium esse maximam AI , quæ per centrum incedit : Deinde rectam AH , quæ rectæ AI , quæ per centrum ducitur , propinquior existit , majorem recta AG , quæ remotior est ab eadem AI : Et eadem ratione AG , majorem quam AF. E contrario autem , rectam AB , omnium , quæ extra circulum sunt , minimam esse : Deinde rectam AC , quæ vicinior est minimæ AB , minorem esse recta AD , remotiore ; Et eadem ratione , ipsam AD , minorem quam AE.* Denique ex A , ad utrasque partes minimæ lineæ AB , vel maximæ AI , duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex cetro K , ad puncta C , D , E , F , G , H , rectæ KC , KD , KE , KF , KG , KH. Quoniam igitur duo latera
a 20. primi AK , KH , trianguli AKH , & majora sunt recta AH ; Sunt autem rectæ AK , KH , æquales rectis AK , KI , hoc est , toti rectæ AI ; erit & AI , major , quam AH. Eadem ratione erit AI , major , quam AG , & quam AF. Quare AI , est omnium , quæ ex A , in circulum cadunt , maxima. Deinde,

Deinde, quoniam latera AK , KH , trianguli AKH , æqualia sunt lateribus AK , KG , trianguli AKG ; Et angulus totus AKH , major est angulo AKG ; *b* erit basis AH , base AG , major. Eadem ratione major erit AH , quam AF : Item AG , major, quam AF . Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major est linea remotiore. b 24. primus

Rursus, quia in triangulo ACK , recta AK , minor est duabus AC , CK ; si auferantur æquales BK , CK : remanebit adhuc AB , minor, quam AC . Simili ratione erit AB , minor, quam AD , & quam AE . Quare AB , omnium linearum extra circulum, quæ ex A , ducuntur, minima est. c 20. primus

Rursus, cum intra triangulum ADK , cadant duæ rectæ AC , CK , ab extremitatibus lateris AK ; *d* erunt AC , CK , minores, quam AD , DK . Sublatis igitur æqualibus CK , DK , remanebit adhuc AC , minor, quam AD . Pari ratione erit AC , minor, quam AE , item AD , minor quam AE . Quare linea propinquior minimæ lineæ AB , minor est, quam remotior ab eadem. d 21. primus

Postremo fiat angulo AKC , angulus AKL , æqualis, & ducatur recta AL . Quoniam igitur latera AK , KC , trianguli AKC , æqualia sunt lateribus AK , KL , trianguli AKL ; Sunt autem & anguli AKC , AKL , dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ AC , AL , ex utraque parte minimæ AB , vel maximæ AI , inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A , ducatur recta cadens ultra L , erit ipsa, cum sit remotior à minima major quam AL . Quod si cadat inter B , & L , erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam AL , ut ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum. e 4. primus

H

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

TAB. X. **fig. 18.** **A** puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus divisim bifariam in E, & F, b. ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales; a 8. primi. erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ AE, AF, dividant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. hujus lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

TAB. XI. **fig. 1.** Aliter. Si punctum A, non est centrum circuli, b. fit centrum inventum E, ex quo per b. 1. tertii. A, agatur diameter FG. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum est punctum A, a. quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; c. erit recta AD, quæ propinquior est rectæ AG, per centrum E, ductæ major, quam recta AC, remotior ab AG, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter, A, centrum ponatur. Quod si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum una trium æqualium

lium datarum, ut si dicantur æquales tres AB, AF, AC, ubi EA, coincidit cum AF; *d 7. tertii* erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & AC, quod est absurdum. Ponitur enim utrique æqualis.

THEOR. 9. PROPOS. 10. 2

Circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SEcet enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, TAB. XL
circulum AGBDHE, in pluribus, quam duo- *fig. 2.*
bus, punctis A, B, & D, quæ jungantur rectis AB, BD: quibus *a* bifariam divisus in I, & K, *a 10. primi*
b educantur ex I, & K, ad AB, & BD, per- *b 11. primi*
pendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraque, ex corollario propof. 1. hujus lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se dividunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, quod *c 5. tertii* est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

Aliter. Secent se iidem duo circuli, si fieri TAB. XL
potest, in tribus punctis A, B, & D. *d* Inven- *fig. 3.*
tum autem sit I, centrum circuli AGBDHE, *d 1. tertii*
à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ rectæ æquales, *e 9. tertii* erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. *f* Quod est absurdum. *f 5. tertii*

H 2

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 11.

Si duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adjuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TAB. XI.
fig. 4.

a 6. tertii.

b 20. primi

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diversum erit, cum duo circuli interius se tangentes, a non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit secet utrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, b majora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ majores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, major, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC,) erit & FB, major, quam FD, pars quam totum, quod est absurdum.

c 20. primi

Quod si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, c majora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectæ FE, æqualis, (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, majores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, major, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC: (propterea quod G, ponitur esse centrum circuli ABC,) erit quoque GC, major, quam GE, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum majoris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG,

FG, extensa utrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli sese intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. II. PROPOS. 12. xij.

Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

Circuli duo ABC, DBE, tangant se exterius *TAB. XI. fig. 5.*
in B, & centrum circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centrīs F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, a maiora *a 10. primi*
sunt latere FG: Est autem recta BF, rectæ FC, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta GB, rectæ GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE,) erunt & rectæ FC, GE, majores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 12. PROPOS. 13. xij.

Circulus & circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, sive intus, sive extra tangat.

Tangant sese circuli ABCD, AECF, intus, & *TAB. XI. fig. 6.*
fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, & quæ diversa erunt, per quæ *a 6. tertii*
recta GH, in utramque partem extendatur, quam
H 3 necesse

h. i. scilicet. necesse est b cadere in contactus A , & C . Itaque cum G , sit centrum, & recta $AGHC$, diameter, dividetur $AGHC$, bifariam in puncto G . Simili ratione dividetur eadem AC , bifariam in H , quod est absurdum. Una enim recta in uno duntaxat puncto dividitur bifariam. Si namque GC , est dimidium totius AC , erit necessario HC , dimidio minor, cum sit pars dimidii GC .

TAB. XI. Quod si quis dicat rectam GH , extensam ad
fig. 7. partes quidem G , cadere in contactum A ; At vero ad partes H , minime pertingere ad contactum C , sed secare utrumque circulum in I , & K , ut in 7ma figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in unum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo recte affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. utrique contactui conveniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse:) ducendæ erunt ex centrīs G , H , ad contactum C , rectæ GC , HC . Ponatur igitur primo G , centrum circuli $ABCD$; & H , centrum circuli $AECF$. Et quia in triangulo GHC , duo latera GH , HC , & majora sunt latere GC : Sunt autem rectæ GH , HC , æquales ipsi GK : (quod HC , HK , ex centro H , sint æquales, & GH , communis) & recta GC , rectæ GI ; (quod sint ex G , centro,) erit quoque recta GK , major quam GI , pars quam totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G , centrum circuli $AECF$; & H , centrum circuli $ABCD$. Quoniam igitur rectæ HG , GC , & majores sunt recta HC ; Est autem HC , æqualis rectæ HA : (cum utraque ducta sit ex centro H ,) erunt quoque HG , GC , majores recta HA . Quare dempta communi HG , erit GC , major, quam GA , quod est absurdum, cum utraque ex centro G , ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno.

TAB. XI. Tangant se jam circuli AB , CB , exterius in
fig. 8. pluribus

pluribus punctis, quam uno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli CB, recta DE, & quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc est ipsi DE: *f* Sunt autem & majores, quod est absurdum. Non ergo se tangunt circuli exterius in pluribus punctis, quam uno.

cl. 12. *tertio*

f. 20. *primus*

Aliter. Si circuli AB, CB, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipsa intra unum circulorum, per 2. propos. hujus tertii lib. & ideo extra alium, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 13. PROPOS. 14. xiv.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

Sint in circulo ABCD, cujus centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & jungantur rectæ EA, ED. Secabunt rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA, *b* æquale est quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoque & rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur

TAB. XI.
fig. 9.

a. 3. *tertib.*

b. 47. *primus*

per 4. defin. hujus lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

Rursus distant rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. hujus lib. æquales erunt; & dividuntque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, *d* æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 15.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper major.

TAB. XI.
fig. 10.

IN circulo ABCDEF, cujus centrum G, diameter fit AF; & rectæ ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, majorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, major quam GL, per 4. defin. hujus lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. hujus lib. *a* & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, *b* majores quidem sunt

sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit
 & diameter AF, major, quam BE. Eadem ra-
 tione ostendetur AF, major omnibus aliis lineis.
 Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE,
 æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD;
 & angulus BGE, major est angulo CGD; erit
 recta BE, major quam CD; atque adeo HI,
 quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE, major quoque
 erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem
 linea est diameter, &c. Quod erat demonst-
 randum.

THEOR. 15. PROPOS. 16. xvi.

Quæ ab extremitate diametri cujusque cir-
 culi ad angulos rectos ducitur, extra ipsum
 circumulum cadet; & in locum inter ipsam re-
 ctam lineam, & peripheriam comprehensum,
 altera recta linea non cadet: & semicirculi
 quidem angulus, quovis angulo acuto recti-
 lineo major est; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cujus centrum D, diameter TAB. XI.
 sit AC, ad quam ex A, puncto extremo per-
 pendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpen-
 dicularem necessario extra circumulum cadere. Si
 enim cadit intra ipsum, qualis est AB; ducta
 DB, erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, a 5. primi
 sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur
 & DBA, rectus erit, quod est absurdum. Duo
 enim anguli in triangulo b minores sunt duobus b 17. primi
 rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra cir-
 culum: neque eandem ob causam in ipsam cir-
 cumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico
 jam ex A, inter AE, rectam, & circumferenti-
 am AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat
 enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D,
 ducatur perpendicularis DH, secans circumferen-
 tiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti
 DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1.
 Quo-

17. *primi* Quoniam igitur in triangulo DAH, & duo anguli
 DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; &
 DHA, rectus est, per constructionem, erit angu-
 lus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc
 19. *primi* est, recta illi æqualis DI, & major erit, quam
 DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non
 igitur intercipietur recta inter AE, & circumfe-
 rentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra
 AE, ea secabit circum. Dico denique angulum se-
 micirculi, contentum diametro AC, & circumferen-
 tia AB, majorem esse omni acuto angulo rectilineo;
 reliquum vero angulum contingentiae, qui continetur
 recta AE, & circumferentia AB, minorem esse
 omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim
 ostensum est, omnem rectam ex A, ductam,
 infra perpendicularem AE, cadere intra circum,
 faciet necessario ea linea cum AC, angulum re-
 ctilineum acutum minorem angulo semicirculi,
 at vero cum AE, angulum rectilineum acutum
 majorem angulo contingentiae, cum ille sit pars
 anguli semicirculi, hic vero totum quodpiam
 respectu anguli contingentiae. Id quod liquido
 constat, ducta recta AB, quomodocunque infra
 AE. Nam cum hæc linea AB, intra circum
 cadat, ut demonstratum est, erit angulus rectili-
 neus acutus CAB, minor angulo semicirculi
 contento sub diametro AC, & circumferentia
 ABC, cum ille hujus sit pars: Angulus vero
 contingentiae contentus sub tangente linea AE,
 & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo
 acuto BAE, quod ille hujus pars sit. Eademque
 ratio est de omnibus aliis angulis acutis rectili-
 neis, cum omnes contineantur à diametro AC,
 vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, du-
 ctis, quæ omnes intra circum cadent, ut de-
 monstravimus. Angulus igitur semicirculi major
 est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem
 angulus contingentiae, minor. Itaque quæ ab ex-
 tremirate diametri cujusque circuli ad angulos
 rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

Quare si jubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB; rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, ut demonstratum est.

TAB XL
fig. 14.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

xvii.

A dato puncto rectam lineam ducere,
quæ datum tangat circulum.

EX puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum BC, cujus centrum D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in B. Deinde centro D, intervallo autem DA, describatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, secans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, utrumque utrique, ut constet ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat.

TAB XL
fig. 13.

a 4. primi

THEOR.

xviiij. THEOR. 16. PROPOS. 18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adjungatur recta quædem linea; quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

TAB. XI. fig. 14. **R**ecta linea AB, tangat in C, circulum CD, cujus centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare major erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

Aliter. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum major sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. *c16. tertii.* Omnis siquidem angulus semicirculi major est omni acuto.

xviiiij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAB. XI. fig. 15. **T**angat recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra

extra CE, sit F, centrum; à quo ad C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xx.

In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cujus centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, a erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, b æqualis duobus angulis internis DAB, DBA: Quare BDE, duplus erit alterius eorum, ut anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.

TAB. XI.
fig. 16.

a 5. primæ
b 3a. primæ

Deinde non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, c æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo d inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sunt æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

TAB. XI.
fig. 17.

c 3a. primæ

d 5. primæ

Tertio recta AB, secet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur

TAB. XII.
fig. 1.

126. EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, ut ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, *10. prop.* duplus erit reliqui anguli BAC. Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.

xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inter se æquales.

TAB. XII. *fig. 2.* **I**N circulo ABCD, cujus centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo majus; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, *10. prop.* duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. *b. 7. prop.* Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alii anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse æquales.

TAB. XII. *fig. 3. 4.* **S**it deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, *10. prop.* duplus est anguli DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli simul DEF, CEF, duorum angulorum simul DAF, CAF, dupli erunt, hoc est, totius anguli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF:

DEF; erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

Aliter. Secent sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento majori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.

Aliter. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quodvis F, includentibus centrum E, ita ut tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum majus; jungantur quoque rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento majori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam majori FDABC, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxii.

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex adverso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cujus centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC,

ABC , æqualis est duobus angulis ACD , CAD .
 Addito igitur communi angulo CDA , erunt duo
 anguli ABC , CDA , æquales tribus angulis ACD ,
 CAD , CDA . *b* Sed hi tres æquales sunt duo-
 bus rectis. Igitur & duo ABC , CDA , duobus
 erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus,
 angulos BCD , DAB , duobus esse rectis æqua-
 les. Nam rursus duo anguli ABD , ACD , sunt
 æquales: Item duo BCA , BDA ; ac propterea
 totus angulus BCD , duobus angulis ABD ,
 BDA , æqualis erit. Addito igitur communi an-
 gulo BAD ; erunt duo anguli BCD , BAD ,
 æquales tribus angulis ABD , BDA , DAB . *c* Sed
 hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur &
 duo BCD , DAB , duobus rectis æquales erunt.
 Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum,
 &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I U M.

*Anguli insistentes arcibus circulorum similibus
 sive ad centra, sive ad circumferentias, sunt in-
 ter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli
 æquales sive ad centra, sive ad circumferentias
 insistent, similes sunt.*

TAB. XII. *Sint in circulis $ABCD$, $EFGH$, quorum centra*
fig. 11. I , K , primum arcus similes BCD , FGH , quibus
ad centra insistant anguli I , K , ad circumferentias
vero anguli A , E . Dico tam illos, quam hos inter
se æquales esse. Constituantur enim in illis arcibus
anguli C , G , qui ex defin. segmentorum similium,
æquales erunt. k Sunt autem tam duo anguli C ,
 A , quam duo G , E , duobus rectis æquales. Abla-
tis igitur æqualibus C , G , erunt quoque reliqui
120. tertii A , E , æquales. Quorum cum dupli sunt anguli I ,
m 6. prim. K , metuntur hi quoque æquales. Quod est propositum.
Deinde sint tam anguli I , K , quam A , E , in-
sistentes arcibus BCD , FGH , inter se æquales. Dico
arcus BCD , FGH , esse similes. Nam si A , & E ,
sint

sint æquales: sint n autem tam duo anguli A, C , 111. tertii. quam duo E, G , duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G , æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH , quibus anguli æquales A, E , ad circumferentias insistant, similes. Si vero anguli I, K , ad centra sint æquales, oerunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, o 7. primi. anguli A, E . Quare ut prius, arcus BCD, FGH , similes sunt. Quod erat ostendendum.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxij.

Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB , constitu- TAB. XII.
antur ad easdem partes duo segmenta similia, fig. 12.
& inæqualia ACB, ADB . Perspicuum est autem,
quod se solum intersecant in punctis $A, & B$;
a Circulus enim circulum non secant in pluribus 110. tertii.
punctis, quam duobus. Unde peripheria unius
segmenti tota erit extra peripheriam alterius.
Ducatur igitur recta AD , secans circumferentias
in $C, & D$, & connectantur rectæ CB, DB .
Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit
per 10. defin. hujus lib. angulus ACB , æqualis
angulo ADB , externus interno: b quod est ab- b 16. primi.
surdum. Non igitur segmenta sunt similia: Qua-
re super eadem recta linea, &c. Quod erat de-
monstrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiv.

Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

Super rectis lineis æqualibus AB, CD , consti- TAB. XII.
tuta sint segmenta similia AEB, CFD , Dico fig. 13.
ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD ,
I cum

cum sint æquales, congruent inter se, si alteri superponatur. Dico igitur & segmentum AEB, segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia, quorum unum totum extra aliud cadit, quod est absurdum. *a* Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quam duobus nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. *b* *10. tertii.* Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

xxv. PROBL. 3. PROPOS. 25.

Circuli segmento dato, describere circum-
culum, cujus est segmentum.

TAB. XII.
Æ. 14.

*S*it segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel major est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum major, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propof. 1. hujus lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, major, quam DB, cum *a* 7. *tertiis.* DB, perficiens diametrum *a* sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. *a* 18. *primis* Quare angulus DBA, *b* major erit angulo DAB) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cujus segmentum ABC.

ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. Quare bases EA, EC, æquales erunt; c 4. primi
 Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli d 6. primi
 EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, e 9. tertii
 centrum erit circuli ABC, quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

Sit deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare f & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) g Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quod recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam, h erit D, centrum. h 9. tertii.

Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, TAB. XII. fig. 15.
 (quod quidem eveniet, si segmentum ABC, semicirculo majus exstiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. hujus lib. quod quidem intra segmentum, cum majus esse ponatur, existit; i erit DB, omnium, i 7. tertii.
 quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; major igitur erit quam DA, k ideoque angulus DAB, major angulo DBA,) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus DBA, major erat angulo DAB, ut constat, si recta ducatur EC. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cujus est segmentum. Quod facere oportebat. k 18. primi

xxvi. THEOR. 23. PROPOS. 26.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistant, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

TAB. XII. fig. 17. IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistant, sive super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur
a 20. tertii. anguli B, & E, dimidii sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypothesi; *b 4. primi* erunt bases AC, DF, æquales. Cum igitur segmenta similia ABC, DEF, sint
c 24. tertii. super lineas æquales AC, DF, *c* erunt ipsa inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta AC, DF, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF. Quod est propositum.

Sint deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF:
d 20. tertii. (cum enim anguli G, H, æquales sint, *d* quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt,
e 24. tertii. ut prius rectæ AC, DF, æquales) *e* erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvii.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistant, sunt inter se æquales, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum *TAB. XIII*
centra G, H, insistant primum anguli ad cen- *fig. 1.*
tra AGC, & DHF, æqualibus peripheriis
AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF,
æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit an-
gulus G, major, fiatque angulus AGI, æqualis
angulo DHF. Erunt igitur peripheriæ AI, DF, *a26. tertii*
æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis
ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI,
AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est
absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æ-
quales.

Insistant deinde eisdem peripheriis æqualibus
AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias: quos
rursus dico æquales esse. Nam si alter, ut ABC,
major est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI,
eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, *b26. tertii*
ut prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales,
pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo
anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus
igitur circulis, anguli, qui æqualibus peri-
pheriis insistant, &c. Quod demonstrandum
erat.

S C H O L I U M.

Si vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet majori
major angulus, sive ad centrum, sive ad circumferentiam,
quam minori. Sit peripheria AC, major, quam periphe- *TAB. XIII*
ria DF. Dico angulum AGC, majorem esse angulo *fig. 2.*
DHF, & angulum ABC, majorem angulo DEF.
Si enim fiat peripheria EI, æqualis peripheriæ DF,
I 3 ducan-

ducanturque rectæ IG , IB , erunt ut ostensum est, tam anguli ad centrum CGI , DHF , quam anguli ad circumferentiam CBI , DEF , æquales. Quare & angulus AGC , angulo DHF , & angulus ABC , angulo DEF , erit major.

Linea recta, qua ex medio puncto peripheria alicujus ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, qua peripheriam illam subtendit.

TAB. XIII
fig. 3. In circulo ABC , cujus centrum D , ducatur ex A , puncto medio peripheriæ BAC , linea EF , tangens circulum. Dico EF , parallelam esse rectæ BC , arcum BAC , subtendenti. Ducta enim ex centro D , ad punctum contactus A , recta DA , secante rectam BC , in G , connexisque rectis DB , DC , h erunt anguli ADB , ADC , circumferentiis æqualibus AB , AC , insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD , DC , trianguli BDG , lateribus CD , DC , trianguli CDG , æqualia, utrumque utrique. i Igitur & anguli ad G , æquales sunt super bases GB , GC , ac propterea recti. Igitur & AGB , AGC , illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli k 13 . primi GAE , GAH , recti. k quod DA , perpendicularis sit l 18 . primi ad EF . l Ergo EF , BC , parallele sunt. Quod est propositum.

• Angulus rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante majori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante majori, obtusus.

TAB. XIII
fig. 4. Rectus angulus ABC , insistat arcui AC , in centro B , circuli $ACDE$. Dico arcum AC , quadrantem esse, &c. Productis enim rectis AB , CB , ad D , E , erunt quoque anguli ABE , CBD , recto ABC , deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non m 15 . primi & angulus DBE , rectus; in eum equalis sit recto angulo

angulo ABC , ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B , æquales sunt, utpote recti: ac propterea nuncius AC , CD , DE , EA , quibus insistant, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB , in B , constituens angulum acutum, cadit in arcum AC : recta vero cum eadem AB , in B , continens angulum obtusum, cadit in arcum CD ; liquido constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum vero majori.

Sed insistant jam quadranti AC , angulus ABC , in centro B . Dico angulum ABC , esse rectum, &c. Productis enim rursus rectis AB , CB , ad D , E ; quoniam tam CAE , quam ACD , & AED , semicirculus est, estque AC , quadrans; erit tam AE , quam CD , quadrans quoque, ac proinde & DE , in semicirculo AED , quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC , CD , DE , EA , æquales, & ac proinde anguli ad centrum B , illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB , auferens minorem arcum quadrante AC , facit in centro B , cum AB , minorem angulum recto angulo ABC ; recta vero cum eadem AB , auferens majorem arcum quadrante AC , constituit in centro B , angulum recto angulo ABC , majorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; majori vero, obtusum. Quod est propositum.

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxviii.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, majorem quidem majori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus ABC , DEF , quorum centra G , & H , sint rectæ æquales AC , DE . Dico majorem peripheriam ABC , æqualem esse majori DEF , & minorem AC , minori DE . Ducis enim rectis AG , GC , DH , HF ; erunt latera

latera AG , GC , trianguli AGC , æqualia lateribus DH , HF , trianguli DHF . Ponuntur autem
 a 8. primi & bases AC , DF , æquales. Igitur anguli G ,
 b 6. tertii & H , æquales erunt: Ac propterea peripheriæ
 AC , DF , quibus insistant, bæquales erunt; quæ
 ablatae ex totis æqualibus, relinquent etiam æqua-
 les ABC , DEF . In æqualibus ergo circulis
 æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demon-
 strandum.

S C H O L I U M.

Quod si fuerint lineæ inæquales in circulis æquali-
 bus, auferet major lineæ, majorem peripheriam,
 quam minor, si loquamur de segmentis circuli minu-
 ribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli ma-
 joribus sermo habeatur, major lineæ auferet minorem
 TAB. XIII. peripheriam, quam minor. In circulis enim æquali-
 fig. 6. bus ABC , DEF , quorum centra G , & H , sit
 rectæ AC , major, quam DF . Dico peripheriam AC ,
 semicirculo minorem, majorem esse peripheriam DF :
 At peripheriam ABC , minorem peripheriam DEF .
 Ductis enim rectis AG , GC , DH , HF , erunt la-
 tera AG , GC , trianguli AGC , æqualia lateribus
 DH , HF , trianguli DHF . Ponitur autem basis
 c 15. primi AC , major base DF . Igitur angulus AGC , ma-
 jor erit angulo DHF . Fiat angulus CGI , angulo
 c 26. tertii DHF , æqualis; eritque propterea & peripheria CI ,
 peripheriæ DF , æqualis; Ac proinde peripheria AIC ,
 major, quam peripheria DF : Ideoque reliqua ABC ,
 minor, quam reliqua DEF .

xxix. T H E O R. 26. P R O P O S. 29.

In æqualibus circulis, æquales peripheri-
 as, æquales rectæ lineæ subtendunt.

TAB. XIII. I N circulis eisdem æqualibus ponantur æquales
 fig. 5. peripheriæ ABC , DEF ; Item AC , & DF .
 Dico rectas AC , DF , quæ eas subtendunt, esse
 æquales.

æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera AG , GC , trianguli AGC , æqualia lateribus DH , HF , trianguli DHF : Sunt autem & anguli G , H , æquales, quod æqualibus peripheriis AC , DF , insistant. Igitur bases AC , DF , æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum. a 17. tertii.
b 4. primi

S C H O L I U M.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet majorem major linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis majoribus semicirculo loquamur, subtendet majorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC , DEF , quorum centra G , H , sint peripheriæ semicirculo minores AC , DF ; sitque AC , major, quam DF ; Ac proinde ABC minor, quam DEF . Dico lineam AC , majorem esse, quam DF . Ductis enim rectis AG , GC & DH , HF ; erit angulus AGC , major angulo DHF , ex scholio propos. 27. hujus lib. Cum igitur latera AG , GC , trianguli AGC , æqualia sint lateribus DH , HF , trianguli DHF , erit basis AC , major base DF , &c. TAB XIII.
fig. 6.
c 24. primi

P R O B L. 4. P R O P O S. 30. xxx.

Datam peripheriam bifariam secare.

Si peripheria ABC , secunda bifariam. Ducatur recta subtendens AC , qua divisa bifariam in D , erigatur perpendicularis DB , quæ peripheriam ABC , bifariam secabit in B . Ductis enim rectis AB , CB , erunt latera AD , DB , trianguli ADB , æqualia lateribus CD , DB , trianguli CDB : Sunt autem & anguli ad D , æquales, nempe recti. Igitur & bases AB , CB , æquales erunt; Ac propterea peripheriæ AB , CB , erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum. TAB XIII.
fig. 7.
a 4. primi
b 8. tertii.

XXXI. THEOR. 27. PROPOS. 31.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus minor est recto.

TAB. XIII. **Fig. 8.** Circuli enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturque in semicirculo angulus ABC, existetque angulus BAC, in maiori segmento CAB. Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiori segmento, minorem recto, & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem. At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, *a* erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. *b* Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

c Quoniam vero in triangulo ABC, duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

Rursus quia in quadrilatero ABEC, intra circulum

culum descripto, & duo anguli oppositi BAC , & BEC , sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC , ostensus est recto minor: Erit BEC , angulus in segmento minore, recto major; quod est tertium.

Amplius cum angulus rectus ABC , pars sit anguli segmenti majoris ABC , qui comprehenditur recta BC , & peripheria BAC ; erit angulus segmenti majoris, recto major, quod est quartum.

Postremo, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC , & peripheria BEC , pars sit quoque anguli recti FBC ; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est, eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis.

THEOR. 28. PROPOS. 32. xxxii.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producat quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

Tangat recta AB , circulum CDE , in C , puncto, à quo ducatur recta CE , dividens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE , CDE . Dico angulum ACE , æqualem esse angulo CGE , in alterno segmento; & angulum BCE , angulo CDE , in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, recta CE , per centrum. *a* Erit igitur uterque angulus ACE , *a* BCE , rectus: *b* Sunt autem & anguli CGE , CDE , in semicirculis recti. Igitur angulus ACE , angulo

TAB. III.
fig. 9.

a 18. sect. 2.
b 31. sect. 2.

angulo CGE ; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.

TAB. XIII. Non transeat jam CE, recta per centrum. Du-
fig. 10. sta igitur recta CF, per centrum, connectatur
c 18. tertii. recta EF : eritque CF, perpendicularis ad AB,
d 31. tertii. & angulus CEF, rectus ; ac propterea reliqui
 anguli ECF, EFC, æquales erunt uni recto, ut
 angulo recto ACF. Dempto ergo communi an-
 gulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE,
e 21. tertii. æqualis : Est autem angulo CRE, æqualis quo-
 que angulus CGE, cum uterque sit in segmento
 CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æ-
 qualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG,
f 22. tertii. duo anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æ-
g 13. primi quales : Sunt autem & duo anguli ACE, BCE,
 duobus rectis æquales ; si auferantur æquales an-
 guli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, an-
 gulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit
 aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod
 erat, ostendendum.

xxxiii. PROBL. 5. PROPOS. 33.

Super data recta linea describere segmen-
 tum circuli, quod capiat angulum æqualem
 dato angulo rectilineo.

TAB. XIII. **R**ecta data sit AB, & datus angulus primum
fig. 11. rectus C. Oportet igitur super AB, seg-
 mentum describere, in quo angulus existens sit
 æqualis angulo recto dato C. Divisa AB, bifa-
 riam in D, describatur centro D, intervallo au-
 tem DA, vel DB, semicirculus AEB ; factumque
a 31. tertii. erit, quod proponitur. Nam angulus AEB,
 in descripto semicirculo rectus est, ideoque æ-
 qualis angulo C, recto.

TAB. XIII. Sit deinde angulus datus acutus C. Ad pun-
fig. 12. ctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C,
 acuto ; & agatur ad DA, perpendicularis AE,
 quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB,
 æqualis angulus FBA, secetque BF, rectam AE,
 in

Quare si centro F, & intervallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super AB, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia dicitur AE, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. hujus lib. Quapropter alter angulus DAB, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento altero AGB.

Sit tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ supra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, descriptumque erit super AB, segmentum AKB, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus IAB, hoc est, angulus datus H, æqualis est angulo K, in alterno segmento AKB. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL. 6. PROPOS. 34. xxxiv.

A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Datus circulus sit ABC, à quo auferre oportet segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. Ducatur recta EF, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in segmento ablato ACB, æqualem esse dato angulo D. Est enim angulus FAB, æqualis angulo C, in alterno segmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus

TAB. XII. fig. 13.

a 17. versu.

b 31. versu.

dimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.

XXXV. THEOR. 29. PROPOS. 35.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

TAB. XIV. In circulo ACBD, secant se mutuo rectæ
fig. 1. AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Trauseat primum utraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus unius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex iis, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

fig. 2. Trauseat deinde CD, sola per centrum F, dividatque primum rectam AB, bisariam, **a** ac propterea ad angulos rectos, conjungaturque recta BF. Quoniam igitur CD, divisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E, **b** erit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB, cum rectæ FD, FB, sint æquales: Est autem **c** quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB, cum AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex iis, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus. Divi-

Dividat jam CD, transiens per centrum rectam *fig. 3. 4.*
 AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam
 in G, ducanturque rectæ FG, FB, & eritque FG, d *3. tertii.*
 perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectangu-
 lum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ FE,
 æquale est quadrato rectæ FD, hoc est, qua- e *5. sec.*
 drato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE,
 æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadra- f *47. primi*
 tum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG,
 GB: erit quoque rectangulum sub CE, ED,
 una cum quadratis rectarum FG, GE, æquale
 quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo
 communi quadrato rectæ FG, remanebit rectan-
 gulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ
 GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam
 rectangulum sub AE, EB, una cum quadrato
 rectæ GE, g æquale est eidem quadrato rectæ g *5. sec.*
 GB: propterea quod recta AB, secta est bifariam
 in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum
 sub CE, ED, una cum quadrato rectæ GE, æ-
 quale est rectangulo sub AE, EB, una cum
 quadrato ejusdem rectæ GE. Quare ablato com-
 muni quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum
 sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB.
 Quod est propositum.

Tertio neutra per centrum transeat, sive una *fig. 5. 6.*
 illarum bifariam dividatur, sive neutra. Ducatur
 per centrum F, & punctum sectionis E, recta
 GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum
 sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE,
 EH: sive AB, dividatur bifariam, sive non: Item
 rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque
 eidem rectangulo sub GE, EH; sive CD, secta
 sit bifariam, sive non; Erit rectangulum sub
 AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED, quod
 est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ
 lineæ sese mutuo secant, &c. Quod demon-
 strandum erat.

THEOR.

XXXVI. THEOR. 30. PROPOS. 36.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

TAB. XIV. **fig. 7.** **a 17. tertii.** **b 18. tertii.** **c 6. sec.** **d 47. primi.** **E**Xtra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primum recta DA, per centrum E, & jungatur recta EB, quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, divisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum CD, erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE: Est autem quadratum rectæ DE, æquale quadratis rectarum EB, BD. Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale. Quod est propositum.

TAB. XIV. **fig. 8, 9.** **c 18. tertii.** **f 3. tertii.** **g 6. sec.** Non transeat jam DA, secans per centrum E. Divisa ergo AC, bifariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF; eritque EB, ad BD, perpendicularis; f & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, divisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, g erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF,

DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, *b*æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et i quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE, *k*æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

*b47. primi
i 47. primi*

k 47. primi

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum est, si à puncto quovis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus inter se esse æqualia. Ut si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, *l*erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.

*TAB. XIV.
fig. 10.*

l 36. tertii.

COROLLARIUM II.

Constat etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum: quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quam quadratum rectæ AC, *m*æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.

*TAB. XIV.
fig. 11.*

m 36. tertii

COROLLARIUM. III.

Perſpicuum quoque eſt, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci poſſit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, ærunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod eſt abſurdum. Nam ſi ducatur recta AE, erit angulus ADE, major angulo ABE.

TAB. XIV. fig. 12.
q 18. tertii.
q 21. primi

Aliter. Si tertia AD, circulum etiam tangat; erunt duæ tangentæ AB, AD, æquales, ut oſtenſum eſt; quod eſt abſurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum fecet in F, perit AD, cum ſit propinquior minimæ AF, minor, quam AB, quæ à minima AF, remotior eſt. Vel ſic. Si AB, AD, ſunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, iſſis AD, DE, æquales, quod eſt abſurdum. Sunt enim majores AB, BE. Solum igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod eſt propoſitum.

p 8. tertii.
q 21. primi

COROLLARIUM. IV.

Illud denique conſtat etiam, ſi duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in convexam peripheriam incidant, & earum una circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Ut ſi duæ rectæ AB, AC, ſint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, eruntque ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, iſſi AC, æqualis poſatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod eſt abſurdum.

TAB. XIV. fig. 12.
p 8. tertii.

Aliter. Ponantur duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & baſis DE, communis. Igitur anguli B, F, æquales erunt: Sed B, rectus eſt. Igitur & F, rectus erit, atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propoſ. 16. hujus lib.

TAB. XIV. fig. 13.
p 8. primi
t 18. tertii.

THEOR.

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvij.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ linæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & convexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXtra circulum ABC, cujus centrum E, punctum sumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidens in circulum ejusque punctum B; sitque rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. *a* Ducatur enim DF, tangens circulum, & jungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans non transeat per centrum E, jungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo sub DA, DC, æquale est quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo sub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & basis DE, communis, erunt anguli DFE, DBE, æquales. Atqui angulus DFE, rectus est, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. hujus lib. DB, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

TABLIV.
fig. 13.

a 17. tertii.

fig. 14.

b 36. tertii.

c 8. primi.
d 18. tertii.



EUCLIDIS ELEMENTUM QUARTUM.

DEFINITIO. I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera ejus, in quâ inscribitur, tangunt.



Gens Euclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circumscriptiōibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris: Si igitur anguli

TAB. XIV. *D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera*
fig. 15. *AB, AC, BC, trianguli externi ABC; dicetur*
fig. 16. *triangulum DEF, in triangulo ABC, esse inscrip-*
tum. At quoniam angulus M, trianguli KLM,
non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur
triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI,
quamvis totum illud sit intra hoc, duoque anguli
K, L, tangant duo latera GH, GI.

DEFI.

DEFINITIO. II.

Similiter & figura circum figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint; circum quam illa describitur.

E Contrario dicitur triangulum ABC , describi *TAB. XIV.* circa triangulum DEF ; quoniam singula latera *fig. 15. 16.* illius singulos hujus angulos tangunt; At triangulum GHI , non dicitur descriptum esse circa triangulum KLM , propterea quod latus illius HI , angulum hujus M , non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

DEFINITIO. III.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

UT si tangant anguli A, B, C , trianguli ABC , *TAB. XV.* peripheriam circuli ABC , dicitur triangulum *fig. 1.* in circulo esse inscriptum. Quod si vel unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

DEFINITIO. IV.

Figura vero rectilinea circa circumulum describi dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero si latera trianguli ABC , singula tangant *TAB. XV.* peripheriam circuli DEF ; dicitur triangulum *fig. 2.* circa circumulum esse descriptum.

D E F I N I T I O. V.

Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ, cui inscribitur.

D E F I N I T I O. VI.

Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit ejus figuræ, quam circum scribit, angulos.

TAB. XV.
fig. 2. 1.

Vicissim dicetur circulus DEF, inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, descriptus esse circa triangulum ABC. Idem judicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

D E F I N I T I O. VII.

Recta linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.

TAB. XV.
fig. 3.

UT recta linea AB, quoniam ejus extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicatur: Non autem recta E, vel CD; quia hac alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit major.

IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea æ- *TAB. XV.*
qualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen major *fig. 4.*
non sit diametro circuli dati. Cum enim *a 15. tertii.*
diameter sit omnium rectarum in circulo maxima, si
data recta diametro major foret, non posset in
circulo aptari illi una æqualis. Ducatur ergo
diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis
fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si
vero D, minor fuerit diametro, abscindatur BE, *b 3. primi*
æqualis ipsi D, & centro B, intervallo autem
BE, circulus describatur EA, secans circum-
ulum ABC, in A, ducta igitur recta BA, erit ea ap-
tata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D.
Est enim BA, æqualis ipsi BE, & D, æqualis *c 15. def. primi.*
eidem BE, per constructionem. Quare AB, &
D, inter se æquales quoque erunt. In dato er-
go circulo rectam lineam accommodavimus, &c.
Quod faciendum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

In dato circulo triangulum describere
dato triangulo æquiangulum.

SIt in circulo ABC, dato describendum trian- *TAB. XV.*
gulum æquiangulum triangulo dato cuicun- *fig. 5.*
que DEF. Ducatur recta GH, tangens circum-
ulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqua-
lis, & angulus HAC, angulo E, atque exten-
dantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam us-
que in puncta B, & C, jungaturque recta
BC. (Non cadet autem recta AC, in rectam
AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quod
K 4 anguli

a 17. *primi* anguli GAB, HAC, hoc est anguli F, E, a minores sunt duobus rectis. b Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in AB, caderet; vel majores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet.) Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim
 c 32. *secundum* angulus C, æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B,
 d 32. *tertium* æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli
 e 32. *primi* DEF, erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

iii. PROBL. 3. PROPOS. 3.

Circa datum circum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

TAB. XV. *fig. 9, 10.* C Irca circum datum ABC, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF. Producto latere EF, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta utcumque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares KL, LM, MK, quæ circum tangunt in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores, ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet supra rectas AI, CI, quod hæc angulum constituent in I. Cum enim spatium circa I, æquale

æquale sit quatuor rectis ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F, sint-
 que duo anguli AIB, CIB, duobus angulis *b 13. primi*
 DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium
 AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æ-
 quale: Sed *a 17. primi* hi minores sunt duobus rectis. Igi-
 tur & spatium AIC, minus erit duobus rectis,
 ac proinde angulus erit AIC. Alias spatium
 illud fiet vel æquale duobus rectis, si nimirum
 AI, CI, unam rectam lineam constituerent; vel
 majus duobus rectis, si recta AI, producta, ca-
 deret supra IC. Cadit igitur necessario AI, pro-
 ducta infra CI, atque idcirco angulus fiet AIC,
 ad partes K, & ducta recta AC, faciet cum
 AK, CK, duos angulos minores duobus rectis,
 ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non *g 13. primi.*
 secus ostendemus, AL, BL, coire in L, &
 CM, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC,
 facient cum AL, BL, CM, BM, angulos mi-
 nores duobus rectis. Descriptum est igitur circa
 circumulum triangulum KLM, quod dico esse æ-
 quiangulum triangulo DEF. Quoniam enim om-
 nes anguli in quadrilatero AIBL, æquales sunt
 quatuor rectis, ut ad 32. propof. lib. 1. ostensum
 fuit, & anguli IAL, IBL, sunt duo recti, erunt
 reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum
 igitur *b 13. primi* & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis
 æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, re-
 manebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari
 ratione ostendemus angulum M, æqualem esse
 angulo DFE. Reliquus igitur angulus K, reli-
 quo angulo D, æqualis erit; atque idcirco trian-
 gulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. *c 32. primi.*
 Circa datum ergo circumulum, &c. Quod efficien-
 dum erat.

PROBL. 4. PROPOS. 4. *iv.*

In dato triangulo circumulum inscribere.

Sit describendus circumulus in dato triangulo ABC. *TAB. XV.*
 Divisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam *fig. 11.*
 K 5 rectis

- b 9. *primi* rectis BD, CD *b*, quæ intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendicularares DE, DF, DG *c*. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt duobus angulis DBF, DFB, trianguli DBF, uterque utrique; & latus BD, commune; æerunt quoque latera DE, DF, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad intervallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G *d*; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propof. 16. lib. 3. quod latera perpendiculararia sint ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

v. P R O B L. 5. P R O P O S. 5.

Circa datum triangulum circulum describere.

- TAB. XV. *fig. 12, 13, 14.* Sit circulus describendus circa datum triangulum ABC. Dividantur duo latera AC, AB, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamvis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quævis latera bifariam possint secari) bifariam in D, & E *e*, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; æerunt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad intervallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa

Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in majori segmento circuli: si vero sit in latere BC, angulum BAC, ei lateri oppositum, esse rectum quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulum oppositum BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

Contra vero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, sive absurdum. Quia si in acutangolo caderet centrum in unum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectangolo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra, esset angulus oppositus obtusus. Denique si in obtusangolo caderet in unum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte hujus coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothese.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

vi.

In dato circulo quadratum describere.

Sit in dato circulo ABCD, cujus centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se se ad angulos rectos in centro E, & jungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; ærunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB.

TAB. XV
fig. 15.

a 4. p. 15

AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod brevius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales
b16.tertiū. sunt, nimirum recti; *b*erunt quatuor arcus, qui-
c19.tertiū. bus insistant, æquales: *c*ac proinde & rectæ qua-
 tuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo late-
 ra quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt.
d31.tertiū. Sunt autem *d*& anguli recti, cum omnes in se-
e 19. def. micirculis existant. Quare quadratum erit ABCD, *e*,
primi. proptereaque in dato circulo quadratum descripsi-
 mus. Quod erat faciendum.

vij. P R O B L. 7. P R O P O S. 7.

Circa datum circulum quadratum de-
 scribere.

TAB. XV
fig. 16. SIt circa datum circulum ABCD, cujus cen-
 trum E, describendum quadratum. Ducan-
 tur duæ diametri AC, BD, secantes se in E,
 centro ad angulos rectos; & per A, B, C, &
 D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares
 FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H,
d13.prim. I, G. *a*Quod enim coeant AF, BF, patet ex
 eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF,
 duos angulos duobus rectis minores; atque ita
 de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa
 circulum datum descriptum. Cum enim anguli
a18.prim. AEB, FBE, sint recti, *a*erunt FH, AC, paral-
 lelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ.
b30.prim. *b* Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem
 modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur
c34.prim. parallelogrammum est ACHF, *c*erunt latera op-
 posita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi
 ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus.
 Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione osten-
 demus angulos H, I, G, rectos esse: & latera
 HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC.
 Quare cum diametri sint æquales, erunt & qua-
 tuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque
 FGIH,

FGIH, quadratum erit; cujus quidem latera circulum tangunt, per corollarium propof. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum defcripfimus: Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8. viij.

In dato quadrato circulum defcribere.

It in dato quadrato ABCD, infcribendus circulus. Divifis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, fecantes fe in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales funt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales & parallelæ. Quare & AB, parallela eft, & æqualis ipfi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipfi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter fe æquales, cum fint femiffes æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus defcriptus ex I, ad intervallum IE, tranfbit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propof. 16. lib. 3. *b* quod anguli ad E, F, G, H, fint recti, defcriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum defcripfimus. Quod efficiendum erat. TAB. XV. fig. 17. 232. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9. ix.

Circa datum quadratum circulum defcribere.

It defcribendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, fecantes fe in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia funt erunt anguli ABD, ADB, æquales: TAB. XV. fig. 18. 235. primi

b32. primus les : Est autem angulus BAD, rectus. **b** Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; **c 6. primus** erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, intervallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

S C H O L I U M.

TAB. XVI. Quod si circa datum circulum EFGH, describatur **fig. 1.** quadratum ABCD, & in eodem circulo aliud quadratum EFGH, inscribatur, erit quadratum circumscriptum ABCD, quadrati inscripti HEFG, duplum. Quoniam enim latus AB, quadrati circumscripti æquale est diametro HF, circuli. ut ex 7. propos. hujus lib. constat, hoc est, diametro HF, quadrati inscripti HEFG: quadratum vero diametri HF, duplum est quadrati HEFG, cujus est diameter, ut ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.

2. P R O B L. 10. P R O P O S. 10.

Isofceles triangulum constituere; quod habeat utrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum duplum reliqui.

TAB. XVI. Sumatur quævis recta linea, AB, quæ **fig. 2.** dividatur in C, ita ut rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde **a 11. sec.** centro A, intervallo vero AB, circulus describatur, in quo accommodetur recta BD, æqualis ipsi AC, jungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isofceles. Dico utrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli **b1. quart.** A.

A. Ducta enim recta CD, & describatur circa *c 5. quart.* triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD, & recta AB, secatur circulum DCA, & tanget recta BD, eundem circulum *d 37. tertii.* DCA, in D. Quare angulus BDC, & æqualis *e 32. tertii.* est angulo A, in alterno segmento CAD. Ad-
dito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA :
Sed his eisdem *f 32. primi* fæqualis est etiam angulus exter-
nus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit
angulo ADB, hoc est, angulo ABD, & cum *g 5. primi*
ABD, ADB, æquales sint; ac propterea *h 6. primi* rectæ
CD, BD, æquales erunt: Est autem BD, æ-
qualis posita rectæ AC. Igitur & CD, ipsi CA,
æqualis erit; & ac propterea anguli CAD, CDA, *i 5. primi*
æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis
ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus
erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare
& angulus ABD, duplus erit ejusdem anguli A.
Isosceles ergo Triangulum constituimus, habens,
&c. quod erat efficiendum.

COROLLARIUM.

Quoniam vero tres anguli trianguli ABD, & æquales *k 32. primi*
sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum
rectorum: perspicuum est, angulum A, esse quintam
partem duorum rectorum; utrumlibet autem B, D, duas
quintas partes. Item A, esse duas quintas partes unius
recti, & utrumvis B, D, quatuor quintas partes; quan-
doquidem omnes tres & æquales sunt duobus rectis, hoc *l 32. primi*
est, decem quintis unius recti.

PROBL. II. PROPOS. II.

xi.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum,
& æquiangulum inscribere.

Sit in dato circulo ABCDE, inscribendum pen- *TAB. XV.*
tagonum æquilaterum, & æquiangulum. *fig. 3.*
a Con-

- a10. quart. *a* Construat^r triangulum Iſoſceles, FGH, ita ut uterque angulorum G, H, duplus ſit reliqui F,
 b2. quart. & in circulo *b* inſcribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & uterque angulorum ACD, ADC, *c* biſariam dividatur rectis CE, DB, atque rectæ jungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum ACD, ADC, duplus ſit anguli CAD, & diviſus biſariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. *d* Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, ſuper quos aſcenderunt, atque
 c29. tertii. idcirco *e* & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt, æquilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. Rurſus quia arcus AB, ED, æquales ſunt; addito communi BCD, ſient æquales
 f27. tertii. ABCD, EDCB. *f* Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus inſiſtentes, æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſinguli ex ternis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod faciendum erat.

C O R O L L A R I U M.

- Siquitur hinc, angulum Pentagoni æquilat^ri, & æquianguli comp^recti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas unius recti *g* Cum enim ſint tres anguli
 g27. tertii. BAC, CAD, DAE, æquales ſint, utpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, inſiſtant, ſit autem CAD, per coroll. præcedentis propoſ. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ unius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum, vel ſex quintæ unius recti.

PROBL.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit circa datum circulum $ABCDE$, describen- TAB. XII.
 dum pentagonum æquilaterum, & æquiangu- fig. 4.
 lum. *a* Inscríbatúr in eo pentagonum æquilate- a 11. quart.
 rum, & æquiangulum $ABCDE$, & ex centro
 F , ducantur rectæ FA , FB , FC , FD , FE , ad
 quas ducantur perpendiculares GH , HI , IK ,
 KL , LG , coeuntes in G , H , I , K , L . Cum
 enim anguli GAE , GEA , duobus sint rectis
 minores, partes nimirum angulorum rectorum
 FAG , FEG ; *b* coibunt rectæ AG , EG , ad par- b 13. prim.
 tes G , & sic de aliis. Et quia ipsæ tangunt
 circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit de-
 scriptum pentagonum $GHIKL$, circa circulum;
 quod dico esse æquilaterum atque æquiangulum.
 Ductis enim rectis FG , FH , FI , FK , FL ,
 erunt quadrato rectæ FH , & æqualia tam quadrata c 47. prim.
 rectarum FA , AH , quam rectarum FB , BH .
 Quare quadrata rectarum FA , AH , æqualia
 erunt quadratis rectarum FB , BH . Demp-
 titur igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium
 FA , FB , remanebunt quadrata rectarum AH ,
 BH , æqualia; ideoque & rectæ AH , BH , æqua-
 les erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2.
 propos. 36. lib. 3. cum AH , BH , ex eodem
 puncto H , ducantur circulum tangentes in A ,
 & B . Quoniam ergo latera AF , FH , trianguli
 AFH , æqualia sunt lateribus BF , FH , trianguli
 BFH . Est autem & basis AH , basi BH , æqua-
 lis, ut ostensum est; *d* erunt anguli AFH , BFH , d 8. prim.
 æquales. Igitur *e* & anguli AHF , BHF . Du- e 4. prim.
 plus igitur est angulus AFB , anguli BFH , &
 angulus AHB , anguli BHF . Eodem modo
 ostendemus, angulum BFC , duplum esse anguli
 BFI , & angulum BIC , anguli BIF . Cum igitur
 anguli AFB , BFC , sint æquales, quod in- f 27. tert.
 stant

28. *tertii*. fistant circumferentiis AB, BC, quæ æquales sunt, cum à rectis æqualibus subtendantur AB, BC; erunt & dimidii eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis adjacens commune BF, erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione ostendimus GH, rectam duplam esse rectæ AH. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Æquilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, æquales esse, ac semisses angulorum BHA; BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Æquiangulum igitur est pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

C O R O L L A R I U M.

Sequitur ex hujus problematis demonstratione; si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosque conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, ut in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bisariam secabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

S C H O L I U M.

In figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quovis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, dividit quoque angulum bifariam; Et contra, recta linea dividens angulum bifariam, secat quoque latus oppositum bifariam. Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quovis angulo ad oppositum angulum ducta secat utrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea secans quemvis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque dividit.

Sit primum figura æquilatera, æquiangulaque imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa TAB.XV. recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. fig. 5. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, equalia sunt angulosque continent æquales, ex hypothesis; ierunt & bases AC, AF, i 4. primi æquales, & tam anguli BAC, GAF, quam BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, equalia sunt, continentque angulos æquales, ut ostensum est; ierunt & k 4. primi bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quam CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum perventum sit. Ubi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt; erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, equalia sint, angulosque æquales contineant, ierunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quo- l 4. primi circa cum quovis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quique totus angulus BAH,

toti angulo GAH equalis; ac proinde angulus BAG , sectus erit bifariam. Quod est propositum.

Sed jam recta AH , secet angulum BAG , bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE , bifariam. Si enim dicatur latus DE , non secari bifariam, si ex A , ducatur alia recta secans DE , bifariam, secabit eadem & angulum BAG , bifariam, ut jam ostendimus. Duae igitur rectæ eundem angulum BAG , secabunt bifariam, quod est absurdum, cum una medietas major esset quam altera. Recta ergo AH , secans angulum BAG , bifariam, secat quoque latus DE , bifariam. Quod est propositum.

TAB. XVI. fig. 6. Sit deinde figura æquilatera, & æquiangularum laterum $ABCDEFGH$, & ex angulo A , ad angulum oppositum E , ducatur recta AE . Dico rectam AE , secare tam angulum BAH , quam DEF , bifariam. Ductis enim ex A , ad omnes angulos non proximos rectis, demonstrabimus, ut in antecedente figura, quotvis angulos BAC , CAD , DAE , totidem angulis HAG , GAH , FAE , esse æquales singulos singulis; ideoque totum angulum BAE , toti angulo HAE , æqualem esse, nec non & angulum DEA , FEA , esse æqualem. Uterque igitur angulus BAH , DEF , secatur bifariam. Quod est propositum.

Sed jam recta EA , secet angulum BAH , bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E , eumque dividere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E , si ex A , ad E , ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH , bifariam, ut jam ostendimus. Duae igitur rectæ eundem angulum BAH , bifariam secabunt, quod est absurdum. Recta ergo AE , secans angulum BAH , bifariam, cadit in E , secatque propterea, ut demonstratum est proxime, angulum DEF , bifariam quoque. Quod est propositum.

xij.

P R O B L. 13. P R O P O S. 13.

In dato pentagono æquilatero & æqui-
angulo circulum inscribere.

TAB. XVI. fig. 7. Sit inscribendus circulus in dato pentagono $ABCDE$. Dividantur duo ejus anguli BAE , ABC ,

ABC, proximi bifariam a rectis AF, BF, quæ
 cocant in F. Cum enim ex scholio præcedentis a 9. primi
 propositionis rectæ AF, BF, secant opposita latera
 CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas AF,
 BF, se mutuo intra pentagonum secare, prius-
 quam rectis CD, DE, occurrant. Connectan-
 tur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur
 latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt la-
 teribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex
 constructione, & anguli ipsis contenti æquales
 ABF, CBF; erunt bases AF, CF, & anguli b 4. primi
 BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE,
 BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit
 anguli BAE, per constructionem; erit & BCF,
 dimidium anguli BCD. Divisus est ergo angu-
 lus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus,
 reliquos duos angulos CDE, DEA, divisos esse
 bifariam. Ducantur jam ex F, ad singula Pen-
 tagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK,
 FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG,
 trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis,
 FLA, FAL, trianguli FAL; estque latus AF,
 subtensum uni æqualium angulorum commune
 erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque c 26. primi
 ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK,
 æquales cuilibet istarum. Circulus igitur de-
 scriptus ex centro F, & intervallo FG, transibit
 per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero
 latera pentagoni circulum hunc tangunt, per
 coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos re-
 ctos faciant cum semidiametris FG, FH, &c.
 erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod
 faciendum erat.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Circa datum pentagonum æquilaterum,
 & æquiangulum circulum describere.

Sit circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, TAB. XVI.
 & æquiangulum, circulus describendus. Di- fig. 8.
 L 3 visis

- b 9. primi** visis duobus angulis BAE, ABC, bifariam *b* rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, ut in antecedentē propos. demonstratum est; & conjunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA. sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidii inter se æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt
- a 6. primi** FAB, FBA; *a* erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, intervallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

xv. P R O B L. 15. P R O P O S. 15.

In dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere.

- TAB. XVI. fig. 9.** **S**It in dato circulo ABCDEF, cujus centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Duæta diametro AD, describatur circulus ex centro D, intervallo vero DG, qui secet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli: erunt & rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare *a* tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se
- a 5. primi** erunt: qui cum *b* æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum: Sunt autem
- b 31. primi** tres

tres anguli CGD, DGE, EGF, æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus cum etiam æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. Quare circumferentiæ, quibus insistant, fac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC, æqualis est circumferentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, æquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insitit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvi.

In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

Si in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatere D, quod ex corol. propos. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum; inscribatur ei æquiangulum triangulum ABC.

TAB. XVI.
fig. 10.

a 2. quart.

- in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum;
 b 26. vel ex coroll. propof. 6. lib. 1. beruntque tres arcus
 28. tertii. AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas
 AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales
 angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium
 igitur partium æqualium quindecim est circumfe-
 rentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB,
 c 11. quart. qui tertia pars est totius circumferentiæ. Inſcri-
 batur rursus in dato circulo pentagonum æquila-
 terum, & æquiangulum AEFGH, applicans u-
 num angulorum ad punctum A, deruntque quin-
 que arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales.
 Qualium igitur partium æqualium quindecim est
 tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus
 AE, quinta pars existens totius circumferentiæ.
 Itaque cum arcus AB, contineat tales partes
 quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus
 e 30. tertii. arcus EB, duas. Diviſo ergo arcu EB, bifariam
 in I, erit arcus BI, pars decima quinta totius
 circumferentiæ. Quare ducta recta BI, ſubtendet
 decimam quintam partem totius circumferentiæ;
 f 1. quart. cui ſi aliæ quatuordecim, f æquales in circulo
 accommodentur, inſcriptum erit in circulo quin-
 g 27. tertii. tidecagonum æquilaterum, quod g & æquiangu-
 lum eſt, cum ejus anguli ſubtendant arcus æqua-
 les, compoſitos videlicet ex 13. arcubus æqualibus
 omnes, ut perſpicuum eſt, In dato igitur circulo
 quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

Similiter autem per ea, quæ dicta ſunt de pen-
 tagono ſupra, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus
 circa datum circulum quintidecagonum æquilate-
 rum, & æquiangulum. Item in dato quintideca-
 gono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcri-
 bemus; & tandem circa datum quintidecagonum
 deſcribemus circulum.



E U C L I D I S

E L E M E N T U M

Q U I N T U M.

Egit in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportionem quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad ullam quantitatis speciem, ut ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circumferentia circulorum, triangula, & alia figura plana. Ut igitur institutum suum servet, definit prius vocabula, quae ad demonstrationes proportionum adhibentur.

D E F I N I T I O. I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

ITaque ait magnitudinem illam minorem, quae maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari *partem*. Ut quoniam magnitudo *A*, ter sumpta, metitur.

L 5

metitur.

TAB. XVI.
fig. 11.

metitur magnitudinem B , sexies autem sumpta, magnitudinem C , dicetur magnitudo A , pars magnitudinum B , & C . At vero quia magnitudo D , non metitur magnitudines E , & F , sed sumpta bis, excedit magnitudinem E , & sumpta ter, deficit à magnitudine F , sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D , pars magnitudinum E , & F .

D E F I N I T I O. II.

Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

TAB. XVI. fig. 11. **U**T in superiori exemplo tam magnitudo B , quam magnitudo C , multiplex est magnitudinis A , quoniam hæc utramque illam metitur. At vero neque magnitudo E , neque magnitudo F , multiplex est dicenda magnitudinis D , propterea quod hæc neutrum illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita ut minor quantitas mensurans majorem, dicatur pars majoris; Major vero mensurata à minori, dicatur minoris multiplex.

Ceterum quando dua magnitudines minores duas alias majores aequè metiuntur, hoc est, una minor in una majore toties continetur, quoties altera minor in altera majore; dicuntur dua hæ majores duarum illarum minorum aequè multiplices. Quod idem dices, si plures minores aequè metiantur plures majores.

D E F I N I T I O. III.

Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundum quantitatem, habitudo.

QUando dua quantitates ejusdem generis, ut duo numeri, dua lineæ, dua superficies, duo solida,

da, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod una major est, quam altera, vel minor, vel aequalis; appellatur hujusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio; seu (ut aliis placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quopiam, vel numerus cum linea, non dicitur ea comparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint ejusdem generis quantitatis. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est secundum quod una est alba, & altera nigra; aut quod una est calida, & altera frigida, &c. quamvis amba sint ejusdem generis, non dicitur ea comparatio proportio, quia non sit secundum quantitatem.

Quamquam autem in solis quantitibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quae aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cujusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Ut cum dicimus, tempus tempore esse majus, vel minus, vel duo tempora esse aequalia, &c. appellabimur ejusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quaedam.

Ceterum in omni proportionem ea quantitas, quae ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris aliis antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Ut in proportionem linea 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si è contrario consideretur proportio linea 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabimur antecedens linea 3. palmorum, consequens vero linea 6. palmorum, & sic in ceteris.

DEFI-

DEFINITIO. IV.

Proportio vero est rationum similitudo.

Quod hoc loco interpretes proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Ut si pro-

- TAB. XVII.
fig. 1. portio quantitatis A , ad quantitatem B , similis fuerit proportioni quantitatis C , ad quantitatem D , dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas.
fig. 2. Eadem modo, si similis fuerit proportio E , ad F , proportioni, F , ad G , appellabitur hæc similitudo proportionalitas.

- fig. 2. Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singula quantitates intermedia bis sumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequæ, consequens vero quantitatis antecedentis. Ut si dicatur, quæ est proportio E , ad F , ea est F , ad G , vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singula quantitates intermedia semel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullæque quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Ut si dicatur, quæ proportio A , ad B , ea est C , ad D , appellabitur proportionalitas hæc, discreta, sive non continua.

DEFINITIO. V.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

Quoniam Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum ejusdem generis, vocat rationem, quam nos cum aliis auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac §. quidnam requirant duæ quantitates ejusdem generis, ut proportionem dicantur habere. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quorum utraque multiplicata ita ardeat, ut alteram tandem superet, adeo ut si alterutra quantumvis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur.

DEFINITIO. VI.

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque vel una deficiunt, vel una æqualia sunt, vel una excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

Explicat hoc loco Euclides, quasnam condiciones requirant, apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut completatur omnes proportionem magnitudinum,
tam

TAB.
XVII.
fig. 3.

tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A , prima; B , secunda; C , tertia; D , quarta: sumanturque prima, & tertia aequemultiplicia quacunque; E , quidem ipsius A ; & F , ipsius C : Item sumantur secunda, & quarta alia quacunque aequemultiplicia; G , quidem ipsius B ; & H , ipsius D , sive hac duo posteriora sint ita multiplicia secunda, & quarta, sicut priora duo multiplicia sunt prima, & tertia, sive non. Quod si jam inter se conferantur sumpta aequemultiplicia ea, quae inter se respondent, ut multiplex prima, & multiplex secunda inter se, hoc est, E , & G ; Item multiplex tertia, & multiplex quarta inter se, hoc est, F , & H ; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se habere, ut si E , multiplex prima magnitudinis A , minus fuerit, quam G , multiplex secunda magnitudinis B ; etiam F , multiplex tertia magnitudinis C , minus sit quam H , multiplex quarta magnitudinis D : Aut si E , aequale fuerit ipsi G ; etiam F , aequale sit ipsi H : Aut denique si E , majus fuerit quam G ; etiam F , majus sit quam H : (quod est utrumque ab utroque vel una deficere, vel una aequalia esse, vel una excedere) ita ut in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, ut nunquam E , minus sit quam G , quin & F , minus sit quam H ; & ut nunquam E , aequale sit ipsi G , quin & F , ipsi H , sit aequale. Denique ut nunquam E , majus sit quam G , quin & F , majus sit, quam H . Si inquam deprehensum fuerit, aequemultiplicia quaevis accepta, perpetuo se se ita habere, ut dictum est; dicetur eadem esse proportio prima magnitudinis A , ad secundam magnitudinem B , quae est proportio tertia magnitudinis C , ad quartam magnitudinem D . Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo uno genere multiplicium, mul-
tiplex

plex E , deficere à multiplici G , non autem multiplex F , deficere à multiplici H ; Aut E , aequale esse ipsi G , at F , non aequale ipsi H ; Aut denique E , excedere ipsum G , at F , non excedere ipsum H , quamvis in infinitis aliis multiplicibus conditio praedicta reperiat, nulla ratione dicentur quantitates propositae eandem habere proportionem, sed diversas, ut ex defin. 8. fiet perspicuum.

Itaque ut demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in aliis servatur) quaecunque aequae multiplicia prima, & tertia collata cum quibuscunque aequae multiplicibus secunda, & quarta, habere semper conditionem praedictam defectus, aequalitatis, aut excessus; ita ut nunquam contrarium ejus inveniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, qualibet aequae multiplicia prima, & tertia collata cum quibuscunque aequae multiplicibus secunda, & quarta, habere eandem defectus, aequalitatis, aut excessus conditionem.

D E F I N I T I O. VII.

Eandem autem habentes rationem magnitudines; Proportionales vocentur.

UT si magnitudinum A, B, C, D , eadem sit proportio A , ad B , quae C , ad D , dicentur TAB. XVII.
 ea magnitudines proportionales. Eadem ratione, si fig. 1, 2.
 eadem sit proportio E , ad F , quae F , ad G , dicentur magnitudines E, F, G , proportionales. Sunt autem quaedam magnitudines proportionales continua inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G : Quedam vero proportionales

tionales sunt non continue, sed discrete, cujusmodi sunt magnitudines A , B , C , D . In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, ut dictum est in 4. definitione.

D E F I N I T I O. VIII.

Cum vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excefferit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excefferit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DEclarat hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ut maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint æque multiplicia prima & tertia; Item alia æque multiplicia secunda & quarta; deprehensumque fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex prima majus esse multiplice secunda, multiplex autem tertia non esse majus multiplice quarta, sed vel minus, vel æquale; dicetur major esse proportio prima magnitudinis ad secundam, quam tertia ad quartam: ut perspicuum est in appposito exemplo, in quo prima magnitudinis A , & tertia C , sumpta sunt triplicia E , & F ; secunda vero B , & quarta D , quadruplicia G , & H . Et quoniam E ; multiplex prima majus quidem est quam G , multiplex secunda; At F , multiplex tertia majus non est quam H , multiplex quarta, dicetur major esse proportio A , primæ magnitudinis, ad B , secundam; quam C , tertia, ad D , quartam.

TAB.
XVII.
fig. 4.

Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum,
prima

prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem quam tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamvis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem prima excedat multiplex secunda, at multiplex tertia non excedat multiplex quarta; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, ut tam multiplex prima majus sit multiplice secunda, quam multiplex tertia multiplice quarta. Item ut & multiplex prima minus sit multiplice secunda, & multiplex tertia multiplice quarta: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex prima superat quidem multiplex secunda, at multiplex tertia vel minus est, vel æquale multiplici quarta: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, non autem eandem.

Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, ut æque multiplicia earum, juxta quasvis multiplicationes accepta, vel una deficiant, vel una aequalia sint, vel una excedant, ut in 6. def. fuit expositum: Ut autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex secunda, multiplex vero tertia non superet multiplex quarta quamvis juxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia prima, ac tertia una excedant æque multiplicia secunda, & quarta.

Quod si quando è contrario multiplex prima deficiat à multiplice secunda, non autem multiplex tertia à multiplici quarta, dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamvis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia prima & tertia una

deficiant ab aque multiplicibus secunda, & quarta.

DEFINITIO. IX.

Proportio autem in tribus terminis paucissime consistit.

Quoniam omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, ut dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, ut minimum, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, sive magnitudines; At vero si fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens terminus unius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunque solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

DEFINITIO. X.

Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, uno amplius, quam diu proportio extiterit.

TAB. XVII.
fig. 5. **V**eluti si sint magnitudines *A, B, C, D, E,*
continue proportionales, ita ut ea sit proportio
A,

A, ad *B*, quæ *B*, ad *C*; & *C*, ad *D*: & *D*, ad *E*: proportio *A*, magnitudinis primæ ad *C*, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata ejus proportionis, quam habet *A*, magnitudo prima ad *B*, magnitudinem secundam: quoniam inter *A*, & *C*, duæ proportionēs reponuntur, quæ æquales sunt proportioni *A*, ad *B*; nimirum proportio *A*, ad *B*, & *B*, ad *C*, ut propterea proportio *A*, ad *C*, intercipiat quodammodo proportionem *A*, ad *B*, duplicatam, id est, bis ordine positam. At proportio *A*, magnitudinis primæ ad *D*, magnitudinem quartam, dicitur triplicata ejus proportionis, quam habet *A*, magnitudo prima ad *B*, magnitudinem secundam: quia inter *A*, & *D*, reperiuntur tres proportionēs, quæ æquales sunt proportioni *A*, ad *B*; nimirum proportio *A*, ad *B*; *B*, ad *C*; & *C*, ad *D*, atque idcirco proportio *A*, ad *D*, includit quodammodo proportionem *A*, ad *B*, triplicatam, id est, ter ordine positam: Sic quoque proportio *A*, ad *E*, dicitur quadruplicata proportionis *A*, ad *B*: propterea quod quatuor proportionēs interjiciuntur inter *A*, & *E*, quæ æquales sunt proportioni *A*, ad *B*, &c.

Quod si è contrario ea sit proportio *E*, ad *D*, quæ *D*, ad *C*; & *C*, ad *B*; & *B*, ad *A*; dicetur proportio *E*, ad *C*, duplicata proportionis *E*, ad *D*; At vero proportio *E*, ad *B*, dicetur triplicata proportionis *E*, ad *D*; sic quoque proportio *E*, ad *A*, dicetur quadruplicata proportionis *E*, ad *D*, &c.

DEFINITIO. XI.

Homologæ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Definiuit supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet jam, non solum in proportionalitate quavis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportionem inter se, nec non consequentes inter se, ut intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quanam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quanam consequentia, ut in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A , ad B , quæ C , ad D , dicetur quantitas A , similis quantitati C , & B , similis ipsi D . Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, utramque magnitudinem antecedentem vel aequalem esse utrique consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias non haberet utraque antecedens ad utramque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes majores sunt eodem modo consequentibus. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E , F , G , continue proportionalibus, ubi tam E , & F , homologæ sunt, quam F , & G , ut constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æque multiplicia prima & tertia magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item aliæ æque multiplicia secunda, & quarta magnitudinum, nimirum consequentium. Hæ enim similes sunt in mag-

TAB.
XVII.
fig. 6.

magnitudinibus proportionalibus, ut ex hac definitione constat: in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

DEFINITIO. XII.

Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, inferatur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem hujus. Ut si ponamus proportionem A , ad B , quam C , ad D , & propterea concludamus, eandem esse proportionem A , ad C , quam B , ad D , dicemur argumentari à permutata proportionem. Græci scriptores in hac argumentatione utuntur hoc fere modo loquendi: Ut est A , ad B , ita C , ad D ; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A , ad C , ut B , ad D . Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propof. 16. libri hujus. Cæterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse ejusdem generis, ut inter binas ut ut assumptas proportio esse possit.

DEFINITIO. XIII.

Inversa ratio, est sumptio consequentis, seu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

UT si ex eo, quod est A , ad B , ut C , ad D , inferamus, ita esse B , ad A , ut D , ad C , hoc

hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inversa proportionem. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Ut est A , ad B , ita C , ad D ; Igitur convertendo, vel è contrario, erit quoque B , ad A , ut D , ad C ; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. hujus lib. Porro due priores magnitudines possunt esse unius generis, & posteriores alterius.

D E F I N I T I O. XIV.

Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

TAB. XVII. fig. 8. Sit proportio AB , ad BC , qua DE , ad EF ; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius AC , nempe antecedentis cum consequente, ad BC , consequentem, quam habet tota DE , antecedens nimirum cum consequente, ad EF , consequentem; dicetur hujusmodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud novum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , componendo ergo erit & AC , ad BC , ut DE , ad EF . Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.

D E F I N I T I O. XV.

Divisio rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

TAB. XVII. fig. 9. UT si dicatur, qua proportio est totius AB , ad CB , ea est totius DE , ad FE ; Igitur erit & AC ,

AC, excessus, quo antecedens consequentem superat; ad *CB*, consequentem, ut *DF*, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad *FE*, consequentem. In divisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo dividendo, &c. Hac porro illatio ostendetur propos. 17. hujus lib.

DEFINITIO. XVI.

Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

Quod si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo *AB*, ad *CB*, ita tota *DE*, ad *FE*; TAB.
Igitur ita etiam erit eadem *AB*, ad *AC*, excessum, XVII.
quo consequentem superat antecedens, ut *DE*, ad fig. 9.
DF; Dicemur per conversionem rationis argumentari. Unde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conversionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. hujus lib.

DEFINITIO. XVII.

Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit.

Vel aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

Sint plures magnitudines duabus *A*, *B*, *C*, & TAB.
totidem *D*, *E*, *F*, sintque binæ ac binæ in ea XVII.
dem proportionem, hoc est, *A*, ad *B*, ut *D*, ad fig. 10.
M 4 E,

E, & B, ad C, ut E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, prima ad ultimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, prima magnitudinis ad ultimam in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, sive ex æqualitate, in qua scilicet extrema magnitudines, subductis mediis, colliguntur habere unam, eandemque inter se proportionem, ut in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, uno quidem, quando summus binas ac binas magnitudines in eadem proportionem, ordinate procedendo, altero vero, cum ordo invertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.

DEFINITIO. XVIII.

Ordinata proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

TAB. XVII. **UT** quando fuerit *A, ad B, ut D, ad E; Rur-*
fig. 11. *sus ut B, consequens ad aliud quidpiam, ut*
ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam;
dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo
tam in primis tribus magnitudinibus, quam in secundis servatur; cum utrobique conferatur primum
prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quan-
do ergo in modo argumentandi ex æqualitate servatur
Ordinata proportio, demonstratur propof. 22. huius
lib. eam argumentationem esse bonam.

DEFI-

DEFINITIO. XIX.

Perturbata autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem sit, quemadmodum *A*, ad *B*, ita *E*, TAB. XVIII.
ad *F*; Deinde ut in primis magnitudinibus *B*, fig. 1.
consequens ad *C*, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam *D*, ad *E*, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur hujusmodi proportio, *Perturbata*: quod non servetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate servatur *Perturbata* proportio, demonstratur eam argumentationem esse bonam, propos. 23. hujus lib.

THEOR. I. PROPOS. I. 1

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum; æque multiplices; quam multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines *AB*, *CD*, totidem magnitudinum *E*, *F*, æque multiplices. TAB. XVIII.
M 5 Dico fig. 2.

Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F, si AB, dividatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi E, æquales, & CD, quoque in magnitudines CI, IK, KD, ipsi F, æquales; (Dividi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, CD, sint ipsarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfecte contineatur, quoties F, in CD, ut ex iis, quæ in defin. 2. hujus lib. inscripsimus, constat) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot sunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales CI, & F, ærunt AG, CI, simul, æquales ipsi E, & F, simul. Eodem modo erunt GH, & IK, simul æquales ipsi E, & F, simul; Nec non HB, & KD, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, simul, in AB, CD, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul, ipsarum E, & F, simul, ut constat ex iis, quæ in defin. 2. lib. hujus scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.

ii. THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ, erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

TAB. XVIII. **S**It magnitudo prima AB, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex DE, tertia, quartæ

fig. 3.

tæ F; Rursus tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est EH, sexta ipsius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex est, DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, & DE, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH, erunt totæ multitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH: Ideoque tam multiplex est AG, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est DH, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

Si prima magnitudo A, tam multiplex secundæ **TAB.**
B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; **XVII.**
sumanturque E, F, æque multiplices primæ & **fig. 4.**
tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuatur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, ut in EG, GH, HI, & FK, KL, LM, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in

in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL. Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex est ejusdem secundæ B, quam multiplex est KL, sexta ejusdem quartæ D, *a 2. quint.* Erit & EH, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex FL, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum sit EH, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est FL, tertia quartæ D, ut proxime demonstratum est; sit autem & HI, quinta tam multiplex secundæ B, quam est LM, sexta multiplex quartæ D; *b 2. quint.* Erit & EI, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est FM, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.

iv. T H E O R. 4. P R O P O S. 4.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

TAB. XVIII. fig. 5. S I t proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, juxta quamvis mul-
 tipli-

tiplicationem: five E, F, ita multiplices sint ip-
 sarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, five
 non. His positis constat ex defin. 6. hujus lib.
 si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H; Et si
 E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse
 ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F,
 excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6.
 eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si
 earum æque multiplicia non semper ita se habe-
 rent. Dico jam, multiplicia primæ ac tertiæ non
 solum una deficere à multiplicibus secundæ ac
 quartæ, aut una æqualia esse, aut una excedere,
 ut diximus, sed eandem quoque inter se propor-
 tionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem
 primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, ut F,
 multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ
 D. Hoc est si rursus E, statuatur prima magni-
 tudo; G, secunda; F, tertia, & H, quarta;
 sumanturque ipsarum E, F, æque multiplicia
 qualiacunque; Item ipsarum G, H, quæcunque
 etiam æque multiplicia; Multiplicia ipsarum E,
 F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel una defi-
 cere, vel una æqualia esse, vel una excedere, ut
 vult definitio 6. Idem namque est, quatuor
 magnitudines eandem habere proportionem, &
 earum æque multiplicia sumpta diximus, vel una
 deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere.
 Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F,
 æque multiplices; Item L, M, æque multiplices
 ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex
 est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia
 ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K,
 æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ;
 Erunt quoque ex æquo I, K, æque multipli-
 ces ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem
 ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æque mul-
 tiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad
 B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam,
 ostensæque sunt I, K, æque multiplices primæ
 & tertiæ A, C. Item L, M, æque multiplices
 secundæ & quartæ B, D, fit ut si I, multiplex c 6. def.
 primæ quinti.

primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertię necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsum L, etiam K, excedat necessario ipsum M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æque multiplicia, quæcunque sint, *d* æque multiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertię F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertię K, minorem quoque esse, quam M, multiplicem quartæ, &c: atque hoc contingere in quacunque multiplicatione; *e* Erit, ut E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

T AB.
XVII.
fig. 6.

f 6. def.
quinti.

Hinc facile demonstrabitur inversa ratio, quam Euclides defin. 13. explicavit; hoc est si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inversa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico esse convertendo, ut B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æque multiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertię; Item G, H, æque multiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, ut C, tertia ad D, quartam, necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel major, etiam F, multiplicem tertię minorem esse, vel æqualem vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, major fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, secundum quancunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si utraque E, F, minor est, quam utraque G, H, erit contra utraque G, H, major quam utraque E, F, & si

utraque

utraq; E, F , æqualis est utrique G, H , erit è contrario, utraq; G, H , utrique E, F , quoque æqualis: Et denique si utraq; E, F , major est, quam utraq; G, H , erit vice versa, utraq; G, H , minor, quam utraq; E, F . Itaque quoniam primæ B , & tertiæ D , sumptæ sunt, æque multiplicia G, H ; Item secundæ A , & quartæ C , æque multiplicia E, F , ostensumque est, G, H , vel una excedere E, F , vel una æqualia esse vel una deficere, secundum quamcumque multiplicationem ea multiplicia sumantur; gerit ut B , prima ad A , secundam, ita D , tertia ad C , quartam. Quod erat demonstrandum. g 6. def. quinti.

THEOR. 5. PROPOS. 5. v.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ; Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

I Tam multiplex sit tota AB , totius CD , ut est multiplex AE , ablata ablatæ CF , sive AE, CF , TAB. XVIII.
 ablatæ sint totis AB, CD , commensurabiles, ut fig. 7, 8;
 in 7ma figura, sive incommensurabiles, ut in 8va figura. Item sive AE, CF , compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD , componuntur, ut in 7ma figura, sive non ex eisdem, ut in 8va figura. Dico reliquam EB , ita esse multiplicem reliquæ FD , ut est tota AB , totius CD . Ponatur enim EB , ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius GC , ut est AE , multiplex ipsius CF , vel tota AB , totius CD . Quoniam igitur AE, EB , æque sunt multiplices ipsarum CF, GC ; ærit tota AB , totius GF , a. i. quinti.
 ita multiplex, ut AE , ipsius CF , hoc est omnes omnium, ut una unius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB , ipsius CD , quam est multiplex AE , ipsius CF . Igitur AB , tam est multiplex ipsius GF , quam multiplex est ipsius CD ; b 6. prop.
 atque idcirco æquales sunt GF, CD . Ablata igitur communi CF , æquales erunt GC, FD . Tam multiplex igitur erit EB , ipsius FD , quam multiplex

tipler est ipſius GC. Sed ita multiplex poſita fuit EB, ipſius GC, ut AE, ipſius CF, hoc eſt, ut tota AB, totius CD. Quare tam multiplex eſt reliqua EB, reliquæ FD, quam eſt tota AB, totius CD, quod eſt propoſitum.

TAB. Aliter. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, ut ablata AE, ablata CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, eſſe ſic multiplicem, ut eſt tota totius. Poſita enim GA, ita multiplici ipſius FD, ut eſt AE, ipſius CF, vel ut tota AB, totius CD, quoniam AE, GA, æque multiplices ſunt ipſarum CF, FD; erit tota GE, ſic multiplex totius CD, ut AE, ipſius CF: Sed ita quoque multiplex eſt AB, ejuſdem CD, ut AE, ipſius CF, ex hypotheſi. Æque multiplices ſunt igitur GE, AB, ipſius CD; & atque adeo inter ſe æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB, Ideoque æque multiplices ipſius FD; cum GA, ſit multiplex poſita ipſius FD: Atqui ita eſt multiplex poſita GA, ipſius FD, ut AB, ipſius CD. Igitur & EB, reliqua ſic erit multiplex ipſius FD, reliquæ ut AB, tota totius CD; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.

vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

TAB. **XVIII.** **fig. 11.** Sint magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG,

AG, ejusdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipsi E, vel ejus multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim, CI, æqualis ipsi F. Et quia prima AG, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia multiplex est quartæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; ærit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, ut HI, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F: Atqui CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex est ipsius E. Æque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. Ideoque æquales inter se. Quare dempta CH, communi remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod est propositum.

Sit deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namque CI; ita multiplici ipsius F, ut est multiplex GB, ipsius E; ærit ut prius AB, ita multiplex ipsius E, ut HI, multiplex est ipsius F. Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, ut GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

Sint duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quævis C. Dico A, & B; habere

N

bere

a 2. quint.

b 6. prop.

TAB.

XVIII.

fig. 12.

c 2. quint.

d 6. prop.

vii.

TAB. XIX.

fig. 1.

bere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum æqualium A, B; æruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, utcumque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sunt, sit ut utraque vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel major, juxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel majores; erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

a 6. *prop.*
b 6. *def.*
quinti.

Eodem pacto ostendemus F, vel minorem esse utraque D, E, vel utrique æqualem, vel majorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B, vel una æqualis sit, vel major; erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset brevius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. proposit. ex inversa ratione. Cum enim ostensum jam sit, esse A, ad C, ut B, ad C, erit convertendo C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. Quod erat demonstrandum.

c 6. *def.*
quinti.

S C H O L I U M.

Eodem fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omisit, utitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ sequuntur, perinde ac si in hac proposit. 7. esset demonstratum.

TABXIX. *Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam*
fig. 2. *C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus*
ipsarum

ipsarum A , & B , primæ, & tertiæ. Item G , & H , æque multiplicibus ipsarum C , & D , secundæ & quartæ; & erunt tam E , & F , inter se d. 6. præ. æquales, quam G , & H , inter se. Quare si E , multiplex primæ deficit à G , multiplice secundæ, etiam F , multiplex tertiæ, ab H , multiplice quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. e Eadem ergo est proportio A , primæ ad e 6. def, C , secundam; quæ B , tertiæ ad D , quartam. Quod quinti. est propositum.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij;

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

Sint magnitudines inæquales, AB , major & TAB. XIX.
 C , minor, tertia autem quælibet D . Dico fig. 3. 4.
 proportionem AB , ad D , maiorem esse proportionem C , ad D . At è converso, maiorem esse proportionem D , ad C , quam D , ad AB . Intelligatur enim in AB , magnitudine maiore, magnitudo AE , æqualis minori C , ut sit reliqua EB . Utraque deinde EB , AE , æqualiter multiplicetur, hac lege, ut GF , multiplex ipsius EB , major quidem sit, quam D ; At HG , multiplex ipsius AE , non sit minor eadem D , sed vel maior, vel æqualis. In 3ta figura necesse fuit sumere GF , HG , triplas ipsarum EB , AE ; quia dupla ipsius AE , esset minor, quam D . Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æque multiples majores. In 4ta autem figura satis est, sumere ipsarum EB , AE , duplas GF , HG ; quia utraque GF , HG , maior est, quam D . Possent tamen pro duplis sumi quæcunque aliæ majores æque multiples. Quoniam igitur duæ FG , GH , æque multiples sunt duarum BE , EA ; erit & tota FH , ita multiplex totius AB , a 1. quins;
 N 2 ut

nt GH, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ, C, & AE. Capiatur quoque ipsius D, multiplex IK, quæ proxime major sit, quam HG, nempe dupla, ut in 3tia figura. Quod si dupla major non fuerit quam HG, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In 4ta figura accepta est IK, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla quam tripla minor est, quam HG, at quadrupla jam major est. Abscissa ergo LK, quæ æqualis sit ipsi D, non erit IL, major quam HG, (alias IK, non esset multiplex ipsius D, proxime major quam HG; sed & IL, major quoque esset quam GH. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse majorem, quam HG, cum HG, posita sit non minor quam D, hoc est quam IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipsi IL, vel major. Et quia FG, major est posita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, major quam LK. Cum ergo HG, non minor sit quam IL, ut demonstratum est, sed vel æqualis, vel major; erit tota FH, major quam IK. Itaque cum FH, HG, sint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, major quam IK, multiplex secundæ; At HG, multiplex tertiæ, non sit major, quam IK, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothese; (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, major quam HG,) erit major proportio AB, primæ ad D, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

b 8. def.
quinti.

Quoniam vero è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda & AB, quarta) major est quam HG, multiplex secundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, major non est, quam FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, major sit, quam IK, ut ostensum est; erit major proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium

c 8. def.
quinti.

qualium igitur magnitudinum major ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix:

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

HAbeant primum A, & B, eandem rationem *TAB. XIX*
ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. *fig. 5.*
Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, major & B, minor. *a* Erit igitur major proportio *a 8. quint.*
A, majoris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesein. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales.

Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset major, & B, minor; *b* haberet *b 8. quint.*
C, ad B, minorem, majorem proportionem, quam ad A, majorem: quod est contra hypothesein. Non igitur major erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

HAbeat primum A, ad C, majorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, *TAB. XIX*
majorem esse, quam B: Si enim A, foret ipsi *fig. 6.*
B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam *a 7. quint.*
B, *b* haberet B, major ad C, proportionem *b 8. quint.*
N 3 jorem,

jorem, quam A, minor ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis vel minor quam B, sed major.

- e 7. quint.* Habeat secundo C, ad B, majorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque vero B, major erit quam A, *d 8. quint.* a alias haberet C, ad minorem A, majorem proportionem quam ad B, majorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quam A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. II. PROPOS. II.

Quæ eidem sunt eadem rationes,
& inter se sunt eadem.

- TAB. XIX. fig. 7.* **S**int proportiones A, ad B, & C, ad D, eadem proportioni E, ad F. Dico & proportionem A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. hoc est sumptis æque multiplicibus ipsarum A, C; Item æque multiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, ut multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel una deficient, vel una æquales sint, vel una excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam ut E, tertia ad F, quartam; *a 6. def. quinti.* a sit ut si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel major, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel major: *b 6. def. quinti.* b Sed (ut eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel

vel major est quoque H, minor quam L, vel æqualis, vel major; propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et si G, æqualis est, vel major quam K, etiam H, æqualis erit, vel major quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque aliis æque multiplicibus. Quapropter erit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Quod erat ostendendum. c 6. def. quinti.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

Si sint magnitudines quæcunque proportionales: quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Quod in propof. 1. de proportionem multiplici demonstravit, ostendit hic de omni genere proportionis etiam irrationalis. TABXIX. fig. 8.
Sint ergo quæcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales hoc est, sit A, ad B, ut C, ad D, & E, ad F. Dico ut est una antecedentium ad unam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, ut una unius, nempe ut G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut alia E, tertia ad
N 4 a 1. quinti.
aliam

b 6. *def.* aliam *F*, quartam; *b* fit ut si *G*, multiplex primæ
quinti. deficit à *K*, multiplice secundæ, deficiat quoque
H, multiplex tertiæ ab *L*, multiplice quartæ, &
I, ab *M*: Et si *G*, æqualis est ipsi *K*; vel ma-
 jor, æqualis quoque sit *H*, ipsi *L*, & *I*, ipsi *M*,
 vel major. Ac proinde si *G*, minor est, vel
 æqualis, vel major quam *K*, & omnes *G*, *H*,
I, simul omnibus *K*, *L*, *M*, simul minores sint,
 c 6. *def.* vel æquales vel majores. Quocirca ut est *A*,
quinti. prima ad *B*, secundam ita erit *A*, *C*, *E*, tertia
 ad *B*, *D*, *F*, quartam. Si sint itaque magnitu-
 dines quocunque proportionales, &c. Quod
 demonstrandum erat.

xiii. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si prima ad secundam eandem habuerit
 rationem, quam tertia ad quartam; tertia
 vero ad quartam majorem rationem habue-
 rit, quam quinta ad sextam: Prima quoque
 ad secundam majorem rationem habebit,
 quam quinta ad sextam.

TAB. XIX. *fig. 9.* **S**It prima *A*, ad *B*, secundam, ut *C*, tertia ad
D, quartam: fit autem proportio *C*, tertiæ ad
D, quartam major, quam *E*, quintæ ad *F*, sex-
 tam. Dico & proportionem *A*, primæ ad *B*, se-
 cundam esse majorem quam *E*, quintæ ad *F*,
 sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sum-
 ptis æque multiplicibus ipsarum *A*, *E*; Item æque
 multiplicibus ipsarum *B*, *F*, contingere posse, ut
 multiplex ipsius *A*, excedat multiplicem ipsius
B, at multiplex ipsius *E*, multiplicem ipsius *F*,
 non excedat. Sumptis enim *G*, *H*, *I*, æque
 multiplicibus antecedentium; Et *K*, *L*, *M*,
 æque multiplicibus consequentium, cum sit *A*,
 prima ad *B*, secundam, ut *C*, tertia ad *D*,
 a 6. *def.* quartam; *a* fit ut si *G*, multiplex primæ excesse-
 ruit *K*, multiplicem secundæ, excedat quoque *H*,
quinti. multiplex tertiæ ipsam *L*, multiplicem quartæ,
 &c.

&c. At quando H, excedit ipsam L, non ne- b 8. def.
 cessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquan- quinti.
 do erit, vel minor; quod major ponatur propor-
 tio C, primæ ad D, secundam, quam E, tertiæ
 F, quartam. Igitur si G, excedit K, non ne-
 cessario I, excedit M. Major est ergo propor- c 8. def.
 tio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ quinti.
 ad F, quartam. Quamobrem si prima ad secun-
 dam eandem habuerit rationem, quam tertia ad
 quartam, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Si prima ad secundam eandem habuerit
 rationem, quam tertia ad quartam; Prima
 vero quam tertia major fuerit, erit & se-
 cunda major quam quarta. Quod si prima
 fuerit æqualis tertiæ; erit & secunda æqua-
 lis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

Sit enim A, prima ad B, secundam ut C, tertia TAB. XIX
 ad D, quartam. Dico si A, major fuerit fig. 10, 11,
 quam C, fore quoque B, majorem quam D. 12.
 Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quo-
 que esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerit
 quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit fig. 10.
 primum A, major quam C, & eritque propterea a 8. quint.
 proportio A, majoris ad B, major quam C,
 minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C,
 prima ad D, secundam ut A, tertia ad B, quar-
 tam, proportio autem A, tertiæ ad B, quartam
 major est, ut ostendimus, quam C, quintæ ad
 B, sextam: Major quoque erit proportio C, b 13. quint.
 primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B,
 sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque c 10. quint.
 B, major erit quam D. Quod est propositum.

Sit deinde A, æqualis ipsi C; & eritque idcirco fig. 11.
 A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur propor- d 7. quint.
 tiones C, ad D, & C, ad B, eadem sunt pro-
 portioni A, ad B, & erunt quoque inter se eadem e 11. quint.
 N 5 pro-

- fig. 9. quint.* proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est propositum.
- fig. 12. g 8. quint.* Sit tertio A, minor quam C, *g* eritque ob hoc major proportio C, majoris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam:
- b 13. quint.* Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam;
- i 10. quint.* Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

- TAB. XX. fig. 1.* Sint partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, ut A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B, continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Dividatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipsi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B,
- a 7. quint.* eritque CG, ad EI, ut A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, nec non EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & HD, ad
- b 11. quint.* KF, ut A, ad B, *b* ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca ut CG, ad EI, hoc est, ut A, ad B,
- c 12. quint.* ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvi.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erant.

Hic demonstratur alterna, sive permutata pro- TAB. XX.
 portio, seu ratio, quæ defin. 12. explicata fig. 2.
 est. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico vi-
 cissim, seu permutando, esse quoque A, ad C,
 ut B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B,
 primæ ac secundæ, æque multiplices E, F. Item
 ipsarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices
 G, H; eritque E, ad F, ut A, ad B, cum a 5. quint.
 E, & F, sint pariter multiplices partium A, &
 B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D.
 Cum igitur proportionem E, ad F, & C, ad D,
 sint eadem proportioni A, ad B; erunt & ipsæ
 inter se eadem. Rursus quia proportionem E, b 11. quint.
 ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C,
 ad D; erunt & ipsæ eadem inter se; hoc est, c 11. quint.
 ut est E, prima ad F, secundam, ita erit G,
 tertia ad H, quartam. Quare si E, prima ma- d 14. quint.
 jor est quam G, tertia, vel æqualis, vel minor,
 erit quoque F, secunda major quam H, quarta,
 vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplica-
 tione accepta sint æque multiplicia E, F, & æ-
 que multiplicia G, H. Est igitur A, prima ad e 6. def. quinti.
 C, secundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum
 E, & F, sint æque multiplices primæ A, ac
 tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, se-
 cundæ & D, quartæ, & illæ ab his una defici-
 ant, vel una æqualis sint, vel una excedant,
 &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur
 magnitudines proportionales fuerint, & vicissim
 proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque divisæ proportionales erunt.

TAB. XX.

fig. 3.

a 1. quint.

b 1. quint.

c 2. quint.

d 6. def. quinti.

HOc loco demonstrat Euclides Divisionem rationis, quam defin. 15. explicavit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, EF, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, ut DE, ad EF. Dico & divisas easdem proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiples capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; æritque GI, ita multiplex ipsius AB, ut est GH, ipsius AC, hoc est, ut KL, ipsius DF, ita quoque multiplex est KM, ipsius DE. Æque multiples ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æque multiples ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, ut LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE; ærit & HN, sic multiplex secundæ CB, ut LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB, secundam, ut DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æque multiples GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item secundæ & quartæ CB, FE, æque multiples HN, LO, & sit ut si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab LO, ablati communibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablati com-

communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GL ex-
 cesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO, ablati
 communibus HI, LM, excedet quoque GH,
 ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem
 cum GH, KL, sumptæ sint æque multiples
 primæ AC, & tertiæ DF: Item IN, MO, æque
 multiples secundæ CB, & quartæ FE, osten-
 sumque sit, (in quacunque multiplicatione illæ
 æque multiples fuerint acceptæ) æque multi-
 plices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus se-
 cundæ & quartæ vel unadeficere, vel una æquales
 esse, vel una excedere; *e* Erit AC, prima ad
 CB, secundam, ut DF, tertia ad FE, quartam,
 quod est propositum. Si compositæ igitur mag-
 nitudines proportionales fuerint, &c. Quod
 ostendendum erat.

e 6. def.
 quint.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

xviii.

Si divisæ magnitudines sint proportionales,
 hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEmonstrat hoc loco Euclides compositionem
 rationis, quam definitione 14. descripsit. *TAB XX.*
 Sint enim divisæ magnitudines AB, BC, & DE,
 EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC, ut
 DE, ad EF. Dico & compositas proportionales
 esse, hoc est, ut est AC, ad BC, ita esse DF, ad
 EF. Si enim non est, ut AC, ad BC, ita DF,
 ad EF, habebit DF, ad aliquam magnitudinem
 minorem ipsa EF, vel maiorem, eandem propor-
 tionem, quam AC, ad BC. Habeat primum
 DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest,
 eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quo-
 niam igitur est, ut AC, ad BC, ita DF, ad GF;
a Erit dividendo quoque, ut AB, ad BC, ita
 DG, ad GF: Sed ut AB, ad BC, ita proposita
 quoque est DE, ad EF. *b* Igitur erit etiam, ut
 DG, prima ad GF, secundam, ita DE, tertia
 ad

fig. 4.

a 17. quint.

b 11. quint.

ci4. quint. ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima major sit, quam DE, tertia, erit quoque GF, secunda major quam EF, quarta, pars quam totum. Quod est absurdum.

Habeat deinde, si fieri potest, DF, ad HF, maiorem ipsa EF, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, ut AC, ad EC, ita DF, ad HF; *d* erit dividendo quoque ut AB, ad BC, ita DH, ad HF. Sed ut AB, ad BC, ita posita etiam est DE, ad EF. *e* Igitur erit quoque, ut DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor sit quam DE tertia, eritque HF, secunda minor quam EF, quarta, totum quam pars, quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF, erit, ut AC, ad BC, quod est propositum. Itaque si divisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

xix. T H E O R. 19. P R O P O S. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum, ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

TAB. XX. fig. 5. Q Uod in propof. 5. demonstratum est de multiplici proportionem, hoc loco de omni proportionem, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, ut ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, ut est tota AB, ad totam CD. Cum enim sit AB, ad CD, ut AE, ad CF, *a* erit & permutando AB, ad AE, ut CD, ad CF. *b* Dividendo ergo erit EB, ad AE, ut FD, ad CF, *c* Quare permutando rursus erit EB, ad FD, ut AE, ad CF hoc est, ut tota AB, ad totam CD, cum posita sit AB, ad CD, ut AE, ad CF. Si

LIBER QUINTUS. 207

Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c.
Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Hinc facile demonstrabitur modus ille argumentandi in
proportionibus, qui sumitur à conversione rationis, juxta
16. defin.

Sit enim, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico **TAB. XX.**
per conversionem rationis esse quoque, ut AB, ad AC, **fig. 6.**
ita DE, ad DF. Cum enim sit, ut AB, ad CB, ita
DE, ad FE, erit quoque dividendo, ut AC, ad CB, **di 7. quint.**
ita DF, ad FE. Igitur & convertendo, ut CB, ad
AC, ita FE, ad DF, eac propterea componendo quo- **ci 8. quint.**
que, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est pro-
positum.

THEOR. 20. PROPOS. 20. **xx.**

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsi
æquales numero; quæ binæ & in eadem
ratione sumantur; ex æquo autem prima,
quam tertia major fuerit, erit & quarta
quam sexta, major. Quod si prima tertiæ
fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ:
sin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem **TAB. XX.**
D, E, F, sitque A, ad B, ut D, ad E; & **fig. 7.**
B, ad C, ut E, ad F, sit autem primum A,
prima major quam C, tertia. Dico & D, quar-
tam esse majorem F, sexta. Cum enim A, ma-
jor sit quam C, erit major proportio A, ad **a 8. quint.**
B, quam C, ad B. Est autem ut A, ad B, ita
D, ad E. Major igitur proportio quoque **bi 3. quint.**
erit D, ad E, quam C, ad B. At ut C, ad
B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C,
ut E, ad F, erit convertendo ut C, ad B, ita
F,

F, ad E.) Major igitur quoque proportio erit
 cio. *quint.* D, ad E, quam F, ad E, & quare D, major
 erit, quam F. Quod est propositum.

TAB XX. Sit deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æ-
 fig. 8 qualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C,
 d 7. *quint.* æqualis & erit A, ad B, ut C, ad B. Est autem
 e 11. *quint.* ut A, ad B, ita D, ad E. Igitur erit & D,
 ad E, ut C, ad B: At ut C, ad B, ita est F,
 ad E, per inversam rationem, uti prius. Quare
 f 9. *quint.* erit quoque D, ad E, ut F, ad E: Ideoque
 æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

TAB XX. Sit tertio A, minor quam C. Dico & D, mi-
 fig. 9 norem esse, quam F. Cum enim A, minor sit
 g 8. *quint.* quam C, gerit minor proportio A, ad B, quam
 C, ad B. Sed ut A, ad B, ita est D, ad E.
 h 13. *quint.* Minor ergo quoque proportio est D, ad E,
 quam C, ad B. Est autem convertendo, ut
 prius, ut C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor
 est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E,
 i 10. *quint.* & proptereaque D, minor erit quam F. Quod est
 propositum. Si sint itaque tres magnitudines,
 & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat
 ostendendum.

xxi. THEOR. 21. PROPOS. 21.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis
 æquales numero, quæ binæ, & in eadem
 ratione sumantur, fueritque perturbata earum
 proportio; ex æquo autem prima quam
 tertia major fuerit: erit & quarta, quam
 sexta, major. Quod si prima tertiæ fuerit
 æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin
 illa minor; hæc quoque minor erit.

TAB XX. Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem
 fig. 10 D, E, F, quæ binæ & in eadem ratione suman-
 tur; sitque earum proportio perturbata, hoc est,
 sit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C,
 ita D, ad E: Sit autem primum A, primo ma-
 jor quam C, tertia. Dico & D, quartam esse
 majore

maiores sextæ, F. Cum enim A, major sit quam C, erit major proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem ut A, ad B, ita E, ad F. Major ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero ut B, ad C, ita est D, ad E, erit convertendo ut C, ad B, ita E, ad D. Quare major quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. Ideoque major erit D, quam F. Quod est propositum.

Sit deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, erit A, ad B, ut C, ad B: Sed ut A, ad B, ita est E, ad F. Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inversa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque ut E, ad F, ita E, ad D; satque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

Sit tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Ut autem A, ad B, ita est E, ad F. Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, ut ante, ex inversa ratione, est ut C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xij;

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Jam hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando
 ③ pro-

TAB. XXI.

fig. 1.

a. 4. quint.

b. 4. quint.

c. 4. quint.

d. 6. def. quinti.

proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C , & aliæ tres D, E, F : sitque A , ad B , ut D , ad E ; & B , ad C , ut E , ad F . Dico quoque ex æqualitate esse A , ad C , ut D , ad F . Sumptis enim ipsarum A, D , æque multiplicibus G, H : Item ipsarum B, E , æque multiplicibus I, K : Item ipsarum C, F , æque multiplicibus L, M ; cum sit A , prima ad B , secundam, ut D , tertia ad E , quartam, erit quoque G , multiplex primæ A , ad I , multiplicem secundæ B , ut H , multiplex tertiæ D , ad K , multiplicem quartæ E . Eadem ratione, cum sit B , prima ad C , secundam, ut E , tertia ad F , quartam; erit I , multiplex primæ B , ad L , multiplicem secundæ C , ut K , multiplex tertiæ E , ad M , multiplicem quartæ F . Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L , & aliæ tres H, K, M , quæ binæ in eadem proportionem sumuntur; erit ut si G , prima superat tertiam L , superet necessario quoque H , quarta sextam M ; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H , æque multiplices primæ A , & tertiæ D , vel deficient una ab L, M , æque multiplicibus secundæ C , & quartæ F , vel una æquales sint, vel una excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia: erit A , prima ad C , secundam, ut D , tertia ad F , quartam. Quod est propositum.

Deinde sint plures magnitudines tribus, ita ut sit etiam C , ad N , ut F , ad O . Dico adhuc esse ut A , ad N , ita D , ad O . Cum enim jam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A , ad C , ut D , ad F : ponatur autem C , ad N , ut F , ad O , erunt tres magnitudines A, C, N , & aliæ tres D, F, O , quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, ut A , ad N , ita D , ad O . Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit per tres; Et sic de pluri-

pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 23. xxij.

Si sint tres magnitudines, aliæque ipsiſ æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Demonſtratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſi-
que perturbata earum proportio, hoc eſt, ſit ut TAB. XXI
A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita fig. 2.
D, ad E. Dico quoque ex æqualitate eſſe ut
A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipſarum
A, B, D, æque multiplicibus G, H, I; Item
ipſarum C, E, F, æque multiplicibus K, L,
M. *a* Erit ut A, ad B, ita G, ad H, cum G, a 15. quint.
H, ſint ipſarum A, B, æque multiplices: At ut
A, ad B, ita eſt E, ad F; *b* Igitur ut G, ad H, b 11. quint.
ita quoque eſt E, ad F; *c* Sed ut E, ad F, ita c 15. quint.
eſt quoque L, ad M, quod L, M, ſint ipſarum
E, F, æque multiplices. *d* Igitur erit quoque ut d 11. quint.
G, ad H, ita L, ad M. Rurſus quoniam eſt
B, prima ad C, ſecundam, ut D, tertia ad E,
quartam; *e* erit quoque ut H, multiplex primæ e 4. quint.
B, ad K, multiplicem ſecundæ C, ita I, multi-
plex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E.
Quia igitur ſunt tres magnitudines G, H, K, &
aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione
ſumantur, eſtque earum proportio perturbata;
cum oſenſum ſit eſſe ut G, ad H. ita L, ad
M: Et ut H, ad K, ita I, ad L; *f* ſit ut ſi G, f 21. quint.
prima ſuperat tertiam K, ſuperet quoque quarta
I, ſextam M; & ſi æqualis, æqualis, & ſi defi-
cit deficiat. Itaque cum G, & I, æque multi-
plices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æque mul-

g 6. def. quinti. multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel una deficient, vel una æquales sint, vel una excedant; gerit ut A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

xxiv. THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

Tab. XXI. fig. 3. **Q**Uod propositione 2. demonstravit Euclides de sola proportionem multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportionem, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, ut DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, ut EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, ut est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit ut BG, ad C, ita EH, ad F, erit convertendo ut C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, ut DE, ad F, & C, ad BG, ut F, ad EH, *a12. quint. b18. quint.* erit ex æqualitate AB, ad BG, ut DE, ad EH. Componendo igitur erit ut tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, ut DH, ad EH, & BG, ad C, *c12. quint.* ut EH, ad F: erit ex æqualitate AG, ad C, ut DH, ad F. Quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 25. xxv.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

Sit enim AB, ad CD, ut E, ad F, sitque AB, *TABXXI*
omnium maxima, & F, minima. Dico duas *fig. 4.*
AB, & F, simul esse majores duabus CD, &
E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo
AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æ-
qualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, ut E,
ad F, hoc est, ut AB, ad CD. Quare cum sit
tota AB, ad totam CD, ut ablata AG, ad abla-
tam CH: erit quoque ut tota AB, ad totam *219. quint.*
CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD:
Est autem AB, (cum sit omnium maxima)
major, quam CD. Igitur & GB, major erit
quam HD. Quoniam vero AG, & E, æ-
quales sunt; si ipsis addantur æquales F, &
CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E, fient
AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, si-
mul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD,
fient AB, & F, simul majores quam E, & CD,
simul, cum GB, sit major quam HD. Quod
est propositum. Si ergo quatuor magnitudines
proportionales fuerint, &c. Quod erat demon-
strandum.

S C H O L I U M.

Hic finem Euclides imponit quinto libro. Verum
quia Campanus, & nonnulli alii adjiciunt alias
quasdam propositiones, quibus sæpenumero gravissimi
Scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Joannes
Regiomontanus, & alii utuntur, easque quasi essent
Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro an-
nectere, & maxima, qua fieri potest, brevitate de-
monstrare, nec non in numerum, ac seriem propo-
tionum

tionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus impropotionalibus, quarum prima hæc est.

xxvi. [THEOR. 26. PROPOS. 26.]

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

TAB. XXI. fig. 5. **H**abeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportionem D, ad C. Intel- ligatur enim esse E, ad B, ut C, ad D; eritque proportio A, ad B, major quoque quam E, ad B, ^{a 10. quint.} ac propterea A, major erit quam E. ^{b 8. quint.} Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed ut est B, ad E, ita est convertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.]

xxvii. [THEOR. 27. PROPOS. 27.]

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Ha- bebit quoque vicissim prima ad tertiam ma- iorem proportionem; quam secunda ad quartam.

TAB. XXI. fig. 5. **H**abeat enim A, ad B, maiorem proportio- nem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intellegatur namque esse E, ad B, ut C, ad D, eritque proportio A, ad B, ^{a 10. quint.} major etiam quam E, ad B: ^{b 8. quint.} Ideoque A, ma- ior erit quam E. Quare major erit proportio A, ad C, quam B, ad D.

A, ad C, quam E, ad C. Quoniam vero permutando est, ut E, ad C, ita B, ad D, (cum posita sit E, ad B, ut C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, major quoque erit quam B, ad D. Quod est propositum.] c16. quint.

[THEOR. 28. PROPOS. 28. xxviii.

Si prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam majorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

Si major proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo majorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. TABXXI. fig. 6.
Intelligatur enim esse GB, ad BC, ut DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, major quoque, quam GB, ad BC; a Ideoque AB, major quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, major quam GC; b majorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, c ut est GC, ad BC, ita est DF, ad EF, (quod posita sit GB, ad BC, ut DE, ad EF.) Major ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.] a 10. quint. b 8. quint. c 18. quint.

[THEOR. 29. PROPOS. 29. xxix.

Si composita prima cum secunda ad secundam majorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque dividendo prima ad secundam majorem proportionem, quam tertia ad quartam.

Si major proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & dividendo majorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. TABXXI. fig. 6.
O 4 por-

portionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, ut DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, major quoque
 a 10. quint. proportione GC, ad BC: a ideoque major erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC;
 b 8. quint. major erit AB, quam GB: b Ac propterea major erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC.
 c 17. quint. Sed dividendo, ut est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, ut DF, ad EF.) Igitur major quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.]

XXX. [THEOR. 30. PROPOS. 30.]

Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit majorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

TAB XXI. Sit major proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conversionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, major
 fig. 7. proportio, quam DF, ad EF; a erit & dividendo, major proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. b Quare convertendo, minor erit pro-
 a 19. quint. portio BC, ad AB, quam EF, ad DE; c Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.]

THEOR.

[THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxi.]

Si sint tres magnitudines, & alie ipsis, æquales numero, sitque major proportio primæ primorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam major, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines A, B, C, & alie tres TAB. XXXI
D, E, F, sitque major proportio A, ad B, fig. 8,
quam D, ad E: Item major B, ad C, quam
E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque
esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim
esse G, ad C, ut E, ad F, eritque propterea
proportio B, ad C, major, quam G, ad C;
Ideoque B, major erit quam G. Quare a 10. quint.
major erit proportio A, ad G, minorem quam b 8. quint.
A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio
A, ad B, major quam D, ad E. Multo ergo
major erit proportio A, ad G, quam D, ad E.
Intelligatur rursus esse H, ad G, ut D, ad E;
eritque propterea major proportio A, ad G,
quam H, ad G; Ideoque A, major erit, quam c 10. quint.
H. Quare major quantitas A, ad C, habebit d 8. quint.
maiorem proportionem, quam minor quantitas
H, ad eandem C: Atqui ut H, ad C, ita est, e 22. quint.
ex æqualitate D, ad F. (quoniam ut D, ad E,
ita est H, ad G; & ut E, ad F, ita G, ad C.)
Major ergo proportio quoque erit A, ad C,
quam D, ad F. Quod est propositum.]

xxxij. [THEOR. 32. PROPOS. 32.]

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque major proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam major, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

TAB. XXI. **fig. 9.** **S**int tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque major proportio A, ad B, quam E, ad F. Item major B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut D, ad E, eritque propterea proportio B, ad C, major quam G, ad C. *a* Ideoque major erit B, quam G. *b* Quare major erit proportio A, ad G, minorem, quam ejusdem A, ad B, maiorem; Est autem proportio A, ad B, major quam E, ad F. Multo ergo major est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, ut E, ad F; Eritque propterea major proportio A, ad G, quam H, ad G; *c* ideoque major erit A, quam H. *d* Quocirca A, major ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C: *e* At ut H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita est G, ad C, & ut E, ad F, ita est H, ad G.) Major ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.]

THEOR.

[THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxij.]

Si fuerit major proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum major proportio, quam totius ad totum.

Sit major proportio totius AB, ad totam CD, *TAB. quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & XXII.* proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, *fig. 1.* majorem esse, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim major sit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; *a* erit quoque permutando, *a27-quint.* major proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; *b* ac propterea, per conversionem rationis, *b30-quint.* minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD. *c* Permutando igitur, minor quoque *c27-quint.* erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est, EB, reliqua ad reliquam FD, majorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.]

[THEOR. 34. PROPOS. 34. xxxiv.]

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque major proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc major, quam tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, majorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum, majorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Sint primum tres magnitudines A, B, C, & *TAB. aliæ tres D, E, F. Sit autem major propor-* *XXII.* *fig. 2.* tio

tio A, ad D; quam B, ad E; Item major B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportionem ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem vero, proportionem A, ad D; maiorem denique etiam proportionem C, ad F. Cum enim major sit proportio

a27. quint. A, ad D, quam B, ad E; *a* erit permutando
b28. quint. major A, ad B, quam D, ad E. *b* Igitur componendo, major erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E;

c27. quint. Permutando ergo rursus, major erit proportio A, B, simul ac D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad

d33. quint. ablatam E; *d* habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, major erit proportio, B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo major erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F.

e27. quint. Permutando igitur, major erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; *f* & componendo ergo major est proportio totius A, B, C, ad B,

g27. quint. C, quam totius D, E, F, ad E, F, *g* Et rursus permutando major proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quam B, C, ad E, F, quod est primum.

Itaque cum sit major proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quam ablata B, C, ad ablatam E, F, *h* erit & major proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

Quoniam vero major est proportio B, ad E, quam C, ad F; *i* erit permutando major quoque
k28. quint. B, ad C, quam E, ad F; *k* & componendo, major totius B, C, ad C, quam totius E, F, ad F, *l* & rursus permutando, major B, C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem major proportio A, B, C, ad D, E, F, ut ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo major erit pro-

proportio omnium A, B, C , ad omnes D, E, F , quam ultimæ C , ad ultimam F , quod est tertium.

Deinde sunt quatuor magnitudines utrobique cum eadem hypothefi, hoc est, fit quoque major proportio tertiæ C , ad F , tertiam, quam G , quartæ ad H , quartam. Dico eadem consequi. Ut enim jam in tribus est ostensum, major est proportio B , ad E , quam B, C, G , ad E, F, H . Multo ergo major erit A , ad D , quam B, C, G , ad E, F, H . Permutando ergo major erit A , ad B, C, G , quam D , ad E, F, H , & componendo major A, B, C, G , ad B, C, G , quam D, E, F, H , ad E, F, H , & permutando A, B, C, G , ad D, E, F, H , major quam B, C, G , ad E, F, H , quod est primum.

Itaque cum sit major proportio totius A, B, C, G , ad totam D, E, F, H , quam ablata B, C, G , ad ablatam E, F, H , perit & reliquæ A , ad reliquam D , major proportio, quam totius A, B, C, G , ad totam D, E, F, H , quod est secundum.

Quoniam vero, ut in tribus est demonstratum, major est proportio B, C, G , ad E, F, H , quam G , ad H ; & major A, B, C, G , ad D, E, F, H , quam B, C, G , ad E, F, H , ut fuit ostensum; multo major erit proportio A, B, C, G , ad D, E, F, H , quam ultimæ G , ad ultimam H ; quod est tertium.

Eadem arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.]



EUCLIDIS ELEMENTUM SEXTUM.

DEFINITIO. I.

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

TAB.
XXII.
fig. 4.

UT triangula ABC , DEF , similia dicentur si fuerint æquiangula, ita ut angulus A , angulo D ; & B , ipsi E ; & C , ipsi F , æqualis sit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, ut AB , ad AC , ita DE , ad DF ; & ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , & ut AC , ad CB , ita DF , ad FE .

Quod si anguli unius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figura similes: Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse simi-

TAB.
XXII.
fig. 5.

les, quanquam inter se maxime sint inæquales. Cujusmodi sunt triangula æquilatera GHI , KLM . Propter laterum enim æqualitatem, erit GH , ad GI ,

GI, ut KL, ad KM. Item GH, ad HI, ut KL, ad LM, & GI, ad IH, ut KM, ad ML, cum semper sit proportio aequalitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis aequilateris & equiangularis, nec non de hexagonis, heptagonis, octagonis, & de aliis id genus figuris rectilineis aequiangularis, atque aequilateris.

DEFINITIO. II.

Reciprocae autem. figurae sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

UT si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, ut utrobique sit & antecedens, & consequens diversarum proportionum, hoc est, ut sit ea proportio AB, ad EF, qua FG, ad BC, seu eadem AB, ad FG, qua EF, ad BC; (utroque enim modo AB, est antecedens unius proportionis & BC, consequens alterius, in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, est consequens unius, & FG, antecedens alterius; vel secundo modo FG, consequens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamvis similia non sint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, reciproca, si fuerit ut IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel ut IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neque memini me invenisse apud Geometras usum reciprocarum figurarum in altis figuris, quam in parallelogrammis, & triangulis.

TAB.
XXII.
fig. 6.

TAB.
XXII.
fig. 7.

DEFI-

DEFINITIO. III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum ut tota ad majus segmentum, ita majus ad minus se habuerit.

TAB. XXII. fig. 8. *SI* linea recta quævis AB , ita dividatur in C , inæqualiter, ut sit, quemadmodum tota AB , ad majus segmentum AC , ita AC , majus segmentum ad CB , minus segmentum; dicetur divisa esse secundum extremam, & mediam rationem.

DEFINITIO. IV.

Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.

TAB. XXII. fig. 9. *SI* à vertice A , trianguli ABC , ad basin BC , perpendicularis ducatur AG , dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC ; ita ut tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis AG . Sic etiam perpendicularis DH , ducta à D , vertice trianguli DEF , ad basin EF , ad partes E , protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF . Itaque si duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad bases (sive hæc protractæ sint, sive non) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur hujusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem hujusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cujusmodi sunt perpendiculares AG , DH , triangulorum ABC , DEF , in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH , DHG ,

DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis
 aequales, immo duo recti; æ erunt recta AG, DH, a 28. primi
 parallela; Sunt autem & AD, GH, parallela,
 eo quod ponantur trian- gula in eisdem esse parallelis
 constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;
 hac propterea latera opposita AG, DH, aequalia b 34. primi
 erunt. Eandem igitur dicentur ea trian- gula habere
 altitudinem. Quod si in eisdem trian- gulis vertices
 ponantur C, & F, bases vero AB, & DE; non
 habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis
 enim ducta ex F, ad Basin DE, protractam æqua-
 lis non est perpendiculari ex C, ad basin AB, de-
 ducta, cum nec trian- gula ipsa in eisdem parallelis
 possint constitui, ut manifestum est.

Recte vero ab Euclide altitudo figura cujusvis de-
 finita est per lineam perpendicularem, qua à vertice
 ad basin deducitur: quoniam, ut scribit Ptolemaus
 in libello de Analemmate, & referente Simplicio,
 in libro de dimensione, mensura cujuscunque rei
 debet esse stata, determinataque, & non indefinita:
 Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito
 Geometra, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola
 linea perpendicularis certa est, determinataque longi-
 tudinis, alia autem omnes incerta indeterminataque.

DEFINITIO. V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum
 rationum quantitates inter se multiplicatæ,
 aliquam effecerint rationem.

QUoniam denominator cujuslibet proportionis ex-
 primit, quanta sit magnitudo antecedens ad
 consequentem; (ut denominator quadrupla proportio-
 nis, nempe 4. ostendit, in quavis proportionem qua-
 P drupla

dupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem ; denominator vero proportionis subquadrupla, videlicet $\frac{1}{4}$ indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; ut idem significet quantitas alicujus proportionis, quod denominator. Vult igitur hac definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicata effecerint illam proportionem, seu (ut vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, sive denominatorem. Ut proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla; quoniam denominator proportionis duodecupla, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris dupla proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextupla, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecupla proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.

Porro quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio prima ad ultimam componi dicitur ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. cum illa ex his intermediis constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producat, ut quinto libro defin. 10. exposuimus: ita ut si fuerint due proportionibus aequales intermedia, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio prima magnitudinis ad ultimam duplicata proportionis prima ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic
etiam

etiam in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio prima ad ultimam dicitur componi ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis prima magnitudinis ad ultimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

DEFINITIO. VI.

[Parallelogrammum secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, ut parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum unum parallelogrammum.]

Si data recta linea AB , supra quam constituitur ^{TAB. XXII.} parallelogrammum $ACDE$, quod non occupet ^{fig. 10.} totam lineam AB , sed desit CB ; & ducta BF , parallela ipsi CD , donec cum ED , protracta conveniat in F , compleatur totum parallelogrammum $ABFE$. Parallelogrammum igitur AD , applicatum secundum rectam AB , deficere dicitur parallelogrammo DB , ita ut DB , appelletur defectus.

Rursus sit data recta linea AC , supra quam constituantur parallelogrammum $ABFE$, quod habeat latus AB , majus recta data AC ; & ducatur CD , ipsi BF , parallela. Parallelogrammum igitur AF , applicatum secundum rectam AC , excedere dicitur parallelogrammo DB , ita ut DB , vocetur excessus.

i. THEOR. I. PROPOS. I.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.

TAB. XXII. **fig. 11.** **S**Int duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, ejusdem altitudinis, quorum eadem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, ut est basis BC, ad basin EF. Hoc est, si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis EF, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æque multiplicia primæ ac tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere, ut definitio 6. libr. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN, (Nam ut in defin. 4. dictum est, triangula ac parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas, sic enim perpendiculares à verticibus ad bases demissæ æquales erunt,) & ex BL, sumantur quocunque rectæ BI, IK, KL, ipsi BC, æquales; Item ex FN, abscindantur quocunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN, ærunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in
tot

a 38. prim.

tot triangula æqualia sunt divisa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis CL, æqualis fuerit basi EN, *b* necessario triangulum ACL, æquale est triangulo DEN, ac proinde si CL, major fuerit quam EN, necessario ACL, majus est quam DEN, & si minor, minus; deficient propterea una CL, recta, & triangulum ACL, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertię ABC, ab EN, recta & triangulo DEN, æque multiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF, vel una æqualia erunt, vel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. *a* Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundam EF, basis ad basin, ea est tertię ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. Quod est propositum.

Quoniam autem *b* ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (c quod duplum est trianguli ABC,) ad parallelogrammum EH; (*d* quod est duplum trianguli DEF,) perspicuum est, *c* ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, ut est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo usi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, ut bases. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 4.

Si ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint,

quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

TAB. XXII. **fig. 12.** **a 37. primi** **b 7. quint.** **c 1. sext.** **d ii. quint.** **e** **f** **g** **h** **i** **k 39. primi**
IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse ut AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, ærunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta inter se æqualia. Quare ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: Atqui ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cum hæc triangula sint ejusdem altitudinis, ut constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, ut triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. Ut igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæc duæ proportionales eadem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & ejusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) Quod est propositum.

Secet deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE, erit ut basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint ejusdem altitudinis: Ponitur autem ut AD, ad DB, ita AE, ad EC. Igitur erit ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC: Sed rursum ut basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis ejusdem. Igitur ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. Æqualia ergo sunt triangula DEB, & DEC: ac propterea, cum eandem habeant basin DE, inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC, quod est propositum. Si itaque
ad

ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit,
&c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iii.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit,
secans autem angulum recta linea secuerit &
basin: basis segmenta eandem habebunt ra-
tionem, quam reliqua ipsius trianguli latera.
Et si basis segmenta eandem habeant ratio-
nem, quam reliqua ipsius trianguli latera;
recta linea, quæ à vertice ad sectionem
producitur, bifariam secat trianguli ipsius
angulum.

IN triangulo ABC, recta AD, secet primo an- TAB. XXII.
gulum BAC, bifariam. Dico esse ut BA, ad fig. 13.
AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, re-
cta BE, parallela ipsi AD, donec cum CA,
producta conveniat in E; (coibunt autem omni-
no BE, CA, propterea quod anguli C, & CBE,
minores sunt duobus rectis i. Cum enim i 13. *prop.*
C, & CDA, & minores duobus rectis sint; a 17. *primi*
sit autem angulus CDA, angulo CBE, exter- b 29. *primi*
nus interno, æqualis: erunt quoque C, & CBE,
duobus rectis minores,) eritque angulus EBA, c 29. *primi*
æqualis alterno BAD; & angulus E, externo
DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC,
æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E,
inter se æquales; d 6. *primi*
inter se æquales. e Ut igitur EA, ad AC, ita e 7. *quint.*
BA, ad eandem AC. f Atqui ut EA, ad AC, f 2. *sext.*
ita est BD, ad DC. Cum in triangulo BCE,
recta AD, sit parallela lateri BE. g Igitur ut g 11. *quint.*
BA, ad AC, ita est BD, ad DC. Quod est
propositum.

Sit deinde ut BA, ad AC, ita BD, ad DC.
Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC.
Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD,
P 4 paral-

h31. *primi* parallela *b* coiens cum CA, protracta in E.
 e 2. *sent.* Quoniam igitur ut BA, ad AC, ita ponitur BD,
 ad DC. *e* Ut autem BD, ad DC, ita est EA,
 ad AC; (quod in triangulo BCE, recta AD,
 f11. *quint.* fit lateri BE, parallela) ferit ut BA, ad AC,
 g9. *quint.* ita EA, ad eandem AC. *g* Æquales igitur sunt
 h 5. *primi* BA, & EA, inter se, *b* ac propterea anguli
 i29. *primi* ABE, & E, æquales quoque erunt. Cum igitur
 angulus ABE, æqualis sit alterno BAD, &
 angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli
 BAD, DAC, inter se æquales, quod est propo-
 situm. Itaque si trianguli angulus bisariam sectus
 sit, &c. Quod erat demonstrandum.

[13] THEOR. 4. PROPOS. 4.

Æquiangulorum triangulorum proportiona-
 lia sunt latera, quæ circum æquales angu-
 los, & homologa sunt latera, quæ æqua-
 libus angulis subtenduntur.

TAB. XXII. *fig. 14.* Sint æquiangula triangula ABC, DCE, sintque
 æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC,
 BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, ut DC,
 ad CE, & BC, ad CA, ut CE, ad ED; & AB,
 denique ad AC, ut DC, ad DE: Ita enim latera
 circa æquales angulos sunt proportionalia, ho-
 mologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis
 subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia
 æquales respiciunt angulos, & consequentia si-
 militer. Constituantur latera BC, CE, secundum
 lineam rectam, ita ut angulus DCE, externus
 sit æqualis interno ABC, pariterque externus
 ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC,
 a 17. *primi* ACB, a minores sunt duobus rectis: est autem
 angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt &
 b13. *prom.* anguli B, & E, duobus rectis minores. *b* Quare
 rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D,
 coibunt. Producantur ergo, & conveniant in F.
 Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis
 est

est interno opposito ABC; & parallelæ erunt CD, & BF, Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF, quod angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF, & proptereaque recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) ut BC, ad CE. Permutando figitur erit AB, ad BC, ut DC, ad CE. Rursus quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, erit BC, ad CE, ut FD, hoc est, ut CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando bigitur erit BC, ad CA, ut CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, ut DC, ad CE, & BC, ad CA, ut CE, ad ED: erit & ex æqualitate AB, ad CA, ut DC, ad ED. Quod est propositum. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE, Dico triangulum ADE, triangulo ABC, esse simile. Æquiangula namque sunt, & cum anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externis; & angulus A, communis. Quare ut demonstratum est, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, ut DE, ad EF,

EF, & BC, ad CA, ut EF, ad FD, & AB, denique ad AC, ut DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. *k* Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, convenientque rectæ EG, FG, in G: *a* eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur sunt triangula ABC, GEF. Quare *b* ut AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Ut autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. *c* Igitur ut GE, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: *d* proptereaque æquales erunt GE, DE. Rursus, *e* quoniam ut BC, ad CA, ita est EF, ad FG: Ut autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; *f* erit ut EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; *g* ideoque æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, utrumque utrique; & basis communis EF; *h* erunt anguli G, & D, æquales, *i* ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus, G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit, quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

vi.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

TAB. XXII. fig. 2. **S**It angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera AB, BC, pro-

proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, ut DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; *d 13. prim.* & angulo C, angulus EFG, eritque ut in præcedenti propos. dictum est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare aut AB, ad BC, *a 4. sec.* ita est, GE, ad EF: Sed ut AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. *b 11. quint.* Igitur ut DE, ad EF, ita est GE, ad EF; *c 9. quint.* atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus DEF, proptereaque æquales ad invicem erunt anguli DEF, GEF.) *d 4. prim.* erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, EFD, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul utrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

Sit angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo *TAB.*
D, trianguli DEF, & latera AC, CB, circa *XXIII.*
angulo *fig. 2.*

angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc est sit ut AC, ad CB, ita DF, ad FE, hac tamen lege, ut quilibet re-
 liquorum angulorum B, & E, sit vel minor re-
 cto, vel non minor. Dico æquiangula esse tri-
 angula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos
 sunt latera proportionalia, & angulos B, & E,
 æquales esse. Sit enim primum tam B, quam
 E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, &
 F, non sunt æquales, sit ACB, major quam
 F: fiatque ipsi F, æqualis AGC. Cum igitur,
 & angulus A, angulo D, ponatur æqualis,
 a 32. primi a erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis;
 ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt.
 b 4. sext. Quare but AC, ad CG, ita erit DF, ad EF:
 Sed ut DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB.
 c 11. quint. c Ut igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC,
 d 9. quint. ad CB, dac propterea æquales erunt CG, CB,
 e 5. primi e & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur
 angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB,
 minor recto, ideoque ei deinceps AGC,
 f 13. primi recto major; fcum AGC, CGB, sint duobus
 rectis æquales: Est autem ostensus angulus AGC,
 angulo E, æqualis. Major igitur recto est quo-
 que angulus E: Sed positus est etiam recto mi-
 nor. Quod est absurdum.

Sit deinde tam B, angulus, quam E, recto
 non minor; eritque ut prius, angulus B, angulo
 CGB, æqualis, ideoque & CGB, recto non mi-
 nor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in
 triangulo BCG, non minores erunt duobus re-
 ctis, sed vel majores, vel æquales duobus rectis,
 g 17. primi quod est absurdum. x Sunt enim duobus rectis
 minores. Non ergo inæquales sunt anguli ACB,
 h 32. primi & F, sed æquales, atque hincirco reliqui etiam
 anguli B, & E, æquales erunt, quod est propo-
 situm. Si duo itaque triangula unum angulum uni
 angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum
 erat. *

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

viii.]

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, TAB.
 à quo ad basin perpendicularis agatur AD. XXIII.
 Dico triangula ADB, ADC, similia esse & toti fig. 4.
 triangulo ABC, & inter se. Cum enim in tri-
 angulis ABC, DBA, anguli BAC, & ADB,
 sint recti, & angulus B, communis; *a* erunt & a 32. primi
 reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Æqui-
 angulum est igitur triangulum DBA, triangulo
 ABC, *bac* propterea habebunt latera circa æqua- b 4. sext.
 les angulos proportionalia, &c. hoc est, crit ut
 CB, ad BA, ita BA, ad BD; & ut BA, ad
 AC, ita BD, ad DA; & ut BC, ad CA, ita
 BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqua-
 libus angulis opponuntur, ut vult propof. 4. hu-
 jus lib. Quare simile est triangulum ADB, toti
 triangulo ABC. Eodem modo ostendetur trian-
 gulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam
 anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus
 C, communis; *cac* propterea anguli ABC, & c 32. primi
 CAD, æquales. Quare *dut* BC, ad CA, ita est d 4. sext.
 CA, ad CD; & ut CA, ad AB, ita CD, ad
 DA, & ut CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic
 enim opponuntur quoque homologa latera angu-
 lis æqualibus, ex præscripto propof. 4. hujus lib.
 Non secus demonstrabitur, similia inter se esse trian-
 gula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC,
 sint recti, & anguli ABD, CAD, ostensi æqua-
 les, nec non anguli BAD, ACD; Atqui idcirco
 sit *eut* BD, ad CA, ita DA, ad DC; & ut e 4. sext.
 DA, ad AB, ita DC, ad CA; & ut AB, ad
 BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo
 rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicu-
 laris

laris ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item utrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adjacet.

Ostensum est enim, esse ut BD , ad DA , ita DA , ad DC ; ac propterea DA , esse mediam proportionalem inter BD , & CD : Item esse ut CB , ad BA , ita BA , ad BD ; & idcirco BA , mediam esse proportionalem inter CB , & BD : Denique esse ut BC , ad CA , ita CA , ad CD ; ideoque CA , esse proportionalem mediam inter BC , & CD . Quod est propositum.

xi,

P R O B L. I. P R O P O S. 9.

A data recta linea imperatam partem auferre.

TAB. XXIII. Imperetur, ut ex linea AB , auferamus partem
fig. 5. tertiam. Ex A , ducatur recta AC , utcumque
 faciens angulum CAB ; & ex AC , abscindantur
 tot partes æquales cujuslibet magnitudinis, quota
 pars detrahenda est ex AB , ut in proposito exem-
 plo tres AD , DE , EF . Deinde ex F , ad B ,
 recta ducatur FB , cui per D , parallela agatur
 DG . Dico AG , esse partem tertiam imperatam
 rectæ AB . Nam cum in triangulo ABF , lateri
 FB , parallela sit recta DG ; *a* erit ut FD , ad
a 2. sent. DA , ita BG , ad GA . *b* Componendo igitur, ut
bis. quint. FA , ad DA , ita BA , erit ad GA : Sed FA ,
 ipsius AD , est tripla, ex constructione. Igitur
 & BA , ipsius AG , erit tripla; ideoque AG ,
 tertia pars erit ipsius AB , quæ imperabatur. A
 data ergo recta linea imperatam partem abstuli-
 mus. Quod faciendum erat.

THEOR.

PROBL. 2. PROPOS. 10. xij.

Datam rectam lineam infectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

Sit recta AB, secanda similiter, ut secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, ut est secta AC, in D, & E, aut AD, ad DE, ita est AF, FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; erit rursus, ut DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; quod FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam infectam similiter secuimus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

PROBL. 3. PROPOS. 11. x.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinvenire.

Sint duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, ut efficiant angulum A, quemcunque, sitque inveniendæ illis tertiæ proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producaturs AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequens esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur

agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse ut AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, a 2. sext. lateri DE, parallela sit recta BC; ærit ut AB, b 7. quint. ad BD, ita AC, ad CE: b Sed ut AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Ut igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum.

S C H O L I U M.

Inventa autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & aliis duabus tertiam invenieris, habebis quatuor lineas continue proportionales.

TAB. XXIII. fig. 16. *Ut si lineis A, & B, adinveniaturs tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octava; & sic in infinitum.*

P R Ő B L. 4. P R O P O S. 12.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

TAB. XXIII. fig. 8. *Sint tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inveniendâ sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponentur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo a 2. sext. ACE, lateri CE, acta sit parallela BD; ærit ut AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta*

quarta est proportionalis ; ac propterea tribus datis rectis lineis , quartam proportionalem invenimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 5. PROPOS. 13. ix;

Duabus datis rectis lineis , mediam proportionalem adinvenire.

Sint duæ rectæ AB, BC, quibus media invenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Divisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & intervallo EA, vel EC, semicirculus describatur, ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam usque. Dico BD, esse, mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; ærit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB, erit per corollarium propof. 8. hujus lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis mediam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum.

TAB.
XXIII.
fig. 9.

a 31. terræ.

THEOR. 9. PROPOS. 14. xij;

Æqualium & unum uni æqualem habentium angulum , parallelogrammorum , reciproca sunt latera , quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera , quæ circum æquales angulos ; illa sunt æqualia.

Sint duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca,

TAB.
XXIII.
fig. 10.

Q

proca,

proca, hoc est, esse ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, & BG, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, una recta linea, ut ad propof. 15. lib. 1. ex Proclo demonstravimus. Producantur jam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur
a 7. quint. æqualia sunt parallelogramma DB, BF: *a* erit ut DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed ut
b 1. sext. DB, ad BH, *b* ita est AB, basis ad basin BG, quod parallelogramma sint ejusdem altitudinis; & similiter ut BF, ad BH, ita est basis EB, ad basin BC. Igitur ut AB, ad BG, ita est EB, ad BC. Quod est propositum.

E contrario sint jam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cum sit, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC: *c 1. sext.* Ut autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & ut EB, ad BC, ita BF, ad idem BH; erit
d 9. quint. quoque DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. *d* Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

xiv. T H E O R. 10. P R O P O S. 15.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

TAB. XXIII. *fig. 11.* SInt duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse
 ut

ut AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triacula ad angulos æquales, ita ut AB, BE, efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, DBE, sint æquales; erunt & DB, BC, una recta linea, ut demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sunt triacula ABC, DBE, ærit ut ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed ut triangulum ABC, ad triangulum BCE, ita est basis AB, ad basin BE, quod hæc triacula ejusdem sint altitudinis; & similiter ut DBE, & BCE, ita est basis DB, ad BC. Quare ut AB, ad BE, ita est DB, ad BC. Quod est propositum.

Jam vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad D, reciproca, hoc est, ut AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triacula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit ut AB, ad BE, ita DB, ad BC; ut autem AB, ad BE, ita triangulum ABC, ad triangulum BCE; & ut DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE; Erit ut ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, proptereaque æqualia erunt triacula ABC, DBE. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. II. PROPOS. 16. XXI

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo; illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; ut quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC, TAB. XXIII. fg. 12.

ad BC: Sitque rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis AB, BC; rectangulum vero EFGH, comprehensum sub mediis EF, FG: Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit ut AB, ad FG, ita EF, ad BC, erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. *a* Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod est propositum.

Contra vero, sint jam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse ut AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F, erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

xvi. THEOR. 12. PROPOS. 17.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

TAB. XXIII. fig. 13. SInt tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: ut quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD, contentum sub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; ut quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensum sub mediis EF, FG, propter æqua-

qualitatem rectarum EF, FG. *a* Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub mediis EF, FG, comprehenso: Quod est propositum. *a 16. sext.*

Sed sunt jam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; erit ut AB, ad EF, ita FG, ad BC: *b 16. sext.* Ut autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, *c 7. quint.* æqualis, ad eandem BC. Quare ut AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex posteriori hujus theorematidis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasvis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A data recta linea dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere.

Si data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resolvant in triangula CDE, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDE, angulus ABI; coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt *TAB. XXIII. fig. 14.* sunt

sunt, cum æquales sint duobus angulis FCD,
a 17. *primi* FDC, & qui duobus rectis sunt minores)
b 32. *primi* beritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus BIH. Et quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Cocant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: *d* Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis; erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, convenient in aliquo puncto. Convenient ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absolvantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut constet ex constructione; cum singulæ partes unius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero *e* ita est AB, ad BI, ut CD, ad DF: & ita BI, ad BH, ut DF, ad DE: ferit ex æquo ita AB, ad BH, ut CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, *g* quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. *b* Rursus ita est HI, ad IB, ut EF, ad FD, & ita IB, ad IA, ut FD, ad FC: *i* & ita IA, ad IK, ut FC, ad FG. Igitur
 ex

ex æquo erit ita HI , ad IK , ut EF , ad FG , & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK , EFG , proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilinum descripsimus. Quod faciendum erat.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint triangula similia ABC , DEF , habentia ^{TAB.} angulos æquales B , & E : Item C , & F , &c. ^{XXIII.} Et sit ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , &c. ^{fig. 15.} Dico triangula inter se rationem habere duplicatam ejus, quam habent latera homologa BC , & EF , vel AB , & DE , vel AC , & DF ; Hoc est, si homologis lateribus BC , EF , inveniatur tertia proportionalis BG : ita esse triangulum ABC , ad triangulum DEF , ut rectam BC , ad rectam BG : ac proinde cum ex defn. 10. lib. 5. proportio BC , ad BG , dicatur duplicata proportionis BC , ad EF : proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC , EF . Ita ut nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, ut est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales in proportionem duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC , EF , BG , continue proportionales in proportionem homologorum laterum BC , EF . Sint ergo primum latera BC , EF , æqualia, ac proinde & tertia pro-

portionalis BG, illis æqualis: ita ut proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, æquod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adjacent: erit triangulum ad triangulum, ut recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam habet latus BC, ad latus EF, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, ut dictum est, triangula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, ut constat ex defin. 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam ejus, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod est propositum.

TAB. XXIV.
fig. 1.
b 11. sext.
c 11. quint.
d 15. sext.
e 7. quint.

Sit deinde BC, latus latere EF, majus; & ex BC, abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturque recta AG. Quia igitur est ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando ut AB, ad DE, ita BC, ad EF; Ut autem BC, ad EF, ita est per constructionem EF, ad BG. Ut ergo AB, ad DE, ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, ipsa inter se æqualia erunt; & propterea ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita erit idem triangulum ABC, ad triangulum ABG. Ut autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, ejusdem

ejusdem altitudinis, fita est basis BC, ad basin BG. Igitur ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

Sint enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterque descripta. Dico, ut est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem 10. lib. 5. duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B. TAB. XXIV. fig. 2.

Eodem modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est, recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa: Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A. g 19. sext.

xviii. THEOR. 14. PROPOS. 20.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

- TAB. XXIV. fig. 3.** Sint polygona similia $ABCDE$, $FGHIK$, habentia angulos æquales BAE , GFK ; Item angulos B , G , & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem AB , ad BC , ita FG , ad GH ; & ut BC , ad CD , ita GH , ad HI , &c. Dico primum, hæc polygona dividi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim BAE , GFK , rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC , AD , FH , FI ; divisæque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B , æqualis est angulo G , ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; *a* æquiangula erunt triangula ABC , FGH , habentia angulos BAC , GFK , æquales; Item angulos ACB , FHG , lateribus homologis oppositos: *b* Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter se similia erunt. Eadem ratione erunt similia triangula AED , FKI , habentia angulos EAD , KFI , & angulos ADE , FIK , æquales. Deinde *c* quia est ut AC , ad CB , ita FH , ad HG , *b* similitudinem triangulorum ABC , FGH ; ut autem CB , ad CD , ita est, ex hypothesi, HG , ad HI , ob similitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo ut AC , ad CD , ita FH , ad HI . Et quoniam angulus BCD , æqualis ponitur angulo GHI ; est autem & ablatus ACB , ostensus æqualis ablato FHG ; erit & reliquus ACD , reliquo FHI , æqualis, *e* Quare triangula ACD , FHI , cum habeant

beant latera circa æquales angulos ACD , FHI , proportionalia, æquiangula erunt, ideoque similia. Eademque ratio est, de aliis omnibus triangulis, si plura fuerint.

Dico præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in uno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, ut polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangu-
 angula ABC , FGH , erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC , FH . g Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD , FHI , duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC , FH . Quare ut triangulum ABC , ad triangulum FGH , ita erit triangulum ACD , ad triangulum FHI , cum utraque hæc proportio triangulorum sit duplicata ejusdem proportionis lateris AC , ad latus FH . Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE , ad triangulum FIK , ut ACD , ad FHI : Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula unius polygones cum triangulis alterius, ita ut triangula unius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Ut autem unum antecedens ad unum consequens sita sunt
 omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygones ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

Dico postremo, polygones inter se proportionem habere duplicatam ejus, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB , FG , inveniaturs tertia linea proportionalis, ita esse polygonum $ABCDE$, ad polygonum $FGHIK$, ut est prima linea AB , ad tertiam inventam: ac proinde, cum proportio AB , ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB , ad FG , dici quoque proportionem poly-

g 19. *sim.*f 12. *quadr.*

polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim sit, ut triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, g19. *fest.* g habeat proportionem duplicatam ejus, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inventam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inventam. Itaque similia polygona in similia triacula dividuntur, &c. Quod demonstrandum est.

C O R O L L A R I U M.

Hinc manifestum est, si fuerint tres rectæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterque descriptum; uti si A, B, & C, sint tres proportionales, atque super A, & B, describantur duo polygona similia, uti sunt quadrata A, & B, erit A, ad C, ut quadratum super A, ad quadratum super B.

TAB.
XXIV.
fig. 4.

Hoc non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematism ex suo theoremate. Ut perspicuum est in hac figura.

XX. T H E O R. 15. P R O P O S. 21.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

TAB.
XXIV.
fig. 5: Sint rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item

Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis ejusdem rectilinei GHI; *a* erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet iis, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus ejusdem rectilinei GHI; *b* erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem primam hujus, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 22. xxi.

Si quatuor rectæ linæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipse etiam rectæ linæ proportionales erunt.

• **S**Int primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, ut quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. *a* Inventatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. *b* eritque ex æquo, ut AB, ad P, ita EF, ad Q: Ut autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex coroll. propof.

20. hujus lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propof. 19. Et eadem ratione, ut EF, ad Q, *e* 11. quint. ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. Igitur ut ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

Deinde sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, ut quidem *d* 12. sext. AB, ad CD, ita EF, ad GH. Inveniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterque positum; *e* & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, ut AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque ut jam est ostensum, ut ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Ut autem ABI, ad CDK, *f* 11. quint. ita quoque ponitur EM, ad GO. Igitur erit *g* 9. quint. ut EM, ad RV, ita EM, ad GO; Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus super rectas RS, GH, æquales. *h* Quare erit ut EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, ut AB, ad CD. *i* 11. quint. Igitur erit quoque ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

L E M M A.

Quod autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistent super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, major. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, major quam RS, erit quoque HO, major quam SV, & propterea rectilineum GO, majus rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est ab-

absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ GH , RS . Quod est propositum.

Aliter. Sint duo rectilinea ABC , DEF , æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cujusmodi sunt rectæ AB , DE , esse equalia. Si enim non credantur equalia, sit AB , majus, quam, DE , inveniaturque rectis AB , DE , tertia proportionalis G . Quoniam ergo est, ut AB , ad DE , ita DE , ad G . Est autem AB , major, quam DE . Erit quoque DE , major, quam G , ac propterea multo major AB , quam G . Ut vera AB , ad G , ita est rectilineum ABC , ad rectilineum DEF , per coroll. propof. 19. vel 20. hujus lib. Igitur cum AB , major sit, quam G , erit quoque rectilineum ABC , majus rectilineo DEF , quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo major est AB , recta quam recta DE . Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC , minus ostenderetur rectilineo DEF , quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB , DE .

TAB.
XXIV.
fig. 7.

THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiv

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

Sint parallelogramma æquiangula AC , CF , habentia angulos BCD , ECG , æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno Parallelogrammo, & consequen-

TAB.
XXIV.
fig. 8.

quantia in altero ; hoc est , proportionem AC , parallelogrammi ad parallelogrammum CF , compositam esse ex proportionibus rectæ BC , ad CG , rectam , & rectæ DC , ad rectam CE ; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC , ad rectam CE , & rectæ DC , ad rectam CG. Id est , si sumantur tres lineæ I , K , L , ita ut I , ad K , sit , sicut BC , latus ad latus CG , & K , ad L , ut latus DC , ad latus CE ; ita esse parallelogrammum AC , ad parallelogrammum CF , ut est recta I , ad rectam L : ac proinde cum ex defin. 5. hujus lib. proportio I , ad L , componi dicatur ex proportionibus I , ad K , & K , ad L ; proportionem quoque parallelogrammi AC , ad parallelogrammum CF , dici compositam esse ex eisdem proportionibus ; hoc est , ex proportionibus BC , ad CG , & DC , ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales , ita ut BC , CG , efficiant unam lineam rectam : Quo posito , cum anguli BCD , ECG , sint æquales , erunt & DC , CE , una recta linea , ut ad propof. 15. lib. 1. ex Proclo demonstravimus. Producantur deinde AD , FG , donec conveniant in H ; Sumptaque recta I , quacunque , *a 12. sent.* inveniantur tribus BC , CG , & I , quarta proportionalis K : Item tribus DC , CE , & K , quarta proportionalis L. Quoniam igitur est , *b. 1. sent.* ut BC , ad CG , ita AC , ad CH. Ut autem *c. 11. quint.* BC , ad CG , ita posita est I , ad K , erit quoque ut AC , ad CH , ita I , ad K. Eodemque argumento ostendes esse , ut HC , ad CF , ita K , *d. 1. sent.* ad L. Nam ut DC , ad CE , ita est HC , ad CF. Cum ergo posita sit K , ad L , ut DC , ad CE , erit quoque HC , ad CF , ut K , ad L : *e 22. quint.* Ex æquo igitur erit , ut AC , ad CF , ita I , ad L. Sed proportio I , ad L , per 5. defin. hujus lib. componitur ex proportionibus BC , ad CG ; & DC , ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC , ad parallelogrammum CF. Eademque ratione ostendemus , proportionem AC ,
ad

ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogramma ita conjungantur ad angulos æquales, ut BC, CG, efficiant unam rectam lineam, &c. Æquiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

T H E O R. 18. P R O P O S. 24. xxii.

In omni parallelogrammō, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

ESto parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet ejus punctum I, ducantur duæ rectæ EI, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo & inter sese. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idem est, qui angulus BAD; & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, ut perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam ex coroll. propos. 4. hujus lib. erit ut AB, ad BC, ita AG, ad GI, & ita ut BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item ut CA, ad CD, ita IA, ad IE. Ex æquo igitur, ut BC, ad CD, ita est GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt.

existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales esse proportionalia. Quare per definitionem primam hujus, simile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD; *e 21. sext.* e atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

XXV. P R O B L. 7. P R O P O S. 25.

Dato rectilineo simile similiterque positum., & alteri dato æquale idem constituere.

TAB. *XXV.* *fig. 1.* SInt data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, unum latus rectilinei, cui simile debet constitui, a constituatur parallelogrammum CE, in quo-
a 44. vel *45. primi* vis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B, eritque tam CDG, quam FEH, linea una recta, ut demonstratum est propof. 45. lib. 1. *b* Inveniatur jam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK, *c 18. sext.* c super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propof. 19. vel 20. hujus lib. ut CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primum CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterque descriptum: *d 1. sext.* d Ut autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, ejusdem altitudinis. *e 11. quint.* e Igitur erit ut CE, ad DH, ita A, ad L. *f 17. quint.* f Ut autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A, & paral-

parallelogrammum DH , rectilineo B , constructum est æquale. *g* Quare erit ut A , ad B , ita A , ad L ; *h* proptereaque æqualia erunt rectilinea B , & L : Est autem & L , simile ipsi A , similiterque positum per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

THEOR. 19. PROPOS. 26. xxij;

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

EX parallelogrammo BD , abscissum sit parallelogrammum EG , simile ei similiterque positum, habens cum ipso angulum communem TAB. XXV. fig. 2.
 EG . Dico EG , consistere circa diametrum totius BD . Ducantur enim rectæ AF , CF , quæ si fuerint una linea recta, perspicuum est, cum AF , sit diameter ipsius EG , & AC , diameter ipsius BD , parallelogrammum EG , consistere circa diametrum AFC , totius parallelogrammi. Quod si AF , CF , non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC , secans latus EF , in H , puncto, per quod ipsi FG , parallela agatur HI . Quoniam igitur parallelogramma BD , EI , sunt circa eandem diametrum AHC ; ipsa erunt similia similiterque posita. *b* Quare erit ut BA , ad AD , ita EA , ad AI . Sed ut BA , ad AD , ita quoque est EA , ad AG , quod parallelogramma BD , EG , ponantur etiam similia, similiterque posita. *c* Igitur erit ut EA , ad AI , ita EA , ad AG , *d* Ac de propterea æquales erunt rectæ, AI , & AG , pars, & totum: quod est absurdum.

R 2

Quod

TAB. Quod si dicatur recta AHC, secare alterum
XXV. latus FG. Tunc ducta HI, parallela ipsi EF,
fig. 3. erunt rursus similia parallelogramma BD, IG,
e 24. sext. similiterque posita. f Quare erit ut DA, ad AB,
f 1. def. ita GA, ad AI: Sed ut DA, ad AB, ita quo-
sext. que est GA, ad AE, ob similitudinem parallelo-
g 11. quint. grammorum BD, EG. g Igitur erit ut GA, ad
h 9. quint. AI, ita GA, ad AE, hideoque æquales erunt
 rectæ AI, AE, pars & totum: Quod est absur-
 dum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, unam
 rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC,
 transiit per punctum F; & ducta diameter AF,
 eaque producta cadit in punctum C. Itaque si à
 parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit,
 &c. Quod erat demonstrandum.

xxvi. T H E O R. 20. P R O P O S. 27.

Omniū parallelogrammorum secundum
 eandem rectam lineam applicatorum, defi-
 cientiumque figuris parallelogrammis simili-
 bus similiterque positis ei, quod à dimidia
 describitur; maximum, id est, quod ad
 dimidiam applicatur, parallelogrammum si-
 mile existens defectui.

TAB. D Etur recta AB, divisa bifariam in C, super-
XXV. que ejus dimidiam BC, constituatur quod-
fig. 4. cunque parallelogrammum CDEB, cujus diame-
 ter BD. Si igitur compleatur totum parallelo-
 grammum ABEH, erit parallelogrammum AD,
 super dimidiam AC, consistens, applicatum se-
 cundum AB, deficiens parallelogrammo CE, &
 existens simile defectui CE. Dico parallelogram-
 mum AD, ad dimidiam AC, applicatum defi-
 cientsque parallelogrammo CE, maximum esse
 omnium, quæ secundum AB, rectam applican-
 tur, deficiuntque parallelogrammis similibus si-
 militerque positis ipsi CE. Sumpto enim puncto
 G, utcunque in diametro BD, & ductis per G,
 rectis

rectis FGI, KG, quæ sint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, secundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, æquod ipsi CE, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum CE, diametrum. Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: Est autem CI, æquale ipsi CF, propter bases æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additaque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cum CE, majus sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, æquale existens ipsi CE, propter bases æquales AC, CB, majus quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo DG. Eodemque modo ostendetur AD, majus esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam AB, applicantur, ut punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant majorem lineam semisse AC, habentque minorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus similes sint ipsi CE.

Aliter demonstrabitur AD, majus esse parallelogrammo AG, hoc modo. Parallelogramma FD, DI, sunt æqualia, cum bases HD, DE, sint æquales: Est autem DI, majus quam GE, hoc est, quam complementum CG, (quod ipsi GE, æquale est,) parallelogrammo DG. Igitur & FD, majus erit, quam CG, parallelogrammo eodem DG. Atque idcirco addito communi CF, majus erit AD, quam AG, parallelogrammum eodem DG.

Quod si punctum G, sumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratque rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammum AG, applicatum secundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM,

224. sex.

b43. primi

c36. primi

d36. primi

e36. primi

f43. primi

TAB.

XXV.

fig. 5.

g 24. *sext.* g quod ipsi CE, est simile similiterque positum, cum sit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc majus esse AD, ipso AG. Protracta enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, *b* cum æquales sint æqualibus AC, CB; *i* ideoque æqualia parallelogramma HD, DM. *k* Cum igitur DM, sit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, majus quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, majus erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, majus erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis concludes AD, majus esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse AC, habetque majorem altitudinem, quam AD: dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

xxvii.

P R O B L. 8. P R O P O S. 28.

Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus, cui simile deesse debet.

TAB.
XXV.
fig. 6.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam

riam in E, super medietatem EB, *a* describatur *a* 18. *sexti*
 parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, simili-
 terque positum; & compleatur totum parallelo-
 grammum AHGB. Si igitur AF, æquale est
 ipsi C; cum sit applicatum ad AB, deficiens
 parallelogrammo EG, simile ipsi D, factum erit,
 quod jubetur. Si autem AF, majus est quam
 C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum
 per propof. præcedentem, ipsum sit omnium ap-
 plicatorum maximum, dummodo defectus sint
 similes, non posset applicari ullum ad AB, quod
 esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora.
 Propterea adjunxit Euclides; Oportet autem da-
 tum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale
 EG, majus quam C. Sit igitur majus rectilineo
 I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineo-
 rum sit inquirendus, docuimus ad propof. 45.
 lib. 1.) *b* & constituatur parallelogrammum *b* 25. *sexti*
 KLMN, simile quidem similiterque positum ipsi
 D, seu ipsi EG, æquale vero excessui invento
 I; ut sit EG, æquale rectilineo C, & parallelo-
 grammu KM, simul; & ob id majus quam KM.
 Cum igitur ob similitudinem sit ut EF, ad FG,
 ita NK, ad KL; erunt quoque latera EF, FG,
 majora lateribus NK, KL. Si enim his illa fo-
 rent æqualia, vel minora, esset etiam EG, æ-
 quale ipsi NL, vel minus, ut constat. Quare
 abscissis rectis FO, FQ, quæ sint æquales ipsis
 KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO,
 erit hoc ipsi LN, æquale, & eidem simile simili-
 terque positum, & propterea ipsi EG: *c* atque *c* 26. *sexti*
 adeo circa eandem diametrum cum EG, con-
 sistet, quæ sit BF, productis jam rectis QP, OP,
 erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, ap-
 plicatum deficiens parallelogrammo PB, *d* quod *d* 24. *sexti*
 simile est ipsi EG, similiterque positum, & prop-
 terea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse ipsi
 C, rectilineo. *e* Nam cum PG, æquale sit com- *e* 43. *primi*
 plemento PE; si addatur commune PB, erit &
 BQ, æquale ipsi ER, hoc est, ipsi ES, *f* quod *f* 36. *primi*
 æquale est ipsi ER, propter bases æquales EA,
 R 4 EB.

EB. Quare si æqualibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis est rectilineo C, (Nam cum EG, parallelogrammum æquale sit ipsi C, una cum LN, si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C, æqualis.) Igitur & AP, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

xxviii. PROBL. 9. PROPOS. 29.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

TAB. XXV. fig. 7. AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit Parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Divisa AB, bifariam in E; a super dimidiam EB, construatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum. b Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; c cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterque positum; eritque propterea IKLM, majus quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, una cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit ut MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, majora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque MK, vel æquale ipsi EG, vel minus, ut perspicuum est. Productis igitur FE, FG, ut rectæ FO, FN, æquales sint rectis IM, IK, & completo paral-

lelo.

lelogrammo ON; erit hoc simile similiterque positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterque positum. Quare ON, EG, circa eandem diametrum consistent, quæ sit FP. Productis jam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipsi FO, parallela conveniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo QR, quod simile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. Nam cum AO, ER, sint æqualia, & ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cum MK, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, una cum EG, si auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

P R O B L. 10. P R O P O S. 30. xxix.

Propositam rectam lineam terminatam.
extrema, ac media ratione secare.

Sit recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simile ipsi quadrato, ita ut sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si dematur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHE, BHE, utpote rectos, erunt latera b
R 5 circa

circa illos reciproca, hoc est, erit ut EH , hoc est, ut AB , ipsi EH , æqualis, ad HF , hoc est, ad AH , ipsi HF , æqualem, ut AH , ad HB . Quare cum sit, ut tota AB , ad segmentum AH , ita segmentum AH , ad segmentum HB , secta est AB , extrema ac media ratione, per definitionem tertiam hujus. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

Aliter quoque ostendemus AB , esse sectam in H , extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB , AH , HB , sitque rectangulum HC , comprehensum sub prima AB , & tertia HB , æquale quadrato mediæ AH ; erunt ipsæ proportionales: ut AB , quidem prima ad AH , secundam, ita AH , secunda ad HB , tertiam. Quare per definitionem secta est AB , in H , extrema ac media ratione.

d 11. sec. Aliter totum problema conficiemus. *d* Dividatur AB , in C , ita ut rectangulum sub tota AB , & segmento CB , æquale sit quadrato alterius segmenti AC . Dico AB , in C , esse sectam extrema ac media ratione. *e* Erunt enim rursus, ut prius, tres lineæ AB , AC , CB , continue proportionales. Constat ergo propositum.

T H E O R. 21. P R O P O S. 31.

In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

TAB. **T**riangulum rectangulum sit ABC , habens angulum BAC , rectum; describaturque super *XXV.* BC , quæcunque figura rectilinea $BCDE$, cui *fig. 10.* similes similiterque positæ super AB , AC , constituentur $ABFG$, $ACIH$. Dico figuram BD , æqualem esse duabus figuris AF , AI . Demissa enim ex A , ad BC , perpendiculari AK , erit per *a 18. sent.* coroll.

coroll. propof. 8. hujus lib. ut BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare ut BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primam, ad figuram CH, super secundam similem similiterque positam, per coroll. propof. 19. vel 20. hujus lib. & convertendo ut CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non fecus ostendetur, esse quoque ut BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, sint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur est ut CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item ut BK, quinta quantitas ad BC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; *b* erit ut prima CK, cum *b*14. *quins.* quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia CH, cum sexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta BK, simul æquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, simul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod est est propositum.

Aliter. *c* Cum triangulo ABC, simile sit tri- *c* 8. *sext.* angulum KAC, sintque homologa latera ipsorum, BC, CA; (Nam est ut BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) *d* habebit triangulum KAC, ad triangu- *d* 19. *sext.* lum ABC, duplicatam proportionem ejus, quam habet CA, ad BC, *e* habet autem & figura CH, *e* 19. *vel* ad figuram BD, proportionem duplicatam pro- *20. sext.* tionis CA, ad BC. *f* Quare erit ut triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione ostendetur esse, ut trian- *f* 11. *quins.* gulum KBA, ad ABC: ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergo rursus est, ut KAC, prima quantitas ad ABC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item ut KBA, quinta ad ABC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; *g* erit *g* 14. *quins.* & prima KAC, composita cum quinta KBA, ad secundam ABC, ut composita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam BD: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta simul,

simul, æquales quoque erunt quartæ BD. Quod est propositum.

Aliter. Ut quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, *h 19. vel* ad figuram BD, quartam quantitatem; *20. sext.* *h* cum utraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit ut quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, *i 24. quint.* ad figuram BD, quartam quantitatem. Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet *k 47. primi* ad figuram BD: Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis; figura quævis &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

TAB. XXV. fig. 11. **H**abeant triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componenturque ad angulum ACD, ita ut latera homologa AB, DC, item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ *h 29. primi* sint AB, DC, erit angulus A, alterno ACD, æqualis:

æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa *berunt* b 6. *sect.* inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, æqualibus angulis B, & DCE, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: *c 32. primi* Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: *d 14. primi* Atque idcirco BC, CE, unam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxij.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistent, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SInt duo circuli æquales ABC, EFG, quorum TAB. XXV. fig. 13. centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC, FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. ut arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG, & angulum BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG; & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, applicentur ipsis a 1. *quart.* in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC. At

At vero GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, b erunt quoque æquales arcus BC, CI, c ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales divisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, d necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, major fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, major est angulo FHL, & si minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt, vel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. e Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

e 6. def.
quint.

Atque hoc verum etiam est de spatiis circa centra, hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, ut spatium ad centrum D, insitens arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insitens arcui FEG, ut ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt insistent æqualibus arcibus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.

Quoniam vero ut angulus BDC, ad angulum FHG, fita est angulus BAC, ad angulum FEG,

g cum

g cum illi horum sint dupli, perspicuum est, g 20. tertii!
 h ita esse quoque angulum, BAC, ad angulum hii. quinti.
 FEG, ut est arcus BC, ad arcum FG. Quod
 tamen eisdem argumentis demonstrari potest,
 quibus usi sumus in angulis ad centra constitutis,
 si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

Quod si ad circumferentias constituti sint anguli ejusmodi BAC, FEG, ut rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non constituent angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erunt spatia BDC, FHG; quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias.

Constituantur jam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, i qui æquales erunt, cum in- i 27. tertii!
 fistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare k 24. tertii.
 similia erunt segmenta BMC, CNI, k atque adeo
 inter se æqualia, propterea quod sunt super re-
 ctas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis
 BDC, CDI, l quæ æqualia quoque sunt, fient l 4. primi
 sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam
 multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam
 est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Si-
 militer ostendamus, sectorem FHL, tam multi-
 plicem esse sectoris FHG, quam multiplex est ar-
 cus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam vero si
 arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector
 quoque BDI, sectori FHL, æqualis est, (ut in
 sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si ma-
 jor, major; & si minor, minor: Deficient prop-
 terea una arcus BCI, & sector BIN, æque mul-
 tiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC,
 ab arcu FGKL, & sectore FHL, æque multipli-
 cibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG,
 vel una æqualia erunt: vel una excedent; si ea
 sumantur, quæ inter se respondent. i Quamo- i 6. def.
 brem quæ proportio est arcus BC, primæ magni- quinti.
 tudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem,
 ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad
 sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æ-
 qualibus ergo circulis, anguli eandem habent
 rationem cum peripheriis, &c. Quod demon-
 strandum erat. Com-

Commodius fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotvis circuli æquales circulo ABC, atque in singulis capiantur singuli arcus arcui BC, æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quam ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus insistant: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, ut est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotvis circuli æquales circulo EFG, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quæ necessario oritur, quando arcus BC, FG, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, ut perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistant anguli BDI, FHL, ad centra, & BAI, FEL, ad circumferentias: non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, ut patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, ut diximus.

C O R O L L A R I U M.

Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, ut est angulus ad angulum. Utraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. *Quare & inter se eadem erunt.*



E U C L I D I S

E L E M E N T U M

U N D E C I M U M.

Et solidorum primum.

Postquam Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometria parte differuit, quæ circa plana versatur, sibi quæ nomen Geometria. tanquam proprium, usurpavit; Nunc aggreditur in hoc libro undecimo eam partem Geometria, quæ corpora, siue solida consideras, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

D E F I N I T I O. I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

Explicat autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis; docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita ut tres dimensiones possideat, unam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari

S

solidum,

solidum; sive corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; qua vero longitudini latitudinem adjicit, superficies vocatur, ut in primo lib. diximus.

Porro quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, precipiunt, ut imagininemur punctum aliquod e loco in locum moveri; hac enim describit vestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis est magnitudinis expers; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; hac enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in transversum est factus; carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensionem præditam, consulunt, ut concipiamus superficiem aliquam equaliter elevari, sive in transversum moveri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum vero seu crassum, propter elevationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum, sive corpus vocatur.

DEFINITIO. II.

Solidi autem extremum, est superficies.

Quemadmodum linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, sive corpus efficiatur
ex

ex illo motu imaginario superficiei, perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

DEFINITIO. III.

Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

UT linea recta AB , plano CD , insists, ita ut TAB.
 B , punctum sit in sublimi extra planum CD , XXVI.
 at punctum A , in ipso plano, tum demum dicetur fig. 1.
 recta seu perpendicularis ad planum CD , cum rectos
 effecerit angulos cum lineis AE , AF , AD , AG ,
 & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano
 ipsam tangunt in puncto A . Hac enim ratione
 fiet, ut AB , æqualiter insistas plano CD , & non
 magis in unam partem, quam in aliam inclinet.
 Nam producta recta DA , ad H , cum angulus
 BAD , ponatur rectus, erit quoque deinceps BAH ,
 rectus, ideoque illi æqualis. Eademque ratione pro-
 tracta qualibet linea in plano CD , faciet AB , cum
 illa duos angulos æquales. Ac propterea æqualiter
 ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB ,
 cum una linea ex A , in plano CD ,educta non
 efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus
 rectum angulum constitueret, non diceretur AB ,
 recta ad planum CD . Itaque quando conceditur
 linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque
 erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ
 ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è
 contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam
 esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit
 prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis,
 quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

DEFINITIO. IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

TAB. XXVI. fig. 2. **I**nsistat planum AB , plano CD , itaut linea AQ , sit in sublimi, hoc est, extra planum subjectum CD , at EB , in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio EB , quæ, ut demonstrabitur propof. 3. hujus lib. recta erit linea. In hac autem sumptis punctis quocunque G , I ; ex ipsis in plano AB , ducantur GF , IH , perpendiculares ad communem sectionem EB . Si igitur linea FG , HI , ad planum alterum CD , rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK , GL , GM ; IN , IO , IP , & cum aliis omnibus in plano CD , à punctis G , & I , ductis; dicetur planum AB , ad planum CD , rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG , producat-
 tur ad R , cum angulus FGK , ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR , rectus; ideoque illi æqualis: Ealemque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD , fient utrobique à lineis FG , HI , anguli æquales. Quare planum AB , æquabiliter plano CD , insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum, ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum

ad

ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

DEFINITIO. V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta: est, inquam angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

Insistat recta AB , plano CD , non ad angulos rectos, sed inclinata, ita ut punctum B , sit extra planum in sublimi, punctum vero A , in plano. Deinde ex B , termino sublimi rectæ AB , intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE , faciens in plano punctum E ; atque ab E , ad A , adjungatur recta EA ; eritque necessario angulus BAE , acutus, ac cum in triangulo ABE , duo angulii BAE , BEA , duobus sint rectis minores, & angulus BEA , rectus. Angulus igitur acutus BAE , comprehensus linea insistente AB , & adjuncta AE , dicitur inclinatio rectæ AB , ad dictum planum CD ; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio lineæ AB , ad planum CD , quantus est dictus angulus acutus BAE . TAB. XXVI. fig. 3.

DEFINITIO. VI.

Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis

punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

TAB.
XXVI.
fig. 4.

PLano namque AB , insistet planum CD , ita ut pars ad C , sit in sublimi extraplanum AB , & pars ad D , in ipso plano AB , sitque CD , inclinatum ad AB ; & communis eorum sectio sit DE . Si igitur ad DE , communem sectionem ex ejus puncto F , due perpendiculares ducantur, FG , quidem in plano AB , & FH , in plano CD ; dicitur angulus acutus GFH , dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD , ad planum AB , ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantum est dictus angulus acutus.

DEFINITIO. VII.

Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

Non obscura est hac definitio, præcedente bene intellecta. Unde planum ad planum magis inclinatum esse dicitur, cujus angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis recesserit.

DEFINITIO. VIII.

Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

Intellige, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur: hoc est, sive ad dexteram, sive ad sinistram: & sive sursum, sive deorsum, &c. Sunt enim quedam plana quæ nec ad dextram, nec ad fini-

sinistram producta conveniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda, quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur rectum aliquod, cujus fastigium intelligatur abscissum, remanentia duo plana non convenient, quamvis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

Sit enim rectum quoddam BACEDF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cujus basis BCFE, auferaturque fastigium GAHKDI. Quo facto perspicuum est, reliqua plana GBEK, HCFI, non convenire inter se, si ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GK, HI, conveniant in fastigio AD. Ut igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se conveniant.

TAB. XXVI.
fig. 5.

DEFINITIO. IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

DEFINITIO. X.

Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QUod si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint equalia, singula singulis, dicentur ejusmodi figuræ solidæ non solum similes, verum etiam æquales. Nam

si animo concipiantur sese penetrare mutuo hujusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter aequalitatem, ac similitudinem planorum.

D E F I N I T I O. XI.

Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio.

TAB.

XXVI.

6.

DUa linea in eodem existentes plano, quæ non in directum jacentes ad unum punctum conveniunt, efficiunt angulum planum, ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC , contentus duabus lineis AB , AC , in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quadam linea AD , quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D , sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A , angulus solidus, sive corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres linea AB , AC , AD , in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A , sed planus duntaxat ex duobus planis BAD , DAC , compositus. Quod si AD , sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB , AC , jam non componetur angulus planus totus ex BAD , DAC , immo circa punctum A , tres plani consistent anguli BAD , DAC , CAB , qui ut mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint linea, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALI-

A L I T E R.

Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non contentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

HÆc definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariae sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus solidus efficiatur, ut ex ipsa figura apparet. Angulus enim BAD , in plano est, in quo rectæ AB , AD , TAB. XXVI. & angulus DAC , in plano, in quo rectæ AD , AC , angulus denique CAB , in plano, in quo rectæ AC , AB , atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A , constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad unum punctum consistent, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diversis sint planis. Habet enim semper ex altera parte. Unde necesse est, ut tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pavimento domus, vel laqueari, ad unum punctum convenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Ubi manifestum est, si una earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duæ superficies ad invicem inclinatas, & hiantes.

DEFINITIO. XII.

Pyramis est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

TAB.
XXVI.
fig. 7, 8,
9.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Videlicet figura solida à planis ABC , $ABCD$, $ABCDE$, ad puncta D , E , F , constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad unum punctum tendant, excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi est appositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; ut videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quilibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Unde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Ut pyramidis triangularis, præter basin; triangula sunt ABD , ACD , BCD : Quadrangula vero ABE , ADE , BCE , CDE : Pentagona denique ABF , AEF , BCF , CDF , EDF .

DEFINITIO. XIII.

Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

TAB.
XXVI.
fig. 10, 11,
12.

Figura scilicet solida, quarum plano adversa & æqualia, & similia, & parallela sunt, vel triangula sint ABC , DEF : vel quadrangula $ABCD$, $EFGH$:

EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHK, &c.
 Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF:
 vel ABFE, ADHE, CDHG, CBEF: vel ABGF,
 AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur pris-
 mata. Itaque prisma nil aliud erit, quam columna
 quaedam laterata aequalis crassitudinis, cujus bases op-
 posita sunt aequales, similes, & parallelae, siue ha-
 sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona,
 &c. Unde tot parallelogramma continebit prisma
 quodlibet, quot latera, siue anguli, in uno quoque
 oppositorum planorum reperiuntur, ut figura indicant.

DEFINITIO. XIV.

Sphaera est, quando semicirculi manente
 diametro, circumductus semicirculus in se
 ipsum rursus revolvitur, unde moveri, coe-
 perat, circumassumpta figura.

Sicut linea recta circa alteram ejus extremum
 quiescens revoluta describit circulum: ita & se-
 micirculus circa alterum ejus extremum, nempe circa
 diametrum, circumductus figuram describit, quam
 Geometra sphaeram appellant. Unde quemadmodum
 in circulo punctum assignatur, extremum videlicet
 illud quiescens, à quo omnes linea recta in periphe-
 riam cadentes sunt aequales; propterea quod omnes
 aequales existunt illi linea circumvoluta: Ita quoque
 in sphaera punctum reperitur, nempe medium diamet-
 ri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circum-
 ducti, à quo omnes recta cadentes in peripheriam
 sunt aequales; eo quod omnes sunt semidiametro disti-
 ti semicirculi aequales. Quapropter ad similitudinem
 definitionis circuli, sphaera definitur poterit hoc etiam
 modo.

Sphaera

Sphæra est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINITIO. XV.

Axis autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

DEFINITIO. XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi.

DEFINITIO. XVII.

Diameter autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæra posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra revolvatur. Unde quia in descriptione sphæra circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæra; propterea eam solam Euclides axem sphæra nominavit.

DEFINITIO. XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se

se ipsum rursus revolvitur, unde moveri coeperat, circumassumpta figura.

Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero major, Oxygonius.

UT si triangulum rectangulum ABC , circa latus TAB. XXVI. fig. 13, 14. quiescens AB , quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram revolutionem expleat, describetur solida quadam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari una ac plana, quam BC , latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit: & curva alia, eaque convexa, quam latus AC , recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotandam appellat.

Quod si latus quiescens AB , æquale fuerit circumducto BC , ut in figura 13. dicitur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A , rectus est. Cum enim latera AB , BC , ponuntur equalia; ærunt & anguli BAC , BCA , æquales, qui cum æquivalent uni recto, eo quod ABC , rectus est, erit angulus BAC , semirectus. Eodemque modo angulus BAD , ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD , rectus erit. Si vero quiescens latus AB , minus fuerit circumducto BC , ut in figura 14. vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A , obtusus existit. Cum enim BC , latus latere AB , sit majus; ßerit angulus BAC , major angulo BCA . Quare cum hi duo æquipolleant uni recto, propterea quod angulus ABC , ponitur rectus, erit BAC , semi-

semirecto major. Similiter BAD, major erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto major erit. Si denique quiescens latus AB, majus fuerit circumducto BC, ut in figura 15. appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus, quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum enim latus AB, majus sit latere BC, erit angulus BCA, angulo BAC, major. Quapropter cum hi duo uni recto æquivalent, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto major, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

D E F I N I T I O. XIX.

Axis autem conì, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

TAB. XXVI. **UT** *in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.*

fig. 13, 14,

15.

D E F I N I T I O. XX.

Basis vero conì est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

TAB. XXVI. **N** *imirum circulus CD, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque hujus circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.*

fig. 13, 14,

15.

DEFI-

DEFINITIO. XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus revolvitur, unde cœperat moveri, circumassumpta figura.

Veluti si rectangulum parallelogrammum *ABCD*, TAB. XXVI.
circa latus quiescens *AB*, circumvolvatur, donec integram expleat revolutionem, appellabitur figura descripta *DCFE*, cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus *DE*, & *CF*, quas latera *AD*, *BC*, describunt; & altera curva, eaque convexa, quam latus *CD*, describit, instar columnæ alicujus rotundæ. Unde factum est, ut Campanus cylindrum appellaverit columnam rotundam. fig. 16.

DEFINITIO. XXII.

Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

Nempe recta *AB*, in superiori figura, dicitur TAB. XXVI.
axis cylindri. fig. 16.

DEFINITIO. XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

Quales sunt circuli *DE*, & *CF*, à lateribus *AD*, *BC*, oppositis descripti. TAB. XXVI.

DEFI-fig. 16.

DEFINITIO. XXIV.

Similes conī & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

TAB.
XXVI.
fig. 17, 18.

Reste Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eodem secundum profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo conī ABC , EFG ; Item duo cylindri: in conis autem axes AD , EH , & basium diametri BC , FG ; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, ut axis AD , ad axem EH , ita BC , diameter basis ad FG , diametrum basis, dicentur tam conī, quam cylinari similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula ADB , EHF , ex quorum revolutione descripti sunt conī, nec non rectangula AB , EF , quorum conversiones cylindros effecerunt, huc ratione similia inter se erunt. Cum enim sit ut AD , ad EH , ita BC , ad FG ; Sit autem ut BC , ad FG , a ita dimidia BD , ad dimidiam FH : erit quoque ut AD , EH , ita DB , ad HF : & permutando ut AD , ad DB , ita EH , ad HF . Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum aequales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erunt: Triangula quidem,

dem, bpropterea quod triangula unum angulum uni b 6. sext)
 angulo habentia aequalem, & circum aequales angulos
 latera proportionalia, æquiangula sunt, cideoque c 5. sext)
 latera omnia circa angulos aequales habent proportio-
 nalia, atque adeo inter se similia existunt: Rectan-
 gula vero, deo quod reliqua duo latera duobus late- d34. prim)
 ribus AD, DB, sunt equalia, opposita oppositis, ac
 propterea eandem cum his proportionem habent.

DEFINITIO. XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadra-
 tis æqualibus contenta.

DEFINITIO. XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor
 triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DEFINITIO. XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo tri-
 angulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DEFINITIO. XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duode-
 cim pentagonis æqualibus, & æquilateris,
 & æquiangulis contenta.

DEFINITIO. XXIX.

Icofaedrum est figura solida sub viginti
 triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Hæc sunt quinque corpora, quæ regularia vo-
 cantur, quod omnia plana, quibus continen-
 tur

tur, equalia sint, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymeæ quinque mundi corpora, quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cælum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat.

D E F I N I T I O. XXX.

[Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex adverso, parallelæ sunt contenta.]

TAB. XXVII.
fig. 1. **V**eluti solida figura comprehensa sex quadrilateris *ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG*, quarum oppositæ *AC, FH*; Item *DE, CE*; Item *AG, DH*, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem planis parallelæ oppositæ, sunt & equalia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propof. 24. hujus lib.

D E F I N I T I O. XXXI.

[Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inferibitur.]

D E F I N I T I O. XXXII.

[Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscrip-

ſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.]

Non eſt neceſſe, ut anguli interioris figura conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, ut omnes anguli figura interioris tangant vel aliquos angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figura; ita ut nullus angulus figura interioris intæſus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figura exterioris.

THEOR. 1. PROPOS. 1. ¶

Rectæ linæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublîmi.

Si enim, ſi fieri poteſt, rectæ linæ AB, pars quidam AC, in ſubjecto plano DE, pars vero CB, in ſublîmi, ita ut omnia puncta partis AC, in plano DE, jaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ linæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. Quod eſt abſurdum, ex pronuntiatio 10. lib. 1. Rectæ igitur linæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublîmi. Quod erat demonſtrandum.

TAB.
XXVII.
fig. 2.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ¶

Si duæ rectæ linæ ſe mutuo ſecent, in uno ſunt plano. Atque triangulum omne in uno eſt plano.

Rectæ linæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, ut

TAB.
XXVII.
ut fig. 3.

utcumque, ducatur recta FG, ut fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in uno esse plano; Item rectas AB, CD, in uno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano uno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra, existent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in uno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra quod fieri non
a. i. und. posse, jam supra *a* demonstratum est. Quod si ejusdem trianguli pars quidem EFIK, in uno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in uno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel contra. Si denique ejusdem trianguli pars quidem FHK, in uno concedatur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in uno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contra.
b. i. und. Quæ omnia absurda sunt, *b*ut est demonstratum. Quare triangulum EFG, in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

Quia vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt ejus latera EF, EG: In quo
c. i. und. autem sunt rectæ EF, EG: *c*in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in uno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstravimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in uno sunt plano. Atque triangulum omne in uno est plano. Quod erat demonstrandum.

ijj. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

TAB. XXVII. fig. 4. SEcent se mutuo plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam

neam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eisdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, ex 14. pronuntiato 1. lib. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secant, eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

Aliter. Secant se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in utroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cum eisdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EHF; includent iterum duæ rectæ EF, EHF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in utroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv;

Si recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat. Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quod rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secant in B; ærunt ipsæ in uno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; item rectæ BI, BK; ducanturque rectæ GK, IH; &

TAB.
XXVII.
fig. 5.

a 2. und

in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex
b 5. primi constructione sunt æqualia; & anguli quoque
c 4. primi ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales: Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.

d 5. primi Rursus cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL; trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adjacent æqualia, ex
e 26. primi constructione. Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

Præterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hætenus demonstratis, erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales
h 4. primi etiam, ut hætenus demonstravimus; Erunt quoque bases AL, AM, æquales.

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta

cta

sta LM, quæ in plano subjecto ipsam tangit in B; Eademque ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiam si inter puncta G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ GI, KH, jungantur; vel certæ literæ disponantur, ut prius, quemadmodum in hac figura apparet, ubi eadem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dexteram, ut in figura quinta, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. hujus lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

TAB.
XXVII.
fig. 6.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in uno sunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in uno plano esse. Cum enim quælibet duæ in uno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secant in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in uno sunt plano, cum se mutuo secant in B, sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; erit propterea & plano FC, per ipsas ducta ad rectos angulos; ac proinde ad rectos

TAB.
XXVII.
fig. 7.
a 2. und.
b 2. und.
c 3. und.
d 4. und.

angulos erit rectæ BG, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. hujus lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in uno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelae erunt illæ rectæ lineæ.

AB. **XXVII.** **fig. 8.** Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. hujus lib. Jam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; **a 4. primi** erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. **b 8. primi** Est autem & basis communis AG, **b** sunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. **a 5. und.** angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. **d 2. und.** Quare rectæ DB, DA, DC, in uno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: **a** Est autem AB, in eodem plano, **in**

in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, sumantur utcumque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra, secet jam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eodem terminos E, & F, superficiem claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 8. PROPOS. 8. [vij].

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano.

T 5

THE. XXVII. fig. 9.

a. 3. und. bio. prem.

THE. XXVII. fig. 10.

eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF, erit per defin. 3. *a 29. primi* hujus lib. angulus CDB, rectus: *a* Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Jam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Conjungantur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione, & anguli quoque ipsis contenti CDB, GBD, æquales, nimirum recti: *b 4. primi* Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC, & basis est communis CG. *c 8. primi* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex definitione 3. hujus lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B. *e* (Si namque producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD,) ad rectos angulos existit; *d 4. und.* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc *e 7. und.* eodem plano recta AB; *e* propterea quod rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cum puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex definitione 3. hujus lib. Quare cum AB, recta sit ad rectas BG, BD; *f 4. und.* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

ix: THEOR. 9. PROPOS. 9.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed

sed non in eodem cum illa plano : Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

Sint rectæ AB , CD , ipsi EF , parallelæ; non
sint autem in eodem cum EF , plano. Dico
 AB , CD , parallelas quoque esse. Nam à quo-
libet puncto G , rectæ EF , ad ipsam EF , du-
cantur duæ perpendiculares; GH , quidem in
plano parallelarum AB , EF , at GI , in plano
parallelarum CD , EF . Quoniam igitur EG ,
recta est ad duas rectas GH , GI , se tangentes
mutuo in G ; *a* erit recta quoque ad planum per
ipsas GH , GI , ductum. Quamobrem cum sint
parallelæ AB , EF , & EF , sit recta ad planum
per GH , GI , ductum; *b* erit quoque AB , ad
idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ
 CD , EF , sit autem EF , recta ad planum per
 GH , GI , ductum; *c* erit etiam CD , recta ad
idem planum; *d* Atque proinde rectæ AB , CD ,
cum rectæ sint ad idem planum per GH , GI ,
ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ
lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa
plano, hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod
erat demonstrandum.

TAB.

XXVII.

fig. 11.

a 4. und.*b* 8. und.*c* 8. und.*d* 6. und.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

x.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes ad
duas rectas se mutuo tangentes sint paralle-
læ, non autem in eodem plano: Illæ an-
gulos æquales comprehendent.

Sint rectæ AB , AC , se tangentes in A , paral-
lelæ rectis DE , DF , se tangentibus in D ;
non sint autem AB , AC , in eodem plano, in
quo DE , DF . Dico angulos BAC , EDF , ab
ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim
 AB , DE , inter se æquales, & AC , DF , inter
se, ducanturque rectæ BC , EF , BE , AD , CF .
Quoniam igitur AB , DE , parallelæ sunt & æ-
quales;

TAB.

XXVII.

fig. 12.

a 33. primi quales; **a** erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD, **b** erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ & æquales; **c** Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, ut modo demonstravimus; **d** Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

xi. PROBL. I. PROPOS. II.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

TAB. XXVII. **fig. 13.** **a 12. primi** **b 11. primi** **c 12. primi** **d 31. primi** **e 4. und.** **f 8. und.** **g 2. und.** **h 4. und.**
SIt à puncto A, in sublimi ad subiectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta utcumque DE, **a** ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF. **b** Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH, **c** ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. **d** Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL, cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, **e** ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, ferit quoque KI, ad idem planum **f** per FA, FH, ductum recta. **g** Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI, **h** ad rectos angulos erit duabus KI, IF. **b** Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit à dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC, *TAB. XXVII. fig. 14. a 11. und.* Ex quovis puncto D, in sublimi demittatur, ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, bducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planum BC, ex constructione; erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. *b31. primi c 8. und.* Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

THEOR. II. PROPOS. 13. xij.

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

Sit datum planum AB. Dico à dato ejus puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, quæ in uno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. hujus lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales pars, & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos

Etos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

Aliter. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; b 6. und. berunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conveniant in puncto C. Quod est absurdum.

iv. THEOR. 12. PROPOS. 14.

Ad quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallelæ.

TAB. XXVIII. Sit recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallelæ, producta inter se convenient. Conveniant ad partes C, E, a & faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto utcumque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. b 17. primi Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conveniunt. Parallela ergo, sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

xv. THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, per quæ illa ducuntur, plana.

TAB. XXVIII. Sint duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, *fig. 2.* fe

se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, a enim deducatur a 11. und. ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. b 31. prim. Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; erunt & AB, GH, c 9. und. inter se parallelæ. d Ac proinde anguli BAG, d 29. prim. AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. hujus lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC, e 4. und. recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. f Igitur parallela sunt plana BC, EF. Si ergo f 14. und. duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

Datum planum sit AB, punctumque extra ipsum TAB. sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, XXVIII. parallelum. In plano AB, ducantur utcumque dua fig. 3. rectæ DB, DA, se tangentibus in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, sagatur CE, ipsi DB, f 31. prim. parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentibus in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallela sint, g parallela erunt plana g 15. und. AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.

THEOR.

xvi. THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam secantur : communes illorum sectiones sunt parallelæ.

TAB. XXVIII. **fig. 4.** **a 1. und.** SEcantur plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se convenient, cum sint in plano EF, secante. Convenient igitur in puncto I. Quia ergo tota recta HEI, in uno est plano, nimirum in AB, producta; Item tota recta FGI, in uno quoque est plano, videlicet in CD, producta; convenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur, rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secantur, &c. Quod erat demonstrandum.

xvii. THEOR. 15. PROPOS. 17.

Si duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur; In eisdem rationes secabuntur.

TAB. XXVIII. **fig. 5.** **a 2. und.** **b 16. und.** RECTæ lineæ AB, CD, secantur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & jungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH. Eritque triangulum LNQ, in uno plano: similiter triangulum LOQ, in uno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, erunt communes

nes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. Quam ob rem erit ut LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item ut LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde ut LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. (xvii).

Si recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Sit recta AB, ad planum CD, recta. Dico **TAB. XXVIII.** omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta **fig. 6.** ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, utcumque in recta FG, aducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt; & AB, ponitur recta ad planum CD; erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. hujus lib. ad communem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. hujus lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. hujus lib. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 17. PROPOS. 19. xix.

Si duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis

V

etiam

etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

TAB.
XXVIII.
fig. 7.

a 4. und.

b 11. primi

c 13. und.

Sint duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. hujus lib. Idem concludes si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. hujus lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. hujus lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 20. XXI.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet ut ut assumpti tertio sunt majores.

Contineatur angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quolibet duos reliquo esse majores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosvis duos majores esse reliquo: Si vero duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo majores esse. Quod si unus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem sive æquales, sive inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse majorem. Dico jam hoc angulo maximo BAC, majores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ, AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; junganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem æquales; *b* erunt bases BD, BE, æquales. *b 4. primæ*
Quia vero latera DB, DC, majora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, major quam CE. Cum igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, major base CE; *c 10. primæ* *d 25. primæ* erit angulus CAD, angulo CAE, major. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, majores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo majores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus
V. 2 angu-

angulus tribus angulis planis contineatur, &c.
Quod erat ostendendum.

xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

Omnis solidus angulus sub minoribus ,
quam quatuor rectis angulis planis conti-
netur.

TAB.
XXVIII.
fig. 9.

a 20. und.

b 32. primi

c 32. primi

Si angulus solidus A, contentus tribus planis
angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres
angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim
rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli
solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus an-
gulis planis continetur, nempe B, sub CBA,
ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB:
D, vero sub CDA, ADB, BDC. Quoniam
vero duo anguli CBA, ABD, majores sunt
angulo CBD; similiterque duo anguli BCA,
ACD, majores angulo BCD; & duo anguli
CDA, ADB, majores angulo CDB: erunt sex
anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB,
tribus angulis CBD, BCD, CDB, majores.
Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi
ergo sex duobus rectis erunt majores. Cum igitur
sex illi, una cum tribus ad A, æquales sint
sex rectis propter triangula tria BAC, CAD,
DAB, (sunt enim anguli cujuslibet trianguli
duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duo-
bus rectis majores, relinquentur tres ad A, soli-
dum angulum constituentes, quatuor rectis mino-
res. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod
erat demonstrandum.

xxij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo
ut libet assumpti reliquo sint majores; com-
prehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales;
fieri

fieri potest, ut ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo sint majores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse majores. Nam hoc posito, a ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, majores sint, quam HI, ita ostendetur. b Fiar angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita ut fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus; quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; c erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, major angulo C, propterea quod duo anguli DAE, & B, majores ponuntur angulo C; d erit & basis EK, major base HI: e sunt autem rectæ ED, DK, majores recta EK. Igitur multo majores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI. Quod est propositum.

Cadat deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE: quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipsi AD, æqualis rursus, & connectatur recta KD. f Erit, igitur ut prius KD, ipsi FG, æqualis. g Quoniam vero rectæ ED, DK, majores sunt recta KE, & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & con-

TAB.

XXVII.

fig. 10.

a22. primi

b23. primi

c 4. primi

d24. primi

e20. primi

TAB.

XXVIII.

fig. 11.

f 4. primi

g20. primi

structione; erunt quoque ED , DK , majores duabus CH , CI : *b* Hæ autem majores sunt, quam HI . Igitur multo majores erunt ED , DK , quam HI . Cum ergo DK , ostensa sit æqualis ipsi FG ; erunt quoque DE , FG , majores quam HI . Quod est propositum.

TAB. Cadat postremo AK , ad partes AE , ita ut nec angulus totus componatur ex angulis EAD , $XXIX.$ DAK , nec recta sit EAK ; quod demum eveniet, quando duo anguli DAE , & B , duobus rectis sunt majores. Ponaturque rursus AK , ipsi AD , æqualis, & ducantur rectæ KD , KE .
fig. 1. Erit igitur, ut prius, KD , ipsi FG , æqualis.
i 4. primi Quoniam vero duæ DE , DK , majores sunt duabus AE , AK , & AE , AK , æquales duabus CH , CI , ex hypothesi & constructione; erunt quoque DE , DK , majores quam CH , CI :
h 21. primi Hæ autem majores sunt, quam HI . Igitur multo erunt majores DE , DK , quam HI . Cum ergo DK , ostensa sit æquales ipsi FG ; erunt quoque DE , FG , majores quam HI , quod est propositum. Eodem modo concludemus DE , HI , majores esse, quam FG , si angulus DAK , angulo C , fiat æqualis; Item FG , HI , majores, quam DE , si angulo C , ad FB , constituitur angulus æqualis, &c. *m* Quare ex tribus rectis DE , FG , HI , triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonstrandum erat.

TAB. Aliter. Si tres anguli A , B , C , sunt æquales; erunt quoque bases DE , FG , HI , æquales; *XXIX.* Ac proinde quælibet duæ reliqua majores.
fig. 2. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; erunt quoque duæ illorum bases æquales, *n 4. primi* & basis tertii utraque minor: Quare rursus quælibet duæ majores erunt reliqua. Quod si unus eorum, nempe A , sit maximus, sive reliqui B , & C , sint inter se æquales, sive inæquales; *p 14. primi* erit quoque basis DE , omnium maxima. Quare DE , FG , majores erunt quam HI : Item, DE , HI , majores quam FG . Dico jam &

& rectas FG, HI, majores esse recta DE. *r* Fiat *r* 23. *primi*
 enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad intervallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, majores ponuntur angulo DAE, & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, major reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia *s* 4. *primi*
 latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE, & angulus C, ostentus major angulo KAE; erit & basis *t* 24. *primi*
 HI, major base KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG, erunt FG, HI, majores quam DK, KE. *u* 20. *primi*
 Sed DK, KE, majores sunt, quam DE. Igitur multo majores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

PROBL. 3. PROPOS. 23. xxij.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt majores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

*S*int tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, ut quilibet duo sint majores reliquo. Oportet jam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum continetur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque

a 22. *univ.* turque bases DE, FG, HI. a Fieri ergo potest,
 ut ex DE, FG, HI, triangulum constituatur.
 Constituatur ex ipsis igitur triangulum KLM,
 sitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ
 b 5. *quart.* FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. b Descri-
 batur circa triangulum KLM, circulus, cujus
 centrum N, à quo ducantur rectæ NK, NL,
 NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos
 comprehendentium, nempe AD, AE, &c. major
 qualibet ductarum ex centro N. Quod ita osten-
 detur. Cadat primo centrum N, intra triangu-
 lum KLM; quod quidem fiet, quando triangu-
 lum est oxygonium, ut ex coroll. propos. 5.
 lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, majores non
 credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales,
 vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur
 latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt
 lateribus NK, NL, trianguli NKL; & basis DE,
 c 8. *primi* basi KL, æqualis: e erit angulus A, angulo
 KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus
 B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK,
 æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æqua-
 les sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib.
 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor
 rectis æquales. Quod est absurdum, ponuntur
 enim quatuor rectis minores. Non igitur æqua-
 les sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod
 neque minores. Si enim minores sint AD, AE,
 quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis
 AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quo-
 niam igitur est ut NK, ad NO, ita NL, ad NP,
 cum & antecedentia inter se, & consequentia
 sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, tri-
 anguli NKL, secta proportionaliter, & ac proinde
 d 2. *sext.* OP, ipsi KL, parallela erit. e Quare anguli
 e 19. *primi* NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt,
 & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangu-
 f 4. *sext.* lum. f Igitur erit ut NK, ad KL; ita NO, ad
 g 14. *quint.* OP. Est autem NK, major quam NO. g Igi-
 tur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi
 KL, major erit, quam OP. Quocirca cum la-
 tera

tera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, major base OP, herit & angulus A, major angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, major esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex corol. propof. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, majores quatuor rectis. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales. Igitur majores.

Cadat deinde centrum N, in latus LM, quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, ut ex eodem corol. propof. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL; erunt quoque BF, BG, æquales eidem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Posita autem fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. Sunt autem & majores BF, BG, quam FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt rectæ FG. Quod est absurdum, & cum sint majores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL, sed neque æquales: Igitur majores.

Cadat postremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, ut ex corol. dicto propof. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; herit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit.

TAB.
XXIX.
fig. 4

& i 20. prim

k20. prim

TAB.
XXX.
fig. 1.

l 8. prim

Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo majores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit major. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; *m* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & majorem ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP, demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, major angulo ONP; & eadem ratione angulus C, major angulo KNM. *n* Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR, cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transit circumferentia circuli ex N, ad intervallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. *n* Quare cum angulus PON; æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, major erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; *p* erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa jam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sunt lateribus OQ, OR, trianguli OQR, & angulus LKM, major angulo QOR, ut ostendimus: *q* erit basis LM, hoc est, FG, major base QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & basis FG, major base QR; *r* erit

erit angulus B, major angulo QNR. Rursus
quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR,
angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus
QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C,
maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus
QNR, major erit angulo B. Quod est absur-
dum, cum B, ostensus sit major angulo QNR.
Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK,
NL; sed neque æquales: Igitur majores.

Jam vero, cum rectæ AD, AE, majores sint
rectis NK, NL, ubicunque centrum N, existat; *TAB. XXIX.*
possit recta AD, plus quam recta NK, quadrato
lineæ T, per lemma annexum, ita ut quadratum
rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, *fig. 3, 4. TAB. XXX.*
& T. Ex centro N, excutetur ad planum cir-
culi KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqua-
lis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quo-
niam igitur NV, recta est ad planum circuli
KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3.
hujus lib. ad rectas NK, NL, NM, & ad proin-
de quadratum rectæ VK, quadratis rectarum
KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadra-
tum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eis-
dem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt
inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac
propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus
quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia
sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & an-
guli ipsis contenti VNK, VNL, recti; erit ba-
sis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione
rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM,
æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta
VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK,
VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id,
rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem,
cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia
sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis
KL, basi DE; erit angulus KVL, angulo A,
æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum
LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo
C, esse æqualem. Quare angulus solidus V,
conti-

310 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inveniri id, quo major plus potest, quam minor.

TAB. XXX. *Sint data dua recta linea inæquales AB, & C, quarum AB, major, oporteatque invenire, quo AB, plus possit quam C. Divisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & intervallo DA, vel DB, semicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, jungaturque recta ER. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato recta BB. Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit; Cerit quadratum ex AB, æquale quadratis AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato recta EB. Quod est propositum.*

xxiv. THEOR. 21. PROPOS. 24.

Si solidum parallelis planis contineatur; adversa illius plana, parallelogramma sunt similia & æqualia.

TAB. XXIX. *Sit parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum juxta defin. 30. hujus lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum adversæ quælibet sint parallele. Dico quævis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; Erunt communes sectiones AB, CD, paral-*

parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secantur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ. Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico jam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; *berunt b 10. und.* anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; crit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE. Ac propterea ut BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis jam diametris AH, DE, *c 34. prim.* cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; & *d 34. prim.* *e 10. und.* angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est, ferunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. *f 4. prim.* Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia *g 34. prim.* sint parallelogrammorum BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, adversa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 22. PROPOS. 25. xxv.

Si solidum parallelepipedum plano secetur adversis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Secetur parallelepipedum ABCD, plano EF, *7 AB.* parallelo oppositis planis AD, BC. Dico ut *xxx.* *est fig. 3.*

est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in utramque partem quantumlibet, sumanturque in AB, producta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propof. 15. hujus lib. Quoniam igitur solidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypothefi; **a 24. mnd.** ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, & habebitque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF, BMRC, MNSR, NOTS, ELQF, EOTF; habebuntque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia.

b 36. primi Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AE, AK, KL, æqualia sunt; & similia quoque cum anguli unus sint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia sunt parallelogramma AY, KZ, La. Cum igitur æqualia quoque sint, & similia parallelogramma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AEFD, æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD, & tribus planis LX, La, LQ, solidi KLQP: **d 24. mnd.** Sunt autem tria in unoquoque solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EF, &c. Igitur per defin. 10. hujus lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD. Et quam multiplex est basis OG, basis BG, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG, (multiplex

tiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BG, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis,) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoque sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis major est base, solidum quoque solido majus est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinem, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis DY, ad basin CY, & ut basis AY, ad basin BY, & ut basis DG, ad basin, CG. Si solidum igitur parallelepipedum piano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

P R O B L. 4. P R O P O S. 26. xxvi.

Ad datam rectam lineam, ejusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

Si ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solidi C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG, connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ducto constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. Ex L, v. c. 12. und.

ro ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & jungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per constructionem; *d 4. primi* Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, *d 4. primi* trianguli CGE, per constructionem; & æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF, recti ex defin. 3. hujus lib. *f 4. primi* ferunt & bases HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex constructione, (cum enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia sint ex constructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos, *g 4. primi* ex defin. 3. hujus lib. gerunt bases AK, CF, *h 8. primi* æquales.) *b* Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti ex defin. 3. hujus lib. *i 4. primi* Erunt bases IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, *k 8. primi* sint æqualia ex constructione; *k* erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum solidum C, componentibus. Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, ejusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 5. PROPOS. 27.

xxvii

A. Data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIt à data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. *TAB. XXX. fig. 5. a 16. und.* Fiat ad rectam AB, ejusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita ut tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis, ECG, GCF, FCE. Deinde ut est CF, ad CG, *b 12. sex.* sic fiat AB, ad AI, & ut CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, ut CF, ad CE, ita AB, ad AH. Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H. ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterque positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterque posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. *c 14. und.* Sunt autem tria cujuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD. Ac proinde ex defin. 9. hujus lib. similia sunt, similiterque posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum descripsimus. Quod erat faciendum.

X

THEOR.

xxviii. THEOR. 23. PROPOS. 28.

Si solidum parallelepipedum plano fecetur
per diagonios adverforum planorum: Bifari-
am fecabitur solidum ab ipso plano.

TAB. **XXX.** **fig. 6.** **334. primi** **b. 9. und.** **c. 33. primi** **d. 24. und.** **e. 6. sexti.** **f. 24. und.**

Sit parallelepipedum AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonii, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur utraque CD, GF, parallela est, & æqualis ipsi AE, cum sint parallelogramma CE, GE; erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. Ac proinde, quæ ipsas conjungunt CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in uno plano. Dieo planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG, FED, DBF, proportionalia. Igitur similia quodæ erunt dicta triangula. Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prisinatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prisinatis HGCDBF, proptereaque prismata æqualia erunt, ex defin. 10. hujus lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

xxix. THEOR. 24. PROPOS. 29.

Solida parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum
infi-

insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis, sunt inter se æqualia.

Super basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocantur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia. *a* Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ in collario 8. propos. lib. 1. ostendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. *d* Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: *e* Sed & IF, ipsi LG, æquale est cum bases IK, LM, sint æquales. (*f* Nam cum rectæ, IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. hujus lib. æqualia erunt dicta prisnata; [Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.]

XXX. THEOR. 25. PROPOS. 30.

Solida parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

TAB. XXXI. fig. 1. Super basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia. Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractæ in punctis N, O; Et ID, eadem in punctis P, Q; adjunganturque rectæ AN, KO, HP, BQ. Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallela, propter parallelogrammum HIDB. Igitur & HP, BQ, parallelae sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cum utriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sunt in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, quum utriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia.

sunt æqualia. Solida igitur parallelepipedā super eandem basim, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 26. PROPOS. 31. xxxi.
xxxij.

Solida parallelepipedā super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

Super æquales bases AB, CD, in eadem altitudine sint constituta parallelepipedā AEFG, TAB.
xxxj. CHIK. Dico hæc parallelepipedā esse æqualia fig. 2. inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basim AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basim CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producat CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super quod ad altitudinem perpendicularis KQ, construat parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & similia; Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. hujus lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. hujus lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & similia. Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedī QSTV, æqualia sint & similia, tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedī AEFG, tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis. b. 24. p. 2.

X 3

Erunt,

Erunt, per defin. 10. hujus lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia.

Convenient rectæ DK, TS, productæ in d, & IQ, XY, in e, compleaturque parallelepipedum QdgV, Item HI, bV, protractæ convenient in a; & OD, gR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRa. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, QdgV, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, dX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kd, RT, Rg, QV, Qe, VX, Vb, collocantur in eisdem rectis dT, cX, ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum QdgV.

d35. primi. Quoniam vero parallelogramma KT, Kg, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kg, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales.

e 7. quint. Quare crit, ut CD, ad DR, ita Kg, ad DR:

f 25. und. Ut autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIaR; cum parallelepipedum CHaR, secetur plano IK, planis oppositis CH, aR, parallelo. Et eadem ratione ut Kg, ad DR, ita est solidum QdgV, ad solidum IKRa; cum & parallelepipedum Idga, secetur plano KV, oppositis planis Da, db, parallelo. g Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, QdgV, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRa, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, Kg, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum QdgV, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG; æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum.

TAB. Sint jam neque insistentes lineæ AM, GN, XXXI. LE, BF, ad basin AB, neque CP, KQ, OH, f. 3. DI, ad basin CD, perpendiculæres: b Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, h 11. und. NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculæres;

lares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis, CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qa. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Ya, aZ, ZX, ut fiant parallelepipeda ETVF, HZaI, quæ cum sint ejusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, ut ostensum est. Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZaI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igñtur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I U M.

Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

Si enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine pñent æqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

Quod si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur major base alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum ejusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

xxxij. THEOR. 27. PROPOS. 32.

Solida parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases.

TAB. **XXXI.** **fig. 4.** **primi.** Sint duo parallelepipeda ABCD, EFGH, ejusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum ab solidum, ut est basis ad basin. *a* Super rectam enim EK, construatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit æqualis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propos. lib. I. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum IFLH; *a* erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales bases, per constructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex hypothefi. *b* Quare erit ut solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad idem solidum EFGH: *c* Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, ut basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, ut basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

xxxvi. THEOR. 28. PROPOS. 33.

Similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

TAB. **XXXI.** **fig. 5.** Sint similia parallelepipeda ABCD, FEHG, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum FEHG, esse

esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatnr enim AI, ad L, & fit IL, æqualis ipsi EK, vel GR; Item DI, ad M, & fit IM, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & fit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sunt lateribus GR, GO; & anguli contenti æquales, cum angulus LIM, fit æqualis angulo AID, æqui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt, & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: Sunt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defn. 10. hujus lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, est ut AI, ad EK, hoc est, ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM; & BI, ad FK, hoc est, ad IN. Ut autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL; Et ut DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & ut BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit ut AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. Sed ut AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & ut basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & ut basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, ut parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP,

LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoque proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad secundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. Ut autem ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; f. Et ut AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione laterum homologorum. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundum. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima lineæ ad quartam, ex defin. 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

xxxiv. T H E O R. 29. P R O P O S. 34.
xxxv.

Æqualium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia.

TAB. XXXI. fig. 6. SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse ut AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem solidi ADCB. Sint enim primum insistentes lineæ AI,

AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita ut AI, EK, sint per defn. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propof. 31. hujus lib. ostendimus. Quare erit, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI. Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.

Quod si altitudines AI, EK, inæquales fuerint; fit EK, major, ex qua abscindatur EL, ipsi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH, per scholium propof. 15. hujus lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB, EHGF; erit ut ADCB, ad solidum EHML, ita EHGF, ad idem solidum EHML. Ut autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL, ut solidum EHGF, ad solidum EHML, ita est eadem ratione basis KN, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem planis parallela KN, GH. Igitur erit ut basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: Sed ut KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines.

Sint jam bases & altitudines reciprocæ. Dicō parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, et hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.

Quod si altitudo EK, major fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur

TAB.

XXXI.

fig. 7.

a 7. quatuor.

b 32. unum.

c 1. sex.

TAB.

XXXI.

fig. 6.

d 3. unum.

TAB.

XXXI.

fig. 7.

cx

ex hypothesi est, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem; *e* Ut autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur. *f* Et ut EK, ad EL, ita est, KN, ad LN; *g* Ut autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum EHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit ut solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; *b* ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

Sed proponantur jam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum insistentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; *n* Item à punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Qa, GZ: connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Za, XZ, Ya: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, ut basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinem XN, ad altitudinem RI. Cum enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi, sit autem ABCD, æquale solido RVCD, quod habeant eandem basin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale solido XaGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XaGH, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH; erit, ut jam demonstratum est, ut basis CD, ad basin GH, hoc est, ut basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocae.

Sint jam bases atque altitudines reciprocae. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, ut prius; Cum sit ut basis AB, ad basin EF,

EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; / Sit 124. und.
autem AB, ipsi CD, & EF, ipsi GH, æqualis;
erit quoque ut basis CD, solidi RVCD, ad ba-
sin GH, solidi XaGH, ita altitudo XN, ad alti-
tudinem RI. Quare cum XN, RI, sint insisten-
tes lineæ perpendiculares ad bases CD, GH;
erunt, ut jam ostensum est, æqualia parallelepi-
peda RVCD, XaGH. *m* Sunt autem hæc paral- m 19. vel
lepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqua- 30. und.
lia. Igitur quoque æqualia erunt parallelepipeda
ABCD, EFGH: Idemque ostendetur, si insisten-
tes lineæ unius parallelepipedi fuerint perpendicu-
lares ad basin, alterius vero non. Quamobrem,
Æqualium solidorum parallelepipedorum bases,
& altitudines reciprocantur, &c. Quod erat
ostendendum.

S C H O L I U M.

Omnia hæc quæ demonstrata sunt in sex proximis
propositionibus, nimirum 29, 30, 31, 32, 33, & 34.
conveniunt quoque prismatis, quæ habent duo plana
opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruen-
tur. Nam si duobus prismatis ejusmodi ejusdem alti-
tudinis, & super eandem basin, vel super æquales
bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis
æqualia & similia, conficiantur duo parallelepipeda
ejusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales
bases existentia. *m* Quare æqualia erunt ejusmodi m 19, 30.
parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum vel 31.
videlicet dimidia. und.

Rursus, si duobus prismatis prædictis ejusdem alti-
tudinis, & super diversas bases constitutis adjici-
antur duo alia prismata illis æqualia & similia,
conficiantur iterum duo parallelepipeda ejusdem alti-
tudinis. *n* Quare erit parallelepipedum ad parallele- n 32. und.
pipedum, ut basis ad basin; *o* Atque adeo prisma o 15. quint.
ad prisma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad
dimidium alterius, ut eadem basis ad basin, si pris-
matum bases fuerint parallelogramma, vel certe ut
triangulum ad triangulum, dimidium scilicet unius
basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fue-
rint triangula.

Præte-

334 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

P 33. und. *Præterea, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, quæ eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.*

q 15. quint. *Denique si dictis duobus prismatis æqualibus adjungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum prismatis. Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciproca; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangula earum dimidia seandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciproca.*

THEOR. 30. PROPOS. 35.

xxvii. Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendunt.

TAB. XXXII. **fig. 2.** Sint duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana sublimes rectæ lineæ, AG, DH, ita ut angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: à sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur

cantur ad plana, in quibus anguli BAC , EDF ,
 existunt, perpendiculares GI , HK , incidentes in
 puncta I , K , & adjungantur rectæ IA , KD .
 Dico angulos GAI , HDK , esse æquales inter
 se; Nam si AG , DH , sunt inæquales auferatur
 à majori AG , ipsi DH , æqualis linea AL ,
 & ex L , in plano trianguli AGI , ducatur ipsi
 GI , parallela LM . Quoniam igitur parallelæ
 sunt GI , LM , & est GI , ad planum anguli
 BAC , recta; erit quoque LM , ad idem planum
 recta: ducantur autem ex punctis M , K , ad re- a 8. *una*
 ctas AB , AC , DE , DF , perpendiculares MB ,
 MC , KE , KF , & connectantur rectæ BC , BL ,
 LC , EF , EH , HF . Et quia LM , recta est ad
 planum anguli BAC , ipsa rectum angulum effi-
 ciet cum recta AM , in eodem plano ducta per
 defin. 3. hujus lib. b Quare quadratum rectæ b47. *primi*
 AL , æquale erit quadratis rectarum AM , ML ;
 c Est autem quadratum rectæ AM , æquale qua- c47. *primi*
 dratis rectarum AC , CM , cum & angulus ACM ,
 rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo
 rectæ AL , æquale est quadratis rectarum AC ,
 CM , ML : d At quadratis rectarum CM , ML , d47. *primi*
 æquale est quadratum rectæ CL , cum angulus
 CML , rectus sit: per defin. 3. hujus lib. Igitur
 quadratum rectæ AL , æquale est quadratis recta-
 rum AC , CL ; e Ac proinde angulus ACL , re- e48. *primi*
 ctus erit. f Rursus quia quadratum rectæ AL , f 47. *primi*
 æquale est quadratis rectarum AM , ML : g Est g47. *primi*
 autem quadratum rectæ AM , æquale quadratis
 rectarum AB , BM , cum angulus ABM , per
 constructionem, sit rectus. Igitur quadratum
 rectæ AL , æquale est quadratis rectarum AB ,
 BM , ML : h At quadratis rectarum BM , ML , h47. *primi*
 æquale est quadratum rectæ BL , quod & angulus
 BML , sit rectus ex defin. 3. hujus lib.
 Quadratum ergo rectæ AL , æquale est quadratis
 rectarum AB , BL ; i proptereaque angulus ABL , i48. *primi*
 erit rectus. Non aliter ostenduntur recti anguli
 DFH , DEH . Quoniam igitur anguli ABL ,
 LAB , trianguli ABL , æquales sunt angulis
 DEH ,

DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera
k 26. primi AL, DH, æqualia; & erunt & reliqua latera AB,
 BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem
 argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis
 DF, FH. Quare cum latera AB, AC, triangu-
 li ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trian-
 guli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æ-
 quales, ex hypothesi; & erunt & bases BC, EF,
l 4. primi inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF,
 DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM,
 ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales; cum
 omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC,
 MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales
 erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF,
m 26. primi sint ostensa æqualia; & erunt latera BM, CM,
 lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera
 AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa
 lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli
n 4. primi ACM, DFK, sunt recti; & erunt & bases AM,
 DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint
 ostensæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum qua-
 drata æqualia. Quia vero quadratum rectæ
o 47. primi BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML,
 & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK,
 KH, quod anguli BML, EKH, recti sint, ex
 def. 3. hujus lib. Erunt & quadrata rectarum
 BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH.
 Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ
 æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint
 æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK,
 æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æ-
 quales. Quam ob rem cum latera AL, AM,
 trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK,
 trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqua-
p 8. primi lis; & erunt & anguli LAM, HDK, æquales.
 Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quo-
 rum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c.
 Quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Itaque, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimis rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos continent æquales, utrumque utrique. Erunt à punctis extremis linearum sublimium ad planum angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC , EDF , ponuntur æquales, & sublimis æqualis AL , DH , constituunt angulos æquales LAB , HDE . Item LAC , HDF : demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM , HK , esse æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. xxxviii]

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

Sint continue proportionales rectæ A , B , C . TAB. XXXII. fig. 3.
 Constituaturque angulus solidus E , ex tribus angulis planis quibuscunque DEF , DEG , FEG , ita ut recta DE , ipsi A ; & EF , ipsi B ; & EG , ipsi C , sit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF , FG , GD , perficiatur parallelepipedum DH ; quod sub tribus rectis A , B , C , dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. 226. um
 Deinde ad rectam IK , ejusque punctum K , fiat solidus angulus K , æqualis solido angulo E , ex tribus angulis planis IKL , IKM , LKM , qui æquales sint tribus DEF , DEG , FEG , ita ut rectæ IK , KL , KM , æquales sint mediæ lineæ B . Completis vero parallelogrammis IL , LM , MI , perficiatur parallelepipedum IN , quod contineri dicitur sub linea B , seu ex ipsa describi. Dico solidum DH , æquale esse solido IN . Cum enim sit ut DE , ad IK , ita KM , ad EG , (quod DE , ipsi A ; & IK , KM , ipsi B ; & EG , ipsi C ,
Y
sumpta

14. sec. sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales. *b* Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum verticibus insistant sublimēs lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. *c* Quare parallelepipeda DH, IN; (Cum habeant bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines,) inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

xxix. T H E O R. 32. P R O P O S. 37.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

TAB. **xxxii.** **fig. 4.** Sint quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; ut quidem A, ad B, ita C, ad D; constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta; item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia; Ut quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inveniantur enim per scholium propos. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliz duæ continue proportionales E, F. Item duabus C, D, aliz G, H. Quoniam igitur sunt quatuor

quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ alia C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, ut A, ad F, ita C, ad H. Ut autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, & ut C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. hujus lib. Igitur erit ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

Sint jam è contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales: a Tribus enim rectis A, B, C, inveniatur quarta proportionalis I, b super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut jam est ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Ut autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit ut solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. hujus lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

Brevius tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis

rectæ C, ad rectam D: erunt proportionēs solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, ut rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportionēs rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportionēs triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

THEOR. 33. PROPOS. 38.

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in uno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

TAB. XXXII. **PL**anum enim AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; & ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, eris quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. hujus lib. atque adeo & ad rectam GE, per 3. defin. hujus lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG,

EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum, cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 34. PROPOS. 39. XXX.

Si solidi parallelepipedum eorum; quæ ex adverso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedum diameter, bifariam se mutuo secabunt.

Sint parallelepipedum AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO; quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS,) & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: Ac propterea AS, CS, unam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & unam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia utraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma

P 9. und. gramma AF, FC, fipsæ quoque inter se parallelæ erunt, & æquales. Quare & rectæ AC, BD, earum extrema conjungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum diuidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; herunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bisariam in T. Si igitur solidi parallelepipedo eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M.

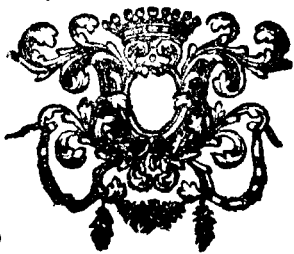
Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bisariam secare in uno puncto, nimirum in puncto T, in quo bisariam diuidunt, ut hic demonstratum est, rectam RS.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

Si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basim, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

TAB. XXXIII. **fig. 1.** Sint duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, con-

constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propof. 15. hujus lib. *a* Quoniam *a* 34. *primus* igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, ejusdem trianguli GHI, duplum; æqualia erunt parallelogramma AC, GP. *b* Quare paral- *b* 31. *modus* lelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum adversorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.





EUCLIDIS ELEMENTUM DUODECIMUM.

Et solidorum secundum.

THEOR. I. PROPOS. I.

• Quæ in circulis polygona similia; inter
se sunt, ut à diametris quadrata.

*TAB.
XXXIII.
fig. 2.*

a 6. sent.

b 2. sentii.

c 3. sentii.

d 3. prim.

e 4. sent.

Sint duo polygona similia $ABCDE^a$, $FGHIK$,
descripta in circulis, quorum diametri AL ,
 FM . Dico ita esse polygonum $ABCDE$,
ad polygonum $FGHIK$, ut quadratum dia-
metri AL , ad quadratum diametri FM . Sub-
tendantur enim angulis æqualibus ABC , FGH ,
rectæ AC , FH , & connectantur rectæ BL ,
 GM . Quoniam igitur ob similitudinem poly-
gonorum est, ut AB , ad BC , ita FG , ad
 GH ; *a* erunt triangula ABC , FGH , æquiangula,
cum circa angulos æquales ABC , FGH , habe-
ant latera proportionalia: *b* Est autem angulus
 ALB , angulo ACB ; & angulus FMG , angulo
 FHG , æqualis. Igitur & anguli ALB , FMG ,
æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL , FGM ,
æquales sint, *c* nempe recti in semicirculis existen-
tes; *d* erunt & reliqui BAL , GFM , æquales.
e Quare erit ut AL , ad AB , ita FM , ad FG ;
& permutando, ut AL , ad EM , ita AB , ad
 FG .

FG. fligitur est ut quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad polygonum FGHJK, super FG; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, ut à diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

q.

Circuli inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circum ABCD, ad circum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circum ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel major circulo EFGH. Si enim esset æqualis, haberet circulus ABCD, ad circum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circum EFGH, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita ut circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati, circa eundem circum descripti, ut ad propof. 9. lib. 4. ostendimus, majus erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bisariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adjunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circum in L, quæ parallela erit ipsi EF, ut ad propof. 27. lib. 3. ostendimus, occurrantque rectis HE, GF, productis in T, & V. Quia ergo triangulum

TAB.

XXXIII,

fig. 3,

27. quæst.

27. lib. 3.

b41. prima

Y 5

ELF,

ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; majus erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula majora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul majora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ majora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circumulum EFGH, & magnitudinem I, uti ex subjecto lemmate constat. Sint jam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ major est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, majus reliqua magnitudine I. Inscríbat in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales divisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam junctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, ut patet.

¶ I. dñd. Quoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, hoc est, per hypothefim, ut circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus

erit

erit circulo ABCD. Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam L. Ostensum autem est & majus. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

Quamquam autem in figura confertur major circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam major circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum majoris diametri AC; Ita ut generaliter & univérse demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor.

Sit deinde magnitudo I, major circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, erit ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & convertendo I, ad circulum ABCD, ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur ut I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, major ponitur circulo EFGH, f. major quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam in priori parte generaliter, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor. Quamvis autem circulus ABCD, major est, & EFGH, minor; eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo

circulo $ABOD$; majorem : quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC , ad quadratum diametri EG , eandem habere proportionem , quam habet circulus $ABCD$, ad magnitudinem circulo $EFGH$, minorem , quod falsum esse jam in priori parte generaliter demonstratum est : Ita ut generaliter & universè quoque demonstratum sit , nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem , quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo majorem , sive prior circulus major sit posteriore , sive minor. Non ergo major est magnitudo I , circulo $EFGH$: Sed neque minor est ostensa , æqualis igitur est. Quare cum ponatur , ut quadratum diametri AC , ad quadratum diametri EG , ita circulus $ABCD$, ad I ;

g 7. qdus. g sit autem ut circulus $ABCD$, ad I , ita idem circulus $ABCD$, ad circulum $EFGH$, qui æqualis est magnitudini I ; Erit quoque ut quadratum diametri AC , ad quadratum diametri EG , ita circulus $ABCD$, ad circulum $EFGH$, sive circulus $ABCD$, circulo $EFGH$, major sit , sive minor. Circuli igitur inter se sunt , quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc fit , ita esse circulum ad circulum , ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum , quam polygonum ad polygonum est , ut quadratum diametri ad quadratum diametri , veluti demonstratum est.

L E M M A.

Duabus magnitudinibus inequalibus propositis si à majore auferatur majus quam dimidium ; & de eo , quod reliquum est , rursus detrahatur majus quam

quam dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quadam magnitudo, qua minor erit proposita minore magnitudine.

Proposita sint duae magnitudines inaequales AB , TAB. XXXIII,
 & C , quarum AB , sit major. Dico si ex AB , fig. 4.
 auferatur majus quam dimidium; & ab eo, quod
 reliquum est, rursus majus quam dimidium; atque
 hoc semper fiat: relinquitur tandem magnitudinem quan-
 dam, qua minor sit quam C . Multiplicetur enim
 C , toties, donec magnitudo facta DE , major sit
 quam AB , ita ut DE , sit multiplex ipsius C ,
 proxime major quam AB . Divisa autem DE , in
 partes DF , FG , GE , ipsi C , aequales, detrahatur
 ex AB , majus quam dimidium AH , & ex reli-
 qua HB , majus quam dimidium HI ; atque hoc
 semper fiat, donec partes ipsius AB , multitudine
 aequales sint partibus ipsius DE . Sint ergo jam par-
 tes AH , HI , IB , tot, quot sunt ipsa DF , FG ,
 GE . Quia igitur DE , major est quam AB ; At
 ex DE , ablatum est DF , minus quam dimidium,
 vel certe dimidium; si DE , ipsius C , sit duplex;
 ex AB , vero majus quam dimidium AH : Erit re-
 liquum FE , reliquo HB , majus. (Cum enim
 DE , major sit quam AB ; si ex DE , dimidium
 auferetur, nec non & ex AB , dimidium, esset
 quoque reliquum ex DE , majus reliquo ex AB .
 Si ergo ex DE , auferatur minus quam dimidium,
 vel certe dimidium, & ex AB , majus quam di-
 midium; erit reliquum ex DE , majus reliquo ex
 AB .) Rursus quoniam FE , major est quam HB ,
 auferaturque ex FE , dimidium FG , vel certe minus
 quam dimidium, si FE , major sit quam duplex
 ipsius C , at ex HB , majus quam dimidium HI ,
 erit eodem modo reliquum GE , majus reliquo IB :
 atque

atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE , qualis hic est GE , maiorem esse postrema parte ipsius AB , qualis hic est IB . Cum ergo GE , postrema pars ipsius DE , equalis sit ipsi C ; erit quoque C , major quam IB , postrema pars ipsius AB . Relicta igitur est IR , magnitudo, quæ minor est magnitudine C . Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à majori auferatur majus, &c. Quod erat demonstrandum.

Idem demonstrabitur, si ex AB , auferatur dimidium AH , & ex reliquo HB , rursus dimidium HI , &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE , majus reliquo HB , nec non & reliquum GE , majus reliquo IB ; cum ex majori DE , ablatum sit DF , minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB , dimidium AH , &c.

iii. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Omnis pyramis triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

TAB. XXXIII. **fig. 5. 6.** Sit pyramis, cujus basis triangulum ABC , vertex D . Secentur omnia ejus latera bifariam in E, F, G, H, I, K , connectanturque rectæ $EF, FG, GE, HI, IK, KH, HG, HE, EI, IF$. Divisa itaque est pyramis in duas pyramides $AEGH, HIKD$, quarum bases triangula AEG, HIK , vertexes H, D ; nec non in duo solida $EBFGHI, CFGHIK$, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum $EBFG$, & triangula opposita EHG, BIF ; hujus vero basis est triangulum CFG , cui oppositur

nitur triangulum KIH , habentque hæc prismata
 terminum communem, parallelogrammum $FGHI$;
 & cum duabus illis pyramidibus componunt to-
 tam pyramidem, ut constat, si recte concipiatur
 pyramidis vertex D , in sublimi, nec non ejus
 triangula circumjacentia. Dico igitur duas illas
 pyramides esse æquales, & similes inter se, &
 similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se
 æqualia, & majora dimidio totius pyramidis. Cum
 enim latera AD , BD , trianguli ADB , secta sint
 bifariam, ac proinde proportionaliter, *a* 2. *sent.*
 HI , AB , parallelæ. Eadem ratione parallelæ
 erunt IK , BC , & HK , AC ; & EG , BC ; &
 EF , AC ; & FG , AB ; & EH , BD ; & EI , AD ;
 & IF , DC ; & HG , DC . *b* 9. *und.* Sunt autem & rectæ
 FG , HI , cum parallelæ sint ipsi AB , inter se
 parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt
 GH , FI , cum sint parallelæ ipsi DC . Quare
 parallelogramma sunt $AEIH$, $HEBI$, $IDHE$,
 $EBFG$, $GHKC$, $CKIF$, $FGHI$. Quoniam *c* 10. *und.*
 rectæ HE , HG , rectis DB , DC , sunt parallelæ;
 erunt anguli EHG , BDC , æquales: Ac eadem
 ratione æquales erunt anguli HEG , DBC ; &
 HGE , DCB . *d* 4. *sent.* Proportionalia igitur sunt latera
 trianguli HEG , lateribus trianguli DBC , circa
 æquales angulos; ac proinde simile est triangulum
 HEG , triangulo DBC . Sunt autem & triangula
 HAE , HAG , AEG , triangulis DAB , DAC ,
 ABC , similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Py-
 ramis ergo $AEHG$, pyramidi $ABCD$, similis est,
 per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI ,
 HK , rectis AB , AC , sunt parallelæ, erunt an- *e* 10. *und.*
 guli IHK , BAC , æquales. Eadem ratione æ-
 quales erunt anguli HIK , ABC ; & HKI , ACB .
f 4. *sent.* Quare latera trianguli HIK , lateribus trianguli
 ABC , circa æquales angulos sunt proportionalia;
 ac propterea triangulum HIK , triangulo ABC ,
 simile est: Sunt autem & triangula DHI , DIK ,
 DKH , triangulis DAB , DBC , DCA , similia,
 per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo
 $HIKD$, similis est quoque eidem pyramidi $ABCD$,
 per

3^a EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

- per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula $\triangle AHE$, $\triangle HDI$, similia sunt triangulo $\triangle ADB$, ut
g 21. sext. ostensum est ex coroll. propof. 4. lib. 6. ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH , HD , constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propof. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula $\triangle AHG$, $\triangle HDK$, cum similia sint ostensa triangulo $\triangle ADC$, & constituta super æquales rectas AH , HD . Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula $\triangle AEG$, $\triangle HIK$, cum similia sint ostensa triangulo $\triangle ABC$, & super rectas posita AE , HI ,
h 34. primi & quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $\triangle AEIH$. Non secus æqualia erunt & similia triangula $\triangle EHG$, $\triangle IDK$, cum sint ostensa similia triangulo
i 34. primi $\triangle BDC$, & habeant rectas HE , DI , i quæ æquales sunt, ob parallelogrammum $\triangle HEID$. Pyramides igitur $\triangle AEGH$, $\triangle HIKD$, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.
- h 34. primi** Rursus, quia rectæ EH , HG , GE , æquales sunt, & parallelæ rectis BI , IF , FB , ob parallelogramma $\triangle Ehib$, $\triangle FGHI$, $\triangle BFGE$; erunt triangula $\triangle EHG$, $\triangle BIF$, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propof. 8. lib. 1. Ac propterea
i 15. und. & similia: Sunt autem & parallelæ; cum EH , HG , per quas ducitur planum $\triangle EHG$, parallelæ sint rectis BI , IF , per quas planum $\triangle BIF$, ducitur. Igitur solidum $\triangle BIFGHE$, contentum duobus triangulis $\triangle EHG$, $\triangle BIF$, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis $\triangle EGFB$, $\triangle BEHI$, $\triangle IFGH$, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum
h 34. primi $\triangle CFGHIK$. Cum enim rectæ FC , CG , GF , æquales sint, & parallelæ rectis IK , KH , HI , ob parallelogramma $\triangle CFIK$, $\triangle CGHK$, $\triangle FGH I$; erunt triangula $\triangle CFG$, $\triangle HIK$, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: Sunt autem & parallelæ, quod rectæ CF , CG , per quas ducitur planum $\triangle CFG$, parallelæ sint rectis KI , KH , per quas planum
i 15. und. $\triangle KIH$,

KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex adverso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam vero prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt ejusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK, & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis hujus, per scholium propof. 41. lib. 1. ipsa inter se æqualia erunt.

Denique quia prisma EBFGHI, majus est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, nec non pyramidi HIKD, ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Majora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero à dimidio ejusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, major dimidium ejus superat, minor vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basim, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idque semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in una pyramide, prismata, ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

Int super bases triangulares ABC, EFG, duæ
pyramides ABCD, EFGH, ejusdem altitudi-
nis, TAB XXXIII, f. 7: 1

nis, quarum latera bifariam dividantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita ut pyramis utraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV; ut vult propositio præcedens: eodemque modo intelligantur esse divisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH, & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, ut est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea divisa est bifariam, sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. pro-

pos. 4. lib. 6. *a* Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ut mox ostendemus, atque ideo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, videlicet IBKLMN, ad unum prisma PFQRST, *b* ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta divisione. Sed ut illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est

est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC , ad basin EFG . Igitur erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EFG , ita prismata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide $ABCD$, ad prismata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide $EFGH$: Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis $ABCD$, ad prismata pyramidis $EFGH$, ita prismata tam pyramidis $AJLM$, ad prismata pyramidis $EPRS$, quam prismata pyramidis $MNOD$, ad prismata pyramidis $STVH$; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis $ABCD$, ad duo prismata pyramidis $EFGH$, ita omnia prismata in pyramidibus $ABCD$, $AJLM$, $MNOD$, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus $EFGH$, $EPRS$, $STVH$, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, ut basis ABC , ad basin EFG , ita omnia prismata in pyramide $ABCD$, ad omnia prismata in pyramide $EFGH$. Quocirca si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Quod autem sit LKC , ad QRG , ita prisma $CKLMNO$, ad prisma $GQRSTV$, ita ostendemus. Intelligentur ex verticibus D , H , ad bases ABC , EFG , demissa perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum $ABCD$, $EFGH$. Quoniam igitur plana parallela ABC , MNO , dsecant duas rectas, nempe DC , & perpendicularem ex D , demissam proportionaliter, secatur autem DC , bisariam in O ; secabitur quoque perpendicularis ex D , demissa bisariam in puncto, cui planum MNO , occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H , demissa bisariam secabitur à plano STV . Quare cum ita perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac

proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstravimus.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases, inter se sunt, ut bases.

TAB. XXXIII. **fig. 1.** **¶ 3. duod.** **S**Int pyramides ejusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis, ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; quod vel minus erit, vel majus pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Dividatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, juxta propos. 3. hujus lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV; aquæ majora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. per lemma propos. 2. hujus lib. Sit ergo jam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, majora solido X. Dividatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyrami-
de

de EFGH. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; & erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & majora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH. c 4. duod.

Sit deinde solidum X, pyramide EFGH, majus. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG: Erit convertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, majus ponitur pyramide EFGH, & erit & pyramis ABCD, major solido Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam, non posse esse, ut est, basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo majus est solidum X, pyramide EFGH, sed neque minus, est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; fit autem pyramis ABCD, ad solidum X, ut ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum. d 14. quint.

COROLLARIUM.

Hinc fit, pyramides ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

TAB. XXXIII. fig. 8. **S**int pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares divisa. *a* Quia vero est, ut basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo ut basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: *b* Sed rursus est ut basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo ut basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit ut basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit ut basis GHIKL, ad basin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & convertendo ut basis GKL, ad basin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. *c* Rursus quoniam est, ut basis ADE, ad basin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, ut manifestum est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit ut basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO.

S C H O L I U M.

Quamvis hujus propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus ejusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygonae latera habent multitudine aequalia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus ejusdem altitudinis quarum unius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim duae pyramides ejusdem altitudinis $ABCDEF$, $GHIK$, quarum illius basis sit polygonae, nempe pentagonae, hujus vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. TAB. XXXIII. fig. 9.

Resoluto enim pentagono in triacula, erit & pyramis in pyramides numero aequales divisa. Quoniam vero est, ut basis ABC , prima quantitas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ABCF$, tertia quantitas ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem; & eodem modo, ut basis ACD , quinta quantitas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita $ACDF$, sexta quantitas, ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem: e Erit ut basis $ABCD$, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ABCDF$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis ABC , prima quantitas, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ABCF$, tertia quantitas, ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem, ut modo est ostensum: f & ut basis ADE , quinta quantitas ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ADEF$, sexta quantitas ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem; g Erit etiam basis $ABCDE$, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI , secundam quantitatem, ita pyramis $ABCDEF$, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem $GHIK$, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygonae.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Omne prisma triangularem habens basim,
Z 4
divi-

dividitur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

TAB. XXXIV. **fig. 1.** *a* 34. *primi*
b 5. *duod.* Sit prisma ABCDEF, cujus duo triangu-
la op-
posita, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico
ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares
inter se æquales. Ducantur enim in tribus paral-
lelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD;
CF, in BCEF, FD, in ADEF. Quoniam
igitur triangu-
la ABC, ADC, æqualia sunt; *b* est-
que ut basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis
ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyrami-
des eandem habeant altitudinem, nempe perpen-
dicularem ex F, vertice ad planum ABCD, de-
missam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF,
inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt
pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases
ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine,
nempe perpendiculari à vertice C, ad planum
ADEF, demissa. Est autem pyramis ADCF,
eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur
quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis
ADF, ACF, DCF; hæc vero eisdem quatuor
planis, nimirum basi ADF, & triangulis ADC,
ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF,
ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est
pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam
CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF,
FCE,) totum prisma componentes, ut perspicu-
um est, æquales sunt inter se; Ac propterea
prisma ABCDEF; in tres pyramides æquales est
divisum. Quo circa omne prisma triangulare
habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam
partem prismatis, quod eandem cum illa habet & ba-
sim, & altitudinem: Sive prisma quodlibet triplum esse
pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & al-
titudinem.

Sit

Sic enim primum pyramis ABFC, triangularem habens *TAB.*
 basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine *XXXIV.*
 eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyrami- *fig. 2.*
 dem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta
 DF, erit prisma divisum in tres pyramides æquales
 ABFC, ADCF, CDEF, & ut demonstratum est; Ac *c 7. duod.*
 propterea pyramis ABFC, hoc est, pyramis ABFC,
 (cum hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem
 planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia
 pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC,
 æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudi-
 ne, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll.
 propos. 5. hujus lib. manifestum est, quamlibet pyra-
 midem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum
 illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea
 prisma è contrario esse pyramidis triplum.

Sic deinde pyramis ABCDE, cujus basis rectilineum *TAB.*
 quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & prisma *XXXIV.*
 ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens ba- *fig. 3.*
 sim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem ter-
 tiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito
 EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF,
 FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia
 triangulares divisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF,
 CF, erit, ut demonstratum est, pyramis ADBH, tertia
 pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia
 pars prismatis CDHGFB. Quare erit ut pyramis ADBH,
 ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma
 CDHGFB; & Ac propterea ut una pyramis ad suum pris- *dia. quater.*
 ma; ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est,
 ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF,
 simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH.
 Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi
 ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE,
 super eandem basin, & super eadem altitudine, ni-
 mirum inter plana parallela, sunt æquales, ex
 coroll. propos. 5. hujus lib. Eademque ratione æquales
 sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basin,
 & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides
 ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE,
 erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH.
 Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunque alte-
 ri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basin
 ABCD, constituta, per coroll. propos. 5. hujus lib. per-
 spicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem
 prismatis.

prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemque altitudinem.

Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam divisus polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Unde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

S C H O L I U M.

Sub eadem altitudine existentia prismata, quæcunque habeant bases, inter se sunt, ut bases.

Quamvis enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ: nec non de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstrabimus univèrse de omnibus prismatis, quorum duo plana adversa, sive bases, sunt polygonæ, quamvis plura latera, seu anguli in unius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata ejusdem altitudinis $ABCDEFGH$, $LMNOPQRS$, quorum bases sint figura multilatera. Dico ut est basis $ABCDE$, ad basim $LMNO$, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis utriusque basis ad unum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent due pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases; Ac proinde per coroll. prædictum hujus propos. quælibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. a Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis ad basim, ut ostensum est propos. 6. ejusque scholio. Igitur erit quoque ut basis ad basim, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viii.

Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

Sint pyramides similes triangulares ABCD, TAB. XXXIV. fig. 5.
EFGH, ita ut bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula unius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ convenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, ejusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi BM, sint parallela, ut facile colligitur ex propof. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estque ut AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque ut AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & ut DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma BL, BK, parallelogrammis FP, FO, similia. a 24. und.
Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedum BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedum FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, sunt æqualia, & similia. b 24. und.
Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defn. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, c 15. quib.
maxima DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem

21. quint. dem, quam prismata dicta, earum tripla; *d* habebunt quoque pyramides eandem proportionem, *e* 33. *und.* quam parallelepipeda. Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

TAB. *XXXIV.* *fig. 8.* *f* 20. *sext.* *g* 5. *sext.* *h* 8. *duod.*
Sint pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC, LH, LI, *f* divisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita ML, ad LG: Ut autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam *g* ex æquo, ut FE, ad FB, ita ML, ad MH. *g* Quare æquiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABFE, GHLM, ex defn. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; *h* 8. *duod.* Item CDEF, IKLM. *h* Quapropter, ut demonstratum est, pyramides ABFE, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM,

GHLM, **LHIM**, **IKLM**, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum **AB**, **BC**, **CD**, ad **GH**, **HI**, **IK**, singulorum ad singula. Cum igitur **AB**, **BC**, **CD**, ad **GH**, **HI**, **IK**, habeant unam & eandem proportionem, ob similitudinem basium **ABCDE**, **GHIKL**; habebunt quoque pyramides **ABEF**, **EBCF**, **CDEF**, ad pyramides **GHLM**, **LHIM**, **IKLM**; unam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; Atque idcirco erit ut una pyramis **ABEF**, ad unam *i 12. quatuor;* pyramidem **GHLM**, ita omnes pyramides, nempe pyramis **ABCDE**, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem **GHIKLM**. Quam ob rem, & cum pyramis *k 8. duod.* **ABEF**, ad pyramidem **GHLM**, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum **AB**, **GH**; habebit quoque pyramis **ABCDE**, ad pyramidem **GHIKLM**, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum **AB**, **GH**. Quod est propositum.

THEOR. 9. PROPOS. 9. *vij.*

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, recipiuntur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium recipiuntur bases & altitudines, illæ sunt æquales.

Sint æquales pyramides triangulares **ABCD**, *TAB.* **EFGH**. Dico earum bases **ABC**, **EFG**, & *XXXIV.* altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut **ABC**, *fig. 7.* ad **EFG**, ita altitudinem pyramidis **EFGH**, ad altitudinem pyramidis **ABCD**. Si enim perficiantur, ut in præcedenti propositione dictum est, parallelepipeda **BM**, **FQ**, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ **LI**, **PN**; erunt prismata **DBCILA**, **HFGNPE**, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda **BM**, **FQ**, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. Quare bases eorum & altitudines recipiuntur, hoc est, erit ut basis **BI**, ad basin **FN**, ita altitudo solidi **FQ**, ad altitudinem solidi **BM**: Ut autem basis **BI**, ad basin **FN**, ita est *a 34. und.* trian- *bis, quint.*

triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eadem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

Sint jam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, *cis. quint.* ut prius; cum sit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eadem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ; *d 34. und.* Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismaticum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

vij. THEOR. 10. PROPOS. 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

TAB. XXXIV. fig. 8. HABeant conus & cylindrus basin eandem circumculum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel major, vel minor triplo coni. Sit primum major quam triplus coni, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscrubatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, ut

ut ad propof. 9. lib. 4. oftendimus; & eftque ut a 32. *und.*
 bafis ad bafin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum
 ejufdem altitudinis; Erit & parallelepipedum bafis ABCD,
 dimidium parallelepipedum bafis FGHI; Ac proinde parallelepipedum bafis
 ABCD, majus erit, quam dimidium cylindri, cujus bafis
 circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N,
 adjunganturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela
 erit ipfi AB, ut ad propof. 27. lib. 3. oftendimus,
 occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intelligantur
 prismata sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum AKB, dimidium eft parallelogrammi
 ABOP; erit quoque prisma bafis AKB, dimidium prismatis,
 feu parallelepipedum bafis ABOP: cum fit prisma, ad prisma ut bafis ad bafim,
 quemadmodum, ad propof. 7. hujus lib. demonftravimus;
 Ac propterea prisma bafis AKB, majus erit, quam
 dimidium segmenti cylindri, cujus bafis figura contenta
 linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt
 prismata, quorum bafes reliqua triangula BLC, CMD, DNA,
 & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, majora, quam
 dimidia segmentorum cylindri, quorum bafes circuli
 segmenta. Omnia igitur hæc prismata fimul majora sunt,
 quam dimidia omnium segmentorum cylindri fimul. Quod
 fi rursus peripheriæ AK, KB, &c. fecentur bifariam, &
 adjungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo
 prismata ejufdem altitudinis cum cono, & cylindro,
 quæ majora erunt fimul, quam dimidia omnium
 segmentorum cylindri fimul, quorum bafes circuli
 segmenta, & fic deinceps. Quoniam vero fi à cylindro,
 cujus bafis circulus ABCD, auferatur plus quam
 dimidium, nempe parallelepipedum bafis ABCD; & à
 reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum
 prismata bafium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum
 femper

b 41. *primi*

semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E , excessus cylindri supra triplum coni, per lemma propof. 2. hujus lib. Sint jam segmenta cylindri relicta basium AK , KB , BL , &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E . Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E , simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni una cum magnitudine E , ipsa magnitudo E , quæ major est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ $AKBLCMDN$, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, majus quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cujus eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propof. 7. hujus lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur major est cylindrus triplo coni.

Sit deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus major quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus major quam tertia pars cylindri, magnitudine E ; ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E , simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum $ABCD$, & circa eundem, quadratum $FGHI$; intelliganturque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum $ABCD$, dimidium est quadrati $FGHI$, ut ad propof. 9. lib. 4. demonstravimus, æstque sit basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super $ABCD$, dimidium pyramidis super basin $FGHI$; ac proinde pyramis super basin $ABCD$, major erit dimidio coni, cujus basis circulus $ABCD$. Secentur peripheriæ AB , BC , CD , DA , bisariam in K , L , M , N , adjunganturque rectæ AK , KB , BL , LC , CM , MD , DN , NA . Ducatur quoque per K , recta OP , tangens circulum in K , quæ parallela erit ipsi AB , ut ad propof. 27. lib. 3. demonstravimus;

stravimus; occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & super AKB, ABOP, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis super basin AKB, dimidium pyramidis super basin ABOP, f cum pyramides habeant proportionem eandem, f 6. d. quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB, major erit dimidio segmenti coni, cujus basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, majores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul majores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, secantur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides ejusdem altitudinis cum cono & cylindro; quæ majores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si à cono, cujus basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin ABCD, quam majorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cujus basis est circulus ABCD; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: per lemma propof. 2. hujus lib. Sint jam segmenta coni relictæ basium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine

A a

E,

E, ipsa magnitudo E, quæ major est præfatis conï segmentis; erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum *AKBLCMDN*, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, major quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis majus erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in coroll. propos. 7. hujus lib. à nobis est demonstratum, erit hujusmodi prisma majus cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo conï: Sed neque major triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo conï, proptereaque conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

ix. THEOR. II. PROPOS. II.

Sub eadem altitudine existentes conï & cylindri, inter se sunt, ut bases.

TAB.
XXXIV.
fig. 9.

Sint sub eadem altitudine conï & cylindri, quorum bases circuli *ABCD*, *EFGH*, altitudines vero æquales *IK*, *LM*. Dico ut est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit ut basis *ABCD*, ad basim *EFGH*, ita conus *ABCDK*, ad aliquam magnitudinem, nempe ad *N*, quæ vel major erit, vel minor cono *EFGHM*. Si enim esset æqualis, haberet conus *ABCDK*, ad conum *EFGHM*, & ad *N*, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum, ut basis ad basim: quod non conceditur. Sit ergo primum *N*, minor quam conus *EFGHM*, magnitudine *O*, ita ut conus *EFGHM*, æqualis sit magnitudinibus *N*, & *O*, simul. Inscribatur in circulo *EFGH*, quadratum *EFGH*, dividantur-
que

LIBER DUODECIMUS. 371

que peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adjungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, ejusdem altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, ut in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus cono EFGHM, super N, per lemma propof. 2. hujus lib. Sint ergo jam segmenta cono relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta cono segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti cono segmentis major est, erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum EPFQGRHS, ejusdem altitudinis cum cono, major quam N, reliqua magnitudo. Inscrubatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, ut in propof. 2. hujus lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propof. 2. hujus lib. est ut circulus ABCD, ad circumulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Ut autem circulus ABCD, ad circumulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N. & ut polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis cum conis; Erit quoque ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, derit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ostensa autem fuit & major. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

Sit secundo N, major cono EFGHM. Cum

igitur ponatur ut circulus $ABCD$, ad circulum $EFGH$, ita conus $ABCDK$, ad N ; Erit & convertendo ut circulus $EFGH$, ad circulum $ABCD$, ita N , ad conum $ABCDK$. Ponatur ut N , ad conum $ABCDK$, ita conus $EFGHM$, ad magnitudinem O . Et quia N , major ponitur cono $EFGHM$; major quoque erit conus $ABCDK$, quam O . Quare erit ut circulus $EFGH$, ad circulum $ABCD$, ita conus $EFGHM$, ad magnitudinem O , quæ minor est cono $ABCDK$. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis illius coni ad basin hujus coni. Non ergo major est N , magnitudo cono $EFGHM$. Sed neque minor est ostensa; Æqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis $ABCD$, ad basin $EFGH$, ita conus $ABCDK$, ad N ; *e* Sit autem, ut conus $ABCDK$, ad N , ita idem conus $ABCDK$, ad conum $EFGHM$, erit quoque ut basis $ABCD$, ad basin $EFGH$, ita conus $ABCDK$, ad conum $EFGHM$.

e 7. quint.
f 15. quint. Quoniam autem, ut conus $ABCDK$, ad conum $EFGHM$, ita est cylindrus $ABCDK$, (qui triplus est coni $ABCDK$,) ad cylindrum $EFGHM$; (qui triplus est coni $EFGHM$.) Erit quoque ut basis $ABCD$, ad basin $EFGH$, ita cylindrus $ABCDK$, ad cylindrum $EFGHM$. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo uti sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc fit, conos & cylindros ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

Item sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales.

æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conversum propof. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12. x.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

Sint similes coni, & cylindri, quorum bases TAB.
circuli ABCD, EFGH, axes vero IK, LM, XXXV.
& diametri basium BD, FH. Dico conum ad fig. 1.
conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel major cono EFGHM. Si enim esset æqualis, *a* haberet conus ABCDK, 7. quint.
ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, esset quoque triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita ut rursus pyramis EPFQGRHSM, major ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, ut habeantur duo triangula BKT, FMP, pyramidum ATBV CXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponuntur, erit, ex 24. defin. lib. 11. ut diameter BD, ad diametrum FH. *b* ac propterea ut semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutando ut BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, proptereaque axes recti ad eorum bases; *c* Erunt triangula BIK, FLM, æquiangu- c 6. sext.
la; *d* Ac propterea ut KB, ad BI, ita erit MF, d 4. sext.

- ad FL. Ut autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcibus BT, FP, sint æquales, ut in scholio propof. 22. lib. 3. ostensum est; sitque ut BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP; erunt triangula BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, ut KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur, ad circumulum, ABCD, ferunt bases KB, KT, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum utrobique sit proportio æqualitatis. Quoniam vero ut KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item ut MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem ut KB, ad BT, ita MF, ad FP: Erit quoque ut KT, ad BT; ita MP, ad FP; Et convertendo ut BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cum sit ut TK, ad KB, ita PM, ad MF, & ut KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et ut BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti ostensum est; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia, hideoque æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportionerunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propof. 8. hujus lib. Ut autem BT, ad FP, ita est, BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP; Et ut BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur
- erit

erit ut pyramis $ATBVCXDYK$, ad pyramidem $EPFQGRHSM$, ita conus $ABCDK$, ad N . Quare cum pyramis $ATBVCXDYK$, minor sit cono $ABCDK$, pars toto; & erit & pyramis $EPFQGRHSM$, minor quam N . Ostensa autem est & major. Quod est absurdum. Non igitur minor, est magnitudo N , cono $EFGHM$. k14. quist.

Sit deinde N , major cono $EFGHM$. Cum ergo ponatur conus $ABCDK$, ad N , habere proportionem triplicatam diametri BD , ad diametrum FH ; Habeat autem & pyramis $ATBVCXDYK$, ad pyramidem $EPFQGRHSM$, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus $ABCDK$, ad N , ita pyramis $ATBVCXDYK$, ad pyramidem $EPFQGRHSM$; & convertendo ut N , ad conum $ABCDK$, ita pyramis $EPFQGRHSM$, ad pyramidem $ATBVCXDYK$. Quare cum ex coroll. propof. 8. hujus lib. pyramis $EPFQGRHSM$, ad pyramidem $ATBVCXDYK$, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF , ad TB , hoc est, diametri FH , ad diametrum BD ; habebit quoque N , ad conum $ABCDK$, proportionem triplicatam diametri FH , ad diametrum BD . Ponatur ut N , ad conum $ABCDK$, ita conus $EFGHM$, ad magnitudinem O . Habebit igitur & conus $EFGHM$, ad O , proportionem triplicatam diametri FH , ad diametrum BD . Et quia N , major ponitur quam conus $EFGHM$, erit quoque conus $ABCDK$, major quam O . Quapropter conus $EFGHM$, ad magnitudinem O , minorem cono $ABCDK$, proportionem habet triplicatam diametri FH , ad diametrum BD . Quod est absurdum. Ostensum est enim, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam ejus, quam habent basium diametri. Non ergo major est magnitudo N , cono $EFGHM$. Sed & minor est ostensa. Æqualis igitur est; hac proinde conus $ABCDK$, eandem habet proportionem ad conum $EFGHM$, & ad N . Cum ergo ponatur conus $ABCDK$, ad N , in triplicata m 7. quist.

proportione diametrorum BD , & FH ; erit quoque conus $ABCDK$, ad conum $EFGHM$, in earundem diametrorum proportionem triplicata.

Def. quint. Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basiis triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo nisi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basiis. Quod ostendendum erat.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si cylindrus plano secetur adversis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

TAB. XXXV. fig. 2. SEcetur cylindrus $ABCD$, plano GH , parallelo adversis planis AB , CD , quod quidem secet axem EF , in I . Dico ut est cylindrus $ABHG$, ad cylindrum $GHCD$, ita esse axem EI , ad axem IF . Intelligatur enim cylindrus $ABCD$, in utramque partem, una cum ejus axe & rectangulo EC , ad cujus revolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet: Sumanturque in axe producto quocunque rectæ EK , KL , æquales ipsi EI : Item quocunque rectæ FM , MN , NO , æquales ipsi FI . Deinde per puncta I , K , L , M , N , O ducantur rectæ IH , KP , LQ , MT , NV , OX , parallelæ, & æquales rectis EB , FC ; quæ quidem ad revolutionem rectanguli EC , describent circulos GH , PR , QS , Ta , VZ , XV , parallelos & æquales circulis AB , CD , ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP , PA , AH , HD , DT , TZ , ZX , ex definitione, componen-

ponentes totum cylindrum SOXY. Quoniam vero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Ta, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propof. 11. hujus lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis, cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propof. 11. hujus lib. liquet. Si vero axis major est axe, cylindrus quoque cylindro major est; Et si minor, minor in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit per defin. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axem IF, secundam magnitudinem, ut cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur adversis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xi:

Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, ut altitudines.

Si super bases æquales AB, CD, duo coni TAB
ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, xxxv,
quorum axes, seu altitudines, (Nam in conis fig. 31
& cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE,
MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF,
& cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, ut
est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extenda-

A a 5

tur

tur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, una cum ejus axe LE, & rectangulo AG; abscindaturque axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, ut fiat cylindrus GHOP, ejusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll.

a 7. quins. b 13. duod. *propof. 11. hujus lib. a* cylindrus AG, ad ipsos eandem habebit proportionem. *b* Est autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, ut axis, seu altitudo LE, ad axem, seu altitudinem EN, hoc est, altitudinem MF, sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, ut altitudo LE, ad altitudinem MF.

c 10. duod. d 15. quins. *c* Quia vero coni ABE, CDF, sunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, ut altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur basibus exsistentes coni & cylindri, inter se sunt, ut altitudines. Quod ostendendum erat.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æqualium conorum, & cylindrorum recipiuntur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum recipiuntur bases & altitudines, illi sunt æquales.

TAB. XXXV. *fig. 4.* *S*int æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes altitudinesve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. *propof. 11. hujus lib.* Quare erit ut basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad

ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.

Quod si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, major, ex qua abscindatur MN, ipsi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum, ut in scholio propof. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; a erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. b Est autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita basis AB, ad basin DE, cum æquales sint altitudines: c Item ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum bases sint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc est, ad hanc æqualem LC; Ac propterea reciprocæ sint bases & altitudines.

In conis vero ita concludemus propositum. Si coni ABC, DEF, sint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, d cum coni sint cylindrorum tertiæ partes. Quare ut ostensum est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo usi sumus in cylindris, si modo sub altitudinibus MN, NF, constituentur duo coni, ut in figura apparet.

Sed jam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propof. 11. hujus lib.

Quod

Quod si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN.

e 11. duod. Est autem ut basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: f Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales: erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; g Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

e 9. quod.

At vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eadem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

xij.

P R O B L. I. P R O P O S. 16.

Duobus circulus circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

TAB.
XXXV.
fig. 5.

Sint duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cujus latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propos. 16.

lib.

lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, major est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, & sic deinceps; relinquetur tandem minor arcus quam CG, per lemma proposit. 2. hujus lib. Sit igitur jam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectam CK, esse unum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, dividatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales dividatur, in quot divisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcibus rectæ lineæ subtendantur, quæ æquales quidem *bag. sect. 1.* erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, committatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt; & erunt rectæ GH, KL, parallelæ. *cas. prim.* Quare cum recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conveniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, aideoque æqualiter *dis. tert.* cum CK, à centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo, &c, Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere. *Hic;*

382 EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

Hujusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, convenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

xiv.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

TAB. XXXVI.
fig. 1. **S**int duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in majori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumvolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruunt sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarum, ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, sese in centro I, secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. ^a Deinde in majori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod guidem ut facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gg, ad circumferentiam usque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. ^b 1. ^{quart.} propof. 16. lib. 3. Et rectæ Gg, applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Ae. Quia vero si arcui Cg, intelligatur subtendi recta, ut fiat tri-
^c 19. ^{prim.} angulum GCg, clatus Cg, oppositum majori angulo,

gulo, nempe recto, majus est latere Gg, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cg, major recta Ae; ac proinde arcus Cg, arcu Ae, major erit, ut constat ex scholio propof. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cd, arcui Ae, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidium LK, & sic deinceps; relinquatur tandem arcus minor arcu Cd, seu arcu Ae, per lemma propof. 2. lib. hujus. Sit ergo jam arcus CK, minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta Ae, hoc est, quam Gg, ex scholio propof. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, esse unum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cd, minorem arcu Cg, non tangat circulum EFGH, ut ex demonstratione præcedentis propof. patet; multo minus recta CK, subtendens arcum minorem arcu Cd, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro KN, erigatur ex centro *e 12. aud.* I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superfici ei sphaeræ majoris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, squæ ad circulum ABCD, *f 18. aud.* recta crunt, efficientque communes sectiones, circulos, ut jam dictum est, quorum semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. quadrantes erunt OC, OK; atque adeo cum circuli ABCD, *g schol. 17. scrib.* AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphaeræ majoris diametri, erunt quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot divisus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; *h 19. aud.* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD, CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Conjunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, quæ

38. und. quæ in communes sectiones AC, NK, cadent;
 6. und. Aeruntque inter se parallelæ.

Quoniam igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 1. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistant; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita æqualia; Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY, æquales quæque erunt & parallelæ PS, XY, inter sese.

At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, ut IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erunt parallelæ quoque PS, CK, inter se, cum utraque parallela sit ipsi XY, & ideoque eas conjungentes rectæ CP, KS; in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in uno erit plano.

Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atque adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem CK, sint parallelæ, totumque quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterum QTVR. Est autem & triangulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem constructio exhibear super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, MO, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, ut tota sphaera major repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sunt prædictis inter qua-

2. und. rum QTVR. Est autem & triangulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem constructio exhibear super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, MO, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, ut tota sphaera major repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sunt prædictis inter qua-

quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis, inscriptum erit in sphaera majori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphaeram minorem EFGH.

Ducatur enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectae ZC, ZK. Cadere autem perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequenti ostendemus. Quoniam igitur ex d. fin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; erit quadratum rectae IC; quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectae IK, quadratis rectarum IZ, ZK, aequale. Cum ergo quadrata rectarum aequalium IC, IK, aequalia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, aequalia. Ac proinde dempto communiquadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, aequalia erunt, ideoque & ipsae rectae ZC, ZK, aequales. Similiter ostendemus rectas, quae ex Z, ad PS, ducentur, aequales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam vero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectae CK, majus quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum haec quadrata aequalia sint, majus erit quadratum rectae CK, duplo quadrati rectae ZC.

47. prim.

12. sec.

1. tert.

17. sext.

Ducatur ex K, ad rectam AC, perpendicularis Ka. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aa, major sit, quam AI, erit AC, minor duplo ipsius Aa. Quam ob rem cum sit, ut AC, ad Aa, ita rectangulum sub AC, aC, ad rectangulum sub Aa, aC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aa, & eadem altitudo aC; erit quoque rectangulum sub AC, aC, minus duplo rectanguli sub Aa, aC. * Est autem rectangulum sub AC, aC, aequale quadrato rectae

Bb

CK,

CK, & rectangulum sub Aa, aC, æquale quadrato rectæ Ka; quod recta CK, inter AC, aC, sit media proportionalis; & recta Ka, inter Aa, aC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connec-
 747-primi teretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Ka. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, ostensum sit majus esse duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ Ka, majus quadrato rectæ ZC. Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Ia, aK; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Ia, aK. Si ergo ex his dematur quadratum majus, nempe rectæ aK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, majus quadrato reliquo rectæ Ia; ideoque recta IZ, major quam recta Ia. Quapropter cum punctum a, non tangat sphaeram minorem EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta Ka, tota sit extra dictam sphaeram; multo minus punctum Z, longius distans eandem sphaeram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius absint à sphaera EFGH, quam punctum Z, ut mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphaeram EFGH.

Sed & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphaeram minorem EFGH, si prius ducatur recta Ig, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Gg: Est autem CK, major quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, ut mox demonstrabitur; multo major erit Gg, quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gg, majus quadrato rectæ ZC.
 747-primi a Quia vero quadratum rectæ Ig, æquale est quadratis rectarum IG, Gg; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Ig, IC, æqualium æqualia; erunt

erunt & quadrata rectarum IG , Gg , quadratis rectarum IZ , ZC , æqualia: Dempso ergo illinc quadrato rectæ Gg , & hinc quadrato rectæ ZC ; relinquetur quadratum rectæ IG , minus quadrato rectæ IZ ; Ac propterea recta IG , minor, quam IZ . Quam ob rem, cum IG , sit sphaeræ minoris $EFGH$, semidiameter, existet punctum Z , extra eandem sphaeram; Et proinde, ut prius, planum $CKSP$, sphaeram $EFGH$, nequaquam continget.

Ducatur rursus ex I , ad planum $PSTQ$, perpendicularis Ib , critque b , centrum circuli circa $PSTQ$, descripti, ut demonstratum est; Connexis autem rectis bP , IP , cum angulus IbP , rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. erit quadratum rectæ IP , æquale quadratis rectarum Ib , bP . Quia vero & quadratum rectæ IC , (quod æquale est quadrato rectæ IP , ob æqualitatem rectarum IC , IP), æquale est quadratis rectarum IZ , ZC ; erunt quadrata rectarum Ib , bP , quadratis rectarum IZ , ZC , æqualia; Est autem quadratum rectæ ZC , majus quadrato rectæ bP , quod & linea ZC , major sit, quam linea bP , ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Ib , reliquo quadrato rectæ IZ , majus erit; ideoque & linea Ib , major quam linea IZ : Ac proinde multo magis punctum b , extra sphaeram, $EFGH$, existet, quam punctum Z : proptereaque multo minus planum $PSTQ$, quam $CKSP$, tanget sphaeram minorem $EFGH$. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphaeram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in majori sphaera solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphaeræ superficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Ex iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum simile

prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphaera ad polyedrum in altera sphaera esse triplicatam ejus, quam habent sphaerarum diametri. Nam si ex centris sphaerarum ad omnes angulos basium, dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphaerarum; ut constat, si intelligatur harum sphaerarum minor intra majorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos; ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficiuntur similes. Quare cum singulæ pyramides in una sphaera ad singulas pyramides illis similes in altera sphaera habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphaerarum, ut constat ex coroll. propof. 8. hujus lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphaeræ ad polyedrum alterius sphaeræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque
 c15. quint. adeo diametrorum sphaerarum, cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

S C H O L I U M.

Quoniam vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, ut vera; qua tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breviter à nobis erunt demonstranda.

TAB. Primum itaque ostendendum est, punctum Z, ca-
 XXXVI. dere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK,
 fig. 2. in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura prima est ut IK, ad KC, ita IT, ad TX, (quod per coroll. propof. 4. lib. 6. triangula ICK, IXI, similia sint.) Est autem IK, major, quam
 d14. quint. IT; derit & KC, major quam TX. Cum igitur TX, æqualis sit ostensa ipsi SP; erit quoque KC, major quam SP. Ac propterea in hac secunda figura, arcus CK, major erit arcu SP, ex scholio propof. 28. lib.

3. eQuare cum arcus CP, KS, arcui CK, *finis* 328. tertiū
 æquales, quod & linea CP, KS, ipsi KC, *lineæ*
finis æquales demonstrata, (subtenduntur enim arcu-
 bus circularum aequalibus, ut ex constructione figura
 primæ constat) erant quoque arcus CP, KS,
 arcu PS, majores; Atque idcirco quilibet arcus
 CK, CP, KS, quadrantiem circuli CKSP, exco-
 det; atque à semicirculo superabitur; ac proinde mul-
 to magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex
 quo fit, ventrum Z, non esse in illis segmentis, sed
 extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Ea-
 dem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad
 plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est
 Ib, cadere intra quadrilatera; nec non & perpendi-
 cularem ex I, ad triangulum OKV, ductam, cadere
 intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante ma-
 jor est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto
 major, cum angulo recto in centro subtendatur qua-
 drans circuli, ut perspicuum est ex scholio propo-
 s. 27. lib. 3.

Secundo demonstrandum est, omnia alia puncta
 quadrilateri CKSP, longius à centro I, abesse, quam
 punctum Z. Sumatur enim quodcumque aliud pun-
 ctum b, in quadrilatero CKSP, & adjungantur TAB.
XXXVI.
fig. 3.
 rectæ Ib, Zb. Quoniam ergo angulus IZh, rectus
 est, ex defin. 3. lib. 11. & Erit latus illi oppositum 119. primū
 Ib, majus latere IZ, quod minori angulo IbZ, ni-
 mirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum b,
 longius à centro I, distat, quam punctum Z. Simi-
 li argumento concludemus, omnia alia puncta longius
 distare.

Tertio, ut ultimum probandum est, rectam ZC,
 majorem esse recta bP. Quod ut aptius fiat, demon-
 strandum prius erit, rectam PS, majorem esse recta
 QT. Describatur igitur pars prima figura, ac
 videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IK,
 IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur
 deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABGD, in
 quo est triangulum ICK, perpendiculares QI, TI,
 & quæ in communes sectiones KC, IK, cadunt, TAB.
XXXVII.
fig. 4.
 & erantque inter sese parallele, ut de rectis PK, 338. undū
h 6. undū
 B b 3 ST,

ST, dictum est. Quod si adjungatur recta *lm*; erunt *QT*, *ml*, parallelae & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales *PS*, *YT*. Quia vero *ml*, ipsi *CK*, parallela est; quod latera *IC*, *IK*, proportionaliter sint secta in *l*, & *m*, veluti diximus de recta *XY*; erunt quoque *ml*, *XY*, parallelae. Quare erit ex coroll. propof. 4. lib. 6. ut *lY*, ad *YX*, ita *lm*, ad *ml*, est autem *lY* major quam *lm*. Igitur & *YX*, major erit quam *ml*; At proinde & *PS*, quæ æqualis est ipsi *XY*, major erit quam *QT*, quæ æqualis est ipsi *ml*.

Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris *Z*, *b*, circa quadrilatera *CKSP*, *PSIQ*, circuli, egredianturque à centris recta *ZC*, *ZK*, *ZS*, *ZP*, *bP*, *bS*, *bT*, *bQ*. Si igitur *ZC*, non credatur major, quam *bP*, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera *ZK*, *ZC*, æqualia ponuntur lateribus *bS*, *bP*, & basis *KC*, major est base *PS*; meritis angulus *KZC*, major angulo *SbP*: Eadem ratione major erit angulus *SZP*, angulo *TbQ*. At quoniam bases *KS*, *CP*, basibus *ST*, *PQ*, sunt æquales necerunt anguli *KZS*, *CZP*, angulis *SbT*, *PbQ*, æquales. Igitur quatuor anguli ad *Z*, majores erant quatuor angulis ad *b*: Sunt autem & æquales, cum tam *bz*, quam illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta *ZC*, rectæ *bP*.

Sit deinde *ZC*, minor, quam *bP*. Et abscindantur *bz*, *bq*, *br*, *bt*, ipsis *ZC*, *ZK*, *ZS*, *ZP*, æquales, connectanturque rectæ *nq*, *qr*, *rt*, *tn*, o quæ parallela erant rectis *PS*, *ST*, *TQ*, *QP*, eo quod rectæ ex centris sectæ sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propof. 4. lib. 6. erit ut *bS*, ad *SP*, ita *bq*, ad *qn*. Cum ergo *bS*, major sit quam *bq*, perit & *SP*, major quam *qn*. Eademque ratione majores erunt *ST*, *TQ*, *QP*, rectis *qr*, *rt*, *tn*; Ac propterea cum *PS*, minor sit, quam *CK*, & *ST*, *PQ*, æquales rectis *KS*, *CP*; & *TQ*, minor quam *PS*, erunt rectæ *qn*, *qr*, *rt*, *tn*, minores rectis *CK*, *KS*, *SP*, *PC*. Quare cum recta

bm,

*bn, bq, br, bt, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sine
æquales; qerunt anguli ad Z, majores angulis ad, q15.prima
b: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam bi
sunt quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15.
lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est
recta ZC, quam bP: Sed neque æqualis est ostensa;
Major igitur est. Quod erat ostendendum.*

THEOR. 16. PROPOS. 18. xv.

Sphæræ inter se sunt in triplicata ra-
tione suarum diametrorum.

Sint duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri **TAB: XXXVI. fig. 6.**
AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram
DEF, habere proportionem triplicatam diametri
AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non con-
cedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram
GHI, minorem, vel KLM, majorem, quam
DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad
diametrum DF. Habeat primum sphæra ABC,
ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, pro-
portionem triplicatam diametri AC, ad diametrum
DF; intelligaturque sphæra GHI, concentra
sphæræ DEF. **a17. dand.**
Inscribatur in sphæra majori
DEF, polyedrum DNEOPQR, non tangens
minorem sphæram GHI; Atque huic simile po-
lyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra
ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ
ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis
diametri AC, ad diametrum DF: Est autem per
coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri
ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOPQR, tri-
plicata proportionis diametri AC, ad diametrum
DF: Erit ut sphæra ABC, ad sphæram GHI,
ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum
DNEOPQR. Quare cum sphæra ABC, major
sit polyedro ASBTCVXY, **b14. quæ:**
erit & sphæra GHI, major polyedro DNEOPQR, pars toto. Quod
est absurdum. Non igitur habebit sphæra ABC,
ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, propor-
tionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

Habeat secundo sphæra ABC, ad sphæram
KLM,

37. EUCLIDIS GEOMETRIÆ.

KLM, maiorem sphaera DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedentis propof. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFFQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit ut sphaera ABC, ad sphaeram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFFQR: Et convertendo, ut sphaera KLM, ad sphaeram ABC, ita polyedrum DNEOFFQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propositionis polyedrum DNEOFFQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportionem diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphaera KLM, ad sphaeram ABC, erit in triplicata proportionem diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut sphaera KLM, ad sphaeram ABC, ita sphaera DEF, ad aliam sphaeram Zab. Habebit igitur & sphaera DEF, ad sphaeram Zab, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia sphaera KLM, maior ponitur, quam sphaera DEF, erit quoque sphaera ABC, maior quam sphaera Zab. Quapropter sphaera DEF, ad sphaeram Zab, minorem sphaera ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse sphaeram ad sphaeram alia sphaera minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphaera ABC, ad sphaeram KLM, maiorem sphaera DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphaeram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphaerae itaque inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M.

Hinc fit, ita esse sphaeram ad sphaeram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphaera ad sphaeram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.

F I N I S.



Errata typographica quæ inter relegendum
mihi occurrere, hoc modo corrigat Be-
nevolus Lector.

Pag.	Lin.	Pro	Lege
20.	6.	Onnis	Omnis
31.	ultima.	sitalterius	sit alterius
33.	19.	utrumqu.	utrumque
38.	13.	que BA	quæ BA.
39.	2.	om nia	omnia
59.	18.	rectis	rectis.
61.	23.	externus DCF,	externus DCE,
93.	17.	ipsi CF,	ipsi CE,
96.	17.	rectangulo	rectangulo
105.	24. in marg. 10. def.		10. def. primi
107.	22. in marg. 10. def.		10. def. primi
109.	12. in marg. 15. def.		15. def. primi
	28. in marg. 15. def.		15. def. primi
124.	5.	recta quædem	recta quædam
154.	20.	describendns	describendus
156.	9.	Quare quadratum	Quare quadratum
165.	35.	THEOR.	PROBL.
171.	5.	habituto	habitus
173.	2. à fine	æquemultiplicia	æque multiplicia
174.	4.	æquemultiplicia	æque multiplicia
	7.	æquemultiplicia	æque multiplicia
189.	28.	nna	una
208.	2. a fine	primo	prima
220.	23.	permutamdo	permutando
227.	5. a fine	constituantur	constituatur
237.	4. a fine	ad CA,	ad DA,
267.	17.	cum sexta	cum sexta
274.	7.	imagininemur	imaginemur
277.	22.	angulii	anguli
380.	27.	circulus	circulis



Genealogisk TABELL

Ad pag. 50

Öfver BIRGER Jarls och dels Gemäls INGEBORGS härkomst,
SVEN ESTRIDSSON, Son af Danska Jarlen Ulf Thorgilsson och
Danska Prinsessan ESTRID, som var halfsyster å Mödernet med
Olof Skötkonung i Sverige, och å Fädernet med Knut den rike i
Dannemark; blef Konung i Dannemark år 1048, och död år 1076.

KNUT den helige, Konung i Dannemark, år 1080 efter sin Broder Harald; förmåld med Edela Gref Roberts af Flandern dotter; i hjälsagen af sina upproriska underlåter i St. Albani Kyrka i Odenfee år 1086.

ERIK Ejegod, Konung i Dannemark år 1195 efter sin tredje Broder Olof Hunger; hans Gemål het Botild. Företog en pelegrims resa til Jerusalem, att försöna ett begånget dråp, på hvilken resa han afled år 1105 i Cypern.

INGRID; gift med Folke Ingvaldsson, Jarl i Sverige hos Konung Inge den Äldre, och blef en stam-moder för Folkunga-ätten, som länge florerade i magt, rikedom och anseende.

KNUT Lavard, kallad den helige, gjord aff sin Fader till Härtig i Schlesvig; blef sedan de Obotriters Konung; i hjälsagen af Danske Prinses Magni 1131 och canonicerad 1171.

BENGT Snyffal, äfven Jarl, gift först med Sirita, Bengt Lachmans Dotter, och sedan med Ulfhild Björn Järnsidas dotter, Syster til Erik den heliges Gemål, Drottning Christina.

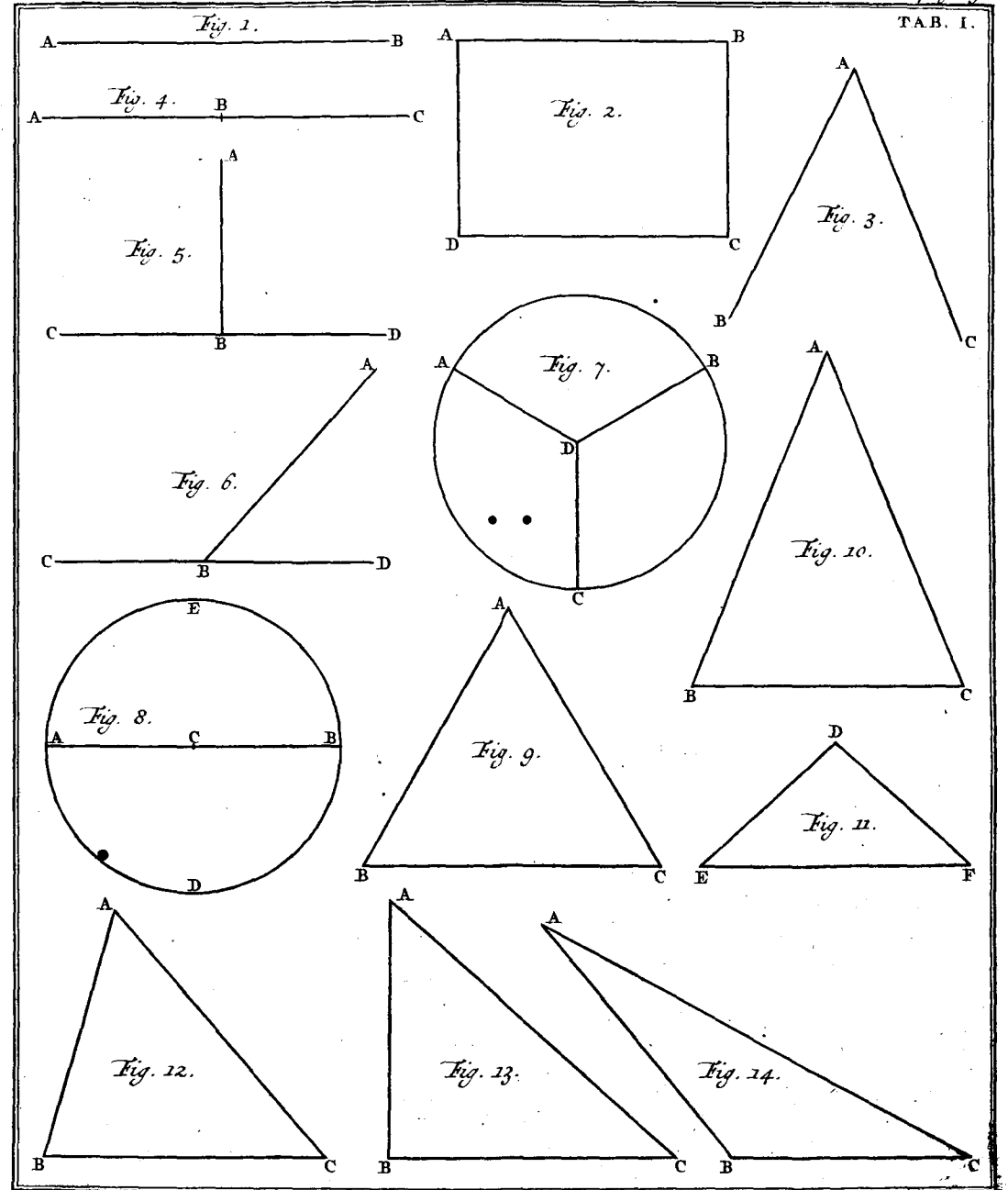
WALDEMAR I, född år 1131; Konung i Dannemark 1157; Förmåld med Sophia en Ryk Prinsessa; död i Ringstad år 1181; och har förtjent tillnamnet: den Store.

MAGNUS Minnisköld, var gift med Ingrid Ylva, Dotter af Suno Sik, Konung Sverker den Äldres Son.

RICHISSA, förmåld med Erik Knutsson Konung i Sverige år 1210; Enka år 1216 och död år 1218.

BIRGER Jarl, Stamfader för dem af Folkungiska ätten, som blefvo Konungar i Sverige, Danmark och Norge; förmåld med Prinsessan Ingeborg, Konung ERIK Knutssons dotter.

INGEBORG, född vid pås år 1214; Stam-moder för Konungarna i Norden af Folkungiska ätten; förmåld med den emotsäende Birger Jarl af Bjälbo.



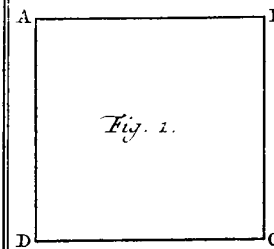


Fig. 1.

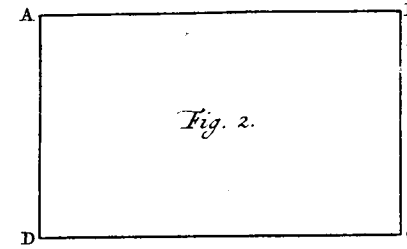


Fig. 2.

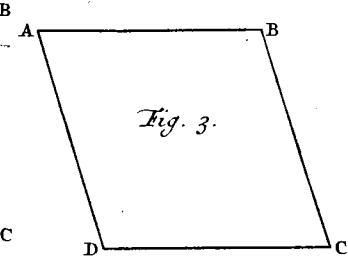


Fig. 3.

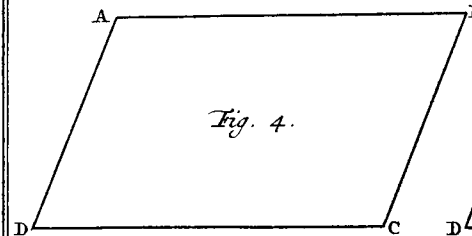


Fig. 4.

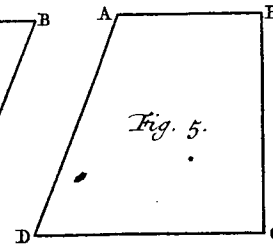


Fig. 5.

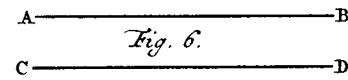


Fig. 6.

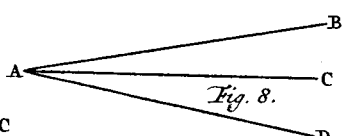


Fig. 8.

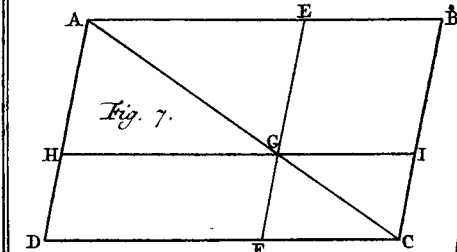


Fig. 7.

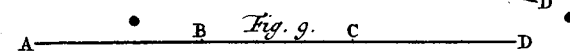


Fig. 9.

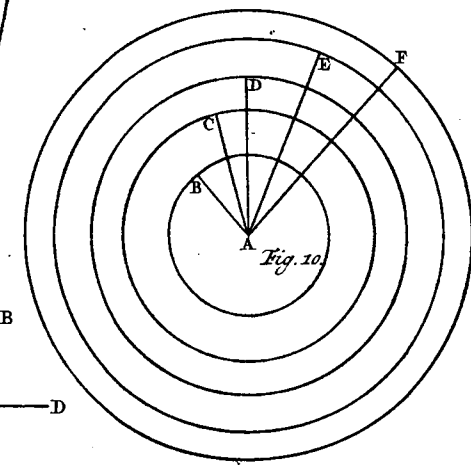


Fig. 10.

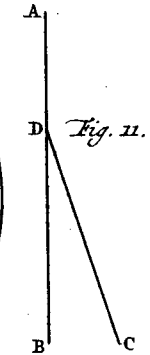


Fig. 11.

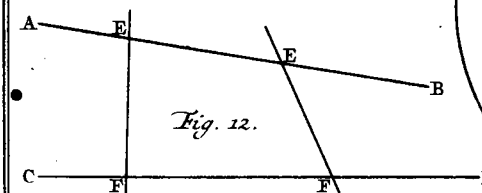


Fig. 12.

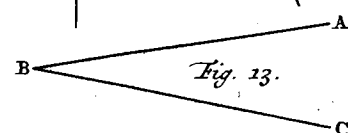


Fig. 13.

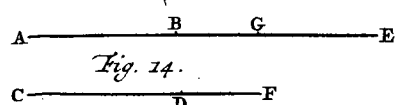


Fig. 14.

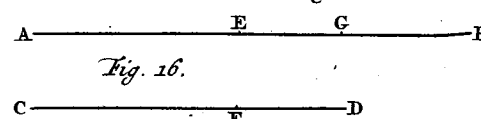


Fig. 16.

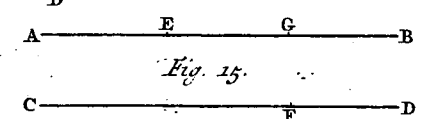
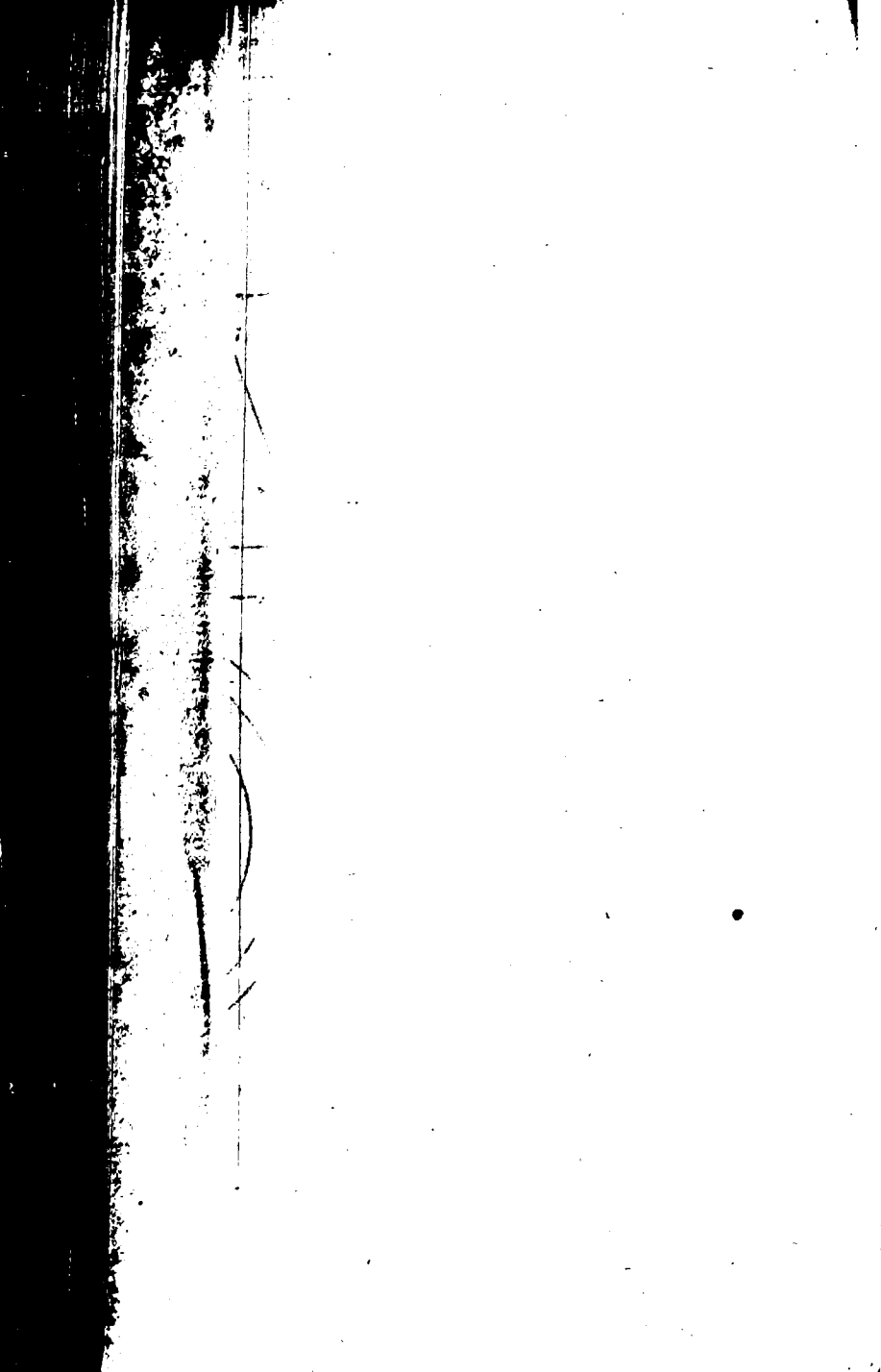


Fig. 15.



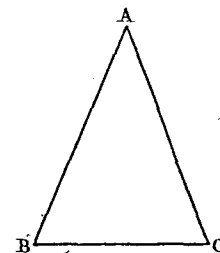
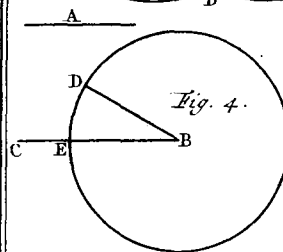
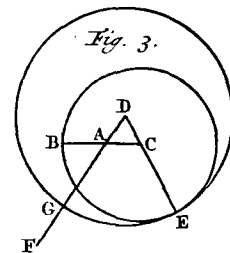
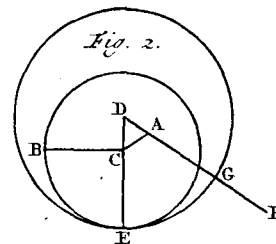
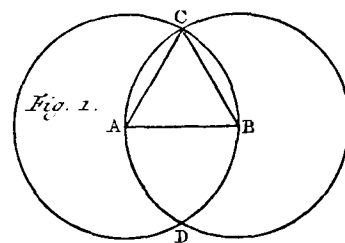


Fig. 5.

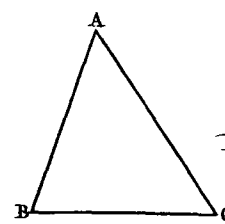
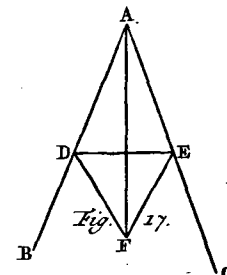
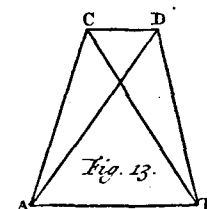
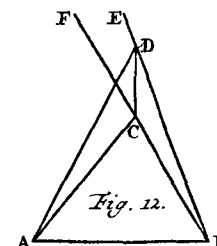
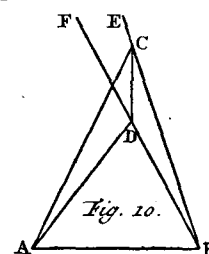
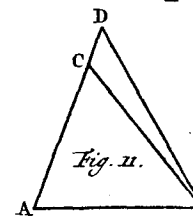
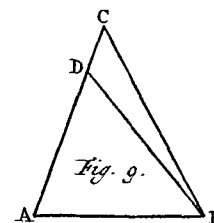
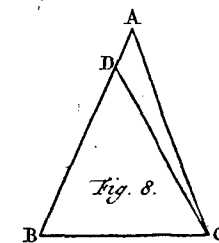
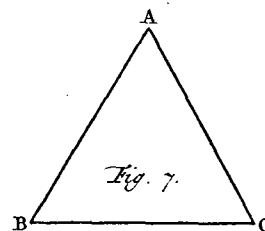
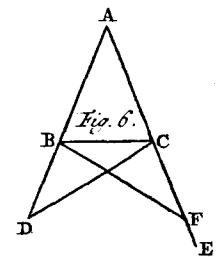
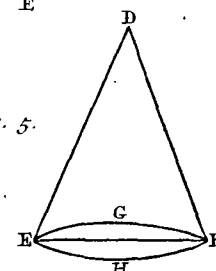
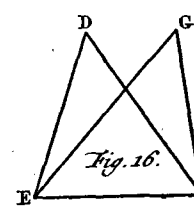
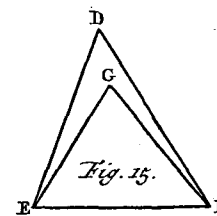
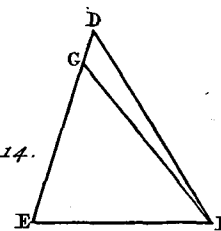
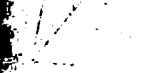
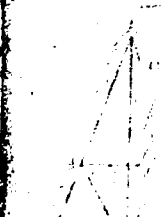
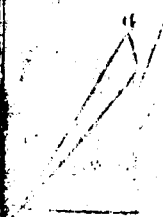


Fig. 14.





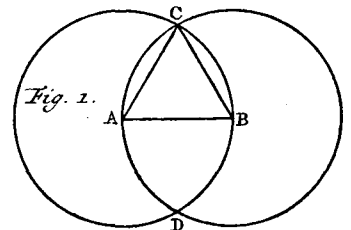


Fig. 1.

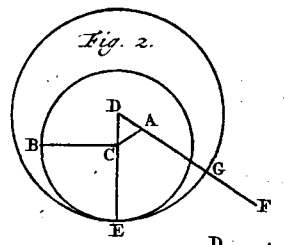


Fig. 2.

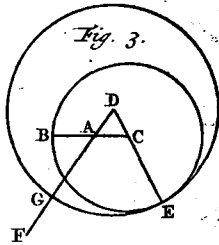


Fig. 3.

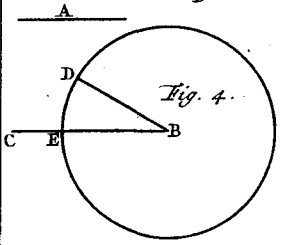


Fig. 4.

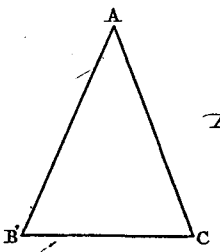


Fig. 5.

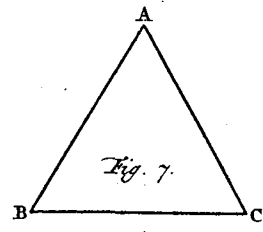
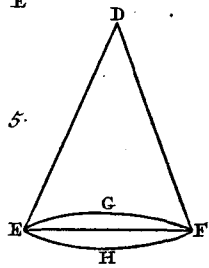


Fig. 7.

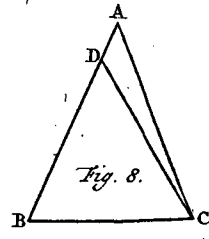


Fig. 8.

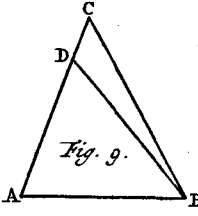


Fig. 9.

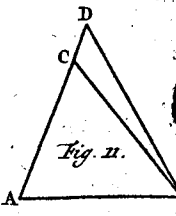


Fig. 11.

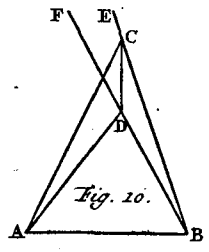


Fig. 10.

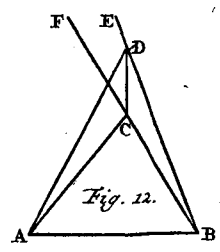


Fig. 12.

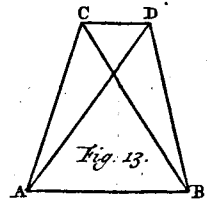


Fig. 13.

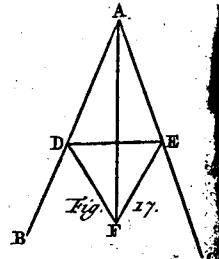


Fig. 14.

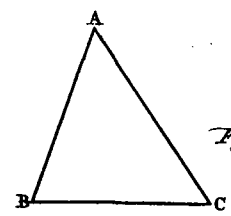


Fig. 15.

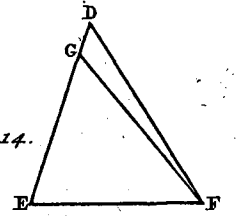


Fig. 16.

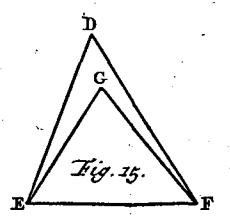


Fig. 17.

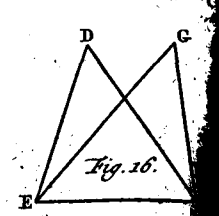
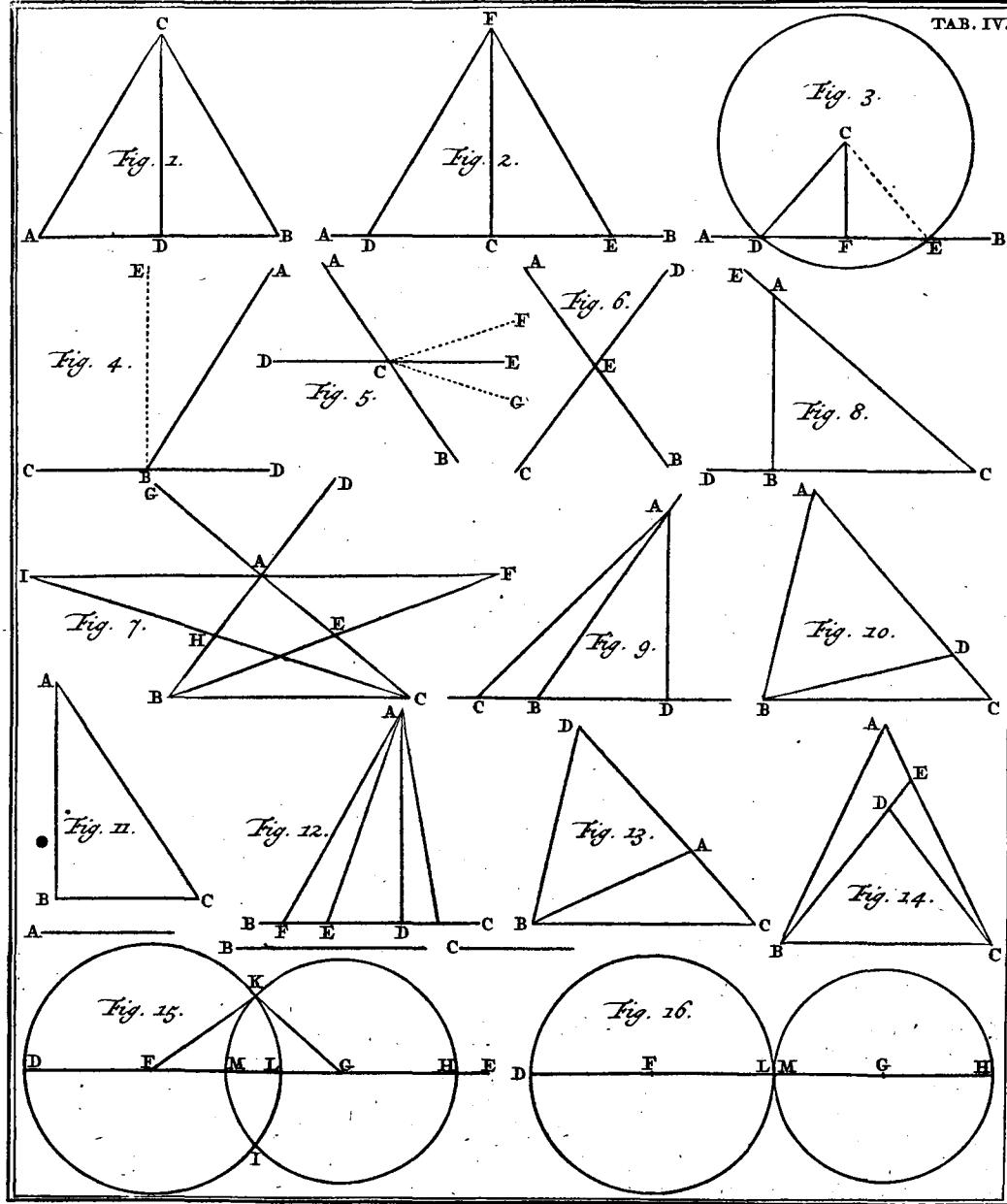
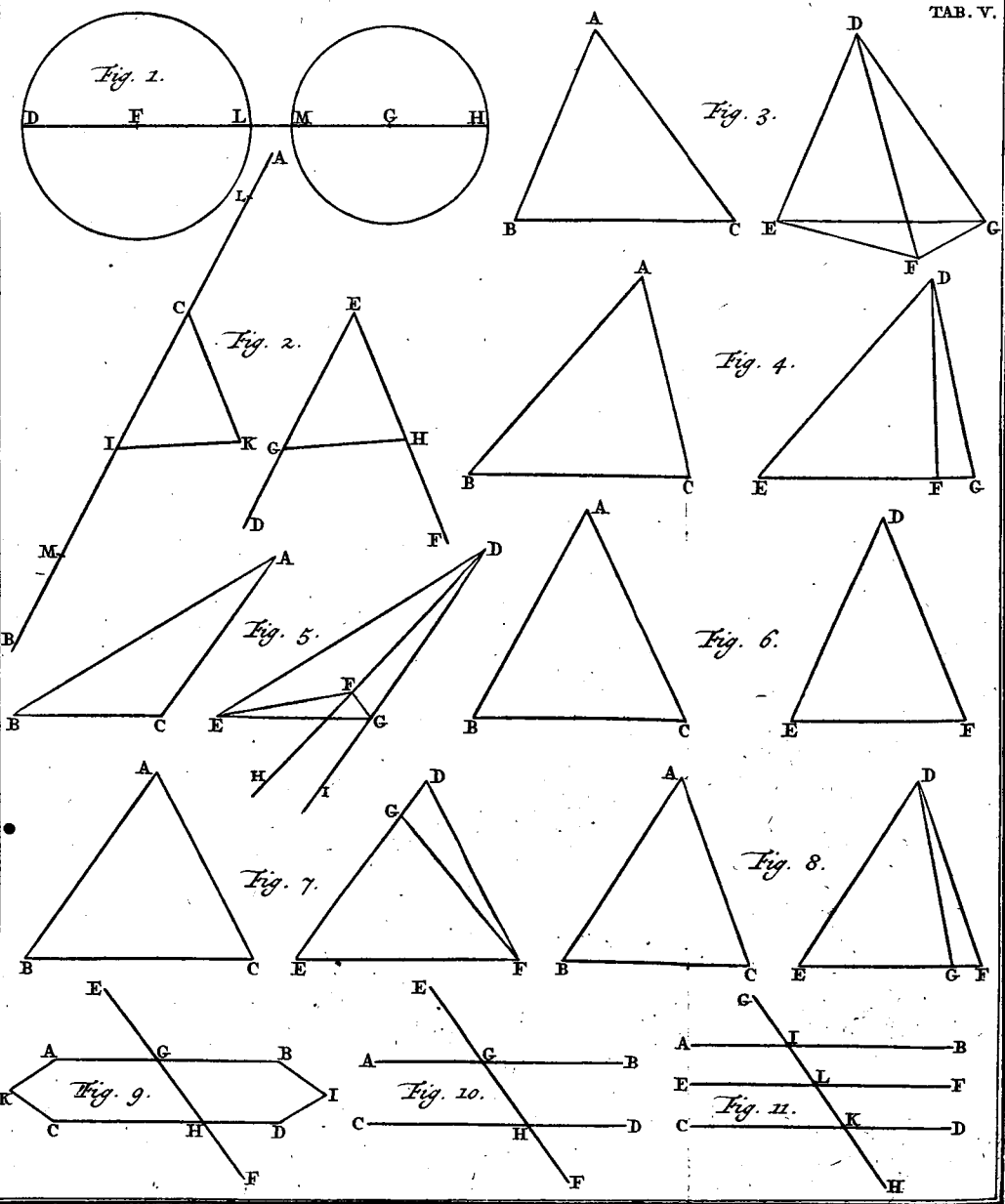
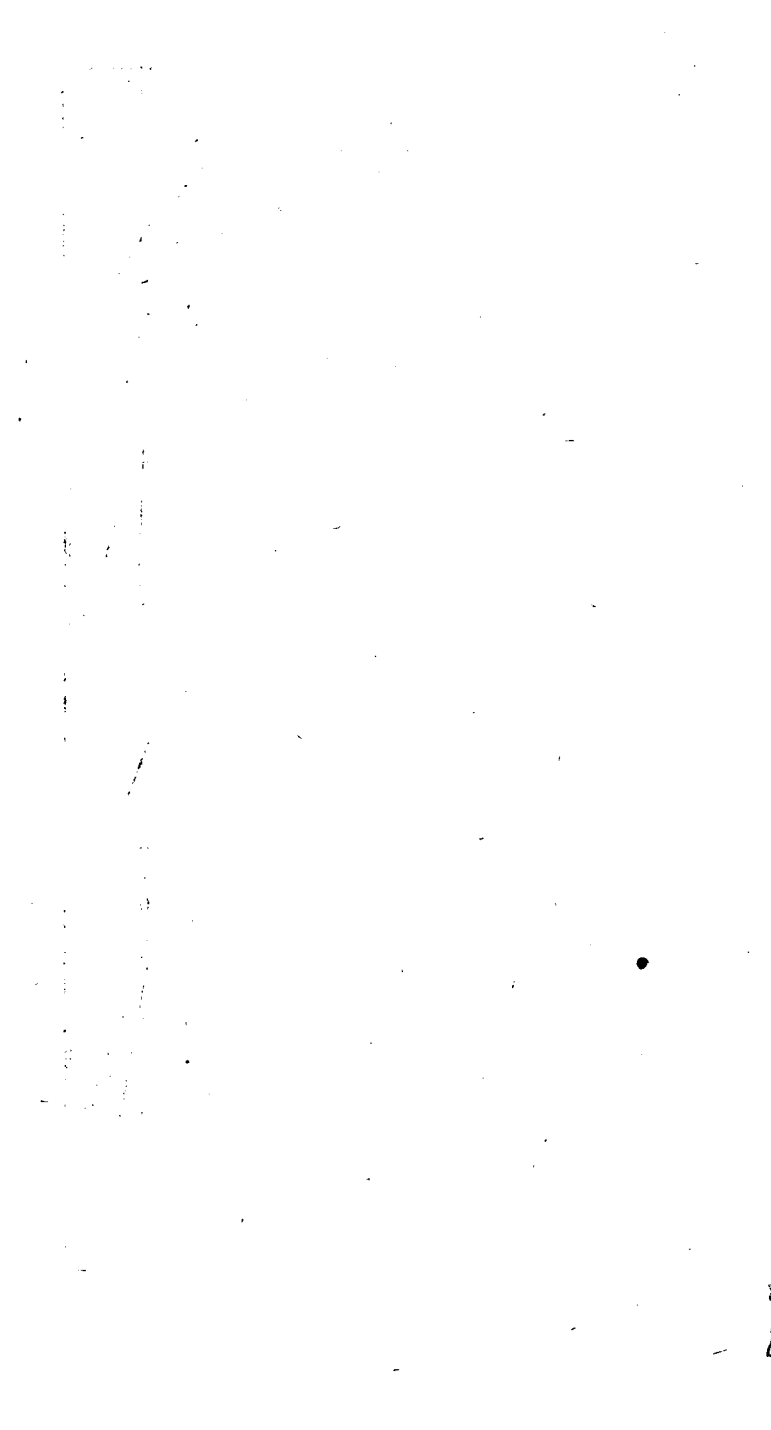


Fig. 18.







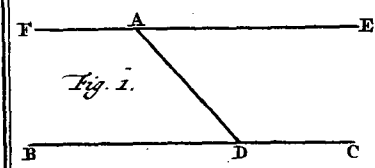


Fig. 1.

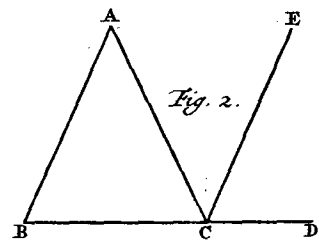


Fig. 2.

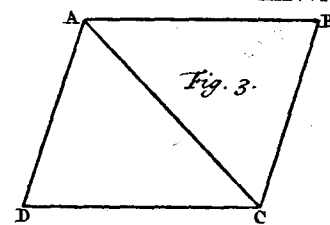


Fig. 3.

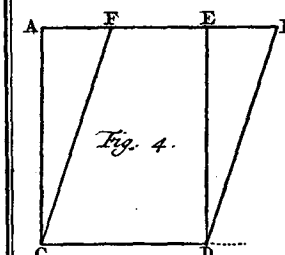


Fig. 4.

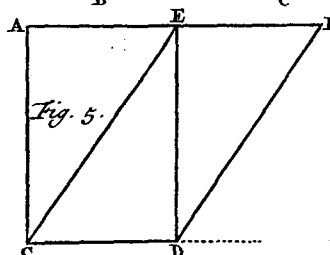


Fig. 5.

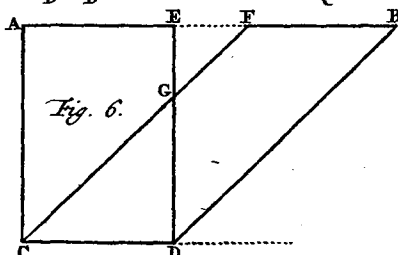


Fig. 6.

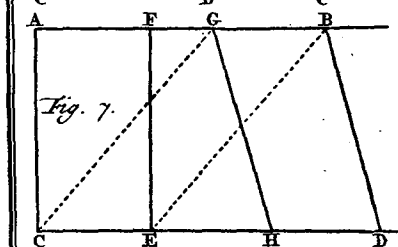


Fig. 7.

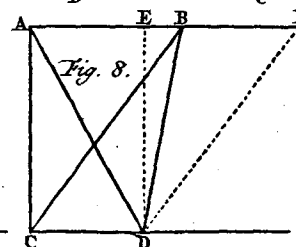


Fig. 8.

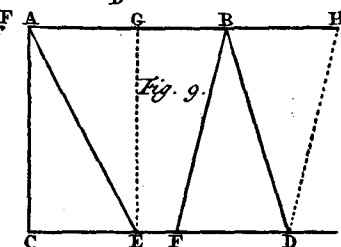


Fig. 9.

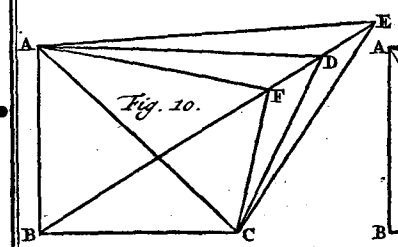


Fig. 10.

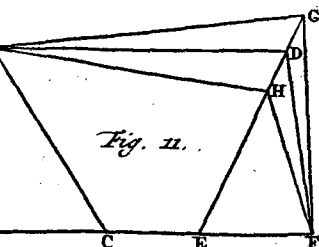


Fig. 11.

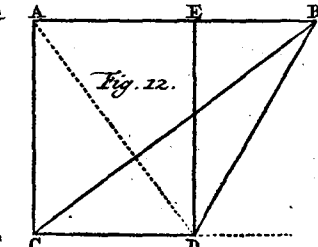


Fig. 12.

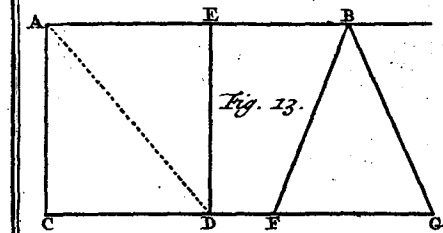


Fig. 13.

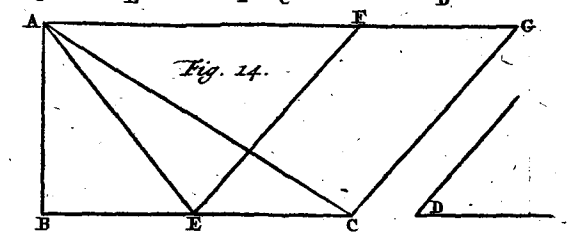
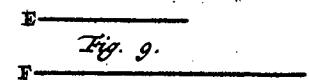
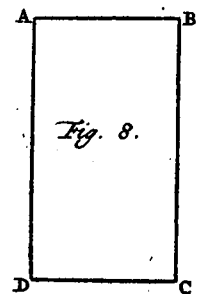
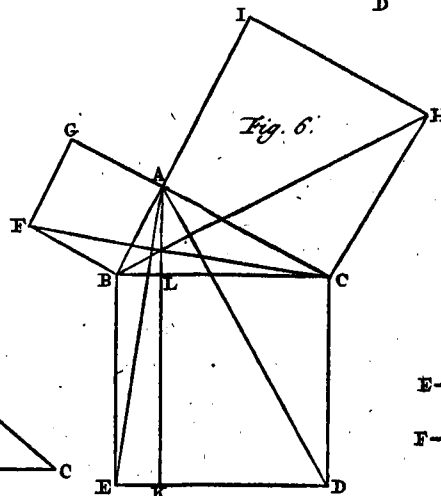
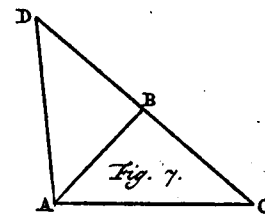
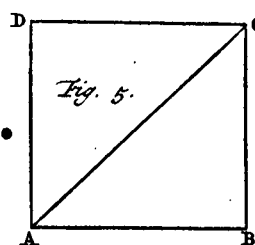
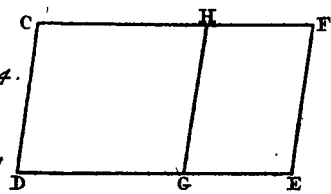
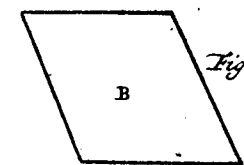
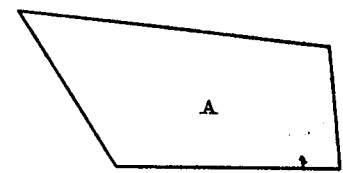
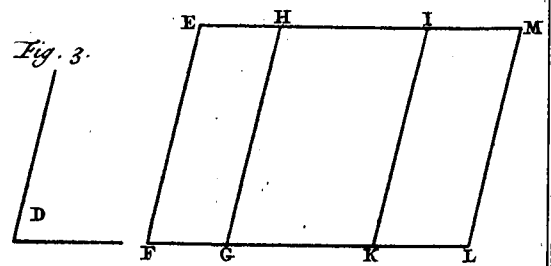
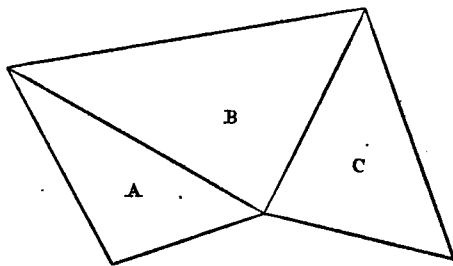
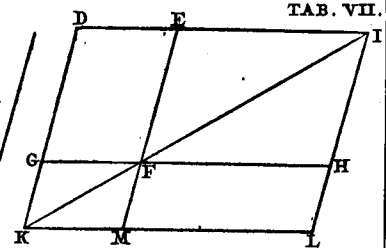
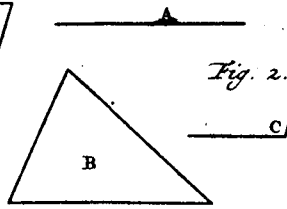
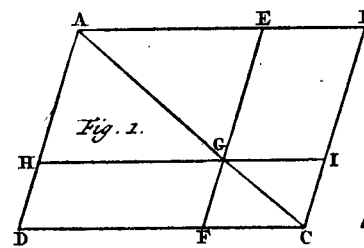
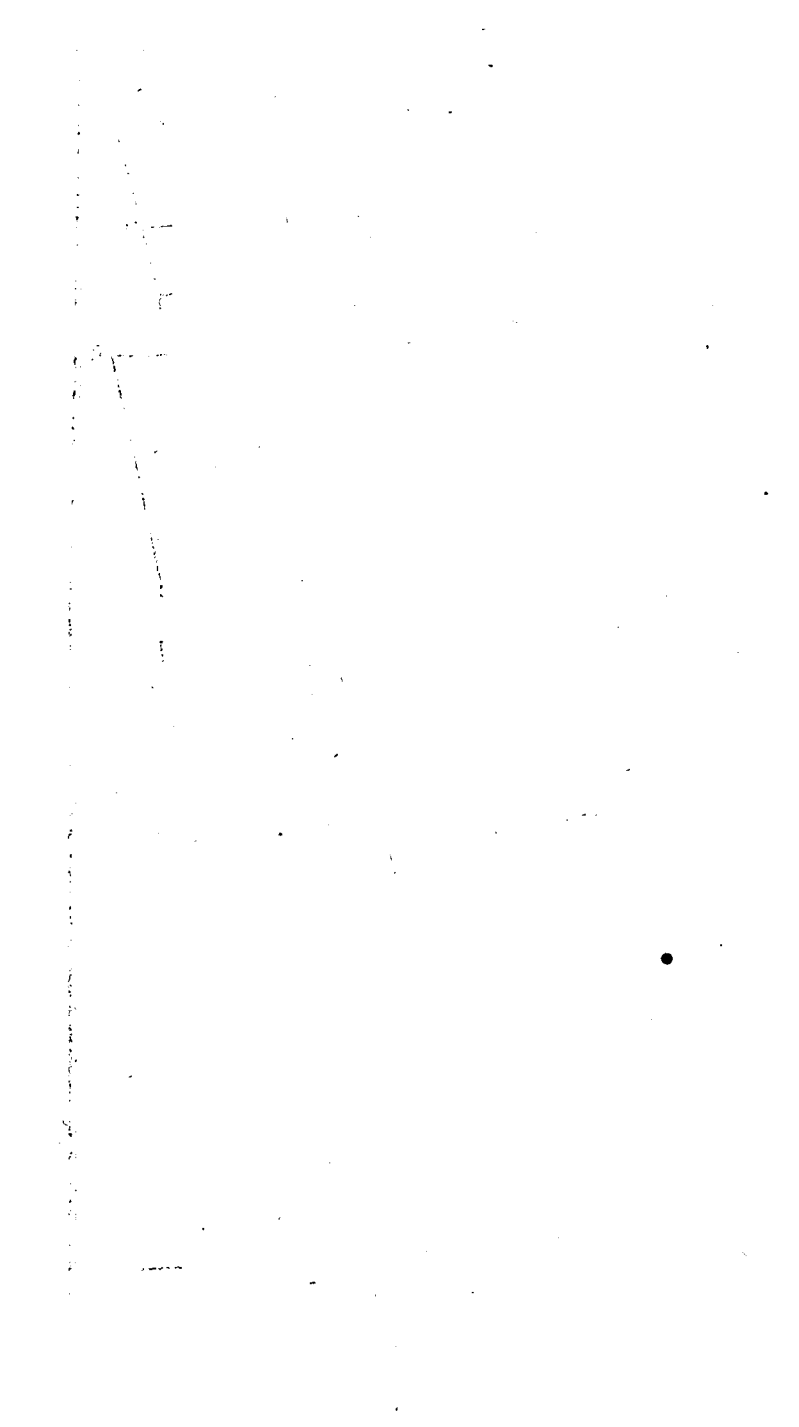
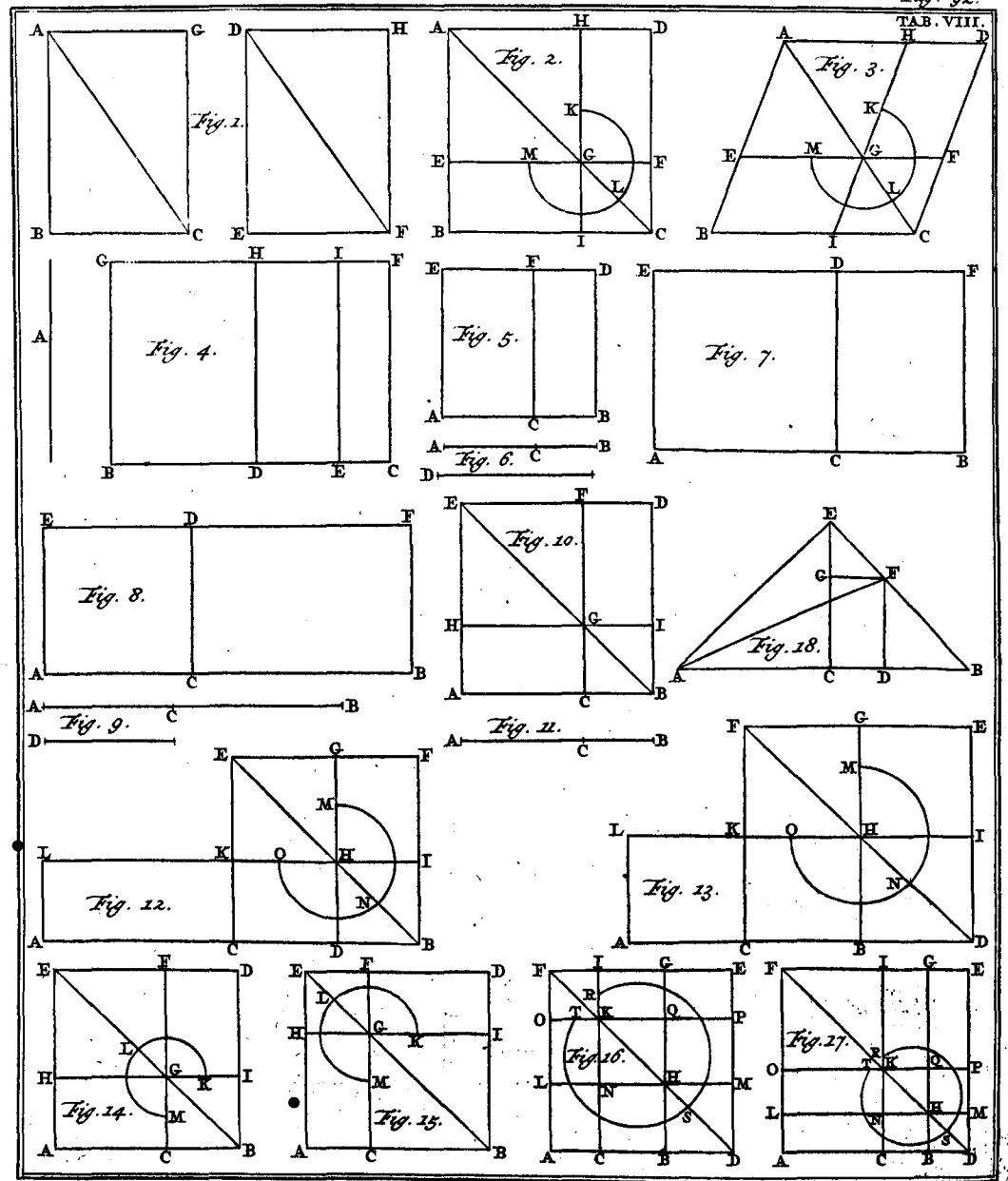
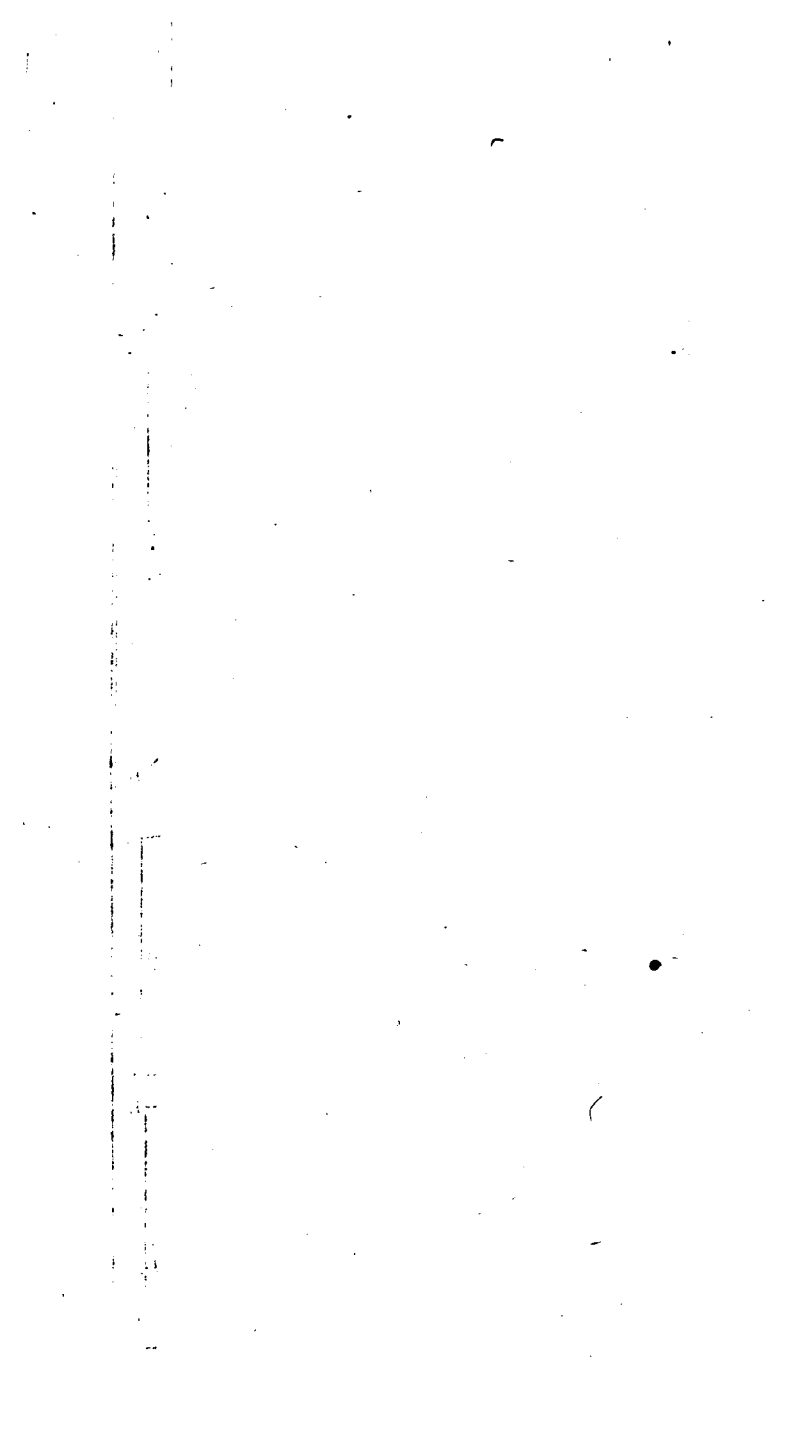


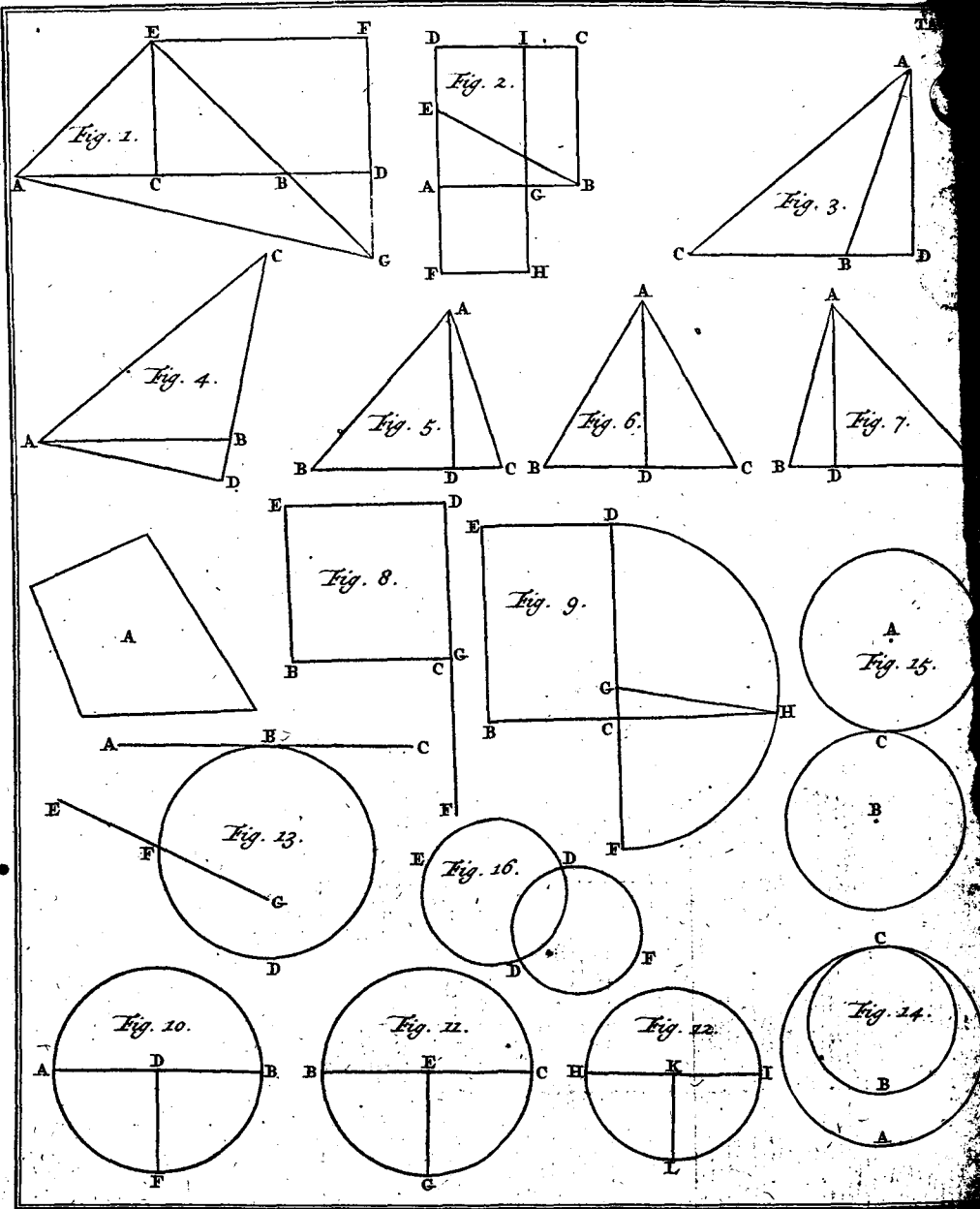
Fig. 14.

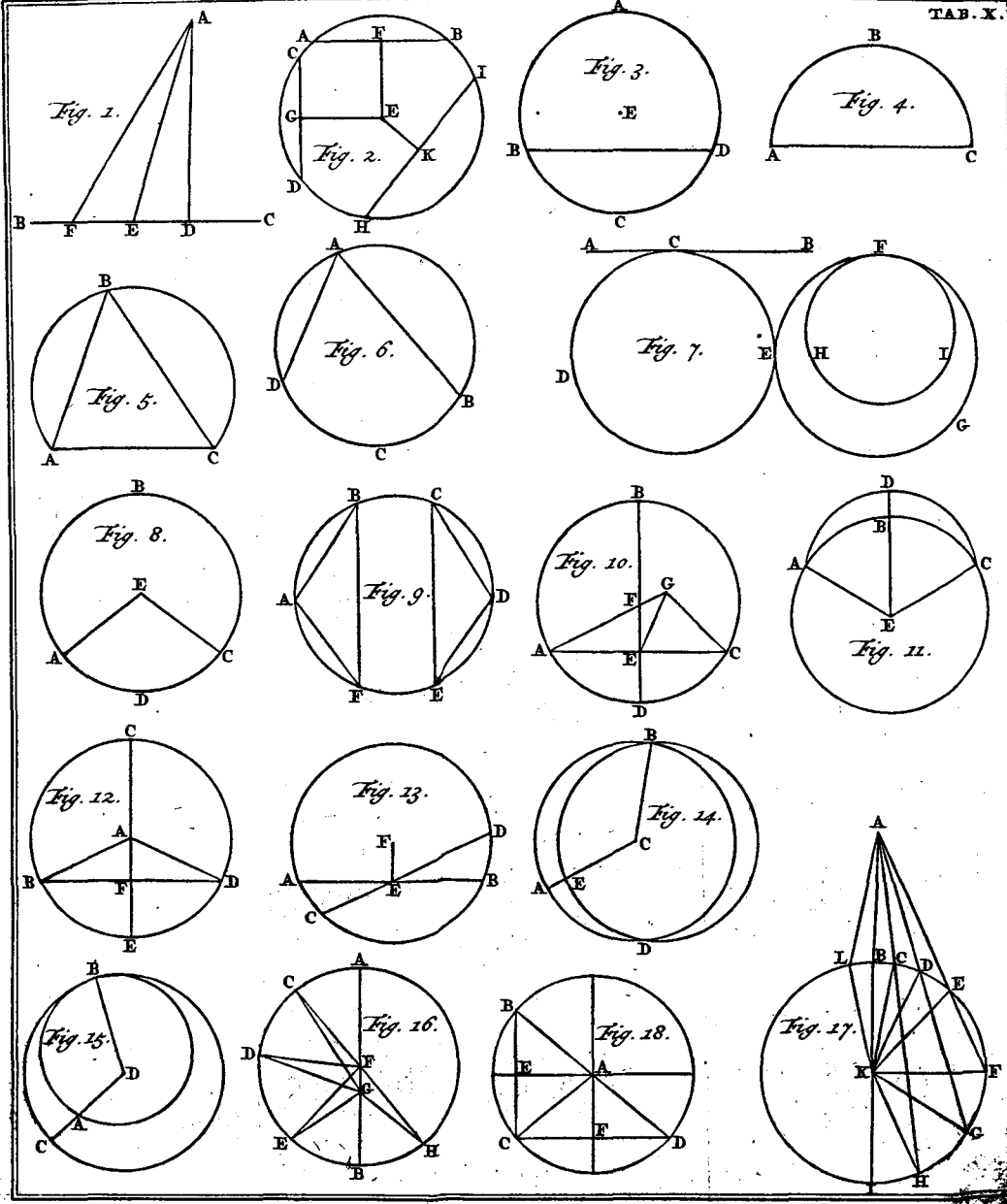


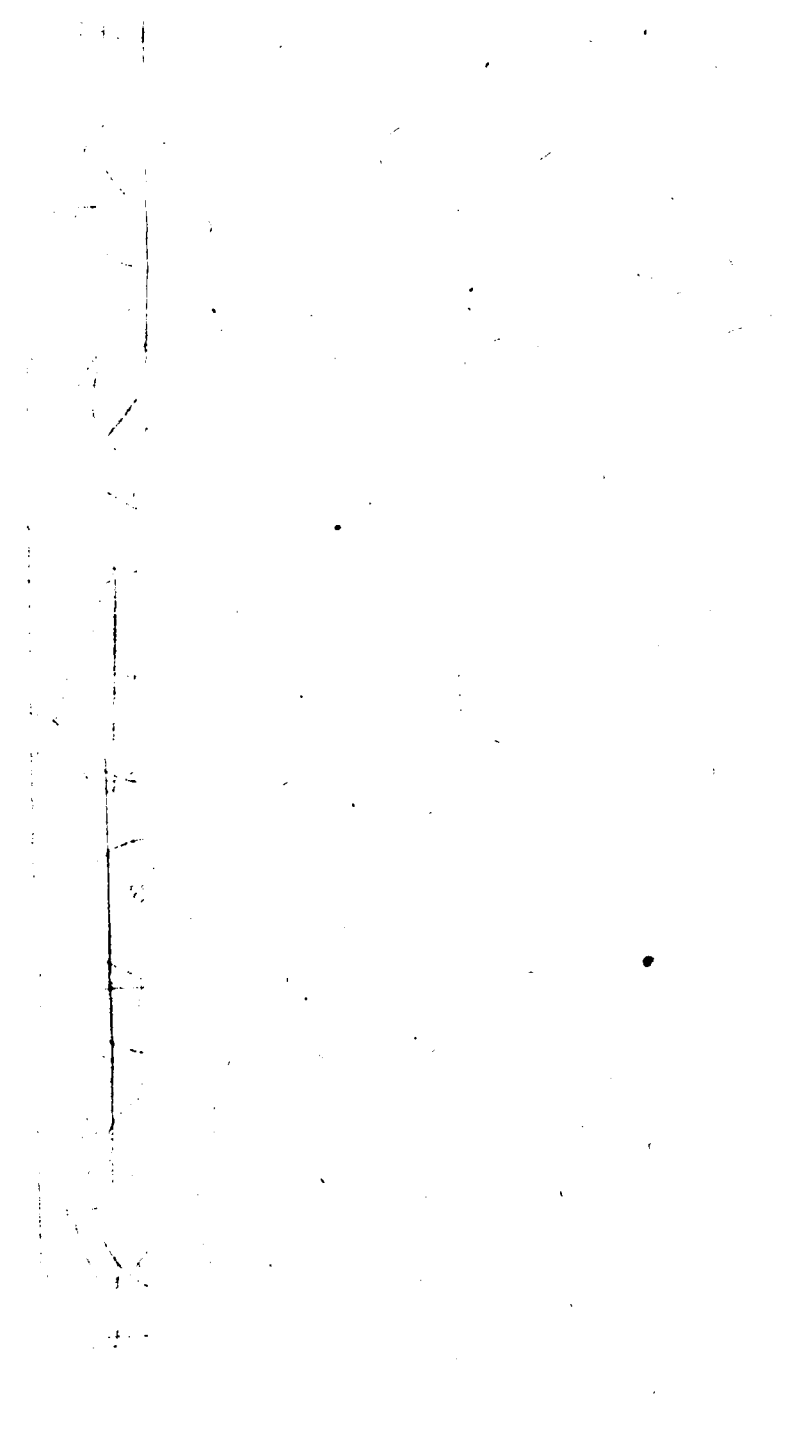


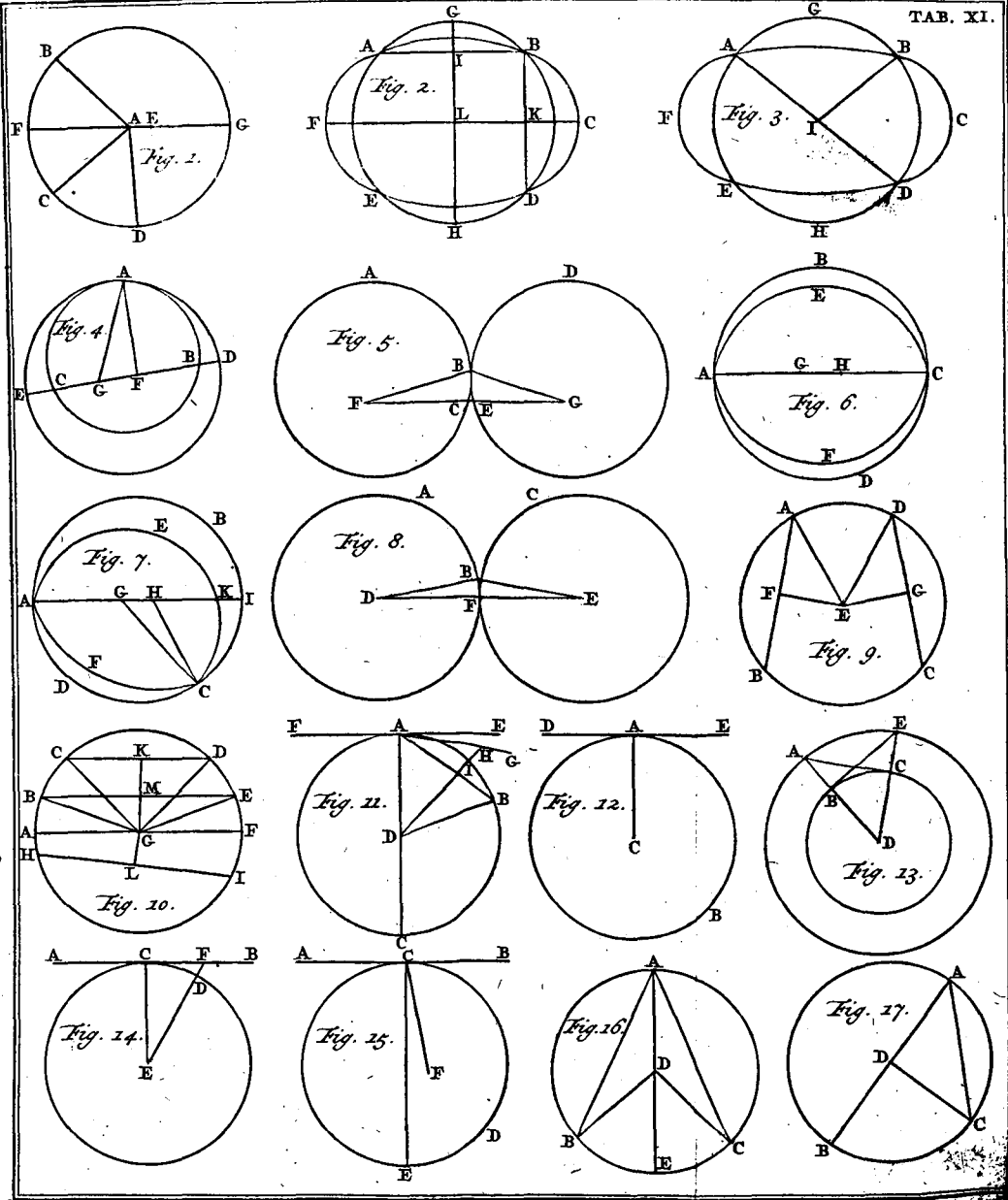


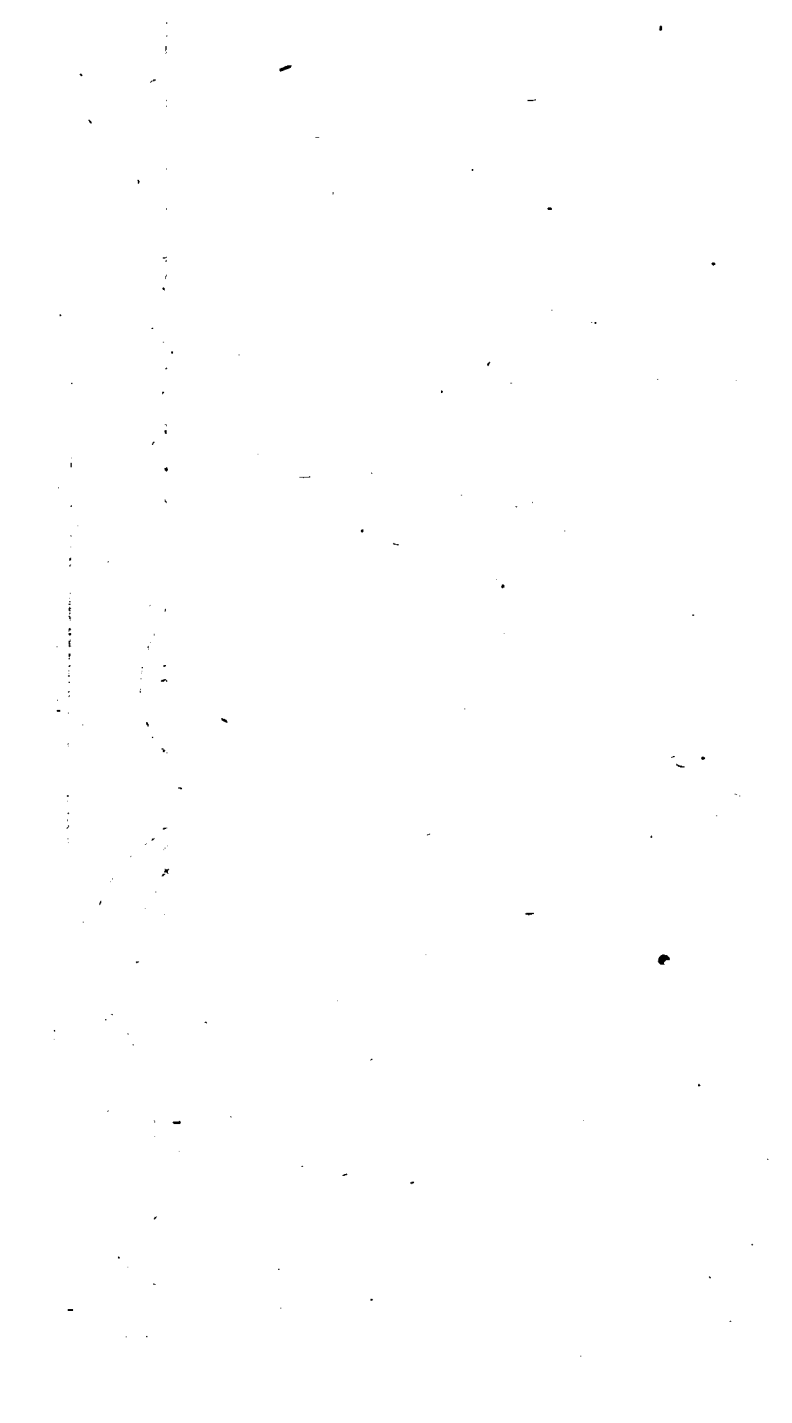


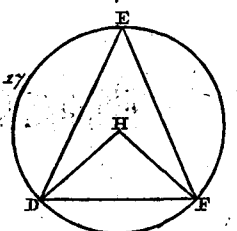
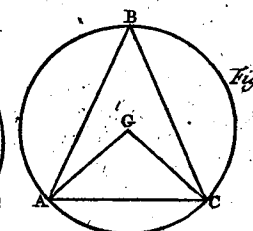
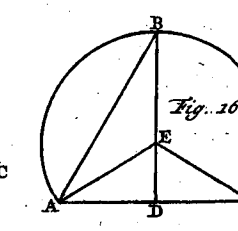
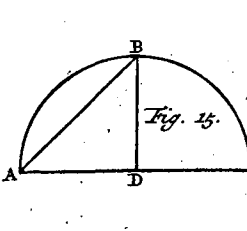
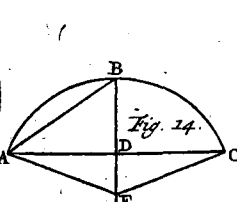
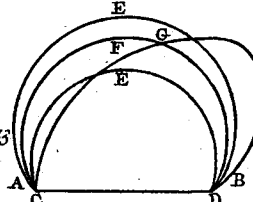
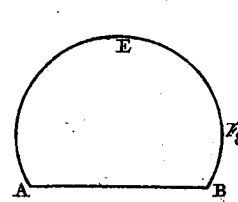
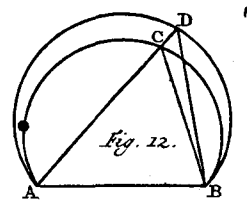
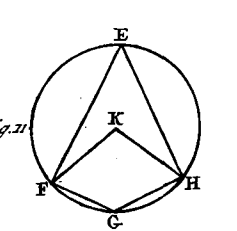
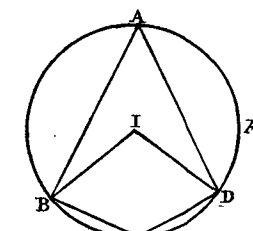
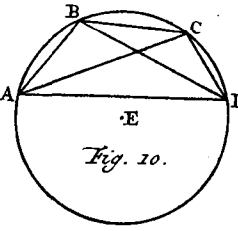
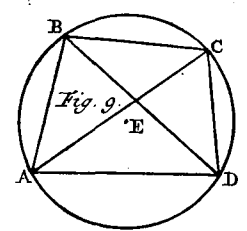
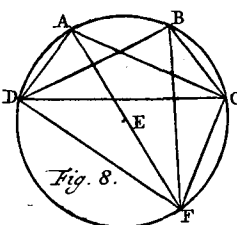
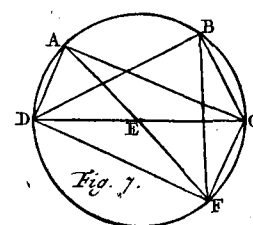
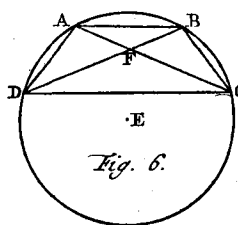
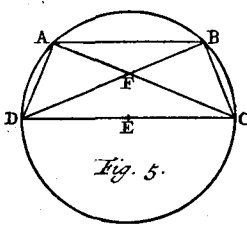
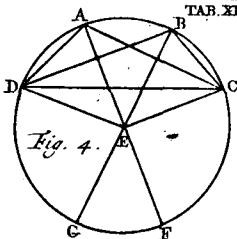
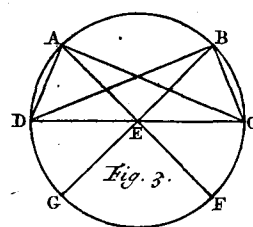
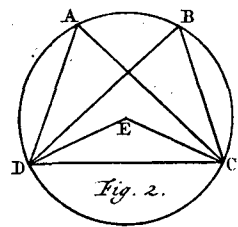
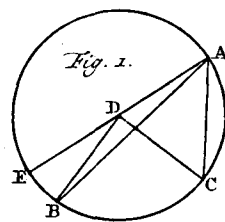


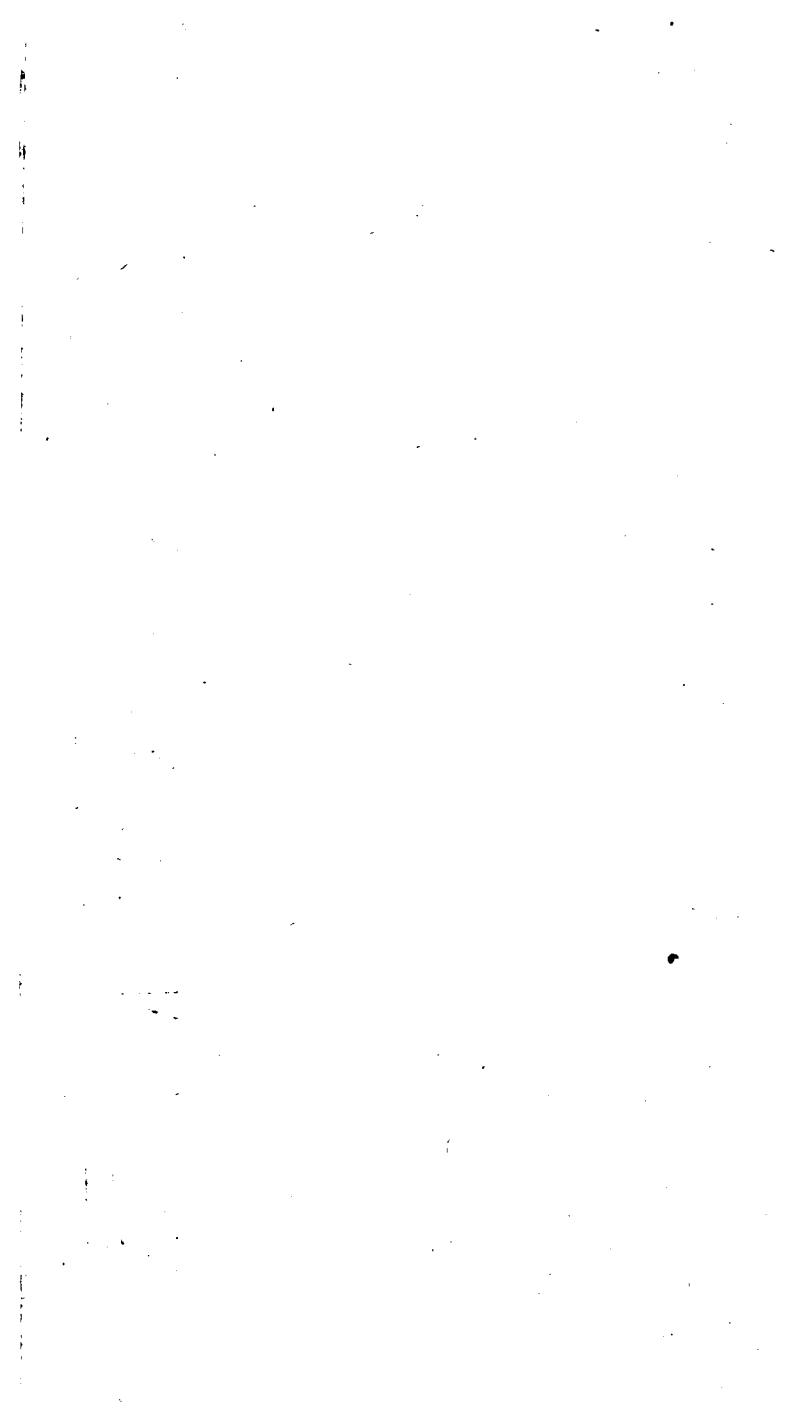


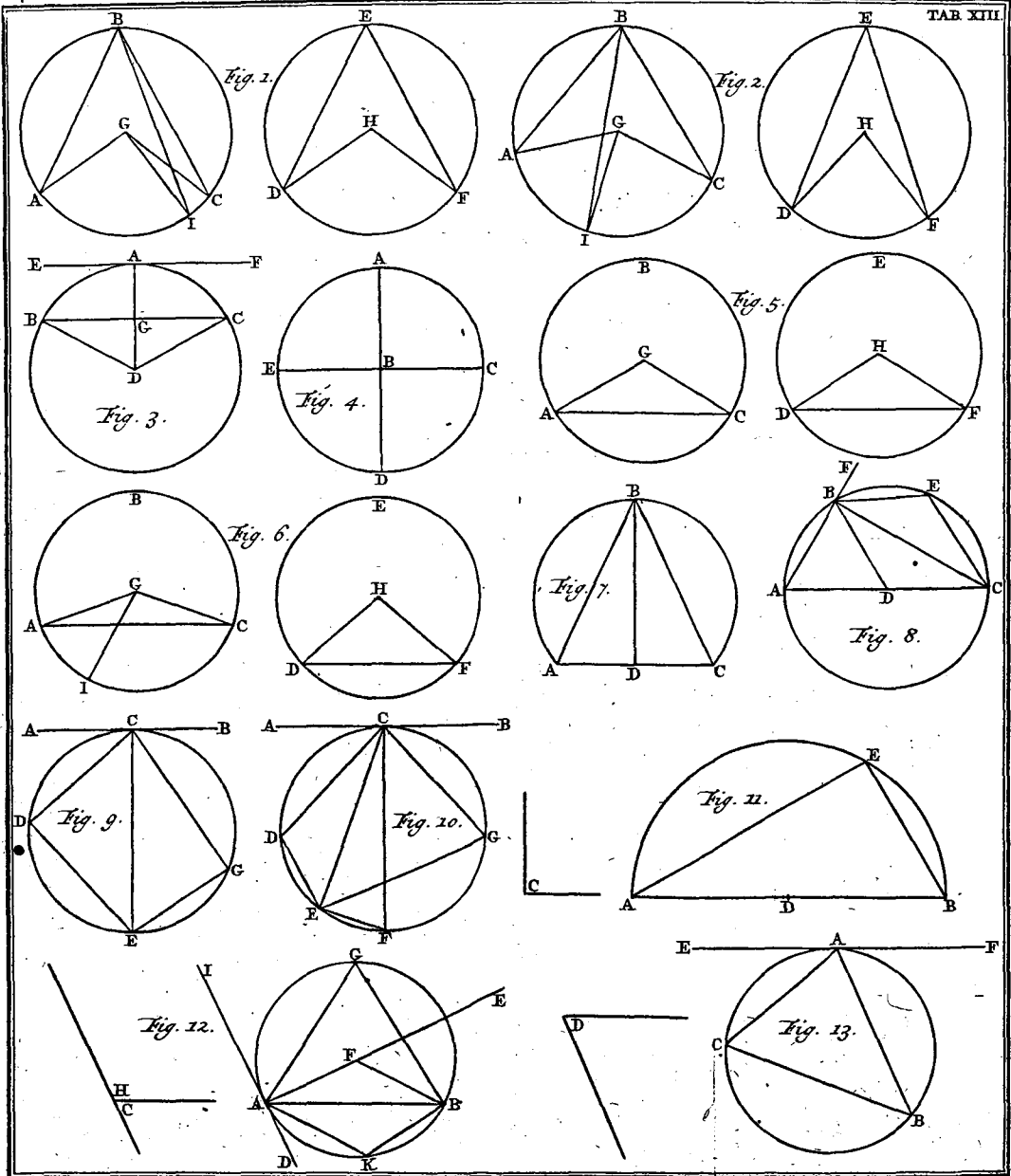




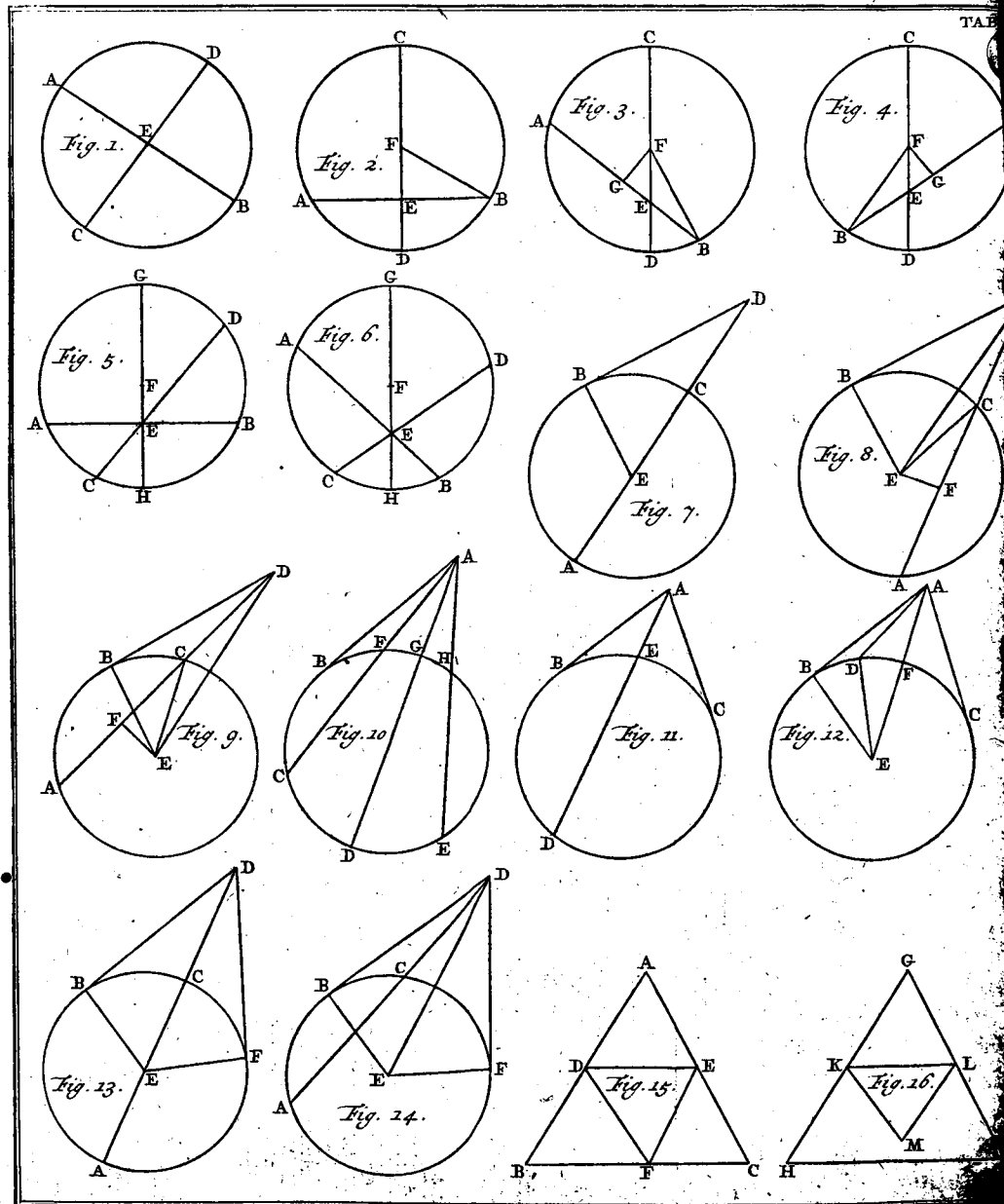


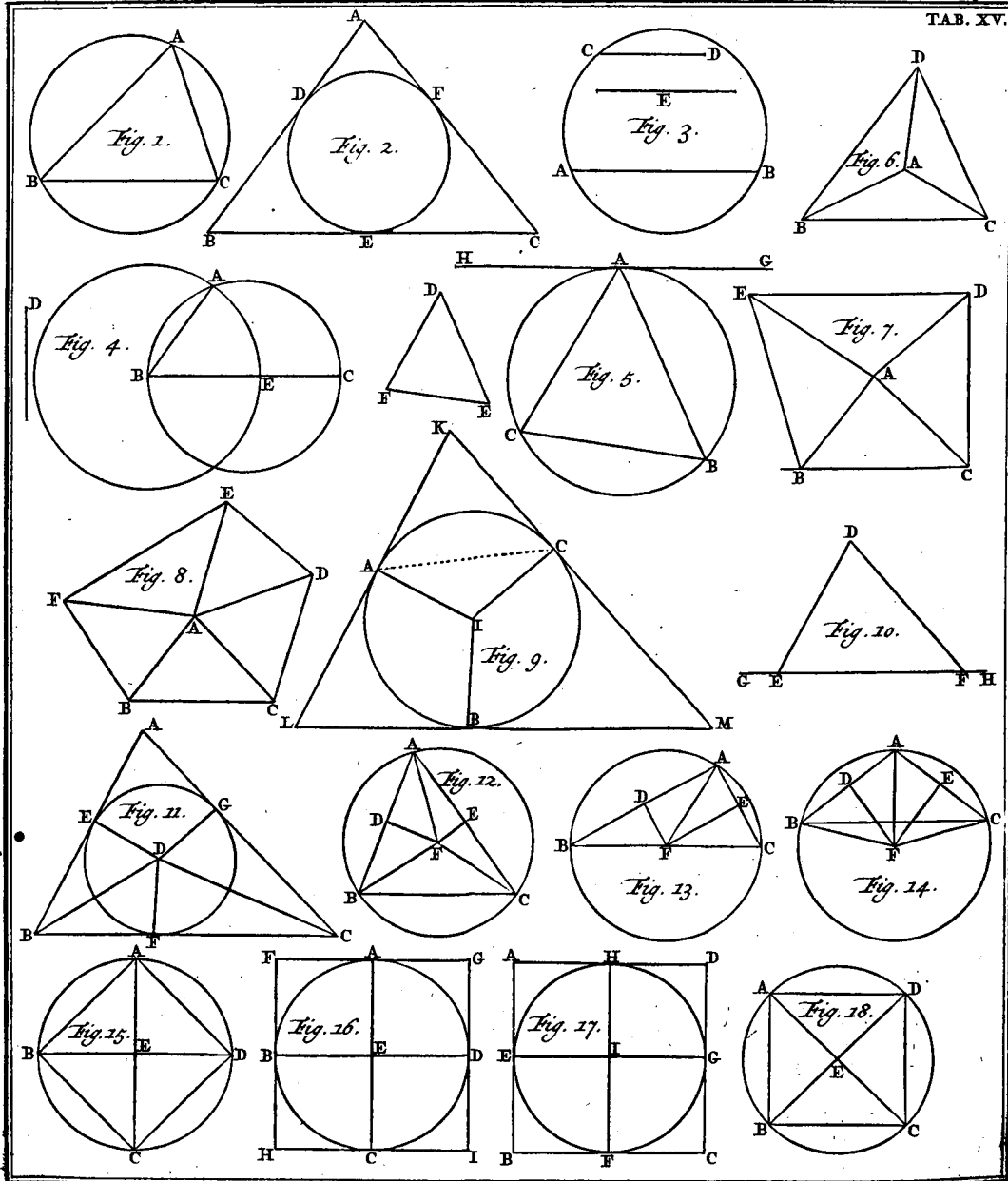


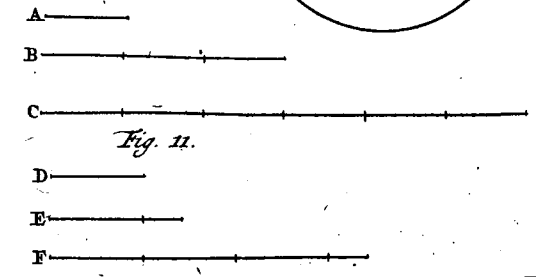
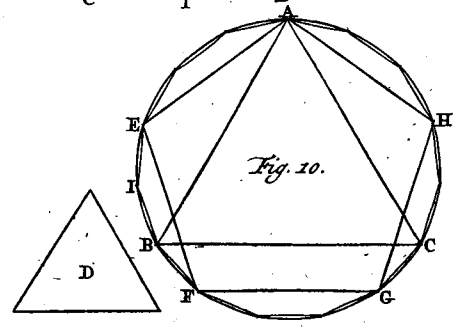
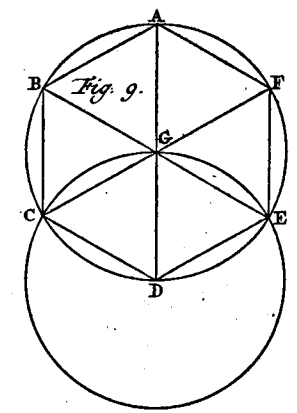
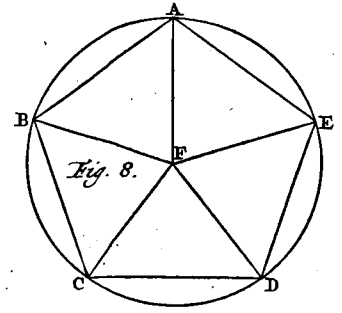
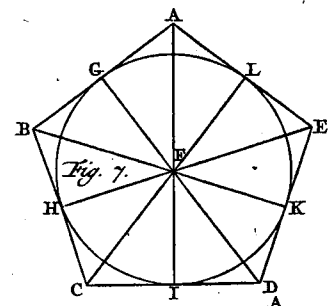
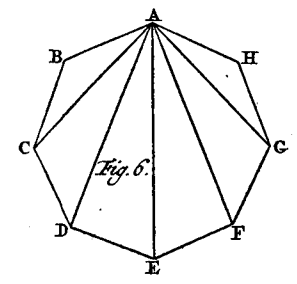
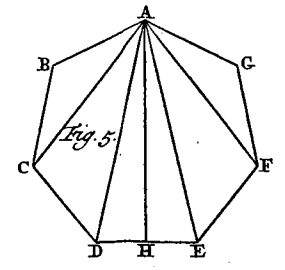
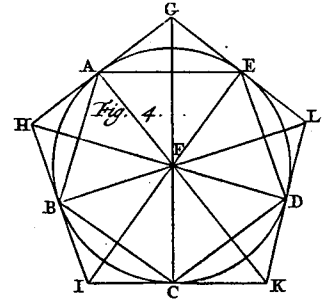
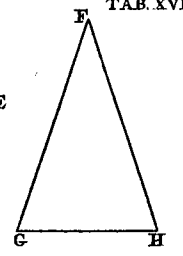
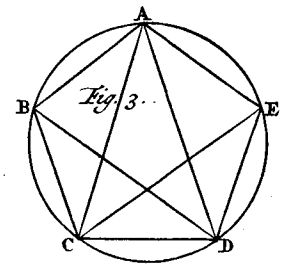
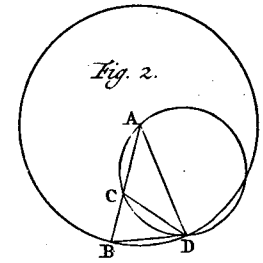
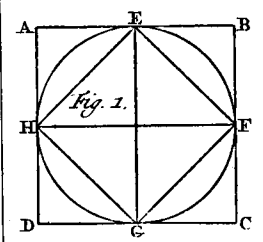












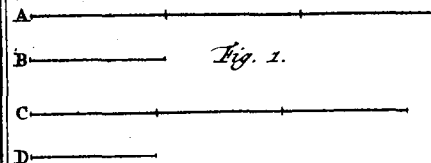


Fig. 1.

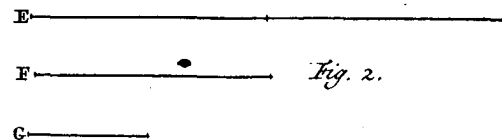


Fig. 2.



Fig. 3.

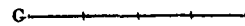
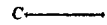


Fig. 4.

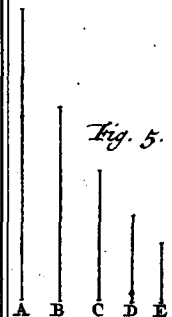


Fig. 5.

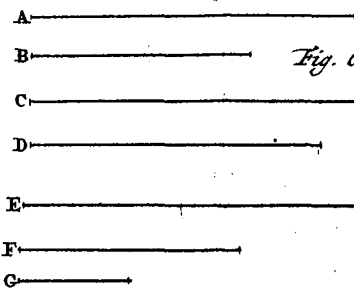


Fig. 6.

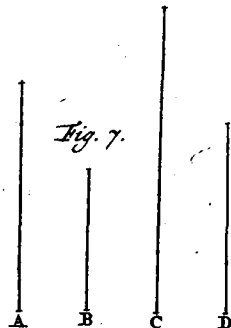


Fig. 7.

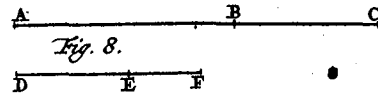


Fig. 8.

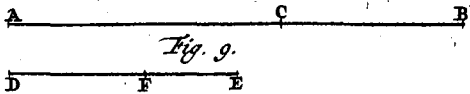


Fig. 9.

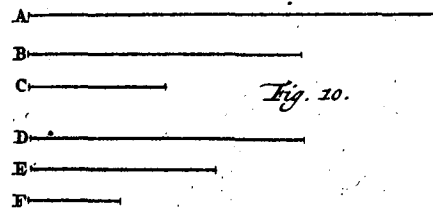


Fig. 10.

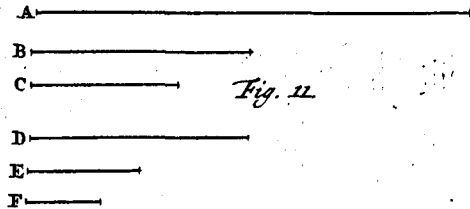
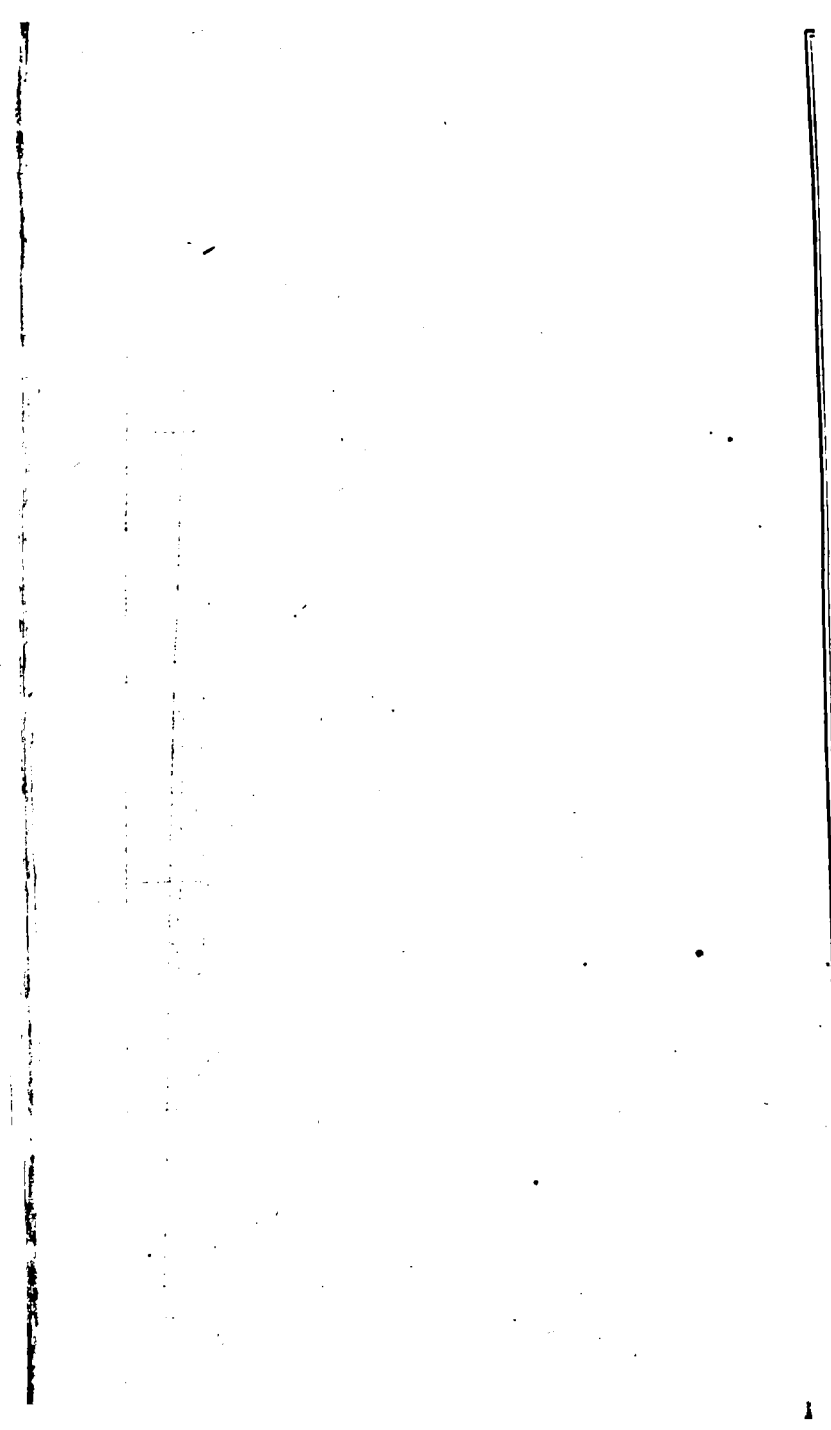
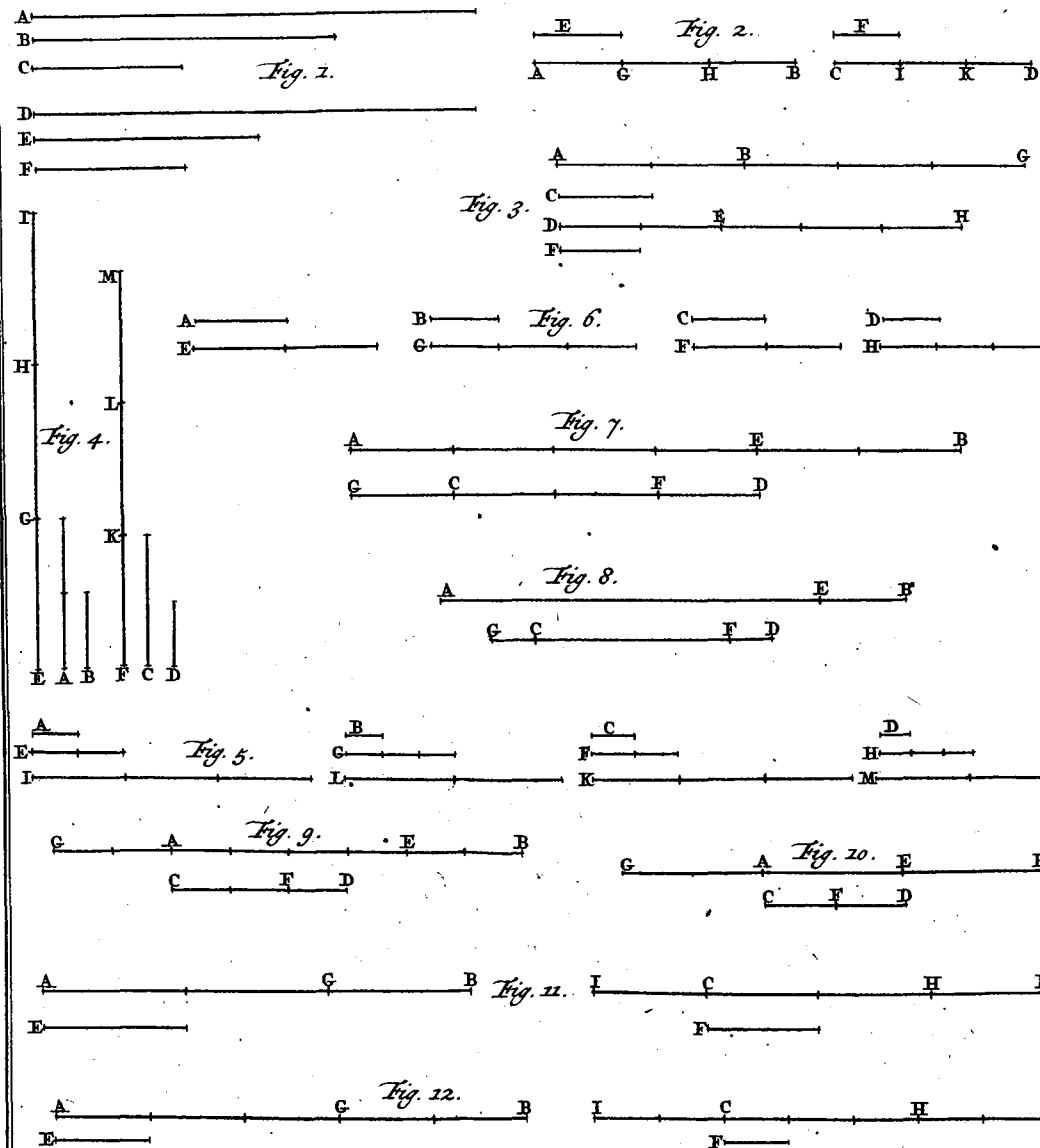
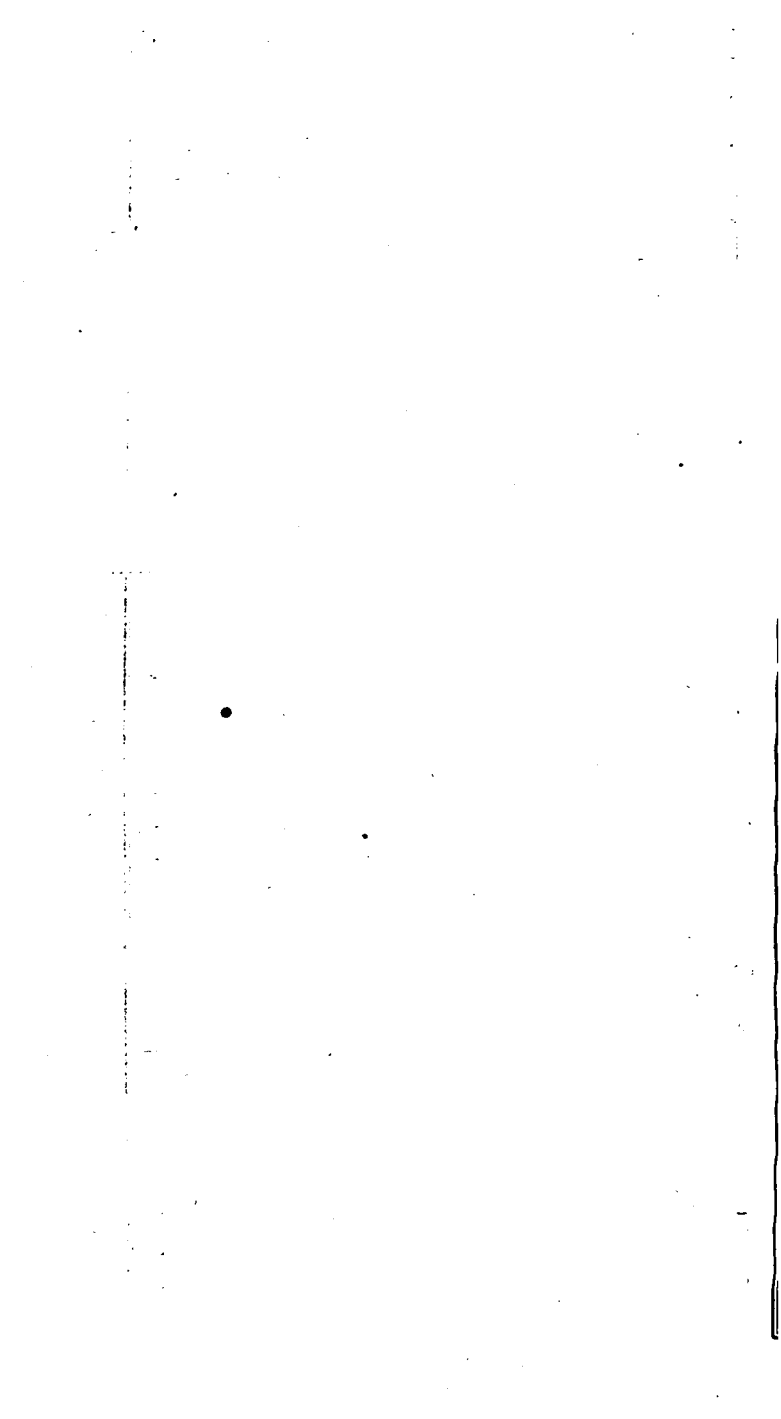
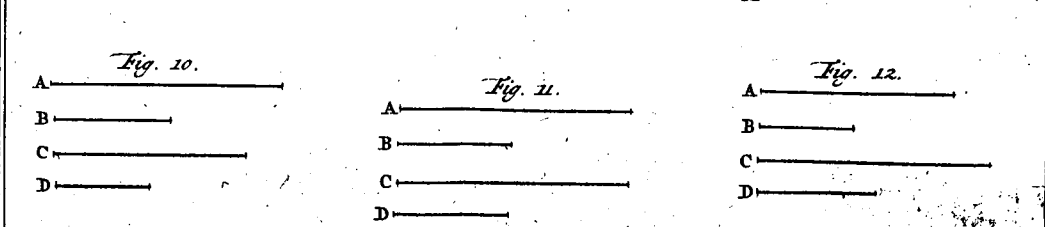
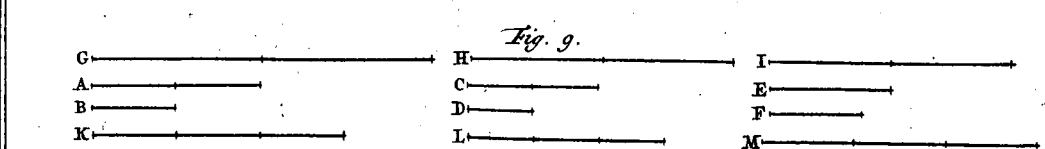
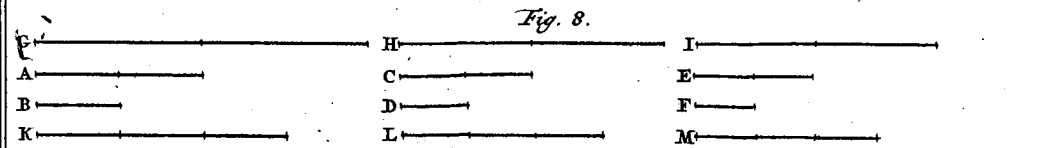
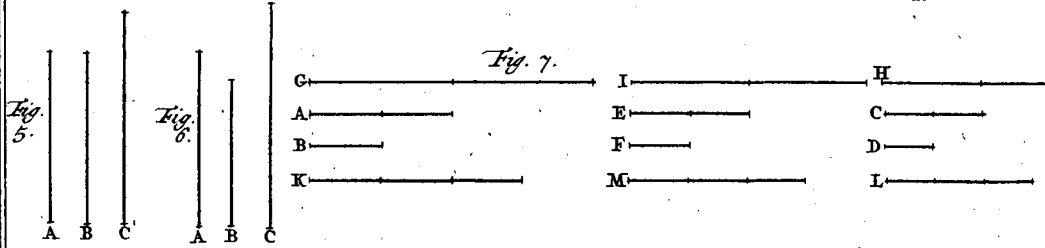
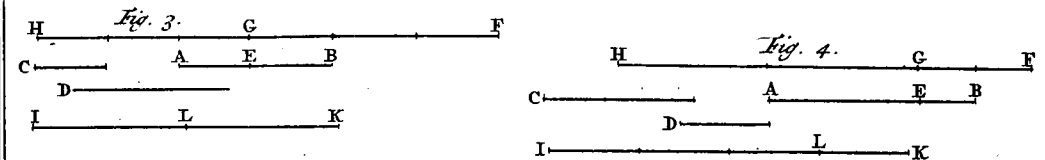
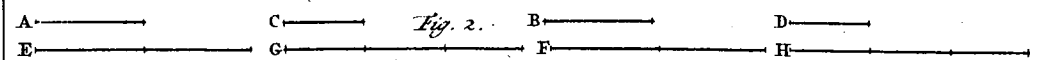
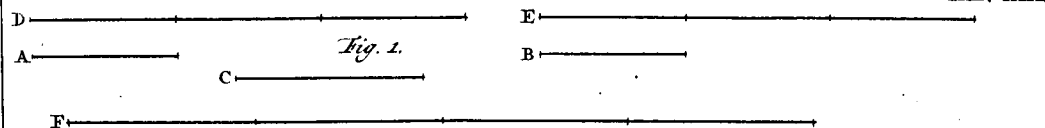


Fig. 11.









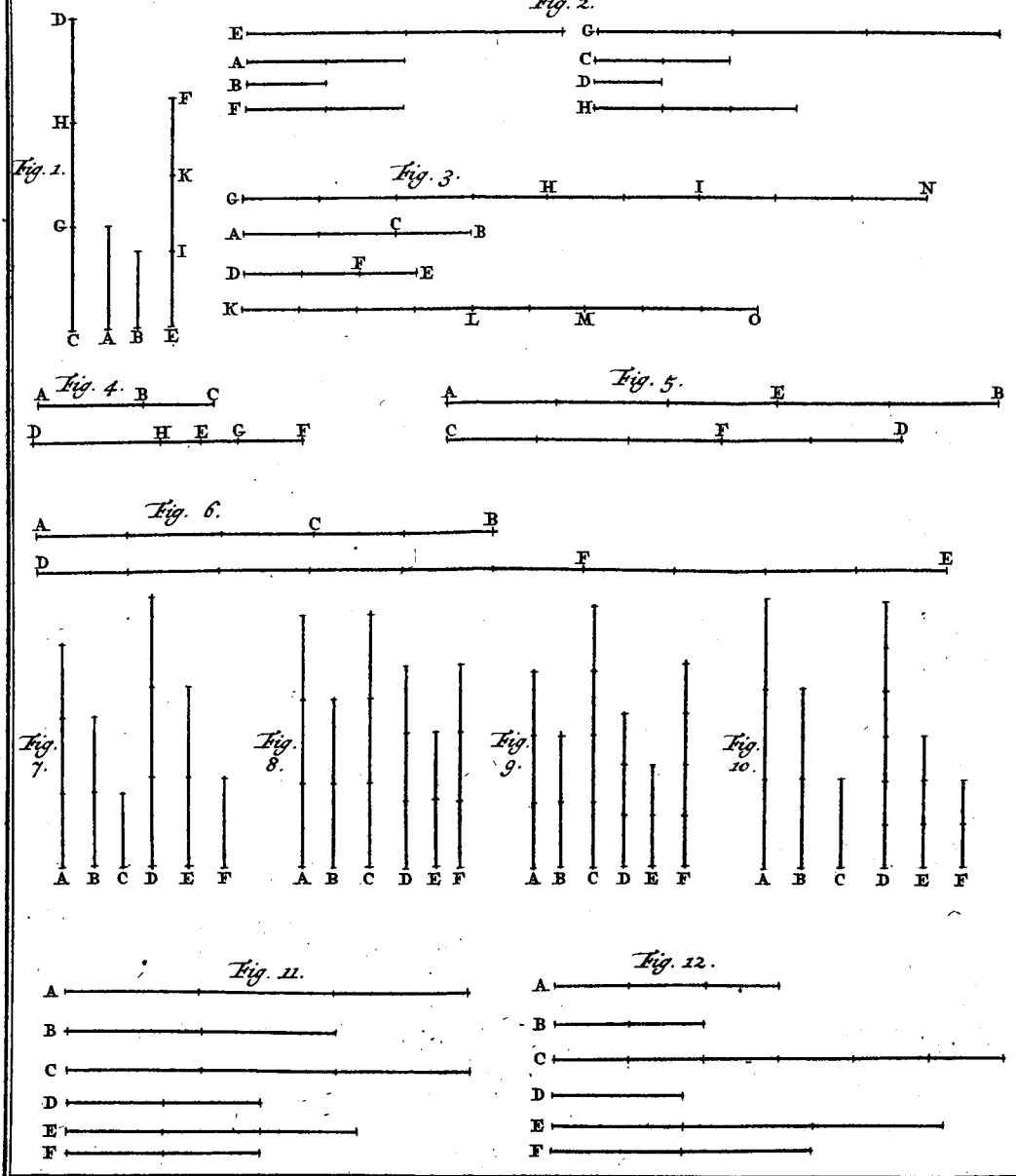


Fig. 1.

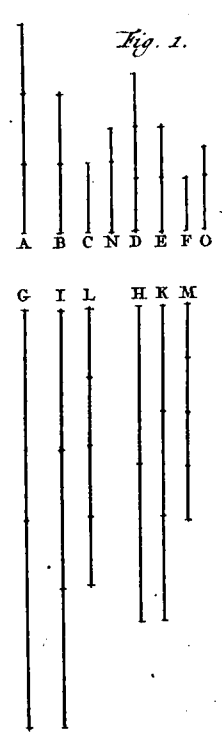


Fig. 2.

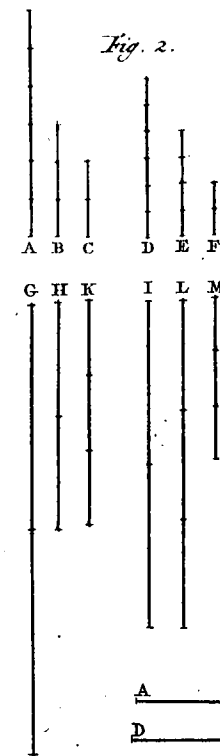


Fig. 3.

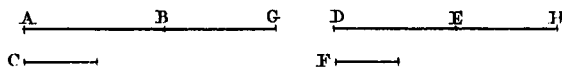


Fig. 4.

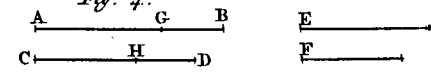


Fig. 5.

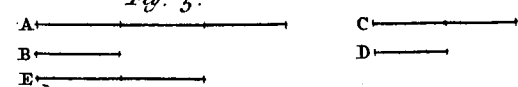


Fig. 6.

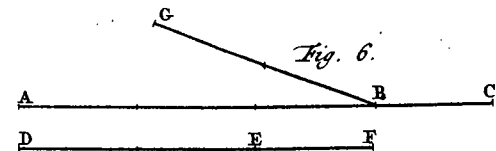


Fig. 7.

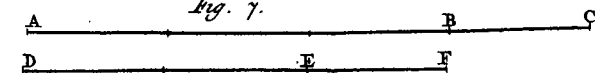


Fig. 8.

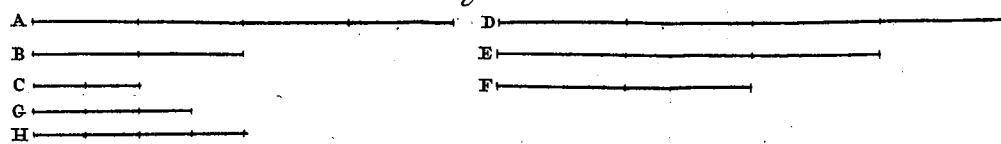
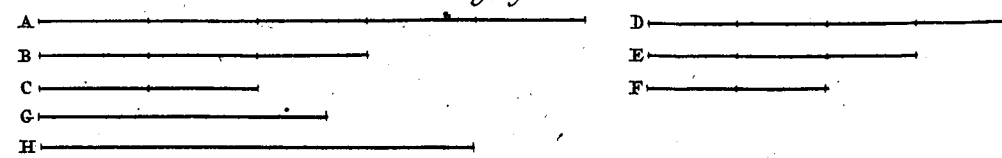
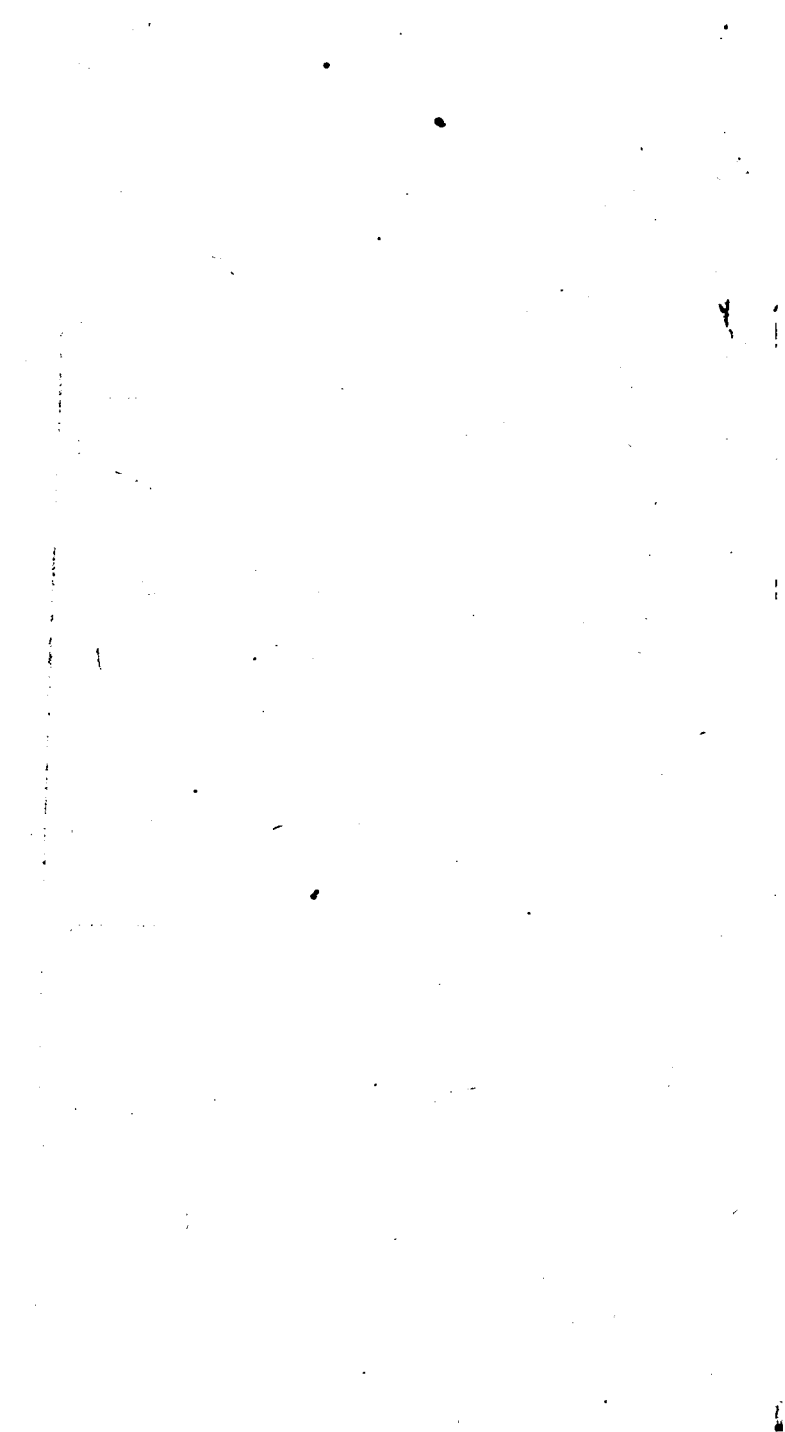
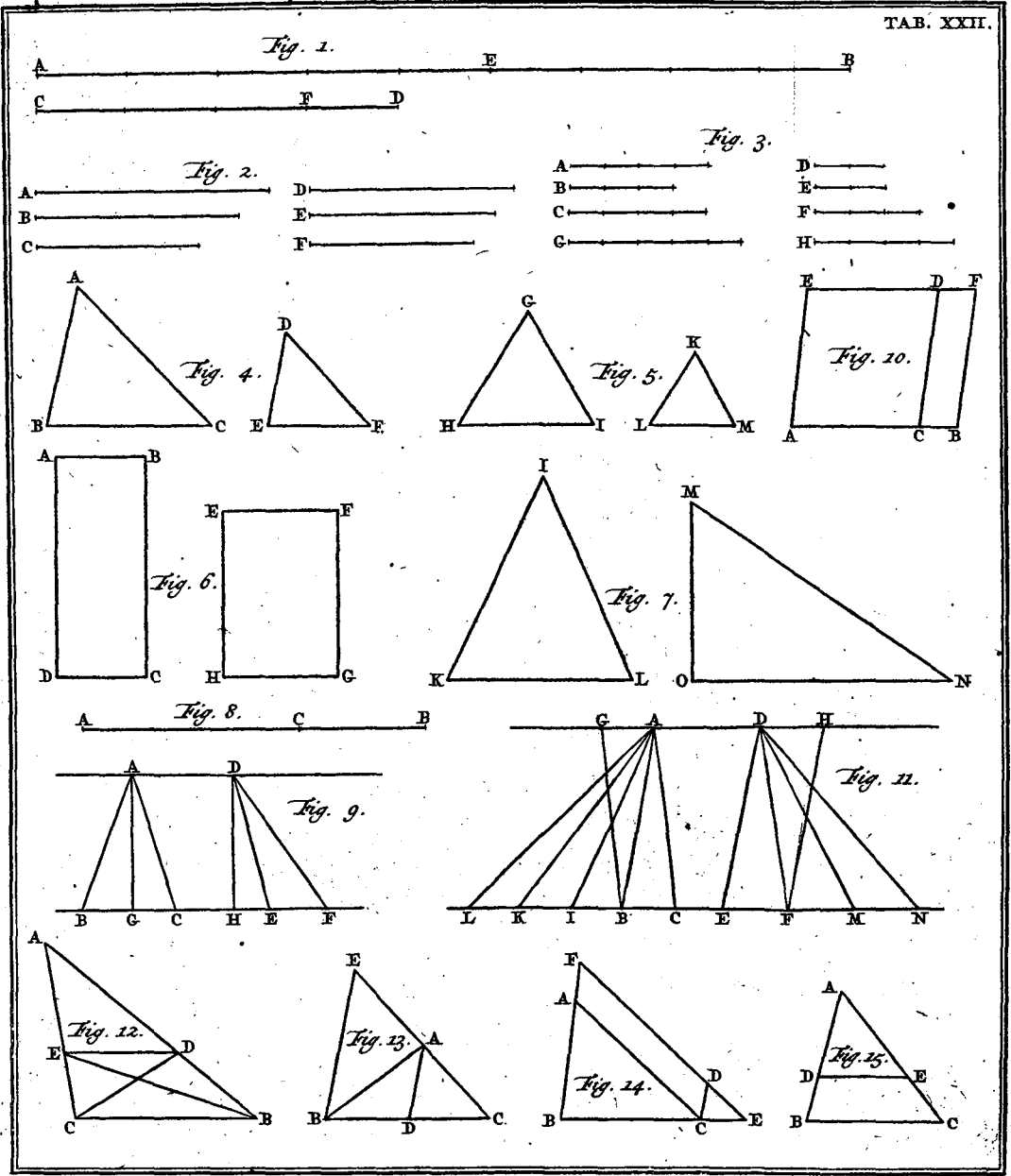


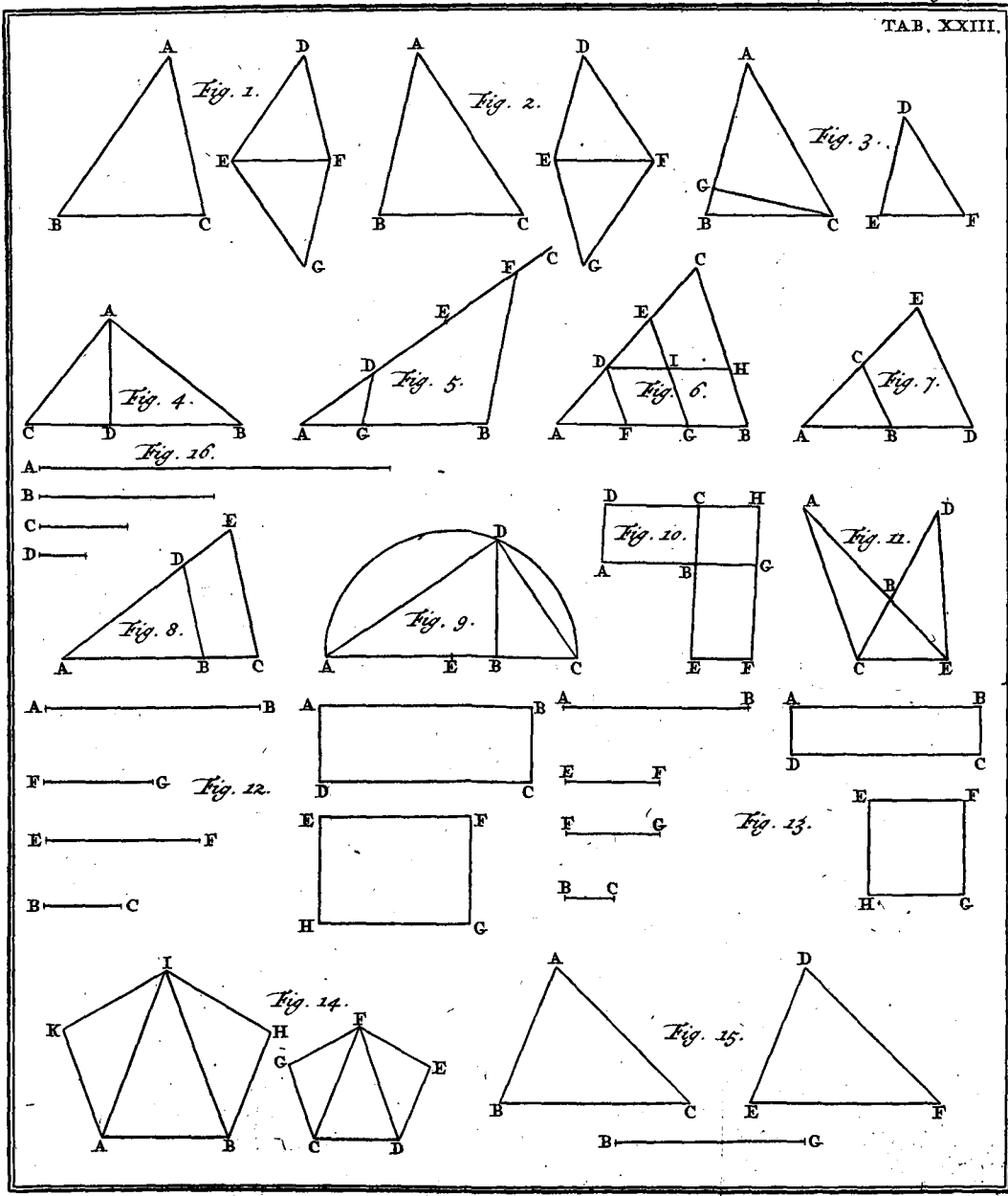
Fig. 9.







C
A
B
C
D



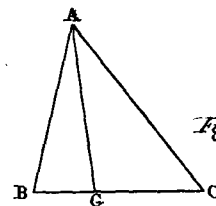


Fig. 1.

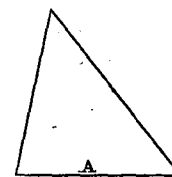
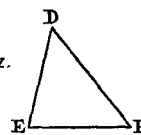


Fig. 2.

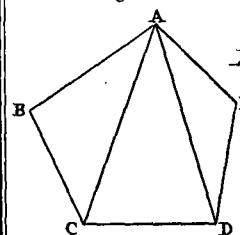
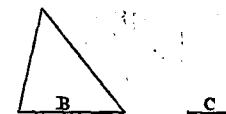


Fig. 3.

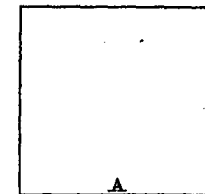
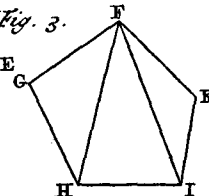


Fig. 4.

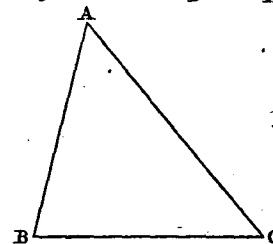
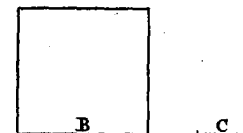


Fig. 5.

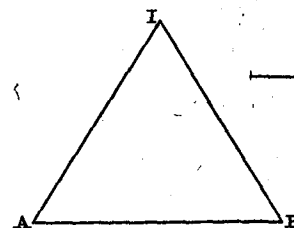
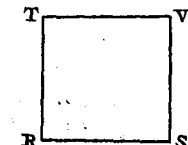
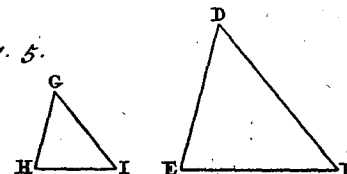


Fig. 6.

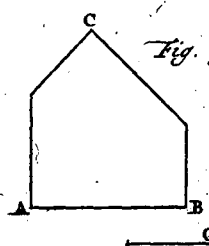
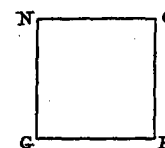
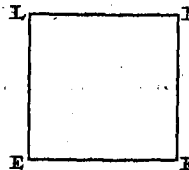
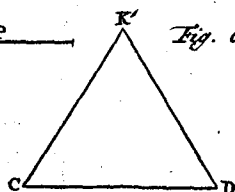


Fig. 7.

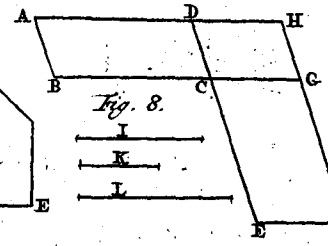


Fig. 8.

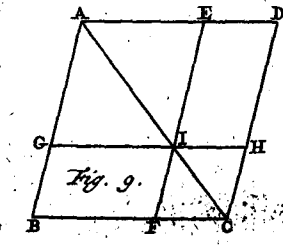
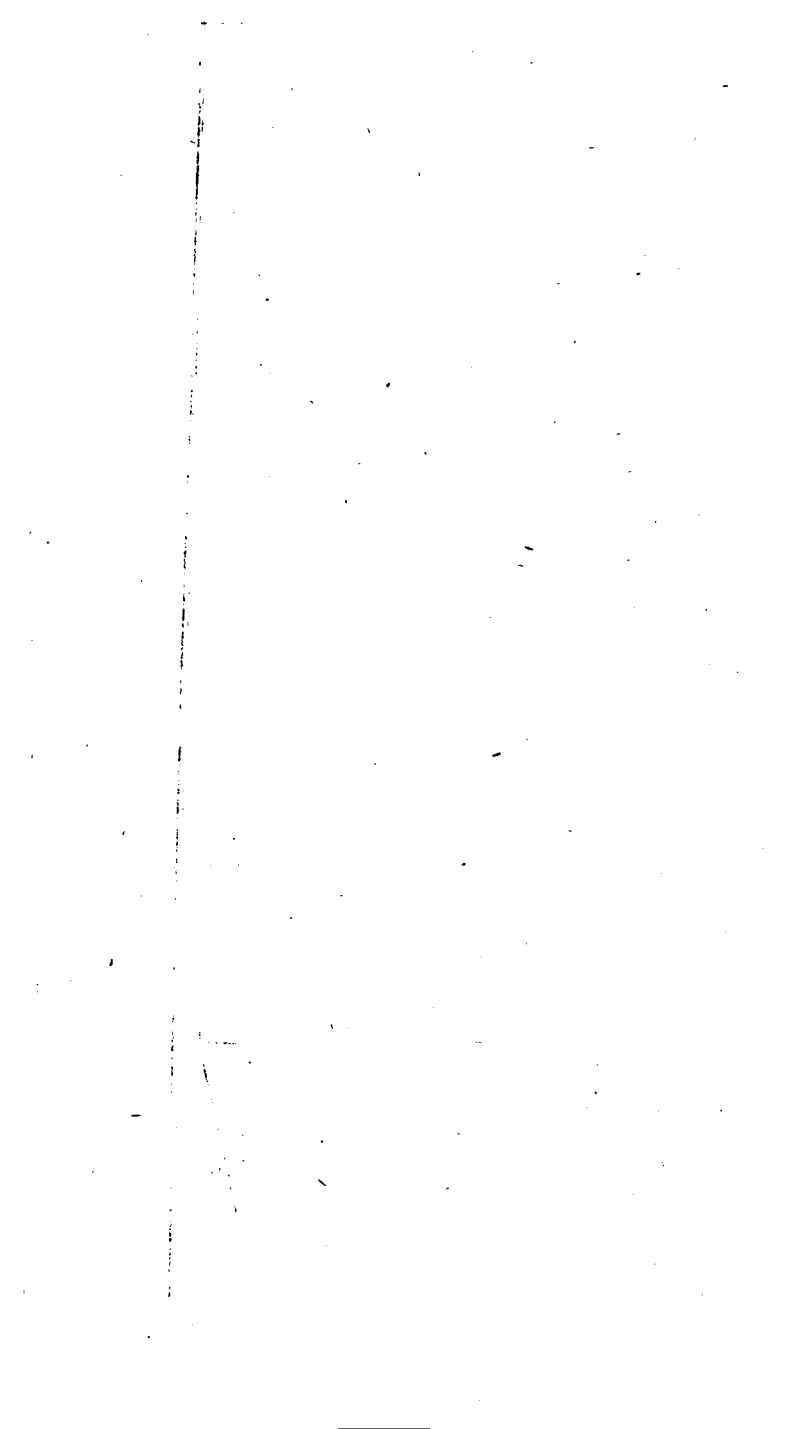
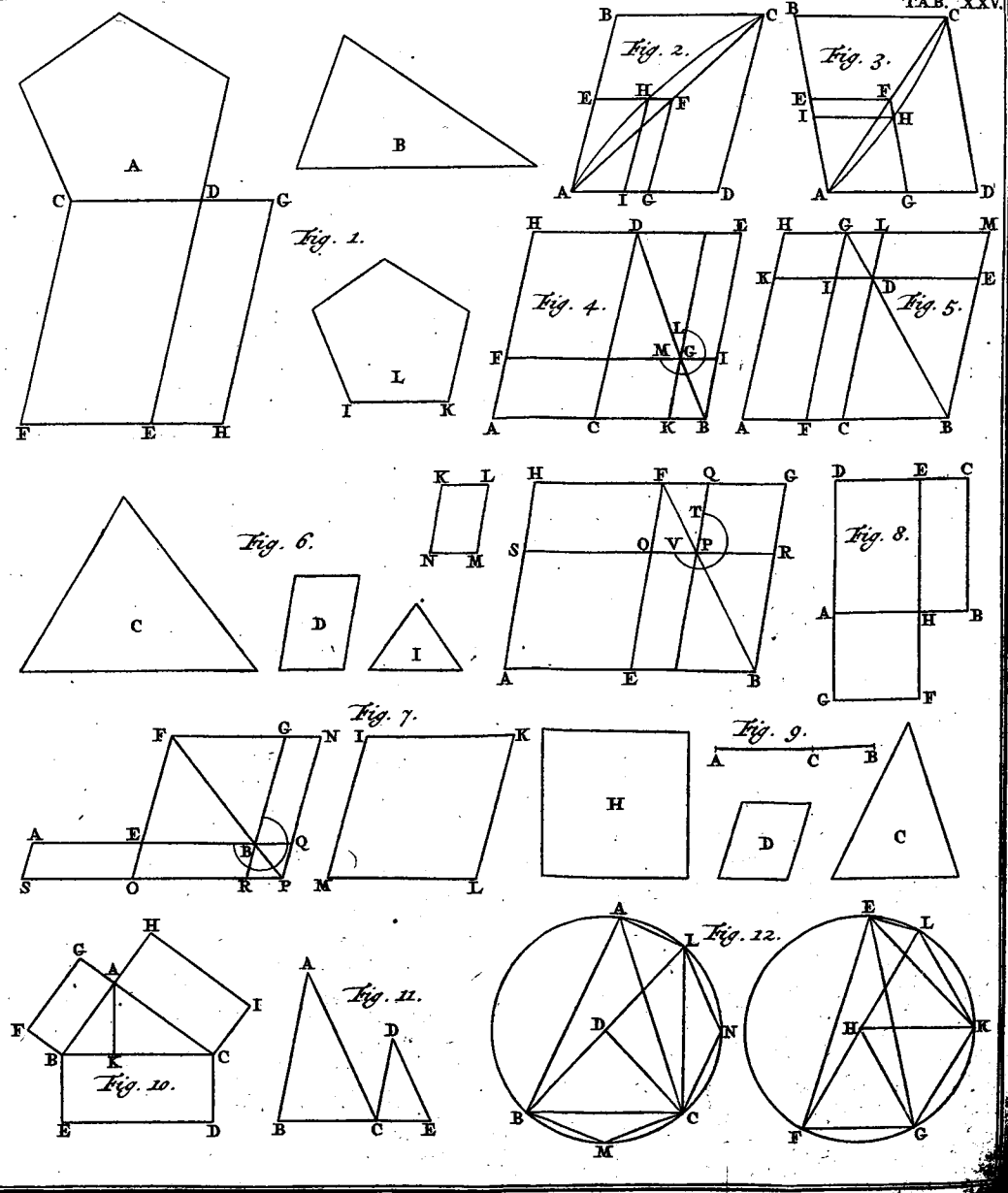
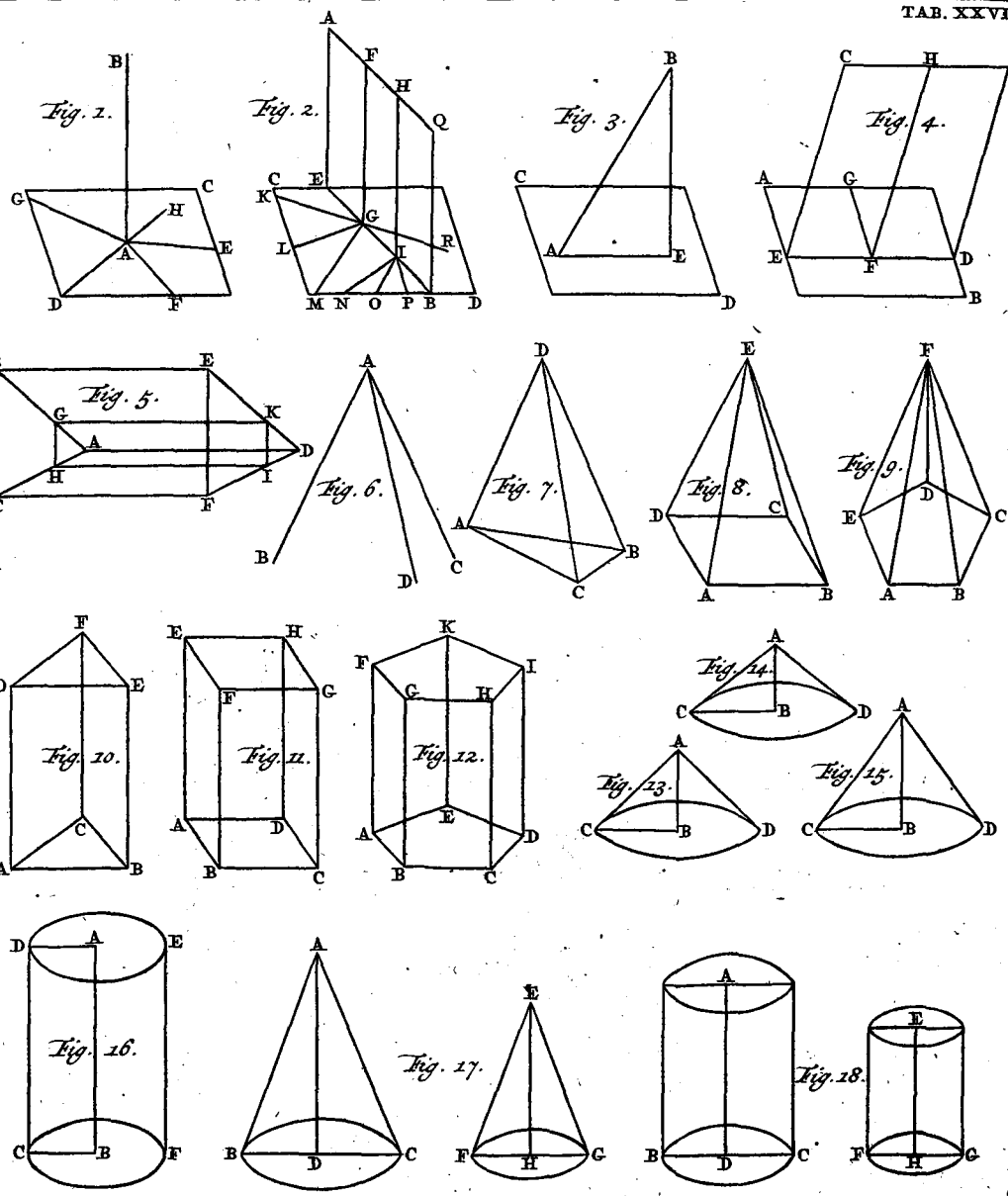
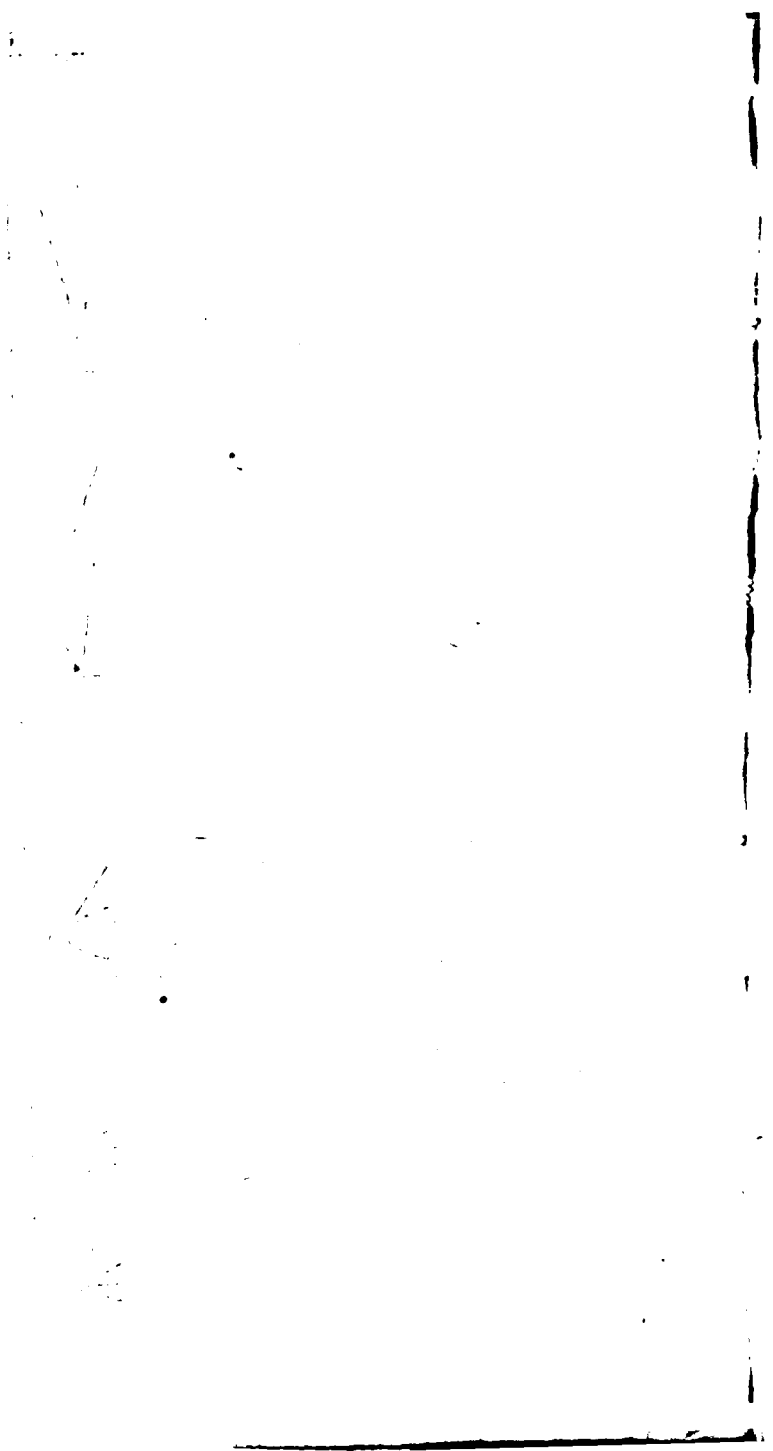


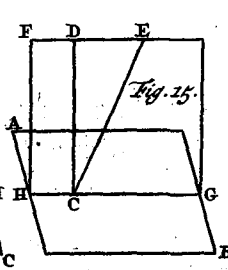
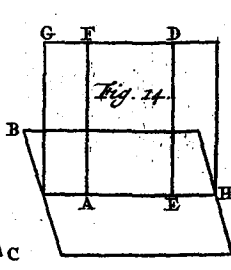
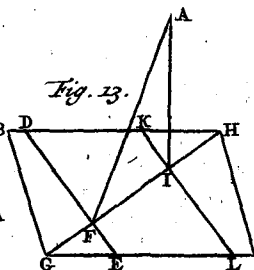
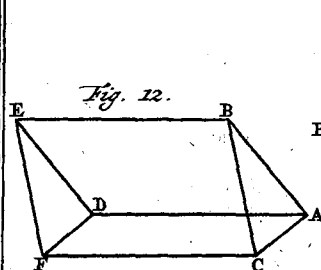
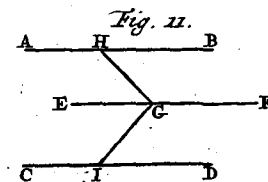
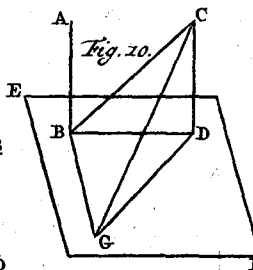
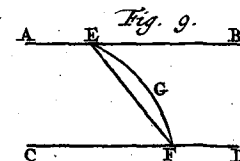
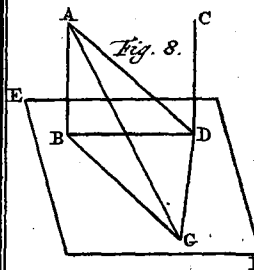
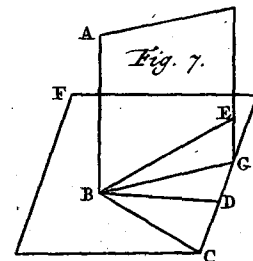
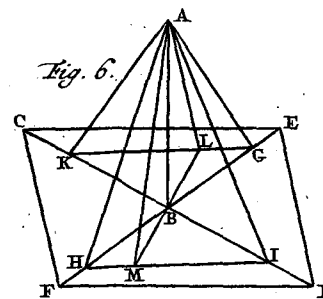
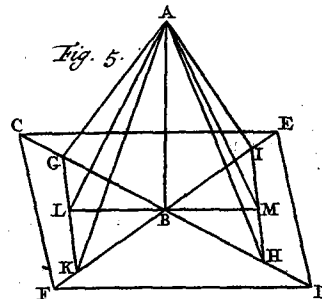
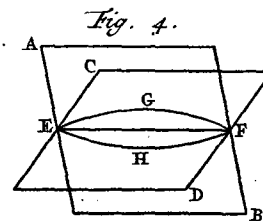
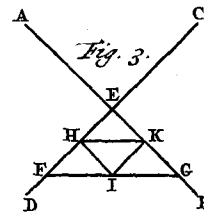
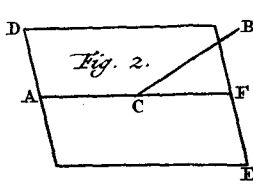
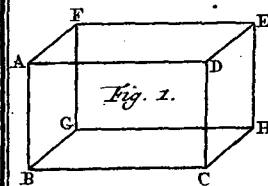
Fig. 9.

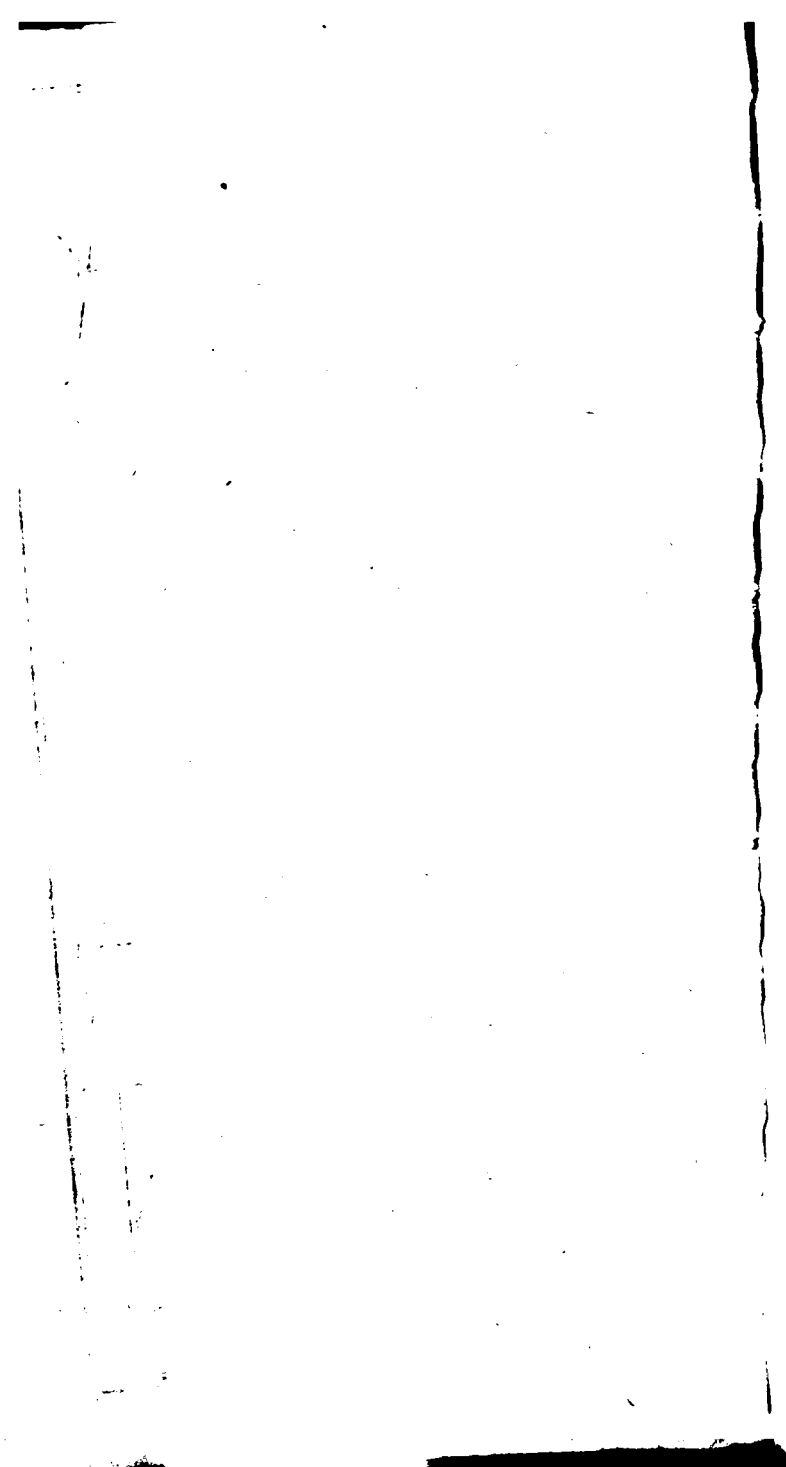


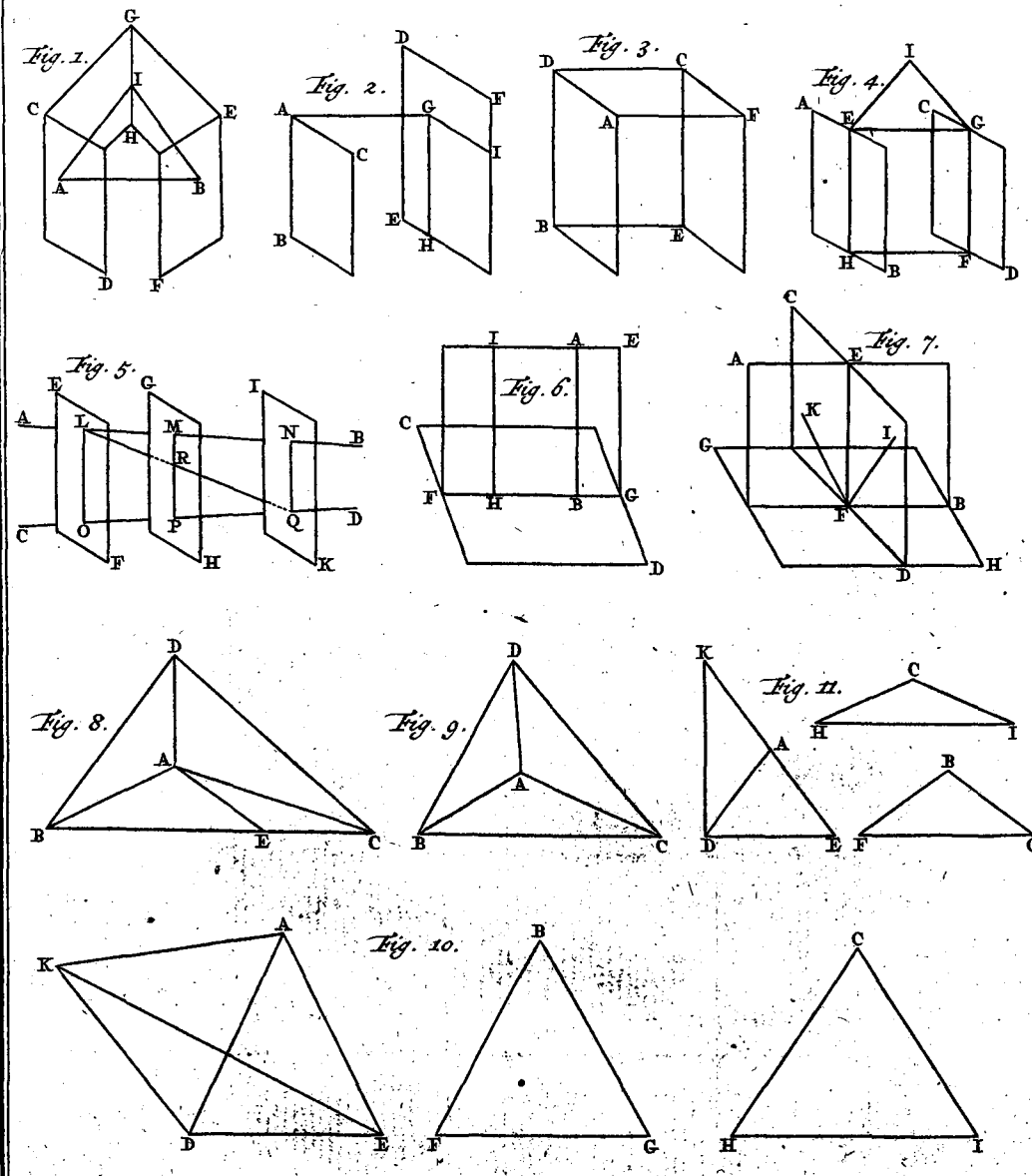


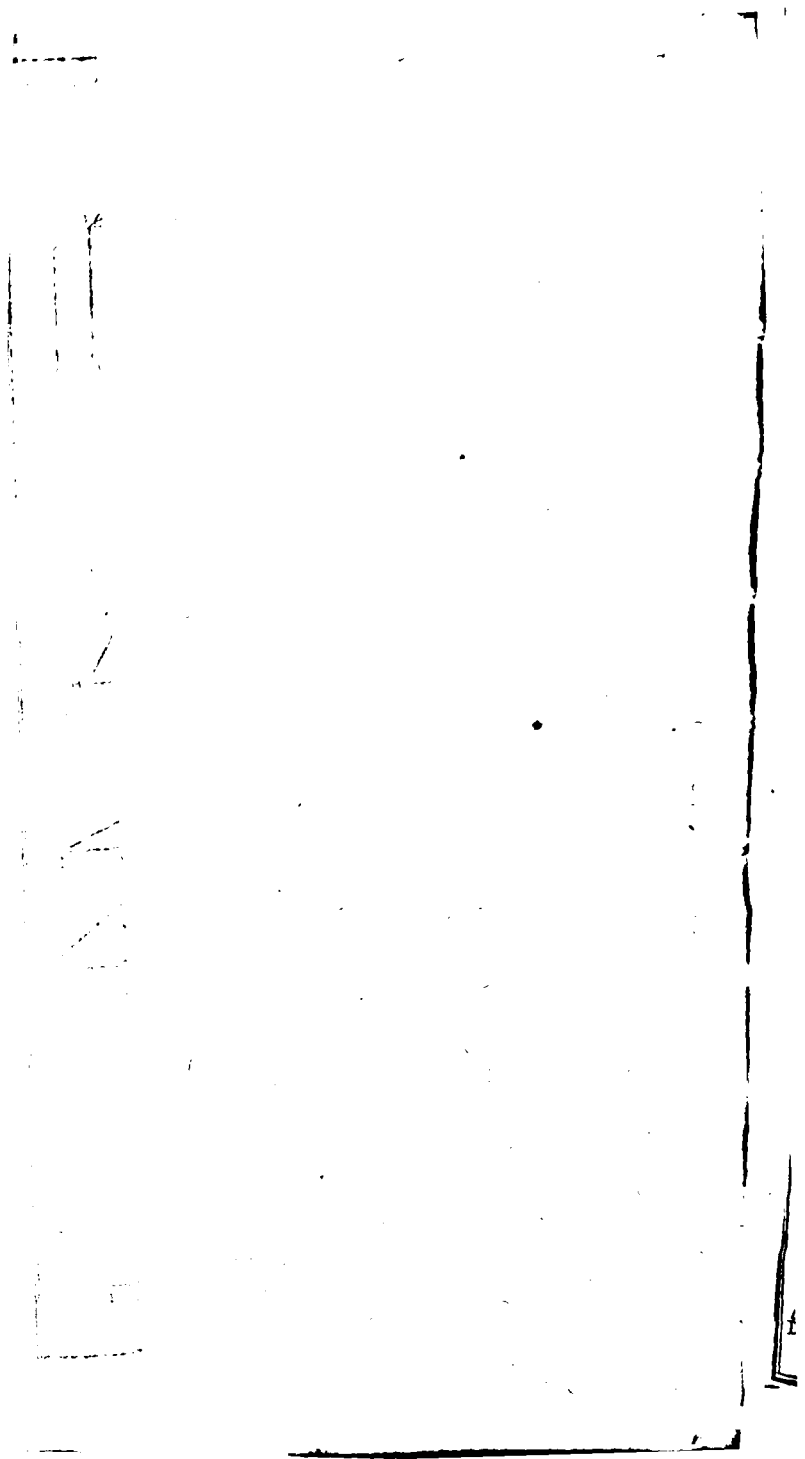












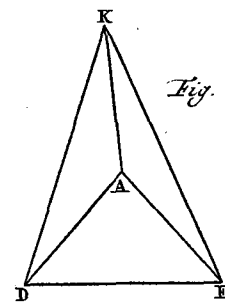


Fig. 1.

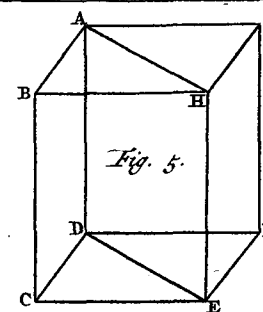
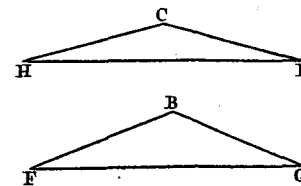


Fig. 5.

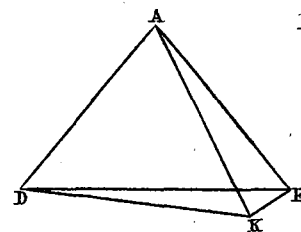


Fig. 2.

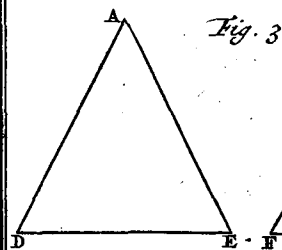
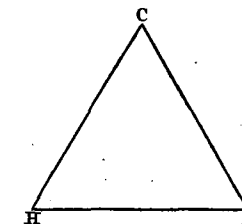
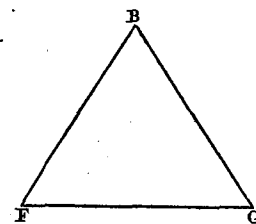


Fig. 3.

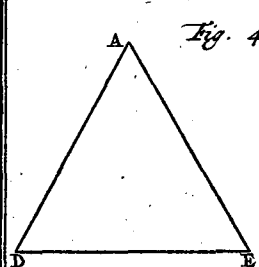
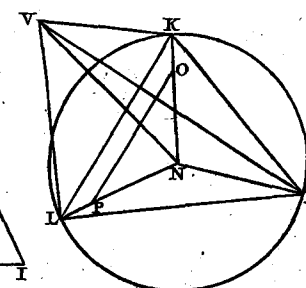
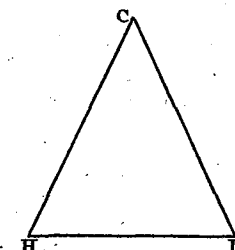
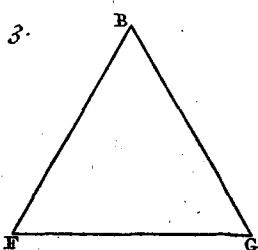


Fig. 4.

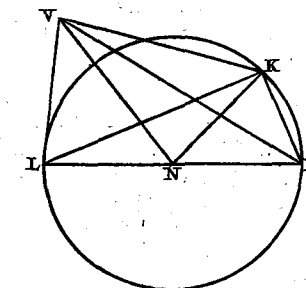
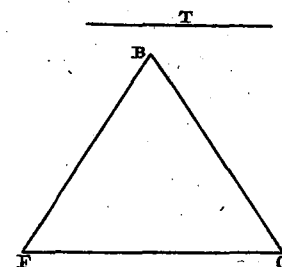
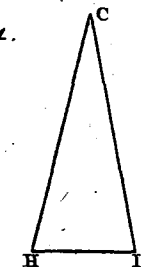




Fig. 1.

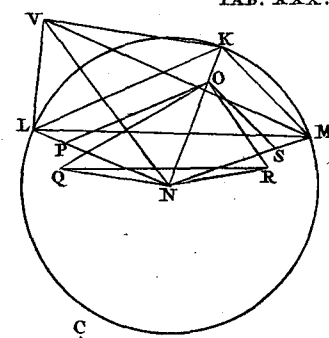
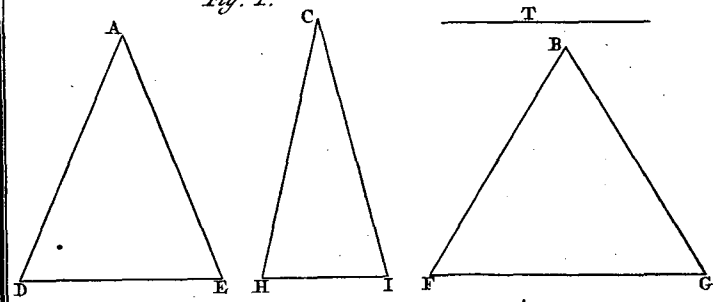


Fig. 2.

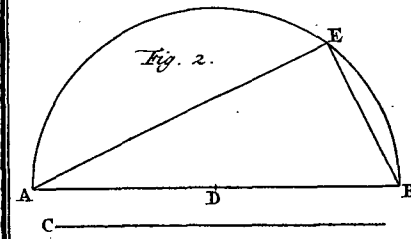


Fig. 4.

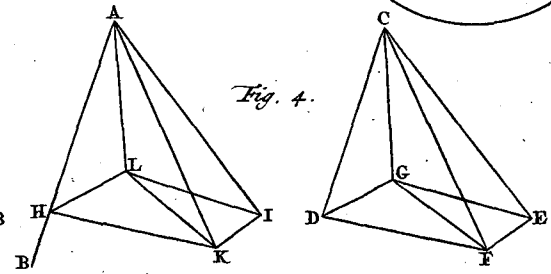


Fig. 3.

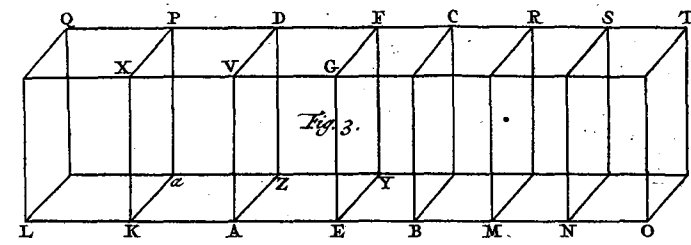


Fig. 6.

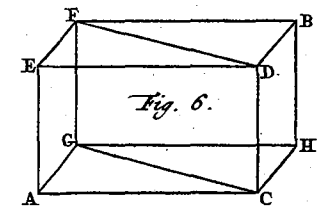


Fig. 5.

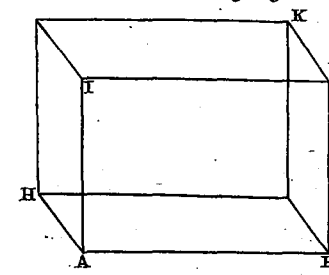
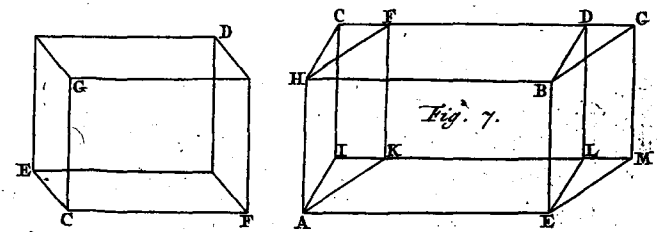
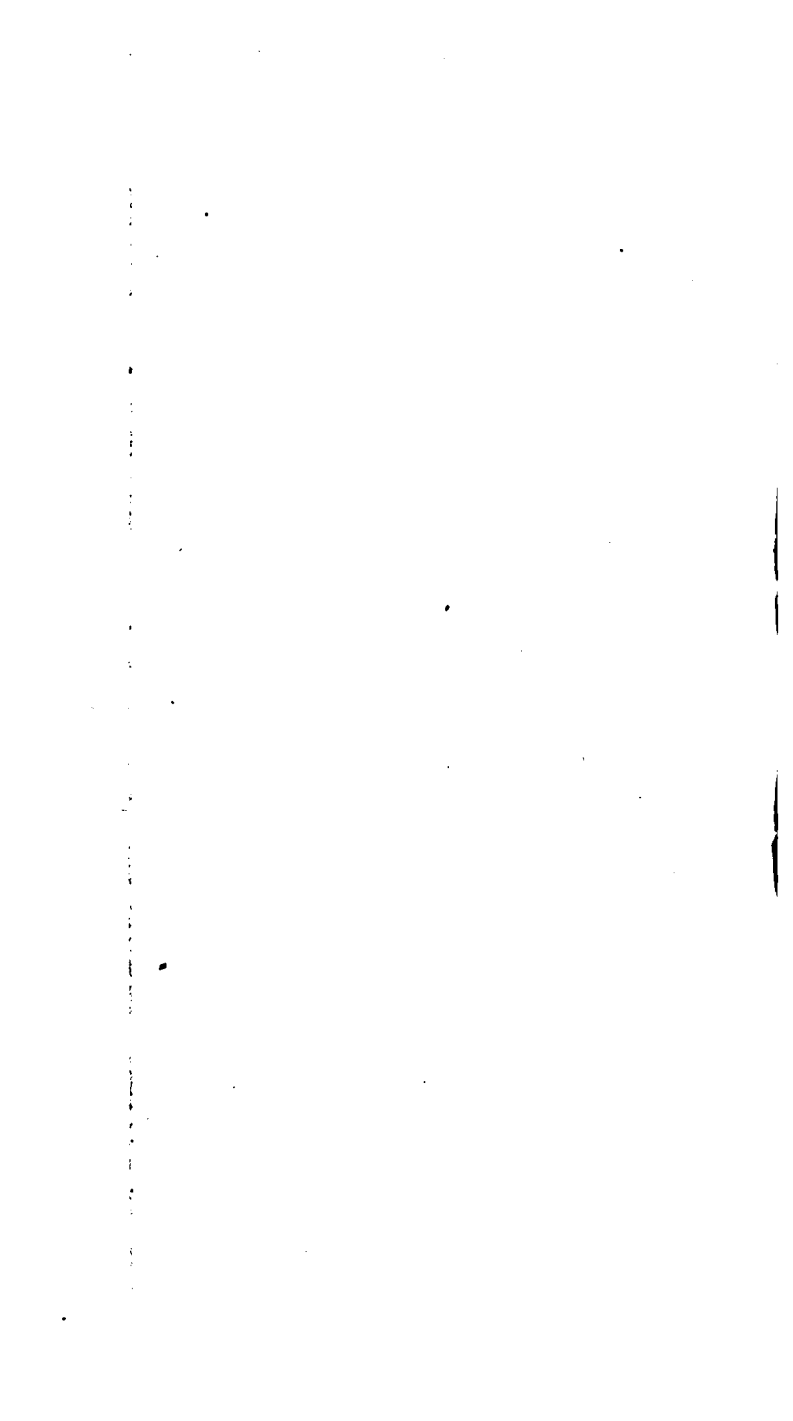
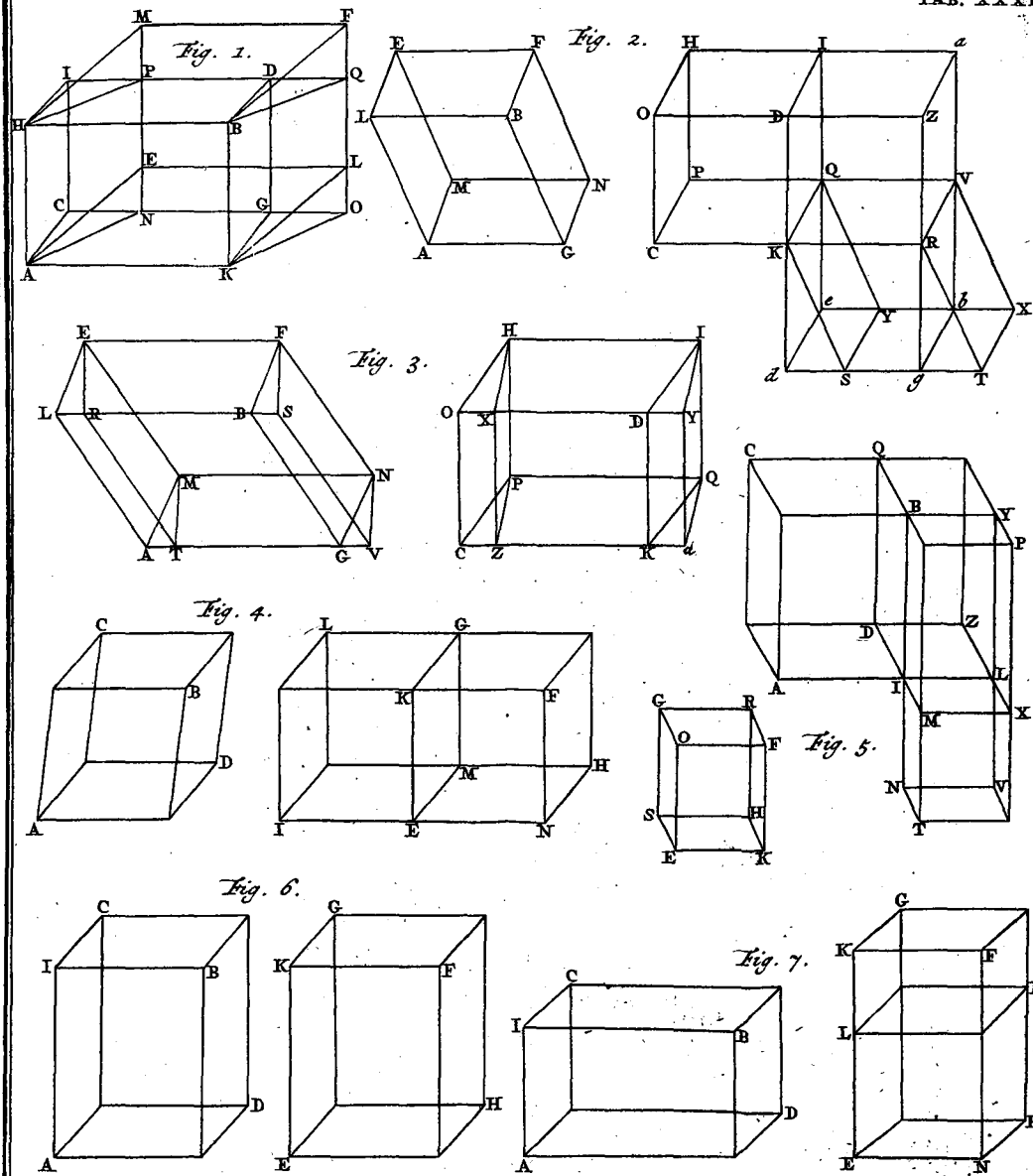
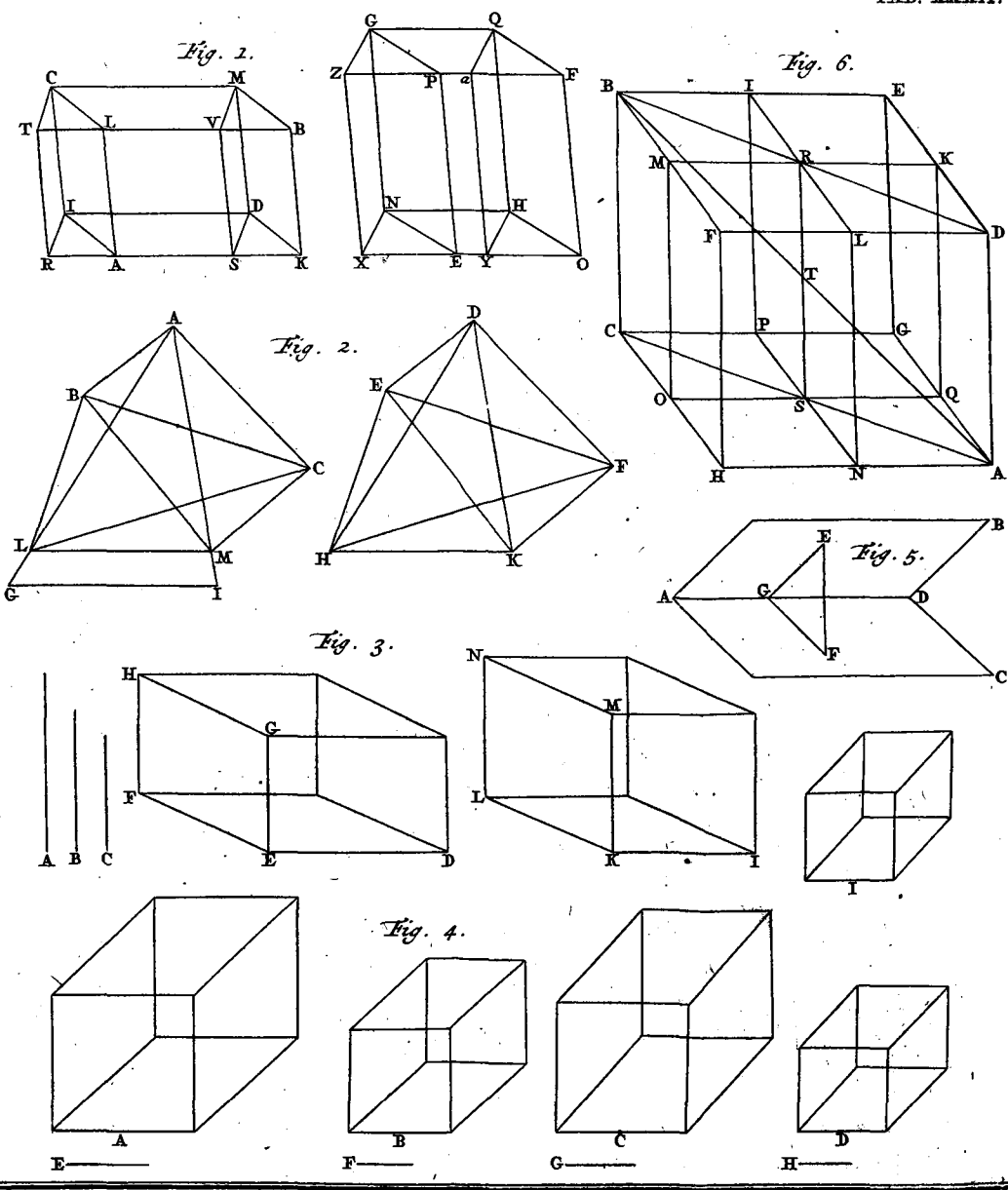


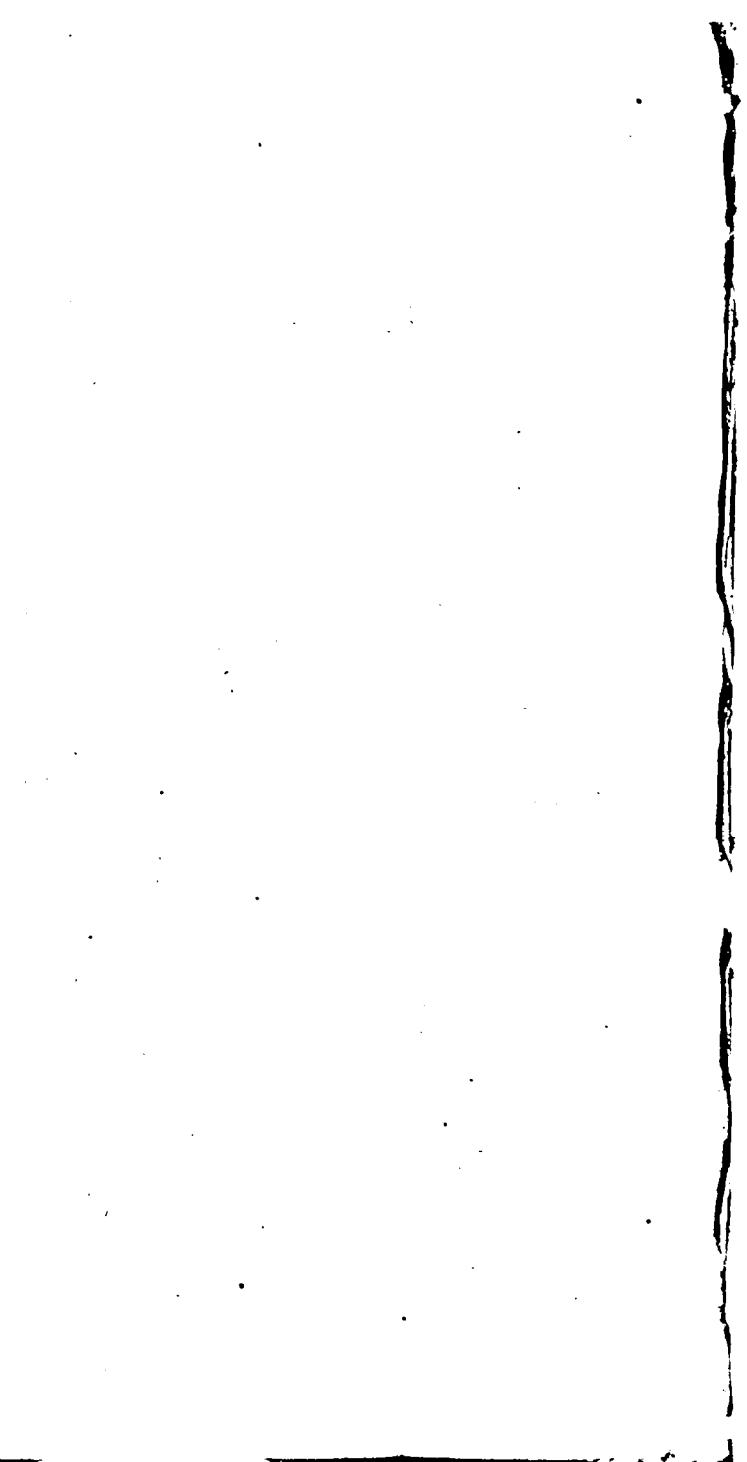
Fig. 7.

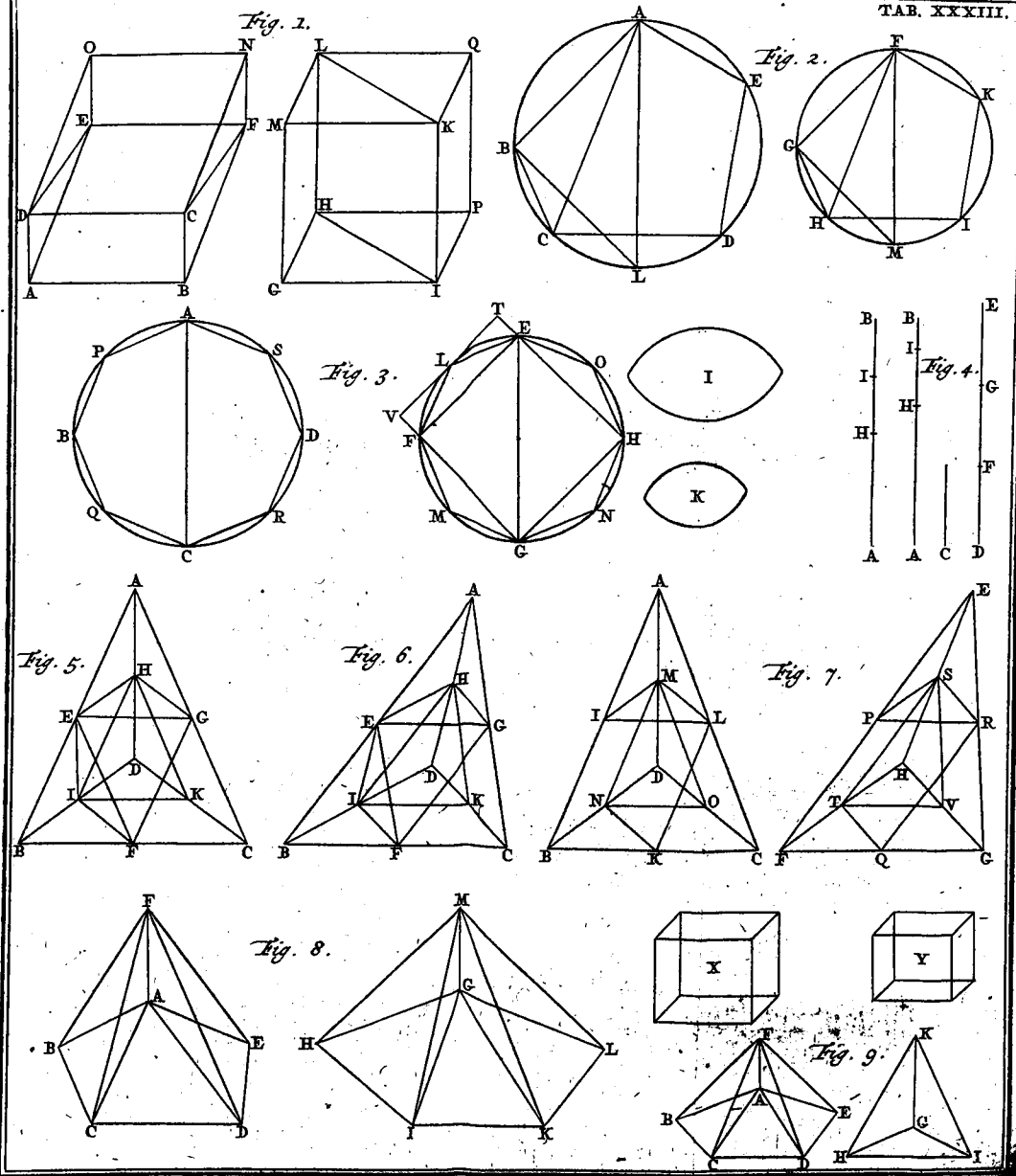


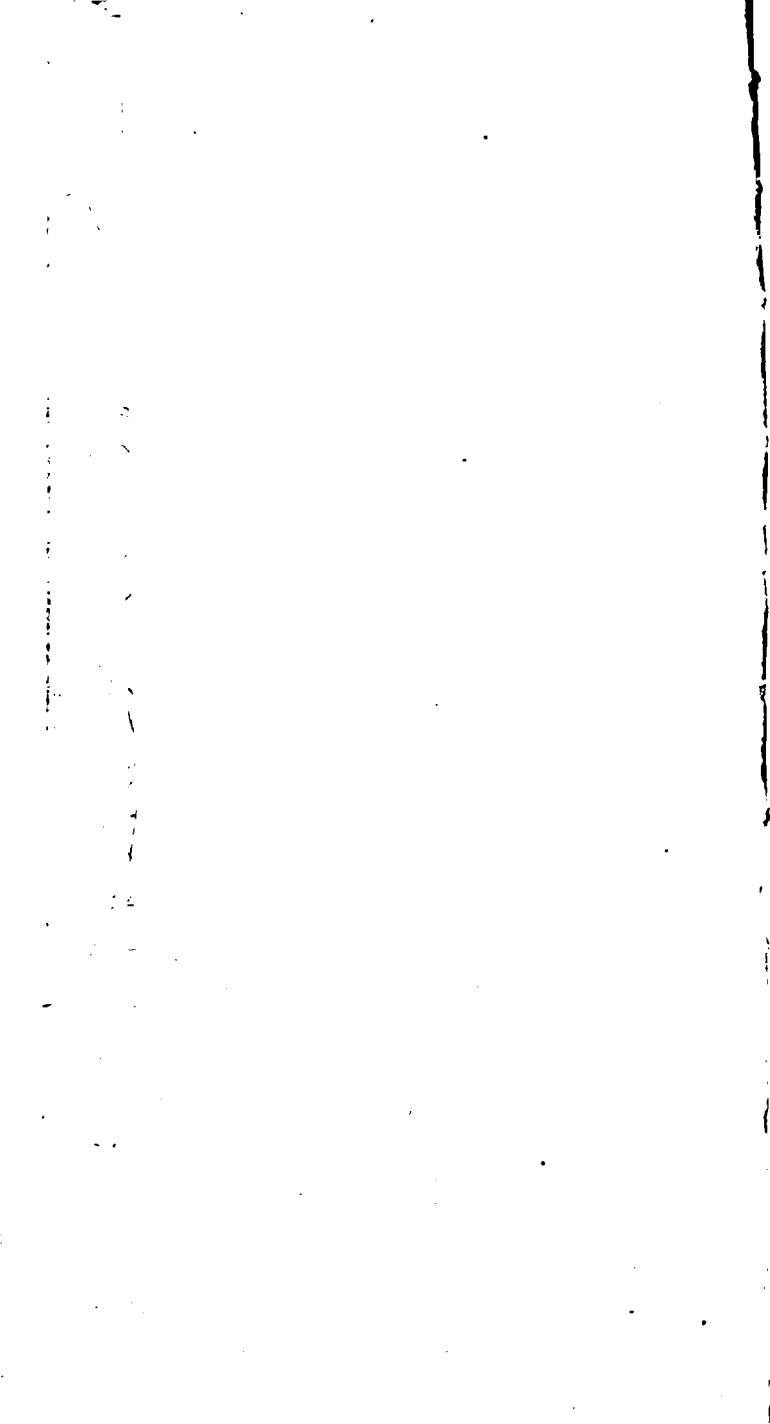


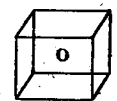
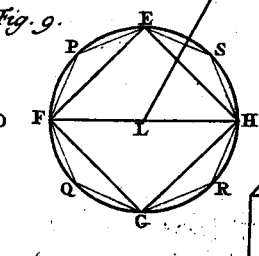
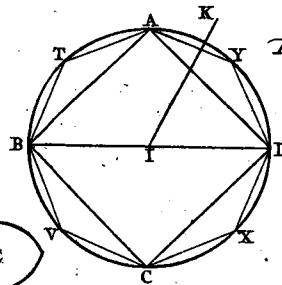
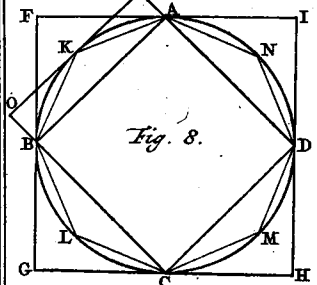
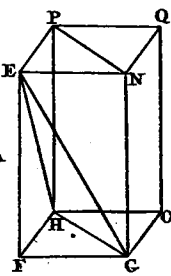
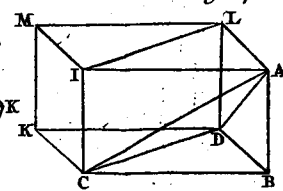
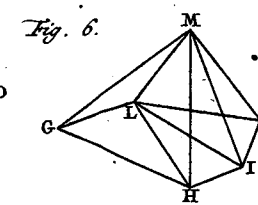
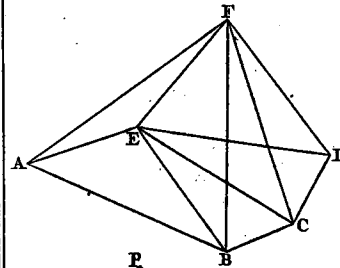
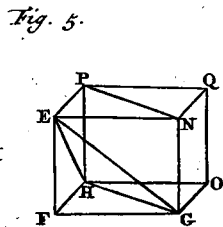
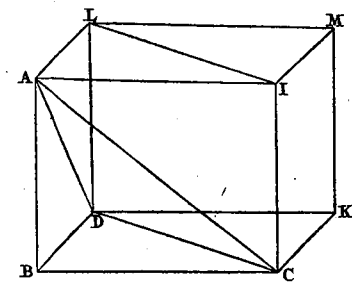
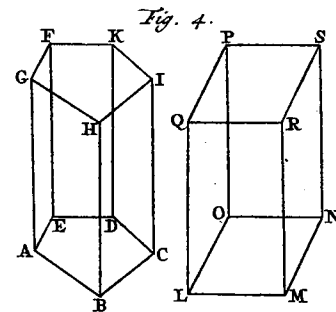
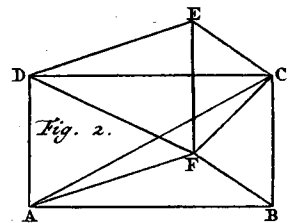
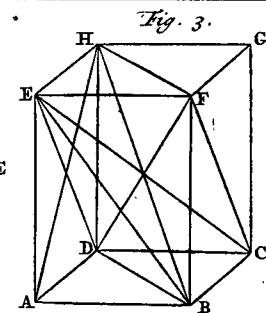
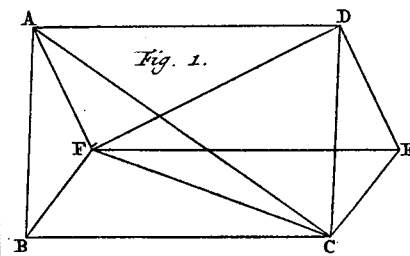


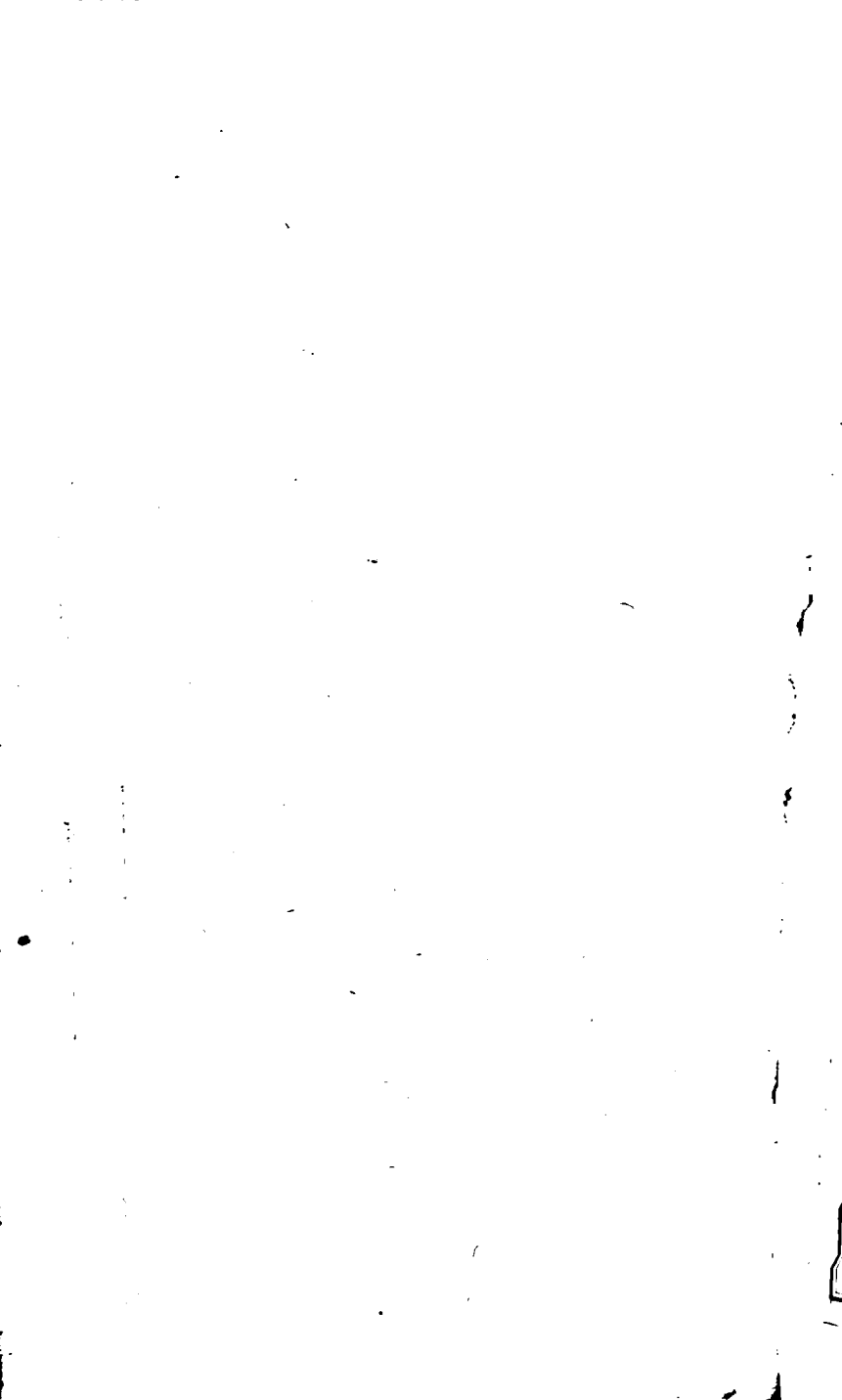












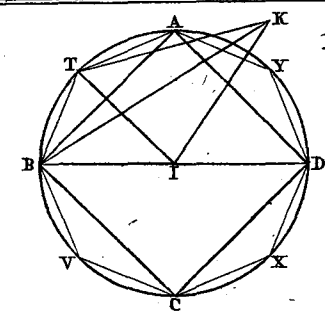


Fig. 1.

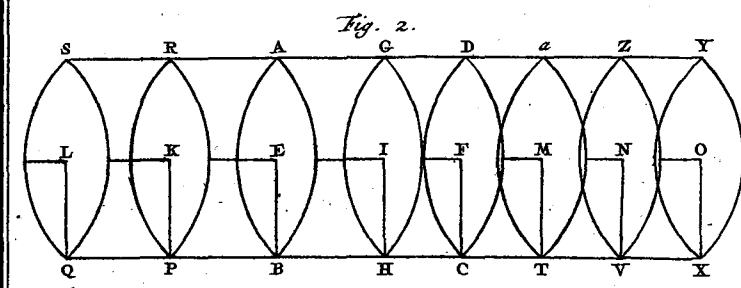
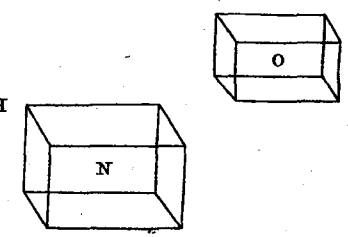
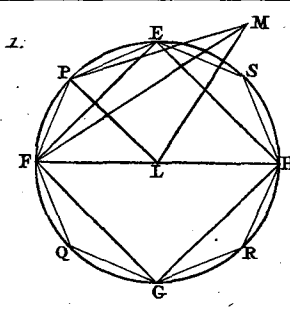


Fig. 2.

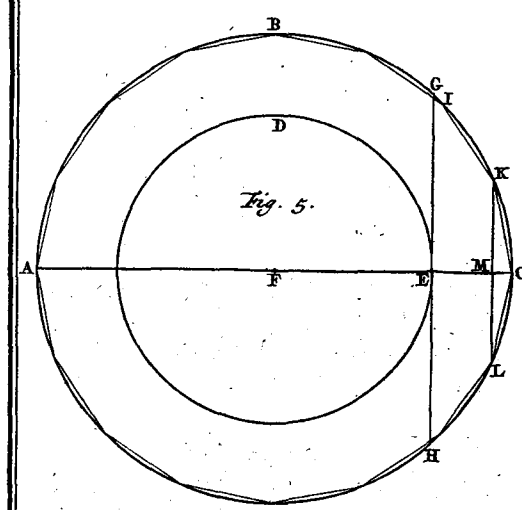


Fig. 5.

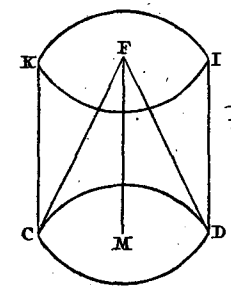


Fig. 3.

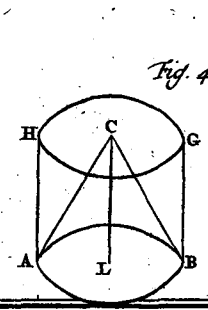
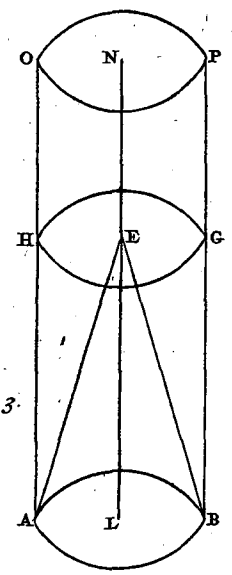


Fig. 4.

