

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

132071

E U C L I D I S E L E M E N T O R U M

LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

UNDECIMUS ET DUODECIMUS,

EX VERSIONE LATINA

FEDERICI COMMANDINI;

Sublatis iis quibus olim Libri hi a THEONE, aliisque, Vitiati sunt,
Et quibusdam EUCLIDIS Demonstrationibus Restitutis,

A ROBERTO SIMSON, M.D.

In Academia Glasgouensi Matheseos Professore.

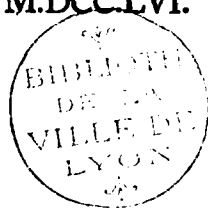


GLASGUAE,

IN AEDIBUS ACADEMICIS.

EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI

M.DCC.LVI.



GEORGIO.
WALLIAE PRINCIPI.

CUI MULTUM JAM DEBENT,
PLURIMUM OLIM DEBEBUNT,
BONAE ARTES ET SCIENTIAE,
HOSCE

ELEMENTORUM EUCLIDIS



PRAECIPUOS LIBROS,
BENEVOLO SUO PERMISSU,

EA, QUA PAR EST,
ANIMI GRATI VENERATIONE,
PRINCIPI JUVENTUTIS

D. D. C. Q.

ROBERTUS SIMSON.

P R A E F A T I O.

DE auctore Geometriae Elementorum, quae Euclidis nomine insigniuntur, variae admodum sunt Recentiorum sententiae, quae non paullum inter se discrepant; etenim Petrus Ramus tam Propositiones quam earundem Demonstrationes Theoni adscribit; alii Propositiones Euclidi, Demonstrationes vero Theoni tribuunt; alii denique, inter quos in primis nominandi sunt viri doctissimi Joannes Buteo et Henricus Savilius, Propositiones et Demonstrationes omnes Euclidis esse strenue contendunt. inter has verisimilior visa est Buteonis et Savilii sententia, quam proinde plerique post eos Geometrae amplexi sunt. Savilius, post adducta quaedam in hanc rem argumenta, ex illis concludit, “Theonis “fuisse partes, in Euclide paucissimis quidem in locis interpolando, explicando, augendo, ultra hoc nullas.” verum saepius perpendendo atque inter se comparando Demonstrationes quae in Euclide nunc exstant, inveni Theonem, vel quicumque Editor fuit textus Graeci quem nunc habemus, multo plura, et quidem in pejus, mutasse quam praedicti viri docti, aliique existimant; addendo scilicet, demendo, aut sua miscendo; praesertim in Libro quinto et undecimo quos iste Editor non leviter vitiavit. Ex. gr. substituendo brevior, at paralogisticam, vice legitimae Demonstrationis Propositionis 18^{vae} Libri 5^{ti}; et ex hoc Libro, auferendo, inter alia, bonam Euclidis vel Eudoxi rationis compositae Definitionem, cuius loco posuit Definitionem absurdam, 5^{tam} sc. Libri 6^{ti}, quâ neque Euclides, neque Archimedes, Apollonius aut ullus ante Theonem Geometra usus fuit, cuiusque apud illos nullum vestigium invenitur. hanc autem Theonis Definitionem, quae sola multum negotii Tyronibus faceffere solet, ex hisce Elementis nunc sublata est, atque ejus loco alia, quam sine dubio Euclides dederat, posita est
inter

P R A E F A T I O.

inter Definitiones Libri 5^{ti}, ex qua doctrina de Ratione Composita facilis redditur. Praeterea inter Definitiones Libri 11^{mi} habetur haec quae 10^{ma} est, "Aequales et similes solidae figurae sunt, quae similibus planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur;" est vero Propositio haec Theorema, non Definitio, quoniam aequalitas figurarum quarumcunque demonstranda est, non vero assumenda. quamvis igitur vera fuisset, demonstrari debuit haec Propositio; non autem semper vera est extra casum in quo figurarum anguli solidi non pluribus tribus angulis planis continentur, in aliis enim casibus, duae figurae solidae possunt contineri planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et tamen inter se inaequales esse, ut in Notis, hisce Elementis annexis, perspicue ostendetur. similiter, in Demonstratione Propositionis 26^{tae} Libri 11^{mi}, assumitur duos angulos solidos inter se aequales esse, si angulis planis multitudine et magnitudine aequalibus contineantur; sed neque hoc semper verum est extra casum in quo anguli solidi non pluribus tribus angulis planis continentur, cujus tamen casus nulla, quamvis omnino sit necessaria, in Elementis Demonstratio hactenus habetur. Ex Definitione autem 10^{ma} pendent Propositiones 25^{ta} et 28^{va} Libri 11^{mi}, et ex Propositione 25^{ta} vel 26^{ta} pendent octo aliae, viz. Propp. 27^{ma}, 31^{ma}, 32^{da}, 33^{tia}, 34^{ta}, 36^{ta}, 37^{ma}, 40^{ma} Libri ejusdem; et 12^{ma} Libri 12^{mi} pendet ex 8^{va} ejusdem, eademque 8^{va}, Corollarium 17^{mae}, et Prop. 18^{va} Libri 12^{mi} pendent ex Definitione 9^{na} Libri 11^{mi}; quae minime proba est, quoniam possunt esse figurae solidae contentae planis similibus, multitudine aequalibus, quae tamen minime sunt similes. omnes igitur hae Propositiones infirmo hactenus innitebantur fundamento. Alia etiam sunt, non pauca, quae minime videntur Euclidis esse, et quae satis ostendunt Elementa ejus a Geometriae imperitiis non leviter esse corrupta; et quidem quamvis haec non aequae crassa sint ac praedicta errata, sunt tamen necessario

P R A E F A T I O.

fario corrigenda. quorum omnium ratio in Notis ad finem Libri red-
detur.

Operae igitur pretium videbatur, neque ingratum fore putabam vi-
ris eruditis, praesertim iis qui accuratis demonstrationibus in Geometria
delectantur, hosce Elementorum Euclidis praecipuos Libros ab hisce
naevis vindicare, et ad pristinam ἀκριβεια restituere, quantum sc. in-
genium valebat; praesertim cum fundamentum sint scientiae quae mag-
nam in multis rebus utilitatem adfert, quin et aliis quibusdam scientiis,
et plerisque omnibus pacis et belli artibus est necessaria, cujusque ope
veri inquisitio et investigatio, quantum sinit mentis humanae imbecillitas,
promovetur. atque hoc facere conati sumus, tollendo falsa minimeque
accurata quae pro veris et germanis accuratissimi Geometrae scriptis sup-
posuerunt imperiti Editores, et Euclidi restituendo, a Theone aliisque, ab
eo surrepta, quae per multa saecula haecenus sepulta jacuerunt.

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M
L I B E R P R I M U S.

DEFINITIONES.

I.

PUNCTUM, seu signum, est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineae extrema sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quae ex aequo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei extrema sunt lineae.

VII.

Plana superficies est, in qua sumptis utcumque duobus punctis, recta linea inter ea, tota jacet in illa superficie.

A

“ Planus

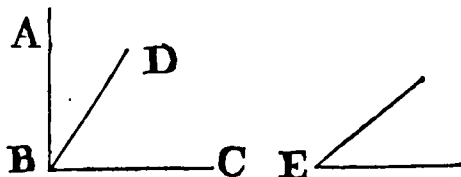
EUCLIDIS ELEMENTORUM

VIII.

“ Planus angulus est duarum linearum in plano sese tangentium, et non
“ in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.”

IX.

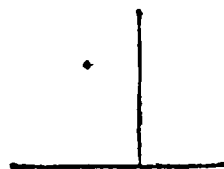
Angulus planus rectilineus est duarum rectarum sese tangentium, et non
in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.



‘ N. B. Si plures anguli ad unum punctum B existant, quilibet eorum
‘ designatur tribus alphabeti literis, quarum ea quae est ad verticem an-
‘ guli, hoc est ad punctum in quo rectae angulum continentes sibi mu-
‘ tuo occurrunt, in medio reliquarum ponitur; harum autem una est
‘ alicubi ad unam ex rectis illis, altera ad alteram. ita angulus qui rectis
‘ AB, CB continetur, designatur literis ABC, vel CBA; qui vero rectis
‘ AB, DB continetur, literis ABD, vel DBA; et qui rectis DB, CB
‘ continetur, literis DBC, vel CBD designatur. si autem unus tantum
‘ angulus ad punctum existat, designari potest literâ ad punctum illud
‘ posita, ut angulus ad E.’

X.

Cum vero recta linea super rectâ linea insistens, eos,
qui deinceps sunt angulos, aequales inter se fe-
cerit, rectus est uterque aequalium angulorum;
et quae insistit recta linea, perpendicularis voca-
tur ad eam cui insistit.



XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.

Acutus

LIBER PRIMUS.

3



XII.

Acutus autem, qui minor est recto.

XIII.

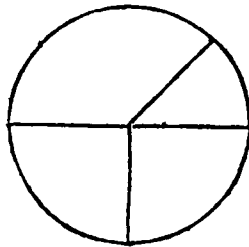
“Terminus est, quod alicujus est extremum.”

XIV.

Figura est, quae aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana, una linea contenta, quae circumferentia appellatur; ad quam ab uno puncto intra figuram existente omnes rectae lineae pertingentes sunt aequales.



XVI.

Hoc autem punctum, centrum circuli nuncupatur.

XVII.

Diameter circuli est recta quaedam linea per centrum ducta, et ex utraque parte circumferentiâ circuli terminata.

XVIII.

Semicirculus est figura quae continetur diametro et circumferentiâ circuli quae a diametro intercipitur.

A 2

“Segmentum

EUCLIDIS ELEMENTORUM

XIX.

“Segmentum circuli est figura quae rectâ linea et circuli circumferentiâ continetur.”

XX.

Rectilineae figurae sunt, quae rectis continentur lineis.

XXI.

Trilaterae quidem, quae tribus.

XXII.

Quadrilaterae, quae quatuor.

XXIII.

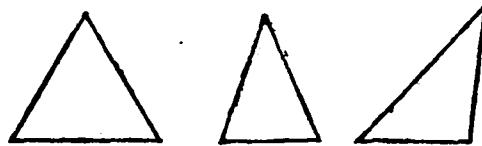
Multilaterae vero, quae pluribus quam quatuor rectis lineis continentur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum, aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet aequalia.

XXV.

Isoceles, quod duo tantum aequalia latera habet.



XXVI.

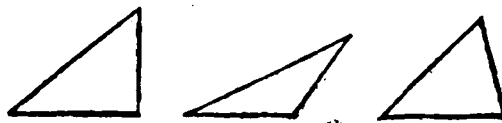
Scalenum vero, quod tria inaequalia habet latera.

XXVII.

Ad haec, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.



Acutangulum

LIBER PRIMUS.

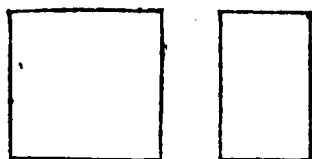
5

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum, quadratum est, quod et aequilaterum est et rectangulum.



XXXI.

Altera parte longior figura est, quae rectangula quidem aequilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quae aequilatera quidem, sed rectangula non est.



XXXIII.

Rhomboides, quae opposita latera inter se aequalia habens, neque aequilatera est, neque rectangula.

XXXIV.

Praeter has autem reliquae quadrilaterae figurae trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelae, seu aequidistantes rectae lineae sunt, quae cum in eodem sint plano, et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.



POSTU-

EUCLIDIS ELEMENTORUM

POSTULATA.

I.

POSTULETUR, a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Et rectam lineam terminatam, in continuum et directum producere.

III.

Et quovis centro et intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

I.

QUAE eidem aequalia, et inter se sunt aequalia.

II.

Et si aequalibus aequalia adjiciantur, tota sunt aequalia.

III.

Et si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.

IV.

Et si inaequalibus aequalia adjiciantur, tota sunt inaequalia.

V.

Et si ab inaequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.

VI.

Et quae ejusdem sunt duplicia, inter se sunt aequalia.

VII.

Et quae ejusdem sunt dimidia, inter se sunt aequalia.

VIII.

Et quae sibi mutuo congruunt, inter se sunt aequalia.

Totum

LIBER PRIMUS.

7

IX.

Totum est sua parte majus.

X.

Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se aequales sunt.

XII.

“ Et si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores et ad eas-
“ dem partes angulos duobus rectis minores fecerit, duae illae rectae
“ lineae in infinitum productae, inter se convenient ex ea parte ad
“ quam sunt anguli duobus rectis minores. Vid. notas ad Prop. 29.
“ Lib. I.”

PRO-

EUCLIDIS ELEMENTORUM

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

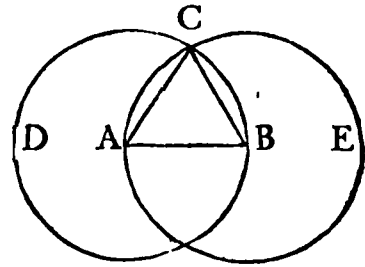
SUPER data rectâ lineâ terminatâ triangulum aequilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata AB, oportet vero super rectâ AB triangulum aequilaterum constituere.

a. 3. Postulatum.

Centro quidem A intervallo autem AB circulus describatur ^aBCD; et rursus centro B, intervallo BA describatur circulus ACE; et a puncto C, in quo circuli se invicem secant ad punctum

b. 2. Post. ta A, B ducantur ^b rectae CA, CB. erit ABC triangulum aequilaterum.



Quoniam igitur punctum A centrum est circuli BCD, erit AC ipsi AB aequalis

c. 15. Definit. ^c; rursus quoniam punctum B centrum est circuli CAE, erit BC aequalis rectae

BA. ostensa autem est recta CA aequalis ipsi AB; utraque igitur ipsarum CA, CB, ipsi AB est aequalis. quae autem eidem sunt aequalia,

d. 1. Axioma. et inter se aequalia sunt ^d; recta igitur CA ipsi CB est aequalis. tres igitur CA, AB, BC inter se sunt aequales. aequilaterum propterea est triangulum ABC, et constitutum est super datâ recta linea terminata AB. Quod erat faciendum.

PROP. II. PROB.

AD datum punctum, datae rectae lineae aequalem rectam lineam ponere.

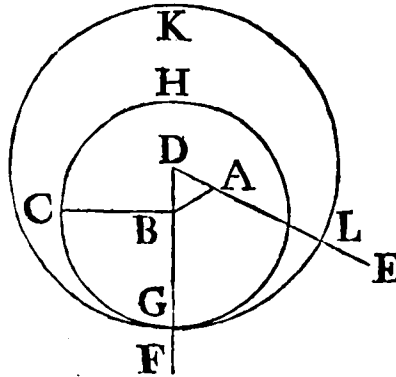
Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC; oportet ad punctum A, rectae BC aequalem rectam lineam ponere.

Ducatur

9

d. Post. 3.

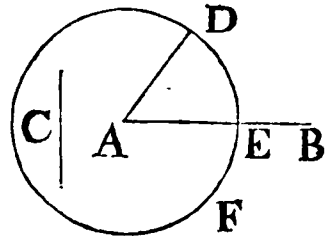
e. Def. 15.



f. Ак. 3.

DATIS duabus rectis lineis inaequalibus, a majore
minori aequalem abscindere.

Ponatur ad punctum A ipsi C aequalis
recta linea AD^a; et centro quidem A, in-
tervallo autem AD describatur circulus
DEF^b. et quoniam A centrum est DEF



a. 2. I.

b. Post. 3.

circuli,

EUCLIDIS ELEMENTORUM

circuli, erit AE ipsi AD aequalis. sed et recta C aequalis est ipsi AD; utraque igitur ipsarum AE, C ipsi AD aequalis erit. quare et recta AE
 q. Ax. 1. ipsi C est aequalis^c. Duabus igitur datis rectis lineis inaequalibus AB et C, a maiore AB minori C aequalis abscissa est. Quod erat faciendum.

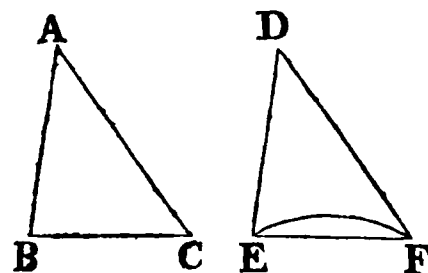
PROP. IV. THEOREMA.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo aequalem, qui aequalibus rectis lineis continetur: et basim basi aequalem habebunt; et triangulum triangulo aequale erit; et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE aequale, latus vero AC ipsi DF; et angulum BAC angulo EDF aequalem. dico, et basim BC basi EF aequalem esse, et triangulum ABC aequale triangulo DEF; et reliquos angulos reliquis angulis aequales, alterum alteri, quibus aequalia latera subtenduntur; nempe angulum ABC angulo DEF, et angulum ACB angulo DFE.

Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF, et puncto quidem A posito in D, recta vero linea AB in ipsa DE; congruet et punctum B puncto E, quod AB ipsi DE sit aequalis. congruente autem AB ipsi DE, congruet et AC recta linea rectae lineae DF, quia BAC angulus aequalis est angulo EDF. quare et punctum C congruet puncto F, quia recta AC est aequalis rectae lineae DF.

sed



LIBER PRIMUS.

11

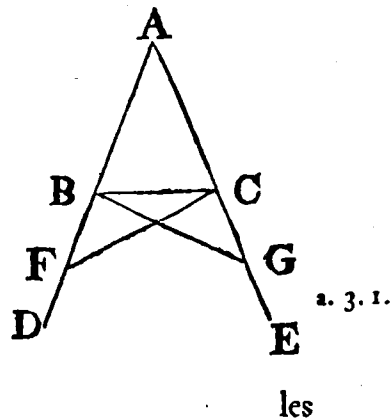
sed et punctum B congruebat puncto E; quare basis BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F, basis BC basi EF non congruit; duae rectae lineae spatium comprehendent, quod fieri non potest^a. Congruet igitur BC basis basi EF, et ^a. Ax. 10. ipsi aequalis erit. Quare et totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, et ipsi erit aequale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsis aequales erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF, et angulus ACB angulo DFE. si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo aequalem, qui aequalibus rectis lineis continetur: et basim basi aequalem habebunt; et triangulum triangulo aequale erit; et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. Quod erat demonstrandum.

PROP. V. THEOR.

ISOSCELIUM triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt aequales; et, productis aequalibus rectis lineis, anguli qui sunt sub basi inter se aequales erunt.

Sit isosceles triangulum ABC, habens latus AB lateri AC aequale, et producantur in directum ipsis AB, AC rectae lineae BD, CE. dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE aequalem esse.

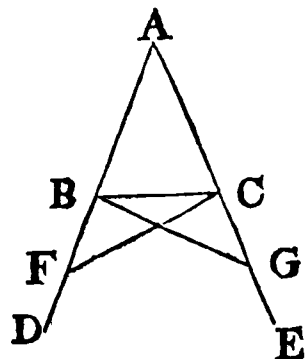
Sumatur enim in recta BD punctum quodvis F; atque a majore AE minori AF aequalis auferatur AG^a, et jungantur FC, GB. quoniam igitur AF est aequalis AG, AB vero ipsi AC; duae FA, AC duabus GA, AB aequa-



EUCLIDIS ELEMENTORUM

les sunt, altera alteri; et angulum FAG communem continent; bafis igitur FC bafis GB est aequalis^b, et triangulum AFC aequale triangulo AGB; et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur; videlicet angulus quidem ACF aequalis angulo ABG, angulus vero AFC angulo AGB. et quoniam tota AF toti AG est aequalis, quarum AB est aequalis ipsi AC; erit et reliqua BF reliquae CG

c. Ax. 3. aequalis^c. ostensa est autem FC aequalis GB; duae igitur BF, FC duabus CG, GB aequales sunt, altera alteri, et angulus BFC aequalis angulo CGB; estque basis ipsorum BC communis; erit igitur et triangulum BFC aequale^b triangulo CGB, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur FBC est aequalis angulo GCB, et angulus BCF angulo CBG. itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF aequalis ostensus est, quorum angulus CBG est aequalis ipsi BCF; erit reliquus ABC reliquo ACB aequalis, et sunt ad basim trianguli ABC. ostensus autem est et FBC angulus aequalis angulo GCB, qui sunt sub bafi. Isoscelium igitur triangulorum &c. Q. E. D.



COR. Hinc omne triangulum aequilaterum est quoque aequiangulum.

PROP. VI. THEOR.

SI trianguli duo anguli inter se sint aequales, et aequales angulos subtendentia latera inter se aequalia erunt.

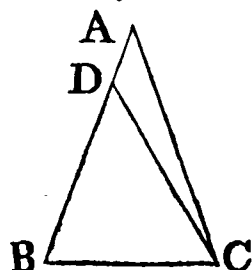
Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB aequalem; dico et AB latus lateri AC aequale esse.

Si

LIBER PRIMUS.

13

Si enim inaequalis est recta AB ipsi AC, altera ipsarum est major. sit major AB; atque a majori AB minori AC aequalis auferatur DB^a, et DC jungatur. quoniam igitur DB est aequalis ipsi AC, communis autem BC, erunt duae DB, BC duabus AC, CB aequales, altera alteri, et angulus DBC angulo ACB est aequalis; basis igitur DC basi AB aequalis est, et triangulum DBC aequale^b triangulo ACB, minus majori; quod est absurdum. non igitur inaequalis est AB ipsi AC; ergo aequalis erit. si igitur trianguli &c. Q. E. D.



a. 3. I.

b. 4. I.

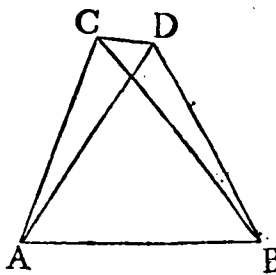
COR. Hinc omne triangulum aequiangulum est quoque aequilaterum.

PROP. VII. THEOR.

SUPER eadem basi, et ad easdem ejus partes, duo tri-
angula non constituentur, quae habent et latera quae
ad alterum basis terminum, et ea quae ad reliquum ter-
minum ducta sunt, inter se aequalia.

Si enim fieri potest, super eadem basi AB, et ad easdem ejus partes constituentur duo triangula ACB, ADB quae habent et latera CA, DA inter se aequalia, et latera CB, DB.

Jungatur CD; vel igitur vertex neutrius trianguli est intra reliquum triangulum, vel vertex alterius est intra reliquum. Primo sit neutrius trianguli vertex intra reliquum; et quoniam AC est aequalis ipsi AD, erit et angulus ACD angulo ADC aequalis^a. est autem angulus ACD major angulo BCD, major igitur est ADC angulus angulo BCD. quare angulus BDC angulo BCD

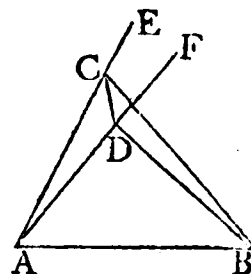


a. 5. P.

multo

multo major erit. rursus quoniam CB est aequalis ipsi DB, et angulus BDC aequalis ^a erit angulo BCD; ostensus autem est ipso major; quod fieri non potest.

Sed sit alterutrius trianguli vertex, puta D, intra reliquum triangulum ACB; quoniam igitur AC est aequalis ipsi AD, erunt anguli ECD, FDC sub basi inter se aequales^a; est autem angulus ECD major angulo BCD, quare FDC angulus major est angulo BCD; multo igitur angulus BDC major est angulo BCD. rursus quoniam CB aequalis est ipsi DB, erit angulus BDC aequalis angulo BCD^a; ostensus autem est BDC angulus eodem BCD major. quod fieri non potest. casus autem in quo vertex unius trianguli cadit in latus alterutrum reliqui demonstratione non eget.



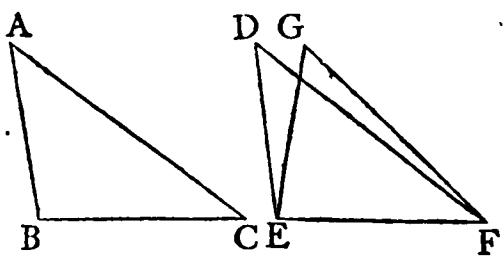
Non igitur super eadem basi, et ad easdem ejus partes constituentur duo triangula, quae habent et latera quae ad alterum basis terminum, et ea quae ad reliquum terminum ducta sunt, inter se aequalia. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, habeant autem et basim basi aequalem; angulum quoque, qui aequalibus lateribus continetur, angulo aequalem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, AB quidem aequale DE, AC vero ipsi DF; habeant autem et basim BC basi EF aequalem. dico angulum quoque BAC angulo EDF aequalem esse.

Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, et puncto quidem

dem B posito in E, rectâ vero lineâ BC in EF; congruet et C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est aequalis. itaque congruente BC ipsi EF, congruent et BA, AC ipsis ED, DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit, latera autem BA, AC lateribus ED, DF non congruunt, sed situm mutant, ut EG, GF; constituentur super eadem basi, et ad easdem ejus partes, duo triangu-

 gula, quae habent et latera quae ad alterum basis terminum, et ea quae ad reliquum ducta sunt, inter se aequalia. non constituuntur autem^a. a. 7. 1. non igitur si basis BC congruit basi EF, non congruent et BA, AC latera lateribus ED, DF. congruent igitur. quare et angulus BAC angulo EDF congruet, et ipsi erit aequalis^b. si igitur duo triangu- &c. b. Ax. 8. Q. E. D.

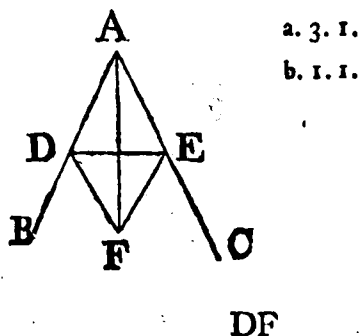
PROP. IX. PROB.

DATUM angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC; itaque oportet ipsum bifariam secare.

Sumatur in AB quodvis punctum D, et a recta linea AC ipsi AD aequalis auferatur^a AE; junctaque DE constitutatur super eâ triangulum aequilaterum^b DEF, et AF jungatur. dico angulum BAC a recta linea AF bifariam secari.

Quoniam enim AD est aequalis ipsi AE, communis autem AF; duae DA, AF duabus EA, AF aequales sunt, altera alteri; et basis



EUCLIDIS ELEMENTORUM

DF est aequalis basi EF; angulus igitur DAF angulo EAF est aequalis^c. quare datus angulus rectilineus BAC a recta linea AF bifariam sectus est. Q. E. F.

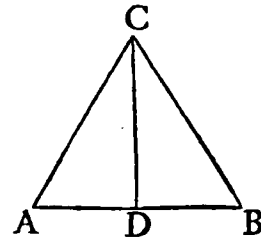
PROP. X. PROB.

DATAM rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata AB; oportet ipsam AB bifariam secare.

- a. 1. 1. Constituatur super eâ triangulum aequilaterum^a ABC, et secetur
b. 9. 1. ACB angulus bifariam^b rectâ linea CD. dico
AB rectam lineam in puncto D bifariam secari.

Quoniam enim AC est aequalis CB, communis autem CD; duae AC, CD duabus BC, CD aequales sunt, altera alteri; et angulus ACD est aequalis angulo BCD; basis igitur AD basi DB



- c. 4. 1. est aequalis^c. recta igitur linea terminata AB bifariam secta est in puncto D. Q. E. F.

PROP. XI. PROB.

DATAE rectae lineae, a puncto in ipsa dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, et datum in ipsa punctum C; oportet a puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.

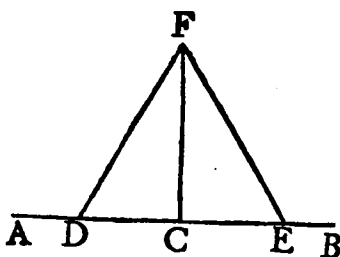
- a. 3. 1. Sumatur in AC punctum quodvis D, ipsique CD aequalis ponatur^a
b. 1. 1. CE, et super DE constituatur triangulum aequilaterum^b DFE, et FC jungatur. dico datae rectae lineae AB a puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC.

Quoniam

LIBER PRIMUS.

17

Quoniam enim DC est aequalis CE, et FC communis; duae DC, CF duabus EC, CF sunt aequales, altera alteri; et basis DF est aequalis basi FE; angulus igitur DCF angulo ECF est aequalis^c, et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectâ lineâ insistens, eos qui deinceps sunt angulos aequales inter se fecerit, rectus^d est uterque aequalium angulorum; ergo uterque ipsorum DCF, FCE est rectus. Datae igitur rectae lineae AB, a puncto in ipsa dato C, ad rectos angulos ducta est recta linea FC. Q. E. F.

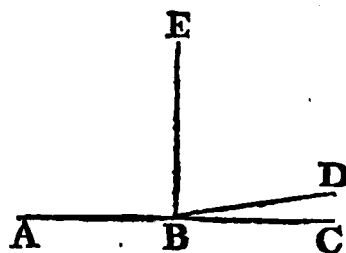


c. 8. 1.

d. 10. Def. 1.

COR. Hinc ostendi potest duas rectas lineas non habere segmentum commune.

Non enim, sed si fieri potest, habeant duae rectae lineae ABC, ABD segmentum commune AB. a puncto B. ducatur BE ad rectos angulos ipsi AB; quoniam igitur recta linea est ABC, erit^d angulus CBE aequalis angulo EBA; similiter quoniam recta linea est ABD, erit angulus DBE angulo EBA aequalis. est igitur angulus DBE ipsi CBE angulo aequalis, minor majori, quod fieri non potest. igitur duae rectae lineae non possunt habere segmentum commune.



PROP. XII. PROB.

SUPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

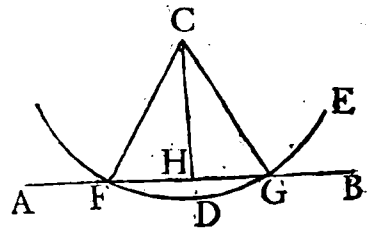
C

Sit

Sit data quidem recta linea AB, datum vero punctum C, quod in ea non est. oportet super datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectae lineae, punctum quodvis D, et centro quidem C, intervallo autem CD circulus describatur^a EGF, quae rectae AB in F, G, occurrat; et FG in H bifariam secetur^b, junganturque CF, CH, CG. dico

super datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse.



Quoniam enim aequalis est FH ipsi HG, communis autem HC, duae FH, HC, duabus GH, HC sunt aequales, altera alteri; et basis CF est aequalis^c basi CG^c; angulus igitur CHF angulo CHG est aequalis^d, et sunt deinceps. quando autem recta linea super recta linea insistens, eos qui deinceps sunt angulos, aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum; et quae insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam cui insistit. super datam igitur rectam lineam infinitam AB a dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. Q. E. F.

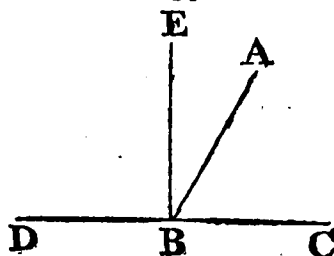
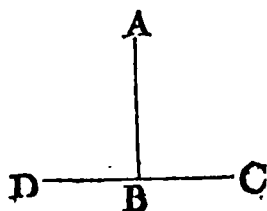
PROP. XIII. THEOR.

CUM recta linea super rectam insistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis aequales efficiet.

Recta enim linea quaedam AB super rectam CD insistens, angulos faciat CBA, ABD. dico CBA, ABD angulos vel duos rectos esse, vel duobus rectis aequales.

^a. Def. 10. Si enim angulus CBA est aequalis ipsi ABD, duo recti sunt^a. sin minus,

minus, ducatur a puncto B ipsi CD ad rectos angulos^b BE. anguli igitur CBE, EBD sunt duo recti^a. et quoniam CBE duobus CBA, ABE^a. Def. 10. est aequalis, communis apponatur EBD; ergo anguli CBE, EBD tribus angulis CBA, ABE, EBD sunt aequales^c. rursus quoniam DBA angulus est aequalis duobus DBE, EBA, communis apponatur ABC; an-



guli igitur DBA, ABC tribus DBE, EBA, ABC aequales sunt. ostensi autem sunt anguli CBE, EBD iisdem tribus aequales; quae vero eidem sunt aequalia, et inter se aequalia sunt^d; igitur et anguli CBE, EBD ipsi DBA, ABC sunt aequales. sed CBE, EBD sunt duo recti; igitur DBA, ABC duobus rectis aequales sunt. ergo cum recta linea &c. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duae rectae lineae non ad easdem partes positae angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis aequales fecerint; ipsae rectae lineae in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duae rectae lineae BC, BD non ad easdem partes positae angulos, qui deinceps sunt, ABC, ABD duobus rectis aequales faciant. dico BD ipsi CB in directum esse.

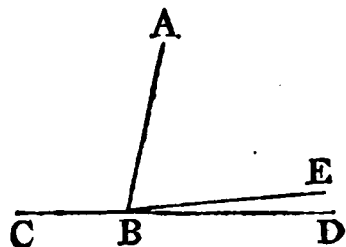
EUCLIDIS ELEMENTORUM

Si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super recta CBE insistit, anguli

a. 13. 1. ABC, ABE duobus rectis sunt aequales^a.

sunt autem et anguli ABC, ABD aequales duobus rectis. anguli igitur CBA, ABE ipsis CBA, ABD aequales erunt. communis auferatur ABC; reliquus igitur ABE

b. 3. Ax. reliquo ABD est aequalis^b, minor majori, quod fieri non potest. non igitur BE est in directum ipsi BC. similiter ostendemus neque aliam quampiam esse praeter BD. in directum igitur est CB ipsi BD. si igitur ad aliquam rectam lineam &c. Q. E. D.

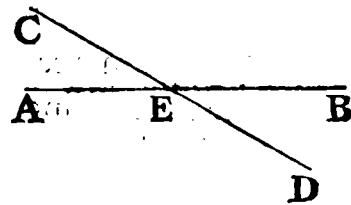


PROP. XV. THEOR.

SI duae rectae lineae se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se aequales efficient.

Duae enim rectae lineae AB, CD se invicem secant in puncto E. dico angulum quidem AEC angulo DEB, angulum vero CEB angulo AED aequalem esse.

Quoniam enim recta linea AE super recta CD insistens angulos facit CEA, AED; erunt CEA, AED duobus rectis



a. 13. 1. aequales^a. rursus quoniam recta linea DE

super recta AB insistens facit angulos AED, DEB, erunt AED, DEB anguli aequales duobus rectis^a. ostensi autem sunt anguli quoque CEA, AED duobus rectis aequales; anguli igitur CEA, AED angulis AED, DEB aequales sunt. communis auferatur AED; reliquus igitur CEA reliquo

reliquo BED est aequalis. simili ratione ostendetur et angulos CEB, AED aequales esse. si igitur duae rectae lineae &c. Q. E. D.

COR. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis aequales.

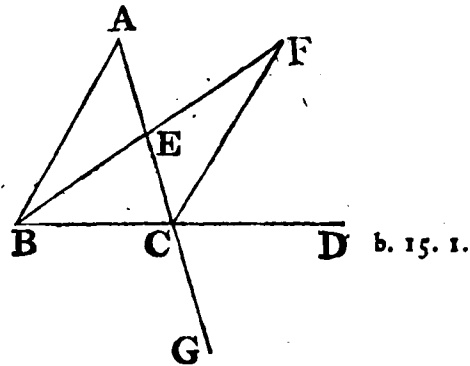
COR. 2. Et propterea, omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis aequales.

PROP. XVI. THEOR.

OMNIS trianguli, uno latere producto, exterior angulus utrovis interiore et opposito est major.

Sit triangulum ABC, et unum ipsius latus BC ad D producat. dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore et opposito, videlicet CBA, BAC majorem esse.

Secetur AC bifariam in E^a, et juncta BE producat ad F, ponaturque ipsi BE aequalis EF; jungatur etiam FC, et AC ad G producat.



Quoniam igitur AE quidem est aequalis EC, BE vero ipsi EF, duae AE, EB duabus CE, EF aequales sunt, altera alteri; et angulus AEB, angulo CEF est aequalis^b, ad verticem enim sunt. Basis igitur AB aequalis est basi CF, et AEB triangulum triangulo CEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales^c, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur c. 4. 1. BAE est aequalis angulo ECF. major autem est angulus ECD ipso ECF; quare major est angulus ACD angulo BAE. similiter recta lineam

EUCLIDIS ELEMENTORUM

neâ BC bifariam sectâ, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD
d. 15. 1. angulus ^d angulo ABC major. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

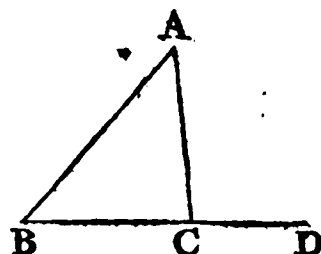
OMNIS trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum ABC; dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse.

Producatur enim BC ad D; et quoniam trianguli ABC exterior angulus est ACD, erit ACD major interiore et oppo-

a. 16. 1. fito ABC^a; communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB angulis ABC, ACB

b. 13. 1. majores sunt. sed ACD, ACB sunt aequales duobus rectis^b; anguli igitur ABC, BCA duobus rectis sunt minores. similiter ostendemus angulos quoque BAC, ACB, itemque CAB, ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

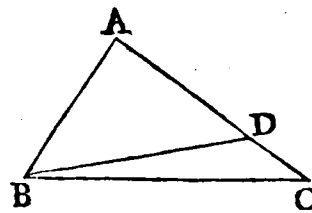


PROP. XVIII. THEOR.

OMNIS trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus; dico et ABC angulum angulo BCA majorem esse.

Quoniam enim AC major est quam AB,
a. 3. 1. ponatur ipsi AB aequalis AD^a, et BD



jungatur.

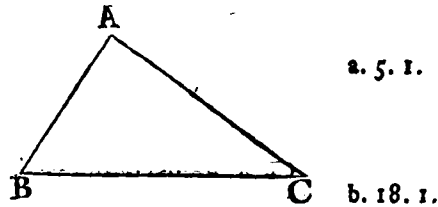
jungatur. et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit ADB major interiore et opposito DCB^b. aequalis autem est ADB ipsi^b. 16. 1. ABD, quod et latus AB lateri AD sit aequale^c; major igitur est et c. 5. 1. ABD angulus angulo ACB; quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

PROP. XIX. THEOR.

OMNIS trianguli major angulus a majore latere subtenditur.

Sit triangulum ABC habens ABC angulum majorem angulo BCA. dico et latus AC latere AB majus esse.

Si enim non est majus, vel AC est aequale ipsi AB, vel ipso minus. aequale autem non est, nam et angulus ABC angulo ACB aequalis esset^a; non est autem; non igitur AC ipsi AB est aequale. sed neque minus est latus AC ipso AB; esset enim et angulus ABC angulo ACB minor^b; atqui non est; non igitur AC latus minus est ipso AB. ostensum autem est neque aequale esse; est igitur AC ipso AB majus. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.



PROP. XX. THEOR.

OMNIS trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC; dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta; videlicet latera quidem BA,
AC

EUCLIDIS ELEMENTORUM

AC majora latere BC; latera vero AB, BC majora latere AC; et latera BC, CA majora ipso AB.

Producatur enim BA ad punctum D, ponaturque ipsi CA aequalis

a. 3. 1. AD^a, et DC jungatur.

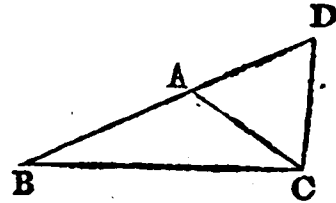
Quoniam igitur DA est aequalis AC, erit et angulus ADC angulo

b. 5. 1. ACD aequalis^b. sed BCD angulus major

est angulo ACD; angulus igitur BCD angulo ADC est major. et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC, majorem autem angulum majus latus subtendit^c, erit latus DB

c. 19. 1. latere BC majus. est autem DB aequale ipsis BA, AC; majora igitur

sunt latera BA, AC ipso BC. similiter ostendemus, et latera quidem AB, BC majora esse latere CA; latera vero BC, CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.



PROP. XXI. THEOR.

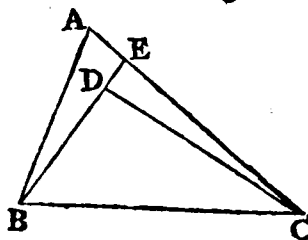
SI a terminis unius lateris trianguli duae rectae lineae intra constituentur, hae reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC a terminis B, C duae rectae lineae intra constituentur BD, DC. dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem esse, continere vero angulum BDC majorem angulo BAC.

Producatur enim BD ad E; et quoniam omnis trianguli duo latera

a. 20. 1. reliquo sunt majora^a, erunt trianguli ABE duo latera BA, AE, majora latere BE. communis apponatur EC; sunt igitur latera BA, AC
ipsis

ipsis BE, EC majora^b. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE, b. Ax. 4. ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB; sunt igitur CE, EB majora ipsis CD, DB^b. sed ostensum est BA, AC majora esse BE, EC; multo igitur BA, AC, ipsis BD, DC majora sunt.



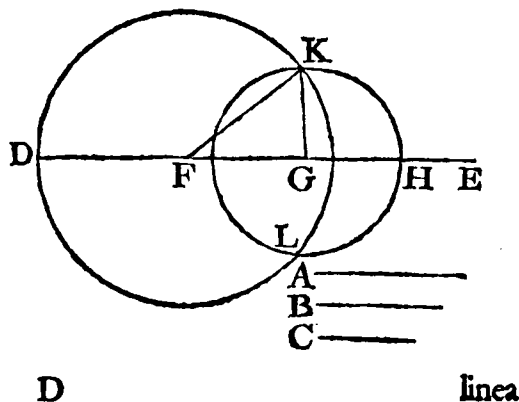
Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito est major^c, erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. ea-c. 16. 1, dem ratione et trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major. sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB; multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. si igitur a terminis unius lateris &c. Q. E. D.

PROP. XXII. PROB.

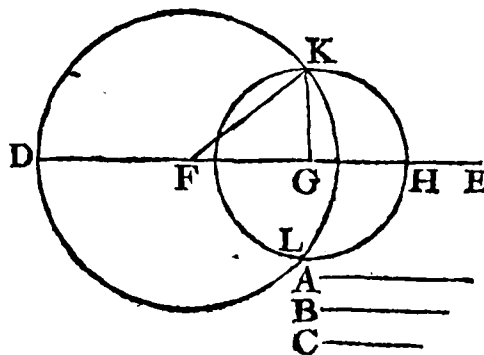
EX tribus rectis lineis, quae tribus rectis lineis datis aequales sunt, triangulum constituere. oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas^a. a. 20. 1.

Sint tres datae rectae lineae A, B, C, quarum duae reliqua majores sunt, quomodocunque sumptae, ut scilicet A, B, quidem sint majores quam C; A, C, vero majores quam B; et praeterea B, C majores quam A. itaque oportet ex rectis lineis aequalibus ipsis A, B, C, triangulum constituere.

Exponatur aliqua recta



- linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi
 a. 3. 1. quidem A aequalis ^a DF, ipsi vero B aequalis FG, et ipsi C aequalis
 b. Post. 3. GH; et centro F, intervallo autem FD circulus describatur ^b DKL.
 rursusque centro G et inter-
 vallo GH alius circulus KLH
 describatur, et jungantur KF,
 KG. dico ex tribus rectis li-
 neis aequalibus ipsis A, B, C,
 triangulum KFG constitutum
 esse.



- Quoniam enim punctum
 F centrum est DKL circuli,
 c. Def. 15. erit FD aequalis FK^c; sed FD est aequalis rectae lineae A; est igitur
 FK aequalis ipsi A. rursus quoniam punctum G centrum est circuli
 LKH, erit GH aequalis GK^c; sed GH est aequalis ipsi C; igitur et
 GK ipsi C aequalis erit. est autem et FG aequalis B; tres igitur rectae
 lineae KF, FG, GK tribus A, B, C aequales sunt. ex tribus igitur
 rectis lineis KF, FG, GK quae sunt aequales tribus datis rectis lineis
 A, B, C, triangulum constitutum est KFG. Q. E. F.

PROP. XXIII. PROB.

AD datam rectam lineam, et ad datum in ea punctum,
 dato angulo rectilineo aequalem angulum rectilineum
 constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A,
 et datus angulus rectilineus DCE; oportet ad datam rectam lineam
 AB, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE ac-
 qualem angulum rectilineum constituere.

Sumantur

LIBER PRIMUS.

27

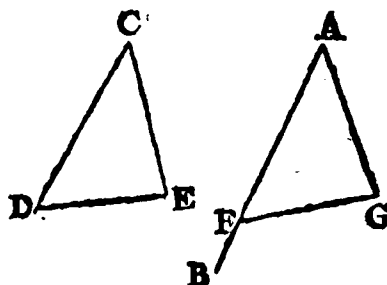
Sumantur in utraque ipsarum CD, CE quaevis puncta D, E, jungaturque DE; et ex tribus rectis lineis, quae aequales sint tribus CD,

DE, EC triangulum constituatur^a

AFG, ita ut CD sit aequalis AF, et CE ipsi AG, et DE ipsi FG.

Quoniam igitur duae DC, CE duabus FA, AG aequales sunt, altera alteri, et basis DE est aequalis basi

FG; angulus DCE aequalis erit angulo FAG^b. Ad datam igitur b. 8. r.; rectam lineam AB, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE aequalis angulus rectilineus constitutus est FAG. Q. E. F.

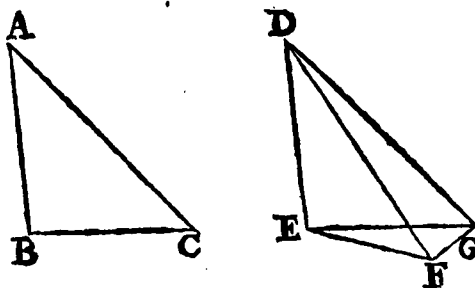


b. 22. 1,

PROP. XXIV. THEOR.

SI duo triacula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui aequalibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triacula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB aequale lateri DE, latus vero AC aequale DF; at angulus BAC angulo EDF sit major. dico, basim BC basi EF majorem esse.



Rectarum enim DE, DF sit DE ea quae non major est altera DF, et constituatur ad rectam lineam DE, et ad punctum in ea D,

D 2

angulo

- a. 23. 1. angulo BAC aequalis angulus EDG^a; ponaturque alterutri ipsarum
 b. 3. 1. AC, DF aequalis DG^b, et EG, GF jungantur.

Itaque quoniam AB quidem est aequalis DE, AC vero ipsi DG, duae BA, AC duabus ED, DG aequales sunt, altera alteri; et angulus BAC est aequalis angulo EDG;

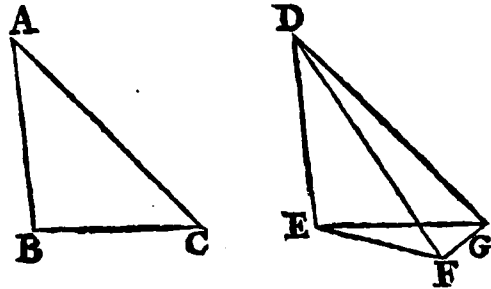
basis igitur BC basi EG est ae-

- c. 4. 1. qualis^c. rursus quoniam aequalis est DG ipsi DF, est angulus DFG

- d. 5. 1. angulo DGF aequalis^d; major autem est angulus DGF angulo EGF, erit itaque DFG angulus

angulo EGF major; multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. et quoniam triangulum est EFG angulum EFG majorem habens an-

- e. 19. 1. gulo EGF, majori autem angulo latus majus subtenditur^e; erit latus EG latere EF majus. sed EG latus est aequale lateri BC; ergo et BC ipso EF majus erit. si igitur duo triangula &c. Q. E. D.



PROP. XXV. THEOR.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui aequalibus lateribus continetur, majorem habebunt.

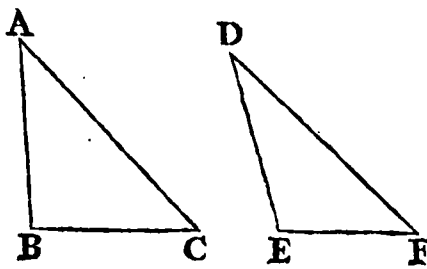
Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB aequale lateri DE, et latus AC lateri DF; basis autem BC basi EF sit major. dico, et angulum BAC angulo EDF majorem esse.

Si enim non est major, vel aequalis est vel minor. aequalis autem non est angulus BAC angulo EDF, esset enim et basis BC basi EF aequalis^a.

LIBER PRIMUS.

29

aequalis^a. Non est autem; non igitur aequalis est BAC angulus an- a. 4. 1.
gulo EDF. sed neque minor; mi-
nor enim esset et basis BC basi EF^b.
atqui non est; non igitur angulus
BAC angulo EDF est minor. osten-
sum autem est neque aequalem esse;
angulus igitur BAC angulo EDF
major erit. si igitur duo trian-
gula &c. Q. E. D.

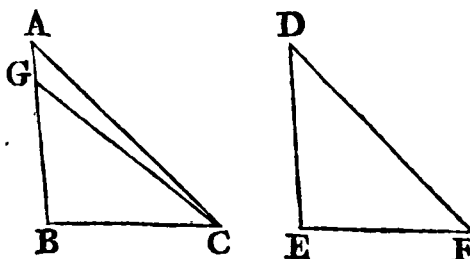


b. 24. 1.

PROP. XXVI. THEOR.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis aequales
habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri ae-
quale, vel quod aequalibus adjacet angulis, vel quod uni
aequalium angulorum subtenditur; et reliqua latera reli-
quis lateribus aequalia, alterum alteri, et reliquum angu-
lum reliquo angulo aequalem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duos angulos ABC, BCA duo-
bus angulis DEF, EFD aequales habeant, alterum alteri, videlicet an-
gulum quidem ABC aequalem an-
gulo DEF, angulum vero BCA
angulo EFD; habeant autem et
unum latus uni lateri aequale; et
primo, quod aequalibus adjacet
angulis, nempe latus BC lateri EF.
dico et reliqua latera reliquis late-
ribus aequalia habere, alterum alteri, latus scilicet AB lateri DE, et la-
tus



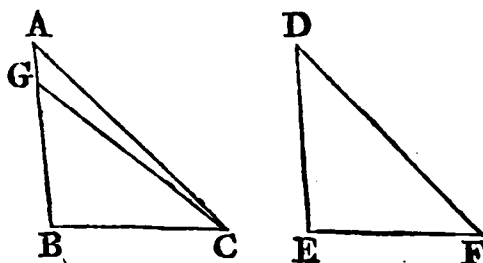
tus

EUCLIDIS ELEMENTORUM

tus AC lateri DF; et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF aequalem.

Si enim inaequalis est recta linea AB ipsi DE, una ipsarum major est. sit major AB, ponaturque BG aequalis DE, et GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est aequalis DE, BC vero ipsi EF, duae GB, BC duabus DE, EF aequales sunt, altera alteri; et angulus GBC est aequalis angulo DEF: basis

a. 4. 1. igitur GC basi DF est aequalis^a, et GBC triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur; ergo GCB angulus est aequalis an-

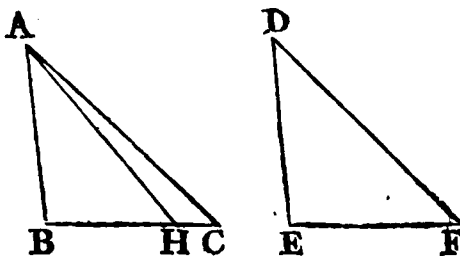


gulo DFE; sed angulus DFE angulo BCA aequalis ponitur; quare et BCG angulus angulo BCA est aequalis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inaequalis est AB ipsi DE; ergo aequalis erit. est autem et BC aequalis EF; itaque duae AB, BC duabus DE, EF aequales sunt, altera alteri, et angulus ABC aequalis est angulo DEF; basis igitur AC basi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est aequalis^a.

Sed rursus sint latera quae aequalibus angulis subtenduntur aequalia, ut AB ipsi DE; dico rursus, et reliqua latera reliquis lateribus aequalia esse, AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF; et adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF aequalem.

Si enim inaequalis est recta linea BC ipsi EF, una ipsarum major est. sit major BC, si fieri potest, ponaturque BH aequalis EF, et AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est aequalis EF, AB vero ipsi DE; duae AB, BH duabus DE, EF aequales sunt, altera alteri; et aequales angulos continent; ergo basis AH basi DF est aequalis, et ABH
triangulum

triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. aequalis igitur est angulus BHA angulo EFD. sed EFD est aequalis angulo BCA^b; b. ex h^{yp}; ergo et BHA angulus angulo BCA est aequalis, trianguli scilicet AHC exterior angulus BHA aequalis interiori et opposito BCA, quod fieri non potest^c. quare non inaequalis est BC ipsi EF; aequalis igitur; est autem et AB aequalis DE; duae igitur AB, BC duabus DE, EF aequales sunt, altera alteri; angulosque aequales continent; quare basis AC aequalis est basi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est aequalis. si igitur duo triacula &c. Q. E. D.



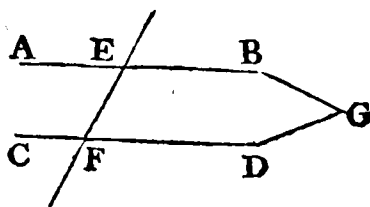
c. 16. 1.

PROP. XXVII. THEOR.

SI in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se aequales fecerit, parallelae erunt rectae lineae.

In duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens alternos angulos AEF, EFD aequales inter se faciat; dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse.

Si enim non est parallela, productae AB, CD, vel ad partes BD convenient, vel ad partes AC. producantur, convenerintque ad partes BD in puncto G; itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major est interiore et opposito EFG^a; sed et aequalis, a. 16. 1. quod



EUCLIDIS ELEMENTORUM

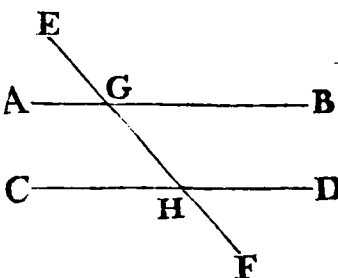
quod fieri non potest. non igitur AB, CD productae ad partes BD convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes AC. quae
 b. Def. 35. vero ad neutras partes conveniunt, parallelae inter se sunt^b. parallela igitur est AB ipsi CD. quare si in duas rectas lineas &c. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

SI in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, et opposito, et ad easdem partes aequalem fecerit; vel interiores et ad easdem partes duobus rectis aequales: parallelae erunt inter se rectae lineae.

In duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori et opposito ad easdem partes GHD aequalem faciat; vel interiores et ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis aequales. dico rectam lineam AB rectae CD parallelam esse.

Quoniam enim EGB angulus aequalis est angulo GHD, angulus
 a. 15. 1. autem EGB angulo AGH^a, erit et angulus AGH angulo GHD aequalis;
 b. 27. 1. et sunt alterni; parallela^b igitur est AB ipsi CD. rursus quoniam anguli BGH,
 c. ex hyp. GHD duobus rectis sunt aequales^c, et sunt
 d. 13. 1. AGH, BGH aequales duobus rectis^d; erunt anguli AGH, BGH angulis BGH, GHD aequales. communis auferatur BGH; reliquus igitur AGH est aequalis reliquo GHD; et sunt alterni; ergo AB ipsi CD parallela erit. si igitur in duas rectas lineas &c. Q. E. D.



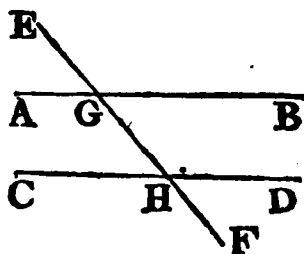
PROP. XXIX.

PROP. XXIX. THEOR.

IN parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se aequales; et exteriorem interiori et opposito et ad easdem partes aequalem; et interiores et ad easdem partes, duobus rectis aequales efficiet. Vid. Notas ad hanc Prop.

In parallelas enim rectas lineas AB, CD recta linea incidat EF. dico alternos angulos AGH, GHD inter se aequales efficere; et exteriorem EGB interiori et opposito et ad easdem partes GHD aequalem; et interiores et ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis aequales.

Si enim inaequalis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum maior est; fit maior AGH. et quoniam AGH angulus maior est angulo GHD, communis apponatur BGH; anguli igitur AGH, BGH angulis BGH, GHD majores sunt. sed anguli AGH, BGH sunt aequales duobus rectis^a; ergo BGH, GHD anguli sunt duobus rectis minores. quae vero cum aliqua recta angulos interiores et ad easdem partes minores duobus



a. 13. 1.

rectis efficiunt, in infinitum productae inter se conveniunt*; ergo rectae lineae AB, CD in infinitum productae inter se convenient. atqui non conveniunt, cum parallelae ponantur. non igitur inaequalis est angulus AGH angulo GHD; est igitur aequalis. angulus autem AGH aequalis est angulo EGB^b; ergo et EGB ipsi GHD aequalis erit. communis apponatur BGH; anguli igitur EGB, BGH sunt aequales angulis BGH, GHD; sed EGB, BGH aequales^a sunt duobus rectis; ergo et BGH, GHD duobus rectis aequales erunt. in parallelas igitur rectas lineas &c. Q. E. D.

* Ax. 12. Vid. Notas ad hanc Prop.

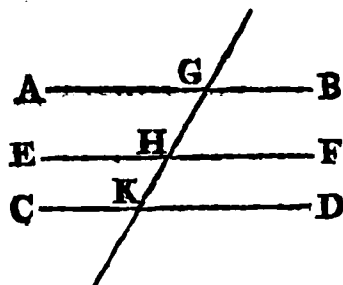
b. 15. 1.

PROP. XXX. THEOR.

QUAE eidem rectae lineae sunt parallelae, et inter se sunt parallelae.

Sit utraque ipsarum AB, CD ipsi EF parallela; dico et AB ipsi CD parallelam esse.

Incidat enim in ipsas recta linea GHK; et quoniam in parallelas rectas lineas AB, EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est aequalis^a. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF, CD recta linea incidit GK, aequalis est GHF angulus angulo GKD^a. ostensus autem est et angulus AGK angulo GHF aequalis; ergo et AGK ipsi GKD aequalis erit. et sunt alterni; parallela igitur est AB ipsi CD^b. Ergo quae eidem rectae lineae &c. Q. E. D.



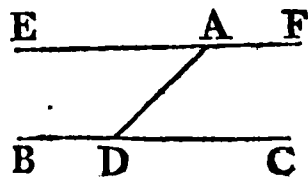
PROP. XXXI. PROB.

PER datum punctum, datae rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC; oportet per A punctum ipsi BC rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in BC quodvis punctum D, et jungatur AD; constituaturque ad rectam lineam DA, et ad punctum in ipsa A, angulo ADC aequalis^a DAE; et in directum ipsi EA recta linea AF producat.

a. 23. 1. qualis angulus^a DAE; et in directum ipsi EA recta linea AF producat. Quoniam



Quoniam igitur in duas rectas lineas BC, EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD, ADC inter se aequales efficit, EF ipsi BC parallela erit^b. Per datum igitur punctum A datae rectae lineae BC^{b. 27. 1.} parallela ducta est recta linea EAF. Q. E. F.

PROP. XXXII. THEOR.

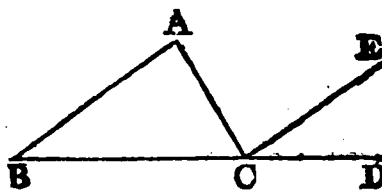
OMNIS trianguli, uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis est aequalis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis aequales sunt.

Sit triangulum ABC; et unum ipsius latus BC in D producat. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus et oppositis CAB, ABC aequalem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse aequales.

Ducatur enim per punctum C ipsi AB rectae lineae parallela * CE.^{a. 31. 1.} et quoniam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC, ACE inter se aequales sunt^b.

b. 29. 1.

rursus quoniam AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est aequalis^b. ostensus autem est angulus ACE aequalis angulo BAC; quare totus



ACD exterior angulus aequalis est duobus interioribus et oppositis CAB, ABC. communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB tribus CBA, BAC, ACB aequales sunt. sed anguli ACD, ACB sunt aequales duobus rectis^c; ergo et CBA, BAC, ACB duobus rectis sunt^{c. 13. 1.} aequales. Omnis igitur trianguli uno latere producto &c. Q. E. D.

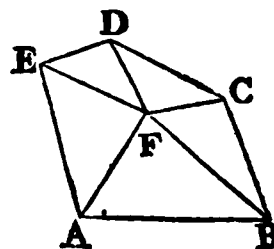
E 2

COR. 1.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

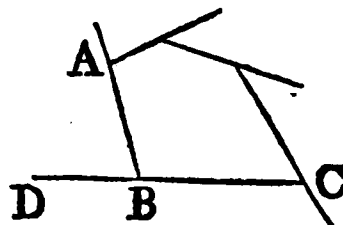
COR. 1. Omnes simul anguli interiores cujuscunque figurae rectilineae, una cum quatuor rectis angulis, conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figurae.

Nam figura quaevis rectilinea ABCDE dividi potest in tot triangula quot sunt ejus latera, ducendo scilicet rectas a puncto F intra figuram ad omnes ejus angulos. triangulorum autem omnes anguli, per praecedentem, simul aequales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est quot sunt latera figurae. omnes autem iidem anguli aequales sunt angulis figurae, una cum angulis ad F verticem communem triangulorum, hoc est una cum quatuor rectis^a. ergo omnes anguli figurae una cum quatuor rectis aequales sunt bis tot rectis quot sunt latera.



COR. 2. Omnes simul anguli exteriores cujuscunque figurae rectilineae aequales sunt quatuor rectis.

Angulus enim interior ABC simul cum
D. 13. 1. exteriore adjacente ABD, aequalis^b est duobus rectis; ergo omnes interiores simul cum exterioribus aequales sunt bis tot rectis quot sunt latera figurae, hoc est, per Corollarium praecedens, omnibus interioribus angulis figurae una cum quatuor rectis. Ergo exteriores aequales sunt quatuor rectis.



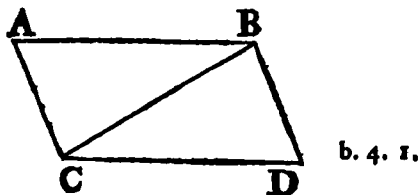
PROP. XXXIII. THEOR.

QUAE aequales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectae lineae, et ipsae aequales et parallelae sunt.

Sint

Sint aequales et parallelae AB, CD, et ipsas jungant ad easdem partes rectae lineae AC, BD; dico AC, BD aequales, et parallelas esse.

Jungatur enim BC; et quoniam AB parallela est CD, in ipsasque incidit BC, alterni anguli ABC, BCD aequales sunt^a. et quoniam AB^{a. 29. 1.} est aequalis CD, communis autem BC, duae AB, BC duabus DC, CB sunt aequales; et angulus ABC aequalis est angulo BCD; basis igitur AC basi BD est aequalis^b, triangulumque ABC triangulo BCD, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt^b, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD est aequalis. et quoniam in duas rectas lineas AC, BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB, CBD aequales inter se efficit, parallela est AC ipsi BD^c. ostensa autem est et eidem aequalis. Quae igitur aequales et^{c. 27. 1.} parallelas &c. Q. E. D.



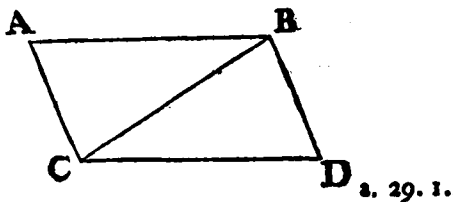
PROP. XXXIV. THEOR.

PARALLELOGRAMMORUM spatiorum latera quae ex opposito, et anguli, inter se aequalia sunt; et diameter ea bifariam secat.

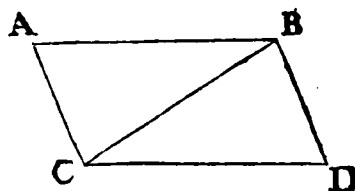
Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ABCD parallelogrammi latera quae ex opposito et angulos, inter se aequalia esse; et diametrum BC ipsum bifariam secare.

Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, et in ipsas incidit recta linea BC, anguli alterni ABC, BCD inter se aequales sunt^a.

rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, et in ipsas incidit BC, alterni anguli



- a. 29. 1. anguli ACB, CBD aequales sunt inter se^a. duo igitur triacula sunt ABC, CBD, quae duos angulos ABC, BCA duobus angulis BCD, CBD aequales habent, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale quod est ad aequales angulos, commune utrique BC; erga et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo aequalem^b; aequale igitur est latus quidem AB lateri CD, latus vero AC ipsi BD, et angulus BAC angulo BDC aequalis. et quoniam angulus ABC est aequalis angulo BCD, et angulus CBD angulo ACB; erit totus angulus ABD aequalis toti ACD. ostensus autem est et angulus BAC angulo BDC aequalis; parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quae ex opposito, et anguli inter se aequalia sunt. dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim aequalis est AB ipsi CD, communis autem BC; duae AB, BC duabus DC, CB aequales sunt, altera alteri; et angulus ABC aequalis est angulo BCD; triangulum igitur ABC triangulo BCD aequale erit^c. Ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Q. E. D.

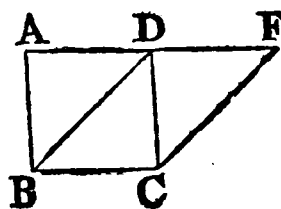


PROP. XXXV. THEOR.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se aequalia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF super eadem basi BC, et in eisdem parallelis AF, BC constituta. dico ABCD parallelogrammum EBCF parallelogrammo aequale esse.

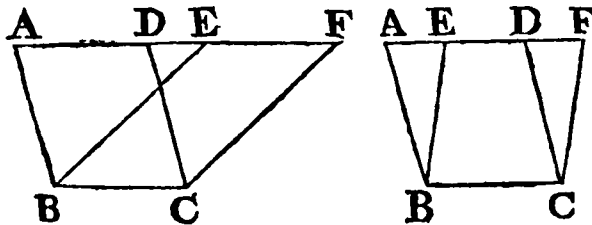
Si enim parallelogrammorum ABCD, DBCF latera AD, DF basi BC opposita, in eodem



puncto

puncto D terminata fuerint, manifestum est utrumque parallelogrammum duplum esse trianguli BDC^a; quare et inter se sunt aequalia. a. 34. 1.

Non autem sint parallelogrammorum ABCD, EBCF latera AD, EF basi opposita, in eodem puncto terminata; et quoniam parallelogrammum est ABCD, aequalis est AD ipsi BC^a; eadem quoque ratione et EF aequalis est BC; quare et AD ipsi EF aequalis erit^b; et b. Ax. 1. communis est DE; tota igitur vel reliqua AE toti vel reliquae DF est



aequalis^c. est autem et AB aequalis DC; ergo duae EA, AB duabus c. Ax. 2. 3. FD, DC aequales sunt, altera alteri; et angulus FDC aequalis est angulo EAB exterior interiori^d; basi igitur EB basi FC est aequalis, et d. 29. 1. EAB triangulum aequale^e triangulo FDC. auferatur triangulum FDC e. 4. 1. e trapezio ABCF, et ex eodem trapezio auferatur triangulum EAB, reliquum igitur parallelogrammum ABCD aequale erit reliquo parallelogrammo EBCF^f. Ergo parallelogramma super eadem basi &c. f. Ax. 3. Q. E. D.

PROP. XXXVI. THEOR.

PARALLELOGRAMMA super aequalibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se aequalia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EFGH super aequalibus basibus BC, FG, et in eisdem parallelis AH, BG constituta; dico parallelogrammum ABCD ipsi EFGH aequale esse.

Jungantur

EUCLIDIS ELEMENTORUM

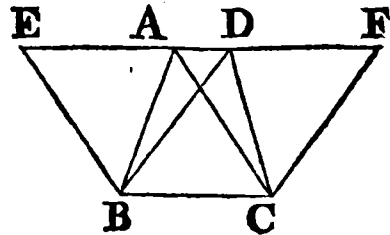
- Jungantur enim BE, CH; et quoniam aequalis est BC ipsi FG, et
 a. 34. 1. FG ipsi EH^a, erit et BC ipsi EH aequalis; suntque parallelae, et ip-
 fas conjungunt BE, CH. quae autem **A D E H**
 aequales et parallelas ad easdem par-
 tes conjungunt, aequales et parallelae
 b. 33. 1. sunt^b; ergo EB, CH et aequales sunt
 et parallelae. parallelogrammum igitur **B C F G**
 c. 35. 1. est EBCH, et aequale ipsi ABCD^c,
 basim enim eandem habet BC, et in eisdem parallelis BC, AD consti-
 tuitur. simili ratione et EFGH parallelogrammum eidem EBCH est
 aequale. Ergo et parallelogrammum ABCD est aequale ipsi EFGH.
 Parallelogramma igitur super aequalibus basibus &c. Q. E. D.

PROP. XXXVII. THEOR.

TRIANGULA super eâdem basi, et in eisdem parallelis
 constituta, inter se aequalia sunt.

Sint triangula ABC, DBC super eadem basi BC, et in eisdem paral-
 lelis AD, BC constituta. dico ABC triangulum triangulo DBC aequale
 esse.

- Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta, et per B quidem
 ipsi CA parallela ducatur BE; per C vero **E A D F**
 a. 31. 1. ipsi BD parallela ducatur CF^a. Paralle-
 logrammum igitur est utrumque ipsorum
 EBCA, DBCF; et parallelogrammum
 b. 35. 1. EBCA est aequale ipsi DBCF^b; etenim
 super eâdem sunt basi BC, et in eisdem
 parallelis BC, EF; estque parallelogrammi quidem EBCA dimidium
 c. 34. 1. ABC triangulum^c, diameter enim AB ipsum bifariam secat; parallelo-
 grammi



LIBER PRIMUS.

41

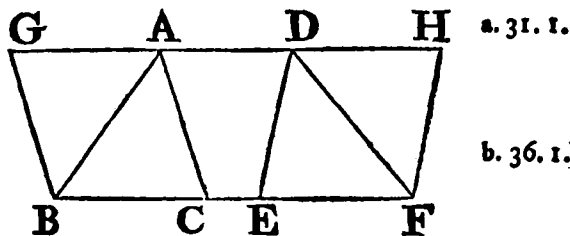
grammi vero DBCF dimidium triangulum DBC^c, ipsum enim bifariam^c. 34. 1. secatur diameter DC. aequalium autem dimidia inter se aequalia sunt^d; d. Ax. 7. ergo triangulum ABC triangulo DBC est aequale. Triangula igitur super eadem basi &c. Q. E. D.

PROP. XXXVIII. THEOR.

TRIANGULA super basibus aequalibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt aequalia.

Sint triangula ABC, DEF super aequalibus basibus BC, EF et in eisdem parallelis BF, AD constituta. dico ABC triangulum DEF triangulo aequale esse.

Producatur enim AD ex utraque parte in G, H puncta, et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG, per F vero ducatur FH parallela ipsi ED^a. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum GBCA, DEFH; atque est GBCA aequale ipsi DEFH^b; super aequalibus enim sunt basibus BC, EF et in eisdem parallelis BF,



GH; parallelogrammi vero GBCA dimidium est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secatur; et parallelogrammi DEFH dimidium est triangulum DEF^c, diameter enim DF ipsum secatur bifariam^c. 34. 1. aequalium autem dimidia inter se aequalia sunt^d; ergo ABC triangulum triangulo DEF est aequale. Triangula igitur super aequalibus basibus &c. Q. E. D.

F

PROP. XXXIX.

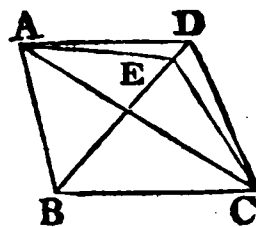
EUCLIDIS ELEMENTORUM

PROP. XXXIX. THEOR.

TRIANGULA aequalia super eadem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

Sint aequalia triangula ABC, DBC super eadem basi BC constituta, et ad easdem partes; dico in eisdem esse parallelis.

Jungatur enim AD, dico AD parallelam esse ipsi BC; si enim non
 a. 31. 1. est, ducatur per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE^a, et EC
 jungatur. aequale igitur est ABC triangulum tri-
 b. 37. 1. angulo EBC^b, super eadem enim est basi BC, et
 in eisdem parallelis BC, AE. sed ABC triangulum
 triangulo DBC est aequale; ergo et triangulum
 DBC aequale est EBC triangulo, majus minori,
 quod fieri non potest. Non igitur AE ipsi BC
 parallela est. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam
 esse, praeter ipsam AD; ergo AD ipsi BC est parallela. Triangula igitur
 aequalia &c. Q. E. D.

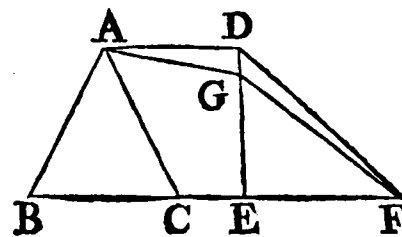


PROP. XL. THEOR.

TRIANGULA aequalia super basibus aequalibus, et ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

Sint aequalia triangula ABC, DEF super aequalibus basibus BC, EF constituta, et ad easdem partes; dico etiam in eisdem esse parallelis.

Jungatur enim AD, dico AD ipsi BF parallelam esse. Nam si non est,



ducatur

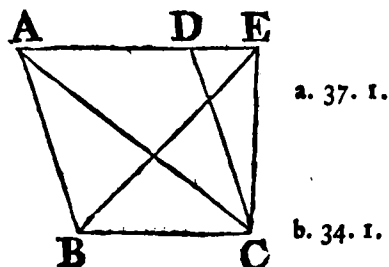
ducatur per A. ipsi BF parallela ^a AG, et GF jungatur. Triangulum ^{a. 31. 1.} igitur ABC triangulo GEF est aequale ^b, sunt enim super aequalibus ^{b. 38. 1.} basibus BC, EF, et in eisdem parallelis BF, AG. sed triangulum ABC aequale est triangulo DEF; ergo et triangulum DEF triangulo GEF aequale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AG ipsi BF est parallela. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, praeter AD. Ergo AD ipsi BF parallela est. Aequalia igitur triangula &c. Q. E. D.

PROP. XLI. THEOR.

SI parallelogrammum et triangulum eandem basim habeant, in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD et triangulum EBC basim habeant eandem BC, et in eisdem sint parallelis BC, AE; dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse.

Jungatur enim AC; triangulum igitur ABC triangulo EBC est aequale ^a, etenim super eadem basi BC, et in eisdem sunt parallelis BC, AE. sed ABCD parallelogrammum duplum est trianguli ABC ^b, diameter enim AC ipsum bifariam secat; quare et ABCD ipsius trianguli EBC duplum erit. si igitur parallelogrammum &c.



Q. E. D.

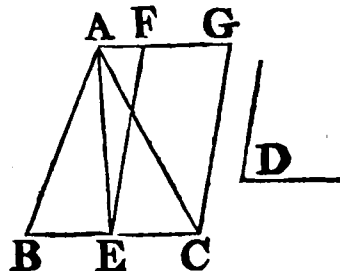
PROP. XLII. PROB.

DATO triangulo aequale parallelogrammum, in angulo rectilineo dato angulo aequali, constituere.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. itaque oportet, dato triangulo ABC aequale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D aequali.

- a. 10. 1. Secetur BC bifariam^a in E, jungatur AE, et ad rectam lineam EC
 b. 23. 1. atque ad punctum in ea E, constituatur angulus CEF aequalis ipsi D^b;
 c. 31. 1. et per A quidem ipsi EC parallela ducatur AG^c, per C vero ipsi EF ducatur parallela CG^c. parallelogrammum igitur est FECG. et quoniam BE est aequalis EC, erit et ABE triangulum triangulo AEC aequale^d, super aequalibus enim sunt basibus BE, EC, et in eisdem BC, AG parallelis; ergo triangulum ABC trianguli AEC est duplum. est autem et parallelogrammum FECG duplum trianguli AEC^e, basim enim eandem habet, et in eisdem est parallelis. aequale igitur est FECG parallelogrammum triangulo ABC, habetque CEF angulum aequalem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC aequale parallelogrammum FECG constitutum est, in angulo CEF qui angulo D est aequalis. Q. E. F.



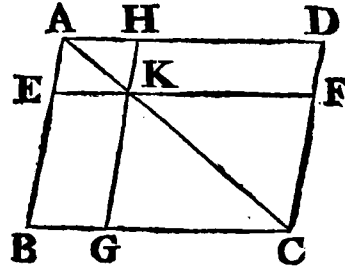
PROP. XLIII. THEOR.

OMNIS parallelogrammi spatii eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt aequalia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC, et circa ipsam AC parallelogramma quidem sint EH, FG, quae vero complementa dicuntur BK, KD; dico BK complementum complemento KD aequale esse.

Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, et ejus diameter AC, aequale

aequale est ABC triangulum triangulo ADC^a. rursus quoniam EKHA a. 34. 1.
parallelogrammum est, cujus diameter AK, triangulum AEK triangulo
AHK aequale erit^a. eadem ratione, et tri-
angulum KGC triangulo KFC est aequale.
Quoniam igitur triangulum quidem AEK
aequale est triangulo AHK, triangulum
vero KGC ipsi KFC; erit triangulum
AEK una cum triangulo KGC aequale
triangulo AHK una cum KFC triangulo.
est autem et totum triangulum ABC aequale toti ADC^a; reliquum
igitur BK complementum reliquo complemento KD est aequale. Ergo
omnis parallelogrammi &c. Q. E. D.

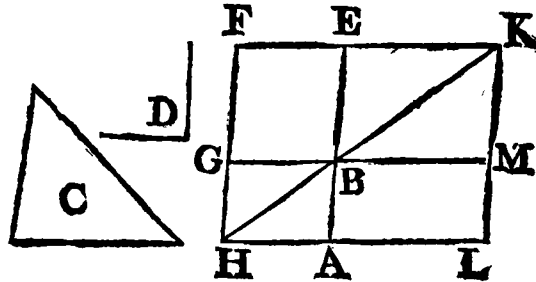


PROP. XLIV. PROB.

AD datam rectam lineam, dato triangulo aequale paral-
lelogrammum applicare, in angulo rectilineo dato
angulo aequali.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero triangulum C, et datus
angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, dato
triangulo C, aequale paralle-
logrammum applicare, in an-
gulo ipsi D aequali.

Constituatur triangulo C
aequale parallelogrammum
BEFG in angulo EBG qui
aequalis est angulo D^a, et



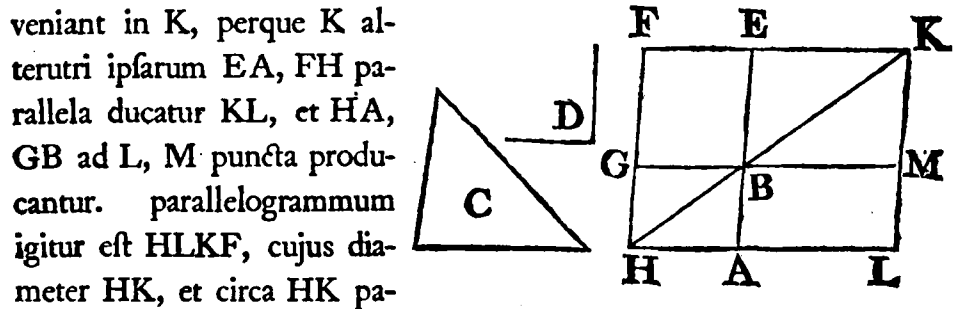
ponatur BE in directum ipsi AB, producatursque FG ad H; et per A
alterutri ipsarum BG, EF parallela ducatur AH^b, et HB jungatur. b. 31. 1.

Quoniam

a. 42. 1.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

- Quoniam igitur in parallelas AH, EF recta linea HF incidit, anguli
 e. 29. 1. AHF, HFE duobus rectis aequales sunt^c; quare BHF, HFE duobus
 rectis sunt minores. quae vero cum aliqua recta angulos interiores et
 ad easdem partes duobus rectis minores efficiunt, in infinitum produc-
 d. Ax. 12. tae inter se convenient^d. ergo HB, FE convenient; producantur, et con-
 veniant in K, perque K al-



- terutri ipsarum EA, FH parallela ducatur KL, et HA, GB ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur est HLKF, cujus diameter HK, et circa HK parallelogramma quidem sunt AG, ME; ea vero quae complementa di-
 e. 43. 1. cuntur LB, BF; ergo LB ipsi BF est aequale^e. sed et BF est aequale triangulo C; quare et LB triangulo C aequale erit. et quoniam GBE
 f. 15. 1. angulus aequalis est angulo ABM^f, sed et GBE aequalis angulo D; erit et angulus ABM angulo D aequalis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C aequale parallelogrammum constitutum est LB, in angulo ABM qui est aequalis angulo D. Q. E. F.

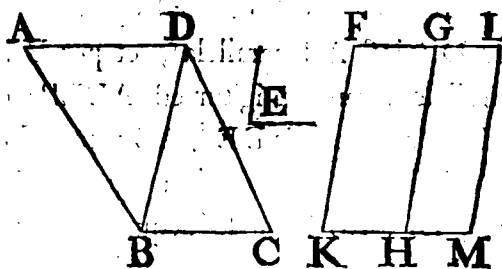
PROP. XLV. PROB.

RECTILINEO dato aequale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo dato angulo aequali.

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. oportet rectilineo ABCD aequale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E aequali.

- Jungatur enim DB, et constituatur triangulo ADB aequale parallelogrammum FH^a, in angulo HKF qui est aequalis angulo E; et ad
 a. 42. 1. rectam

rectam lineam GH applicetur triangulo DBC aequale parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E est aequalis^b. et quoniam b. 44. 1. angulus E. aequalis est utrique ipsorum FKH, GHM, crit et FKH angulus aequalis ipsi GHM; communis apponatur KHG, anguli igitur FKH, KHG angulis KHG, GHM aequales sunt. sed FKH, KHG sunt aequales duobus rectis^c; ergo et KHG, GHM duobus rectis aequales erunt. itaque quoniam ad aliquam rectam GH, et ad punctum in ea H duae rectae lineae KH, HM non ad easdem partes positae angulos deinceps duobus rectis aequales efficiunt, in directum erit KH ipsi HM^d. et quoniam in parallelas KM, FG recta linea HG incidit, al-d. 14. 1. terni anguli MHG, HGF aequales sunt^e; communis apponatur HGL; anguli igitur MHG, HGL, angulis HGF, HGL sunt aequales. at anguli MHG, HGL aequales sunt duobus rectis^c; quare et anguli HGF, HGL duobus rectis aequales erunt; in directum igitur est FG ipsi GL. et quoniam KF ipsi HG est parallela, sed et HG ipsi ML; erit KF ipsi ML parallela^e. et parallelae sunt KM, FL; parallelogrammum igitur est KFLM. et quoniam triangulum quidem ABD aequale est parallelogrammo HF, triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM aequale. Dato igitur rectilineo ABCD aequale parallelogrammum KFLM constitutum est in angulo FKM qui est aequalis angulo E dato. Q. E. F.



COR. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicari possit, in angulo rectilineo dato angulo aequali; si scilicet ad datam rectam lineam applicetur^b

b. 44. 1. applicetur ^b parallelogrammum aequale triangulo primo ABD, in angulo dato angulo aequali.

PROP. XLVI. PROB.

A Data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB; oportet ab ipsa AB quadratum describere.

Ducatur rectae lineae AB, a puncto A quod in ea est, ad rectos angulos ^a AC; et ipsi AB aequalis ponatur AD^b, perque punctum D ducatur DE ipsi AB parallela^c, et per B ipsi AD parallela ducatur ^c BE.

parallelogrammum igitur est ADEB; quare AB ^c
d. 34. 1. quidem est aequalis DE^d, AD vero ipsi BE^d. sed
BA ipsi AD est aequalis; quatuor igitur BA, AD, DE, EB inter se aequales sunt, ideoque
aequilaterum est ADEB parallelogrammum. dico
etiam rectangulum esse; quoniam enim in parallelas AB, DE recta linea incidit AD, anguli BAD, ^a
e. 29. 1. ADE duobus rectis sunt aequales^e; rectus autem est BAD, ergo et
ADE rectus erit. parallelogrammorum autem spatiorum, quae ex opposito sunt latera, et anguli inter se aequalia sunt^d; rectus igitur est uterque oppositorum angulorum ABE, BED; quare rectangulum est ADEB. ostensum autem est aequilaterum esse; quadratum igitur est, atque a recta linea AB descriptum. Q. E. F.

COR. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

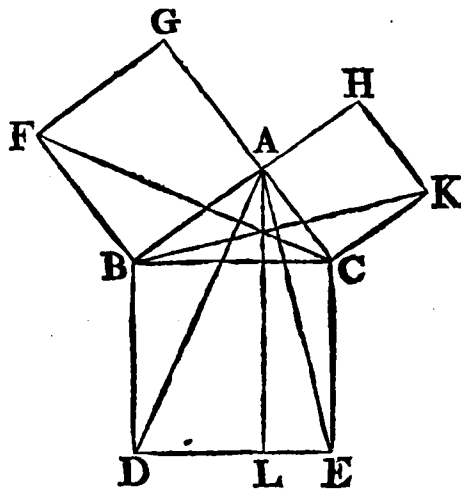
PROP. XLVII.

PROP. XLVII. THEOR.

IN rectangulis triangulis, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, quadratum aequale est quadratis quae a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum; dico quadratum a recta BC aequale esse quadratis ab ipsis BA, AC descriptis.

Describatur enim a BC quidem quadratum ^a BDEC, ab ipsis vero a. 46. 1. BA, AC quadrata GB, HC; perque A alterutri ipsarum BD, CE parallela ducatur ^b AL, et AD, FC jungantur. Quoniam igitur uterque ^b 31. 1. angulorum BAC, BAG rectus est ^c, ad aliquam rectam lineam BA, et ad punctum in ea A duae rectae lineae AC, AG non ad easdem partes positae, angulos qui deinceps sunt duobus rectis aequales efficiunt; in directum igitur est CA ipsi AG ^d. eadem ratione, et AB ipsi AH est in directum. et quoniam angulus DBC est aequalis angulo FBA, rectus enim uterque est, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC est aequalis ^e. et quoniam duae AB, ^e Ax. 2. BD duabus FB, BC aequales sunt, altera alteri, et angulus DBA aequalis angulo FBC; erit et basis AD basi FC aequalis, et ABD triangulum triangulo FBC aequale ^f. estque trianguli quidem ABD duplum ^f 4. 1.



^c. Def. 30.

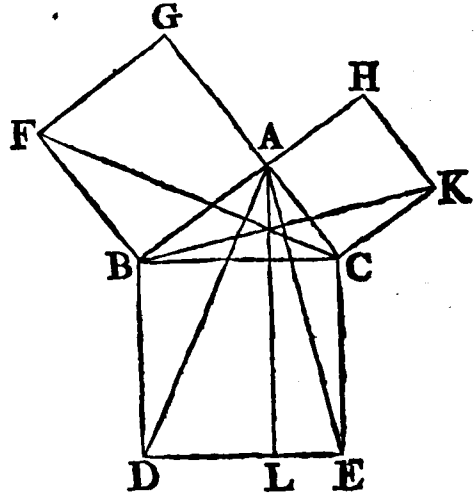
^d. 14. 1.

G

BL

g. 41. 1. BL parallelogrammum^g, basim enim eandem habent BD, et in eisdem sunt parallelis BD, AL; trianguli vero FBC duplum est GB quadratum, rursus enim basim habent eandem FB, et in eisdem sunt parallelis FB, GC. quae autem aequalium du-

h. Ax. 6. plicia inter se aequalia sunt^h. aequale igitur est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE, BK ostendetur etiam CL parallelogrammum aequale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB, HC est aequale. et descriptum quidem est BDEC quadratum a recta linea BC, quadrata vero GB, HC ab ipsis BA, AC. quadratum igitur BE a latere BC descriptum aequale est quadratis a lateribus, BA AC. Ergo in rectangulis triangulis &c. Q. E. D.



PROP. XLVIII. THEOR.

SI quadratum ab uno laterum trianguli, aequale sit quadratis a reliquis trianguli lateribus descriptis; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

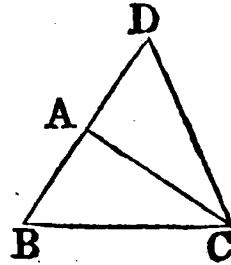
Quadratum enim ab uno latere BC trianguli ABC descriptum, aequale sit quadratis a reliquis trianguli lateribus BA, AC. dico angulum BAC rectum esse.

a. 11. 1. Ducatur^a enim a puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD, ponaturque AD ipsi BA aequalis, et DC jungatur. Quoniam igitur DA est aequalis AB, erit et quadratum ex DA aequale quadrato ex AB; commune

LIBER PRIMUS.

51.

mune apponatur quadratum ex AC, ergo quadrata ex DA, AC aequalia sunt quadratis ex BA, AC. sed quadratis quidem ex DA, AC aequale est quadratum ex DC^b, rectus enim angulus est DAC; quadratis vero ex BA, AC aequale ponitur quadratum ex BC; quadratum igitur ex DC aequale est quadrato ex BC; ergo et latus DC lateri CB est aequale. et quoniam DA est aequalis AB, communis autem AC, duae DA, AC aequales sunt duabus BA, AC; et basis DC est aequalis basi BC; angulus igitur DAC angulo BAC est aequalis^c. rectus autem est c. 8. 1; DAC, ergo et BAC rectus erit. si igitur quadratum &c. Q. E. D.



b. 47. 1.

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M
L I B E R S E C U N D U S.

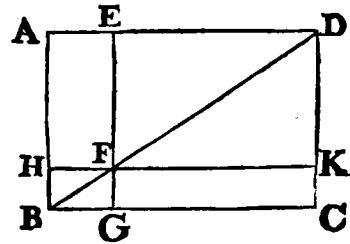
DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur a duabus rectis lineis, quae rectum angulum continent.

II.

Omnis parallelogrammi spatii, unumquodvis eorum quae circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum una cum duobus complementis, gnomon vocetur. 'Ita parallelogrammum HG una cum complementis AF, FC est gnomon, qui brevitatis gratia designatur literis AGK vel EHC ad oppositos angulos parallelogrammorum qui gnomonem componunt.'



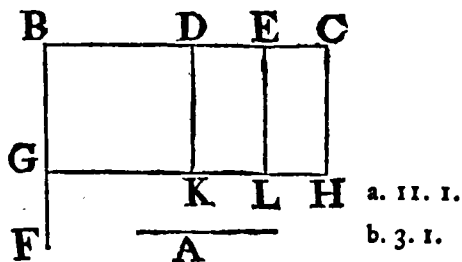
PROP. I.

PROP. I. THEOR.

SI sint duae rectae lineae, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum a duabus rectis lineis contentum aequale est rectangulis, quae a recta linea infecta, et singulis partibus continentur.

Sint duae rectae lineae A, BC; et secta sit BC utcunque in punctis D, E; dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum aequale esse rectangulo contento ab ipsis A, BD; et ei ab ipsis A, DE; et adhuc ei ab ipsis A, EC contento.

Ducatur enim a puncto B ipsi BC ad rectos angulos BF^a, atque ipsi A ponatur aequalis BG^b; et per G quidem ipsi BC parallela ducatur GH; per D, E, C vero



ducantur DK, EL, CH parallelae ipsi BG^c. rectangulum igitur BH est aequale rectangulis BK, DL, EH; atque est BH quidem quod ipsis A, BC continetur, etenim continetur a GB, BC, et BG ipsi A est aequalis; BK autem continetur ab ipsis A, BD, continetur enim a GB, BD, quarum GB est aequalis A; et DL est contentum ab ipsis A, DE, quoniam DK, hoc est BG^d ipsi A est aequalis; et similiter rectangulum EH contentum est ab ipsis A, EC. rectangulum igitur ab ipsis A, BC contentum est aequale rectangulo contento ab ipsis A, BD, et contento ab A, DE, et adhuc contento ab ipsis A, EC. si igitur sint duae rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. II.

PROP. II. THEOR.

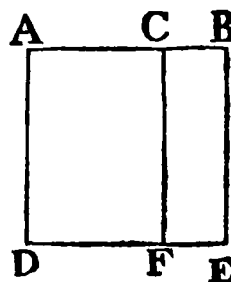
SI recta linea secta fuerit utcunque, rectangula quae a tota et singulis partibus continentur, aequalia sunt quadrato ex tota.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C; dico rectangulum ab AB, BC contentum, una cum rectangulo contento ab AB, AC aequale esse quadrato ex AB.

a. 46. 1. Describatur enim ex AB quadratum ADEB^a, et per C ducatur al-

b. 31. 1. terutri ipsarum AD, BE parallela CF^b. aequale

igitur est AE rectangulis AF, CE; atque est AE quidem quadratum ex AB; AF vero rectangulum a BA, AC contentum, etenim a DA, AC continetur, quarum AD ipsi AB est aequalis; et CE continetur ab ipsis AB, BC, aequalis enim est BE ipsi AB. rectangulum igitur ab AB, AC, una cum rectangulo ab ipsis AB, BC contento, aequale est quadrato ex AB. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.



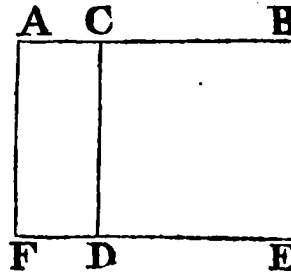
PROP. III. THEOR.

SI recta linea utcunque secta fuerit, rectangulum a tota et una ejus parte contentum aequale est et rectangulo a partibus contento, et quadrato ex praedictâ parte.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C; dico rectangulum ab AB, BC contentum aequale esse rectangulo contento ab AC, CB una cum quadrato ex BC.

a. 46. 1. Describatur enim ex BC quadratum CDEB^a, et producatu ED in F,
et

et per A alterutri ipsarum CD, BE, parallela ducatur AF^b. aequale igitur b. 31. 1. tur est AE ipsis AD, CE; et est AE quidem rectangulum contentum ab AB, BC, etenim ab AB, BE continetur, quarum BE est aequalis BC; AD vero continetur ab ipsis AC, CB, aequalis enim est CD ipsi CB; et est DB quadratum ex BC. rectangulum igitur contentum ab AB, BC est aequale rectangulo contento ab ipsis AC, CB, una cum quadrato ex BC. si igitur recta linea &c. Q. E. D.

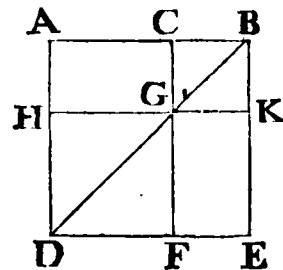


PROP. IV. THEOR.

SI recta linea secta fuerit utcunque, quadratum ex tota aequale est, et quadratis ex partibus, et rectangulo bis a partibus contento.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C; dico quadratum ex AB aequale esse, et quadratis ex AC, CB et rectangulo bis ab ipsis AC, CB contento.

Describatur enim ex AB quadratum ADEB^a, jungaturque BD, et a. 46. 1. per C quidem alterutri ipsarum AD, BE parallela ducatur CGF^b; per G vero alterutri ipsarum AB, DE ducatur parallela HK^b. et quoniam CF est parallela ipsi AD, et in ipsas incidit BD, erit exterior angulus BGC interiori et opposito ADB aequalis^c; angulus autem ADB est aequalis angulo ABD^d, quoniam et latus BA aequale est lateri AD; quare CGB angulus angulo GBC est aequalis, ac propterea latus BC lateri CG aequale^e. sed et latus CB aequale est la-



b. 31. 1.

c. 29. 1.

d. 5. 1.

teri

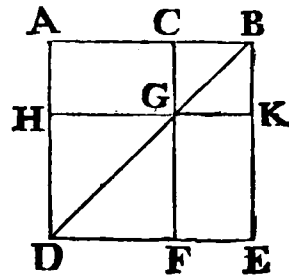
f. 34. I. teri GK, et CG ipsi BK^f, ergo et GK est aequale KB; aequilaterum igitur est CGKB. dico insuper etiam rectangulum esse; quoniam enim CG parallela est ipsi BK, et in ipsas incidit CB, anguli KBC, GCB duobus rectis sunt aequales; rectus autem est KBC angulus, rectus igitur est GCB; quare et anguli hisce oppositi CGK, GKB recti erunt^f; rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit et aequilaterum esse; quadratum igitur est, et est ex CB.

eadem ratione et HF est quadratum, et est ex HG, hoc est ex AC. ergo HF, CK ex ipsis AC, CB quadrata sunt. et quoniam AG est aequale

g. 43. I. ipsi GE^g, atque est AG quod ab AC, CB continetur, est enim GC ipsi CB aequalis; erit et GE aequale ei quod continetur ab AC, CB;

quare AG, GE aequalia sunt ei quod bis ab AC, CB continetur. sunt autem et HF, CK quadrata ex AC, CB; quatuor igitur HF, CK, AG, GE aequalia sunt et quadratis ex AC, CB, et ei quod bis ab AC, CB continetur rectangulo. sed HF, CK, AG, GE sunt totum ADEB quod est quadratum ex AB. quadratum igitur ex AB aequale est et quadratis ex AC, CB, et rectangulo quod bis ab AC, CB continetur. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.

COR. Ex his manifestum est, in quadratis spatiis parallelogramma quae sunt circa diametrum quadrata esse.



PROP. V. THEOR.

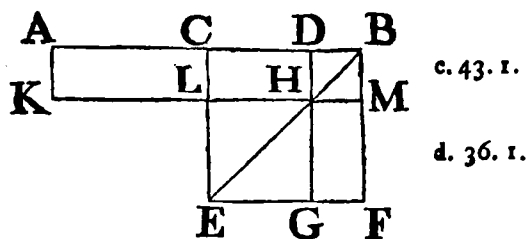
SI recta linea secta fuerit in partes aequales, et in partes inaequales; rectangulum ab inaequalibus totius partibus contentum, una cum quadrato rectae lineae quae inter sectiones interjicitur, aequale est quadrato ex dimidia.

Recta

Recta enim linea quacvis AB secta sit in partes aequales ad C, et in partes inaequales ad D; dico rectangulum contentum ab AD, DB una cum quadrato ex CD aequale esse quadrato ex CB.

Describatur enim ex BC quadratum^a CEFB, jungaturque BE; et a. 46. 1. per D quidem alterutri ipsarum CE, BF parallela ducatur^b DHG; per b. 31. 1. H vero ducatur KLM parallela alterutri ipsarum CB, EF; et rursus per A ducatur alterutri CL, BM parallela AK. et quoniam CH com-

plementum aequale est complemento HF^c, commune apponatur DM, totum igitur CM toti DF est aequale; sed CM est aequale AL^d, quoniam et AC ipsi CB; ergo et AL aequale est DF. commune apponatur CH, totum



igitur AH ipsis DF, CH aequale erit. sed AH quidem est quod continetur ab AD, DB, aequalis enim est DH ipsi DB^e; DF, CH vero e. Cor. 4. 2. est gnomon CMG; gnomon igitur CMG aequalis est ei quod ab AD, DB continetur. commune apponatur LG, quod aequale est quadrato^e ex CD; ergo CMG gnomon et LG aequalia sunt rectangulo ab AD, DB contento, et quadrato ex CD. sed CMG gnomon et LG sunt totum quadratum CEFB, quod fit ex CB. rectangulum igitur ipsis AD, DB contentum, una cum quadrato ex CD, aequale est quadrato ex CB. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

SI recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quaedam recta linea; rectangulum a tota cum adjecta, et ipsa adjecta contentum, una cum quadrato ex dimidia, aequale est quadrato quod ex ea quae composita est ex dimidia et adjecta, tanquam ab una recta linea, describitur.

Recta enim linea quaevis AB secetur bifariam in puncto C , et adjiciatur ipsi in directum quaedam BD ; dico rectangulum ab AD , DB contentum una cum quadrato ex CB aequale esse quadrato ex CD .

a. 46. 1. Describatur enim ex CD quadratum $CEFD$, et jungatur DE ; per-

b. 31. 1. que B alterutri ipsarum CE , DF parallela ducatur BHG , et per H du-

catur KLM parallela alterutri ipsarum AD , EF , et adhuc per A alterutri CL , DM parallela AK . itaque quoniam AC est aequalis CB , erit et AL

c. 36. 1. rectangulum CH aequale; sed CH

d. 43. 1. aequale est HF ; ergo et AL ipsi HF

aequale erit. commune apponatur CM ;

totum igitur AM gnomoni CMG est ae-

quale. atque est AM quod ab ipsis AD ,

e. Cor. 4. 2. DB continetur, etenim DM est aequalis DB . ergo et gnomon CMG

aequalis est rectangulo ab AD , DB contento. commune apponatur LG ,

quod aequale est quadrato ex CB ; rectangulum igitur ab AD , DB con-

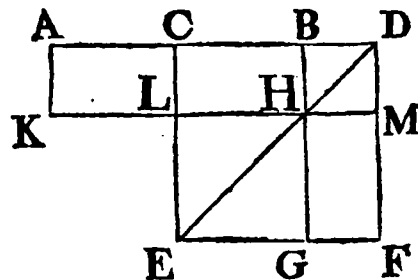
tentum una cum quadrato ex CB aequale est gnomoni CMG et ipsi LG .

sed gnomon CMG et LG sunt totum quadratum $CEFD$, quod est ex CD ;

ergo rectangulum ab AD , DB contentum una cum quadrato ex CB ae-

quale est quadrato ex CD . si igitur recta linea bifariam &c. Q. E. D.

PROP. VII.



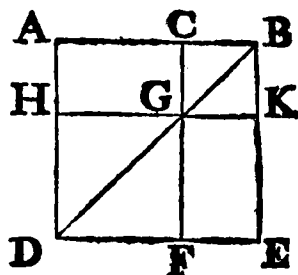
PROP. VII. THEOR.

SI recta linea utcunque secta fuerit, quae ex tota, et una parte fiunt utraque quadrata aequalia sunt et rectangulo quod bis a tota ac dicta parte continetur, et quod ex reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quaevis AB secta sit utcunque in puncto C; dico quadrata ex AB, BC aequalia esse et rectangulo quod bis ab AB, BC continetur, et quadrato ex AC.

Describatur enim ex AB quadratum ADEB^a, et figura construatur. a. 46. 1. et quoniam AG rectangulum aequale est ipsi GE^b, commune appona-

tur CK, quare totum AK toti CE est aequale; rectangula igitur AK, CE dupla sunt ipsius AK. sed AK, CE sunt AKF gnomon et quadratum CK; gnomon igitur AKF et quadratum CK dupla sunt rectanguli AK. est autem et id quod bis continetur ab AB, BC duplum ipsius AK, etenim BK est aequalis BC^c. gnomon igitur AKF et quadratum CK aequalia sunt ei quod bis ab AB, BC continetur. commune apponatur HF,



c. Cor. 4. 2.

quod est aequale quadrato ex AC; gnomon igitur AKF et quadrata CK, HF aequalia sunt ei quod bis ab AB, BC continetur rectangulo, et quadrato ex AC. sed gnomon AKF et quadrata CK, HF totum sunt ADEB, et CK, quae sunt ex AB, BC quadrata. Quadrata igitur ex AB, BC aequalia sunt rectangulo quod bis ab AB, BC continetur, una cum quadrato ex AC. si igitur recta linea &c. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

SI recta linea utcumque secta fuerit, quod quater a tota et una parte continetur rectangulum una cum quadrato ex reliqua parte, aequale est quadrato quod ex tota et dicta parte, tanquam ex una recta, describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcumque in C; dico rectangulum quater ab AB, BC contentum una cum quadrato ex AC aequale esse quadrato quod ex AB, BC tanquam ex una recta linea describitur.

Producatur enim in directum rectae lineae AB recta BD, et ipsi CB ponatur aequalis BD, describaturque ex AD quadratum AEFD; et dupla figura construatur. Quoniam igitur CB est aequalis BD, atque est

a. 34. 1. CB ipsi GK aequalis^a, BD vero ipsi KN; erit et GK aequalis KN.

eadem ratione et PR ipsi RO est aequalis.

et quoniam CB est aequalis BD, et GK ipsi KN, erit rectangulum quidem CK aequale

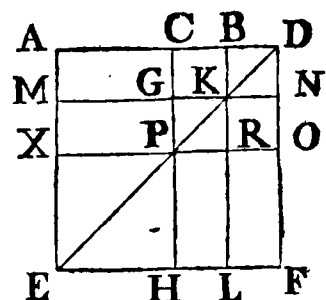
b. 36. 1. ipsi BN, GR vero ipsi RN^b. sed CK est

c. 43. 1. aequale RN^c. complementa enim sunt parallelogrammi CO; ergo et BN aequale est

GR. quatuor igitur BN, CK, GR, RN sunt inter se aequalia, ideoque quadrupla sunt ipsius CK. rursus quoniam CB est aequalis

d. Cor. 4. 2. BD, et BD quidem ipsi BK^d, hoc est ipsi CG aequalis; CB vero ipsi GK, hoc est GP^d; erit et CG aequalis GP. et quoniam CG quidem aequalis est GP, PR vero ipsi RO, aequale erit et AG quidem rectangulum ipsi MP; PL vero ipsi RF. sed MP est aequale^e PL, complementa enim sunt parallelogrammi ML; quare et AG ipsi RF est aequale. quatuor igitur AG, MP, PL, RF inter se aequalia sunt; ac pro-

pterea



terea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, et quatuor CK, BN, GR, RN quadrupla esse ipsius CK. octo igitur quae continent gnomonem AOH ipsius AK quadrupla sunt. et quoniam AK est quod ab AB, BC continetur, etenim BK est aequalis BC; erit contentum quater ab AB, BC ipsius AK quadruplum. at ostensus est gnomon AOH quadruplus ipsius AK; quod igitur quater ab AB, BC continetur aequale est gnomoni AOH. commune apponatur XH, quod aequale est quadrato ex AC^d; erit rectangulum quod quater ab AB, BC continetur d. Cor. 4. 2. una cum quadrato ex AC aequale ipsi AOH gnomoni, et quadrato XH. sed AOH gnomon et XH totum sunt AEFD quadratum, quod est ex AD. rectangulum igitur quater ab AB, BC contentum una cum quadrato ex AC aequale est ei quod ex AD, hoc est ex AB, BC tanquam ex una recta linea, describitur quadrato. si igitur recta linea utcumque &c. Q. E. D.

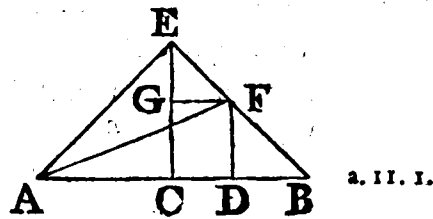
PROP. IX. THEOR.

SI recta linea in partes aequales, et in partes inaequales secta fuerit; quadrata ex inaequalibus totius partibus, dupla sunt et quadrati ex dimidia, et quadrati ex eâ quae inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quacvis AB secta sit in partes quidem aequales ad C, in partes vero inaequales ad D. dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla esse.

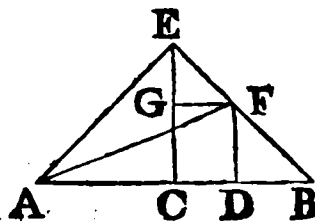
Ducatur enim a puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE^a, et alterutri ipsarum AC, CB aequalis ponatur, junganturque EA,

EB; ac per D quidem ipsi CE parallela ducatur^b DF, per F vero b. 31. 1. ipsi



a. 11. 1.

- b. 31. 1. ipsi AB parallela ^b FG; et AF jungatur. itaque quoniam AC est æqualis CE, erit et angulus EAC angulo AEC æqualis^c; et quoniam rectus est angulus ad C, reliqui AEC, EAC uni recto æquales erunt^d; et sunt inter se æquales; uterque igitur ipsorum AEC, EAC recti est dimidium. eadem ratione et recti dimidium est uterque ipsorum CEB, EBC; totus igitur angulus AEB rectus est. et quoniam angulus GEF dimidium est recti, rectus autem EGF, æqualis enim est interiori et opposito^e ECB, erit reliquus EFG recti dimidium; æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG, quare et latus EG lateri GF est æquale^f. rursus quoniam angulus ad B dimidium est recti, rectus autem FDB, rursus enim æqualis est interiori et opposito^e ECB, reliquus BFD recti erit dimidium; angulus igitur ad B æqualis est angulo BFD, ideoque latus DF lateri DB æquale^f. et quoniam AC est æqualis CE, erit et ex AC quadratum æquale quadrato ex CE; quadrata igitur ex AC, CE dupla sunt quadrati ex AC. quadratis



- g. 47. 1. autem ex AC, CE æquale est quadratum ex EA^g, siquidem rectus est angulus ACE; ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF, erit et quadratum ex EG quadrato ex GF æquale; quadrata igitur ex EG, GF dupla sunt quadrati ex GF; quadratis vero ex EG, GF æquale est quadratum ex EF; ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis^h autem est GF ipsi CD; quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. sed et quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum; quadrata igitur ex AE, EF dupla sunt quadratorum ex AC, CD. quadratis vero ex AE, EF æquale est ex AF quadratum^g, quoniam angulus AEF rectus est; quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC, CD est duplum. sed quadrato ex AF æqualia sunt quadrata ex AD, DF, rectus enim est angulus

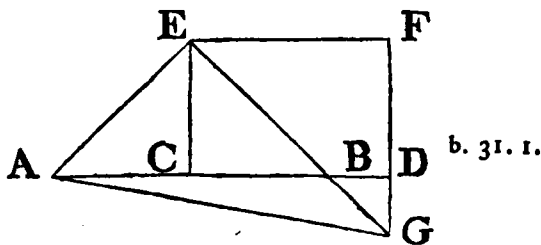
gulus qui ad D; ergo ex AD, DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC, CD. est autem DF ipsi DB aequalis; quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla erunt. si igitur recta linea secetur &c. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

SI recta linea secetur bifariam, et ipsi in directum quaevis recta linea adjiciatur, quae ex tota cum adjecta, et adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt et quadrati ex dimidia, et quadrati quod ex ea quae composita est ex dimidia et adjecta, tanquam ab una recta linea describitur.

Recta enim linea AB secetur bifariam in C, et ipsi in directum adjiciatur quaevis recta linea BD; dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla esse.

Ducatur enim a puncto C ipsi AB ad rectos angulos^a CE, et alteru- a. 11. 1. tri ipsarum AC, CB aequalis ponatur, junganturque AE, EB; et per E quidem ipsi AB parallela ducatur^b EF, per D vero ducatur DF parallela^b ipsi CE. et quoniam in parallelas EC, FD recta quaedam linea EF incidit, anguli CEF, EFD aequales sunt duobus rectis^c; anguli igitur BEF, EFD duobus rectis sunt minores. quae vero cum aliqua recta angulos duobus rectis minores efficiunt, in infinitum productae inter se conveniunt^d. ergo EB, FD productae ad partes BD d. Ax. 12. convenient; producantur, et conveniant in G, et AG jungatur. itaque quoniam AC est aequalis CE, erit et angulus CEA angulo EAC aequalis^e;



e. 5. 1. qualis^c; atque est rectus qui ad C; uterque igitur ipsorum CEA, EAC est recti dimidium. eadem ratione, et recti dimidium est uterque CEB, EBC; ergo AEB est rectus. et quoniam EBC est dimidium recti, erit

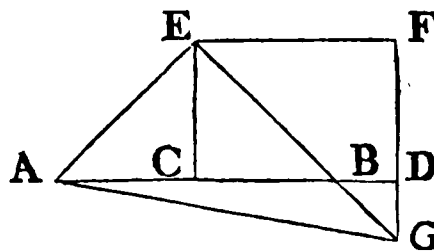
f. 15. 1. et recti dimidium DBG^f; sed et BDG rectus est, etenim est aequalis

c. 29. 1. ipsi DCE alterno^c; reliquus igitur DGB dimidium est recti; est igitur

g. 6. 1. DGB ipsi DBG aequalis, ergo et latus BD aequale lateri DG^g. rursus quoniam EGF est dimidium recti, rectus autem qui ad F, est enim

h. 34. 1. angulo opposito ad C aequalis^h, erit et reliquus FEG recti dimidium; est igitur angulus EGF aequalis ipsi FEG, quare et latus GF lateri FE est aequale^g. et quoniam EC est aequalis CA, erit et quadratum ex EC aequale quadrato ex CA; ergo quadrata ex EC, CA dupla sunt quadrati ex CA. quadratis autem ex

i. 47. 1. EAⁱ; quadratum igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam GF est aequalis FE, erit et ex GF quadratum aequale quadrato ex



FE; quadrata igitur ex GF, FE quadrati ex EF sunt dupla. at quadratis ex GF, FE aequale est quadratum ex EGⁱ; ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF. aequalis autem est EF ipsi CD, quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum quadrati ex AC; ergo ex AE, EG quadrata, quadratorum ex AC, CD sunt dupla. quadratis vero ex AE, EG aequale est quadratum ex AGⁱ; quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC, CD. at quadrato ex AG aequalia sunt quadrata ex AD, DGⁱ; ergo quadrata ex AD, DG sunt dupla quadratorum ex AC, CD. sed DG est aequalis DB; quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD sunt dupla. si igitur recta linea secetur &c. Q. E. D.

PROP. XI.

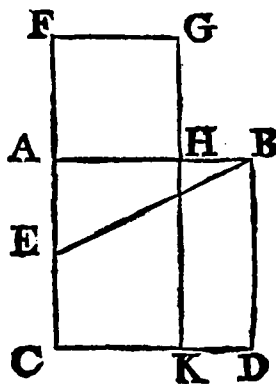
PROP. XI. PROB.

DATAM rectam lineam secare ita ut rectangulum a tota et altera parte contentum, aequale sit quadrato ex reliqua parte.

Sit data recta linea AB; oportet ipsam AB ita secare, ut rectangulum contentum a tota et altera parte aequale sit quadrato ex reliqua parte.

Describatur enim ex AB quadratum ^a ABDC, seceturque AC bifariam ^b in E, et BE jungatur, et producat CA in F, ponaturque ipsi b. 10. 1. BE aequalis EF^c, et ex AF describatur quadratum FGHA^a, et GH ad c. 3. 1. K producat. dico AB sectam esse in H, ita ut rectangulum ab AB, BH contentum aequale sit quadrato ex AH.

Quoniam enim recta linea AC bifariam secta est in E, et ipsi in directum adjecta est AF, rectangulum a CF, FA contentum, una cum quadrato ex AE, aequale erit quadrato ex EF^d. sed EF est aequalis EB; rectangulum igitur contentum ab ipsis CF, FA, una cum quadrato ex AE aequale est quadrato ex EB. quadrato autem ex EB aequalia sunt quadrata ex BA, AE^e, etenim angulus ad c. 47. 1. A rectus est; ergo rectangulum a CF, FA, una cum quadrato ex AE aequale est quadratis ex BA, AE. commune auferatur quadratum ex AE; reliquum igitur rectangulum a CF, FA contentum aequale est quadrato ex AB. et FK quidem est rectangulum a CF, FA contentum, aequalis enim est AF ipsi FG; AD vero est quadratum ex AB. aequale igitur est FK ipsi AD. commune auferatur AK; ergo reliquum



I

FH

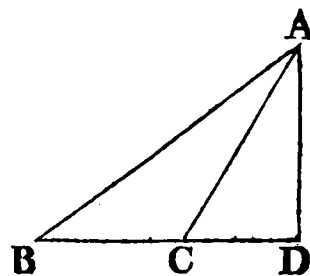
FH reliquo HD est aequale. et est HD quidem rectangulum ab AB, BH, est enim AB aequalis ipsi BD; FH vero est quadratum ex AH. rectangulum igitur contentum ab AB, BH quadrato ex AH aequale erit. quare data recta linea AB secta est in H, ita ut contentum ab AB, BH rectangulum quadrato ex AH sit aequale. Q. E. F.

PROP. XII. THEOR.

IN obtusangulis triangulis quadratum ex latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata ex lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis ab uno laterum quae sunt circa obtusum angulum in quod productum perpendicularis cadit, et recta linea intercepta exterius a perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum habens ACB, a. 12. 1. et ducatur a puncto A ad BC productam perpendicularis^a AD. dico quadratum ex AB majus esse quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis a BC, CD contento.

Quoniam enim recta linea BD secta est utcumque in puncto C, erit quadratum ex BD aequale quadratis ex BC, CD, et rectangulo bis ab ipsis BC, CD contento^b. commune apponatur quadratum ex DA; quadrata igitur ex BD, DA aequalia sunt et quadratis ex BC, CD, DA, et rectangulo bis a BC, CD contento. sed quadratis quidem ex BD, DA aequale est quadratum ex BA^c, rectus enim est angulus ad D; quadratis vero ex CD, DA aequale est quadratum ex CA^c. Quadratum igitur ex BA aequale est et quadratis



quadratis ex BC, CA et contento bis a BC, CD rectangulo; itaque quadratum ex BA majus est quam quadrata ex BC, CA, rectangulo bis ab ipsis BC, CD contento. In obtusangulis igitur triangulis &c. Q. E. D.

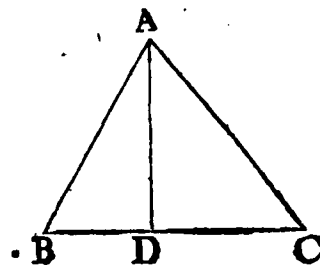
PROP. XIII. THEOR.

IN omni triangulo, quadratum ex latere acutum angulum subtendente, minus est quam quadrata ex lateribus angulum illum acutum continentibus, rectangulo contento bis ab uno laterum quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et recta linea intercepta a perpendiculari ad angulum acutum.

Sit triangulum ABC, acutum habens angulum ad B, et ducatur a puncto A ad BC perpendicularis^a AD. dico quadratum ex AC minus^{a. 12. 1.} esse quam quadrata ex CB, BA, rectangulo bis a CB, BD contento.

Cadat primo AD intra triangulum ABC; et quoniam recta linea CB secta est utcumque in D, erunt quadrata ex CB, BD aequalia et rectangulo bis a CB, BD contento, et quadrato ex DC^{b.} communis apponatur^{b. 7. 2.}

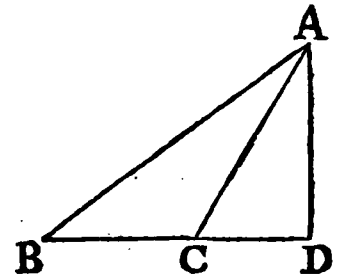
ex AD quadratum; quadrata igitur ex CB, BD, DA aequalia sunt et rectangulo bis ab ipsis CB, BD contento, et quadratis ex AD, DC. sed quadratis quidem ex BD, DA aequale est ex AB quadratum^{c.} rectus enim angulus est qui ad D; quadratis vero ex AD, DC aequale est quadratum ex AC. quadrata igitur ex CB, BA sunt aequalia quadrato ex AC, et contento bis a CB, BD rectangulo; itaque solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB, BA rectangulo bis a CB, BD contento.



c. 47. 1.

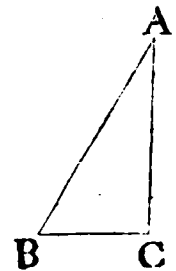
Sed cadat AD extra triangulum ABC. quoniam igitur rectus est angulus ad D, crit angulus ACB major recto^d; quadratum igitur ex AB aequale est et quadratis ex AC, CB, et rec-

e. 12. 2. tangulo bis ab ipsis BC, CD contento^e. commune apponatur ex BC quadratum; erunt igitur quadrata ex AB, BC aequalia quadrato ex AC, quadrato ex BC bis, et contento bis a BC, CD rectangulo. quoniam autem recta



linea BD secta est utcumque in C, rectangulum a DB, BC contentum aequale est rectangulo a BC, CD et quadrato ex BC^f, et ipsorum dupla sunt aequalia. quadrata igitur ex AB, BC aequalia sunt quadrato ex AC, et rectangulo bis a DB, BC contento. solum igitur quadratum ex AC minus est quadratis ex AB, BC rectangulo bis contento ab ipsis CB, BD.

Denique sit latus AC perpendiculare ad ipsum BC; est igitur BC recta ab AC ad angulum acutum B intercepta, et manifestum est quadrata ex AB, BC aequalia esse quadrato ex AC, et bis quadrato ex BC^e. In omni igitur triangulo &c. Q. E. D.



PROP. XIV. PROB.

DATO rectilineo aequale quadratum constituere.

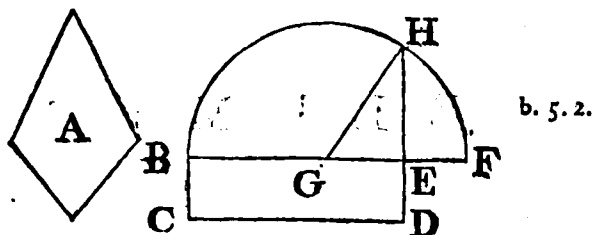
Sit datum rectilineum A; oportet ipsi A rectilineo aequale quadratum constituere.

a. 45. 1. Constituatur rectilineo A aequale parallelogrammum rectangulum^a BCDE. si igitur BE esset aequalis ED, factum jam erit quod proponebatur; etenim rectilineo A aequale quadratum constitutum est BD. sin minus, producat BE ad F, ponaturque ipsi ED aequalis EF, et secetur

tur

tur BF bifariam in G; et centro quidem G, intervallo vero uni ipsarum GB, GF aequali semicirculus describatur BHF, producatique DE in H, et GH jungatur. Quoniam igitur recta linea BF secta est in partes quidem aequales ad G, in partes vero inaequales ad E, erit rectangulum a BE, EF contentum,

una cum quadrato ex EG aequale quadrato ex GF^b, est autem GF aequalis GH; rectangulum igitur a BE, EF, una cum quadrato ex EG aequale



est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH aequalia sunt ex HE, EG quadrata^c. rectangulum igitur a BE, EF, una cum quadrato ex EG^{c. 47. 1.} aequale est quadratis ex HE, EG. commune auferatur ex EG quadratum; reliquum igitur rectangulum a BE, EF contentum est aequale quadrato ex EH. sed contentum a BE, EF est ipsum BD, quoniam EF est aequalis ED; ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est aequale. est autem BD aequale rectilineo A; rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto aequale crit. Dato igitur rectilineo A aequale quadratum constitutum est, ex ipsa videlicet EH descriptum. Q. E. F.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M
L I B E R T E R T I U S.

DEFINITIONES.

I.

AEQUALES circuli sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum quae ex centris sunt aequales.

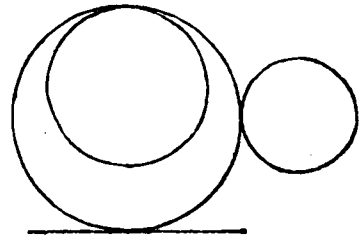
‘Haec non est definitio sed Theorema cujus veritas patet; si enim circuli, quorum quae ex centris sunt aequales, sibi mutuo applicentur ita ut centra eorum congruant, congruent et ipsi circuli.’

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quae tangens circulum et producta ipsum non secat.

III.

Circuli contingere sese dicuntur, qui tangentes se mutuo, se ipsos non secant.



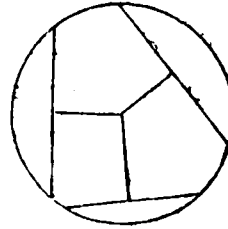
In

LIBER TERTIUS.

78

IV.

In circulo aequaliter distare a centro rectae lineae dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductae sunt aequales.



V.

Magis autem distare a centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

VI.

Segmentum circuli est figura, quae recta linea et circuli circumferentia continetur.

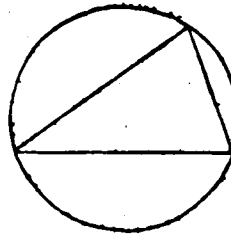


VII.

“ Segmenti autem angulus est, qui recta linea et circuli circumferentia continetur.”

VIII.

In segmento angulus est, quando in circumferentia segmenti sumitur aliquod punctum, atque ab ipso ad extrema rectae lineae quae basis est segmenti, rectae lineae ducuntur, angulus rectis ductis contentus.

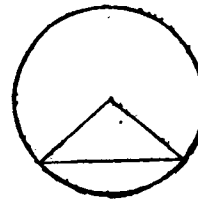


IX.

Quando autem continentes angulum rectae lineae assumunt circumferentiam, illi insistere angulus dicitur.

X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum constitit, figura contenta rectis lineis quae angulum continent, et circumferentia ab ipsis assumpta.



Similia

EUCLIDIS ELEMENTORUM

XI.

Similia circulorum segmenta sunt, quae angulos capiunt aequales, vel in quibus anguli sunt inter se aequales.



PROP. I. PROB.

DATI circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC; oportet circuli ABC centrum invenire.

Ducatur in ipso quaedam recta linea AB utcunque, et in puncto D bi-

a. 10. 1. fariam secetur^a, a puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos ducatur

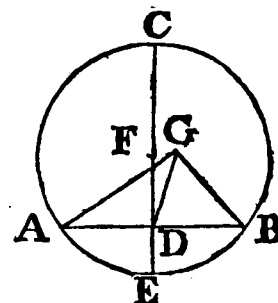
b. 11. 1. DC,^b et ad E producat, et secetur CE bifariam in F. dico punctum F centrum esse circuli ABC.

Non enim; sed si fieri potest sit G centrum, et jungantur GA, GD, GB. itaque quoniam DA est aequalis DB, communis autem DG, erunt duae AD, DG duabus BD, DG aequales, altera alteri, et basis GA aequalis est basi GB, sunt enim ex centro G; angulus igitur ADG

c. 8. 1. angulo GDB est aequalis^c. cum autem recta linea super rectam lineam insitens angulos qui

d. 10. Def. 1. deinceps sunt aequales inter se fecerit, rectus^d est uterque aequalium angulorum; ergo angulus GDB est rectus. sed et rectus est FDB; ae-

qualis igitur est angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. similiter ostendemus neque aliud esse praeter ipsum F. ergo F centrum est circuli ABC. Quod erat inveniendum.



COR.

LIBER TERTIUS.

73

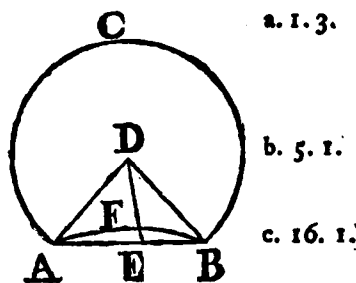
COR. Ex hoc manifestum est, si in circulo recta linea, rectam lineam bifariam et ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

SI in circumferentia circuli duo quaevis puncta sumantur, quae ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC, et in circumferentia ipsius sumantur duo quaevis puncta A, B; dico rectam lineam a puncto A ad B ductam, intra circulum cadere.

Non enim, sed si fieri potest cadat extra ut AEB; et sumatur circuli ABC centrum^a, et sit D, junganturque AD, DB, occurratque DE circumferentiae in F. Quoniam igitur DA est aequalis DB, erit et angulus DAB aequalis^b angulo DBA; et quoniam trianguli DAE unum latus AEB producit, erit angulus DEB angulo DAE major^c; angulus autem DAE aequalis est angulo DBE, ergo DEB angulus angulo DBE est major. sed majori angulo majus latus subtenditur^d; d. 19. 1. major igitur est DB ipsa DE. aequalis autem est DB ipsi DF; ergo DF est major DE, minor majore, quod fieri non potest. recta igitur linea a puncto A ducta ad B non cadet extra circulum. similiter ostendemus neque in ipsam cadere circumferentiam. cadet igitur intus. si igitur in circumferentia &c. Q. E. D.



K

PROP. III.

PROP. III. THEOR.

SI in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet; et ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ad angulos rectos ipsam secet, et bifariam secabit.

Sit circulus ABC, et in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. dico et ad angulos rectos ipsam secare.

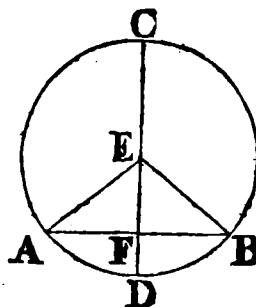
a. 1. 3. Sumatur enim circuli ABC centrum^a, et sit E, et EA, EB jungantur.

Quoniam igitur AF est aequalis FB, communis autem FE, duae AF, FE duabus BF, FE aequales sunt, et basis EA basi EB est aequalis; ergo et angulus AFE angulo BFE aequalis;

b. 8. 1. qualis erit^b. cum autem recta linea super rectam

insistens, angulos qui deinceps sunt, aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum^c.

c. Def. 10. 1. uterque igitur AFE, BFE est rectus; quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secabit.



Sed fecet CD ipsam AB ad rectos angulos, dico et bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB aequalem esse.

Isdem enim constructis, quoniam EA quae ex centro est aequalis EB, et angulus EAF angulo EBF aequalis erit^d; est autem et AFE rectus aequalis recto BFE. duo igitur triangula sunt EAF, EBF quae duos angulos duobus angulis aequales habent, unumque latus uni lateri aequale, EF commune scilicet utrisque, quod uni aequalium angulorum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt^e.

bebunt^e. aequalis igitur est AF ipsi FB. si igitur in circulo recta li- e. 26.1.
nea &c. Q. E. D.

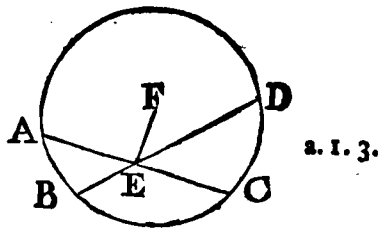
PROP. IV. THEOR.

SI in circulo duae rectae lineae non ductae per centrum
se invicem secant, sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD, et in ipso duae rectae lineae AC, BD se invicem secant in puncto E, non ductae per centrum. dico eas sese bifariam non secare.

Si enim fieri potest, secant sese bifariam, ita ut AE sit aequalis EC, et BE ipsi ED. si igitur una rectarum per centrum transit, manifestum est eam non posse bifariam secari ab altera quae

non transit per centrum. si vero neutra ipsarum per centrum transit, sumatur centrum ABCD circuli^a, et sit F, et EF jungatur. Quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam AC non ductam per centrum bifariam



secat, et ad rectos angulos ipsam secabit^b; quare rectus est FEA an- b. 3. 3.
gulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam BD non ductam per centrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit^b; rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus et FEA; ergo FEA angulus ipsi FEB aequalis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur AC, BD sese bifariam secant. si igitur in circulo &c. Q. E. D.

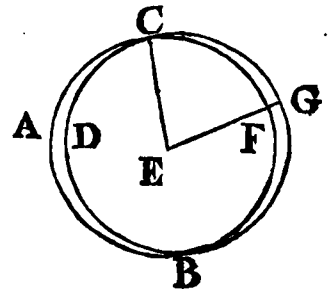
PROP. V. THEOR.

SI duo circuli se invicem secant, non erit ipforum idem centrum.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

Duo enim circuli ABC, CDG se invicem secant in punctis B, C. dico ipsorum idem centrum non esse.

Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque EC, et EFG ut-
cunque ducatur. et quoniam E centrum est
circuli ABC, erit CE ipsi EF aequalis. rur-
sus quoniam E centrum est CDG circuli, ae-
qualis est CE ipsi EG. sed ostensa est CE
aequalis EF; ergo FE ipsi EG aequalis e-
rit, minor majori, quod fieri non potest. non
igitur punctum E centrum est circulorum
ABC, CDG. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

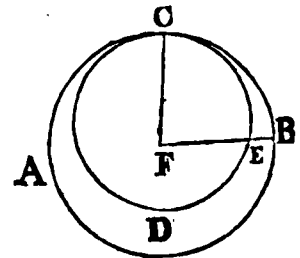


PROP. VI. THEOR.

SI duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem cen-
trum non erit.

Duo enim circuli ABC, CDE contingant sese intra in puncto C. dico ipsorum non esse idem centrum.

Si enim fieri potest, sit F; jungaturque FC, et FEB utcunque du-
catur. Quoniam igitur F centrum est circuli
ABC, aequalis est CF ipsi FB. rursus quoniam
F centrum est circuli CDE, erit CF aequalis
FE. ostensa autem est CF aequalis FB; ergo
et FE ipsi FB est aequalis, minor majori, quod
fieri non potest. non igitur F punctum cen-
trum est circulorum ABC, CDE. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

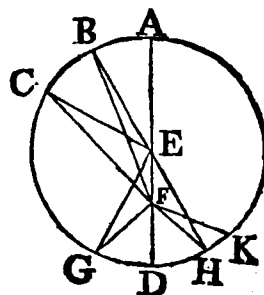


PROP. VII.

PROP. VII. THEOR.

SI in circuli diametro aliquod punctum sumatur quod non sit centrum circuli, et ab eo in circumferentiam cadant quaevis rectae lineae; maxima quidem erit in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum autem propinquior ei quae per centrum transit semper remotiore maior est. at duae tantum aequales ab eodem puncto in circumferentiam cadent ad utrasque partes minimae.

Sit circulus ABCD, diameter autem ejus AD, et in ipsa AD sumatur aliquod punctum F quod non sit centrum circuli; sit autem centrum circuli E, et a puncto F in circumferentiam ABCD cadant quaedam rectae lineae FB, FC, FG. dico FA maximam esse, et FD minimam; reliquarum autem, FB quidem majorem quam FC, FC vero majorem quam FG.



a. 20. 1.

Jungantur enim BE, CE, GE; et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora^a, erunt BE, EF majores quam BF; est autem AE aequalis BE, ergo BE, EF ipsi AF sunt aequales; major igitur est AF quam FB. rursus quoniam BE est aequalis CE, communis autem FE; duae BE, EF duabus CE, EF aequales sunt; sed BEF angulus major est angulo CEF, basis igitur BF basi FC est major^b. eadem ratione et CF major est quam FG. rursus b. 24. 1. quoniam GF, FE majores sunt quam EG^a, aequalis autem EG ipsi ED, erunt GF, FE majores quam ED. communis auferatur FE; ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, et FD minima; major vero BF quam FC, et FC quam FG.

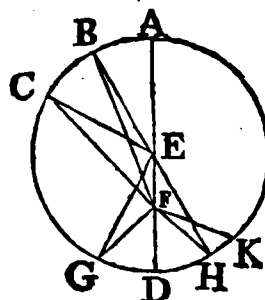
Dico

Dico et a puncto F duas tantum rectas lineas aequales cadere in circumferentiam ABCD ad utraque partes minimae FD. constituatur enim ad rectam lineam EF, et ad punctum

c. 23. 1. in ea E, angulo GEF aequalis angulus^c FEH, et FH jungatur. Quoniam igitur GE est aequalis EH, communis autem EF, duae GE, EF duabus HE, EF aequales sunt; et angulus GEF est aequalis angulo HEF; basis igitur

d. 4. 1. tur FG basi FH aequalis erit^d. dico a puncto F ad circumferentiam non cadere aliam ipsi FG aequalem.

si enim fieri potest, cadat FK, et quoniam FK est aequalis FG, estque ipsi FG aequalis FH, erit et FK ipsi FH aequalis, videlicet propinquior ei quae per centrum transit aequalis remotiori; quod fieri non potest. si igitur in circuli &c. Q. E. D.

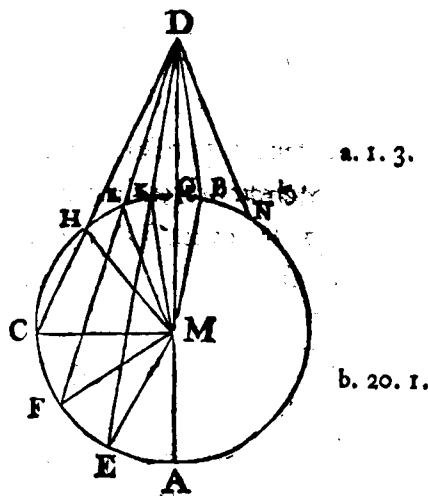


PROP. VIII. THEOR.

SI extra circumulum aliquod punctum fumatur, atque ab eo ad circumferentiam ducantur quaedam rectae lineae, quarum una per centrum transeat, reliquae vero utcunque; earum quidem quae in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quae per centrum transit; aliarum autem propinquior ei quae per centrum, semper remotiore major est. at earum quae in convexam circumferentiam cadunt, minima est quae inter punctum et diametrum interjicitur; aliarum vero quae propinquior minimae, semper remotiore est minor. duae autem tantum aequales a puncto in circumferentiam cadunt ad utraque partes minimae.

Sit circulus ABC, et extra circulum sumatur aliquod punctum D; ab eo autem ad circumferentiam ducantur rectae lineae quaedam DA, DE, DF, DC, sitque DA per centrum. dico earum quidem quae in concavam circumferentiam AEFC cadunt maximam esse DA quae per centrum transit; et quae propinquior est ei quae per centrum semper major erit remotiore, videlicet DE quidem quam DF, DF vero quam DC: earum vero quae in convexam circumferentiam HLKG cadunt, minimam esse DG quae inter punctum D et diametrum AG interjicitur, et quae propinquior minimae semper est minor remotiore, videlicet DK quam DL, et DL quam DH.

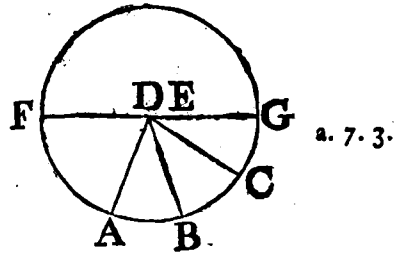
Sumatur enim centrum circuli ^a ABC, quod sit M, et jungantur ME, MF, MC, MK, ML, MH. et quoniam AM est aequalis ME, communis apponatur MD, ergo AD est aequalis ipsis EM, MD; sed EM, MD sunt majores quam ED^b, ergo et AD quam ED est major. rursus quoniam aequalis est ME ipsi MF, communis autem MD, erunt EM, MD ipsis FM, MD aequales; at angulus EMD major est angulo FMD, basis igitur ED basi FD major erit^c. similiter ostendemus et FD majorem esse quam CD. c. 24. 1. ergo maxima est DA; major autem DE quam DF, et DF quam DC. et quoniam MK, KD sunt majores quam MD^b, et MK est aequalis MG, erit reliqua KD quam reliqua GD major^d, quare GD minor quam KD; minima igitur est GD. et quoniam super trianguli MLD uno latere MD, duae rectae lineae MK, KD intra constituuntur, erunt MK, KD minores ipsis ML, LD^e, quarum MK est aequalis e. 21. 1. ML; reliqua igitur DK minor est quam reliqua DL. similiter ostendemus,



LIBER TERTIUS.

81

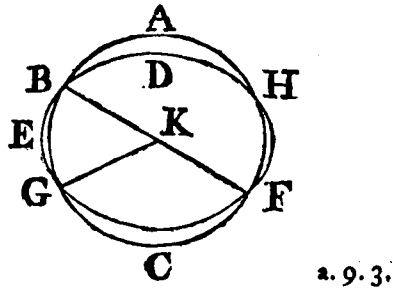
puncta F, G producat; ergo FG diameter est circuli ABC. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit DG, major autem DC quam DB, et DB quam DA^a. sed et aequales, quod fieri non potest; non igitur E centrum est circuli ABC. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse praeter ipsum D; est igitur D centrum circuli ABC. si igitur intra circum- lum &c. Q. E. D.



PROP. X. THEOR.

CIRCULUS circum in pluribus quam duobus punctis non secat. 'N. B. Hoc de ipsorum circumferentiis intelligendum est.'

Si enim fieri potest, circulus ABC circum DEF secet in pluribus punctis quam duobus, nempe in B, G, F, et circuli ABC centrum sumatur K, et KB, KG, KF jungantur. Quoniam igitur intra circum DEF sumptum est aliquod punctum K, et ab ipso K in circumferentiam DEF incidant plures quam duae rectae lineae aequales KB, KG, KF, erit punctum K circuli DEF centrum^a.



est autem et K circuli ABC centrum; duorum igitur circulorum qui sese secant idem est centrum, quod fieri non potest^b. quare circulus b. 5. 3. circum in pluribus quam duobus punctis non secat. Q. E. D.

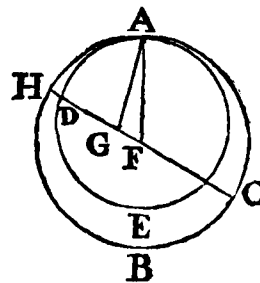
L

PROP. XI.

PROP. XI. THEOR.

SI duo circuli sese intus contingant, et sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC, ADE sese intus contingant in puncto A, et sumatur circuli quidem ABC centrum F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam conjungentem puncta G, F, si producat, in punctum A cadere.



Non enim; sed si fieri potest, cadat ut FGDH, et AF, AG jungantur. itaque quoniam AG,

a. 20. 1. GF majores sunt quam FA ^a hoc est quam FH, (est enim FA aequalis ipsi FH, nam ab eodem sunt centro) communis auferatur FG, reliqua igitur AG major est quam reliqua GH. sed AG est aequalis GD, ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur puncta F, G conjungens recta linea extra contactum A cadet. cadet igitur in ipsum. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

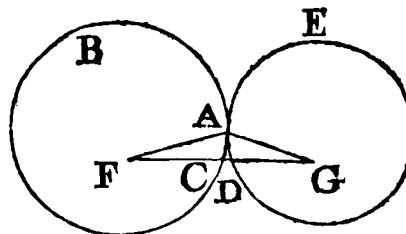
PROP. XII. THEOR.

SI duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC, ADE sese extra contingant in puncto A; et sumatur circuli quidem ABC centrum F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam puncta F, G conjungentem per contactum A transire.

Non

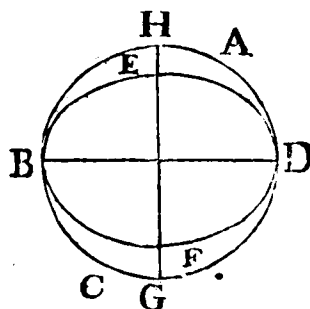
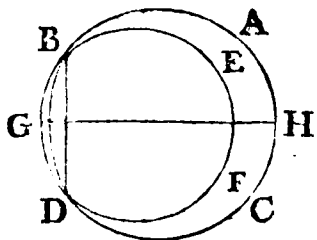
Non enim, sed, si fieri potest, cadat ut FCDG, et FA, AG jungantur. quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF aequalis FC. rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD aequalis. sunt igitur FA, AG ipsis FC, DG aequales; ergo tota FG major est quam FA, AG. sed et minor^a; quod fieri non potest. non igitur a. 20. 1. puncta F. G conjungens recta linea per contactum non transibit. per ipsum igitur transit. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.



PROP. XIII. THEOR.

CIRCULUS circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat.

Si enim fieri potest, circulum ABC circulus EBFc ontingat primùm intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, D; jungatur BD, et ducatur * GH bifariam et ad rectos angulos secans ipsam BD. Quoniam * 10, 11. 1;

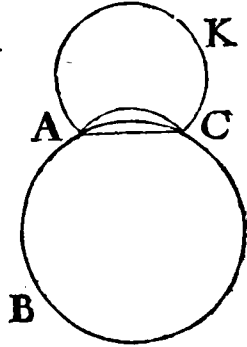


igitur puncta B, D sunt in circumferentia utriusque circuli, recta BD cadet intra utrumque circulum^a. igitur in recta GH quae ipsam BD bifariam et ad rectos angulos secat, erit utriusque circuli centrum^b; ergo GH b. Cor. 1. 3.

e. 11. 3. producta cadet in circulorum contactum^c; sed, in contactum non cadit, quia B, D puncta sunt extra rectam GH, quod est absurdum. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis quam uno.

Dico etiam neque extra contingere; si enim fieri potest circulum ABC contingat circulus AKC in pluribus punctis quam uno, videlicet in A, C, et AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia circuli AKC sumpta sunt duo puncta A, C recta linea AC

a. 2. 3. quae ipsa conjungit intra circulum AKC cadet^a. est autem circulus AKC extra circulum ABC, quare recta AC est extra ABC circulum; quoniam vero A, C puncta sunt in circumferentia ipsius ABC circuli, recta AC est intra^a eundem, quod est absurdum. non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quam uno. ostensum autem est neque intus. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, siue intus siue extra contingit. Q. E. D.



PROP. XIV. THEOR.

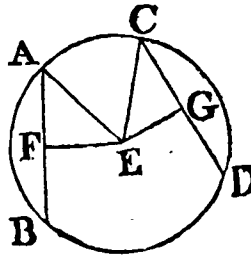
IN circulo aequales rectae lineae aequaliter a centro distant; et quae aequaliter a centro distant sunt inter se aequales.

Sit circulus ABDC, et in ipso aequales sint rectae lineae AB, CD. dico eas a centro aequaliter distare.

Sumatur enim circuli ABDC centrum, sitque E, et ab ipso ad AB, CD perpendiculares ducantur EF, EG, et AE, EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quaedam EF per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et ipsam bifariam

riam secabit^a. quare AF est aequalis FB, ideoque AB dupla est ipsius a. 3. 3.

AF. eadem ratione, et CD dupla est CG. atque est AB ipsi CD aequalis; aequalis igitur et AF ipsi CG. et quoniam AE est aequalis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC aequale. sed quadrato quidem ex AE aequalia sunt ex AF, FE quadrata^b, rectus enim est b. 47. 1. angulus ad F; quadrato vero ex EC aequalia sunt quadrata ex EG, GC, rectus est enim angulus ad G. quadrata igitur ex AF, FE aequalia sunt quadratis ex CG, GE, quorum quadratum ex AF est aequale quadrato ex CG, etenim aequalis est AF ipsi CG; reliquum igitur ex FE aequale est reliquo quadrato ex EG, quare recta FE ipsi EG est aequalis. in circulo autem aequaliter a centro distare rectae lineae dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductae aequales sunt^c. igitur AB, CD a centro c. 4. Def. 3. aequaliter distant.



Sed AB, CD aequaliter distant a centro, hoc est, aequalis sit FE ipsi EG; dico AB ipsi CD aequalem esse. iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB quidem duplam esse ipsius AF, CD vero ipsius CG. et quoniam aequalis est AE ipsi EC, erit et ex AE quadratum quadrato ex EC aequale. sed quadrato quidem ex AE aequalia sunt^b quadrata ex EF, FA, quadrato vero ex EC aequalia^b quadrata ex EG, GC; quadrata igitur ex EF, FA quadratis ex EG, GC aequalia sunt; quorum quadratum ex FE aequale est quadrato ex EG, est enim FE ipsi EG aequalis; reliquum igitur ex AF quadratum aequale est reliquo ex CG; est igitur recta linea AF aequalis ipsi CG. et est AB quidem dupla ipsius AF, CD vero dupla ipsius CG; aequalis igitur est AB ipsi CD. in circulo igitur aequales rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. XV.

PROP. XV. THEOR.

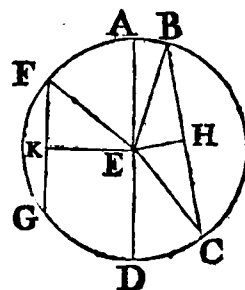
IN circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior centro remotiore major est; et quae major est, propinquior erit centro minore.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum vero E; et propinquior quidem centro sit BC, remotior autem FG. dico AD maximam esse, et BC majorem quam FG.

Ducantur enim a centro ad BC, FG perpendiculares EH, EK, et EB, EC, EF jungantur. Quoniam igitur aequalis est AE ipsi EB, et ED ipsi EC, erit AD aequalis ipsis BE, EC. sed

a. 20. 1. BE, EC majores sunt quam BC^a, quare et AD quam BC major erit.

Et quoniam BC propinquior est centro, remotior vero FG, erit EK major quam EH^b. est autem, ut in praecedente ostensum fuit, BC dupla ipsius BH, et FG dupla ipsius FK, et quadrata ex EH, HB aequalia quadratis ex EK, KF, quorum quadratum ex EH minus est quadrato ex EK, minor enim est EH ipsa EK; reliquum igitur quadratum ex BH reliquo ex FK majus erit, quare recta BH major erit ipsa FK; et propterea BC erit major quam FG.



Sed fit BC major quam FG, erit BC propinquior centro quam FG, hoc est, iisdem constructis, erit EH minor quam EK. Quoniam enim BC major est quam FG, erit et BH major quam FK. quadrata autem ex BH, HE aequalia sunt quadratis ex FK, KE, quorum ex BH quadratum quadrato ex FK est majus, est enim BH major quam FK; reliquum igitur quadratum ex EH reliquo ex EK minus erit, et recta linea EH minor erit quam EK. in circulo igitur &c. Q. E. D.

PROP. XVI.

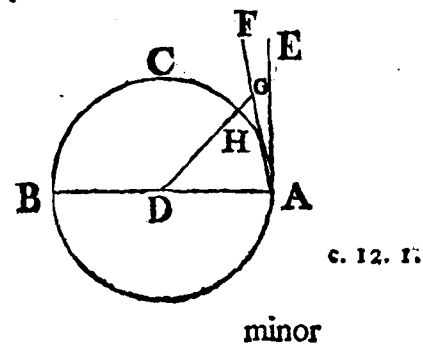
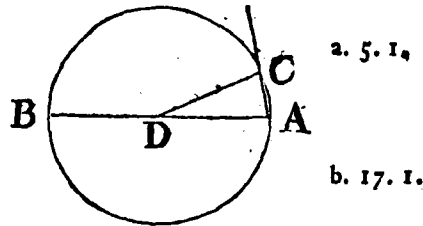
PROP. XVI. THEOR.

QUAE diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta est, cadit extra circulum; et in locum inter rectam lineam et circumferentiam recta linea non cadet; sive, quod idem est, circumferentia circuli transit inter rectam quae diametro est ad rectos angulos, et rectam quae cum diametro angulum acutum quantumvis magnum continet, vel quae angulum quantumvis parvum continet cum recta quae ad rectos angulos est diametro.

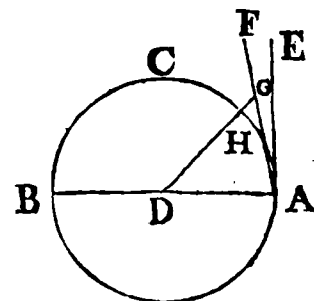
Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB; dico rectam lineam, quae ab extremitate A diametri ipsi AB ad rectos angulos ducta est, extra circulum cadere.

Non enim; sed, si fieri potest, cadat intus ut AC, et DC jungatur. Quoniam igitur aequalis est DA ipsi DC, erit et angulus DAC angulo ACD aequalis^a; rectus autem est DAC, rectus igitur est ACD; quare anguli DAC, ACD duobus rectis aequales sunt; quod fieri non potest^b. non igitur a puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere; extra igitur cadet, ut AE, in figura sequente.

Dico in locum inter rectam lineam AE et circumferentiam ABC rectam lineam non cadere. si enim fieri potest, cadat ut FA, et a puncto D ad FA perpendicularis ducatur^c DHG. et quoniam rectus est angulus AGD,



b. 17. 1. minor autem recto DAG^b , erit DA quam DG major^d. aequalis autem
 d. 19. 1. est DA ipsi DH ; major igitur est DH ipsa
 DG , minor majore, quod fieri non potest. non
 igitur in locum inter rectam lineam et circum-
 ferentiam, recta linea cadet. sive, quod idem
 est, circumferentia circuli transit inter rectam
 quae diametro est ad rectos angulos, et rec-
 tam quae cum diametro angulum acutum
 quantumvis magnum continet, vel quae angu-
 lum quantumvis parvum continet cum recta quae ad rectos angulos est
 diametro. ‘Et hoc, nihil vero aliud, intelligendum est quando in textu
 ‘Graeco et versionibus, semicirculi angulus dicitur major omni angulo
 ‘acuto, et reliquus minor.’



COR. Ex his manifestum est rectam lineam quae ab extremitate dia-
 metri circuli eidem ad rectos angulos ducta est, circulum contingere; et
 rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quae
 e. 2. 3. occurrit in duobus punctis intra ipsum cadere ostensa est^c. ‘Et praeter-
 ‘ea, unicam tantum rectam posse circulum in eodem puncto contin-
 ‘gere.’

PROP. XVII. PROB.

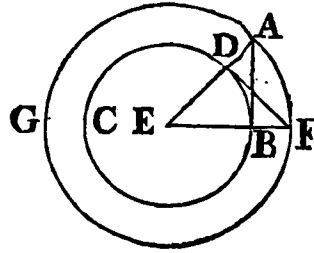
A Dato puncto extra circulum, vel in ejus circumfe-
 rentia, rectam lineam ducere quae datum circulum
 contingat.

Primo, sit datum punctum A extra datum circulum BCD . oportet
 a puncto A rectam lineam ducere quae datum circulum contingat.

a. 1. 3. Sumatur enim centrum circuli E^a , et AE jungatur; et centro qui-
 dem E , intervallo autem EA circulus AFG describatur; et a puncto D
 ipsi

ipsi EA ad rectos angulos ducatur ^b DF, junganturque EBF, AB. dico b. 11. 1.
a puncto A ductam esse AB quae circulum BCD contingit.

Quoniam enim E centrum est circulorum BCD, AFG, erit EA aequalis EF, et ED ipsi EB; duae igitur AE, EB duabus FE, ED aequales sunt, et angulum communem ad E continent; ergo basis DF basi AB est aequalis, triangulumque EDF aequale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis^c. aequalis igitur est angulus EBA angulo EDF. rectus autem est EDF, rectus igitur est EBA. atque est EB ex centro; quae autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducta est, circulum contingit^d. con-d. Cor. 16. 3. tingit igitur AB circulum.



c. 4. 1.

^c Sit autem datum punctum in circumferentia circuli, ut punctum D, et ad centrum E ducatur DE, et a puncto D, ipsi DE ad rectos angulos ducatur ^b DF; continget ^d haec circulum. A dato igitur puncto ducta est recta linea quae datum circulum contingit. Q. E. F.

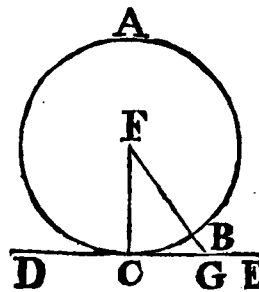
PROP. XVIII. THEOR.

SI circulum contingat quaedam recta linea, a centro autem ad tactum recta linea ducatur, ducta ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in puncto C, et circuli ABC sumatur centrum F, et ab F ad C ducatur FC; dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse.

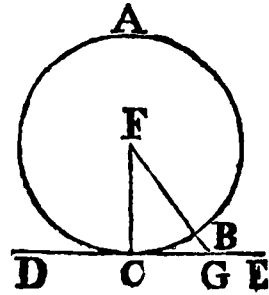
Si enim non sit, ducatur a puncto F ad DE

M



perpendicularis ^a

- a. 12. 1. perpendicularis ^a FBG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit
 b. 17. 1. GCF acutus^b; majorem autem angulum ma-
 c. 19. 1. jus latus subtendit^c. major igitur est FC quam
 FG; aequalis autem FC ipsi FB; major igitur est FB ipsa FG, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. similiter ostendemus neque aliam quampiam praeter ipsam FC. est igitur FC perpendicularis ad DE. si igitur circulum contingat &c. Q. E. D.

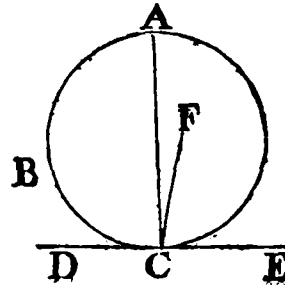


PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quaedam recta linea, a tactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ducta erit centrum circuli.

Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in C, et a C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA; dico in ipsa CA centrum circuli esse.

- Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, et jungatur CF. quoniam igitur circulum ABC contingit quaedam recta linea DE, et a centro ad tactum ducta est FC, erit FC ad ipsam DE perpendicularis^a; rectus igitur angulus est FCE. est autem et ACE rectus; angulus igitur FCE est aequalis ipsi ACE, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est circuli ABC. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse praeterquam in ipsa CA, centrum igitur est in CA. quare si circulum contingat &c. Q. E. D.



PROP. XX.

LIBER TERTIUS.

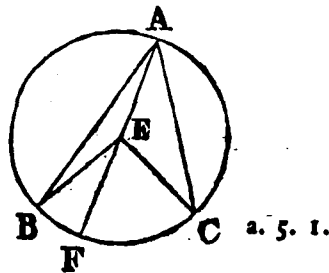
91.

PROP. XX. THEOR.

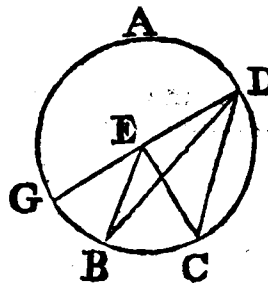
IN circulo angulus qui ad centrum duplus est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habent.

Sit circulus ABC, et ad centrum quidem ejus sit angulus BEC, ad circumferentiam vero BAC, habeant autem eandem circumferentiam BC pro basi; dico BEC angulum anguli BAC duplum esse.

Primo, sit centrum E intra angulum BAC, et jungatur AE et ad F producatur. quoniam igitur EA est aequalis EB, erit et angulus EAB angulo EBA aequalis^a; anguli igitur EAB, EBA dupli sunt ipsius EAB; sed angulus BEF est aequalis angulis EAB, EBA^b; ergo et angulus BEF ipsius EAB est duplus. ea-^b. 32. 1. dem ratione et angulus FEC duplus est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit.



Rursus inflectatur BDC ad circumferentiam, ita ut centrum E sit extra angulum BDC, junctaque DE ad G producatur. similiter ostendemus angulum GEC anguli GDC duplum esse, quorum GEB duplus est ipsius GDB; reliquus igitur BEC reliqui BDC est duplus. in circulo igitur angulus &c. Q. E. D.



PROP. XXI. THEOR.

IN circulo qui in eodem segmento sunt anguli inter se aequales sunt.

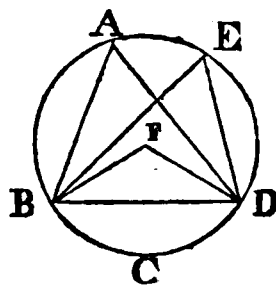
M 2

Sit

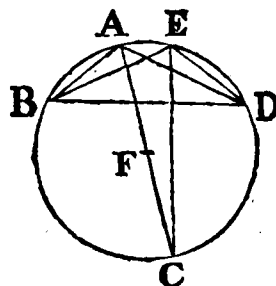
EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sit circulus ABCD, et in eodem segmento BAED anguli sint BAD, BED; dico eos inter se aequales esse.

Sumatur enim circuli ABCD centrum, sitque F. et primo, sit BAED segmentum majus semicirculo, et jungantur BF, FD. et quoniam angulus quidem BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, et circumferentiam eandem BCD pro basi habent, erit BFD angulus anguli BAD duplus^a. eadem ratione angulus BFD duplus est etiam angulo BED. angulus igitur BAD angulo BED aequalis erit.



Sit vero segmentum BAED non majus semicirculo, et in ipso sint anguli BAD, BED, erunt hi inter se aequales. ad centrum enim F ducatur AF, et producatur ad C, et CE jungatur. segmentum igitur BAEC majus est semicirculo, quare anguli in eo BAC, BEC sunt inter se aequales. eadem ratione aequales inter se sunt anguli CAD, CED. totus igitur angulus BAD toti BED est aequalis. in circulo igitur qui in eodem segmento sunt anguli, inter se aequales sunt. Q. E. D.



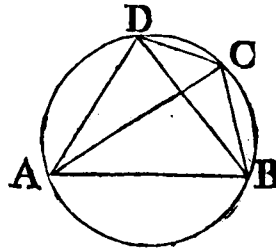
PROP. XXII. THEOR.

QUADRILATERORUM quae in circulis sunt, anguli oppositi sunt duobus rectis aequales.

Sit circulus ABCD, et in ipso quadrilaterum ABCD; dico angulos ipsius oppositos duobus rectis aequales esse.

Jungantur AC, BD; quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt aequales^a, erunt trianguli ABC tres anguli CAB, ABC,

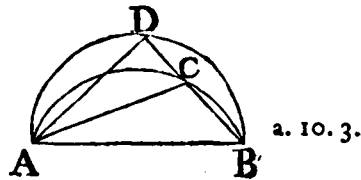
ABC, BCA aequales duobus rectis. aequalis ^b autem est angulus CAB ^{b. 21. 3.} angulo CDB, in eodem enim sunt segmento BADC; angulus vero ACB aequalis est ipsi ADB, sunt enim in eodem segmento ADCB. totus igitur ADC angulis BAC, ACB aequalis est. communis apponatur ABC angulus; anguli igitur ABC, CAB, BCA angulis ABC, ADC sunt aequales. sed ABC, CAB, BCA sunt duobus rectis aequales; ergo et anguli ABC, ADC duobus rectis aequales erunt. similiter ostendemus angulos quoque BAD, DCB duobus rectis esse aequales. quadrilaterorum igitur quae in circulis sunt &c. Q. E. D.



PROP. XXIII. THEOR.

SUPER eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, et non sibi mutuo congruentia, ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circulorum segmenta ACB, ADB similia, et sibi mutuo non congruentia, ex eadem parte constituentur. quoniam igitur circulus ACB circulum ADB secat in duobus punctis A, B, idem eundem non secabit in alio puncto ^a. necesse igitur est ut unum segmentum cadat intra alterum; cadat ACB intra ipsum ADB, et ducatur recta linea BCD, junganturque CA, DA. itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB, similia autem circulorum segmenta sunt quae angulos capiunt aequales ^b; erit ACB angulus aequalis angulo ADB, ^{b. 11. Def. 3.} exterior interiori, quod fieri non potest ^c. non igitur super eadem recta ^{c. 16. 1.} linea,



EUCLIDIS ELEMENTORUM

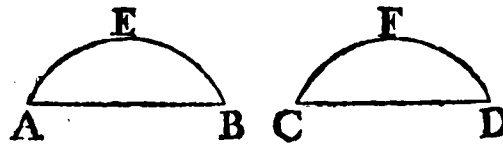
linea, duo circulorum segmenta, similia, et sibi mutuo non congruentia, ex eadem parte constituentur. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

SUPER aequalibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se aequalia sunt.

Sint enim super aequalibus rectis lineis AB, CD similia circulorum segmenta AEB, CFD; dico segmentum AEB segmento CFD aequale esse.

Applicato enim segmento AEB segmento CFD, et posito quidem puncto A in C, recta vero linea AB super CD, congruet et B punctum



puncto D, propterea quod AB ipsi CD sit aequalis. non igitur, congruente recta linea AB ipsi CD, non congruet segmentum AEB segmento CFD^a. congruet igitur et ipsi aequale erit. super aequalibus igitur rectis lineis &c. Q. E. D.

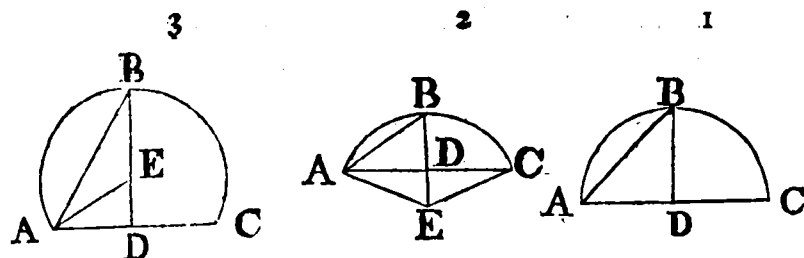
PROP. XXV. PROB.

CIRCULI segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum ABC; oportet describere circulum cujus ABC est segmentum.

a. 10. 1. Secetur AC bifariam^a in D, et a puncto D ipsi AC ad rectos angulos

gulos ducatur^b DB, et AB jungatur. si igitur * anguli ABD, BAD inter se aequales fuerint, erit recta BD aequalis^c ipsi DA, et propterea^{b. 11. 1. * Fig. 1. c. 6. 1.} ipsi DC. et quoniam tres rectae lineae DA, DB, DC sunt inter se aequales, erit D centrum circuli^d. centro igitur D, intervallo autem uni^{d. 9. 3.} ipsarum DA, DB, DC aequali, circulus describatur; transibit hic per reliqua puncta, et circulus cujus segmentum est ABC descriptus erit. quoniam vero centrum D est in ipsa AC, erit ABC segmentum semicirculus. si autem * anguli ABD, BAD inter se inaequales fuerint, ad^{* Fig. 2, 3.} rectam lineam AB atque ad punctum in ea A constituatur angulus BAE aequalis angulo^c ABD, et DB ad E producat, jungaturque EC. ^{c. 23. 1.} Quoniam igitur angulus ABE est aequalis angulo BAE, erit et BE



recta linea ipsi EA aequalis^c. et quoniam AD est aequalis DC, communis autem DE, duae AD, DE duabus CD, DE aequales sunt, altera alteri; et angulus ADE est aequalis angulo CDE, rectus enim uterque est; igitur et basis AE basi EC est aequalis^f. sed ostensa est AE aequalis EB, quare et BE ipsi EC est aequalis; ac propterea tres rectae lineae AE, EB, EC inter se aequales sunt; quare et E centrum est circuli^d. centro igitur E, intervallo autem uni ipsarum AE, EB, EC aequali, circulus describatur, hic per reliqua transibit puncta, et circulus cujus segmentum est ABC descriptus erit. et manifestum est si angulus ABD major fuerit angulo BAD, centrum E cadere extra segmentum ABC, quod propterea minus erit semicirculo. si autem angulus ABD minor

EUCLIDIS ELEMENTORUM

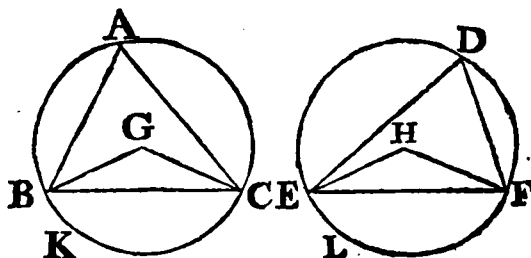
minor fuerit ipso BAD, centrum E cadet intra segmentum ABC, quod propterea majus erit semicirculo. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus cujus est segmentum. Q. E. F.

PROP. XXVI. THEOR.

IN aequalibus circulis aequales anguli aequalibus insistant circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipsis aequales anguli ad centra quidem BGC, EHF, ad circumferentias autem BAC, EDF. dico BKC circumferentiam circumferentiae ELF aequalem esse.

Jungantur enim BC, EF; et quoniam aequales sunt ABC, DEF circuli, erunt et quae ex centris aequales; duae igitur BG, GC duabus EH, HF aequales sunt; et angulus ad G est aequalis angulo ad



- a. 4. 1. H; basis igitur BC basi EF est aequalis^a. et quoniam aequalis est angulus ad A angulo ad D, segmentum BAC simile erit segmento^b EDF; et sunt super aequalibus rectis lineis BC, EF; quae autem super aequalibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se aequalia sunt^c; segmentum igitur BAC segmento EDF est aequale. sed et totus ABC circulus aequalis est toti DEF, reliquum igitur segmentum BKC

LIBER TERTIUS.

97

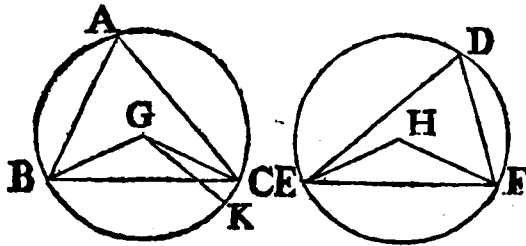
BKC reliquo ELF est aequale; circumferentia igitur BKC circumferentiae ELF aequalis erit. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

IN aequalibus circulis anguli qui aequalibus insistant circumferentiis inter se aequales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In aequalibus enim circulis ABC, DEF, aequalibus circumferentiis BC, EF insistant anguli ad centra quidem BGC, EHF, ad circumferentias vero BAC, EDF. dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF aequalem esse.

Si quidem igitur angulus BGC aequalis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse aequalem^a. sin minus unus a. 20. 3.



ipforum est major. sit major BGC, et constituatur ad rectam lineam BG, et ad punctum in ipsa G, angulo EHF aequalis angulus^b BGK; b. 23. 1. aequales autem anguli aequalibus insistant circumferentiis quando ad centra fuerint^c; aequalis igitur est circumferentia BK circumferentiae c. 26. 3. EF. sed EF aequalis est ipsi BC, ergo et BK ipsi BC est aequalis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inaequalis est angulus BGC angulo EHF; ergo est aequalis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A, anguli vero EHF dimidium qui ad D^a.

N

angulus

EUCLIDIS ELEMENTORUM

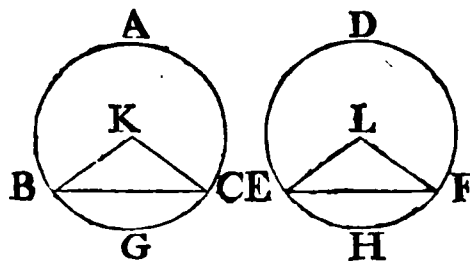
angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est aequalis. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

IN aequalibus circulis aequales rectae lineae circumferentias aequales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipsis aequales rectae lineae BC, EF quae circumferentias quidem BAC, EDF majores auferant, minores vero BGC, EHF. dico circumferentiam BAC majorem majori EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF aequalem esse.

a. 1. 3. Sumantur enim centra circulorum ^a K, L junganturque BK, KC, EL, LF. et quoniam circuli aequales sunt, erunt et quae ex centris aequales,



duae igitur BK, KC sunt aequales duabus EL, LF; et basis BC aequalis est basi EF, angulus igitur BKC angulo ELF est aequalis^b. aequales autem anguli aequalibus insunt circumferentiis quando ad centra fuerint^c, circumferentia igitur BGC aequalis est circumferentiae EHF; sed et totus ABC circulus toti EDF est aequalis; reliqua igitur circumferentia BAC reliquae EDF aequalis erit. ergo in aequalibus circulis &c. Q. E. D.

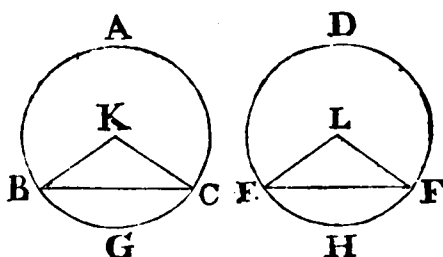
PROP. XXIX.

PROP. XXIX. THEOR.

IN aequalibus circulis aequales circumferentias aequales rectae lineae subtendunt.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipsis aequales sumantur circumferentiae BGC, EHF, et BC, EF jungantur. dico rectam lineam BC rectae EF aequalem esse.

Sumantur enim centra circulorum^a K, L, et jungantur BK, KC, EL, a. 1. 3. LF. et quoniam circumferentia BGC est aequalis circumferentiae EHF,



erit et angulus BKC angulo ELF aequalis^b. et quoniam circuli ABC, b. 27. 3. DEF sunt aequales, et quae ex centris aequales erunt; duae igitur BK, KC sunt aequales duabus EL, LF, et aequales angulos continent. basis igitur BC basi EF est aequalis^c: in aequalibus igitur circulis &c. c. 4. 1. Q. E. D.

PROP. XXX. PROB.

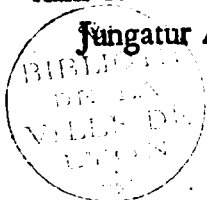
DATAM circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ADB, oportet ADB circumferentiam bifariam secare.

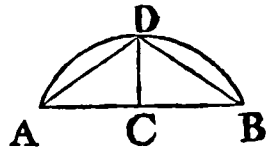
Jungatur AB, et in C bifariam secetur^a; a puncto autem C ipsi AB^{a. 10. 1.}

N 2

ad



ad rectos angulos ducatur CD, et jungantur AD, DB. Quoniam igitur AC est aequalis CB, communis autem CD, duae AC, CD duabus BC, CD aequales sunt; et angulus ACD aequalis angulo BCD, rectus enim uterque est; basis igitur AD basi BD est



b. 4. 1. aequalis^b. aequales autem rectae lineae circumferentias aequales au-
c. 28. 3. ferunt^c, majorem quidem majori, minorem vero minori, et est utraque ipsarum AD, DB semicirculo minor; circumferentia igitur AD circumferentiae DB est aequalis. Data igitur circumferentia bifariam secta est.
Q. E. F.

PROP. XXXI. THEOR.

IN circulo angulus qui in semicirculo, rectus est; qui vero in majori segmento, minor est recto; et qui in minori, major recto.

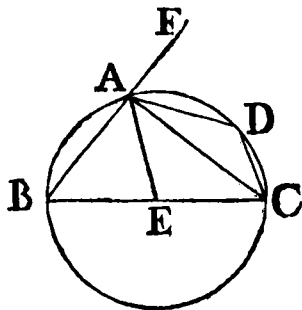
Sit circulus ABCD, diameter autem ejus sit BC, centrum vero E; et ducatur CA circulum dividens in segmenta ABC, ADC, et jungantur BA, AD, DC. Dico angulum quidem qui est in semicirculo BAC rectum esse, qui vero in segmento ABC majore semicirculo, videlicet angulum ABC, minorem esse recto, et qui est in segmento ADC minore semicirculo, sc. ADC angulum, recto majorem esse.

Jungatur AE, et BA ad F producat. itaque quoniam BE est
a. 5. 1. aequalis EA, erit et angulus EAB aequalis ipsi EBA^a; rursus quoniam AE est aequalis EC, aequalis erit et angulus EAC angulo ECA^a; totus igitur angulus BAC est aequalis duobus angulis ABC, ACB. est autem et angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC, ACB aequalis^b; angulus igitur BAC est aequalis angulo FAC, ac propterea uterque^c. quare in semicirculo BAC angulus CAB rectus est.

Et

Et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC, BAC duobus rectis sunt minores^d, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor; at-d. 17. 1. que est in segmento ABC majore semicirculo.

Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sunt aequales^e, erunt ABC, ADC anguli aequales duobus rectis; et angulus ABC minor est recto, reliquus igitur ADC recto major erit; atque est in segmento ADC minore semicirculo. Q. E. D.



c. 22. 3.

Et patet circumferentiam AB cadere extra rectam AB quae cum AC basi sc. segmenti continet angulum rectum versus partes majoris segmenti ABC, circumferentiam vero AD cadere intra rectam AF quae cum eadem AC angulum rectum continet versus partes minoris segmenti ADC. ‘Et hoc, nihilque aliud, intelligendum est quando in textu Graeco et versione bus, angulus segmenti majoris, major; angulus vero segmenti minoris minor esse dicitur angulo recto.’

COR. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit aequalis duobus reliquis, cum rectum esse; propterea quod et qui deinceps est, iisdem est aequalis. quando autem anguli deinceps sunt aequales, recti sunt^e.

c. Def. 10. 1.

PROP. XXXII. THEOR.

SI circulum contingat quaedam recta linea, a tactu autem ducatur recta linea circulum secans; anguli quos ad contingentem facit, aequales erunt iis qui sunt in alternis circuli segmentis.

Circulum

Circulum enim ABCD contingat quaedam recta linea EF in B, et a puncto B ad circumulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum secans. dico angulos quos BD facit cum contingente EF aequales esse iis qui sunt in alternis circuli segmentis, hoc est angulum quidem FBD esse aequalem angulo qui est in DAB segmento, angulum vero DBE aequalem angulo in segmento BCD.

a. 11. 1. Ducatur enim a puncto B ipsi EF ad rectos angulos ^a BA, et in circumferentia BD sumatur quodvis punctum C, junganturque AD, DC,

CB. et quoniam circumulum ABCD contingit recta linea EF in puncto B, et a tactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit

b. 19. 3. in ipsa BA centrum ABCD circuli^b; angulus

a. 31. 3. igitur ADB in semicirculo est rectus^c; reliqui propterea anguli BAD, ABD uni recto aequa-

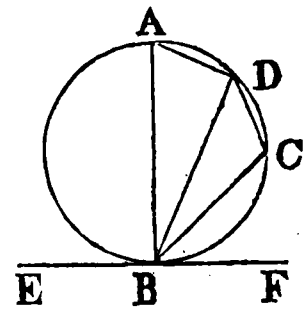
d. 32. 1. les sunt^d. sed et ABF est rectus; ergo angulus ABF aequalis est angulis BAD, ABD.

communis auferatur ABD; reliquus igitur DBF ei qui est in alterno circuli segmento, ipsi scilicet BAD, aequalis est. et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, anguli ejus oppositi aequales sunt duobus rec-

e. 22. 3. tis^e; aequales igitur erunt anguli BAD, BCD ipsis DBF, DBE^f, quo-

f. 13. 1.

rum DBF ostensus est aequalis ipsi BAD; reliquus igitur DBE ei qui est in alterno circuli segmento, videlicet angulo DCB aequalis erit. si igitur circumulum contingat &c. Q. E. D.



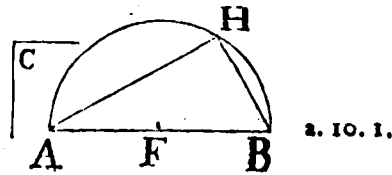
PROP. XXXIII. PROB.

SUPER datam rectam lineam describere segmentum circuli, quod capiat angulum dato angulo rectilineo aequalem.

Sit

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus qui ad C; itaque oportet super datam rectam lineam AB describere segmentum circuli, quod capiat angulum aequalem angulo qui est ad C.

Et primum sit angulus ad C rectus, et bifariam secetur ^a AB in F, centroque F, et intervallo FA describatur semicirculus AHB;

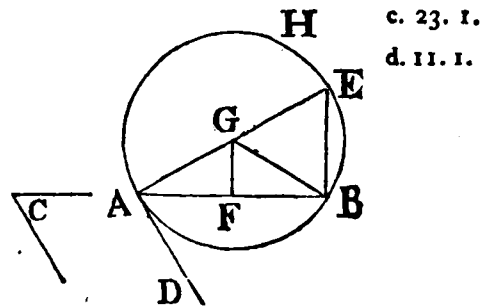


a. 10. 1.

erit igitur angulus AHB in semicirculo aequalis recto angulo ^b ad C. b. 31. 3.

Non autem sit angulus ad C rectus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea A constituatur angulus BAD angulo qui est ad C aequalis^c, a puncto vero A ipsi AD ad rectos angulos ^d AE;

secetur ^a autem AB bifariam in F, atque a puncto F ducatur FG ad rectos angulos ^d ipsi AB, et GB jungatur. et quoniam AF est aequalis FB, communis autem FG, duae AF, FG duabus BF, FG sunt aequales; et angulus AFG aequalis est angulo BFG;

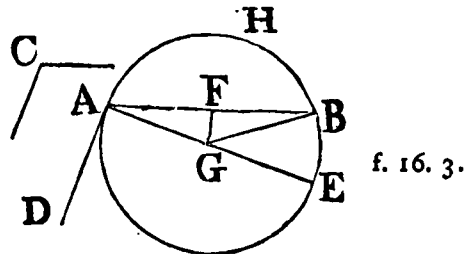


c. 23. 1.

d. 11. 1.

basis igitur AG basi GB est aequalis^e. itaque centro quidem G intervallo vero GA circulus descriptus transibit etiam per B. describatur et

fit AHB. Quoniam igitur a puncto A extremitate diametri AE ducta est AD ad rectos angulos ipsi AE, continget AD circum^f. et quoniam circum AHB contingit recta linea AD, et a tactu ad A ducta est recta linea AB secans circum,



f. 16. 3.

erit angulus DAB aequalis angulo in alterno circuli segmento AHB. sed angulus DAB angulo ad C est aequalis, ergo et angulus ad C angulo in segmento AHB aequalis erit. super datam igitur rectam lineam AB

EUCLIDIS ELEMENTORUM

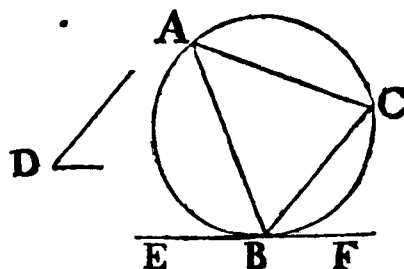
AB segmentum circuli descriptum est AHB quod capiat angulum dato angulo ad C aequalem. Q. E. F.

PROP. XXXIV. PROB.

A Dato circulo segmentum abscindere quod capiat angulum dato angulo rectilineo aequalem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet a circulo ABC segmentum abscindere quod capiat angulum angulo ad D aequalem.

- a. 17. 3. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens^a, et ad rectam lineam BF et ad punctum in ea B constituatur angulus FBC angulo qui est ad D aequalis^b. Quoniam igitur circulum ABC contingit quaedam recta linea EF, et a tactu B ducta est BC, erit angulus FBC aequalis ei qui in alterno circuli segmento BAC constituitur^c. sed FBC angulus angulo qui ad D est aequalis; angulus igitur in segmento BAC angulo ad D aequalis erit. A dato igitur circulo ABC abscissum est segmentum BAC capiens angulum dato angulo rectilineo qui est ad D aequalem. Q. E. F.

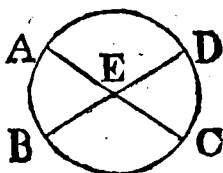


PROP. XXXV. THEOR.

SI in circulo duae rectae lineae sese mutuo secent, rectangulum a segmentis unius contentum, aequale est rectangulo contento segmentis alterius.

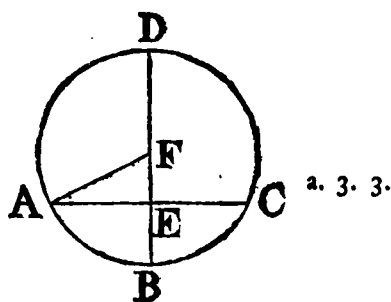
In

In circulo enim ABCD duae rectae lineae AC, BD sese mutuo secant in puncto E; dico rectangulum contentum ipsis AE, EC aequale esse rectangulo quod continetur ipsis BE, ED.



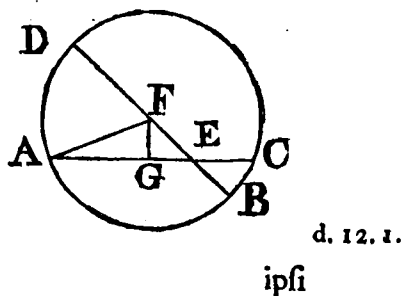
Si igitur AC, BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum circuli ABCD, manifestum est, aequalibus existentibus AE, EC, BE, ED, et rectangulum contentum ipsis AE, EC aequale esse rectangulo quod BE, ED continetur.

Transeat autem una rectarum BD per centrum, secetque ad angulos rectos alteram AC per centrum non transeuntem in E. Bifariam igitur secta BD in F, erit F centrum circuli



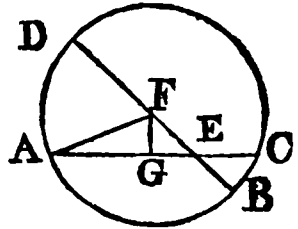
ABCD; jungatur vero AF. et quoniam BD per centrum ducta rectam lineam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat in E, aequales inter se erunt ^a AE, EC. Quoniam vero recta linea BD secta est in partes aequales in F, et in partes inaequales in E, erit rectangulum contentum ipsis BE, ED una cum quadrato ex EF aequale quadrato ex FB^b, hoc est ex FA; quadrato vero b. 5. 2. ex FA aequalia sunt quadrata ex AE, EF^c; rectangulum igitur BE, ED una cum quadrato ex EF aequale est quadratis ex AE, EF. commune auferatur quadratum ex EF, reliquum igitur rectangulum BE, ED reliquo quadrato ex AE, hoc est rectangulo contento AE, EC aequale erit.

Sed BD per centrum ducta secet alteram AC per centrum non ductam, sed non ad angulos rectos, in puncto E. rursus igitur, bifariam secta BD in F, erit F centrum circuli. Jungatur AF, a centro vero F ducatur ad AC perpendicularis ^d FG; est igitur AG aequalis

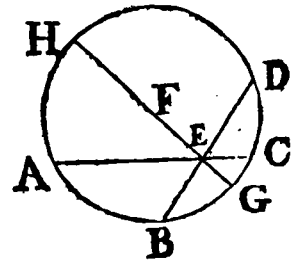


- a. 3.3. ipsi GC^a , et propterea rectangulum AE, EC una cum quadrato ex
 b. 5.2. EG aequale est quadrato ex AG^b . commune addatur ex GF quadra-
 tum, rectangulum igitur AE, EC una cum quadratis ex EG, GF ae-
 quale est quadratis ex AG, GF . sed quadratis quidem ex EG, GF ae-
 quale est quadratum ex EF ; quadratis vero
 c. 47.1. ex AG, GF aequale est ex AF quadratum^c.

Ergo rectangulum AE, EC una cum quadrato ex EF aequale est quadrato ex AF , hoc est ex FB . quadrato vero ex FB aequale est rectan-
 gulum BE, ED una cum quadrato ex EF^b ;
 ergo rectangulum AE, EC una cum quadrato ex EF aequale est rectan-
 gulo BE, ED una cum quadrato ex EF . commune auferatur ex EF
 quadratum, reliquum igitur rectangulum AE, EC reliquo rectangulo BE, ED aequale erit.



Denique neutra rectarum AC, BD per centrum transeat, fumatur
 igitur centrum circuli $ABCD$, sitque F , et per
 E intersectionem scilicet rectarum AC, BD
 ducatur diameter $GEFH$. et quoniam rectan-
 gulum AE, EC ostensum est aequale rectan-
 gulo GE, EH ; et similiter rectangulum BE, ED est aequale eidem GE, EH rectangulo;
 erit rectangulum contentum AE, EC aequale
 contento ipsis BE, ED rectangulo. Quare si in circulo duae rectae li-
 neae &c. $Q. E. D.$

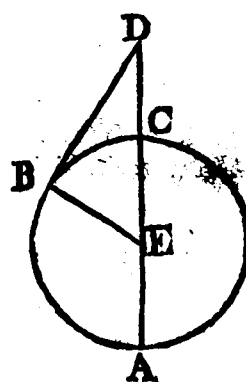


PROP. XXXVI. THEOR.

SI extra circulum aliquod punctum fumatur, et ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum fecet, altera vero contingat; rectangulum quod a tota secante, et exterius assumpta inter punctum et convexam circumferentiam continetur, aequale erit quadrato ex contingente.

Extra circulum enim ABC fumatur aliquod punctum D, et ab eo ad circulum cadant duae rectae lineae DCA, DB; et DCA quidem circulum fecet, DB vero contingat. dico rectangulum ab AD, DC contentum quadrato ex DB aequale esse.

Vel igitur DCA per centrum transit vel non; primum transeat per centrum, sitque E centrum circuli ABC, et EB jungatur; erit igitur angulus EBD rectus^a. et quoniam recta linea AC bifariam secta est in E, et ipsi adjicitur CD, rectangulum ab AD, DC, una cum quadrato ex EC aequale erit quadrato ex ED^b. aequalis autem est CE ipsi EB, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadrato ex ED. sed quadratum ex ED est aequale quadratis ex ipsis EB, BD^c, rectus enim angulus est EBD. rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadratis ex EB, BD. commune auferatur quadratum ex EB, reliquum igitur ab AD, DC rectangulum aequale erit quadrato ex contingente DB.

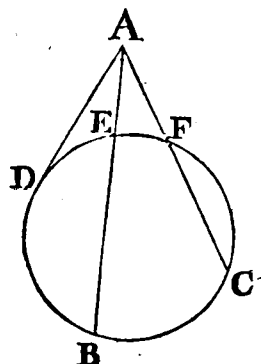


a. 18. 3.

b. 6. 2.

c. 47. 1.

COR. Hinc si a puncto quovis extra circulum ducantur rectae lineae AB, AC circulum secantes, rectangula contenta totis, et parti-



bus externis, viz. rectangula BA, AE; CA, AF inter se sunt aequalia. utrumque enim ipsorum aequale est quadrato ex contingente AD.

PROP. XXXVII. THEOR.

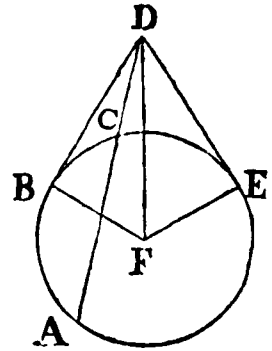
SI extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat; sit autem rectangulum contentum a tota secante et exterius assumpta inter punctum et convexam circumferentiam aequale quadrato ex incidente; quae incidit circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duae rectae lineae DCA, DB, et DCA quidem circulum secet, DB vero incidat; sitque rectangulum ab AD, DC aequale quadrato ex DB. Dico ipsam DB circulum ABC contingere.

Ducatur enim recta linea DE contingens circulum^a ABC, et suma-

tur

- tur centrum circuli F, junganturque FE, FB, FD; rectus igitur est angulus FED^b. et quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum ab AD, DC aequale crit
- c. 36. 3. quadrato ex DE^c. sed rectangulum AD, DC ponitur aequale quadrato ex DB; quadratum igitur ex DE quadrato ex DB aequale erit, ac propterea DE erit ipsi DB aequalis. est autem et FE aequalis FB, duae igitur DE, EF duabus DB, BF aequales sunt, et basis communis FD; angulus igitur DEF est aequalis ipsi DBF^d, rectus autem est DEF, ergo et DBF est rectus.
- atque FB producta est diameter, quae vero diametro circuli ad rectos
- e. 16. 3. angulos ab extremitate ducitur, circulum contingit^e. circulum igitur ABC contingit DB. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.



E U C L I D I S

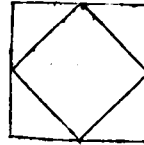
E L E M E N T O R U M

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

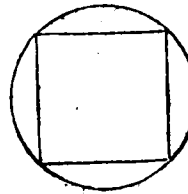
I.

FIGURA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando unusquisque figurae inscriptae angulus, unumquodque latus ejus in qua inscribitur tangit.



II.

Figura similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae, unumquemque angulum ejus circa quam circumscribitur tangit.



III.

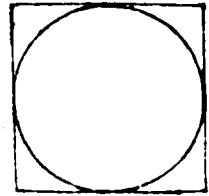
Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptae figurae angulus circuli circumferentiam tangit.

Figura

EUCLIDIS ELEMENTORUM

IV.

Figura rectilinea circa circulum dicitur circumscribi, quando unumquodque latus circumscriptae, circuli circumferentiam contingit.

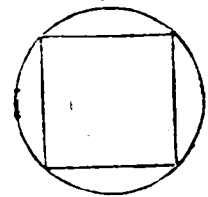


V.

Circulus similiter in figura rectilinea inscribi dicitur, quando circuli circumferentiam unumquodque latus ejus in qua inscribitur contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam circumscribitur tangit.



VII.

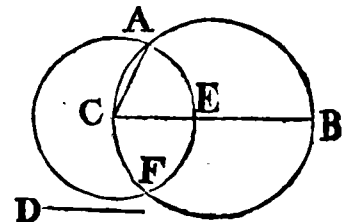
Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROP. I. PROB.

IN dato circulo datae rectae lineae, quae diametro ejus major non sit, aequalem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea D, non major circuli diametro; oportet in circulo ABC rectae lineae D aequalem rectam lineam aptare.

Ducatur circuli ABC diameter BC; siquidem igitur BC sit aequalis ipsi D, factum jam erit quod proponebatur; etenim in



circulo

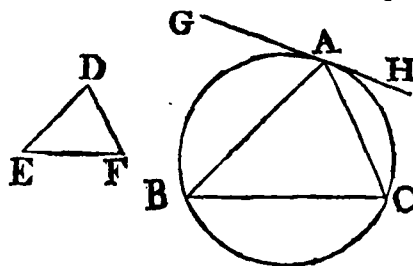
circulo ABC aptata est BC rectae lineae D aequalis. sin minus, major est BC quam D, ponaturque ipsi D aequalis CE^a, et centro quidem C, a. 3. 1. intervallo autem CE circulus describatur AEF, et CA jungatur. Quoniam igitur punctum C centrum est AEF circuli, erit CA ipsi CE aequalis; sed D est aequalis CE, ergo et D ipsi CA aequalis erit. In dato igitur circulo ABC datae rectae lineae D, non majori circuli diametro, aequalis aptata est AC. Q. E. F.

PROP. II. PROB.

IN dato circulo, triangulo dato aequiangulum triangulum inscribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet in ABC circulo inscribere triangulum triangulo DEF aequiangulum.

Ducatur recta linea GAH contingens circulum^a ABC in puncto a. 17. 3. A, et ad rectam lineam AH, et ad punctum in ea A, angulo DEF aequalis angulus constituatur^b HAC; ad rectam vero AG, et ad punctum in ea A, angulo DFE aequalis constituatur angulus GAB, et BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit recta linea HAG, a tactu autem ducta est AC, erit HAC angulus aequalis angulo in alterno circuli segmento^c, videlicet ipsi ABC. sed HAC aequalis est ipsi DEF, ergo et angulus ABC ipsi DEF est aequalis. eadem ratione et ACB est aequalis angulo DFE; reliquus igitur BAC reliquo EDF angulo est aequalis^d. d. 32. 1. ergo triangulum ABC triangulo DEF est aequiangulum, et inscriptum



c. 32. 3.

P

est

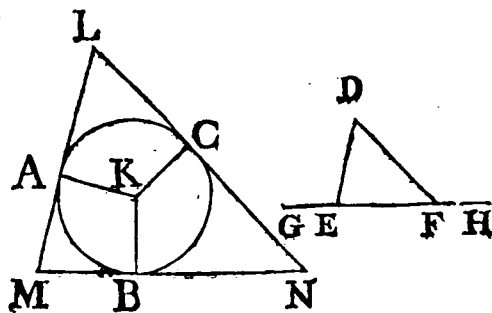
est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo aequiangulum triangulum inscriptum est. Q. E. F.

PROP. III. PROB.

CIRCA datum circulum triangulo dato aequiangulum triangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet circa ABC circulum triangulum circumscribere triangulo DEF aequiangulum.

- Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta G, H, et sumatur circuli ABC centrum K, et recta linea KB utcunque ducatur; constituanturque ad rectam lineam KB, et ad punctum in ea K, angulo quidem
- a. 23. 1. DEG aequalis angulus^a BKA, angulo autem DFH aequalis angulus^a BKC; et per A, B, C puncta ducantur rectae lineae LAM, MBN, NCL circulum ABC contingentes^b. Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM, MN, NL in punctis A, B, C, a centro autem K ad A, B, C puncta ductae sunt KA, KB, KC, erunt
- o. 18. 3. anguli ad puncta A, B, C recti^c. et quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor, quatuor rectis aequales sunt, etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli KAM, KBM sunt recti, erunt reliqui AKB, AMB duobus rectis aequales. sunt autem et DEG, DEF aequales duobus rectis^d; anguli igitur AKB, AMB angulis DEG, DEF aequales sunt, quorum AKB ipse DEG est aequalis; reliquus igitur AMB reliquo DEF aequalis erit. similiter ostendetur angulus LNM ipse DFE aequalis;



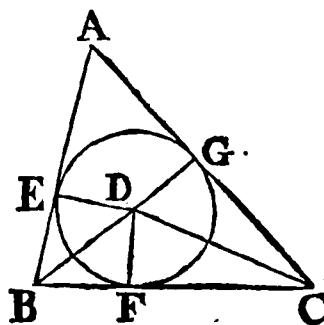
qualis; ergo et reliquus MLN est aequalis reliquo^c EDF. aequiangulo^e. 32. 1.
lum igitur est LMN triangulum triangulo DEF, et circumscriptum est
circa ABC circulum. Circa datum igitur circulum, dato triangulo ae-
quiangulum triangulum circumscriptum est. Q. E. F.

PROP. IV. PROB.

IN dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum ABC; oportet in triangulo ABC circulum in-
scribere.

Secentur anguli ABC, BCA bifariam^a rectis lineis BD, CD quae^a. 9. 1.
convenient inter se in D puncto, et a puncto D ad rectas lineas AB,
BC, CA perpendiculares ducantur^b DE,
DF, DG. et quoniam angulus EBD est
aequalis ipsi FBD, bifariam enim sectus est
ABC, est autem et rectus BED recto BFD
aequalis, erunt duo triangula EBD, FBD
duos angulos duobus angulis aequales ha-
bentia, et unum latus BD utrique com-
mune, quod scilicet uni aequalium angulo-
rum subtenditur; reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt^c, c. 26. 1.
et erit DE aequalis DF. eadem ratione et DG aequalis erit DF; tres i-
gitur rectae lineae DE, DF, DG inter se aequales sunt; quare centro
D, intervallo autem unius ipsarum DE, DF, DG circulus descriptus e-
tiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CA contin-
get, propterea quod recti sunt anguli ad E, F, G puncta; quae enim
diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur circulum
contingit^d. circulum igitur contingit unaquaeque ipsarum AB, BC, CA, d. 16. 3.



b. 12. 1.

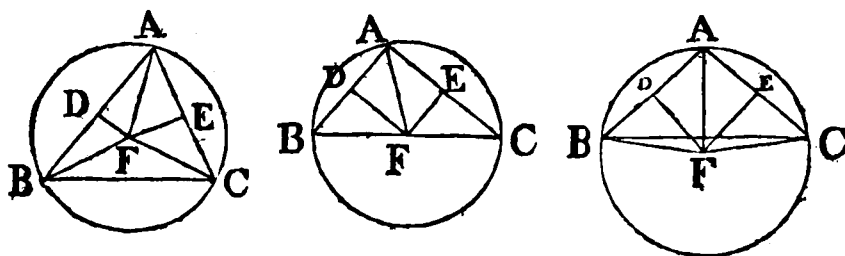
atque erit circulus inscriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG inscriptus est. Q. E. F.

PROP. V. PROB.

CIRCA datum triangulum circulum circumscribere.

Sit datum triangulum ABC; oportet circa datum triangulum ABC circulum circumscribere.

- a. 10. 1. Secentur AB, AC bifariam^a in D, E punctis, et a punctis D, E
 b. 11. 1. ipsis AB, AC ad rectos angulos ducantur^b DF, EF, quae quidem productae necessario convenient, nam si non conveniunt, erunt inter se parallelae; quare AB, AC quae ipsis sunt ad rectos angulos erunt parallelae, quod est absurdum; convenient in F, et BF, FC, FA jungantur. Quoniam igitur AD est aequalis DB, communis autem et ad rectos an-



- c. 4. 1. gulos DF, erit basis AF basi FB aequalis^c. similiter ostendemus et CF aequalem FA; ergo et BF est aequalis FC; tres igitur FA, FB, FC inter se aequales sunt. centro igitur F, intervallo autem unius ipsarum FA, FB, FC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; atque erit circulus circumscriptus circa triangulum ABC. Circa datum igitur triangulum circumscriptus est circulus. Q. E. F.

COR. Et manifestum est, si centrum circuli intra triangulum ceciderit, unumquemque ejus angulum minorem esse recto^d, quoniam unusquisque

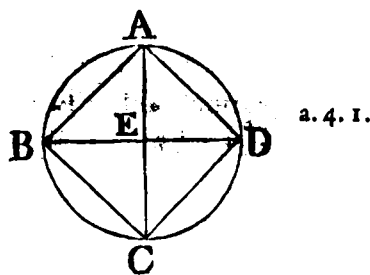
quisque est in segmento semicirculo majore. si autem in uno laterum fuerit centrum, angulus cui latus hoc subtenditur, in semicirculo existens, rectus erit. et si extra triangulum ceciderit centrum, ad partes alicujus lateris, angulus cui subtenditur hoc latus existens in segmento semicirculo minore, major erit recto^d. Quare si datum triangulum acutangu- d. 31. 3. lum fuerit, centrum circuli erit intra triangulum; si rectangulum fuerit, erit centrum in latere angulo recto opposito; et si fuerit obtusangulum, cadet centrum extra triangulum, ad partes lateris obtuso angulo oppositi.

PROP. VI. PROB.

IN dato circulo quadratum inscribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quadratum inscribere.

Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC, BD; et AB, BC, CD, DA jungantur. Quoniam igitur BE est aequalis ED, etenim centrum est E, communis autem et ad rectos angulos EA; erit basis BA aequalis basi AD^a. et eadem ratione utraque ipsarum BC, CD, utrique BA, AD est aequalis; aequilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus; quare angulus BAD rectus est^b. et eadem ratione unus- b. 31. 3. quisque ipsorum ABC, BCD, CDA est rectus; rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est et aequilaterum esse, quadratum igitur est; et inscriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD inscriptum est. Q. E. F.



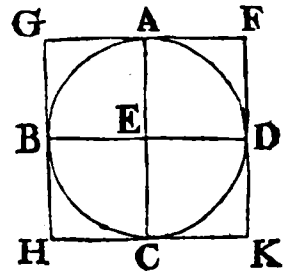
PROP. VII.

PROP. VII. PROB.

CIRCA datum circulum quadratum circumscribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet circa ABCD circulum quadratum circumscribere.

- Ducantur circuli ABCD duae diametri AC, BD ad rectos inter se angulos, et per puncta A, B, C, D ducantur circulum ABCD contin-
- a. 17. 3. gentes ^a FG, GH, HK, KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, a centro autem E ad tactum qui est ad A ducta est EA,
- b. 18. 3. erunt anguli ad A recti^b. eadem ratione et anguli ad puncta B, C, D recti sunt. et quoniam angulus AEB rectus est, est autem et rectus EBG,
- c. 28. 1. erit GH ipsi AC parallela^c. eadem ratione, et AC parallela est ipsi FK. similiter ostendemus et utramque ipsarum GF, HK ipsi BED parallelam esse. parallelogramma igitur sunt GK,
- d. 34. 1. GC, AK, FB, BK; aequalis^d igitur est GF quidem ipsi HK, GH vero ipsi FK. et quoniam AC aequalis est BD, sed AC quidem utrique ipsarum GH, FK est aequalis; BD vero aequalis utrique GF, HK; erit et utraque GH, FK utrique GF, HK aequalis. aequilaterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico et rectangulum esse; quoniam enim parallelogrammum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, rectus^d crit et AGB. similiter ostendemus angulos etiam ad H, K, F rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK. ostensum autem est aequilaterum; quadratum igitur est; et circumscriptum est circa ABCD circulum. circa datum igitur circulum quadratum circumscriptum est. Q. E. F.



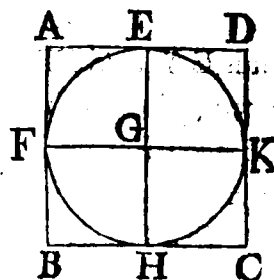
PROP. VIII.

PROP. VIII. PROB.

IN dato quadrato circulum inscribere.

Sit datum quadratum ABCD; oportet in quadrato ABCD circulum inscribere.

Secetur utraque ipsarum AB, AD bifariam ^a in punctis F, E, et per a. 10. 1. E quidem alterutri ipsarum AB, CD, parallela ducatur ^b EH, per F b. 31. 1. vero ducatur FK parallela alterutri AD, BC. parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD, et latera ipsorum opposita sunt aequalia^c. et quoniam AD est aequalis e. 34. 1. AB, et ipsius quidem AD dimidium est AE, ipsius vero AB dimidium AF; erit AE ipsi AF aequalis. quare et opposita latera sunt aequalia, ergo FG est aequalis GE. similiter ostendemus et utramque ipsarum GH, GK utrique FG, GE aequalem esse. quatuor igitur GE, GF, GH, GK inter se sunt aequales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GE, GF, GH, GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CD, DA continget, propterea quod anguli ad E, F, H, K recti sunt ^d; d. 29. 1. quae enim diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur circulum contingit^e. circulum igitur contingit unaquaeque ipsarum AB, e. 16. 3. BC, CD, DA, atque erit circulus in quadrato ABCD inscriptus. In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Q. E. F.



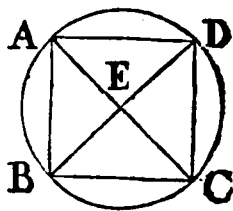
PROP. IX. PROB.

CIRCA datum quadratum circulum circumscribere.

Sit

Sit datum quadratum ABCD; oportet circa ABCD quadratum circulum circumscribere.

- Jungantur enim AC, BD, quae se invicem secant in E. et quoniam DA est aequalis AB, communis autem AC, duae DA, AC duabus BA, AC aequales sunt; et basis DC est aequalis basi BC, quare angulus
- a. 8. 1. DAC angulo BAC aequalis erit^a; angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. similiter ostendemus unumquemque angulorum ABC, BCD, CDA rectis lineis AC, BD bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est aequalis, atque est anguli quidem DAB dimidium EAB, ipsius vero ABC dimidium EBA, erit et EAB angulus aequalis ipsi EBA; igitur et
- b. 6. 1. latus EA lateri EB est aequale^b. similiter vero demonstrabimus et utramque rectarum linearum EC, ED utrique EA, EB aequalem esse. Quatuor igitur rectae lineae EA, EB, EC, ED inter se sunt aequales. centro igitur E intervallo autem unius ipsarum EA, EB, EC, ED circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, atque erit circa ABCD quadratum circumscriptus. Circa datum igitur quadratum circulus est circumscriptus. Q. E. F.



PROP. X. PROB.

ISOSCELES triangulum constituere habens utrumque angulorum qui sunt ad basim duplum reliqui.

- a. 11. 2. Exponatur recta quaedam linea AB, et secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum ab AB, BC aequale sit quadrato ex CA^a; et centro quidem A, intervallo autem AB circulus describatur BDE, appeturque in BDE circulo recta linea BD aequalis ipsi AC quae non est major

121

Q

est

EUCLIDIS ELEMENTORUM

est ABD, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim BD duplum reliqui. Q. E. F.

PROP. XI. PROB.

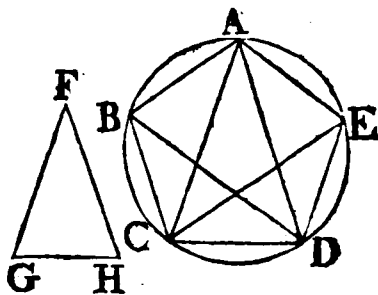
IN dato circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus ABCDE; oportet in ABCDE circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Exponatur triangulum isosceles FGH habens utrumque angulorum:

- a. 10. 4. ad G, H duplum anguli ad F^a; et inscribatur in circulo ABCDE tri-
- b. 2. 4. angulo FGH aequiangulum triangulum^b ACD, ita ut angulo quidem ad F aequalis sit CAD; utrique vero ipsorum ad G, H, sit aequalis uterque ACD, CDA; et uterque igitur ipsorum ACD, CDA anguli
- c. 9. 1. CAD est duplus. secetur uterque ACD, CDA bifariam^c rectis lineis CE, DB, et AB, BC, DE, EA jungantur.

- Quoniam igitur uterque angulorum ACD, CDA duplus est ipsius CAD, et secti sunt bifariam rectis lineis CE, DB; quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA inter se sunt aequales. aequales autem anguli aequa-
- d. 26. 3. libus circumferentiis insistant^d; quinque igitur circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA aequales sunt inter se. sed aequales circumferentias aequales rectae li-
 - e. 29. 3. neae subtendunt^e; ergo et quinque rectae lineae AB, BC, CD, DE, EA inter se aequales sunt. aequilaterum igitur est ABCDE pentagonum. Dico et aequiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AB aequalis est circumferentiae DE, communis apponatur BCD; tota igitur ABCD circumferentia toti EDCB est aequalis.



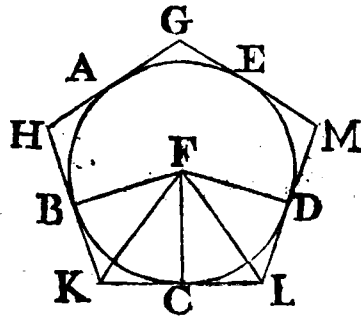
qualis. et circumferentiae quidem ABCD insistit angulus AED, circumferentiae vero EDCB insistit angulus BAE; igitur et BAE angulus est aequalis ipsi AED^f. eadem ratione et unusquisque angulorum f. 27. 3. ABC, BCD, CDE utrique ipsorum BAE, AED est aequalis. aequiangulum igitur est ABCDE pentagonum; ostensum autem est et aequilaterum esse. In dato igitur circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Q. E. F.

PROP. XII. PROB.

CIRCA datum circulum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABCDE; oportet circa circulum ABCDE pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Intelligentur pentagoni in circulo inscripti angulorum puncta esse A, B, C, D, E, ita ut circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA sint aequales^a; et per puncta A, B, C, D, E ducantur circulum contingentes^b GH, HK, KL, LM, MG; sumaturque circuli ABCDE centrum F, et jungantur FB, FK, FC, FL, FD. Quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in C, et a centro F ad tactum qui est ad C ducta est FC, erit FC ad ipsam KL perpendicularis^c;



a. 11. 4.

b. 17. 3.

c. 18. 3.

rectus igitur est uterque angulorum qui sunt ad C. eadem ratione et anguli ad puncta B, D, recti sunt. et quoniam rectus angulus est FCK, quadratum ex FK aequale est quadratis ex FC, CK^d. eadem ratione quadratis ex FB, BK aequale est ex FK quadratum. quadrata igitur ex FC, CK quadratis ex FB, BK aequalia sunt, quorum ex FC ei quod

d. 47. 1.

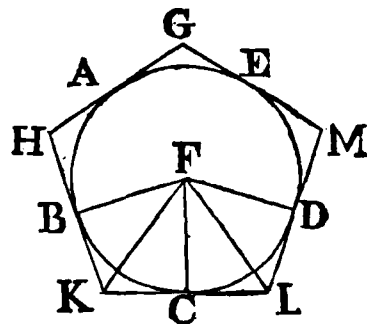
Q 2

ex

ex FB est aequale; reliquum igitur quadratum ex CK reliquo ex BK aequale erit; aequalis igitur est BK ipsi CK. et quoniam FB est aequalis FC, communis autem FK, duae BF, FK duabus CF, FK aequales sunt; et basis BK est aequalis basi KC; angulus igitur BFK an-

e. 8. 1. gulo KFC est aequalis^e, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est BFC anguli KFC, et BKC duplus ipsius FKC. eadem ratione et angulus CFD ipsius CFL est duplus, CLD vero duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumferentiae CD est aequalis, erit et

e. 27. 3. angulus BFC aequalis ipsi CFD^f. atque est BFC quidem anguli KFC duplus, CFD vero duplus ipsius CFL; aequalis igitur est angulus KFC ipsi CFL; est autem et rectus FCK recto FCL aequalis. itaque duo triangula sunt FKC, FLC duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus unū lateri aequale ipsis commune FC quod aequalibus adjacet angulis; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo an-



g. 26. 1. gulo aequalem^g. recta igitur linea KC est aequalis ipsi CL, angulus vero FKC angulo FLC. et quoniam KC est aequalis CL, erit KL ipsius KC dupla. eadem ratione et HK ipsius BK dupla ostendetur. et quoniam BK ostensa est aequalis ipsi KC, atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla, erit HK ipsi KL aequalis. similiter et unaquaeque ipsarum GH, GM, ML ostendetur aequalis utrique HK, KL. aequilaterum igitur est GHKLM pentagonum. Dico et aequiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est aequalis ipsi FLC, et ostensus est angulus HKL duplus ipsius FKC, ipsius vero FLC duplus KLM, erit et HKL ipsi KLM aequalis. similiter ostendetur et unusquisque ipsorum KHG, HGM, GML utrique HKL, KLM aequalis.

quinque

quinque igitur anguli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH inter se aequales sunt; aequiangulum igitur est GHKLM pentagonum. ostensum autem est etiam aequilaterum esse; et circumscriptum est circa ABCDE circulum. Q. E. F.

PROP. XIII. • PROB.

IN dato pentagono aequilatero et aequiangulo circulum inscribere.

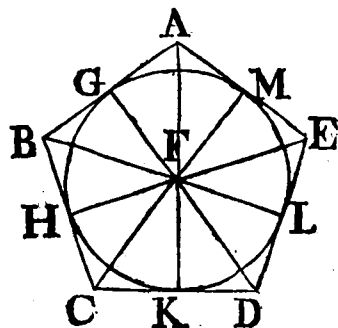
Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE; oportet in ABCDE pentagono circulum inscribere.

Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam ^a rectis lineis CF, ^{a. 9. 1.} DF, et a puncto F in quo conveniunt inter se CF, DF ducantur rectae lineae FB, FA, FE. Quoniam igitur BC est aequalis CD, communis autem CF, duae BC, CF duabus DC, CF aequales sunt, et angulus BCF est aequalis ipsi DCF; basis igitur BF basi

FD est aequalis^b, et BFC triangulum aequale triangulo DFC, et reliqui anguli reliquis angulis aequales quibus aequalia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF aequalis erit. et quoniam angulus CDE ipsius CDF est duplus, et CDE quidem aequalis ipsi CBA, angulus vero CDF ipsi CBF, erit et CBA duplus anguli CBF;

angulus igitur ABF angulo CBF est aequalis; quare angulus ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter ostendetur unumquemque angulorum BAE, AED rectis lineis AF, FE bifariam sectum esse. a puncto F ad rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA ducantur perpendiculares ^c c. 12. 1. FG, FH, FK, FL, FM. et quoniam angulus HCF est aequalis ipsi

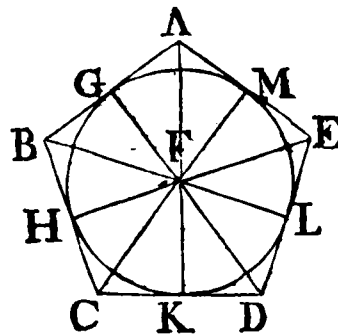
KCF,



b. 4. 1.

KCF, est autem et rectus FHC recto FKC aequalis; erunt duo tri-
angula FHC, FKC duos angulos duobus angulis aequales habentia, et
unum latus commune utrisque, viz. FC, quod uni aequalium angulo-
rum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habe-

d. 26. 1. bunt^d; perpendicularis igitur FH perpendi-
culari FK est aequalis. similiter ostendetur
et unaquaeque ipsarum FL, FM, FG aequa-
lis utrique FH, FK; quinque igitur rectae
lineae FG, FH, FK, FL, FM inter se ae-
quales sunt. quare centro F, intervallo autem
unius ipsarum FG, FH, FK, FL, FM cir-
culus descriptus etiam per reliqua transibit
puncta, et rectas lineas AB, BC, CD, DE,



EA continget, propterea quod anguli ad G, H, K, L, M recti sunt;
quae enim ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos diametro du-

a. 16. 3. citur circumum contingit^e. circumum igitur contingit unaquaeque ipsarum
AB, BC, CD, DE, EA, atque erit circumum in pentagono ABCDE in-
scriptus. In dato igitur pentagono aequilatero et aequiangulo circumum
inscriptus est. Q. E. F.

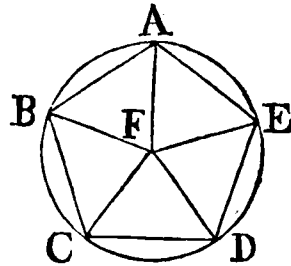
PROP. XIV. PROB.

CIRCA datum pentagonum aequilaterum et aequi-
angulum circumum circumscribere.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE; o-
portet circa pentagonum ABCDE circumum circumscribere.

a. 9. 1. Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam^a rectis lineis CF,
FD, et a puncto F in quo conveniunt rectae lineae, ad puncta B, A,
E ducantur FB, FA, FE. similiter ut in antecedente ostendetur unum-
quemque

quemque angulorum CBA, BAE, AED rectis lineis BF, FA, FE bifariam sectum esse. et quoniam angulus BCD ipsi CDE est aequalis, atque est anguli quidem BCD dimidium FCD, ipsius vero CDE dimidium CDF; erit et FCD aequalis ipsi FDC; quare et latus CF lateri FD est aequale^b. similiter ostendetur et unaquaeque ipsarum FB, FA, FE aequalis utrique FC, FD. quinque igitur rectae lineae FA, FB, FC, FD, FE inter se aequales sunt. centro igitur F, intervallo autem unius ipsarum FA, FB, FC, FD, FE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, atque circumscriptus erit circa pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE. Circa datum igitur pentagonum aequilaterum et aequiangulum circulus est circumscriptus. Q. E. D.



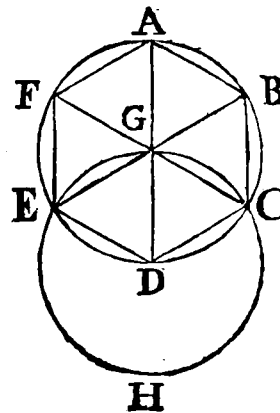
b. 6. r.

PROP. XV. PROB.

IN dato circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

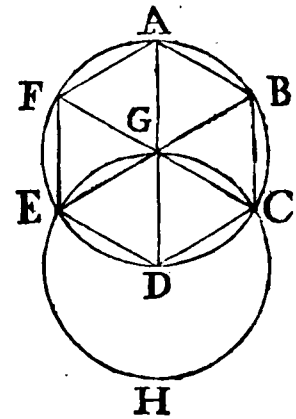
Sit datus circulus ABCDEF; oportet in circulo ABCDEF hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sumatur G centrum circuli ABCDEF, et ducatur diameter AGD; et centro quidem D, intervallo autem DG circulus describatur EGCH, et junctae EG, CG ad puncta B, F producantur, junganturque AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico hexagonum ABCDEF aequilaterum et aequiangulum esse.



Quoniam

- Quoniam enim G punctum centrum est ABCDEF circuli, erit GE ipsi GD aequalis. rursus quoniam D centrum est circuli EGCH, erit DE aequalis DG; sed GE ipsi GD aequalis ostensa est, ergo GE ipsi ED est aequalis; aequilaterum igitur est EGD triangulum, ideoque tres ipsius anguli EGD, GDE, DEG inter se aequales sunt, quoniam tri-
- a. 5. 1. angulorum isoscelium anguli ad basim sunt inter se aequales^a. et sunt tri-
- b. 32. 1. anguli tres anguli aequales duobus rectis^b; angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur et DGC duorum rectorum tertia pars. et quoniam recta linea GC super rectam EB insistens angulos qui deinceps sunt EGC, CGB duobus
- c. 13. 1. rectis aequales efficit^c, erit reliquus CGB tertia pars duorum rectorum; anguli igitur EGD, DGC, CGB inter se sunt aequales. et qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA, AGF, FGE
- d. 15. 1. aequales sunt ipsis EGD, DGC, CGB^d. sex igitur anguli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE inter se aequales sunt. sed aequales an-
- e. 26. 3. guli aequalibus circumferentiis insistant^e; sex igitur circumferentiae AB, BC, CD, DE, EF, FA inter se sunt aequales. aequales autem circumferentias aequales
- f. 29. 3. rectae lineae subtendunt^f; ergo et sex rectae lineae inter se aequales sunt. aequilaterum igitur est ABCDEF hexagonum. Dico et aequiangulum esse. quoniam enim circumferentia AF circumferentiae ED est aequalis, communis apponatur circumferentia ABCD; tota igitur FABCD circumferentia aequalis est toti circumferentiae EDCBA. et circumferentiae quidem FABCD angulus FED insistit, circumferentiae vero EDCBA insistit angulus AFE; angulus igitur AFE ipsi DEF est aequalis. similiter ostendentur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim aequales utrique ipsorum AFE, DEF. aequiangulum igitur est



LIBER QUARTUS.

129

est ABCDEF hexagonum. ostensum autem est et aequilaterum esse; et inscriptum est in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Q. E. F.

COR. Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei quae est ex centro circuli aequale esse.

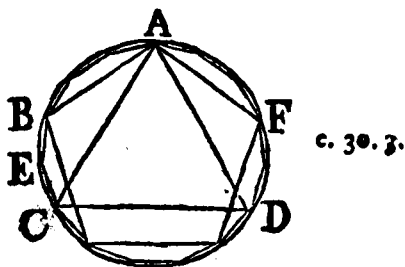
Et si per puncta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum hexagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribetur, consequenter iis quae in pentagono dicta sunt; et praeterea similiter in dato hexagono aequilatero et aequiangulo circulum inscribemus, et circa illud circumscribemus.

PROP. XVI. PROB.

IN dato circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit in circulo ABCD trianguli quidem aequilateri ipsi inscripti latus AC^a , pentagoni vero aequilateri et aequianguli latus AB^b ; qualium ^{a. 2. 4.} ^{b. 11. 4.} igitur partium est ABCD, tota scilicet circumferentia, quindecim, earum circumferentia quidem ABC tertia existens totius erit quinque; circumferentia vero AB, quae quinta est totius, erit trium; reliqua igitur BC est duarum. secetur BC bifariam ^c in E; quare utraque ipsarum BE, EC circumferentiarum quintadecima pars est circumferentiae circuli ABCD. si igitur jungentes BE, EC aequales ipsis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptemus^d, d. i. 4.



R

in

EUCLIDIS ELEMENTORUM

in ipso inscriptum erit quindecagonum aequilaterum et aequiangulum.

Q. E. F.

Similiter autem iis quae dicta sunt in pentagono, si per circumferentiae divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum circumscribitur quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. et insuper in dato quindecagono aequilatero et aequiangulo similiter circulum inscribemus, et circa illud circumscribemus.

EUCLIDIS

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

MAGNITUDO dicitur pars magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Major dicitur multiplex minoris, quando majorem minor metitur.

III.

“ Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quaedam habitudo.”

IV.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quarum minor multiplicata majorem superare potest.

R 2

In

EUCLIDIS ELEMENTORUM

V.

In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primae et tertiae aequae multiplices, secundae et quartae aequae multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà aequales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatae.

VI.

Magnitudines quae eandem rationem habent, proportionales vocentur.

VII.

Quando autem aequae multiplicium, multiplex quidem primae superaverit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superaverit multiplicem quartae, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur quam tertia ad quartam. et contra tertia ad quartam minorem rationem habere dicitur quam prima ad secundam.

VIII.

“Proportio est rationum similitudo.”

IX.

Proportio vero in tribus terminis ad minimum consistit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines sunt deinceps proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad secundam. et sic deinceps, una amplius, quotcunque fuerint proportionales.

Definitio A, viz. rationis compositae.

Si fuerint quotcunque magnitudines ejusdem generis, prima ad ultimam habere dicitur rationem compositam ex ratione quam habet prima ad secundam,

secundam, et ratione secundae ad tertiam, et eâ quam habet tertia ad quartam, et ita deinceps usque ad ultimam.

Exemp. gr. sint magnitudines A, B, C, D, prima A habere dicitur ad ultimam D rationem compositam ex ratione ipsius A ad B, et ratione B ad C, et ratione C ad D. vel ratio A ad D dicitur composita esse ex rationibus A ad B, B ad C, et C ad D.

Si igitur ratio A ad B, eadem sit rationi E ad F; et ratio B ad C, eadem fuerit rationi G ad H; et ratio C ad D eadem rationi K ad L; A ad D habere dicitur rationem compositam ex rationibus quae eadem sunt rationibus E ad F, G ad H, et K ad L. idemque intelligitur quando, brevitatis gratia, dicitur A ad D habere rationem compositam ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

Similiter, si ratio M ad N eadem sit rationi A ad D, praecedentibus manentibus, brevitatis gratia, dicitur ratio M ad N eadem esse rationi compositae ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

XII.

Homologae magnitudines, in proportionalibus, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, et consequentes consequentibus.

• Vocabulis sequentibus, apud Geometras veteres designantur modi quidam mutandi sive ordinem, sive magnitudinem proportionalium, ita
• tamen ut proportionales maneant.

XIII.

Εναλλάξ, i. e. Permutando; hoc vocabulo utuntur quando quatuor sunt proportionales, et concluditur esse ut prima ad tertiam, ita secunda ad quartam; ut ostensum est in Prop. 16. Libri hujus 5ti.

XIV.

Ανάπαλιν, Invertendo; quando quatuor sunt proportionales, et concluditur esse ut secunda ad primam, ita quarta ad tertiam. Prop. B. Lib. 5.

Συνθέντι,

EUCLIDIS ELEMENTORUM

XV.

Συνθέντι, Componendo; quando quatuor sunt proportionales, et concluditur ut prima una cum secunda ad secundam, ita tertia una cum quarta ad quartam. Prop. 18. Lib. 5.

XVI.

Διελόντι, Dividendo; quando quatuor sunt proportionales, et concluditur ut excessus quo prima superat secundam ad secundam, ita excessus quo tertia superat quartam ad quartam. Prop. 17. Lib. 5.

XVII.

Ανατρέφαντι, Convertendo; quando quatuor sunt proportionales, et concluditur ut prima ad excessum quo superat secundam, ita tertia ad excessum quo superat quartam. Prop. E. Lib. 5.

XVIII.

Διίσις, Ex aequo, five ex aequali, sc. intervallo; quando pluribus existentibus magnitudinibus, et aliis ipsis numero aequalibus, quae binae sumptae sunt in eadem ratione; et concluditur ut prima ad ultimam in primis magnitudinibus, ita, in secundis magnitudinibus, prima ad ultimam. 'Hujus duae sunt species sequentes.'

XIX.

Διίσις, Sive ex aequali simpliciter; quando fuerit prima ad secundam in primis magnitudinibus, ut in secundis prima ad secundam; ut autem, in primis, secunda ad tertiam, ita in secundis, secunda ad tertiam; et ita deinceps. et concluditur ut in praecedente dictum fuit. Prop. 22. Lib. 5.

XX.

*Διίσις ἐν τῇ τετραγμένη ἀναλογία**, Ex aequali in proportionem perturbata, seu inordinata; quando, in primis magnitudinibus, fuerit prima ad secundam, ut, in secundis, penultima ad ultimam; ut au-

* Prop. 4. Lib. 2. Archimedis de sphaera et cylindro.

LIBER QUINTUS.

135

tem, in primis, secunda ad tertiam, ita, in secundis antepenultima ad penultimam; et ut, in primis, tertia ad quartam, ita, in secundis, tertia ab ultima ad antepenultimam; et ita deinceps. et concluditur ut in Definitione 18va dictum fuit. Prop. 23. Lib. 5.

AXIOMATA.

I.

EJUSDEM sive aequalium aequae multiplices, inter se aequales sunt.

II.

Quarum eadem aequae multiplex est, vel quarum aequales sunt aequae multiplices, et ipsae inter se sunt aequales.

III.

Multiplex majoris major est aequae multiplici minoris.

IV.

Magnitudo cujus multiplex major est aequae multiplici alterius, major est alterâ illa magnitudine.

PROP. I. THEOR.

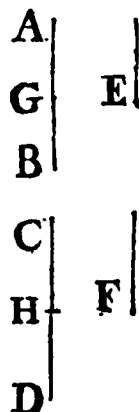
SI fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, singulae singularum aequae multiplices; quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, CD, quotcunque magnitudinum E, F, aequalium numero, singulae singularum aequae multiplices. Dico
quam

quam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices esse et AB, CD simul ipsarum E, F simul.

Quoniam enim AB aequae multiplex est ipsius E, ac CD ipsius F; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi E, tot erunt et in CD aequales ipsi F. dividatur AB quidem in partes ipsi E aequales, quae sint AG, GB; CD vero in partes aequales ipsi F, videlicet CH, HD. erit igitur multitudo partium CH, HD aequalis multitudini ipsarum AG, GB. et quoniam AG est aequalis E, et CH aequalis F; erunt et AG,

a. Ax. 2. 1. CH, aequales^a ipsis E, F. eadem ratione quoniam GB est aequalis E, et HD ipsi F; erunt GB, HD aequales^a ipsis E, F. quot sunt itaque in AB aequales ipsi E, tot sunt et in AB, CD aequales ipsis E, F. Ergo quam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices erunt et AB, CD simul ipsarum E, F simul.



Si igitur fuerint quocunque magnitudines quocunque magnitudinum, aequalium numero, singulae singularum aequae multiplices; quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. eadem enim demonstratio tenet in quocunque magnitudinibus. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

SI prima secundae aequae multiplex fuerit ac tertia quartae, fuerit autem et quinta secundae aequae multiplex ac sexta quartae; erit etiam prima una cum quinta secundae aequae multiplex ac tertia cum sexta quartae.

Prima enim AB secundae C aequae multiplex sit, atque tertia DE quartae F; sit autem et quinta BG secundae C aequae multiplex ac sexta EH

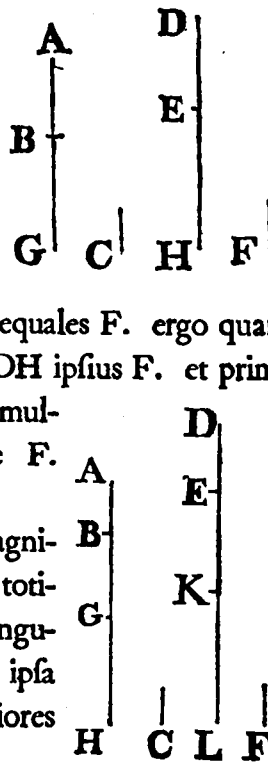
LIBER QUINTUS.

137

EH quartae F. Dico primam una cum quinta sc. AG, secundae C aequae multiplicem esse, ac tertiam una cum sexta sc. DH quartae F.

Quoniam enim AB aequae multiplex est ipsius C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB aequales C, tot erunt et in DE aequales F. eadem ratione et quot sunt in BG aequales C, tot et in EH erunt aequales F. quot igitur sunt in tota AG aequales C, tot erunt et in tota DH aequales F. ergo quam multiplex est AG ipsius C tam multiplex est et DH ipsius F. et prima igitur una cum quinta AG secundae C aequae multiplex erit, ac tertia cum sexta DH quartae F. Quare &c. Q. E. D.

COR. Hinc sequitur si fuerint quotcunque magnitudines AB, BG, GH multiplices ipsius C; ac totidem DE, EK, KL aequae multiplices ipsius F, singulae singularum, erunt omnes priores simul sc. ipsa AH ipsius C aequae multiplex, ac omnes posteriores simul sc. ipsa DL ipsius F.



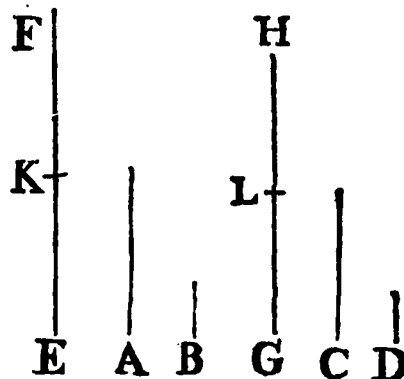
PROP. III. THEOR.

SI prima secundae aequae multiplex fuerit ac tertia quartae; sumantur autem aequae multiplices primae et tertiae; erit et ex aequali, sumptarum utraque utriusque aequae multiplex, altera quidem secundae, altera vero quartae.

Prima enim A secundae B aequae multiplex sit ac tertia C quartae D;
S et

et sumantur ipsarum A, C, aequae multiplices, EF, GH. Dico EF aequae multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D.

Quoniam enim EF aequae multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF aequales A, tot erunt et in GH aequales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A aequales EK, KF; GH vero in magnitudines aequales C videlicet GL, LH; erit igitur ipsarum EK, KF, multitudo aequalis multitudini ipsarum GL, LH. et quoniam aequae multiplex est A ipsius B ac C ipsius D, aequalis autem EK ipsi A, et GL ipsi C; erit EK aequae multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione aequae multiplex erit KF



ipsius B, ac LH ipsius D; et similiter si plures sint partes in EF, GH ipsis A, C aequales. quoniam igitur prima EK secundae B aequae multiplex est, ac tertia GL quartae D; est autem et quinta KF secundae B aequae multiplex ac sexta LH quartae D; erit et prima una cum
a. 2. 5. quinta sc. ipsa EF secundae B aequae multiplex^a, ac tertia cum sexta sc. GH quartae D. si igitur prima &c. Q. E. D.

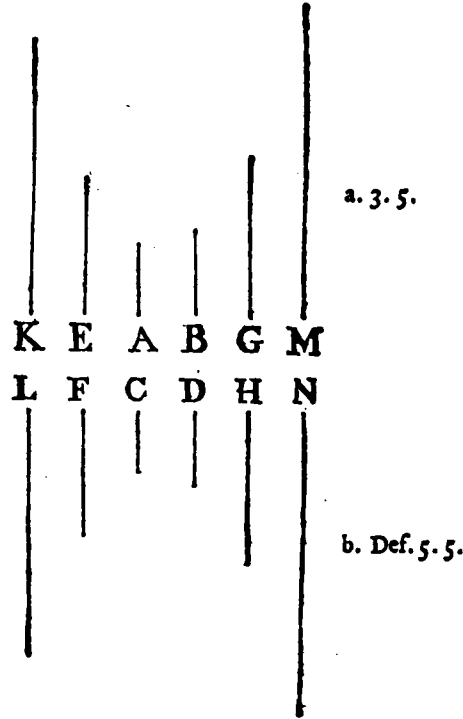
PROP. IV. THEOR.

SI prima ad secundam eandem habet rationem quam tertia ad quartam; et aequae multiplices primae et tertiae ad aequae multiplices secundae et quartae, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt, inter se comparatae.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia

tia C ad quartam D; et sumantur ipsarum quidem A, C utcunque aequae multiplices E, F; ipsarum vero B, D aliae utcunque aequae multiplices G, H. Dico E ad G, ita esse ut F ad H.

Sumantur ipsarum E, F utcunque aequae multiplices K, L, et ipsarum G, H aliae utcunque aequae multiplices M, N. quoniam igitur E aequae multiplex est ipsius A, atque F ipsius C, sumuntur autem ipsarum E, F aequae multiplices K, L; erit K aequae multiplex ^a ipsius A, atque L ipsius C. eadem ratione M aequae multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. et quoniam est ut A ad B, ita C ad D; sumptae autem sunt ipsarum A, C aequae multiplices quaedam K, L; et ipsarum B, D aliae quaedam aequae multiplices M, N: si K superat M, superabit et L ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor^b. suntque K, L quidem ipsarum E, F utcunque aequae multiplices; M, N vero ipsarum G, H aliae utcunque aequae multiplices. ut igitur E ad G, ita ^b erit F ad H. Quare si &c. Q. E. D.



COR. Et similiter, si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; et aequae multiplices primae et tertiae, juxta quamvis multiplicationem, ad secundam et quartam eandem rationem habebunt. et similiter prima et tertia, ad aequae multiplices quavis secundae et quartae eandem habebunt rationem.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia C ad quartam D, et sumantur ipsarum A, C utcunque aequae multiplices E, F; erit E ad B, ut F ad D.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sumantur ipsarum E, F utcunque aequae multiplices K, L, et ipsarum B, D aliae utcunque aequae multiplices G, H; et ut in praemissis ostendetur K aequae multiplex ipsius A, atque L ipsius C. et quoniam est A ad B, ut C ad D, sumptae autem sunt ipsarum A, C aequae multiplices quaedam K, L, et ipsarum B, D aliae quaedam aequae multiplices G, H; si K superat G, superabit et L ipsam H; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. suntque K, L ipsarum E, F utcunque aequae multiplices, G, H vero ipsarum B, D aliae utcunque aequae multiplices. ut igitur E ad B, ita F ad D. similiter ostendetur alter casus.

PROP. V. THEOR.

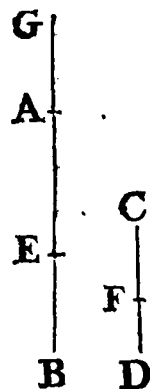
SI magnitudo magnitudinis aequae multiplex fit atque ablata ablatae; erit et reliqua reliquae aequae multiplex atque tota totius.

Magnitudo enim AB magnitudinis CD aequae multiplex fit atque ablata AE ablatae CF. Dico et reliquam EB reliquae FD aequae multiplicem esse atque totam AB totius CD.

Quam multiplex enim est AE ipsius CF, tam multiplex fiat et AG

a. 1. 5. ipsius FD. erit igitur ^a AE aequae multiplex ipsius CF atque EG ipsius CD; ponitur autem AE aequae multiplex ipsius CF atque AB ipsius CD; sunt igitur EG, AB ipsius CD aequae multiplices; ac propterea EG ipsi

b. 1. Ax. 5. AB est aequalis^b. communis auferatur AE, reliqua igitur AG aequalis est reliquae EB. itaque quoniam AE aequae multiplex est CF atque AG ipsius FD, estque AG aequalis ipsi EB; erit AE aequae multiplex CF atque EB ipsius FD. aequae multiplex autem ponitur AE ipsius CF atque AB ipsius CD; ergo EB ae-



que

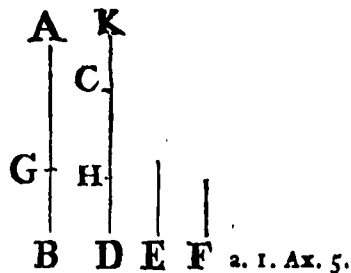
que multiplex est ipfius FD atque AB ipfius CD. Quare si &c.
Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

SI duae magnitudines duarum magnitudinum aequae multiplices sint, et ablatae quaedam sint earundem aequae multiplices; erunt et reliquae vel eisdem aequales, vel ipsarum aequae multiplices.

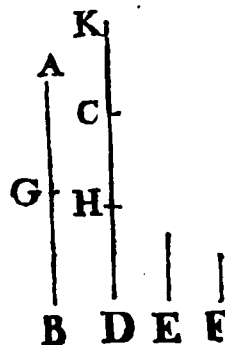
Duae enim magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F aequae multiplices sint, et ablatae AG, CH earundem E, F sint aequae multiplices. Dico et reliquas GB, HD vel ipsis E, F aequales esse, vel ipsarum aequae multiplices.

Sit enim primum GB aequalis E; dico et HD ipsi F esse aequalem. Ponatur ipsi F aequalis CK. et quoniam AG aequae multiplex est E atque CH ipfius F, estque GB quidem aequalis E, CK vero aequalis F; erit AB aequae multiplex E atque KH ipfius F. aequae autem multiplex ponitur AB ipfius E atque CD ipfius F; ergo KH aequae multiplex est ipfius F atque CD ejusdem F. aequalis igitur est ^a KH ipsi CD. communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliquae HD est aequalis. sed KC est aequalis F, et HD igitur ipsi F est aequalis. si igitur GB ipsi E, et HD ipsi F aequalis erit.



Sed sit GB multiplex ipfius E, erit HD aequae multiplex ipfius F. Quam multiplex enim est GB ipfius E, tam multiplex fiat CK ipfius F; et quoniam aequae multiplex est AG ipfius E, atque CH ipfius F, aequae multiplex autem est GB ipfius E, atque CK ipfius F, erit ^b AB ^{a. 2. 5.} aequae multiplex ipfius E, atque KH ipfius F. aequae autem multiplex ponitur

ponitur AB ipsius E, atque CD ipsius F; ergo KH aeque multiplex
 a. 1. Ax. 5. est F, atque CD ejusdem F. aequalis igitur ^a est
 KH ipsi CD. communis auferatur CH; ergo re-
 liqua KC reliquae HD est aequalis. Quam multi-
 plex autem est GB ipsius E, tam multiplex est KC
 ipsius F, sed KC est aequalis HD. Ergo tam
 multiplex est HD ipsius F, atque GB ipsius E.
 si igitur duae &c. Q. E. D.



PROP. A. THEOR.

SI prima ad secundam eandem habet rationem quam
 tertia ad quartam, fueritque prima major secunda;
 erit tertia major quarta; et si aequalis, aequalis; et si mi-
 nor, minor.

Sumantur enim quaevis aeque multiplices omnium, puta duplae, et,
 per Definitionem 5tam hujus, si dupla primae major fuerit duplâ se-
 cundae, erit dupla tertiae major duplâ quartae. si autem prima ma-
 jor fuerit secunda, erit dupla primae major duplâ secundae. quare et
 dupla tertiae major erit duplâ quartae; unde tertia major erit quarta.
 Ergo si prima major fuerit secundâ, erit tertia major quarta. similiter
 si prima aequalis fuerit secundae, aut ipsâ minor, ostendetur tertia ae-
 qualis quartae, aut ipsâ minor. Q. E. D.

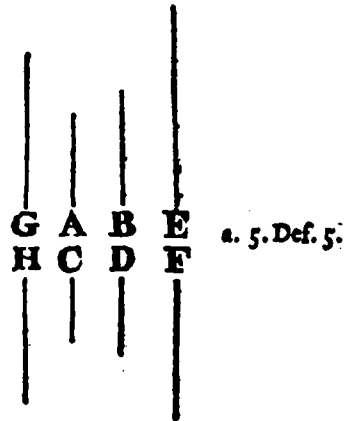
PROP. B.

PROP. B. THEOR.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inverse proportionales erunt.

Sit A ad B, ut C ad D; erit inversè B ad A, ut D ad C.

Sumantur enim ipsarum B, D, aequae multiplices quaecunque E, F; et ipsarum A, C, aliae utcunque aequae multiplices G, H. et primum sit E major G; erit igitur G minor E; et quoniam est A ad B, ut C ad D, et ipsarum A, C aequae multiplices sumptae sunt G, H; et ipsarum B, D aliae aequae multiplices E, F; et est G minor E, erit H minor F^a; quare est F major H. si igitur E major sit G, et F quam H major erit. similiter, si E aequalis fuerit ipsi G, ostendetur F aequalis ipsi H; et si minor, minor. suntque E, F ipsarum B, D, utcunque aequae multiplices; et G, H ipsarum A, C, aliae utcunque aequae multiplices. Ergo ut B ad A, ita est D ad C^a. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inverse proportionales erunt.



PROP. C.

PROP. C. THEOR.

SI prima aequae multiplex fuerit, vel eadem pars, secundae, atque tertia quartae; erit prima ad secundam ut tertia ad quartam.

Sit prima *A* aequae multiplex secundae *B*, atque tertia *C* quartae *D*. erit *A* ad *B*, ut *C* ad *D*.

Sumantur enim ipsarum *A*, *C* aequae multiplices quaecunque *E*, *F*; ipsarumque *B*, *D*, aliae utcunque aequae multiplices *G*, *H*. et quoniam *A* aequae multiplex est *B*, atque *C* ipsius *D*; *E* vero aequae multiplex *A*, atque *F* ipsius *C*,
 a. 3. 5. erit ^a *E* aequae multiplex *B*, atque *F* ipsius *D*. sunt autem *G*, *H* ipsarum *B*, *D* aequae multiplices; ergo si *E* major fuerit multiplex ipsius *B*, quam *G* ejusdem *B*, erit et *F* major multiplex ipsius *D*, quam *H* ejusdem *D*; hoc est si *E* major fuerit *G*, erit *F* major *H*. similiter si *E* aequalis fuerit *G*, aut ipsâ minor, ostendetur *F* aequalis *H*, aut ipsâ minor. sunt autem *E*, *F* ipsarum *A*, *C* utcunque aequae multiplices; et *G*, *H* ipsarum *B*, *D* aliae utcunque aequae multiplices. Ergo est *A* ad *B*, ut
 b. Def. 5. 5. *C* ad *D*^b.

Sed sit prima *A* eadem pars secundae *B*, atque tertia *C* quartae *D*. erit *A* ad *B*, ut *C* ad *D*. etenim erit *B* eadem multiplex *A*, atque *D* ipsius *C*; quare per Casum I. est *B* ad *A*, ut *D* ad *C*, et
 c. B. 5. invertendo^c, erit *A* ad *B*, ut *C* ad *D*. si igitur prima &c. Q. E. D.



PROP. D.

PROP. D. THEOR.

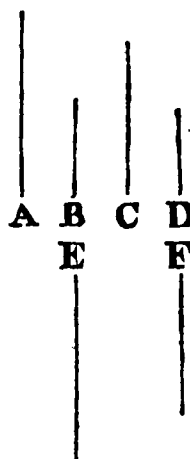
SI fuerit prima ad secundam, ut tertia ad quartam; fueritque prima multiplex, vel pars secundae; erit tertia eadem multiplex, vel eadem pars quartae.

Sit A ad B, ut C ad D; sitque A multiplex ipsius B, erit C eadem multiplex ipsius D.

Sumatur enim E aequalis ipsi A, et quam multiplex est A sive E ipsius B, tam multiplex fiat F ipsius D. Ergo quoniam A ad B eandem habet rationem, quam C ad D, et secundae B et quartae D aequae multiplices sumptae sunt E, F, erit ^a A ad E, ut C ad F. et est A aequalis ipsi E; ergo C aequalis est ipsi F^b. est autem F aequae multiplex ipsius D, atque E sive A ipsius B. Ergo C aequae multiplex est D, atque A ipsius B.

Sed sit prima A pars secundae B, erit tertia C eadem pars quartae D.

Quoniam enim est A ad B, ut C ad D, invertendo^c, erit B ad A, ut D ad C. est autem A pars ipsius B, hoc est B multiplex est ipsius A, quare, per casum praecedentem, D eadem est multiplex ipsius C, hoc est C eadem pars est ipsius D, atque A ipsius B. si igitur fuerit prima &c. Q. E. D.



a. Cor. 4. 5.

b. Prop. A. 5.

c. B. 5.

PROP. VII. THEOR.

AEQUALES ad eandem, eandem habent rationem; et eadem ad aequales.

Sint aequales magnitudines A, B, alia autem quacvis magnitudo sit

T

C. Dico

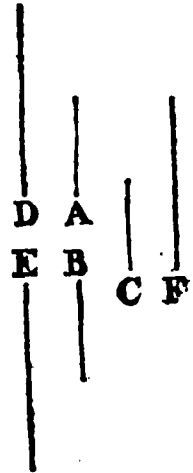
C. Dico utramque A, B ad C eandem rationem habere; et C ad utramque A, B similiter eandem habere rationem.

Sumantur enim ipsarum A, B utcunque aequae multiplices D, E, et ipsius C alia utcunque multiplex F. quoniam igitur aequae multiplex est D ipsius A, atque E ipsius B, estque

a. 1. Ax. 5. A ipsi B aequalis; erit et D aequalis ipsi E^a. Ergo si D superat F, et E ipsam F superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. et sunt D, E quidem ipsarum A, B utcunque aequae multiplices; F vero alia utcunque multiplex ipsius C. erit igitur ut A ad C,

b. 5. Def. 5. ita B ad C^b.

Dico insuper C ad utramque ipsarum A, B eandem habere rationem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E aequalem esse. si igitur F superat D, ipsum quoque E superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. atque est F quidem ipsius C utcunque multiplex; D, E vero aliae utcunque aequae multiplices ipsarum A, B. Ergo^b ut C ad A, ita erit C ad B. Aequales igitur &c. Q. E. D.



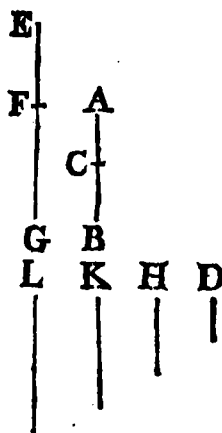
PROP. VIII. THEOR.

INAEQUALIUM magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.

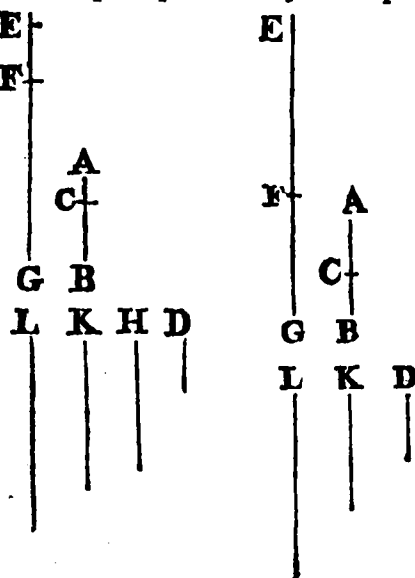
Sint inaequales magnitudines AB, BC, et sit AB major; alia vero utcunque sit D. habebit AB ad D majorem rationem quam BC ad D. et D ad BC majorem rationem habebit quam ad AB.

Si ea quae non major est ipsarum AC, CB non minor sit quam D; sumantur

sumantur ipsarum AC, CB duplae EF, FG, ut in Fig. 1. si vero ea quae non major est ipsarum AC, CB minor sit quam D, (ut in duabus reliquis figuris) ea, sive fuerit AC sive CB, multiplicata major aliquando erit quam D. multiplicetur quoad fiat major quam D, et quoties multiplicata fuerit, toties multiplicetur altera; sitque EF multiplex ipsius AC, FG vero eadem multiplex ipsius CB. utraque igitur EF, FG major est quam D. in omnibus autem casibus, sumatur ipsius D dupla H, tripla K, et deinceps una amplius, quoad ea quae sumitur fiat multiplex ipsius D quae primò major est ipsa FG. sumatur, sitque L ipsius D multiplex quae primò major est FG, K vero sit ea multiplex ipsius D quae proxime minor est quam L.



Quoniam igitur L multiplex est ipsius D quae primò major fit ipsa FG, non erit K major quam FG, ideoque FG non minor erit quam K. et cum aequae multiplex sit EF ipsius AC, atque FG ipsius CB, erit ^a et FG aequae multiplex ipsius CB, atque EG ipsius AB; quare EG, FG ipsarum AB, CB sunt aequae multiplices. ostensa autem fuit FG non minor quam K, et ex constructione, est EF major quam D; ergo tota EG utrisque simul K, D major crit. sed utraque simul K, D aequales sunt ipsi L; superat igitur EG ipsam L, FG vero non superat L; et sunt EG, FG ip-



a. 1. 5.

farum

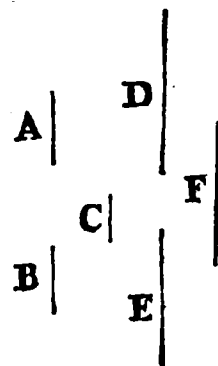
farum AB, BC aequae multiplices, et L ipsius D alia quaedam multiplex;
b. Def. 7. 5. ergo AB ad D maiorem habet rationem quam BC ad D^b.

Praeterea D ad BC maiorem habebit rationem quam ad AB. iisdem enim constructis, similiter ostendetur L superare FG, ipsam vero EG non superare. atque est L multiplex ipsius D, FG vero et EG sunt aliae quaedam ipsarum CB, AB aequae multiplices. Ergo D ad CB maiorem habet rationem quam D ad AB^b. Inaequalium igitur &c. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

QUAE ad eandem, eandem rationem habent, inter se sunt aequales; et ad quas eadem eandem rationem habet, ipsae sunt inter se aequales.

Habeat enim utraque ipsarum A, B ad C eandem rationem; dico A ipsi B aequalem esse. nam si non sit aequalis, altera ipsarum est maior; sit A maior; sunt igitur, ut ostensum fuit in propositione praecedente, quaedam ipsarum A, B aequae multiplices, et quaedam ipsius C multiplex tales ut multiplex ipsius A superet multiplicem ipsius C, multiplex vero ipsius B eandem non superet. sumantur, et sint D, E ipsarum A, B aequae multiplices, F vero ipsius C multiplex, ita ut D superet F, E vero eandem F non superet. quoniam vero est A ad C, ut B ad C, et ipsarum A, B sumptae sunt quaedam aequae multiplices D, E, et ipsius C sumpta est quaedam



a. 5. Def. 5. multiplex F, et est D maior F, erit ^a E maior F; est autem et E non maior F, quod fieri non potest. non igitur inaequalis est A ipsi B; ergo aequalis erit.

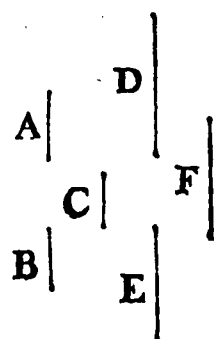
Habeat

Habeat rursus C ad utramque ipsarum A, B eandem rationem. Dico A aequalem esse ipsi B. si enim non sit, altera ipsarum est major; sit major A, est igitur ^b quaedam multiplex F ipsius C, suntque quaedam ip- b. 8. 5.
 farum B, A aequae multiplices E, D, tales ut F superet E non vero ip-
 sam D superet. Quoniam vero est C ad B, ut C ad A, et est F mul-
 tiplex primae C major E multiplici secundae B, erit ^a F multiplex ter- a. 5. Def. 5.
 tiae C major D multiplici quartae A. est autem et F non major D.
 Quod fieri non potest. Ergo est A aequalis ipsi B. Quae igitur ad
 eandem &c. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quae
 majorem rationem habet, illa major est; ad quam
 vero eadem majorem habet rationem, illa minor est.

Habeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C; dico A
 quam B majorem esse. Quoniam enim A ad C majorem habet ratio-
 nem, quam B ad C, sunt ^a quaedam ipsarum A, B
 aequae multiplices, et ipsius C quaedam multiplex, ut
 multiplex quidem ipsius A superet multiplicem C,
 multiplex vero B non superet eandem. sumantur,
 et sint ipsarum A, B aequae multiplices D, E; ipsius
 vero C multiplex sit F, ita ut D quidem superet F,
 E autem non superet eandem F. est igitur D major
 quam E. et quoniam D, E ipsarum A, B sunt ae-
 quae multiplices, et est D major quam E, erit A ma-
 jor quam B^b.



a. Def. 7. 5.

b. Ax. 4. 5.

Habeat rursus C ad B majorem rationem quam C ad A. Dico B
 minorem esse quam A. est enim ^a quaedam multiplex F ipsius C, sunt-
 que

EUCLIDIS ELEMENTORUM

que ipsarum B, A quaedam aequae multiplices E, D, ita ut F superet E, non vero superet ipsam D. est igitur E minor quam D; et quoniam
 b. Ax. 4. 5. E, D ipsarum B, A sunt aequae multiplices, erit ^b B minor quam A. ad eandem igitur &c. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

QUAE eidem eadem sunt rationes, et inter se eadem sunt.

Sint enim ut A ad B, ita C ad D; ut autem C ad D, ita E ad F. Dico ut A ad B, ita E ad F.

Sumantur enim ipsarum quidem A, C, E aequae multiplices quaevis G, H, K; ipsarum vero B, D, F aliae utcumque aequae multiplices, L, M, N. Quoniam igitur est ut A ad B, ita C ad D, et sumptae sunt ipsarum A, C aequae multiplices G, H; et ipsarum B, D aliae aequae
 a. 5. Def. 5. multiplices L, M; si G superat L, et H ipsam M superabit^a; et si ae-

G —————	H —————	K —————
A ———	C ———	E ———
B ———	D ———	F ———
L —————	M —————	N —————

qualis, aequalis; et si minor, minor. rursus quoniam est ut C ad D, ita E ad F, et sumptae sunt ipsarum C, E aequae multiplices H, K; ipsarum vero D, F aliae aequae multiplices M, N, si H superat M, et K ipsam N superabit^a; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. sed si G superat L, ostensum est H superare M; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor; quare si G superat L, et K ipsam N superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. et sunt G, K quidem ipsarum
 A, E

LIBER QUINTUS.

151

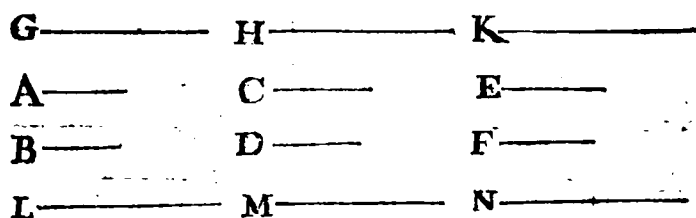
A, E utcumque aequae multiplices; L, N vero ipsarum B, F aliae utcumque aequae multiplices. Ergo ut A ad B, ita erit E ad F. Quae igitur eidem &c. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.

SI quotcumque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes simul ad omnes consequentes simul.

Sint quotcumque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F; et ut A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico ut A ad B, ita esse A, C, E ad B, D, F.

Sumantur enim ipsarum A, C, E utcumque aequae multiplices G, H, K, et ipsarum B, D, F aliae utcumque aequae multiplices L, M, N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, et E ad F; et sumptae sunt ipsae



rum quidem A, C, E aequae multiplices G, H, K, ipsarum vero B, D, F aliae aequae multiplices L, M, N; si ^a G superat L, et H ipsam M a. 5. Def. 5. superabit, et K ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Quare et si G superat L, superabunt et G, H, K ipsas L, M, N; et si aequalis, aequales; et si minor, minores. suntque G, et G, H, K ipsarum A, et A, C, E utcumque aequae multiplices, quoniam si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum, aequalium numero, singulae

singulae singularum aequae multiplices; quam multiplex est una magnitudo

b. 1. 5. unius, tam multiplices^b erunt et omnes omnium. eadem ratione L, et L, M, N ipsarum B, et B, D, F sunt utcumque aequae multiplices. Est

a. Def. 5. 5. igitur^a ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Quare si &c. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

SI prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam maiorem habebit rationem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D maiorem habeat rationem quam quinta E ad sextam F. Dico et primam A ad secundam B maiorem rationem habere, quam quintam E ad sextam F.

Quoniam enim C ad D maiorem habet rationem quam E ad F, sunt quaedam ipsarum C, E aequae multiplices, et ipsarum D, F aliae

M —————	G —————	H —————
A ———	C ———	E ———
B ———	D ———	F ———
N —————	K —————	L —————

quaedam aequae multiplices, ut multiplex quidem C superet multiplicem
a. 7. Def. 5. D; multiplex vero E non superet multiplicem ipsius F^a. sumantur, et sint ipsarum C, E aequae multiplices G, H; et ipsarum D, F aliae aequae multiplices K, L; ita ut G quidem superet K, H vero ipsam L non superet; et quam multiplex est G ipsius C, tam multiplex fiat M ipsius A; quam multiplex autem est K ipsius D, tam multiplex fiat N ipsius

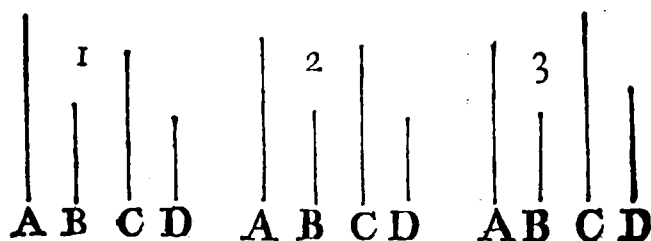
ipsius B. et quoniam est ut A ad B, ita C ad D, et sumptae sunt ipsarum A, C aequae multiplices M, G, et ipsarum B, D aliae quaedam aequae multiplices N, K; si M superat N, et G ipsam K superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. sed G superat K, ergo et M ipsam N superabit. H vero non superat L; suntque M, H ipsarum A, E aequae multiplices, et N, L ipsarum B, F aliae quaedam aequae multiplices. Ergo A ad B majorem rationem habebit^a quam E a. 7. Def. 5. ad F. si igitur &c. Q. E. D.

COR. Et si prima ad secundam majorem rationem habeat, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam eandem rationem habeat, quam quinta ad sextam; similiter ostendetur primam ad secundam majorem rationem habere, quam quintam ad sextam.

PROP. XIV. THEOR.

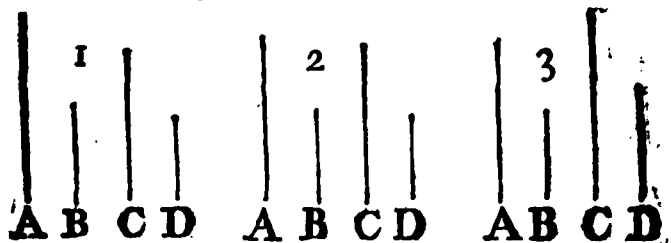
SI prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia; et secunda quam quarta major erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat, quam tertia C ad quartam D; major autem sit A quam C. Dico et B quam D majorem esse.



Quoniam enim A major est quam C, et alia est utcumque magnitudo
U B, ha-

- a. 8. 5. B, habebit ^a A ad B maiorem rationem quam C ad B. sed ut C ad
 b. 13. 5. D, ita est A ad B; ergo et C ad D maiorem habebit ^b rationem quam
 c. 10. 5. C ad B. ad quam vero eadem maiorem rationem habet, illa minor ^c
 est. quare D est minor quam B, ac propterea B quam D major erit.



Secundo, Sit A aequalis ipsi C; erit B aequalis ipsi D. quoniam e-
 d. 9. 5. nim est A ad B, ut C hoc est A ad D, erit B aequalis ipsi D^d.

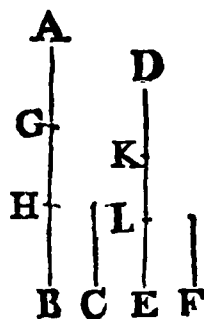
Tertio, Sit A minor C; erit B minor D. Etenim erit C major A,
 et quoniam est C ad D, ut A ad B, erit D major B per Casum pri-
 mum. quare B minor erit D. si igitur prima &c. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

PARTES inter se comparatae eandem habent rationem,
 quam habent earum aequae multiplices.

Sit enim AB aequae multiplex C, atque DE ipsius F. Dico ut C
 ad F, ita esse AB ad DE.

Quoniam enim aequae multiplex est AB ipsius C,
 atque DE, ipsius F; quot magnitudines sunt in AB
 aequales ipsi C, totidem erunt et in DE aequales F.
 Dividatur AB in magnitudines ipsi C aequales, quae
 sint AG, GH, HB; et DE dividatur in magnitudi-
 nes aequales F, videlicet in DK, KL, LE. erit igitur
 ipsarum AG, GH, HB multitudo aequalis multi-



tudini

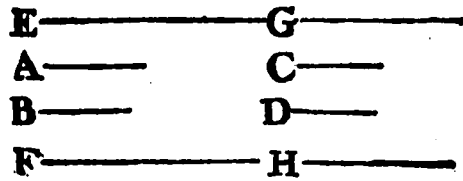
tudini ipsarum DK, KL, LE. et quoniam aequales sunt AG, GH, HB, suntque DK, KL, LE inter se aequales; crit ut AG ad DK, ita GH ad KL, et HB ad LE^a. atque ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes^b; est b. 12. 5. igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. sed AG ipsi C est aequalis, et DK ipsi F. Ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur &c. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

SI quatuor magnitudines quae omnes ejusdem sunt generis proportionales fuerint, et permutatae proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D, sitque ut A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita B ad D.

Sumantur enim ipsarum quidem A, B aequae multiplices quaecunque E, F; ipsarum vero C, D, aliae utcunque aequae multiplices G, H. et quoniam aequae multiplex est E ipsius A, atque F ipsius B; partes autem inter se comparatae



eandem habent^a rationem quam habent earum aequae multiplices; e. a. 15. 5. rit ut A ad B, ita E ad F. ut autem A ad B, ita C ad D. Ergo et ut C ad D, ita E ad F^b. rursus, quoniam G, H sunt ipsarum C, D b. 11. 5. aequae multiplices, erit^a ut C ad D, ita G ad H; ut autem C ad D, ita E ad F. Ergo et ut E ad F, ita G ad H^b. Quod si quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si aequalis, aequalis; et si minor,

U 2

minor^c.

c. 14. 5. minor^c. si igitur E superat G, et F ipsam H superabit; et si aequalis,

aequalis; et si minor, minor. sunt-
que E, F ipsarum A, B, utcun-
que aequae multiplices, et G, H
ipsarum C, D aliae utcunque ac-
que multiplices. Ergo^d ut A ad

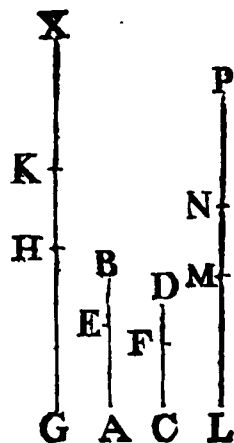
d. Def. 5. 5 que multiplices. Ergo^d ut A ad C, ita B ad D. si igitur quatuor &c. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

SI compositae magnitudines sint proportionales, et divisae proportionales erunt.

Sint compositae magnitudines proportionales AB, BE; CD, DF, hoc est ut AB ad BE, ita sit CD ad DF. Dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB, ita esse CF ad FD.

Sumantur enim ipsarum AE, EB, CF, FD utcunque aequae multiplices GH, HK, LM, MN; ipsarum vero EB, FD rursus sumantur aliae utcunque aequae multiplices KX, NP. et quoniam aequae multiplex est GH ipsius AE, atque HK ipsius EB; a. 1. 5. erit^a GH ipsius AE aequae multiplex, atque GK ipsius AB. aequae autem multiplex est GH ipsius AE, atque LM ipsius CF. ergo GK aequae multiplex est AB, atque LM ipsius CF. rursus, quoniam aequae multiplex est LM ipsius CF, atque MN ipsius FD; erit^a LM aequae multiplex CF, atque LN ipsius CD. sed aequae multiplex erat LM ipsius CF, atque GK ipsius AB. aequae igitur multiplex est GK ipsius AB, atque LN ipsius CD; quare GK, LN ipsarum AB, CD aequae multiplices



multiplices erunt. rursus, quoniam aequae multiplex est HK ipsius EB,
 atque MN ipsius FD; est autem et KX ipsius EB aequae multiplex, at-
 que NP ipsius FD; et composita HX ipsius EB aequae multiplex erit ^b b. 2. 5.
 atque composita MP ipsius FD. et quoniam est ut AB ad BE, ita CD
 ad DF, et sumptae sint ipsarum quidem AB, CD aequae multiplices
 GK, LN, ipsarum vero EB, FD aliae quaedam aequae multiplices HX,
 MP; si ^c GK superat HX, et LN superabit MP; et si aequalis, ae- c. 5. Def. 5.
 qualis; et si minor, minor. si autem GH superat KX, additâ communi
 HK, superabit GK ipsam HX; quare et LN superabit MP; commu-
 nique MN ablatâ, superabit LM ipsam NP. Quare si GH superat
 KX, et LM superabit ipsam NP. similiter demonstrabimus et si GH
 sit aequalis KX, et LM ipsi NP esse aequalem; et si minor, minorem.
 sunt autem GH, LM ipsarum AE, CF utcunque aequae multiplices, et
 ipsarum EB, FD aliae utcunque aequae multiplices sunt KX, NP. ergo
 ut AE ad EB, ita erit CF ad FD. si igitur compositae magnitudines
 sint &c. Q. E. D.

PROP. XVIII.

PROP. XVIII. THEOR.

SI divifae magnitudines fint proportionales, et compofitae proportionales erunt.

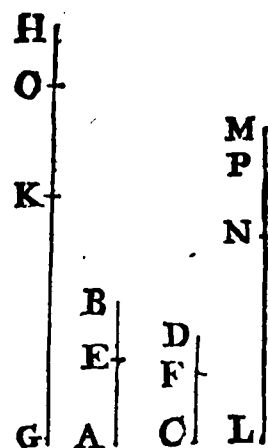
Sint divifae magnitudines proportionales AE, EB; CF, FD, hoc eft ut AE ad EB, ita fit CF ad FD; dico etiam compofitas proportionales effe, videlicet ut AB ad BE, ita effe CD ad DF.

Sumantur enim ipfarum AB, BE, CD, DF utcunque aequae multiplices GH, HK, LM, MN; ipfarum autem BE, DF aliae rurfus fumantur utcunque aequae multiplices KO, NP. et quoniam KO, NP aequae multiplices funt ipfarum BE, DF; et KH, NM earundem funt aequae multiplices, fi KO multiplex ipfius BE major fit KH multiplici ejufdem BE, erit et NP multiplex ipfius DF major NM multiplici ejufdem DF; et fi KO aequalis fit KH, erit NP aequalis NM; et fi minor, minor.

Sit primum KO non major KH, igitur erit NP non major NM. et quoniam GH, HK aequae multiplices funt ipfarum AB, BE, et eft

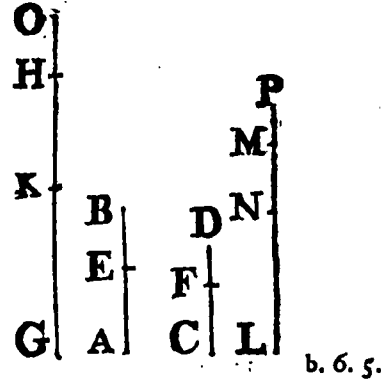
* 3. Ax. 5. AB major BE, erit GH major * KH; eft autem KO non major KH; quare GH major eft KO. fimiliter oftendetur LM majorem effe NP. Ergo fi KO non major fit KH, erit GH multiplex ipfius AB femper major KO multiplici ipfius BE, et fimul LM multiplex ipfius CD major erit NP multiplici ipfius DF.

Sed fit KO major quam KH; erit igitur, ut oftensum, NP major NM. et quoniam eft tota GH aequae multiplex totius AB, atque ablata



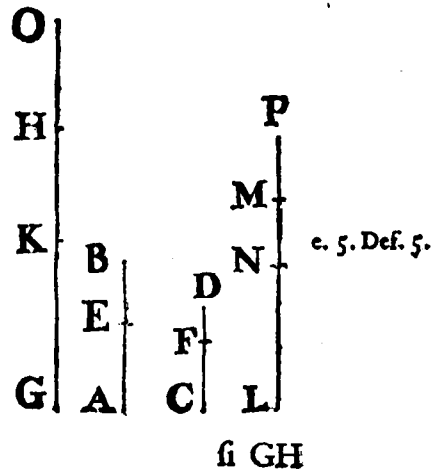
lata HK ablatae BE, erit ^a et reliqua GK reliquae AE aequae multi-^{a. 5. 5.}
plex atque GH ipsius AB, hoc est atque LM ipsius CD. similiter quo-
niam LM aequae multiplex est ipsius CD, atque ablata MN ablatae DF,
erit ^a reliqua LN aequae multiplex reliquae CF, atque LM ipsius CD.

sed aequae multiplex ostensa est LM ipsius CD,
atque GK ipsius AE; aequae igitur multiplex
est GK ipsius AE, atque LN ipsius CF. quare
GK, LN ipsarum AE, CF sunt aequae multi-
plices. quoniam vero KO, NP ipsarum BE, DF
sunt aequae multiplices, et ablatae sunt KH, NM
earundem aequae multiplices, erunt reliquae HO,
MP vel aequales ipsis BE, DF, vel earundem
aequae multiplices^b. sint primùm HO, MP ae-

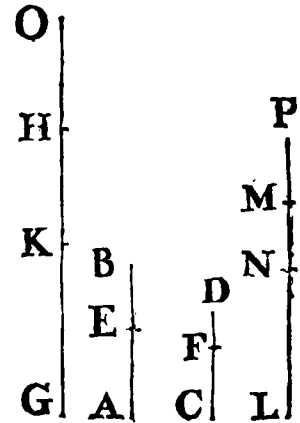


quales ipsis BE, DF; et quoniam est AE ad EB, ut CF ad FD, et
sumptae sunt GK, LN ipsarum AE, CF aequae multiplices, erit ^c GK ^{c. Cor. 4. 5.}
ad EB, ut LN ad FD. est autem HO aequalis EB, et MP ipsi FD;
quare est GK ad HO, ut LN ad MP. Ergo si GK superat HO, su-
perabit LN ipsam MP; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor^d. ^{d. A. 5.}

Sed sint HO, MP ipsarum EB, FD aequae multiplices; et quoniam
est AE ad EB, ut CF ad FD, et sumptae sunt
ipsarum AE, CF aequae multiplices GK, LN;
ipsarum vero EB, FD aliae quaedam aequae
multiplices HO, MP; si GK superat HO, et
LN superabit MP; et si aequalis, aequalis; et
si minor, minor^e; quod etiam in casu praece-
dente ostensum fuit. si igitur GH superat
KO, ablata communi KH, superabit GK ipsam
HO; quare et LN superabit MP; et addita
communi NM, superabit LM ipsam NP. Ergo



si GH superat KO, et LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabitur si GH aequalis sit KO, et LM ipsi NP aequalem esse; et si minor, minorem. et in casu in quo KO non major est KH, ostensum fuit GH semper majorem esse KO, et simul LM majorem NP. sunt autem GH, LM ipsarum AB, CD utcumque aeque multiples, et KO, NP ipsarum BE, DF aliae utcumque
 e. 5. Def. 5. aeque multiples; ergo ^c ut AB ad BE, ita est CD ad DF. Quare si divisac &c.
 Q. E. D.

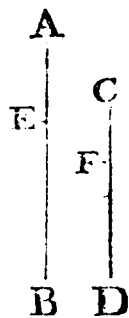


PROP. XIX. THEOR.

SI fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD.

- a. 16. 5. Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; et per-
 b. 17. 5. mutando crit ^a ut BA ad AE, ita DC ad CF. quoniam vero compositae magnitudines sunt proportionales, et divisae proportionales erunt^b; ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC; rursusque permutando, ut BE ad DF, ita EA ad FC. sed ut AE ad CF, ita posita est AB ad CD. et reliqua igitur EB crit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. quare si &c. Q. E. D.



COR. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam;

crit

LIBER QUINTUS.

161

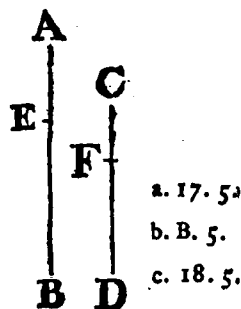
erit et reliqua ad reliquam ut ablata ad ablatam. hoc enim in ipsa demonstratione ostensum est.

PROP. E. THEOR.

SI quatuor magnitudines proportionales sint, et convertendo proportionales erunt.

Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF; convertendo erit ut BA ad AE, ut DC ad CF.

Quoniam enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, dividendo^a erit AE ad EB, ut CF ad FD; et invertendo^b, BE ad EA, ut DF ad FC. Quare componendo^c, erit BA ad AE, ut DC ad CF. si igitur &c. Q. E. D.

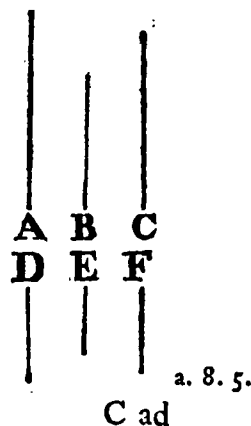


PROP. XX. THEOR.

SI sint tres magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; prima autem major sit quam tertia; et quarta quam sexta major erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumptae sunt in eadem ratione; sit scilicet ut A ad B, ita D ad E; et ut B ad C, ita E ad F; major autem sit A quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

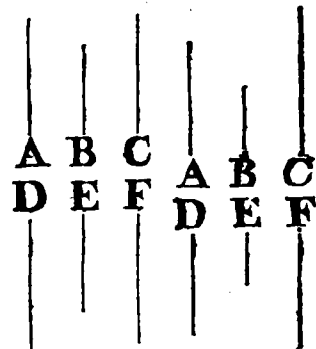
Quoniam enim A major est quam C, alia vero utcumque est B, et major ad eandem majorem habet rationem quam minor^a; habebit A ad B majorem rationem, quam



X

- b. 13. 5. C ad B, sed ut D ad E, ita A ad B; ergo ^b et D ad E majorem habet rationem, quam C ad B. et quoniam est B ad C, ut E ad F, invertendo erit C ad B, ut F ad E; ostensa autem est D ad E majorem rationem habere quam C ad B; ergo ^c D ad E majorem habet rationem quam F ad E. ad eandem vero rationem habentium, quae d. 10. 5. majorem habet rationem illa major est^d. major igitur est D quam F.

Secundo, Sit A aequalis ipsi C; erit et D aequalis ipsi F. Quoniam enim aequales sunt A, C, et alia utcumque e. 7. 5. est B, erit ^e A ad B, ut C ad B. est autem A ad B, ut D ad E; et C ad B, ut F ad E; f. 11. 5. ergo ^f est D ad E, ut F ad E; et propterea g. 9. 5.^g D aequalis est ipsi F.



Tertio, Sit A minor C, erit et D minor F. quoniam enim A minor est C, erit C major quam A. et quoniam ex hypothese, et invertendo, est C ad B, ut F ad E; et B ad A, ut E ad D; et est C major A; erit et F major D, per Casum primum, et ob id erit D minor F. si igitur &c. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

SI sint tres magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio; prima autem major sit quam tertia, et quarta quam sexta major erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

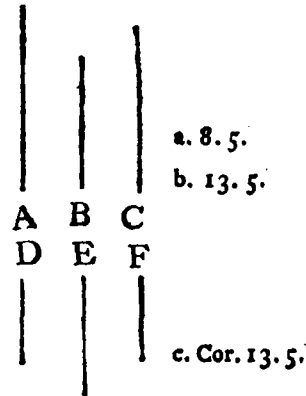
Sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales D, E, F quae binae sumptae sint in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad

LIBER QUINTUS.

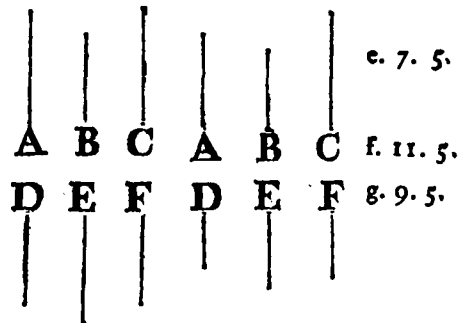
163

ad C, ita D ad E. major autem sit A quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim major est A quam C, alia vero est B; habebit ^a A ad B majorem rationem quam C ad B. sed ut E ad F, ita A ad B; ergo ^b et E ad F majorem habebit rationem, quam C ad B. quoniam vero est B ad C, ut D ad E, invertendo erit C ad B, ut E ad D. ostensa autem est E ad F majorem rationem habere quam C ad B; ergo ^c E ad F majorem habet rationem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem habet rationem illa minor est ^d; minor igitur est F quam D, et propterea D quam ^d 10. 5. F major erit.



Secundo, Sit A aequalis ipsi C; erit et D aequalis ipsi F. Quoniam enim aequales sunt A, C, alia vero est B, erit ^e A ad B, ut C ad B. est autem A ad B, ut E ad F; et C ad B, ut E ad D. ergo ^f est E ad F, ut E ad D. aequalis igitur est D ipsi F ^g.



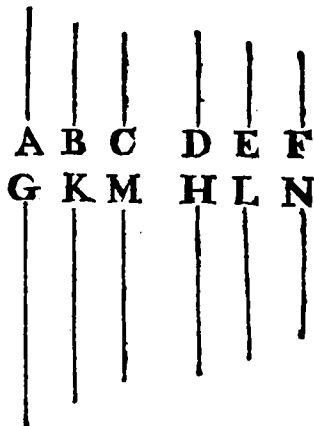
Tertio, Sit A minor C; erit et D minor F. quoniam enim A minor est C, erit C major A. et quoniam ex hypothesi, et invertendo, est C ad B, ut E ad D; et B ad A, ut F ad E; et est C major A, erit F major D per Casum primum; et ob id erit D minor F. si igitur &c. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

SI sint quotcunque magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; et ex aequali in eadem ratione erunt.

Sint primùm tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales D, E, F, binae sumptae in eadem ratione, hoc est ut A quidem ad B, ita D ad E; ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ut A ad C, ita esse D ad F.

Sumantur enim ipsarum quidem A, D aequae multiplices utcunque G, H; ipsarum vero B, E aliae utcunque aequae multiplices K, L; et ipsarum C, F aliae utcunque aequae multiplices M, N. Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, et sumptae sunt ipsarum A, D aequae multiplices G, H, et ipsarum B, E aliae aequae multiplices K, L; erit ^a ut G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. et cum sint tres magnitudines G, K, M, et aliae ipsis numero aequales H, L, N binae sumptae et in eadem ratione; si G superat M, et H ipsam N superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor,



b. 20. 5. minor ^b. suntque G, H ipsarum A, D utcunque aequae multiplices, et M, N ipsarum C, F, aliae utcunque aequae multiplices. ut igitur A ad

c. 5. Def. 5. C, ita erit ^c D ad F.

Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, D, et aliae ipsis numero aequales E, F, G, H quae binae sumptae sunt in eadem ratione; videlicet ut A ad B, ita E

A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	H.

ad

ad F; ut vero B ad C, ita F ad G; et ut C ad D, ita G ad H; erit A ad D, ut E ad H.

Quoniam enim tres sunt magnitudines A, B, C et aliae ipsis numero aequales, E, F, G quae binae sumptae sunt in eadem ratione, erit, per Casum primum, A ad C, ut E ad G; est autem et C ad D, ut G ad H; quare rursus per Casum primum, est A ad D, ut E ad H. et sic quotcunque fuerint magnitudines. Quare si &c. Q. E. D.

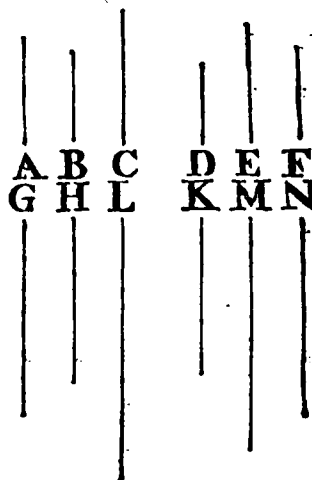
PROP. XXIII. THEOR.

SI sint quotcunque magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; sit autem perturbata seu inordinata earum proportio: et ex aequali in eadem ratione erunt.

Sint primum tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales, binae sumptae et in eadem ratione D, E, F; sit autem perturbata earum proportio, hoc est sit ut A ad B, ita E ad F; et ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita esse D ad F.

Sumantur ipsarum quidem, A, B, D utcunque aequae multiplices G, H, K; ipsarum vero C, E, F aliae utcunque aequae multiplices L, M, N. et quoniam G, H aequae multiplices sunt ipsarum A, B, partes autem eandem habent rationem quam habent earum aequae multiplices^a; erit ut A

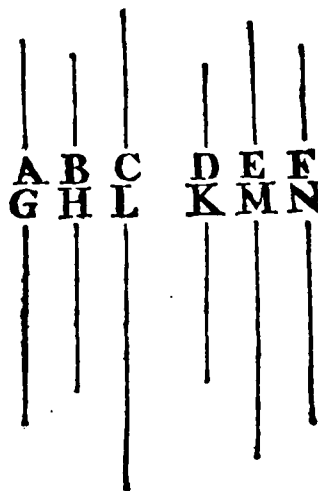
ad B, ita G ad H. et simili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque est ut A ad B, ita E ad F. ut igitur G ad H, ita^b M ad N. et b. 11. 5. quoniam



a. 15. 5.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

quoniam est ut B ad C, ita D ad E, et sumptae sunt ipsarum B, D aequae multiplices H, K, ipsarum vero C, E, aliae aequae multiplices
 e. 4. 5. L, M; erit ^c ut H ad L, ita K ad M. ostensum autem est et ut G ad H, ita esse M ad N. quoniam igitur tres sunt magnitudines G, H, L, et



aliae ipsis numero aequales K, M, N binae sumptae in eadem ratione,
 d. 21. 5. estque perturbata earum proportio; si ^d G superat L, et K ipsam N superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. sunt autem G, K, ipsarum A, D, utcumque aequae multiplices; et L, N utcumque aequae
 e. Def. 5. 5. multiplices ipsarum C, F. ut igitur ^e A ad C, ita D ad F.

Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, D et aliae ipsis numero aequales E, F, G, H quae binae sumptae in eadem sunt ratione; sit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B, ita G ad H; ut verò B ad C, ita F ad G; et ut C ad D, ita E ad F. erit A ad D, ut E ad H.

A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	H.

Quoniam enim tres sunt magnitudines A, B, C et aliae ipsis numero aequales F, G, H quae binae sumptae sunt in eadem ratione, estque perturbata

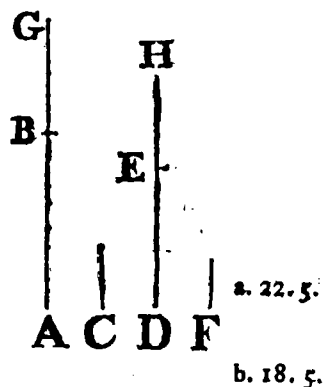
perturbata earum proportio; erit, per Casum primum, ut A ad C, ita F ad H; est autem C ad D, ut E ad F; quare, rursus per Casum primum, est A ad D, ut E ad H. et sic quocunque fuerint magnitudines. Quare si fuerit &c. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

SI prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam rationem eandem quam sexta ad quartam; et composita prima cum quinta ad secundam eandem rationem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

Prima enim AB ad secundam C eandem habeat rationem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem et quinta BG ad secundam C rationem eandem quam sexta EH ad quartam F. Dico et compositam primam cum quinta AG ad secundam C eandem rationem habere, quam tertia cum sexta DH ad quartam F.

Quoniam enim est ut BG ad C, ita EH ad F; erit invertendo C ad BG, ut F ad EH. et quoniam ut AB ad C, ita est DE ad F; ut autem C ad BG, ita F ad EH; erit ^a ex aequali ut AB ad BG, ita DE ad EH. et quoniam divisae magnitudines sunt proportionales, et compositae proportionales erunt^b; ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed et ut GB ad C, ita HE ad F. ergo ex aequali^a, ut AG ad C, ita DH ad F. si igitur &c. Q. E. D.



COR. I. Manente hypothefi Propositionis, erit excessus primae et quintae ad secundam, ut excessus tertiae et sextae ad quartam. Demonstratio

monstratio eadem est cum ea Propositionis duimmodo vice componendo utatur dividendo.

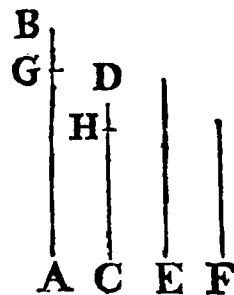
COR. 2. Ipsa autem Propositio vera est de quocunque magnitudinibus, quarum priores ad communem secundam easdem habent rationes quas habent reliquae ad communem quartam, singulae sc. priorum ad secundam, eandem quam singulae reliquarum ad quartam; ut patet.

PROP. XXV. THEOR.

SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F; et sit ut AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB, et propterea
a. A. et 14. 5. ^a F minima. Dico AB et F ipsis CD et E majores esse.

Ponatur enim ipsi quidem E aequalis AG, ipsi vero F aequalis CH. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; estque AG aequalis E, et CH aequalis F; erit ut AB ad CD, ita AG ad CH. et quoniam est ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; erit et reliqua GB
b. 19. 5. ad reliquam HD, ut tota AB ad totam ^b CD. major
c. A. 5. autem est AB quam CD; ergo ^c et GB major erit quam HD. et quoniam AG aequalis est ipsi E, CH vero ipsi F; erunt AG et F aequales ipsis CH et E. inaequalibus igitur existentibus GB, HD, quarum major est GB, si addantur AG et F ipsi quidem GB, ipsi vero HD addantur CH et E; fient AB et F ipsis CD et E majores. si igitur quatuor &c.
Q. E. D.



PROP. F.

PROP. F. THEOR.

RATIONES ex rationibus inter se iisdem compositae, sunt inter se eadem.

Sit enim ut A ad B, ita D ad E; ut vero B ad C, ita E ad F. erit ratio composita ex rationibus A ad B, et B ad C, hoc est, per definitionem rationis compositae, ratio A ad C, eadem rationi D ad F, quae sc. composita est ex rationibus D ad E, et E ad F.

A. B. C.
D. E. F.

Quoniam enim tres sunt magnitudines A, B, C et aliae ipsis numero aequales D, E, F quae binae sumptae in eadem sunt ratione, erit ^{a. 22. 5.} ex aequali A ad C, ut D ad F.

Rursus sit ut A ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; erit igitur ex aequali in proportionem perturbata^{b.} A ad C, ut D ad F, hoc est ratio A ad C, quae sc. composita est ex rationibus A ad B, et B ad C, eadem est rationi D ad F, quae composita est ex rationibus D ad E, et E ad F. et similiter si fuerint plures rationes in utroque casu. Rationes igitur &c. Q. E. D.

A. B. C.
D. E. F.

PROP. G. THEOR.

SI rationes quaedam eadem sint quibusdam rationibus, singulae singulis; ratio quae composita est ex rationibus quae eadem sunt rationibus prioribus, singulae singulis, eadem erit rationi quae composita est ex rationibus quae eadem sunt posterioribus, singulae singulis.

Sit ut A ad B, ita E ad F; ut vero C ad D, ita G ad H. fitque
Y
ut

EUCLIDIS ELEMENTORUM

ut A ad B, ita K ad L; ut vero C ad D, ita L ad M. ratio igitur K ad M, per Definitionem rationis compositae, composita est ex rationibus K ad L, et L ad M, quae eadem

sunt rationibus A ad B, et C ad D. sitque praeterea ut E ad F, ita N ad O, ut vero G ad H, ita O ad P; ratio igitur N ad P composita est ex rationibus N ad O, et O ad P, quae eadem

A.	B.	C.	D.	K.	L.	M.
E.	F.	G.	H.	N.	O.	P.

sunt rationibus E ad F, et G ad H. et ostendendum est rationem K ad M eandem esse rationi N ad P, five ut K ad M, ita esse N ad P.

Quoniam est K ad L, ut (A ad B, hoc est ut E ad F, hoc est ut) N ad O; ut vero L ad M, ita est (C ad D, et ita G ad H, et ita) O ad P.

a. 22. 5. erit ^a ex aequali K ad M, ut N ad P. Si igitur rationes &c. Q. E. D.

PROP. H. THEOR.

SI ratio ex quibusdam rationibus composita eadem sit rationi ex quibusdam aliis rationibus compositae, fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibusdam ex prioribus composita, eadem uni rationi ex posterioribus, vel rationi ex quibusdam ex posterioribus compositae; erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus composita, eadem rationi reliquae ex posterioribus, vel rationi ex reliquis posterioribus compositae.

Sint rationes A ad B, B ad C, C ad D, D ad E, et E ad F; et aliae rationes G ad H, H ad K, K ad L, et L ad M. sitque ratio A ad F, quae sc. compo-

a. Def. rationis comp.

sita est ^a ex prioribus, eadem rationi G ad M, quae composita est ^a ex posterioribus. et praeterea ratio A ad D quae composita est ex rationibus A ad B, B ad C,

A.	B.	C.	D.	E.	F.
G.	H.	K.	L.	M.	

et

et C ad D, eadem sit rationi G ad K quae composita est ex rationibus G ad H, et H ad K. erit ratio D ad F quae composita est ex reliquis rationibus prioribus D ad E, et E ad F, eadem rationi K ad M quae composita est ex reliquis rationibus posterioribus K ad L, et L ad M.

Quoniam enim, ex hypothese, est A ad D, ut G ad K, erit invertendo^b, D ad A, ut K ad G; ut vero A ad F, ita est G ad M; ergo^c, ^{b. B. 5.} ^{c. 22. 5.} ex aequali, erit D ad F, ut K ad M. si igitur &c. Q. E. D.

PROP. K. THEOR.

Si fuerint quotcunque rationes, quae dicantur priores, fuerintque aliae quotcunque rationes, quae dicantur posteriores; sitque ratio quae composita est ex rationibus quae eadem sunt rationibus prioribus, singulae singulis, eadem rationi quae composita est ex rationibus quae, singulae singulis, eadem sunt rationibus posterioribus; una vero ratio ex prioribus, vel ratio quae composita est ex rationibus quae, singulae singulis, eadem sunt totidem ex prioribus, eadem sit uni rationi ex posterioribus, vel rationi quae composita est ex rationibus quae, singulae singulis, eadem sunt totidem ex posterioribus: erit reliqua ratio ex prioribus, vel, si plures fuerint, erit ratio quae composita est ex rationibus quae eadem sunt reliquis ex prioribus, singulae singulis, eadem rationi reliquae ex posterioribus, vel, si plures fuerint, rationi quae composita est ex rationibus quae, singulae singulis, eadem sunt reliquis ex posterioribus.

Sint rationes A ad B, C ad D, E ad F, priores; posteriores vero sint rationes G ad H, K ad L, M ad N, O ad P, Q ad R. et sit ut

Y 2

A ad

EUCLIDIS ELEMENTORUM

A ad B, ita S ad T, et ut C ad D, ita T ad V, ut vero E ad F, ita V ad X. erit igitur, ex Definitione rationis compositae, ratio S ad X composita ex rationibus S ad T, T ad V, V ad X, quae scilicet eadem sunt, singulae singulis, rationibus A ad B, C ad D, E ad F. fit etiam ut G ad H, ita Y ad Z, et ut K ad L, ita Z ad a, ut M ad N, ita a ad b, ut O ad P, ita b ad c, et ut Q ad R, ita c ad d. est igitur, ex eadem Definitione, ratio Y ad d composita ex rationibus Y ad Z, Z ad a, a ad b, b ad c, et c ad d, quae scilicet eadem sunt, singulae singulis, rationibus G ad H, K ad L, M ad N, O ad P, et Q ad R. igitur, ex hypothefi, est S ad X, ut Y ad d. praeterea fit ratio A ad B, sive ratio S ad T, una sc. ex prioribus eadem rationi e ad g quae composita est ex rationibus e ad f, et f ad g, quae eadem sunt, ex hypothefi, rationibus G ad H, et K ad L ex posterioribus; sitque ratio h ad l composita ex rationibus h ad k, et k ad l, quae eadem sunt rationibus reliquis ex prioribus, ipsis sc. C ad D, et E ad F; et sit ratio m ad p composita ex rationibus m ad n, n ad o, o ad p, quae, singulae singulis, eadem sunt reliquis ex posterioribus rationibus, ipsis sc. M ad N, O ad P, Q ad R. erit ratio h ad l eadem rationi m ad p, sive erit h ad l, ut m ad p.

h, k, l.		
A, B;	C, D; E, F.	S, T, V, X.
G, H; K, L;	M, N; O, P; Q, R.	Y, Z, a, b, c, d.
e, f, g.	m, n, o, p.	

Etenim quoniam est e ad f, ut (G ad H, hoc est ut) Y ad Z; est autem f ad g, ut (K ad L, hoc est ut) Z ad a; erit, ex aequali, e ad g, ut Y ad a. et, ex hypothefi, est A ad B sive S ad T, ut e ad g; quare

quare est S ad T , ut Y ad a , et, invertendo, T ad S , ut a ad Y ; est autem S ad X , ut Y ad d ; ergo, ex aequali, erit T ad X , ut a ad d . praeterea quoniam est h ad k , ut (C ad D , hoc est ut) T ad V ; ut vero k ad l , ita (E ad F , hoc est ita) V ad X ; erit ex aequali h ad l , ut T ad X . similiter ostendetur esse m ad p , ut a ad d . ostensum autem fuit esse T ad X , ut a ad d . ergo ^a est h ad l , ut m ad p . a. 11. 5. Q. E. D.

Propositiones G et K apud veteres et recentiores Geometras comprehendendi solent in enuntiatione Propositionum F et H , brevitatis scilicet gratia. quo autem sensu hoc fieri potest, operae pretium fuit ostendere; saepissime enim a Geometris usurpantur.

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M
L I B E R S E X T U S.

DEFINITIONES.

I.

SIMILES figurae rectilineae sunt, quae et singulos angulos aequales habent, et circa aequales angulos latera proportionalia.



II.

“ Reciprocae figurae, triangula sc. et parallelogramma, sunt quando circa duos angulos latera ita sunt proportionalia, ut latus primae fit ad latus secundae, ut reliquum secundae latus ad latus reliquum primae.”

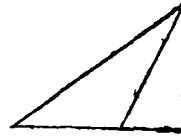
III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando ut tota ad majus segmentum, ita fuerit majus segmentum ad minus.

. Altitudo

IV.

Altitudo cuiusque figurae est recta linea a vertice ad
basim perpendicularis ducta.

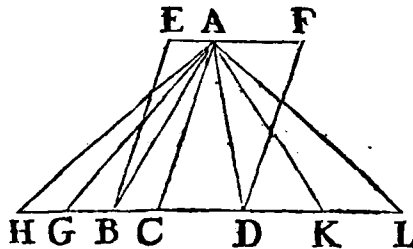


PROP. I. THEOR.

TRIANGULA et parallelogramma quae eandem
habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint triacula quidem ABC, ACD, parallelogramma vero EC, CF, quae eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad BD ductam. Dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, et parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum.

Producatur enim BD ex utraque parte ad puncta H, L, et ipsi quidem basi BC aequales quotcunque ponantur BG, GH; ipsi vero basi CD ponantur quotcunque aequales DK, KL; et AG, AH, AK, AL jungantur. Quoniam igitur CB, BG, GH inter se aequales sunt, erunt et triacula AHG, AGB, ABC inter se aequalia^a. ergo quam multiplex est basis HC ipsius BC basis, tam multiplex est AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quam multiplex est LC basis ipsius basis CD, tam multiplex est et triangulum ALC ipsius ACD trianguli. et si aequalis est HC basis basi CL, et triangulum AHC triangulo ALC erit aequale^a; et si basis HC basim CL superat, et triangulum AHC superabit triangulum ALC; et si minor, minus erit. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus



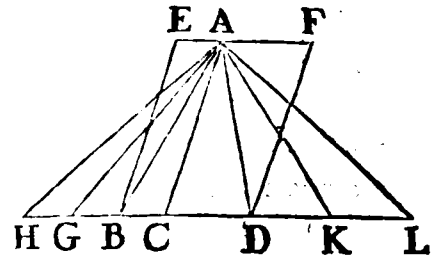
a. 38. 1.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

bus basibus BC, CD, et duobus triangulis ABC, ACD, sumpta sunt aequae multiplicia utcunque basis quidem BC, et ABC trianguli, videlicet basis HC, et AHC triangulum; basis vero CD et trianguli ACD, alia utcunque multiplicia, nempe CL basis, et ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, et triangulum AHC superare triangulum ALC; et si aequalis, aequale; et si minor, minus. est

b. 5. Def. 5. igitur ^b ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum.

Et quoniam trianguli ABC duplicum est ^c parallelogrammum EC, et trianguli ACD parallelogrammum CF duplum^c, partes autem eandem inter



d. 15. 5. se rationem habent quam earum aequae multiplices^d; erit ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; erit ^e ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quare triangula &c. Q. E. D.

COR. Hinc triangula et parallelogramma, quae aequales habent altitudines, sunt inter se ut bases.

Positis enim figuris ita ut bases earum sint in eadem recta linea, et ductis perpendicularibus a verticibus triangulorum ad bases, erit recta f. 33. 1. linea quae vertices jungit parallela rectae in qua sunt bases^f, quia perpendiculares sunt inter se aequales et parallelae. et iisdem constructis quae in Propositione constructa fuerunt, Demonstratio eadem erit cum ea Propositionis.

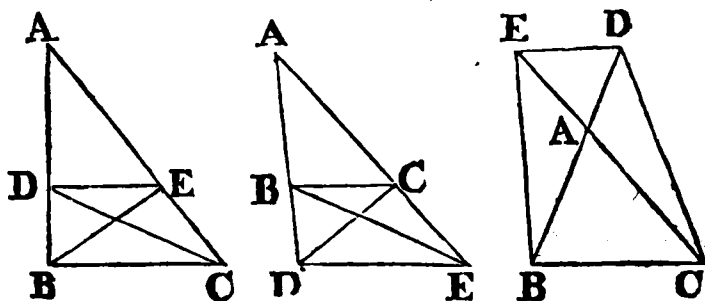
PROP. II.

PROP. II. THEOR.

SI uni laterum trianguli parallela quaedam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit reliqua trianguli latera, vel latera producta. et si latera trianguli, vel latera producta proportionaliter secta fuerint, quae sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. Dico ut BD ad DA, ita esse CE ad EA.

Jungantur enim BE, CD; triangulum igitur BDE triangulo CDE est aequale^a, super eadem enim sunt basi DE, et in eisdem parallelis^a 37. 1. DE, BC. aliud autem triangulum est ADE; aequalia vero ad idem eandem habent rationem^b; ergo ut triangulum BDE ad triangulum^b 7. 5.



ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE; ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est^c BD ad DA; nam cum eandem^c 1. 6. altitudinem habent, videlicet perpendicularem a puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. et ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. ut igitur BD ad DA, ita est CE ad EA^d.

d. 11. 5.

Sed trianguli ABC latera AB, AC, vel latera producta proportiona-

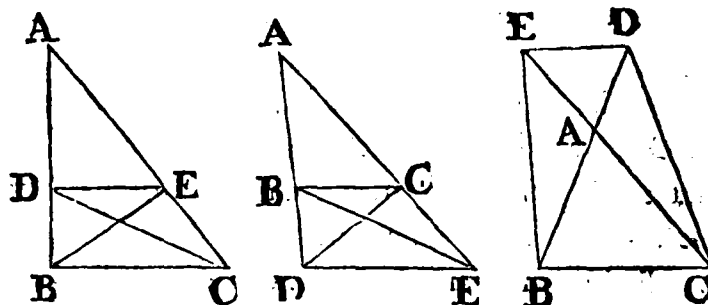
Z

liter

EUCLIDIS ELEMENTORUM

liter secta sint in punctis D, E, hoc est ut BD ad DA, ita sit CE ad EA, et jungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse.

Isdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA;
e. 1. 6. ut autem BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulum ADE^c;
et ut CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE^c; erit ut



triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. utrumque igitur triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habet rationem; quare triangulum BDE triangulo CDE est aequale^c. et sunt super eadem basi DE; aequalia autem tri-
f. 39. 1. angula et super eadem basi constituta etiam in eisdem sunt parallelis^f;
ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni &c. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

SI trianguli angulus bifariam fecetur, secans autem angulum recta linea fecet etiam basim; basis segmenta eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera. et si basis segmenta eandem rationem habeant, quam reliqua trianguli latera; quae a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

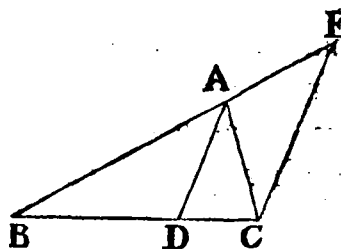
Sit

LIBER SEXTUS.

79

Sit triangulum ABC, et secetur angulus BAC bifariam rectâ lineâ AD. Dico ut BD ad DC, ita esse BA ad AC.

Ducatur enim per C ipsi DA parallela^a CE, et producta BA con-
veniat cum ipsa in puncto E. Quoniam igitur in parallelas AD, EC
incidit recta linea AC, erit ACE angulus angulo alterno CAD æqua-
lis^b. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD; ergo et BAD^b b. 29. 1.
ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus,
quoniam in parallelas AD, EC recta li-
nea BAE incidit, exterior angulus BAD
æqualis est^b interiori et opposito AEC.
ostensus autem est et angulus ACE an-
gulo BAD æqualis; ergo et ACE ipsi
AEC æqualis erit; et propterea latus AE
æquale lateri AC^c. et quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet c. 6. 1.
ipsi EC parallela ducta est AD; erit^d ut BD ad DC, ita BA ad AE. d. 2. 6.
æqualis autem est AE ipsi AC; est igitur^e ut BD ad DC, ita BA^e e. 7. 5.
ad AC.



Sit autem ut BD ad DC, ita BA ad AC, et jungatur AD; dico an-
gulum BAC bifariam sectam esse recta linea AD.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita BA ad AC;
sed et ut BD ad DC, ita BA ad AE^d, etenim uni laterum trianguli
BCE, videlicet ipsi EC, parallela ducta est AD, erit^f et ut BA ad AC, f. 11. 5.
ita BA ad AE. ergo AC est æqualis AE^g, et propterea et angulus AEC g. 9. 5.
angulo ACE æqualis^h. sed angulus quidem AEC est æqualis angulo h. 5. 1.
exteriori BAD^b; angulus vero ACE æqualis alterno CAD. quare et
BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam
sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli &c. Q. E. D.

Z 2 .

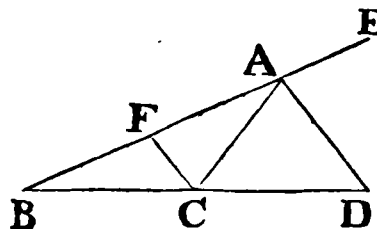
PROP. A.

PROP. A. THEOR.

SI trianguli, uno latere producto, angulus exterior bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim productam; basis productae segmenta inter secantem et basis terminos eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera. et si basis productae segmenta eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, quae a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum exteriorem bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, et recta AD bifariam secet angulum trianguli exteriorem CAE, et basi BC productae occurrat in D. erit ut BD ad DC, ita BA ad AC.

- a. 31. 1. Ducatur ^a enim per C recta CF parallela ipsi AD. Quoniam igitur in parallelas AD, FC incidit recta linea AC, erit ^b ACF angulus angulo alterno CAD aequalis. sed CAD angulus ponitur aequalis angulo DAE; ergo et angulus DAE ipsi ACF angulo aequalis erit. Rursum quoniam in parallelas AD, FC recta linea FAE incidit, exterior angulus DAE aequalis est ^b interiori et opposito CFA. ostensus autem est et angulus ACF angulo DAE aequalis; ergo et ACF ipsi CFA aequalis erit, et propterea latera AF aequale lateri AC^c. et quoniam uni laterum trianguli BCF, videlicet ipsi FC, parallela ducta est AD; erit ^d ut BD ad DC, ita BA ad AF; aequalis autem est AF ipsi AC; est igitur ut BD ad DC, ita BA ad AC.



Sit

Sit autem ut BD ad DC, ita BA ad AC, et AD jungatur. erit
angulus CAE bifariam sectus rectâ lineâ AD.

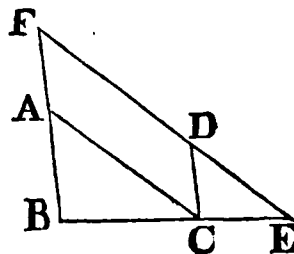
Iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita BA ad
AC; est autem ^d ut BD ad DC, ita BA ad AF, etenim uni laterum ^{d. 2. 6.}
trianguli BCF, videlicet ipsi FC, parallela ducta est AD, erit ut BA ad
AC, ita BA ad AF^e. Ergo AC est aequalis AF^f, et propterea angu- ^{e. 11. 5.}
lus AFC angulo ACF aequalis. sed angulus quidem AFC est aequa- ^{f. 9. 5.}
lis angulo exteriori EAD, angulus vero ACF aequalis alterno CAD;
quare et EAD angulus ipsi CAD aequalis erit. angulus igitur CAE
bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si &c. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

AEQUIANGULORUM triangulorum latera circum aequa-
les angulos proportionalia sunt. et homologa sunt
latera quae aequalibus angulis subtenduntur.

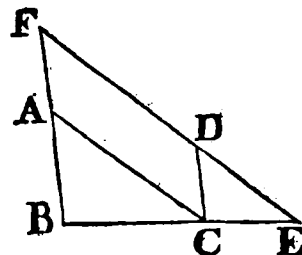
Sint aequiangula triângula ABC, DCE quae angulum quidem ABC
angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC, aequalem habeant, et
propterea ^a angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC, DCE ^{a. 32. 1.}
proportionalia esse latera quae sunt circa
aequales angulos; et homologa latera esse
quae aequalibus angulis subtenduntur.

Ponatur ^b enim triângulum DCE ita
ut latus ejus CE in directum sit ipsi BC.
et quoniam anguli ABC, ACB duobus rec-
tis minores sunt^c, aequalis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ^{c. 17. 1.}
ABC, DEC anguli duobus rectis minores. quare BA, ED productae
inter se convenient^d; producantur et convenient in puncto F. et quo- ^{d. Ax. 12. 1.}
niam angulus DCE est aequalis angulo ABC, erit BF ipsi CD paral-
lela^e.



b. 22. 1.

- e. 28. 1. Iela^e. rursus, quoniam aequalis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit^e AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea AF quidem ipsi CD, AC vero ipsi
- f. 34. 1. FD est aequalis^f. et quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela
- g. 2. 6. ducta est AC; erit^g ut BA ad AF, ita BC ad CE. aequalis autem est AF ipsi
- h. 7. 5. CD; ut igitur^h BA ad CD, ita BC ad CE; et permutando ut AB ad BC, ita DC ad CE. rursus, quoniam CD parallela est BF, erit^g ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est aequalis AC; ergo ut BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA, ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC, ita DC ad CE; ut autem BC ad CA, ita CE ad ED;
- i. 22. 5. eritⁱ ex aequali, ut BA ad AC, ita CD ad DE aequiangulorum igitur &c. Q. E. D.



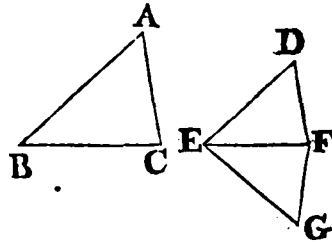
PROP. V. THEOR.

SI duo triangula latera proportionalia habeant, aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF; ut autem BC ad CA, ita EF ad FD; et propterea ex aequali ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse, et aequales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, et praeterea angulum BAC angulo EDF.

- a. 23. 1. Constitutur enim^a ad rectam lineam EF et ad puncta in ipsa E, F, angulo

angulo quidem ABC aequalis angulus FEG, angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF est aequalis^b; ideo b. 32. 1. que aequiangulum est triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia sunt latera quae aequalibus angulis subtenduntur^c. ergo ut AB ad BC, ita GE ad EF; sed ut AB ad BC, ita DE ad EF; ut igitur DE ad EF, ita GE ad EF^d. quare utraque ipsarum DE, GE ad EF eandem habet proportionem, et propterea DE ipsi GE est aequalis^e; eadem ratione et DF aequalis est FG.



c. 4. 6.

d. 11. 5.

e. 9. 5.

itaque quoniam DE est aequalis EG, communis autem EF, duae DE, EF duabus GE, EF sunt aequales; et basis DF basi FG est aequalis; angulus igitur DEF est aequalis angulo GEF^f, et DEF triangulum f. 8. 1. aequale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales^g, quibus aequalia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFE est aequalis angulo GFE, angulus vero EDF angulo EGF. et quoniam angulus DEF est aequalis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC, erit et angulus ABC angulo DEF aequalis. eadem ratione et angulus ACB aequalis est angulo DFE, et adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF aequiangulum erit. Si igitur duo &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

SI duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa aequales autem angulos latera proportionalia; aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint

Sint duo triacula ABC, DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, videlicet ut BA ad AC, ita sit ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse, et angulum quidem ABC habere aequalem angulo DEF, angulum vero ACB angulo DFE.

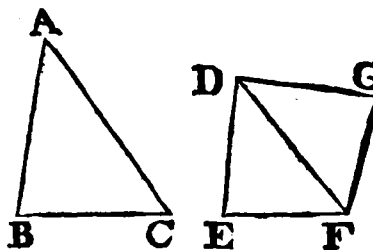
- a. 23. 1. Constitutur ^a enim ad rectam lineam DF, et ad puncta in ipsa D, F, alterutri angulorum BAC, EDF, aequalis angulus FDG, angulo autem ACB aequalis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G est aequalis^b.

- b. 32. 1. ergo triangulum ABC triangulo DGF aequiangulum est; ac propterea ut BA ad AC, ita est ^c GD ad DF.

- c. 4. 6. ponitur autem et ut BA ad AC, ita ED ad DF; ut igitur ED ad DF,

- d. 11. 5. ita GD ad DF^d; quare ED aequalis est ipsi DG^e; et communis DF; ergo duae ED, DF duabus GD, DF aequales sunt, et angulus EDF

- e. 9. 5. angulo GDF est aequalis; basis igitur EF est ^f aequalis basi FG, triangulumque EDF triangulo GDF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur DFG est aequalis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG aequalis est angulo ACB; angulus igitur ACB angulo DFE est aequalis. ponitur autem et BAC angulus aequalis angulo EDF; ergo et reliquus qui ad B aequalis est reliquo ad E. aequiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triacula &c. Q. E. D.



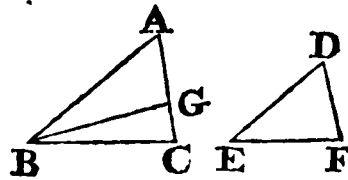
PROP. VII.

PROP. VII. THEOR.

SI duo triângula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque simul minorem, vel non minorem recto; vel si eorum alter rectus fuerit: aequiangula erunt triângula, et aequales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triângula ABC, DEF, unum angulum uni angulo aequalem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF aequalem, circa alios autem angulos ABC, DEF latera proportionalia, ut sit AB ad BC, sicut DE ad EF; et reliquorum qui ad C, F primò utrumque simul minorem recto. Dico triângulum ABC triângulo DEF aequiangulum esse, angulumque ABC aequalem angulo DEF, et reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F aequalem.

Si enim inaequalis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit; sit major ABC, et constituatur ^a ad rectam lineam AB, et a. 23. 1. ad punctum in ipsa B, angulo DEF aequalis angulus ABG. et quoniam angulus quidem A est aequalis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF; erit ^b reliquus AGB reliquo DFE aequalis.



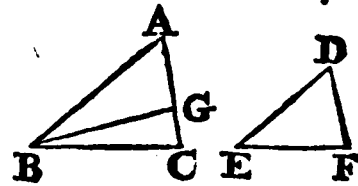
b. 32. 1.

aequiángulum igitur est ABG triángulum triângulo DEF; quare ut AB ad BG, sic DE ad EF^c; ut vero DE ad EF, sic ponitur AB ad c. 4. 6. BC; ut igitur ^d AB ad BC, sic AB ad BG; ideoque AB ad utramque d. 11. 5. BC, BG eandem habet rationem. erit igitur BC ipsi BG aequalis^e, ac e. 9. 5. propterea angulus BGC est aequalis angulo BCG^f. minor autem recto f. 5. 1. ponitur angulus BCG; ergo et BGC minor est recto, et ob id qui ei

A a

deinceps

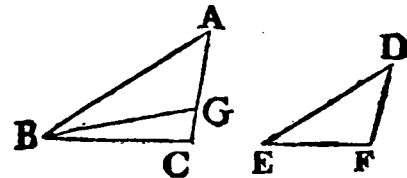
g. 13. 1. deinceps est AGB major est recto^g. atque ostensus est angulus AGB aequalis angulo qui ad F; angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur minor recto; quod est absurdum. non est igitur angulus ABC inaequalis angulo DEF; ergo ipsi est aequalis.



est autem angulus qui ad A aequalis ei qui ad D; quare et reliquis qui ad C aequalis est reliquo qui ad F. aequiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF.

Sed rursus ponatur uterque angulorum qui ad C, F, non minor recto. Dico rursus et sic triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus BC aequalem ipsi BG, angulumque ad C angulo BGC aequalem.

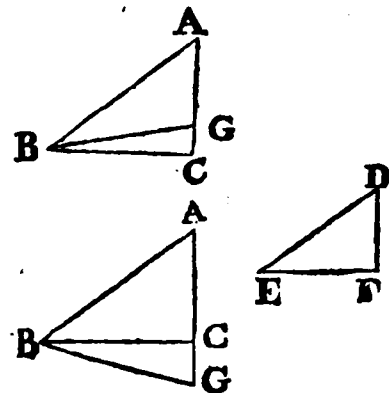


sed angulus qui ad C non minor est recto; non est igitur minor recto BGC. quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis mino-

h. 17. 1. res; quod fieri non potest^h; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum est, ut in praecedente casu ostensum fuit.

Sit denique alter angulorum ad C, F, puta qui ad C, rectus; erit et in hoc casu triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum.

Si enim non sit, ad rectam AB, et ad punctum in ea B constituatur angulo DEF aequalis angulus ABG; et, ut in primo casu, ostendetur recta BG aequalis ipsi BC, et angulus BCG angulo BGC; est autem angulus BCG rectus, quare et an-



gulus

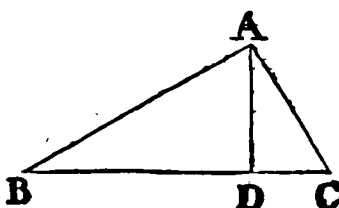
gulus BGC rectus erit^f. trianguli igitur BGC duo anguli non sunt^{f. 5. 1.} minores duobus rectis, quod fieri non potest^h; et propterea triangulum^{h. 17. 1.} ABC triangulo DEF aequiangulum est. si igitur duo triangula &c. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quae ad perpendicularem sunt triangu-
la, et toti, et inter se sunt similia.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC; et a puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangu-
la ABD, ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse.

Quoniam enim angulus BAC est aequalis angulo ADB, rectus enim uterque est, et angulus ad B communis duobus triangulis ABC, ABD; erit^a reliquus ACB reliquo BAD aequalis. aequiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD; quare latera circa aequales angulos B proportionalia habent^b, et propterea inter se similia sunt^c. eadem ratione demonstrabitur etiam ADC trian-
gulum triangulo ABC simile esse.



a. 32. 1.

b. 4. 6.

c. 1. Def. 6.

Dico insuper triangu-
la ABD, ADC etiam inter se similia esse.

Quoniam enim rectus angulus BDA est aequalis recto ADC, sed et BAD ostensus aequalis angulo ad C; erit^a reliquus ad B reliquo DAC aequalis. aequiangulum igitur et simile^c est triangulum ABD trian-
gulo ADC. Quare si in triangulo &c. Q. E. D.

COR. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo perpendicu-
larem ab angulo recto ad basim ductam, median proportionalem esse

A a 2

inter

inter segmenta basis: et praeterea inter basim et basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale.

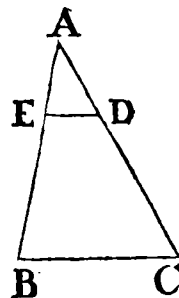
b. 4. 6. est enim BD ad DA, ut DA ad DC^b, in triangulis aequiangulis BDA, ADC; et BC ad BA, ut BA ad BD^b, in triangulis aequiangulis ABC, DBA; et BC ad CA, ut CA ad CD, in triangulis aequiangulis ABC, DAC.

PROP. IX. PROB.

A Data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB; oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere.

Ducatur a puncto A quaedam recta linea AC, quae cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D, et quam multiplex est AB partis abscindendae, tam multiplex fiat AC ipsius AD; deinde jungatur BC, et per D ipsi BC parallela ducatur DE.



Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, vi-
a. 2. 6. delictet ipsi BC, parallela ducta est ED; erit^a ut CD
b. 18. 5. ad DA, ita BE ad EA; et componendo^b, ut CA
ad AD, ita BA ad AE. est autem CA multiplex ip-
c. D. 5. sius AD; ergo BA eadem est multiplex ipsius AE.^c

quare quaecunque pars AD est ipsius AC, eadem pars erit AE ipsius AB; est igitur AE pars a recta AB abscindenda. a data igitur recta linea AB imperata pars abscissa est. Quod facere oportebat.

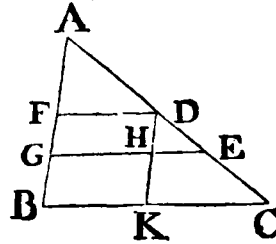
PROP. X. PROB.

DATAM rectam lineam infectam, datae rectae lineae sectae similiter secare.

Sit

Sit data quidem recta linea infecta AB, secta vero AC; oportet rectam lineam AB infectam ipsi AC sectae similiter secare.

Sit AC secta in punctis D, E, et ponantur ita rectae AB, AC, ut angulum quemvis contineant, jungaturque BC, et per puncta D, E ipsi BC parallelae ducantur DF, EG; per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH, HB; ac propterea DH quidem est aequalis^b FG, HK vero ipsi GB. et quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela ducta est HE, erit^c ut CE ad ED, ita KH ad



a. 31. 1.

b. 34. 1.

c. 2. 6.

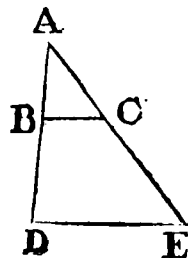
HD. aequalis autem est KH ipsi BG, HD vero ipsi GF; est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus, quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF; ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, et ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea infecta AB, datae rectae lineae sectae AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

PROP. XI. PROB.

DUABUS datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae lineae AB, AC, et ponantur ita ut angulum quemvis contineant; oportet ipsis AB, AC tertiam proportionalem invenire.

Producantur enim AB, AC ad puncta D, E; ponaturque ipsi AC aequalis BD; et iuncta BC, ducatur^a per D ipsi BC parallela DE. quoniam igitur



a. 31. 1.

tur

EUCLIDIS ELEMENTORUM

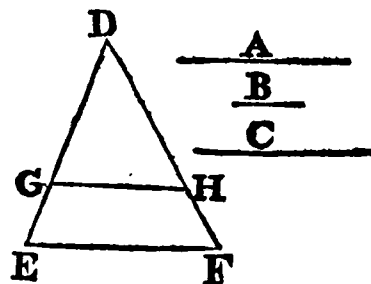
tur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE, parallela ducta est
 b. 2. 6. BC, erit ^b ut AB ad BD, ita AC ad CE. aequalis autem est BD ipsi
 AC, ut igitur AB ad AC, ita est AC ad CE. quare datis duabus rectis
 lineis AB, AC tertia proportionalis inventa est CE. Q. E. F.

PROP. XII. PROB.

TRIBUS datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datae tres rectae lineae A, B, C; oportet ipsis A, B, C quartam proportionalem invenire.

Exponantur duae rectae lineae DE, DF angulum quemvis EDF continentes; et ponatur ipsi quidem A aequalis DG, ipsi vero B aequalis GE, et ipsi C aequalis DH; junctâque GH,
 a. 31. 1. per E ipsi parallela ducatur EF^a. itaque quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipsi EF, parallela ducta est GH,
 b. 2. 6. erit ut DG ad GE, ita DH ad HF^b.
 est autem DG ipsi A aequalis, GE vero aequalis B, et DH aequalis C; ut igitur A ad B, ita C ad HF. Quare tribus datis rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa est HF. Q. E. F.



PROP. XIII. PROB.

DUABUS datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae lineae AB, BC; oportet inter ipsas AB, BC mediam proportionalem invenire.

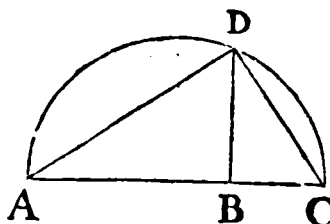
Ponantur

LIBER SEXTUS.

191

Ponantur in directum, et super ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque ^a a puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, et AD, DC jungantur.

Quoniam igitur angulus ADC in semicirculo rectus est ^b, et quoniam in triangulo rectangulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media



a. 11. 1.

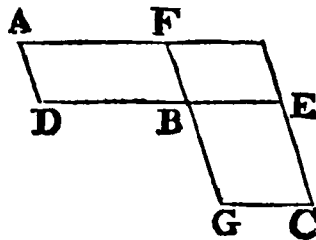
b. 31. 3.

proportionalis inter segmenta basis AB, BC^c. duabus igitur datis rectis c. Cor. 8. 6. lineis AB, BC media inter ipsas proportionalis inventa est DB. Q. E. F.

PROP. XIV. THEOR.

PARALLELOGRAMMORUM aequalium, et unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, reciproce sunt proportionalia: et quorum parallelogrammorum unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia; ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia parallelogramma AB, BC, aequales habentia angulos ad B, et ponantur in directum DB, BE; ergo et in directum erunt FB, BG^a. Dico parallelogrammorum AB, BC latera quae sunt circa aequales angulos esse reciproce proportionalia; hoc est ut DB ad BE, ita esse GB ad BF.



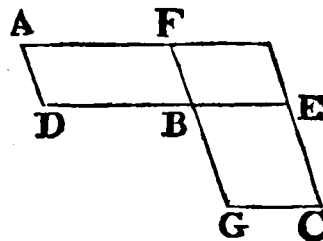
a. 14. 1.

Compleatur enim parallelogrammum FE; et quoniam parallelogrammum AB aequale est parallelogrammo BC, aliud autem est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE, ita BC ad FE^b. sed ut AB quidem ad FE, ita est DB ad BE^c; ut autem BC ad FE, ita GB ad BF^c; c. 1. 6.

ut

d. 11. 5. ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF^d. ergo parallelogrammorum AB, BC latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia.

Sint autem latera, quae circum aequales angulos, reciproce proportionalia, sit nempe ut DB ad BE, ita GB ad BF; dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC aequale esse.



Quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF; ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum

c. 1. 6. FE^c; et ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE^c; erit^d et ut AB ad FE, ita BC ad FE. aequale igitur^c est AB parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo parallelogrammorum &c. Q. E. D.

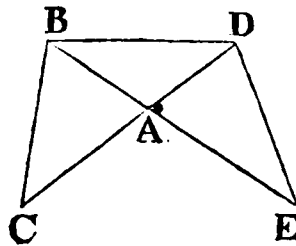
PROP. XV. THEOR.

TRIANGULORUM aequalium, et unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia: et quorum triangulorum unum uni aequalem habentium angulum latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia, ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia triangula ABC, ADE unum angulum uni angulo aequalem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE; dico triangulorum BAC, DAE latera quae circum aequales angulos esse reciproce proportionalia, hoc est ut CA ad AD, ita esse EA ad AB.

Ponantur enim ita ut in directum sit CA ipsi AD; ergo et EA ipsi AB in directum erit^a; et jungatur BD. Quoniam igitur triangulum ABC

ABC aequale est triangulo ADE, aliud autem est ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita ^b triangulum EAD ad triangulum b. 7. 5. DAB. sed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita CA ad AD^c; ut autem triangulum EAD ad ipsum DAB, ita EA ad AB^c; ut igitur ^d CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC, ADE latera, quae circum aequales angulos reciproce sunt proportionalia.



c. 1. 6.

d. 11. 5.

Sint autem latera triangulorum ABC, ADE circum aequales angulos reciproce proportionalia, scilicet sit ut CA ad AD, ita EA ad AB; dico triangulum ABC triangulo ADE aequale esse. junctâ enim rursus BD, quoniam ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita est BAC triangulum ad triangulum BAD^c; et ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad triangulum BAD^c; erit ^d ut triangulum BAC ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. aequale igitur ^e est triangulum ABC triangulo ADE. Aequalium igitur e. 9. 5. tur &c. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

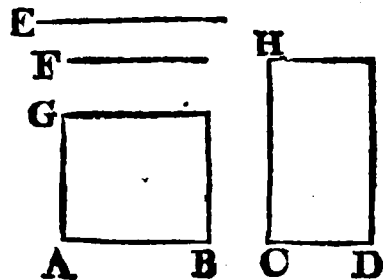
SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum aequale est ei rectangulo quod a mediis continetur: et si rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod a mediis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, E, F, sit scilicet ut AB ad CD, ita E ad F; dico rectangulum contentum a rectis lineis AB, F aequale esse ei quod ipsis CD, E continetur.

B b

Ducantur

- a. 11. 1. Ducantur ^a enim a punctis A, C ipsis AB, CD ad rectos angulos AG, CH; ponaturque ipsis quidem F aequalis AG, ipsis vero E aequalis CH, et compleantur BG, DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E aequalis CH, et F ipsis
- b. 7. 5. AG; erit ^b ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG, DH latera, quae sunt circum aequales angulos, reciproce proportionalia sunt; quorum autem aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae sunt circum aequales angulos, reciproce sunt
- c. 14. 6. proportionalia, ea inter se sunt aequalia ^c; ergo parallelogrammum BG aequale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB, F continetur, etenim AG est aequalis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur ipsis CD, E, est enim CH ipsis E aequalis. rectangulum igitur contentum rectis AB, F est aequale ei quod ipsis CD, E continetur.



Sed fit rectangulum contentum rectis AB, F aequale ei quod ipsis CD, E continetur; dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum rectis AB, F est aequale ei quod CD, E continetur, atque est rectangulum BG contentum quidem rectis AB, F, etenim AG est aequalis F; contentum vero ipsis CD, E est rectangulum DH, est enim CH ipsis E aequalis; erit parallelogrammum BG aequale parallelogrammo DH; et sunt aequiangula. aequalium autem et aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia ^c. quare ut AB ad CD, ita CH ad AG; aequalis autem est CH ipsis

LIBER SEXTUS.

195

ipſi E, et AG ipſi F. ut igitur AB ad CD, ita E ad F. ergo ſi quatuor rectae &c. Q. E. D.

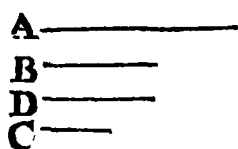
PROP. XVII. THEOR.

SI tres rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum aequale eſt ei quod a media fit quadrato: et ſi rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod a media fit quadrato, tres rectae lineae proportionales erunt.

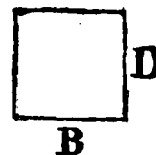
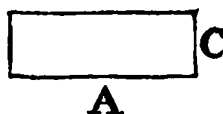
Sint tres rectae lineae proportionales A, B, C; ſit ſcilicet ut A ad B, ita B ad C; dico rectangulum contentum rectis A, C aequale eſſe ei quod à media B fit quadrato.

Ponatur ipſi B aequalis D; et quoniam ut A ad B, ita B ad C, aequalis autem eſt B ipſi D; erit ^a ut

A ad B, ita D ad C. ſi autem quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum eſt aequale ei quod à mediis continetur^b. Ergo rectangulum rectis A, C contentum eſt



a. 7. 5.



b. 16. 6.

aequale ei quod continetur ipſis B, D. ſed rectangulum contentum rectis B, D eſt aequale quadrato quod fit ex ipſa B; etenim B eſt aequalis D. rectangulum igitur contentum rectis A, C eſt aequale ei quod ex B fit quadrato.

Sed ſit rectangulum contentum rectis A, C aequale ei quod ex B fit quadrato; dico ut A ad B, ita eſſe B ad C.

Iſdem enim conſtructis, quoniam rectangulum contentum A, C aequale eſt quadrato quod fit ex B, at quadratum quod fit ex B eſt rec-

B b 2

tangulum

tangulum quod ipsis B, D continetur, est enim B aequalis ipsi D; erit rectangulum contentum A, C aequale ei quod ipsis B, D continetur. si autem rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod à mediis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt^b. est igitur ut A ad B, ita D ad C; aequalis autem est B ipsi D; ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROB.

A Data recta linea dato rectilineo simile, et similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CDEF quadrilaterum; oportet à recta linea AB rectilineo CDEF simile, et similiter positum rectilineum describere.

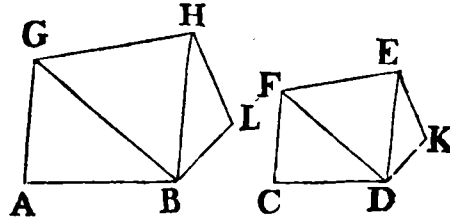
Jungatur DF, et ad rectam lineam AB, et ad puncta in ipsa A, B angulo quidem ad C aequalis angulus constituatur^a BAG, angulo autem CDF angulus ABG; reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB est aequalis^b. ergo aequiangulum est FCD triangulum triangulo GAB. rursus, constituatur^a ad rectam lineam BG, et ad puncta in ipsa G, B, angulo quidem DFE aequalis angulus BGH, angulo autem FDE aequalis GBH; ergo reliquus FED reliquo GHB est aequalis. aequiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH. Quoniam igitur angulus AGB aequalis est angulo CFD, et angulus BGH ipsi DFE, erit totus AGH angulus toti CFE aequalis. eadem ratione et ABH est aequalis ipsi CDE; et praeterea angulus quidem ad A angulo ad C aequalis, angulus vero GHB angulo FED. aequiangulum igitur est rectilineum ABHG rectilineo CDEF. sed et latera circa aequales angulos proportionalia habent. Quoniam enim triangula GAB, FCD sunt aequiangula, erit BA ad AG, ut DC ad CF^c; et quoniam est AG ad GB,

GB, ut CF ad FD; ut vero GB ad GH, ita, propter aequiangula triangula BGH, DFE, est FD ad FE; erit ex aequali ^d AG ad GH, d. 22. 5. ut CF ad FE. similiter ostendetur AB ad BH, ut CD ad DE. et est GH ad HB, ut FE ad ED^c. quoniam igitur aequiangula sunt rectilinea, ABHG, CDEF, et latera circum aequales angulos proportionalia habent, erunt inter se similia^e.

e. 1. Def. 6.

Describendum jam sit à data recta linea AB quinquelaterum simile, et similiter positum quinquelatero dato CDKEF.

Jungatur DE, et à data recta linea AB describatur quadrilaterum ABHG simile, et similiter positum ipsi CDEF, et ad rectam lineam



BH, et ad puncta in ipsa data B, H, angulo quidem EDK aequalis angulus constituatur HBL, angulo autem DEK aequalis angulus BHL. reliquus igitur ad K reliquo ad L est aequalis. Quoniam vero similia sunt quadrilatera ABHG, CDEF, erit angulus GHB aequalis angulo FED, et est BHL angulus aequalis angulo DEK; totus igitur GHL angulus toti FEK est aequalis. eadem ratione et ABL angulus aequalis est ipsi CDK. aequiangula propterea sunt quinquelatera AGHLB, CFEKD. et quoniam similia sunt quadrilatera AGHB, CFED, erit GH ad HB, ut FE ad ED; ut vero HB ad HL, ita ED ad EK^c; ergo ex aequali ^d est GH ad HL, ut FE ad EK. eadem ratione est AB ad BL, ut CD ad DK. et est BL ad LH, ut DK ad KE, quia aequiangula sunt triangula BLH, DKE. Quoniam igitur quinquelatera AGHLB, CFEKD sunt aequiangula, et latera circum aequales angulos proportionalia habent, erunt inter se similia^e. eademque ratione rectilinum a data recta linea describi potest simile, et similiter positum dato Hexagono et ita deinceps. Q. E. F.

PROP. XIX.

PROP. XIX. THEOR.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC, DEF habentia angulum ad B aequalem angulo ad E, et sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam rationem habere ejus quam habet BC ad EF.

a. 11. 6. Sumatur enim ipsis BC, EF tertia proportionalis ^a BG, ut sit sicut BC ad EF, ita EF ad BG, et jungatur GA. Quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF, erit per-

b. 16. 5. mutando ^b ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG; ut igitur AB ad DE, ita

c. 11. 5. EF ad BG ^c. quare triangulorum ABG, DEF latera, quae circum aequales

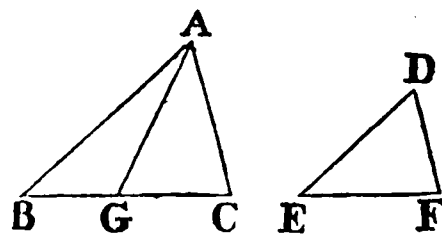
angulos, reciproce sunt proportionalia. quorum autem triangulorum unum angulum uni aequalem habentium latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia, ea inter se sunt aequalia.

d. 15. 6. aequale igitur ^d est ABG triangulum triangulo DEF. et quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectae lineae proportio-

e. 10. Def. 5. nales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur ^e ejus quam habet ad secundam; habebit igitur BC ad BG duplicatam rationem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC tri-

f. 1. 6. angulum ad triangulum ABG ^f. ergo et ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem

g. 7. 5. ABG triangulum triangulo DEF aequale; et triangulum igitur ^g ABC ad



ad triangulum DEF, duplicatam habebit rationem ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triacula &c. Q. E. D.

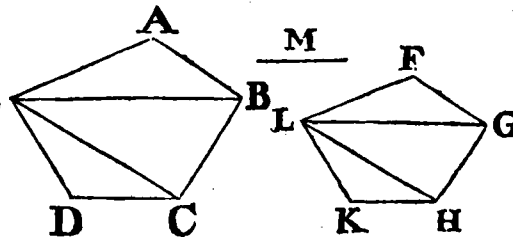
COR. Ex hoc manifestum est, si tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum quod fit à prima ad triangulum quod à secunda simile, et similiter descriptum. Quoniam ostensum est ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum DEF.

PROP. XX. THEOR.

SIMILIA polygona in similia triacula dividuntur, et numero aequalia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE, FGHL, et sit AB latus homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE, FGHL in similia triacula dividi, et numero aequalia et homologa totis; et polygonum ABCDE ad polygonum FGHL duplicatam rationem habere ejus quam habet AB ad FG.

Jungantur BE, EC, GL, LH. et quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHL, angulus BAE angulo GFL est aequalis^a, atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL^a. quoniam igitur duo triacula sunt ABE, E



a. 1. Def. 6.

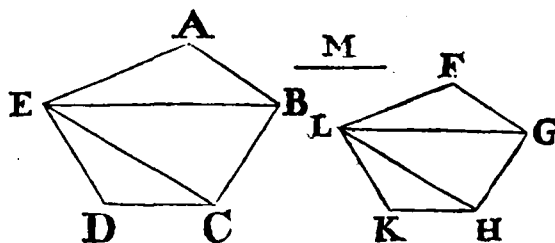
FGL unum angulum uni angulo aequalem habentia, circum aequales autem angulos latera proportionalia; erit triangulum ABE triangulo FGL aequiangulum^b; ergo et simile^c. angulus igitur ABE aequalis est angulo^{b. 6. 6.} FGL. est autem et totus ABC angulus aequalis toti FGH^{c. 4. 6.}, propter

. similitudinem

- similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est aequalis. a. 1. Def. 6. lis. et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE, FGL, est ^a ut EB ad BA, ita LG ad GF; sed et propter similitudinem polygonorum est ^a ut AB ad BC, ita FG ad GH; erit ex aequali ut EB ad BC, d. 22. 5. ita LG ad GH^d; hoc est circum aequales angulos EBC, LGH latera b. 6. 6. sunt proportionalia; aequiangulum igitur ^b est EBC triangulum triangulo LGH; quare et simile^c. eadem ratione et ECD triangulum simile est triangulo LHK. similia igitur polygona ABCDE, FGHLK in similia triangula dividuntur, et numero aequalia.

Dico et homologa totis, hoc est ut proportionalia sint triangula sibi invicem et totis polygonis; et antecedentia quidem esse ABE, EBC, ECD, consequentia autem ipsorum FGL, LGH, LHK; et ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG.

Quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam rationem ejus quam habet BE



- e. 19. 6. ad GL^e. eadem ratione, et triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam rationem habet ejus quam BE ad GL^e. est igitur ut ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum^f. rursus, quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam rationem ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL^e. eadem ratione et ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam rationem habet ejus quam CE ad HL. est igitur ut triangulum EBC ad triangulum LGH, ita ECD triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est et ut EBC triangulum

triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum EBC ad LGH triangulum, et triangulum ECD ad ipsum LHK. et igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia^g. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK; sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG^e. Ergo e. 19. 6. et ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK duplicatam rationem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona &c. Q. E. D.

COR. 1. Eodem modo et in similibus quadrilateris et multilateris quibuscunque ostendetur ea esse in duplicata ratione laterum homologorum. ostensum autem est in triangulis^e. Quare universè similes figurae rectilineae sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

COR. 2. Et si ipsis AB, FG tertiam proportionalem sumamus quae sit M, habebit AB ad M duplicatam rationem ejus quam habet AB ad FG^h. habet autem et polygonum super AB ad polygonum super FG, et quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc est quam AB ad FG. Ergo ut AB ad M, ita est figura super AB ad eam super FG. atque ostensum est hoc in triangulisⁱ. Universè igitur manifestum est, i. Cor. 19. 6. si tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram rectilineam quae sit a prima ad eam quae a secunda, similem et similiter descriptam.

PROP. XXI. THEOR.

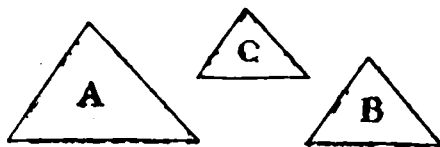
QUAE eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt.

C c

Sit

Sit enim utrumque rectilinearum A, B simile rectilineo C; dico et rectilineum A rectilineo B simile esse.

Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, et ipsi aequiangulum erit, et circum aequales angulos latera habebit proportionalia^a. rursus, quoniam simile est rectilinearum B rectilineo C, aequiangulum ipsi erit, et circa aequales angulos latera proportionalia habebit^a. utrumque igitur rectilinearum A, B ipsi C aequiangulum est, et circum aequales angulos latera habet proportionalia. quare et rectilinearum A ipsi B est aequiangulum^b, lateraque circum aequales angulos proportionalia habet^c; ac propterea A ipsi B est simile^a. Q. E. D.



PROP. XXII. THEOR.

SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint, et rectilinea quae ab ipsis fiunt similia, et similiter descripta, proportionalia erunt. et si rectilinea quae ab ipsis fiunt similia, et similiter descripta, proportionalia fuerint, et ipsae rectae lineae proportionales erunt.

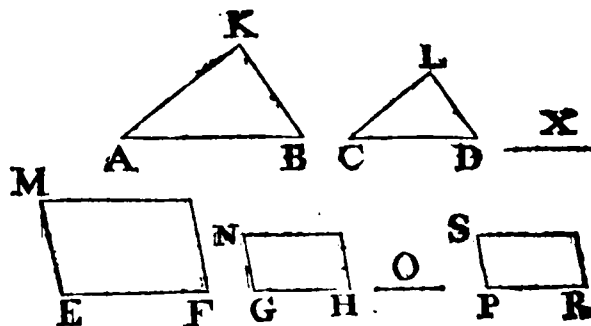
Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, EF, GH, sit scilicet ut AB ad CD, ita EF ad GH, et descripta sint ab ipsis quidem AB, CD similia, et similiter posita rectilinea KAB, LCD; ab ipsis vero EF, GH describantur rectilinea similia, et similiter posita MF, NH. Dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum.

a. 11. 6. Sumatur enim ipsis quidem AB, CD tertia proportionalis X^a; ipsis vero EF, GH, tertia proportionalis O. et quoniam est ut AB ad CD, ita EF ad GH, erit ut CD ad X, ita GH ad O^b; quare ex aequali^c

ut

ut AB ad X, ita EF ad O. sed ut AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum^d, ut autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH^d. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est rectilineum MF ad NH rectilineum^b. b. 11. 5.

Sed sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH; dico ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad PR^e, et describatur^f ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF, NH simile, et similiter positum rectilineum SR. quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad PR, et descripta sunt ab ipsis quidem AB, CD similia, et similiter posita rectilinea KAB, LCD, e. 12. 6.
f. 18. 6.



ab ipsis vero EF, PR similia, et similiter posita rectilinea MF, SR, erit, ex prius demonstratis, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum SR; ponitur autem et ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. rectilineum igitur MF ad utramque ipsorum NH, SR eandem habet rationem; ergo rectilineum NH est ipsi SR aequale^g. est autem ipsi simile g. 9. 5. et similiter positum; ergo GH est aequalis PR. et quoniam ut AB ad CD, ita EF ad PR; aequalis autem PR ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

AEQUIANGULA parallelogramma inter se rationem habent ex laterum rationibus compositam.

Sint aequiangulara parallelogramma AC, CF aequalem habentia angulum BCD angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF rationem habere compositam ex laterum rationibus.

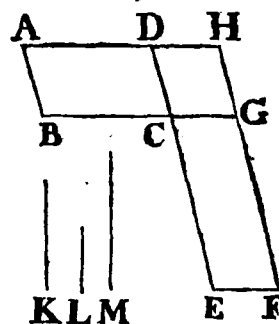
Ponantur enim ut BC sit in directum ipsi CG; ergo et DC ipsi

a. 14. 1. CE in directum erit^a; et compleatur DG parallelogrammum; expo-

b. 12. 6. naturque recta linea quaedam K, et fiat^b ut BC ad CG, ita K ad L;

ut autem DC ad CE, ita L ad M. rationes igitur ipsius K ad L, et L ad M eadem sunt rationibus laterum videlicet BC ad CG, et DC ad CE. sed ratio K ad M com-

c. A. Def. 5. posita dicitur^c ex ratione K ad L, et ratione L ad M. quare et K ad M rationem habet ex laterum rationibus compositam. et quoniam est ut BC ad CG, ita AC parallelogram-



d. 1. 6. mum ad parallelogrammum CH^d; sed et ut BC ad CG, ita K ad L;

e. 11. 5. erit^e ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rursus, quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF; ut autem DC ad CE, ita L ad M; erit ut L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH

f. 22. 5. ad CF parallelogrammum; erit ex aequali^f ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M rationem ex laterum rationibus compositam. Ergo et AC parallelogrammum ad parallelogrammum

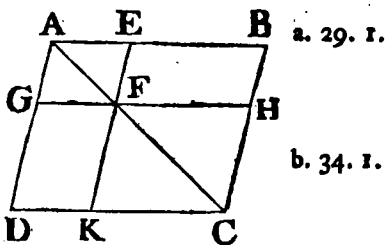
rallelogrammum CF rationem habet ex laterum rationibus compositam.
Aequiangulara igitur parallelogramma &c. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

OMNIS parallelogrammi, quae circa diametrum sunt parallelogramma, et toti, et inter se sunt similia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC; circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG, HK. Dico parallelogramma EG, HK et toti ABCD, et inter se similia esse.

Quoniam enim parallelæ sunt DC, GF, erit angulus ADC angulo AGF aequalis^a. eadem ratione quoniam parallelæ sunt BC, EF, aequalis erit angulus ABC ipsi AEF. uterque vero angulus BCD, EFG opposito DAB est æqualis^b, quare et inter se æquales erunt. parallelogramma igitur ABCD, AEFG inter se sunt aequiangulara. et quoniam angulus ABC aequalis est angulo AEF, communis vero BAC, erunt triângula BAC, EAF inter se aequiangulara; ut igitur AB ad BC, ita^c est AE ad EF. et quoniam latera parallelogrammorum opposita sunt inter se æqualia^b, erit^d et AB ad AD, ut AE ad AG; et DC ad CB, ut GF ad FE; et præterea CD ad DA, ut FG ad GA. Ergo parallelogrammorum ABCD, AEFG latera, quae circum æquales angulos, sunt proportionalia; ac propterea ABCD parallelogrammum ipsi AEFG est simile^e. eadem ratione parallelogrammum ABCD simile est ipsi FHCK. utrumque igitur ipsorum GE, KH parallelogrammorum ipsi DB est simile. quae autem eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt^f; parallelogrammum igitur GE simile est ipsi KH. Quare omnis &c. Q. E. D.



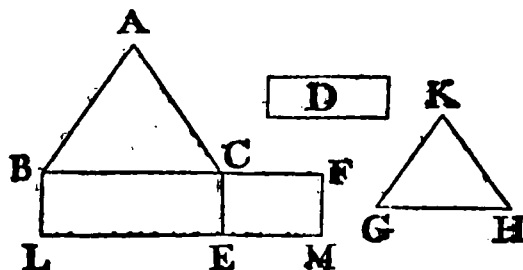
PROP. XXV.

PROP. XXV. PROB.

DATO rectilineo, simile, et alteri dato aequale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere ABC, cui autem aequale sit D. oportet ipsi ABC simile, et ipsi D aequale idem constituere.

- a. Cor. 45. 1. Applicetur ^a enim ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC aequale parallelogrammum BE; ad rectam vero CE applicetur ^a parallelogrammum CM aequale ipsi D, in angulo FCE qui CBL angulo est aequalis. in directum igitur est BC ipsi CF^b, et LE ipsi EM. sumatur-
 b. { 29. 1. qualis. que inter BC, CF media proportionalis GH^c, et ab ipsa GH describa-
 c. 14. 1. tur ^d rectilineum KGH simile et similiter positum rectilineo ABC. et
 c. 13. 6. quoniam est ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectae pro-
 d. 18. 6.



- portionales sint, ut prima ad tertiam, ita est figura quae fit a prima, ad
 e. 2. Cor. 20. 6. eam quae a secunda similem, et similiter descriptam^e; erit ut BC ad
 CF, ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. sed et ut BC ad CF,
 f. 1. 6. ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum^f; ut igitur rectili-
 g. 11. 5. neum ABC ad rectilineum KGH, ita ^g BE parallelogrammum ad paral-
 lelogrammum EF. est autem rectilineum ABC aequale parallelogrammo
 h. 14. 5. BE; aequale igitur est ^h et KGH rectilineum parallelogrammo EF.
 sed

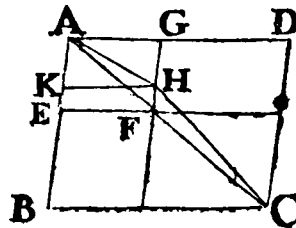
sed EF parallelogrammum aequale est rectilineo D. ergo et rectilineum KGH ipsi D est aequale; est autem KGH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, et alteri dato D aequale idem constitutum est KGH. Q. E. F.

PROP. XXVI. THEOR.

SI a parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, et similiter positum, communem ipsi angulum habens; circa eandem diametrum est cum toto.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AEFG auferatur, simile ipsi ABCD, similiterque positum, communemque ipsi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum cum parallelogrammo AEFG.

Non enim, sed si fieri potest, sit parallelogrammi BD diameter AHC, et occurrat GF ipsi AHC in H; ducaturque per H alterutri ipsarum AD, BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo AKHG, erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo AKHG simile^a. ergo ut DA ad AB, ita GA ad AK^b. est autem et propter similitu-



a. 24. 6.

b. 1. Def. 6.

dinem parallelogrammorum ABCD, AEFG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. et igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK^c. quare GA ad e. 11. 5. utramque ipsarum AE, AK eandem rationem habet; erit igitur AE ipsi AK aequalis^d, major minori, quod fieri non potest. non igitur d. 9. 5. circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo AKHG. quare circa eandem diametrum est cum ipso AEFG. Si igitur a parallelogrammo &c. Q. E. D.

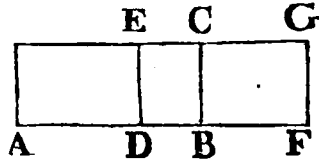
Ut

EUCLIDIS ELEMENTORUM

‘ Ut sequentes tres Propositiones facilius intelligantur praemittenda sunt sequentia.

‘ 1. Parallelogrammum ad rectam lineam applicari dicitur, quando super recta illa describitur. Ex. gr. parallelogrammum AC applicari dicitur ad rectam AB, quando super AB describitur.

‘ 2. Sed parallelogrammum AE applicari dicitur ad rectam AB deficienti figurâ parallelogrammâ, quando AD
 ‘ basis ipsius AE minor est rectâ AB, et
 ‘ propterea parallelogrammum AE deficit
 ‘ ab ipso AC quod super rectâ AB describitur in eodem angulo, et inter easdem parallelas, figurâ parallelogrammâ DC, quae quidem dicitur defectus ipsius AE.



‘ 3. Et parallelogrammum AG applicari dicitur ad rectam AB, excedens figurâ parallelogrammâ, quando AF basis ipsius AG maior est rectâ AB, et propterea AG excedit ipsam AC figurâ parallelogrammâ BG.’

PROP. XXVII. THEOR.

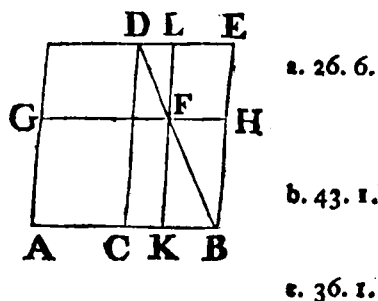
OMNIUM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ei quae a dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea AB, seceturque bifariam in C; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficienti figura parallelogramma CE quae a CB dimidia ipsius AB descripta est, cui scilicet similis est AD. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum

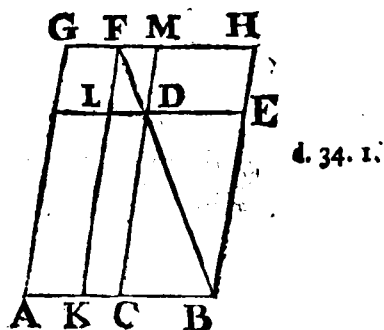
plicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ipsi CE, maximum esse AD.

Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma KH simili et similiter posita ipsi CE; dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse.

Sit primò recta AK basis ipsius AF major ipsa AC; et quoniam simile est parallelogrammum CE parallelogrammo KH, circa eandem diametrum sunt^a. ducatur eorum diameter DB, et describatur figura. quoniam igitur parallelogrammum CF est aequale ipsi FE^b commune apponatur KH; totum igitur CH toti KE est aequale. sed CH est aequale CG^c, quoniam et recta linea AC ipsi CB est aequalis; ergo et CG est aequale ipsi KE. commune apponatur CF; totum igitur AF est aequale gnomoni CHL; quare et CE, hoc est AD parallelogrammum parallelogrammo AF est majus.



Secundò, Sit AK basis ipsius AF minor AC, iisdemque constructis, quoniam parallelogrammum DH aequale est ipsi DG^c, etenim HM ipsi MG est aequalis^d, erit DH ipso LG majus. est autem DH aequale ipsi DK^b; majus igitur est DK ipso LG. commune apponatur AL; ergo totum AD toto AF est majus. Omnium igitur &c. Q. E. D.



PROP. XXVIII. PROB.

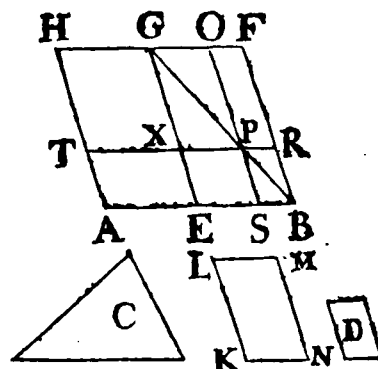
AD datam rectam lineam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quae similis sit alteri datae. oportet autem datum rectilineum cui aequale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et ejus quod ad dimidiam, et ejus parallelogrammi cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB; datum autem rectilineum, cui oportet aequale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus; cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quae similis sit ipsi D.

a. 10. 1. Secetur AB bifariam in E^a, et ab ipsa

b. 18. 6. EB describatur^b simile, et similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, et compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel aequale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem. et si quidem AG sit ae-

quale C, factum jam erit quod proponebatur; etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est aequale, erit AG majus quam C; atque EF aequale est AG; ergo, et EF quam C est majus. quo autem EF superat C, ei excessui aequale, ipsi



ipsi vero D simile, et similiter positum, idem constituatur ^c KLMN. e. 25. 6. sed D est simile EF; quare et KM ipsi EF simile erit ^d. sit igitur d. 21. 6. recta linea KL homologa ipsi EG, LM vero ipsi GF. et quoniam aequale est EF ipsis C et KM, erit EF ipso KM majus; major igitur est recta linea GE ipsa LK, et GF ipsa LM. ponatur GX aequalis LK, et GO aequalis LM, et compleatur XGOP parallelogrammum. aequale igitur et simile est XO ipsi KM; sed KM simile est EF; ergo et XO ipsi EF est simile ^d. circa eandem igitur est diametrum XO cum ipso EF ^e. sit ipsorum diameter GPB, et figura describatur. itaque e. 26. 6. quoniam EF est aequale ipsis C et KM simul, quorum XO est aequale KM, erit reliquus ERO gnomon aequalis reliquo C. et quoniam OR est aequale ^f XS, commune apponatur SR; totum igitur OB ^f. 43. 1. totum XB est aequale. sed XB est aequale ^g TE, quoniam et latus AE ^g. 36. 1. aequale est lateri EB; quare et TE ipsi OB aequale est. commune apponatur XS; ergo totum TS est aequale toti gnomoni ERO. at ERO gnomon ipsi C ostensus est aequalis; et TS igitur ipsi C aequale erit. quare ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, aequale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma SR ipsi D simili, quoniam et SR simile est ipsi EF ^h. Q. E. F. h. 24. 6.

PROP. XXIX. PROB.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quae similis sit alteri datae.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet aequale ad ipsam AB applicare sit C; cui autem oportet simile excedere sit D. oportet ad rectam lineam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili D.

D d 2

Secetur

EUCLIDIS ELEMENTORUM

Secetur AB bifariam in E, atque à EB ipsi D simile, et similiter po-

a. 18. 6. situm parallelogrammum describatur ^a EL. et utrisque quidem EL et

b. 25. 6. C aequale, ipsi vero D simile, et similiter positum idem constituatur ^b

GH. simile igitur est GH ipsi

c. 21. 6. EL ^c. sitque KH quidem latus ho-

mologum lateri FL, KG vero ipsi

FE. et quoniam parallelogram-

mum GH majus est ipso EL, erit

recta linea KH major quam FL,

et KG major quam FE. produ-

cantur FL, FE, et ipsi quidem

KH aequalis sit FLM, ipsi vero

KG aequalis FEN, et compleatur MN parallelogrammum. ergo MN

aequale est et simile ipsi GH; sed GH est simile EL; MN igitur ipsi

EL simile erit, ac propterea circa eandem diametrum est EL cum ipso

d. 26. 6. MN ^d. ducatur ipsorum diameter FX, et figura describatur. itaque

quoniam GH ipsis EL et C est aequale, sed GH aequale est MN; erit

et MN aequale ipsis EL et C. commune auferatur EL; reliquus igi-

tur NOL gnomon ipsi C est aequalis. et quoniam AE est aequalis

e. 36. 1. EB, aequalis erit ^e et AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc

f. 43. 1. est ipsi BM ^f. commune apponatur NO; totum igitur AX parallelo-

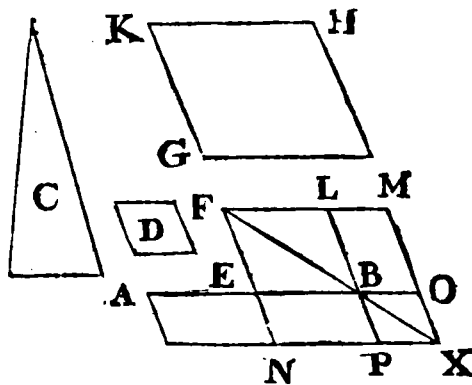
grammum aequale est gnomoni NOL. sed NOL gnomon est aequa-

lis C; ergo et AX ipsi C erit aequale. ad datam igitur rectam lineam

AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicatum est AX,

excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam et ipsi

g. 24. 6. EL simile est PO ^g. Q. E. F.



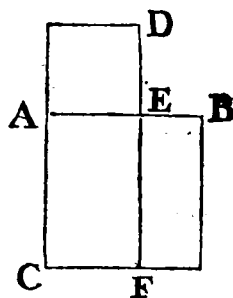
PROP. XXX.

PROP. XXX. PROB.

DATAM rectam lineam terminatam secundum extremam ac mediam rationem fecare.

Sit data recta linea AB, oportet ipsam AB secundum extremam ac mediam rationem fecare.

Describatur ^a ex AB quadratum BC, et ad AC ipsi BC aequale parallelogrammum applicetur ^b CD, excedens figura AD ipsi BC simili. ^b 29. 6. quadratum autem est BC, ergo et AD quadratum erit. et quoniam BC est aequale CD, commune auferatur CE; reliquum igitur BF reliquo AD est aequale. est autem et ipsi aequiangulum. ergo ipsorum BF, AD latera, quae circum aequales angulos, reciproce sunt proportionalia ^c. ut igitur FE ad ED, ita AE ad EB. est autem FE aequalis AC ^d, hoc est ipsi AB; et ED ipsi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB major est quam AE; ergo AE quam EB est major ^e. recta igitur linea AB secundum extremam ac mediam rationem secta est in E ^f. Q. E. F.



c. 14. 6.

d. 34. 1.

e. 14. 5.

f. 3. Def. 6.

Aliter,

Sit data recta linea AB; oportet ipsam AB secundum extremam ac mediam rationem fecare.

Secetur AB in C, ita ut rectangulum quod continetur ipsis AB, BC aequale sit quadrato ex AC ^g. Quoniam igitur rectangulum ab AB, BC aequale est quadrato ex AC, erit ut BA ad AC, ita AC ad CB ^h. Ergo AB recta linea secundum extremam ac mediam rationem secta est in C ⁱ. Q. E. F.

A C B ^{g. 11. 2.}

PROP. XXXI.

PROP. XXXI. THEOR.

IN triangulis rectangulis figura rectilinea quae fit a latere rectum angulum subtendente, aequale est eis quae a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus et similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram rectilineam quae fit à BC aequalem esse eis quae à BA, AC fiunt similibus, et similiter descriptis.

Ducatur perpendicularis AD; quoniam igitur in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto qui est ad A, ad BC basim perpendicularis

a. 8. 6. ducta est AD, erunt ^a triacula ABD, ADC similia toti ABC, et inter se. et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB

b. 4. 6. ad BA, ita BA ad BD^b. et quoniam tres rectae lineae proportionales sunt, ut prima ad tertiam, ita erit figura

quae fit à prima ad eam quae à secunda,

a. 2. Cor. 20. 6. similem, et similiter descriptam^c. ut igitur

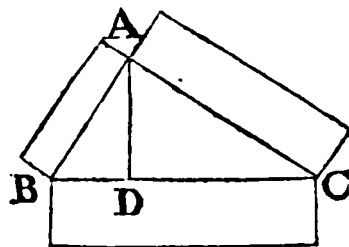
CB ad BD, ita figura quae fit à CB ad eam quae fit à BA, similem et simili-

d. B. 5. ter descriptam. et invertendo^d, ut DB ad BC, ita figura quae fit à BA ad eam

quae à BC. eadem ratione, et ut DC ad CB, ita figura quae fit à CA ad eam quae fit à CB. quare et ut BD, DC simul ad BC, ita figurae

e. 24. 5. quae à BA, AC ad eam quae à BC^e. aequales autem sunt BD, DC simul ipsi BC. ergo figura quae fit à BC aequalis est iis quae à BA, AC

f. A. 5. fiunt^f, similibus, et similiter descriptis. In triangulis igitur rectangulis &c. Q. E. D.



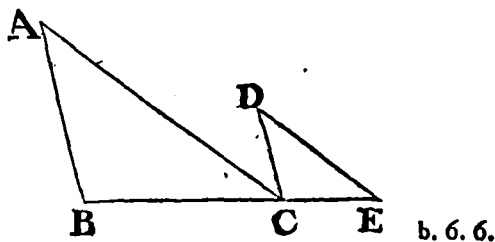
PROP. XXXII.

PROP. XXXII. THEOR.

SI duo triangu-
la, quae duo latera duobus lateribus pro-
portionalia habent, componantur ad unum angulum,
ita ut homologa latera ipsorum sint parallela; reliqua tri-
angulorum latera in directum sibi invicem erunt.

Sint duo triangu-
la ABC, DCE quae duo latera BA, AC duobus
lateribus CD, DE proportionalia habeant, sc. sit ut BA ad AC, ita CD
ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC, et AC ipsi DE. Dico BC
ipsi CE in directum esse.

Quoniam enim AB parallela est DC, et in ipsas incidit recta linea
AC, erunt anguli alterni BAC, ACD aequales inter se^a; eadem ratione a. 29. 1.
et angulus CDE aequalis est angulo ACD; quare et BAC ipsi CDE
est aequalis. et quoniam duo triangu-
la sunt ABC, DCE, unum an-
gulum ad A uni ad D aequalem ha-
bentia, circum aequales autem angu-
los latera proportionalia, scilicet BA
ad AC, ut CD ad DE; erit triangu-
lum ABC triangulo DCE aequiangulum^b. Ergo ABC angulus est aequalis
angulo DCE. ostensus autem est et angulus BAC aequalis angulo
ACD. totus igitur ACE duobus ABC, BAC est aequalis. communis
apponatur ACB; ergo anguli ACE, ACB angulis ABC, BAC, ACB
aequales sunt. sed ABC, BAC, ACB anguli duobus rectis sunt aequa-
les^c; et anguli igitur ACE, ACB duobus rectis aequales erunt. itaque c. 32. 1.
ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipsa C, duae rectae
lineae BC, CE non ad easdem partes positae, angulos qui deinceps
sunt



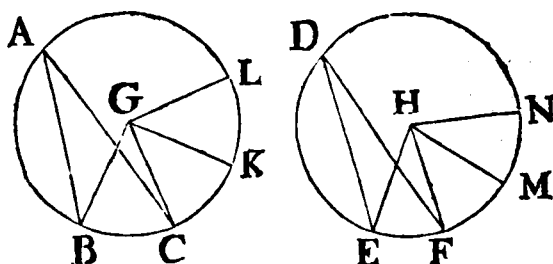
sunt ACE, ACB duobus rectis aequales efficiunt. Ergo BC ipsi CE
d. 14. 1. in directum erit^d. Si igitur duo triangula &c. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

IN circulis aequalibus anguli eandem habent rationem
quam circumferentiae quibus insunt, sive sint ad cen-
tra, sive ad circumferentias. adhuc etiam et sectores.

Sint aequales circuli ABC, DEF; et ad centra quidem ipsorum
G, H sint anguli BGC, EHF, ad circumferentias vero anguli BAC,
EDF. Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse
et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum
EDF; et adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem.

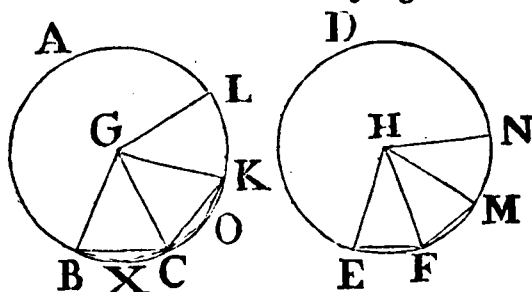
Ponantur enim circumferentiae quidem BC aequales quocunque de-
inceps CK, KL; circumferentiae vero EF, rursus aequales quocunque



FM, MN; et jungantur GK, GL, HM, HN. Quoniam igitur circum-
ferentiae BC, CK, KL inter se sunt aequales, et anguli BGC, CGK,
a. 27. 3. KGL inter se aequales erunt^a. quam multiplex igitur est circumferen-
tia BL circumferentiae BC, tam multiplex est et BGL angulus anguli
BGC. eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN cir-
cumferentiae EF, tam multiplex est et EHN angulus anguli EHF. et si
aequalis est BL circumferentia circumferentiae EN, et angulus BGL
angulo

angulo EHN erit aequalis^a; et si circumferentia BL major est circum-^{a. 27. 3.}
ferentia EN, major erit et BGL angulus angulo EHN; et si minor,
minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum
circumferentiis BC, EF, et duobus angulis BGC, EHF; sumpta sunt
circumferentiae BC, et BGC anguli utcumque aequae multiplicia, videli-
cet circumferentia BL et BGL angulus; circumferentiae vero EF, et
EHF anguli, alia utcumque aequae multiplicia, nempe circumferentia
EN, et angulus EHN. atque ostensum est si circumferentia BL supe-
rat circumferentiam EN, et BGL angulum superare angulum EHN;
et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem esse. ut igitur^b circum-^{b. 5. Def. 5.}
ferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum
EHF. sed ut angulus BGC ad angulum EHF, ita angulus BAC ad
EDF angulum^c, uterque enim utriusque est duplus^d. et ut igitur BC^{c. 15. 5.}
circumferentia ad circumferentiam EF, ita et angulus BGC ad angulum^{d. 20. 3.}
EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis aequalibus
anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus insistant,
sive sint ad centra, sive ad circumferentias. Q. E. D.

Dico insuper et ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita
esse sectorem BGC ad EHF sectorem. Jungantur enim BC, CK, et

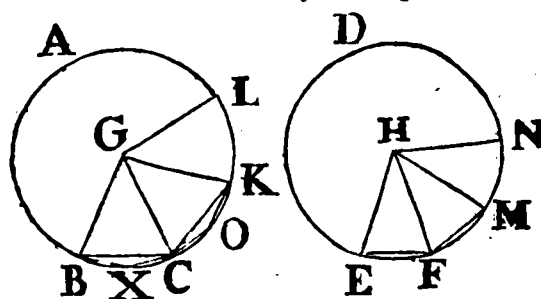


sumptis in circumferentiis BC, CK punctis X, O, jungantur BX, XC,
CO, OK. itaque quoniam duae BG, GC duabus CG, GK aequales
sunt, et angulos aequales continent; erit et basis BC basi CK aequa-

E e

lis,

- e. 4. 1. lis, et triangulum GBC triangulo GCK^e aequale. et quoniam circumferentia BC circumferentiae CK est aequalis, et reliqua circumferentia quae complet totum circulum ABC aequalis est reliquae quae eundem
- a. 27. 3. circulum complet. quare et angulus BXC angulo COK est aequalis^a;
- f. 11. Def. 3. simile igitur est BXC segmentum segmento COK^f; et sunt super aequalibus rectis lineis BC, CK. super aequalibus autem rectis lineis similia
- g. 24. 3. circulorum segmenta, inter se aequalia sunt^g. Ergo segmentum BXC est aequale segmento COK. est autem et BGC triangulum triangulo CGK aequale. et totus igitur sector BGC toti sectori CGK aequalis erit. eadem ratione et KGL sector utrique ipsorum BGC, CGK aequalis erit. similiter et sectores EHF, FHM, MHN inter se sunt ae-



quales. quam multiplex igitur est BL circumferentia circumferentiae BC, tam multiplex est BGL sector sectoris BGC. eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN circumferentiae EF, tam multiplex est et EHN sector sectoris EHF. et si circumferentia BL circumferentiae EN est aequalis, et sector BGL aequalis est sectori EHN; et si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat et BGL sector sectorem EHN; et si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC, EF circumferentiis, duobus vero sectoribus BGC, EHF, sumpta sunt utcumque aequae multiplicia circumferentiae quidem BC et BGC sectoris, circumferentia BL et BGL sector; circumferentiae vero EF et sectoris EHF, alia utcumque aequae multiplicia,

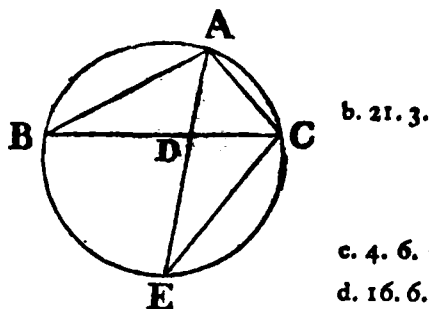
multiplicia, circumferentia EN et EHN sector; atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, et sectorem BGL superare sectorem EHN; et si aequalis, aequalem esse; et si minor minorem. est igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector BGC ad EHF sectorem.

PROP. B. THEOR.

SI trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; rectangulum a lateribus trianguli contentum, aequale erit rectangulo contento a segmentis basis una cum quadrato rectae lineae quae angulum bifariam secat.

Sit ABC triangulum, et bifariam secetur angulus BAC recta linea AD; erit rectangulum BA, AC aequale rectangulo BDC una cum quadrato ex AD.

Circa triangulum describatur ^a circulus ACB, et producat AD ad ^a 5. 4. circumferentiam in E, et jungatur EC. igitur quoniam angulus BAD aequalis est angulo CAE, et angulus ABD angulo ^b AEC, sunt enim in eodem segmento; erunt ABD, AEC triangula inter se aequiangula. Ergo ut BA : d AD, ita est ^c EA ad AC, et rectangulum BA, AC aequale erit ^d rectangulo EA, AD, hoc est ^e rectangulo ED, DA una cum quadrato ex AD. est autem rectangulum ED, DA aequale ^f rectangulo BD, DC. ^f 35. 3. rectangulum igitur BA, AC aequale est rectangulo BD, DC una cum quadrato ex AD. Quare si trianguli &c. Q. E. D.



b. 21. 3.

c. 4. 6.

d. 16. 6.

e. 3. 2.

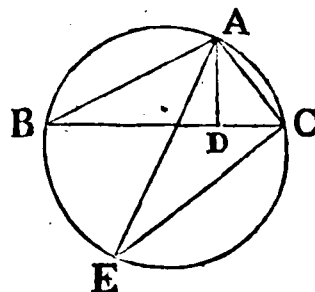
f. 35. 3.

PROP. C. THEOR.

SI ab angulo trianguli ducatur perpendicularis ad basim, erit rectangulum lateribus trianguli contentum aequale rectangulo contento a perpendiculari et diametro circuli circa triangulum descripti.

Sit triangulum ABC, et ab angulo A ducatur AD perpendicularis ad basim BC, erit rectangulum BA, AC aequale rectangulo contento ab AD et diametro circuli circa triangulum descripti.

- a. 5. 4. Circa triangulum describatur ^a circulus ACB, et ducatur diameter AE, et EC jungatur. Quoniam igitur angulus rectus BDA
 b. 31. 3. aequalis est angulo ECA in semicirculo ^b,
 c. 21. 3. est autem angulus ABD aequalis ^c ipsi AEC



in eodem segmento; aequiangula erunt triangula ABD, AEC. ut igitur BA ad AD, ita est ^d EA ad AC, et propterea ^e rectangulum BA, AC aequale est rectangulo EA, AD. Si igitur ab angulo &c. Q. E. D.

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDUM est quod longitudinem, latitudinem et crassitudinem
habet.

II.

Solidi vero terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta, sive perpendicularis, est, quando ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt, et in subiecto sunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectae lineae quae communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

Rectae

EUCLIDIS ELEMENTORUM

V.

Rectae lineae ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectae illius lineae ad planum ducta fuerit perpendicularis, atque a puncto quo plano occurrit, ad terminum rectae lineae qui est in plano, recta linea fuerit adjuncta; est, scilicet, angulus acutus adjuncta recta linea et insistente contentus.

VI.

Plani ad planum inclinatio est, angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni, ad idem ipsius punctum, in utroque planorum ducuntur.

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint aequales.

VIII.

Parallela plana sunt, quae inter se non conveniunt.

IX.

Solidus angulus est qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non existentibus plano, et ad unum punctum constitutis continetur.

X.

‘ Omissa est Definitio decima ob rationes in Notis adductas.’

XI.

Similes solidae figurae sunt, quae et singulos angulos solidos aequales habent, et quae similibus planis continentur, multitudine aequalibus.

XII.

Pyramis est figura solida planis contenta, quae ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

XIII.

Prisma est figura solida quae planis continetur, quorum adversa duo sunt et aequalia et similia, et parallela; alia vero parallelogramma.

Sphaera

XIV.

Sphaera est figura descripta, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus revolvitur, donec in eundem locum a quo moveri coeperat restituatur.

XV.

Axis autem sphaerae est quiescens illa recta linea circum quam semicirculus convertitur.

XVI.

Centrum sphaerae est idem quod et semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphaerae est recta quaedam linea per centrum ducta, et utrinque a sphaerae superficie terminata.

XVIII.

Conus est figura descripta, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum triangulum revolvitur, donec in eundem locum a quo moveri coeperat restituatur.

Et si quidem quiescens recta linea aequalis sit reliquae circa rectum angulum, quae sc. convertitur, orthogonius erit conus; si vero minor, amblygonius; si vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem Coni est quiescens illa recta, circa quam triangulum convertitur.

XX.

Basis vero Coni est circulus qui a circumducta recta linea describitur.

XXI.

Cylindrus est figura descripta, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum revolvitur, donec in eundem locum a quo coeperat moveri restituatur.

Axis

EUCLIDIS ELEMENTORUM

XXII.

Axis autem Cylindri est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Bases vero Cylindri sunt circuli a duobus adversis lateribus quae circumaguntur descripti.

XXIV.

Similes Coni et Cylindri sunt, quorum axes et basium diametri proportionales sunt.

XXV.

Cubus est figura solida sex quadratis aequalibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida quatuor triangulis aequalibus et aequilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida octo triangulis aequalibus et aequilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida duodecim pentagonis aequalibus, et aequilateris et aequiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida viginti triangulis aequalibus, et aequilateris contenta.

DEF. A.

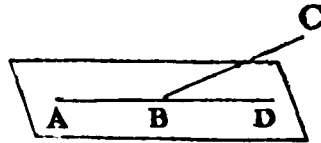
Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quae ex adverso parallelae sunt, contenta.

PROP. I

PROP. I. THEOR.

RECTAE lineae pars quaedam non est in sub-
jecto plano, quaedam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectae lineae ABC pars quidem AB sit in sub-
jecto plano, pars vero BC in sublimi. Erit igitur recta linea quaedam ipsi AB in directum
continuata in subiecto plano; sit DB. dua-
bus igitur rectis lineis ABC, ABD commune
segmentum est AB, quod fieri non potest^a. Non igitur rectae &c. Q. E. D. a. Cor. II. I.

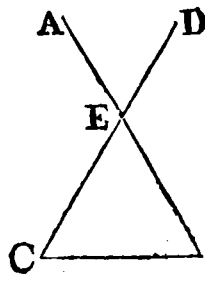


PROP. II. THEOR.

SI duae rectae lineae se invicem secant, in uno sunt plano;
et quaelibet tres rectae quae sibi mutuo occurrunt,
sunt in uno plano.

Duae enim rectae lineae AB, CD se invicem in puncto E secant; erunt
AB, CD in uno plano. et tres rectae EC, CB, BE quae sibi mutuo
occurrunt in uno sunt plano.

Per rectam EB ducatur quodvis planum, et circa EB, productam si
opus fuerit, convertatur planum donec transeat per
punctum C; quoniam igitur puncta E, C sunt in
plano hoc, in eodem erit^a recta EC; eadem ra-
tione, in eodem plano est recta BC; et in eodem,
ex hypothesi, est recta EB. igitur tres rectae lineae
EC, CB, BE in uno sunt plano. in quo autem plano
sunt EC, EB in eodem sunt^b et rectae CD, AB.



a. 7. Def. 1.

b. I. II.

F f

Ergo

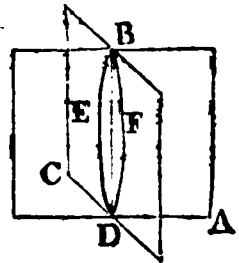
EUCLIDIS ELEMENTORUM

Ergo rectae lineae AB, CD in uno sunt plano. Igitur si duae rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

SI duo plana se invicem secant, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana AB, BC se invicem secant, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. Dico lineam DB esse rectam. si enim non ita sit, ducatur a puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. Erunt igitur duarum rectarum linearum DEB, DFB iidem termini, et
 a. 10. Ax. 1. ipsae spatium continebunt, quod est absurdum^a. igitur planorum AB, BC, communis sectio BD non potest non esse recta linea; recta igitur est. Si igitur duo plana sec. Q. E. D.



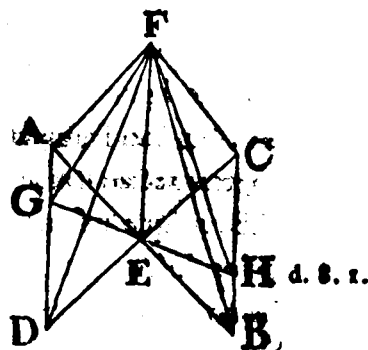
PROP. IV. THEOR.

SI recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quaedam EF duabus rectis lineis AB, CD, se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano per AB, CD ducto ad rectos angulos esse.

Sumantur enim rectae lineae AE, EB, CE, ED inter se aequales; et per E ducatur in plano per AB, CD, recta linea GEH utcumque, junganturque AD, CB; deinde a quovis, in recta EF, puncto F ducantur FA, FG, FD, FC, FH, FB. Et quoniam duae rectae lineae AE, ED

ED duabus rectis lineis BE, EC aequales sunt, et angulos aequales AED, BEC continent^a, erit AD basis basi CB aequalis, et angulus a. 15. 1. DAE aequalis angulo EBC^b. est autem et angulus AEG, aequalis angulo BEH^a. duo igitur triangula sunt AGE, BHE, duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus AE uni lateri EB aequale quod aequalibus adjacet angulis; quare et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt^c. ergo GE quidem est aequalis EH; AG vero ipsi BH. et quoniam AE est aequalis EB, communis autem, et ad rectos angulos FE, erit basis AF basi FB aequalis^b; eadem quoque ratione et CF aequalis erit FD. praeterea quoniam AD est aequalis BC, et AF ipsi FB, erunt duae FA, AD duabus FB, BC aequales, altera alteri; et ostensa est basis DF aequalis basi FC; angulus igitur^d FAD angulo FBC est aequalis. rursus, ostensa est AG aequalis BH, sed et AF ipsi FB est aequalis; duae igitur FA, AG duabus FB, BH aequales sunt, et angulus FAG aequalis ostensus est angulo FBH; basis igitur GF basi FH est aequalis^b. rursus, quoniam GE ostensa est aequalis EH, communis autem EF; erunt duae GE, EF aequales duabus HE, EF; et basis GF est aequalis basi FH; angulus igitur GEF angulo HEF est aequalis^d, et idcirco rectus est uterque angulorum GEF, HEF^e. Ergo FE ad GH utcumque per E ductam e. 10. Def. 1. rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quae ipsam tangunt, et in subiecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad planum recta est quando ad omnes rectas lineas ipsum tangentes, et in eodem existentes plano rectos efficit angulos^f. Quare FE subiecto plano ad rectos angulos infistit. Si igitur f. 3. Def. 11. recta linea &c. Q. E. D.



PROP. V. THEOR.

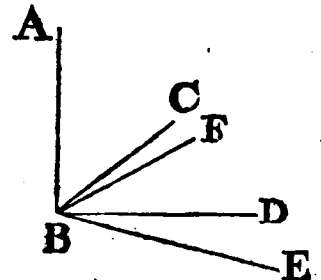
SI recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in comuni sectione, ad rectos angulos insistat, tres illae rectae lineae in uno plano erunt.

Recta linea quaedam AB tribus rectis lineis BC, BD, BE, in tactu B, ad rectos angulos insistat; dico BC, BD, BE in uno plano esse.

Non enim, sed si fieri potest, sint BD, BE quidem in subiecto plano, BC vero in sublimi; et planum per AB, BC producat; communem igitur sectionem in subiecto plano faciet rectam lineam^a; faciat

BF. in uno igitur sunt plano per AB, BC ducto, tres rectae lineae AB, BC, BF. et quoniam AB utrique ipsarum BD, BE, ad rectos angulos insistit, et ducto per ipsas DB, BE

b. 4. 11. plano ad rectos angulos erit^b. planum autem per DB, BE est subiectum planum; ergo AB ad subiectum planum recta est; quare et



ad omnes rectas lineas ipsam tangentes, quae in eodem plano sunt, c. 3. Def. 11. rectos^c faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subiecto existens plano. Ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem et ABC angulus rectus; aequalis igitur est angulus ABF angulo ABC, et in eodem sunt plano, quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in sublimi; quare tres rectae lineae BC, BD, BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

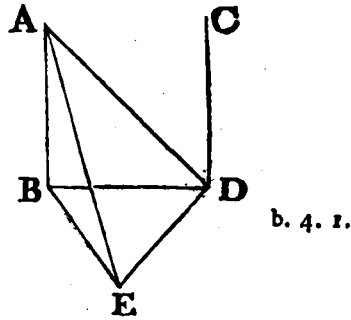
SI duae rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint, illae inter se parallelae erunt.

Duae

Duae enim rectae lineae AB, CD subiecto plano sint ad rectos angulos; dico AB, ipsi CD parallelam esse.

Occurrant enim subiecto plano in punctis B, D, jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur DE, et ponatur DE aequalis ipsi AB, junganturque BE, AE, AD. Quoniam igitur AB recta est ad subiectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt, et in subiecto sunt plano rectos angulos efficiet^a. a. 3. Def. 11. tangit autem ipsam AB utraque ipsarum BD, BE existens in subiecto plano.

Ergo uterque angulorum ABD, ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB, CDE. et quoniam AB aequalis est ipsi DE, communis autem BD, erunt duae AB, BD duabus ED, DB aequales; et rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est aequalis^b. rursus, quoniam AB est aequalis DE, et BE ipsi AD, duae AB, BE duabus ED, DA aequales sunt, et basis AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est aequalis^c. sed ABE rectus est; rectus igitur et EDA; et idcirco ED^c. 8. 1. ad DA est perpendicularis. sed et perpendicularis est ad utramque ipsarum BD, DC. quare ED tribus rectis lineis BD, DA, DC in tactu ad rectos angulos insistit. tres igitur rectae lineae BD, DA, DC in uno sunt plano^d. in quo autem sunt BD, DA, in eo est AB, quaevis enim d. 5. 11. tres rectae lineae quae sibi mutuo occurrunt, in uno sunt plano^e. sunt e. 2. 11. igitur AB, BD, DC in uno plano. atque est uterque angulorum ABD, BDC rectus; parallela igitur est AB ipsi CD^f. Quare si duae rectae f. 28. 1. lineae &c. Q. E. D.



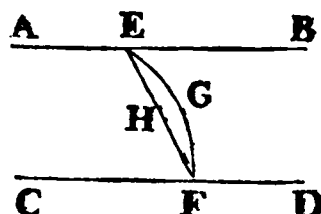
EUCLIDIS ELEMENTORUM

PROP. VII. THEOR.

SI duae rectae lineae parallelae sint, sumantur autem in utraque ipsarum quaelibet puncta; quae dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano in quo et parallelae.

Sint duae rectae lineae parallelae AB, CD, et in utraque ipsarum sumantur quaelibet puncta E, F; dico rectam lineam quae conjungit E, F in eodem plano esse in quo sunt parallelae.

Non enim sed, si fieri potest, sit in sublimi, ut EGF; et in plano ABCD, in quo sunt parallelae, ducatur a puncto E ad F recta linea EHF; et recta ponitur EGF.



Ergo duae rectae lineae EHF, EGF spatium continebunt, quod fieri a. 10. Ax. 1. non potest^a. non igitur quae a puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est, quare erit in plano quod per AB, CD parallelas transit. Si igitur duae rectae &c. Q. E. D.

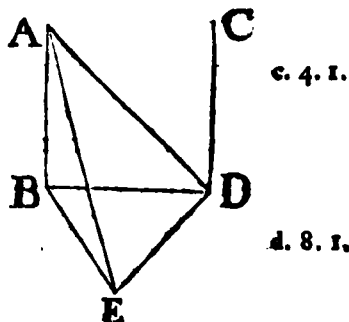
PROP. VIII. THEOR.

SI duae rectae lineae parallelae sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duae rectae lineae parallelae AB, CD, et altera ipsarum AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse.

Occurrant enim AB, CD subiecto plano in punctis B, D, et BD jungatur.

jungatur. Ergo AB, CD, BD in uno sunt plano. ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subiecto plano DE, et ponatur DE ipsi AB aequalis, junganturque BE, AE, AD. et quoniam AB perpendicularis est ad subiectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt suntque in subiecto plano, perpendicularis erit^a. rectus igitur est uterque angulus ABD, ABE. quoniam vero in parallelas rectas lineas AB, CD recta incidit BD, erunt anguli ABD, CDB duobus rectis aequales^b. rectus autem est ABD; ergo et CDB est rectus, ac propterea CD perpendicularis est ad BD. et quoniam AB est aequalis DE, communis autem BD, duae AB, BD duabus ED, DB aequales sunt; et angulus ABD est aequalis angulo EDB, rectus enim uterque est; basis igitur AD basi BE est aequalis^c. rursus, quoniam AB aequalis est DE, et BE ipsi AD; erunt duae AB, BE duabus ED, DA aequales; et basis communis AE; quare angulus ABE est aequalis angulo EDA^d. rectus autem est ABE; ergo et EDA est rectus, et ED ad DA perpendicularis. sed et perpendicularis est ad BD; ergo ED etiam ad planum per BD, DA perpendicularis erit^e, et ad omnes rectas lineas quae in eodem existentes plano ipsam tangunt, rectos faciet angulos^f. at in plano per BD, DA est DC, omnes enim tres sunt in plano in quo sunt rectae parallelae AB, CD. quare ED ipsi CD est ad rectos angulos; ideoque CD ad rectos angulos est ipsi DE; sed et CD etiam ipsi DB. Ergo CD duabus rectis lineis DE, DB se mutuo secantibus in communi sectione D ad rectos angulos infistit; ac propterea plano per DE, DB est ad rectos angulos. planum autem per DE, DB est subiectum planum. Ergo CD subiecto plano ad rectos angulos erit. Q. E. D.



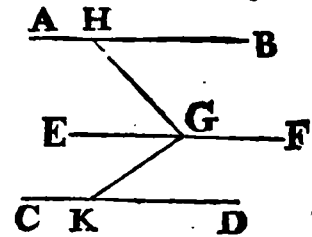
PROP. IX.

PROP. IX. THEOR.

QUAE eidem rectae lineae sunt parallelae, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelae erunt.

Sit utraque ipsarum AB, CD parallela ipsi EF, non existentes in eodem in quo ipsa plano. Dico AB ipsi CD parallelam esse.

Sumatur in EF punctum quodvis G, a quo ipsi EF in plano quidem per EF, AB transeunte, ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem transeunte per EF, CD rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK. et quoniam EF ad utramque ipsarum GH, GK est perpendicularis, erit etiam EF ad rectos angulos



a. 4. 11. plano per GH, GK transeunte^a. atque est EF ipsi AB parallela; ergo et AB plano per HGK

b. 8. 11. ad rectos angulos est^b. eadem ratione et CD plano per HGK est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum AB, CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duae rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint,

c. 6. 11. parallelae erunt inter se^c. Ergo AB ipsi CD parallela est. Q. E. D.

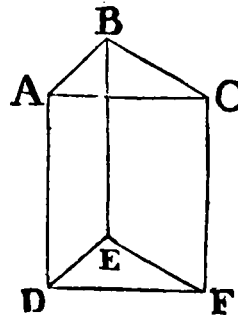
PROP. X. THEOR.

SI duae rectae lineae sese tangentes, duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos continebunt.

Duae rectae lineae sese tangentes AB, BC, duabus rectis lineis DE, EF sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF aequalem esse.

Assumantur

Assumantur enim BA, BC, ED, EF inter se aequales; et jungantur AD, CF, BE, AC, DF. Quoniam igitur BA ipsi ED aequalis est et parallela, erit et AD aequalis et parallela ipsi BE^a. eadem ratio et CF ipsi BE aequalis et parallela erit. utraque igitur ipsarum AD, CF ipsi BE aequalis est et parallela. quae autem eidem rectae lineae sunt parallelae, non existentes in eodem plano, et inter se parallelae erunt. Ergo AD parallela est ipsi CF^b; et ei est aequalis^c; atque ipsas conjungunt AC, DF; et AC igitur ipsi DF aequalis est et parallela^a. et quoniam duae rectae lineae AB, BC duabus DE, EF aequales sunt, et basis AC est aequalis basi DF; erit angulus ABC angulo DEF aequalis^d. Si igitur duae rectae lineae &c. Q. E. D. d. 8. 1.



b. 9. 11.

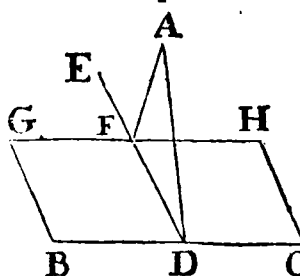
c. 1. Ax. 1.

PROP. XI. PROB.

A Dato puncto in sublimi, ad subiectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subiectum planum BH. oportet a puncto A ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

In subiecto plano ducatur quaedam recta linea utcunque BC, et a puncto A ad BC perpendicularis agatur AD^a. siquidem igitur AD perpendicularis sit etiam ad subiectum planum, factum jam erit quod proponebatur; sin minus, ducatur a puncto D ipsi BC, in subiecto plano, ad rectos angulos DE^b; et a puncto A ad DE perpendicularis ducatur^a AF; denique per F ducatur



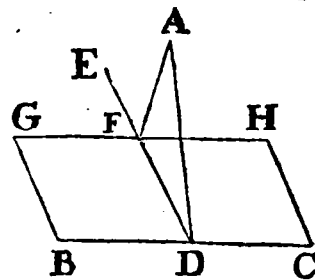
a. 12. 1.

b. 11. 1.

G g

tur

- c. 31. 1. tur GH ipsi BC parallela^c. et quoniam BC utrique ipsarum ED, DA est ad rectos angulos, erit et BC ad rectos angulos plano per ED, DA transeunti^d. atque ipsi BC parallela est GH; si autem sint duae rectae lineae parallelae quarum una plano alicui sit ad rectos angulos, et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit^e; quare et GH plano per ED, DA transeunti ad rectos angulos est, ac propterea ad omnes rectas lineas quae in eodem plano existentes ipsam tangunt est perpendicularis^f. tangit autem ipsam recta AF existens in plano per ED, DA. Ergo GH perpendicularis est ad AF, et ob id AF est perpendicularis ad GH. est autem AF ad DE perpendicularis; ergo AF perpendicularis est ad utramque ipsarum GH, DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit^d. quare AF plano per ED, GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED, GH ductum est subiectum planum; ergo AF ad subiectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad subiectum planum, perpendicularis recta linea ducta est AF. Q. E. F.



PROP. XII. PROB.

DATO plano, a puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

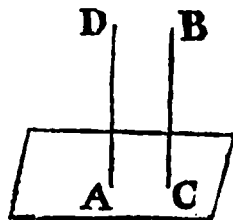
Sit datum quidem planum illud quod est subiectum, punctum autem quod in ipso sit A. oportet à puncto A subiecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Intelligatur aliquod punctum sublimi B, a quo ad subiectum planum agatur

LIBER UNDECIMUS.

235

agatur perpendicularis BC^a ; et per A ipsi BC parallela ducatur AD^b .
 Quoniam igitur duae rectae parallelae sunt AD, CB, una autem ipsarum BC subiecto plano est ad rectos angulos, et reliqua AD subiecto plano ad rectos angulos erit^c. Dato igitur plano a puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Q. E. F.

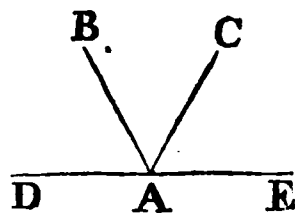


a. 11. 11.
b. 31. 1.
c. 8. 11.

PROP. XIII. THEOR.

DATO plano, a puncto quod in ipso est, duae rectae lineae ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte. et unica est perpendicularis a puncto in sublimi ad subiectum planum.

Si enim fieri potest, dato plano, a puncto quod in ipso est A, duae rectae lineae AB, AC ad rectos angulos constituentur ex eadem parte; et ducatur planum per BA, AC, quod faciet sectionem per A in subiecto plano rectam lineam^a; faciat DAE. Ergo rectae lineae AB, AC, DAE in uno sunt plano. et quoniam CA subiecto plano ad rectos angulos est, et ad omnes rectas lineas, quae in subiecto plano existentes ipsam tangunt, rectos faciet angulos. tangit autem ipsam DAE, quae est in subiecto plano; angulus igitur CAE rectus est. eadem ratione et rectus est BAE. Ergo angulus CAE ipsi BAE est aequalis; et in uno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur a dato plano a puncto quod in ipso est, duae rectae lineae ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. Et a puncto in sublimi ad subiectum planum una tantum duci potest perpendicularis. si enim duae duci possint ab



a. 3. 11.

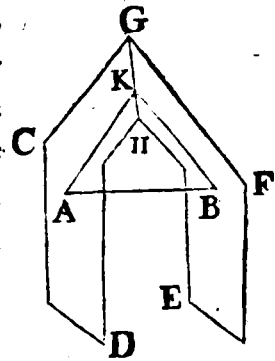
b. 6. 11. eodem puncto, essent inter se parallelæ^b, quod est absurdum. Una igitur tantum duci potest. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

AD quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim quaedam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD, EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse.

Si enim non ita sit, producta convenient inter se; convenient, facient autem communem sectionem rectam lineam; faciant GH; et in ipsa GH sumpto quovis puncto K, jungantur AK, BK. Quoniam igitur AB recta est ad EF planum, erit et perpendicularis ad ipsam BK rectam
 a. 3. Def. 11. lineam in plano EF producto existentem^a. quare
 angulus ABK rectus est. eadem ratione et BAK
 est rectus; ideoque trianguli ABK duo anguli
 ABK, BAK duobus rectis sunt æquales, quod
 b. 17. 1. fieri non potest^b. non igitur plana CD, EF
 producta inter se convenient. Quare plana CD,
 c. 8. Def. 11. EF sunt parallela^c. Ad quæ igitur plana &c. Q. E. D.



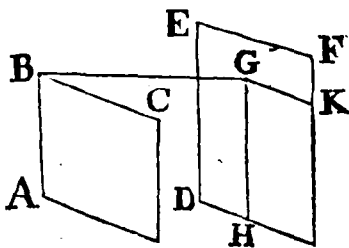
PROP. XV. THEOR.

SI duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ enim rectæ lineæ sese tangentes AB, BC, duabus rectis lineis sese tangentibus DE, EF parallelæ sint, et non in eodem plano. Dico
 plana

plana quae per ABC, DEF transeunt, si producantur, inter se non convenire.

Ducatur * a puncto B ad planum quod per DEF transit, perpen- * 11. 11.
dicularis BG, quae plano in puncto G occurrat; et per G ducatur ** 31. 1.
ipsi quidem ED parallela GH; ipsi vero EF parallela GK. itaque quo-
niam BG perpendicularis est ad planum per DE, EF, et ad omnes
rectas lineas quae ipsam tangunt, et in eo-
dem sunt plano, rectos faciet angulos^a. tangit autem ipsam utraque ipsarum GH,
GK, quae in eo sunt plano. rectus igitur
est uterque angulorum BGH, BGK. et
quoniam BA parallela est ipsi GH*, (utra-
que enim ipsarum parallela est ipsi DE
non in eodem cum ipsa plano) anguli GBA, BGH duobus rectis sunt
aequales^b. rectus autem est BGH, ergo et GBA rectus erit, ideoque GB b. 29. 1.
ad BA est perpendicularis. eadem ratione et GB perpendicularis est ad
BC. quoniam igitur recta linea GB duabus rectis lineis BA, BC se
invicem secantibus ad rectos angulos insistat, erit GB etiam ad planum
per BA, BC ductum perpendicularis^c. atque est ad planum per DE, c. 4. 11.
EF perpendicularis; ergo BG perpendicularis est ad utrumque plano-
rum quae per ABC, DEF transeunt. ad quae vero plana eadem recta
linea est perpendicularis, ea parallela sunt^d. parallelum igitur est pla- d. 14. 11..
num per AB, BC plano per DE, EF. Quare si duae rectae lineae &c.
Q. E. D.



a. 3. Def. 11.

* 9. 11.

PROP. XVI. THEOR.

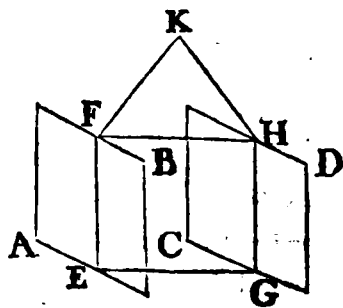
SI duo plana parallela ab aliquo plano secantur, com-
munes ipsorum sectiones parallelae erunt.

Duo.

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

Duo plana parallela AB, CD a plano aliquo EFHG secantur, communes autem ipsorum sectiones sint EF, GH. Dico EF ipsi GH parallelam esse.

Si enim non est parallela, productae EF, GH inter se convenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, ut ad partes FH, et convenient in K. quoniam igitur EFK est in plano AB, et omnia quae in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt; unum autem punctorum quae sunt in EFK est ipsum K punctum; ergo K est in plano AB. eadem ratione et K est in CD plano. ergo plana AB, CD producta inter se convenient; non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF, GH rectae lineae productae convenient ad partes FH. similiter demonstrabimus neque rectas EF, GH ad partes EG convenire, si producantur. quae autem, in eodem plano, productae neutra ex parte conveniunt parallelae sunt. Ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana &c. Q. E. D.



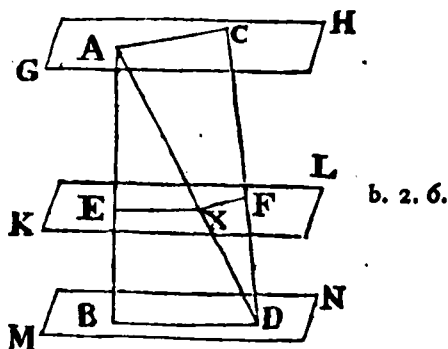
PROP. XVII. THEOR.

SI duae rectae lineae a parallelis secantur planis, in eadem ratione secabuntur.

Duae enim rectae lineae AB, CD a parallelis planis GH, KL, MN secantur in punctis A, E, B; C, F, D. Dico ut AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD.

Jungantur enim AC, BD, AD, et occurrat AD plano KL in puncto X; et EX, XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL, MN a plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX, BD parallelae

parallelæ sunt^a. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH, KL a. 16. 11. a plano AXFC secantur, communes ipsorum sectiones AC, XF sunt parallelæ. et quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD, parallela ducta est EX, ut AE ad EB, ita erit AX ad XD^b. rursus, quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC, parallela ducta est XF, erit ut AX ad XD, ita CF ad FD. ostensum autem est ut AX ad XD, ita esse AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita CF ad FD^c. Quare si duæ rectæ c. 11. 5. lineæ &c. Q. E. D.

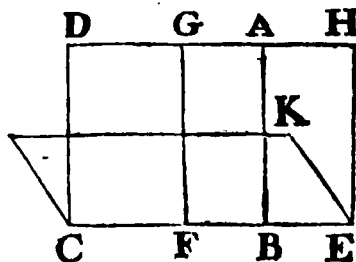


PROP. XVIII. THEOR.

SI recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, et omnia quæ per ipsum transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta enim linea quaedam AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico et omnia plana quæ per ipsam AB transeunt subiecto plano ad rectos angulos esse.

Producatur enim per AB planum DE, sitque plani DE et subiecti plani communis sectio CE; et sumatur in CE quodvis punctum F, a quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano ducatur FG. quoniam igitur AB ad subiectum planum est perpendicularis, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam tangent et in subiecto sunt plano perpendicularis erit^a; quare etiam ad CE a. 3. Def. 11. est



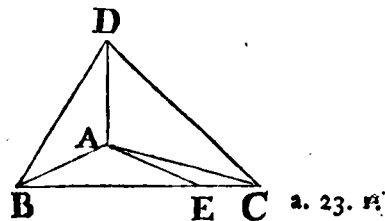
ris^a. similiter ostendemus et DF perpendicularem esse ad subiectum a. 4. Def. 11. planum. quare ab eodem puncto D subiecto plano duae rectae lineae ad rectos angulos constitutae sunt ex eadem parte, quod fieri non potest^b. non igitur subiecto plano a puncto D ad rectos angulos consti- b. 13. 11. tuetur alia recta linea praeter ipsam DB communem planorum AB, BC sectionem. Quare DB subiecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana &c. Q. E. D.

PROP. XX. THEOR.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC, CAD, DAB contineatur. Dico angulorum BAC, CAD, DAB duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos.

Si enim BAC, CAD, DAB anguli inter se aequales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit angulus BAC non minor utrovis ex reliquis, major autem quam DAB; et ad rectam lineam AB et punctum in ipsa A, constituatur angulo DAB^a, in plano per BA, AC transeunte, aequalis angulus BAE; ponaturque ipsi AD aequalis AE; et per E ducta BEC secet rectas lineas AB, AC in punctis B, C, et DB, DC jungantur. itaque quoniam DA est aequalis AE, communis autem AB, duae DA, AB duabus EA, AB aequales sunt, et angulus DAB aequalis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est aequalis^b. et quoniam duae BD, DC ipsa CB majores b. 4. 1. sunt^c, quarum DB aequalis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam c. 20. 1.



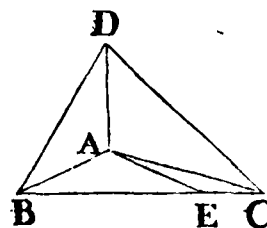
H h

reliqua

EUCLIDIS ELEMENTORUM

reliqua EC major. et quoniam DA est aequalis AE, communis autem AC et basis DC major basi EC; erit angulus

- d. 25. 1. DAC angulo EAC major^d. et ex constructione est DAB angulus aequalis ipsi BAE; quare DAB, DAC anguli, angulo BAC majores sunt. est autem angulus BAC non minor utrovis ex ipsis DAB, DAC, quare BAC una cum altero ex ipsis, reliquo erit major. Si igitur solidus angulus &c. Q. E. D.



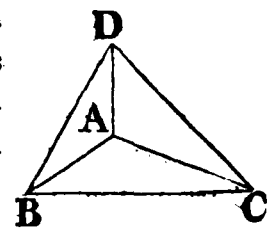
PROP. XXI. THEOR.

OMNIS solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Primum, Sit solidus angulus ad A, tribus planis angulis BAC, CAD, DAB contentus. Dico angulos BAC, CAD, DAB quatuor rectis esse minores.

Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB, AC, AD quaevis puncta B, C, D, et BC, CD, DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus planis angulis CBA, ABD, DBC continetur, duo quilibet reli-

- a. 20. 11. quo majores sunt^a; anguli igitur CBA, ABD, angulo DBC sunt majores. eadem ratione, et anguli quidem BCA, ACD majores sunt angulo



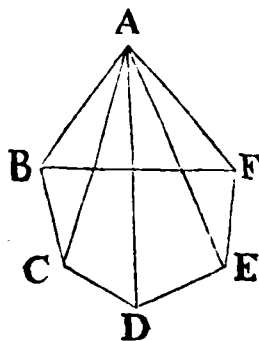
DCB; anguli vero CDA, ADB majores angulo BDC. quare sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB tribus angulis DBC, BCD, CDB sunt majores. sed tres anguli DBC, BCD, CDB, sunt aequales

- b. 32. 1. duobus rectis^b. sex igitur anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB duobus rectis majores sunt. et quoniam singulorum triangulorum ABC,

ABC, ACD, ADB tres anguli sunt aequales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA, BAC, ACB, ACD, CDA, DAC, ADB, DBA, BAD aequales sex rectis. quorum sex anguli CBA, ACB, ACD, CDA, ADB, DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur tres anguli BAC, CAD, DAB, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores sunt.

Sed sit solidus angulus ad A contentus quocunque planis angulis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB; erunt hi omnes simul minores quatuor rectis.

Occurrat planum aliquod planis in quibus sunt anguli, sintque communes ejus sectiones cum hisce planis rectae BC, CD, DE, EF, FB. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus planis angulis CBA, ABF, FBC continetur, duo quilibet reliquo majores sunt^a; anguli igitur CBA, ABF, angulo FBC sunt majores. eadem ratione et duo anguli plani ad unumquodque ex punctis C, D, E, F, qui anguli sunt ad bases triangulorum quorum vertex communis est A, majores sunt reliquo angulo ad idem punctum, qui scilicet est angulus polygoni BCDEF. Omnes igitur anguli qui sunt ad bases triangulorum simul majores sunt omnibus polygoni angulis.



a. 20. 11.

Quoniam vero omnes anguli triangulorum simul aequales sunt bis tot rectis quot sunt triangula^b, hoc est quot sunt latera polygoni BCDEF; omnes autem anguli polygoni una cum quatuor rectis aequales etiam sunt bis tot rectis quot sunt polygoni latera^c; c. 1. Cor. 32. 1. erunt omnes triangulorum anguli aequales omnibus angulis polygoni una cum quatuor rectis. Omnes vero anguli ad bases triangulorum majores ostensi sunt omnibus polygoni angulis. Ergo triangulorum reliqui anguli, quibus scilicet solidus angulus ad A continetur minores sunt

H h 2

quatuor

EUCLIDIS ELEMENTORUM

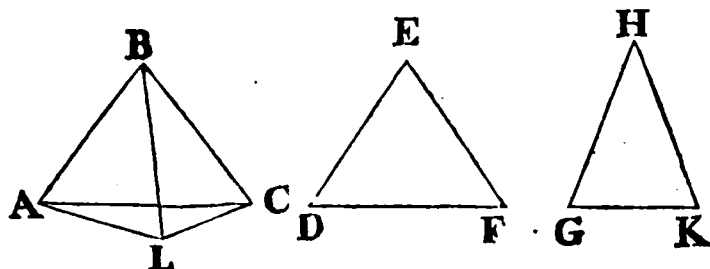
quatuor rectis. Omnis igitur solidus angulus minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

SI sint tres anguli plani quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectae lineae aequales; fieri potest, ut ex iis quae rectas aequales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani ABC, DEF, GHK, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti; contineant autem ipsos aequales rectae lineae AB, BC, DE, EF, GH, HK, et AC, DF, GK jungantur. Dico fieri posse ut ex rectis ipsis AC, DF, GK aequalibus triangulum constituatur; hoc est duas reliquâ majores esse quomodocunque sumptas.

Si quidem igitur anguli ad B, E, H sint aequales, et AC, DF, GK aequales erunt^a, et duae reliquâ majores. sin minus, sint inaequales



anguli ad B, E, H, et sit angulus ad B non minor utrovis ex ipsis ad
^{b. 4. vel 24. 1.} E, H, non igitur minor est et recta AC utrâvis ex ipsis DF, GK^b.
 et manifestum est ipsam AC unâ cum altera ipsarum DF, GK, reliquâ
^{s. 23. 1.} esse majorem. Dico et DF, GK ipsâ AC majores esse. constituatur^c
 ad rectam lineam AB et ad punctum in ea B, angulo GHK aequalis
 angulus

LIBER UNDECIMUS.

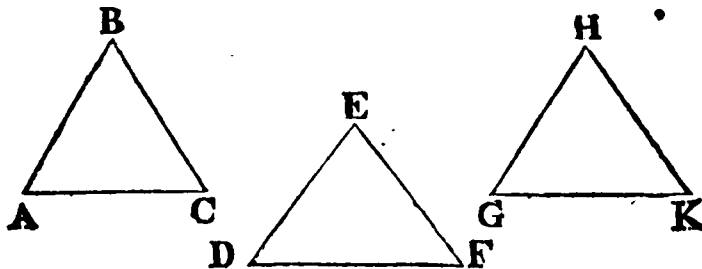
245

angulus ABL, et uni ipsarum AB, BC, DE, EF, GH, HK ponatur aequalis BL, et AL; LC jungantur. Quoniam igitur duae AB, BL duabus GH, HK aequales sunt, altera alteri, et angulos aequales continent, erit basis AL basi GK aequalis^a. et quoniam anguli ad E, H; ^{a. 4. 1.} angulo ABC majores sunt, quorum angulus GHK est aequalis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. et quoniam duae LB, BC duabus DE, EF aequales sunt, altera alteri, et angulus DEF angulo LBC major, basis DF basi LC major erit^d. ostensa autem est d. 24. 1. GK aequalis AL; ergo DF, GK, ipsis AL, LC sunt majores. sed AL, LC majores sunt ipsa AC^e; multo igitur DF, GK, ipsa AC majores e. 20. 1. sunt. Quare rectarum linearum AC, DF, GK duae reliqua majores sunt, quomodocunque sumptae; ac propterea fieri potest^f ut ex aequa- f. 22. 1. libus ipsis AC, DF, GK triangulum constituatur. Q. E. D.

PROP. XXIII. PROB.

EX tribus datis angulis planis, quorum duo reliqui sunt majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani ABC, DEF, GHK, quorum duo re-

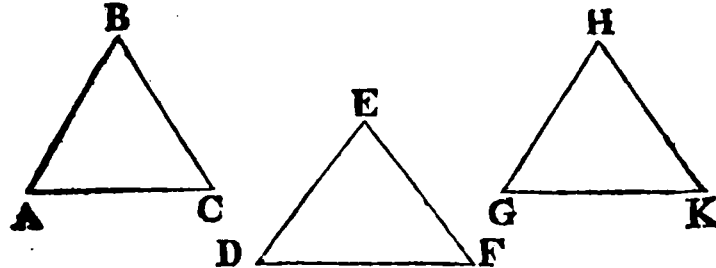


liquo sunt majores, quomodocunque sumpti, sintque tres anguli quatuor rectis

EUCLIDIS ELEMENTORUM

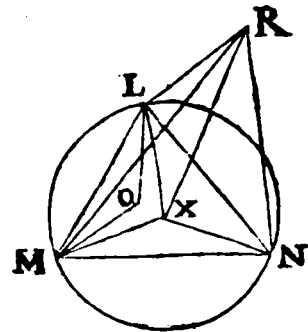
rectis minores. oportet ex aequalibus ipsis ABC, DEF, GHK solidum angulum constituere.

Abscindantur aequales AB, BC, DE, EF, GH, HK; et AC, DF, GK jungantur. fieri igitur potest ut ex aequalibus ipsis AC, DF,



- a. 22. 11. GK constituatur triangulum^a. Itaque constituatur^b LMN, ita ut AC quidem sit aequalis LM, DF vero ipsi MN, et praeterea GK ipsi NL;
 b. 22. 1.
 c. 5. 4. et circa triangulum LMN circulus LMN describatur^c; sumaturque ipsius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra.

Sit primum intra, et LX, MX, NX jungantur. Dico AB majorem esse LX. si enim non ita sit, vel AB erit aequalis LX, vel eâ minor; sit primum aequalis. Quoniam igitur AB est aequalis LX, atque est AB ipsi BC aequalis, et LX ipsi XM, duae AB, BC duabus LX, XM aequales erunt, altera alteri; et basis AC basi LM aequalis ponitur; quare angulus
 d. 8. 1. ABC angulo LXM est aequalis^d. eadem ratione et angulus quidem DEF est aequalis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL.

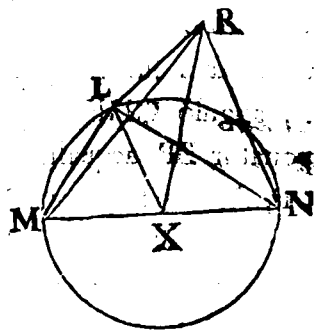


tres igitur anguli ABC, DEF, GHK tribus LXM, MXN, NXL aequales sunt. sed tres LXM, MXN, NXL quatuor rectis sunt aequales^e; ergo et tres ABC, DEF, GHK aequales erunt quatuor rectis. atqui
 e. 2. Cor. 15. 1. ponuntur

ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est aequalis. Dico praeterea neque AB minorem esse LX. si enim fieri potest, sit minor, et super rectam lineam LM ad partes ejus ad quas est centrum X constituatur triangulum LOM, cujus latera LO, OM aequalia sint ipsis AB, BC^b; et quoniam basis LM basi AC est b. 22. 1. aequalis, erit angulus LOM aequalis angulo ABC^d. ponitur autem recta d. 8. 1. AB, hoc est LO, minor ipsa LX; quare LO, MO cadent intra triangulum LXM, si enim congruerent ipsis LX, XM, vel caderent extra, aequales, vel majores essent ipsis LX, XM^f. angulus igitur LOM, hoc f. 21. 1. est ABC, major est angulo LXM^f. similiter ostendetur angulus DEF major angulo MXN, et angulus GHK major ipso NXL. tres igitur anguli ABC, DEF, GHK tribus LXM, MXN, NXL, hoc est quatuor rectis, sunt majores. anguli autem ABC, DEF, GHK ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. non igitur AB minor est quam LX. ostensum autem est neque esse aequalem. major igitur est AB quam LX.

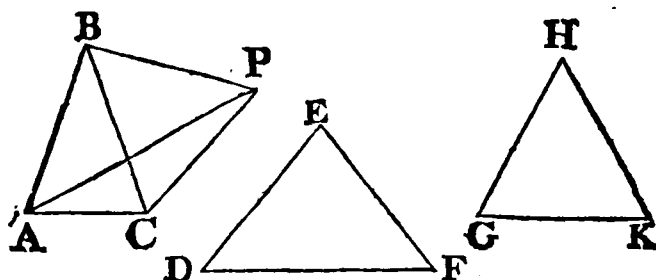
Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN, et sit X, atque XL jungatur. Dico rursus AB majorem esse LX. si enim non ita sit, vel AB est aequalis LX, vel ipsa minor. sit primum aequalis. duae igitur AB, BC, hoc est DE, EF duabus MX, XL, hoc est ipsi MN aequales sunt, sed MN ponitur aequalis DF; ergo DE, EF ipsi DF sunt aequales; quod fieri non potest*. non igitur AB est aequalis LX. similiter neque minor; multo enim magis absurdum sequeretur. major igitur est AB ipsa LX.

Sed sit centrum circuli X extra triangulum LMN, et LX, MX, NX jungantur. Dico et sic AB ipsa LX majorem esse. si enim non ita sit, vel

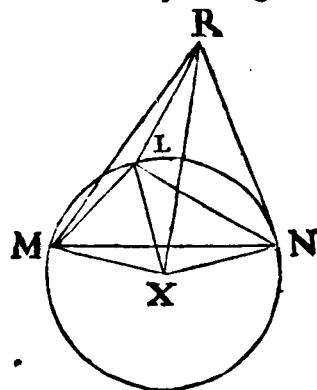


* 20. 1.

vel aequalis est, vel minor. sit primum aequalis, et omnino ut in primo casu ostendetur angulus quidem ABC aequalis angulo MXL, angulus vero GHK angulo LXN; totus igitur MXN est aequalis duobus ABC, GHK. sed ipsi ABC, GHK simul angulo DEF majores sunt; et angulus igitur MXN ipso DEF est major. quoniam vero duae DE, EF duabus MX, XN aequales sunt, et basis DF basi MN, erit MXN angulus angulo DEF aequalis^d. ostensus autem est major; quod est absurdum.



non igitur AB est aequalis LX. Dico vero neque minorem esse AB ipsâ LX. si enim fieri potest, sit minor; erit igitur, ut in primo casu ostensum, angulus quidem ABC angulo MXL major, angulus vero GHK major angulo LXN. constituatur ad rectam lineam BC, et ad punctum in ea B, angulo GHK aequalis angulus CBP, et ponatur BP aequalis ipsi HK, et jungantur CP, AP. et quoniam CB est aequalis GH, duae CB, BP aequales sunt duabus GH, HK, et aequales angulos continent; basis igitur CP basi GK five LN est aequalis. in triangulis autem isoscelibus ABC, MXL quoniam angulus ABC major est angulo MXL, erit angulus MLX ad basim major angulo ad basim ACB^e. eadem ratione quoniam GHK, hoc est angulus CBP, major est angulo LXN, et angulus XLN major erit ipso BCP.



BCP. totus igitur MLN major est toto ACP. et quoniam duae ML, LN duabus AC, CP sunt aequales, et angulus MLN major angulo ACP, erit et basis MN basi AP major^h. sed MN est aequalis DF; ergo et h. 24. 1. DF quam AP major erit. quoniam igitur duae DE, EF duabus AB, BP aequales sunt, altera alteri, et basis DF major basi AP, erit angulus DEF angulo ABP major^k. aequalis autem est angulus ABP angulis ABC, CBP, hoc est angulis ABC, GHK; ergo DEF angulus angulis ABC, GHK major est; sed et minor; quod fieri non potest. non igitur AB minor est quam LX. ostensum autem est neque esse aequalem; major igitur est AB quam LX.

Constituatur a puncto X, circuli LMN plano ad rectos angulos XR^l. 1. 12. 11. et quoniam in omnibus casibus AB ostensa est major LX, excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur aequale quadratum quod sit ex RX, et RL, RM, RN jungantur. quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum LMN circuli, et ad unamquamque ipsarum LX, MX, NX erit perpendicularis^m. et quoniam LX est aequalis XM, communis autem et ad rectos angulos XR, erit basis RL basi RM aequalis. eadem ratione et RN utrique ipsarum RL, RM est aequalis. tres igitur rectae lineae RL, RM, RN inter se aequales sunt. et quoniam quadratum ab XR ponitur aequale excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX, XR aequale. quadratis autem ex LX, XR aequaleⁿ n. 47. 1. est quadratum ex RL; rectus enim angulus est LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL aequale erit; ideoque AB ipsi RL est aequalis. Sed ipsi quidem AB aequalis est unaquaeque ipsarum BC, DE, EF, GH, HK; ipsi vero RL aequalis utraque ipsarum RM, RN. unaquaeque igitur ipsarum AB, BC, DE, EF, GH, HK unicuique ipsarum RL, RM, RN est aequalis. et quoniam duae RL, RM duabus AB, BC aequales sunt, et basis LM est aequalis basi AC; erit an-

d. 8. 1. gulus LRM aequalis ^d angulo ABC. eadem ratione et angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem NRL angulo GHK est aequalis. Ex tribus igitur angulis planis LRM, MRN, NRL, qui aequales sunt tribus datis ABC, DEF, GHK solidus angulus constitutus est ad R. Q. E. F.

PROP. A. THEOR.

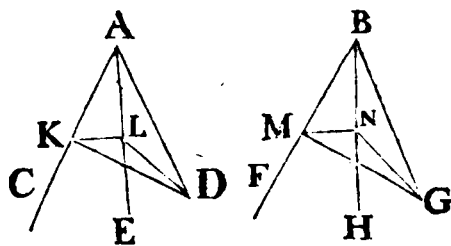
SI sint duo anguli solidi, quorum uterque continetur tribus angulis planis qui inter se aequales sunt, singuli singulis; plana in quibus sunt aequales anguli erunt ad se invicem similiter inclinata.

Sint duo anguli solidi ad puncta A, B; et contineatur angulus ad A tribus planis angulis CAD, CAE, EAD; angulus vero B contineatur tribus angulis planis FBG, FBH, HBG, quorum angulus quidem CAD angulo FBG est aequalis, angulus vero CAE angulo FBH, et EAD ipsi HBG. erunt plana in quibus sunt aequales anguli similiter ad se invicem inclinata.

Sumatur enim in recta linea AC punctum quodvis K, et a puncto K ad rectos angulos ipsi AC ducatur in plano quidem CAD recta KD, in plano vero CAE recta KL. est igitur angulus DKL inclinatio plani

a. 6. Def. 11. CAD ad ipsum CAE^a. in recta vero BF ipsi AK aequalis ponatur BM, et a puncto M ducantur in planis FBG, FBH rectae lineae MG, MN ad rectos angulos ipsi BF; erit igitur

angulus GMN inclinatio plani FBG ad ipsum FBH^a. jungantur LD, NG; et quoniam in triangulis KAD, MBG aequales sunt KAD, MBG.

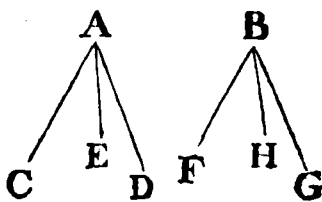


MBG anguli, ut et AKD, BMG, uterque enim est rectus; suntque latera AK, BM quae aequalibus angulis adjacent inter se aequalia; erit KD quidem aequalis ipsi MG, AD vero ipsi BG^b. eadem ratione, in b. 26. 1. triangulis KAL, MBN, erit KL aequalis MN, AL vero ipsi BN. in triangulis autem LAD, NBG duae LA, AD duabus NB, BG aequales ostensae sunt, altera alteri, et aequales continent angulos; basis igitur LD basi NG est aequalis^c. Denique in triangulis KLD, MNG, c. 4. 1. duae DK, KL duabus GM, MN sunt aequales, et est basis LD aequalis basi NG; angulus igitur DKL aequalis est angulo GMN^d. est d. 8. 1. vero angulus DKL inclinatio plani CAD ad planum CAE, et angulus GMN inclinatio plani FBG ad ipsum FBH, quae propterea plana ad se invicem sunt similiter inclinata^e. et eadem ratione reliqua plana in e. 7. Def. 11. quibus sunt aequales anguli ad se invicem similiter inclinata ostenduntur. Si igitur sint duo anguli solidi &c. Q. E. D.

PROP. B. THEOR.

SI sint duo anguli solidi, quorum uterque continetur tribus planis angulis qui inter se sunt aequales, singuli singulis, et similiter positi; erunt anguli solidi inter se aequales.

Sint anguli solidi ad puncta A, B; et contineatur angulus A tribus planis angulis CAD, CAE, EAD; angulus vero B contineatur tribus FBG, FBH, HBG; quorum CAD aequalis est ipsi FBG; CAE ipsi FBH; et EAD ipsi HBG. erit solidus angulus ad A solido angulo ad B aequalis.

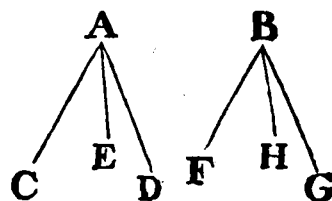


Applicato enim solido angulo ad A, solido angulo ad B; et pri-

mum applicato plano angulo CAD ipsi FBG, puncto quidem A posito in B, recta vero linea AC in ipsa BF; recta AD congruet rectae BG, quod angulus CAD aequalis sit angulo

FBG. quoniam vero inclinatio plani CAE ad planum CAD aequalis est inclinationi
 a. A. 11. plani FBH ad planum FBG^a, et congruit planum CAD plano FBG, congruet et planum CAE plano FBH; ac propterea recta linea AE congruet ipsi BH, quia scilicet angulus CAE est aequalis angulo FBH. et ostensa est recta AD congruere ipsi BG; quare planum EAD congruit plano HBG. Ergo solidus angulus ad A congruit solido angulo ad B, et in-

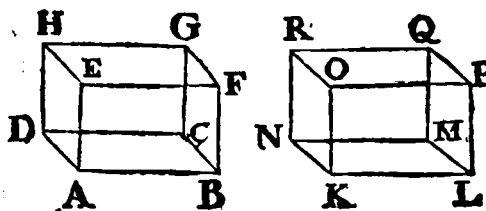
b. 8. Ax. 1. ter se sunt aequales^b. Q. E. D.



PROP. C. THEOR.

SOLIDAE figurae quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis, quarumque nullus angulus solidus pluribus quam tribus planis angulis continetur, sunt inter se aequales et similes.

Sint AG, KQ figurae solidae quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis; sitque planum AC simile et aequale plano KM; planum AF ipsi KP; BG ipsi LQ; GD ipsi QN; DE ipsi NO; et FH denique simile et aequale ipsi PR. Erit figura solida AG aequalis et similis ipsi KQ.



Quoniam

Quoniam angulus solidus ad A continetur tribus angulis planis BAD, BAE, EAD, qui, singuli singulis, ex hypothesi aequales sunt planis angulis LKN, LKO, OKN quibus continetur angulus solidus ad K; erit angulus solidus ad A angulo solido ad K aequalis^a. similiter a. B. 11. reliqui figurarum anguli solidi inter se aequales ostendentur. applicatâ igitur figurâ solida AG figurae solidae KQ, et primum applicatâ figura plana AC figurae planae KM, positâ scilicet recta AB in ipsa KL, congruet figura AC figurae KM, quod ipsae sint aequales et similes. congruent igitur rectae AD; DC, CB ipsis KN, NM, ML, singulae singulis; et puncta A, D, C, B punctis K, N, M, L, angulus autem solidus ad A congruet angulo solido ad K^a, quare et planum AF congruet plano KP, et figura AF figurae KP, quia sunt inter se aequales et similes. congruent igitur rectae AE, EF, FB rectis KO, OP, PL; et puncta E, F ipsis O, P. similiter ostendetur figura AH congruere ipsi KR, recta DH rectae NR, et punctum H puncto R. et quoniam solidus angulus ad B aequalis est solido angulo ad L, similiter ostendetur figura BG congruere figurae LQ, et recta CG rectae MQ, punctumque G puncto Q. Quoniam igitur plana, et latera omnia figurae solidae AG congruunt planis et lateribus figurae solidae KQ, erit AG aequalis et similis ipsi KQ. Et similiter aliae figurae solidae quaecunque quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis, quarumque nullus angulus solidus continetur pluribus quam tribus angulis planis, aequales et similes inter se ostendentur. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

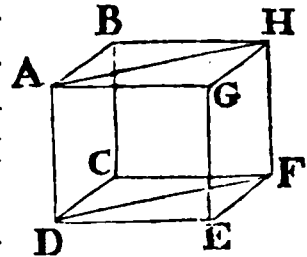
SI solidum sex parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, parallelogramma erunt similia et aequalia.

Solidum.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

Solidum enim CDGH parallelis planis AC, GF; BG, CE; FB, AE, contineatur. Dico opposita ejus plana, parallelogramma esse similia et aequalia.

- Quoniam enim duo plana parallela BG, CE a plano AC secantur, a. 16. 11. communes ipsorum sectiones parallelae sunt^a; ergo AB ipsi CD est parallela. rursus, quoniam duo plana BF, AE secantur a plano AC, communes ipsorum sectiones parallelae sunt^a, parallela igitur est AD ipsi BC. ostensa autem est AB parallela CD; ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, et unumquodque ipsorum CE, FG, GB, BF, AE parallelogrammum esse. jungantur AH, DF; et quoniam parallela est AB quidem ipsi DC, BH vero ipsi CF; erunt duae rectae lineae AB, BH sese tangentes duabus DC, CF sese tangentibus parallelae, et non in eodem plano; quare aequales angulos continebunt^b. angulus igitur ABH angulo DCF est aequalis. et quoniam duae AB, BH duabus DC, CF aequales sunt, et angulus ABH aequalis angulo DCF, erit basis AH basi DF aequalis, et ABH triangulum^c aequale triangulo DCF^c. et est ipsius quidem ABH trianguli duplum^d BG parallelogrammum; ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE; erit igitur BG parallelogrammum aequale et simile parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus, et AC parallelogrammum parallelogrammo GF, et parallelogrammum AE parallelogrammo BF aequale esse et simile. Si igitur solidum &c. Q. E. D.



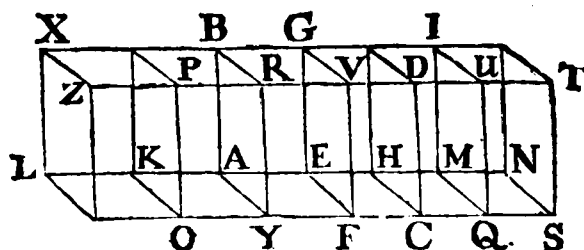
PROP. XXV. THEOR.

SI solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum

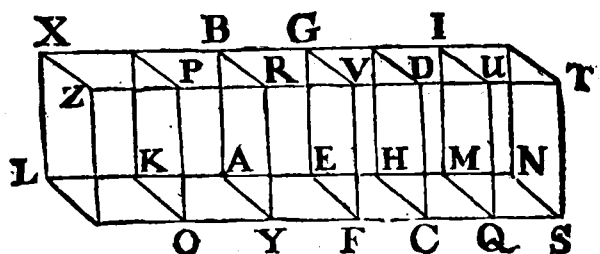
Solidum enim parallelepipedum ABCD, plano EV secetur oppositis planis AR, HD parallelo. Dico ut basis AEFY ad basim EHCF, ita esse ABFV solidum ad solidum EGCD.

Producatur enim AH ex utraque parte; et ponantur ipsi quidem EH aequales quotcunque HM, MN; ipsi vero EA aequales quotcunque AK, KL, et compleantur parallelogramma LO, KY, HQ, MS, et solida LP, KR, HU, MT. quoniam igitur aequales inter se sunt LK, KA, AE rectae lineae, erunt et parallelogramma LO, KY, AF inter se aequalia^a; itemque aequalia inter se parallelogramma KX, a. 36. r. KB, AG, et adhuc parallelogramma LZ, KP, AR inter se aequalia^b; opposita enim sunt. eadem ratione et parallelogramma^a b. 24. II. EC, HQ, MS sunt aequalia inter se; itemque parallelogramma



^a HG, HI, IN inter se aequalia; et insuper parallelogramma^b HD, MU, NT. tria igitur plana solidi LP aequalia et similia sunt tribus planis solidi KR, atque etiam solidi AV. sed tria tribus oppositis sunt aequalia et similia^b, et nullus ex ipsorum angulis solidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo tria solida LP, KR, AV inter se aequalia erunt^c. eadem ratione et tria solida ED, HU, MT sunt aequalia inter se. quam multiplex igitur est basis LF ipsius AF basis, tam multiplex est et LV solidum solidi AV. eadem ratione quam multiplex est NF basis ipsius basis HF, tam multiplex est et solidum NV ipsius ED solidi. et si basis LF est aequalis basi NF, et solidum LV solido NV.

c. c. 11. NV aequale erit^c; et si basis LF superat NF basim, et solidum LV solidum NV superabit; et si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF, FH, et duobus solidis AV, ED; basis quidem AF et AV solidi sumpta sunt utcumque aequae multiplicia, videlicet basis LF et solidum LV; basis vero FH et ED solidi



sumpta sunt alia utcumque aequae multiplicia, nempe basis FN et solidum NV. et demonstratum est si basis LF superat basim FN et LV solidum solidum NV superare; et si aequalis, aequale; et si minor, minus. est igitur ut AF basis ad basim FH, ita AV solidum ad solidum ED. Quare si solidum &c. Q. E. D.

PROP. XXVI. PROB.

AD datam rectam lineam, et ad datum in ipsa punctum dato angulo solido tribus planis angulis contento, aequalem angulum solidum constituere.

Sit data quaedam recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, et datus solidus angulus ad D qui angulis planis EDC, EDF, FDC continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, et ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D aequalem angulum solidum constituere.

Sumatur enim in recta linea DF quodvis punctum F, a quo ad planum

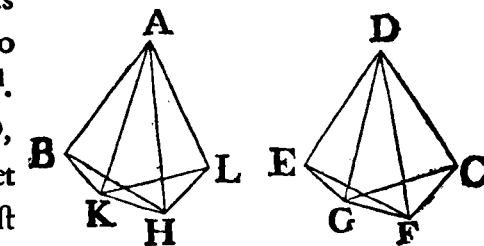
planum per ED, DC transiens ducatur perpendicularis FG^a, et plano a. 11. 11. in puncto G occurrat; jungaturque DG, et ad rectam lineam AB, et ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC aequalis angulus constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur aequalis BAK^b. b. 23. 1. deinde ipsi DG ponatur aequalis AK, et a puncto K plano BAL ad rectos angulos erigatur KH^c; ponaturque ipsi GF aequalis KH, et c. 12. 11. HA jungatur. Dico angulum solidum ad A qui angulis planis BAL, BAH, HAL continetur, aequalem esse angulo solido ad D, planis angulis EDC, EDF, FDC contento.

Sumantur enim aequales rectae lineae AB, DE, et jungantur HB, KB, FE, GE. Quoniam igitur FG perpendicularis est ad subiectum planum, et ad omnes rectas lineas

quae ipsam tangunt, et in subiecto sunt plano, rectos faciet angulos^d.

uterque igitur angulorum FGD, FGE rectus est. eadem ratione, et uterque ipsorum HKA, HKB est rectus. et quoniam duae KA, AB

duabus GD, DE aequales sunt, altera alteri, et angulos aequales continent, erit basis BK basi EG aequalis^e. est autem et KH aequalis GF^e, c. 4. 1. atque angulos rectos continent; aequalis igitur erit HB ipsi FE^e. rursus, quoniam duae AK, KH duabus DG, GF aequales sunt, et rectos continent angulos; erit basis AH basi DF aequalis; estque AB aequalis DE; duae igitur HA, AB duabus FD, DE sunt aequales, et basis HB est aequalis basi FE; ergo angulus BAH angulo EDF aequalis erit^f. eadem ratione, et angulus HAL angulo FDC est aequalis. quan- f. 8. 1. doquidem si assumamus aequales AL, DC, et jungamus KL, HL, GC, FC, quoniam totus angulus BAL est aequalis toti EDC, quorum BAK ipsi EDG ponitur aequalis; erit reliquus KAL aequalis reliquo GDC.



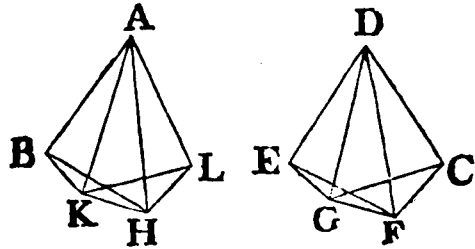
d. 3. Def. 11.

K k

et

EUCLIDIS ELEMENTORUM

et quoniam duae KA, AL duabus GD, DC aequales sunt, et angulos
 e. 4. 1. aequales continent, basis KL basi GC aequalis erit^e. est autem et
 KH aequalis GF, duae igitur LK, KH duabus CG, GF sunt aequa-
 les; angulosque rectos continent;
 ergo basis HL aequalis est basi
 FC. rursus, quoniam duae HA,
 AL duabus FD, DC aequales
 sunt, et basis HL aequalis basi FC,
 erit angulus HAL aequalis angulo



f. 8. 1. FDC^f. quoniam igitur tres an-
 guli plani BAL, BAH, HAL quibus continetur angulus solidus ad A,
 aequales sunt tribus angulis planis EDC, EDF, FDC quibus angulus
 solidus ad D continetur, singuli singulis, et similiter sunt positi; erit
 g. B. 11. solidus angulus ad A angulo solido ad D aequalis^g. Ad datam igitur
 rectam lineam, et ad datum in ipsa punctum dato angulo solido quibus
 planis angulis contento aequalis angulus solidus constitutus est. Q. E. F.

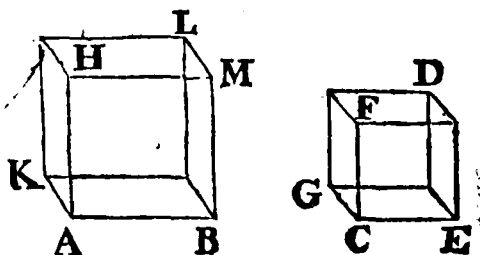
PROP. XXVII. PROB.

A Data recta linea dato solido parallelepipedo simile,
 et similiter positum solidum parallelepipedum de-
 scribere.

Sit recta quidem linea AB, datum vero solidum parallelepipedum
 CD. oportet a data recta linea AB dato solido parallelepipedo CD si-
 mile, et similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Constituatur enim ad rectam lineam AB, et ad datum in ipsa punc-
 a. 26. 11. tum A angulo solido ad C aequalis angulus^a qui planis angulis BAK,
 KAH, HAB, contineatur, ita ut angulus quidem BAK aequalis sit
 angulo ECG, angulus vero KAH angulo GCF, et adhuc angulus HAB
 angulo

angulo FCE; et fiat ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH^b; ergo ex aequali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH^c. compleatur parallelogrammum BH, et AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, circa aequales angulos ECG, BAK latera sunt proportionalia; simile igitur est parallelogrammum BK parallelogrammo EG. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, et parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt; sed tria tribus oppositis sunt similia et aequalia^d. et quoniam anguli plani quibus continentur solidorum anguli solidi, sunt inter se aequales et similiter positi, erunt et anguli solidi inter se aequales^e. e. B. II. Ergo AL solidum solido CD simile^f erit. A data igitur recta linea AB f. II. Def. II. dato solido parallelepipedo CD, solidum parallelepipedum AL simile, et similiter positum descriptum est. Q. E. F.



PROP. XXVIII. THEOR.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

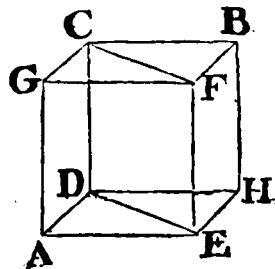
Sit enim solidum parallelepipedum AB, et oppositorum planorum AH, GB diagonales sint DE, CF quae sc. ductae sunt inter aequales angulos parallelogrammorum AH, GB. et quoniam utraque CD, FE parallela est ipsi GA, non in eodem cum ipsa plano, erunt CD, FE inter se parallelae^a; quare diagonales CF, DE sunt in plano in quo

K k 2

sunt

b. 16. 11. sunt hae parallelae; et inter se parallelae erunt^b. Dico igitur solidum AB a plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim aequale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero DAE triangulo DHE^c; est autem et CA parallelogrammum parallelogrammo BE aequale^d, oppositum enim est; et parallelogrammum GE parallelogrammo CH: erit prisma contentum duobus triangulis CGF, DAE, et tribus parallelogrammis CA, GE, EC aequale prismati quod continetur duobus triangulis CBF, DHE, et tribus parallelogrammis BE, CH, EC^e; etenim planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis continentur, et nullus ex ipsorum angulis solidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo totum AB solidum a plano CDEF bifariam secatur. Q. E. D.

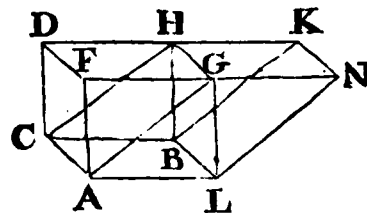


PROP. XXIX. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae in eadem sunt basi, et eadem altitudine, quorum insistentes rectae sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt aequales.

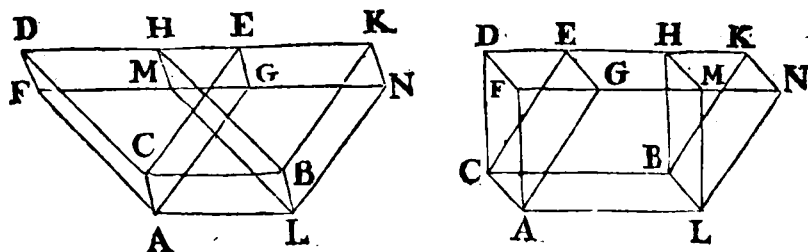
Vid. Fig. 2, 3. Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda AH, AK, eadem altitudine, quorum insistentes rectae AF, AG, LM, LN; CD, CE, BH, BK sint in eisdem rectis lineis FN, DK. Dico solidum AH solido AK aequale esse.

Vid. Fig. 1. Primo habeant parallelogramma DG, HN basi AB opposita, latus commune HG. quoniam igitur solidum AH sectum est plano AGHC per diagonales



gonales AG, CH oppositorum planorum ALGF, CBHD, bifariam fecabitur AH a plano AGHC^a. duplum igitur est solidum AH prismatis a. 28. 11. quod triangulis ALG, CBH continetur. eadem ratione, quoniam solidum AK sectum est plano LGHB per diagonales LG, BH oppositorum planorum ALNG, CBKH, erit solidum AK duplum ejusdem prismatis quod triangulis ALG, CBH continetur. solidum igitur AH solidò AK est aequale.

Non autem habeant parallelogramma basi opposita videlicet DM, EN latus commune. quoniam igitur parallelogrammum est utrumque ipsorum CH, CK, erit CB utrique rectarum DH, EK aequalis^b; ergo b. 34. 1. et DH est aequalis EK. communis addatur, aut auferatur HE; erit



igitur DE aequalis HK. quare et CDE triangulum triangulo BHK est aequale^c. parallelogrammum autem DG est aequale parallelogrammo HN^d. eadem ratione et AFG triangulum est aequale triangulo LMN. et est parallelogrammum quidem CF aequale parallelogrammo BM, parallelogrammum vero CG parallelogrammo BN^e; opposita enim e. 24. 11. sunt. Ergo et prisma contentum duobus triangulis AFG, CDE, et tribus parallelogrammis AD, DG, GC est aequale^f prismati quod duobus triangulis LMN, BHK et tribus parallelogrammis BM, MK, KL continetur. ablato igitur prismate LMN, BHK ex solido cujus basis est parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi, FDKN; et ex eodem solido

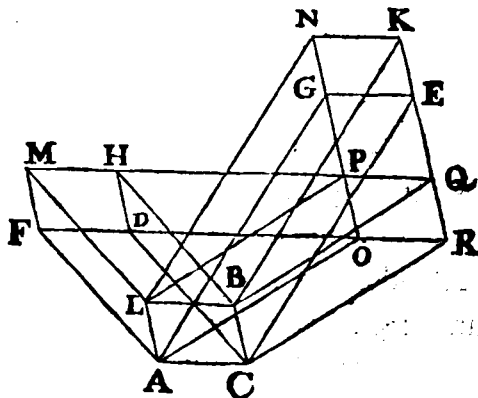
solido ablato prismate AFG, CDE; erit reliquum solidum, parallelepipedum sc. AH aequale reliquo solido, parallelepipedo sc. AK. solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae in eadem sunt basi, et eadem altitudine, quorum insistentes rectae non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt aequalia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM, CN, et eadem altitudine, quorum insistentes rectae AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK, non sunt in eisdem rectis lineis. Dico solidum CM, solido CN aequale esse.

Producantur enim FD, MH et NG, KE, et conveniant inter se in punctis O, P, Q, R; et AO, LP, BQ, CR jungantur. quoniam



igitur planum LBHM parallelum est plano opposito ACDF, et planum quidem LBHM illud est in quo sunt parallelae rectae LB, MHPQ, in quo etiam est figura BLPQ; planum vero ACDF est illud in quo sunt parallelae AC, FDOR, in quo etiam est figura CAOR; erunt figurae BLPQ,

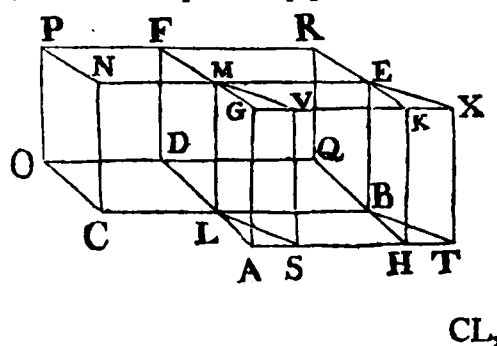
BLPQ, CAOR in planis inter se parallelis. similiter quoniam planum ALNG opposito plano CBKE parallelum est, et planum quidem ALNG illud est in quo sunt parallelae AL, OPGN, in quo etiam est figura ALPO; planum vero CBKE est illud in quo sunt parallelae CB, RQEK, in quo etiam est figura CBQR; erunt figurae ALPO, CBQR in planis inter se parallelis. et sunt plana ACBL, ORQP inter se parallela; solidum igitur CP est parallelepipedum. solidum autem CM cujus basis ACBL, et parallelogrammum ipsi oppositum FDHM, aequale est ^a solido CP cujus basis est parallelogrammum ACBL, et ei ^a 29. 11. oppositum ORQP; in eadem enim sunt basi, et ipsorum insistentes rectae AF, AO, CD, CR; LM, LP, BH, BQ sunt in eisdem rectis lineis FR, MQ. sed solidum CP est aequale ^a solido CN, etenim in eadem sunt basi ACBL, et eorum insistentes rectae AO, AG, LP, LN; CR, CE, BQ, BK sunt in eisdem rectis lineis ON, RK. Ergo solidum CM, solido CN aequale erit. Solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

PROP. XXXI. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae in aequalibus sunt basibus, et eadem altitudine, inter se sunt aequalia.

Sint in aequalibus basibus AB, CD solida parallelepipeda AE, CF, et eadem altitudine. Dico solidum AE solido CF aequale esse.

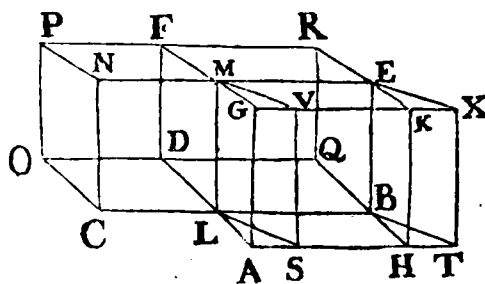
Sint primo insistentes rectae lineae ad rectos angulos basibus AB, CD. ponantur autem solida ita ut bases sint in eodem plano, et ut in directum sint latera



CL,

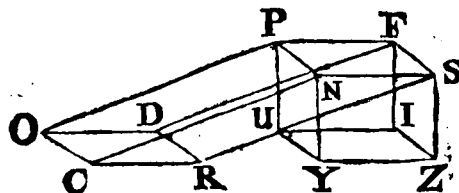
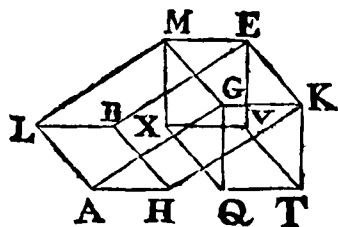
- CL, LB; recta igitur LM quae insistit puncto L communis erit solidum
 a. 13. 11. dis AE, CF^a; reliquae autem insistentes rectae sint AG, HK, BE; DF, OP, CN. et primo fit angulus ALB aequalis angulo CLD; in directum igitur erunt AL, LD. producantur OD, HB et conveniant in Q, et compleatur solidum parallelepipedum LR cuius basis est parallelogrammum LQ, et LM una ex insistentibus rectis. quoniam igitur AB parallelogrammum parallelogrammo CD est aequale, erit ut basis AB ad
 b. 7. 5. basim LQ, ita basis CD ad eandem LQ^b. et quoniam solidum parallelepipedum AR sectum est plano LMEB oppositis planis AK, DR parallelo, erit ut AB basis ad basim LQ, ita solidum AE ad solidum
 c. 25. 11. LR^c. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum CR sectum est plano LF parallelo planis oppositis CP, BR, ut basis CD ad basim LQ, ita erit solidum CF ad solidum LR. sed ut basis AB ad basim LQ, ita ostensa fuit basis CD ad LQ basim. ut igitur solidum AE ad LR solidum, ita solidum CF ad solidum LR. est igitur solidum AE solidum CF aequale^d.
 d. 9. 5. dum AE solido CF aequale^d.

Sed sint in aequalibus basibus SB, CD solida parallelepipeda SE, CF, et eadem altitudine, sintque rectae insistentes ad rectos angulos basibus; positisque basibus SB, CD in eodem plano, ita ut in directum sint CL, LB, non sit angulus SLB aequalis angulo CLD; erit solidum SE aequale solido CF. producantur DL, TS et conveniant in A, et per B ducatur ipsi DA parallela BH; productae vero HB, OD in Q conveniant; et compleantur solida AE, LR. solidum igitur AE cuius basis est LE parallelogrammum, et oppositum ipsi AK, aequale
 e. 29. 11. est solido SE cuius basis est LE et oppositum ipsi SX^e; in eadem enim sunt basi LE, et eadem altitudine, et eorum insistentes rectae lineae videlicet



delicet LA, LS, BH, BT; MG, MV, EK, EX in eisdem sunt rectis lineis AT, GX. quoniam vero parallelogrammum AB aequale est ipsi SB^f, etenim in eadem sunt basi LB, et in eisdem parallelis LB, AT; f. 35. 1. est autem basis SB aequale basi CD; erit basis AB basi CD aequalis. et est angulus ALB angulo CLD aequalis; erit igitur, ex prius ostensis, solidum AE aequale solido CF. solidum autem AE aequale ostensum est solido SE. Ergo et solidum SE solido CF est aequale.

Sed non sint insistentes rectae AG, HK, BE, LM; CN, RS, DF, OP ad rectos angulos ipsis AB, CD basibus. Dico rursus solidum AE aequale esse solido CF. ducantur ^g a punctis G, K, E, M; N, S, F, P; g. 11. 11. ad subiectum planum perpendiculares GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FI, PU; et plano in punctis Q, T, V, X; Y, Z, I, U, occurrant, et jungantur QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, IU, UY. Quoniam igitur



tur GQ, KT ad rectos sunt angulos eidem plano, erunt ipsae inter se parallelae^h. et parallelae sunt MG, EK; plana igitur MQ, ET^h. 6. 11. quorum unum transit per MG, GQ, et alterum per EK, KT quae ipsis parallelae sunt et non in eodem plano, sunt inter se parallelaⁱ. ea-i. 15. 11. dem ratione, et plana MV, GT inter se parallela sunt. solidum igitur QE est parallelepipedum. similiter ostendetur solidum YF parallelepipedum esse. est autem, ex praemissis, solidum EQ aequale solido FY, in aequalibus enim sunt basibus MK, PS, et eadem altitudine, et eorum rectae insistentes ad rectos angulos sunt basibus. sed EQ solidum solido AE est aequale^k; solidum vero FY aequale est solido CF^k. si-^{k. 29. aut}
^{30. 11.}

L 1

quidem

quidem in eadem sunt basi, et eadem altitudine. Ergo et solidum AE solido CF aequale erit. Solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

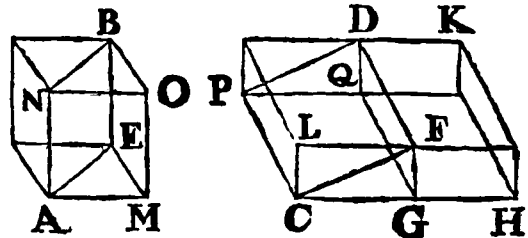
PROP. XXXII. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint solida parallelepipeda AB, CD quae eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse ut bases, hoc est ut AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad CD solidum.

Applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE aequale FH, ita ut angulus

a. Cor. 45. 1. LCG^a; et compleatur solidum parallelepipedum GK cujus basis sit FH, et una ex rectis insistentibus sit FD.



b. 31. 11. solidum igitur AB solido GK est aequale^b, in aequalibus enim sunt basibus AE, FH, et eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipedum CK plano DG secatur oppositis planis parallelo, erit ut HF

a. 25. 11. basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum^c. atque est basis quidem FH basi AE aequalis, solidum vero GK aequale solido AB. est igitur et ut AE basis ad CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda &c. Q. E. D.

COR. Hinc prismata quorum bases sunt triangula, et quae eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases.

Habeant enim prismata quorum bases sunt triangula AEM, CFG, ipsisque opposita NBO, PDQ eandem altitudinem; et compleantur parallelogramma AE, CF, et solida parallelepipeda AB, CD, in quorum primo

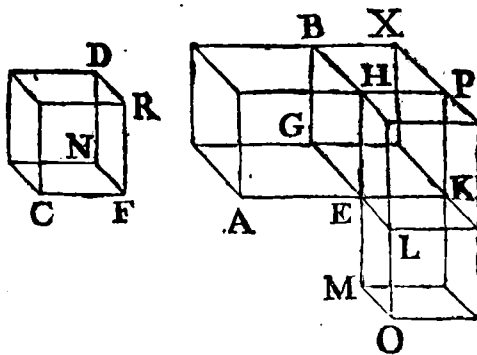
primo sit MO una ex rectis insistentibus, GQ vero in altero. Quoniam igitur solida parallelepipeda AB , CD eandem habent altitudinem, erunt ea inter se ut basis AE ad basim CF ; quare prismata quae ipsorum sunt dimidia^d sunt inter se ut basis AE ad CF basim, hoc est ut tri-d. 28. 11. angulum AEM ad triangulum CFG .

PROP. XXXIII. THEOR.

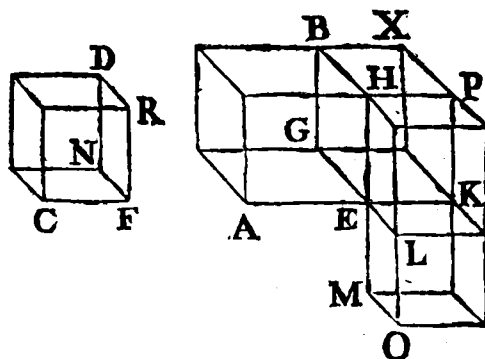
SIMILIA solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB , CD ; latus autem AE homologum sit lateri CF . Dico solidum AB ad CD solidum triplicatam rationem habere ejus quam habet AE ad CF .

Producantur enim EK , EL , EM in directum ipsis AE , GE , HE ; et ipsi quidem CF aequalis ponatur EK , ipsi vero FN aequalis EL ; et adhuc ipsi FR aequalis EM ; et KL parallelogrammum, et KO solidum compleantur. quoniam igitur duae KE , EL duabus CF , FN aequales sunt; sed et angulus KEL angulo CFN est aequalis, quia et angulus AEG ipsi CFN aequalis est ob similitudinem solidorum AB , CD ; erit et KL parallelogrammum simile et aequale parallelogrammo CN . eadem ratione et parallelogrammum MK aequale est et simile parallelogrammo CR , et adhuc parallelogrammum OE ipsi FD parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi KO tribus paral-



- lelogrammis solidi CD aequalia et similia sunt. sed tria tribus op-
- a. 24. 11. positis aequalia sunt et similia^a. solidum igitur KO aequale est et si-
- b. C. 11. mile solido CD^b. compleatur GK parallelogrammum, et a basibus qui-
- dem GK, KL parallelogrammis, altitudine vero eadem cum ipso AB, so-
- lida compleantur EX, LP ita scilicet ut recta EH sit una ex earum rectis
- insistentibus. et quoniam ob similitudinem solidorum AB, CD, et per-
- mutando, est ut AE ad CF, ita EG ad FN, et EH ad FR; aequal-
- is autem FC ipsi EK, et FN ipsi EL, et FR ipsi EM; erit igitur ut
- AE ad EK, ita EG ad EL, et HE ad EM. sed ut AE quidem ad
- c. 1. 6. EK, ita^c AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; ut au-
- tem GE ad EL, ita GK ad KL; et ut HE ad EM, ita PE ad KM.
- et ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK
- ad KL, et PE ad KM. sed ut
- AG quidem ad GK, ita AB soli-
- dum ad solidum EX^d; ut au-
- d. 25. 11. tem GK ad KL, ita solidum EX
- ad PL solidum; et ut PE ad
- KM, ita PL solidum ad solidum
- KO. et ut igitur solidum AB
- ad solidum EX, ita EX ad PL,
- et PL ad KO. si autem sint



quatuor magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam tripli-

catam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam. ergo et

AB solidum ad solidum KO triplicatam habet rationem ejus, quam AB

ad EX. sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelo-

grammum GK, et AE recta linea ad ipsam EK. quare et AB solidum

ad solidum KO triplicatam rationem habebit ejus, quam AE habet ad

EK. aequale autem est solidum KO solido CD, et recta linea EK rec-

tae CF est aequalis. Ergo et AB solidum ad solidum CD triplicatam ha-

bet

bet rationem ejus, quam ipsius latus homologum AE habet ad homologum latus CF. Q. E. D.

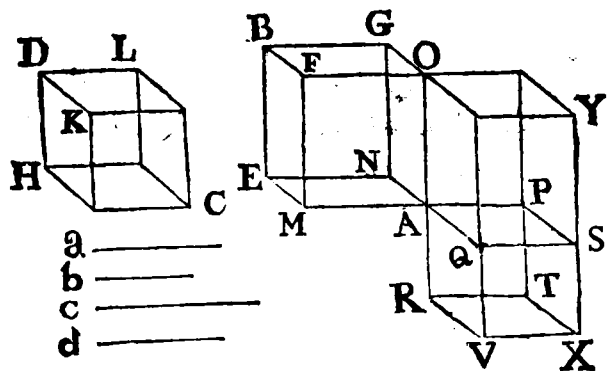
COR. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum quod fit à prima ad solidum quod à secunda, simile et similiter descriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam prima ad secundam.

c. 11. Def. 5.

PROP. D. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae continentur parallelogrammis quae inter se sunt aequiangula, singula singulis, hoc est quorum anguli solidi sunt inter se aequales; habent rationem inter se eandem ei quae composita est ex laterum rationibus.

Sint solida parallelepipeda AB, CD, quorum AB continetur parallelogrammis AE, AF, AG, quae aequiangula sunt, singula singulis, pa-



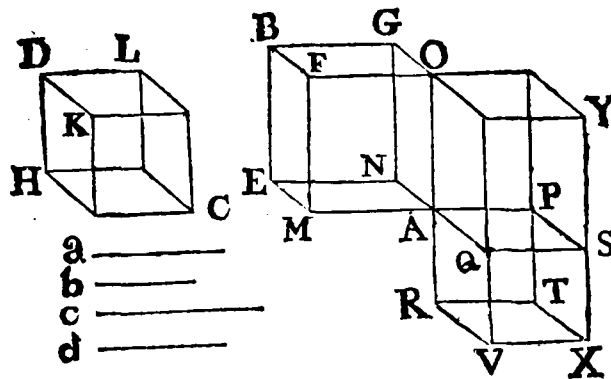
rallelogrammis CH, CK, CL quibus continetur solidum CD. erit ratio quam habet solidum AB ad solidum CD eadem ei quae composita est

ex

EUCLIDIS ELEMENTORUM

ex rationibus laterum AM ad DL, AN ad DK, et AO ad DH. producantur enim MA, NA, OA ad P, Q, R, ita ut AP aequalis sit ipsi DL, AQ ipsi DK, et AR ipsi DH; et compleatur solidum parallelepipedum AX contentum sc. parallelogrammis AS, AT, AV ipsis CH, CK, CL similibus et aequalibus, singula singulis. solidum igitur AX

a. c. 11. solido CD est aequale^a. compleatur etiam solidum AY cujus basis est AS, una vero ex rectis insistentibus est AO. exponatur autem recta quaevis a, et ut MA ad AP, ita fiat a ad rectam b; ut vero NA ad AQ, ita fiat b ad c; et ut OA ad AR, ita fiat c ad d. quoniam igitur



tur AE parallelogrammum aequiangulum est ipsi AS, erit AE ad AS, ut recta a ad ipsam c; hoc enim in 23. 6. ostensum est. solida vero AB, AY quae inter plana parallela BOY, EAS constituuntur, eadem sunt altitudine. est igitur solidum AB ad solidum AY, ut basis AE ad

b. 32. 11. basim AS^b, hoc est ut recta a ad rectam c. solidum vero AY est ad

c. 25. 11. solidum AX, ut basis OQ ad basim QR^c, hoc est ut recta OA ad ipsam AR, hoc est ut recta c ad ipsam d. quoniam igitur solidum AB est ad solidum AY, ut recta a ad rectam c; ut vero solidum AY ad solidum AX, ita est recta c ad ipsam d; erit ex aequali solidum AB ad solidum AX five CD, ut recta a ad rectam d. ratio autem a ad d composita

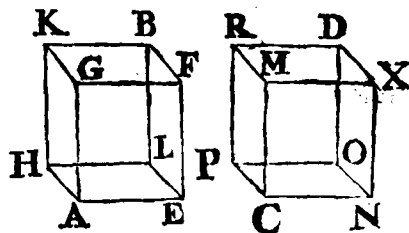
composita dicitur ^d ex rationibus a ad b, b ad c, et c ad d, quae eae-d.A.Def. 5. dem sunt, singulae singulis, rationibus laterum MA ad AP, NA ad AQ, et OA ad AR. latera autem AP, AQ, AR, aequalia sunt lateribus DL, DK, DH, singula singulis. Ergo solidum AB habet ad solidum CD rationem eandem ei quae composita est ex rationibus laterum AM ad DL, AN ad DK, et AO ad DH. Q. E. D.

PROP. XXXIV. THEOR.

AEQUALIUM solidorum parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus; et quorum solidorum parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus, ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia solida parallelepipeda AB, CD; dico ipsorum bases esse reciproce proportionales altitudinibus; hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem.

Sint enim primum insistentes AG, EF, LB, HK; CM, NX, OD, PR ad rectos angulos basibus ipsorum. Dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. si igitur basis EH basi NP sit aequalis, quoniam et AB solidum aequale est solido CD, erit et CM aequalis ipsi AG. si enim basibus EH, NP aequalibus existentibus non sint AG, CM altitudines aequales, neque AB solidum solido CD aequale erit. ponitur autem aequale. non igitur inaequalis est altitudo CM altitudini AG; igitur est aequalis; ac propterea ut EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG.

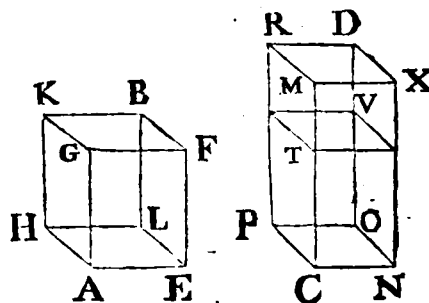


At vero non sit basis EH aequalis basi NP, sed EH sit major. est autem AB solidum solido CD aequale; ergo major est CM ipsâ AG;

EUCLIDIS ELEMENTORUM

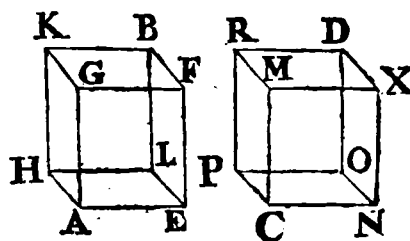
AG; si enim non, neque rursus forent solida AB, CD aequalia; ponuntur autem aequalia. itaque ponatur CT aequalis ipsi AG, et a basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum CV compleatur. Quoniam igitur solidum AB solido CD est aequale, erit ut AB solidum ad solidum CV, ita CD

- a. 7. 5. solidum ad solidum CV^a. sed ut AB solidum ad solidum CV, ita basim EH ad NP basim^b; aequae alta enim sunt AB, CV solida; ut autem solidum CD ad ipsum CV, ita MP basim ad basim PT^c, et recta MC ad ipsam CT^d; et igitur ut basim EH



ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT aequalis AG; ergo et ut EH basim ad basim NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.

Rursus solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sint reciproce proportionales altitudinibus; sitque ut EH basim ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; dico solidum AB solido CD aequale esse. sint enim rursus insistentes ad rectos angulos basibus. et siquidem basim EH sit aequalis basi NP, estque ut EH basim ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem; erit solidi CD altitudo al-

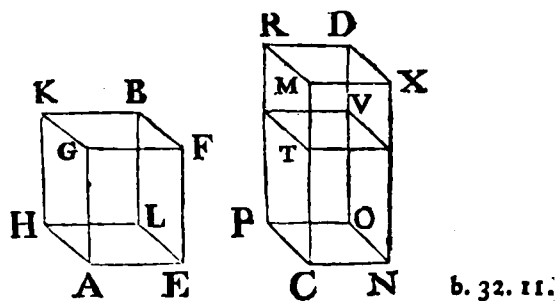


- e. A. 5. titudini solidi AB aequalis^e. solida autem parallelepipeda, quae sunt in aequalibus basibus et eadem altitudine inter se aequalia sunt^f; ergo solidum AB solido CD est aequale.

Sed non sit EH basim aequalis basi NP, et sit EH major. quoniam igitur

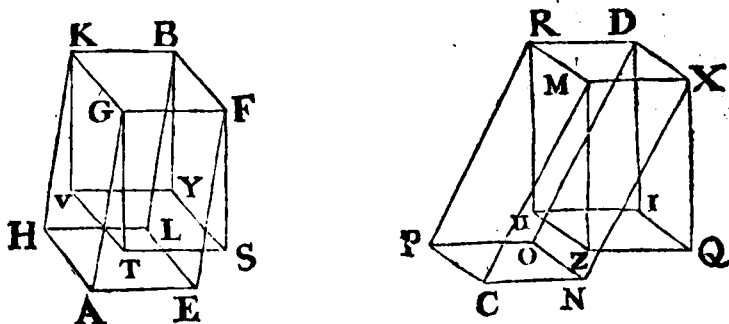
igitur est ut basis EH ad basim NP, ita CM altitudo solidi CD ad AG altitudinem solidi AB; erit CM major ^e ipsa AG. ponatur rursus ^e. A. 5.

ipsi AG aequalis CT, et similiter solidum CV compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP, ita CM ad ipsam AG; aequalis autem est AG ipsi CT, erit ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed ut basis EH ad NP basim, ita ^b AB solidum ad solidum CV; aequae



alta enim sunt solida AB, CV; ut autem MC ad CT, ita et MP basis ad basim PT, et solidum CD ad solidum CV^c. et igitur ut solidum ^e. 25. 11. AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. utrumque igitur solidorum AB, CD ad ipsum CV eandem rationem habet; solidum igitur AB solido CD est aequale. Q. E. D.

Non sint autem stantes FE, BL, GA, KH; XN, DO, MC, RP ad rectos angulos basibus solidorum; et a punctis F, B, K, G; X, D, R, M ad plana basium EH, NP ducantur perpendiculares, quae planis



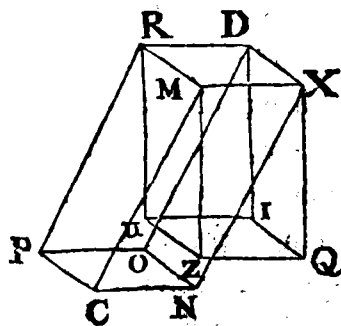
in punctis S, Y, V, T; Q, I, U, Z occurrant, et compleantur solida FV, XU, quae parallelepipeda erunt, ut in casu ultimo Prop. 31. hujus ostensum fuit. Dico et sic aequalibus existentibus solidis AB, CD, ba-

M m

ses

EUCLIDIS ELEMENTORUM

g. 29. aut
30. II.



Rurfus, solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sint reciproce proportionales altitudinibus, fitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB. Dico solidum AB solido CD aequale esse. Iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; et basis quidem

dem

dem EH est aequalis basi FK; NP vero ipsi XR; erit ut FK basis ad basim XR, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eadem autem sunt altitudines solidorum AB, BT, et ipsorum CD, DZ; est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorum BT, DZ parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus; ipsorum autem insistentes sunt ad rectos angulos basibus; ergo, ut prius ostensum, BT solidum solido DZ est aequale. sed solidum quidem BT aequale ε est solido BA, so- g. 29. aut 30. 11, solidum vero DZ est aequale solido ε DC, siquidem in iisdem sunt basibus, et eadem altitudine. Ergo et solidum AB solido CD est aequale. Q. E. D.

PROP. XXXV. THEOR.

SI sint duo anguli plani aequales, et in ipsorum verticibus sublimes rectae lineae insistant, quae cum rectis lineis a principio positis angulos contineant aequales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quaevis puncta, atque ab ipsis ad plana in quibus sunt anguli, perpendiculares ducantur; et a punctis quae a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectae lineae; hae cum sublimibus aequales angulos continebunt.

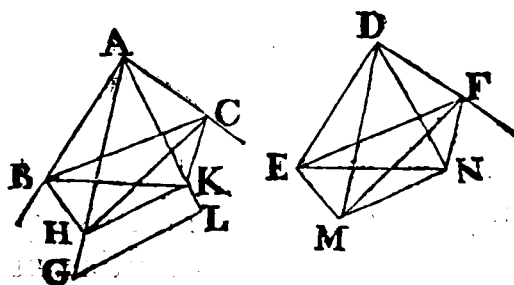
Sint duo anguli plani aequales BAC, EDF; et a punctis A, D sublimes rectae lineae AG, DM constituentur, quae cum rectis lineis a principio positis aequales angulos contineant, alterum alteri; angulum quidem GAB aequalem angulo MDE, angulum vero GAC angulo MDF aequalem; et sumantur in ipsis AG, DM quaevis puncta G, M, a quibus ad plana per BAC, EDF ducantur perpendiculares GL, MN

M m 2

occurrentes

occurrentes planis in punctis L, N; et LA, ND jungantur. Dico angulum GAL angulo MDN aequalem esse.

Ponatur ipsi DM aequalis AH, et per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum BAC; ergo et HK a. 8. 11. ad planum BAC perpendicularis erit^a. ducantur a punctis K, N ad rectas lineas AB, AC, DE, DF perpendiculares KB, KC, NE, NF; et HB, BC, ME, EF jungantur. Quoniam igitur HK ad rectos angulos est plano BAC, erit et planum HBK quod per ipsam HK tran- b. 18. 11. sit ad rectos angulos plano BAC^b; ducta autem est in plano BAC recta



AB ipsi BK planorum communi sectione ad rectos angulos; quare AB a. 4. Def. 11. perpendicularis est ad planum HBK^c, et ad omnes rectas lineas quae d. 3. Def. 11. in eo plano ipsam tangunt rectos faciet angulos^d. tangit autem ipsam recta BH, in eo existens plano; rectus igitur est angulus ABH. eadem ratione et angulus DEM est rectus; ergo angulus ABH ipsi DEM est aequalis. est autem et HAB angulus aequalis angulo MDE. duo igitur triangula sunt HAB, MDE duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale, quod uni aequalium angulorum subtenditur, videlicet HA ipsi DM; ergo et reli- e. 26. 1. qua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri^e. quare AB.

AB est aequalis DE. similiter, junctis HC, MF demonstrabimus et AC ipsi DF aequalem esse. Quoniam igitur AB quidem est aequalis DE, AC vero ipsi DF, erunt duae BA, AC duabus ED, DF aequales; sed et angulus BAC angulo EDF est aequalis; basis igitur BC basi EF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt^f. ergo angulus f. 4. 1. ABC angulo DEF est aequalis. est autem et rectus ABK aequalis recto DEN, quare et reliquus CBK reliquo FEN est aequalis. eadem ratione, et BCK angulus est aequalis angulo ENF. itaque duo sunt triangula BCK, ENF duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale, quod est ad aequales angulos, videlicet BC ipsi EF; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia^e habebunt. aequalis igitur est BK ipsi EN. est autem et AB^e. 26. 1. ipsi DE aequalis; quare duae AB, BK duabus DE, EN aequales sunt; et rectos continent angulos. basis igitur AK est aequalis basi DN. et cum AH sit aequalis DM, erit et quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM aequale. sed quadrato ex AH aequalia^g sunt quadrata ex AK, g. 47. 1. KH; etenim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM aequalia^g sunt ex DN, NM quadrata, quia angulus DNM est rectus. quadrata igitur ex AK, KH quadratis ex DN, NM sunt aequalia, quorum quadratum ex AK aequale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est aequale; et ideo recta linea HK ipsi MN aequalis. et quoniam duae HA, AK duabus MD, DN aequales sunt, altera alteri, et basis HK basi MN ostensa est aequalis, angulus HAK angulo MDN aequalis erit^h. Q. E. D. h. 8. 1.

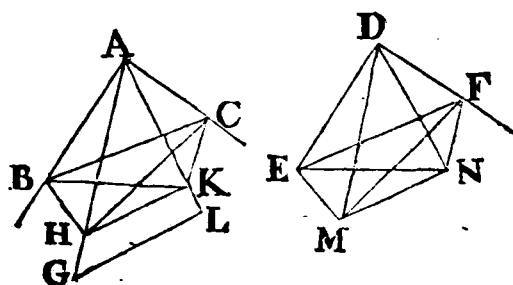
COR. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani aequales, ab ipsis autem constituentur sublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio positae aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares quae ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducuntur, inter se aequales esse.

Corollarii

Corollarii alia Demonstratio.

Sint duo anguli plani BAC, EDF inter se aequales, et rectae sublimae et aequales AH, DM, cum ipsis BA, AC, et ED, DF aequales contineant angulos, alterum alteri, angulum scilicet HAB angulo MDE, et angulum HAC angulo MDF aequalem; et ad plana BAC, EDF ducantur perpendiculares HK, MN; erit HK ipsi MN aequalis.

Quoniam enim angulus solidus ad A contentus est tribus angulis planis BAC, BAH, HAC qui, singuli singulis, sunt aequales tribus an-



gulis planis EDF, EDM, MDF quibus continetur angulus solidus ad D; erunt anguli solidi ad A et D inter se aequales, et sibi mutuo congruent; scilicet si planus angulus BAC applicetur plano angulo EDF, congruet recta AH rectae DM, ut ostensum fuit in Prop. B. hujus Libri. et quoniam AH aequalis est ipsi DM, punctum H congruet puncto i. 13. ff. M. quare perpendicularis HK ad planum BAC congruet i perpendiculari MN ad planum EDF, quia haec plana sibi mutuo congruunt. aequalis igitur est HK rectae MN. Q. E. D.

PROP. XXXVI.

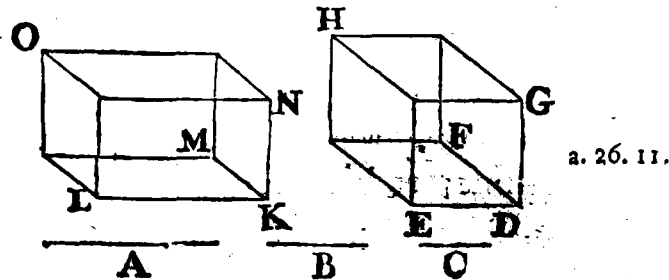
PROP. XXXVI. THEOR.

SI tres rectae lineae proportionales sint, solidum parallelepipedum quod a tribus fit, aequale est solido parallelepipedo quod fit a media, aequilatero quidem, cuiusque unus angulus solidus continetur tribus angulis planis, aequalibus planis angulis quibus unus solidus angulus antedicti solidi continetur, singuli singulis.

Sint tres rectae lineae proportionales A, B, C, fit nempe A ad B, ut B ad C. Dico solidum quod fit ex ipsis A, B, C, aequale esse solido quod fit ex B, aequilatero quidem, aequiangulo autem antedicto.

Exponatur solidus angulus ad D contentus tribus planis angulis EDF, FDG, GDE; et ipsi quidem B ponatur aequalis unaquaeque ipsarum ED, DF, DG, et solidum parallelepipedum DH compleatur.

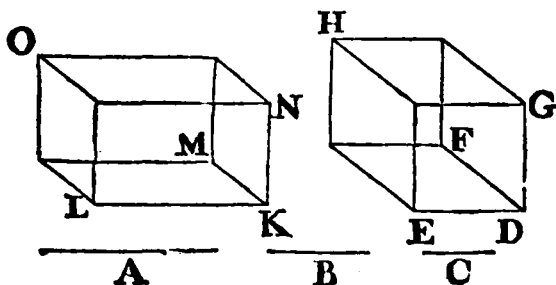
ipsi vero A ponatur aequalis recta LK, et ad rectam lineam LK, et ad punctum in ipsa K, constituatur^a angulus solidus contentus planis angulis LKM, MKN, NKL, ipsis EDF, FDG, GDE



aequalibus singuli singulis; et ponatur ipsi quidem B aequalis recta KN, ipsi vero C aequalis KM; et compleatur solidum parallelepipedum KO. Quoniam igitur est ut A ad B, ita B ad C, aequalis autem est A ipsi LK, et B utrique ipsarum DE, DF, et C ipsi KM; erit ut LK ad ED, ita DF ad KM. igitur circum aequales angulos latera sunt reciproce proportionalia; ergo parallelogrammum LM parallelogrammo EF est aequale^b. et quoniam duo anguli plani aequales sunt EDF, b. 14. 6.

LKM,

LKM, et in ipsis sublines rectae constituuntur DG, KN aequales inter se, et cum rectis lineis a principio positae aequales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares quae a punctis G, N ad plana EDF, LKM ducuntur, inter se aequales^c. Ergo solida KO, DH eadem sunt altitudine. quae vero in aequalibus basibus sunt solida parallelepipeda, et eadem altitudine, inter se sunt aequalia^d. Ergo solidum KO aequale est solido DH. atque est solidum quidem KO quod fit a tribus A, B, C; solidum vero DH quod fit ex B. si igitur tres rectae lineae &c. Q. E. D.



PROP. XXXVII. THEOR.

SI quatuor rectae lineae proportionales sint; et quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia erunt. et si qui ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia sint; et ipsae rectae lineae proportionales erunt.

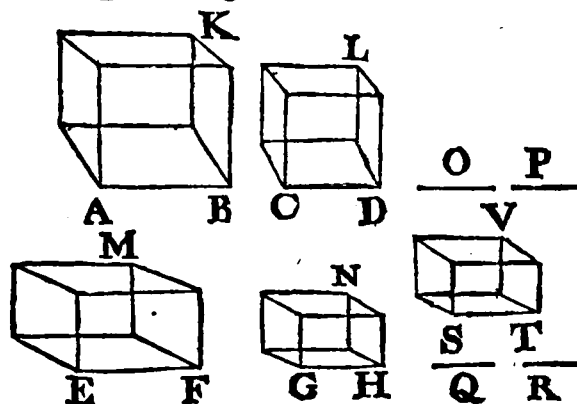
Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, EF, GH, sit sc. ut AB ad CD, ita EF ad GH; et describantur ab ipsis similia et similiter posita solida parallelepipeda AK, CL, EM, GN. Dico ut AK ad CL, ita esse EM ad GN.

- a. 11. 6. Fiant enim deinceps proportionales^a AB, CD, O, P; ut et EF, GH, Q, R. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad GH; erit b. 11. 5. et CD ad O, ut GH ad Q; et O ad P, ut Q ad R^b; ergo ex ac. 22. 5. quali, est AB ad P, ut EF ad R^c. sed ut AB ad P, ita est solidum AK

AK ad solidum CL^d; et ut EF ad R, ita est solidum EM ad solidum GN^d. ut igitur ^b solidum AK ad solidum CL, ita est solidum ^b. 11. 5. EM ad GN solidum.

Sed sit ut solidum AK ad solidum CL, ita EM solidum ad solidum GN. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH.

Fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad ST, et ab ipsa ST describatur ^c solidum parallelepipedum SV simile, et similiter positum alterutri ipsorum EM, GN. Quoniam igitur ut AB ad CD, ita est EF ad ST, et



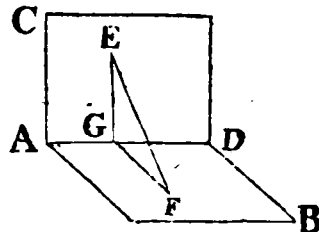
descripta sunt ab ipsis quidem AB, CD similia et similiter posita parallelepipeda AK, CL; ab ipsis vero EF, ST, similia et similiter posita parallelepipeda EM, SV; erit ut AK ad CL, ita EM ad SV. ponitur autem et ut AK ad CL, ita EM ad GN. aequale ^f igitur est solidum ^f. 9. 5. GN folido SV. est autem ipsi simile et similiter positum; ergo plana quibus continentur similia sunt et aequalia, ipsorumque latera homologa GH, ST inter se aequalia erunt. Quoniam igitur ut AB ad CD, ita est EF ad ST; aequalis autem ST ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. XXXVIII. THEOR.

“ SI planum ad planum rectum sit, et ab aliquo puncto
 “ eorum quae sunt in uno plano, ad alterum planum
 “ perpendicularis ducatur; ea in planorum communem
 “ sectionem cadet.

“ Planum enim CD ad planum AB rectum sit, communis autem
 “ eorum sectio sit AD, et in ipso CD plano, quodvis punctum E sit-
 “ matur. Dico perpendicularem quae a puncto E ad planum AB du-
 “ citur, cadere in ipsam AD.

“ Non enim, sed, si fieri potest, cadat extra, ut EF; et plano AB
 “ in puncto F occurrat; a puncto autem F ad DA in plano AB per-
 a. 12. 1. “ pendicularis ducatur FG^a, quae quidem
 b. 4. Def. 11. “ et plano CD ad angulos rectos erit^b; et
 “ EG jungatur. Quoniam igitur FG plano
 “ CD est ad angulos rectos, tangit autem ip-
 “ sam recta linea EG quae est in eodem CD
 c. 3. Def. 11. “ plano, erit angulus FGE rectus^c. sed et
 “ EF plano AB ad angulos rectos est; rectus igitur est angulus EFG.
 “ quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis sunt aequales; quod
 “ est absurdum. non igitur a puncto E ad AB planum perpendicu-
 “ ris ducta extra rectam lineam AD cadet; cadet igitur in ipsam AD.
 “ Si igitur planum &c. Q. E. D.”

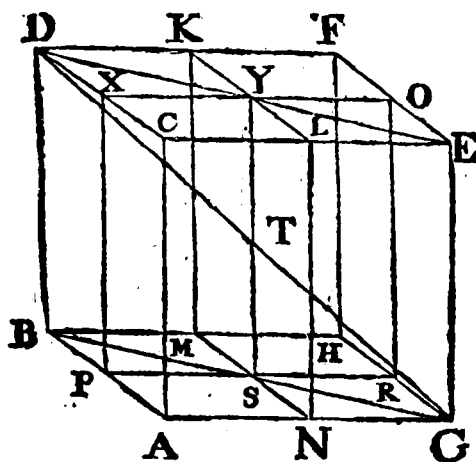


PROP. XXXIX.

PROP. XXXIX. THEOR.

SI in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secantur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio et solidi parallelepipedi diameter se mutuo bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF, oppositorum planorum CF, AH latera bifariam secantur in punctis K, L, M, N; X, O, P, R; et jungantur KL, MN, XO, PR. et quoniam DK, CL aequales sunt et parallelae, erunt KL, DC parallelae^a. eadem ratione, parallelae sunt a. 33. 1. MN, BA. est autem BA parallela ipsi DC; quoniam igitur utraque



ipsarum KL, BA parallela est ipsi DC, non in eodem cum ipsâ plano, erit KL parallela^b ipsi BA. et quoniam utraque ipsarum KL, MN^{b. 9. 11.} parallela est ipsi BA, non in eodem cum ipsâ plano, erit KL parallela^b ipsi MN; quare KL, MN in uno sunt plano. similiter et XO, PR ostendentur in uno esse plano. Communis autem sectio planorum KN,

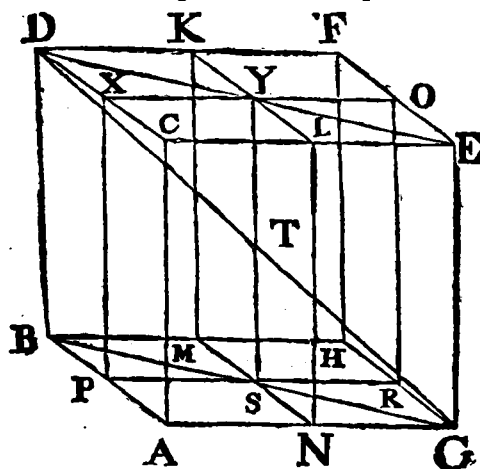
N n 2

XR

EUCLIDIS ELEMENTORUM

XR sit YS; et solidi parallelepipedi AF diameter sit DG. Dico YS, DG sibi mutuo occurrere, et sese bifariam secare.

Jungantur enim DY, YE, BS, SG. Quoniam igitur DX parallela
 c. 29. 1. est ipsi OE, alterni anguli DXY, YOE inter se aequales sunt^c. et quoniam DX quidem est aequalis OE, XY vero ipsi YO, et angulos aequales continent; erit basis DY aequalis basi YE, et reliqui anguli re-
 d. 4. 1. liquis angulis aequales^d; angulus igitur XYD est aequalis angulo OYE,
 e. 14. 1. et ob id recta linea est DYE^e. eadem ratione, et BSG recta est; atque est BS aequalis SG. et quoniam CA ipsi DB aequalis est et paral-



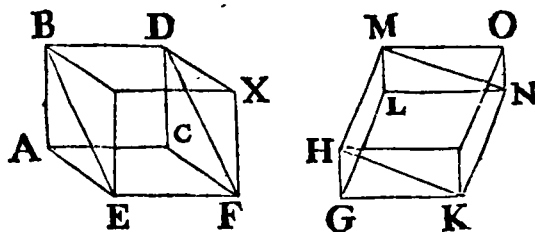
lela, et CA aequalis est et parallela ipsi EG; erit et DB ipsi EG ae-
 b. 9. 11. qualis et parallela^b. et ipsas conjungunt rectae lineae DE, BG; paral-
 a. 33. 1. lela^a igitur et aequalis est DE ipsi BG. et sumpta sunt in utraque ip-
 sarum quaedam puncta D, Y, G, S, et junctae sunt DG, YS. ergo
 DG, YS in uno sunt plano. et manifestum est propterea ipsas sibi mu-
 tuo occurrere; occurrant in T. et quoniam DE parallela est ipsi BG,
 erit et EDT angulus angulo BGT aequalis^c, alterni enim sunt; est au-
 f. 15. 1. tem et DTY angulus aequalis^f ipsi GTS. duo igitur sunt triangu-
 la DTY, GTS duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum
 latus

latus uni lateri aequale, quod uni aequalium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS; dimidia enim sunt ipsarum DE, BG. ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt^g. quare DT qui- g. 26. 1. dem est aequalis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido &c. Q. E. D.

PROP. XL. THEOR.

SI sint duo prismata triangularia aequae alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, et parallelogrammum duplum sit trianguli; aequalia erunt ipsa prismata.

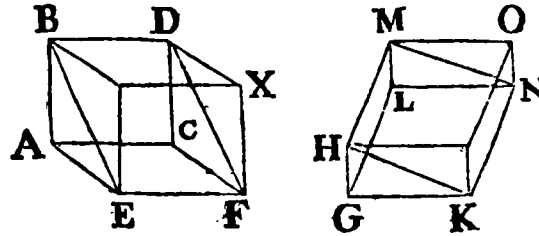
Sint prismata aequae alta ABCDEF, GHKLMN, quorum primum continetur duobus triangulis ABE, CDF, et tribus parallelogrammis AD, DE, EC; alterum vero continetur duobus triangulis GHK, LMN, et tribus parallelogrammis LH, HN, NG; et unum quidem



basim habeat parallelogrammum AF, alterum vero GHK triangulum, et duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK. Dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN aequale esse.

Compleantur enim AX, GO solida, et quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem et HK parallelogrammum duplum^a trianguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelo- a. 34. 1. grammo

grammo HK aequale. quae vero in aequalibus sunt basibus solida pa-
 6. 31. 11. rallelepipedā, et eadem altitudine, inter se aequalia^b sunt. aequale igitur est AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimi-



6. 28. 11. dium^c ABCDEF prisma, solidi vero GO dimidium^c est prisma
 GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est aequale.
 Si igitur sint duo prismata &c. Q. E. D.

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M
LIBER DUODECIMUS.

L E M M A I.

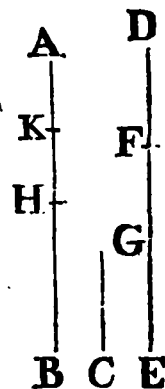
Necessarium quibusdam hujus Libri Propositionibus; est vero Propositio prima Libri decimi.

DUABUS magnitudinibus inaequalibus expositis, si a majore auferatur majus quam dimidium, et a reliquâ rursus auferatur majus quam dimidium; et hoc semper fiat; relinquetur tandem quaedam magnitudo quae minore magnitudine exposita minor erit.

Sint duae magnitudines inaequales AB, C quarum major AB. Dico si ab AB auferatur majus quam dimidium, et a reliqua rursus auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quae magnitudine C minor erit.

Etenim

Etenim C multiplicata fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, et sit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB; dividaturque DE in partes ipsi C aequales DF, FG, GE. et ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipsa vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat quoad divisiones quae sunt in AB multitudine aequales fiant divisionibus quae in DE; sint igitur divisiones AK, KH, HB divisionibus DF, FG, GE multitudine aequales. et quoniam major est DE quam AB, et ablatum est ab ipsa quidem DE minus quam dimidium EG, ab ipsa vero AB majus quam dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA majus. rursus quoniam major est GD quam HA, et ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF; ab ipsa vero HA majus quam dimidium HK, reliquum FD reliquo AK majus erit. estque FD aequalis ipsi C; ergo C quam AK est major. minor igitur est AK quam C. Ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK exposita minore magnitudine C minor. Q. E. D.



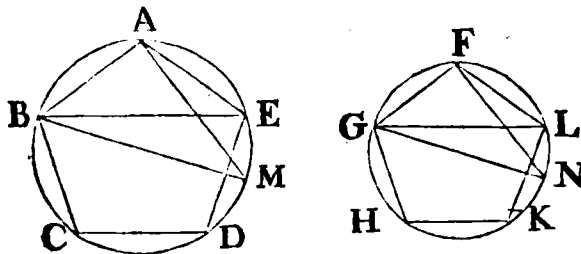
PROP. I. THEOR.

SIMILIA polygona circulis inscripta inter se sunt ut quadrata ex diametris.

Sint circuli ABCDE, FGHL, et in ipsis similia polygona ABCDE, FGHL; diametri autem circulorum sint BM, GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHL.

Jungantur enim BE, AM, GL, FN. et quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHL, erit et angulus BAE angulo GFL

GFL aequalis^a, et ut BA ad AE, ita GF ad FL^a. duo igitur trian-a. 1. Def. 6.
gula sunt BAE, GFL unum angulum uni angulo aequalem habentia,
videlicet angulum BAE angulo GFL, circa aequales autem angulos
latera proportionalia; quare triangulum ABE triangulo GFL aequian-
gulum est^b; ac propterea angulus AEB aequalis est angulo FLG. sed b. 6. 6.
angulus quidem AEB angulo AMB est aequalis^c, in eadem enim cir-c. 21. 3.
cumferentia consistunt; angulus autem FLG aequalis est angulo FNG^c;
ergo et AMB angulus est aequalis angulo FNG. est autem et rectus



BAM aequalis recto GFN^d; quare et reliquus reliquo aequalis. ac-d. 31. 3.
quiangulum igitur est triangulum^e ABM triangulo FGN. ergo ut BM
ad GN, ita BA ad GF^e; et duplicata ratio ipsius BM ad GN, ea-e. 4. 6.
dem erit^f rationi duplicatae rationis BA ad GF. sed rationis quidem f. 10. Def. 5.
BM ad GN, duplicata est ratio quadrati ex BM ad quadratum ex GN^g; et 22. 5.
rationis vero BA ad GF duplicata est ratio polygoni ABCDE ad po- g. 20. 6.
lygonum FGHL^g; et igitur ut quadratum ex BM ad quadratum ex
GN, ita polygonum ABCDE ad polygonum FGHL. Quare simi-
lia polygoni &c. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

CIRCULI inter se sunt ut quadrata ex diametris.

Sint circuli ABCD, EFGH, diametri autem ipsorum sint BD, FH.

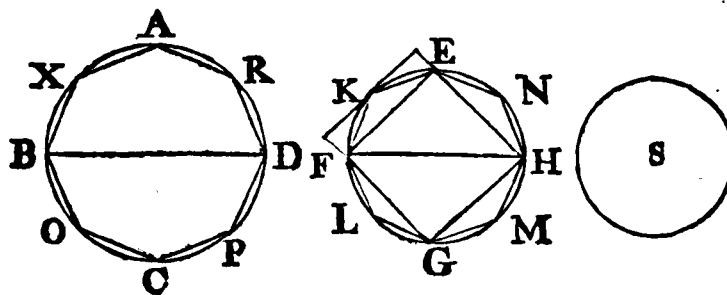
O o

Dico

EUCLIDIS ELEMENTORUM

Dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum.

Si enim non ita sit, erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus*. sit primum ad minus quod sit S. et in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EFGH; quoniam si per puncta E, F, G, H contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati



- a. 41. 1. dimidium quadratum EFGH²; circulus autem minor est quadrato circa circulum descripto; ergo quadratum EFGH majus est dimidio circuli EFGH. secantur bifariam circumferentiae EF, FG, GH, HE in punctis K, L, M, N, et EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit; quoniam si per puncta K, L, M, N contingentes circulum ducamus, et parallelogramma quae sunt super rectis lineis EF, FG, GH, HE compleamus; erit unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE dimidium parallelo-

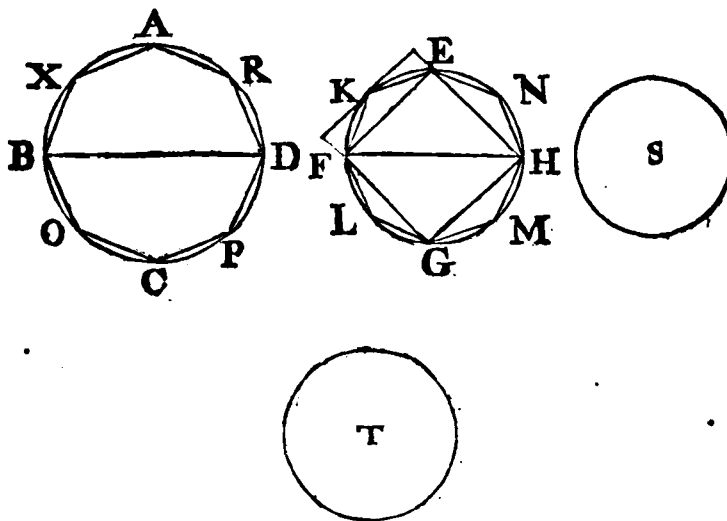
* Est enim quadratum quoddam aequale circulo ABCD; sit latus ejusdem P. potest igitur esse quarta proportionalis tribus BD, FH et P, quae sit Q. Ergo quadrata ex hisce proportionalia sunt; hoc est, quadratis ex BD,

FH et circulo ABCD potest existere quantum proportionale, sit hoc S. et similiter quaedam in sequentibus quibusdam Propositionibus, intelligenda sunt.

grammi quod ad ipsum est^a. sed segmentum minus est parallelogram-^{a. 41. 1.}
 mo. quare unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE
 majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit. Hasce igitur cir-
 cumferentias bifariam secantes, et jungentes rectas lineas, atque hoc
 semper facientes, relinquemus tandem quaedam circuli segmenta, quae
 minora erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spatium superat.
 etenim ostensum est in praecedenti Lemmate, duabus magnitudinibus
 inaequalibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et
 a reliqua, rursus majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relinqui
 tandem magnitudinem aliquam, quae minori magnitudine exposita sit
 minor. itaque relicta sint segmenta EK, KF, FL, LG, GM, MH,
 HN, NE, quae minora sint excessu, quo circulus EFGH ipsum S
 spatium superat. Ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit
 spatio S. Describatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN
 simile polygonum AXBOCPDR. est igitur ut quadratum ex BD ad
 quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN
 polygonum^b. sed et ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ^{b. 1. 12.}
 ABCD circulus ad spatium S. ergo et ut circulus ABCD ad spatium
 S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum^{c. 11. 5.}
 major autem est circulus ABCD eo quod in ipso est polygono; quare
 et spatium S majus est polygono EKFLGMHN^d. sed et minus, ^{d. 14. 5.}
 ut prius ostensum; quod fieri non potest. non igitur est ut quadra-
 tum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spatium
 aliquod minus circulo EFGH. similiter ostendemus neque esse ut qua-
 dratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulus EFGH ad aliquod
 spatium minus circulo ABCD. Dico etiam neque esse ut quadratum
 ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod spa-
 tium majus circulo EFGH. si enim fieri potest, sit ad majus spa-
 tium T. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex

EUCLIDIS ELEMENTORUM

BD, ita spatium T ad ABCD circulum. erit autem ut spatium † T ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad spatium quoddam, quod d. 14. 5. quidem minus erit circulo ABCD^d, quia spatium T majus est EFGH circulo. ergo et ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod spatium minus circulo ABCD; quod fieri non posse



ostensum est. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita est circulus ABCD ad spatium aliquod majus EFGH circulo. ostensum autem est neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum † EFGH. Circuli igitur sunt ut quadrata ex diametris. Q. E. D.

† Ostensum enim est in praecedenti Nota ad * posse existere quartum proportionale quadratis ex BD, FH et circulo ABCD quod dicebatur S. et similiter spatio T, circulisque ABCD, EFGH potest esse quartum proportionale. eodem modo in sequentibus quibus-

dam Propositionibus similia intelligenda sunt.

‡ Etenim quoniam possit existere quarta proportionalis quadratis ex BD, FH et circulo ABCD, quae quidem neque minor neque major potest esse circulo EFGH, ut ostensum fuit; igitur circulo huic necessario aequalis erit.

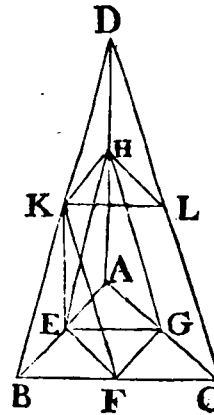
PROP. III.

PROP. III. THEOR.

OMNIS pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides aequales et similes inter se, quae triangulares bases habent, similesque toti; et in duo prismata aequalia, quae quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis cujus basis quidem ABC triangulum, vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides aequales et similes inter se, triangulares bases habentes, et similes toti; et in duo prismata aequalia; et duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora.

Secentur enim AB, BC, CA, AD, DB, DC bifariam in punctis E, F, G, H, K, L, et EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG jungantur. Quoniam igitur AE quidem est aequalis EB, AH vero ipsi HD, erit HE ipsi DB parallela^a. eadem ratione et HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK; quare HK est aequalis EB^b. sed EB ipsi AE est aequalis; ergo et AE ipsi HK aequalis erit. est autem et AH aequalis HD; duae igitur EA, AH duabus KH, HD aequales sunt, altera alteri; et angulus EAH aequalis angulo KHD^c; basis igitur EH basi KD est aequalis, et triangulum AEH aequale^d et simile triangulo HKD. eadem ratione et triangulum AGH triangulo HLD aequale est et simile. et quoniam duae rectae lineae EH, HG sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus KD, DL parallelae sunt, non autem in eodem plano,



a. 2. 6.

b. 34. 1.

c. 29. 1.

d. 4. 1.

e. 10. 11. plano, aequales angulos continebunt^e; ergo angulus EHG est aequalis angulo KDL. rursus quoniam duae rectae lineae EH, HG duabus rectis lineis KD, DL aequales sunt altera alteri, et angulus EHG est

d. 4. 1. aequalis angulo KDL; erit basis EG basi KL aequalis^d, et triangulum EHG triangulo KDL aequale^d erit et simile. eadem ratione et AEG triangulum est aequale et simile triangulo HKL. Quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H, aequalis et similis est pyramidi cujus basis est triangulum KHL, et vertex

f. C. 11. D punctum^f. et quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB, parallela ducta est HK, erit triangulum ADB triangulo HDK aequiangulum, et propterea la-

g. 4. 6. tera habent proportionalia^g. simile igitur est ADB triangulum triangulo HDK. et eadem ratione triangulum quidem DBC simile est triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo HDL; et adhuc triangulum ABC triangulo AEG. ostensum autem est triangulum AEG simile triangulo HKL, ergo et ABC triangulum triangulo

h. 21. 6. HKL simile erit^h. et pyramis igitur cujus basis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum

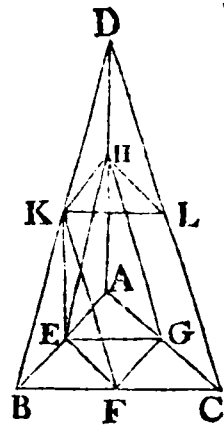
D, similis est pyramidi cujus basis triangulum HKL, et vertex punctum

i. B. 11. et Dⁱ. sed pyramis cujus basis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi cujus basis triangulum AEG,

et vertex punctum H. quare et pyramis cujus basis triangulum ABC, et vertex punctum D, similis est pyramidi cujus basis AEG triangulum, et vertex punctum H. utraque igitur ipsarum AEGH, HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. et quoniam BF est aequalis

k. 41. 1. FC, erit ECFG parallelogrammum duplum trianguli GFC^k. et quoniam si duo prismata aequae alta sint, quorum unum quidem basim ha-

bet



bet parallelogrammum, alterum vero triangulum, fitque parallelogrammum duplum trianguli; sunt ea prismata inter se aequalia¹; aequale l. 40. 11. igitur erit prisma cujus basis est EBFG parallelogrammum, et opposita ipsi recta linea KH, prismati cujus basis est triangulum GFC, et oppositum ipsi triangulum HKL; etenim aequae alta sunt, quia sunt inter plana parallela^m ABC, HKL. et manifestum est utrumque ipsorum^m 15. 11. prismatum, et cujus basis est EBFG parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea, et cujus basis est GFC triangulum, et oppositum ipsi triangulum HKL, majus esse utrâque pyramidum, quarum bases quidem AEG, HKL triangula, vertex autem puncta H, D; quoniam si jungamus EF rectam lineam, prisma quidem cujus basis est EBFG parallelogrammum, et opposita ipsi recta linea KH, majus est pyramide cujus basis EBF triangulum, vertex autem punctum K; sed pyramis cujus basis triangulum EBF, et vertex K punctum, est aequalis^f f. C. 11. pyramidi cujus basis AEG triangulum, et vertex punctum H; aequalibus enim et similibus planis continentur. quare et prisma cujus basis parallelogrammum EBFG, opposita autem ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis AEG triangulum et vertex punctum H. prisma vero cujus basis parallelogrammum EBFG, et opposita ipsi recta linea HK est aequale prismati cujus basis GFC triangulum, et ipsi oppositum triangulum HKL; et pyramis cujus basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est aequalis pyramidi cujus basis HKL triangulum, et vertex punctum D. Ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus quarum bases triangula AEG, HKL, vertex autem H, D puncta. tota igitur pyramis cujus basis ABC triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides aequales, et similes inter se, et similes toti; et in duo prismata aequalia; suntque duo prismata dimidio totius pyramidis majora. Q. E. D.

PROP. IV.

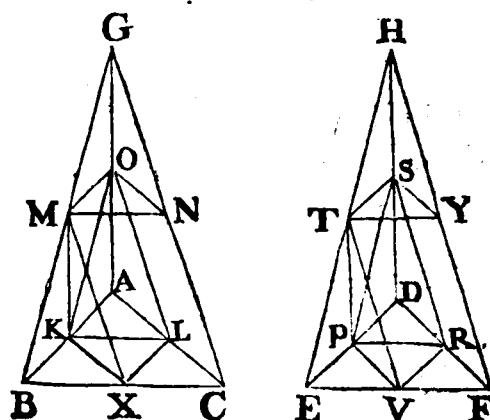
PROP. IV. THEOR.

SI sint duae pyramides aequae altae, quae triangulares bases habent, dividatur autem utraque ipsarum, et in duas pyramides aequales inter se, similesque toti, et in duo prismata aequalia; et factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat. erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita et in una pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramide multitudine aequalia.

Sint duae pyramides aequae altae quae triangulares bases habent ABC, DEF, vertices autem sint puncta G, H; et dividatur utraque ipsarum in duas pyramides aequales inter se similesque toti, et in duo prismata aequalia; et factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur; atque hoc semper fiat. Dico ut ABC basis ad basim DEF, ita esse prismata omnia quae sunt in pyramide ABCG ad prismata omnia quae in pyramide DEFH multitudine aequalia.

Eadem fiat constructio quae in praecedente, et quoniam BX qui-
 a. 2. 6. dem est aequalis XC, AL vero ipsi LC; crit XL ipsi AB parallela^a, et
 triangulum ABC triangulo LXC simile. eadem ratione et triangulum
 DEF simile est triangulo RVF. et quoniam BC quidem est dupla
 GX, EF vero dupla ipsius FV, erit ut BC ad CX, ita EF ad FV. et
 descripta sunt ab ipsis BC, CX similia et similiter posita rectilinea ABC,
 LXC; ab ipsis vero EF, FV similia et similiter posita rectilinea DEF,
 RVF. est igitur ut ABC triangulum ad triangulum LXC, ita triangu-
 b. 22. 6. lum DEF ad RVF triangulum^b; et permutando ut triangulum ABC
 ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RVF. Quo-
 c. 15. 11. niam vero parallela sunt plana ABC, OMN^c, ut et DEF, STY^c, per-
 pendiculare;

pendiculares a punctis G, H ad bases ABC, DEF, quae sunt inter se aequales, a planis OMN, STY bifariam secabuntur^d, quia et rectae GC, d. 17. 11. HF bifariam ab iisdem planis sectae sunt in N, Y punctis. aequae alta igitur sunt prismata LXC, OMN; RVF, STY; et propterea ut basis LXC ad basim RVF, hoc est ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita est prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cuius basis RVF triangulum, et oppositum ipsi STY^e. e. Cor. 32. 11; et quoniam duo prismata quae in pyramide ABCG inter se aequalia sunt, sed et quae in pyramide DEFH duo prismata sunt inter se aequalia,

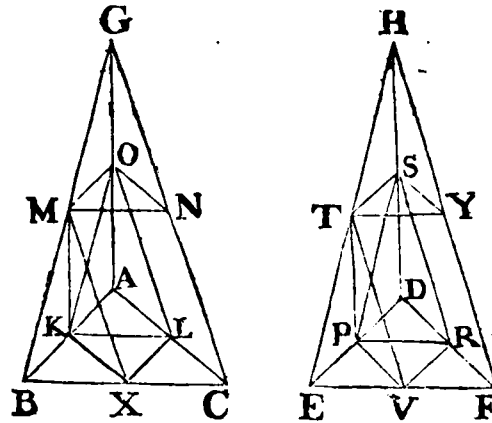


erit ut prisma cuius basis parallelogrammum KBXL, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cuius basis LXC triangulum, et oppositum ipsi OMN; ita^f prisma cuius basis parallelogrammum PEVR, et opposita recta linea TS, ad prisma cuius basis RVF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO, LXCOMN ad prisma LXCOMN; ita prismata PEVRTS, RVFSTY ad prisma RVFSTY. et permutando, ut prismata KBXLMO, LXCOMN ad prismata PEVRTS, RVFSTY; ita prisma LXCOMN ad prisma RVFSTY. ut autem prisma LXCOMN ad prisma RVFSTY, ita of-

P P

tenfa

tenfa est ABC basis ad basim DEF. ergo et ut basis ABC ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide DEFH. similiter autem et si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG, STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quae in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis



ABC ad DEF basim; et ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide DEFH; et quae in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide STYH; et quatuor ad quatuor. eadem autem ostenduntur et in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, et DPRS, et omnium omnino multitudine aequalium. Q. E. D.

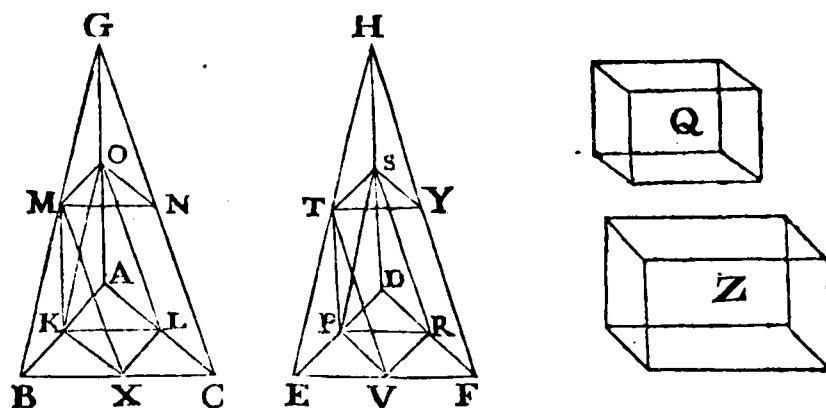
PROP. V. THEOR.

PYRAMIDES quae eadem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula
ABC,

ABC, DEF, vertices autem puncta G, H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem.

Si enim non ita fit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus*. fit primum ad solidum minus, sitque Q. et dividatur pyramis DEFH in duas pyramides aequales inter se, et similes toti, et in duo prismata aequalia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis majora^a. et a. 3. 12. rursus pyramides ex divisione factae similiter dividantur, atque hoc semper fiat quoad relinquantur quaedam pyramides in pyramide DEFH,

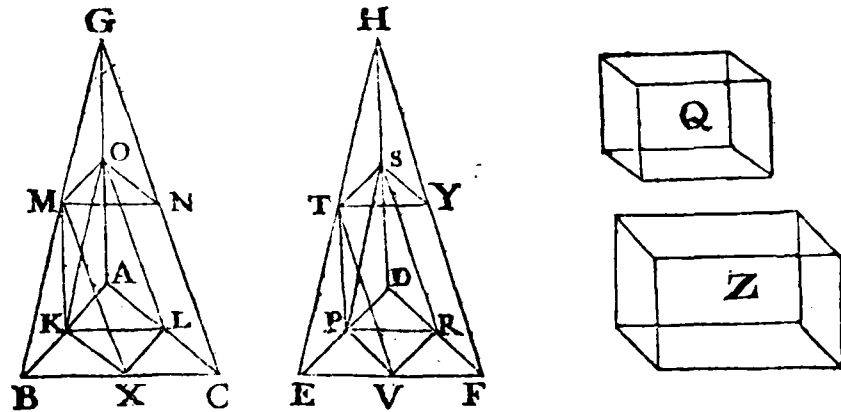


quae sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Q superat. itaque sumantur, et sint exempli causa, pyramides DPRS, STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Q majora. dividatur etiam ABCD pyramis similiter et in totidem partes atque pyramis DEFH. ergo ut ABC basis ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG prismata ad prismata quae in pyramide DEFH^b. sed ut ABC b. 4. 12. basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Q; et igitur ut ABCG pyramis ad solidum Q, ita quae in pyramide ABCG prismata ad prismata quae in pyramide DEFH. major autem est pyramis

* Hoc eodem modo ostendi potest quo simile ostensum est in Prop. 2. ad notam*.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

ABCG prismatibus quae in ipsa sunt; ergo et solidum Q prismatibus
 c. 14. 5. quae sunt in pyramide DEFH est majus^c. sed et minus, quod fieri
 non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis
 ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter osten-
 demus neque ut DEF basis ad basim ABC, ita esse pyramidem DEFH
 ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico etiam neque esse
 ut ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod so-
 lidum majus pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad majus, vi-
 delicet ad solidum Z. erit igitur invertendo, ut DEF basis ad basim



ABC, ita solidum Z ad ABCG pyramidem. erit autem ut solidum Z
 ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad aliquod solidum †, quod
 quidem minus erit pyramide ABCG^c, quia solidum Z majus est pyra-
 mide DEFH. et ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis
 DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum.
 non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad so-
 lidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad
 minus. Quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG
 ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quae &c. Q. E. D.

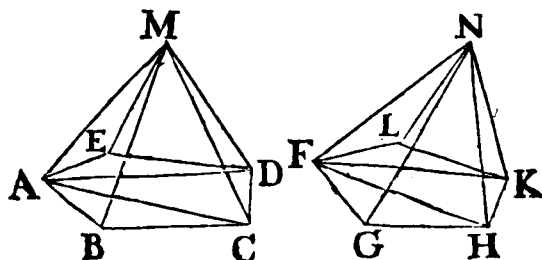
† Hoc eodem modo ostendetur quo simile in Prop. 2. ad notam †.

PROP. VI. THEOR.

PYRAMIDES quae eadem sunt altitudine et polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, polygonas habentes bases ABCDE, FGHL, vertices autem M, N puncta. Dico ut ABCDE basis ad basim FGHL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHLN.

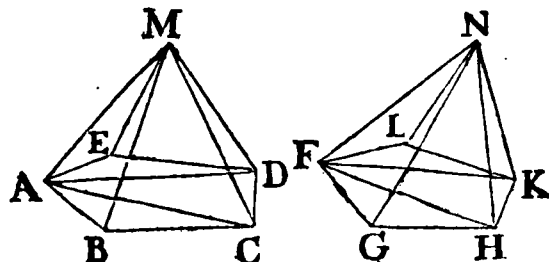
Dividatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC, ACD, ADE; basis vero FGHL in triangula FGH, FHL, FKL. et super unoquoque triangulo intelligantur pyramides quarum quae super basibus ABC, ACD, ADE vertex communis sit M punctum, reliquarum



vero communis vertex sit punctum N. Quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum FGH, ita ABCM pyramis ad pyramidem FGHN^a; ut vero triangulum ACD ad triangulum FGH, ita ACDM a. 5. 12. pyramis ad pyramidem FGHN; et adhuc ut ADE triangulum ad triangulum FGH, ita pyramis ADEM ad pyramidem FGHN; erit ut omnes antecedentes primi ad communem consequentem, ita omnes antecedentes reliqui ad consequentem communem^b; hoc est erit ut basis b. 2. Cor. 24. 5. ABCDE ad basim FGH, ita pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHN. eademque ratione ut basis FGHL ad basim FGH, ita erit pyramis FGHLN ad pyramidem FGHN, et invertendo. Quoniam igitur ut
basis

EUCLIDIS ELEMENTORUM

basis ABCDE ad basim FGH, ita pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHN; ut vero FGH basis ad basim FGHKL, ita FGHN pyramis



e. 22. 5. ad pyramidem FGHKLN; erit ex aequali ^c ut basis ABCDE ad basim FGHKL, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quae &c. Q. E. D.

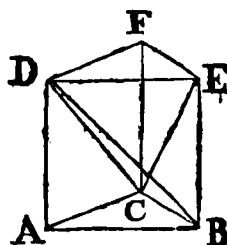
PROP. VII. THEOR.

OMNE prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares bases habent.

Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares habent bases.

Jungantur enim BD, EC, CD; et quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD aequalis ^a; ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, aequalis est ^b pyramidi cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum C. sed pyramis cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, et vertex D punctum; iisdem enim planis continentur. ergo et pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, aequalis est pyramidi

midium cuius basis EBC triangulum, et vertex punctum D. rursus, quoniam FCBE parallelogrammum est cuius diameter CE, triangulum ECF triangulo ECB est aequale^a; ergo et pyramis cuius basis ECB^a. 34. 1. triangulum, vertex autem punctum D, aequalis est pyramidi cuius basis triangulum ECF, et vertex punctum D^b. sed pyramis cuius basis quidem ECB triangulum, vertex autem punctum D ostensa est aequalis pyramidi cuius basis triangulum ABD, et vertex C punctum. quare et pyramis cuius basis triangulum ECF, et vertex punctum D, aequalis est pyramidi cuius basis triangulum ABD, et vertex C punctum. prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se aequales quae triangulares bases habent, videlicet in ipsas ABDC, EBDC, ECFD. et quoniam pyramis cuius basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cuius basis triangulum ABC, et vertex D punctum, iisdem namque planis continentur; pyramis vero cuius basis triangulum ABD, et vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cuius basis ABC triangulum, et oppositum ipsi DEF; et pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, et oppositum ipsi triangulum DEF. Q. E. D.



COR. 1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, et altitudinem aequalem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, dividi potest prisma in alia prismata quae triangulares bases habent.

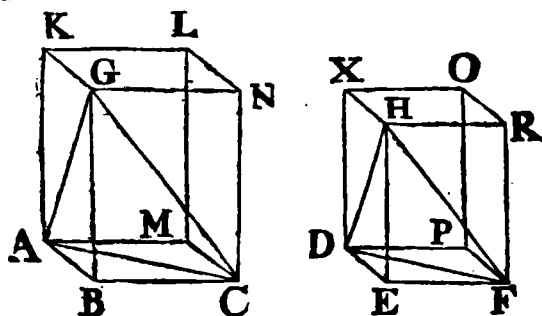
COR. 2. Prismata aequae alta sunt inter se ut bases; quoniam pyramides super iisdem basibus et eadem altitudine inter se sunt ut bases^c. c. 6. 12.

PROP. VIII. THEOR.

SIMILES pyramides quae triangulares bases habent, in triplicata sunt ratione homologorum laterum.

Sint similes et similiter positae pyramides, quarum bases quidem triangula ABC, DEF, vertices autem G, H puncta. Dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam rationem habere ejus quam BC habet ad latus homologum EF.

Compleantur enim parallelogramma ABCM, GBCN, ABGK, et solidum parallelepipedum BGML quod hisce planis, ipsisque oppositis continetur. similiter compleatur solidum parallelepipedum EHPO contentum tribus parallelogrammis DEFP, HEFR, DEHX, ipsisque op-



positis. et quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit
 a. 11. Def. 11. angulus ABC angulo DEF aequalis^a, angulusque GBC aequalis angulo HEF, et angulus ABG angulo DEH. atque est ut AB ad BC, ita
 b. 1. Def. 6. DE ad EF^b, hoc est circum aequales angulos latera sunt proportionalia; parallelogrammum igitur BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione et parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, et BK ipsi EX. tria igitur parallelogramma BM, BN, BK tribus EP, ER, EX sunt similia. sed tria quidem BM, BN, BK tribus op-

positis

positis aequalia et similia sunt^c, tria vero EP, ER, EX tribus opposi- c. 24. 11.
tis aequalia et similia. quare solida BGML, EHPO similibus planis
multitudine aequalibus continentur, suntque ipsorum anguli solidi aequa-
les^d; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO^a. similia d. B. 11.
autem solida parallelepipeda in triplicata sunt ratione homologorum la- a. 11. Def. 11.
terum^e. ergo solidi BGML ad solidum EHPO ratio triplicata est ejus e. 33. 11.
quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed ut
BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem
DEFH^f; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod f. 15. 5.
est dimidium solidi parallelepipedig, sit pyramidis triplum^h. Quare et g. 28. 11.
pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam rationem habet ejus h. 7. 12.
quam BC ad EF. Q. E. D.

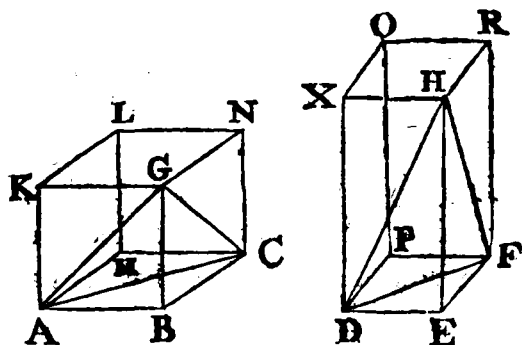
COR. Ex hoc perspicuum est, et similes pyramides quae multangu-
las bases habent, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum.
ipsis enim divis in pyramides triangulares bases habentes; quoniam et
similia polygona quae sunt in basibus, in similia triangula dividuntur,
et multitudine aequalia et homologa totis; erit ut una pyramis, in pri-
ma pyramide, triangularem habens basim ad unam pyramidem, in se-
cunda, triangularem basim habentem, ita omnes pyramides, in prima
pyramide, triangulares habentes bases ad omnes, in secunda pyramide,
triangulares bases habentes; hoc est, pyramis prima multangulam ha-
bens basim ad secundam pyramidem quae multangulam basim habet.
sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quae triangula-
rem basim habet, est in triplicata ratione homologorum laterum; et
pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim
habentem, triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum ad
homologum latus.

PROP. IX. THEOR.

AEQUALIUM pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales. et quarum pyramidum triangulares bases habentium bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illae sunt aequales.

Sint enim pyramides aequales triangulares habentes bases ABC , DEF , vertices vero G , H puncta. Dico pyramidum $ABCG$, $DEFH$ bases et altitudines esse reciproce proportionales, scilicet ut ABC basis ad basim DEF , ita esse pyramidis $DEFH$ altitudinem ad altitudinem pyramidis $ABCG$.

Compleantur enim parallelogramma AC , AG , GC ut et DF , DH , HF ; compleanturque solida parallelepipeda $BGML$, $EHPO$ quae



planis illis, ipsisque oppositis continentur. et quoniam pyramis $ABCG$ est aequalis pyramidi $DEFH$, atque est pyramidis quidem $ABCG$ sextuplum $BGML$ solidum, pyramidis vero $DEFH$ sextuplum solidum

a. 1. Ax. 5. $EHPO$; erit solidum $BGML$ solido $EHPO$ aequale^a. aequalium autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines sunt reciproce

b. 34. 11. proportionales^b; est igitur ut BM basis ad basim EP , ita $EHPO$ solidi altitudo ad altitudinem solidi $BGML$. sed ut BM basis ad basim EP , ita ABC triangulum ad triangulum DEF ; ergo et ut ABC triangulum ad triangulum DEF , ita solidi $EHPO$ altitudo ad altitudinem solidi

solidi BGML. sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est cum altitudine pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ABCG; est igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Quare pyramidum ABCG, DEFH bases et altitudines reciproce sunt proportionales.

Sed pyramidum ABCG, DEFH bases et altitudines reciproce sint proportionales, sit scilicet ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH aequalem esse.

Iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP; erit et ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. sed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedum EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedum BGML. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi parallelepipedum altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedum BGML. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales, ea sunt aequalia^b. solidum igitur parallelepipedum BGML aequale est solido^b. 34. 11. parallelepipedo EHPO. atque est solidi quidem BGML sexta pars pyramidis ABCG; solidi vero EHPO sexta pars est pyramidis DEFH. ergo pyramidis ABCG pyramidi DEFH est aequalis. Aequalium igitur pyramidum &c. Q. E. D.

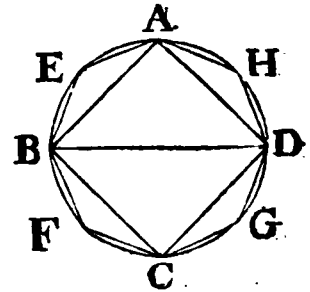
PROP. X. THEOR.

OMNIS conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet et altitudinem aequalem.

Habeat conus eandem basim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, et altitudinem aequalem. Dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum cono triplum esse.

Si enim cylindrus non sit triplus cono, vel major erit quam triplus, vel minor. Sit primo major quam triplus; et describatur in ABCD circulo quadratum ABCD; ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli. et a quadrato ABCD erigatur prisma aequae altum cylindro; prisma vero hoc majus erit quam cylindri dimidium; quoniam si circa circulum ABCD quadratum describatur, et ab ipso erigatur prisma aequae altum cylindro, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti. et sunt ab iis basibus quadratis erecta solida parallelepipeda aequae alta, nimirum prismata; prisma igitur a quadrato ABCD dimidium est prismatis erecti a quadrato quod circa circulum ABCD describitur. etc.

a. 32. II. nim inter se sunt ut bases^a. atque est cylindrus minor prismate erecto a quadrato quod describitur circa circulum ABCD. prisma igitur erectum a quadrato ABCD aequae altum cylindro, dimidio cylindri est majus. secentur circumferentiae AB, BC, CD, DA bifariam in punctis E, F, G, H, et AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA majus est dimidio portionis circuli ABCD, in qua consistit, ut prius ostensum in Prop. 2. hujus. Erigantur ab unoquoque triangulorum AEB, BFC, CGD,

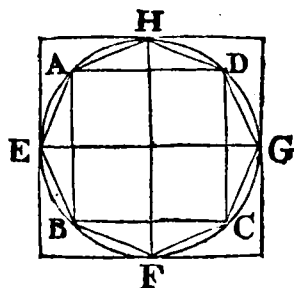


CGD, DHA prismata aeque alta cylindro; ergo et unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quae ad ipsum est; quoniam si per puncta E, F, G, H parallelae ipsis AB, BC, CD, DA ducantur, et compleantur super ipsis AB, BC, CD, DA parallelogramma, a quibus solida parallelepipedae aeque alta cylindro erigantur; erunt uniuscujusque erectorum dimidia, ea quae super triangulis AEB, BFC, CGD, DHA sunt prismata^b. et sunt cylindri portio-
 nes erectis solidis parallelepipedis minores. ergo et prismata quae super triangulis AEB, BFC, CGD, DHA majora sunt dimidio portionum cylindri quae ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes prismata aeque alta cylindro, et hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri quae minores erunt excessu, quo cylindrus coni triplum superat^c. relinquuntur, et sint ea quae sunt
 super segmenta circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; reliquum igitur prisma cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quae cylindri, majus est quam triplum coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, et altitudo eadem quae cylindri, triplum est pyramidis, cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni^d; et pyramis igitur cujus basis polygonum
 AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ABCD circum. sed et minor; ab ipso enim comprehenditur; quod fieri non potest. Dico insuper neque cylindrum minorem esse triplo coni. si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. erit igitur, invertendo, conus major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo quadratum ABCD; ergo quadratum ABCD ma-

b. 2. Cor. 7. 12.

c. Lemma.

d. 1. Cor. 7. 12.

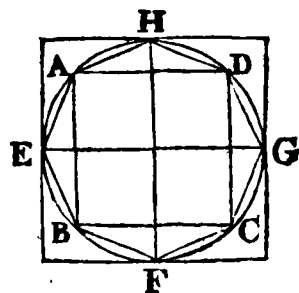


jus

jus est quam dimidium ABCD circuli. et a quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major est quam conus dimidium. quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum descriptum est; et si a quadratis erigantur solida parallelepipeda aequae alta cono, quae et prismata sunt, erit quod a quadrato ABCD erigitur dimidium ejus quod erectum est a quadrato

a. 32. 11. circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases^a; quare et tertiae partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum ABCD, dimidia est ejus pyramidis quae a quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta a quadrato descripto

circa circulum major est cono, ipsam namque comprehendit; ergo pyramis cujus basis ABCD quadratum, vertex autem idem qui conus major est quam conus dimidium. secantur circumferentiae AB, BC, CD, DA bifariam in punctis E, F, G, H, et jungantur AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. et



unumquodque igitur triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA majus est quam dimidium portionis circuli in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA pyramides verticem habentes eundem quem conus. Ergo unaquaeque pyramidum hoc modo erectarum major est quam dimidium portionis conus quae est ad ipsam, quod eodem modo ostendetur, quo simile ostensum fuit de prismatibus et segmentis cylindri. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, et hoc semper facientes, relinquemus tandem quasdam conus portiones quae minores

c. Lemma. erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat^c. relinquuntur, et

et sint quae super circuli segmentis AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. reliqua igitur pyramis cujus basis AEBFCGDH, et vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum AEBFCGDH, altitudo, autem eadem quae cylindri. prisma igitur cujus basis AEBFCGDH polygonum, et altitudo eadem quae cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus ABCD. sed et minus, ab ipso enim comprehenditur; quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quam triplum. ergo cylindrus coni triplus est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est &c. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

CONI et cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

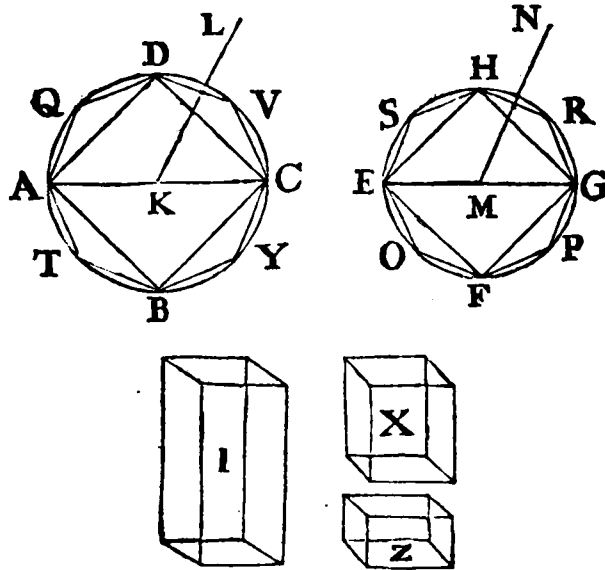
Sint in eadem altitudine coni et cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, axes autem KL, MN, et diametri basium AC, EG. Dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad conum EN.

Si enim non ita sit, erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN, vel ad majus. sit primo ad minus quod sit X; et quo minus est solidum X cono EN, ei aequale sit Z solidum; conus igitur EN ipsis solidis X, Z est aequalis. describatur in EFGH circulo quadratum EFGH; majus igitur erit quadratum dimidio circuli. erigatur a quadrato EFGH pyramis aequae alta cono*; pyramis igitur erecta major est coni dimidio. nam si circa

* Potius, eandem quem conus verticem habens, et sic in sequentibus quibusdam.

circulum

circulum quadratum describamus, et ab ipso erigamus pyramidem aequae altam cono, erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptae dimidium;
 a. 6. 12. etenim inter se sunt ut bases^a. conus autem circumscripta pyramide est minor; ergo pyramis cujus basis quadratum EFGH, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. secentur circumferentiae EF, FG, GH, HE bifariam in punctis O, P, R, S, et EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EOF, FPG,



GRH, HSE majus est quam dimidium segmenti circuli in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum EOF, FPG, GRH, HSE pyramis aequae alta cono; ergo et unaquaeque creatarum pyramidum major est dimidio portionis coni quae est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, et jungentes rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides aequae altas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni quae solido

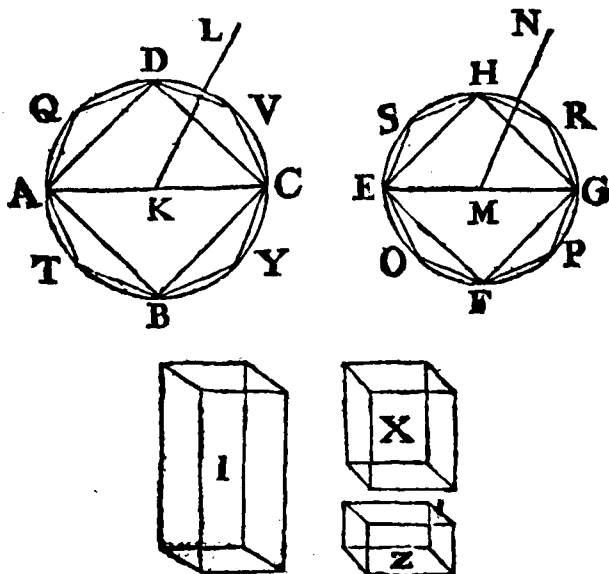
b. Lemma. Z minores erunt^b. relinquantur, et sint quae super circuli segmentis EO,

EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. reliqua igitur pyramis cujus
 basis polygonum EOFPGRHS, altitudo autem eadem quae coni, ma-
 jor est solido X. describatur in circulo ABCD polygono EOFPGRHS
 simile polygonum ATBYCVDQ, et ab ipsa erigatur pyramis aequae
 alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum
 ex EG, ita ATBYCVDQ polygonum ad polygonum EOFPGRHS^c; c. 1. 12.
 ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circu-
 lus ad circumulum EFGH^d; erit ut ABCD circumulus ad circumulum EFGH, d. 2. 12.
 ita polygonum ATBYCVDQ ad polygonum EOFPGRHS^e. sed ut e. 11. 5.
 ABCD circumulus ad circumulum EFGH, ita conus AL ad X solidum; et
 ut polygonum ATBYCVDQ ad polygonum EOFPGRHS, ita^a py- a. 6. 12.
 ramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L,
 ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum
 N. ut igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis cujus basis polygo-
 num ATBYCVDQ, et vertex punctum L ad pyramidem cujus basis po-
 lygonum EOFPGRHS, et vertex N punctum. conus autem AL ma-
 jor est pyramide quae est in ipso; majus igitur est solidum X pyrami-
 de quae est in cono EN^f. sed et minus; quod est absurdum. non igitur f. 14. 5.
 tur ut ABCD circumulus ad circumulum EFGH, ita est AL conus ad soli-
 dum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH
 circumulus ad circumulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum mi-
 nus cono AL. Dico praeterea neque esse ut ABCD circumulus ad circu-
 lum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. si
 enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit I. Ergo invertendo
 ut EFGH circumulus ad circumulum ABCD, ita erit solidum I ad AL co-
 num. erit autem ut solidum I ad AL conum, ita conus EN ad ali-
 quod solidum, quod quidem minus erit cono AL^f, quia solidum I ma-
 jus est cono EN. et igitur ut EFGH circumulus ad circumulum ABCD, ita
 conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse

R r

ostensum

ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. Ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed ut conus ad conum, ita est cy-



^{s. 15. 5.} ^{h. 10. 12.} lindrus ad cylindrum^s; est enim uterque utriusque triplus^h. et igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita sunt super ipsis cylindri aequae alti. Ergo coni et cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.

SIMILES coni et cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium.

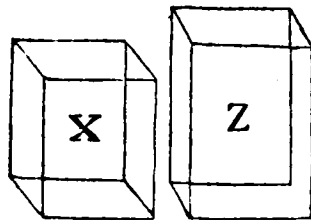
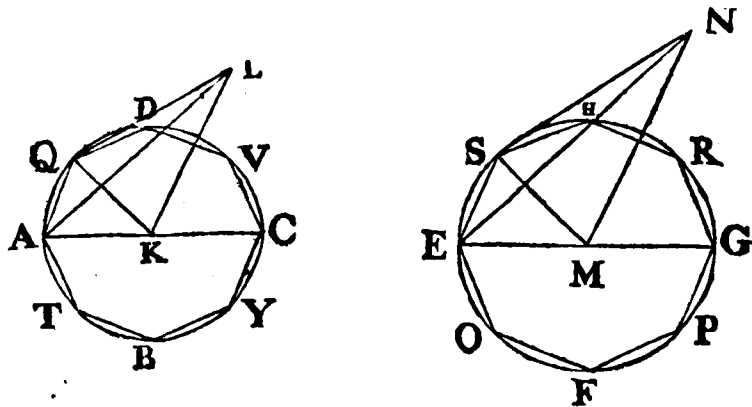
Sint similes coni et cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD, EFGH, diametri vero basium AC, EG, et axes conorum vel cylindrorum.

LIBER DUODECIMUS.

315

rum KL, MN. Dico conum cujus basis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere rationem ejus quam habet AC ad EG.

Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam rationem ejus quam AC ad EG, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplicatam rationem, vel ad majus. ha-



beat primum ad minus quod sit X; iisdemque omnino ut in propositione praecedente constructis, ostendetur, ut in ea, pyramidem cujus basis quidem polygonum EOFPGRHS, vertex autem N punctum, majorem esse solido X. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile polygonum ATBYCVDQ, a quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus; et triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ,

R r 2

vertex

vertex autem punctum L, unum sit LAQ; triangulorum vero continentium pyramidem cujus basis EOFPGRHS polygonum, et vertex punctum N, unum sit NES; et jungantur KQ, MS. Quoniam igitur conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit ut AC ad EG, ita

a. 24. Def. 11.
b. 15. 5.

KL axis ad axem MN^a; ut autem AC ad EG, ita AK ad EM^b; itaque ut AK ad EM, ita KL ad MN; et permutando ut AK ad KL, ita EM ad MN. et anguli AKL, EMN aequales sunt, rectus enim uterque est; circa igitur aequales angulos latera sunt proportionalia, et

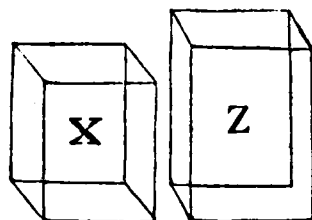
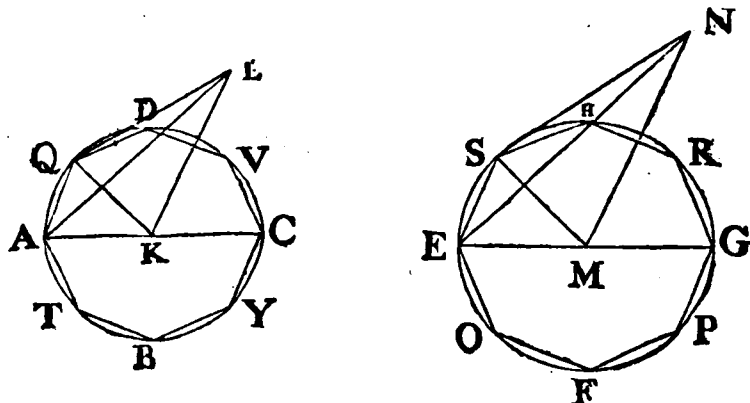
e. 6. 6. propterea simile^c est AKL triangulum triangulo EMN. rursus, quoniam est ut AK ad KQ, ita EM ad MS et sunt circa aequales angulos AKQ, EMS, etenim quae pars est angulus AKQ quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, eadem est pars et angulus EMS quatuor rectorum qui sunt ad centrum M; erit triangulum AKQ triangulo EMS simile^c. et quoniam ostensum est ut AK ad KL, ita esse EM ad MN, aequalis autem est AK ipsi KQ, et EM ipsi MS, erit ut QK ad KL, ita SM ad MN; igitur circa aequales angulos QKL, SMN, sunt enim recti, latera sunt proportionalia; quare triangulum LKQ simile est triangulo NMS. et quoniam ob similitudinem triangulorum AKL, EMN est ut LA ad AK, ita NE ad EM; ob similitudinem vero triangulorum AKQ, EMS, ut KA ad AQ, ita ME ad ES; erit ex aequali

d. 22. 5. d LA ad AQ, ita NE ad ES. rursus, quoniam ob similitudinem triangulorum LQK, NSM est ut LQ ad QK, ita NS ad SM; et ob similitudinem triangulorum KAQ, MES ut KQ ad QA, ita MS ad SE; ex aequali^d erit ut LQ ad QA, ita NS ad SE. ostensum autem est et ut QA ad AL, ita SE ad EN; quare rursus ex aequali ut QL ad LA, ita SN ad NE. triangulorum igitur LQA, NSE proportio-

e. 5. 6. nalia sunt latera, ideoque aequiangula sunt LQA, NSE triangula^e, et inter se similia. quare et pyramis cujus basis triangulum AKQ, vertex autem L punctum, similis est pyramidi cujus basis EMS triangulum,

et

et vertex punctum N, sunt enim et ipsarum anguli solidi inter se aequales^f, et similibus planis multitudine aequalibus continentur. pyra-f. B. 11. mides autem similes, et quae triangulares bases habent, in triplicata sunt ratione homologorum laterum^g; ergo pyramis AKQL ad pyra-g. 8. 12. midem EMSN triplicatam habet rationem ejus quam AK habet ad EM. similiter a punctis quidem D, V, C, Y, B, T ad K, a punctis



vero H, R, G, P, F, O ad M ducentes rectas lineas, et a triangulis erigentes pyramides vertices eisdem habentes quos coni, ostendemus et unamquamque pyramidum ad unamquamque ejusdem ordinis triplicatam rationem habere ejus quam habet AK latus ad homologum latus EM, hoc est quam AC ad EG. sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia^h; est igitur h. 12. 5. tur et ut AKQL pyramis ad pyramidem EMSN, ita tota pyramis cujus

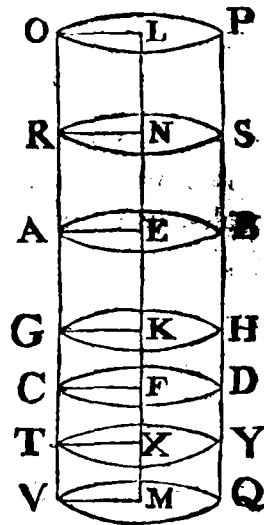
jus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N. quare et pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N, triplicatam rationem habet ejus quam AC habet ad EG. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam rationem habere ejus quam AC ad EG; ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quae in ipso, etenim eam comprehendit; majus igitur est solidum X pyramide cujus basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum Nⁱ. sed et minus; quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, et vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus EFGH, et vertex N punctum, triplicatam rationem habet ejus quam AC habet ad EG. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL, triplicatam rationem habere ejus quam habet EG ad AC. Dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere rationem ejus quam AC habet ad EG. si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo igitur, solidum Z ad conum ABCDL triplicatam rationem habet ejus quam EG ad AC. erit autem ut solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum, quod quidem minusⁱ erit cono ABCDL, quoniam solidum Z majus est cono EFGHN. ergo et conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL, triplicatam rationem habebit ejus quam EG habet ad AC, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod

aliquod majus cono EFGHN, triplicatam rationem habet ejus quam AC ad EG. ostensum autem est neque ad minus. Quare conus ABCDL ad EFGHN conum, triplicatam rationem habet ejus quam AC ad EG. ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum^k; ostensum enim^{k. 15. 5.} est omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, et aequalem altitudinem. Ergo et cylindrus ad cylindrum triplicatam rationem habebit ejus quam AC ad EG. similes igitur coni et cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

SI cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

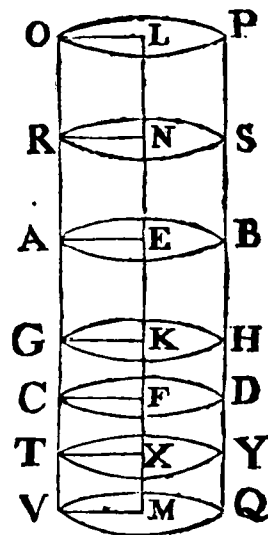
Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB, CD parallelo, et occurrat axi EF in K puncto, sitque linea GH communis sectio plani GH et superficiei cylindri AD. sit autem AEFC parallelogrammum rectangulum cujus revolutione circa rectam EF cylindrus AD describitur, in quacunque ejus positione; et sit recta GK communis sectio plani GH et ipsius AEFC. Quoniam igitur plana parallela AB, GH secta sunt plano AEKG, erunt AE, GK communes ipsorum sectiones parallelae^a; quare parallelogrammum est AK, et propterea KG est aequalis ipsi EA quae sc. est ex centro circuli AB. eadem ratione et omnes rectae quae ducuntur a puncto K ad lineam GH aequales ostendentur iis quae sunt ex centro circuli



a. 16. 11.

circuli AB; quare et inter se sunt aequales. linea igitur GH est circum-
 b. 15. Def. 1. ferentia circuli^b cujus centrum est punctum K. planum igitur GH cy-
 lindrum AD dividit in cylindros AH, GD; sunt enim iidem qui de-
 scriberentur revolutione parallelogrammorum AK, GF circa rectas EK,
 KF. Dico igitur ut AH cylindrus ad cylindrum HC, ita EK axem
 ad axem KF.

Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M; et
 ipsi quidem EK axi ponantur aequales quocunque EN, NL; ipsi
 vero FK aequales quocunque FX, XM; et
 per puncta L, N, X, M ducantur plana ip-
 sis AB, CD parallela. igitur, ut de plano GH
 ostensum fuit, planorum illorum et superficiei
 cylindri productae communes sectiones erunt
 circuli quorum centra sunt L, N, X, M puncta,
 et abscindunt plana cylindros PR, RB, DT,
 TQ. Quoniam igitur axes LN, NE, EK in-
 ter se sunt aequales, erunt cylindri PR, RB, BG
 a. 11. 12. inter se ut bases^c. aequales autem sunt bases;
 ergo et cylindri PR, RB, BG sunt aequales.
 quoniam vero axes LN, NE, EK sunt inter se
 aequales, sunt autem et cylindri PR, RB, BG,
 aequales inter se, atque est ipsorum LN, NE, EK multitudo aequalis
 multitudini ipsorum PR, RB, BG; quam multiplex est axis KL ipsius
 KE axis, tam multiplex erit et PG cylindrus cylindri GB. eadem ra-
 tione et quam multiplex est MK axis ipsius axis KF, tam multiplex est
 et QG cylindrus cylindri GD. et si quidem axis KL sit aequalis axi
 KM, erit et PG cylindrus cylindro GQ aequalis; si autem axis KL
 major sit axe KM, et cylindrus PG major erit cylindro GQ; et si
 minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet
 axibus



axibus EK, KF, et cylindris BG, GD, sumpta sunt utcumque aequae multiplicia, axis quidem EK et BG cylindri, nempe axis KL et cylindrus PG; axis vero KF et cylindri GD utcumque aequae multiplicia, axis scilicet KM, et GQ cylindrus; et demonstratum est si KL axis superat axem KM, et PG cylindrum superare cylindrum GQ; et si aequalis, aequalem esse; et si minor, minorem. est igitur ^d axis EK ^{d. 5. Def. 5.} ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylindrus plano secetur &c. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

SUPER aequalibus basibus existentes coni et cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in aequalibus basibus AB, CD, cylindri EB, FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL.

Producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturque ipsi GH axi aequalis LN; et circa axem LN intelligatur cylindrus CM. Quoniam

igitur cylindri EB, CM eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases^a. ba-

ses autem sunt aequales; ergo et cylindri EB, CM inter se aequales erunt.

et quoniam cylindrus FM secatur plano

CD, oppositis planis parallelo, erit ut CM

cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN

ad KL axem^b. aequalis autem est cylin-

drus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. est igitur ut

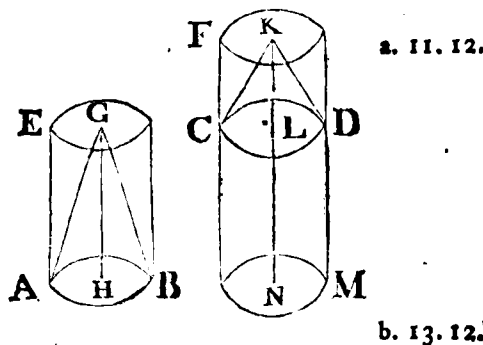
EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem. ut autem

EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG conus ad conum CDK^c, c. 15. 5.

cylindri enim sunt conorum tripli^d. Ergo et ut GH axis ad axem d. 10. 12.

S f

KL,



EUCLIDIS ELEMENTORUM

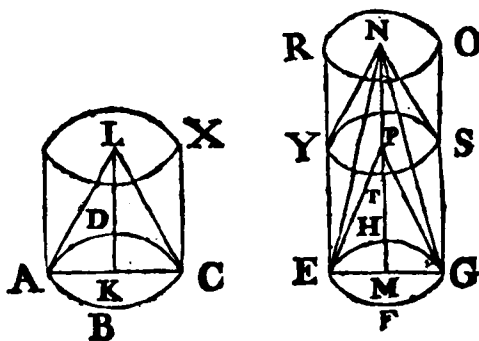
KL, ita est ABG conus ad conum CDK, et cylindrus EB ad FD cylindrum. Super aequalibus igitur &c. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

AEQUALIUM conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales; et quorum conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt aequales.

Sint aequales coni et cylindri, quorum bases quidem ABCD, EFGH circuli, et diametri ipsorum AC, EG; axes autem KL, MN, qui quidem et conorum vel cylindrorum sunt altitudines; et sint coni quidem ALC, ENG, cylindri vero AX, EO. Dico cylindrorum AX, EO bases et altitudines reciproce proportionales esse, hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinem MN ad altitudinem KL.

Altitudo enim KL vel aequalis est altitudini MN, vel non aequalis. sit primum aequalis. est autem AX cylindrus aequalis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni et cy-



- a. 11. 12. lindri inter se sunt ut bases^a; aequalis * igitur est basis ABCD basi
^aA. 5. EFGH. est igitur ut basis ABCD ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem KL. non sit autem altitudo KL altitudini MN aequalis, sed major sit MN, et auferatur ab ipsa MN altitudini KL aequalis MP, et per P secetur EO cylindrus plano TYS oppositis planis circulorum EFGH, RO parallelo; igitur, sectio communis plani TYS et superficiei cylindri EO erit circulus, et erit ES cylindrus cujus basis quidem

quidem EFGH circulus, altitudo autem MP. Quoniam igitur AX cylindrus aequalis est cylindro EO, erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum^b. sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFGH basim^a; cylindri enim AX, ES eandem habent altitudinem; ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita MN altitudo ad altitudinem MP^c, nam cylindrus EO secatur plano TYS oppositis planis parallelo. est igitur ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. aequalis autem est MP altitudo altitudini KL; quare ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. aequalium igitur cylindrorum AX, EO bases et altitudines reciproce sunt proportionales.

Sed cylindrorum AX, EO bases et altitudines sint reciproce proportionales, sit scilicet ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. Dico AX cylindrum cylindro EO aequalem esse.

Primo, Sit basis ABCD basi EFGH aequalis; et quoniam ut basis ABCD ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem, erit MN aequalis * ipsi KL, quare et cylindrus AX aequalis erit * cylindro EO. * A. 5. sed non sit ABCD basis aequalis basi EFGH, et sit ABCD major; et quoniam ut basis ABCD ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem, erit MN major * KL; iisdemque, ut prius, constructis, quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; quoniam vero altitudo KL aequalis est altitudini MP; erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem^a; ut autem MN altitudo ad altitudinem MP sive KL, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est aequalis. similiter autem et in conis. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

DUABUS circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum aequalium laterum, quorumque numerus par sit, describere, quod minorem circulum non attingat.

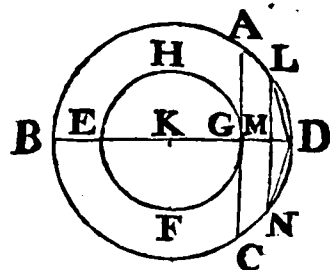
Sint dati duo circuli ABCD, EFGH circa idem centrum K. oportet in majori circulo polygonum aequalium laterum quorum numerus sit par, describere, non attingens minorem circulum.

Ducatur per K centrum recta linea BD, atque a puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur GA, et ad C producat; continget igitur AC

a. 16. 3. circulum EFGH^a. itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, et ejus dimidium rursus bifariam, et hoc semper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem

b. Lemma. ipsâ AD^b. relinquatur sitque LD; et a puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, et ad N producat; junganturque LD, DN.

c. 3. 3. aequalis igitur^c est LD ipsi DN, et quoniam LN parallela est ipsi AC, et AC contingit circulum EFGH; ipsa LN circulum EFGH non tanget. et multo minus tangent circulum EFGH rectae lineae LD, DN. quod si ipsi LD aequales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonum aequalium et numero parium laterum non attingens minorem circulum. Q. E. F.

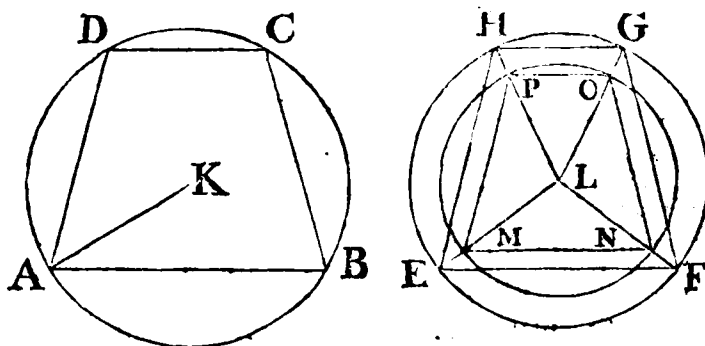


LEMMA II.

L E M M A II.

SI duo trapezia ABCD, EFGH inscripta sint circulis quorum centra K, L puncta, fuerint autem latera AB, DC ut et EF, HG parallela; reliqua autem quatuor AD, BC, EH, FG inter se aequalia; sit autem AB latus majus latere EF, et DC majus HG. erit recta KA quae est ex centro circuli in quo majora sunt latera, major ea LE quae est ex centro alterius circuli.

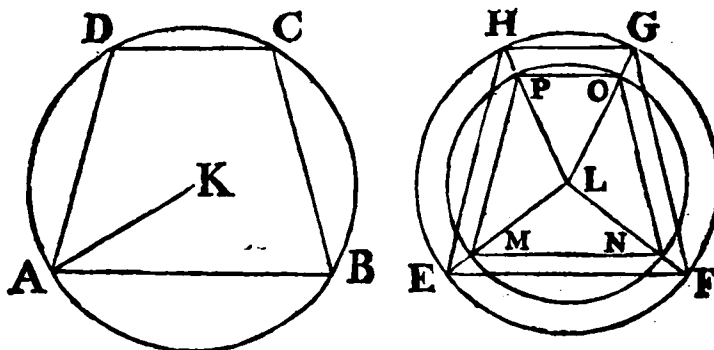
Non enim, si fieri potest, sit KA major recta LE; erit igitur KA vel aequalis ipsi LE vel minor eadem. sit primo KA aequalis LE. quoniam igitur in aequalibus circulis rectae AD, BC aequales sunt ipsis EH, FG, erunt circumferentiae AD, BC aequales circumferentiis EH, FG^a; quoniam vero rectae AB, DC majores sunt ipsis EF, HG, altera a. 28. 3.



altera, erunt circumferentiae AB, DC majores ipsis EF, HG. Ergo tota ABCD circumferentia major est tota EFGH; sed et aequalis, quod fieri non potest. non igitur recta KA aequalis est ipsi LE.

Sed sit KA minor LE, et ipsi KA aequalis ponatur LM, et centro L, intervallo LM describatur circulus MNOP, qui junctis LF, LG, LH,

LH, LE occurrat in N, O, P, M; et jungantur MN, NO, OP, PM, b. 2. 6. quae ipsis EF, FG, GH, HE parallelae^b et minores erunt; singulae singulis. quoniam igitur EH major est MP, erit et AD quam MP major, et aequales sunt circuli ABCD, MNOP; major igitur est circumferentia AD circumferentiâ MP; eadem ratione circumferentia BC major est ipsâ NO; et quoniam recta AB major est rectâ EF quae ipsa MN major est, erit AB quam MN multo major. est igitur circumferentia AB major ipsâ MN; eademque ratione DC circumfe-



rentia major est ipsâ PO. tota igitur ABCD major est tota circumferentia MNOP, sed et aequalis, quod fieri non potest. non igitur minor est KA ipsâ LE, sed neque aequalis. Recta igitur KA ipsâ LE necessario est major. Q. E. D.

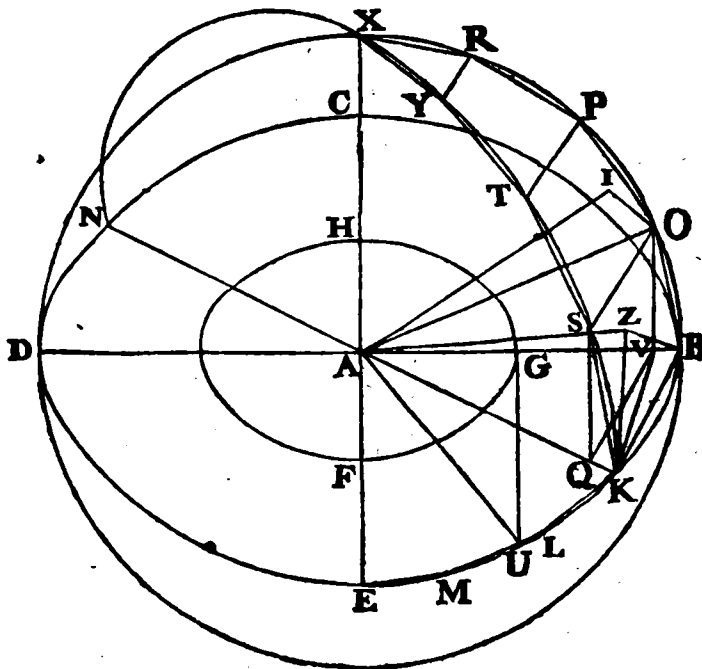
COR. Et si fuerit triangulum isosceles cujus latera ipsis AD, BC aequalia sunt, basis autem minor AB majori ipsarum AB, DC; similiter ostendetur recta KA major eâ quae est ex centro circuli circa triangulum descripti.

PROP. XVII. THEOR.

DUABUS sphaeris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyedrum describere, cujus superficies minorem sphaeram non attingat.

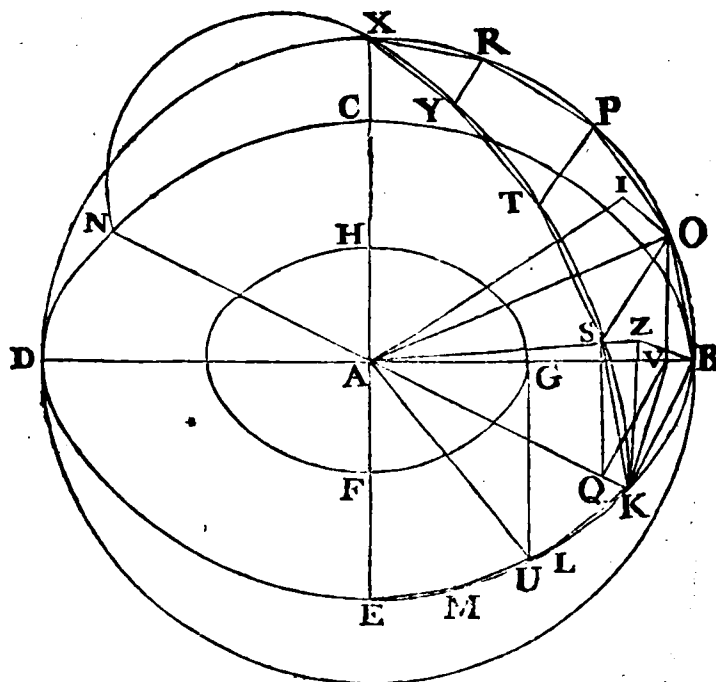
Intelligentur duae sphaerae circa idem centrum A; oportet in majori sphaera describere solidum polyedrum cujus superficies minorem sphaeram non attingat.

Secentur sphaerae plano aliquo per centrum ducto; itaque sectiones



erunt circuli; quoniam diametro manente et semicirculo circumducto sphaera facta est; ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producit planum in superficie sphaerae circulum efficiet;

efficiet; et constat circulum esse maximum, quia diameter sphaerae quae et circuli est diameter, major est omnibus rectis lineis quae in circulo
 a. 15. 3. vel sphaera ducuntur^a. sit igitur in maiori quidem sphaera circulus BCDE, in minori autem circulus FGH; et ducantur ipsorum duae diametri BD, CE ad rectos inter se angulos. et duobus circulis circa idem centrum existentibus BCDE, FGH, in maiori BCDE polygonum



b. 16. 12. aequalium et parium numero laterum describatur^b, non attingens minorem circulum FGH; cuius latera sint in BE circuli quadrante BK, KL, LM, ME, et juncta KA producat ad N; et a puncto A plano circuli BCDE ad rectos angulos ducatur AX, quae superficiei sphaerae in puncto X occurrat; et per AX, et utramque ipsarum BD; KN plana ducantur, quae ex jam dictis in superficie sphaerae maximos circulos efficiant. itaque efficiant, et sint super diametris BD, KN eorum semicirculi

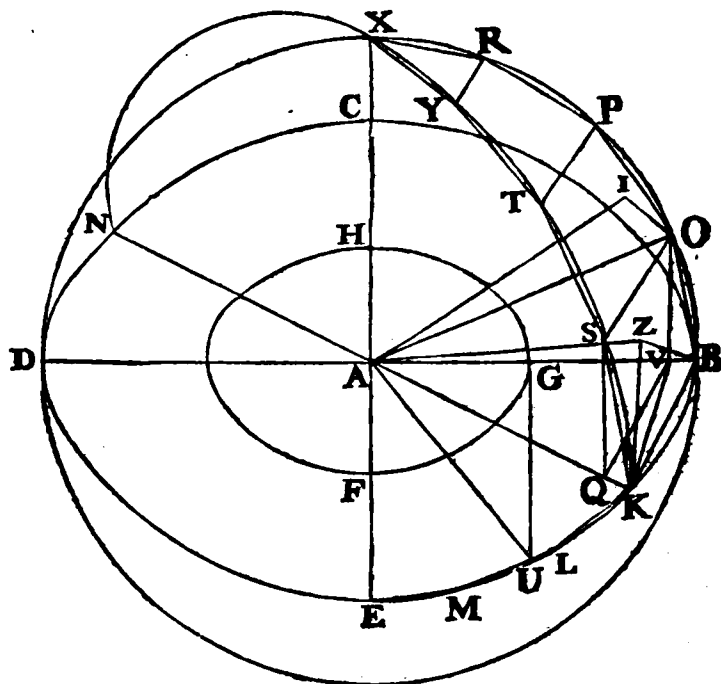
circuli BXD, KXN. Quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quae per ipsam XA transeunt ad planum circuli BCDE recta^c, quare et semicirculi BXD, KXN recti sunt ad ^{c. 18. 11.} illud planum. et quoniam semicirculi BED, BXD, KXN aequales sunt, super aequalibus enim sunt diametris BD, KN, erunt et eorum quadrantes BE, BX, KX inter se aequales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt et in quadrantibus BX, KX aequalia ipsis BK, KL, LM, ME. describantur et sint BO, OP, PR, RX; KS, ST, TY, YX, junganturque OS, PT, RY; et a punctis O, S ad rectas AB, AK perpendiculares ducantur OV, SQ. quoniam igitur planum BOXD rectum est ad planum BCDE, et in uno ipsorum BOXD ducta est OV perpendicularis ad AB communem planorum sectionem, erit OV perpendicularis ad planum BCDE^d. eadem ratione SQ perpendi- ^{d. 4. Def. 11.} cularis erit ad idem planum, quia planum KSXN ad rectos angulos est plano BCDE. Jungatur VQ, et quoniam in aequalibus semicirculis BXD, KXN aequales circumferentiae sumptae sunt BO, KS, et ductae perpendiculares OV, SQ ad circulorum diametros, erit OV quidem ipsi SQ aequalis, BV vero aequalis KQ. est autem et tota BA aequalis toti KA, ergo et reliqua VA reliquae QA est aequalis. ut igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, ideoque VQ ipsi BK parallela est^e. et quo- ^{e. 2. 6.} niam utraque ipsarum OV, SQ recta est ad circuli BCDE planum, erit OV ipsi SQ parallela^f; ostensa autem est et ipsi aequalis; ergo ^{f. 6. 11.} QV, SO aequales sunt et parallelae^g. et quoniam QV parallela est ipsi ^{g. 33. 1.} SO, sed et parallela ipsi KB, erit et OS ipsi BK parallela^h; ergo quae ^{h. 9. 11.} ipsas conjungunt BO, KS in eodem sunt plano in quo parallelae OS, BK, et quadrilaterum KBOS in uno erit plano. si vero jungantur PB, TK, et a punctis P, T ducantur perpendiculares ad rectas AB, AK, ostendetur recta TP parallela ipsi KB eodem prorsus modo quo ostensa est SO parallela eidem KB; quare ^h TP parallela est ipsi SO,

T t

et

EUCLIDIS ELEMENTORUM

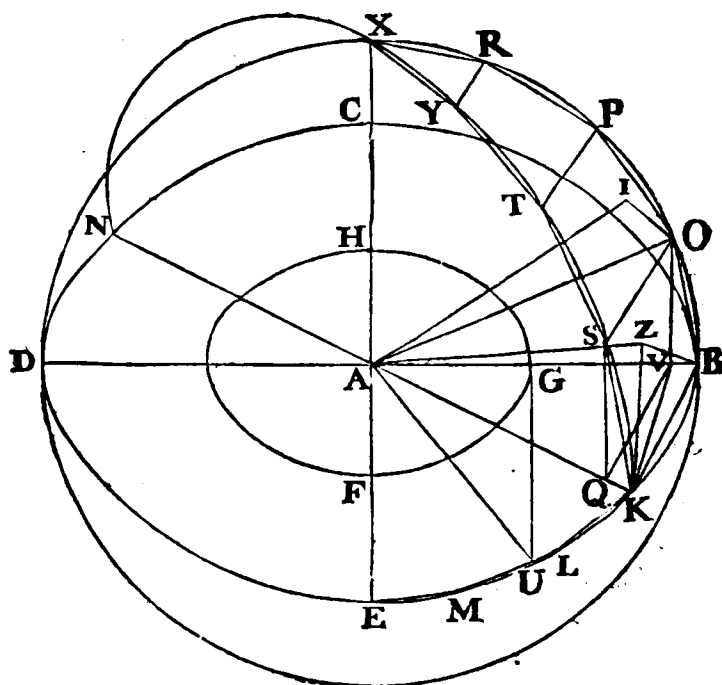
et propterea quadrilaterum $SOPT$ in uno erit plano. eadem ratione quadrilaterum $TPRY$ est in uno plano. est autem in uno plano figura YRX . si igitur a punctis O, S, P, T, R, Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quaedam figura solida polyedra inter circumferentias BX, KX , ex pyramidibus composita, quarum bases quidem $KBOS, SOPT, TPRY$ quadrilatera, et triangulum YRX , ver-



tex autem punctum A . si autem in unoquoque laterum KL, LM, ME quemadmodum in BK eadem construamus, et etiam in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo haemisphaerio; constituetur figura quaedam solida polyedra in sphaera descripta, et composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, et YRX triangulum, et quae ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. Dictae autem figurae polyedrae superficies non attinget minorem sphaeram in qua est circulus

lus FGH. Ducatur enim a puncto A ad planum quadrilateri KBOS perpendicularis AZ^k, cui in puncto Z occurrat, et BZ, ZK jungan-
 tur. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBOS planum, et
 ad omnes rectas lineas quae ipsam contingunt et in eodem sunt plano
 rectos angulos faciet; ergo AZ ad utramque ipsarum BZ, ZK est per-
 pendicularis. et quoniam AB est aequalis AK, et sunt quadrato qui-
 dem ex AB aequalia quadrata ex AZ, ZB; quadrato autem ex AK
 aequalia ex AZ, ZK quadrata*; ergo quadrata ex AZ, ZB, quadratis* 47. 1.
 ex AZ, ZK aequalia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ, re-
 liquum igitur quadratum ex BZ reliquo ex ZK est aequale; ideoque
 recta linea BZ rectae ZK aequalis. similiter ostendemus et quae a
 puncto Z ad puncta O, S ducuntur utrique ipsarum BZ, ZK aequales
 esse. circulus igitur centro Z, intervallo ZB descriptus per puncta K,
 O, S transibit, atque erit in circulo quadrilaterum KBOS. et quoniam
 KB major est quam QV, aequalis autem QV ipsi SO, erit et KB
 quam SO major. sed KB est aequalis utrique ipsarum BO, KS; quare
 unaquaeque aequalium circumferentiarum quas auferunt rectae KB, BO,
 KS, in circulo KBOS major est circumferentia quam aufert recta OS;
 ideoque tres illae circumferentiae una cum quarta uni ipsarum aequali
 majores sunt iisdem tribus una cum ea quam aufert recta OS, hoc est
 tota circumferentia; circumferentia igitur KB in circulo KBOS major
 est quarta parte totius circumferentiae KBOS circuli, et propterea an-
 gulus BZK ad centrum major est angulo recto. Quoniam igitur obtu-
 sus est angulus BZK, erit quadratum ex BK majus quadratis ex BZ,
 ZK^l, hoc est majus quam duplum quadrati ex BZ. Jungatur KV, l. 12. 2;
 et quoniam in triangulis KBV, OBV aequales sunt KB, BV ipsis OB,
 BV, et aequales continent angulos, erit KVB angulus angulo OVB
 aequalis^m. rectus autem est OVB, rectus igitur est angulus KVB. et m. 4. 1.
 quoniam BD minor est quam dupla ipsius DV, erit rectangulum con-

a. 8. 6. tentum DB, BV minus duplo rectanguli DVB, hoc est, erit ⁿ quadratum ex KB minus duplo quadrati ex KV. sed quadratum ex KB majus est quam duplum quadrati ex BZ; ergo quadratum ex KV quadrato ex BZ est majus. et quoniam BA est aequalis AK, et quadrato quidem ex BA aequalia sunt quadrata ex BZ, ZA, quadrato autem ex AK aequalia quadrata ex KV, VA, erunt quadrata ex BZ, ZA qua-



dratis ex KV, VA, aequalia; quorum quadratum ex KV majus est quadrato ex BZ; ergo reliquum ex VA quadratum quadrato ex ZA est minus, ac propterea recta linea AZ major quam recta AV. multo igitur major est AZ quam AG, in Propositione enim praecedente ostensum est rectam KV cadere extra circulum FGH. atque est AZ quidem ad planum KBOS perpendicularis, et propterea minima est omnium

nium quae ad planum illud a centro sphaerae duci possunt. Planum igitur KBOS cadit extra minorem sphaeram.

Reliqua etiam plana inter quadrantes BX, KX extra minorem sphaeram cadere ita ostendetur. Ducatur a puncto A ad planum quadrilateri SOPT perpendicularis AI, et IO jungatur. et, ut de plano KBOS et puncto Z ostensum fuit, eodem modo ostendetur punctum I centrum esse circuli circa quadrilaterum SOPT descripti, et rectam OS majorem esse rectâ PT, et ostensa est PT parallela ipsi OS. Quoniam igitur trapezia KBOS, SOPT circulis inscripta, habent latera BK, OS parallela, ut et OS, PT; reliqua autem BO, KS, OP, ST inter se aequalia; et est latus BK majus latere OS, et OS majus ipso PT, erit recta ZB major recta IO°. Jungatur AO quae aequalis erit ipsi AB, o. 2. Lemma; et quoniam recti sunt anguli AIO, AZB, erunt quadrata ex AI, IO aequalia quadrato ex AO sive AB, hoc est quadratis ex AZ, ZB; et quadratum ex ZB majus est quadrato ex IO, reliquum igitur ex AZ quadratum quadrato ex AI est minus. recta igitur AZ minor est ipsa AI. ostensa autem est AZ major quam AG, multo igitur AI major est recta AG. Ergo planum SOPT cadit extra minorem sphaeram. eadem ratione planum TPRY extra eandem sphaeram cadere ostendetur; ut et planum trianguli YRX, ope sc. Corollarii Lemmatis 2. et similiter reliqua omnia plana quibus continetur solidum polyedrum extra minorem sphaeram cadere ostendentur. Duabus igitur sphaeris circa idem centrum existentibus in majori solidum polyedrum descriptum est cujus superficies minorem sphaeram non attingit. Q. E. D.

Aliter autem et brevius sine ope Prop. 16. ostendetur recta AZ major ipsâ AG. Ducatur a puncto G ipsi AG ad rectos angulos GU et AU jungatur. itaque circumferentiam BE bifariam secantes, et dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinque-
mus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BCDE
quae

quae subtenditur a recta aequali ipsi GU. relinquatur, sitque circumferentia KB. minor igitur est recta linea KB quam GU. et quoniam angulus BZK est obtusus, ut ostensum fuit, erit BK major quam BZ. sed GU quam BK est major; multo igitur major est GU quam BZ, et quadratum ex GU quadrato ex BZ majus. est autem AU aequalis ipsi AB; ergo quadratum ex AU, hoc est quadrata ex AG, GU, aequale est quadrato ex AB, hoc est quadratis ex AZ, ZB; minus autem est quadratum ex BZ quadrato ex GU; reliquum igitur quadratum ex AZ majus est quadrato ex AG, et ob id recta linea AZ quam recta AG est major.

COR. Si vero et in altera sphaera describatur solidum polyedrum ducendo sc. rectas inter puncta in quibus rectae quae a centro sphaerae ad omnes angulos solidi polyedri in majori sphaera descripti, superficiei minoris occurrunt, eodem ordine quo puncta quibus eadem rectae superficiei majoris sphaerae occurrunt, rectis junguntur; habebit solidum polyedrum in sphaera BCDE ad solidum polyedrum in altera sphaera triplicatam rationem ejus quam diameter sphaerae BCDE habet ad alterius sphaerae diametrum. divisus enim solidis in pyramides numero aequales, et ejusdem ordinis; erunt pyramides similes. etenim habent angulos solidos ad verticem, sphaerae sc. centrum, communes, reliquos

a. B. II. vero angulos solidos ad bases inter se aequales^a, quoniam continentur tribus angulis planis qui, singuli singulis, inter se sunt aequales; eademque pyramides continentur similibus planis multitudine aequalibus, et

b. II. Def. II. propterea similes sunt^b. similes autem pyramides inter se in triplicata sunt

c. Cor. 8. 12. ratione homologorum laterum^c. Ergo pyramis cujus basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in altera sphaera ejusdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam habet AB ex centro sphaerae majoris, ad eam quae est ex centro alterius sphaerae. similiter

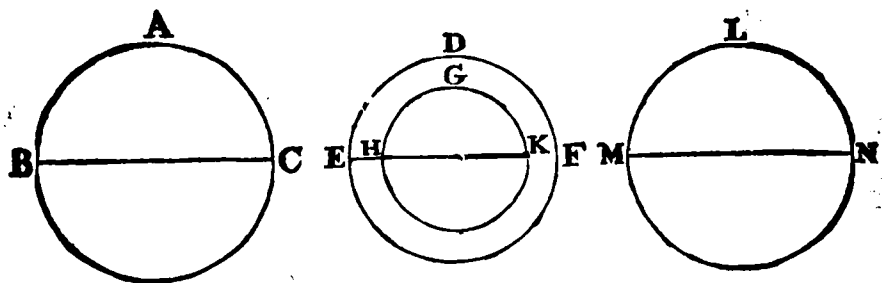
militer et unaquaeque pyramis earum quae sunt in sphaera majori ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis quae sunt in altera sphaera, triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad eam quae est ex centro alterius sphaerae. et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. Quare totum solidum polyedrum, quod est in sphaera majori, ad totum solidum polyedrum quod in altera sphaera, triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad eam quae est ex centro alterius sphaerae, hoc est quam habet BD diameter ad alterius sphaerae diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

SPHAERAE inter se in triplicata sunt ratione suarum diametrorum.

Intelligentur sphaerae ABC, DEF, quarum diametri BC, EF. Dico ABC sphaeram ad sphaeram DEF triplicatam habere rationem ejus quam habet BC ad EF.

Si enim non habet, sphaera ABC ad sphaeram minorem ipsa DEF,

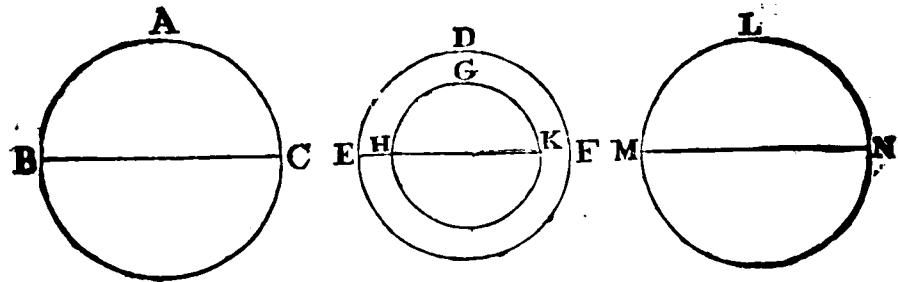


vel ad majorem, triplicatam rationem habebit ejus, quam habet BC ad EF*. habeat primò ad minorem, videlicet ad GHK; et intelligatur

* Vid. ad hanc
notam Prop. 2.

sphaera

- sphaera DEF circa idem centrum, circa quod est sphaera GHK; de-
- a. 17. 12. scribaturque ^a in majori sphaera DEF solidum polyedrum cujus superficies non attingat minorem sphaeram GHK; et in sphaera ABC describatur solidum polyedrum simile ei quod in sphaera DEF descriptum est. solidum igitur polyedrum quod est in sphaera ABC ad solidum polyedrum in sphaera DEF, triplicatam rationem habet ejus quam
- b. Cor. 17. 11. BC ad EF^b. habet autem ABC sphaera ad sphaeram GHK triplicatam rationem ejus quam BC ad EF; ergo ut ABC sphaera ad sphaeram GHK, ita solidum polyedrum in sphaera ABC ad solidum polyedrum in sphaera DEF. major autem est sphaera ABC solido polyedro



- c. 14. 5. quod est in ipsa; ergo ^c et GHK sphaera polyedro quod est in sphaera DEF est major. sed et minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphaera ad sphaeram minorem ipsa DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphaeram ad sphaeram minorem ipsa ABC triplicatam rationem habere ejus quam habet EF ad BC. Dico insuper sphaeram ABC neque ad majorem sphaeram ipsa DEF triplicatam rationem habere ejus quam BC ad EF. si enim fieri potest, habeat ad majorem LMN; invertendo igitur, sphaera LMN ad ABC sphaeram triplicatam rationem habet ejus quam diameter EF habet ad BC

BC diametrum. ut autem sphaera LMN ad ABC sphaeram, ita sphaera DEF ad aliam quandam sphaeram, quae quidem minor erit sphaera ABC^c, quoniam sphaera LMN major est sphaera DEF. ergo et DEF c. 14. 5. sphaera ad sphaeram minorem ipsâ ABC, triplicatam rationem habet ejus quam EF ad BC; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphaera ad sphaeram majorem ipsâ DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. Ergo ABC sphaera ad sphaeram DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. Q. E. D.

F I N I S.

U u

N O T A E
CRITICAE ET GEOMETRICAE;

Q U A E

Rationem reddunt eorum in quibus Editio haec differt a Textu Graeco
Elementorum; inferuntur etiam eisdem paucae in quasdam Proposi-
tiones observationes.

A U C T O R E

ROBERTO SIMSON, M.D.

In Academia Glasguensi Matheseos Professore.

G L A S G U A E:

IN AEDIBUS ACADEMICIS
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI

M. DCC. LVI.

N O T A E &c.

Ad DEFINITIONEM VII. LIB. I.

LOCO Definitionis quae habetur in Graecis codicibus alia magis distincta posita est, in qua continetur affectio planae superficiei quae in Elementis manifeste ponitur, rectam scilicet lineam duci posse a quovis puncto in plana superficie ad quodvis in eadem, quae tota sit in ea superficie.

Ad DEF. VIII. LIB. I.

Videtur eum qui hanc Definitionem posuit voluisse angulum planum in genere definire, hoc est ut non solum angulus qui duabus rectis continetur, sed et is quem aliqui concipiunt contineri recta linea et curva, vel duabus curvis lineis in plano sibi mutuo occurrentibus, simul definiretur. quamvis autem sensus verborum ἐπ' εὐθείας, in directum, vel in recta linea, manifestus sit quando duae rectae dicuntur in directum esse, non tamen apparet quo sensu intelligenda sunt haec verba, quando recta linea et curva, vel duae curvae in directum esse dicuntur; certe hoc loco explicari non potest. verosimile igitur est Definitionem hanc, et Definitionem anguli segmenti, ut et ea quae de angulo semicirculi, et segmentorum angulis habentur in Prop. 16. et 31. Lib. 3. additamenta esse Editoris minus periti. et ob hanc rationem Definitiones eae, praesertim cum inutiles omnino sint, notis inversis conamatis a reliquis distinguuntur.

Ad DEF. XVII. LIB. I.

Huic Definitioni adjecta sunt sequentia in omnibus exemplaribus
 “ quae

“ quae quidem et bifariam circulum secat.” haec autem omisimus, non enim sunt pars Definitionis, sed Corollarium ex ea. Proclus id ostendit concipiendo unum ex segmentis in quae diameter circulum dividit, altero applicari; manifestum enim est ea necessario sibi mutuo congruere; si enim non congruerent, rectae a centro ad circumferentiam ductae non essent inter se aequales. idem etiam facile ostenditur ex Prop. 31. Lib. 3. et Prop. 24. ejusdem. ex prima enim harum sequitur semicirculos similia esse circuli segmenta; et ex altera segmenta haec aequalia esse.

Ad DEF. XXXIII. LIB. I.

Definitio haec affectionem continet superfluum rei definitae; etenim omnis figura quadrilatera quae habet latera opposita inter se aequalia, habebit etiam angulos oppositos inter se aequales; et contra.

Sit enim in quadrilatero ABCD, latus AB aequale lateri CD, et latus AD ipsi BC; ducta igitur BD, erunt AD, DB aequales ipsis CB, BD, et basis AB basi CD est aequalis. igitur ex Prop. 8. Lib. 1. erit angulus ADB angulo DBC aequalis; unde per Prop. 4. Lib. 1. erit angulus BAD aequalis ipsi BCD, et ABD ipsi BDC; et propterea angulus ADC aequalis angulo ABC.



Si vero angulus BAD aequalis fuerit angulo BCD, et angulus ABC angulo ADC; erunt et latera opposita inter se aequalia. Quoniam enim ex Prop. 32. Lib. 1. omnes anguli quadrilateri ABCD simul conficiunt quatuor rectos, quorum anguli BAD, ADC simul aequales sunt ipsis BCD, ABC; erunt BAD, ADC simul aequales duobus rectis. parallelae igitur sunt AB, CD ex Prop. 28. Lib. 1. similiter, quoniam anguli DAB, ABC aequales sunt duobus rectis, parallelae erunt AD, BC.

BC. parallelogrammum igitur est ABCD; quare opposita ejus latera sunt inter se aequalia ex Prop. 34. Lib. 1.

Omissa igitur est altera ex hisce affectionibus in Def. 33. Lib. 1.

Ad PROP. VII. LIB. I.

Demonstratio hujus duos habet casus, quorum is qui omissus est pariter est necessarius ac ille qui solus habetur in textu Graeco. casum autem omissum primitus fuisse in textu, ex hoc manifestum est, quod secunda pars Prop. 5. Lib. 1. quae scilicet necessaria est demonstrationi casus omissi, nullius sit usus nisi ad hanc demonstrationem; nam clare sequitur haec pars, ex prima et Prop. 13. Lib. 1. addita igitur fuit gratia cujusdam Propositionis inter 5. et 13. nulla autem harum eam indiget praeter 7. hujus igitur gratia posita fuit. versio etiam ex lingua Arabica hunc casum explicite demonstratum habet. et Proclus agnoscit secundam partem Prop. 5. additam fuisse gratia Prop. 7. ob ridiculam tamen rationem, " ut sc. responsio fiat instantiis contra septimam et decimam sextam tam Propositionem Lib. 1." quasi casus omissus, ut ille existimat, instantia esset contra Propositionem ipsam. Vide si lubet Proclum in Prop. 5. et 7. nam piget nugae ejus referre.

Praeterea enuntiationem Prop. 7. mutavimus, ejusdem sensu omnino retento. qui enim ex Graecis verbum de verbo reddunt, faciunt eam tyronibus intellectu difficilem.

Ad PROP. XI. LIB. I.

Huic Propositioni Corollarium additum est, quod in Prop. 1. Lib. 11. et alias, necessarium sit.

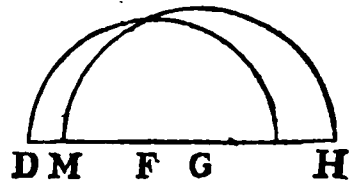
Ad PROP. XX. et XXI. LIB. I.

Refert Proclus in Commentariis in hanc Propositionem Epicureos
eam.

eam impugnasse, utpote asino notam, nullaque demonstratione egentem; ipsique respondit quamvis duo latera trianguli reliquo majora esse, sensui manifestum sit, quomodo vero hoc fiat dicere ad scientiam spectat. vera autem responsio huic objectioni contra hanc et sequentem, aliasque quasdam Propositiones, haec est, numerum axiomaticum sine necessitate minime augendum esse. Clarissimus autem Dominus Clairault qui in Praefatione suis Geometriae Elementis, Parisiis Ann. 1741. editis, praefixa, refert Euclidem operam dedisse ut ostendat duo latera trianguli altero triangulo inclusi simul minora esse lateribus ejus qui ipsum includit, oblitus est addere hanc conditionem, viz. si triangula sint super eadem basi; sine hac enim possunt latera trianguli altero inclusi simul majora esse hujus lateribus in data quacunque ratione, quae minor sit quam dupla; ut demonstratum est a Pappo Alexandrino in Prop. 3. Lib. 3. Collect. Mathem.

Ad PROP. XXII. LIB. I.

Quidam culpant Euclidem quod non ostendat circulos, in constructione hujus Problematis descriptos, sibi mutuo occurrere. perspicuum autem hoc est ex determinatione quam dedit, viz. debere duas ex rectis DF, FG, GH reliquâ majores esse quomodocunque sumptas. Quis enim tyro adeo hebes est ut non ex hac videat circulum, centro F, intervallo FD, descriptum, occurrere rectae FH inter F et H, quoniam



FD minor est FH; et similiter circulum centro G, intervallo GH vel GM descriptum, occurrere rectae DG inter G et D; ipsosque sibi mutuo occurrere, quod FD, GH, simul majores sunt reliquâ FG? et quidem determinatio haec simplicior est eâ quam, ex hac deductam, loco ejus posuit Thomas Simpson in Elementis suis Geometriae pag. 49.

ut

ut hanc quam culpat Euclidis omissionem suppleret, nempe debere unam quamlibet ex tribus rectis minorem esse summâ, at majorem excessu reliquarum; ex qua circulos sibi mutuo occurrere in uno casu ostendit, in alio quovis casu dicit idem eodem modo ostendi posse; verum recta GM quam jubet auferre ex recta GF potest ipsâ GF major esse, ut in figura hic apposita, in quo casu demonstratio ejus in aliam mutanda est.

PROP. XXIV. LIB. I.

Huic, prope initium, adjecimus verba "rectarum enim DE, DF " sit DE ea quae non major est quam DF;" hoc est sumatur ea rectarum DE, DF quae non major est alterâ, ad constituendum cum ea angulum EDG aequalem ipsi BAC; etenim sine hac cautione tres essent casus diverfi hujus demonstrationis, ut Campanus alique faciunt.

PROP. XXIX. LIB. I.

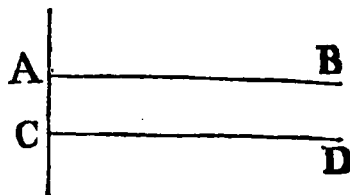
Propositio quae vulgo Postulatum 5^{um}, aut Axioma 11^{um}, a quibusdam 12^{um} dicitur, ex qua haec 29^{na} praecipue pendet, haud parum negotii tum veteribus tum recentioribus Geometris praebuit. et quidem inter communes sententias sive Axiomata non ponenda videtur, non enim per se manifesta est; sed neque demonstrationem, stricte loquendo, admittit; explicatione autem quadam indiget, ut dilucidior fiat. et hanc, viâ qua possumus facillima, Tyronibus ut sequitur exponemus.

Primo facile potest quispiam concipere duas rectas AB, CD, in eodem plano, quae eidem rectae AC ad rectos sunt angulos, aequidistantes quoque esse, i. e. nullibi ad se invicem accedere, vel a se invicem recedere, quantumvis producantur; vel potius nullus est qui aliter de hisce

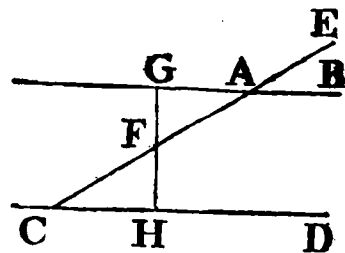
X x

rectis

rectis concipere potest. etenim una ipsarum AB non potest concipi vergere vel minimum versus alteram CD, ni simul concipiatur AB magis inclinari versus partes rectae AC ad quas est CD, quam versus partes contrarias; quod fieri non potest, recta enim AB ad rectos angulos est ipsi AC. idemque dicendum est



de duabus quibuscumque rectis AB, CD quae cum aliqua recta EAC aequales angulos EAB, ECD ad easdem partes continent; nam hae cuiusdam rectae sunt ad rectos angulos. secetur enim AC bifariam in F, et ducatur FG perpendicularis ad AB, occurratque rectae CD in H. quoniam igitur in triangulis AFG, CFH, anguli GAF, AFG ipsis HCF, CFH sunt aequales, alter alteri, ex hypothese et Prop. 15. Lib. 1. et latus AF aequale est lateri FC, erit AGF angulus aequalis ipsi CHF, ex Prop. 26. Lib. 1. rectus autem est AGF, quare et CHF rectus est. igitur rectae BG, DH ad rectos sunt angulos eidem rectae GH.

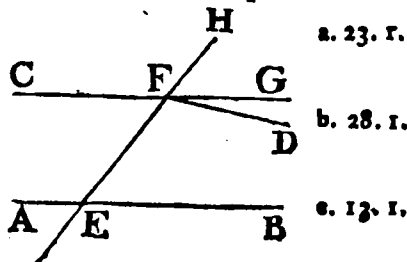


Secundo, liquido patet duas rectas ab eodem puncto exeuntes, a se invicem magis et magis divaricare seu divergere, ita ut distantia earum minima, inter finem unius et alteram rectam, fiat datâ quavis major. in longitudine enim ex. gr. decem pedum, sumpta in una rectarum a puncto a quo exeunt, si distantia ipsarum sit unius pedis, productâ rectâ in alios decem pedes, distantia ipsarum augebitur alio pede, eadem ratione qua in prima longitudine; et ita magis et magis. pendet autem hoc ex natura seu definitione rectae lineae quae eandem semper servat directionem, et ex praecedentibus stricte demonstrari non potest.

Hisce praemissis, sint duae rectae lineae AB, FD, ipsasque secet alia recta

recta EFH quae faciat angulos interiores et ad easdem partes, ipsos sc. BEF, EFD simul minores duobus rectis; convenient inter se AB, FD ad partes B, D ad quas sc. anguli sunt minores duobus rectis.

Ad punctum enim F in recta FH angulo interiori BEF aequalis constituitur^a angulus exterior GFH ad easdem partes rectae FH. igitur ex praemissis rectae parallelae EB, FG^b, aequidistantes sunt. et quoniam anguli HFG, GFE simul aequales sunt duobus rectis^c, erunt anguli BEF, EFG simul duobus rectis aequales. anguli autem BEF, EFD simul minores sunt duobus rectis; quare angulus EFG major est angulo EFD, et cadet FD inter aequidistantes seu parallelas rectas EB, FG. productae autem FG, FD quae ab eodem puncto F exeunt, a se invicem tandem distabunt magis quam rectae aequidistantes FG, EB; et propterea recta FD erit tandem ad partes ipsius EB contrarias iis ad quas est punctum F, hoc est convenient cum ipsa EB.



a. 23. r.

b. 28. r.

c. 13. r.

PROP. XXXV. LIB. I.

Demonstratio hujus mutata est in aliam, quoniam tres essent casus seorsim demonstrandi, si argumentum quo auctor ejus utitur adhiberetur, qui quidem casus habentur in versione ex Arabica lingua; in Elementis enim nulli casus qui diversas requirunt demonstrationes, omitendi sunt. aliam igitur viam inivimus, quam primus, quantum scio, ostendit Dominus Clairault in Elementis suis Geometriæ, pag. 21. eandem postea dedit Thomas Simpson in Elementis suis pag. 32. hic autem adhibet Prop. 26. Lib. 1. Euclidis ex qua sola, aequalitas triangulorum non sequitur, nam adhibenda etiam est Prop. 4. Lib. 1. ut

N O T A E.

in simili prorsus casu factum videmus in Prop. 34. Lib. 1. Elem. melius igitur est uti solâ quarta.

PROP. XLV. LIB. I.

Prope finem demonstrationis recta KM parallela ostenditur rectae FL, ope Prop. 33. est autem KH ex constructione parallela ipsi FG, et ostensae fuerunt KHM, FGL rectae lineae. adjectum est Corollarium ex Commandino, quod saepius usui sit.

PROP. XIII. LIB. II.

PROPOSITIO haec enunciatum solummodo de triangulis acutangulis, quamvis vera sit de omni triangulo. adjecta igitur est Demonstratio in reliquis casibus; Commandinus et Clavius suas etiam dederunt.

PROP. XIV. LIB. II.

In Demonstratione hujus aliquis inepte interposuit “sin minus, una “ ipsarum BE, ED major est; sit BE major et producatum ad F,” quasi aliquod intersit sive major, sive minor earum producta fuerit. vice igitur horum solummodo legendum est “sin minus, producatum BE ad F.”

PROP. I. LIB. III.

AUCTORES quidam, praesertim inter recentiores, contra Demonstrationes Apogogicas sive indirectas nimis severe, et quidem imperite disputant, non animadvertentes quaedam esse quae alia viâ demonstrari non possunt. atque hujus rei Propositio haec exemplum est maxime evidens. directa enim ejus demonstratio afferri minime potest.

nam

nam praeter circuli Definitionem, nullum est principium de circulo ex quo Demonstrationem sive directam sive indirectam conficere licet. ex hac propterea Definitione, et Propositionibus ante demonstratis, necesse omnino est ostendere punctum in Constructione inventum centrum esse circuli. Quoniam igitur in demonstratione utendum est hac Propositione, sc. rectae lineae a centro ad circumferentiam ductae sunt inter se aequales, atque non licitum sit assumere punctum in constructione inventum centrum esse, hoc enim demonstrandum est; manifestum est punctum aliud tanquam centrum assumendum esse. et si ex hoc assumpto absurdum aliquod sequatur, ut quidem Euclides sequi ostendit, tum verum non est punctum assumptum centrum esse; et cum utcumque assumptum fuerit, sequitur nullum, praeter inventum in constructione punctum, centrum esse. unde necessitas demonstrationis indirectae, sive ab absurdo patet.

PROP. XIII. LIB. III.

Quoniam multo facilius est imaginari duos circulos posse se mutuo intus contingere in pluribus punctis quam uno, ad easdem eorum partes, quam ad contrarias; igitur figura hujus casus minime omittenda fuit. ei autem figurae, constructio quae in textu Graeco habetur minus apta fuisset, centra enim circulorum prope eorum circumferentias ponenda essent. alia igitur constructio et demonstratio tradita est, ea scilicet quae est pars posterior ejus quam Campanus ex codicibus Arabicis dedit. nam sine ratione demonstratio apud eum in duas partes divisa est.

PROP. XV. LIB. III.

Deest conversa partis secundae hujus Propositionis, quamvis in praecedente, in casu simili, conversa enuntiatur et demonstratur; haec igitur
 conversa

conversa addita est. praeterea in demonstratione primae partis, diameter AD (in figura Commandini) major ostenditur recta BC ope rectae MN, cum immediate sine hac ostendi potest. alia igitur demonstratio posita est similis ei quâ Euclides utitur in praecedente 14. et eadem quam Theodosius tradit in Prop. 6. Lib. 1. Sphaericorum, in casu omnino simili.

PROP. XVI. LIB. III.

In hac verum sensum Propositionis dedimus sine mentione facta anguli semicirculi, aut ejus quem aliqui concipiunt contineri a circumferentia et contingente, de quibus angulis Clavius, Peletarius aliique recentiores multum inter se contenderunt, et ab iisdem paradoxa satis mira deduxerunt, quibus nullum fundamentum praebet enuntiatio nunc tradita. similiter nihil de angulo segmenti majoris, vel minoris diximus in Prop. 31. hujus Libri; sed sensum Propositionis sine iis enuntiavimus; et haec quidem adulterina esse non temere suspicari aliquem posse affirmat Vieta in pag. 386. Oper. Math.

PROP. XVII. LIB. III.

Huic casum addidimus in quo punctum datum a quo ducenda est recta linea circulum contingens, est in circuli circumferentia.

PROP. XX. LIB. III.

Verba ad initium secundae partis hujus demonstrationis, “*κεκλάνθω*” “*δὴ πάλιν*” scilicet BDC, male vertuntur a Briggio et Gregorio “Rursus inclinatur,” debent enim verti, ut a Commandino, “Rursus inflectatur.” inflecti autem dicitur recta linea ad lineam, sive rectam sive curvam, quando a puncto ad lineam illam ducta est recta linea, et a puncto occursum ad aliud punctum ducta est recta linea angulum faciens
cum

cum priore; ut ex Prop. 90. Datorum manifestum est; ita enim tota linea inter punctum primum et ultimum inflexa sive fracta est ad punctum occurfus sive inflexionis. simili sensu duae rectae lineae inflecti dicuntur a duobus punctis ad tertium punctum, quando angulum faciunt ad punctum hoc; ut in descriptione Locorum planorum Apollonii in Praefatione Pappi Alexandrini ad Librum suum septimum videri potest. Pleniorum autem reddidimus hanc locutionem ex Prop. 90. Datorum.

PROP. XXI. LIB. III.

Hujus Propositionis duo sunt casus, quorum secundus in quo sc. anguli sunt in segmento minore semicirculo, in textu Graeco non habetur. hujus igitur demonstratio addita est simplicior eâ quam Commandinus dedit, utpote ex primo tantum casu sine ope triangulorum derivata.

PROP. XXIII. et XXIV LIB. III.

In Propositione 24. ostenditur segmentum AEB (vid. figuram Commandini) non posse non congruere segmento CFD, et situm diversum ab eo habere ut CGD, occurrentibus circumferentiis sibi mutuo in tertio puncto G, ex eo quod circulus circulum secaret in pluribus quam duobus punctis. verum hoc fieri non posse ostendi debuit in Prop. 23. aequae ac unum ex segmentis non posse intra alterum cadere. hoc igitur ex Prop. 24. sublatum est, et, in proprio suo loco, in Prop. 23. repositum.

PROP. XXV.

N O T A E.

PROP. XXV. LIB. III.

Haec divisa est in tres casus, quorum duo eandem constructionem et demonstrationem habent; eam igitur in duas tantum divisimus.

PROP. XXXIII. LIB. III.

Et Propositio haec in textu Graeco divisa est in tres casus, quorum duo, is scilicet in quo angulus datus est acutus, et is in quo est obtusus, eandem omnino et constructionem et demonstrationem habent; ultimam igitur demonstrationem tanquam superfluum, et imperiti cujusdam additamentum, ex Elementis sustulimus. Praeterea demonstratio casus in quo angulus datus est rectus, incite per ambages facta est, quam propterea in simpliciore, cum Clavio, mutavimus.

PROP. XXXV. LIB. III.

Ut Propositio 25. et 33. in plures, sic haec 35. in pauciores casus quam oportuit dividitur. neque putandum est Euclidem eos propter ipsorum simplicitatem omisisse; dedit enim omnium facillimum, cum scilicet in quo utraque recta per centrum transit. et in sequente Prop. 36. separatim demonstrat casum in quo recta transit per centrum. Theon igitur, ut videtur, eos brevitatis gratia sustulit, quod minime in institutione elementari faciendum, ut antea monitum. Casus igitur omisos, quos et praebent versiones ex Arabico, additi sunt.

PROP. XXXVII. LIB. III.

Verba ad finem hujus, viz. "similiter demonstrabitur et si centrum fit in AC" deleta sunt, utpote incite a quodam Editore addita.

Ad

Ad DEFINITIONES quasdam LIB. IV.

QUANDO punctum aliquod existit in recta, aut alia quavis linea, punctum illud apud Geometras Graecos *ἀπλεῖσαι*, tangere, dicitur lineam eam. et quando recta aut circulus circulo quovis modo occurrit, alter alterum *ἀπλεῖσαι* dicitur. quando vero recta aut circulus occurrit circulo, ita ut ipsum non secet, dicitur *ἐφάπλεῖσαι*, contingere circulum. et hisce verbis nunquam promiscue utuntur. igitur in Definitione 5. Lib. 4. legendum est *ἐφάπληται*, contingit, loco simplicis *ἀπληται*. et in Definitionibus 1, 2, 3, et 6^{ta} in versione Commandini legendum est “tangit” loco verbi “contingit.” et in Definitione 2. et 3. Lib. 3. eadem mutatio facienda est. at in textu Graeco Propp. 18, 19. Lib. 3. verbum simplex mutandum est in compositum.

PROP. IV. LIB. IV.

Circulum rectas lineas contingere in hac, ut et in Propp. 8. et 13. hujus Libri ex absurdo ostenditur, cum tamen idem in Propp. 17. 33. 37. Lib. 3. directe ostendatur; hanc igitur viam secuti sumus in hisce Propositionibus hujus Libri, praesertim cum brevior sit.

PROP. V. LIB. IV.

Demonstratio hujus a quodam vitiata est, non enim ostendit rectas quae latera trianguli bifariam et ad rectos angulos secant, inter se convenire; et inepte dividit Propositionem in tres casus, cum una eademque constructio et demonstratio omnibus inserviat, ut Campanus observavit; repetitiones igitur has omisimus. textus etiam Graecus in Corollario hujus manifeste vitiatus est, nam in eo mentio facta est dati anguli; nihil autem in Propositione habetur, vel haberi potest de angulo dato.

PROP. XV. et XVI. LIB. IV.

In Corollario primae harum defunt voces “aequilatero et aequiangulo” in textu Graeco. et in Prop. 16. habetur circulus vice circumferentiae, ubi dicitur “quarum igitur partium est ABCDF circulus,”

DEF. III. LIB. V.

RECENTIORUM multi Definitionem hanc tanquam minime probam rejiciunt. fuse eam explicavit vir doctissimus Isaacus Barrow in fine Lect. 3. anni 1666, et, quantum ex natura rei fieri potuit, objectiones contra eam diluit, atque ita sententiam suam in epilogo ejusdem lectionis exponit.

“Nunc tantum adjiciam Elementatori hac in Definitione condenda
 “non aliud forsan propositum fuisse, quam ut methodi plenioris aut
 “ornatus qualiscunque causâ, praeludens scilicet accuratioribus istis e-
 “jusdem, majoris, et minoris rationis Definitionibus mox subjungen-
 “dis, generalem quandam et $\epsilon\lambda\omicron\chi\epsilon\rho\eta\tilde{\nu}\ \tau\tilde{\epsilon}\ \lambda\omicron\gamma\tilde{\epsilon}$, ideam discendum in-
 “sinuaret animis per Metaphysicam hanc Definitionem; Metaphysi-
 “cam dico, nec enim proprie Mathematica est, cum ab ea nihil quic-
 “quam dependeat, aut deducatur in Mathematicis, nec ut existimo
 “deduci possit. cujusmodi quoque censeretur posthac tradita Defi-
 “nitio Analogiae, Analogia est rationum similitudo, quae nulli Ma-
 “thematico deserviat usui, nec alio opinor fine proponitur, quam ut
 “per eam generalis quaedam analogiae notio, crassa licet et confusa,
 “Tyronibus indatur. Definitionibus autem exquisitis Mathematicis mox
 “ab illo subjunctis tota rationum Doctrina, tota res Mathematica sub-
 “nititur; ad illas igitur potissimum attendi debet, per illas rationum doc-
 “trina perfectius elucescit; haec et consimiles absque notabili Mathe-
 “scos

“ seos detrimento prorsus omitti possent. sicut in Elem. 7. factum vide-
 “ mus, ubi numerorum analogia definitur et pertractatur, nullà tamen
 “ rationis numero competentis exhibitâ definitione, quamvis illic aequè
 “ necessaria fuit et utilis definitio talis atque hic est; sed neutro loco
 “ magna fuit necessitas. quamquam haud credo rem ipsam adeo gene-
 “ ralem et abstractam, eoque conceptu magis arduam et explicatu, defi-
 “ nitionis esse capacem commodioris hâc quam Elementator assignavit,
 “ quam ideo visum est uberius explicare; neque non ab oppugnantium
 “ captionibus asserere.” Quibus quidem nihil addendum video, prae-
 terquam quod hisce rationibus de inutilitate hujus et sequentis 8^{væ} De-
 finitionis persuasus, firmiter credam eas non Euclidis esse, sed cujusdam
 minus periti Editoris.

DEF. XI. LIB. V.

Verbum “deinceps” necessario addendum fuit ante verbum “pro-
 “portionales” in hac definitione; et ita citata habetur in 33. Prop.
 Lib. 11.

Post hanc Definitionem ponenda fuit, ut in loco proprio, Definitio
 rationis compositae, cujus species sunt ratio duplicata, triplicata &c.
 quae in hac et praecedente definiuntur. eam autem rejecit Theon in
 Def. 5. Lib. 6. ubi rationis compositae Definitionem inutilem omnino
 et absurdam tradit. aliam igitur ejusdem inter Def. 11. et 12. posui-
 mus, quam, sine dubio, dedit Euclides, citat enim eam explicite in
 Prop. 23. Lib. 6. quamque tradunt Clavius, Herigonius et Barrovius,
 retentâ etiam Theonis Definitione, quam ex Elementis sustulisse de-
 buerunt.

DEF. XIII. LIB. V.

Haec et sequentes terminorum quorundam, qui in Lib. 5. et se-

quantibus occurrunt, explicationem continent, qui quidem, paucis exceptis, ex ipsis Propositionibus hujus libri in quibus primò utuntur factis innotescunt; a Theone vel alio quodam additae videntur hae Definitiones. Utut sit, eas paulo distinctius tradere, Tyronum gratia, visum est.

PROP. IV. LIB. V.

In constructione, demonstrationi hujus praemissa, verba $\alpha' \epsilon\tau\nu\chi\epsilon$, utcunque, bis omittuntur in textu Graeco, et versione Latina; addita igitur sunt, utpote omnino necessaria.

Ibid. in demonstratione; in textu Graeco, et in versione Latina Commandini, et in ea Henrici Briggii quae prodiit Londini anno 1620, una cum textu Graeco priorum sex Librorum, quamque in hoc loco sequitur David Gregorius in sua editione operum Euclidis, sequentia habentur, viz. “sumptae autem sunt ipsarum A, C aequae multiplices “K, L; et ipsarum B, D aliae ($\alpha' \epsilon\tau\nu\chi\epsilon$) utcunque aequae multiplices “M, N;” quae quidem minime vera sunt. delendum igitur fuit verbum “utcunque.” mirum autem est neque Briggium qui verbum hoc recte omisit in uno loco Prop. 13. hujus Libri, neque Gregorium qui idem verbum mutavit in “quaedam” vel ipsum omisit in quatuor locis ejusdem Prop. 13. idem non omisisse in hoc loco Prop. 4. et in secundo loco in quo habetur in Prop. 17. hujus, in quibus, salva veritate, manere non potest. in nullo autem ex his locis verba $\alpha' \epsilon\tau\nu\chi\epsilon$ è textu Graeco deleverunt Editores, ut fecisse debuerunt.

Occurrunt eadem verba in quatuor locis Prop. 11. hujus, in quorum primo et ultimo necessaria sunt, at in secundo et tertio, quamvis vera, sunt tamen superflua; ut etiam sunt in secundo loco in quo habentur eadem verba in Prop. 12. hujus.

COR.

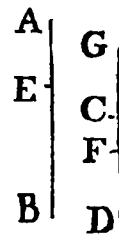
COR. PROP. IV. LIB. V.

Corollarium hoc ab imperito quodam additum est vice legitimæ demonstrationis quam Theon aliufve Editor non ex hoc, sed proprio suo loco in hoc libro sine dubio sustulit. volebat enim auctor Corollarii hujus ostendere magnitudines proportionales E, G, F, H etiam inverse proportionales esse, sc. G esse ad E, ut H ad F; quod quidem verum est, minime autem ex hac Propositione vel ejusdem demonstratione dependet. Cum enim dicit "Quoniam igitur demonstratum est, si K superat M, et L ipsam N superare" &c. Ostensum quidem hoc est in demonstratione Propositionis, non tamen ex eo quod proportionales sint E, G, F, H, hoc enim est conclusio ipsius Propositionis. Quare illud "Quoniam igitur demonstratum est" &c. omnino ineptum est. Ostendisse enim debuit si K superat M, et L ipsum N superare, ex hypothesi quod E, G, F, H sunt proportionales, et Def. 5. hujus Libri, quod quidem minime ostendit; habetur autem hoc in Prop. B. quam loco proprio posuimus vice hujus Corollarii. et Corollarium aliud Prop. 4^{tae} additum est necessarium quidem Demonstrationi Prop. 18. hujus libri, aliasque non raro utile, cujus demonstratio continetur in ea Propositionis.

PROP. V. LIB. V.

In constructione, demonstrationi hujus præmissâ, quæ habetur in textu Graeco, ejusque versionibus Latinis, requiritur ut quotuplex est AE ipsius CF, totuplex fiat EB ipsius CG, hoc est requiritur ut EB secetur in tot partes æquales quot sunt in AE æquales ipsi CF. ex hoc autem manifestum est constructionem hanc non esse Euclidis. non enim docet Euclides quomodo secari possint rectæ lineæ, nedum aliae magnitudines, in partes æquales, antequam ad Prop. 9. Lib. 6. veniat.

nunquam.



nunquam autem in constructione jubet aliquid fieri, quod facere non prius docuerat. Constructionem igitur mutavimus in eam quam sine dubio Euclides dederat, in qua nihil requiritur praeterquam quod magnitudo sibi ipsi aliquoties addatur. et haec quidem habetur in versionibus ex Arabica lingua, quamvis in iisdem enuntiatio Propositionis, ejusque demonstratio foede depravata sint. Jacobus etiam Peletarius, qui primus, quantum scio, errorem hunc observavit, legitimam constructionem dedit in Euclide suo, postquam erroneam dederat, quam dicit se omittere noluisse, quod subtilis sit et ad similes reperiendas ingenium acuat; cum revera nulla sit inter demonstrationes differentia nisi in constructione, quam quidem ab imperito Librario ortam esse admodum verisimile videtur. Clavius etiam et vulgarem et legitimam constructionem tradit, non tamen observavit, ut neque Peletarius, rationem propter quam una alteri praeferenda sit.

PROP. VI. LIB. V.

Hujus duo sunt casus, quorum prioris tantum, qui magis simplex est, demonstratio in Graecis habetur. et verisimile est Theonem existimasse satis fuisse hunc tradere, cum neuter eorum alicui demonstrationi inserviret in mutilata ejus editione Lib. 5^{ti}; et eodem jure alterum casum, ut et Propositionem quintam omisisse potuisset. alterius autem demonstratio addita est, uterque enim, ut et Prop. 5. necessarius est demonstrationi Prop. 18. hujus libri. Versiones etiam ex Arabica lingua breviter praebent utrumque casum.

PROP. A. LIB. V.

Propositione hac saepissime utuntur Geometrae, et in 25. hujus Libri, 31. Lib. 6. 34. Lib. 11. et 15. Lib. 12. adhibetur; a Theone autem ex Elementis sublata videtur, quoniam satis evidens apparebat

parebat ei aliisque qui confusaneam et indistinctam proportionalium ideam apud vulgus receptam, substituunt loco accuratae ideae quae ex Definitione 5. Lib. 5. habetur. neque dubium est Eudoxum vel Euclidem qui hâc nihilo difficiliore 7^{timam} sc. et 9^{am} hujus Libri demonstratione munivit, etiam huic in Elementis locum dedisse.

Ex ea autem Alphonsus Borrellius ansam arripuit graviter, sed iniquissime culpandi Definitionem 5. hujus Libri. en ejus verba in pag. 126. Euclidis sui restituti Edit. Pisis 1658, "Nec demum haec minima cognitio ex dicta proprietate" quae sc. continetur in Def. 5. 5. "colligi potest, quod scilicet, si quatuor magnitudines sint proportionales, cum prima excedit secundam, necessario tertia magnitudo quartam superare debet; quod Clavius confitetur in 16. Prop. Lib. 5. Elementorum." Clavius autem hoc disertis verbis non confitetur, sed occasionem dedit Borrellio haec de se scribendi, cum in loco citato Clavius Commandinum reprehendat, et quidem recte, quod Propositionem hanc ex Prop. 16. Lib. 5. demonstraret, neque tamen ipse Clavius aliquam ejus demonstrationem tradat, sed eam perspicuam esse putet ex natura proportionum, ut loquitur in fine Prop. 14. et 16. 5. suae editionis, et eum sequitur Petrus Herigonius in schol. 1. Prop. 14. Lib. 5. quasi aliqua esset natura proportionalium prior eâ quae ex ipsarum Definitione intelligenda est. et quidem, quamvis demonstratio Propositionis admodum sit facilis, nullus tamen, quantum scio, eam hactenus dedit, praeter Doctissimum Barrovium qui in responsione sua ad Borellii objectionem ex Definitione 5^{ta} hujus Libri eam indirecte sed breviter et perspicue ostendit pag. 322. Lect. Mathem. facile autem directe demonstratur ex eadem Definitione, quamobrem post Propositiones de aequae multiplicibus ei locum dedimus.

PROP. B.

PROP. B. LIB. V.

Haec etiam ex Definitione 5^{ta} facile fluit, quare post praecedentem merito locatur. ineptissime enim posita fuit ut Corollarium Prop. 4. Lib. hujus. Vid. Notam ad Cor. ejus Prop.

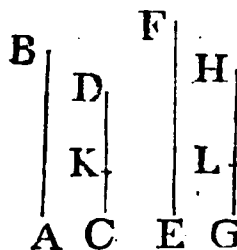
PROP. C. LIB. V.

Propositio haec saepius a Geometris usurpatur, et necessaria est Prop. 5^{tae} et 6^{tae} Lib. 10. Clavius in notis post Def. 8. Lib. 5. eam, in numeris tantum, ostendit ope quarundam Propositionum Libri 7. ut sc. Definitionem 5. Lib. 5. quatenus numeris congruit, ex eâ numerorum proportionalium quae habetur in Def. 20. Lib. 7. demonstret. plerique autem Commentatores existimant difficile esse ostendere quatuor magnitudines quae proportionales sunt secundum Def. 20. Lib. 7. proportionales quoque esse secundum Def. 5. Lib. 5. Verum hoc facile ut sequitur ostendi potest.

1^{mo}, Sint A, B, C, D quatuor magnitudines quarum prima A aeque multiplex, vel eadem pars est secundae B, ac tertia C quartae D; erunt A, B, C, D proportionales. Demonstratur hoc in Prop. C.

2^{do}, Si fuerit prima AB eadem partes secundae CD, ac tertia EF quartae GH; erit et in hoc casu AB ad CD, ut EF ad GH.

Sit CK pars ipsius CD, et GL eadem pars ipsius GH; et sit AB aeque multiplex CK, atque EF ipsius GL. Ergo per Prop. C. Lib. 5. est AB ad CK, ut EF ad GL. sunt autem CD, GH aeque multiplices ipsarum CK, GL; quare per Cor. Prop. 4. Lib. 5. est AB ad CD, ut EF ad GH.



PROP. D.

vis ipsius AE, et EB aequae multiplices, puta duplae ipsarum, ut in hac Editione factum est, in qua omnes casus simul demonstrati sunt. ex his autem liquet Theonem aut alium non satis Geometriae peritum Propositionem hanc vitiasse.

PROP. IX. LIB. V.

Hujus Propositionis demonstrationem dedimus magis explicitam eâ quae in Elementis haftenus habetur.

PROP. X. LIB. V.

Aliam hujus demonstrationem tradere necessarium fuit, ea enim quae in Editionibus Graecis et Latinis, aliisque habetur legitima non est. verba enim *major*, *eadem sive aequalis*, *minor* de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dicuntur, ut ex definitione 5^{ta} et 7^{ima} hujus Libri patet. ope igitur harum examinemus demonstrationem Propositionis decimae, quae ita procedit. "Habeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C. dico A quam B majorem esse. si enim non est major, vel aequalis est vel minor. aequalis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad C eandem haberet rationem; atque eandem non habet. non igitur A ipsi B est aequalis," vis hujus ratiocinii haec est, si fuerit A ad C, ut B ad C, sumptis ipsarum A, B quibuscunque aequae multiplicibus, et sumptâ quavis multiplici ipsius C, si multiplex ipsius A major fuerit multiplici ipsius C, erit, vi Definitionis 5. Lib. 5. multiplex ipsius B major eâdem multiplici ipsius C. sed quoniam, ex hypothese, A majorem habet rationem ad C, quam B ad C, erunt, vi Definitionis 7. Lib. 5. quaedam ipsarum A, B aequae multiplices, et quaedam multiplex ipsius C tales, ut multiplex ipsius A major sit multiplici ipsius C, at multiplex ipsius B non major sit multiplici ejusdem C. haec autem Propositio directe repugnat praecedenti.

praecedenti. quare A non est aequalis ipsi B. pergit demonstratio, “ sed neque minor est A quam B, haberet enim A ad C, minorem rationem quam B. atqui non habet minorem, non igitur A minor est quam B” &c. hic dicitur “ haberet A ad C, minorem rationem quam B ad C,” sive, quod idem est, haberet B ad C, majorem rationem quam A ad C, hoc est, vi Def. 7. Lib. 5. erunt quaedam ipsarum B, A aequae multiplices, et quaedam ipsius C multiplex tales, ut multiplex ipsius B major sit multiplici ipsius C, at multiplex ipsius A non major sit eadem multiplici ejusdem C. et ostendendum fuit hoc nunquam contingere posse, si ratio A ad C, major fuerit quam ratio B ad C; demonstrandum igitur fuit, in hoc casu multiplicem ipsius A semper superare multiplicem ipsius C, si multiplex ipsius B eandem superet; hoc enim ostenso, manifestum esset non posse B ad C, majorem rationem habere quam A ad C, hoc est non posse A ad C, minorem habere rationem quam B ad C. minime autem ostensum est hoc in demonstratione Propositionis decimae, sed si decima demonstrata esset, immediate ex ea deduci posset; verum sine ejus ope non facile idem ostendetur, ut demonstrationem tentanti patebit. quare demonstratio decimae legitima non est. Videtur autem eum qui demonstrationem decimae, quae jam habetur, posuit vice ejus quam Eudoxus aut Euclides dederat, deceptum fuisse transferendo id quod manifestum quidem est de magnitudinibus, ad rationes, magnitudinem sc. quamvis non posse simul majorem et minorem esse aliâ. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia, Axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur; Euclides autem eo non utitur ad ostendendum rationes quae eidem rationi sunt eadem, inter se easdem esse, sed hoc explicite demonstrat in Prop. 11. Lib. 5. Demonstrationem autem decimae quam in textu posuimus eandem esse cum ea Eudoxi aut Euclidis vix dubitandum est, cum ex ipsa Definitione majoris ratio-

nis, 7^{ima} sc. Lib. 5. conclusio decimae breviter et directe ostendatur.

Propositio autem praedicta ope decimae ita ostenditur. Habeat A ad C, majorem rationem quam B ad C, si ipsarum A, B sumantur aequae multiplices quaedam, et ipsius C quaedam multiplex, sitque multiplex B major multiplici ipsius C, erit et multiplex A major eadem ipsius C multiplici.

Sint enim ipsarum A, B aequae multiplices D, E, et ipsius C multiplex F, ita ut E multiplex ipsius B major sit F; erit et D multiplex ipsius A major F.

Quoniam enim A habet ad C, majorem rationem quam B ad C, erit per 10. 5. A major quam B; igitur D multiplex ipsius A major erit E aequae multiplici ipsius B. est autem E major F; multo igitur D major est ipsa F.

A	C	B	C
D	F	E	F

PROP. XIII. LIB. V.

In versionibus Commandini, Briggii et Gregorii habetur ad initium demonstrationis, “et multiplex quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F.” quae quidem ex textu Graeco ad verbum translata sunt. sensus autem loci manifeste requirit ita legantur, viz. “ut multiplex quidem C superet multiplicem D; multiplex vero E non superet multiplicem F.” et hoc modo hic locus recte restitutus fuit in primis editionibus Elementorum ex versione Commandini quae Oxoniae impressa fuerunt. in posterioribus vero, saltem anni 1747, error textus Graeci retentus est.

Corollarium additum est Propositioni 13^{tiae} quod necessarium sit Prop. 20, 21. hujus Libri, et aequae utile sit ac ipsa Propositio.

PROP. XIV.

PROP. XIV. LIB. V.

Hujus duos casus, quorum demonstratio non habetur in textu Graeco, visum est addere. Eorum enim demonstratio non omnino similis est demonstrationi primi casus.

PROP. XVII. LIB. V.

Ordo demonstrationis hujus in alium magis naturalem, in paucis, mutatus est. quod etiam factum fuit in Prop. 11.

PROP. XVIII. LIB. V.

Demonstratio hujus minime est Euclidis, nec legitima est. nam in ea ponitur, tribus propositis magnitudinibus, quarum duae saltem sunt ejusdem generis, quartam existere ipsis proportionalem; priusquam autem hoc ostensum fuerit, nihil valebit demonstratio quae nunc legitur. verum hoc sine demonstratione assumitur, neque, quantum video, ostendi potest ope Propositionum hanc praecedentium; tantum abest ut pro Axiomate habeatur, ut Clavius post Definitiones Lib. 5. alios interpretes secutus, volebat. Euclides certe id non ostendit, nedum quomodo quarta illa proportionalis inveniri potest, antequam ad 12. 6^{ti} Elementi veniat. nunquam autem aliquid in demonstratione Propositionis assumit quod non prius ostenderat, saltem quod existere posse non perspicuum sit; ope enim Propositionis incertae conclusio certa elici non potest. vice igitur demonstrationis quae nunc habetur, quamque certum est Theonem, vel alium quendam, loco demonstrationis Euclideae, utpote prolixioris, substituisse, legitimam reposuimus. ut vero Prop. 17. cujus 18^{va} est conversa, demonstratur ope Prop. 1. et 2^{dae} hujus Libri, ita in hac quam dedimus demonstratione Prop. 18. tum Propositio 5^{ta}, tum uterque casus Prop. 6^{tue}, Lib. 5. necessario adhibentur, quae

quae quidem Propositiones sunt conversae 1^{mae} et 2^{dae}. hisce autem, quinta sc. et sexta, nulla Propositio hujus Libri, ut eum nunc habemus, utitur; neque ulli in Elementis practerquam huic 18^{vae} utiles esse possunt. et hoc quidem certum est indicium easdem ab Euclide in sua hujus 18^{vae} demonstratione adhibitae fuisse, eamque quam posuimus, quaeque, ut fieri debuit, conversa est demonstrationis 17^{mae}, ab ea Eudoxi vel Euclidis haud differre. nulli enim usui infervirent 5^{ta} et 6^{ta} si in demonstrationibus Lib. 5. adhibitae non essent, ut reliquae de aequae multiplicibus Propositiones omnes adhibitae sunt.

Hieronymus Saccherius naevum hunc inesse demonstrationi hujus 18^{vae} agnoscit in Libro suo cui Titulus Euclides ab omni naevo vindicatus, Mediolani anno 1733, impresso. ut vero naevum hunc tollat, et demonstratio 18^{vae} quam nunc habemus legitima reddatur, demonstrare conatur sequentem Propositionem in pag. 115. Libri praedicti, viz.

“Sint quatuor magnitudines A, B, C, D quarum duae priores in suo proprio genere, ac similiter posteriores vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quodam suo proprio genere consistant. Dico rationem tertiae C ad quartam D vel aequalem fore, vel majorem, vel minorem ratione primae A ad secundam B.” Post duas autem Propositiones, tanquam Lemmata, praemissas ita procedit.

“Vel inter possibiles aequae multiplices primae A, et tertiae C, ac simul inter possibiles aequae multiplices secundae B, et quartae D, una quaeciam reperitur EF multiplex primae A, et IK multiplex secundae B invicem aequales; ac simul (in eodem casu) una quaedam GH multiplex tertiae C aequalis ipsi LM multiplici quartae D. vel nusquam talis aequalitas reperitur. si primum, constat ex jam demonstratis ita fore A ad B, ut C ad D. sin vero nusquam reperitur ejusmodi simul ex utraque parte aequalitas; vel saltem ad alterutram
“partem

“ partem reperitur, ut puta ad partem primae A [et secundae B] vel
 “ nusquam. si primum; ergo (ex praemissis Euclideae majoris, ac mi-
 “ noris Proportionis Definitione) habebit A ad B majorem aut mino-
 “ rem proportionem, quam C ad D; prout GH multiplex tertiae C
 “ minor fuerit, aut major ipsa LM multiplici quartae D. sin vero se-
 “ cundum; ergo ex una qui- A—— E———F
 “ dem parte, v. g. ad ipsas A B—— I———K
 “ primam, et B secundam, con- C—— G———H
 “ tingere poterit, ut illa mul- D—— L———M
 “ tiplex EF minor sit altera
 “ multiplici IK, dum vice
 “ versa ex altera parte illa multiplex GH major est altera multiplici
 “ LM. Tunc autem (sub eadem Euclidea Definitione) ratio primae A
 “ ad secundam B erit minor ratione tertiae C ad quartam D; aut vice
 “ versa.

“ Igitur demonstratum manet substitutum illud Axioma,” [i. e. Pro-
 positio praedicta] &c.

Minime, sed sine demonstratione manet; quod enim dicit posse con-
 tingere, poterit innumeris casibus nunquam contingere, et propterea de-
 monstratio ejus nulla est. nam, ex. gr. si fuerit A latus et B diameter
 quadrati; C vero latus et D diameter alterius quadrati; nunquam po-
 terit multiplex ipsius A aequalis esse multiplici ipsius B; nec aliqua
 ipsius C aequalis alicui ipsius D, ut notum est; et tamen nunquam
 contingere poterit ut, existente multiplici quadam ipsius A majore, vel
 minore multiplici quadam ipsius B, multiplex ipsius C vice versa minor
 vel major sit multiplici ipsius D; sumptis sc. ipsarum A, C aequae mul-
 tiplicibus, et ipsarum B, D aequae multiplicibus. sunt enim A, B, C, D
 proportionales.

Idem autem judicium ferendum est de Demonstratione quam qui-
 dam

dam tradunt Propositionis 1. Lib. 6. quod de Demonstratione hujus Prop. 18. datum fuit; quoniam eodem quo haec fundamento, minime sc. demonstrato, innititur.

PROP. XIX. LIB. V.

Corollarium huic subjunctum est, quod aequae saepe usui sit atque ipsa Propositio. Corollarium autem quod in textu Graeco huic 19^{nae} appositum est, manifeste ostendit Librum 5^{tum} a Geometriae ignaris corruptum fuisse. etenim conversio rationis nullo modo pendet ex 19^{na}. et demonstratio ejus quam ope 19^{nae} tradunt varii Euclidis interpretes legitima non est, ut recte observavit Clavius, qui demonstrationem legitimam dedit, quam in Propositione E posuimus; eam autem posuit tanquam Corollarium Propositionis 19. quod his verbis incipit, "Hinc facile sequitur," cum nullo modo inde sequatur.

PROP. XX, XXI, XXII, XXIII, et XXIV. LIB. V.

Demonstrationes Prop. 20. et 21. breviores sunt iis quibus Euclides utitur in Propositionibus hisce facilioribus vel in praecedentibus, vel in libris sequentibus. visum igitur est eas magis explicite tradere. Propositio etiam 22. et 23. ad quoscunque magnitudines, ut fieri debuit, extenduntur. et simili modo extendi potest 24. ut in Corollario notatur, et aliud Corollarium additum est, aequae ac Propositio utile. verbum etiam "utcunque" quod in textu Graeco et versionibus deficiebat, additum est prope finem Prop. 23.

In scripto D. Philippi Naudaei, post mortem ejus edito in Historia Academiae Regiae Berolinensis anni 1745, pag. 50. Propositio 23. Lib. 5. Euclidis arguitur tanquam obscure enuntiata, et inde via longiore demonstrata. Verum enuntiatio ibi tradita non est Euclidis sed Tacqueti ut in scripto agnoscitur, quae quidem, quamvis non aequae commoda,

commoda, reipsa eadem est cum ea quae nunc habetur in Elementis. in ea autem nihil est obscuri, quamvis auctor scripti, magnitudines proportionales perverso ordine disponat, unde obscurior evadit enuntiatio. sine dubio autem Euclides hanc 2 3^{tiam}, aequae ac 2 2^{dam}, de quocunque magnitudinibus, quae binae sumptae sunt proportionales, non de sex tantum enuntiavit; et huic generali casui Naudaei enuntiatio minime rite accommodari potest.

Demonstratio vero Propositionis 2 3. Lib. 5. quae in scripto illo traditur omnino est inepta; si enim magnitudines proportionales figurae fuerint planae aut solidae, nullum ex ipsis rectangulum (quod ille imperite productum vocat) fieri intelligi potest. et si dicatur, in hoc casu rectas lineas assumendas esse figuris proportionales; eo modo demonstratio, Euclidis demonstratione multo longior evaderet. quin si apta esset Naudaei demonstratio, quis non videt eam non posse in Libro 5^{to} locum habere?

PROPP. F, G, H, K. LIB. V.

Propositiones has fini Libri 5^{ti} adjecimus, quoniam saepius iis utuntur Geometrae veteres et recentiores. et quidem in multis casibus rationes compositae in demonstrationibus sine earum ope adhiberi non possunt.

Qui cupit doctrinam de proportionalibus Libro hoc quinto traditam solide defensam videre, et argumenta contra eam ab And. Tacquet, Alph. Borellio aliisque adducta plenissime confutata, consulat magni Barrovii Lectiones Mathematicas 7. et 8^{vam} Anni 1666.

Emendato jam Libro quinto, sententiae Clariss. Barrovii lubentissime assentior, "Nihil" scilicet "extare in toto Elementorum opere "proportionalium doctrina subtilius inventum, solidius stabilitum, accuratius pertractatum." quod quidem Geometras existimatu-

A a a
tuisse

tuisse dici, eodem quo nunc jure, ex tempore Theonis hactenus, sperare licet.

DEF. II. et V. LIB. VI.

DEFINITIO secunda non videtur Euclidis esse, sed cujusdam imperiti. Nulla enim figurarum reciprocarum mentio fit ab Euclide, neque, quantum scio, a quocunque alio Geometra. obscure enuntiata est, quare eam magis claram exhibuimus. vice autem ejus haec quae sequitur ponenda videtur, viz.

DEF. II.

Duae magnitudines dicuntur esse reciproce proportionales duabus aliis, quando altera priorum est ad alteram posteriorum, ut reliqua posteriorum ad reliquam priorum.

Definitio autem quinta, quae magno discentium incommodo a Theonis tempore in Elementis locum habuit, ex iis, propter rationes in notis ad Prop. 23. Lib. 6. adducendas, merito sublata est.

PROP. I, et II. LIB. VI.

Corollarium primae harum additum saepissime adhibetur. Enuntiatio vero secundae magis generalis reddita est.

PROP. III. LIB. VI.

Casus secundus, qui habetur in Prop. A. pariter utilis ac primus, huic Propositioni additus est; videlicet is in quo angulus trianguli exterior bifariam secatur recta lineâ. Demonstratio ejus simillima est demonstrationi primi casus, et ob hanc forsâ causam tum ea, tum enuntiatio casus, omissa est ab imperito quodam editore. Pappus certe hâc, tanquam

tanquam Propositione elementari, sine demonstratione utitur in Prop.
39. Lib. 7. Collectionum Mathematicarum.

PROP. VII. LIB. VI.

Casum omissum, et in demonstrationibus non raro currentem,
huic Propositioni addidimus.

PROP. VIII. LIB. VI.

Manifestum est aliquem mutasse demonstrationem quam Euclides
hujus Propositionis dederat. Etenim auctor ejus postquam demonstra-
verat triangula esse inter se aequiangula, particulatim ostendit latera co-
rum circa aequales angulos proportionalia esse, quasi hoc non factum
fuisset in Propositione quarta hujus Libri. haec autem superflua non
inveniuntur in versione ex lingua Arabica et nunc omissa sunt.

PROP. IX. LIB. VI.

Demonstratio hujus facta est in casu particulari, in quo scilicet pars
tertia abscindenda est a data recta; quare minime videtur Euclidis esse.
Praeterea in quatuor magnitudinibus proportionalibus concludit Auctor
tertiam aequae multiplicem esse quartae, atque prima est secundae;
quod quidem in Libro 5^{to}, ut eum nunc habemus, nullibi ostensum est,
sed hoc, ut alia, assumit Editor ex confusanea apud vulgus recepta pro-
portionalium notione. generalem igitur et legitimam Demonstrationem
hujus Propositionis tradere necesse fuit.

PROP. XVIII. LIB. VI.

Demonstratio hujus vitiata videtur. nam in quadrilateris tantum,
ostenditur Propositio, neque dicitur, quo modo extendi possit ad recti-
linea quinque aut plurium laterum. praeterea in duobus triangulis

inter se aequiangulis concluditur esse latus unius ad latus homologum alterius, ut latus aliud primi ad latus alterius huic homologum, sine permutatione proportionalium, contra morem Euclidis, ut ex sequente Propositione 19^{na} manifestum est. eodem vitio laborat conclusio, nam latera circa angulos unius rectilinei non ostenduntur proportionales lateribus circa aequales angulos alterius, rursus enim omisit Auctor demonstrationis permutationem proportionalium. Visum igitur est tradere demonstrationem huius via Euclideana, eadem sc. quâ utitur in Prop. 20. huius libri; et in figuris quinquelateris, ut modus quo extendi potest ad figuras plurium laterum perspicue appareat.

PROP. XXIII. LIB. VI.

Nihil in Geometriae elementis Tyronibus difficilius intellectu haberi solet, doctrinâ de rationum compositione, quam absurdam et ἀγεομετρικὴν reddidit Theon, substituendo Definitionem 5^{am}, Lib. 6^{ti}, vice Definitionis bonae rationis compositae, quam, sine dubio, dederat Eudoxus vel Euclides post Definitionem rationis triplicatae &c. in Libro 5^{to}, proprio scilicet ejus loco. Theonis autem Definitio haec est; ratio ex rationibus componi dicitur ὅταν αἱ τῶν λόγων πληρότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινα. quam ita vertit Commandinus, “quando rationum quantitates inter se multiplicatae, aliquam efficiunt rationem.” Wallisius autem πληρότητες vertit “rationum exponentes.” et Gregorius postrema Definitionis verba reddit “illius facit quantitatem.” quocunque autem sensu accipiantur verba “quantitates” sive “exponentes rationum,” ipsarumque “multiplicatio,” ἀγεομετρικὴ et inutilis erit Definitio. Nulla enim poterit esse multiplicatio nisi per numerum; quantitas autem sive exponens rationis, ut Eutocius in Comment. in Prop. 4. Lib. 2. Archimedis de Sphaera et Cyindro, et recentiores interpretantur, est numerus qui multiplicans consequentem producit

ducit antecedentem, five, quod eodem redit, numerus ortus ex divisione antecedentis per consequentem; multae autem sunt rationes tales, ut nullus numerus oriri possit ex divisione antecedentis per consequentem; ex. gr. ratio quam diameter quadrati habet ad ejusdem latus; et ratio quam habet circumferentia circuli ad ipsius diametrum; allaeque ejusmodi. Praeterea Definitionis hujus apud Euclidem, Archimedem, Apollonium, reliquosque veteres, qui ratione compositâ saepius utuntur, nullum vestigium invenitur. In 23^{ta} enim 6^{ti} Elementi in qua primum rationis compositae fit mentio, hujus Definitionis, quae hic, si ullibi, necessaria fuisset, ne vel verbum apparet; legitima autem Definitio explicite adhibetur his verbis, “ sed ratio K ad M composita est ex ratione K ad L, et ratione L ad M.” inutilis igitur prorsus et absurda est Theonis Definitio. Theonem enim in Elementa eam induxisse vix dubitari potest; extat enim in commentariis ejus in Ptolomaei *Μεγάλην Σύνταξιν*, pag. 62. commentarii; ubi et puerilem tradit ejus explicationem, utpote solummodo eis rationibus convenientem quae numeris exhiberi possunt; inde autem ad verbum excerpta est, una cum praedicta explicatione, et Libri sexti Definitionibus praefixa, ut constat ex Hervagii Editione. Zambertus vero et Commandinus haec iisdem definitionibus in eorum Latinis versionibus subjungunt. Non autem agnoscit hanc Definitionem Campanus, nec, ut videtur, codices Arabici quibus ille usus fuit. Clavius ad Def. 5. Lib. 6. recte judicavit Definitionem rationis compositae potuisse factam fuisse eadem viâ qua Definitiones rationis duplicatae, triplicatae &c. factae sunt, ut scilicet “ quemadmodum propositis pluribus magnitudinibus proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides, Def. 10. Lib. 5. habere proportionem duplicatam ejus, quam prima habet ad secundam; primam vero ad quartam habere proportionem triplicatam ejus, quam prima ad secundam habet, hoc est compositam ex duabus aut tribus intermediis proportionibus.

“ portionibus aequalibus, et sic deinceps: ita quoque si ponantur ordine plures magnitudines ejusdem generis non proportionales, dicitur prima ad ultimam habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermediis,—solum eam ob causam, quod illae portiones intermediae sunt inter extremas duas magnitudines interjectae; quemadmodum Definitione 10^{ma}, Lib. 5. proportio primae ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duae proportionales aequales interpositae sunt inter extremas duas magnitudines: adeo ut non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, et illam duplicationem, triplicationem &c. quae Libro 5^{to} explicata est, quam quod in duplicatione, triplicatione &c. proportionum, interjiciuntur proportionales omnes aequales, in compositione vero proportionum non necesse est interpositas aequales esse.” Edmundus vero Scarburgh in Euclide suo Anglico, pagg. 238, 266, aperte affirmat Definitionem 5. Lib. 6. supposititiam esse, et veram rationis compositae Definitionem, in Definitione 10. Lib. 5. rationis scilicet duplicatae, contineri, vel ex ea subintelligendam esse, eo videlicet modo quo Clavius eam in praecedente citatione explicavit. Hi autem et alii Recentiores definitionem istam 5^{am}, Lib. 6. simul retinent, prolixisque Commentariis illustrent, quum potius eam ex Elementis sustulisse debuissent.

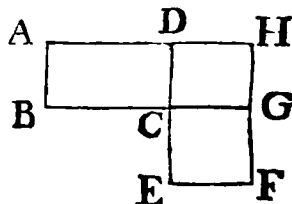
Etenim, comparando Definitionem 5. Lib. 6. cum Propositione 5. Lib. 8. clare apparebit Definitionem istam supposititiam esse. Nam in Propositione illa demonstratur numerum planum cujus latera sunt C, D habere ad numerum planum cujus latera sunt E, Z (vid. Hervagii aut Gregorii Editionem) rationem compositam ex rationibus laterum, hoc est ex rationibus C ad E, et D ad Z. ratio vero composita ex rationibus C ad E, et D ad Z, ex Def. 5. Lib. 6. et explicatione quam ejusdem tradunt omnes Commentatores, est ratio numeri facti ex multiplicatione

tiplicatione antecedentium C, D ad factum ex multiplicatione consequentium E, Z, hoc est ratio numeri plani cujus latera sunt C, D ad numerum planum cujus latera sunt E, Z. Igitur Propositio quae est Definitio 5. Lib. 6. eadem omnino est cum Propositione 5. Lib. 8. In altero igitur horum locorum delenda est; absurdum enim est Propositionem in Elementis poni tanquam Definitionem, et eandem in iisdem demonstrari. Nullum autem dubium est Prop. 5. Lib. 8. debere locum habere in Elementis, idem enim in ea demonstratur de numeris planis quod in Prop. 23. Lib. 6. demonstratur de parallelogrammis aequiangulis; quare Definitio 5. Lib. 6. in Elementis locum habere non potest. unde perspicue apparet eam minime positam fuisse ab Euclide, sed a Theone vel alio quodam Geometriae minus perito.

Nullus autem, quantum scio, proprium usum rationis compositae hactenus ostendit, vel propter quam causam in Geometriam introducta fuerit; quum omnia in quibus solet adhiberi ratio composita, possint etiam sine ejusdem auxilio, tum enuntiari, tum demonstrari. Usus autem rationis compositae in hoc unice consistit, quod ejus ope periphrases evitentur, et ita Propositiones possint vel enuntiari vel demonstrari brevius, vel utrumque fieri possit. Ex. gr. si Propositio haec 23. Lib. 6. enuntianda esset, non facta rationis compositae mentione, ita fieret; si duo parallelogramma aequiangula fuerint, et fiat ut latus primi ad latus secundi, ita quaevis recta assumpta ad secundam rectam; ut vero latus reliquum primi ad latus reliquum secundi, ita fiat secunda recta ad tertiam; erit parallelogrammum primum ad secundum, ut prima recta ad tertiam rectam. et demonstratio eadem esset cum ea quam nunc habemus. Veteres autem cum vidissent hanc enuntiationem posse breviorum reddi, si nomen impositum esset rationi quam habet prima recta ad ultimam, quo nomine simul indicarentur rationes intermediae, primae scilicet ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, et ita deinceps si plures

plures fuerint rectae; rationem hanc primae ad ultimam dixerunt rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, hoc est, in praesenti casu, ex rationibus quae eadem sunt rationibus laterum. atque ita brevius Propositionem enuntiaverunt, viz. Si fuerint duo aequiangula parallelogramma, habebunt inter se rationem eandem ei quae composita est ex rationibus quae eadem sunt rationibus laterum. quae quidem paucioribus verbis effertur quam praecedens enuntiatio, eodem autem sensu. Vel adhuc brevius; aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eandem ei quae composita est ex rationibus laterum. atque hae duae enuntiationes ultimae, prima praesertim, conveniunt demonstrationi quae nunc in textu Graeco habetur. potest autem Propositio brevius demonstrari, ut apud Franciscum Candallam hoc modo, viz. sint aequiangula parallelogramma ABCD, CEF, et compleatur parallelogrammum CDHG; quoniam igitur tria

sunt parallelogramma AC, CH, CF, habebit (ex definitione rationis compositae) primum AC ad tertium CF, rationem quae composita est ex ratione AC ad CH, et ratione CH ad CF; est autem parallelogrammum AC ad ipsum CH, ut recta BC ad ipsam CG; et parallelogrammum



CH est ad ipsum CF, ut recta DC ad rectam CE; ergo habet parallelogrammum AC ad ipsum CF rationem quae composita est ex rationibus quae eadem sunt rationibus laterum. et huic demonstrationi convenit enuntiatio quae nunc habetur, viz. parallelogramma aequiangula inter se habent rationem ex laterum rationibus compositam. nam vulgaris lectio "ex lateribus compositam" absurda est. retinuimus autem in hac Editione demonstrationem quae habetur in textu Graeco, quamvis prolixior eam quam tradit Candalla, quoniam in illa, non autem in hac, ostenditur quomodo ex datis rationibus laterum, inveniatur ratio

ratio ex iis composita, hoc est ratio parallelogrammorum; ut Tyrones in similibus casibus rationem ex duabus vel pluribus rationibus datis compositam invenire queant.

Ex dictis observari potest, in magnitudinibus quibuscunque ejusdem generis A, B, C, D &c. rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, secundae ad tertiam et ita deinceps ad ultimam, nomen tantum esse seu modum loquendi, quo significatur ratio quam habet prima A ad ultimam D, et quo simul indicantur rationes omnium magnitudinum A ad B, B ad C, C ad D a prima ad ultimam ad se invicem, sive eadem fuerint inter se, sive non fuerint; sicut in magnitudinibus deinceps proportionalibus A, B, C, D &c. ratio duplicata primae ad secundam nomen tantum est seu modus loquendi, quo significatur ratio quam habet prima A ad tertiam C, et quo simul indicatur duas esse rationes magnitudinum a prima ad ultimam, primae sc. A ad secundam B, et secundae B ad tertiam sive ultimam C, quae quidem rationes inter se sunt eadem; et ratio triplicata primae ad secundam est nomen sive modus loquendi, quo significatur ratio primae A ad quartam D, et quo simul indicatur tres esse rationes magnitudinum a prima ad ultimam, primae sc. A ad secundam B, et ipsius B ad tertiam C, et ipsius C ad quartam seu ultimam D, quae quidem rationes sunt eadem inter se; idemque similiter de aliis rationibus multiplicatis dicendum. hanc autem veram esse harum rationum explicationem patet ex Definitionibus rationis duplicatae et triplicatae, in quibus Euclides utitur verbo λέγεται, dicitur sive nominatur; quo verbo, sine dubio utebatur etiam in Definitione rationis compositae quam Theon aliufve ex Elementis sustulit; nam idem verbum retentum est in Definitione inepta rationis compositae quae nunc in Def. 5. Lib. 6. habetur. In citationibus autem harum Definitionum aliquando retinetur, ut in Demonstratione Prop. 19. Lib. 6. “prima ad tertiam duplicatam rationem ἐχεν λέ-

B b b

“γεται”

“γεται” quae verba Commandinus aliique male reddunt “habet” vice “habere dicitur;” aliquando autem omittitur, ut in Demonstratione Prop. 33. Lib. 11. ubi habetur “prima ad quartam triplicatam rationem ἔχει; sine dubio autem ἔχει hic significat idem quod ἔχειν λέγεται. ita etiam in Prop. 23. Lib. 6. ubi legitur “sed ratio K ad “M σύγκειται” composita est “ex ratione K ad L, et ratione L ad “M,” brevitatis sc. gratia, cum dicendum fuit, ut in Definitione, συγκείσθαι λέγεται, componi dicitur.

Ex his autem, et Propositionibus quas Libro quinto subjunximus, intelligi et explicari possunt omnia quae apud Geometras tum veteres tum recentiores de ratione composita habentur.

PROP. XXIV. LIB. VI.

Videtur imperitum quendam ex duabus diversis hujus Propositionis demonstrationibus hanc quam nunc habemus composuisse; ex una scilicet quae per Prop. 2. hujus Lib. 6. et alterâ quae per Prop. 4. ejusdem fieri potest. postquam enim per 2. hujus et componendo, permutandoque, ostenderat latera circa communem angulum parallelogrammorum proportionalia esse, immediate concludere potuisset proportionalia esse latera circa reliquos angulos aequales, ope scilicet Prop. 34. Lib. 1. et Prop. 7. Lib. 5. Verum ille hoc negligens pergit ostendere triangula et parallelogramma aequiangula esse, et longo circuitu, ope Prop. 4. hujus, et 22. Lib. 5. concludit rem eandem. manifestum propterea est hanc incite factam demonstrationem minime Euclidis esse. superfluis igitur rejectis, demonstrationem simpliciorum dedimus ope 4^{tae} hujus, eandem scilicet quam praebent codices Arabici ope 2^{dae} hujus et componendo; in hisce autem permutatio negligitur, neque parallelogramma aequiangula esse ostenduntur, quod Tyronum gratia faciendum fuit.

PROP. XXV.

PROP. XXV. LIB. VI.

Liquido patet demonstrationem hujus quam Euclides dederat vitiatam fuisse ab Editore quodam Geometriae minus perito. postquam enim ostenderat “ ut rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE “parallelogrammum ad parallelogrammum EF” opus fuit solummodo addere, “ est autem rectilineum ABC aequale parallelogrammo BE, æ- “ quale igitur est KGH rectilineum parallelogrammo EF; videlicet “ per Prop. 14. Lib. 5.” sed inter has duas sententias interposuit “ quare permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, “ ita rectilineum KGH ad EF parallelogrammum ” putavit scilicet non tam perspicuum esse concludere secundam quatuor proportionalium quartæ aequalem esse, ex æqualitate primæ et tertiæ, quod quidem demonstratum est in Prop. 14. Lib. 5. quam concludere tertiam æqualem esse quartæ, ex æqualitate primæ et secundæ, quod nusquam in Elementis quæ jam habemus ostensum est. verum quamvis hæc Propositio, tertiam scilicet quatuor proportionalium æqualem esse quartæ, si prima æqualis fuerit secundæ, fuisset ab Euclide Elementis suis inserta, ut verisimile est eam fuisse, nunquam tamen ille in præsentî casu eadem usus fuisset; quoniam, ut dictum fuit, sine redundante hac permutatione proportionalium conclusio eadem directe elici potest. hæc autem fufius ostendimus, tum quoniam certum præbent indicium textum Euclidis vitiatum fuisse, idem enim error invenitur in textu Graeco Prop. 23. Lib. 11. bis, et bis in Prop. 2. Lib. 12. et in Propp. 5. 11. 12. 18. ejusdem; in quibus Libri 12. locis excepto ultimo, recte omiffa est hæc permutatio proportionalium in versionis Commandini Editione Oxoniensi; tum ut caveant Geometrae ab usu permutationis in simili casu, non raro enim Recentiores, et inter alios ipse Commandinus in Commentario ad Prop. 5. Lib. 3. pag. 6. b. Pappi Alexandrini,

drini, et alibi, incidunt in hunc errorem; praeoccupavit scilicet multorum mentes vulgaris proportionalium idea, qua fit ut accuratam vix percipiant.

Praeterea quamvis rectilineum ABC cui simile faciendum est, possit esse cujuscunque generis, in demonstratione tamen Graeci codices habent triangulum vice rectilinei, qui error correctus est in versionis Commandini editione quae Oxonii impressa est.

PROP. XXVII. LIB. VI.

Secundus casus hujus habet ἀλλῶς praefixum quasi alia esset demonstratio; ab imperito ut videtur Librario. quam vocem recte omisit Gregorius. schema autem hujus secundi casus iisdem literis alphabeti quae in schemate primi casus adhibitae fuerunt, notari debuit. ut jam factum est.

PROP. XXVIII, et XXIX. LIB. VI.

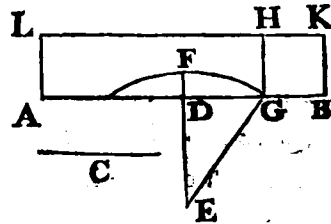
Problemata haec, quorum primo necessaria est Prop. 27^{ima}, sunt omnium in Elementis maxime generalia et utilia, et a veteribus in solutione aliorum Problematum saepissime adhibita; et propterea incite admodum ab And. Tacquet et Claud. Dechaes in iis quas dederunt Elementorum Editionibus omittuntur, et insulse admodum ab iis dicuntur nullius fere esse usus. Horum casus quando ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicandum est, deficiens, aut excedens quadrato; et quando ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicandum est deficiens aut excedens quadrato, frequentissime a Geometris usurpantur. Quare Tyronum gratia visum est eorum constructiones, ut sequitur tradere.

1. Ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare,

plicare, deficiens quadrato. oportet autem datum quadratum non majus esse eo quod a dimidia describitur.

Sit data recta linea AB, datum autem quadratum cui oportet aequale rectangulum ad AB applicare sit illud quod a data recta C describitur non majus existens eo quod fit a dimidio ipsius AB.

Secetur AB bifariam in D, et si quadratum ex AD aequale fuerit quadrato ex recta C, factum jam erit quod proponebatur. si autem non est aequale, erit AD major quam C ob determinationem. ducatur DE ad rectos angulos ipsi AB, et fiat DE aequalis ipsi C; produca-
tur vero ED ad F, ut EF aequalis sit ipsi AD seu DB, et centro E intervallo EF describatur circulus qui occurrat rectae AB in G, et super GB describatur quadratum GBKH, et compleatur rectangulum AGHL; jungaturque EG.



Quoniam igitur bifariam secta est AB in D, erit ^a rectangulum ^{a. 5. 2.} AG, GB una eum quadrato ex DG aequale (quadrato ex DB, hoc est quadrato ex EF sive EG, hoc est) quadratis ex ED, DG. commune auferatur quadratum ex DG, et reliquum rectangulum AG, GB aequale erit quadrato ex ED, hoc est ex C. rectangulum autem AG, GB est ipsum AH rectangulum, quia GH aequalis est ipsi GB. rectangulum igitur AH aequale est dato quadrato ex recta C. Quare ad datam rectam lineam AB dato quadrato ex recta C, aequale rectangulum AH applicatum est deficiens quadrato GK. Quod facere oportebat.

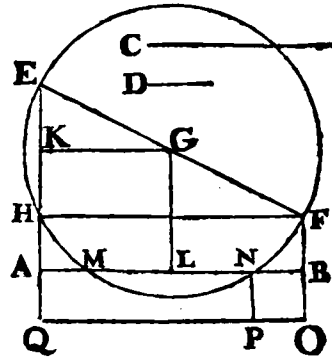
2. Ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, excedens quadrato.

Sit data recta linea AB, datum autem quadratum sit illud quod a data recta C describitur.

Secetur AB bifariam in D, et ducatur BE ad rectos angulos ipsi AB, fiatque

hoc est rectangulo C, D. et quoniam aequales sunt EG, GF, et AE, LG, BF inter se parallelae, aequales erunt AL, LB, aequales etiam sunt ^a EK, KH. est autem, ob determinationem, rectangulum C, D ^a. 3. 3.

non majus quadrato ex AL dimidio ipsius AB, ergo et rectangulum EA, AH non majus est quadrato ex AL hoc est ex KG; commune addatur quadratum ex KE, et quadratum ^b ex AK non majus erit quadratis ex EK, KG hoc est quadrato ex EG; quare recta AK seu GL non major est ipsa GE. et siquidem GE aequalis fuerit ipsi GL, circulus EHF continget rectam AB in L, et quadratum ex AL aequale ^{*} erit rectangulo EA, AH ^{*} 36. 3.



b. 6. 2.

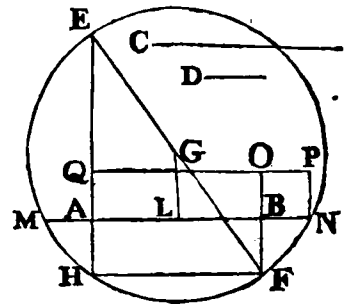
sive dato rectangulo C, D, et factum erit quod proponebatur. si vero inaequales fuerint EG, GL erit EG major, et propterea circulus EHF secabit rectam AB; secet in M, N punctis, et super NB describatur NBOP quadratum, et compleatur rectangulum ANPQ. Quoniam igitur aequales sunt ^a ML, LN, et aequales ostensae sunt AL, LB, aequales erunt AM, NB. rectangulum igitur AN, NB aequale est ipsi NA, AM, hoc est ^c rectangulo EA, AH sive rectangulo C, D. rec- c. Cor. 36. 3. tangulum vero AN, NB est ipsum AP, est enim PN aequalis ipsi NB. Ergo rectangulum AP aequale est rectangulo C, D. Igitur ad datam rectam AB, dato C, D rectangulo aequale rectangulum AP applicatum est deficiens quadrato BP. Quod facere oportebat.

4. Ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicare, excedens quadrato.

Sit AB data recta linea, datum autem rectangulum sit id quod rectis C, D continetur. oportet ad datam rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum applicare excedens quadrato.

Ducantur

Ducantur AE, BF ad rectos angulos ipsi AB, et ad contrarias ejus partes, quarum AE aequalis sit ipsi C, et BF rectae D. jungatur EF et bifariam secetur in G, centroque G, intervallo GE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H, et jungatur HF, et ad AB ducatur GL parallela ipsi AE; occurrat vero circulus rectae AB productae in M, N, et super BN describatur quadratum NBOP, et compleatur rectangulum ANPQ. Quoniam igitur angulus EHF in semicirculo aequalis est angulo recto EAB, parallelae erunt AB, HF; aequales igitur sunt AH, BF, et rectangulum EA, AH aequale rectangulo EA, BF, hoc est ipsi C, D rectangulo. et quoniam aequales sunt ML, LN, ut et AL, LB, erunt et MA, BN aequales, et pro-



a. 35. 3. terea rectangulum AN, NB aequale est ipsi MA, AN, hoc est ^a ipsi EA, AH five rectangulo C, D. rectangulum igitur AN, NB, hoc est ipsum AP aequale est rectangulo C, D. ad datam igitur rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum AP applicatum est, excedens quadrato BP. Quod facere oportebat.

Construções has 3^{ti}. et 4^{ti}. Problematis primus, quantum scio, dedit Willebrordus Snellius in Apollonio suo Batavo, et postea Cl. Halleyus in Schol. ad Prop. 18. Lib. 8^{vi} Conicorum Apollonii, a se restituti.

Problema 3. ita aliter enuntiatur, datam rectam AB secare in puncto N, et facere rectangulum a segmentis AN, NB aequale dato spatio. vel, quod eodem redit, Datâ summa AB laterum rectanguli, datoque rectangulo magnitudine, latera invenire.

Et Problema 4. idem est cum hoc, invenire in data recta AB producta punctum N quod faciet rectangulum AN, NB aequale dato spatio,

tio, vel quod eodem redit datâ differentia AB laterum rectanguli, ipsoque magnitudine dato, invenire latera.

PROP. XXXI. LIB. VI.

In Demonstratione hujus inversio proportionalium bis est omiſſa, addita igitur eſt, ut conclusio rite fieret ope 24^{tae}, Lib. 5. quod Clavius prius fecerat.

PROP. XXXII. LIB. VI.

Enuntiatio Propositionis 26^{tae}, Lib. 6. non ſatis generalis eſt. etenim non tantum duo parallelogramma ſimilia et ſimiliter poſita, quae communem habent angulum, ſunt circa eandem diametrum; verum etiam duo ſimilia et ſimiliter poſita, quorum unum habet angulum angulo alterius ad verticem oppoſitum, habent diametros in recta linea. videtur vero aliam fuiſſe horum demonstrationem, directam quidem, cui inſerviebat Propoſitio 32^{da}, quae etiam aliter et paulo brevius ut ſequitur oſtendi poteſt.

PROP. XXXII. LIB. VI.

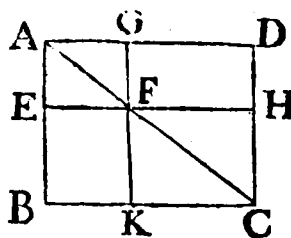
Si duo trianguſa componantur ad unum angulum, &c.

Sint duo trianguſa GAF, HFC quae duo latera AG, GF, duobus lateribus FH, HC proportionalia habeant, ſc. ſit ſicut AG ad GF, ita FH ad HC; parallela autem ſit GA ipſi HF, et GF ipſi HC. erit AF ipſi FC in directum.

Ducatur CK parallela ^a ipſi FH, occurratque rectae GF productae in K. Quoniam igitur utraque AG, KC parallela eſt ipſi FH, erunt et AG, KC inter ſe parallelæ^b, quare anguli AGF, FKC ſunt inter ſe aequales, alterni b. 30. 1:

C c c

enim



a. 31. 2:

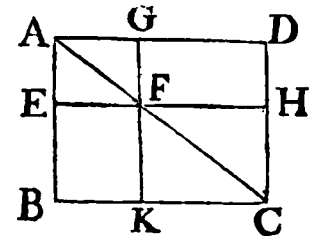
- c. 34. 1. enim sunt. est autem AG ad GF, ut (FH ad HC, hoc est ^c) CK ad
 d. 6. 6. KF; et sunt circa aequales angulos; ergo aequiangula ^d sunt AGF,
 CKF trianguia, et propterea angulus AFG aequalis est angulo CFK, est
 e. 14. 1. autem GFK recta linea; igitur ^e AF ipsi FC est in directum.

Propositio vero 26^{ta} ex 32^{da} ita demonstratur.

Si duo parallelogramma similia et similiter posita communem habuerint angulum, aut angulos ad verticem oppositos; erunt illorum diametri in recta linea.

Primo, habeant parallelogramma ABCD, AEFG communem angulum BAD, sintque similia et similiter posita, erunt ABCD, AEFG circa eandem diametrum.

- Producantur enim EF, GF ad H, K, et jungantur FA, FC. quoniam igitur similia sunt ABCD, AEFG parallelogramma, erit DA ad AB, ut GA ad AE; quare reliqua DG erit ad reliquam EB, ut GA ad AE^a. est autem DG aequalis ipsi FH, EB ipsi HC, et AE ipsi GF. ergo ut FH ad HC, ita AG ad GF; et parallelae sunt FH, HC ipsis AG, GF; et trianguia AGF, FHC ad unum angulum composita sunt in puncto F; quare erunt AF, FC sibi ipsis in
 a. Cor. 19. 5. directum^b.



Secundo, sint parallelogramma KFHC, GFEA similia et similiter posita, habeantque angulos KFH, EFG ad verticem oppositos; erunt diametri AF, FC sibi ipsis in directum.

Quoniam enim parallelae sunt AG, GF ipsis FH, HC; et est AG ad GF, ut FH ad HC; erunt AF, FC in directum^b.

PROP. XXXIII.

PROP. XXXIII. LIB. VI.

Verba “ quippe qui ad centrum sunt constituti ” omiffa sunt, utpote imperiti cujusdam additamentum.

In Graecis codicibus, et Latina versione deest $\alpha' \epsilon\tau\upsilon\chi\epsilon$, utcunque, in utriusque partis demonstratione, quae nunc adduntur, omnino enim sunt necessaria. et in demonstratione secundae partis, ubi sc. triangulum BGC aequale ostenditur triangulo CGK, verbum $\alpha' \rho\alpha$ omitti debet in textu Graeco.

PROPP. B, C. LIB. VI.

Propositiones hae Libro sexto sunt additae, quoniam a Geometris saepius usurpantur.

DEF. IX, et XI. LIB. XI.

IN figuris planis similitudo figurarum definitur ex aequalitate angulorum, et laterum circa aequales angulos proportionalitate; etenim ex sola laterum proportionalitate, vel sola angulorum aequalitate non sequitur figuras esse similes extra casum triangulorum. et quidem similis inter se positus rectarum linearum, quibus figurae continentur, partim ex utraque pendet. eademque ratione figurae solidae similes sunt eae quae et singulos angulos solidos aequales habent, et continentur figuris planis similibus, multitudine aequalibus. sunt enim quaedam figurae solidae, figuris planis similibus, multitudine, quin et magnitudine aequalibus, contentae, quae neque similes neque aequales sunt, ut in Demonstratione post Notas ad Def. 10. ostendetur. necesse igitur fuit emendare Definitionem similium figurarum solidarum, eique praemittere Defini-

tionem anguli solidi. Ex hisce autem et Definitione decima, satis liquet quam multum ab imperitis depravati sint hi Libri.

X

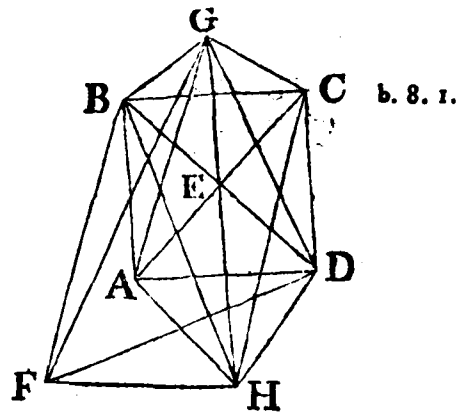
DEF. X. LIB. VI.

Quoniam sensus verbi "aequalis" notus est ante hanc Definitionem, igitur Propositio quae est Definitio decima hujus Libri est Theorema quod verum aut falsum esse demonstrandum est, non assumendum; quare ex Propositione demonstranda Theon aliufve Editor inepte fecit hanc Definitionem figurarum solidarum similium et aequalium. similes enim esse figuras demonstrandum est ex Definitione similium solidarum figurarum; aequales autem esse ostendendum est ex Axiomate, "Quae sibi mutuo congruunt inter se sunt aequalia," vel ex Propositione A, vel Prop. 9. aut Prop. 14. Lib. 5. ex quo Axiomate, vel ex earum Propositionum aliqua, omnium omnino figurarum aequalitas ultimo demonstranda venit. in praecedentibus Libris nullam aequalium figurarum Definitionem tradidit Euclides neque certe hanc dedit. quae enim dicitur Definitio prima, Lib. 3. revera est Theorema in quo asseritur eos circulos aequales esse quorum quae ex centris sunt aequales, quod quidem ex Definitione circuli perspicue apparet; ideoque a quodam inter Definitiones non proprie locatum est. non enim aequalitas figurarum definienda est sed demonstranda. Quamvis igitur verum esset figuras solidas, quae similibus planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur, inter se aequales esse, merito tamen culpandus est is qui ex hac Propositione demonstranda Definitionem fecit. Quid autem dicendum, si haec Propositio non vera sit? nonne confitendum est Geometras per mille tercentos annos in hac re Elementari deceptos fuisse? et ex hoc quidem modestiam discere debemus, atque agnoscere quam parum nobis cavere possumus, quae est mentis humanae imbecillitas, ne in errores incidamus etiam in principiis scientiarum, quae inter maxime certas merito

rito aestimantur. Propositionem enim hanc minime semper veram esse variis exemplis ostendi potest; sufficit hoc quod sequitur.

Sit quadratum ABCD et ducantur diametri AC, BD sibi mutuo occurrentes in E; et super unam ipsarum BD constituatur, in plano in quo est quadratum, triangulum isosceles BFD, a puncto vero E ad rectos angulos plano ABCD constituatur recta EG, et in ipsa sumpto quovis puncto G, ducantur GA, GB, GC, GD, GF. in triangulis igitur AEG, CEG quoniam AE, EG aequales sunt ipsis CE, EG, altera alteri, et rectos continent angulos, erit basis AG basi GC aequalis^a. a. 4. 1.

quare in triangulis AGB, CGB aequales sunt AG, GB ipsis CG, GB, et basis AB aequalis est basi BC; angulus igitur^b AGB aequalis est angulo CGB, et triangulum AGB triangulo CGB aequale^a. similiter ostendetur triangulum AGD aequale ipsi CGD. Producatur GE ad oppositas partes plani ABCD, et in ea sumatur punctum quodvis H, et jungantur HA, HB, HC, HD, HF, et similiter ostendetur triangulum AHB aequale trian-



gulo CHB, et triangulum AHD triangulo CHD. sunt igitur duo solida quorum utrumque continetur octo triangulis; unum scilicet contentum quatuor triangulis quorum vertex communis est G, bases vero rectae BA, AD, BF, FD; quatuorque triangulis quorum vertex communis est H, bases vero eadem rectae. alterum autem solidum contentum est quatuor triangulis quorum vertex communis est G, et bases rectae BC, CD, BF, FD; et quatuor triangulis quorum vertex communis est H, et bases eadem rectae BC, CD, BF, FD. quatuor autem triangula AGB, AGD, AHB, AHD aequalia ostensa sunt quatuor

tuor triangulis CGB, CGD, CHB, CHD singula singulis; quatuor autem reliqua triangula BGF, DGF, BHF, DHF utrique solido communia sunt. Duo igitur haec solida continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus. inaequalia autem esse manifestum est, cum primum eorum contineatur in altero. non igitur semper verum est aequalia esse solida quae planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus continentur.

COR. Hinc duo inaequales anguli solidi possunt contineri aequalibus et iisdem multitudine angulis planis.

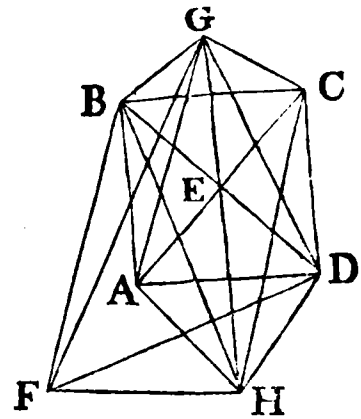
Angulus enim solidus ad G qui continetur quatuor angulis planis AGB, AGD, FGB, FGD inaequalis omnino est angulo solido ad idem punctum G qui continetur quatuor angulis planis CGB, CGD, FGB, FGD; hic enim priorem illum continet. uterque autem continetur quatuor angulis planis, qui inter se sunt aequales singuli singulis vel iisdem, ut ostensum fuit. et quidem innumeri possunt esse anguli solidi inaequales, qui aequalibus angulis planis singuli singulis continentur. Patet etiam figuras solidas prius memoratas minime similes esse, quoniam earum anguli solidi non sunt omnes inter se aequales.

Innumeros autem angulos solidos inter se inaequales posse contineri iisdem angulis planis, eodem ordine positis, ope trium Propositionum sequentium, manifestum erit.

PROP. I. PROBLEMA.

Datis tribus magnitudinibus A, B, C quartam invenire ita ut tres simul majores sint reliqua, quomodocunque sumptae.

Sit



Sit D quarta, erit igitur D minor ipsis A, B, C simul. fit A non minor utrâvis ex ipsis B, C; et primum sint B, C simul non minores ipsâ A; erunt igitur B, C, D simul majores quam A. et quoniam A non minor est B, erunt A, C, D majores quam B. similiter ostendetur ipsas A, B, D simul majores esse quam C. Igitur in casu quo B et C simul non minores sunt ipsâ A, quævis D quæ minor est ipsis A, B, C simul, propositum efficiet.

Si vero B et C simul minores sint quam A, quoniam requiritur ut B, C, D simul majores sint A, ex hisce ablatis B, C erit D major excessu ipsius A supra B, C simul. sumatur igitur quævis D quæ minor sit ipsis A, B, C simul, at major excessu ipsius A supra B, C simul. erunt igitur B, C, D simul majores quam A; et quoniam A major est utrâvis ex ipsis B, C, multo magis erit A una cum D, et alterutra ex ipsis B, C major reliqua. et, ex constructione, A, B, C simul majores sunt quam D. Q. E. F.

COR. Si præterea requiratur ut A et B simul non minores sint quam C et D simul, debet excessus ipsarum A et B simul supra C non minor esse quam D, hoc est debet D non major esse hoc excessu.

PROP. II. PROBLEMA.

Datis quatuor magnitudinibus A, B, C, D quarum A et B simul non minores sunt quam C et D simul, et quarum tres simul majores sunt reliquâ quartâ, quomodocunque sumptæ; quintam E invenire, ita ut duæ ex tribus A, B, E quomodocunque sumptæ majores sint reliqua tertia, et etiam duæ ex tribus C, D, E quomodocunque sumptæ majores sint reliquâ. sit autem A non minor B, et C non minor D.

Primò sit excessus ipsarum C, D non minor excessu ipsarum A, B. potest autem sumi quædam E quæ minor est summa ipsarum C, D
at

N O T A E.

at major excessu earundem; sumatur, erit igitur E major excessu ipsarum A, B; quare B et E simul majores sunt quam A; est autem A non minor B, ergo A et E simul majores sunt B. et, ex hypothesi, A una cum B, non minor est quam C una cum D, C autem cum D major est quam E, igitur et A una cum B major est quam E.

Sit autem excessus ipsarum A, B major excessu ipsarum C, D; et quoniam, ex hypothesi, tres B, C, D simul majores sunt quartâ A, erunt C et D simul majores excessu ipsarum A, B; igitur sumi potest quaedam E quae minor est ipsis C et D simul, at major excessu ipsarum A, B. sumatur, et quoniam E major est excessu ipsarum A, B, erunt B et E simul majores quam A. et, ut in praecedente casu, ostendetur A una cum E major B, et A una cum B major quam E. igitur in utroque casu ostensum est duas ex ipsis A, B, E quomodocunque sumptas, majores esse reliquâ.

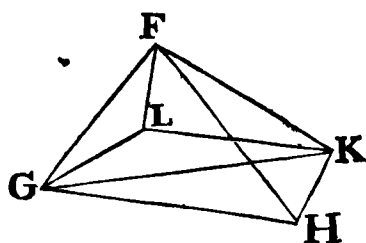
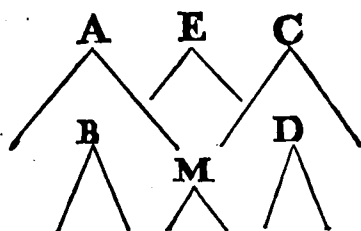
Et quoniam in utroque casu E major est excessu ipsarum C, D, erit E una cum D major quam C; et, ex hypothesi, C non minor est D, ergo E una cum C major erit quam D; est autem ex constructione C una cum D, major quam E. igitur ipsarum C, D, E duae quomodocunque sumptae majores sunt reliquâ. Q. E. F.

PROP. III. THEOREMA.

Fieri potest ut ex iisdem quatuor angulis planis constituentur innumeri anguli solidi inter se inaequales.

Sumantur tres anguli plani A, B, C quorum A non minor sit utrovis ex ipsis B, C; sint autem A et B simul minores duobus rectis; et, ope Problematis 1. et Corollarii ejusdem, inveniatur quartus angulus D, ita ut tres ex ipsis A, B, C, D majores sint reliquo, quomodocunque sumpti, et ut A et B simul non minores sint ipsis C et D simul. ope vero Problematis 2. inveniatur quintus angulus E, ita ut duo ex angulis

lis A, B, E, reliquo sint majores quomodocunque sumpti, et etiam duo ex ipsis C, D, E quomodocunque sumpti sint majores reliquo. et quoniam A et B simul minores sunt duobus rectis angulis, erunt A et B simul bis sumpti minores quatuor rectis. sunt autem A et B simul majores angulo E, quare A et B simul bis sumpti majores erunt angulis A, B, E simul, qui propterea minores erunt quatuor rectis; et duo ex ipsis reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti; ergo ope Prop. 23. Lib. 11. constitui potest angulus solidus ex tribus angulis planis qui ipsis A, B, E, sunt aequales. constituatur, sitque angulus solidus ad F, contentus scilicet planis angulis GFH, HFK, GFK qui angulis A, B, E aequales sunt, singuli singulis. et quoniam anguli C, D simul non

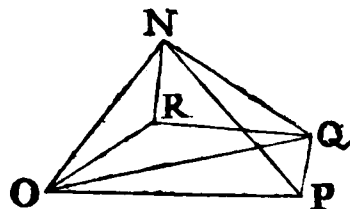


sunt majores ipsis A, B simul, erunt C, D, E simul non majores angulis A, B, E simul. hi autem minores ostensi sunt quatuor rectis, quare et C, D, E simul minores sunt quatuor rectis; et duo ex ipsis reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti; ergo ex tribus angulis planis ipsis C, D, E aequalibus constitui potest angulus solidus [23. 11.]. huic autem angulo solido constitui potest ad punctum F in recta FG angulus solidus aequalis, ope scilicet Prop. 26. Lib. 11. fitque angulus GFK, qui sc. aequalis est ipsi E, unus ex tribus angulis planis qui hunc angulum solidum continent, reliqui autem duo sint KFL, GFL ipsis sc. C, D aequales, alter alteri. Igitur ad punctum F constitutus est angulus solidus contentus quatuor angulis planis GFH, HFK, KFL, GFL qui ipsis A, B, C, D angulis sunt aequales, singuli singulis.

D d d

Rurfus

Rurſus inveniatur alter angulus M talis ut duo ex tribus angulis A , B , M reliquo ſint majores, quomodocunque ſumpti, et etiam duo ex tribus C , D , M quomodocunque ſumpti ſint majores reliquo. oſtendetur autem, ut in praemiſſis, angulos A , B , M ſimul minores eſſe quatuor rectis, anguloſque C , D , M ſimul minores eſſe quatuor rectis. Conſtituatur igitur [23. 11.] angulus ſolidus ad N contentus angulis planis ONP , PNQ , ONQ iſſis A , B , M aequalibus, ſinguli ſingulis, et ope Prop. 26. Lib. 11. conſtituatur ad idem punctum N in recta linea ON angulus ſolidus contentus tribus angulis planis, quorum unus ſit ipſe ONQ aequalis ſcilicet ipſi M , et reliqui duo QNR , ONR aequales ipſis C , D , alter alteri. erit igitur ad punctum N angulus ſolidus conſtitutus qui continetur



quatuor angulis planis ONP , PNQ , QNR , ONR iſſis A , B , C , D aequalibus, ſinguli ſingulis. ſolidos autem angulos, qui praediſtis quatuor angulis planis ad F et N continentur, non eſſe inter ſe aequales, ſive non poſſe ſibi mutuo congruere, patet ex eo quod anguli GFK , ONQ ſive anguli E , M ex conſtructione ſint inaequales, et propterea rectae GF , FK non poſſunt congruere rectis ON , NQ . igitur neque anguli ſolidi ſibi mutuo congruent, et propterea inaequales ſunt.

Et quoniam ex tribus datis angulis A , B , C poſſunt innumeri anguli inveniri qui eadem efficiunt cum angulo D , et rurſus ex ipſis A , B , C et D , vel uno quovis ex hiſce innumeriſ, inveniri poſſunt alii qui eadem praestant cum angulis E vel M , innumeri alii ſolidi anguli conſtitui poſſunt qui iſſdem quatuor angulis planis continentur, qui omnes inter ſe ſunt inaequales. Q. E. D.

Falluntur igitur Clavius aliiſque auctores qui aſſerunt ſolidos angulos qui aequalibus et iſſdem numero planis angulis continentur inter ſe aequales.

aequales esse. patet etiam Propositionem 26. Lib. 11. non legitime demonstratam esse, in ea enim aequalitas solidorum angulorum qui tribus angulis planis aequalibus, singuli singulis, continentur, assumitur, non demonstratur.

PROP. I. LIB. XI.

Verba in fine hujus, “ recta enim linea cum recta linea non conve-
“ nit in pluribus punctis quam uno, alias rectae lineae sibi ipsis con-
“ gruent.” omissa sunt tanquam imperiti cujusdam additamentum. de-
monstrandum enim hoc fuit non assumendum.

PROP. II. LIB. XI.

Propositio haec a quodam mutata et vitiata videtur. Etenim secunda pars Enuntiationis, viz. “ et omne triangulum in uno plano consistit” demonstratione non indiget; nam omnes figurae in primo Libro Elementorum definitae, sunt, ex hypothesi, figurae planae, hoc est, in plano descriptae, et inter caeteras triangulum. et quidem potest superficies convexa tribus rectis lineis terminari. neque valet demonstratio ad ostendendum duas rectas se invicem secantes in uno esse plano. debet igitur ostendi duas aut tres rectas sibi mutuo occurrentes in uno plano esse. ut hoc fieret Enuntiationem et Demonstrationem in eas quae in textu positaе sunt mutavimus.

PROP. III. LIB. XI.

In hac prope finem habentur, “ non igitur DEB, DFB rectae li-
“ neae sunt, similiter ostendemus neque aliam quampiam, quae a puncto
“ D ad B ducitur rectam esse,” quae omissa sunt. ex eo enim quod
duae lineae spatium comprehendunt, tantum sequitur unam ex ipsis non
esse rectam. et vis argumenti ex hoc pendet, si scilicet communis sec-

D d d 2

tio

tio planorum non ponatur esse recta linea, duae rectae lineae spatium comprehendent, quod est absurdum; ergo communis sectio est recta linea.

PROP. IV. LIB. XI.

“ Et triangulum AED triangulo BEC aequale,” haec etiam omissa sunt; saepius enim integra haec conclusio in praecedentibus libris repetita fuit, ut non necesse sit idem in hoc libro facere.

PROP. V. LIB. XI.

In hac prope finem delenda est vox ἐπιπέδῳ in textu Graeco, utpote imperiti additamentum. et recte omissa est vox “plano” in versionis Commandini editione Oxoniensi.

PROP. VII. LIB. XI.

Manifestum est Propositionem hanc ab Editore quodam minus perito additam fuisse. rectae enim lineae quae ab uno puncto ad aliud, in quovis plano, ducuntur in praecedentibus libris, in eo ponuntur esse plano. et nisi essent, demonstrationes quaedam in quibus una recta alteri occurrere ponitur, nullae essent; non enim occurrerent rectae. Ex. gr. in Prop. 30. Lib. 1. recta GK non occurreret ipsi EF, si non esset GK in plano in quo sunt parallelae AB, CD, in quo etiam, ex hypothesi, est recta EF. praeterea demonstratur haec septima ope praecedentis tertiae, in qua bis id ipsum assumitur quod in septima demonstrandum proponitur, rectam scilicet ab uno puncto ad aliud in quolibet plano ductam, in eo esse plano; idem etiam assumitur in praecedente Prop. 6. nam recta BD quae jungit puncta B, D in subiecto plano, in eo ponitur esse plano. locum autem dedimus septimae, mutata Demonstratione,

stratione, ut numerus Propositionum servaretur; manifesta enim est ex Def. 7. et 35. Lib. 1. quamvis Elementis non inesset.

PROP. VIII. LIB. XI.

In hac prope finem, in Graecis, et in Commandini et Gregorii versionibus habentur, "at in plano per BA, AD est DC," vice quorum versionis Commandini Oxoniensis Editio recte habet "at in plano per BD, DA est DC." sequentia autem quae in omnibus Editionibus leguntur, viz. "quoniam in plano per BD, DA sunt AB, BD; in quo autem sunt AB, BD in eodem est ipsa DC," corrupta sunt, vel a quodam textui inserta; nulla enim necessitas fuit per istas ambages ostendere rectam DC in eodem esse plano in quo sunt BD, DA, cum immediate sequatur ex Prop. 7. praecedente rectas BD, DA esse in plano in quo sunt parallelae AB, CD. hisce igitur omissis, legendum est, "omnes enim tres sunt in plano in quo sunt parallelae AB, CD."

PROP. XV. LIB. XI.

Post verba, "et quoniam BA parallela est AH," addita sunt haec, "utraque enim ipsarum parallela est ipsi DE non in eodem cum ipsa plano," utpote manifeste omissa.

PROP. XVI. LIB. XI.

In hac prope finem vice verborum, "quae autem neutra ex parte conveniunt," legendum est, "quae autem in eodem plano productae, neutra" &c. etenim in citando hanc Definitionem in Prop. 27. Lib. 1. non necesse fuit addere voces, "in eodem plano," quoniam omnes rectae de quibus agitur in libris praecedentibus sunt in eodem plano. hic autem omnino fuit necessarium.

PROP. XX.

N O T A E.

PROP. XX. LIB. XI.

In hac prope initium habetur "sin minus, sit major BAC." potest autem angulus BAC aequalis esse alteri reliquorum. legendum igitur "sin minus, sit angulus BAC non minor utrovis reliquorum, major autem quam DAB."

Et ad finem hujus legitur, "similiter demonstrabimus," cum nulla demonstratione opus sit; quoniam enim angulus BAC non minor sit utrovis reliquorum, patet BAC una cum altero ex ipsis reliquo majorem esse.

PROP. XXII. LIB. XI.

Et in hac legitur prope initium, "sin minus, sint inaequales anguli ad B, E, H, et major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad E, H." haec manifeste vitiata sunt, poterit enim angulus ad B aequalis esse uni reliquorum. legendum igitur est "sin minus, sint inaequales anguli ad B, E, H, et sit angulus ad B non minor utrovis ipsorum ad E, H. non igitur minor est recta AC utraque ipsarum DF, GK."

PROP. XXIII. LIB. XI.

Demonstratio hujus paulo brevior reddita est, omittendo in casu tertio ea quae prius ostensa fuerunt in primo; et adhibendo constructionem quam Campanus tradit, qui tamen Casum 2. et 3. non demonstrat. hujus autem tertii constructio et Demonstratio simpliciores paulo quam in textu Graeco factae sunt.

PROP. XXIV. LIB. XI.

Verbum "similia" Enuntiationi hujus additum est, quoniam plana quibus continentur solida quae in Prop. 25. aequalia inter se ostendenda

denda sunt, similia debent esse et aequalia; ut aequalitas solidorum ex Prop. C. Lib. 11. inferatur. et quidem in Editione Oxoniensi Corollarium adjectum est Prop. 24^{ta}, ostendens parallelogramma, de quibus agitur in hac Propositione, similia esse, ut solidorum aequalitas in Prop. 25. ex Def. 10. Lib. 11. ostendatur.

PROP. XXV, et XXVI. LIB. XI.

In Propositione 25^{ta} figurae solidae quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, inter se aequales ponuntur. et videtur Theonem aut alium quendam ut taedium effugeret demonstrandi figuras de quibus agitur in hac Propositione aequales esse, Definitionem decimam hujus Libri posuisse vice demonstrationis; quod quidem inscite admodum factum est.

Similiter, in Propositione 26^{ta} duo anguli solidi aequales esse ponuntur, si uterque contineatur tribus angulis planis qui, singuli singulis, inter se sunt aequales. et satis mirum est nullum, quantum scio, ex Euclidis interpretibus vidisse aliquid duabus hisce Propositionibus deesse. Clavius quidem ad Def. 11. hujus Libri asserit, "perspicuum esse angulos solidos, qui angulis planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur sibi mutuo aequales esse, nam congruent si sese penetrare intelligantur;" sed hoc sine ulla ratione asseritur, neque semper verum est extra casum in quo anguli solidi tribus tantum angulis planis continentur quorum singuli singulis sunt aequales. et in hoc casu idem est ac asserere duo triangula sphaerica inter se aequilatera, esse etiam inter se aequiangula, et sibi mutuo congruere; quod sine demonstratione concedi minime debet. Certe Euclides hoc non assumpsit de triangulis rectilineis; ostendit enim in Propositione 8^{va}, Lib. 1. triangula inter se aequilatera, esse inter se aequiangula, unde ipsorum aequalitas ex Prop. 4 ejusdem Libri manifesta est. et Menelaus, in Prop. 4^{ta}, Lib. 1.

Lib. 1. Sphaericorum, explicite demonstrat triangula sphaerica inter se aequilatera esse etiam inter se aequiangula; unde et sibi mutuo congruere facile ostendi potest, si scilicet eorum latera eodem ordine et situ disposita fuerint.

Ad defectus igitur hos supplendos necessarium fuit tres Propositiones A, B, C huic Libro inferere. Propositiones enim 25^{ta}, 26^{ta}, et 28^{va}, et propterea octo aliae hujus Libri quae ex iis pendent, viz. 27. 31. 32. 33. 34. 36. 37. et 40. infirmo omnino hactenus innitebantur fundamento; ut et Prop. 8. 12. Cor. 17. et Prop. 18. Lib. 12. quae pendent ex Definitione 9^{na}. figuras enim solidas quae planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus continentur, ut et angulos solidos qui aequalibus et iisdem numero planis angulis continentur, non semper inter se aequales esse, ostensum est in Notis ad Def. 10. hujus Libri.

Observandum est Andream Tacquet in Euclide suo definire angulos solidos aequales esse, "qui intra invicem positi congruunt." Propositio autem haec non est Definitio sed Axioma; vera enim est de magnitudinibus quibuscunque. posuit autem Definitionem hanc inutilem ut ope ejus demonstraret Prop. 36. hujus Libri sine ope Prop. 35. ejusdem. de qua demonstratione vide Notam ad Prop. 36.

PROP. XXVIII. LIB. XI.

In hac ostendi debuit diagonales esse in uno plano, non assumi. defectum hunc supplevit Clavius.

PROP. XXIX. LIB. XI.

Hujus Propositionis tres sunt casus; primus scilicet in quo duo parallelogramma basi AB opposita latus habent commune; secundus in quo parallelogramma haec a se invicem separata sunt, et tertius in quo ha-

bent

bent partem communem; et huic soli demonstratio quae haecenus habetur infervit. Primus autem immediate ostenditur ex praecedente Propositione 28^{va}, quae quidem huic in hunc finem praemissa videtur; etenim nulli praeter ei et 40^{mae} hujus Libri utilis est, quarum ultimae praemissa certe fuisset, si in hac 29^{na} Euclides eam non adhibuisset. Hunc autem casum imperitus quidam ex Elementis delevit, et mutilavit Euclidean reliquorum casuum demonstrationem quam nunc restitui-
mus, quaeque iis simul ostendendis infervit.

PROP. XXX. LIB. XI.

In demonstratione hujus, plana opposita solidi CP in figura nostra, hoc est solidi CO in figura Commandini, non ostenduntur inter se parallela; quod Tyronum gratia visum est ostendere.

PROP. XXXI. LIB. XI.

Hujus Propositionis duo sunt casus; primus in quo rectae insistentes ad rectos angulos sunt basibus; alter in quo non sunt. primus rursus dividitur in alios duos, quorum alter est is in quo bases sunt parallelogramma inter se aequiangula; reliquus in quo non sunt aequiangula. illius textus Graeci Editor mentionem non facit, demonstrationem autem ejus demonstrationi reliqui casus intexuit. quare Corollarium hoc ostendens addidisse debuit. satius autem visum est casus hos distincte tradere. brevior etiam reddita est demonstratio, viam sequendo qua usus est Euclides in Prop. 14. Lib. 6. Praeterea in demonstratione casus in quo rectae insistentes non sunt ad rectos angulos basibus, non ostendit Editor solida in constructione descripta esse parallelepipedum; quod quidem Euclidem omisisse minime putandum est. Verba autem

E e c

ad

ad finem Propositionis, “ quorum insistentes non sunt in iisdem rectis lineis,” ab imperito quodam addita sunt; nam possunt esse in iisdem rectis lineis.

PROP. XXXII. LIB. XI.

Omisit Editor jubere parallelogrammum FH applicari in angulo FGH aequali angulo LCG, quod quidem necessarium est; unde recte hoc supplevit Clavius.

Praeterea in constructione requiritur ut a basi FH, eadem altitudine ipsi CD, solidum parallelepipedum GK compleatur; verum innumera possunt esse solida quae eandem habent basim, et eandem altitudinem. scribendum igitur est “ et compleatur solidum parallelepipedum GK cuius basis sit FH, et una ex rectis insistentibus sit FD.” eademque correctio facienda est in Propositione 33.

PROP. D. LIB. XI.

Verisimile admodum est Euclidem huic Propositioni locum in Elementis dedisse, qui similem de parallelogrammis aequiangulis tradit in Prop. 23. Lib. 6.

PROP. XXXIV. LIB. XI.

In hac ter habentur haec verba, ὧν αἱ ἐφεξῶσαι ἢ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, “ quorum insistentes non sunt in eisdem rectis lineis;” quae vel omnino sunt omittenda, ut factum est a Clavio, vel, ipsorum vice, scribenda sunt, “ sive insistentes rectae sint in eisdem rectis lineis, “ sive non sint,” inepte enim excluditur alter casus.

Et bis habentur ὧν τὰ ὕψη, “ quorum altitudines,” manifesto errore, vice ὧν αἱ ἐφεξῶσαι, “ quorum insistentes.” altitudo enim semper est ad rectos angulos basi.

PROP. XXXV.

PROP. XXXV. LIB. XI.

In hac breviori via quam in textu Graeco anguli ABH, DEM recti ostenduntur; et similiter ostendetur rectos esse ACH, DFM. repetitio autem ejusdem Demonstrationis quae in textu habetur omissa est. verisimile enim est eam a quodam Editore textui additam fuisse, ut ex verbis, "similiter demonstrabimus" conicere licet; ea enim non solent addi nisi quando Demonstratio non traditur, aut, si tradita sit, in quibusdam differt a praecedente Demonstratione, ut in 26. hujus Libri. Campanus autem non habet hanc repetitionem.

Aliam Corollarii hujus Propositionis Demonstrationem dedimus, cujus ope Propositio 36. quae sequitur, demonstratur sine Prop. 35.

PROP. XXXVI. LIB. XI.

Andreas Tacquet in Euclide suo hanc Propositionem sine ope Prop. 35. demonstrat. patet autem solida quae aequiangula dicuntur, in enuntiatione Propositionis 36. ut nunc habetur in textu Graeco, ea esse quorum anguli solidi tribus angulis planis inter se aequalibus, singuli singulis, et similiter positis, continentur; ut ex constructione manifestum est. hos autem angulos solidos sibi mutuo congruere assumit, non demonstrat Tacquetus; ponit enim ille solida jam facta esse, non ostendit quomodo construantur, ut in textu Graeco factum est. ope autem secundae Demonstrationis praecedentis Corollarii, Demonstratio ejus in hac etiam quae in textu habetur hypothese legitima redditur.

PROP. XXXVII. LIB. XI.

In hac assumitur rationes triplicatas rationum quae inter se eadem sunt, esse inter se easdem, ut et rationes easdem esse inter se quarum rationes triplicatae sunt inter se eadem; quod sine Demonstratione mi-

nime concedendum est; certe Euclides harum Propositionum primam et faciliorem non assumpsit, sed demonstravit in casu rationis duplicatae, in Prop. 22. Lib. 6. alia igitur Demonstratio tradita est similis ei quae habetur in ea Propositione, ut Clavius prius fecerat.

PROP. XXXVIII. LIB. XI.

Si a puncto in plano aliquo quod alteri plano ad rectos est angulos, ducenda sit, ad planum hoc, recta perpendicularis; fiet, ducendo ad communem planorum sectionem perpendicularem a puncto illo; erit enim haec perpendicularis ad planum subiectum, vi Definitionis 4. Libri hujus. ineptum enim esset, in hoc casu, uti Propositione 11^{ma} hujus. sed Euclides*, Apollonius alique Geometrae jubent perpendicularem duci a puncto ad planum subiectum, et concludunt eam cadere in communem planorum sectionem; quod hoc idem sit ac si praedicta constructione uterentur, et concluderent rectam ductam perpendicularem esse ad planum subiectum; aliquis autem hoc non videns, putavit necessarium fuisse Propositionem hanc huic Libro addere, cujus quidem nullus est usus.

PROP. XXXIX. LIB. XI.

In hac rectae lineae quae bifariam secant opposita plana parallelepipedo, in uno ponuntur esse plano, quod quidem demonstrari debuit; ut nunc factum est.

LIB. XII.

EX Epistola Archimedis ad Dositheum libris de Sphaera et Cylindro praemissa, quam integritati suae ex Manuscriptis restituit Doctissimus Collega meus Dom. Jacobus Moor Graecarum literarum Professor

fessor apparet, ipso me monente, Eudoxum auctorem fuisse praeccipuarum Propositionum quae in hoc Libro continentur.

PROP. II. LIB. XII.

Ad initium hujus habentur haec “ si enim non ita sit, erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium ali-
“ quod minus circulo EFGH, vel ad majus.” et similia rursus occurrunt prope finem hujus Propositionis, ut et in Propp. 5. 11. 12. 18. hujus Libri. de quibus observandum est, demonstrationi Theorematis sufficere, in hisce et similibus casibus, ut res quaedam possit existere, dummodo hoc perspicuum fuerit, quamvis non possit eadem Geometrice inveniri seu exhiberi. ita hic assumitur quartam existere posse proportionalem tribus magnitudinibus, viz. duobus quadratis ex BD, FH et circulo ABCD, quoniam scilicet perspicuum est esse quadratum aliquod aequale circulo ABCD, quamvis illud Geometrice inveniri non potest; tribus autem figuris rectilincis quadratis scilicet ex BD, FH, et quadrato quod circulo ABCD aequale est, existit quartum proportionale quadratum; nam tribus rectis lineis quae ipsorum sunt latera existit quarta proportionalis recta^a. et spatium quarto huic quadrato aequale illud est quod in hac^a. 12. 6. Propositione designatur litera S. simile autem intelligendum est in reliquis Propositionibus citatis; et verisimile est haec ostensa fuisse ab Euclide, et a quodam Editore ex textu deleta. Lemma enim quod huic Propositioni ab imperito quodam subjungitur huic rei explicandae minime inservit.

PROP. III. LIB. XII.

In textu Graeco et versionibus sequentia habentur, viz. “ Et cum
“ duae rectae lineae sese tangentes BA, AC” &c. hic anguli BAC,
KHL ope Prop. 10. Lib. 11. aequales ostenduntur, quod prius factum

N O T A E.

tum fuit. triangulum enim EAG simile ostensum fuit ipsi KHL. repetitio igitur haec omissa est, et triangula ABC, HKL similia esse, brevius ope Prop. 21. Lib. 6. ostenduntur.

PROP. IV. LIB. XII.

Pauca in hac magis explicite quam in textu Graeco tradita sunt.

PROP. V. LIB. XII.

In hac prope finem habentur verba *ὡς ἐμπροσθεν ἐδείχθη*, “ut antea ostensum fuit;” quae rursus occurrunt ad finem Propositionis 18. hujus Libri; nullibi tamen, nisi forsan hisce verbis citetur Lemma inutile annexum Propositioni 2^{dae}, in hisce Elementis hoc ostensum est, et forsan ab imperito Editore omissa sunt, qui oblitus est delere etiam has voces.

PROP. VI. LIB. XII.

Breviorem hujus Demonstrationem dedimus. et quae nunc in textu Graeco habetur paulo brevior potest reddi. imperite enim ejus auctor ad finem ejus bis utitur Propositione 22. Lib. 5. quasi ea non de quocunque magnitudinibus, sed tantum de tribus, quae totidem aliis, binae sumptae sunt proportionales, intelligenda sit.

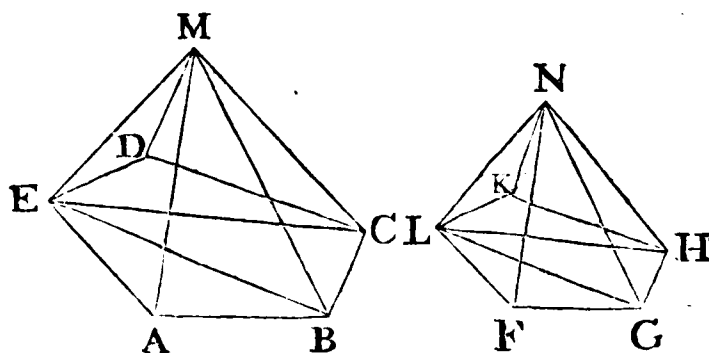
COR. PROP. VIII. LIB. XII.

Demonstratio hujus imperfecta est, etenim pyramides in quas eae dividuntur quae habent multangulas bases, non ostenduntur inter se similes, quod necessario fieri debuit, et in simili casu factum est in Prop. 12. hujus Libri. plena Demonstratio est ut sequitur,

Sint similes et similiter positae pyramides, quarum bases quidem polygonae ABCDE, FGHLK, vertices autem M, N puncta. habebit pyramis

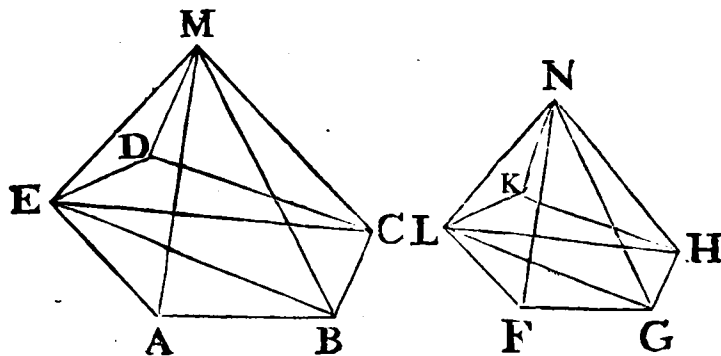
ramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplicatam rationem ejus quam habet latus AB ad homologum latus FG.

Dividantur enim polygona in triacula ABE, EBC, ECD, FGL, LGH, LHK, quae inter se similia erunt, singula singulis^a. quoniam a. 20. 6. vero pyramides sunt similes, erit^b triangulum EAM simile triangulo^b. 11. Def. 11. LFM, et triangulum ABM ipsi FGN. est igitur^c ME ad EA, ut NL^c. 4. 6. ad LF; ut vero AE ad EB, ita est FL ad LG, quia similia sunt EAB, LFG triacula; ergo ex aequali ut ME ad EB, ita est NL ad LG. similiter ostendetur EB ad BM, ut LG ad GN; rursus igitur, ex aequali, ut EM ad MB, ita est LN ad NG. triangulorum igitur EMB,



LNG proportionalia sunt latera, quare aequiangula^d sunt EMB, LNG d. 5. 6. triacula, et inter se similia. pyramides igitur quarum bases EAB, LFG triacula, et vertices M, N sunt inter se similes, ipsarum enim anguli solidi sunt aequales^e, et continentur similibus planis multitudine ae- e. B. 11. qualibus. eadem ratione pyramis EBCM similis ostendetur pyramidi LGHN, et pyramis ECDM ipsi LHK. et quoniam pyramis EABM similis est pyramidi LFGN, et triangulares habent bases, habebit pyramis EABM ad ipsam LFGN, triplicatam rationem ejus quam habet EB ad latus homologum LG; eadem ratione, et pyramis EBCM ad pyramidem LGHN habet triplicatam rationem ejus quam habet EB
ad

ad LG. ut igitur pyramis EABM ad pyramidem LFGN, ita pyramis EBCM ad pyramidem LGHN. eadem ratione, erit ut pyramis EBCM ad ipsam LGHN, ita pyramis ECDN ad LHKN pyramidem. et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur, ut pyramis EABM ad pyramidem



LFGN, ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. Pyramis autem EABM ad pyramidem LFGN triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad FG, igitur et tota pyramis habet ad totam pyramidem triplicatam rationem quam habet AB ad homologum latus FG. Q. E. D.

PROP. XI, et XII. LIB. XII.

Ordo literarum Alphabeti, contra morem Euclidis, non servatur in figuris harum Propositionum, quem igitur restituimus. unde et prima pars Prop. 12^{mae} iisdem verbis quibus prima pars Prop. 11^{mae}, ostendi potest. omissa igitur est demonstratio ejus partis, et ex Prop. 11^{ma} assumpta.

Demonstrationes Prop. 10. et 11. a diversis auctoribus factae videntur. Etenim in Prop. 10. pyramis super quadratum circulo inscriptum dimidium ostenditur ejus quae super quadratum circumscriptum erecta

erecta est, ope prismatum super easdem bases; in Propositione autem 11. id ipsum brevius ostenditur ope Prop. 6. hujus.

PROP. XIII. LIB. XII.

In hac Propositione communis sectio plani basibus cylindri paralleli, et ipsius cylindri circulus esse ponitur, visum igitur est hoc breviter ostendere; unde satis liquet planum illud cylindrum in duos alios dividere. idem autem et in Prop. 14^{ta} suppleri intelligendum est. Verbum etiam "utcumque" omissum prope finem Prop. 13. nunc additum est.

PROP. XV. LIB. XII.

"Et compleantur cylindri AX, EO." Cylindros aequae ac conos ut jam factos enuntiatio et expositio Propositionis exhibent. quare potius legendum "et sint coni quidem ALC, ENG; cylindri vero AX, EO."

Deest casus primus in secunda parte demonstrationis; quaedam etiam defunt in casu secundo ejusdem, ante verba "iisdem enim constructis" quae nunc addita sunt.

PROP. XVII. LIB. XII.

Verba in textu Graeco in Enuntiatione hujus Propositionis, viz. *ἔἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στρεφὸν πολυέδρον ἐγγράφαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν*, ita vertuntur a Commandino aliisque interpretibus "in majori solidum polyedrum describere quod minoris sphaerae superficiem non tangat." referunt scilicet verba *κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν* ad proxima verba *τῆς ἐλάσσονος σφαίρας*. minime autem ita verti debent, solidum enim polyedrum non solum superficiem minoris sphaerae sed et totam sphaeram minorem attingit et pervadit.

F f f

referenda

referenda igitur sunt ea verba ad τὸ στερεὸν πολυέδρον, et vertenda “in maiori sphaera solidum polyedrum describere cuius superficies sphaeram minorem non attingat;” ut sensus Propositionis necessario requirit.

Demonstratio autem Propositionis depravata est et mutila. Etenim quae facilia sunt explicite admodum ostenduntur, quae vero minus obvia, explicatione destituuntur; ut cum asseritur quadratum ex KB majus esse quam duplum quadrati ex BZ, in prima demonstratione; et angulum BZK obtusum esse in secunda; quae quidem demonstrari debuerunt. praeterea in prima demonstratione habetur “ducatur a puncto K ad BD perpendicularis KΩ” cum dicendum fuit “jungatur KV,” quae ostendenda fuit perpendicularis ad BD. manifestum enim est ex figura in Hervagii et Gregorii editionibus, et ex ipso textu, Editorem textus Graeci quem nunc habemus non vidisse perpendicularem a puncto K ad BD ductam necessario incidere in ipsum punctum V, incidit enim in punctum Ω diversum a V in eorum figuris; et in demonstratione ponuntur ea puncta tanquam diversa, nam diversis literis V et Ω notantur. Videtur autem Commandinum hoc vidisse, nam in ejus figura unum idemque punctum notatur duabus literis V, Ω: sed et ante Commandinum vir doctus Joannes Dee in Commentariis quae huic Propositioni subjunxit in versione Anglica Elementorum ab Henrico Billingsley facta, Londini A. D. 1570 impressa, errorem hunc explicite notat, et demonstrationem constructioni quae in textu Graeco habetur convenientem tradit, quā scilicet ostendit perpendicularem a puncto K ad BD ductam, necessario cadere in V.

Praeterea quadrilatera SOPT, TPRY et triangulum YRX minime ostenduntur non attingere sphaeram minorem, quod necessarium fuit demonstrare. solus Clavius, quantum scio, hoc observavit et Lemmate demonstravit, quod paulo aliter et brevius ostensum Propositioni huic praemissum est.

In

N O T A E.

411

In Corollario hujus Propositionis, positum est descriptum esse in altera sphaera solidum polyedrum simile ei quod in sphaera BCDE descriptum fuit. verum cum constructio qua in altera sphaera polyedrum describi potest non tradita sit, satius putavimus eam exhibere, et demonstrare similitudinem pyramidum in hoc polyedro, pyramidibus ejusdem ordinis in polyedro solido in sphaera BCDE.

Ex praecedentibus satis liquet quam ab imperitis Editoribus vitiata et mutilata fuerint Euclidis accuratissimi Geometrae Elementa. Opinio autem quam plerique viri docti habuerunt de Editione Graeca quae nunc extat, eam scilicet nihil aut parum differre a vero ipsius Euclidis opere, eos sine dubio fefellit, minusque accuratos in Editione hac examinanda reddidit; quo factum est ut a Theonis tempore haecenus, errores quosdam, satis licet crassos non perspexerint. Sperare igitur licet operam quam in eisdem corrigendis et libris hisce emaculandis posuimus, non futuram fore ingratam aequis rerum aestimatoribus, qui Demonstrationes legitimas ab iis quae non sunt discernere valent.

F I N I S.

VILLE DE LYON

Biblioth. du Palais des Arts

E R R A T A.

- Pag. 14. linea 5. post ABC; adde, et producantur AC, AD ad puncta E, F;
P. 322. l. ult. dele, superfici
P. 324. l. 2. DUABUS, lege, DUOBUS
P. 348. l. 4. a fine, Apogogicas, lege, Apagogicas.
P. 408. l. 3. ECDN, lege, ECDM