# EUCLIDIS

# ELEMENTORUM

## LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

## UNDECIMUS ET DUODECIMUS,

EX VERSIONE LATINA

FEDERICI COMMANDINI;

Sublatis iis quibus olim Libri hi a THEONE, aliisve, Vitiati sunt,
Et quibusdam EUCLIDIS Demonstrationibus Restitutis,

A ROBERTO SIMSON, M.D.
In Academia Glasguensi Matheseos Professore.

GLASGUAE,
IN AEDIBUS ACADEMICIS
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI
M.DCC.LVI.

GEORGIO,

WALLIAE PRINCIPI,

CUI MULTUM JAM DEBENT,

PLURIMUM OLIM DEBEBUNT,

BONAE ARTES ET SCIENTIAE,

HOSCE

ELEMENTORUM EUCLIDIS

PRAECIPUOS LIBROS,

BENEVOLO SUO PERMISSU,

EA, QUA PAR EST,

ANIMI GRATI VENERATIONE,

PRINCIPI JUVENTUTIS

D. D. C. Q.

ROBERTUS SIMSON.

# PRAEFATIO.

DE auctore Geometriae Elementorum, quae Euclidis nomine insigniuntur, variae admodum sunt Recentiorum sententiae, quae non paullum inter se discrepant; etenim Petrus Ramus tam Propositiones quam earundem Demonstrationes Theoni adscribit; alii Propositiones Euclidi, Demonstrationes vero Theoni tribuunt; alii denique, inter quos in primis nominandi sunt viri doctissimi Joannes Buteo et Henricus Savilius, Propositiones et Demonstrationes omnes Euclidis esse strenue contendunt. inter has verisimilior visa est Buteonis et Savilii sententia, quam proinde plerique post eos Geometrae amplexi sunt. Savilius, post adducta quaedam in hanc rem argumenta, ex illis concludit, "Theonis "fuisse partes, in Euclide paucissimis quidem in locis interpolando, ex"plicando, augendo, ultra hoc nullas." verum saepius perpendendo atque inter se comparando Demonstrationes quae in Euclide nunc extant, inveni Theonem, vel quicunque Editor fuit textus Graeci quem nunc habemus, multo plura, et quidem in pejus, mutasse quam praedicti viri docti, aliique existimant; addendo scilicet, demendo, aut sua miscendo; praesertim in Libro quinto et undecimo quos iste Editor non leviter vitiavit. Ex. gr. substituendo breviorem, at paralogisticam, vice legitimae Demonstrationis Propositionis 18$^{vae}$ Libri 5$^{ti}$; et ex hoc Libro, auferendo, inter alia, bonam Euclidis vel Eudoxi rationis compositae Definitionem, cujus loco posuit Definitionem absurdam, 5$^{tam}$ sc. Libri 6$^{ti}$, quâ neque Euclides, neque Archimedes, Apollonius aut ullus ante Theonem Geometra usus fuit, cujusque apud illos nullum vestigium invenitur. hanc autem Theonis Definitionem, quae sola multum negotii Tyronibus facessere solet, ex hisce Elementis nunc sublata est, atque ejus loco alia, quam sine dubio Euclides dederat, posita est

inter

inter Definitiones Libri 5ti, ex qua doctrina de Ratione Composita facilis redditur. Praeterea inter Definitiones Libri 11mi habetur haec quae 10ma est, "Aequales et similes solidae figurae sunt, quae similibus planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur;" est vero Propositio haec Theorema, non Definitio, quoniam aequalitas figurarum quarumcunque demonstranda est, non vero assumenda. quamvis igitur vera fuisset, demonstrari debuit haec Propositio; non autem semper vera est extra casum in quo figurarum anguli solidi non pluribus tribus angulis planis continentur, in aliis enim casibus, duae figurae solidae possunt contineri planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et tamen inter se inaequales esse, ut in Notis, hisce Elementis annexis, perspicue ostendetur. similiter, in Demonstratione Propositionis 26tae Libri 11mi, assumitur duos angulos solidos inter se aequales esse, si angulis planis multitudine et magnitudine aequalibus contineantur; sed neque hoc semper verum est extra casum in quo anguli solidi non pluribus tribus angulis planis continentur, cujus tamen casus nulla, quamvis omnino sit necessaria, in Elementis Demonstratio hactenus habetur. Ex Definitione autem 10ma pendent Propositiones 25ta et 28va Libri 11mi, et ex Propositione 25ta vel 26ta pendent octo aliae, viz. Propp. 27ma, 31ma, 32da, 33tia, 34ta, 36ta, 37ma, 40ma Libri ejusdem; et 12ma Libri 12mi pendet ex 8va ejusdem, eademque 8va, Corollarium 17mae, et Prop. 18va Libri 12mi pendent ex Definitione 9na Libri 11mi; quae minime proba est, quoniam possunt esse figurae solidae contentae planis similibus, multitudine aequalibus, quae tamen minime sunt similes. omnes igitur hae Propositiones infirmo hactenus innitebantur fundamento. Alia etiam sunt, non pauca, quae minime videntur Euclidis esse, et quae satis ostendunt Elementa ejus a Geometriae imperitis non leviter esse corrupta; et quidem quamvis haec non aeque crassa sint ac praedicta errata, sunt tamen neces-

sario

ſario corrigenda. quorum omnium ratio in Notis ad finem Libri reddetur.

Operae igitur pretium videbatur, neque ingratum fore putabam viris eruditis, praeſertim iis qui accuratis demonſtrationibus in Geometria delectantur, hoſce Elementorum Euclidis praecipuos Libros ab hiſce naevis vindicare, et ad priſtinam ἀκρίβειαν reſtituere, quantum ſc. ingenium valebat; praeſertim cum fundamentum ſint ſcientiae quae magnam in multis rebus utilitatem adfert, quin et aliis quibuſdam ſcientiis, et pleriſque omnibus pacis et belli artibus eſt neceſſaria, cujuſque ope veri inquiſitio et inveſtigatio, quantum ſinit mentis humanae imbecillitas, promovetur. atque hoc ſacere conati ſumus, tollendo falſa minimeque accurata quae pro veris et germanis accuratiſſimi Geometrae ſcriptis ſuppoſuerunt imperiti Editores, et Euclidi reſtituendo, a Theone aliiſve, ab eo ſurrepta, quae per multa ſaecula hactenus ſepulta jacuerunt.

# EUCLIDIS
# ELEMENTORUM
## LIBER PRIMUS.

### DEFINITIONES.

I.

PUNCTUM, ſeu ſignum, eſt, cujus nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Lineae extrema ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quae ex aequo ſuis interjicitur punctis.

V.

Superficies eſt id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei extrema ſunt lineae.

VII.

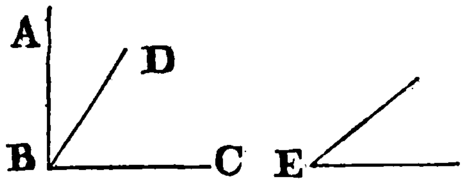
Plana ſuperficies eſt, in qua ſumptis utcunque duobus punctis, recta linea inter ea, tota jacet in illa ſuperficie.

VIII.

" Planus angulus est duarum linearum in plano sese tangentium, et non " in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio."

IX.

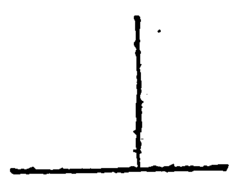
Angulus planus rectilineus est duarum rectarum sese tangentium, et non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.




' N. B. Si plures anguli ad unum punctum B existant, quilibet eorum ' designatur tribus alphabeti literis, quarum ea quae est ad verticem an- ' guli, hoc est ad punctum in quo rectae angulum continentes sibi mu- ' tuo occurrunt, in medio reliquarum ponitur; harum autem una est ' alicubi ad unam ex rectis illis, altera ad alteram. ita angulus qui rectis ' AB, CB continetur, designatur literis ABC, vel CBA; qui vero rectis ' AB, DB continetur, literis ABD, vel DBA; et qui rectis DB, CB ' continetur, literis DBC, vel CBD designatur. si autem unus tantum ' angulus ad punctum existat, designari potest literâ ad punctum illud ' posita, ut angulus ad E.'

X.

Cum vero recta linea super rectâ linea insistens, eos, qui deinceps sunt angulos, aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum; et quae insistit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam cui insistit.



XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.

XII.

Acutus autem, qui minor eſt recto.

XIII.

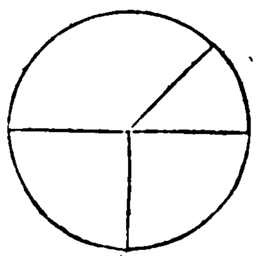
" Terminus eſt, quod alicujus eſt extremum."

XIV.

Figura eſt, quae aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus eſt figura plana, una linea contenta, quae circumferentia appellatur; ad quam ab uno puncto intra figuram exiſtente omnes rectae lineae pertingentes ſunt aequales.



XVI.

Hoc autem punctum, centrum circuli nuncupatur.

XVII.

Diameter circuli eſt recta quaedam linea per centrum ducta, et ex utraque parte circumferentiâ circuli terminata.

XVIII.

Semicirculus eſt figura quae continetur diametro et circumferentiâ circuli quae a diametro intercipitur.

XIX.

" Segmentum circuli eſt figura quae rectâ linea et circuli circumferen-
" tiâ continetur."

XX.

Rectilineae figurae ſunt, quae rectis continentur lineis.

XXI.

Trilaterae quidem, quae tribus.

XXII.

Quadrilaterae, quae quatuor.

XXIII.

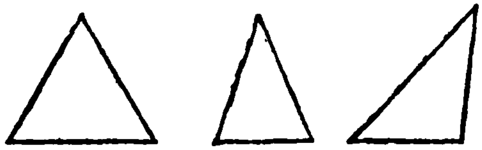
Multilaterae vero, quae pluribus quam quatuor rectis lineis continentur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum, aequilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet aequalia.

XXV.

Iſoſceles, quod duo tantum aequalia latera habet.



XXVI.

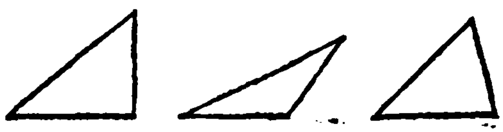
Scalenum vero, quod tria inaequalia habet latera.

XXVII.

Ad haec, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.



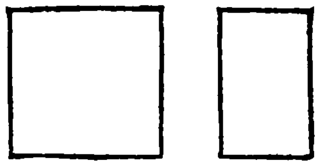
Acutangulum

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum, quadratum eſt, quod et aequilaterum eſt et rectangulum.

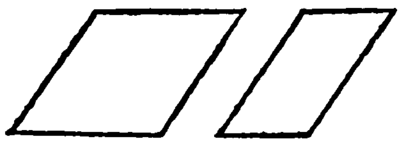


XXXI.

Altera parte longior figura eſt, quae rectangula quidem aequilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quae aequilatera quidem, ſed rectangula non eſt.



XXXIII.

Rhomboides, quae oppoſita latera inter ſe aequalia habens, neque aequilatera eſt, neque rectangula.

XXXIV.

Praeter has autem reliquae quadrilaterae figurae trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelae, ſeu aequidiſtantes rectae lineae ſunt, quae cum in eodem ſint plano, et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

POSTU-

## POSTULATA.

I.

POSTULETUR, a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Et rectam lineam terminatam, in continuum et directum producere.

III.

Et quovis centro et intervallo circulum describere.

## AXIOMATA.

I.

QUAE eidem aequalia, et inter se sunt aequalia.

II.

Et si aequalibus aequalia adjiciantur, tota sunt aequalia.

III.

Et si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.

IV.

Et si inaequalibus aequalia adjiciantur, tota sunt inaequalia.

V.

Et si ab inaequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.

VI.

Et quae ejusdem sunt duplicia, inter se sunt aequalia.

VII.

Et quae ejusdem sunt dimidia, inter se sunt aequalia.

VIII.

Et quae sibi mutuo congruunt, inter se sunt aequalia.

IX.

Totum eſt ſua parte majus.

X.

Duae rectae lineae ſpatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter ſe aequales ſunt.

XII.

" Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores et ad eaſdem partes angulos duobus rectis minores fecerit, duae illae rectae lineae in infinitum productae, inter ſe convenient ex ea parte ad quam ſunt anguli duobus rectis minores. Vid. notas ad Prop. 29. Lib. I."

PRO-

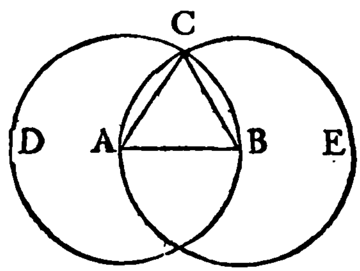
## PROPOSITIO I. PROBLEMA.

**SUPER data rectâ lineâ terminatâ triangulum aequilaterum constituere.**

Sit data recta linea terminata AB, oportet vero super rectâ AB triangulum aequilaterum constituere.

a. 3. Postulatum. Centro quidem A intervallo autem AB circulus describatur [a] BCD; et rursus centro B, intervallo BA describatur circulus ACE; et a puncto C, in quo circuli se invicem secant ad puncta A, B ducantur [b] rectae CA, CB. erit ABC triangulum aequilaterum.

b. 2. Post.




Quoniam igitur punctum A centrum est circuli BCD, erit AC ipsi AB aequalis [c]; rursus quoniam punctum B centrum est circuli CAE, erit BC aequalis rectae BA. ostensa autem est recta CA aequalis ipsi AB; utraque igitur ipsarum CA, CB, ipsi AB est aequalis. quae autem eidem sunt aequalia, et inter se aequalia sunt [d]; recta igitur CA ipsi CB est aequalis. tres igitur CA, AB, BC inter se sunt aequales. aequilaterum propterea est triangulum ABC, et constitutum est super datâ recta linea terminata AB. Quod erat faciendum.

c. 15. Definit.

d. 1. Axioma.

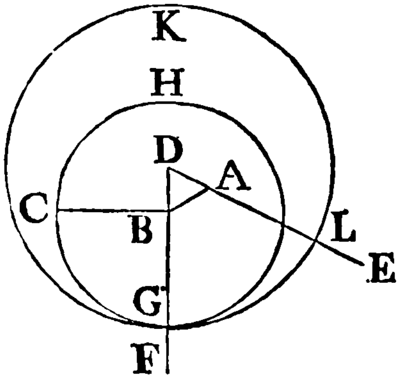
## PROP. II. PROB.

**AD datum punctum, datae rectae lineae aequalem rectam lineam ponere.**

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC; oportet ad punctum A, rectae BC aequalem rectam lineam ponere.

Ducatur

Ducatur a punſto A ad B reſta linea AB[a], et ſuper ipsâ conſtitua- a. Poſt. 1.
tur triangulum aequilaterum DAB[b]; et producantur in direſtum ipſis b. 1. 1.
DA, DB reſtae lineae AE, BF[c], centroque B, intervallo autem BC, c. Poſt. 2.
circulus CGH deſcribatur[d]. et rurſus centro D, intervallo DG deſcribatur circulus GKL. d. Poſt. 3.




Quoniam igitur punſtum B centrum eſt CGH circuli, erit BC ipſi BG aequalis[e]. et rurſus quoniam D centrum eſt circuli GKL, erit DL aequalis DG, quarum DA eſt aequalis DB; reliqua igitur AL reliquae BG eſt aequalis[f]. oſtenſa autem eſt BC aequalis ipſi BG. quare utraque ipſarum AL, BC eſt aequalis reſtae BG. quae autem eidem aequalia, et inter ſe ſunt aequalia. ergo et reſta AL aequalis eſt ipſi BC. Ad datum igitur punſtum A datae reſtae lineae BC aequalis poſita eſt AL. Quod facere oportebat.

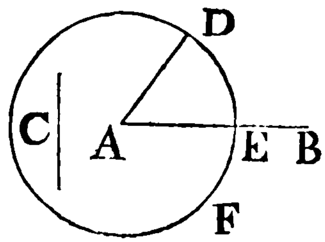
e. Def. 15.

f. Ax. 3.

## PROP. III. PROB.

**DATIS duabus reſtis lineis inaequalibus, a majore minori aequalem abſcindere.**

Sint duae datae reſtae inaequales AB et C, quarum major ſit AB; oportet a majore AB minori C aequalem reſtam lineam abſcindere.




Ponatur ad punſtum A ipſi C aequalis reſta linea AD[a]; et centro quidem A, intervallo autem AD deſcribatur circulus DEF[b]. et quoniam A centrum eſt DEF circuli,

a. 2. 1.

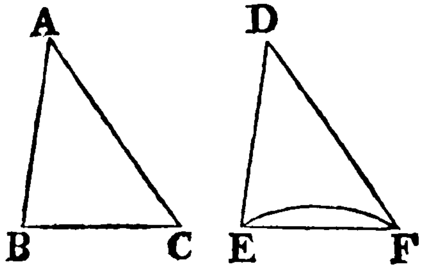
b. Poſt. 3.

circuli, erit AE ipſi AD aequalis. ſed et recta C aequalis eſt ipſi AD; utraque igitur ipſarum AE, C ipſi AD aequalis erit. quare et recta AE
c. Ax. 1. ipſi C eſt aequalis[c]. Duabus igitur datis rectis lineis inaequalibus AB et C, a majore AB minori C aequalis abſciſſa eſt. Quod erat faciendum.

## PROP. IV. THEOREMA.

**SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo aequalem, qui aequalibus rectis lineis continetur: et baſim baſi aequalem habebunt; et triangulum triangulo aequale erit; et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur.**

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE aequale, latus vero AC ipſi DF; et angulum BAC angulo EDF aequalem. dico, et baſim BC baſi EF aequalem eſſe, et triangulum ABC aequale triangulo DEF; et reliquos angulos reliquis angulis aequales, alterum alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur; nempe angulum ABC angulo DEF, et angulum ACB angulo DFE.




Triangulo enim ABC applicato ipſi DEF, et puncto quidem A poſito in D, recta vero linea AB in ipſa DE; congruet et punctum B puncto E, quod AB ipſi DE ſit aequalis. congruente autem AB ipſi DE, congruet et AC recta linea rectae lineae DF, quia BAC angulus aequalis eſt angulo EDF. quare et punctum C congruet puncto F, quia recta AC eſt aequalis rectae lineae DF. ſed

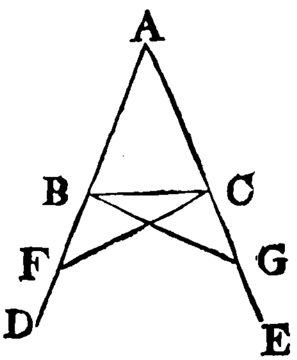
ſed et punctum B congruebat puncto E; quare baſis BC baſi EF congruet. Nam ſi puncto quidem B congruente ipſi E, C vero ipſi F, baſis BC baſi EF non congruit; duae rectae lineae ſpatium comprehendent, quod fieri non poteſt [a]. Congruet igitur BC baſis baſi EF, et ipſi aequalis erit. Quare et totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, et ipſi erit aequale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipſis aequales erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF, et angulus ACB angulo DFE. ſi igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo aequalem, qui aequalibus rectis lineis continetur: et baſim baſi aequalem habebunt; et triangulum triangulo aequale erit; et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. Quod erat demonſtrandum.

a. Ax. 10.

## PROP. V. THEOR.

**ISOSCELIUM triangulorum qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt aequales; et, productis aequalibus rectis lineis, anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe aequales erunt.**

Sit iſoſceles triangulum ABC, habens latus AB lateri AC aequale, et producantur in directum ipſis AB, AC rectae lineae BD, CE. dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE aequalem eſſe.

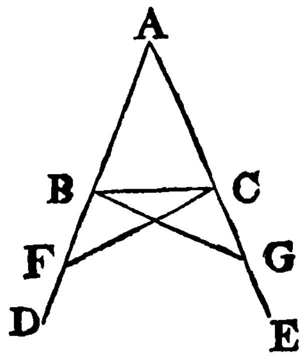



Sumatur enim in recta BD punctum quodvis F; atque a majore AE minori AF aequalis auferatur AG [a], et jungantur FC, GB. quoniam igitur AF eſt aequalis AG, AB vero ipſi AC; duae FA, AC duabus GA, AB aequa-

a. 3. 1.

 les

les ſunt, altera alteri; et angulum FAG communem continent; ba-
b. 4. 1. ſis igitur FC baſi GB eſt aequalis [b], et triangulum AFC aequale triangulo AGB; et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur; videlicet angulus quidem ACF aequalis angulo ABG, angulus vero AFC angulo AGB. et quoniam tota AF toti AG eſt aequalis, quarum AB eſt aequalis ipſi AC; erit et reliqua BF reliquae CG
c. Ax. 3. aequalis [c]. oſtenſa eſt autem FC aequalis GB; duae igitur BF, FC duabus CG, GB aequales ſunt, altera alteri, et angulus BFC aequalis angulo CGB; eſtque baſis ipſorum BC communis; erit igitur et triangulum BFC aequale [b] triangulo CGB, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. angulus igitur FBC eſt aequalis angulo GCB, et angulus BCF angulo CBG. itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF aequalis oſtenſus eſt, quorum angulus CBG eſt aequalis ipſi BCF; erit reliquus ABC reliquo ACB aequalis, et ſunt ad baſim trianguli ABC. oſtenſus autem eſt et FBC angulus aequalis angulo GCB, qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum &c. Q. E. D.




Cor. Hinc omne triangulum aequilaterum eſt quoque aequiangulum.

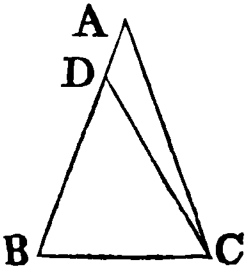
## PROP. VI. THEOR.

**SI trianguli duo anguli inter ſe ſint aequales, et aequales angulos ſubtendentia latera inter ſe aequalia erunt.**

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB aequalem; dico et AB latus lateri AC aequale eſſe.

Si

Si enim inaequalis eſt recta AB ipſi AC, altera ipſarum eſt major. ſit major AB; atque a majori AB minori AC aequalis auferatur DB[a], et DC jungatur. quoniam igitur DB eſt aequalis ipſi AC, communis autem BC, erunt duae DB, BC duabus AC, CB aequales, altera alteri, et angulus DBC angulo ACB eſt aequalis; baſis igitur DC baſi AB aequalis eſt, et triangulum DBC aequale [b] triangulo ACB, minus majori; quod eſt abſurdum. non igitur inaequalis eſt AB ipſi AC; ergo aequalis erit. ſi igitur trianguli &c. Q. E. D.




a. 3. 1.

b. 4. 1.

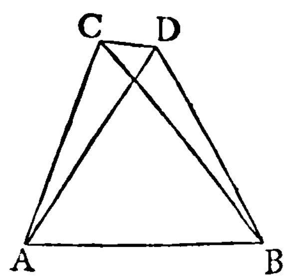
Cor. Hinc omne triangulum aequiangulum eſt quoque aequilaterum.

## PROP. VII. THEOR.

**SUPER eadem baſi, et ad eaſdem ejus partes, duo triangula non conſtituentur, quae habent et latera quae ad alterum baſis terminum, et ea quae ad reliquum terminum ducta ſunt, inter ſe aequalia.**

Si enim fieri poteſt, ſuper eadem baſi AB, et ad eaſdem ejus partes conſtituantur duo triangula ACB, ADB quae habent et latera CA, DA inter ſe aequalia, et latera CB, DB.

Jungatur CD; vel igitur vertex neutrius trianguli eſt intra reliquum triangulum, vel vertex alterius eſt intra reliquum. Primo ſit neutrius trianguli vertex intra reliquum; et quoniam AC eſt aequalis ipſi AD, erit et angulus ACD angulo ADC aequalis[a]. eſt autem angulus ACD major angulo BCD, major igitur eſt ADC angulus angulo BCD. quare angulus BDC angulo BCD

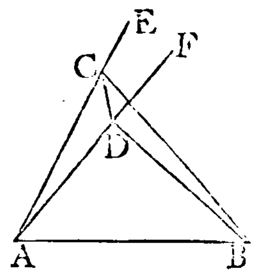



a. 5. 1.

multo

multo major erit. rursus quoniam CB est aequalis ipsi DB, et angu-
a. 5. 1. lus BDC aequalis [a] erit angulo BCD; ostensus autem est ipso major; quod fieri non potest.

Sed sit alterutrius trianguli vertex, puta D, intra reliquum triangulum ACB; quoniam igitur AC est aequalis ipsi AD, erunt anguli ECD, FDC sub basi inter se aequales[a]; est autem angulus ECD major angulo BCD, quare FDC angulus major est angulo BCD; multo igitur angulus BDC major est angulo BCD. rursus quoniam CB aequalis est ipsi DB, erit angulus BDC aequalis angulo BCD [a];




ostensus autem est BDC angulus eodem BCD major. quod fieri non potest. casus autem in quo vertex unius trianguli cadit in latus alterutrum reliqui demonstratione non eget.

Non igitur super eâdem basi, et ad easdem ejus partes constituentur duo triangula, quae habent et latera quae ad alterum basis terminum, et ea quae ad reliquum terminum ducta sunt, inter se aequalia. Q. E. D.

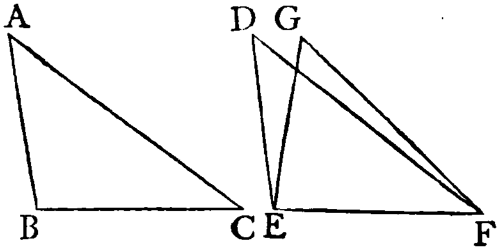
## PROP. VIII. THEOR.

**SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, habeant autem et basim basi aequalem; angulum quoque, qui aequalibus lateribus continetur, angulo aequalem habebunt.**

Sint duo triangula ABC, DEF quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, AB quidem aequale DE, AC vero ipsi DF; habeant autem et basim BC basi EF aequalem. dico angulum quoque BAC angulo EDF aequalem esse.

Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, et puncto quidem

dem B posito in E, rectâ vero lineâ BC in EF; congruet et C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est aequalis. itaque congruente BC ipsi EF, congruent et BA, AC ipsis ED, DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit, latera autem BA, AC lateribus ED, DF non congruunt, sed situm mutant, ut EG, GF; constituentur super eadem basi, et ad easdem ejus partes, duo triangula, quae habent et latera quae ad alterum basis terminum, et ea quae ad reliquum ducta sunt, inter se aequalia. non constituuntur autem [a]. a. 7. 1. non igitur si basis BC congruit basi EF, non congruent et BA, AC latera lateribus ED, DF. congruent igitur. quare et angulus BAC angulo EDF congruet, et ipsi erit aequalis [b]. si igitur duo triangula &c. b. Ax. 8. Q. E. D.



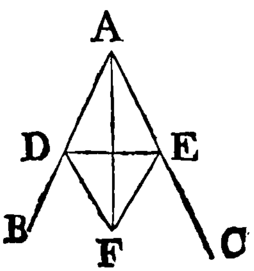

### PROP. IX. PROB.

**DATUM angulum rectilineum bifariam secare.**

Sit datus angulus rectilineus BAC; itaque oportet ipsum bifariam secare.

Sumatur in AB quodvis punctum D, et a recta linea AC ipsi AD aequalis auferatur [a] AE; junctaque DE constituatur super eâ triangulum aequilaterum [b] DEF, et AF jungatur. dico angulum BAC a recta linea AF bifariam secari.

a. 3. 1.
b. 1. 1.




Quoniam enim AD est aequalis ipsi AE, communis autem AF; duae DA, AF duabus EA, AF aequales sunt, altera alteri; et basis

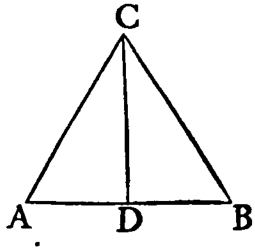
DF eſt aequalis baſi EF; angulus igitur DAF angulo EAF eſt aequa-
c. 8. 1. lis[c]. quare datus angulus rectilineus BAC a recta linea AF bifariam ſectus eſt. Q. E. F.

### PROP. X. PROB.

**DATAM rectam lineam terminatam bifariam ſecare.**

Sit data recta linea terminata AB; oportet ipſam AB bifariam ſecare.

a. 1. 1. Conſtituatur ſuper eâ triangulum aequilaterum [a] ABC, et ſecetur
b. 9. 1. ACB angulus bifariam [b] rectâ linea CD. dico AB rectam lineam in puncto D bifariam ſecari.




Quoniam enim AC eſt aequalis CB, communis autem CD; duae AC, CD duabus BC, CD aequales ſunt, altera alteri; et angulus ACD eſt aequalis angulo BCD; baſis igitur AD baſi DB
c. 4. 1. eſt aequalis[c]. recta igitur linea terminata AB bifariam ſecta eſt in puncto D. Q. E. F.

### PROP. XI. PROB.

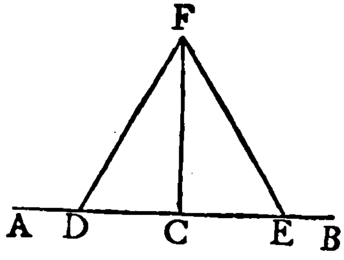
**DATAE rectae lineae, a puncto in ipſa dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.**

Sit data recta linea AB, et datum in ipſa punctum C; oportet a puncto C ipſi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.

a. 3. 1. Sumatur in AC punctum quodvis D, ipſique CD aequalis ponatur [a]
b. 1. 1. CE, et ſuper DE conſtituatur triangulum aequilaterum [b] DFE, et FC jungatur. dico datae rectae lineae AB a puncto C in ipſa dato, ad rectos angulos ductam eſſe FC.

Quoniam

Quoniam enim DC eſt aequalis CE, et FC communis; duae DC, CF duabus EC, CF ſunt aequales, altera alteri; et baſis DF eſt aequalis baſi FE; angulus igitur DCF angulo ECF eſt aequalis[c], et ſunt deinceps. Quando autem recta linea ſuper rectâ lineâ inſiſtens, eos qui deinceps ſunt angulos aequales inter ſe fecerit, rectus [d] eſt uterque aequalium angulorum; ergo uterque ipſorum DCF, FCE eſt rectus. Datae igitur rectae lineae AB, a puncto in ipſa dato C, ad rectos angulos ducta eſt recta linea FC. Q. E. F.

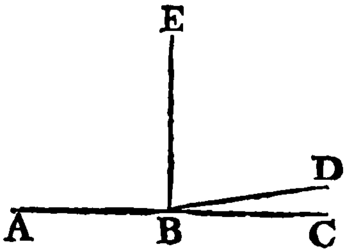



c. 8. 1.

d. 10. Def. 1.

Cor. Hinc oſtendi poteſt duas rectas lineas non habere ſegmentum commune.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt, habeant duae rectae lineae ABC, ABD ſegmentum commune AB. a puncto B ducatur BE ad rectos angulos ipſi AB; quoniam igitur recta linea eſt ABC, erit [d] angulus CBE aequalis angulo EBA; ſimiliter quoniam recta linea eſt ABD, erit angulus DBE angulo EBA aequalis. eſt igitur angulus DBE ipſi CBE angulo aequalis, minor majori, quod fieri non poteſt. igitur duae rectae lineae non poſſunt habere ſegmentum commune.

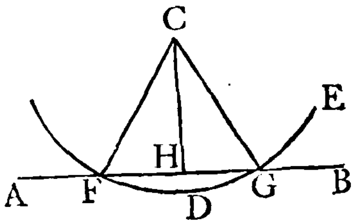



### PROP. XII. PROB.

SUPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero punctum C, quod in ea non eſt. oportet ſuper datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sumatur enim ad alteras partes ipſius AB rectae lineae, punctum quodvis D, et centro quidem C, intervallo autem CD circulus deſcriba-
a. Poſt. 3. tur [a] EGF, quae rectae AB in F, G, occurrat; et FG in H bifariam
b. 10. 1. ſecetur [b], junganturque CF, CH, CG. dico ſuper datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem CH ductam eſſe.




Quoniam enim aequalis eſt FH ipſi HG, communis autem HC, duae FH, HC, duabus GH, HC ſunt aequales, altera alteri; et baſis CF eſt aequalis
c. Def. 15. baſi CG [c]; angulus igitur CHF angulo CHG eſt aequalis [d], et ſunt de-
d. 8. 1. inceps. quando autem recta linea ſuper recta linea inſiſtens, eos qui deinceps ſunt angulos, aequales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque aequalium angulorum; et quae inſiſtit recta linea perpendicularis appellatur ad eam cui inſiſtit. ſuper datam igitur rectam lineam infinitam AB a dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularis ducta eſt CH. Q. E. F.

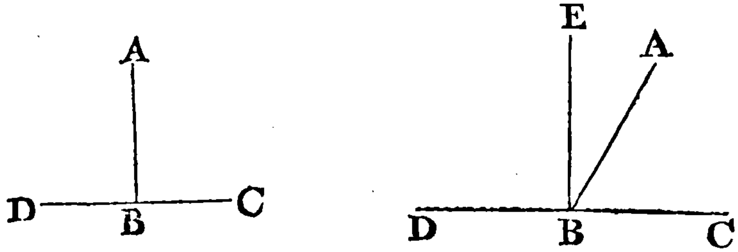
## PROP. XIII. THEOR.

**CUM recta linea ſuper rectam inſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis aequales efficiet.**

Recta enim linea quaedam AB ſuper rectam CD inſiſtens, angulos faciat CBA, ABD. dico CBA, ABD angulos vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis aequales.

a. Def. 10. Si enim angulus CBA eſt aequalis ipſi ABD, duo recti ſunt [a]. ſin minus,

minus, ducatur a puncto B ipsi CD ad rectos angulos [b] BE. anguli igi- b. 11. 1.
tur CBE, EBD sunt duo recti [a]. et quoniam CBE duobus CBA, ABE a. Def. 10.
est aequalis, communis apponatur EBD; ergo anguli CBE, EBD tribus
angulis CBA, ABE, EBD sunt aequales [c]. rursus quoniam DBA an- c. Ax. 2.
gulus est aequalis duobus DBE, EBA, communis apponatur ABC; an-



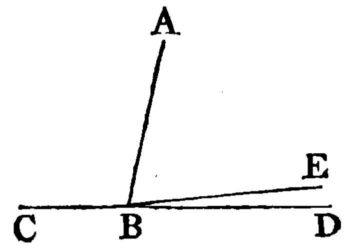

guli igitur DBA, ABC tribus DBE, EBA, ABC aequales sunt. ostensi
autem sunt anguli CBE, EBD iisdem tribus aequales; quae vero eidem
sunt aequalia, et inter se aequalia sunt [d]; igitur et anguli CBE, EBD ip- d. Ax. 1.
sis DBA, ABC sunt aequales. sed CBE, EBD sunt duo recti; igitur
DBA, ABC duobus rectis aequales sunt. ergo cum recta linea &c.
Q. E. D.

## PROP. XIV. THEOR.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duae rectae lineae non ad easdem partes positae angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis aequales fecerint; ipsae rectae lineae in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duae rectae lineae BC, BD non ad easdem partes positae angulos, qui deinceps sunt, ABC, ABD duobus rectis aequales faciant. dico BD ipsi CB in directum esse.

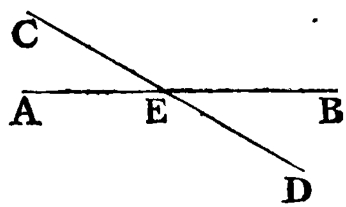
Si enim BD non eſt in directum ipſi CB, ſit ipſi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB ſuper recta CBE inſiſtit, anguli
a. 13. 1. ABC, ABE duobus rectis ſunt aequales[a]. ſunt autem et anguli ABC, ABD aequales duobus rectis. anguli igitur CBA, ABE ipſis CBA, ABD aequales erunt. communis auferatur ABC; reliquus igitur ABE
b. 3. Ax. reliquo ABD eſt aequalis[b], minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur BE eſt in directum ipſi BC. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe praeter BD. in directum igitur eſt CB ipſi BD. ſi igitur ad aliquam rectam lineam &c. Q. E. D.




## PROP. XV. THEOR.

**SI duae rectae lineae ſe invicem ſecuerint, angulos qui ad verticem ſunt, inter ſe aequales efficient.**

Duae enim rectae lineae AB, CD ſe invicem ſecent in puncto E. dico angulum quidem AEC angulo DEB, angulum vero CEB angulo AED aequalem eſſe.




Quoniam enim recta linea AE ſuper recta CD inſiſtens angulos facit CEA, AED; erunt CEA, AED duobus rectis
a. 13. 1. aequales[a]. rurſus quoniam recta linea DE ſuper recta AB inſiſtens facit angulos AED, DEB, erunt AED, DEB anguli aequales duobus rectis[a]. oſtenſi autem ſunt anguli quoque CEA, AED duobus rectis aequales; anguli igitur CEA, AED angulis AED, DEB aequales ſunt. communis auferatur AED; reliquus igitur CEA reliquo

reliquo BED eſt aequalis. ſimili ratione oſtendetur et angulos CEB, AED aequales eſſe. ſi igitur duae rectae lineae &c. Q. E. D.

Cor. 1. Ex hoc manifeſte conſtat duas rectas lineas ſe invicem ſecantes, facere angulos ad ſectionem quatuor rectis aequales.

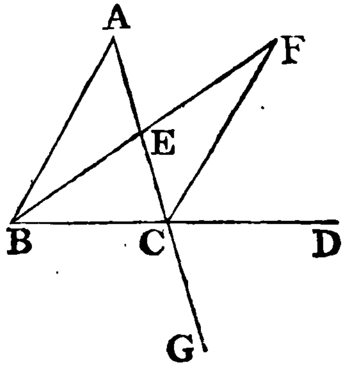
Cor. 2. Et propterea, omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt angulos quatuor rectis aequales.

## PROP. XVI. THEOR.

**OMNIS trianguli, uno latere producto, exterior angulus utrovis interiore et oppoſito eſt major.**

Sit triangulum ABC, et unum ipſius latus BC ad D producatur. dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore et oppoſito, videlicet CBA, BAC majorem eſſe.

Secetur AC bifariam in E[a], et juncta BE producatur ad F, ponaturque ipſi BE aequalis EF; jungatur etiam FC, et AC ad G producatur. a. 10. 1.



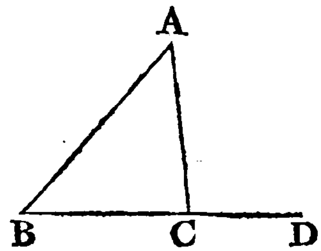

Quoniam igitur AE quidem eſt aequalis EC, BE vero ipſi EF, duae AE, EB duabus CE, EF aequales ſunt, altera alteri; et angulus AEB, angulo CEF eſt aequalis[b], ad verticem enim ſunt. b. 15. 1. Baſis igitur AB aequalis eſt baſi CF, et AEB triangulum triangulo CEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales[c], alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. c. 4. 1. angulus igitur BAE eſt aequalis angulo ECF. major autem eſt angulus ECD ipſo ECF; quare major eſt angulus ACD angulo BAE. ſimiliter rectâ lineâ

neâ BC bifariam sectâ, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD
d. 15. 1. angulus [d] angulo ABC major. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

## PROP. XVII. THEOR.

**OMNIS trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.**

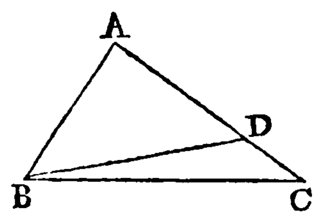
Sit triangulum ABC; dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse.



Producatur enim BC ad D; et quoniam trianguli ABC exterior angulus est ACD, erit ACD major interiore et oppo-
a. 16. 1. sito ABC [a]; communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB angulis ABC, ACB
b. 13. 1. majores sunt. sed ACD, ACB sunt aequales duobus rectis [b]; anguli igitur ABC, BCA duobus rectis sunt minores. similiter ostendemus angulos quoque BAC, ACB, itemque CAB, ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

## PROP. XVIII. THEOR.

**OMNIS trianguli majus latus majorem angulum subtendit.**



Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus; dico et ABC angulum angulo BCA majorem esse.

Quoniam enim AC major est quam AB,
a. 3. 1. ponatur ipsi AB aequalis AD [a], et BD

jungatur.

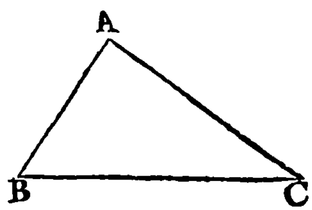
jungatur. et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit ADB major interiore et opposito DCB[b]. aequalis autem est ADB ipsi b. 16. 1. ABD, quod et latus AB lateri AD sit aequale[c]; major igitur est et c. 5. 1. ABD angulus angulo ACB; quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

## PROP. XIX. THEOR.

**OMNIS trianguli major angulus a majore latere subtenditur.**

Sit triangulum ABC habens ABC angulum majorem angulo BCA. dico et latus AC latere AB majus esse.

Si enim non est majus, vel AC est aequale ipsi AB, vel ipso minus. aequale autem non est, nam et angulus ABC angulo ACB aequalis esset[a]; non est autem; a. 5. 1. non igitur AC ipsi AB est aequale. sed neque minus est latus AC ipso AB; esset enim et angulus ABC angulo ACB minor[b]; b. 18. 1. atqui non est; non igitur AC latus minus est ipso AB. ostensum autem est neque aequale esse; est igitur AC ipso AB majus. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.




## PROP. XX. THEOR.

**OMNIS trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.**

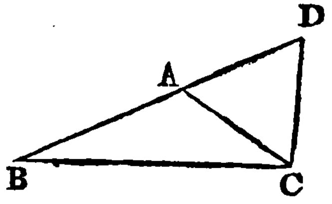
Sit enim triangulum ABC; dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta; videlicet latera quidem BA,

AC

AC majora latere BC; latera vero AB, BC majora latere AC; et latera BC, CA majora ipſo AB.

Producatur enim BA ad punctum D, ponaturque ipſi CA aequalis
a. 3. 1. AD[a], et DC jungatur.

Quoniam igitur DA eſt aequalis AC, erit et angulus ADC angulo
b. 5. 1. ACD aequalis[b]. ſed BCD angulus major eſt angulo ACD; angulus igitur BCD angulo ADC eſt major. et quoniam triangulum eſt DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC, majorem autem angu-
c. 19. 1. lum majus latus ſubtendit[c], erit latus DB latere BC majus. eſt autem DB aequale ipſis BA, AC; majora igitur ſunt latera BA, AC ipſo BC. ſimiliter oſtendemus, et latera quidem AB, BC majora eſſe latere CA; latera vero BC, CA ipſo AB majora. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.



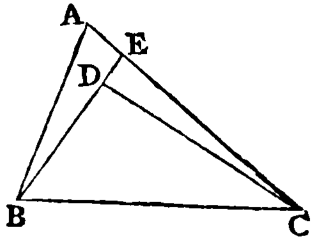

## PROP. XXI. THEOR.

SI a terminis unius lateris trianguli duae rectae lineae intra conſtituantur, hae reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC a terminis B, C duae rectae lineae intra conſtituantur BD, DC. dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem eſſe, continere vero angulum BDC majorem angulo BAC.

Producatur enim BD ad E; et quoniam omnis trianguli duo latera
a. 20. 1. reliquo ſunt majora[a], erunt trianguli ABE duo latera BA, AE, majora latere BE. communis apponatur EC; ſunt igitur latera BA, AC ipſis

ipſis BE, EC majora[b]. rurſus quoniam CED trianguli duo latera CE, ED ſunt majora latere CD, communis apponatur DB; ſunt igitur CE, EB majora ipſis CD, DB[b]. ſed oſtenſum eſt BA, AC majora eſſe BE, EC; multo igitur BA, AC, ipſis BD, DC majora ſunt. b. Ax. 4.

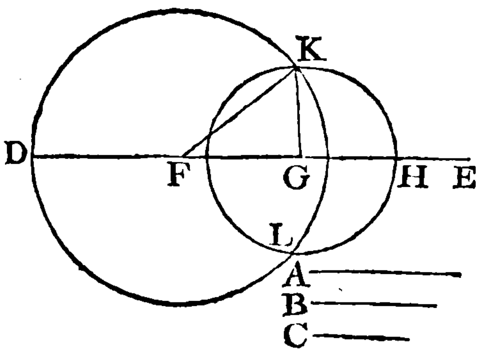



Rurſus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et oppoſito eſt major[c], erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipſo CED. eadem ratione et trianguli ABE exterior angulus CEB ipſo BAC eſt major. ſed angulus BDC oſtenſus eſt major angulo CEB; multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. ſi igitur a terminis unius lateris &c. Q. E. D. c. 16. 1.

### PROP. XXII. PROB.

**EX tribus rectis lineis, quae tribus rectis lineis datis aequales ſunt, triangulum conſtituere. oportet autem duas reliqua majores eſſe, quomodocunque ſumptas[a].** a. 20. 1.

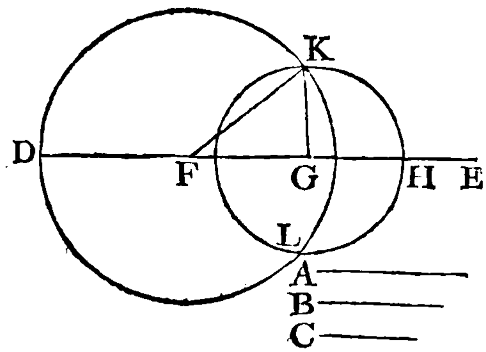
Sint tres datae rectae lineae A, B, C, quarum duae reliquâ majores ſunt, quomodocunque ſumptae, ut ſcilicet A, B, quidem ſint majores quam C; A, C, vero majores quam B; et praeterea B, C majores quam A. itaque oportet ex rectis lineis aequalibus ipſis A, B, C, triangulum conſtituere.




Exponatur aliqua recta

D linea

linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi
a. 3. 1. quidem A aequalis [a] DF, ipsi vero B aequalis FG, et ipsi C aequalis
b. Post. 3. GH; et centro F, intervallo autem FD circulus describatur [b] DKL.
rursusque centro G et intervallo GH alius circulus KLH describatur, et jungantur KF, KG. dico ex tribus rectis lineis aequalibus ipsis A, B, C, triangulum KFG constitutum esse.




Quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli,
c. Def. 15. erit FD aequalis FK [c]; sed FD est aequalis rectae lineae A; est igitur FK aequalis ipsi A. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH aequalis GK [c]; sed GH est aequalis ipsi C; igitur et GK ipsi C aequalis erit. est autem et FG aequalis B; tres igitur rectae lineae KF, FG, GK tribus A, B, C aequales sunt. ex tribus igitur rectis lineis KF, FG, GK quae sunt aequales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est KFG. Q. E. F.

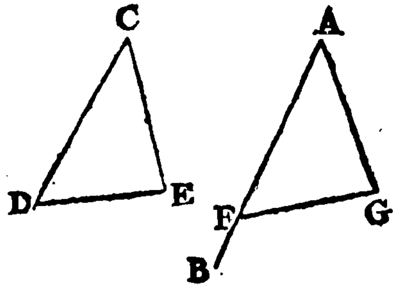
## PROP. XXIII. PROB.

AD datam rectam lineam, et ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo aequalem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A, et datus angulus rectilineus DCE; oportet ad datam rectam lineam AB, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE aequalem angulum rectilineum constituere.

Sumantur

Sumantur in utraque ipsarum CD, CE quaevis puncta D, E, jungaturque DE; et ex tribus rectis lineis, quae aequales sint tribus CD, DE, EC triangulum constituatur[a] AFG, ita ut CD sit aequalis AF, et CE ipsi AG, et DE ipsi FG. Quoniam igitur duae DC, CE duabus FA, AG aequales sunt, altera alteri, et basis DE est aequalis basi FG; angulus DCE aequalis erit angulo FAG[b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE aequalis angulus rectilineus constitutus est FAG. Q. E. F.



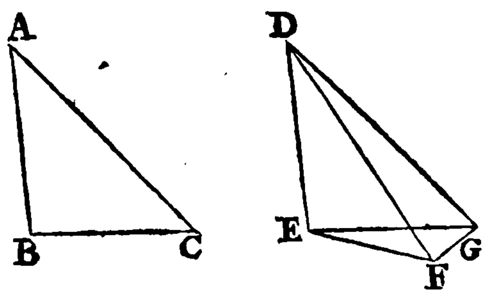

a. 22. 1.

b. 8. 1.

## PROP. XXIV. THEOR.

**SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui aequalibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt.**

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB aequale lateri DE, latus vero AC aequale DF; at angulus BAC angulo EDF sit major. dico, basim BC basi EF majorem esse.

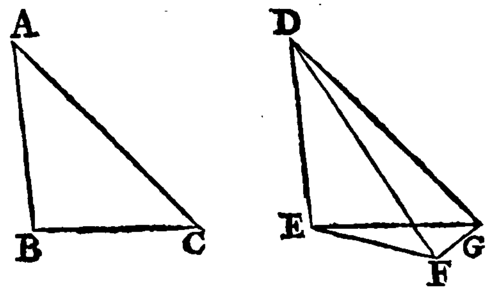



Rectarum enim DE, DF sit DE ea quae non major est altera DF, et constituatur ad rectam lineam DE, et ad punctum in ea D,

 angulo

a. 23. 1. angulo BAC aequalis angulus EDG[a]; ponaturque alterutri ipsarum
b. 3. 1. AC, DF aequalis DG[b], et EG, GF jungantur.

Itaque quoniam AB quidem est aequalis DE, AC vero ipsi DG,
duae BA, AC duabus ED, DG aequales sunt, altera alteri; et angu-
lus BAC est aequalis angulo EDG;
basis igitur BC basi EG est ae-
c. 4. 1. qualis[c]. rursus quoniam aequalis
est DG ipsi DF, est angulus DFG
d. 5. 1. angulo DGF aequalis[d]; major au-
tem est angulus DGF angulo
EGF, erit itaque DFG angulus
angulo EGF major; multo igitur major est EFG angulus ipso EGF.
et quoniam triangulum est EFG angulum EFG majorem habens an-
e. 19. 1. gulo EGF, majori autem angulo latus majus subtenditur[e]; erit latus
EG latere EF majus. sed EG latus est aequale lateri BC; ergo et BC
ipso EF majus erit. si igitur duo triangula &c. Q. E. D.



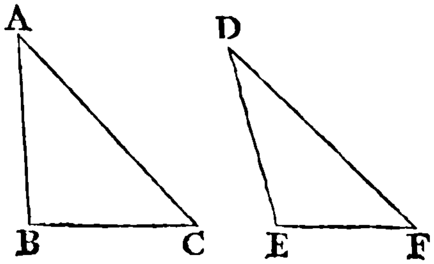

## PROP. XXV. THEOR.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui aequalibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB aequale lateri DE, et latus AC lateri DF; basis autem BC basi EF sit major. dico, et angulum BAC angulo EDF majorem esse.

Si enim non est major, vel aequalis est vel minor. aequalis autem non est angulus BAC angulo EDF, esset enim et basis BC basi EF aequalis[a].

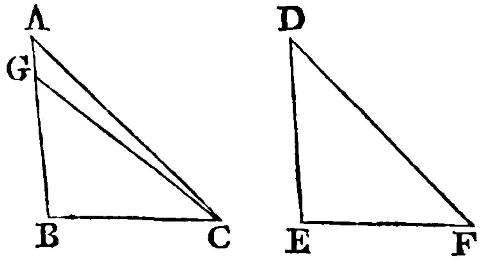
aequalis[a]. Non eſt autem; non igitur aequalis eſt BAC angulus angulo EDF. ſed neque minor; minor enim eſſet et baſis BC baſi EF[b]. atqui non eſt; non igitur angulus BAC angulo EDF eſt minor. oſtenſum autem eſt neque aequalem eſſe; angulus igitur BAC angulo EDF major erit. ſi igitur duo triangula &c. Q. E. D. a. 4. 1. b. 24. 1.




## PROP. XXVI. THEOR.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis aequales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri aequale, vel quod aequalibus adjacet angulis, vel quod uni aequalium angulorum ſubtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo aequalem habebunt.

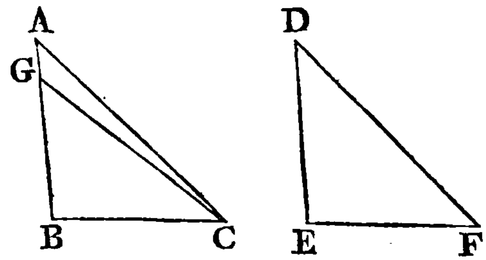
Sint duo triangula ABC, DEF, quae duos angulos ABC, BCA duobus angulis DEF, EFD aequales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC aequalem angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; habeant autem et unum latus uni lateri aequale; et primo, quod aequalibus adjacet angulis, nempe latus BC lateri EF. dico et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habere, alterum alteri, latus ſcilicet AB lateri DE, et latus



tus AC lateri DF; et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF aequalem.

Si enim inaequalis eſt recta linea AB ipſi DE, una ipſarum major eſt. ſit major AB, ponaturque BG aequalis DE, et GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem eſt aequalis DE, BC vero ipſi EF, duae GB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri; et angulus GBC eſt aequalis angulo DEF: baſis

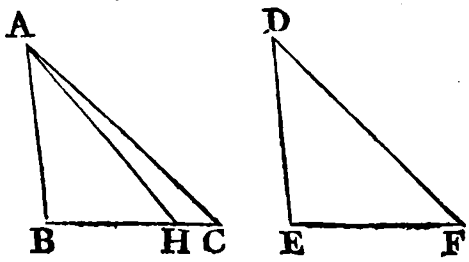
a. 4. 1. igitur GC baſi DF eſt aequalis[a], et GBC triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur; ergo GCB angulus eſt aequalis angulo DFE; ſed angulus DFE angulo BCA aequalis ponitur; quare et BCG angulus angulo BCA eſt aequalis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur inaequalis eſt AB ipſi DE; ergo aequalis erit. eſt autem et BC aequalis EF; itaque duae AB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri, et angulus ABC aequalis eſt angulo DEF; baſis igitur AC baſi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF eſt aequalis[a].




Sed rurſus ſint latera quae aequalibus angulis ſubtenduntur aequalia, ut AB ipſi DE; dico rurſus, et reliqua latera reliquis lateribus aequalia eſſe, AC quidem ipſi DF, BC vero ipſi EF; et adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF aequalem.

Si enim inaequalis eſt recta linea BC ipſi EF, una ipſarum major eſt. ſit major BC, ſi fieri poteſt, ponaturque BH aequalis EF, et AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem eſt aequalis EF, AB vero ipſi DE; duae AB, BH duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri; et aequales angulos continent; ergo baſis AH baſi DF eſt aequalis, et ABH triangulum

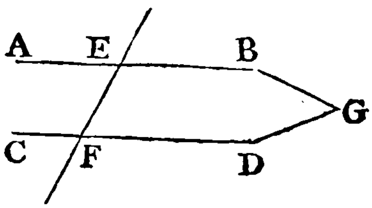
triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. aequalis igitur eſt angulus BHA angulo EFD. ſed EFD eſt aequalis angulo BCA[b]; b. ex hyp. ergo et BHA angulus angulo BCA eſt aequalis, trianguli ſcilicet AHC exterior angulus BHA aequalis interiori et oppoſito BCA, quod fieri non poteſt[c]. c. 16. 1. quare non inaequalis eſt BC ipſi EF; aequalis igitur; eſt autem et AB aequalis DE; duae igitur AB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri; anguloſque aequales continent; quare baſis AC aequalis eſt baſi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF eſt aequalis. ſi igitur duo triangula &c. Q. E. D.




## PROP. XXVII. THEOR.

SI in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe aequales fecerit, parallelae erunt rectae lineae.

In duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens alternos angulos AEF, EFD aequales inter ſe faciat; dico rectam lineam AB ipſi CD parallelam eſſe.




Si enim non eſt parallela, productae AB, CD, vel ad partes BD convenient, vel ad partes AC. producantur, conveniantque ad partes BD in puncto G; itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major eſt interiore et oppoſito EFG[a]; ſed et aequalis, a. 16. 1. quod

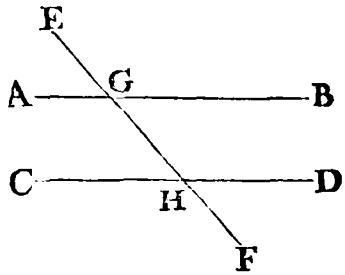
quod fieri non poteſt. non igitur AB, CD productae ad partes BD convenient. ſimiliter demonſtrabitur neque convenire ad partes AC. quae
b. Def. 35. vero ad neutras partes conveniunt, parallelae inter ſe ſunt[b]. parallela igitur eſt AB ipſi CD. quare ſi in duas rectas lineas &c. Q. E. D.

## PROP. XXVIII. THEOR.

**SI in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, et oppoſito, et ad eaſdem partes aequalem fecerit; vel interiores et ad eaſdem partes duobus rectis aequales: parallelae erunt inter ſe rectae lineae.**

In duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori et oppoſito ad eaſdem partes GHD aequalem faciat; vel interiores et ad eaſdem partes BGH, GHD duobus rectis aequales. dico rectam lineam AB rectae CD parallelam eſſe.

Quoniam enim EGB angulus aequalis eſt angulo GHD, angulus
a. 15. 1. autem EGB angulo AGH[a], erit et angulus AGH angulo GHD ae-
b. 27. 1. qualis; et ſunt alterni; parallela [b] igitur eſt AB ipſi CD. rurſus quoniam anguli BGH,
c. ex hyp. GHD duobus rectis ſunt aequales[c], et ſunt
d. 13. 1. AGH, BGH aequales duobus rectis[d]; erunt anguli AGH, BGH angulis BGH, GHD aequales. communis auferatur BGH; reliquus igitur AGH eſt aequalis reliquo GHD; et ſunt alterni; ergo AB ipſi CD parallela erit. ſi igitur in duas rectas lineas &c. Q. E. D.

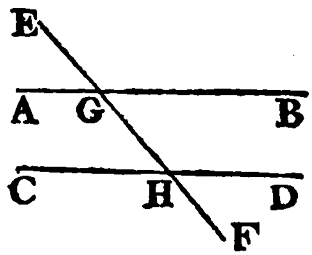



PROP. XXIX.

## PROP. XXIX. THEOR.

IN parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se aequales; et exteriorem interiori et opposito et ad easdem partes aequalem; et interiores et ad easdem partes, duobus rectis aequales efficiet. Vid. Notas ad hanc Prop.

In parallelas enim rectas lineas AB, CD recta linea incidat EF. dico alternos angulos AGH, GHD inter se aequales efficere; et exteriorem EGB interiori et opposito et ad easdem partes GHD aequalem; et interiores et ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis aequales.



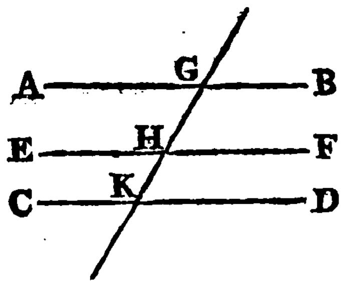

Si enim inaequalis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est; sit major AGH. et quoniam AGH angulus major est angulo GHD, communis apponatur BGH; anguli igitur AGH, BGH angulis BGH, GHD majores sunt. sed anguli AGH, BGH sunt aequales duobus rectis[a]; ergo BGH, GHD anguli sunt duobus rectis minores. a. 13. 1. quae vero cum aliqua recta angulos interiores et ad easdem partes minores duobus rectis efficiunt, in infinitum productae inter se conveniunt*; ergo rectae lineae AB, CD in infinitum productae inter se convenient. * Ax. 12. Vid. Notas ad hanc Prop. atqui non conveniunt, cum parallelae ponantur. non igitur inaequalis est angulus AGH angulo GHD; est igitur aequalis. angulus autem AGH aequalis est angulo EGB[b]; ergo et EGB ipsi GHD aequalis erit. b. 15. 1. communis apponatur BGH; anguli igitur EGB, BGH sunt aequales angulis BGH, GHD; sed EGB, BGH aequales [a] sunt duobus rectis; ergo et BGH, GHD duobus rectis aequales erunt. in parallelas igitur rectas lineas &c. Q. E. D.

## PROP. XXX. THEOR.

**QUAE eidem rectae lineae sunt parallelae, et inter se sunt parallelae.**

Sit utraque ipsarum AB, CD ipsi EF parallela; dico et AB ipsi CD parallelam esse.

Incidat enim in ipsas recta linea GHK; et quoniam in parallelas rectas lineas AB, EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est aequa-



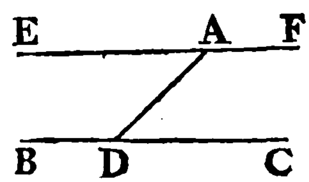

a. 29. 1. lis[a]. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF, CD recta linea incidit GK, aequalis est GHF angulus angulo GKD[a]. ostensus autem est et angulus AGK angulo GHF aequalis; ergo et AGK ipsi GKD ae-

b. 27. 1. qualis erit. et sunt alterni; parallela igitur est AB ipsi CD[b]. Ergo quae eidem rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. XXXI. PROB.

**PER datum punctum, datae rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.**

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC; oportet per A punctum ipsi BC rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.




Sumatur in BC quodvis punctum D, et jungatur AD; constituaturque ad rectam lineam DA, et ad punctum in ipsa A, angulo ADC ae-

a. 23. 1. qualis angulus[a] DAE; et in directum ipsi EA recta linea AF producatur.

Quoniam

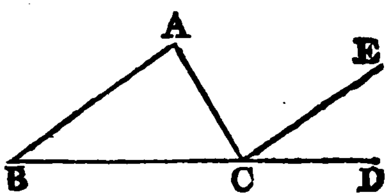
Quoniam igitur in duas rectas lineas BC, EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD, ADC inter se aequales efficit, EF ipsi BC parallela erit [b]. Per datum igitur punctum A datae rectae lineae BC parallela ducta est recta linea EAF. Q. E. F. b. 27. 1.

## PROP. XXXII. THEOR.

OMNIS trianguli, uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis est aequalis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis aequales sunt.

Sit triangulum ABC; et unum ipsius latus BC in D producatur. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus et oppositis CAB, ABC aequalem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse aequales.

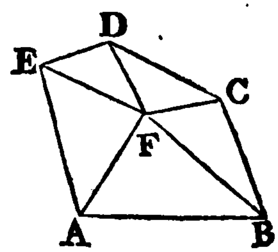
Ducatur enim per punctum C ipsi AB rectae lineae parallela [a] CE. a. 31. 1. et quoniam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC, ACE inter se aequales sunt [b]. b. 29. 1. rursus quoniam AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est aequalis [b]. ostensus autem est angulus ACE aequalis angulo BAC; quare totus




ACD exterior angulus aequalis est duobus interioribus et oppositis CAB, ABC. communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB tribus CBA, BAC, ACB aequales sunt. sed anguli ACD, ACB sunt aequales duobus rectis [c]; ergo et CBA, BAC, ACB duobus rectis sunt aequales. Omnis igitur trianguli uno latere producto &c. Q. E. D. c. 13. 1.

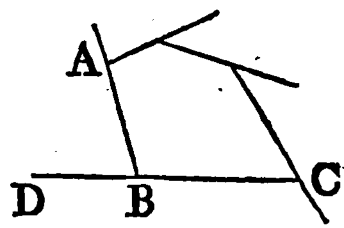
E 2 COR. 1.

Cor. 1. Omnes ſimul anguli interiores cujuſcunque figurae rectilineae, una cum quatuor rectis angulis, conficiunt bis tot rectos quot ſunt latera figurae.




Nam figura quaevis rectilinea ABCDE dividi poteſt in tot triangula quot ſunt ejus latera, ducendo ſcilicet rectas a puncto F intra figuram ad omnes ejus angulos. triangulorum autem omnes anguli, per praecedentem, ſimul aequales ſunt bis tot rectis quot ſunt triangula, hoc eſt quot ſunt latera figurae. omnes autem iidem anguli aequales ſunt angulis figurae, una cum angulis ad F verticem communem triangulorum, a. 2. Cor. 15. 1. hoc eſt una cum quatuor rectis [a]. ergo omnes anguli figurae una cum quatuor rectis aequales ſunt bis tot rectis quot ſunt latera.

Cor. 2. Omnes ſimul anguli exteriores cujuſcunque figurae rectilineae aequales ſunt quatuor rectis.




Angulus enim interior ABC ſimul cum b. 13. 1. exteriore adjacente ABD, aequalis [b] eſt duobus rectis; ergo omnes interiores ſimul cum exterioribus aequales ſunt bis tot rectis quot ſunt latera figurae, hoc eſt, per Corollarium praecedens, omnibus interioribus angulis figurae una cum quatuor rectis. Ergo exteriores aequales ſunt quatuor rectis.

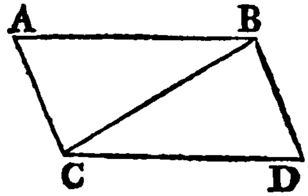
## PROP. XXXIII. THEOR.

QUAE aequales et parallelas ad eaſdem partes conjungunt rectae lineae, et ipſae aequales et parallelae ſunt.

Sint

Sint aequales et parallelae AB, CD, et ipſas conjungant ad eaſdem partes rectae lineae AC, BD; dico AC, BD aequales, et parallelas eſſe.

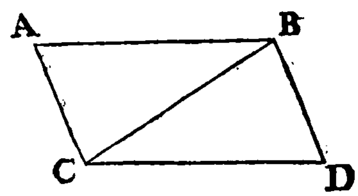
Jungatur enim BC; et quoniam AB parallela eſt CD, in ipſaſque incidit BC, alterni anguli ABC, BCD aequales ſunt [a]. et quoniam AB a. 29. 1.
eſt aequalis CD, communis autem BC, duae AB, BC duabus DC, CB ſunt aequales; et angulus ABC aequalis eſt angulo BCD; baſis igitur AC baſi BD eſt aequalis [b], trian- b. 4. 1.
gulumque ABC triangulo BCD, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt [b], alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD eſt aequalis. et quoniam in duas rectas lineas AC, BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB, CBD aequales inter ſe efficit, parallela eſt AC ipſi BD [c]. oſtenſa autem eſt et eidem aequalis. Quae igitur aequales et c. 27. 1.
parallelas &c. Q. E. D.




## PROP. XXXIV. THEOR.

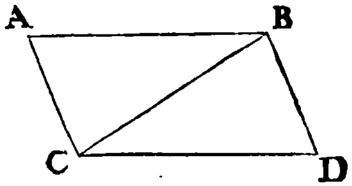
PARALLELOGRAMMORUM ſpatiorum latera quae ex oppoſito, et anguli, inter ſe aequalia ſunt; et diameter ea bifariam ſecat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ABCD parallelogrammi latera quae ex oppoſito et angulos, inter ſe aequalia eſſe; et diametrum BC ipſum bifariam ſecare.




Quoniam enim parallela eſt AB ipſi CD, et in ipſas incidit recta linea BC, anguli alterni ABC, BCD inter ſe aequales ſunt [a]. a. 29. 1.
rurſus quoniam AC ipſi BD parallela eſt, et in ipſas incidit BC, alterni anguli

a. 29. 1. anguli ACB, CBD aequales ſunt inter ſe[a]. duo igitur triangula ſunt ABC, CBD, quae duos angulos ABC, BCA duobus angulis BCD, CBD aequales habent, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale quod eſt ad aequales angulos, commune utrique BC; erga et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri, et reliquum angu-
b. 26. 1. lum reliquo angulo aequalem[b]; aequale igitur eſt latus quidem AB lateri CD, latus vero AC ipſi BD, et angulus BAC angulo BDC aequalis. et quoniam angulus ABC eſt aequalis angulo BCD, et angulus CBD

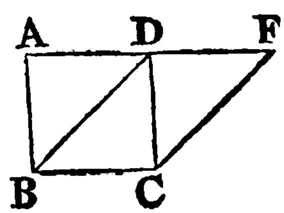



angulo ACB; erit totus angulus ABD aequalis toti ACD. oſtenſus autem eſt et angulus BAC angulo BDC aequalis; parallelogrammorum igitur ſpatiorum latera, quae ex oppoſito, et anguli inter ſe aequalia ſunt. dico etiam diametrum ea bifariam ſecare. Quoniam enim aequalis eſt AB ipſi CD, communis autem BC; duae AB, BC duabus DC, CB aequales ſunt, altera alteri; et angulus ABC aequalis eſt angulo BCD;
c. 4. 1. triangulum igitur ABC triangulo BCD aequale erit[c]. Ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam ſecat. Q. E. D.

## PROP. XXXV. THEOR.

PARALLELOGRAMMA ſuper eâdem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe aequalia ſunt.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF ſuper
Vid. Fig. 2. et 3. eâdem baſi BC, et in eiſdem parallelis AF, BC conſtituta. dico ABCD parallelogrammum EBCF parallelogrammo aequale eſſe.

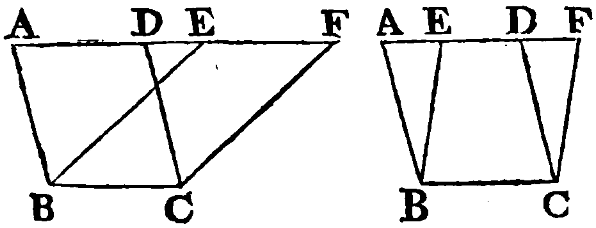



Si enim parallelogrammorum ABCD, DBCF latera AD, DF baſi BC oppoſita, in eodem

puncto

puncto D terminata fuerint, manifestum est utrumque parallelogrammum duplum esse trianguli BDC[a]; quare et inter se sunt aequalia. a. 34. 1.

Non autem sint parallelogrammorum ABCD, EBCF latera AD, EF basi opposita, in eodem puncto terminata; et quoniam parallelogrammum est ABCD, aequalis est AD ipsi BC[a]; eadem quoque ratione et EF aequalis est BC; quare et AD ipsi EF aequalis erit[b]; et b. Ax. 1.
communis est DE; tota igitur vel reliqua AE toti vel reliquae DF est




aequalis[c]. est autem et AB aequalis DC; ergo duae EA, AB duabus c. Ax. 2. 3.
FD, DC aequales sunt, altera alteri; et angulus FDC aequalis est angulo EAB exterior interiori[d]; basis igitur EB basi FC est aequalis, et d. 29. 1.
EAB triangulum aequale[e] triangulo FDC. auferatur triangulum FDC e. 4. 1.
e trapezio ABCF, et ex eodem trapezio auferatur triangulum EAB, reliquum igitur parallelogrammum ABCD aequale erit reliquo parallelogrammo EBCF[f]. Ergo parallelogramma super eadem basi &c. f. Ax. 3.
Q. E. D.

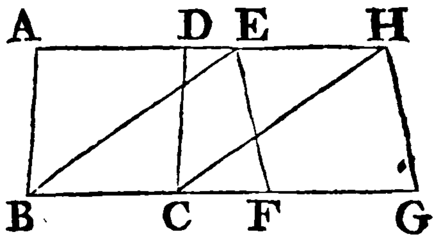
## PROP. XXXVI. THEOR.

PARALLELOGRAMMA super aequalibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se aequalia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EFGH super aequalibus basibus BC, FG, et in eisdem parallelis AH, BG constituta; dico parallelogrammum ABCD ipsi EFGH aequale esse.

Jungantur

Jungantur enim BE, CH; et quoniam aequalis est BC ipsi FG, et
a. 34. 1. FG ipsi EH[a], erit et BC ipsi EH aequalis; suntque parallelae, et ipsas conjungunt BE, CH. quae autem aequales et parallelas ad easdem partes conjungunt, aequales et parallelae
b. 33. 1. sunt[b]; ergo EB, CH et aequales sunt et parallelae. parallelogrammum igitur
c. 35. 1. est EBCH, et aequale ipsi ABCD[c], basim enim eandem habet BC, et in eisdem parallelis BC, AD constituitur. simili ratione et EFGH parallelogrammum eidem EBCH est aequale. Ergo et parallelogrammum ABCD est aequale ipsi EFGH. Parallelogramma igitur super aequalibus basibus &c. Q. E. D.

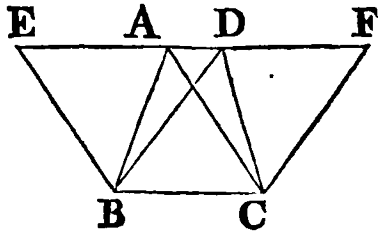



## PROP. XXXVII. THEOR.

TRIANGULA super eâdem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se aequalia sunt.

Sint triangula ABC, DBC super eadem basi BC, et in eisdem parallelis AD, BC constituta. dico ABC triangulum triangulo DBC aequale esse.

Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta, et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE; per C vero
a. 31. 1. ipsi BD parallela ducatur CF[a]. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum EBCA, DBCF; et parallelogrammum
b. 35. 1. EBCA est aequale ipsi DBCF[b]; etenim super eâdem sunt basi BC, et in eisdem parallelis BC, EF; estque parallelogrammi quidem EBCA dimidium
c. 34. 1. ABC triangulum[c], diameter enim AB ipsum bifariam secat; parallelogrammi



grammi vero DBCF dimidium triangulum DBC[c], ipſum enim bifariam e. 34. 1.
ſecat diameter DC. aequalium autem dimidia inter ſe aequalia ſunt[d]; d. Ax. 7.
ergo triangulum ABC triangulo DBC eſt aequale. Triangula igitur ſuper eadem baſi &c. Q. E. D.

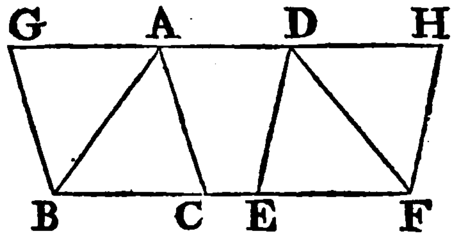
## PROP. XXXVIII. THEOR.

TRIANGULA ſuper baſibus aequalibus, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt aequalia.

Sint triangula ABC, DEF ſuper aequalibus baſibus BC, EF et in eiſdem parallelis BF, AD conſtituta. dico ABC triangulum DEF triangulo aequale eſſe.

Producatur enim AD ex utraque parte in G, H puncta, et per B quidem ipſi CA parallela ducatur BG, per F vero ducatur FH parallela ipſi ED[a]. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum GBCA, DEFH; atque eſt GBCA aequale ipſi DEFH[b]; ſuper aequalibus enim ſunt baſibus BC, EF et in eiſdem parallelis BF, GH; parallelogrammi vero GBCA dimidium eſt ABC triangulum, nam diameter AB ipſum bifariam ſecat; et parallelogrammi DEFH dimidium eſt triangulum DEF[c], diameter enim DF ipſum ſecat bifariam. aequalium autem dimidia inter ſe aequalia ſunt[d]; ergo ABC triangulum triangulo DEF eſt aequale. Triangula igitur ſuper aequalibus baſibus &c. Q. E. D.

a. 31. 1.
b. 36. 1.
c. 34. 1.
d. Ax. 7.

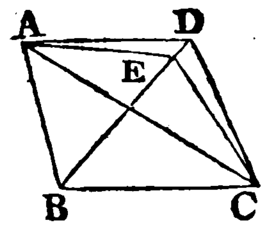


## PROP. XXXIX. THEOR.

TRIANGULA aequalia ſuper eadem baſi, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.

Sint aequalia triangula ABC, DBC ſuper eadem baſi BC conſtituta, et ad eaſdem partes; dico in eiſdem eſſe parallelis.

Jungatur enim AD, dico AD parallelam eſſe ipſi BC; ſi enim non
a. 31. 1. eſt, ducatur per A punctum ipſi BC parallela recta linea AE[a], et EC jungatur. aequale igitur eſt ABC triangulum tri-
b. 37. 1. angulo EBC[b], ſuper eadem enim eſt baſi BC, et in eiſdem parallelis BC, AE. ſed ABC triangulum triangulo DBC eſt aequale; ergo et triangulum DBC aequale eſt EBC triangulo, majus minori, quod fieri non poteſt. Non igitur AE ipſi BC parallela eſt. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, praeter ipſam AD; ergo AD ipſi BC eſt parallela. Triangula igitur aequalia &c. Q. E. D.

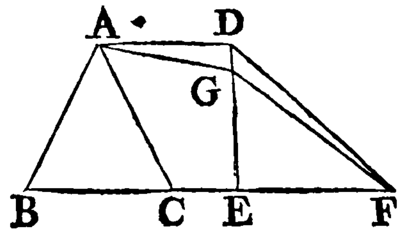



## PROP. XL. THEOR.

TRIANGULA aequalia ſuper baſibus aequalibus, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.

Sint aequalia triangula ABC, DEF ſuper aequalibus baſibus BC, EF conſtituta, et ad eaſdem partes; dico etiam in eiſdem eſſe parallelis.

Jungatur enim AD, dico AD ipſi BF parallelam eſſe. Nam ſi non eſt,



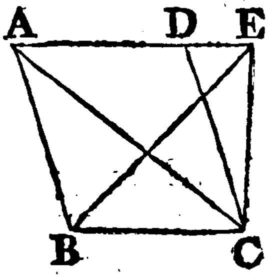

ducatur

ducatur per A ipſi BF parallela [a] AG, et GF jungatur. Triangulum a. 31. 1.
igitur ABC triangulo GEF eſt aequale [b], ſunt enim ſuper aequalibus b. 38. 1.
baſibus BC, EF, et in eiſdem parallelis BF, AG. ſed triangulum ABC aequale eſt triangulo DEF; ergo et triangulum DEF triangulo GEF aequale erit, majus minori, quod fieri non poteſt. non igitur AG ipſi BF eſt parallela. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, praeter AD. Ergo AD ipſi BF parallela eſt. Aequalia igitur triangula &c. Q. E. D.

### PROP. XLI. THEOR.

SI parallelogrammum et triangulum eandem baſim habeant, in eiſdemque ſint parallelis; parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD et triangulum EBC baſim habeant eandem BC, et in eiſdem ſint parallelis BC, AE; dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum eſſe.



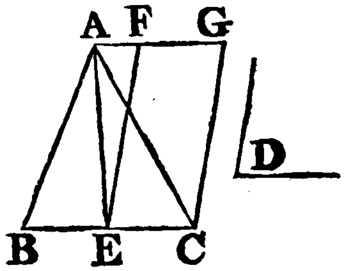

Jungatur enim AC; triangulum igitur ABC trianguli EBC eſt aequale [a], etenim ſuper eâdem baſi BC, et in eiſdem ſunt parallelis BC, AE. a. 37. 1.
ſed ABCD parallelogrammum duplum eſt trianguli ABC [b], diameter enim AC ipſum biſariam b. 34. 1.
ſecat; quare et ABCD ipſius trianguli EBC duplum erit. ſi igitur parallelogrammum &c. Q. E. D.

### PROP. XLII. PROB.

DATO triangulo aequale parallelogrammum, in angulo rectilineo dato angulo aequali, conſtituere.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. itaque oportet, dato triangulo ABC aequale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo ipſi D aequali.

a. 10. 1. Secetur BC bifariam[a] in E, jungatur AE, et ad rectam lineam EC
b. 23. 1. atque ad punctum in ea E, conſtituatur angulus CEF aequalis ipſi D[b];
c. 31. 1. et per A quidem ipſi EC parallela ducatur AG[c], per C vero ipſi EF ducatur parallela CG[c]. parallelogrammum igitur eſt FECG. et quoniam BE eſt aequalis EC, erit et ABE triangulum trian-
d. 38. 1. gulo AEC aequale[d], ſuper aequalibus enim ſunt baſibus BE, EC, et in eiſdem BC, AG parallelis; ergo triangulum ABC trianguli AEC eſt duplum. eſt autem et parallelo-
e. 41. 1. grammum FECG duplum trianguli AEC[e], baſim enim eandem habet, et in eiſdem eſt parallelis. aequale igitur eſt FECG parallelogrammum triangulo ABC, habetque CEF angulum aequalem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC aequale parallelogrammum FECG conſtitutum eſt, in angulo CEF qui angulo D eſt aequalis. Q. E. F.




## PROP. XLIII. THEOR.

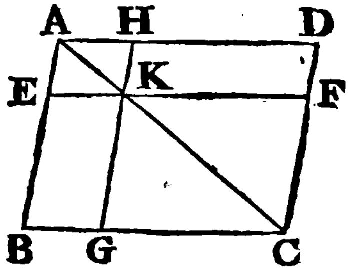
**OMNIS parallelogrammi ſpatii eorum, quae circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe ſunt aequalia.**

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC, et circa ipſam AC parallelogramma quidem ſint EH, FG, quae vero complementa dicuntur BK, KD; dico BK complementum complemento KD aequale eſſe.

Quoniam enim parallelogrammum eſt ABCD, et ejus diameter AC, aequale

aequale est ABC triangulum triangulo ADC[a]. rursus quoniam EKHA parallelogrammum est, cujus diameter AK, triangulum AEK triangulo AHK aequale erit[a]. eadem ratione, et triangulum KGC triangulo KFC est aequale. Quoniam igitur triangulum quidem AEK aequale est triangulo AHK, triangulum vero KGC ipsi KFC; erit triangulum AEK una cum triangulo KGC aequale triangulo AHK una cum KFC triangulo. est autem et totum triangulum ABC aequale toti ADC[a]; reliquum igitur BK complementum reliquo complemento KD est aequale. Ergo omnis parallelogrammi &c. Q. E. D.

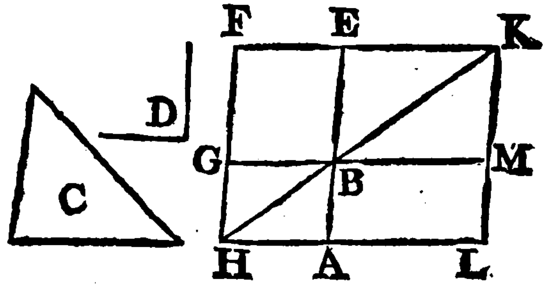
a. 34. 1.




### PROP. XLIV. PROB.

AD datam rectam lineam, dato triangulo aequale parallelogrammum applicare, in angulo rectilineo dato angulo aequali.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, dato triangulo C, aequale parallelogrammum applicare, in angulo ipsi D aequali.

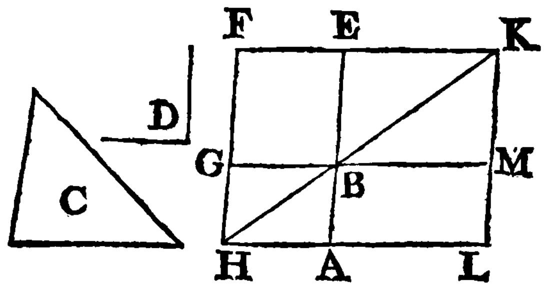



Constituatur triangulo C aequale parallelogrammum BEFG in angulo EBG qui aequalis est angulo D[a], et ponatur BE in directum ipsi AB, producaturque FG ad H; et per A alterutri ipsarum BG, EF parallela ducatur AH[b], et HB jungatur. Quoniam

a. 42. 1.

b. 31. 1.

Quoniam igitur in parallelas AH, EF recta linea HF incidit, anguli
c. 29. 1. AHF, HFE duobus rectis aequales ſunt[c]; quare BHF, HFE duobus rectis ſunt minores. quae vero cum aliqua recta angulos interiores et ad eaſdem partes duobus rectis minores efficiunt, in infinitum produc-
d. Ax. 12. tae inter ſe convenient[d]. ergo HB, FE convenient; producantur, et conveniant in K, perque K alterutri ipſarum EA, FH parallela ducatur KL, et HA, GB ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur eſt HLKF, cujus diameter HK, et circa HK parallelogramma quidem ſunt AG, ME; ea vero quae complementa di-




e. 43. 1. cuntur LB, BF; ergo LB ipſi BF eſt aequale[e]. ſed et BF eſt aequale triangulo C; quare et LB triangulo C aequale erit. et quoniam GBE
f. 15. 1. angulus aequalis eſt angulo ABM[f], ſed et GBE aequalis angulo D; erit et angulus ABM angulo D aequalis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C aequale parallelogrammum conſtitutum eſt LB, in angulo ABM qui eſt aequalis angulo D. Q. E. F.

## PROP. XLV. PROB.

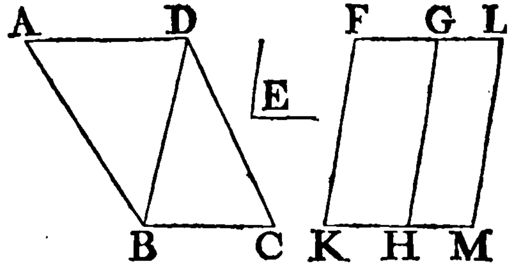
RECTILINEO dato aequale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo dato angulo aequali.

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. oportet rectilineo ABCD aequale parallelogrammum conſtituere in angulo ipſi E aequali.

Jungatur enim DB, et conſtituatur triangulo ADB aequale paralle-
a. 42. 1. logrammum FH[a], in angulo HKF qui eſt aequalis angulo E; et ad

rectam

rectam lineam GH applicetur triangulo DBC aequale parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E est aequalis[b]. et quoniam b. 44. 1.
angulus E aequalis est utrique ipsorum FKH, GHM, erit et FKH angulus aequalis ipsi GHM; communis apponatur KHG, anguli igitur FKH, KHG angulis KHG, GHM aequales sunt. sed FKH, KHG sunt aequales duobus rectis[c]; ergo et KHG, GHM duobus rectis ae- c. 29. 1.
quales erunt. itaque quoniam ad aliquam rectam GH, et ad punctum in ea H duae rectae lineae KH, HM non ad easdem partes positae angulos deinceps duobus rectis aequales efficiunt, in directum erit KH ipsi HM[d]. et quoniam in parallelas KM, FG recta linea HG incidit, al- d. 14. 1.
terni anguli MHG, HGF aequales sunt[c]; communis apponatur HGL; anguli igitur MHG, HGL, angulis HGF, HGL sunt aequales. at anguli MHG, HGL aequales sunt duobus rectis[c]; quare et anguli HGF, HGL duobus rectis aequales erunt; in directum igitur est FG ipsi GL. et quoniam KF ipsi HG est parallela, sed et HG ipsi ML; erit KF ipsi ML parallela[e]. et parallelae sunt KM, FL; parallelo- e. 30. 1.
grammum igitur est KFLM. et quoniam triangulum quidem ABD aequale est parallelogrammo HF, triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM aequale. Dato igitur rectilineo ABCD aequale parallelogrammum KFLM constitutum est in angulo FKM qui est aequalis angulo E dato. Q. E. F.




Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicari possit, in angulo rectilineo dato angulo aequali; si scilicet ad datam rectam lineam

applicetur[b]

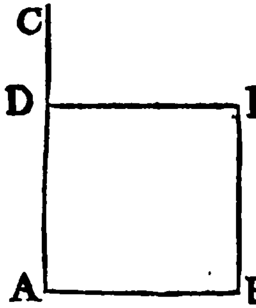
b. 44. 1. applicetur [b] parallelogrammum aequale triangulo primo ABD, in angulo dato angulo aequali.

## PROP. XLVI. PROB.

A Data recta linea quadratum deſcribere.

Sit data recta linea AB; oportet ab ipſa AB quadratum deſcribere.

Ducatur rectae lineae AB, a puncto A quod in ea eſt, ad rectos angu-
a. 11. 1. los [a] AC; et ipſi AB aequalis ponatur AD [b], perque punctum D duca-
b. 3. 1. c. 31. 1. tur DE ipſi AB parallela [c], et per B ipſi AD parallela ducatur [c] BE.
parallelogrammum igitur eſt ADEB; quare AB
d. 34. 1. quidem eſt aequalis DE [d], AD vero ipſi BE [d]. ſed BA ipſi AD eſt aequalis; quatuor igitur BA, AD, DE, EB inter ſe aequales ſunt, ideoque aequilaterum eſt ADEB parallelogrammum. dico etiam rectangulum eſſe; quoniam enim in parallelas AB, DE recta linea incidit AD, anguli BAD,




e. 29. 1. ADE duobus rectis ſunt aequales [e]; rectus autem eſt BAD, ergo et ADE rectus erit. parallelogrammorum autem ſpatiorum, quae ex oppoſito ſunt latera, et anguli inter ſe aequalia ſunt [d]; rectus igitur eſt uterque oppoſitorum angulorum ABE, BED; quare rectangulum eſt ADEB. oſtenſum autem eſt aequilaterum eſſe; quadratum igitur eſt, atque a recta linea AB deſcriptum. Q. E. F.

Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum eſt rectangulum.

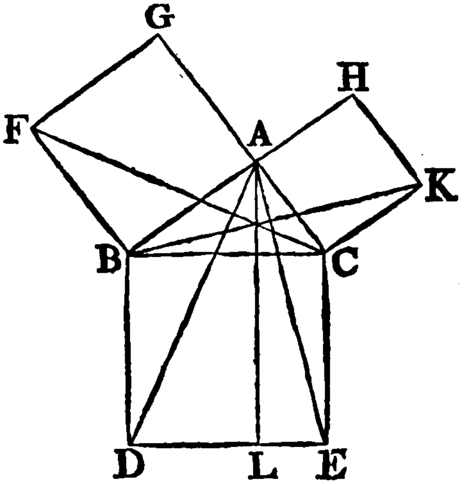
PROP. XLVII.

## PROP. XLVII. THEOR.

IN rectangulis triangulis, quod a latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, quadratum aequale eſt quadratis quae a lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

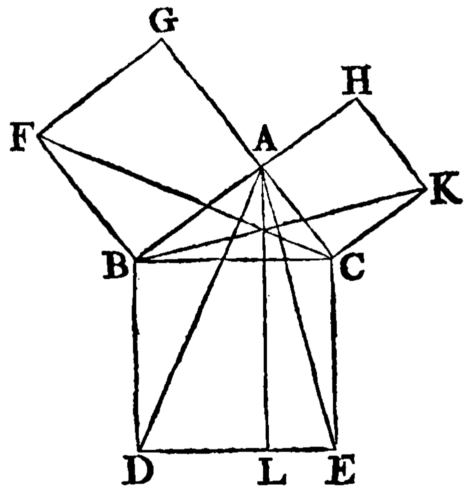
Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum; dico quadratum a recta BC aequale eſſe quadratis ab ipſis BA, AC deſcriptis.

Deſcribatur enim a BC quidem quadratum [a] BDEC, ab ipſis vero BA, AC quadrata GB, HC; perque A alterutri ipſarum BD, CE parallela ducatur [b] AL, et AD, FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC, BAG rectus eſt [c], ad aliquam rectam lineam BA, et ad punctum in ea A duae rectae lineae AC, AG non ad eaſdem partes poſitae, angulos qui deinceps ſunt duobus rectis aequales efficiunt; in directum igitur eſt CA ipſi AG [d]. eadem ratione, et AB ipſi AH eſt in directum. et quoniam angulus DBC eſt aequalis angulo FBA, rectus enim uterque eſt, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC eſt aequalis [e]. et quoniam duae AB, BD duabus FB, BC aequales ſunt, altera alteri, et angulus DBA aequalis angulo FBC; erit et baſis AD baſi FC aequalis, et ABD triangulum triangulo FBC aequale [f]. eſtque trianguli quidem ABD duplum




a. 46. 1.
b. 31. 1.
c. Def. 30.
d. 14. 1.
e. Ax. 2.
f. 4. 1.

g. 41. 1. BL parallelogrammum [g], basim enim eandem habent BD, et in eisdem sunt parallelis BD, AL; trianguli vero FBC duplum est GB quadratum, rursus enim basim habent eandem FB, et in eisdem sunt parallelis FB, GC. quae autem aequalium du-
h. Ax. 6. plicia inter se aequalia sunt [h]. aequale igitur est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE, BK ostendetur etiam CL parallelogrammum aequale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB, HC est aequale. et descriptum quidem est BDEC quadratum a recta linea BC, quadrata vero GB, HC ab ipsis BA, AC. quadratum igitur BE a latere BC descriptum aequale est quadratis a lateribus, BA AC. Ergo in rectangulis triangulis &c. Q. E. D.



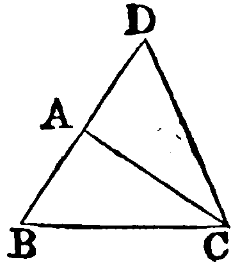

## PROP. XLVIII. THEOR.

SI quadratum ab uno laterum trianguli, aequale sit quadratis a reliquis trianguli lateribus descriptis; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Quadratum enim ab uno latere BC trianguli ABC descriptum, aequale sit quadratis a reliquis trianguli lateribus BA, AC. dico angulum BAC rectum esse.

a. 11. 1. Ducatur [a] enim a puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD, ponaturque AD ipsi BA aequalis, et DC jungatur. Quoniam igitur DA est aequalis AB, erit et quadratum ex DA aequale quadrato ex AB; commune

mune apponatur quadratum ex AC, ergo quadrata ex DA, AC aequalia ſunt quadratis ex BA, AC. ſed quadratis quidem ex DA, AC aequale eſt quadratum ex DC[b], rectus enim angulus eſt DAC; quadratis vero ex BA, AC aequale ponitur quadratum ex BC; quadratum igitur ex DC aequale eſt quadrato ex BC; ergo et latus DC lateri CB eſt aequale. et quoniam DA eſt aequalis AB, communis autem AC, duae DA, AC aequales ſunt duabus BA, AC; et baſis DC eſt aequalis baſi BC; angulus igitur DAC angulo BAC eſt aequalis[c]. rectus autem eſt DAC, ergo et BAC rectus erit. ſi igitur quadratum &c. Q. E. D.




b. 47. 1.

c. 8. 1.

# EUCLIDIS ELEMENTORUM

## LIBER SECUNDUS.

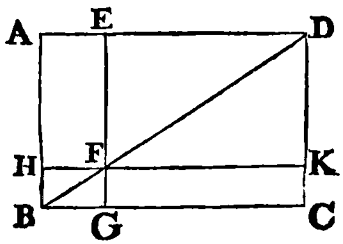
### DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur a duabus rectis lineis, quae rectum angulum continent.

II.

Omnis parallelogrammi ſpatii, unumquodvis eorum quae circa diametrum ipſius ſunt parallelogrammorum una cum duobus complementis, gnomon vocetur. ‘Ita parallelogrammum ‘HG una cum complementis AF, FC ‘eſt gnomon, qui brevitatis gratia de‘ſignatur literis AGK vel EHC ad ‘oppoſitos angulos parallelogrammorum qui gnomonem compo‘nunt.’

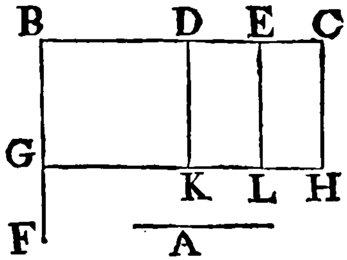



PROP. I.

## PROP. I. THEOR.

**SI sint duae rectae lineae, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum a duabus rectis lineis contentum aequale est rectangulis, quae a recta linea insecta, et singulis partibus continentur.**

Sint duae rectae lineae A, BC; et secta sit BC utcunque in punctis D, E; dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum aequale esse rectangulo contento ab ipsis A, BD; et ei ab ipsis A, DE; et adhuc ei ab ipsis A, EC contento.




Ducatur enim a puncto B ipsi BC ad rectos angulos BF[a], atque ipsi A ponatur aequalis BG[b]; et per G quidem ipsi BC parallela ducatur GH; per D, E, C vero ducantur DK, EL, CH parallelae ipsi BG[c]. rectangulum igitur BH est aequale rectangulis BK, DL, EH; atque est BH quidem quod ipsis A, BC continetur, etenim continetur a GB, BC, et BG ipsi A est aequalis; BK autem continetur ab ipsis A, BD, continetur enim a GB, BD, quarum GB est aequalis A; et DL est contentum ab ipsis A, DE, quoniam DK, hoc est BG[d] ipsi A est aequalis; et similiter rectangulum EH contentum est ab ipsis A, EC. rectangulum igitur ab ipsis A, BC contentum est aequale rectangulo contento ab ipsis A, BD, et contento ab A, DE, et adhuc contento ab ipsis A, EC. si igitur sint duae rectae lineae &c. Q. E. D.

a. 11. 1.
b. 3. 1.
c. 31. 1.
d. 34. 1.

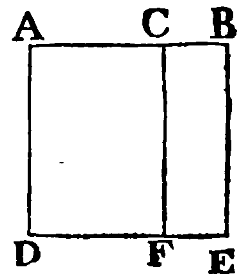
PROP. II.

## PROP. II. THEOR.

**SI recta linea secta fuerit utcunque, rectangula quae a tota et singulis partibus continentur, aequalia sunt quadrato ex tota.**

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C; dico rectangulum ab AB, BC contentum, una cum rectangulo contento ab AB, AC aequale esse quadrato ex AB.

a. 46. 1. Describatur enim ex AB quadratum ADEB[a], et per C ducatur al-
b. 31. 1. terutri ipsarum AD, BE parallela CF[b]. aequale igitur est AE rectangulis AF, CE; atque est AE quidem quadratum ex AB; AF vero rectangulum a BA, AC contentum, etenim a DA, AC continetur, quarum AD ipsi AB est aequalis; et CE continetur ab ipsis AB, BC, aequalis enim est BE ipsi AB. rectangulum igitur ab AB, AC, una cum rectangulo ab ipsis AB, BC contento, aequale est quadrato ex AB. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.



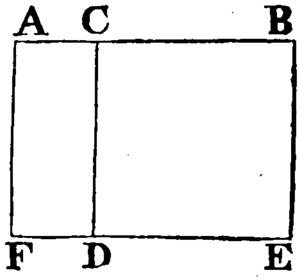

## PROP. III. THEOR.

**SI recta linea utcunque secta fuerit, rectangulum a tota et una ejus parte contentum aequale est et rectangulo a partibus contento, et quadrato ex praedictâ parte.**

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C; dico rectangulum ab AB, BC contentum aequale esse rectangulo contento ab AC, CB una cum quadrato ex BC.

a. 46. 1. Describatur enim ex BC quadratum CDEB[a], et producatur ED in F, et

et per A alterutri ipſarum CD, BE, parallela ducatur AF[b]. aequale igi- b. 31. 1.
tur eſt AE ipſis AD, CE; et eſt AE quidem rectangulum contentum ab AB, BC, etenim ab AB, BE continetur, quarum BE eſt aequalis BC; AD vero continetur ab ipſis AC, CB, aequalis enim eſt CD ipſi CB; et eſt DB quadratum ex BC. rectangulum igitur contentum ab AB, BC eſt aequale rectangulo contento ab ipſis AC, CB, una cum quadrato ex BC. ſi igitur recta linea &c. Q. E. D.

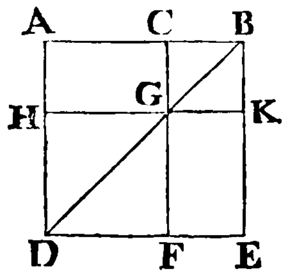



## PROP. IV. THEOR.

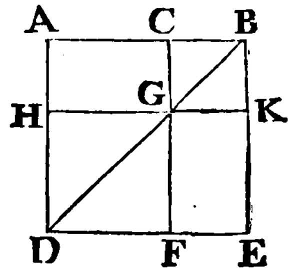
SI recta linea ſecta fuerit utcunque, quadratum ex tota aequale eſt, et quadratis ex partibus, et rectangulo bis a partibus contento.

Recta enim linea AB ſecta ſit utcunque in C; dico quadratum ex AB aequale eſſe, et quadratis ex AC, CB et rectangulo bis ab ipſis AC, CB contento.

Deſcribatur enim ex AB quadratum ADEB[a], jungaturque BD, et a. 46. 1.
per C quidem alterutri ipſarum AD, BE parallela ducatur CGF[b]; per G vero alterutri ipſarum b. 31. 1.
AB, DE ducatur parallela HK[b]. et quoniam CF eſt parallela ipſi AD, et in ipſas incidit BD, erit exterior angulus BGC interiori et oppoſito ADB aequalis[c]; angulus autem ADB eſt ae- c. 29. 1.
qualis angulo ABD[d], quoniam et latus BA ae- d. 5. 1.
quale eſt lateri AD; quare CGB angulus angulo GBC eſt aequalis, ac propterea latus BC lateri CG aequale[e]. ſed et latus CB aequale eſt la- e. 6. 1.
teri



f. 34. 1. teri GK, et CG ipsi BK[f], ergo et GK est aequale KB; aequilaterum igitur est CGKB. dico insuper etiam rectangulum esse; quoniam enim CG parallela est ipsi BK, et in ipsas incidit CB, anguli KBC, GCB duobus rectis sunt aequales; rectus autem est KBC angulus, rectus igitur est GCB; quare et anguli hisce oppositi CGK, GKB recti erunt[f]; rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit et aequilaterum esse; quadratum igitur est, et est ex CB. eadem ratione et HF est quadratum, et est ex HG, hoc est ex AC. ergo HF, CK ex ipsis AC, CB quadrata sunt. et quoniam AG est aequale




g. 43. 1. ipsi GE[g], atque est AG quod ab AC, CB continetur, est enim GC ipsi CB aequalis; erit et GE aequale ei quod continetur ab AC, CB; quare AG, GE aequalia sunt ei quod bis ab AC, CB continetur. sunt autem et HF, CK quadrata ex AC, CB; quatuor igitur HF, CK, AG, GE aequalia sunt et quadratis ex AC, CB, et ei quod bis ab AC, CB continetur rectangulo. sed HF, CK, AG, GE sunt totum ADEB quod est quadratum ex AB. quadratum igitur ex AB aequale est et quadratis ex AC, CB, et rectangulo quod bis ab AC, CB continetur. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.

Cor. Ex his manifestum est, in quadratis spatiis parallelogramma quae sunt circa diametrum quadrata esse.

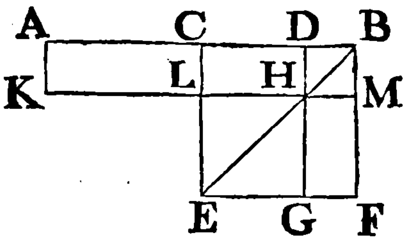
## PROP. V. THEOR.

SI recta linea secta fuerit in partes aequales, et in partes inaequales; rectangulum ab inaequalibus totius partibus contentum, una cum quadrato rectae lineae quae inter sectiones interjicitur, aequale est quadrato ex dimidia:

Recta

Recta enim linea quaevis AB ſecta ſit in partes aequales ad C, et in partes inaequales ad D; dico rectangulum contentum ab AD, DB una cum quadrato ex CD aequale eſſe quadrato ex CB.

Deſcribatur enim ex BC quadratum [a] CEFB, jungaturque BE; et a. 46. 1.
per D quidem alterutri ipſarum CE, BF parallela ducatur [b] DHG; per b. 31. 1.
H vero ducatur KLM parallela alterutri ipſarum CB, EF; et rurſus per A ducatur alterutri CL, BM parallela AK. et quoniam CH complementum aequale eſt complemento HF [c], c. 43. 1.
commune apponatur DM, totum igitur CM toti DF eſt aequale; ſed CM eſt aequale AL [d], d. 36. 1.
quoniam et AC ipſi CB; ergo et AL aequale eſt DF. commune apponatur CH, totum



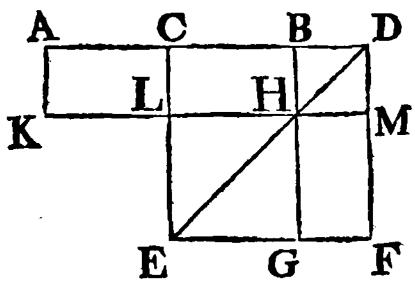

igitur AH ipſis DF, CH aequale erit. ſed AH quidem eſt quod continetur ab AD, DB, aequalis enim eſt DH ipſi DB [e]; DF, CH vero e. Cor. 4. 2.
eſt gnomon CMG; gnomon igitur CMG aequalis eſt ei quod ab AD, DB continetur. commune apponatur LG, quod aequale eſt quadrato [e] ex CD; ergo CMG gnomon et LG aequalia ſunt rectangulo ab AD, DB contento, et quadrato ex CD. ſed CMG gnomon et LG ſunt totum quadratum CEFB, quod fit ex CB. rectangulum igitur ipſis AD, DB contentum, una cum quadrato ex CD, aequale eſt quadrato ex CB. ſi igitur recta linea ſecta fuerit &c. Q. E. D.

## PROP. VI. THEOR.

SI recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quaedam recta linea; rectangulum a tota cum adjecta, et ipsa adjecta contentum, una cum quadrato ex dimidia, aequale est quadrato quod ex ea quae composita est ex dimidia et adjecta, tanquam ab una recta linea, describitur.

Recta enim linea quaevis AB secetur bifariam in puncto C, et adjiciatur ipsi in directum quaedam BD; dico rectangulum ab AD, DB contentum una cum quadrato ex CB aequale esse quadrato ex CD.

a. 46. 1. Describatur enim ex CD quadratum [a] CEFD, et jungatur DE; per-
b. 31. 1. que B alterutri ipsarum CE, DF parallela ducatur [b] BHG, et per H ducatur KLM parallela alterutri ipsarum AD, EF, et adhuc per A alterutri CL, DM parallela AK. itaque quoniam AC est aequalis CB, erit et AL
c. 36. 1. rectangulum [c] ipsi CH aequale; sed CH
d. 43. 1. aequale est HF [d]; ergo et AL ipsi HF aequale erit. commune apponatur CM; totum igitur AM gnomoni CMG est aequale. atque est AM quod ab ipsis AD,




e. Cor. 4. 2. DB continetur, etenim DM est aequalis DB [e]. ergo et gnomon CMG aequalis est rectangulo ab AD, DB contento. commune apponatur LG, quod aequale est quadrato ex CB; rectangulum igitur ab AD, DB contentum una cum quadrato ex CB aequale est gnomoni CMG et ipsi LG. sed gnomon CMG et LG sunt totum quadratum CEFD, quod est ex CD; ergo rectangulum ab AD, DB contentum una cum quadrato ex CB aequale est quadrato ex CD. si igitur recta linea bifariam &c. Q. E. D.

PROP. VII.

## PROP. VII. THEOR.

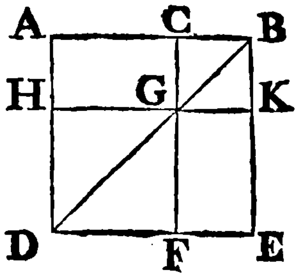
SI recta linea utcunque secta fuerit, quae ex tota, et una parte fiunt utraque quadrata aequalia sunt et rectangulo quod bis a tota ac dicta parte continetur, et quod ex reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quaevis AB secta sit utcunque in puncto C; dico quadrata ex AB, BC aequalia esse et rectangulo quod bis ab AB, BC continetur, et quadrato ex AC.

Describatur enim ex AB quadratum ADEB[a], et figura construatur. a. 46. 1.
et quoniam AG rectangulum aequale est ipsi GE[b], commune apponatur CK, quare totum AK toti CE est aequale; rectangula igitur AK, CE dupla sunt ipsius AK. sed AK, CE sunt AKF gnomon et quadratum CK; gnomon igitur AKF et quadratum CK dupla sunt rectanguli AK. est autem et id quod bis continetur ab AB, BC duplum ipsius AK, etenim BK est aequalis BC[c]. gnomon igitur AKF et quadratum CK aequalia sunt ei quod bis ab AB, BC continetur. commune apponatur HF, quod est aequale quadrato ex AC; gnomon igitur AKF et quadrata CK, HF aequalia sunt ei quod bis ab AB, BC continetur rectangulo, et quadrato ex AC. sed gnomon AKF et quadrata CK, HF totum sunt ADEB, et CK, quae sunt ex AB, BC quadrata. Quadrata igitur ex AB, BC aequalia sunt rectangulo quod bis ab AB, BC continetur, una cum quadrato ex AC. si igitur recta linea &c. Q. E. D.

b. 43. 1.

c. Cor. 4. 2.

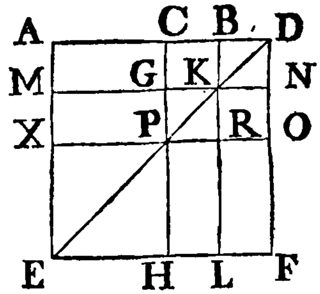


### PROP. VIII. THEOR.

**SI recta linea utcunque ſecta fuerit, quod quater a tota et una parte continetur rectangulum una cum quadrato ex reliqua parte, aequale eſt quadrato quod ex tota et dicta parte, tanquam ex una recta, deſcribitur.**

Recta enim linea AB ſecta ſit utcunque in C; dico rectangulum quater ab AB, BC contentum una cum quadrato ex AC aequale eſſe quadrato quod ex AB, BC tanquam ex una recta linea deſcribitur.

Producatur enim in directum rectae lineae AB recta BD, et ipſi CB ponatur aequalis BD, deſcribaturque ex AD quadratum AEFD; et dupla figura conſtruatur. Quoniam igitur CB eſt aequalis BD, atque eſt
a. 34. 1. CB ipſi GK aequalis[a], BD vero ipſi KN; erit et GK aequalis KN. eadem ratione et PR ipſi RO eſt aequalis. et quoniam CB eſt aequalis BD, et GK ipſi KN, erit rectangulum quidem CK aequale
b. 36. 1. ipſi BN, GR vero ipſi RN[b]. ſed CK eſt
c. 43. 1. aequale RN[c]. complementa enim ſunt parallelogrammi CO; ergo et BN aequale eſt GR. quatuor igitur BN, CK, GR, RN ſunt inter ſe aequalia, ideoque quadrupla ſunt ipſius CK. rurſus quoniam CB eſt aequalis



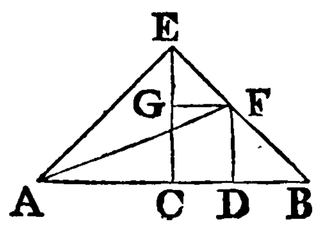

d. Cor. 4. 2. BD, et BD quidem ipſi BK[d], hoc eſt ipſi CG aequalis; CB vero ipſi GK, hoc eſt GP[d]; erit et CG aequalis GP. et quoniam CG quidem aequalis eſt GP, PR vero ipſi RO, aequale erit et AG quidem rectangulum ipſi MP; PL vero ipſi RF. ſed MP eſt aequale [c] PL, complementa enim ſunt parallelogrammi ML; quare et AG ipſi RF eſt aequale. quatuor igitur AG, MP, PL, RF inter ſe aequalia ſunt; ac propterea

terea ipſius AG quadrupla. oſtenſum autem eſt, et quatuor CK, BN, GR, RN quadrupla eſſe ipſius CK. octo igitur quae continent gnomonem AOH ipſius AK quadrupla ſunt. et quoniam AK eſt quod ab AB, BC continetur, etenim BK eſt aequalis BC; erit contentum quater ab AB, BC ipſius AK quadruplum. at oſtenſus eſt gnomon AOH quadruplus ipſius AK; quod igitur quater ab AB, BC continetur aequale eſt gnomoni AOH. commune apponatur XH, quod aequale eſt quadrato ex AC[d]; erit rectangulum quod quater ab AB, BC continetur d. Cor. 4. 2.
una cum quadrato ex AC aequale ipſi AOH gnomoni, et quadrato XH. ſed AOH gnomon et XH totum ſunt AEFD quadratum, quod eſt ex AD. rectangulum igitur quater ab AB, BC contentum una cum quadrato ex AC aequale eſt ei quod ex AD, hoc eſt ex AB, BC tanquam ex una recta linea, deſcribitur quadrato. ſi igitur recta linea utcunque &c. Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.

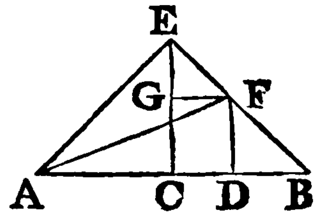
SI recta linea in partes aequales, et in partes inaequales ſecta fuerit; quadrata ex inaequalibus totius partibus, dupla ſunt et quadrati ex dimidia, et quadrati ex eâ quae inter ſectiones interjicitur.

Recta enim linea quaevis AB ſecta ſit in partes quidem aequales ad C, in partes vero inaequales ad D. dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla eſſe.




Ducatur enim a puncto C ipſi AB ad rectos angulos CE[a], et alterutri ipſarum a. 11. 1.
AC, CB aequalis ponatur, junganturque EA, EB; ac per D quidem ipſi CE parallela ducatur[b] DF, per F vero b. 31. 1.
ipſi

b. 31. 1. ipſi AB parallela [b] FG; et AF jungatur. itaque quoniam AC eſt ae-
c. 5. 1. qualis CE, erit et angulus EAC angulo AEC aequalis [c]; et quoniam
d. 32. 1. rectus eſt angulus ad C, reliqui AEC, EAC uni recto aequales erunt [d]; et ſunt inter ſe aequales; uterque igitur ipſorum AEC, EAC recti eſt dimidium. eadem ratione et recti dimidium eſt uterque ipſorum CEB, EBC; totus igitur angulus AEB rectus eſt. et quoniam angulus GEF dimidium eſt recti, rectus autem EGF, aequalis enim eſt interiori et
e. 29. 1. oppoſito [e] ECB, erit reliquus EFG recti dimidium; aequalis igitur eſt
f. 6. 1. GEF angulus ipſi EFG, quare et latus EG lateri GF eſt aequale [f]. rurſus quoniam angulus ad B dimidium eſt recti, rectus autem FDB, rurſus enim aequalis eſt interiori et oppoſito [e] ECB, reliquus BFD recti erit dimidium; angulus igitur ad B aequalis eſt angulo BFD, ideoque latus DF lateri DB aequale [f]. et quoniam AC eſt aequalis CE, erit et ex AC quadratum aequale quadrato ex CE; quadrata igitur ex AC, CE dupla ſunt quadrati ex AC. quadratis




g. 47. 1. autem ex AC, CE aequale eſt quadratum ex EA [g], ſiquidem rectus eſt angulus ACE; ergo quadratum ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam EG aequalis eſt GF, erit et quadratum ex EG quadrato ex GF aequale; quadrata igitur ex EG, GF dupla ſunt quadrati ex GF; quadratis vero ex EG, GF aequale eſt quadratum ex EF;
h. 34. 1. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. aequalis [h] autem eſt GF ipſi CD; quadratum igitur ex EF duplum eſt quadrati ex CD. ſed et quadratum ex AE quadrati ex AC eſt duplum; quadrata igitur ex AE, EF dupla ſunt quadratorum ex AC, CD. quadratis vero ex AE, EF aequale eſt ex AF quadratum [g], quoniam angulus AEF rectus eſt; quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC, CD eſt duplum. ſed quadrato ex AF aequalia ſunt quadrata ex AD, DF, rectus enim eſt an-

gulus

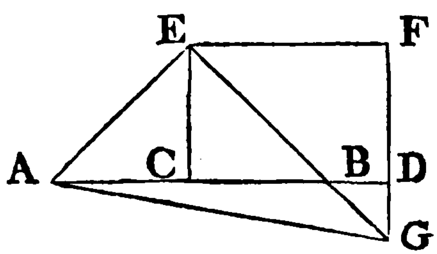
gulus qui ad D; ergo ex AD, DF quadrata dupla ſunt quadratorum ex AC, CD. eſt autem DF ipſi DB aequalis; quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla erunt. ſi igitur recta linea ſecetur &c. Q. E. D.

## PROP. X. THEOR.

**SI recta linea ſecetur bifariam, et ipſi in directum quaevis recta linea adjiciatur, quae ex tota cum adjecta, et adjecta fiunt utraque quadrata, dupla ſunt et quadrati ex dimidia, et quadrati quod ex ea quae compoſita eſt ex dimidia et adjecta, tanquam ab una recta linea deſcribitur.**

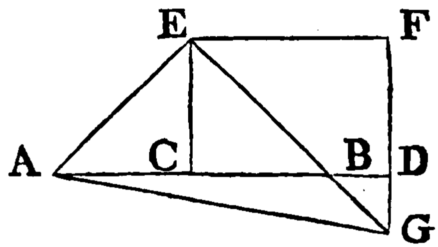
Recta enim linea AB ſecetur bifariam in C, et ipſi in directum adjiciatur quaevis recta linea BD; dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla eſſe.

Ducatur enim a puncto C ipſi AB ad rectos angulos [a] CE, et alteru- a. 11. 1.
tri ipſarum AC, CB aequalis ponatur, junganturque AE, EB; et per E quidem ipſi AB parallela ducatur [b] EF, per D vero ducatur DF parallela [b] ipſi CE. b. 31. 1. et quoniam in parallelas EC, FD recta quaedam




linea EF incidit, anguli CEF, EFD aequales ſunt duobus rectis [c]; an- c. 29. 1.
guli igitur BEF, EFD duobus rectis ſunt minores. quae vero cum aliqua recta angulos duobus rectis minores efficiunt, in infinitum productae inter ſe conveniunt [d]. ergo EB, FD productae ad partes BD d. Ax. 12.
convenient; producantur, et conveniant in G, et AG jungatur. itaque quoniam AC eſt aequalis CE, erit et angulus CEA angulo EAC aequalis [e];

e. 5. 1. qualis[e]; atque eſt rectus qui ad C; uterque igitur ipſorum CEA, EAC
eſt recti dimidium. eadem ratione, et recti dimidium eſt uterque CEB,
EBC; ergo AEB eſt rectus. et quoniam EBC eſt dimidium recti, erit
f. 15. 1. et recti dimidium DBG[f]; ſed et BDG rectus eſt, etenim eſt aequalis
c. 29. 1. ipſi DCE alterno[c]; reliquus igitur DGB dimidium eſt recti; eſt igitur
g. 6. 1. DGB ipſi DBG aequalis, ergo et latus BD aequale lateri DG[g]. rurſus quoniam EGF eſt dimidium recti, rectus autem qui ad F, eſt enim
h. 34. 1. angulo oppoſito ad C aequalis[h], erit et reliquus FEG recti dimidium; eſt igitur angulus EGF aequalis ipſi FEG, quare et latus GF lateri FE eſt aequale[g]. et quoniam EC eſt aequalis CA, erit et quadratum ex EC aequale quadrato ex CA; ergo quadrata ex EC, CA dupla ſunt quadrati ex CA. quadratis autem ex EC, CA aequale eſt quadratum ex
i. 47. 1. EA[i]; quadratum igitur ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam GF eſt aequalis FE, erit et ex GF quadratum aequale quadrato ex FE; quadrata igitur ex GF, FE quadrati ex EF ſunt dupla. at quadratis ex GF, FE aequale eſt quadratum ex EG[i]; ergo quadratum ex EG duplum eſt quadrati ex EF. aequalis autem eſt EF ipſi CD, quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. ſed oſtenſum eſt quadratum ex EA duplum quadrati ex AC; ergo ex AE, EG quadrata, quadratorum ex AC, CD ſunt dupla. quadratis vero ex AE, EG aequale eſt quadratum ex AG[i]; quadratum igitur ex AG duplum eſt quadratorum ex AC, CD. at quadrato ex AG aequalia ſunt quadrata ex AD, DG[i]; ergo quadrata ex AD, DG ſunt dupla quadratorum ex AC, CD. ſed DG eſt aequalis DB; quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD ſunt dupla. ſi igitur recta linea ſecetur &c. Q. E. D.



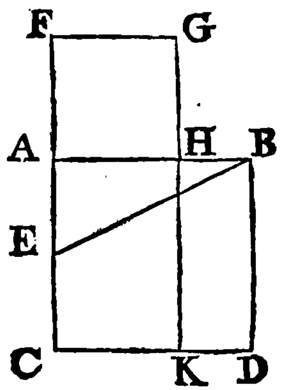

PROP. XI.

## PROP. XI. PROB.

DATAM rectam lineam ſecare ita ut rectangulum a tota et altera parte contentum, aequale ſit quadrato ex reliqua parte.

Sit data recta linea AB; oportet ipſam AB ita ſecare, ut rectangulum contentum a tota et altera parte aequale ſit quadrato ex reliqua parte.

Deſcribatur enim ex AB quadratum [a] ABDC, ſeceturque AC bifariam [b] in E, et BE jungatur, et producatur CA in F, ponaturque ipſi BE aequalis EF [c], et ex AF deſcribatur quadratum FGHA [a], et GH ad K producatur. dico AB ſectam eſſe in H, ita ut rectangulum ab AB, BH contentum aequale ſit quadrato ex AH. a. 46. 1. b. 10. 1. c. 3. 1.



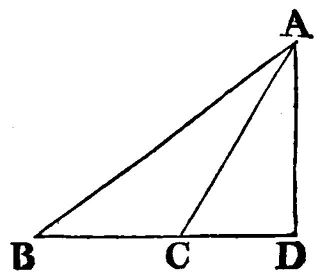

Quoniam enim recta linea AC bifariam ſecta eſt in E, et ipſi in directum adjecta eſt AF, rectangulum a CF, FA contentum, una cum quadrato ex AE, aequale erit quadrato ex EF [d]. ſed EF eſt aequalis EB; rectangulum igitur contentum ab ipſis CF, FA, una cum quadrato ex AE aequale eſt quadrato ex EB. quadrato autem ex EB aequalia ſunt quadrata ex BA, AE [e], etenim angulus ad A rectus eſt; ergo rectangulum a CF, FA, una cum quadrato ex AE aequale eſt quadratis ex BA, AE. commune auferatur quadratum ex AE; reliquum igitur rectangulum a CF, FA contentum aequale eſt quadrato ex AB. et FK quidem eſt rectangulum a CF, FA contentum, aequalis enim eſt AF ipſi FG; AD vero eſt quadratum ex AB. aequale igitur eſt FK ipſi AD. commune auferatur AK; ergo reliquum d. 6. 2. e. 47. 1.

FH reliquo HD eſt aequale. et eſt HD quidem rectangulum ab AB, BH, eſt enim AB aequalis ipſi BD; FH vero eſt quadratum ex AH. rectangulum igitur contentum ab AB, BH quadrato ex AH aequale erit. quare data recta linea AB ſecta eſt in H, ita ut contentum ab AB, BH rectangulum quadrato ex AH ſit aequale. Q. E. F.

## PROP. XII. THEOR.

**IN obtuſangulis triangulis quadratum ex latere obtuſum angulum ſubtendente, majus eſt quam quadrata ex lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis ab uno laterum quae ſunt circa obtuſum angulum in quod productum perpendicularis cadit, et recta linea intercepta exterius a perpendiculari ad angulum obtuſum.**

Sit obtuſangulum triangulum ABC, obtuſum angulum habens ACB,
a. 12. 1. et ducatur a puncto A ad BC productam perpendicularis [a] AD. dico quadratum ex AB majus eſſe quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis a BC, CD contento.




Quoniam enim recta linea BD ſecta eſt utcunque in puncto C, erit quadratum ex BD aequale quadratis ex BC, CD, et rec-
b. 4. 2. tangulo bis ab ipſis BC, CD contento [b]. commune apponatur quadratum ex DA; quadrata igitur ex BD, DA aequalia ſunt et quadratis ex BC, CD, DA, et rectangulo bis a BC, CD contento. ſed quadratis quidem ex BD, DA aequale eſt quadratum ex
c. 47. 1. BA [c], rectus enim eſt angulus ad D; quadratis vero ex CD, DA aequale eſt quadratum ex CA [c]. Quadratum igitur ex BA aequale eſt et quadratis

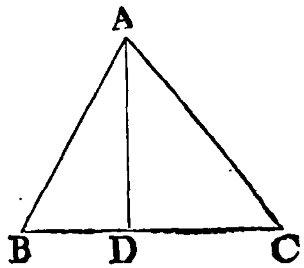
quadratis ex BC, CA et contento bis a BC, CD rectangulo; itaque quadratum ex BA majus est quam quadrata ex BC, CA, rectangulo bis ab ipsis BC, CD contento. In obtusangulis igitur triangulis &c. Q. E. D.

## PROP. XIII. THEOR.

**IN omni triangulo, quadratum ex latere acutum angulum subtendente, minus est quàm quadrata ex lateribus angulum illum acutum continentibus, rectangulo contento bis ab uno laterum quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et recta linea intercepta a perpendiculari ad angulum acutum.**

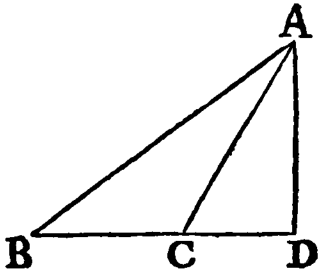
Sit triangulum ABC, acutum habens angulum ad B, et ducatur a puncto A ad BC perpendicularis [a] AD. dico quadratum ex AC minus a. 12. 1.
esse quam quadrata ex CB, BA, rectangulo bis a CB, BD contento.

Cadat primo AD intra triangulum ABC; et quoniam recta linea CB secta est utcunque in D, erunt quadrata ex CB, BD aequalia et rectangulo bis a CB, BD contento, et quadrato ex DC [b]. commune apponatur b. 7. 2.
ex AD quadratum; quadrata igitur ex CB, BD, DA aequalia sunt et rectangulo bis ab ipsis CB, BD contento, et quadratis ex AD, DC. sed quadratis quidem ex BD, DA aequale est ex AB quadratum [c], c. 47. 1.
rectus enim angulus est qui ad D; quadratis vero ex AD, DC aequale est quadratum ex AC. quadrata igitur ex CB, BA sunt aequalia quadrato ex AC, et contento bis a CB, BD rectangulo; itaque solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB, BA rectangulo bis a CB, BD contento.

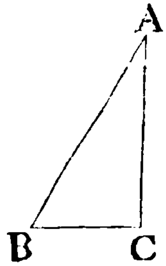



 Sed

Sed cadat AD extra triangulum ABC. quoniam igitur rectus eſt an-
d. 16. 1. gulus ad D, erit angulus ACB major recto[d]; quadratum igitur ex AB aequale eſt et quadratis ex AC, CB, et rec-
e. 12. 2. tangulo bis ab ipſis BC, CD contento[e]. commune apponatur ex BC quadratum; erunt igitur quadrata ex AB, BC aequalia quadrato ex AC, quadrato ex BC bis, et contento bis a BC, CD rectangulo. quoniam autem recta linea BD ſecta eſt utcunque in C, rectangulum a DB, BC contentum aequale eſt rectangulo a BC, CD et qua-
f. 3. 2. drato ex BC[f], et ipſorum dupla ſunt aequalia. quadrata igitur ex AB, BC aequalia ſunt quadrato ex AC, et rectangulo bis a DB, BC contento. ſolum igitur quadratum ex AC minus eſt quadratis ex AB, BC rectangulo bis contento ab ipſis CB, BD.




Denique ſit latus AC perpendiculare ad ipſum BC; eſt igitur BC recta ab AC ad angulum acutum B intercepta, et manifeſtum eſt quadrata ex AB, BC aequalia
c. 47. 1. eſſe quadrato ex AC, et bis quadrato ex BC[c]. In omni igitur triangulo &c. Q. E. D.



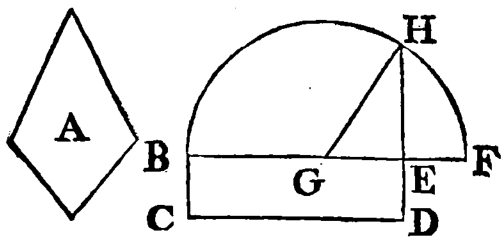

## PROP. XIV. PROB.

DATO rectilineo aequale quadratum conſtituere.

Sit datum rectilineum A; oportet ipſi A rectilineo aequale quadratum conſtituere.

a. 45. 1. Conſtituatur rectilineo A aequale parallelogrammum rectangulum[a] BCDE. ſi igitur BE eſt aequalis ED, factum jam erit quod proponebatur; etenim rectilineo A aequale quadratum conſtitutum eſt BD. ſin minus, producatur BE ad F, ponaturque ipſi ED aequalis EF, et ſecetur

tur BF biſariam in G; et centro quidem G, intervallo vero uni ipſarum GB, GF aequali ſemicirculus deſcribatur BHF, producaturque DE in H, et GH jungatur. Quoniam igitur recta linea BF ſecta eſt in partes quidem aequales ad G, in partes vero inaequales ad E, erit rectangulum a BE, EF contentum, una cum quadrato ex EG aequale quadrato ex GF[b]. eſt autem GF aequalis GH; rectangulum igitur a BE, EF, una cum quadrato ex EG aequale eſt quadrato ex GH. ſed quadrato ex GH aequalia ſunt ex HE, EG quadrata[c]. rectangulum igitur a BE, EF, una cum quadrato ex EG aequale eſt quadratis ex HE, EG. commune auferatur ex EG quadratum; reliquum igitur rectangulum a BE, EF contentum eſt aequale quadrato ex EH. ſed contentum a BE, EF eſt ipſum BD, quoniam EF eſt aequalis ED; ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH eſt aequale. eſt autem BD aequale rectilineo A; rectilineum igitur A quadrato ex EH deſcripto aequale erit. Dato igitur rectilineo A aequale quadratum conſtitutum eſt, ex ipſa videlicet EH deſcriptum. Q. E. F.




b. 5. 2.

c. 47. 1.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS
# ELEMENTORUM
## LIBER TERTIUS.

### DEFINITIONES.

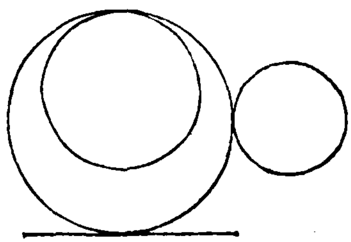
I.

AEQUALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt aequales, vel quorum quae ex centris ſunt aequales.

'Haec non eſt definitio ſed Theorema cujus veritas patet; ſi enim 'circuli, quorum quae ex centris ſunt aequales, ſibi mutuo applicentur 'ita ut centra eorum congruant, congruent et ipſi circuli.'

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quae tangens circulum et producta ipſum non ſecat.

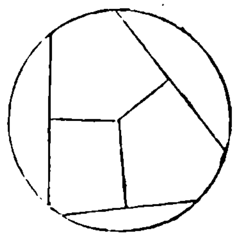


III.

Circuli contingere ſeſe dicuntur, qui tangentes ſe mutuo, ſe ipſos non ſecant.

In

IV.



In circulo aequaliter diſtare a centro rectae lineae dicuntur, quando a centro ad ipſas perpendiculares ductae ſunt aequales.

V.

Magis autem diſtare a centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

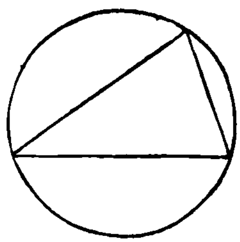
VI.

Segmentum circuli eſt figura, quae recta linea et circuli circumferentia continetur.

VII.

" Segmenti autem angulus eſt, qui recta linea et circuli circumferen-
" tia continetur."

VIII.

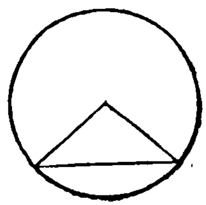


In ſegmento angulus eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumitur aliquod punctum, atque ab ipſo ad extrema rectae lineae quae baſis eſt ſegmenti, rectae lineae ducuntur, angulus rectis ductis contentus.

IX.

Quando autem continentes angulum rectae lineae aſſumunt circumferentiam, illi inſiſtere angulus dicitur.

X.

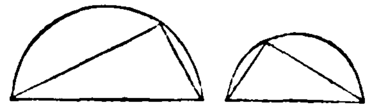


Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis quae angulum continent, et circumferentia ab ipſis aſſumpta.

Similia

XI.

Similia circulorum ſegmenta ſunt, quae angulos capiunt aequales, vel in quibus anguli ſunt inter ſe aequales.



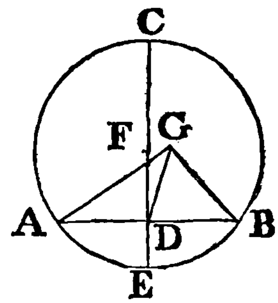
## PROP. I. PROB.

DATI circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC; oportet circuli ABC centrum invenire.

Ducatur in ipſo quaedam recta linea AB utcunque, et in puncto D bi-
a. 10. 1. fariam ſecetur[a], a puncto autem D ipſi AB ad rectos angulos ducatur
b. 11. 1. DC,[b], et ad E producatur, et ſecetur CE bifariam in F. dico punctum F centrum eſſe circuli ABC.

Non enim; ſed ſi fieri poteſt ſit G centrum, et jungantur GA, GD, GB. itaque quoniam DA eſt aequalis DB, communis autem DG, erunt duae AD, DG duabus BD, DG aequales, altera alteri, et baſis GA aequalis eſt baſi GB, ſunt enim ex centro G; angulus igitur ADG
c. 8. 1. angulo GDB eſt aequalis[c]. cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos qui
d. 10. Def. 1. deinceps ſunt aequales inter ſe fecerit, rectus [d] eſt uterque aequalium angulorum; ergo angulus GDB eſt rectus. ſed et rectus eſt FDB; aequalis igitur eſt angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non poteſt. quare G non eſt circuli ABC centrum. ſimiliter oſtendemus neque aliud eſſe praeter ipſum F. ergo F centrum eſt circuli ABC. Quod erat inveniendum.




Cor.

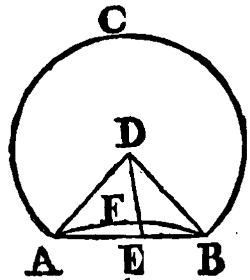
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi in circulo recta linea, rectam lineam bifariam et ad angulos rectos ſecet, in ſecante erit centrum circuli.

## PROP. II. THEOR.

SI in circumferentia circuli duo quaevis puncta ſumantur, quae ipſa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC, et in circumferentia ipſius ſumantur duo quaevis puncta A, B; dico rectam lineam a puncto A ad B ductam, intra circulum cadere.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt cadat extra ut AEB; et ſumatur circuli ABC centrum[a], et ſit D, junganturque AD, DB, occurratque DE circumferentiae in F. Quoniam igitur DA eſt aequalis DB, erit et angulus DAB aequalis[b] angulo DBA; et quoniam trianguli DAE unum latus AEB producitur, erit angulus DEB angulo DAE major[c]; angulus autem DAE aequalis eſt angulo DBE, ergo DEB angulus angulo DBE eſt major. ſed majori angulo majus latus ſubtenditur[d]; major igitur eſt DB ipſa DE. aequalis autem eſt DB ipſi DF; ergo DF eſt major DE, minor majore, quod fieri non poteſt. recta igitur linea a puncto A ducta ad B non cadet extra circulum. ſimiliter oſtendemus neque in ipſam cadere circumferentiam. cadet igitur intus. ſi igitur in circumferentia &c. Q. E. D.



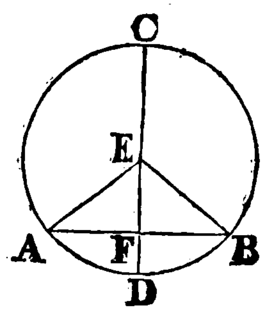

a. 1. 3.
b. 5. 1.
c. 16. 1.
d. 19. 1.

## PROP. III. THEOR.

SI in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet; et ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ad angulos rectos ipsam secet, et bifariam secabit.

Sit circulus ABC, et in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. dico et ad angulos rectos ipsam secare.

a. 1. 3. Sumatur enim circuli ABC centrum [a], et sit E, et EA, EB jungantur. Quoniam igitur AF est aequalis FB, communis autem FE, duae AF, FE duabus BF, FE aequales sunt, et basis EA basi EB est aequalis; ergo et angulus AFE angulo BFE ae-
b. 8. 1. qualis erit [b]. cum autem recta linea super rectam insistens, angulos qui deinceps sunt, aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium an-
c. Def. 10. 1. gulorum [c]. uterque igitur AFE, BFE est rectus; quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secabit.




Sed secet CD ipsam AB ad rectos angulos, dico et bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB aequalem esse.

Iisdem enim constructis, quoniam EA quae ex centro est aequalis
d. 5. 1. EB, et angulus EAF angulo EBF aequalis erit [d]; est autem et AFE rectus aequalis recto BFE. duo igitur triangula sunt EAF, EBF quae duos angulos duobus angulis aequales habent, unumque latus uni lateri aequale, EF commune scilicet utrisque, quod uni aequalium angulorum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt [e].

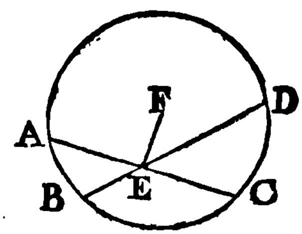
bebunt[e]. aequalis igitur est AF ipsi FB. si igitur in circulo recta linea &c. Q. E. D. e. 26. 1.

## PROP. IV. THEOR.

SI in circulo duae rectae lineae non ductae per centrum se invicem secent, sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD, et in ipso duae rectae lineae AC, BD se invicem secent in puncto E, non ductae per centrum. dico eas sese bifariam non secare.

Si enim fieri potest, secent sese bifariam, ita ut AE sit aequalis EC, et BE ipsi ED. si igitur una rectarum per centrum transit, manifestum est eam non posse bifariam secari ab altera quae non transit per centrum. si vero neutra ipsarum per centrum transit, sumatur centrum ABCD circuli[a], et sit F, et EF jungatur. Quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam AC non ductam per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam secabit[b]; quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam BD non ductam per centrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit[b]; rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus et FEA; ergo FEA angulus ipsi FEB aequalis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur AC, BD sese bifariam secant. si igitur in circulo &c. Q. E. D.




a. 1. 3.

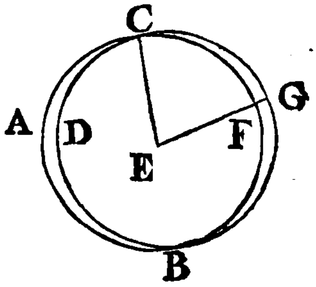
b. 3. 3.

## PROP. V. THEOR.

SI duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli ABC, CDG ſe invicem ſecent in punctis B, C. dico ipſorum idem centrum non eſſe.

Si enim fieri poteſt, ſit centrum E; jungaturque EC, et EFG utcunque ducatur. et quoniam E centrum eſt circuli ABC, erit CE ipſi EF aequalis. rurſus quoniam E centrum eſt CDG circuli, aequalis eſt CE ipſi EG. ſed oſtenſa eſt CE aequalis EF; ergo FE ipſi EG aequalis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur punctum E centrum eſt circulorum ABC, CDG. ſi igitur duo circuli &c. Q. E. D.

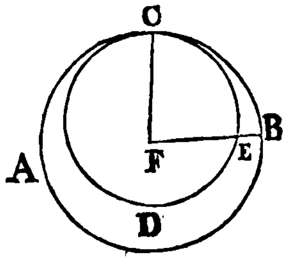



PROP. VI. THEOR.

**SI duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.**

Duo enim circuli ABC, CDE contingant ſeſe intra in puncto C. dico ipſorum non eſſe idem centrum.

Si enim fieri poteſt, ſit F; jungaturque FC, et FEB utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli ABC, aequalis eſt CF ipſi FB. rurſus quoniam F centrum eſt circuli CDE, erit CF aequalis FE. oſtenſa autem eſt CF aequalis FB; ergo et FE ipſi FB eſt aequalis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur F punctum centrum eſt circulorum ABC, CDE. ſi igitur duo circuli &c. Q. E. D.

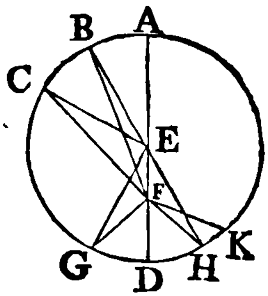



PROP. VII.

## PROP. VII. THEOR.

SI in circuli diametro aliquod punctum sumatur quod non sit centrum circuli, et ab eo in circumferentiam cadant quaevis rectae lineae; maxima quidem erit in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum autem propinquior ei quae per centrum transit semper remotiore major est. at duae tantum aequales ab eodem puncto in circumferentiam cadent ad utrasque partes minimae.

Sit circulus ABCD, diameter autem ejus AD, et in ipsa AD sumatur aliquod punctum F quod non sit centrum circuli; sit autem centrum circuli E, et a puncto F in circumferentiam ABCD cadant quaedam rectae lineae FB, FC, FG. dico FA maximam esse, et FD minimam; reliquarum autem, FB quidem majorem quam FC, FC vero majorem quam FG.




Jungantur enim BE, CE, GE; et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora[a], erunt BE, EF majores quam BF; est autem AE aequalis BE, ergo BE, EF ipsi AF sunt aequales; major igitur est AF quam FB. rursus quoniam BE est aequalis CE, communis autem FE; duae BE, EF duabus CE, EF aequales sunt; sed BEF angulus major est angulo CEF, basis igitur BF basi FC est major[b]. eadem ratione et CF major est quam FG. rursus quoniam GF, FE majores sunt quam EG[a], aequalis autem EG ipsi ED, erunt GF, FE majores quam ED. communis auferatur FE; ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, et FD minima; major vero BF quam FC, et FC quam FG.

a. 20. 1.

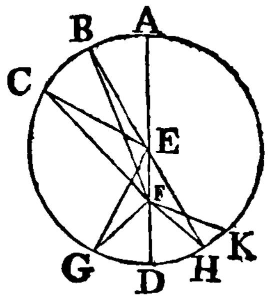
b. 24. 1.

Dico

Dico et a puncto F duas tantum rectas lineas aequales cadere in circumferentiam ABCD ad utrasque partes minimae FD. constituatur enim ad rectam lineam EF, et ad punctum

c. 23. 1. in ea E, angulo GEF aequalis angulus [c] FEH, et FH jungatur. Quoniam igitur GE est aequalis EH, communis autem EF, duae GE, EF duabus HE, EF aequales sunt; et angulus GEF est aequalis angulo HEF; basis igi-

d. 4. 1. tur FG basi FH aequalis erit [d]. dico a puncto F ad circumferentiam non cadere aliam ipsi FG aequalem. si enim fieri potest, cadat FK, et quoniam FK est aequalis FG, estque ipsi FG aequalis FH, erit et FK ipsi FH aequalis, videlicet propinquior ei quae per centrum transit aequalis remotiori; quod fieri non potest. si igitur in circuli &c. Q. E. D.

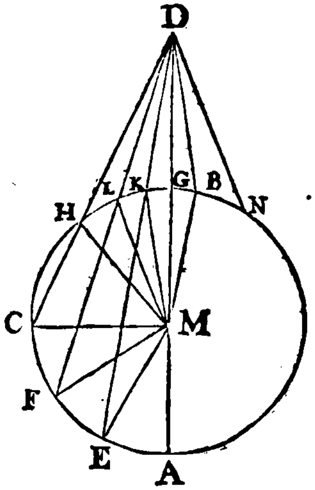



## PROP. VIII. THEOR.

SI extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circumferentiam ducantur quaedam rectae lineae, quarum una per centrum transeat, reliquae vero utcunque; earum quidem quae in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quae per centrum transit; aliarum autem propinquior ei quae per centrum, semper remotiore major est. at earum quae in convexam circumferentiam cadunt, minima est quae inter punctum et diametrum interjicitur; aliarum vero quae propinquior minimae, semper remotiore est minor. duae autem tantum aequales a puncto in circumferentiam cadunt ad utrasque partes minimae.

Sit

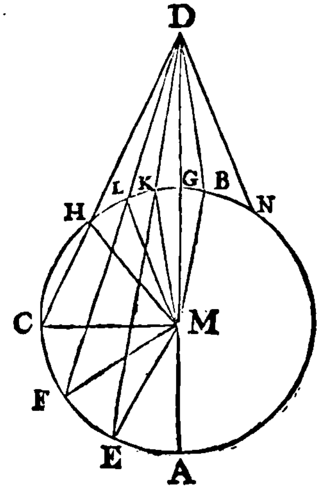
Sit circulus ABC, et extra circulum ſumatur aliquod punctum D; ab eo autem ad circumferentiam ducantur rectae lineae quaedam DA, DE, DF, DC, ſitque DA per centrum. dico earum quidem quae in concavam circumferentiam AEFC cadunt maximam eſſe DA quae per centrum tranſit; et quae propinquior eſt ei quae per centrum ſemper major erit remotiore, videlicet DE quidem quam DF, DF vero quam DC: earum vero quae in convexam circumferentiam HLKG cadunt, minimam eſſe DG quae inter punctum D et diametrum AG interjicitur, et quae propinquior minimae ſemper eſt minor remotiore, videlicet DK quam DL, et DL quam DH.




Sumatur enim centrum circuli [a] ABC, quod ſit M, et jungantur ME, MF, MC, MK, ML, MH. et quoniam AM eſt aequalis ME, communis apponatur MD, ergo AD eſt aequalis ipſis EM, MD; ſed EM, MD ſunt majores quam ED [b], ergo et AD quam ED eſt major. rurſus quoniam aequalis eſt ME ipſi MF, communis autem MD, erunt EM, MD ipſis FM, MD aequales; at angulus EMD major eſt angulo FMD, baſis igitur ED baſi FD major erit [c]: ſimiliter oſtendemus et FD majorem eſſe quam CD. ergo maxima eſt DA; major autem DE quam DF, et DF quam DC. et quoniam MK, KD ſunt majores quam MD [b], et MK eſt aequalis MG, erit reliqua KD quam reliqua GD major [d], quare GD minor quam KD; minima igitur eſt GD. et quoniam ſuper trianguli MLD uno latere MD, duae rectae lineae MK, KD intra conſtituuntur, erunt MK, KD minores ipſis ML, LD [e], quarum MK eſt aequalis ML; reliqua igitur DK minor eſt quam reliqua DL. ſimiliter oſtendemus,

a. 1. 3.
b. 20. 1.
c. 24. 1.
d. Ax. 4.
e. 21. 1.

mus, et DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est, minor vero DK quam DL, et DL quam DH. dico etiam duas tantum aequales a puncto D in circumferentiam cadere ad utrasque minimae partes. constituatur ad rectam lineam MD, et ad punctum in ea M, angulo KMD aequalis angulus DMB, et DB jungatur. itaque quoniam MK est aequalis MB, communis autem MD, duae KM, MD duabus BM, MD aequales sunt, altera alteri, et angulus KMD aequalis angulo BMD;




f. 4. 1. basis igitur DK basi DB est aequalis[f]. dico autem a puncto D aliam ipsi DK aequalem in circumferentiam non cadere. si enim fieri potest, cadat DN; et quoniam DK est aequalis DN, et DK ipsi DB est aequalis, erit et DB aequalis DN, propinquior scilicet minimae aequalis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.

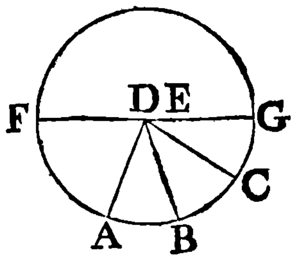
SI intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo ad circumferentiam cadant plures quam duae rectae lineae aequales; punctum quod sumitur circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D, atque a puncto D ad circumferentiam cadant plures quam duae rectae lineae aequales DA, DB, DC. dico punctum D centrum esse circuli ABC.

Non enim; sed si fieri potest, sit E centrum, et juncta DE ad

puncta

puncta F, G producatur; ergo FG diameter eſt circuli ABC. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC ſumptum eſt aliquod punctum D quod non eſt centrum circuli, maxima quidem erit DG, major autem DC quam DB, et DB quam DA[a]. ſed et aequales, quod fieri non poteſt; non igitur E centrum eſt circuli ABC. ſimiliter oſtendemus neque aliud punctum centrum eſſe praeter ipſum D; eſt igitur D centrum circuli ABC. ſi igitur intra circulum &c. Q. E. D.

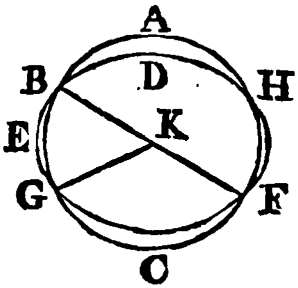



a. 7. 3.

## PROP. X. THEOR.

**CIRCULUS circulum in pluribus quam duobus punctis non ſecat. ‘ N. B. Hoc de ipſorum circumferentiis ‘ intelligendum eſt.’**

Si enim fieri poteſt, circulus ABC circulum DEF ſecet in pluribus punctis quam duobus, nempe in B, G, F, et circuli ABC centrum ſumatur K, et KB, KG, KF jungantur. Quoniam igitur intra circulum DEF ſumptum eſt aliquod punctum K, et ab ipſo K in circumferentiam DEF incidant plures quam duae rectae lineae aequales KB, KG, KF, erit punctum K circuli DEF centrum[a]. eſt autem et K circuli ABC centrum; duorum igitur circulorum qui ſeſe ſecant idem eſt centrum, quod fieri non poteſt[b]. quare circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non ſecat. Q. E. D.



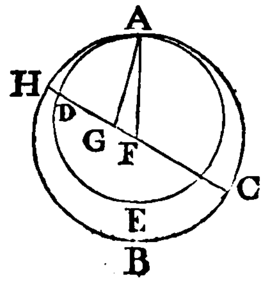

a. 9. 3.

b. 5. 3.

## PROP. XI. THEOR.

**SI duo circuli ſeſe intus contingant, et ſumantur centra ipſorum; recta linea ipſorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.**

Duo enim circuli ABC, ADE ſeſe intus contingant in puncto A, et ſumatur circuli quidem ABC centrum F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam conjungentem puncta G, F, ſi producatur, in punctum A cadere.




Non enim; ſed ſi fieri poteſt, cadat ut FGDH, et AF, AG jungantur. itaque quoniam AG,
a. 20. 1. GF majores ſunt quam FA [a] hoc eſt quam FH, (eſt enim FA aequalis ipſi FH, nam ab eodem ſunt centro) communis auferatur FG, reliqua igitur AG major eſt quam reliqua GH. ſed AG eſt aequalis GD, ergo GD ipsâ GH eſt major, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur puncta F, G conjungens recta linea extra contactum A cadet. cadet igitur in ipſum. ſi igitur duo circuli &c. Q. E. D.

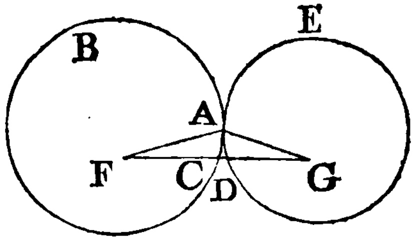
## PROP. XII. THEOR.

**SI duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.**

Duo enim circuli ABC, ADE ſeſe extra contingant in puncto A; et ſumatur circuli quidem ABC centrum F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam puncta F, G conjungentem per contactum A tranſire.

Non

Non enim, sed, si fieri potest, cadat ut FCDG, et FA, AG jungantur. quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF aequalis FC. rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD aequalis. sunt igitur FA, AG ipsis FC, DG aequales; ergo tota FG major est

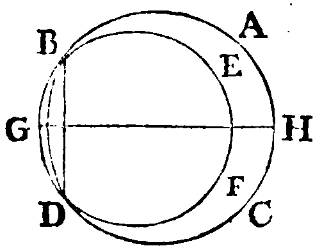


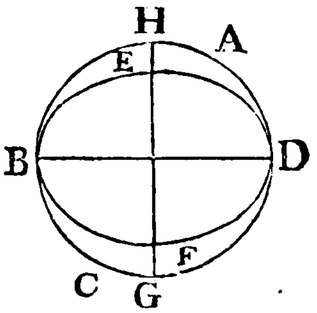

quam FA, AG. sed et minor[a]; quod fieri non potest. non igitur a. 20. 1.
puncta F, G conjungens recta linea per contactum non transibit. per ipsum igitur transit. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

## PROP. XIIII. THEOR.

**Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat.**

Si enim fieri potest, circulum ABC circulus EBFc ontingat primùm intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, D; jungatur BD, et ducatur * GH bifariam et ad rectos angulos secans ipsam BD. Quoniam * 10, 11. 1.

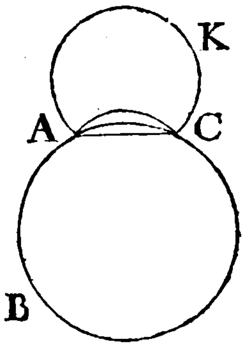



igitur puncta B, D sunt in circumferentia utriusque circuli, recta BD cadet intra utrumque circulum[a]. igitur in recta GH quae ipsam BD bifa- a. 2. 3.
riam et ad rectos angulos secat, erit utriusque circuli centrum[b]; ergo GH b. Cor. 1. 3.

c. 11. 3. producta cadet in circulorum contactum [c]; sed, in contactum non cadit, quia B, D puncta sunt extra rectam GH, quod est absurdum. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis quam uno.

Dico etiam neque extra contingere; si enim fieri potest circulum ABC contingat circulus AKC in pluribus punctis quam uno, videlicet in A, C, et AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia circuli AKC sumpta sunt duo puncta A, C recta linea AC




a. 2. 3. quae ipsa conjungit intra circulum AKC cadet [a]. est autem circulus AKC extra circulum ABC, quare recta AC est extra ABC circulum; quoniam vero A, C puncta sunt in circumferentia ipsius ABC circuli, recta AC est intra [a] eundem, quod est absurdum. non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quam uno. ostensum autem est neque intus. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingit. Q. E. D.

## PROP. XIV. THEOR.

IN circulo aequales rectae lineae aequaliter a centro distant; et quae aequaliter a centro distant sunt inter se aequales.

Sit circulus ABDC, et in ipso aequales sint rectae lineae AB, CD. dico eas a centro aequaliter distare.

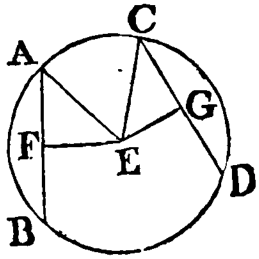
Sumatur enim circuli ABDC centrum, sitque E, et ab ipso ad AB, CD perpendiculares ducantur EF, EG, et AE, EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quaedam EF per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et ipsam bifariam

riam fecabit[a]. quare AF eſt aequalis FB, ideoque AB dupla eſt ipſius AF. eadem ratione, et CD dupla eſt CG. atque eſt AB ipſi CD aequalis; aequalis igitur et AF ipſi CG. et quoniam AE eſt aequalis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC aequale. ſed quadrato quidem ex AE aequalia ſunt ex AF, FE quadrata[b], rectus enim eſt angulus ad F; quadrato vero ex EC aequalia ſunt quadrata ex EG, GC, rectus eſt enim angulus ad G. quadrata igitur ex AF, FE aequalia ſunt quadratis ex CG, GE, quorum quadratum ex AF eſt aequale quadrato ex CG, etenim aequalis eſt AF ipſi CG; reliquum igitur ex FE aequale eſt reliquo quadrato ex EG, quare recta FE ipſi EG eſt aequalis. in circulo autem aequaliter a centro diſtare rectae lineae dicuntur, quando a centro ad ipſas perpendiculares ductae aequales ſunt[c]. igitur AB, CD a centro aequaliter diſtant.

a. 3. 3.

b. 47. 1.

c. 4. Def. 3.




Sed AB, CD aequaliter diſtent a centro, hoc eſt, aequalis ſit FE ipſi EG; dico AB ipſi CD aequalem eſſe. iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB quidem duplam eſſe ipſius AF, CD vero ipſius CG. et quoniam aequalis eſt AE ipſi EC, erit et ex AE quadratum quadrato ex EC aequale. ſed quadrato quidem ex AE aequalia ſunt [b] quadrata ex EF, FA, quadrato vero ex EC aequalia [b] quadrata ex EG, GC; quadrata igitur ex EF, FA quadratis ex EG, GC aequalia ſunt; quorum quadratum ex FE aequale eſt quadrato ex EG, eſt enim FE ipſi EG aequalis; reliquum igitur ex AF quadratum aequale eſt reliquo ex CG; eſt igitur recta linea AF aequalis ipſi CG. et eſt AB quidem dupla ipſius AF, CD vero dupla ipſius CG; aequalis igitur eſt AB ipſi CD. in circulo igitur aequales rectae lineae &c. Q. E. D.

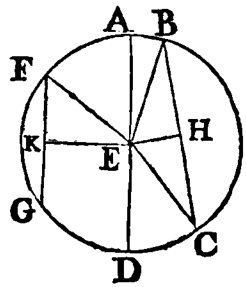
PROP. XV.

## PROP. XV. THEOR.

IN circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior centro remotiore major est; et quae major est, propinquior erit centro minore.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum vero E; et propinquior quidem centro sit BC, remotior autem FG. dico AD maximam esse, et BC majorem quam FG.

Ducantur enim a centro ad BC, FG perpendiculares EH, EK, et EB, EC, EF jungantur. Quoniam igitur aequalis est AE ipsi EB, et ED ipsi EC, erit AD aequalis ipsis BE, EC. sed
a. 20. 1. BE, EC majores sunt quam BC [a], quare et AD quam BC major erit.




Et quoniam BC propinquior est centro, remo-
b. 5. Def. 3. tior vero FG, erit EK major quam EH [b]. est autem, ut in praecedente ostensum fuit, BC dupla ipsius BH, et FG dupla ipsius FK, et quadrata ex EH, HB aequalia quadratis ex EK, KF, quorum quadratum ex EH minus est quadrato ex EK, minor enim est EH ipsâ EK; reliquum igitur quadratum ex BH reliquo ex FK majus erit, quare recta BH major erit ipsâ FK; et propterea BC erit major quam FG.

Sed sit BC major quam FG, erit BC propinquior centro quam FG, hoc est, iisdem constructis, erit EH minor quam EK. Quoniam enim BC major est quam FG, erit et BH major quam FK. quadrata autem ex BH, HE aequalia sunt quadratis ex FK, KE, quorum ex BH quadratum quadrato ex FK est majus, est enim BH major quam FK; reliquum igitur quadratum ex EH reliquo ex EK minus erit, et recta linea EH minor erit quam EK. in circulo igitur &c. Q. E. D.

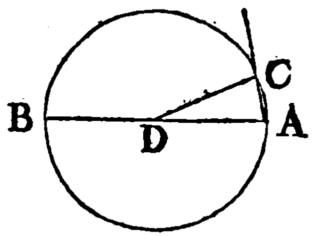
PROP. XVI.

## PROP. XVI. THEOR.

**QUAE diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta est, cadit extra circulum; et in locum inter rectam lineam et circumferentiam recta linea non cadet; sive, quod idem est, circumferentia circuli transit inter rectam quae diametro est ad rectos angulos, et rectam quae cum diametro angulum acutum quantumvis magnum continet, vel quae angulum quantumvis parvum continet cum recta quae ad rectos angulos est diametro.**

Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB; dico rectam lineam, quae ab extremitate A diametri ipsi AB ad rectos angulos ducta est, extra circulum cadere.

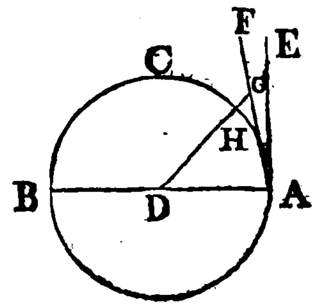
Non enim; sed, si fieri potest, cadat intus ut AC, et DC jungatur.




Quoniam igitur aequalis est DA ipsi DC, erit et angulus DAC angulo ACD aequalis[a]; rectus autem est DAC, rectus igitur est ACD; quare anguli DAC, ACD duobus rectis aequales sunt; quod fieri non potest[b]. non igitur a puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere; extra igitur cadet, ut AE, in figura sequente.

a. 5. 1.

b. 17. 1.

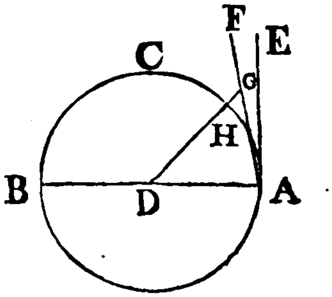



Dico in locum inter rectam lineam AE et circumferentiam ABC rectam lineam non cadere. si enim fieri potest, cadat ut FA, et a puncto D ad FA perpendicularis ducatur[c] DHG. et quoniam rectus est angulus AGD,

c. 12. 1.

minor

b. 17. 1. d. 19. 1. minor autem recto DAG[b], erit DA quam DG major[d]. aequalis autem est DA ipsi DH; major igitur est DH ipsa DG, minor majore, quod fieri non potest. non igitur in locum inter rectam lineam et circumferentiam, recta linea cadet. sive, quod idem est, circumferentia circuli transit inter rectam quae diametro est ad rectos angulos, et rectam quae cum diametro angulum acutum quantumvis magnum continet, vel quae angulum quantumvis parvum continet cum recta quae ad rectos angulos est diametro. ‘Et hoc, nihil vero aliud, intelligendum est quando in textu ‘Graeco et versionibus, semicirculi angulus dicitur major omni angulo ‘acuto, et reliquus minor.’




Cor. Ex his manifestum est rectam lineam quae ab extremitate diametri circuli eidem ad rectos angulos ducta est, circulum contingere; et rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quae
e. 2. 3. occurrit in duobus punctis intra ipsum cadere ostensa est[e]. ‘Et praeterea, unicam tantum rectam posse circulum in eodem puncto contingere.’

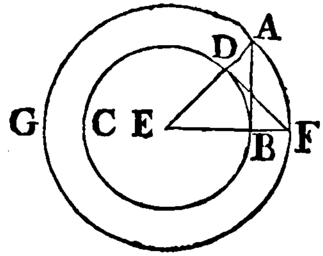
## PROP. XVII. PROB.

**A Dato puncto extra circulum, vel in ejus circumferentia, rectam lineam ducere quae datum circulum contingat.**

Primo, sit datum punctum A extra datum circulum BCD. oportet a puncto A rectam lineam ducere quae datum circulum contingat.
a. 1. 3. Sumatur enim centrum circuli E[a], et AE jungatur; et centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur; et a puncto D ipsi

ipſi EA ad rectos angulos ducatur [b] DF, junganturque EBF, AB. dico b. 11. 1.
a puncto A ductam eſſe AB quae circulum BCD contingit.

Quoniam enim E centrum eſt circulorum BCD, AFG, erit EA aequalis EF, et ED ipſi EB; duae igitur AE, EB duabus FE, ED aequales ſunt, et angulum communem ad E continent; ergo baſis DF baſi AB eſt aequalis, triangulumque EDF aequale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis [c]. aequalis igitur eſt angulus EBA angulo EDF. rectus autem eſt EDF, rectus igitur eſt EBA. atque eſt EB ex centro; quae autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducta eſt, circulum contingit [d]. contingit igitur AB circulum.



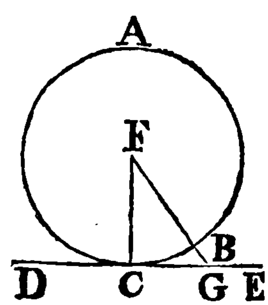

c. 4. 1.

d. Cor. 16. 3.

'Sit autem datum punctum in circumferentia circuli, ut punctum D, 'et ad centrum E ducatur DE, et a puncto D, ipſi DE ad rectos an-'gulos ducatur [b] DF; continget [d] haec circulum.' A dato igitur puncto ducta eſt recta linea quae datum circulum contingit. Q. E. F.

## PROP. XVIII. THEOR.

**SI circulum contingat quaedam recta linea, a centro autem ad tactum recta linea ducatur, ducta ad contingentem perpendicularis erit.**

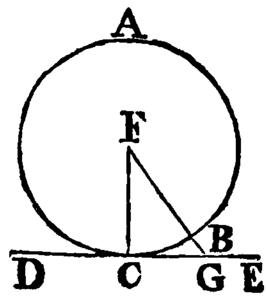



Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in puncto C, et circuli ABC ſumatur centrum F, et ab F ad C ducatur FC; dico FC ad ipſam DE perpendicularem eſſe.

Si enim non ſit, ducatur a puncto F ad DE

M perpendicularis [a]

a. 12. 1. perpendicularis [a] FBG. Quoniam igitur angulus FGC rectus eſt, erit b. 17. 1. GCF acutus [b]; majorem autem angulum ma- c. 19. 1. jus latus ſubtendit [c]. major igitur eſt FC quam FG; aequalis autem FC ipſi FB; major igitur eſt FB ipsâ FG, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur FG eſt perpendicularis ad DE. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam praeter ipſam FC. eſt igitur FC perpendicularis ad DE. ſi igitur circulum contingat &c. Q. E. D.

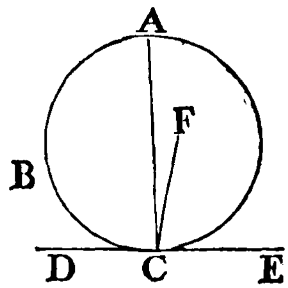



### PROP. XIX. THEOR.

**SI circulum contingat quaedam recta linea, a tactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ducta erit centrum circuli.**

Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in C, et a C ipſi DE ad rectos angulos ducatur CA; dico in ipſa CA centrum circuli eſſe.

Non enim; ſed, ſi fieri poteſt, ſit F centrum, et jungatur CF. quoniam igitur circulum ABC contingit quaedam recta linea DE, et a centro ad tactum ducta eſt FC, erit FC ad ipſam DE perpendi- a. 18. 3. cularis [a]; rectus igitur angulus eſt FCE. eſt autem et ACE rectus; angulus igitur FCE eſt aequalis ipſi ACE, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur F centrum eſt circuli ABC. ſimiliter oſtendemus neque aliud aliquod eſſe praeterquam in ipſa CA, centrum igitur eſt in CA. quare ſi circulum contingat &c. Q. E. D.

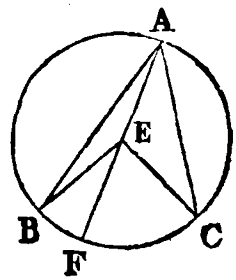



PROP. XX.

## PROP. XX. THEOR.

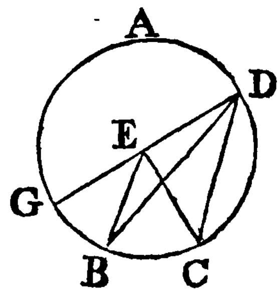
IN circulo angulus qui ad centrum duplus eſt ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro baſi habent.

Sit circulus ABC, et ad centrum quidem ejus ſit angulus BEC, ad circumferentiam vero BAC, habeant autem eandem circumferentiam BC pro baſi; dico BEC angulum anguli BAC duplum eſſe.




Primo, ſit centrum E intra angulum BAC, et jungatur AE et ad F producatur. quoniam igitur EA eſt aequalis EB, erit et angulus EAB angulo EBA aequalis[a]; anguli igitur EAB, EBA dupli ſunt ipſius EAB; ſed angulus BEF eſt aequalis angulis EAB, EBA[b]; ergo et angulus BEF ipſius EAB eſt duplus. eadem ratione et angulus FEC duplus eſt ipſius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit.

a. 5. 1.
b. 32. 1.

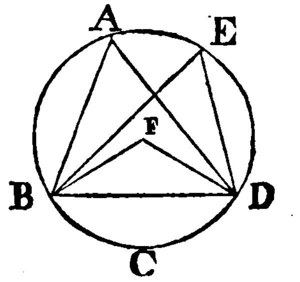



Rurſus inflectatur BDC ad circumferentiam, ita ut centrum E ſit extra angulum BDC, junctaque DE ad G producatur. ſimiliter oſtendemus angulum GEC anguli GDC duplum eſſe, quorum GEB duplus eſt ipſius GDB; reliquus igitur BEC reliqui BDC eſt duplus. in circulo igitur angulus &c. Q. E. D.

## PROP. XXI. THEOR.

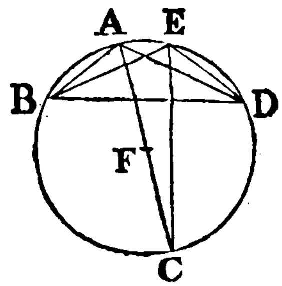
IN circulo qui in eodem ſegmento ſunt anguli inter ſe aequales ſunt.

Sit circulus ABCD, et in eodem ſegmento BAED anguli ſint BAD, BED; dico eos inter ſe aequales eſſe.




Sumatur enim circuli ABCD centrum, ſitque F. et primo, ſit BAED ſegmentum majus ſemicirculo, et jungantur BF, FD. et quoniam angulus quidem BFD eſt ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, et circumferentiam eandem BCD pro baſi habent, erit BFD angu-
a. 20. 3. lus anguli BAD duplus[a]. eadem ratione angulus BFD duplus eſt etiam anguli BED. angulus igitur BAD angulo BED aequalis erit.

Sit vero ſegmentum BAED non majus ſemicirculo, et in ipſo ſint anguli BAD, BED, erunt hi inter ſe aequales. ad centrum enim F ducatur AF, et producatur ad C, et CE jungatur. ſegmentum igitur BAEC majus eſt ſemicirculo, quare anguli in eo BAC, BEC ſunt inter ſe aequales. eadem ratione aequales inter ſe ſunt anguli CAD, CED. totus igitur angulus BAD toti BED eſt aequalis. in circulo igitur qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe aequales ſunt. Q. E. D.



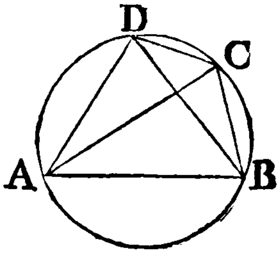

## PROP. XXII. THEOR.

QUADRILATERORUM quae in circulis ſunt, anguli oppoſiti ſunt duobus rectis aequales.

Sit circulus ABCD, et in ipſo quadrilaterum ABCD; dico angulos ipſius oppoſitos duobus rectis aequales eſſe.

Jungantur AC, BD; quoniam igitur omnis trianguli tres anguli
a. 32. 1. duobus rectis ſunt aequales[a], erunt trianguli ABC tres anguli CAB, ABC,

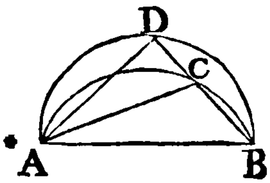
ABC, BCA aequales duobus rectis. aequalis [b] autem est angulus CAB b. 21. 3. angulo CDB, in eodem enim sunt segmento BADC; angulus vero ACB aequalis est ipsi ADB, sunt enim in eodem segmento ADCB. totus igitur ADC angulis BAC, ACB aequalis est. communis apponatur ABC angulus; anguli igitur ABC, CAB, BCA angulis ABC, ADC sunt aequales. sed ABC, CAB, BCA sunt duobus rectis aequales; ergo et anguli ABC, ADC duobus rectis aequales erunt. similiter ostendemus angulos quoque BAD, DCB duobus rectis esse aequales. quadrilaterorum igitur quae in circulis sunt &c. Q. E. D.




## PROP. XXIII. THEOR.

**SUPER eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, et non sibi mutuo congruentia, ex eadem parte non constituentur.**

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circulorum segmenta ACB, ADB similia, et sibi mutuo non congruentia, ex eadem parte constituantur. quoniam igitur circulus ACB circulum ADB secat in duobus punctis A, B, idem eundem non secabit in alio puncto [a]. necesse igitur est ut unum segmentum cadat intra alterum; cadat ACB intra ipsum ADB, et ducatur recta linea BCD, junganturque CA, DA. itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB, similia autem circulorum segmenta sunt quae angulos capiunt aequales [b]; erit ACB angulus aequalis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non potest [c]. non igitur super eadem recta linea,




a. 10. 3.

b. 11. Def. 3.

c. 16. 1.

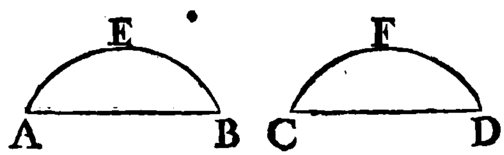
linea, duo circulorum ſegmenta, ſimilia, et ſibi mutuo non congruentia, ex eadem parte conſtituentur. Q. E. D.

## PROP. XXIV. THEOR.

**SUPER aequalibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta inter ſe aequalia ſunt.**

Sint enim ſuper aequalibus rectis lineis AB, CD ſimilia circulorum ſegmenta AEB, CFD; dico ſegmentum AEB ſegmento CFD aequale eſſe.

Applicato enim ſegmento AEB ſegmento CFD, et poſito quidem puncto A in C, recta vero linea AB ſuper CD, congruet et B punctum




puncto D, propterea quod AB ipſi CD ſit aequalis. non igitur, congruente recta linea AB ipſi CD, non congruet ſegmentum AEB ſegmento CFD [a]. congruet igitur et ipſi aequale erit. ſuper aequalibus igitur rectis lineis &c. Q. E. D.

a. 23. 3.

## PROP. XXV. PROB.

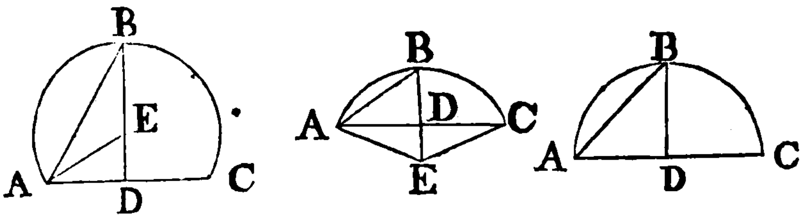
**CIRCULI ſegmento dato deſcribere circulum cujus eſt ſegmentum.**

Sit datum circuli ſegmentum ABC; oportet deſcribere circulum cujus ABC eſt ſegmentum.

a. 10. 1. Secetur AC bifariam [a] in D, et a puncto D ipſi AC ad rectos angulos

gulos ducatur [b] DB, et AB jungatur. ſi igitur * anguli ABD, BAD in- b. 11. 1. * Fig. 1.
ter ſe aequales fuerint, erit recta BD aequalis [c] ipſi DA, et propterea c. 6. 1.
ipſi DC. et quoniam tres rectae lineae DA, DB, DC ſunt inter ſe ae-
quales, erit D centrum circuli [d]. centro igitur D, intervallo autem uni d. 9. 3.
ipſarum DA, DB, DC aequali, circulus deſcribatur; tranſibit hic per
reliqua puncta, et circulus cujus ſegmentum eſt ABC deſcriptus erit.
quoniam vero centrum D eſt in ipſa AC, erit ABC ſegmentum ſemi-
circulus. ſi autem * anguli ABD, BAD inter ſe inaequales fuerint, ad * Fig. 2, 3.
rectam lineam AB atque ad punctum in ea A conſtituatur angulus BAE
aequalis angulo [e] ABD, et DB ad E producatur, jungaturque EC. e. 23. 1.
Quoniam igitur angulus ABE eſt aequalis angulo BAE, erit et BE

3 2 1




recta linea ipſi EA aequalis [c]. et quoniam AD eſt aequalis DC, com-
munis autem DE, duae AD, DE duabus CD, DE aequales ſunt, altera
alteri; et angulus ADE eſt aequalis angulo CDE, rectus enim uterque
eſt; igitur et baſis AE baſi EC eſt aequalis [f]. ſed oſtenſa eſt AE ae- f. 4. 1.
qualis EB, quare et BE ipſi EC eſt aequalis; ac propterea tres rectae
lineae AE, EB, EC inter ſe aequales ſunt; quare et E centrum eſt
circuli [d]. centro igitur E, intervallo autem uni ipſarum AE, EB, EC
aequali, circulus deſcribatur, hic per reliqua tranſibit puncta, et circulus
cujus ſegmentum eſt ABC deſcriptus erit. et manifeſtum eſt ſi angulus
ABD major fuerit angulo BAD, centrum E cadere extra ſegmentum
ABC, quod propterea minus erit ſemicirculo. ſi autem angulus ABD
minor

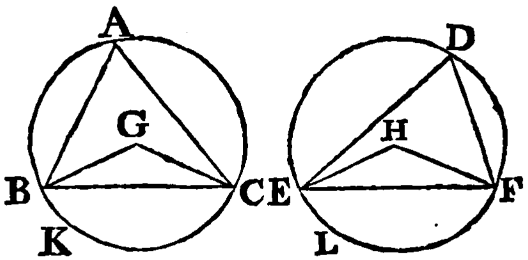
minor fuerit ipſo BAD, centrum E cadet intra ſegmentum ABC, quod propterea majus erit ſemicirculo. Circuli igitur ſegmento dato, deſcriptus eſt circulus cujus eſt ſegmentum. Q. E. F.

## PROP. XXVI. THEOR.

IN aequalibus circulis aequales anguli aequalibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtunt.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipſis aequales anguli ad centra quidem BGC, EHF, ad circumferentias autem BAC, EDF. dico BKC circumferentiam circumferentiae ELF aequalem eſſe.

Jungantur enim BC, EF; et quoniam aequales ſunt ABC, DEF circuli, erunt et quae ex centris aequales; duae igitur BG, GC duabus EH, HF aequales ſunt; et angulus ad G eſt aequalis angulo ad




a. 4. 1. H; baſis igitur BC baſi EF eſt aequalis[a]. et quoniam aequalis eſt an-
b. 11. Def. 3. gulus ad A angulo ad D, ſegmentum BAC ſimile erit ſegmento [b] EDF; et ſunt ſuper aequalibus rectis lineis BC, EF; quae autem ſuper aequalibus rectis lineis ſimilia ſunt circulorum ſegmenta, inter ſe aequalia
c. 24. 3. ſunt[c]; ſegmentum igitur BAC ſegmento EDF eſt aequale. ſed et totus ABC circulus aequalis eſt toti DEF, reliquum igitur ſegmentum

BKC

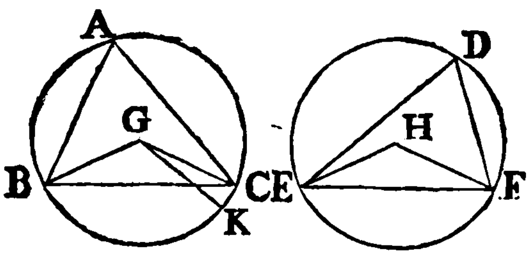
BKC reliquo ELF eſt aequale; circumferentia igitur BKC circumferentiae ELF aequalis erit. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D.

## PROP. XXVII. THEOR.

**IN aequalibus circulis anguli qui aequalibus inſiſtunt circumferentiis inter ſe aequales ſunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant.**

In aequalibus enim circulis ABC, DEF, aequalibus circumferentiis BC, EF inſiſtant anguli ad centra quidem BGC, EHF, ad circumferentias vero BAC, EDF. dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF aequalem eſſe.

Si quidem igitur angulus BGC aequalis ſit angulo EHF, manifeſtum eſt angulum quoque BAC angulo EDF eſſe aequalem [a]. ſin minus unus a. 20. 3.




ipſorum eſt major. ſit major BGC, et conſtituatur ad rectam lineam BG, et ad punctum in ipſa G, angulo EHF aequalis angulus [b] BGK; b. 23. 1.
aequales autem anguli aequalibus inſiſtunt circumferentiis quando ad centra fuerint [c]; aequalis igitur eſt circumferentia BK circumferentiae c. 26. 3.
EF. ſed EF aequalis eſt ipſi BC, ergo et BK ipſi BC eſt aequalis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur inaequalis eſt angulus BGC angulo EHF; ergo eſt aequalis. atque eſt anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A, anguli vero EHF dimidium qui ad D [a].

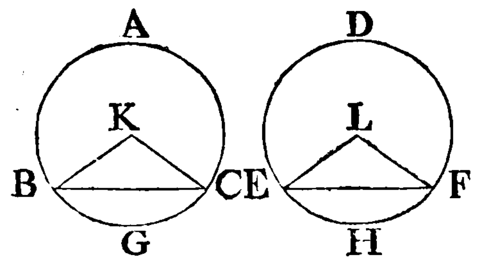
angulus igitur qui ad A angulo qui ad D eſt aequalis. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D.

## PROP. XXVIII. THEOR.

**IN aequalibus circulis aequales rectae lineae circumferentias aequales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.**

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipſis aequales rectae lineae BC, EF quae circumferentias quidem BAC, EDF majores auferant, minores vero BGC, EHF. dico circumferentiam BAC majorem majori EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF aequalem eſſe.

a. 1. 3. Sumantur enim centra circulorum [a] K, L junganturque BK, KC, EL, LF. et quoniam circuli aequales ſunt, erunt et quae ex centris aequales,




duae igitur BK, KC ſunt aequales duabus EL, LF; et baſis BC ae-
b. 8. 1. qualis eſt baſi EF, angulus igitur BKC angulo ELF eſt aequalis [b]. aequales autem anguli aequalibus inſiſtunt circumferentiis quando ad cen-
c. 26. 3. tra fuerint [c], circumferentia igitur BGC aequalis eſt circumferentiae EHF; ſed et totus ABC circulus toti EDF eſt aequalis; reliqua igitur circumferentia BAC reliquae EDF aequalis erit. ergo in aequalibus circulis &c. Q. E. D.

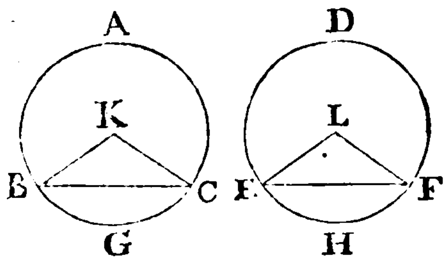
PROP. XXIX.

## PROP. XXIX. THEOR.

IN aequalibus circulis aequales circumferentias aequales rectae lineae subtendunt.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipsis aequales sumantur circumferentiae BGC, EHF, et BC, EF jungantur. dico rectam lineam BC rectae EF aequalem esse.

Sumantur enim centra circulorum [a] K, L, et jungantur BK, KC. EL, LF. et quoniam circumferentia BGC est aequalis circumferentiae EHF, a. 1. 3.




erit et angulus BKC angulo ELF aequalis [b]. et quoniam circuli ABC, DEF sunt aequales, et quae ex centris aequales erunt; duae igitur BK, KC sunt aequales duabus EL, LF, et aequales angulos continent. basis igitur BC basi EF est aequalis [c]. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D. b. 27. 3. c. 4. 1.

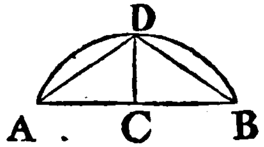
## PROP. XXX. PROB.

DATAM circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ADB, oportet ADB circumferentiam bifariam secare.

Jungatur AB, et in C bifariam secetur [a]; a puncto autem C ipsi AB a. 10. 1.

ad rectos angulos ducatur CD, et jungantur AD, DB. Quoniam igitur AC est aequalis CB, communis autem CD, duae AC, CD duabus BC, CD aequales sunt; et angulus ACD aequalis angulo BCD, rectus enim uterque est; basis igitur AD basi BD est




b. 4. 1. aequalis[b]. aequales autem rectae lineae circumferentias aequales au-
c. 28. 3. ferunt[c], majorem quidem majori, minorem vero minori, et est utraque ipsarum AD, DB semicirculo minor; circumferentia igitur AD circumferentiae DB est aequalis. Data igitur circumferentia bifariam secta est. Q. E. F.

## PROP. XXXI. THEOR.

**IN circulo angulus qui in semicirculo, rectus est; qui vero in majori segmento, minor est recto; et qui in minori, major recto.**

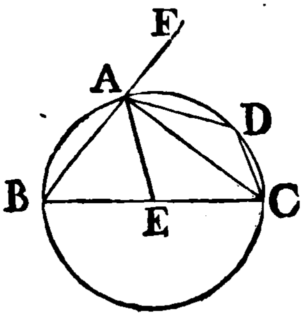
Sit circulus ABCD, diameter autem ejus sit BC, centrum vero E; et ducatur CA circulum dividens in segmenta ABC, ADC, et jungantur BA, AD, DC. Dico angulum quidem qui est in semicirculo BAC rectum esse, qui vero in segmento ABC majore semicirculo, videlicet angulum ABC, minorem esse recto, et qui est in segmento ADC minore semicirculo, sc. ADC angulum, recto majorem esse.

Jungatur AE, et BA ad F producatur. itaque quoniam BE est
a. 5. 1. aequalis EA, erit et angulus EAB aequalis ipsi EBA[a]; rursus quoniam AE est aequalis EC, aequalis erit et angulus EAC angulo ECA[a]; totus igitur angulus BAC est aequalis duobus angulis ABC, ACB. est autem et angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC, ACB aequa-
b. 32. 1. lis[b]; angulus igitur BAC est aequalis angulo FAC, ac propterea uter-
c. 10. Def. 1. que ipsorum rectus[c]. quare in semicirculo BAC angulus CAB rectus est.

Et

Et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC, BAC duobus rectis ſunt minores[d], rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor; atque eſt in ſegmento ABC majore ſemicirculo. d. 17. 1.

Et quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſunt aequales[e], erunt ABC, ADC anguli aequales duobus rectis; et angulus ABC minor eſt recto, reliquus igitur ADC recto major erit; atque eſt in ſegmento ADC minore ſemicirculo. Q. E. D. e. 22. 3.




Et patet circumferentiam AB cadere extra rectam AB quae cum AC baſi ſc. ſegmenti continet angulum rectum verſus partes majoris ſegmenti ABC, circumferentiam vero AD cadere intra rectam AF quae cum eâdem AC angulum rectum continet verſus partes minoris ſegmenti ADC. ‘Et hoc, ‘nihilque aliud, intelligendum eſt quando in textu Graeco et verſioni‘bus, angulus ſegmenti majoris, major; angulus vero ſegmenti minoris ‘minor eſſe dicitur angulo recto.’

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi trianguli unus angulus ſit aequalis duobus reliquis, eum rectum eſſe; propterea quod et qui deinceps eſt, iiſdem eſt aequalis. quando autem anguli deinceps ſunt aequales, recti ſunt[c]. c. Def. 10. 1.

## PROP. XXXII. THEOR.

**SI circulum contingat quaedam recta linea, a tactu autem ducatur recta linea circulum ſecans; anguli quos ad contingentem facit, aequales erunt iis qui ſunt in alternis circuli ſegmentis.**

Circulum

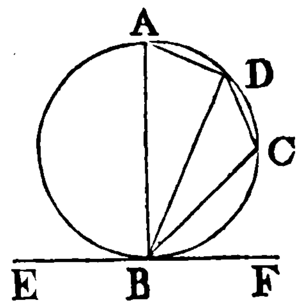
Circulum enim ABCD contingat quaedam recta linea EF in B, et a puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipſum ſecans. dico angulos quos BD facit cum contingente EF aequales eſſe iis qui ſunt in alternis circuli ſegmentis, hoc eſt angulum quidem FBD eſſe aequalem angulo qui eſt in DAB ſegmento, angulum vero DBE aequalem angulo in ſegmento BCD.

a. 11. 1. Ducatur enim a puncto B ipſi EF ad rectos angulos [a] BA, et in circumferentia BD ſumatur quodvis punctum C, junganturque AD, DC, CB. et quoniam circulum ABCD contingit recta linea EF in puncto B, et a tactu B ad rectos angulos contingenti ducta eſt BA, erit

b. 19. 3. in ipſa BA centrum ABCD circuli [b]; angulus

c. 31. 3. igitur ADB in ſemicirculo eſt rectus [c]; reliqui propterea anguli BAD, ABD uni recto aequa-

d. 32. 1. les ſunt [d]. ſed et ABF eſt rectus; ergo angulus ABF aequalis eſt angulis BAD, ABD.




communis auferatur ABD; reliquus igitur DBF ei qui eſt in alterno circuli ſegmento, ipſi ſcilicet BAD, aequalis eſt. et quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABCD, anguli ejus oppoſiti aequales ſunt duobus rec-

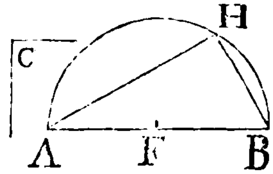
e. 22. 3. f. 13. 1. tis [e]; aequales igitur erunt anguli BAD, BCD ipſis DBF, DBE [f], quorum DBF oſtenſus eſt aequalis ipſi BAD; reliquus igitur DBE ei qui eſt in alterno circuli ſegmento, videlicet angulo DCB aequalis erit. ſi igitur circulum contingat &c. Q. E. D.

## PROP. XXXIII. PROB.

**SUPER datam rectam lineam deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum dato angulo rectilineo aequalem.**

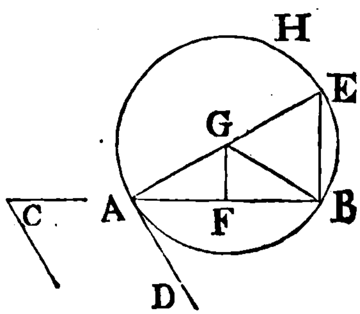
Sit

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus qui ad C; itaque oportet ſuper datam rectam lineam AB deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum aequalem angulo qui eſt ad C.

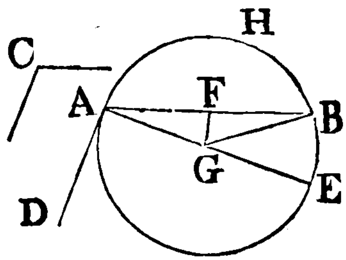



Et primum ſit angulus ad C rectus, et bifariam ſecetur [a] AB in F, centroque F, et intervallo FA deſcribatur ſemicirculus AHB; a. 10. 1.
erit igitur angulus AHB in ſemicirculo aequalis recto angulo [b] ad C. b. 31. 3.

Non autem ſit angulus ad C rectus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea A conſtituatur angulus BAD angulo qui eſt ad C aequalis [c], a puncto vero A ipſi AD ad rectos angulos ducatur [d] AE; ſecetur [a] autem AB bifariam in F, atque a puncto F ducatur FG ad rectos angulos [d] ipſi AB, et GB jungatur. et quoniam AF eſt aequalis FB, communis autem FG, duae AF, FG duabus BF, FG ſunt aequales; et angulus AFG aequalis eſt angulo BFG; c. 23. 1. d. 11. 1.




baſis igitur AG baſi GB eſt aequalis [e]. itaque centro quidem G intervallo vero GA circulus deſcriptus tranſibit etiam per B. deſcribatur et ſit AHB. Quoniam igitur a puncto A extremitate diametri AE ducta eſt AD ad rectos angulos ipſi AE, continget AD circulum [f]. et quoniam circulum AHB contingit recta linea AD, et a tactu ad A ducta eſt recta linea AB ſecans circulum, e. 4. 1. f. 16. 3.




erit angulus DAB aequalis angulo in alterno circuli ſegmento AHB. ſed angulus DAB angulo ad C eſt aequalis, ergo et angulus ad C angulo in ſegmento AHB aequalis erit. ſuper datam igitur rectam lineam

AB

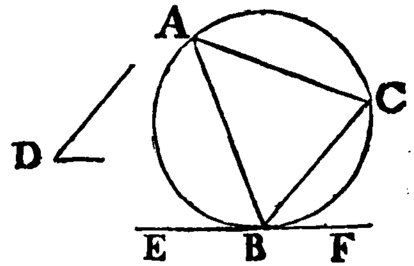
AB ſegmentum circuli deſcriptum eſt AHB quod capiat angulum dato angulo ad C aequalem. Q. E. F.

## PROP. XXXIV. PROB.

A Dato circulo ſegmentum abſcindere quod capiat angulum dato angulo rectilineo aequalem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet a circulo ABC ſegmentum abſcindere quod capiat angulum angulo ad D aequalem.

a. 17. 3. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens[a], et ad rectam lineam BF et ad punctum in ea B conſtituatur angulus FBC an-
b. 23. 1. gulo qui eſt ad D aequalis[b]. Quoniam igitur circulum ABC contingit quaedam recta linea EF, et a tactu B ducta eſt BC, erit angulus FBC aequalis ei qui in alterno circuli ſegmento BAC con-
c. 32. 3. ſtituitur[c]. ſed FBC angulus angulo qui ad D eſt aequalis; angulus igitur in ſegmento BAC angulo ad D aequalis erit. A dato igitur circulo ABC abſciſſum eſt ſegmentum BAC capiens angulum dato angulo rectilineo qui eſt ad D aequalem. Q. E. F.

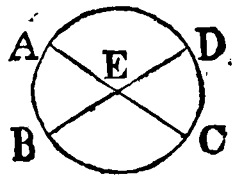



## PROP. XXXV. THEOR.

SI in circulo duae rectae lineae ſeſe mutuo ſecent, rectangulum a ſegmentis unius contentum, aequale eſt rectangulo contento ſegmentis alterius.

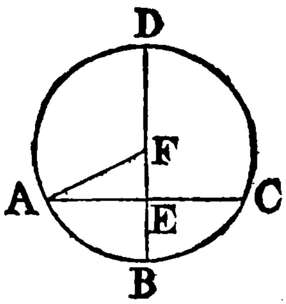
In

In circulo enim ABCD duae rectae lineae AC, BD ſeſe mutuo ſecent in puncto E; dico rectangulum contentum ipſis AE, EC aequale eſſe rectangulo quod continetur ipſis BE, ED.



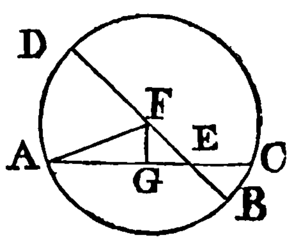

Si igitur AC, BD per centrum tranſeant, ita ut E ſit centrum circuli ABCD, manifeſtum eſt, aequalibus exiſtentibus AE, EC, BE, ED, et rectangulum contentum ipſis AE, EC aequale eſſe rectangulo quod BE, ED continetur.

Tranſeat autem una rectarum BD per centrum, ſecetque ad angulos rectos alteram AC per centrum non tranſeuntem in E. Bifariam igitur ſectâ BD in F, erit F centrum circuli ABCD; jungatur vero AF. et quoniam BD per centrum ducta rectam lineam AC non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat in E, aequales inter ſe erunt [a] AE, EC. Quoniam vero recta linea BD ſecta eſt in partes aequales in F, et in partes inaequales in E, erit rectangulum contentum ipſis BE, ED una cum quadrato ex EF aequale quadrato ex FB [b], hoc eſt ex FA; quadrato vero ex FA aequalia ſunt quadrata ex AE, EF [c]; rectangulum igitur BE, ED una cum quadrato ex EF aequale eſt quadratis ex AE, EF. commune auferatur quadratum ex EF, reliquum igitur rectangulum BE, ED reliquo quadrato ex AE, hoc eſt rectangulo contento AE, EC aequale erit.



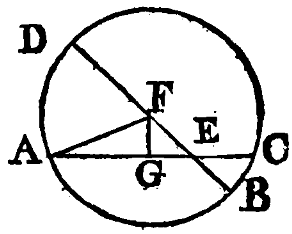

a. 3. 3.
b. 5. 2.
c. 47. 1.

Sed BD per centrum ducta ſecet alteram AC per centrum non ductam, ſed non ad angulos rectos, in puncto E. rurſus igitur, bifariam ſectâ BD in F, erit F centrum circuli. Jungatur AF, a centro vero F ducatur ad AC perpendicularis [d] FG; eſt igitur AG aequalis

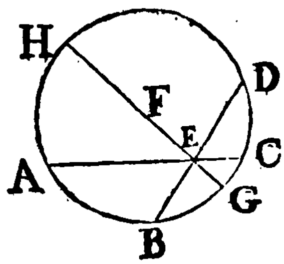



d. 12. 1.

a. 3. 3. ipſi GC[a], et propterea rectangulum AE, EC una cum quadrato ex
b. 5. 2. EG aequale eſt quadrato ex AG[b]. commune addatur ex GF quadratum, rectangulum igitur AE, EC una cum quadratis ex EG, GF aequale eſt quadratis ex AG, GF. ſed quadratis quidem ex EG, GF aequale eſt quadratum ex EF; quadratis vero
c. 47. 1. ex AG, GF aequale eſt ex AF quadratum[c]. Ergo rectangulum AE, EC una cum quadrato ex EF aequale eſt quadrato ex AF, hoc eſt ex FB. quadrato vero ex FB aequale eſt rectangulum BE, ED una cum quadrato ex EF[b]; ergo rectangulum AE, EC una cum quadrato ex EF aequale eſt rectangulo BE, ED una cum quadrato ex EF. commune auferatur ex EF quadratum, reliquum igitur rectangulum AE, EC reliquo rectangulo BE, ED aequale erit.




Denique neutra rectarum AC, BD per centrum tranſeat, ſumatur igitur centrum circuli ABCD, ſitque F, et per E interſectionem ſcilicet rectarum AC, BD ducatur diameter GEFH. et quoniam rectangulum AE, EC oſtenſum eſt aequale rectangulo GE, EH; et ſimiliter rectangulum BE, ED eſt aequale eidem GE, EH rectangulo; erit rectangulum contentum AE, EC aequale contento ipſis BE, ED rectangulo. Quare ſi in circulo duae rectae lineae &c. Q. E. D.



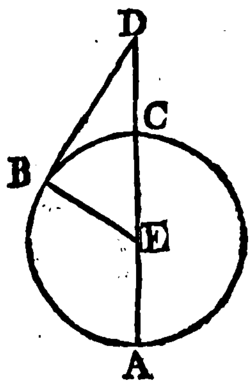

PROP. XXXVI.

## PROP. XXXVI. THEOR.

SI extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum quod a tota secante, et exterius assumpta inter punctum et convexam circumferentiam continetur, aequale erit quadrato ex contingente.

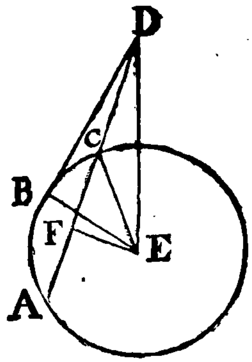
Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, et ab eo ad circulum cadant duae rectae lineae DCA, DB; et DCA quidem circulum secet, DB vero contingat. dico rectangulum ab AD, DC contentum quadrato ex DB aequale esse.

Vel igitur DCA per centrum transit vel non; primum transeat per centrum, sitque E centrum circuli ABC, et EB jungatur; erit igitur angulus EBD rectus[a]. et quoniam recta linea AC bifariam secta est in E, et ipsi adjicitur CD, rectangulum ab AD, DC, una cum quadrato ex EC aequale erit quadrato ex ED[b]. aequalis autem est CE ipsi EB, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadrato ex ED. sed quadratum ex ED est aequale quadratis ex ipsis EB, BD[c], rectus enim angulus est EBD. rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadratis ex EB, BD. commune auferatur quadratum ex EB, reliquum igitur ab AD, DC rectangulum aequale erit quadrato ex contingente DB.




a. 18. 3.
b. 6. 2.
c. 47. 1.

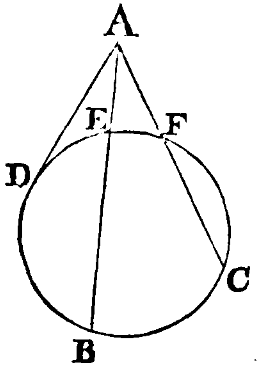
Sed DCA non transeat per centrum circuli ABC, sumaturque cen-
d. 1. 3. trum [d] E, et ad AC perpendicularis ducatur EF [e], et jungantur EB, EC,
e. 12. 1. ED; rectus igitur est EFD angulus. et quoniam recta linea quaedam EF per centrum ducta, rectam lineam AC non ductam per centrum
f. 3. 3. ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit [f]; aequalis igitur est AF ipsi FC. et quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur CD, erit rectangulum ab AD, DC una cum quadrato
b. 6. 2. ex FC aequale quadrato ex FD [b]. commune apponatur ex FE quadratum, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadratis ex CF, FE est aequale quadratis ex DF, FE. sed quadratis quidem ex DF, FE




aequale est quadratum ex ED, etenim rectus est angulus EFD; quadratis vero ex CF, FE aequale est quadratum ex EC; rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex CE est aequale quadrato ex ED. aequalis autem est CE ipsi EB, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB, aequale est ex ED quadrato. sed qua-
a. 18. 3. drato ex ED aequalia sunt quadrata ex EB, BD, siquidem rectus [a] est angulus EBD; ergo rectangulum ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadratis ex EB, BD. commune auferatur quadratum ex EB, reliquum igitur ab AD, DC rectangulum quadrato ex DB aequale erit. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.

Cor.

Cor. Hinc ſi a puncto quovis extra circulum ducantur rectae lineae AB, AC circulum ſecantes, rectangula contenta totis, et parti-




bus externis, viz. rectangula BA, AE; CA, AF inter ſe ſunt aequalia. utrumque enim ipſorum aequale eſt quadrato ex contingente AD.

## PROP. XXXVII. THEOR.

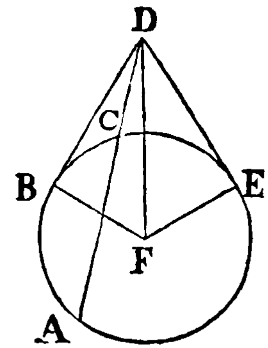
SI extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero incidat; ſit autem rectangulum contentum a tota ſecante et exterius aſſumpta inter punctum et convexam circumferentiam aequale quadrato ex incidente; quae incidit circulum continget.

Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, atque ab ipſo in circulum cadant duae rectae lineae DCA, DB, et DCA quidem circulum ſecet, DB vero incidat; ſitque rectangulum ab AD, DC aequale quadrato ex DB. Dico ipſam DB circulum ABC contingere.

Ducatur enim recta linea DE contingens circulum [a] ABC, et ſuma- a. 17. 3.
tur

tur centrum circuli F, junganturque FE, FB, FD; rectus igitur est angulus FED[b]. et quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum ab AD, DC aequale erit quadrato ex DE[c]. sed rectangulum AD, DC ponitur aequale quadrato ex DB; quadratum igitur ex DE quadrato ex DB aequale erit, ac propterea DE erit ipsi DB aequalis. est autem et FE aequalis FB, duae igitur DE, EF duabus DB, BF aequales sunt, et basis communis FD; angulus igitur DEF est aequalis ipsi DBF[d], rectus autem est DEF, ergo et DBF est rectus. atque FB producta est diameter, quae vero diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, circulum contingit[e]. circulum igitur ABC contingit DB. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.

b. 18. 3.
c. 36. 3.
d. 8. 1.
e. 16. 3.

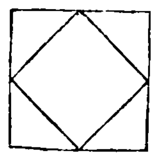


# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

## DEFINITIONES.

I.

FIGURA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando unusquisque figurae inscriptae angulus, unumquodque latus ejus in qua inscribitur tangit.

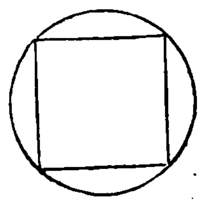


II.

Figura similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae, unumquemque angulum ejus circa quam circumscribitur tangit.

III.

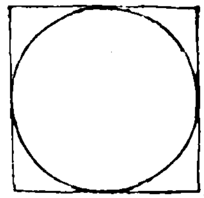
Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptae figurae angulus circuli circumferentiam tangit.



Figura

IV.

Figura rectilinea circa circulum dicitur circumscribi, quando unumquodque latus circumscriptae, circuli circumferentiam contingit.

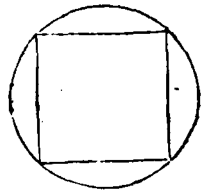


V.

Circulus similiter in figura rectilinea inscribi dicitur, quando circuli circumferentiam unumquodque latus ejus in qua inscribitur contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam circumscribitur tangit.



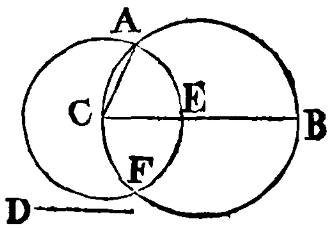
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

## PROP. I. PROB.

**IN dato circulo datae rectae lineae, quae diametro ejus major non sit, aequalem rectam lineam aptare.**

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea D, non major circuli diametro; oportet in circulo ABC rectae lineae D aequalem rectam lineam aptare.




Ducatur circuli ABC diameter BC; siquidem igitur BC sit aequalis ipsi D, factum jam erit quod proponebatur; etenim in circulo

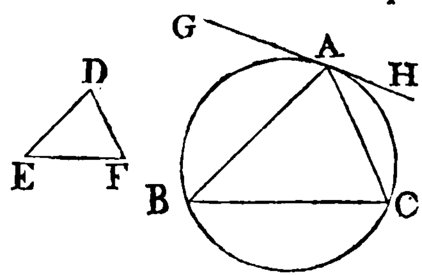
circulo ABC aptata eſt BC rectae lineae D aequalis. ſin minus, major eſt BC quam D, ponaturque ipſi D aequalis CE [a], et centro quidem C, a. 3. 1. intervallo autem CE circulus deſcribatur AEF, et CA jungatur. Quoniam igitur punctum C centrum eſt AEF circuli, erit CA ipſi CE aequalis; ſed D eſt aequalis CE, ergo et D ipſi CA aequalis erit. In dato igitur circulo ABC datae rectae lineae D, non majori circuli diametro, aequalis aptata eſt AC. Q. E. F.

## PROP. II. PROB.

**IN dato circulo, triangulo dato aequiangulum triangulum inſcribere.**

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet in ABC circulo inſcribere triangulum triangulo DEF aequiangulum.

Ducatur recta linea GAH contingens circulum [a] ABC in puncto a. 17. 3. A, et ad rectam lineam AH, et ad punctum in ea A, angulo DEF aequalis angulus conſtituatur [b] HAC; ad rectam vero AG, et ad punctum b. 23. 1. in ea A, angulo DFE aequalis conſtituatur angulus GAB, et BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit recta linea HAG, a tactu autem ducta eſt AC, erit HAC angulus aequalis angulo in alterno circuli ſegmento [c], c. 32. 3. videlicet ipſi ABC. ſed HAC aequalis eſt ipſi DEF, ergo et angulus ABC ipſi DEF eſt aequalis. eadem ratione et ACB eſt aequalis angulo DFE; reliquus igitur BAC reliquo EDF angulo eſt aequalis [d]. d. 32. 1. ergo triangulum ABC triangulo DEF eſt aequiangulum, et inſcriptum



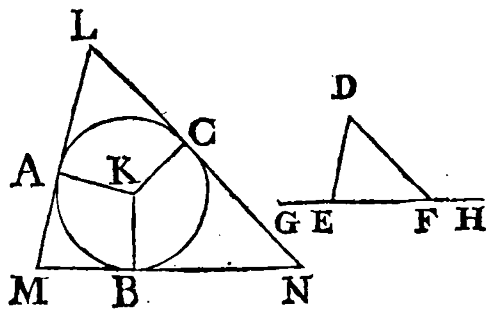
eſt in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo aequiangulum triangulum inſcriptum eſt. Q. E. F.

## PROP. III. PROB.

**CIRCA datum circulum triangulo dato aequiangulum triangulum circumſcribere.**

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet circa ABC circulum triangulum circumſcribere triangulo DEF aequiangulum.

Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta G, H, et ſumatur circuli ABC centrum K, et recta linea KB utcunque ducatur; conſtituaturque ad rectam lineam KB, et ad punctum in ea K, angulo quidem
a. 23. 1. DEG aequalis angulus [a] BKA, angulo autem DFH aequalis angulus [a] BKC; et per A, B, C puncta ducantur rectae lineae LAM, MBN, NCL circulum ABC contingen-
b. 17. 3. tes [b]. Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM, MN, NL in punctis A, B, C, a centro autem K ad A, B, C puncta ductae ſunt KA, KB, KC, erunt
c. 18. 3. anguli ad puncta A, B, C recti [c]. et quoniam quadrilateri AMBK




anguli quatuor, quatuor rectis aequales ſunt, etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli KAM, KBM ſunt recti, erunt reliqui AKB, AMB duobus rectis aequales. ſunt autem et DEG, DEF aequales duo-
d. 13. 1. bus rectis [d]; anguli igitur AKB, AMB angulis DEG, DEF aequales ſunt, quorum AKB ipſi DEG eſt aequalis; reliquus igitur AMB reliquo DEF aequalis erit. ſimiliter oſtendetur angulus LNM ipſi DFE aequalis;

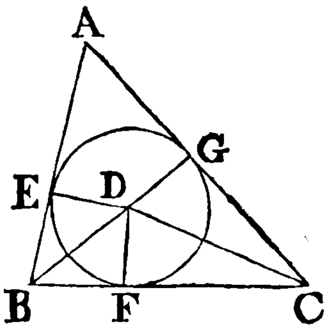
qualis; ergo et reliquus MLN est aequalis reliquo [e] EDF. aequiangu- e. 32. 1.
lum igitur est LMN triangulum triangulo DEF, et circumscriptum est circa ABC circulum. Circa datum igitur circulum, dato triangulo aequiangulum triangulum circumscriptum est. Q. E. F.

## PROP. IV. PROB.

**IN dato triangulo circulum inscribere.**

Sit datum triangulum ABC; oportet in triangulo ABC circulum inscribere.

Secentur anguli ABC, BCA bifariam [a] rectis lineis BD, CD quae a. 9. 1.
conveniant inter se in D puncto, et a puncto D ad rectas lineas AB, BC, CA perpendiculares ducantur [b] DE, DF, DG. et quoniam angulus EBD est aequalis ipsi FBD, bifariam enim sectus est ABC, est autem et rectus BED recto BFD aequalis, erunt duo triangula EBD, FBD duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus BD utrique commune, quod scilicet uni aequalium angulorum subtenditur; reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt[c], b. 12. 1. c. 26. 1.
et erit DE aequalis DF. eadem ratione et DG aequalis erit DF; tres igitur rectae lineae DE, DF, DG inter se aequales sunt; quare centro D, intervallo autem unius ipsarum DE, DF, DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CA continget, propterea quod recti sunt anguli ad E, F, G puncta; quae enim diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur circulum contingit[d]. circulum igitur contingit unaquaeque ipsarum AB, BC, CA, d. 16. 3.



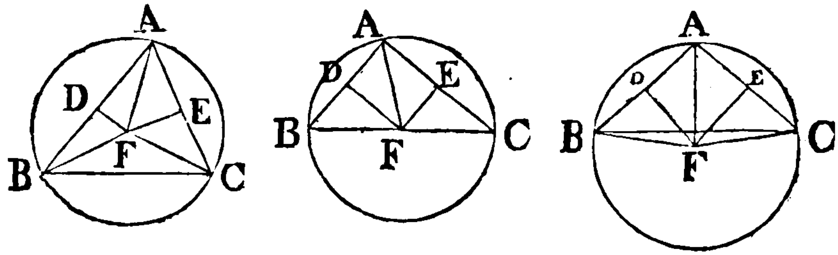
atque erit circulus inſcriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG inſcriptus eſt. Q. E. F.

## PROP. V. PROB.

CIRCA datum triangulum circulum circumſcribere.

Sit datum triangulum ABC; oportet circa datum triangulum ABC circulum circumſcribere.

a. 10. 1. Secentur AB, AC biſariam [a] in D, E punctis, et a punctis D, E
b. 11. 1. ipſis AB, AC ad rectos angulos ducantur [b] DF, EF, quae quidem productae neceſſario convenient, nam ſi non conveniunt, erunt inter ſe parallelae; quare AB, AC quae ipſis ſunt ad rectos angulos erunt parallelae, quod eſt abſurdum; conveniant in F, et BF, FC, FA jungantur. Quoniam igitur AD eſt aequalis DB, communis autem et ad rectos an-




c. 4. 1. gulos DF, erit baſis AF baſi FB aequalis [c]. ſimiliter oſtendemus et CF aequalem FA; ergo et BF eſt aequalis FC; tres igitur FA, FB, FC inter ſe aequales ſunt. centro igitur F, intervallo autem unius ipſarum FA, FB, FC circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; atque erit circulus circumſcriptus circa triangulum ABC. Circa datum igitur triangulum circumſcriptus eſt circulus. Q. E. F.

Cor. Et manifeſtum eſt, ſi centrum circuli intra triangulum ceciderit,
d. 31. 3. unumquemque ejus angulum minorem eſſe recto [d], quoniam unuſquiſque

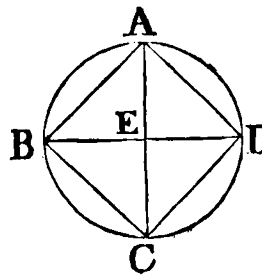
quisque est in segmento semicirculo majore. si autem in uno laterum fuerit centrum, angulus cui latus hoc subtenditur, in semicirculo existens, rectus erit. et si extra triangulum ceciderit centrum, ad partes alicujus lateris, angulus cui subtenditur hoc latus existens in segmento semicirculo minore, major erit recto[d]. Quare si datum triangulum acutangulum fuerit, centrum circuli erit intra triangulum; si rectangulum fuerit, erit centrum in latere angulo recto opposito; et si fuerit obtusangulum, cadet centrum extra triangulum, ad partes lateris obtuso angulo oppositi. d. 31. 3.

## PROP. VI. PROB.

IN dato circulo quadratum inscribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quadratum inscribere.

Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC, BD; et AB, BC, CD, DA jungantur. Quoniam igitur BE est aequalis ED, etenim centrum est E, communis autem et ad rectos angulos EA; erit basis BA aequalis basi AD[a]. et eadem ratione utraque ipsarum BC, CD, utrique BA, AD est aequalis; aequilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus; quare angulus BAD rectus est[b]. et eadem ratione unusquisque ipsorum ABC, BCD, CDA est rectus; rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est et aequilaterum esse, quadratum igitur est; et inscriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD inscriptum est. Q. E. F.




a. 4. 1.

b. 31. 3.

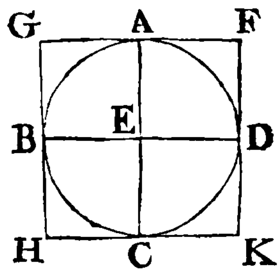
PROP. VII.

## PROP. VII. PROB.

CIRCA datum circulum quadratum circumſcribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet circa ABCD circulum quadratum circumſcribere.

Ducantur circuli ABCD duae diametri AC, BD ad rectos inter ſe angulos, et per puncta A, B, C, D ducantur circulum ABCD contin-
a. 17. 3. gentes [a] FG, GH, HK, KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, a centro autem E ad tactum qui eſt ad A ducta eſt EA,
b. 18. 3. erunt anguli ad A recti [b]. eadem ratione et anguli ad puncta B, C, D recti ſunt. et quoniam angulus AEB rectus eſt, eſt autem et rectus EBG,
c. 28. 1. erit GH ipſi AC parallela [c]. eadem ratione, et AC parallela eſt ipſi FK. ſimiliter oſtendemus et utramque ipſarum GF, HK ipſi BED parallelam eſſe. parallelogramma igitur ſunt GK,
d. 34. 1. GC, AK, FB, BK; aequalis [d] igitur eſt GF quidem ipſi HK; GH vero ipſi FK. et quoniam AC aequalis eſt BD, ſed AC quidem utrique ipſarum GH, FK eſt aequalis; BD vero aequalis utrique GF, HK; erit et utraque GH, FK utrique GF, HK aequalis. aequilaterum igitur eſt FGHK quadrilaterum. Dico et rectangulum eſſe; quoniam enim parallelogrammum eſt GBEA, atque eſt rectus AEB angulus, rectus [d] erit et AGB. ſimiliter oſtendemus angulos etiam ad H, K, F rectos eſſe. rectangulum igitur eſt quadrilaterum FGHK. oſtenſum autem eſt aequilaterum; quadratum igitur eſt; et circumſcriptum eſt circa ABCD circulum. circa datum igitur circulum quadratum circumſcriptum eſt. Q. E. F.




PROP. VIII.

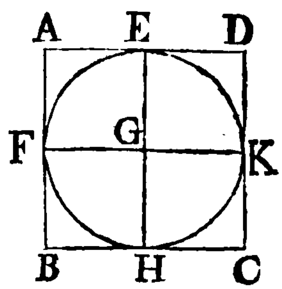
## PROP. VIII. PROB.

IN dato quadrato circulum inſcribere.

Sit datum quadratum ABCD; oportet in quadrato ABCD circulum inſcribere.

Secetur utraque ipſarum AB, AD bifariam [a] in punctis F, E, et per E quidem alterutri ipſarum AB, CD, parallela ducatur [b] EH, per F vero ducatur FK parallela alterutri AD, BC. parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD, et latera ipſorum oppoſita ſunt aequalia [c]. et quoniam AD eſt aequalis AB, et ipſius quidem AD dimidium eſt AE, ipſius vero AB dimidium AF; erit AE ipſi AF aequalis. quare et oppoſita latera ſunt aequalia, ergo FG eſt aequalis GE. ſimiliter oſtendemus et utramque ipſarum GH, GK utrique FG, GE aequalem eſſe. quatuor igitur GE, GF, GH, GK inter ſe ſunt aequales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum GE, GF, GH, GK circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CD, DA continget, propterea quod anguli ad E, F, H, K recti ſunt [d]; quae enim diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur circulum contingit [e]. circulum igitur contingit unaquaeque ipſarum AB, BC, CD, DA, atque erit circulus in quadrato ABCD inſcriptus. In dato igitur quadrato circulus inſcriptus eſt. Q. E. F.

a. 10. 1.
b. 31. 1.
c. 34. 1.
d. 29. 1.
e. 16. 3.



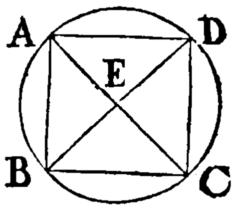

## PROP. IX. PROB.

CIRCA datum quadratum circulum circumſcribere.

Sit

Sit datum quadratum ABCD; oportet circa ABCD quadratum circulum circumſcribere.

Jungantur enim AC, BD, quae ſe invicem ſecent in E. et quoniam DA eſt aequalis AB, communis autem AC, duae DA, AC duabus BA, AC aequales ſunt; et baſis DC eſt aequalis baſi BC, quare angulus
a. 8. 1. DAC angulo BAC aequalis erit[a]; angulus igitur DAB bifariam ſectus eſt rectâ lineâ AC. ſimiliter oſtendemus unumquemque angulorum ABC, BCD, CDA rectis lineis AC, BD bifariam ſectum eſſe. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC eſt aequalis, atque eſt anguli quidem DAB dimidium EAB, ipſius vero ABC dimidium EBA, crit et EAB angulus aequalis ipſi EBA; igitur et
b. 6. 1. latus EA lateri EB eſt aequale[b]. ſimiliter vero demonſtrabimus et utramque rectarum linearum EC, ED utrique EA, EB aequalem eſſe. Quatuor igitur rectae lineae EA, EB, EC, ED inter ſe ſunt aequales. centro igitur E intervallo autem unius ipſarum EA, EB, EC, ED circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, atque erit circa ABCD quadratum circumſcriptus. Circa datum igitur quadratum circulus eſt circumſcriptus. Q. E. F.



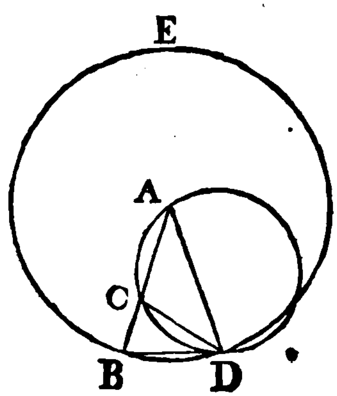

## PROP. X. PROB.

**ISOSCELES triangulum conſtituere habens utrumque angulorum qui ſunt ad baſim duplum reliqui.**

a. 11. 2. Exponatur recta quaedam linea AB, et ſecetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum ab AB, BC aequale ſit quadrato ex CA[a]; et centro quidem A, intervallo autem AB circulus deſcribatur BDE, apteturque in BDE circulo recta linea BD aequalis ipſi AC quae non eſt major

major diametro circuli BDE[b]; junganturque DA, DC, et circa ADC b. 1. 4.
triangulum circulus ACD circumscribatur[c]. Triangulum isosceles ABD c. 5. 4.
habebit utrumque angulorum ABD, ADB ad basim, duplum reliqui BAD.

Quoniam enim rectangulum ab AB, BC aequale est quadrato ex AC, aequalis autem est AC ipsi BD, erit ab AB, BC rectangulum quadrato ex BD aequale. et quoniam extra circulum ACD sumptum est punctum B, et a puncto B in circulum cadunt duae rectae lineae BCA, BD, et altera quidem ipsarum secat, altera vero incidit, atque est rectangulum ab AB, BC aequale quadrato ex BD; recta linea BD circulum continget[d]. quoniam igitur BD d. 37. 3.
contingit, et a tactu D ducta est DC, erit BDC angulus aequalis angulo in alterno circuli segmento[e], videlicet ipsi DAC; com- e. 32. 3.
munis apponatur CDA; totus igitur BDA est aequalis duobus angulis CDA, DAC. sed ipsis CDA, DAC aequalis est exterior angulus BCD[f]; ergo et BDA aequalis est f. 32. 1.
ipsi BCD. sed BDA est aequalis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB est




aequale[g]; ergo et CBD, i. e. DBA ipsi BCD aequalis erit. tres igitur g. 5. 1.
anguli BDA, DBA, BCD inter se aequales sunt. et quoniam angulus DBC aequalis est angulo BCD, erit et latus BD lateri DC aequale[h]. h. 6. 1.
sed BD ponitur aequalis ipsi CA, ergo et CA est aequalis CD; quare et angulus CDA aequalis[g] est ipsi DAC. ipsi igitur CDA, DAC simul dupli sunt anguli DAC. est autem et BCD ipsis CDA, DAC aequalis; ergo et BCD duplus est ipsius DAC. aequalis autem est BCD alterutri ipsorum BDA, DBA; uterque igitur ipsorum BDA, DBA, ipsius DAB est duplus. Isosceles igitur triangulum constitutum

eſt ABD, habens utrumque angulorum qui ſunt ad baſim BD duplum reliqui. Q. E. F.

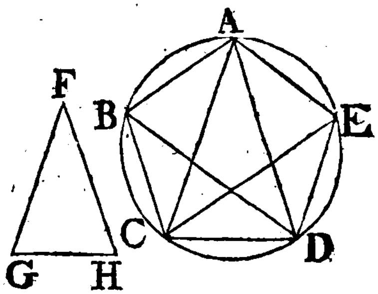
## PROP. XI. PROB.

**IN dato circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inſcribere.**

Sit datus circulus ABCDE; oportet in ABCDE circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inſcribere.

Exponatur triangulum iſoſceles FGH habens utrumque angulorum
a. 10. 4. ad G, H duplum anguli ad F[a]; et inſcribatur in circulo ABCDE tri-
b. 2. 4. angulo FGH aequiangulum triangulum [b] ACD, ita ut angulo quidem ad F aequalis ſit CAD; utrique vero ipſorum ad G, H, ſit aequalis uterque ACD, CDA; et uterque igitur ipſorum ACD, CDA anguli
c. 9. 1. CAD eſt duplus. ſecetur uterque ACD, CDA bifariam [c] rectis lineis CE, DB, et AB, BC, DE, EA jungantur.

Quoniam igitur uterque angulorum ACD, CDA duplus eſt ipſius CAD, et ſecti ſunt bifariam rectis lineis CE, DB; quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA inter ſe ſunt aequales. aequales autem anguli aequa-
d. 26. 3. libus circumferentiis inſiſtunt [d]; quinque igitur circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA aequales ſunt inter ſe. ſed aequales circumferentias aequales rectae li-
e. 29. 3. neae ſubtendunt [e]; ergo et quinque rectae lineae AB, BC, CD, DE, EA inter ſe aequales ſunt. aequilaterum igitur eſt ABCDE pentagonum. Dico et aequiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AB aequalis eſt circumferentiae DE, communis apponatur BCD; tota igitur ABCD circumferentia toti EDCB eſt aequalis.



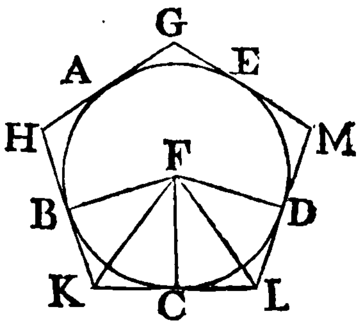
qualis. et circumferentiae quidem ABCD inſiſtit angulus AED, cir-
cumferentiae vero EDCB inſiſtit angulus BAE; igitur et BAE angu-
lus eſt aequalis ipſi AED[f]. eadem ratione et unuſquiſque angulorum f. 27. 3.
ABC, BCD, CDE utrique ipſorum BAE, AED eſt aequalis. aequian-
gulum igitur eſt ABCDE pentagonum; oſtenſum autem eſt et aequila-
terum eſſe. In dato igitur circulo pentagonum aequilaterum et aequi-
angulum inſcriptum eſt. Q. E. F.

## PROP. XII. PROB.

**CIRCA datum circulum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumſcribere.**

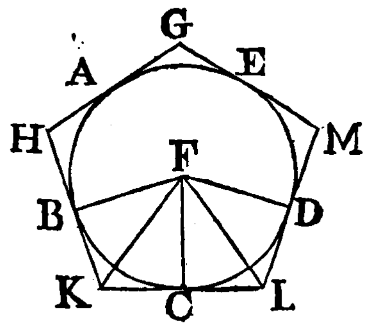
Sit datus circulus ABCDE; oportet circa circulum ABCDE penta-
gonum aequilaterum et aequiangulum circumſcribere.

Intelligantur pentagoni in circulo inſcripti angulorum puncta eſſe A,
B, C, D, E, ita ut circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA ſint aequa-
les[a]; et per puncta A, B, C, D, E du- a. 11. 4.
cantur circulum contingentes [b] GH, HK, b. 17. 3.
KL, LM, MG; ſumaturque circuli ABCDE
centrum F, et jungantur FB, FK, FC, FL,
FD. Quoniam igitur recta linea KL con-
tingit circulum ABCDE in C, et a centro
F ad tactum qui eſt ad C ducta eſt FC,
erit FC ad ipſam KL perpendicularis[c]; c. 18. 3.




rectus igitur eſt uterque angulorum qui ſunt ad C. eadem ratione et
anguli ad puncta B, D, recti ſunt. et quoniam rectus angulus eſt FCK,
quadratum ex FK aequale eſt quadratis ex FC, CK[d]. eadem ratione qua- d. 47. 1.
dratis ex FB, BK aequale eſt ex FK quadratum. quadrata igitur ex
FC, CK quadratis ex FB, BK aequalia ſunt, quorum ex FC ei quod

ex FB eſt aequale; reliquum igitur quadratum ex CK reliquo ex BK aequale erit; aequalis igitur eſt BK ipſi CK. et quoniam FB eſt aequalis FC, communis autem FK, duae BF, FK duabus CF, FK aequales ſunt; et baſis BK eſt aequalis baſi KC; angulus igitur BFK an-
e. 8. 1. gulo KFC eſt aequalis[e], angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur eſt BFC anguli KFC, et BKC duplus ipſius FKC. eadem ratione et angulus CFD ipſius CFL eſt duplus, CLD vero duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumferentiae CD eſt aequalis, erit et
f. 27. 3. angulus BFC aequalis ipſi CFD[f]. atque eſt BFC quidem anguli KFC duplus, CFD vero duplus ipſius CFL; aequalis igitur eſt angulus KFC ipſi CFL; eſt autem et rectus FCK recto FCL aequalis. itaque duo triangula ſunt FKC, FLC duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale ipſis commune FC quod aequalibus adjacet angulis; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo an-




g. 26. 1. gulo aequalem[g]. recta igitur linea KC eſt aequalis ipſi CL, angulus vero FKC angulo FLC. et quoniam KC eſt aequalis CL, erit KL ipſius KC dupla. eadem ratione et HK ipſius BK dupla oſtendetur. et quoniam BK oſtenſa eſt aequalis ipſi KC, atque eſt KL quidem dupla KC, HK vero ipſius BK dupla, erit HK ipſi KL aequalis. ſimiliter et unaquaeque ipſarum GH, GM, ML oſtendetur aequalis utrique HK, KL. aequilaterum igitur eſt GHKLM pentagonum. Dico et aequiangulum eſſe. Quoniam enim angulus FKC eſt aequalis ipſi FLC, et oſtenſus eſt angulus HKL duplus ipſius FKC, ipſius vero FLC duplus KLM, erit et HKL ipſi KLM aequalis. ſimiliter oſtendetur et unuſquiſque ipſorum KHG, HGM, GML utrique HKL, KLM aequalis.

quinque

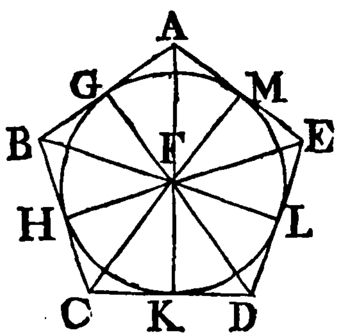
quinque igitur anguli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH inter se aequales sunt; aequiangulum igitur est GHKLM pentagonum. ostensum autem est etiam aequilaterum esse; et circumscriptum est circa ABCDE circulum. Q. E. F.

## PROP. XIII. PROB.

IN dato pentagono aequilatero et aequiangulo circulum inscribere.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE; oportet in ABCDE pentagono circulum inscribere.

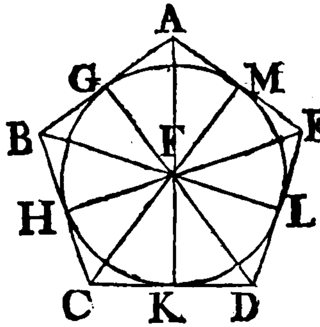
Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam [a] rectis lineis CF, DF, et a puncto F in quo conveniunt inter se CF, DF ducantur rectae lineae FB, FA, FE. Quoniam igitur BC est aequalis CD, communis autem CF, duae BC, CF duabus DC, CF aequales sunt, et angulus BCF est aequalis ipsi DCF; basis igitur BF basi FD est aequalis [b], et BFC triangulum aequale triangulo DFC, et reliqui anguli reliquis angulis aequales quibus aequalia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF aequalis erit. et quoniam angulus CDE ipsius CDF est duplus, et CDE quidem aequalis ipsi CBA, angulus vero CDF ipsi CBF, erit et CBA duplus anguli CBF; angulus igitur ABF angulo CBF est aequalis; quare angulus ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter ostendetur unumquemque angulorum BAE, AED rectis lineis AF, FE bifariam sectum esse. a puncto F ad rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA ducantur perpendiculares [c] FG, FH, FK, FL, FM. et quoniam angulus HCF est aequalis ipsi KCF,




a. 9. 1.
b. 4. 1.
c. 12. 1.

KCF, eſt autem et rectus FHC recto FKC aequalis; erunt duo triangula FHC, FKC duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus commune utriſque, viz. FC, quod uni aequalium angulorum ſubtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habe-

d. 26. 1. bunt[d]; perpendicularis igitur FH perpendiculari FK eſt aequalis. ſimiliter oſtendetur et unaquaeque ipſarum FL, FM, FG aequalis utrique FH, FK; quinque igitur rectae lineae FG, FH, FK, FL, FM inter ſe aequales ſunt. quare centro F, intervallo autem unius ipſarum FG, FH, FK, FL, FM circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CD, DE,




EA continget, propterea quod anguli ad G, H, K, L, M recti ſunt; quae enim ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos diametro du-

e. 16. 3. citur circulum contingit[e]. circulum igitur contingit unaquaeque ipſarum AB, BC, CD, DE, EA, atque erit circulus in pentagono ABCDE inſcriptus. In dato igitur pentagono aequilatero et aequiangulo circulus inſcriptus eſt. Q. E. F.

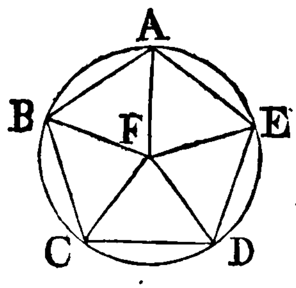
## PROP. XIV. PROB.

CIRCA datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circulum circumſcribere.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE; oportet circa pentagonum ABCDE circulum circumſcribere.

a. 9. 1. Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam [a] rectis lineis CF, FD, et a puncto F in quo conveniunt rectae lineae, ad puncta B, A, E ducantur FB, FA, FE. ſimiliter ut in antecedente oſtendetur unumquemque

quemque angulorum CBA, BAE, AED rectis lineis BF, FA, FE bifariam sectum esse. et quoniam angulus BCD ipsi CDE est aequalis, atque est anguli quidem BCD dimidium FCD, ipsius vero CDE dimidium CDF; erit et FCD aequalis ipsi FDC; quare et latus CF lateri FD est aequale[b]. similiter ostendetur et unaquaeque ipsarum FB, FA, FE aequalis utrique FC, FD. quinque igitur rectae lineae FA, FB, FC, FD, FE inter se aequales sunt. centro igitur F, intervallo autem unius ipsarum FA, FB, FC, FD, FE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, atque circumscriptus erit circa pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE. Circa datum igitur pentagonum aequilaterum et aequiangulum circulus est circumscriptus. Q. E. D.

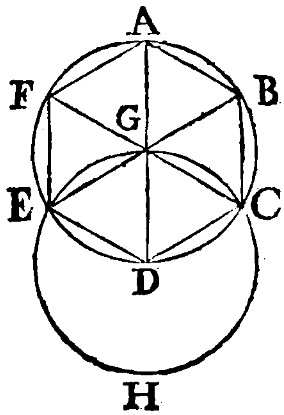



b. 6. 1.

## PROP. XV. PROB.

IN dato circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

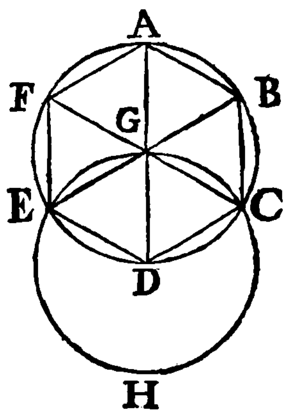
Sit datus circulus ABCDEF; oportet in circulo ABCDEF hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.




Sumatur G centrum circuli ABCDEF, et ducatur diameter AGD; et centro quidem D, intervallo autem DG circulus describatur EGCH, et junctae EG, CG ad puncta B, F producantur, junganturque AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico hexagonum ABCDEF aequilaterum et aequiangulum esse.

Quoniam

Quoniam enim G punctum centrum eſt ABCDEF circuli, erit GE ipſi GD aequalis. rurſus quoniam D centrum eſt circuli EGCH, erit DE aequalis DG; ſed GE ipſi GD aequalis oſtenſa eſt, ergo GE ipſi ED eſt aequalis; aequilaterum igitur eſt EGD triangulum, ideoque tres ipſius anguli EGD, GDE, DEG inter ſe aequales ſunt, quoniam tri-
a. 5. 1. angulorum iſoſcelium anguli ad baſim ſunt inter ſe aequales[a]. et ſunt tri-
b. 32. 1. anguli tres anguli aequales duobus rectis[b]; angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars eſt. ſimiliter oſtendetur et DGC duorum rectorum tertia pars. et quoniam recta linea GC ſuper rectam EB inſiſtens angulos qui deinceps ſunt EGC, CGB duobus
c. 13. 1. rectis aequales efficit[c], erit reliquus CGB tertia pars duorum rectorum; anguli igitur EGD, DGC, CGB inter ſe ſunt aequales. et qui ipſis ad verticem ſunt anguli BGA, AGF, FGE
d. 15. 1. aequales ſunt ipſis EGD, DGC, CGB[d]. ſex igitur anguli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE inter ſe aequales ſunt. ſed aequales an-
e. 26. 3. guli aequalibus circumferentiis inſiſtunt[e]; ſex igitur circumferentiae AB, BC, CD, DE, EF, FA inter ſe ſunt aequales. aequales autem circumferentias aequales




f. 29. 3. rectae lineae ſubtendunt[f]; ergo et ſex rectae lineae inter ſe aequales ſunt. aequilaterum igitur eſt ABCDEF hexagonum. Dico et aequiangulum eſſe. quoniam enim circumferentia AF circumferentiae ED eſt aequalis, communis apponatur circumferentia ABCD; tota igitur FABCD circumferentia aequalis eſt toti circumferentiae EDCBA. et circumferentiae quidem FABCD angulus FED inſiſtit, circumferentiae vero EDCBA inſiſtit angulus AFE; angulus igitur AFE ipſi DEF eſt aequalis. ſimiliter oſtendentur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim aequales utrique ipſorum AFE, DEF. aequiangulum igitur eſt

eſt ABCDEF hexagonum. oſtenſum autem eſt et aequilaterum eſſe; et inſcriptum eſt in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inſcriptum eſt. Q. E. F.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus, ei quae eſt ex centro circuli aequale eſſe.

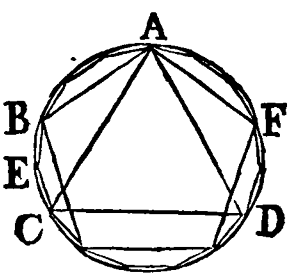
Et ſi per puncta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum hexagonum aequilaterum et aequiangulum circumſcribetur, conſequenter iis quae in pentagono dicta ſunt; et praeterea ſimiliter in dato hexagono aequilatero et aequiangulo circulum inſcribemus, et circa illud circumſcribemus.

## PROP. XVI. PROB.

**IN dato circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inſcribere.**

Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inſcribere.

Sit in circulo ABCD trianguli quidem aequilateri ipſi inſcripti latus AC[a], pentagoni vero aequilateri et aequianguli latus[b] AB; qualium a. 2. 4.
igitur partium eſt ABCD, tota ſcilicet circumferentia, quindecim, ea- b. 11. 4.
rum circumferentia quidem ABC tertia exiſtens totius erit quinque; circumferentia vero AB, quae quinta eſt totius, erit trium; reliqua igitur BC eſt duarum. ſecetur BC bifariam[c] in c. 30. 3.
E; quare utraque ipſarum BE, EC circumferentiarum quintadecima pars eſt circumferentiae circuli ABCD. ſi igitur jungentes BE, EC




aequales ipſis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptemus[d], d. 1. 4.

in ipſo inſcriptum erit quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. Q. E. F.

Similiter autem iis quae dicta ſunt in pentagono, ſi per circumferentiae diviſiones, contingentes circulum ducamus, circa ipſum circumſcribetur quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. et inſuper in dato quindecagono aequilatero et aequiangulo ſimiliter circulum inſcribemus, et circa illud circumſcribemus.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS ELEMENTORUM

## LIBER QUINTUS.

### DEFINITIONES.

I.

MAGNITUDO dicitur pars magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Major dicitur multiplex minoris, quando majorem minor metitur.

III.

" Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quanti-
" tatem, mutua quaedam habitudo."

IV.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quarum minor multiplicata majorem superare potest.

V.

In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primae et tertiae aeque multiplices, secundae et quartae aeque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà aequales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatae.

VI.

Magnitudines quae eandem rationem habent, proportionales vocentur.

VII.

Quando autem aeque multiplicium, multiplex quidem primae superaverit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superaverit multiplicem quartae, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur quam tertia ad quartam. et contra tertia ad quartam minorem rationem habere dicitur quam prima ad secundam.

VIII.

“ Proportio est rationum similitudo.”

IX.

Proportio vero in tribus terminis ad minimum consistit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines sunt deinceps proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad secundam. et sic deinceps, una amplius, quotcunque fuerint proportionales.

Definitio A, viz. rationis compositae.

Si fuerint quotcunque magnitudines ejusdem generis, prima ad ultimam habere dicitur rationem compositam ex ratione quam habet prima ad secundam,

ſecundam, et ratione ſecundae ad tertiam, et eâ quam habet tertia ad quartam, et ita deinceps uſque ad ultimam.

Exemp. gr. ſint magnitudines A, B, C, D, prima A habere dicitur ad ultimam D rationem compoſitam ex ratione ipſius A ad B, et ratione B ad C, et ratione C ad D. vel ratio A ad D dicitur compoſita eſſe ex rationibus A ad B, B ad C, et C ad D.

Si igitur ratio A ad B, eadem ſit rationi E ad F; et ratio B ad C, eadem fuerit rationi G ad H; et ratio C ad D eadem rationi K ad L; A ad D habere dicitur rationem compoſitam ex rationibus quae eadem ſunt rationibus E ad F, G ad H, et K ad L. idemque intelligitur quando, brevitatis gratia, dicitur A ad D habere rationem compoſitam ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

Similiter, ſi ratio M ad N eadem ſit rationi A ad D, praecedentibus manentibus, brevitatis gratia, dicitur ratio M ad N eadem eſſe rationi compoſitae ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

XII.

Homologae magnitudines, in proportionalibus, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, et conſequentes conſequentibus.

'Vocabulis ſequentibus, apud Geometras veteres deſignantur modi qui-
'dam mutandi ſive ordinem, ſive magnitudinem proportionalium, ita
'tamen ut proportionales maneant.'

XIII.

Ἐναλλάξ, i. e. Permutando; hoc vocabulo utuntur quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur eſſe ut prima ad tertiam, ita ſecunda ad quartam; ut oſtenſum eſt in Prop. 16. Libri hujus 5ti.

XIV.

Ἀνάπαλιν, Invertendo; quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur eſſe ut ſecunda ad primam, ita quarta ad tertiam. Prop. B. Lib. 5.

Συνθέντι,

XV.

Συνθέντι, Componendo; quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur ut prima una cum ſecunda ad ſecundam, ita tertia una cum quarta ad quartam. Prop. 18. Lib. 5.

XVI.

Διελόντι, Dividendo; quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur ut exceſſus quo prima ſuperat ſecundam ad ſecundam, ita exceſſus quo tertia ſuperat quartam ad quartam. Prop. 17. Lib. 5.

XVII.

Αναςρέψαντι, Convertendo; quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur ut prima ad exceſſum quo ſuperat ſecundam, ita tertia ad exceſſum quo ſuperat quartam. Prop. E. Lib. 5.

XVIII.

Διίσȣ, Ex aequo, ſive ex aequali, ſc. intervallo; quando pluribus exiſtentibus magnitudinibus, et aliis ipſis numero aequalibus, quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione; et concluditur ut prima ad ultimam in primis magnitudinibus, ita, in ſecundis magnitudinibus, prima ad ultimam. ‘Hujus duae ſunt ſpecies ſequentes.’

XIX.

Διίσȣ, Sive ex aequali ſimpliciter; quando fuerit prima ad ſecundam in primis magnitudinibus, ut in ſecundis prima ad ſecundam; ut autem, in primis, ſecunda ad tertiam, ita in ſecundis, ſecunda ad tertiam; et ita deinceps. et concluditur ut in praecedente dictum fuit. Prop. 22. Lib. 5.

XX.

Διίσȣ ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ*, Ex aequali in proportione perturbata, ſeu inordinata; quando, in primis magnitudinibus, fuerit prima ad ſecundam, ut, in ſecundis, penultima ad ultimam; ut au-

* Prop. 4. Lib. 2. Archimedis de ſphaera et cylindro.

tem,

tem, in primis, ſecunda ad tertiam, ita, in ſecundis antepenultima ad penultimam; et ut, in primis, tertia ad quartam, ita, in ſecundis, tertia ab ultima ad antepenultimam; et ita deinceps. et concluditur ut in Definitione 18va dictum fuit. Prop. 23. Lib. 5.

## AXIOMATA.

I.

Ejusdem ſive aequalium aeque multiplices, inter ſe aequales ſunt.

II.

Quarum eadem aeque multiplex eſt, vel quarum aequales ſunt aeque multiplices, et ipſae inter ſe ſunt aequales.

III.

Multiplex majoris major eſt aeque multiplici minoris.

IV.

Magnitudo cujus multiplex major eſt aeque multiplici alterius, major eſt alterâ illa magnitudine.

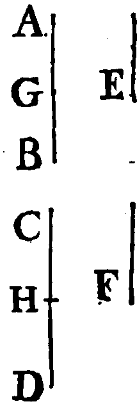
## PROP. I. THEOR.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, ſingulae ſingularum aeque multiplices; quam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, CD, quotcunque magnitudinum E, F, aequalium numero, ſingulae ſingularum aeque multiplices. Dico quam

quam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices eſſe et AB, CD ſimul ipſarum E, F ſimul.

Quoniam enim AB aeque multiplex eſt ipſius E, ac CD ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB aequales ipſi E, tot erunt et in CD aequales ipſi F. dividatur AB quidem in partes ipſi E aequales, quae ſint AG, GB; CD vero in partes aequales ipſi F, videlicet CH, HD. erit igitur multitudo partium CH, HD aequalis multitudini ipſarum AG, GB. et quoniam AG eſt aequalis E, et CH aequalis F; erunt et AG,
a. Ax. 2. 1. CH, aequales [a] ipſis E, F. eadem ratione quoniam GB eſt aequalis E, et HD ipſi F; erunt GB, HD aequales [a] ipſis E, F. quot ſunt itaque in AB aequales ipſi E, tot ſunt et in AB, CD aequales ipſis E, F. Ergo quam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices erunt et AB, CD ſimul ipſarum E, F ſimul.




Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, ſingulae ſingularum aeque multiplices; quam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. eadem enim demonſtratio tenet in quotcunque magnitudinibus. Q. E. D.

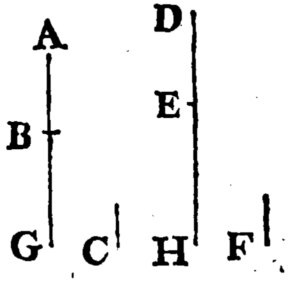
## PROP. II. THEOR.

**SI prima ſecundae aeque multiplex fuerit ac tertia quartae, fuerit autem et quinta ſecundae aeque multiplex ac ſexta quartae; erit etiam prima una cum quinta ſecundae aeque multiplex ac tertia cum ſexta quartae.**

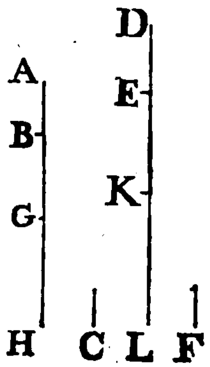
Prima enim AB ſecundae C aeque multiplex ſit, atque tertia DE quartae F; ſit autem et quinta BG ſecundae C aeque multiplex ac ſexta

EH

EH quartae F. Dico primam una cum quinta ſc. AG, ſecundae C aeque multiplicem eſſe, ac tertiam una cum ſexta ſc. DH quartae F.




Quoniam enim AB aeque multiplex eſt ipſius C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB aequales C, tot erunt et in DE aequales F. eadem ratione et quot ſunt in BG aequales C, tot et in EH erunt aequales F. quot igitur ſunt in tota AG aequales C, tot erunt et in tota DH aequales F. ergo quam multiplex eſt AG ipſius C tam multiplex eſt et DH ipſius F. et prima igitur una cum quinta AG ſecundae C aeque multiplex erit, ac tertia cum ſexta DH quartae F. Quare &c. Q. E. D.




Cor. Hinc ſequitur ſi fuerint quotcunque magnitudines AB, BG, GH multiplices ipſius C; ac totidem DE, EK, KL aeque multiplices ipſius F, ſingulae ſingularum, erunt omnes priores ſimul ſc. ipſa AH ipſius C aeque multiplex, ac omnes poſteriores ſimul ſc. ipſa DL ipſius F.

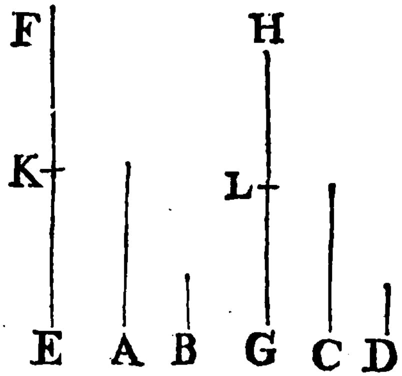
## PROP. III. THEOR.

SI prima ſecundae aeque multiplex fuerit ac tertia quartae; ſumantur autem aeque multiplices primae et tertiae; erit et ex aequali, ſumptarum utraque utriuſque aeque multiplex, altera quidem ſecundae, altera vero quartae.

Prima enim A ſecundae B aeque multiplex ſit ac tertia C quartae D;

et sumantur ipsarum A, C, aeque multiplices, EF, GH. Dico EF aeque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D.

Quoniam enim EF aeque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF aequales A, tot erunt et in GH aequales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A aequales EK, KF; GH vero in magnitudines aequales C videlicet GL, LH; erit igitur ipsarum EK, KF, multitudo aequalis multitudini ipsarum GL, LH. et quoniam aeque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D, aequalis autem EK ipsi A, et GL ipsi C; erit EK aeque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione aeque multiplex erit KF




ipsius B, ac LH ipsius D; et similiter si plures sint partes in EF, GH ipsis A, C aequales. quoniam igitur prima EK secundae B aeque multiplex est, ac tertia GL quartae D; est autem et quinta KF secundae B aeque multiplex ac sexta LH quartae D; erit et prima una cum
a. 2. 5. quinta sc. ipsa EF secundae B aeque multiplex[a], ac tertia cum sexta sc. GH quartae D. si igitur prima &c. Q. E. D.

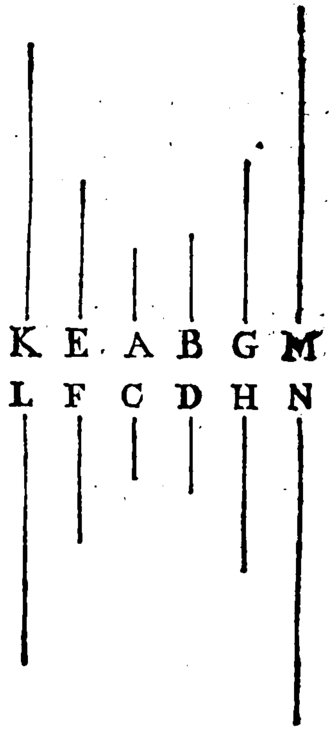
## PROP. IV. THEOR.

SI prima ad secundam eandem habet rationem quam tertia ad quartam; et aeque multiplices primae et tertiae ad aeque multiplices secundae et quartae, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt, inter se comparatae.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia

tia C ad quartam D; et sumantur ipsarum quidem A, C utcunque aeque multiplices E, F; ipsarum vero B, D aliae utcunque aeque multiplices G, H. Dico E ad G, ita esse ut F ad H.

Sumantur ipsarum E, F utcunque aeque multiplices K, L, et ipsarum G, H aliae utcunque aeque multiplices M, N. quoniam igitur E aeque multiplex est ipsius A, atque F ipsius C, sumuntur autem ipsarum E, F aeque multiplices K, L; erit K aeque multiplex [a] ipsius A, atque L a. 3. 5.
ipsius C. eadem ratione M aeque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. et quoniam est ut A ad B, ita C ad D; sumptae autem sunt ipsarum A, C aeque multiplices quaedam K, L; et ipsarum B, D aliae quaedam aeque multiplices M, N: si K superat M, superabit et L ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor [b]. suntque K, L qui- b. Def. 5. 5.
dem ipsarum E, F utcunque aeque multiplices; M, N vero ipsarum G, H aliae utcunque aeque multiplices. ut igitur E ad G, ita [b] erit F ad H. Quare si &c. Q. E. D.




Cor. Et similiter, si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; et aeque multiplices primae et tertiae, juxta quamvis multiplicationem, ad secundam et quartam eandem rationem habebunt. et similiter prima et tertia, ad aeque multiplices quasvis secundae et quartae eandem habebunt rationem.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia C ad quartam D, et sumantur ipsarum A, C utcunque aeque multiplices E, F; erit E ad B, ut F ad D.

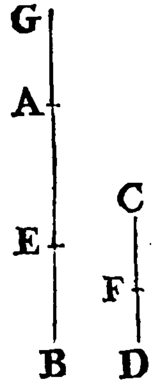
Sumantur ipſarum E, F utcunque aeque multiplices K, L, et ipſarum B, D aliae utcunque aeque multiplices G, H; et ut in praemiſſis oſtendetur K aeque multiplex ipſius A, atque L ipſius C. et quoniam eſt A ad B, ut C ad D, ſumptae autem ſunt ipſarum A, C aeque multiplices quaedam K, L, et ipſarum B, D aliae quaedam aeque multiplices G, H; ſi K ſuperat G, ſuperabit et L ipſam H; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſuntque K, L ipſarum E, F utcunque aeque multiplices, G, H vero ipſarum B, D aliae utcunque aeque multiplices. ut igitur E ad B, ita F ad D. ſimiliter oſtendetur alter caſus.

## PROP. V. THEOR.

**SI magnitudo magnitudinis aeque multiplex ſit atque ablata ablatae; erit et reliqua reliquae aeque multiplex atque tota totius.**

Magnitudo enim AB magnitudinis CD aeque multiplex ſit atque ablata AE ablatae CF. Dico et reliquam EB reliquae FD aeque multiplicem eſſe atque totam AB totius CD.

Quam multiplex enim eſt AE ipſius CF, tam multiplex fiat et AG
a. 1. 5. ipſius FD. erit igitur [a] AE aeque multiplex ipſius CF atque EG ipſius CD; ponitur autem AE aeque multiplex ipſius CF atque AB ipſius CD; ſunt igitur EG, AB ipſius CD aeque multiplices; ac propterea EG ipſi
b. 1. Ax. 5. AB eſt aequalis [b]. communis auferatur AE, reliqua igitur AG aequalis eſt reliquae EB. itaque quoniam AE aeque multiplex eſt CF atque AG ipſius FD, eſtque AG aequalis ipſi EB; erit AE aeque multiplex CF atque EB ipſius FD. aeque multiplex autem ponitur AE ipſius CF atque AB ipſius CD; ergo EB ae-




que

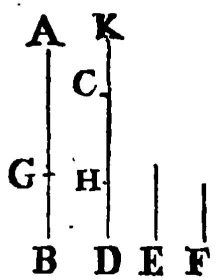
que multiplex est ipsius FD atque AB ipsius CD. Quare si &c. Q. E. D.

## PROP. VI. THEOR.

**SI duae magnitudines duarum magnitudinum aeque multiplices sint, et ablatae quaedam sint earundem aeque multiplices; erunt et reliquae vel eisdem aequales, vel ipsarum aeque multiplices.**

Duae enim magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F aeque multiplices sint, et ablatae AG, CH earundem E, F sint aeque multiplices. Dico et reliquas GB, HD vel ipsis E, F aequales esse, vel ipsarum aeque multiplices.

Sit enim primum GB aequalis E; dico et HD ipsi F esse aequalem. Ponatur ipsi F aequalis CK. et quoniam AG aeque multiplex est E atque CH ipsius F, estque GB quidem aequalis E, CK vero aequalis F; erit AB aeque multiplex E atque KH ipsius F. aeque autem multiplex ponitur AB ipsius E atque CD ipsius F; ergo KH aeque multiplex est ipsius F atque CD ejusdem F. aequalis igitur est [a] KH ipsi CD. communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliquae HD est aequalis. sed KC est aequalis F, et HD igitur ipsi F est aequalis. si igitur GB ipsi E, et HD ipsi F aequalis erit.

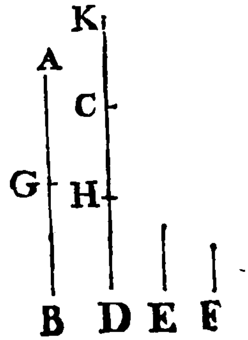



a. 1. Ax. 5.

Sed sit GB multiplex ipsius E, erit HD aeque multiplex ipsius F. Quam multiplex enim est GB ipsius E, tam multiplex fiat CK ipsius F; et quoniam aeque multiplex est AG ipsius E, atque CH ipsius F, aeque multiplex autem est GB ipsius E, atque CK ipsius F, erit [b] AB aeque multiplex ipsius E, atque KH ipsius F. aeque autem multiplex a. 2. 5.

ponitur

ponitur AB ipsius E, atque CD ipsius F; ergo KH aeque multiplex a. 1. Ax. 5. est F, atque CD ejusdem F. aequalis igitur [a] est KH ipsi CD. communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliquae HD est aequalis. Quam multiplex autem est GB ipsius E, tam multiplex est KC ipsius F, sed KC est aequalis HD. Ergo tam multiplex est HD ipsius F, atque GB ipsius E. si igitur duae &c. Q. E. D.




## PROP. A. THEOR.

SI prima ad secundam eandem habet rationem quam tertia ad quartam, fueritque prima major secunda; erit tertia major quarta; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sumantur enim quaevis aeque multiplices omnium, puta duplae, et, per Definitionem 5tam hujus, si dupla primae major fuerit duplâ secundae, erit dupla tertiae major duplâ quartae. si autem prima major fuerit secunda, erit dupla primae major duplâ secundae. quare et dupla tertiae major erit duplâ quartae; unde tertia major erit quarta. Ergo si prima major fuerit secundâ, erit tertia major quarta. similiter si prima aequalis fuerit secundae, aut ipsâ minor, ostendetur tertia aequalis quartae, aut ipsâ minor. Q. E. D.

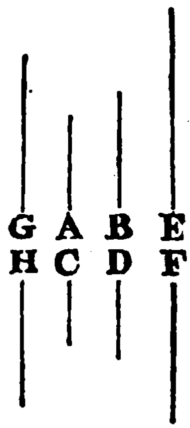
PROP. B.

## PROP. B. THEOR.

**SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inverſe proportionales erunt.**

Sit A ad B, ut C ad D; erit inversè B ad A, ut D ad C.

Sumantur enim ipſarum B, D, aeque multiplices quaecunque E, F; et ipſarum A, C, aliae utcunque aeque multiplices G, H. et primum ſit E major G; erit igitur G minor E; et quoniam eſt A ad B, ut C ad D, et ipſarum A, C aeque multiplices ſumptae ſunt G, H; et ipſarum B, D aliae aeque multiplices E, F; et eſt G minor E, erit H minor F[a]; quare eſt F major H. ſi igitur E major ſit G, et F quam H major erit. ſimiliter, ſi E aequalis fuerit ipſi G, oſtendetur F aequalis ipſi H; et ſi minor, minor. ſuntque E, F ipſarum B, D, utcunque aeque multiplices; et G, H ipſarum A, C, aliae utcunque aeque multiplices. Ergo ut B ad A, ita eſt D ad C[a]. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inversè proportionales erunt.




a. 5. Def. 5.

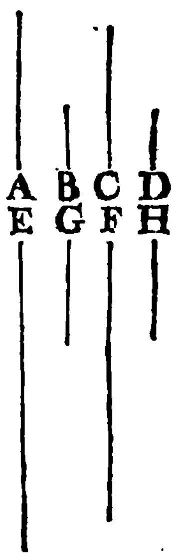
PROP. C.

## PROP. C. THEOR.

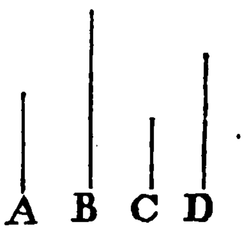
SI prima aeque multiplex fuerit, vel eadem pars, ſecundae, atque tertia quartae; erit prima ad ſecundam ut tertia ad quartam.

Sit prima A aeque multiplex ſecundae B, atque tertia C quartae D. erit A ad B, ut C ad D.

Sumantur enim ipſarum A, C aeque multiplices quaecunque E, F; ipſarumque B, D, aliae utcunque aeque multiplices G, H. et quoniam A aeque multiplex eſt B, atque C ipſius D; E vero aeque multiplex A, atque F ipſius C,
a. 3. 5. erit [a] E aeque multiplex B, atque F ipſius D. ſunt autem G, H ipſarum B, D aeque multiplices; ergo ſi E major fuerit multiplex ipſius B, quam G ejuſdem B, erit et F major multiplex ipſius D, quam H ejuſdem D; hoc eſt ſi E major fuerit G, erit F major H. ſimiliter ſi E aequalis fuerit G, aut ipſâ minor, oſtendetur F aequalis H, aut ipſâ minor. ſunt autem E, F ipſarum A, C utcunque aeque multiplices; et G, H ipſarum B, D aliae utcunque aeque multiplices. Ergo eſt A ad B, ut
b. Def. 5. 5. C ad D [b].




Sed ſit prima A eadem pars ſecundae B, atque tertia C quartae D. erit A ad B, ut C ad D. etenim erit B eadem multiplex A, atque D ipſius C; quare per Caſum I. eſt B ad A, ut D ad C, et
c. B. 5. invertendo [c], erit A ad B, ut C ad D. ſi igitur prima &c. Q. E. D.



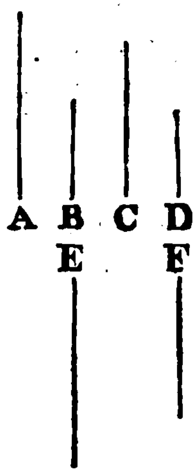

PROP. D.

## PROP. D. THEOR.

SI fuerit prima ad ſecundam, ut tertia ad quartam; fueritque prima multiplex, vel pars ſecundae; erit tertia eadem multiplex, vel eadem pars quartae.

Sit A ad B, ut C ad D; ſitque A multiplex ipſius B, erit C eadem multiplex ipſius D.

Sumatur enim E aequalis ipſi A, et quam multiplex eſt A ſive E ipſius B, tam multiplex fiat F ipſius D. Ergo quoniam A ad B eandem habet rationem, quam C ad D, et ſecundae B et quartae D aeque multiplices ſumptae ſunt E, F, erit [a] A ad E, ut C ad F. et eſt A aequalis ipſi E; ergo C aequalis eſt ipſi F[b]. eſt autem F aeque multiplex ipſius D, atque E ſive A ipſius B. Ergo C aeque multiplex eſt D, atque A ipſius B.




a. Cor. 4. 5.

b. Prop. A. 5.

Sed ſit prima A pars ſecundae B, erit tertia C eadem pars quartae D.

Quoniam enim eſt A ad B, ut C ad D, invertendo[c], erit B ad A, ut D ad C. eſt autem A pars ipſius B, hoc eſt B multiplex eſt ipſius A, quare, per caſum praecedentem, D eadem eſt multiplex ipſius C, hoc eſt C eadem pars eſt ipſius D, atque A ipſius B. ſi igitur fuerit prima &c. Q. E. D.

c. B. 5.

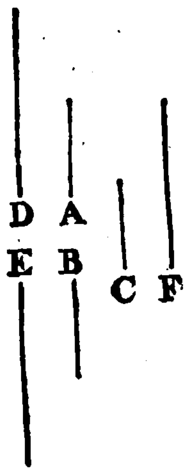
## PROP. VII. THEOR.

AEQUALES ad eandem, eandem habent rationem; et eadem ad aequales.

Sint aequales magnitudines A, B, alia autem quaevis magnitudo ſit C. Dico

C. Dico utramque A, B ad C eandem rationem habere; et C ad utramque A, B similiter eandem habere rationem.

Sumantur enim ipsarum A, B utcunque aeque multiplices D, E, et ipsius C alia utcunque multiplex F. quoniam igitur aeque multiplex est D ipsius A, atque E ipsius B, estque a. 1. Ax. 5. A ipsi B aequalis; erit et D aequalis ipsi E[a]. Ergo si D superat F, et E ipsam F superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. et sunt D, E quidem ipsarum A, B utcunque aeque multiplices; F vero alia utcunque multiplex ipsius C. erit igitur ut A ad C, b. 5. Def. 5. ita B ad C[b].




Dico insuper C ad utramque ipsarum A, B eandem habere rationem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E aequalem esse. si igitur F superat D, ipsum quoque E superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. atque est F quidem ipsius C utcunque multiplex; D, E vero aliae utcunque aeque multiplices ipsarum A, B. Ergo [b] ut C ad A, ita erit C ad B. Aequales igitur &c. Q. E. D.

## PROP. VIII. THEOR.

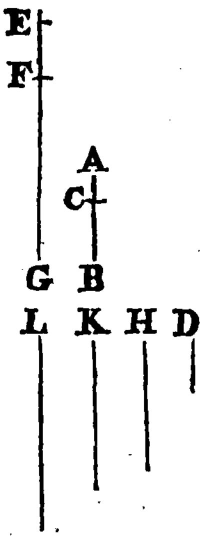
INAEQUALIUM magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.

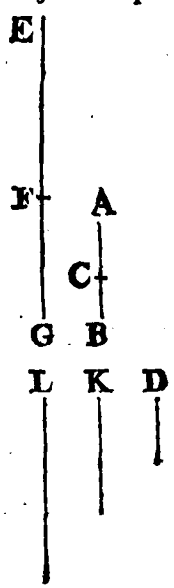
Sint inaequales magnitudines AB, BC, et sit AB major; alia vero utcunque sit D. habebit AB ad D majorem rationem quam BC ad D. et D ad BC majorem rationem habebit quam ad AB.

Si ea quae non major est ipsarum AC, CB non minor sit quam D; sumantur

ſumantur ipſarum AC, CB duplae EF, FG, ut in Fig. 1. ſi vero ea quae non major eſt ipſarum AC, CB minor ſit quam D, (ut in duabus reliquis figuris) ea, ſive fuerit AC ſive CB, multiplicata major aliquando erit quam D. multiplicetur quoad fiat major quam D, et quoties multiplicata fuerit, toties multiplicetur altera; ſitque EF multiplex ipſius AC, FG vero eadem multiplex ipſius CB. utraque igitur EF, FG major eſt quam D. in omnibus autem caſibus, ſumatur ipſius D dupla H, tripla K, et deinceps una amplius, quoad ea quae ſumitur fiat multiplex ipſius D quae primò major eſt ipſâ FG. ſumatur, ſitque L ipſius D multiplex quae primò major eſt FG, K vero ſit ea multiplex ipſius D quae proxime minor eſt quam L.


Quoniam igitur L multiplex eſt ipſius D quae primò major ſit ipſâ FG, non erit K major quam FG, ideoque FG non minor erit quam K. et cum aeque multiplex ſit EF ipſius AC, atque FG ipſius CB, erit [a] et a. 1. 5.
FG aeque multiplex ipſius CB, atque EG ipſius AB; quare EG, FG ipſarum AB, CB ſunt aeque multiplices. oſtenſa autem fuit FG non minor quam K, et ex conſtructione, eſt EF major quam D; ergo tota EG utriſque ſimul K, D major erit. ſed utraque ſimul K, D aequales ſunt ipſi L; ſuperat igitur EG ipſam L; FG vero non ſuperat L; et ſunt EG, FG ip-



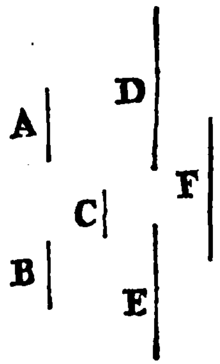
ſarum AB, BC aeque multiplices, et L ipſius D alia quaedam multiplex; b. Def. 7. 5. ergo AB ad D majorem habet rationem quam BC ad D[b].

Praeterea D ad BC majorem habebit rationem quam ad AB. iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendetur L ſuperare FG, ipſam vero EG non ſuperare. atque eſt L multiplex ipſius D, FG vero et EG ſunt aliae quaedam ipſarum CB, AB aeque multiplices. Ergo D ad CB majorem habet rationem quam D ad AB[b]. Inaequalium igitur &c. Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.

**QUAE ad eandem, eandem rationem habent, inter ſe ſunt aequales; et ad quas eadem eandem rationem habet, ipſae ſunt inter ſe aequales.**

Habeat enim utraque ipſarum A, B ad C eandem rationem; dico A ipſi B aequalem eſſe. nam ſi non ſit aequalis, altera ipſarum eſt major; ſit A major; ſunt igitur, ut oſtenſum fuit in propoſitione praecedente, quaedam ipſarum A, B aeque multiplices, et quaedam ipſius C multiplex tales ut multiplex ipſius A ſuperet multiplicem ipſius C, multiplex vero ipſius B eandem non ſuperet. ſumantur, et ſint D, E ipſarum A, B aeque multiplices, F vero ipſius C multiplex, ita ut D ſuperet F, E vero eandem F non ſuperet. quoniam vero eſt A ad C, ut B ad C, et ipſarum A, B ſumptae ſunt quaedam aeque multiplices D, E, et ipſius C ſumpta eſt quaedam




a. 5. Def. 5. multiplex F, et eſt D major F, erit [a] E major F; eſt autem et E non major F, quod fieri non poteſt. non igitur inaequalis eſt A ipſi B; ergo aequalis erit.

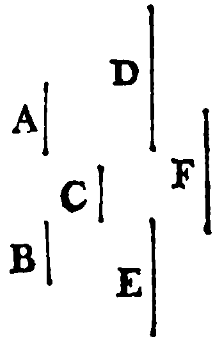
Habeat

Habeat rursus C ad utramque ipsarum A, B eandem rationem. Dico A aequalem esse ipsi B. si enim non sit, altera ipsarum est major; sit major A, est igitur [b] quaedam multiplex F ipsius C, suntque quaedam ip- b. 8. 5.
sarum B, A aeque multiplices E, D, tales ut F superet E non vero ipsam D superet. Quoniam vero est C ad B, ut C ad A, et est F multiplex primae C major E multiplici secundae B, erit [a] F multiplex ter- a. 5. Def. 5.
tiae C major D multiplici quartae A. est autem et F non major D. Quod fieri non potest. Ergo est A aequalis ipsi B. Quae igitur ad eandem &c. Q. E. D.

## PROP. X. THEOR.

**AD eandem magnitudinem rationem habentium, quae majorem rationem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa minor est.**

Habeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C; dico A quam B majorem esse. Quoniam enim A ad C majorem habet rationem, quam B ad C, sunt [a] quaedam ipsarum A, B a. Def. 7. 5.
aeque multiplices, et ipsius C quaedam multiplex, ut multiplex quidem ipsius A superet multiplicem C, multiplex vero B non superet eandem. sumantur, et sint ipsarum A, B aeque multiplices D, E; ipsius vero C multiplex sit F, ita ut D quidem superet F, E autem non superet eandem F. est igitur D major quam E. et quoniam D, E ipsarum A, B sunt aeque multiplices, et est D major quam E, erit A major quam B [b]. b. Ax. 4. 5.




Habeat rursus C ad B majorem rationem quam C ad A. Dico B minorem esse quam A. est enim [a] quaedam multiplex F ipsius C, suntque

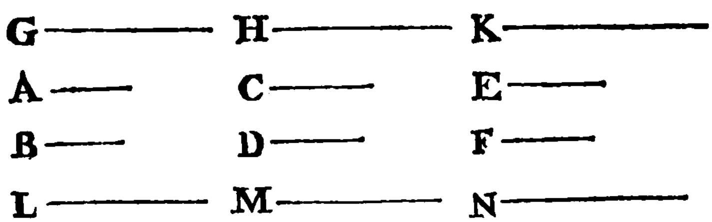
que ipſarum B, A quaedam aeque multiplices E, D, ita ut F ſuperet E, non vero ſuperet ipſam D. eſt igitur E minor quam D; et quoniam b. Ax. 4. 5. E, D ipſarum B, A ſunt aeque multiplices, erit [b] B minor quam A. ad eandem igitur &c. Q. E. D.

## PROP. XI. THEOR.

QUAE eidem eaedem ſunt rationes, et inter ſe eaedem ſunt.

Sint enim ut A ad B, ita C ad D; ut autem C ad D, ita E ad F. Dico ut A ad B, ita E ad F.

Sumantur enim ipſarum quidem A, C, E aeque multiplices quaevis G, H, K; ipſarum vero B, D, F aliae utcunque aeque multiplices, L, M, N. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita C ad D, et ſumptae ſunt ipſarum A, C aeque multiplices G, H; et ipſarum B, D aliae aeque a. 5. Def. 5. multiplices L, M; ſi G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit[a]; et ſi ae-




qualis, aequalis; et ſi minor, minor. rurſus quoniam eſt ut C ad D, ita E ad F, et ſumptae ſunt ipſarum C, E aeque multiplices H, K; ipſarum vero D, F aliae aeque multiplices M, N, ſi H ſuperat M, et K ipſam N ſuperabit[a]; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſed ſi G ſuperat L, oſtenſum eſt H ſuperare M; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor; quare ſi G ſuperat L, et K ipſam N ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. et ſunt G, K quidem ipſarum

A, E

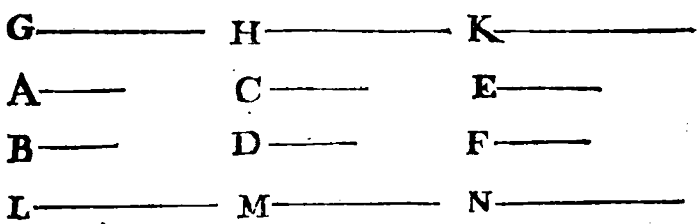
A, E utcunque aeque multiplices; L, N vero ipſarum B, F aliae utcunque aeque multiplices. Ergo ut A ad B, ita erit E ad F. Quae igitur eidem &c. Q. E. D.

## PROP. XII. THEOR.

SI quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ſimul ad omnes conſequentes ſimul.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F; et ut A ad B, ita ſit C ad D, et E ad F. Dico ut A ad B, ita eſſe A, C, E ad B, D, F.

Sumantur enim ipſarum A, C, E utcunque aeque multiplices G, H, K, et ipſarum B, D, F aliae utcunque aeque multiplices L, M, N. Quoniam igitur ut A ad B, ita eſt C ad D, et E ad F; et ſumptae ſunt ipſa-




rum quidem A, C, E aeque multiplices G, H, K, ipſarum vero B, D, F aliae aeque multiplices L, M, N; ſi [a] G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit, et K ipſam N; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. Quare et ſi G ſuperat L, ſuperabunt et G, H, K ipſas L, M, N; et ſi aequalis, aequales; et ſi minor, minores. ſuntque G, et G, H, K ipſarum A, et A, C, E utcunque aeque multiplices, quoniam ſi fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, ſingulae

a. 5. Def. 5.

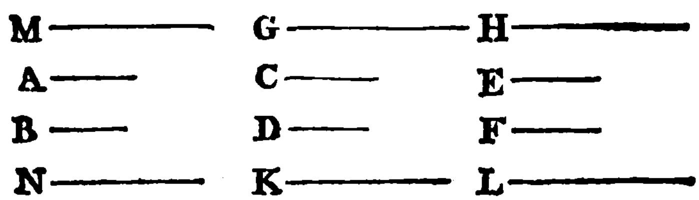
ſingulae ſingularum aeque multiplices; quam multiplex eſt una magnitudo
b. 1. 5. unius, tam multiplices [b] erunt et omnes omnium. eadem ratione L, et L, M, N ipſarum B, et B, D, F ſunt utcunque aeque multiplices. Eſt
a. Def. 5. 5. igitur [a] ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Quare ſi &c. Q. E. D.

## PROP. XIII. THEOR.

**SI prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad ſextam; et prima ad ſecundam majorem habebit rationem quam quinta ad ſextam.**

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat rationem quam quinta E ad ſextam F. Dico et primam A ad ſecundam B majorem rationem habere, quam quintam E ad ſextam F.

Quoniam enim C ad D majorem habet rationem quam E ad F, ſunt quaedam ipſarum C, E aeque multiplices, et ipſarum D, F aliae




quaedam aeque multiplices, ut multiplex quidem C ſuperet multiplicem
a. 7. Def. 5. D; multiplex vero E non ſuperet multiplicem ipſius F [a]. ſumantur, et ſint ipſarum C, E aeque multiplices G, H; et ipſarum D, F aliae aeque multiplices K, L; ita ut G quidem ſuperet K, H vero ipſam L non ſuperet; et quam multiplex eſt G ipſius C, tam multiplex fiat M ipſius A; quam multiplex autem eſt K ipſius D, tam multiplex fiat N ipſius

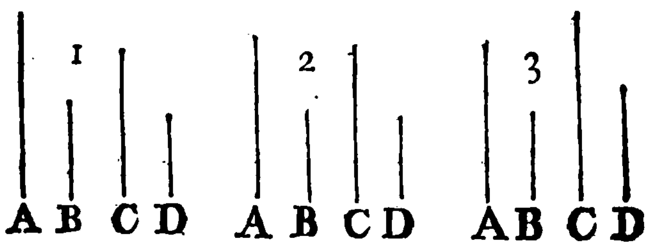
ipſius B. et quoniam eſt ut A ad B, ita C ad D, et ſumptae ſunt ipſarum A, C aeque multiplices M, G, et ipſarum B, D aliae quaedam aeque multiplices N, K; ſi M ſuperat N, et G ipſam K ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſed G ſuperat K, ergo et M ipſam N ſuperabit. H vero non ſuperat L; ſuntque M, H ipſarum A, E aeque multiplices, et N, L ipſarum B, F aliae quaedam aeque multiplices. Ergo A ad B majorem rationem habebit [a] quam E ad F. ſi igitur &c. Q. E. D. a. 7. Def. 5.

Cor. Et ſi prima ad ſecundam majorem rationem habeat, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam eandem rationem habeat, quam quinta ad ſextam; ſimiliter oſtendetur primam ad ſecundam majorem rationem habere, quam quintam ad ſextam.

## PROP. XIV. THEOR.

SI prima ad ſecundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; prima autem major ſit quam tertia; et ſecunda quam quarta major erit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor.

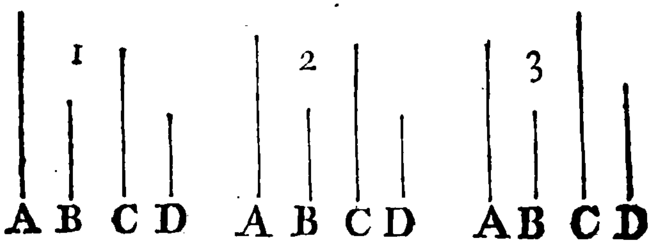
Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat, quam tertia C ad quartam D; major autem ſit A quam C. Dico et B quam D majorem eſſe.




Quoniam enim A major eſt quam C, et alia eſt utcunque magnitudo

U B, ha-

a. 8. 5. B, habebit [a] A ad B majorem rationem quam C ad B. ſed ut C ad
b. 13. 5. D, ita eſt A ad B; ergo et C ad D majorem habebit [b] rationem quam
c. 10. 5. C ad B. ad quam vero eadem majorem rationem habet, illa minor [c]
eſt. quare D eſt minor quam B, ac propterea B quam D major erit.



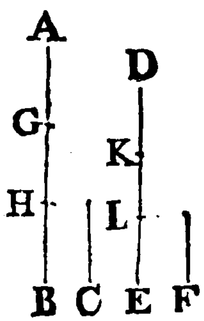

Secundo, Sit A aequalis ipſi C; erit B aequalis ipſi D. quoniam e-
d. 9. 5. nim eſt A ad B, ut C hoc eſt A ad D, erit B aequalis ipſi D [d].

Tertio, Sit A minor C; erit B minor D. Etenim erit C major A, et quoniam eſt C ad D, ut A ad B, erit D major B per Caſum primum. quare B minor erit D. ſi igitur prima &c. Q. E. D.

## PROP. XV. THEOR.

PARTES inter ſe comparatae eandem habent rationem, quam habent earum aeque multiplices.

Sit enim AB aeque multiplex C, atque DE ipſius F. Dico ut C ad F, ita eſſe AB ad DE.




Quoniam enim aeque multiplex eſt AB ipſius C, atque DE, ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB aequales ipſi C, totidem erunt et in DE aequales F. Dividatur AB in magnitudines ipſi C aequales, quae ſint AG, GH, HB; et DE dividatur in magnitudines aequales F, videlicet in DK, KL, LE. erit igitur ipſarum AG, GH, HB multitudo aequalis multi-

tudini

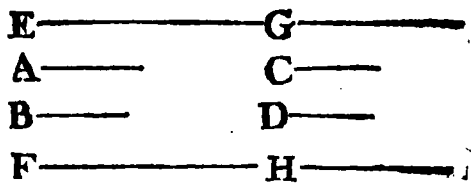
tudini ipſarum DK, KL, LE. et quoniam aequales ſunt AG, GH, HB, ſuntque DK, KL, LE inter ſe aequales; erit ut AG ad DK, ita GH ad KL, et HB ad LE [a]. atque ut una antecedentium ad unam con- a. 7. 5.
ſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes [b]; eſt b. 12. 5.
igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. ſed AG ipſi C eſt aequalis, et DK ipſi F. Ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur &c. Q. E. D.

### PROP. XVI. THEOR.

**SI quatuor magnitudines quae omnes ejuſdem ſunt generis proportionales fuerint, et permutatae proportionales erunt.**

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D, ſitque ut A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales eſſe, videlicet ut A ad C, ita B ad D.

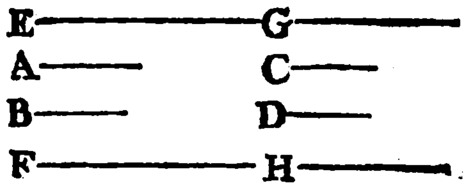
Sumantur enim ipſarum quidem A, B aeque multiplices quaecunque E, F; ipſarum vero C, D, aliae utcunque aeque multiplices G, H. et quoniam aeque multiplex eſt E ipſius A, atque F ipſius B; partes autem inter ſe comparatae




eandem habent [a] rationem quam habent earum aeque multiplices; e- a. 15. 5.
rit ut A ad B, ita E ad F. ut autem A ad B, ita C ad D. Ergo et ut C ad D, ita E ad F [b]. rurſus, quoniam G, H ſunt ipſarum C, D b. 11. 5.
aeque multiplices, erit [a] ut C ad D, ita G ad H; ut autem C ad D, ita E ad F. Ergo et ut E ad F, ita G ad H [b]. Quod ſi quatuor magnitudines proportionales ſint, prima autem major ſit quam tertia, et ſecunda quam quarta major erit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor,

c. 14. 5. minor[c]. si igitur E superat G, et F ipsam H superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. suntque E, F ipsarum A, B, utcunque aeque multiplices, et G, H ipsarum C, D aliae utcunque aeque multiplices. Ergo [d] ut A ad C, ita B ad D. si igitur quatuor &c. Q. E. D.

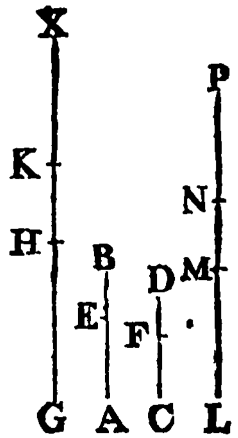
d. Def. 5. 5.




## PROP. XVII. THEOR.

**SI compositae magnitudines sint proportionales, et divisae proportionales erunt.**

Sint compositae magnitudines proportionales AB, BE; CD, DF, hoc est ut AB ad BE, ita sit CD ad DF. Dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB, ita esse CF ad FD.




Sumantur enim ipsarum AE, EB, CF, FD utcunque aeque multiplices GH, HK, LM, MN; ipsarum vero EB, FD rursus sumantur aliae utcunque aeque multiplices KX, NP. et quoniam aeque multiplex est GH ipsius AE, atque HK ipsius EB;

a. 1. 5. erit [a] GH ipsius AE aeque multiplex, atque GK ipsius AB. aeque autem multiplex est GH ipsius AE, atque LM ipsius CF. ergo GK aeque multiplex est AB, atque LM ipsius CF. rursus, quoniam aeque multiplex est LM ipsius CF, atque MN ipsius FD; erit [a] LM aeque multiplex CF, atque LN ipsius CD. sed aeque multiplex erat LM ipsius CF, atque GK ipsius AB. aeque igitur multiplex est GK ipsius AB, atque LN ipsius CD; quare GK, LN ipsarum AB, CD aeque multiplices

multiplices erunt. rursus, quoniam aeque multiplex est HK ipsius EB, atque MN ipsius FD; est autem et KX ipsius EB aeque multiplex, atque NP ipsius FD; et composita HX ipsius EB aeque multiplex erit [b] b. 2. 5. atque composita MP ipsius FD. et quoniam est ut AB ad BE, ita CD ad DF, et sumptae sint ipsarum quidem AB, CD aeque multiplices GK, LN, ipsarum vero EB, FD aliae quaedam aeque multiplices HX, MP; si [c] GK superat HX, et LN superabit MP; et si aequalis, ae- c. 5. Def. 5. qualis; et si minor, minor. si autem GH superat KX, additâ communi HK, superabit GK ipsam HX; quare et LN superabit MP; communique MN ablatâ, superabit LM ipsam NP. Quare si GH superat KX, et LM superabit ipsam NP. similiter demonstrabimus et si GH sit aequalis KX, et LM ipsi NP esse aequalem; et si minor, minorem. sunt autem GH, LM ipsarum AE, CF utcunque aeque multiplices, et ipsarum EB, FD aliae utcunque aeque multiplices sunt KX, NP. ergo ut AE ad EB, ita erit CF ad FD. si igitur compositae magnitudines sint &c. Q. E. D.

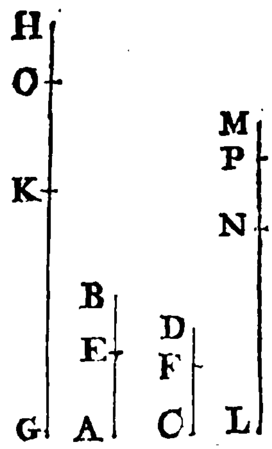
PROP. XVIII.

## PROP. XVIII. THEOR.

SI divisae magnitudines sint proportionales, et compositae proportionales erunt.

Sint divisae magnitudines proportionales AE, EB; CF, FD; hoc est ut AE ad EB, ita sit CF ad FD; dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF.

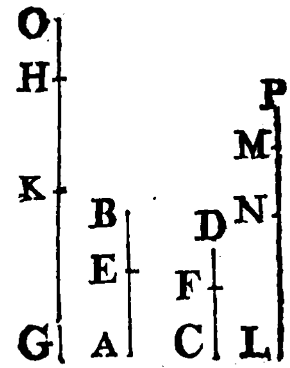
Sumantur enim ipsarum AB, BE, CD, DF utcunque aeque multiplices GH, HK, LM, MN; ipsarum autem BE, DF aliae rursus sumantur utcunque aeque multiplices KO, NP. et quoniam KO, NP aeque multiplices sunt ipsarum BE, DF; et KH, NM earundem sunt aeque multiplices, si KO multiplex ipsius BE major sit KH multiplici ejusdem BE, erit et NP multiplex ipsius DF major NM multiplici ejusdem DF; et si KO aequalis sit KH, erit NP aequalis NM; et si minor, minor.




Sit primum KO non major KH, igitur erit NP non major NM. et quoniam GH, HK aeque multiplices sunt ipsarum AB, BE, et est
* 3. Ax. 5. AB major BE, erit GH major * KH; est autem KO non major KH; quare GH major est KO. similiter ostendetur LM majorem esse NP. Ergo si KO non major sit KH, erit GH multiplex ipsius AB semper major KO multiplici ipsius BE, et simul LM multiplex ipsius CD major erit NP multiplici ipsius DF.

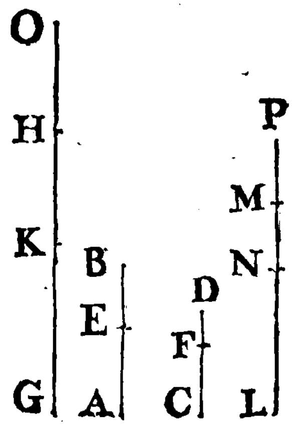
Sed sit KO major quam KH; erit igitur, ut ostensum, NP major NM. et quoniam est tota GH aeque multiplex totius AB, atque ablata

lata HK ablatae BE, erit [a] et reliqua GK reliquae AE aeque multi- a. 5. 5.
plex atque GH ipſius AB, hoc eſt atque LM ipſius CD. ſimiliter quoniam LM aeque multiplex eſt ipſius CD, atque ablata MN ablatae DF, erit [a] reliqua LN aeque multiplex reliquae CF, atque LM ipſius CD. ſed aeque multiplex oſtenſa eſt LM ipſius CD, atque GK ipſius AE; aeque igitur multiplex eſt GK ipſius AE, atque LN ipſius CF. quare GK, LN ipſarum AE, CF ſunt aeque multiplices. quoniam vero KO, NP ipſarum BE, DF ſunt aeque multiplices, et ablatae ſunt KH, NM earundem aeque multiplices, erunt reliquae HO, MP vel aequales ipſis BE, DF, vel earundem aeque multiplices[b]. ſint primùm HO, MP ae- b. 6. 5.



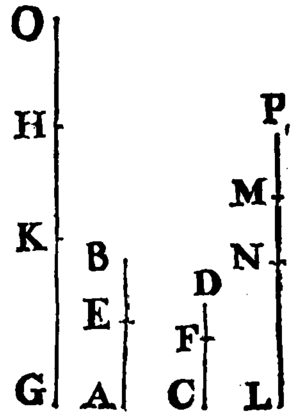

quales ipſis BE, DF; et quoniam eſt AE ad EB, ut CF ad FD, et ſumptae ſunt GK, LN ipſarum AE, CF aeque multiplices, erit [c] GK c. Cor. 4. 5.
ad EB, ut LN ad FD. eſt autem HO aequalis EB, et MP ipſi FD; quare eſt GK ad HO, ut LN ad MP. Ergo ſi GK ſuperat HO, ſuperabit LN ipſam MP; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor[d]. d. A. 5.

Sed ſint HO, MP ipſarum EB, FD aeque multiplices; et quoniam eſt AE ad EB, ut CF ad FD, et ſumptae ſunt ipſarum AE, CF aeque multiplices GK, LN; ipſarum vero EB, FD aliae quaedam aeque multiplices HO, MP; ſi GK ſuperat HO, et LN ſuperabit MP; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor[e]; quod etiam in caſu praecedente oſtenſum fuit. e. 5. Def. 5. ſi igitur GH ſuperat KO, ablatâ communi KH, ſuperabit GK ipſam HO; quare et LN ſuperabit MP; et additâ communi NM, ſuperabit LM ipſam NP. Ergo




ſi GH

si GH superat KO, et LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabitur si GH aequalis sit KO, et LM ipsi NP aequalem esse; et si minor, minorem. et in casu in quo KO non major est KH, ostensum fuit GH semper majorem esse KO, et simul LM majorem NP. sunt autem GH, LM ipsarum AB, CD utcunque aeque multiplices, et KO, NP ipsarum BE, DF aliae utcunque
c. 5. Def. 5. aeque multiplices; ergo [c] ut AB ad BE, ita est CD ad DF. Quare si divisae &c. Q. E. D.

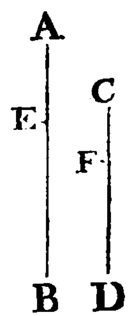



## PROP. XIX. THEOR.

SI fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD.

a. 16. 5. Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; et per-
b. 17. 5. mutando erit [a] ut BA ad AE, ita DC ad CF. quoniam vero compositae magnitudines sunt proportionales, et divisae proportionales erunt [b]; ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC; rursusque permutando, ut BE ad DF, ita EA ad FC. sed ut AE ad CF, ita posita est AB ad CD. et reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. quare si &c. Q. E. D.




Cor. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam;

erit

erit et reliqua ad reliquam ut ablata ad ablatam. hoc enim in ipsa demonstratione ostensum est.

### PROP. E. THEOR.

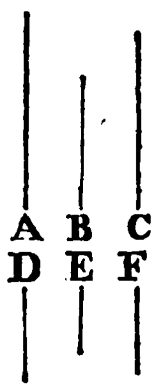
SI quatuor magnitudines proportionales sint; et convertendo proportionales erunt.


Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF; convertendo erit ut BA ad AE, ut DC ad CF.

Quoniam enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, dividendo [a] a. 17. 5.
erit AE ad EB, ut CF ad FD; et invertendo [b], BE ad b. B. 5.
EA, ut DF ad FC. Quare componendo [c], erit BA ad AE, c. 18. 5.
ut DC ad CF. si igitur &c. Q. E. D.

### PROP. XX. THEOR.

SI sint tres magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; prima autem major sit quam tertia; et quarta quam sexta major erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

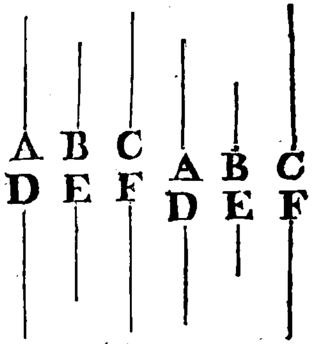



Sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumptae sunt in eadem ratione; sit scilicet ut A ad B, ita D ad E; et ut B ad C, ita E ad F; major autem sit A quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim A major est quam C, alia vero utcunque est B, et major ad eandem majorem habet rationem quam minor [a]; habebit A ad B majorem rationem, quam a. 8. 5.

b. 13. 5. C ad B. ſed ut D ad E, ita A ad B; ergo [b] et D ad E majorem habet rationem, quam C ad B. et quoniam eſt B ad C, ut E ad F, invertendo erit C ad B, ut F ad E; oſtenſa autem eſt D ad E majo-
c. Cor. 13. 5. rem rationem habere quam C ad B; ergo [c] D ad E majorem habet rationem quam F ad E. ad eandem vero rationem habentium, quae
d. 10. 5. majorem habet rationem illa major eſt [d]. major igitur eſt D quam F.

Secundo, Sit A aequalis ipſi C; erit et D aequalis ipſi F. Quoniam enim aequales ſunt A, C, et alia utcunque
e. 7. 5. eſt B, erit [e] A ad B, ut C ad B. eſt autem A ad B, ut D ad E; et C ad B, ut F ad E;
f. 11. 5. ergo [f] eſt D ad E, ut F ad E; et propterea
g. 9. 5. [g] D aequalis eſt ipſi F.

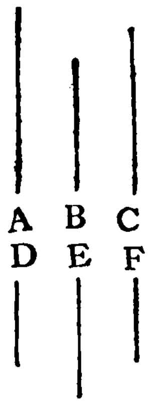



Tertio, Sit A minor C, erit et D minor F. quoniam enim A minor eſt C, erit C major quam A. et quoniam ex hypotheſi, et invertendo, eſt C ad B, ut F ad E; et B ad A, ut E ad D; et eſt C major A; erit et F major D, per Caſum primum, et ob id erit D minor F. ſi igitur &c. Q. E. D.

## PROP. XXI. THEOR.

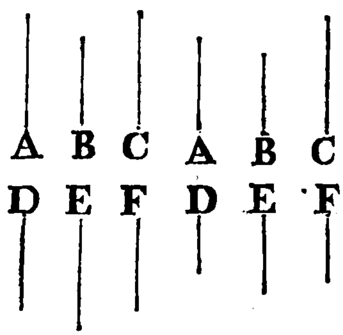
SI ſint tres magnitudines, et aliae ipſis numero aequales, quae binae ſumantur in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio; prima autem major ſit quam tertia, et quarta quam ſexta major erit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipſis numero aequales D, E, F quae binae ſumptae ſint in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad ad C, ita D ad E. major autem sit A quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.




Quoniam enim major est A quam C, alia vero est B; habebit [a] A ad B majorem rationem quam C ad B. sed a. 8. 5.
ut E ad F, ita A ad B; ergo [b] et E ad F majorem habebit rationem, quam C ad B. b. 13. 5. quoniam vero est B ad C, ut D ad E, invertendo erit C ad B, ut E ad D. ostensa autem est E ad F majorem rationem habere quam C ad B; ergo [c] E ad F majorem habet rationem quam c. Cor. 13. 5.
E ad D. ad quam vero eadem majorem habet rationem illa minor est [d]; minor igitur est F quam D, et propterea D quam d. 10. 5.
F major erit.

Secundo, Sit A aequalis ipsi C; erit et D aequalis ipsi F. Quoniam enim aequales sunt A, C, alia vero est B, erit [e] A ad B, ut C ad B. e. 7. 5. est autem A ad B, ut E ad F; et C ad B, ut E ad D. ergo [f] est E ad F, ut E ad D. f. 11. 5. aequalis igitur est D ipsi F [g]. g. 9. 5.




Tertio, Sit A minor C; erit et D minor F. quoniam enim A minor est C, erit C major A. et quoniam ex hypothesi, et invertendo, est C ad B, ut E ad D; et B ad A, ut F ad E; et est C major A, erit F major D per Casum primum; et ob id erit D minor F. si igitur &c. Q. E. D.

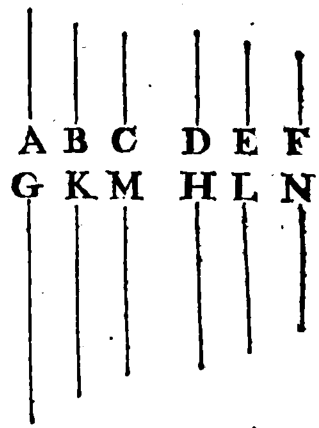
 PROP. XXII.

## PROP. XXII. THEOR.

SI ſint quotcunque magnitudines, et aliae ipſis numero aequales, quae binae ſumantur in eadem ratione; et ex aequali in eadem ratione erunt.

Sint primùm tres magnitudines A, B, C, et aliae ipſis numero aequales D, E, F, binae ſumptae in eadem ratione, hoc eſt ut A quidem ad B, ita D ad E; ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ut A ad C, ita eſſe D ad F.

Sumantur enim ipſarum quidem A, D aeque multiplices utcunque G, H; ipſarum vero B, E aliae utcunque aeque multiplices K, L; et ipſarum C, F aliae utcunque aeque multiplices M, N. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita D ad E, et ſumptae ſunt ipſarum A, D aeque multiplices G, H, et ipſarum B, E aliae
a. 4. 5. aeque multiplices K, L; erit [a] ut G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. et cum ſint tres magnitudines G, K, M, et aliae ipſis numero aequales H, L, N binae ſumptae et in eadem ratione; ſi G ſuperat M, et H ipſam N ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor,
b. 20. 5. minor [b]. ſuntque G, H ipſarum A, D utcunque aeque multiplices, et M, N ipſarum C, F, aliae utcunque aeque multiplices. ut igitur A ad
c. 5. Def. 5. C, ita erit [c] D ad F.




Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, D, et aliae ipſis numero aequales E, F, G, H quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione; videlicet ut A ad B, ita E

| | | | |
|---|---|---|---|
| A. | B. | C. | D. |
| E. | F. | G. | H. |

ad

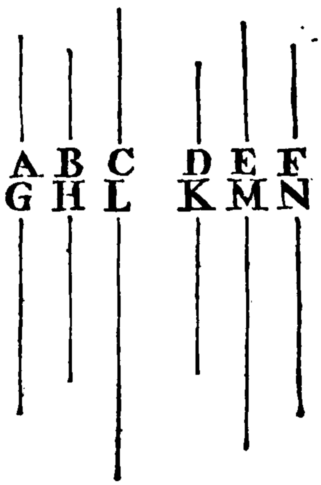
ad F; ut vero B ad C, ita F ad G; et ut C ad D, ita G ad H; erit A ad D, ut E ad H.

Quoniam enim tres ſunt magnitudines A, B, C et aliae ipſis numero aequales, E, F, G quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione, erit, per Caſum primum, A ad C, ut E ad G; eſt autem et C ad D, ut G ad H; quare rurſus per Caſum primum, eſt A ad D, ut E ad H. et ſic quotcunque fuerint magnitudines. Quare ſi &c. Q. E. D.

### PROP. XXIII. THEOR.

**SI ſint quotcunque magnitudines, et aliae ipſis numero aequales, quae binae ſumantur in eadem ratione; ſit autem perturbata ſeu inordinata earum proportio: et ex aequali in eadem ratione erunt.**

Sint primum tres magnitudines A, B, C, et aliae ipſis numero aequales, binae ſumptae et in eadem ratione D, E, F; ſit autem perturbata earum proportio, hoc eſt ſit ut A ad B, ita E ad F; et ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita eſſe D ad F.

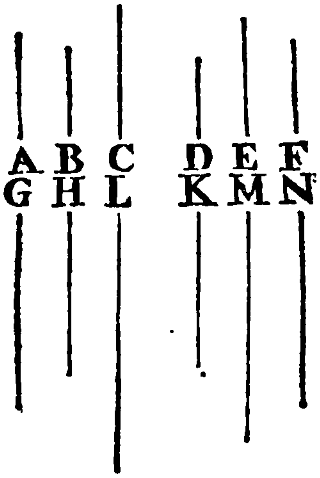



Sumantur ipſarum quidem, A, B, D utcunque aeque multiplices G, H, K; ipſarum vero C, E, F aliae utcunque aeque multiplices L, M, N. et quoniam G, H aeque multiplices ſunt ipſarum A, B, partes autem eandem habent rationem quam habent earum aeque multiplices [a]; erit ut A ad B, ita G ad H. et ſimili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque eſt ut A ad B, ita E ad F. ut igitur G ad H, ita [b] M ad N. et quoniam

a. 15. 5.

b. 11. 5.

quoniam eſt ut B ad C, ita D ad E, et ſumptae ſunt ipſarum B, D aeque multiplices H, K, ipſarum vero C, E, aliae aeque multiplices
c. 4. 5. L, M; erit [c] ut H ad L, ita K ad M. oſtenſum autem eſt et ut G ad H, ita eſſe M ad N. quoniam igitur tres ſunt magnitudines G, H, L, et




aliae ipſis numero aequales K, M, N binae ſumptae in eadem ratione,
d. 21. 5. eſtque perturbata earum proportio; ſi [d] G ſuperat L, et K ipſam N ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſunt autem G, K, ipſarum A, D, utcunque aeque multiplices; et L, N utcunque aeque
e. Def. 5. 5. multiplices ipſarum C, F. ut igitur [e] A ad C, ita D ad F.

Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, D et aliae ipſis numero aequales E, F, G, H quae binae ſumptae in eadem ſunt ratione; ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B, ita G ad H; ut vero B ad C, ita F ad G; et ut C ad D, ita E ad F. erit A ad D, ut E ad H.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A. | B. | C. | D. |
| E. | F. | G. | H. |

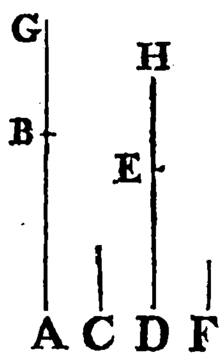
Quoniam enim tres ſunt magnitudines A, B, C et aliae ipſis numero aequales F, G, H quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione, eſtque perturbata

perturbata earum proportio; erit, per Caſum primum, ut A ad C, ita F ad H; eſt autem C ad D, ut E ad F; quare, rurſus per Caſum primum, eſt A ad D, ut E ad H. et ſic quotcunque fuerint magnitudines. Quare ſi fuerit &c. Q. E. D.

## PROP. XXIV. THEOR.

**SI prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad ſecundam rationem eandem quam ſexta ad quartam; et compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem rationem habebit, quam tertia cum ſexta ad quartam.**

Prima enim AB ad ſecundam C eandem habeat rationem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem et quinta BG ad ſecundam C rationem eandem quam ſexta EH ad quartam F. Dico et compoſitam primam cum quinta AG ad ſecundam C eandem rationem habere, quam tertia cum ſexta DH ad quartam F.




Quoniam enim eſt ut BG ad C, ita EH ad F; erit invertendo C ad BG, ut F ad EH. et quoniam ut AB ad C, ita eſt DE ad F; ut autem C ad BG, ita F ad EH; erit [a] ex aequali ut AB ad BG, ita DE ad EH. et quoniam diviſae magnitudines ſunt proportionales, et compoſitae proportionales erunt [b]; ut igitur AG ad GB, ita eſt DH ad HE. ſed et ut GB ad C, ita HE ad F. ergo ex aequali [a], ut AG ad C, ita DH ad F. ſi igitur &c. Q. E. D.

a. 22. 5.
b. 18. 5.

Cor. 1. Manente hypotheſi Propoſitionis, erit exceſſus primae et quintae ad ſecundam, ut exceſſus tertiae et ſextae ad quartam. Demonſtratio

monſtratio eadem eſt cum ea Propoſitionis dummodo vice componendo utatur dividendo.

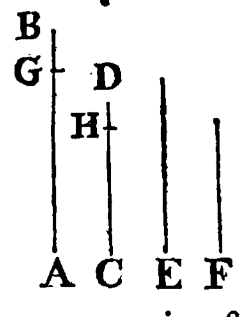
Cor. 2. Ipſa autem Propoſitio vera eſt de quotcunque magnitudinibus, quarum priores ad communem ſecundam eaſdem habent rationes quas habent reliquae ad communem quartam, ſingulae ſc. priorum ad ſecundam, eandem quam ſingulae reliquarum ad quartam; ut patet.

## PROP. XXV. THEOR.

**SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum et minima duabus reliquis majores erunt.**

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F; et ſit ut AB ad CD, ita E ad F. ſit autem maxima ipſarum AB, et propterea
a. A. et 14. 5. [a] F minima. Dico AB et F ipſis CD et E majores eſſe.

Ponatur enim ipſi quidem E aequalis AG, ipſi vero F aequalis CH. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita E ad F; eſtque AG aequalis E, et CH aequalis F; erit ut AB ad CD, ita AG ad CH. et quoniam eſt ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; erit et reliqua GB
b. 19. 5. ad reliquam HD, ut tota AB ad totam [b] CD. ma-
c. A. 5. jor autem eſt AB quam CD; ergo [c] et GB major erit quam HD. et quoniam AG aequalis eſt ipſi E, CH vero ipſi F; erunt AG et F aequales ipſis CH et E. inaequalibus igitur exiſtentibus GB, HD, quarum major eſt GB, ſi addantur AG et F ipſi quidem GB, ipſi vero HD addantur CH et E; fient AB et F ipſis CD et E majores. ſi igitur quatuor &c. Q. E. D.




PROP. F.

## PROP. F. THEOR.

**R**ATIONES ex rationibus inter ſe iiſdem compoſitae, ſunt inter ſe eaedem.

Sit enim ut A ad B, ita D ad E; ut vero B ad C, ita E ad F. erit ratio compoſita ex rationibus A ad B, et B ad C, hoc eſt, per definitionem rationis compoſitae, ratio A ad C, eadem rationi D ad F, quae ſc. compoſita eſt ex rationibus D ad E, et E ad F.

A. B. C.
D. E. F.

Quoniam enim tres ſunt magnitudines A, B, C et aliae ipſis numero aequales D, E, F quae binae ſumptae in eadem ſunt ratione, erit [a] ex aequali A ad C, ut D ad F. a. 22. 5.

Rurſus ſit ut A ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; erit igitur ex aequali in proportione perturbata [b], A ad C, ut D ad F, hoc eſt ratio A ad C, quae ſc. compoſita eſt ex rationibus A ad B, et B ad C, eadem eſt rationi D ad F, quae compoſita eſt ex rationibus D ad E, et E ad F. et ſimiliter ſi fuerint plures rationes in utroque caſu. Rationes igitur &c. Q. E. D. b. 23. 5.

A. B. C.
D. E. F.

## PROP. G. THEOR.

**S**I rationes quaedam eaedem ſint quibuſdam rationibus, ſingulae ſingulis; ratio quae compoſita eſt ex rationibus quae eaedem ſunt rationibus prioribus, ſingulae ſingulis, eadem erit rationi quae compoſita eſt ex rationibus quae eaedem ſunt poſterioribus, ſingulae ſingulis.

Sit ut A ad B, ita E ad F; ut vero C ad D, ita G ad H. ſitque ut A ad B, ita K ad L; ut vero C ad D, ita L ad M. ratio igitur K ad M, per Definitionem rationis compoſitae, compoſita eſt ex rationibus K ad L, et L ad M, quae eaedem ſunt rationibus A ad B, et C ad D. ſitque praeterea ut E ad F, ita N ad O, ut vero G ad H, ita O ad P; ratio igitur N ad P compoſita eſt ex rationibus N ad O, et O ad P, quae eaedem ſunt rationibus E ad F, et G ad H. et oſtendendum eſt rationem K ad M eandem eſſe rationi N ad P, ſive ut K ad M, ita eſſe N ad P.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | B. | C. | D. | K. | L. | M. |
| E. | F. | G. | H. | N. | O. | P. |

Quoniam eſt K ad L, ut (A ad B, hoc eſt ut E ad F, hoc eſt ut) N ad O; ut vero L ad M, ita eſt (C ad D, et ita G ad H, et ita) O ad P.
a. 22. 5. erit [a] ex aequali K ad M, ut N ad P. Si igitur rationes &c. Q. E. D.

## PROP. H. THEOR.

SI ratio ex quibuſdam rationibus compoſita eadem ſit rationi ex quibuſdam aliis rationibus compoſitae, fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibuſdam ex prioribus compoſita, eadem uni rationi ex poſterioribus, vel rationi ex quibuſdam ex poſterioribus compoſitae; erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus compoſita, eadem rationi reliquae ex poſterioribus, vel rationi ex reliquis poſterioribus compoſitae.

Sint rationes A ad B, B ad C, C ad D, D ad E, et E ad F; et aliae rationes G ad H, H ad K, K ad L, et L ad M. ſitque ratio A ad F, quae ſc. compo-
a. Def. rationis comp. ſita eſt [a] ex prioribus, eadem rationi G ad M, quae compoſita eſt [a] ex poſterioribus. et praeterea ratio A ad D quae compoſita eſt ex rationibus A ad B, B ad C, et

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A. | B. | C. | D. | E. | F. |
| G. | H. | K. | L. | M. | |

et C ad D, eadem ſit rationi G ad K quae compoſita eſt ex rationibus G ad H, et H ad K. erit ratio D ad F quae compoſita eſt ex reliquis rationibus prioribus D ad E, et E ad F, eadem rationi K ad M quae compoſita eſt ex reliquis rationibus poſterioribus K ad L, et L ad M.

Quoniam enim, ex hypotheſi, eſt A ad D, ut G ad K, erit invertendo[b], D ad A, ut K ad G; ut vero A ad F, ita eſt G ad M; ergo[c], ex aequali, erit D ad F, ut K ad M. ſi igitur &c. Q. E. D. b. B. 5. c. 22. 5.

## PROP. K. THEOR.

SI fuerint quotcunque rationes, quae dicantur priores, fuerintque aliae quotcunque rationes, quae dicantur poſteriores; ſitque ratio quae compoſita eſt ex rationibus quae eaedem ſunt rationibus prioribus, ſingulae ſingulis, eadem rationi quae compoſita eſt ex rationibus quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt rationibus poſterioribus; una vero ratio ex prioribus, vel ratio quae compoſita eſt ex rationibus quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt totidem ex prioribus, eadem ſit uni rationi ex poſterioribus, vel rationi quae compoſita eſt ex rationibus quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt totidem ex poſterioribus: erit reliqua ratio ex prioribus, vel, ſi plures fuerint, erit ratio quae compoſita eſt ex rationibus quae eaedem ſunt reliquis ex prioribus, ſingulae ſingulis, eadem rationi reliquae ex poſterioribus, vel, ſi plures fuerint, rationi quae compoſita eſt ex rationibus quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt reliquis ex poſterioribus.

Sint rationes A ad B, C ad D, E ad F, priores; poſteriores vero ſint rationes G ad H, K ad L, M ad N, O ad P, Q ad R. et ſit ut

A ad B, ita S ad T, et ut C ad D, ita T ad V, ut vero E ad F, ita V ad X. erit igitur, ex Definitione rationis compoſitae, ratio S ad X compoſita ex rationibus S ad T, T ad V, V ad X, quae ſcilicet eaedem ſunt, ſingulae ſingulis, rationibus A ad B, C ad D, E ad F. ſit etiam ut G ad H, ita Y ad Z, et ut K ad L, ita Z ad a, ut M ad N, ita a ad b, ut O ad P, ita b ad c, et ut Q ad R, ita c ad d. eſt igitur, ex eadem Definitione, ratio Y ad d compoſita ex rationibus Y ad Z, Z ad a, a ad b, b ad c, et c ad d, quae ſcilicet eaedem ſunt, ſingulae ſingulis, rationibus G ad H, K ad L, M ad N, O ad P, et Q ad R. igitur, ex hypotheſi, eſt S ad X, ut Y ad d. praeterea ſit ratio A ad B, ſive ratio S ad T, una ſc. ex prioribus eadem rationi e ad g quae compoſita eſt ex rationibus e ad f, et f ad g, quae eaedem ſunt, ex hypotheſi, rationibus G ad H, et K ad L ex poſterioribus; ſitque ratio h ad l compoſita ex rationibus h ad k, et k ad l, quae eaedem ſunt rationibus reliquis ex prioribus, ipſis ſc. C ad D, et E ad F; et ſit ratio m ad p compoſita ex rationibus m ad n, n ad o, o ad p, quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt reliquis ex poſterioribus rationibus, ipſis ſc. M ad N, O ad P, Q ad R. erit ratio h ad l eadem rationi m ad p, ſive erit h ad l, ut m ad p.

| | | |
|---|---|---|
| | h, k, l. | |
| A, B; | C, D; E, F. | S, T, V, X. |
| G, H; K, L; | M, N; O, P; Q, R. | Y, Z, a, b, c, d. |
| e, f, g. | m, n, o, p. | |

Etenim quoniam eſt e ad f, ut (G ad H, hoc eſt ut) Y ad Z; eſt autem f ad g, ut (K ad L, hoc eſt ut) Z ad a; erit, ex aequali, e ad g, ut Y ad a. et, ex hypotheſi, eſt A ad B ſive S ad T, ut e ad g; quare

quare est S ad T, ut Y ad a, et, invertendo, T ad S, ut a ad Y; est autem S ad X, ut Y ad d; ergo, ex aequali, erit T ad X, ut a ad d. praeterea quoniam est h ad k, ut (C ad D, hoc est ut) T ad V; ut vero k ad l, ita (E ad F, hoc est ita) V ad X; erit ex aequali h ad l, ut T ad X. similiter ostendetur esse m ad p, ut a ad d. ostensum autem fuit esse T ad X, ut a ad d. ergo [a] est h ad l, ut m ad p. a. 11. 5.
Q. E. D.

Propositiones G et K apud veteres et recentiores Geometras comprehendi solent in enuntiatione Propositionum F et H, brevitatis scilicet gratia. quo autem sensu hoc fieri potest, operae pretium fuit ostendere; saepissime enim a Geometris usurpantur.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS

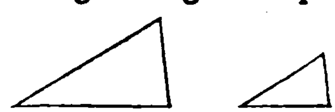
# ELEMENTORUM

## LIBER SEXTUS.

### DEFINITIONES.

I.

SIMILES figurae rectilineae ſunt, quae et ſingulos angulos aequales habent, et circa aequales angulos latera proportionalia.



II.

“ Reciprocae figurae, triangula ſc. et parallelogramma, ſunt quando circa duos angulos latera ita ſunt proportionalia, ut latus primae ſit ad latus ſecundae, ut reliquum ſecundae latus ad latus reliquum primae.”

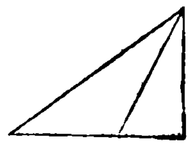
III.

Extrema ac media ratione ſecari recta linea dicitur, quando ut tota ad majus ſegmentum, ita fuerit majus ſegmentum ad minus.

Altitudo

IV.

Altitudo cujusque figurae est recta linea a vertice ad basim perpendicularis ducta.

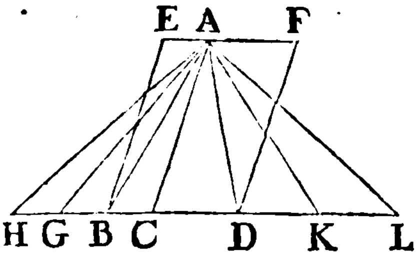


## PROP. I. THEOR.

**TRIANGULA et parallelogramma quae eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.**

Sint triangula quidem ABC, ACD, parallelogramma vero EC, CF, quae eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad BD ductam. Dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, et parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum.

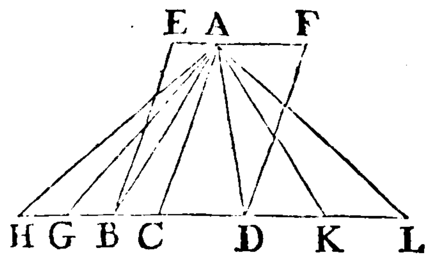
Producatur enim BD ex utraque parte ad puncta H, L, et ipsi quidem basi BC aequales quotcunque ponantur BG, GH; ipsi vero basi CD ponantur quotcunque aequales DK, KL; et AG, AH, AK, AL jungantur. Quoniam igitur CB, BG, GH inter se aequales sunt, erunt et triangula AHG, AGB, ABC inter se aequalia[a]. ergo quam multiplex est basis HC ipsius BC basis, tam multiplex est AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quam multiplex est LC basis ipsius basis CD, tam multiplex est et triangulum ALC ipsius ACD trianguli. et si aequalis est HC basis basi CL, et triangulum AHC triangulo ALC erit aequale[a]; et si basis HC basim CL superat, et triangulum AHC superabit triangulum ALC; et si minor, minus erit. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus




a. 38. 1.

bus baſibus BC, CD, et duobus triangulis ABC, ACD, ſumpta ſunt aeque multiplicia utcunque baſis quidem BC, et ABC trianguli, videlicet baſis HC, et AHC triangulum; baſis vero CD et trianguli ACD, alia utcunque multiplicia, nempe CL baſis, et ALC triangulum; atque oſtenſum eſt ſi HC baſis baſim CL ſuperat, et triangulum AHC ſuperare triangulum ALC; et ſi aequalis, aequale; et ſi minor, minus. eſt

b. 5. Def. 5. igitur [b] ut BC baſis ad baſim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum.




Et quoniam trianguli ABC du-

c. 41. 1. plum eſt [c] parallelogrammum EC, et trianguli ACD parallelogrammum CF duplum[c], partes autem eandem inter

d. 15. 5. ſe rationem habent quam earum aeque multiplices[d]; erit ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur oſtenſum eſt ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF pa-

e. 11. 5. rallelogrammum; erit [e] ut BC baſis ad baſim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quare triangula &c. Q. E. D.

Cor. Hinc triangula et parallelogramma, quae aequales habent altitudines, ſunt inter ſe ut baſes.

Poſitis enim figuris ita ut baſes earum ſint in eâdem recta linea, et ductis perpendicularibus a verticibus triangulorum ad baſes, erit recta

f. 33. 1. linea quae vertices jungit parallela rectae in qua ſunt baſes[f], quia perpendiculares ſunt inter ſe aequales et parallelae. et iiſdem conſtructis quae in Propoſitione conſtructa fuerunt, Demonſtratio eadem erit cum ea Propoſitionis.

PROP. II.

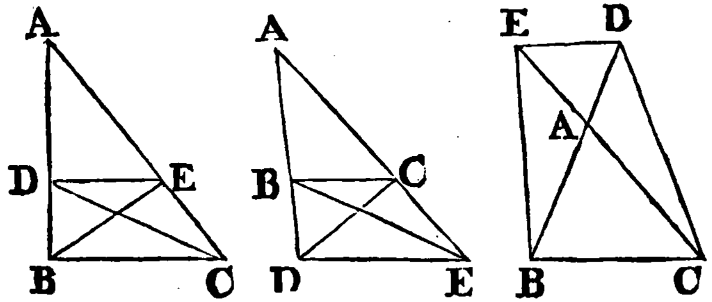
## PROP. II. THEOR.

SI uni laterum trianguli parallela quaedam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit reliqua trianguli latera, vel latera producta. et si latera trianguli, vel latera producta proportionaliter secta fuerint, quae sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. Dico ut BD ad DA, ita esse CE ad EA.

Jungantur enim BE, CD; triangulum igitur BDE triangulo CDE est aequale[a], super eadem enim sunt basi DE, et in eisdem parallelis DE, BC. aliud autem triangulum est ADE; aequalia vero ad idem eandem habent rationem[b]; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE; ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est [c] BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habent, videlicet perpendicularem a puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. et ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. ut igitur BD ad DA, ita est CE ad EA[d].

a. 37. 1.
b. 7. 5.

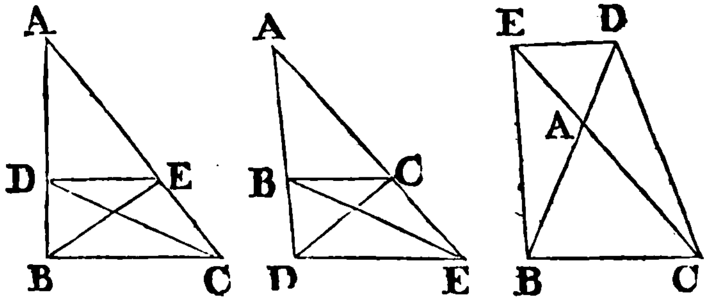



c. 1. 6.
d. 11. 5.

Sed trianguli ABC latera AB, AC, vel latera producta proportionaliter

liter secta sint in punctis D, E, hoc est ut BD ad DA, ita sit CE ad EA, et jungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA;
c. 1. 6. ut autem BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulum ADE[c]; et ut CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE; erit ut




triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. utrumque igitur triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habet rationem; quare triangulum BDE triangulo
e. 9. 5. CDE est aequale[e]. et sunt super eadem basi DE; aequalia autem tri-
f. 39. 1. angula et super eadem basi constituta etiam in eisdem sunt parallelis[f]; ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni &c. Q. E. D.

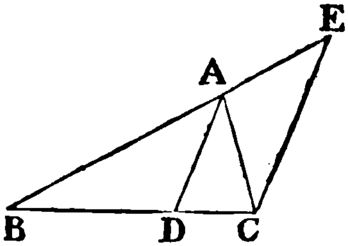
## PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis segmenta eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera. et si basis segmenta eandem rationem habeant, quam reliqua trianguli latera; quae a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit

Sit triangulum ABC, et secetur angulus BAC bifariam rectâ lineâ AD. Dico ut BD ad DC, ita esse BA ad AC.

Ducatur enim per C ipsi DA parallela [a] CE, et producta BA con- a. 31. 1.
veniat cum ipsa in puncto E. Quoniam igitur in parallelas AD, EC incidit recta linea AC, erit ACE angulus angulo alterno CAD aequalis [b]. sed CAD angulus ponitur aequalis angulo BAD; ergo et BAD b. 29. 1.
ipsi ACE angulo aequalis erit. Rursus, quoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD aequalis est [b] interiori et opposito AEC. ostensus autem est et angulus ACE angulo BAD aequalis; ergo et ACE ipsi AEC aequalis erit; et propterea latus AE




aequale lateri AC [c]. et quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet c. 6. 1.
ipsi EC parallela ducta est AD; erit [d] ut BD ad DC, ita BA ad AE. d. 2. 6.
aequalis autem est AE ipsi AC; est igitur [e] ut BD ad DC, ita BA e. 7. 5.
ad AC.

Sit autem ut BD ad DC, ita BA ad AC, et jungatur AD; dico angulum BAC bifariam sectam esse recta linea AD.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita BA ad AC; sed et ut BD ad DC, ita BA ad AE [d], etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC, parallela ducta est AD, erit [f] et ut BA ad AC, f. 11. 5.
ita BA ad AE. ergo AC est aequalis AE [g], et propterea et angulus AEC g. 9. 5.
angulo ACE aequalis [h]. sed angulus quidem AEC est aequalis angulo h. 5. 1.
exteriori BAD [b]; angulus vero ACE aequalis alterno CAD. quare et BAD angulus ipsi CAD aequalis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli &c. Q. E. D.

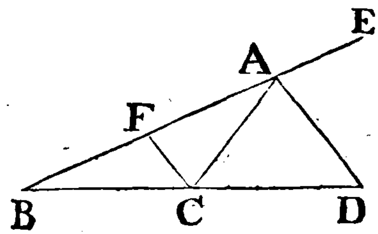
 PROP. A.

## PROP. A. THEOR.

SI trianguli, uno latere producto, angulus exterior bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim productam; basis productae segmenta inter secantem et basis terminos eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera. et si basis productae segmenta eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, quae a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum exteriorem bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, et recta AD bifariam secet angulum trianguli exteriorem CAE, et basi BC productae occurrat in D. erit ut BD ad DC, ita BA ad AC.

a. 31. 1. Ducatur [a] enim per C recta CF parallela ipsi AD. Quoniam igi-
b. 29. 1. tur in parallelas AD, FC incidit recta linea AC, erit [b] ACF angulus angulo alterno CAD aequalis. sed CAD angulus ponitur aequalis angulo DAE; ergo et angulus DAE ipsi ACF angulo aequalis erit. Rursus quoniam in parallelas AD, FC recta linea FAE incidit, exterior angulus DAE aequalis est [b] interiori et opposito CFA. ostensus autem est et angulus ACF angulo DAE aequalis; ergo et ACF ipsi CFA aequalis erit, et propterea la-
c. 6. 1. tus AF aequale lateri AC [c]. et quoniam uni laterum trianguli BCF,
d. 2. 6. videlicet ipsi FC, parallela ducta est AD; erit [d] ut BD ad DC, ita BA ad AF; aequalis autem est AF ipsi AC; est igitur ut BD ad DC, ita BA ad AC.




Sit

Sit autem ut BD ad DC, ita BA ad AC, et AD jungatur. erit angulus CAE bifariam ſectus rectâ lineâ AD.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut BD ad DC, ita BA ad AC; eſt autem [d] ut BD ad DC, ita BA ad AF, etenim uni laterum trianguli BCF, videlicet ipſi FC, parallela ducta eſt AD, erit ut BA ad AC, ita BA ad AF[e]. Ergo AC eſt aequalis AF[f], et propterea angulus AFC angulo ACF aequalis: ſed angulus quidem AFC eſt aequalis angulo exteriori EAD, angulus vero ACF aequalis alterno CAD; quare et EAD angulus ipſi CAD aequalis erit. angulus igitur CAE bifariam ſectus eſt recta linea AD. Ergo ſi &c. Q. E. D.

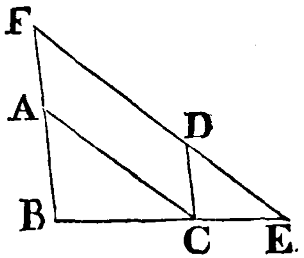
d. 2. 6.
e. 11. 5.
f. 9. 5.

## PROP. IV. THEOR.

AEQUIANGULORUM triangulorum latera circum aequales angulos proportionalia ſunt. et homologa ſunt latera quae aequalibus angulis ſubtenduntur.

Sint aequiangula triangula ABC, DCE quae angulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC, aequalem habeant, et propterea [a] angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC, DCE proportionalia eſſe latera quae ſunt circa aequales angulos; et homologa latera eſſe quae aequalibus angulis ſubtenduntur.

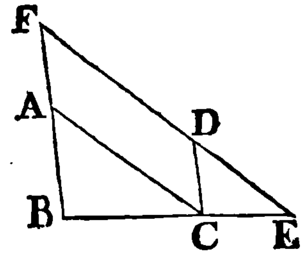
a. 32. 1.




Ponatur [b] enim triangulum DCE ita ut latus ejus CE in directum ſit ipſi BC. et quoniam anguli ABC, ACB duobus rectis minores ſunt[c], aequalis autem eſt angulus ACB angulo DEC; erunt ABC, DEC anguli duobus rectis minores. quare BA, ED productae inter ſe convenient[d]; producantur et conveniant in puncto F. et quoniam angulus DCE eſt aequalis angulo ABC, erit BF ipſi CD parallela[e].

b. 22. 1.
c. 17. 1.
d. Ax. 12. 1.

e. 28. 1. lela[e]. rursus, quoniam aequalis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit [e] AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea AF quidem ipsi CD, AC vero ipsi




f. 34. 1. FD est aequalis[f]. et quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela

g. 2. 6. ducta est AC; erit [g] ut BA ad AF, ita BC ad CE. aequalis autem est AF ipsi

h. 7. 5. CD; ut igitur [h] BA ad CD, ita BC ad CE; et permutando ut AB ad BC, ita DC ad CE. rursus, quoniam CD parallela est BF, erit [g] ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est aequalis AC; ergo ut BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA, ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC, ita DC ad CE; ut autem BC ad CA, ita CE ad ED;

i. 22. 5. erit [i] ex aequali, ut BA ad AC, ita CD ad DE aequiangulorum igitur &c. Q. E. D.

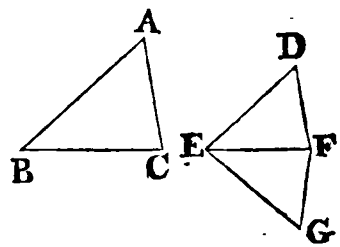
## PROP. V. THEOR.

**SI duo triangula latera proportionalia habeant, aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.**

Sint duo triangula ABC, DEF, quae latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF; ut autem BC ad CA, ita EF ad FD; et propterea ex aequali ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse, et aequales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, et praeterea angulum BAC angulo EDF.

a. 23. 1. Constituatur enim [a] ad rectam lineam EF et ad puncta in ipsa E, F, angulo

angulo quidem ABC aequalis angulus FEG, angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF est aequalis[b]; ideoque aequiangulum est triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia sunt latera quae aequalibus angulis subtenduntur[c]. ergo ut AB ad BC, ita GE ad EF; sed ut AB ad BC, ita DE ad EF; ut igitur DE ad EF, ita GE ad EF[d]. quare utraque ipsarum DE, GE ad EF eandem habet proportionem, et propterea DE ipsi GE est aequalis[e]; eadem ratione et DF aequalis est FG. itaque quoniam DE est aequalis EG, communis autem EF, duae DE, EF duabus GE, EF sunt aequales; et basis DF basi FG est aequalis; angulus igitur DEF est aequalis angulo GEF[f], et DEF triangulum aequale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales[g], quibus aequalia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFE est aequalis angulo GFE, angulus vero EDF angulo EGF. et quoniam angulus DEF est aequalis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC, erit et angulus ABC angulo DEF aequalis. eadem ratione et angulus ACB aequalis est angulo DFE, et adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF aequiangulum erit. Si igitur duo &c. Q. E. D.




b. 32. 1.
c. 4. 6.
d. 11. 5.
e. 9. 5.
f. 8. 1.
g. 4. 1.

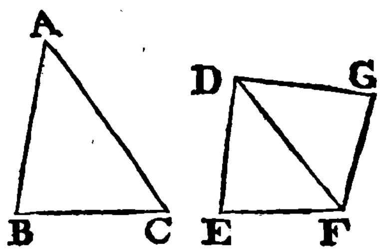
## PROP. VI. THEOR.

SI duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa aequales autem angulos latera proportionalia; aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint

Sint duo triangula ABC, DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, videlicet ut BA ad AC, ita ſit ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſſe, et angulum quidem ABC habere aequalem angulo DEF, angulum vero ACB angulo DFE.

a. 23. 1. Conſtituatur [a] enim ad rectam lineam DF, et ad puncta in ipſa D, F, alterutri angulorum BAC, EDF, aequalis angulus FDG, angulo autem ACB aequalis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G eſt ae-
b. 32. 1. qualis [b]. ergo triangulum ABC triangulo DGF aequiangulum eſt; ac prop-
c. 4. 6. terea ut BA ad AC, ita eſt [c] GD ad DF. ponitur autem et ut BA ad AC, ita ED ad DF; ut igitur ED ad DF,
d. 11. 5. ita GD ad DF [d]; quare ED aequalis eſt ipſi DG [e]; et communis DF;
e. 9. 5. ergo duae ED, DF duabus GD, DF aequales ſunt, et angulus EDF
f. 4. 1. angulo GDF eſt aequalis; baſis igitur EF eſt [f] aequalis baſi FG, triangulumque EDF triangulo GDF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. angulus igitur DFG eſt aequalis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. ſed angulus DFG aequalis eſt angulo ACB; angulus igitur ACB angulo DFE eſt aequalis. ponitur autem et BAC angulus aequalis angulo EDF; ergo et reliquus qui ad B aequalis eſt reliquo ad E. aequiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo DEF. Quare ſi duo triangula &c. Q. E. D.



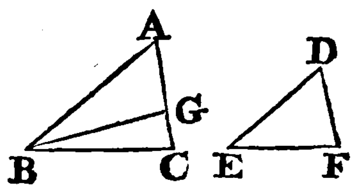

PROP. VII.

## PROP. VII. THEOR.

SI duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque ſimul minorem, vel non minorem recto; vel ſi eorum alter rectus fuerit: aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos circa quos latera ſunt proportionalia.

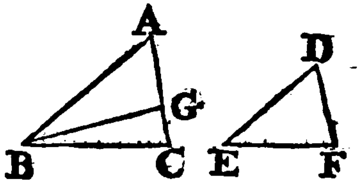
Sint duo triangula ABC, DEF, unum angulum uni angulo aequalem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF aequalem, circa alios autem angulos ABC, DEF latera proportionalia, ut ſit AB ad BC, ſicut DE ad EF; et reliquorum qui ad C, F primò utrumque ſimul minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſſe, angulumque ABC aequalem angulo DEF, et reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F aequalem.

Si enim inaequalis eſt angulus ABC angulo DEF, unus ipſorum major erit; ſit major ABC, et conſtituatur [a] ad rectam lineam AB, et ad punctum in ipſa B, angulo DEF aequalis angulus ABG. et quoniam angulus quidem A eſt aequalis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF; erit [b] reliquus AGB reliquo DFE aequalis. aequiangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF; quare ut AB ad BG, ſic DE ad EF [c]; ut vero DE ad EF, ſic ponitur AB ad BC; ut igitur [d] AB ad BC, ſic AB ad BG; ideoque AB ad utramque BC, BG eandem habet rationem. erit igitur BC ipſi BG aequalis [e], ac propterea angulus BGC eſt aequalis angulo BCG [f]. minor autem recto ponitur angulus BCG; ergo et BGC minor eſt recto, et ob id qui ei



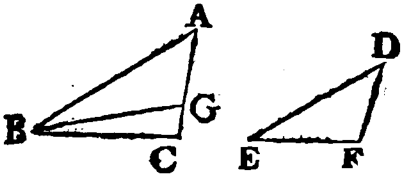

a. 23. 1.
b. 32. 1.
c. 4. 6.
d. 11. 5.
e. 9. 5.
f. 5. 1.

g. 13. 1. deinceps eſt AGB major eſt recto[g]. atque oſtenſus eſt angulus AGB aequalis angulo qui ad F; angulus igitur qui ad F recto major eſt. atqui ponitur minor recto; quod eſt abſurdum. non eſt igitur angulus ABC inaequalis angulo DEF; ergo ipſi eſt aequalis.



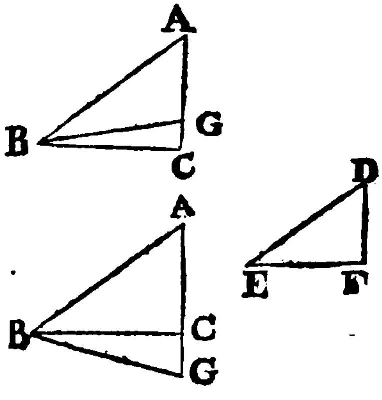

eſt autem angulus qui ad A aequalis ei qui ad D; quare et reliquus qui ad C aequalis eſt reliquo qui ad F. aequiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo DEF.

Sed rurſus ponatur uterque angulorum qui ad C, F, non minor recto. Dico rurſus et ſic triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſſe.




Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BC aequalem ipſi BG, angulumque ad C angulo BGC aequalem. ſed angulus qui ad C non minor eſt recto; non eſt igitur minor recto BGC. quare trianguli BGC duo anguli non ſunt duobus rectis mino-
h. 17. 1. res; quod fieri non poteſt[h]; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſt, ut in praecedente caſu oſtenſum fuit.

Sit denique alter angulorum ad C, F, puta qui ad C, rectus; erit et in hoc caſu triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum.




Si enim non ſit, ad rectam AB, et ad punctum in ea B conſtituatur angulo DEF aequalis angulus ABG; et, ut in primo caſu, oſtendetur recta BG aequalis ipſi BC, et angulus BCG angulo BGC; eſt autem angulus BCG rectus, quare et an-

gulus

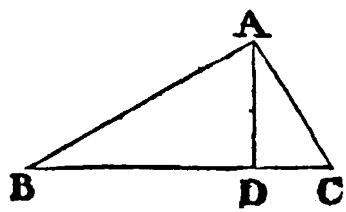
gulus BGC rectus erit[f]. trianguli igitur BGC duo anguli non sunt f. 5. 1.
minores duobus rectis, quod fieri non potest[h]; et propterea triangulum h. 17. 1.
ABC triangulo DEF aequiangulum est. si igitur duo triangula &c.
Q. E. D.

## PROP. VIII. THEOR.

**SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quae ad perpendicularem sunt triangula, et toti, et inter se sunt similia.**

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC; et a puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD, ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse.

Quoniam enim angulus BAC est aequalis angulo ADB, rectus enim uterque est, et angulus ad B communis duobus triangulis ABC, ABD; erit [a] reliquus ACB reliquo BAD aequalis. aequiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD; quare latera circa aequales angulos proportionalia habent[b], et propterea inter se similia sunt[c]. eadem ratione demonstrabitur etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse.




a. 32. 1.
b. 4. 6.
c. 1. Def. 6.

Dico insuper triangula ABD, ADC etiam inter se similia esse.

Quoniam enim rectus angulus BDA est aequalis recto ADC, sed et BAD ostensus aequalis angulo ad C; erit [a] reliquus ad B reliquo DAC aequalis. aequiangulum igitur et simile [c] est triangulum ABD triangulo ADC. Quare si in triangulo &c. Q. E. D.

Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto ad basim ductam, mediam proportionalem esse

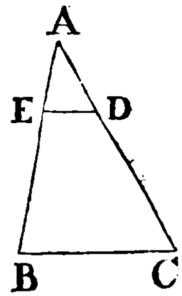
inter ſegmenta baſis: et praeterea inter baſim et baſis ſegmentum utrumlibet, latus ſegmento conterminum medium eſſe proportionale.
b. 4. 6. eſt enim BD ad DA, ut DA ad DC[b], in triangulis aequiangulis BDA, ADC; et BC ad BA, ut BA ad BD[b], in triangulis aequiangulis ABC, DBA; et BC ad CA, ut CA ad CD, in triangulis aequiangulis ABC, DAC.

## PROP. IX. PROB.

**A Data recta linea imperatam partem abſcindere.**

Sit data recta linea AB; oportet ab ipſa AB imperatam partem abſcindere.

Ducatur a puncto A quaedam recta linea AC, quae cum ipſa AB angulum quemlibet contineat; ſumaturque in AC quodvis punctum D, et quam multiplex eſt AB partis abſcindendae, tam multiplex fiat AC ipſius AD; deinde jungatur BC, et per D ipſi BC parallela ducatur DE.




Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet
a. 2. 6. ipſi BC, parallela ducta eſt ED; erit [a] ut CD
b. 18. 5. ad DA, ita BE ad EA; et componendo[b], ut CA ad AD, ita BA ad AE. eſt autem CA multiplex ip-
c. D. 5. ſius AD; ergo BA eadem eſt multiplex ipſius AE[c]. quare quaecunque pars AD eſt ipſius AC, eadem pars erit AE ipſius AB; eſt igitur AE pars a recta AB abſcindenda. a data igitur recta linea AB imperata pars abſciſſa eſt. Quod facere oportebat.

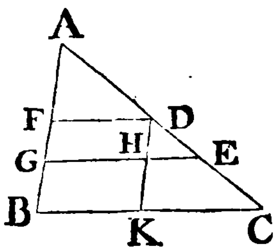
## PROP. X. PROB.

**DATAM rectam lineam inſectam, datae rectae lineae ſectae ſimiliter ſecare.**

Sit

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC; oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectae similiter secare.

Sit AC secta in punctis D, E, et ponantur ita rectae AB, AC, ut angulum quemvis contineant, jungaturque BC, et per puncta D, E ipsi BC parallelae ducantur [a] DF, EG; per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH, HB; ac propterea DH quidem est aequalis [b] FG, HK vero ipsi GB. et quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela ducta est HE, erit [c] ut CE ad ED, ita KH ad HD. aequalis autem est KH ipsi BG, HD vero ipsi GF; est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus, quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF; ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, et ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea insecta AB, datae rectae lineae sectae AC similiter secta est. Quod facere oportebat.




a. 31. 1.

b. 34. 1.

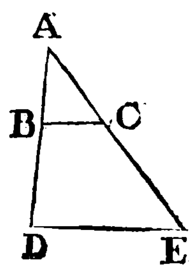
c. 2. 6.

## PROP. XI. PROB.

DUABUS datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae lineae AB, AC, et ponantur ita ut angulum quemvis contineant; oportet ipsis AB, AC tertiam proportionalem invenire.

Producantur enim AB, AC ad puncta D, E; ponaturque ipsi AC aequalis BD; et junctâ BC, ducatur [a] per D ipsi BC parallela DE. quoniam igitur



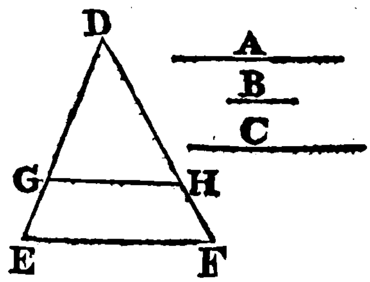

a. 31. 1.

tur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE, parallela ducta est
b. 2. 6. BC, erit [b] ut AB ad BD, ita AC ad CE. aequalis autem est BD ipsi AC, ut igitur AB ad AC, ita est AC ad CE, quare datis duabus rectis lineis AB, AC tertia proportionalis inventa est CE. Q. E. F.

## PROP. XII. PROB.

**Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.**

Sint datae tres rectae lineae A, B, C; oportet ipsis A, B, C quartam proportionalem invenire.




Exponantur duae rectae lineae DE, DF angulum quemvis EDF continentes; et ponatur ipsi quidem A aequalis DG, ipsi vero B aequalis GE, et ipsi C aequalis DH; junctâque GH,
a. 31. 1. per E ipsi parallela ducatur EF [a]. itaque quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipsi EF, parallela ducta est GH,
b. 2. 6. erit ut DG ad GE, ita DH ad HF [b]. est autem DG ipsi A aequalis, GE vero aequalis B, et DH aequalis C; ut igitur A ad B, ita C ad HF. Quare tribus datis rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa est HF. Q. E. F.

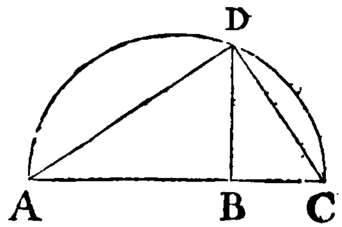
## PROP. XIII. PROB.

**Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.**

Sint datae duae rectae lineae AB, BC; oportet inter ipsas AB, BC mediam proportionalem invenire.

Ponantur

Ponantur in directum, et super ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque [a] a puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, et AD, DC jungantur. Quoniam igitur angulus ADC in semicirculo rectus est [b], et quoniam in triangulo rectangulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media proportionalis inter segmenta basis AB, BC [c]. duabus igitur datis rectis lineis AB, BC media inter ipsas proportionalis inventa est DB. Q. E. F.

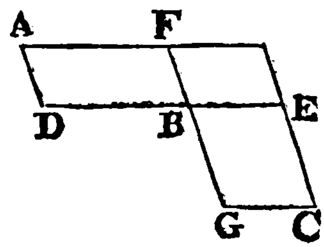



a. 11. 1.
b. 31. 3.
c. Cor. 8. 6.

## PROP. XIV. THEOR.

PARALLELOGRAMMORUM aequalium, et unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, reciproce sunt proportionalia: et quorum parallelogrammorum unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia; ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia parallelogramma AB, BC, aequales habentia angulos ad B, et ponantur in directum DB, BE; ergo et in directum erunt FB, BG [a]. Dico parallelogrammorum AB, BC latera quae sunt circa aequales angulos esse reciproce proportionalia; hoc est ut DB ad BE, ita esse GB ad BF.



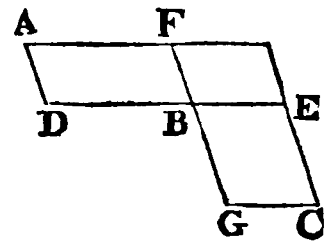

a. 14. 1.

Compleatur enim parallelogrammum FE; et quoniam parallelogrammum AB aequale est parallelogrammo BC, aliud autem est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE, ita BC ad FE [b]. sed ut AB quidem ad FE, ita est DB ad BE [c]; ut autem BC ad FE, ita GB ad BF [c]; b. 7. 5. c. 1. 6.

ut

d. 11. 5. ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF[d]. ergo parallelogrammorum AB, BC latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia.

Sint autem latera, quae circum aequales angulos, reciproce proportionalia, sit nempe ut DB ad BE, ita GB ad BF; dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC aequale esse.




Quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF; ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum
c. 1. 6. FE[c]; et ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogram-
e. 9. 5. mum FE[c]; erit[d] et ut AB ad FE, ita BC ad FE. aequale igitur[e] est AB parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo parallelogrammorum &c. Q. E. D.

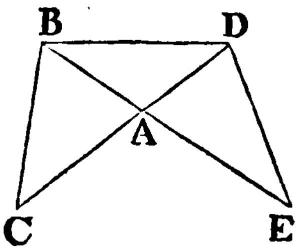
## PROP. XV. THEOR.

**TRIANGULORUM aequalium, et unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia: et quorum triangulorum unum uni aequalem habentium angulum latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia, ea inter se sunt aequalia.**

Sint aequalia triangula ABC, ADE unum angulum uni angulo aequalem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE; dico triangulorum BAC, DAE latera quae circum aequales angulos esse reciproce proportionalia, hoc est ut CA ad AD, ita esse EA ad AB.

Ponantur enim ita ut in directum sit CA ipsi AD; ergo et EA
a. 14. 1. ipsi AB in directum erit[a]; et jungatur BD. Quoniam igitur triangulum ABC

ABC aequale eſt triangulo ADE, aliud autem eſt ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita [b] triangulum EAD ad triangulum b. 7. 5.
DAB. ſed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita CA ad AD[c]; ut autem triangulum EAD ad ipſum DAB, ita EA ad AB[c]; ut igitur [d] CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC, ADE latera, quae circum aequales angulos reciproce ſunt proportionalia.




c. 1. 6.

d. 11. 5.

Sint autem latera triangulorum ABC, ADE circum aequales angulos reciproce proportionalia, ſcilicet ſit ut CA ad AD, ita EA ad AB; dico triangulum ABC triangulo ADE aequale eſſe. junctâ enim rurſus BD, quoniam ut CA ad AD, ita eſt EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita eſt BAC triangulum ad triangulum BAD[c]; et ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad triangulum BAD[c]; erit [d] ut triangulum BAC ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. aequale igitur [e] eſt triangulum ABC triangulo ADE. Aequalium igi- e. 9. 5.
tur &c. Q. E. D.

## PROP. XVI. THEOR.

**SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum aequale eſt ei rectangulo quod a mediis continetur: et ſi rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod a mediis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt.**

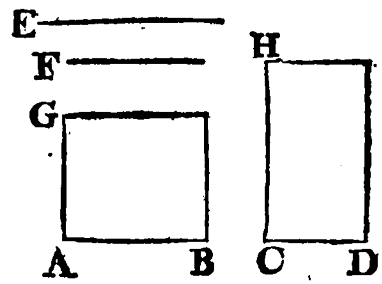
Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, E, F, ſit ſcilicet ut AB ad CD, ita E ad F; dico rectangulum contentum a rectis lineis AB, F aequale eſſe ei quod ipſis CD, E continetur.

 Ducantur

a. 11. 1. Ducantur [a] enim a punctis A, C ipsis AB, CD ad rectos angulos AG, CH; ponaturque ipsi quidem F aequalis AG, ipsi vero E aequalis CH, et compleantur BG, DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E aequalis CH, et F ipsi

b. 7. 5. AG; erit [b] ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG, DH latera, quae sunt circum aequales angulos, reciproce proportionalia sunt; quorum autem aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae sunt circum aequales angulos, reciproce sunt

c. 14. 6. proportionalia, ea inter se sunt aequalia [c]; ergo parallelogrammum BG aequale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB, F continetur, etenim AG est aequalis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur ipsis CD, E, est enim CH ipsi E aequalis. rectangulum igitur contentum rectis AB, F est aequale ei quod ipsis CD, E continetur.




Sed sit rectangulum contentum rectis AB, F aequale ei quod ipsis CD, E continetur; dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum rectis AB, F est aequale ei quod CD, E continetur, atque est rectangulum BG contentum quidem rectis AB, F, etenim AG est aequalis F; contentum vero ipsis CD, E est rectangulum DH, est enim CH ipsi E aequalis; erit parallelogrammum BG aequale parallelogrammo DH; et sunt aequiangula. aequalium autem et aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia [c]. quare ut AB ad CD, ita CH ad AG; aequalis autem est CH

ipsi

ipsi E, et AG ipsi F. ut igitur AB ad CD, ita E ad F. ergo si quatuor rectae &c. Q. E. D.

## PROP. XVII. THEOR.

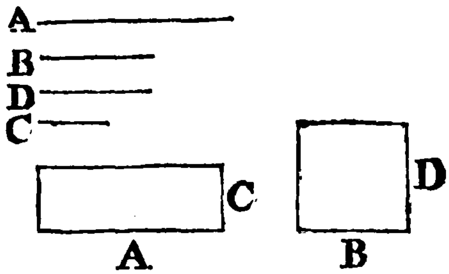
**SI tres rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum aequale est ei quod a media fit quadrato: et si rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod a media fit quadrato, tres rectae lineae proportionales erunt.**

Sint tres rectae lineae proportionales A, B, C; sit scilicet ut A ad B, ita B ad C; dico rectangulum contentum rectis A, C aequale esse ei quod à media B fit quadrato.

Ponatur ipsi B aequalis D; et quoniam ut A ad B, ita B ad C, aequalis autem est B ipsi D; erit [a] ut A ad B, ita D ad C. si autem quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum est aequale ei quod à mediis continetur [b]. Ergo rectangulum rectis A, C contentum est aequale ei quod continetur ipsis B, D. sed rectangulum contentum rectis B, D est aequale quadrato quod fit ex ipsa B; etenim B est aequalis D. rectangulum igitur contentum rectis A, C est aequale ei quod ex B fit quadrato.

a. 7. 5.

b. 16. 6.




Sed sit rectangulum contentum rectis A, C aequale ei quod ex B fit quadrato; dico ut A ad B, ita esse B ad C.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum A, C aequale est quadrato quod fit ex B, at quadratum quod fit ex B est rec-

 tangulum

tangulum quod ipſis B, D continetur, eſt enim B aequalis ipſi D; erit rectangulum contentum A, C aequale ei quod ipſis B, D continetur. ſi autem rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod à me-
b. 16. 6. diis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt[b]. eſt igitur ut A ad B, ita D ad C; aequalis autem eſt B ipſi D; ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. XVIII. PROB.

**A Data recta linea dato rectilineo ſimile, et ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.**

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CDEF quadrilaterum; oportet à recta linea AB rectilineo CDEF ſimile, et ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

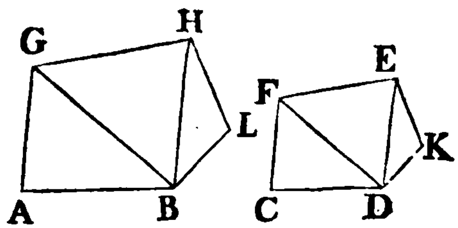
Jungatur DF, et ad rectam lineam AB, et ad puncta in ipſa A,
a. 23. 1. B angulo quidem ad C aequalis angulus conſtituatur [a] BAG, angulo autem CDF angulus ABG; reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB
b. 32. 1. eſt aequalis[b]. ergo aequiangulum eſt FCD triangulum triangulo GAB. rurſus, conſtituatur [a] ad rectam lineam BG, et ad puncta in ipſa G, B, angulo quidem DFE aequalis angulus BGH, angulo autem FDE aequalis GBH; ergo reliquus FED reliquo GHB eſt aequalis. aequiangulum igitur eſt triangulum FDE triangulo GBH. Quoniam igitur angulus AGB aequalis eſt angulo CFD, et angulus BGH ipſi DFE, erit totus AGH angulus toti CFE aequalis. eadem ratione et ABH eſt aequalis ipſi CDE; et praeterea angulus quidem ad A angulo ad C aequalis, angulus vero GHB angulo FED. aequiangulum igitur eſt rectilineum ABHG rectilineo CDEF. ſed et latera circa aequales angulos proportionalia habent. Quoniam enim triangula GAB, FCD ſunt ae-
c. 4. 6. quiangula, erit BA ad AG, ut DC ad CF[c]; et quoniam eſt AG ad

GB,

GB, ut CF ad FD; ut vero GB ad GH, ita, propter aequiangula triangula BGH, DFE, eſt FD ad FE; erit ex aequali [d] AG ad GH, ut CF ad FE. ſimiliter oſtendetur AB ad BH, ut CD ad DE. et eſt GH ad HB, ut FE ad ED [c]. quoniam igitur aequiangula ſunt rectilinea, ABHG, CDEF, et latera circum aequales angulos proportionalia habent, erunt inter ſe ſimilia [e].

d. 22. 5.
c. 4. 6.
e. 1. Def. 6.

Deſcribendum jam ſit à data recta linea AB quinquelaterum ſimile, et ſimiliter poſitum quinquelatero dato CDKEF.




Jungatur DE, et à data recta linea AB deſcribatur quadrilaterum ABHG ſimile, et ſimiliter poſitum ipſi CDEF, et ad rectam lineam BH, et ad puncta in ipſa data B, H, angulo quidem EDK aequalis angulus conſtituatur HBL, angulo autem DEK aequalis angulus BHL. reliquus igitur ad K reliquo ad L eſt aequalis. Quoniam vero ſimilia ſunt quadrilatera ABHG, CDEF, erit angulus GHB aequalis angulo FED, et eſt BHL angulus aequalis angulo DEK; totus igitur GHL angulus toti FEK eſt aequalis. eadem ratione et ABL angulus aequalis eſt ipſi CDK. aequiangula propterea ſunt quinquelatera AGHLB, CFEKD. et quoniam ſimilia ſunt quadrilatera AGHB, CFED, erit GH ad HB, ut FE ad ED; ut vero HB ad HL, ita ED ad EK [c]; ergo ex aequali [d] eſt GH ad HL, ut FE ad EK. eadem ratione eſt AB ad BL, ut CD ad DK. et eſt BL ad LH, ut DK ad KE, quia aequiangula ſunt triangula BLH, DKE. Quoniam igitur quinquelatera AGHLB, CFEKD ſunt aequiangula, et latera circum aequales angulos proportionalia habent, erunt inter ſe ſimilia [e]. eademque ratione rectilineum a data recta linea deſcribi poteſt ſimile, et ſimiliter poſitum dato Hexagono et ita deinceps. Q. E. F.

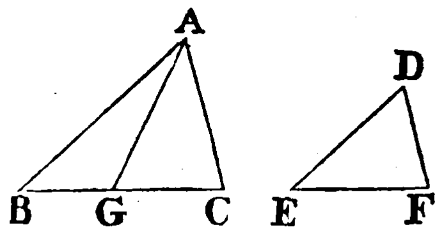
PROP. XIX.

## PROP. XIX. THEOR.

**SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.**

Sint similia triangula ABC, DEF habentia angulum ad B aequalem angulo ad E, et sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam rationem habere ejus quam habet BC ad EF.

a. 11. 6. Sumatur enim ipsis BC, EF tertia proportionalis [a] BG, ut sit sicut BC ad EF, ita EF ad BG, et jungatur GA. Quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF, erit per-
b. 16. 5. mutando [b] ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG; ut igitur AB ad DE, ita
c. 11. 5. EF ad BG [c]. quare triangulorum ABG, DEF latera, quae circum aequales angulos, reciproce sunt proportionalia. quorum autem triangulorum unum angulum uni aequalem habentium latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia, ea inter se sunt aequalia.
d. 15. 6. aequale igitur [d] est ABG triangulum triangulo DEF. et quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectae lineae proportio-
e. 10. Def. 5. nales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur [e] ejus quam habet ad secundam; habebit igitur BC ad BG duplicatam rationem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC tri-
f. 1. 6. angulum ad triangulum ABG [f]. ergo et ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem
g. 7. 5. ABG triangulum triangulo DEF aequale; et triangulum igitur [g] ABC ad



ad triangulum DEF, duplicatam habebit rationem ejus quam habet BC ad EF. Quare ſimilia triangula &c. Q. E. D.

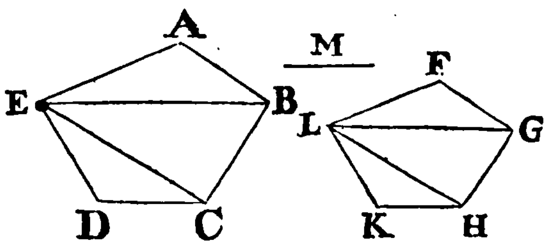
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita eſſe triangulum quod fit à prima ad triangulum quod à ſecunda ſimile, et ſimiliter deſcriptum. Quoniam oſtenſum eſt ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum DEF.

## PROP. XX. THEOR.

**Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, et numero aequalia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.**

Sint ſimilia polygona ABCDE, FGHKL, et ſit AB latus homologum ipſi FG. Dico polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividi, et numero aequalia et homologa totis; et polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habere ejus quam habet AB ad FG.

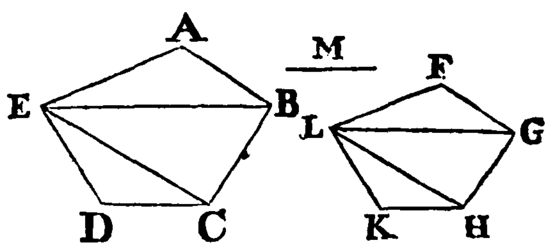
Jungantur BE, EC, GL, LH. et quoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL eſt aequalis[a], atque eſt ut BA ad AE, ita GF ad FL[a]. quoniam igitur duo triangula ſunt ABE, FGL unum angulum uni angulo aequalem habentia, circum aequales autem angulos latera proportionalia; erit triangulum ABE triangulo FGL aequiangulum[b]; ergo et ſimile[c]. angulus igitur ABE aequalis eſt angulo FGL. eſt autem et totus ABC angulus aequalis toti FGH[a], propter ſimilitudinem




a. 1. Def. 6.
b. 6. 6.
c. 4. 6.

ſimilitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt aequa-
a. 1. Def. 6. lis. et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE, FGL, eſt [a] ut EB ad BA, ita LG ad GF; ſed et propter ſimilitudinem polygonorum eſt [a] ut AB ad BC, ita FG ad GH; erit ex aequali ut EB ad BC,
d. 22. 5. ita LG ad GH [d]; hoc eſt circum aequales angulos EBC, LGH latera
b. 6. 6. ſunt proportionalia; aequiangulum igitur [b] eſt EBC triangulum trian-
c. 4. 6. gulo LGH; quare et ſimile [c]. eadem ratione et ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. ſimilia igitur polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividuntur, et numero aequalia.

Dico et homologa totis, hoc eſt ut proportionalia ſint triangula ſibi invicem et totis polygonis; et antecedentia quidem eſſe ABE, EBC, ECD, conſequentia autem ipſorum FGL, LGH, LHK; et ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG.




Quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam rationem ejus quam habet BE
e. 19. 6. ad GL [e]. eadem ratione, et triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam rationem habet ejus quam BE ad GL [e]. eſt igitur ut ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH trian-
f. 11. 5. gulum [f]. rurſus, quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam rationem ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL [e]. eadem ratione et ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam rationem habet ejus quam CE ad HL. eſt igitur ut triangulum EBC ad triangulum LGH, ita ECD triangulum ad triangulum LHK. oſtenſum autem eſt et ut EBC triangulum

triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum EBC ad LGH triangulum, et triangulum ECD ad ipſum LHK. et igitur ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia[g]. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL; ſed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG[e]. Ergo et ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona &c. Q. E. D.

g. 12. 5.
e. 19. 6.

Cor. 1. Eodem modo et in ſimilibus quadrilateris et multilateris quibuſcunque oſtendetur ea eſſe in duplicata ratione laterum homologorum. oſtenſum autem eſt in triangulis[e]. Quare universè ſimiles figurae rectilineae ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Cor. 2. Et ſi ipſis AB, FG tertiam proportionalem ſumamus quae ſit M, habebit AB ad M duplicatam rationem ejus quam habet AB ad FG[h]. habet autem et polygonum ſuper AB ad polygonum ſuper FG, et quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc eſt quam AB ad FG. Ergo ut AB ad M, ita eſt figura ſuper AB ad eam ſuper FG. atque oſtenſum eſt hoc in triangulis[i]. Universè igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita eſſe figuram rectilineam quae fit a prima ad eam quae a ſecunda, ſimilem et ſimiliter deſcriptam.

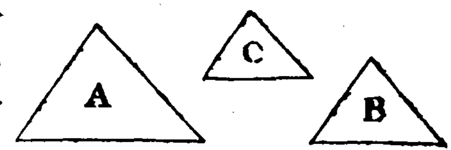
h. 10. Def. 5.
i. Cor. 19. 6.

## PROP. XXI. THEOR.

**QUAE eidem rectilineo ſunt ſimilia, et inter ſe ſimilia ſunt.**

Sit enim utrumque rectilineorum A, B simile rectilineo C; dico et rectilineum A rectilineo B simile esse.

Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, et ipsi aequiangulum erit, et circum aequales an-




a. 1. Def. 6. gulos latera habebit proportionalia [a]. rursus, quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, aequiangulum ipsi erit, et circa aequales angulos latera proportionalia habebit [a]. utrumque igitur rectilineorum A, B ipsi C aequiangulum est, et circum aequales angulos latera habet proportionalia. quare et rectilineum A
b. 1. Ax. 1. ipsi B est aequiangulum [b], lateraque circum aequales angulos proportio-
c. 11. 5. nalia habet [c]; ac propterea A ipsi B est simile [a]. Q. E. D.

## PROP. XXII. THEOR.

SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint, et rectilinea quae ab ipsis fiunt similia, et similiter descripta, proportionalia erunt. et si rectilinea quae ab ipsis fiunt similia, et similiter descripta, proportionalia fuerint, et ipsae rectae lineae proportionales erunt.

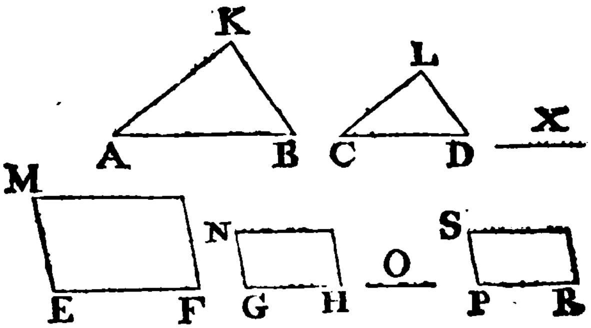
Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, EF, GH, sit scilicet ut AB ad CD, ita EF ad GH, et descripta sint ab ipsis quidem AB, CD similia, et similiter posita rectilinea KAB, LCD; ab ipsis vero EF, GH describantur rectilinea similia, et similiter posita MF, NH. Dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum.

a. 11. 6. Sumatur enim ipsis quidem AB, CD tertia proportionalis X [a]; ipsis vero EF, GH, tertia proportionalis O. et quoniam est ut AB ad CD,
b. 11. 5.
c. 22. 5. ita EF ad GH, erit ut CD ad X, ita GH ad O [b]; quare ex aequali [c]

ut

ut AB ad X, ita EF ad O. ſed ut AB quidem ad X, ita eſt rectilineum KAB ad LCD rectilineum [d], ut autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH [d]. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita eſt rectilineum MF ad NH rectilineum [b]. d. 2. Cor. 20. 6. b. 11. 5.

Sed ſit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH; dico ut AB ad CD, ita eſſe EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad PR [e], et deſcribatur [f] ab ipſa PR alterutri rectilineorum MF, NH ſimile, et ſimiliter poſitum rectilineum SR. quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita EF ad PR, et deſcripta ſunt ab ipſis quidem AB, CD ſimilia, et ſimiliter poſita rectilinea KAB, LCD, e. 12. 6. f. 18. 6.




ab ipſis vero EF, PR ſimilia, et ſimiliter poſita rectilinea MF, SR, erit, ex prius demonſtratis, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum SR; ponitur autem et ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. rectilineum igitur MF ad utrumque ipſorum NH, SR eandem habet rationem; ergo rectilineum NH eſt ipſi SR aequale [g]. eſt autem ipſi ſimile g. 9. 5. et ſimiliter poſitum; ergo GH eſt aequalis PR. et quoniam ut AB ad CD, ita EF ad PR; aequalis autem PR ipſi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectae lineae &c. Q. E. D.

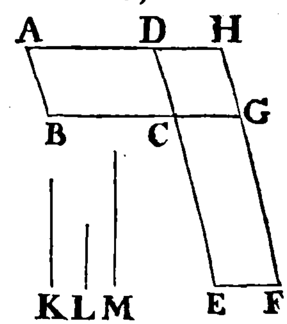
 PROP. XXIII.

## PROP. XXIII. THEOR.

AEQUIANGULA parallelogramma inter se rationem habent ex laterum rationibus compositam.

Sint aequiangula parallelogramma AC, CF aequalem habentia angulum BCD angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF rationem habere compositam ex laterum rationibus.

Ponantur enim ut BC sit in directum ipsi CG; ergo et DC ipsi
a. 14. 1. CE in directum erit[a]; et compleatur DG parallelogrammum; expo-
b. 12. 6. naturque recta linea quaedam K, et fiat[b] ut BC ad CG, ita K ad L; ut autem DC ad CE, ita L ad M. rationes igitur ipsius K ad L, et L ad M eaedem sunt rationibus laterum videlicet BC ad CG, et DC ad CE. sed ratio K ad M com-
c. A. Def. 5. posita dicitur[c] ex ratione K ad L, et ratione L ad M. quare et K ad M rationem habet ex laterum rationibus compositam. et quoniam est ut BC ad CG, ita AC parallelogram-



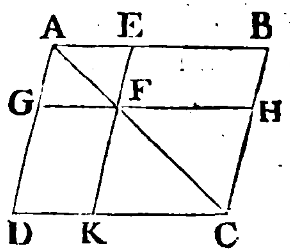

d. 1. 6. mum ad parallelogrammum CH[d]; sed et ut BC ad CG, ita K ad L;
e. 11. 5. erit[e] ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rursus, quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF; ut autem DC ad CE, ita L ad M; erit ut L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH
f. 22. 5. ad CF parallelogrammum; erit ex aequali[f] ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M rationem ex laterum rationibus compositam. Ergo et AC parallelogrammum ad parallelogrammum.

rallelogrammum CF rationem habet ex laterum rationibus compositam. Aequiangula igitur parallelogramma &c. Q. E. D.

## PROP. XXIV. THEOR.

OMNIS parallelogrammi, quae circa diametrum sunt parallelogramma, et toti, et inter se sunt similia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC; circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG, HK. Dico parallelogramma EG, HK et toti ABCD, et inter se similia esse.




Quoniam enim parallelae sunt DC, GF, erit angulus ADC angulo AGF aequalis[a]. eadem ratione quoniam parallelae sunt BC, EF, aequalis erit angulus ABC ipsi AEF. uterque vero angulus BCD, EFG opposito DAB est aequalis[b], quare et inter se aequales erunt. parallelogramma igitur ABCD, AEFG inter se sunt aequiangula. et quoniam angulus ABC aequalis est angulo AEF, communis vero BAC, erunt triangula BAC, EAF inter se aequiangula; ut igitur AB ad BC, ita[c] est AE ad EF. et quoniam latera parallelogrammorum opposita sunt inter se aequalia[b], erit[d] et AB ad AD, ut AE ad AG; et DC ad CB, ut GF ad FE; et praeterea CD ad DA, ut FG ad GA. Ergo parallelogrammorum ABCD, AEFG latera, quae circum aequales angulos, sunt proportionalia; ac propterea ABCD parallelogrammum ipsi AEFG est simile[e]. eadem ratione parallelogrammum ABCD simile est ipsi FHCK. utrumque igitur ipsorum GE, KH parallelogrammorum ipsi DB est simile. quae autem eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt[f]; parallelogrammum igitur GE simile est ipsi KH. Quare omnis &c. Q. E. D.

a. 29. 1.
b. 34. 1.
c. 4. 6.
d. 7. 5.
e. 1. Def. 6.
f. 21. 6.

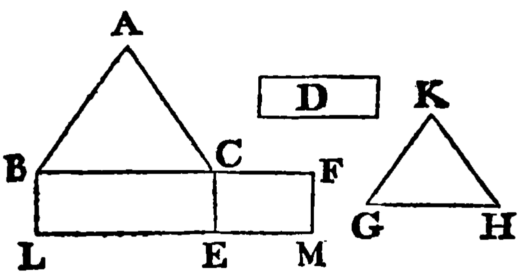
PROP. XXV.

## PROP. XXV. PROB.

DATO rectilineo, ſimile, et alteri dato aequale idem conſtituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet ſimile conſtituere ABC, cui autem aequale ſit D. oportet ipſi ABC ſimile, et ipſi D aequale idem conſtituere.

a. Cor. 45. 1. Applicetur [a] enim ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC aequale parallelogrammum BE; ad rectam vero CE applicetur [a] parallelogrammum CM aequale ipſi D, in angulo FCE qui CBL angulo eſt ae-
b. {29. 1. 14. 1.} qualis. in directum igitur eſt BC ipſi CF [b], et LE ipſi EM. ſumatur-
c. 13. 6. que inter BC, CF media proportionalis GH [c], et ab ipſa GH deſcriba-
d. 18. 6. tur [d] rectilineum KGH ſimile et ſimiliter poſitum rectilineo ABC. et quoniam eſt ut BC ad GH, ita GH ad CF, ſi autem tres rectae pro-




portionales ſint, ut prima ad tertiam, ita eſt figura quae fit a prima, ad
e. 2. Cor. 20. 6. eam quae a ſecunda ſimilem, et ſimiliter deſcriptam [e]; erit ut BC ad CF, ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. ſed et ut BC ad CF,
f. 1. 6. ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum [f]; ut igitur recti-
g. 11. 5. lineum ABC ad rectilineum KGH, ita [g] BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. eſt autem rectilineum ABC aequale parallelogrammo
h. 14. 5. BE; aequale igitur eſt [h] et KGH rectilineum parallelogrammo EF.

ſed

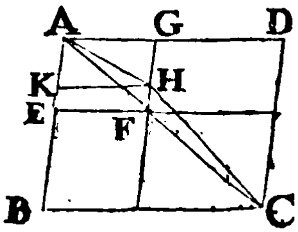
ſed EF parallelogrammum aequale eſt rectilineo D. ergo et rectilineum KGH ipſi D eſt aequale; eſt autem KGH ſimile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC ſimile, et alteri dato D aequale idem conſtitutum eſt KGH. Q. E. F.

## PROP. XXVI. THEOR.

SI a parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, et ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens; circa eandem diametrum eſt cum toto.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AEFG auferatur, ſimile ipſi ABCD, ſimiliterque poſitum, communemque ipſi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABCD circa eandem eſſe diametrum cum parallelogrammo AEFG.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit parallelogrammi BD diameter AHC, et occurrat GF ipſi AHC in H; ducaturque per H alterutri ipſarum AD, BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo AKHG, erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo AKHG ſimile[a]. ergo ut DA ad AB, ita GA ad AK[b]. eſt autem et propter ſimilitudinem parallelogrammorum ABCD, AEFG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. et igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK[c]. quare GA ad utramque ipſarum AE, AK eandem rationem habet; erit igitur AE ipſi AK aequalis[d], major minori, quod fieri non poteſt. non igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo AKHG. quare circa eandem diametrum eſt cum ipſo AEFG. Si igitur a parallelogrammo &c. Q. E. D.

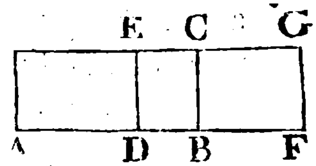



a. 24. 6.
b. 1. Def. 6.
c. 11. 5.
d. 9. 5.

'Ut ſequentes tres Propoſitiones facilius intelligantur praemittenda 'ſunt ſequentia.

'1. Parallelogrammum ad rectam lineam applicari dicitur, quando 'ſuper recta illa deſcribitur. Ex. gr. parallelogrammum AC applicari 'dicitur ad rectam AB, quando ſuper AB deſcribitur.

'2. Sed parallelogrammum AE applicari dicitur ad rectam AB deficiens figurâ parallelogrammâ, quando AD 'baſis ipſius AE minor eſt rectâ AB, et 'propterea parallelogrammum AE deficit 'ab ipſo AC quod ſuper recta AB deſcribi'tur in eodem angulo, et inter eaſdem parallelas, figurâ parallelogram'mâ DC, quae quidem dicitur defectus ipſius AE.




'3. Et parallelogrammum AG applicari dicitur ad rectam AB, ex'cedens figurâ parallelogrammâ, quando AF baſis ipſius AG major 'eſt rectâ AB, et propterea AG excedit ipſam AC figurâ parallelo'grammâ BG.'

## PROP. XXVII. THEOR.

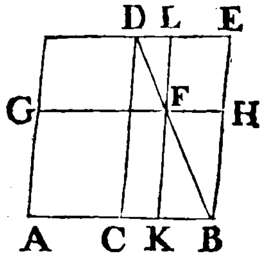
OMNIUM parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, et ſimiliter poſitis ei quae a dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

Sit recta linea AB, ſeceturque bifariam in C; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE quae a CB dimidia ipſius AB deſcripta eſt, cui ſcilicet ſimilis eſt AD. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum

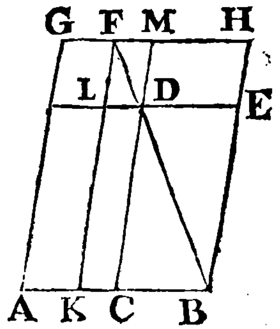
plicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, et ſimiliter poſitis ipſi CE, maximum eſſe AD.

Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma KH ſimili et ſimiliter poſita ipſi CE; dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus eſſe.

Sit primò recta AK baſis ipſius AF major ipſa AC; et quoniam ſimile eſt parallelogrammum CE parallelogrammo KH, circa eandem diametrum ſunt[a]. a. 26. 6. ducatur eorum diameter DB, et deſcribatur figura. quoniam igitur parallelogrammum CF eſt aequale ipſi FE [b] b. 43. 1. commune apponatur KH; totum igitur CH toti KE eſt aequale. ſed CH eſt aequale CG[c], c. 36. 1. quoniam et recta linea AC ipſi CB eſt aequalis; ergo et CG eſt aequale ipſi KE. commune apponatur CF; totum igitur AF eſt aequale gnomoni CHL; quare et CE, hoc eſt AD parallelogrammum parallelogrammo AF eſt majus.



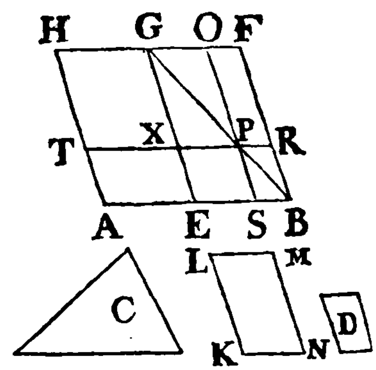

Secundò, Sit AK baſis ipſius AF minor AC, iiſdemque conſtructis, quoniam parallelogrammum DH aequale eſt ipſi DG[c], etenim HM ipſi MG eſt aequalis[d], d. 34. 1. erit DH ipſo LG majus. eſt autem DH aequale ipſi DK[b]; majus igitur eſt DK ipſo LG. commune apponatur AL; ergo totum AD toto AF eſt majus. Omnium igitur &c. Q. E. D.



### PROP. XXVIII. PROB.

AD datam rectam lineam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quae similis sit alteri datae. oportet autem datum rectilineum cui aequale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et ejus quod ad dimidiam, et ejus parallelogrammi cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB; datum autem rectilineum, cui oportet aequale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus; cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quae similis sit ipsi D.




a. 10. 1. Secetur AB bifariam in E[a], et ab ipsa
b. 18. 6. EB describatur[b] simile, et similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, et compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel aequale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem. et si quidem AG sit aequale C, factum jam erit quod proponebatur; etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est aequale, erit AG majus quam C; atque EF aequale est AG; ergo, et EF quam C est majus. quo autem EF superat C, ei excessui aequale, ipsi

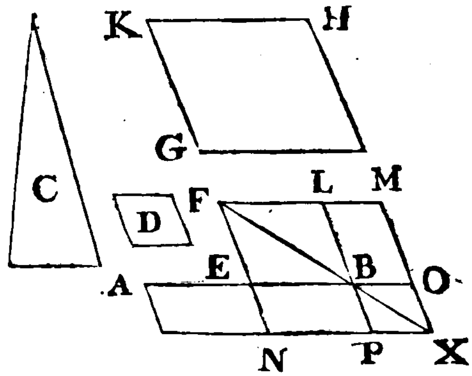
ipſi vero D ſimile, et ſimiliter poſitum, idem conſtituatur [c] KLMN. c. 25. 6.
ſed D eſt ſimile EF; quare et KM ipſi EF ſimile erit [d]. ſit igitur d. 21. 6.
recta linea KL homologa ipſi EG, LM vero ipſi GF. et quoniam aequale eſt EF ipſis C et KM, erit EF ipſo KM majus; major igitur eſt recta linea GE ipsâ LK, et GF ipsâ LM. ponatur GX aequalis LK, et GO aequalis LM, et compleatur XGOP parallelogrammum. aequale igitur et ſimile eſt XO ipſi KM; ſed KM ſimile eſt EF; ergo et XO ipſi EF eſt ſimile [d]. circa eandem igitur eſt diametrum XO cum ipſo EF [e]. ſit ipſorum diameter GPB, et figura deſcribatur. itaque e. 26. 6.
quoniam EF eſt aequale ipſis C et KM ſimul, quorum XO eſt aequale KM, erit reliquus ERO gnomon aequalis reliquo C. et quoniam OR eſt aequale [f] XS, commune apponatur SR; totum igitur OB f. 43. 1.
toti XB eſt aequale. ſed XB eſt aequale [g] TE, quoniam et latus AE g. 36. 1.
aequale eſt lateri EB; quare et TE ipſi OB aequale eſt. commune apponatur XS; ergo totum TS eſt aequale toti gnomoni ERO. at ERO gnomon ipſi C oſtenſus eſt aequalis; et TS igitur ipſi C aequale erit. quare ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, aequale parallelogrammum TS applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma SR ipſi D ſimili, quoniam et SR ſimile eſt ipſi EF [h]. Q. E. F. h. 24. 6.

## PROP. XXIX. PROB.

**AD datam rectam lineam, dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quae ſimilis ſit alteri datae.**

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet aequale ad ipſam AB applicare ſit C; cui autem oportet ſimile excedere ſit D. oportet ad rectam lineam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma ſimili D.

Secetur AB bifariam in E, atque à EB ipſi D ſimile, et ſimiliter po-
a. 18. 6. ſitum parallelogrammum deſcribatur [a] EL. et utriſque quidem EL et
b. 25. 6. C aequale, ipſi vero D ſimile, et ſimiliter poſitum idem conſtituatur [b]
GH. ſimile igitur eſt GH ipſi
c. 21. 6. EL [c]. ſitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipſi FE. et quoniam parallelogrammum GH majus eſt ipſo EL, erit recta linea KH major quam FL, et KG major quam FE. producantur FL, FE, et ipſi quidem KH aequalis ſit FLM, ipſi vero




KG aequalis FEN, et compleatur MN parallelogrammum. ergo MN aequale eſt et ſimile ipſi GH; ſed GH eſt ſimile EL; MN igitur ipſi EL ſimile erit, ac propterea circa eandem diametrum eſt EL cum ipſo
d. 26. 6. MN [d]. ducatur ipſorum diameter FX, et figura deſcribatur. itaque quoniam GH ipſis EL et C eſt aequale, ſed GH aequale eſt MN; erit et MN aequale ipſis EL et C. commune auferatur EL; reliquus igitur NOL gnomon ipſi C eſt aequalis. et quoniam AE eſt aequalis
e. 36. 1. EB, aequale erit [e] et AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc
f. 43. 1. eſt ipſi BM [f]. commune apponatur NO; totum igitur AX parallelogrammum aequale eſt gnomoni NOL. ſed NOL gnomon eſt aequalis C; ergo et AX ipſi C erit aequale. ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicatum eſt AX, excedens figura parallelogramma PO, ipſi D ſimili, quoniam et ipſi
g. 24. 6. EL ſimile eſt PO [g]. Q. E. F.

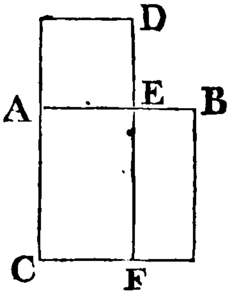
PROP. XXX.

## PROP. XXX. PROB.

DATAM rectam lineam terminatam ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Sit data recta linea AB, oportet ipſam AB ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Deſcribatur [a] ex AB quadratum BC, et ad AC ipſi BC aequale parallelogrammum applicetur [b] CD, excedens figura AD ipſi BC ſimili. quadratum autem eſt BC, ergo et AD quadratum erit. et quoniam BC eſt aequale CD, commune auferatur CE; reliquum igitur BF reliquo AD eſt aequale. eſt autem et ipſi aequiangulum. ergo ipſorum BF, AD latera, quae circum aequales angulos, reciproce ſunt proportionalia [c]. ut igitur FE ad ED, ita AE ad EB. eſt autem FE aequalis AC [d], hoc eſt ipſi AB; et ED ipſi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. ſed AB major eſt quam AE; ergo AE quam EB eſt major [e]. recta igitur linea AB ſecundum extremam ac mediam rationem ſecta eſt in E [f]. Q. E. F.

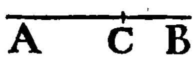



a. 46. 1.
b. 29. 6.
c. 14. 6.
d. 34. 1.
e. 14. 5.
f. 3. Def. 6.

Aliter,

Sit data recta linea AB; oportet ipſam AB ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Secetur AB in C, ita ut rectangulum quod continetur ipſis AB, BC aequale ſit quadrato ex AC [g]. Quoniam igitur rectangulum ab AB, BC aequale eſt quadrato ex AC, erit ut BA ad AC, ita AC ad CB [h]. Ergo AB recta linea ſecundum extremam ac mediam rationem ſecta eſt in C [f]. Q. E. F.




g. 11. 2.
h. 17. 6.

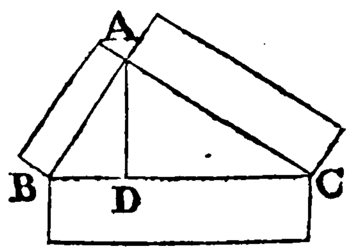
PROP. XXXI.

## PROP. XXXI. THEOR.

IN triangulis rectangulis figura rectilinea quae fit a latere rectum angulum subtendente, aequale est eis quae a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus et similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram rectilineam quae fit à BC aequalem esse eis quae à BA, AC fiunt similibus, et similiter descriptis.

Ducatur perpendicularis AD; quoniam igitur in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto qui est ad A, ad BC basim perpendicularis
a. 8. 6. ducta est AD, erunt [a] triangula ABD, ADC similia toti ABC, et inter se. et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB
b. 4. 6. ad BA, ita BA ad BD [b]. et quoniam tres rectae lineae proportionales sunt, ut prima ad tertiam, ita erit figura quae fit à prima ad eam quae à secunda,
c. 2. Cor. 20. 6. similem, et similiter descriptam [c]. ut igitur CB ad BD, ita figura quae fit à CB ad eam quae fit à BA, similem et simili-
d. B. 5. ter descriptam. et invertendo [d], ut DB ad BC, ita figura quae fit à BA ad eam quae à BC. eadem ratione, et ut DC ad CB, ita figura quae fit à CA ad eam quae fit à CB. quare et ut BD, DC simul ad BC, ita figurae
e. 24. 5. quae à BA, AC ad eam quae à BC [e]. aequales autem sunt BD, DC simul ipsi BC. ergo figura quae fit à BC aequalis est iis quae à BA, AC
f. A. 5. fiunt [f], similibus, et similiter descriptis. In triangulis igitur rectangulis &c. Q. E. D.



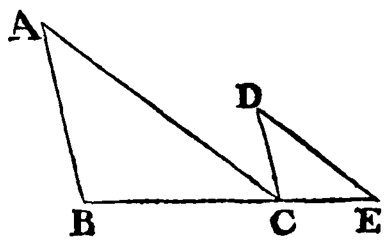

PROP. XXXII.

## PROP. XXXII. THEOR.

SI duo triangula, quae duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur ad unum angulum, ita ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt.

Sint duo triangula ABC, DCE quae duo latera BA, AC duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, ſc. ſit ut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem ſit AB ipſi DC, et AC ipſi DE. Dico BC ipſi CE in directum eſſe.

Quoniam enim AB parallela eſt DC, et in ipſas incidit recta linea AC, erunt anguli alterni BAC, ACD aequales inter ſe [a]; eadem ratione et angulus CDE aequalis eſt angulo ACD; quare et BAC ipſi CDE eſt aequalis. et quoniam duo triangula ſunt ABC, DCE, unum angulum ad A uni ad D aequalem habentia, circum aequales autem angulos latera proportionalia, ſcilicet BA ad AC, ut CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE aequiangulum [b]. Ergo ABC angulus eſt aequalis angulo DCE. oſtenſus autem eſt et angulus BAC aequalis angulo ACD. totus igitur ACE duobus ABC, BAC eſt aequalis. communis apponatur ACB; ergo anguli ACE, ACB angulis ABC, BAC, ACB aequales ſunt. ſed ABC, BAC, ACB anguli duobus rectis ſunt aequales [c]; et anguli igitur ACE, ACB duobus rectis aequales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipſa C, duae rectae lineae BC, CE non ad eaſdem partes poſitae, angulos qui deinceps




a. 29. 1.

b. 6. 6.

c. 32. 1.

ſunt

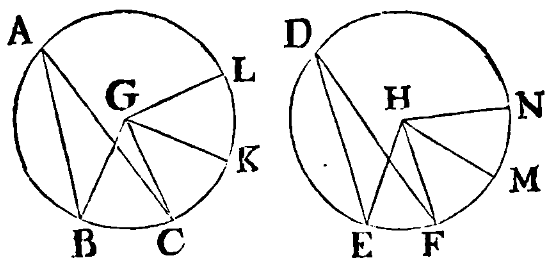
ſunt ACE, ACB duobus rectis aequales efficiunt. Ergo BC ipſi CE
d. 14. 1. in directum erit[d]. Si igitur duo triangula &c. Q. E. D.

## PROP. XXXIII. THEOR.

IN circulis aequalibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus inſiſtunt, ſive ſint ad centra, ſive ad circumferentias. adhuc etiam et ſectores.

Sint aequales circuli ABC, DEF; et ad centra quidem ipſorum G, H ſint anguli BGC, EHF, ad circumferentias vero anguli BAC, EDF. Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum EDF; et adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorem.

Ponantur enim circumferentiae quidem BC aequales quotcunque deinceps CK, KL; circumferentiae vero EF, rurſus aequales quotcunque

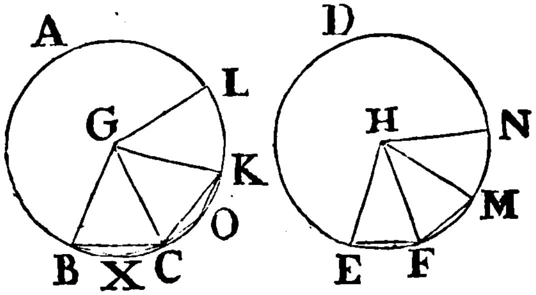



FM, MN; et jungantur GK, GL, HM, HN. Quoniam igitur circumferentiae BC, CK, KL inter ſe ſunt aequales, et anguli BGC, CGK,
a. 27. 3. KGL inter ſe aequales erunt[a]. quam multiplex igitur eſt circumferentia BL circumferentiae BC, tam multiplex eſt et BGL angulus anguli BGC. eadem ratione et quam multiplex eſt circumferentia EN circumferentiae EF, tam multiplex et EHN angulus anguli EHF. et ſi aequalis eſt BL circumferentia circumferentiae EN, et angulus BGL angulo

angulo EHN erit aequalis[a]; et ſi circumferentia BL major eſt circumferentia EN, major erit et BGL angulus angulo EHN; et ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC, EF, et duobus angulis BGC, EHF; ſumpta ſunt circumferentiae BC, et BGC anguli utcunque aeque multiplicia, videlicet circumferentia BL et BGL angulus; circumferentiae vero EF, et EHF anguli, alia utcunque aeque multiplicia, nempe circumferentia EN, et angulus EHN. atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, et BGL angulum ſuperare angulum EHN; et ſi aequalis, aequalem; et ſi minor, minorem eſſe. ut igitur[b] circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. ſed ut angulus BGC ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum[c], uterque enim utriuſque eſt duplus[d]. et ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita et angulus BGC ad angulum EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis aequalibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus inſiſtunt, ſive ſint ad centra, ſive ad circumferentias. Q. E. D.

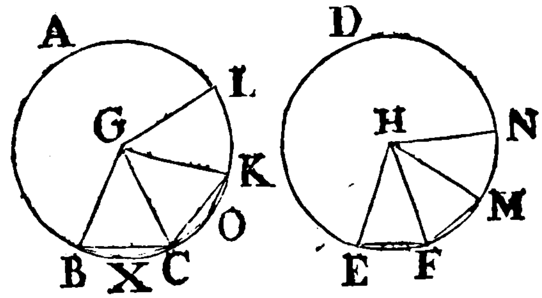
a. 27. 3.
b. 5. Def. 5.
c. 15. 5.
d. 20. 3.

Dico inſuper et ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita eſſe ſectorem BGC ad EHF ſectorem. Jungantur enim BC, CK, et




ſumptis in circumferentiis BC, CK punctis X, O, jungantur BX, XC, CO, OK. itaque quoniam duae BG, GC duabus CG, GK aequales ſunt, et angulos aequales continent; erit et baſis BC baſi CK aequalis,

e. 4. 1. lis, et triangulum GBC triangulo GCK[e] aequale. et quoniam circumferentia BC circumferentiae CK eſt aequalis, et reliqua circumferentia quae complet totum circulum ABC aequalis eſt reliquae quae eundem
a. 27. 3. circulum complet. quare et angulus BXC angulo COK eſt aequalis[a];
f. 11. Def. 3. ſimile igitur eſt BXC ſegmentum ſegmento COK[f]; et ſunt ſuper aequalibus rectis lineis BC, CK. ſuper aequalibus autem rectis lineis ſimilia
g. 24. 3. circulorum ſegmenta, inter ſe aequalia ſunt[g]. Ergo ſegmentum BXC eſt aequale ſegmento COK. eſt autem et BGC triangulum triangulo CGK aequale. et totus igitur ſector BGC toti ſectori CGK aequalis erit. eadem ratione et KGL ſector utrique ipſorum BGC, CGK aequalis erit. ſimiliter et ſectores EHF, FHM, MHN inter ſe ſunt ae-




quales. quam multiplex igitur eſt BL circumferentia circumferentiae BC, tam multiplex eſt BGL ſector ſectoris BGC. eadem ratione et quam multiplex eſt circumferentia EN circumferentiae EF, tam multiplex eſt et EHN ſector ſectoris EHF. et ſi circumferentia BL circumferentiae EN eſt aequalis, et ſector BGL aequalis eſt ſectori EHN; et ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, ſuperat et BGL ſector ſectorem EHN; et ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus quidem BC, EF circumferentiis, duobus vero ſectoribus BGC, EHF, ſumpta ſunt utcunque aeque multiplicia circumferentiae quidem BC et BGC ſectoris, circumferentia BL et BGL ſector; circumferentiae vero EF et ſectoris EHF, alia utcunque aeque multiplicia,

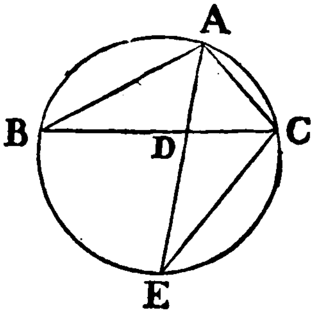
multiplicia, circumferentia EN et EHN ſector; atque oſtenſum eſt ſi BL circumferentia ſuperat circumferentiam EN, et ſectorem BGL ſuperare ſectorem EHN; et ſi aequalis, aequalem eſſe; et ſi minor minorem. eſt igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita ſector BGC ad EHF ſectorem.

## PROP. B. THEOR.

**SI trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſim; rectangulum a lateribus trianguli contentum, aequale erit rectangulo contento a ſegmentis baſis una cum quadrato rectae lineae quae angulum bifariam ſecat.**

Sit ABC triangulum, et bifariam ſecetur angulus BAC rectâ linea AD; erit rectangulum BA, AC aequale rectangulo BDC una cum quadrato ex AD.

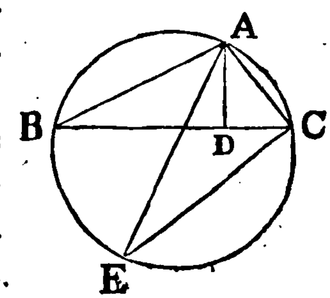
Circa triangulum deſcribatur [a] circulus ACB, et producatur AD ad a. 5. 4.
circumferentiam in E, et jungatur EC. igitur
quoniam angulus BAD aequalis eſt angulo
CAE, et angulus ABD angulo [b] AEC, ſunt b. 21. 3.
enim in eodem ſegmento; erunt ABD, AEC
triangula inter ſe aequiangula. Ergo ut BA ad
AD, ita eſt [c] EA ad AC, et rectangulum BA, c. 4. 6.
AC aequale erit [d] rectangulo EA, AD, hoc d. 16. 6.
eſt [e] rectangulo ED, DA una cum quadrato e. 3. 2.
ex AD. eſt autem rectangulum ED, DA aequale [f] rectangulo BD, DC. f. 35. 3.
rectangulum igitur BA, AC aequale eſt rectangulo BD, DC una cum
quadrato ex AD. Quare ſi trianguli &c. Q. E. D.



## PROP. C. THEOR.

SI ab angulo trianguli ducatur perpendicularis ad basim, erit rectangulum lateribus trianguli contentum aequale rectangulo contento a perpendiculari et diametro circuli circa triangulum descripti.

Sit triangulum ABC, et ab angulo A ducatur AD perpendicularis ad basim BC, erit rectangulum BA, AC aequale rectangulo contento ab AD et diametro circuli circa triangulum descripti.




a. 5. 4. Circa triangulum describatur [a] circulus ACB, et ducatur diameter AE, et EC jungatur. Quoniam igitur angulus rectus BDA
b. 31. 3. aequalis est angulo ECA in semicirculo [b],
c. 21. 3. est autem angulus ABD aequalis [c] ipsi AEC in eodem segmento; aequiangula erunt triangula ABD, AEC. ut igi-
d. 4. 6. tur BA ad AD, ita est [d] EA ad AC, et propterea [e] rectangulum BA,
e. 16. 6. AC aequale est rectangulo EA, AD. Si igitur ab angulo &c. Q. E. D.

# EUCLIDIS

# ELEMENTORUM

## LIBER UNDECIMUS.

### DEFINITIONES.

I.

SOLIDUM eſt quod longitudinem, latitudinem et craſſitudinem habet.

II.

Solidi vero terminus eſt ſuperficies.

III.

Recta linea ad planum recta, ſive perpendicularis, eſt, quando ad omnes rectas lineas quae ipſam tangunt, et in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad planum rectum eſt, cum rectae lineae quae communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

Rectae

V.

Rectae lineae ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectae illius lineae ad planum ducta fuerit perpendicularis, atque a puncto quo plano occurrit, ad terminum rectae lineae qui eſt in plano, recta linea fuerit adjuncta; eſt, ſcilicet, angulus acutus adjuncta recta linea et inſiſtente contentus.

VI.

Plani ad planum inclinatio eſt, angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum ſectioni, ad idem ipſius punctum, in utroque planorum ducuntur.

VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint aequales.

VIII.

Parallela plana ſunt, quae inter ſe non conveniunt.

IX.

Solidus angulus eſt qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non exiſtentibus plano, et ad unum punctum conſtitutis continetur.

X.

‘ Omiſſa eſt Definitio decima ob rationes in Notis adductas.’

XI.

Similes ſolidae figurae ſunt, quae et ſingulos angulos ſolidos aequales habent, et quae ſimilibus planis continentur, multitudine aequalibus.

XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis contenta, quae ab uno plano ad unum punctum conſtituuntur.

XIII.

Priſma eſt figura ſolida quae planis continetur, quorum adverſa duo ſunt et aequalia et ſimilia, et parallela; alia vero parallelogramma.

Sphaera

XIV.

Sphaera eſt figura deſcripta, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus revolvitur, donec in eundem locum a quo moveri coeperat reſtituatur.

XV.

Axis autem ſphaerae eſt quieſcens illa recta linea circum quam ſemicirculus convertitur.

XVI.

Centrum ſphaerae eſt idem quod et ſemicirculi.

XVII.

Diameter autem ſphaerae eſt recta quaedam linea per centrum ducta, et utrinque a ſphaerae ſuperficie terminata.

XVIII.

Conus eſt figura deſcripta, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum triangulum revolvitur, donec in eundem locum a quo moveri coeperat reſtituatur.

Et ſi quidem quieſcens recta linea aequalis ſit reliquae circa rectum angulum, quae ſc. convertitur, orthogonius erit conus; ſi vero minor, amblygonius; ſi vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem Coni eſt quieſcens illa recta, circa quam triangulum convertitur.

XX.

Baſis vero Coni eſt circulus qui a circumducta recta linea deſcribitur.

XXI.

Cylindrus eſt figura deſcripta, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum revolvitur, donec in eundem locum a quo coeperat moveri reſtituatur.

XXII.

Axis autem Cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Baſes vero Cylindri ſunt circuli a duobus adverſis lateribus quae circumaguntur deſcripti.

XXIV.

Similes Coni et Cylindri ſunt, quorum axes et baſium diametri proportionales ſunt.

XXV.

Cubus eſt figura ſolida ſex quadratis aequalibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida quatuor triangulis aequalibus et aequilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida octo triangulis aequalibus et aequilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida duodecim pentagonis aequalibus, et aequilateris et aequiangulis contenta.

XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida viginti triangulis aequalibus, et aequilateris contenta.

DEF. A.

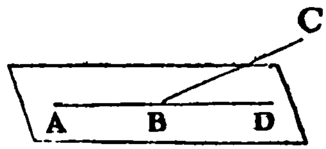
Parallelepipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quae ex adverſo parallelae ſunt, contenta.

PROP. I.

## PROP. I. THEOR.

**RECTAE lineae pars quaedam non eſt in ſubjecto plano, quaedam vero in ſublimi.**

Si enim fieri poteſt, rectae lineae ABC pars quidem AB ſit in ſubjecto plano, pars vero BC in ſublimi. Erit igitur recta linea quaedam ipſi AB in directum continuata in ſubjecto plano; ſit DB. duabus igitur rectis lineis ABC, ABD commune ſegmentum eſt AB, quod fieri non poteſt [a]. Non igitur rectae &c. Q. E. D. a. Cor. 11. 1.




## PROP. II. THEOR.

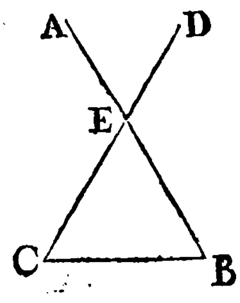
**SI duae rectae lineae ſe invicem ſecent, in uno ſunt plano; et quaelibet tres rectae quae ſibi mutuo occurrunt, ſunt in uno plano.**

Duae enim rectae lineae AB, CD ſe invicem in puncto E ſecent; erunt AB, CD in uno plano. et tres rectae EC, CB, BE quae ſibi mutuo occurrunt in uno ſunt plano.

Per rectam EB ducatur quodvis planum, et circa EB, productam ſi opus fuerit, convertatur planum donec tranſeat per punctum C; quoniam igitur puncta E, C ſunt in plano hoc, in eodem erit [a] recta EC; eadem ratione, in eodem plano eſt recta BC; et in eodem, ex hypotheſi, eſt recta EB. igitur tres rectae lineae EC, CB, BE in uno ſunt plano. in quo autem plano ſunt EC, EB in eodem ſunt [b] et rectae CD, AB.

a. 7. Def. 1.

b. 1. 11.





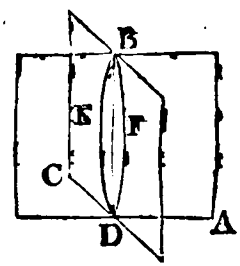

Ergo

Ergo rectae lineae AB, CD in uno sunt plano. Igitur si duae rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. III. THEOR.

**SI duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.**

Duo plana AB, BC se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. Dico lineam DB esse rectam. si enim non ita sit, ducatur a puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. Erunt igitur duarum rectarum linearum DEB, DFB iidem termini, et
a. 10. Ax. 1. ipsae spatium continebunt, quod est absurdum[a]. igitur planorum AB, BC, communis sectio BD non potest non esse recta linea; recta igitur est. Si igitur duo plana &c. Q. E. D.



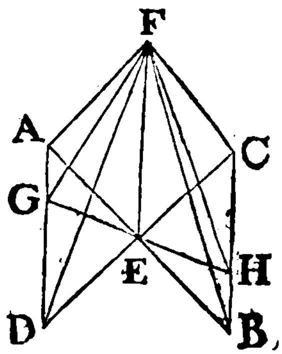

## PROP. IV. THEOR.

**SI recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.**

Recta linea quaedam EF duabus rectis lineis AB, CD, se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano per AB, CD ducto ad rectos angulos esse.

Sumantur enim rectae lineae AE, EB, CE, ED inter se aequales; et per E ducatur in plano per AB, CD, recta linea GEH utcunque, junganturque AD, CB; deinde a quovis, in recta EF, puncto F ducantur FA, FG, FD, FC, FH, FB. Et quoniam duae rectae lineae AB, ED

ED duabus rectis lineis BE, EC aequales sunt, et angulos aequales AED, BEC continent[a], erit AD basis basi CB aequalis, et angulus a. 15. 1.
DAE aequalis angulo EBC[b]. est autem et angulus AEG, aequalis an- b. 4. 1.
gulo BEH[a]. duo igitur triangula sunt AGE, BHE, duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus AE uni lateri EB aequale quod aequalibus adjacet angulis; quare et reliqua la-
tera reliquis lateribus aequalia habebunt[c]. ergo GE quidem est aequa- c. 26. 1.
lis EH; AG vero ipsi BH. et quoniam AE est aequalis EB, communis autem, et ad rectos angulos FE, erit basis AF basi FB aequalis[b]; eadem quoque ratione et CF aequalis erit FD. praeterea quoniam AD est aequalis BC, et AF ipsi FB, erunt duae FA, AD duabus FB, BC aequales, altera alteri; et ostensa est basis DF aequalis basi FC; angulus
igitur [d] FAD angulo FBC est aequalis. rursus, d. 8. 1.
ostensa est AG aequalis BH, sed et AF ipsi FB est aequalis; duae igitur FA, AG duabus FB, BH aequales sunt, et angulus FAG aequalis ostensus est angulo FBH; basis igitur GF basi FH est aequalis[b]. rursus, quoniam GE ostensa est aequalis EH, communis autem EF; erunt duae GE, EF aequales duabus HE, EF; et basis GF est aequalis basi FH; angulus igitur GEF angulo HEF est aequalis[d], et idcirco rectus est uterque an-
gulorum GEF, HEF[e]. Ergo FE ad GH utcunque per E ductam e. 10. Def. 1.
rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quae ipsam tangunt, et in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad planum recta est quando ad omnes rectas lineas ipsum tangentes, et in eodem existentes plano rectos efficit an-
gulos[f]. Quare FE subjecto plano ad rectos angulos insistit. Si igitur f. 3. Def. 11.
recta linea &c. Q. E. D.

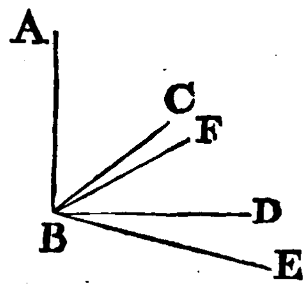


## PROP. V. THEOR.

SI recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus, in communi ſectione, ad rectos angulos inſiſtat, tres illae rectae lineae in uno plano erunt.

Recta linea quaedam AB tribus rectis lineis BC, BD, BE, in tactu B, ad rectos angulos inſiſtat; dico BC, BD, BE in uno plano eſſe.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint BD, BE quidem in ſubjecto plano, BC vero in ſublimi; et planum per AB, BC producatur; com-
a. 3. 11. munem igitur ſectionem in ſubjecto plano faciet rectam lineam[a]; faciat BF. in uno igitur ſunt plano per AB, BC ducto, tres rectae lineae AB, BC, BF. et quoniam AB utrique ipſarum BD, BE, ad rectos angulos inſiſtit, et ducto per ipſas DB, BE
b. 4. 11. plano ad rectos angulos erit[b]. planum autem per DB, BE eſt ſubjectum planum; ergo AB ad ſubjectum planum recta eſt; quare et ad omnes rectas lineas ipſam tangentes, quae in eodem plano ſunt,
c. 3. Def. 11. rectos [c] faciet angulos; ſed ipſam tangit BF in ſubjecto exiſtens plano. Ergo angulus ABF rectus eſt. ponitur autem et ABC angulus rectus; aequalis igitur eſt angulus ABF angulo ABC, et in eodem ſunt plano, quod fieri non poteſt. recta igitur linea BC non eſt in ſublimi; quare tres rectae lineae BC, BD, BE in uno ſunt plano. Si igitur recta linea &c. Q. E. D.



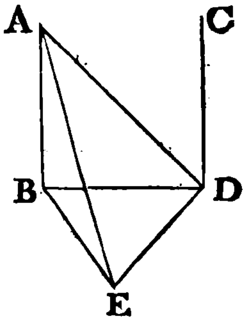

## PROP. VI. THEOR.

SI duae rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint, illae inter ſe parallelae erunt.

Duae

Duae enim rectae lineae AB, CD subjecto plano sint ad rectos angulos; dico AB, ipsi CD parallelam esse.

Occurrant enim subjecto plano in punctis B, D, jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur DE, et ponatur DE aequalis ipsi AB, junganturque BE, AE, AD. Quoniam igitur AB recta est ad subjectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt, et in subjecto sunt plano rectos angulos efficiet[a]. a. 3. Def. 11.
tangit autem ipsam AB utraque ipsarum BD, BE existens in subjecto plano. Ergo uterque angulorum ABD, ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB, CDE. et quoniam AB aequalis est ipsi DE, communis autem BD, erunt duae AB, BD duabus ED, DB aequales; et rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est aequalis[b]. b. 4. 1.
rursus, quoniam AB est aequalis DE, et BE ipsi AD, duae AB, BE duabus ED, DA aequales sunt, et basis AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est aequalis[c]. sed ABE rectus est; rectus igitur et EDA; et idcirco ED c. 8. 1.
ad DA est perpendicularis. sed et perpendicularis est ad utramque ipsarum BD, DC. quare ED tribus rectis lineis BD, DA, DC in tactu ad rectos angulos insistit. tres igitur rectae lineae BD, DA, DC in uno sunt plano[d]. in quo autem sunt BD, DA, in eo est AB, quaevis enim d. 5. 11.
tres rectae lineae quae sibi mutuo occurrunt, in uno sunt plano[e]. sunt e. 2. 11.
igitur AB, BD, DC in uno plano. atque est uterque angulorum ABD, BDC rectus; parallela igitur est AB ipsi CD[f]. Quare si duae rectae f. 28. 1.
lineae &c. Q. E. D.

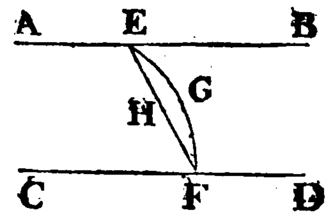



PROP. VII.

## PROP. VII. THEOR.

**SI duae rectae lineae parallelae ſint, ſumantur autem in utraque ipſarum quaelibet puncta; quae dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano in quo et parallelae.**

Sint duae rectae lineae parallelae AB, CD, et in utraque ipſarum ſumantur quaelibet puncta E, F; dico rectam lineam quae conjungit E, F in eodem plano eſſe in quo ſunt parallelae.




Non enim ſed, ſi fieri poteſt, ſit in ſublimi, ut EGF; et in plano ABCD, in quo ſunt parallelae, ducatur a puncto E ad F recta linea EHF; et recta ponitur EGF. Ergo duae rectae lineae EHF, EGF ſpatium continebunt, quod fieri
a. 10. Ax. 1. non poteſt[a]. non igitur quae a puncto E ad F ducitur recta linea in ſublimi eſt, quare erit in plano quod per AB, CD parallelas tranſit. Si igitur duae rectae &c. Q. E. D.

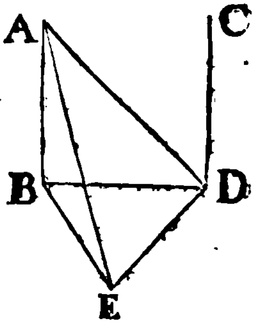
## PROP. VIII. THEOR.

**SI duae rectae lineae parallelae ſint, altera autem ipſarum plano alicui ſit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.**

Sint duae rectae lineae parallelae AB, CD, et altera ipſarum AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico reliquam CD eidem plano ad rectos angulos eſſe.

Occurrant enim AB, CD ſubjecto plano in punctis B, D, et BD jungatur.

jungatur. Ergo AB, CD, BD in uno ſunt plano. ducatur ipſi BD ad rectos angulos in ſubjecto plano DE, et ponatur DE ipſi AB aequalis, junganturque BE, AE, AD. et quoniam AB perpendicularis eſt ad ſubjectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipſam tangunt ſuntque in ſubjecto plano, perpendicularis erit[a]. rectus igitur eſt uterque angulorum ABD, ABE. quoniam vero in parallelas rectas lineas AB, CD recta incidit BD, erunt anguli ABD, CDB duobus rectis aequales[b]. rectus autem eſt ABD; ergo et CDB eſt rectus, ac propterea CD perpendicularis eſt ad BD. et quoniam AB eſt aequalis DE, communis autem BD, duae AB, BD duabus ED, DB aequales ſunt; et angulus ABD eſt aequalis angulo EDB, rectus enim uterque eſt; baſis igitur AD baſi BE eſt aequalis[c]. rurſus, quoniam AB aequalis eſt DE, et BE ipſi AD; erunt duae AB, BE duabus ED, DA aequales; et baſis communis AE; quare angulus ABE eſt aequalis angulo EDA[d]. rectus autem eſt ABE; ergo et EDA eſt rectus, et ED ad DA perpendicularis. ſed et perpendicularis eſt ad BD; ergo ED etiam ad planum per BD, DA perpendicularis erit[e], et ad omnes rectas lineas quae in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt, rectos faciet angulos[f]. at in plano per BD, DA eſt DC, omnes enim tres ſunt in plano in quo ſunt rectae parallelae AB, CD. quare ED ipſi CD eſt ad rectos angulos; ideoque CD ad rectos angulos eſt ipſi DE; ſed et CD etiam ipſi DB. Ergo CD duabus rectis lineis DE, DB ſe mutuo ſecantibus in communi ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per DE, DB eſt ad rectos angulos[e]. planum autem per DE, DB eſt ſubjectum planum. Ergo CD ſubjecto plano ad rectos angulos erit. Q. E. D.



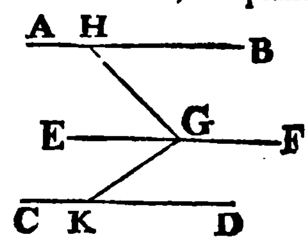

a. 3. Def. 11.
b. 29. 1.
c. 4. 1.
d. 8. 1.
e. 4. 11.
f. 3. Def. 11.

PROP. IX.

## PROP. IX. THEOR.

QUAE eidem rectae lineae ſunt parallelae, non exiſtentes in eodem in quo ipſa plano, etiam inter ſe parallelae erunt.

Sit utraque ipſarum AB, CD parallela ipſi EF, non exiſtentes in eodem in quo ipſa plano. Dico AB ipſi CD parallelam eſſe.




Sumatur in EF punctum quodvis G, a quo ipſi EF in plano quidem per EF, AB tranſeunte, ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem tranſeunte per EF, CD rurſus ducatur ipſi EF ad rectos angulos GK. et quoniam EF ad utramque ipſarum GH, GK eſt perpendicularis, erit etiam EF ad rectos angulos
a. 4. 11. plano per GH, GK tranſeunte [a]. atque eſt EF ipſi AB parallela; ergo et AB plano per HGK
b. 8. 11. ad rectos angulos eſt [b]. eadem ratione et CD plano per HGK eſt ad rectos angulos. utraque igitur ipſarum AB, CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duae rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint,
c. 6. 11. parallelae erunt inter ſe [c]. Ergo AB ipſi CD parallela eſt. Q. E. D.

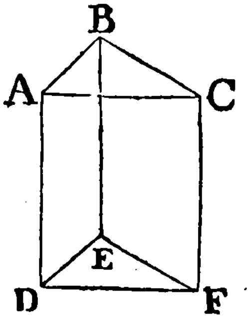
## PROP. X. THEOR.

SI duae rectae lineae ſeſe tangentes, duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos continebunt.

Duae rectae lineae ſeſe tangentes AB, BC, duabus rectis lineis DE, EF ſeſe tangentibus ſint parallelae, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF aequalem eſſe.

Aſſumantur

Aſſumantur enim BA, BC, ED, EF inter ſe aequales; et jungantur AD, CF, BE, AC, DF. Quoniam igitur BA ipſi ED aequalis eſt et parallela, erit et AD aequalis et parallela ipſi BE [a]. eadem ra- a. 33. 1.
tione et CF ipſi BE aequalis et parallela erit. utraque igitur ipſarum AD, CF ipſi BE aequalis eſt et parallela. quae autem eidem rectae lineae ſunt parallelae, non exiſtentes in eodem plano, et inter ſe parallelae erunt. Ergo AD parallela eſt ipſi CF [b]; b. 9. 11.
et ei eſt aequalis [c]; atque ipſas conjungunt AC, DF; c. 1. Ax. 1.
et AC igitur ipſi DF aequalis eſt et parallela [a]. et quoniam duae rectae lineae AB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, et baſis AC eſt aequalis baſi DF; erit angulus ABC angulo DEF aequalis [d]. Si igitur duae rectae lineae &c. Q. E. D. d. 8. 1.

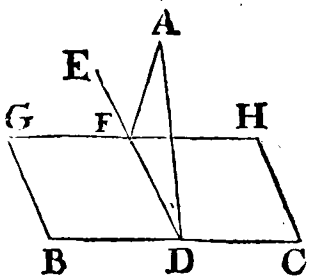



## PROP. XI. PROB.

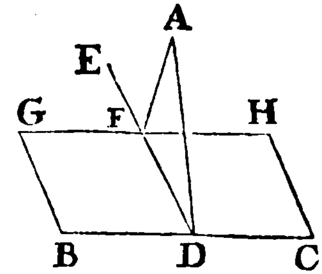
**A Dato puncto in ſublimi, ad ſubjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.**

Sit datum quidem punctum in ſublimi A, datum autem ſubjectum planum BH. oportet a puncto A ad ſubjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

In ſubjecto plano ducatur quaedam recta linea utcunque BC, et a puncto A ad BC perpendicularis agatur AD [a]. a. 12. 1.
ſiquidem igitur AD perpendicularis ſit etiam ad ſubjectum planum, factum jam erit quod proponebatur; ſin minus, ducatur a puncto D ipſi BC, in ſubjecto plano, ad rectos angulos DE [b]; et a puncto A ad DE perpendicularis ducatur [a] AF; denique per F duca- b. 11. 1.



c. 31. 1. tur GH ipſi BC parallela[c]. et quoniam BC utrique ipſarum ED, DA
eſt ad rectos angulos, erit et BC ad rectos angulos plano per ED, DA
d. 4. 11. tranſeunti[d]. atque ipſi BC parallela eſt GH; ſi autem ſint duae rectae
lineae parallelae quarum una plano alicui ſit ad rectos angulos, et re-
e. 8. 11. liqua eidem plano ad rectos angulos erit[e]; quare et GH plano per
ED, DA tranſeunti ad rectos angulos eſt, ac
propterea ad omnes rectas lineas quae in eo-
dem plano exiſtentes ipſam tangunt eſt per-
f. 3. Def. 11. pendicularis[f]. tangit autem ipſam recta AF
exiſtens in plano per ED, DA. Ergo GH
perpendicularis eſt ad AF, et ob id AF eſt
perpendicularis ad GH. eſt autem AF ad




DE perpendicularis; ergo AF perpendicularis eſt ad utramque ipſarum
GH, DE. ſi autem recta linea duabus rectis lineis ſeſe tangentibus,
in communi ſectione, ad rectos angulos inſiſtat, etiam plano per ipſas
ducto ad rectos angulos erit[d]. quare AF plano per ED, GH ducto
eſt ad rectos angulos. planum autem per ED, GH ductum eſt ſub-
jectum planum; ergo AF ad ſubjectum planum eſt perpendicularis.
A dato igitur puncto ſublimi A, ad ſubjectum planum, perpendicularis
recta linea ducta eſt AF. Q. E. F.

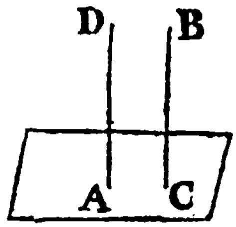
## PROP. XII. PROB.

DATO plano, a puncto quod in ipſo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.

Sit datum quidem planum illud quod eſt ſubjectum, punctum autem quod in ipſo ſit A. oportet à puncto A ſubjecto plano ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.

Intelligatur aliquod punctum ſublime B, a quo ad ſubjectum planum agatur

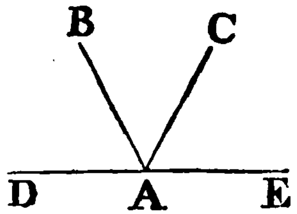
agatur perpendicularis BC[a]; et per A ipſi BC parallela ducatur AD[b]. a. 11. 11.
b. 31. 1.
Quoniam igitur duae rectae parallelae ſunt AD, CB, una autem ipſarum BC ſubjecto plano eſt ad rectos angulos, et reliqua AD ſubjecto plano ad rectos angulos erit[c]. Dato igitur plano a puncto quod in ipſo eſt datum, ad rectos angulos recta linea conſtituta eſt. Q. E. F. c. 8. 11.




## PROP. XIII. THEOR.

**DATO plano, a puncto quod in ipſo eſt, duae rectae lineae ad rectos angulos non conſtituentur ex eadem parte. et unica eſt perpendicularis a puncto in ſublimi ad ſubjectum planum.**

Si enim fieri poteſt, dato plano, a puncto quod in ipſo eſt A, duae rectae lineae AB, AC ad rectos angulos conſtituantur ex eadem parte; et ducatur planum per BA, AC, quod faciet ſectionem per A in ſubjecto plano rectam lineam[a]; faciat DAE. Ergo rectae lineae AB, AC, DAE in uno ſunt plano. et quoniam CA ſubjecto plano ad rectos angulos eſt, et ad omnes rectas lineas, quae in ſubjecto plano exiſtentes ipſam tangunt, rectos faciet angulos. tangit autem ipſam DAE, quae eſt in ſubjecto plano; angulus igitur CAE rectus eſt. eadem ratione et rectus eſt BAE. Ergo angulus CAE ipſi BAE eſt aequalis; et in uno ſunt plano, quod fieri non poteſt. Non igitur a dato plano a puncto quod in ipſo eſt, duae rectae lineae ad rectos angulos conſtituentur ex eadem parte. Et a puncto in ſublimi ad ſubjectum planum una tantum duci poteſt perpendicularis. ſi enim duae duci poſſint ab a. 3. 11.



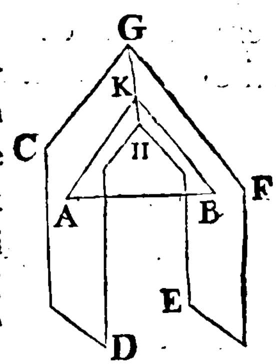
b. 6. 11. eodem puncto, essent inter se parallelae[b], quod est absurdum. Una igitur tantum duci potest. Q. E. D.

### PROP. XIV. THEOR.

AD quae plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim quaedam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD, EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse.

Si enim non ita sit, producta convenient inter se; conveniant, facient autem communem sectionem rectam lineam; faciant GH; et in ipsa GH sumpto quovis puncto K, jungantur AK, BK. Quoniam igitur AB recta est ad EF planum, erit et perpendicularis ad ipsam BK rectam
a. 3. Def. 11. lineam in plano EF producto existentem[a]. quare angulus ABK rectus est. eadem ratione et BAK est rectus; ideoque trianguli ABK duo anguli ABK, BAK duobus rectis sunt aequales, quod
b. 17. 1. fieri non potest[b]. non igitur plana CD, EF producta inter se convenient. Quare plana CD,
c. 8. Def. 11. EF sunt parallela[c]. Ad quae igitur plana &c. Q. E. D.



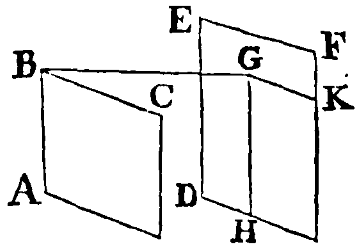

### PROP. XV. THEOR.

SI duae rectae lineae sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; et quae per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duae enim rectae lineae sese tangentes AB, BC, duabus rectis lineis sese tangentibus DE, EF parallelae sint, et non in eodem plano. Dico plana

plana quae per ABC, DEF tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non convenire.

Ducatur * a puncto B ad planum quod per DEF tranſit, perpendicularis BG, quae plano in puncto G occurrat; et per G ducatur ** ipſi quidem ED parallela GH; ipſi vero EF parallela GK. itaque quoniam BG perpendicularis eſt ad planum per DE, EF, et ad omnes rectas lineas quae ipſam tangunt, et in eodem ſunt plano, rectos faciet angulos [a]. tangit autem ipſam utraque ipſarum GH, GK, quae in eo ſunt plano. rectus igitur eſt uterque angulorum BGH, BGK. et quoniam BA parallela eſt ipſi GH*, (utraque enim ipſarum parallela eſt ipſi DE non in eodem cum ipſa plano) anguli GBA, BGH duobus rectis ſunt aequales [b]. rectus autem eſt BGH, ergo et GBA rectus erit, ideoque GB ad BA eſt perpendicularis. eadem ratione et GB perpendicularis eſt ad BC. quoniam igitur recta linea GB duabus rectis lineis BA, BC ſe invicem ſecantibus ad rectos angulos inſiſtat, erit GB etiam ad planum per BA, BC ductum perpendicularis [c]. atque eſt ad planum per DE, EF perpendicularis; ergo BG perpendicularis eſt ad utrumque planorum quae per ABC, DEF tranſeunt. ad quae vero plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt [d]. parallelum igitur eſt planum per AB, BC plano per DE, EF. Quare ſi duae rectae lineae &c. Q. E. D.




* 11. 11.
** 31. 1.
a. 3. Def. 11.
* 9. 11.
b. 29. 1.
c. 4. 11.
d. 14. 11.

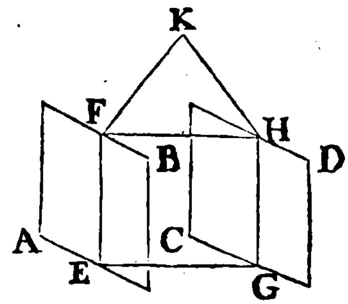
## PROP. XVI. THEOR.

SI duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelae erunt.

Duo

Duo plana parallela AB, CD a plano aliquo EFHG ſecentur, communes autem ipſorum ſectiones ſint EF, GH. Dico EF ipſi GH parallelam eſſe.

Si enim non eſt parallela, productae EF, GH inter ſe convenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, ut ad partes FH, et conveniant in K. quoniam igitur EFK eſt in plano AB, et omnia quae in EFK ſumuntur puncta in eodem plano erunt; unum autem punctorum quae ſunt in EFK eſt ipſum K punctum; ergo K eſt in plano AB. eadem ratione et K eſt in CD plano. ergo plana AB, CD producta inter ſe convenient; non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF, GH rectae lineae productae convenient ad partes FH. ſimiliter demonſtrabimus neque rectas EF, GH ad partes EG convenire, ſi producantur. quae autem, in eodem plano, productae neutra ex parte conveniunt parallelae ſunt. Ergo EF ipſi GH eſt parallela. Si igitur duo plana &c. Q. E. D.



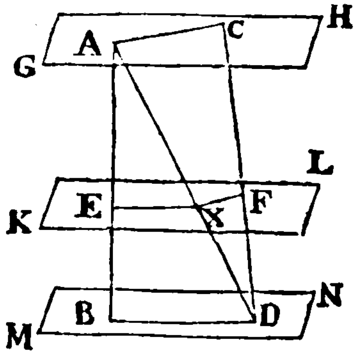

## PROP. XVII. THEOR.

SI duae rectae lineae a parallelis ſecentur planis, in eadem ratione ſecabuntur.

Duae enim rectae lineae AB, CD a parallelis planis GH, KL, MN ſecentur in punctis A, E, B; C, F, D. Dico ut AE recta linea ad ipſam EB, ita eſſe CF ad FD.

Jungantur enim AC, BD, AD, et occurrat AD plano KL in puncto X; et EX, XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL, MN a plano EBDX ſecantur, communes ipſorum ſectiones EX, BD parallelae

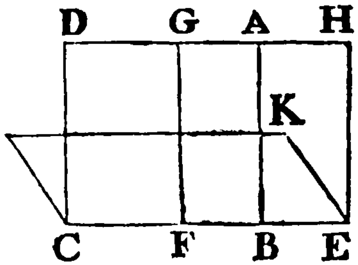
parallelae ſunt[a]. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH, KL a. 16. 11.
a plano AXFC ſecantur, communes ipſorum ſectiones AC, XF ſunt parallelae. et quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipſi BD, parallela ducta eſt EX, ut AE ad EB, ita erit AX ad XD[b]. rurſus, b. 2. 6. quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipſi AC, parallela ducta eſt XF, erit ut AX ad XD, ita CF ad FD. oſtenſum autem eſt ut AX ad XD, ita eſſe AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita CF ad FD[c]. Quare ſi duae rectae c. 11. 5.
lineae &c. Q. E. D.




## PROP. XVIII. THEOR.

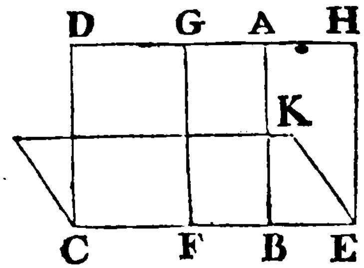
**SI recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, et omnia quae per ipſum tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.**

Recta enim linea quaedam AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico et omnia plana quae per ipſam AB tranſeunt ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe.




Producatur enim per AB planum DE, ſitque plani DE et ſubjecti plani communis ſectio CE; et ſumatur in CE quodvis punctum F, a quo ipſi CE ad rectos angulos, in DE plano ducatur FG. quoniam igitur AB ad ſubjectum planum eſt perpendicularis, et ad omnes rectas lineas, quae ipſam tangunt et in ſubjecto ſunt plano perpendicularis erit[a]; quare etiam ad CE a. 3. Def. 11.
eſt

eſt perpendicularis. angulus igitur ABF rectus eſt; ſed et GFB eſt
b. 28. 1. rectus; ergo AB parallela eſt ipſi FG[b]. eſt autem AB ſubjecto plano
ad rectos angulos; et FG igitur eidem
c. 8. 11. plano ad rectos angulos erit[c]. at planum
ad planum rectum eſt, quando communi
planorum ſectioni ad rectos angulos ductae
rectae lineae in uno planorum, reliquo pla-
d. 4. Def. 11. no ad rectos angulos ſunt[d]; communi
vero planorum ſectioni CE in uno plano
DE ad rectos angulos ducta FG, oſtenſa eſt ſubjecto plano ad rectos eſſe angulos; ergo planum DE rectum eſt ad ſubjectum planum. ſimiliter demonſtrabuntur et omnia quae per AB tranſeunt plana ſubjecto plano recta eſſe. Si igitur recta linea &c. Q. E. D.

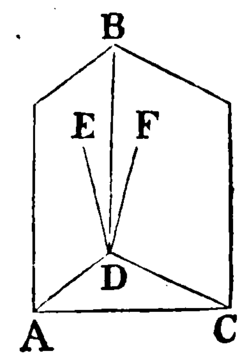



## PROP. XIX. THEOR.

**SI duo plana ſe invicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos; et communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit.**

Duo enim plana ſe invicem ſecantia AB, BC ſubjecto plano ſint ad rectos angulos; communis autem ipſorum ſectio ſit BD. Dico BD ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe.

Non enim ſit; et a puncto D ducatur in plano quidem AB rectae lineae AD ad rectos angulos ipſa DE. in plano autem BC ducatur ipſi CD ad rectos angulos DF. et quoniam planum AB ad ſubjectum planum rectum eſt, et communi ipſorum ſectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta eſt DE, erit DE ad ſubjectum planum perpendicularis[a].



ris[a]. similiter ostendemus et DF perpendicularem esse ad subjectum planum. quare ab eodem puncto D subjecto plano duae rectae lineae ad rectos angulos constitutae sunt ex eadem parte, quod fieri non potest[b]. non igitur subjecto plano a puncto D ad rectos angulos constituetur alia recta linea praeter ipsam DB communem planorum AB, BC sectionem. Quare DB subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana &c. Q. E. D.

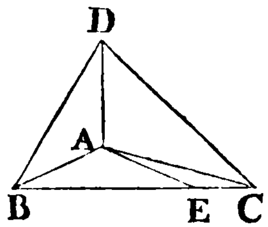
a. 4. Def. 11.
b. 13. 11.

## PROP. XX. THEOR.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC, CAD, DAB contineatur. Dico angulorum BAC, CAD, DAB duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos.

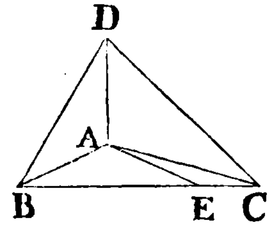
Si enim BAC, CAD, DAB anguli inter se aequales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit angulus BAC non minor utrovis ex reliquis, major autem quam DAB; et ad rectam lineam AB et punctum in ipsa A, constituatur angulo DAB[a], in plano per BA, AC transeunte, aequalis angulus BAE; ponaturque ipsi AD aequalis AE; et per E ducta BEC secet rectas lineas AB, AC in punctis B, C, et DB, DC jungantur. itaque quoniam DA est aequalis AE, communis autem AB, duae DA, AB duabus EA, AB aequales sunt, et angulus DAB aequalis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est aequalis[b]. et quoniam duae BD, DC ipsa CB majores sunt[c], quarum DB aequalis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam




a. 23. 1.
b. 4. 1.
c. 20. 1.

reliqua EC major. et quoniam DA eſt aequalis AE, communis autem AC et baſis DC major baſi EC; crit angulus

d. 25. 1. DAC angulo EAC major[d]. et ex conſtructione eſt DAB angulus aequalis ipſi BAE; quare DAB, DAC anguli, angulo BAC majores ſunt. eſt autem angulus BAC non minor utrovis ex ipſis DAB, DAC, quare BAC una cum altero ex ipſis, reliquo erit major. Si igitur ſolidus angulus &c. Q. E. D.




### PROP. XXI. THEOR.

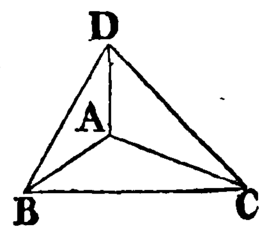
**Omnis ſolidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.**

Primum, Sit ſolidus angulus ad A, tribus planis angulis BAC, CAD, DAB contentus. Dico angulos BAC, CAD, DAB quatuor rectis eſſe minores.

Sumantur enim in unaquaque ipſarum AB, AC, AD quaevis puncta B, C, D, et BC, CD, DB jungantur. Quoniam igitur ſolidus angulus ad B, tribus planis angulis CBA, ABD, DBC continetur, duo quilibet reli-

a. 20. 11. quo majores ſunt[a]; anguli igitur CBA, ABD, angulo DBC ſunt majores. eadem ratione, et anguli quidem BCA, ACD majores ſunt angulo DCB; anguli vero CDA, ADB majores angulo BDC. quare ſex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB tribus angulis DBC, BCD, CDB ſunt majores. ſed tres anguli DBC, BCD, CDB, ſunt aequales

b. 32. 1. duobus rectis[b]. ſex igitur anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB duobus rectis majores ſunt. et quoniam ſingulorum triangulorum

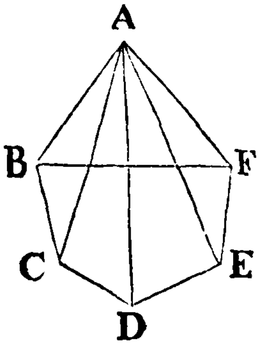



ABC,

ABC, ACD, ADB tres anguli ſunt aequales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA, BAC, ACB, ACD, CDA, DAC, ADB, DBA, BAD aequales ſex rectis. quorum ſex anguli CBA, ACB, ACD, CDA, ADB, DBA duobus rectis ſunt majores. reliqui igitur tres anguli BAC, CAD, DAB, qui ſolidum continent angulum, quatuor rectis minores ſunt.

Sed ſit ſolidus angulus ad A contentus quotcunque planis angulis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB; erunt hi omnes ſimul minores quatuor rectis.

Occurrat planum aliquod planis in quibus ſunt anguli, ſintque communes ejus ſectiones cum hiſce planis rectae BC, CD, DE, EF, FB. Quoniam igitur ſolidus angulus ad B, tribus planis angulis CBA, ABF, FBC continetur, duo quilibet reliquo majores ſunt[a]; anguli igitur CBA, ABF, angulo FBC ſunt majores. eadem ratione et duo anguli plani ad unumquodque ex punctis C, D, E, F, qui anguli ſunt ad baſes triangulorum quorum vertex communis eſt A, majores ſunt reliquo angulo ad idem punctum, qui ſcilicet eſt angulus polygoni BCDEF. Omnes igitur anguli qui ſunt ad baſes triangulorum ſimul majores ſunt omnibus polygoni angulis. Quoniam vero omnes anguli triangulorum ſimul aequales ſunt bis tot rectis quot ſunt triangula[b], hoc eſt quot ſunt latera polygoni BCDEF; omnes autem anguli polygoni una cum quatuor rectis aequales etiam ſunt bis tot rectis quot ſunt polygoni latera[c]; erunt omnes triangulorum anguli aequales omnibus angulis polygoni una cum quatuor rectis. Omnes vero anguli ad baſes triangulorum majores oſtenſi ſunt omnibus polygoni angulis. Ergo triangulorum reliqui anguli, quibus ſcilicet ſolidus angulus ad A continetur minores ſunt




a. 20. 11.

b. 32. 1.

c. 1. Cor. 32. 1.

 quatuor

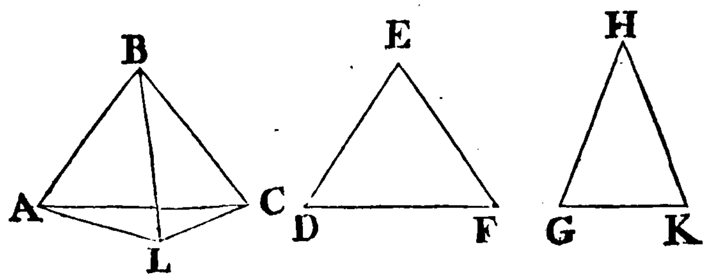
quatuor rectis. Omnis igitur solidus angulus minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Q. E. D.

## PROP. XXII. THEOR.

SI sint tres anguli plani quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectae lineae aequales; fieri potest, ut ex iis quae rectas aequales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani ABC, DEF, GHK, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti; contineant autem ipsos aequales rectae lineae AB, BC, DE, EF, GH, HK, et AC, DF, GK jungantur. Dico fieri posse ut ex rectis ipsis AC, DF, GK aequalibus triangulum constituatur; hoc est duas reliquâ majores esse quomodocunque sumptas.

Si quidem igitur anguli ad B, E, H sint aequales, et AC, DF, GK
a. 4. 1. aequales erunt[a], et duae reliquâ majores. sin minus, sint inaequales



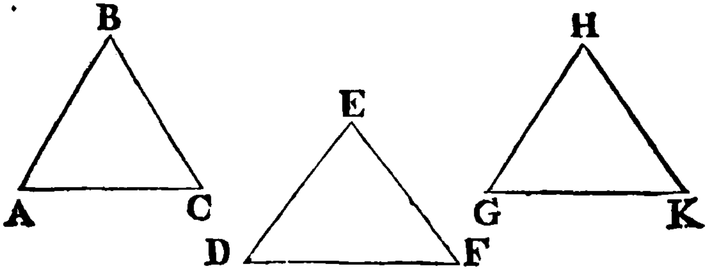

anguli ad B, E, H, et sit angulus ad B non minor utrovis ex ipsis ad
b. 4. vel 24. 1. E, H. non igitur minor est et recta AC utrâvis ex ipsis DF, GK[b]. et manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF, GK, reliquâ
c. 23. 1. esse majorem. Dico et DF, GK ipsa AC majores esse. constituatur[c] ad rectam lineam AB et ad punctum in ea B, angulo GHK aequalis angulus

angulus ABL, et uni ipſarum AB, BC, DE, EF, GH, HK ponatur aequalis BL, et AL, LC jungantur. Quoniam igitur duae AB, BL duabus GH, HK aequales ſunt, altera alteri, et angulos aequales continent, erit baſis AL baſi GK aequalis[a]. et quoniam anguli ad E, H, a. 4. 1.
angulo ABC majores ſunt, quorum angulus GHK eſt aequalis ipſi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. et quoniam duae LB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri, et angulus DEF angulo LBC major, baſis DF baſi LC major erit[d]. oſtenſa autem eſt d. 24. 1.
GK aequalis AL; ergo DF, GK, ipſis AL, LC ſunt majores. ſed AL, LC majores ſunt ipſa AC[e]; multo igitur DF, GK, ipſa AC majores e. 20. 1.
ſunt. Quare rectarum linearum AC, DF, GK duae reliquâ majores ſunt, quomodocunque ſumptae; ac propterea fieri poteſt[f] ut ex aequa- f. 22. 1.
libus ipſis AC, DF, GK triangulum conſtituatur. Q. E. D.

## PROP. XXIII. PROB.

**EX tribus datis angulis planis, quorum duo reliquo ſunt majores, quomodocunque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis eſſe minores.**

Sint dati tres anguli plani ABC, DEF, GHK, quorum duo re-

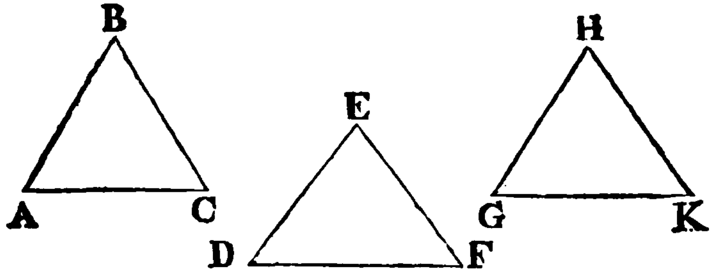



liquo ſunt majores, quomodocunque ſumpti, ſintque tres anguli quatuor

rectis

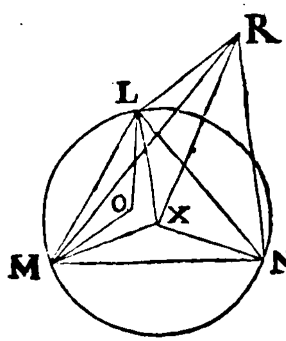
rectis minores. oportet ex aequalibus ipsis ABC, DEF, GHK solidum angulum constituere.

Abscindantur aequales AB, BC, DE, EF, GH, HK; et AC, DF, GK jungantur. fieri igitur potest ut ex aequalibus ipsis AC, DF,




a. 22. 11. GK constituatur triangulum[a]. Itaque constituatur [b] LMN, ita ut AC
b. 22. 1. quidem sit aequalis LM, DF vero ipsi MN, et praeterea GK ipsi NL;
c. 5. 4. et circa triangulum LMN circulus LMN describatur[c]; sumaturque ipsius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra.

Sit primum intra, et LX, MX, NX jungantur. Dico AB majorem esse LX. si enim non ita sit, vel AB erit aequalis LX, vel eâ minor; sit primum aequalis. Quoniam igitur AB est aequalis LX, atque est AB ipsi BC aequalis, et LX ipsi XM, duae AB, BC duabus LX, XM aequales erunt, altera alteri; et basis AC basi LM aequalis ponitur; quare angulus
d. 8. 1. ABC angulo LXM est aequalis[d]. eadem ratione et angulus quidem DEF est aequalis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL.

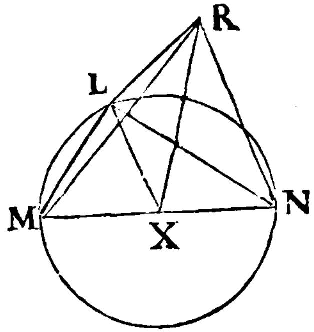



tres igitur anguli ABC, DEF, GHK tribus LXM, MXN, NXL ae-
e. 2. Cor. 15. 1. quales sunt. sed tres LXM, MXN, NXL quatuor rectis sunt aequales[e]; ergo et tres ABC, DEF, GHK aequales erunt quatuor rectis. atqui

ponuntur

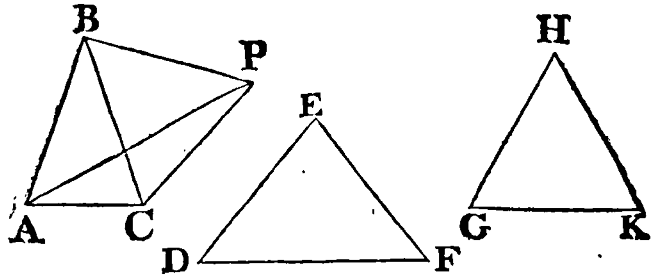
ponuntur quatuor rectis minores; quod eſt abſurdum. non igitur AB ipſi LX eſt aequalis. Dico praeterea neque AB minorem eſſe LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor, et ſuper rectam lineam LM ad partes ejus ad quas eſt centrum X conſtituatur triangulum LOM, cujus latera LO, OM aequalia ſint ipſis AB, BC[b]; et quoniam baſis LM baſi AC eſt b. 22. 1.
aequalis, erit angulus LOM aequalis angulo ABC[d]. ponitur autem recta d. 8. 1.
AB, hoc eſt LO, minor ipſa LX; quare LO, MO cadent intra triangulum LXM, ſi enim congruerent ipſis LX, XM, vel caderent extra, aequales, vel majores eſſent ipſis LX, XM[f]. angulus igitur LOM, hoc f. 21. 1.
eſt ABC, major eſt angulo LXM[f]. ſimiliter oſtendetur angulus DEF major angulo MXN, et angulus GHK major ipſo NXL. tres igitur anguli ABC, DEF, GHK tribus LXM, MXN, NXL, hoc eſt quatuor rectis, ſunt majores. anguli autem ABC, DEF, GHK ponuntur quatuor rectis minores; quod eſt abſurdum. non igitur AB minor eſt quam LX. oſtenſum autem eſt neque eſſe aequalem. major igitur eſt AB quam LX.

Sed ſit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN, et ſit X, atque XL jungatur. Dico rurſus AB majorem eſſe LX. ſi enim non ita ſit, vel AB eſt aequalis LX, vel ipſa minor. ſit primum aequalis. duae igitur AB, BC, hoc eſt DE, EF duabus MX, XL, hoc eſt ipſi MN aequales ſunt, ſed MN ponitur aequalis DF; ergo DE, EF ipſi DF ſunt aequales; quod fieri non poteſt*. non igitur AB eſt aequalis LX. ſimiliter neque minor; multo enim magis abſurdum ſequeretur. major igitur eſt AB ipſâ LX. * 20. 1.

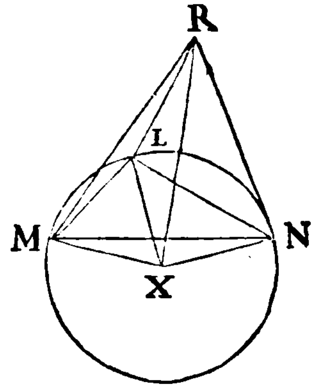



Sed ſit centrum circuli X extra triangulum LMN, et LX, MX, NX jungantur. Dico et ſic AB ipſâ LX majorem eſſe. ſi enim non ita ſit, vel

vel aequalis eſt, vel minor. ſit primum aequalis, et omnino ut in primo caſu oſtendetur angulus quidem ABC aequalis angulo MXL, angulus vero GHK angulo LXN; totus igitur MXN eſt aequalis duobus ABC, GHK. ſed ipſi ABC, GHK ſimul angulo DEF majores ſunt; et angulus igitur MXN ipſo DEF eſt major. quoniam vero duae DE, EF duabus MX, XN aequales ſunt, et baſis DF baſi MN, erit MXN an-
d. 8. 1. gulus angulo DEF aequalis[d]. oſtenſus autem eſt major; quod eſt ab-




ſurdum. non igitur AB eſt aequalis LX. Dico vero neque minorem eſſe AB ipsâ LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; erit igitur, ut in primo caſu oſtenſum, angulus quidem ABC angulo MXL major, angulus vero GHK major angulo LXN. conſtituatur ad rectam lineam BC, et ad punctum in ea B, angulo GHK aequalis angulus CBP, et ponatur BP aequalis ipſi HK, et jungantur CP, AP. et quoniam CB eſt aequalis GH, duae CB, BP aequales ſunt duabus GH, HK, et aequales angulos continent; baſis igitur CP baſi GK ſive LN eſt aequalis. in triangulis autem iſoſcelibus ABC, MXL quoniam an-




gulus ABC major eſt angulo MXL, erit angulus MLX ad baſim ma-
g. 32. 1. jor angulo ad baſim ACB[g]. eadem ratione quoniam GHK, hoc eſt angulus CBP, major eſt angulo LXN, et angulus XLN major erit ipſo

BCP.

BCP. totus igitur MLN major eſt toto ACP. et quoniam duae ML, LN duabus AC, CP ſunt aequales, et angulus MLN major angulo ACP, erit et baſis MN baſi AP major[h]. ſed MN eſt aequalis DF; ergo et DF quam AP major erit. quoniam igitur duae DE, EF duabus AB, BP aequales ſunt, altera alteri, et baſis DF major baſi AP, erit angulus DEF angulo ABP major[k]. aequalis autem eſt angulus ABP angulis ABC, CBP, hoc eſt angulis ABC, GHK; ergo DEF angulus angulis ABC, GHK major eſt; ſed et minor; quod fieri non poteſt. non igitur AB minor eſt quam LX. oſtenſum autem eſt neque eſſe aequalem; major igitur eſt AB quam LX.

h. 24. 1.
k. 25. 1.

Conſtituatur a puncto X, circuli LMN plano ad rectos angulos XR[l]. et quoniam in omnibus caſibus AB oſtenſa eſt major LX, exceſſui quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ponatur aequale quadratum quod fit ex RX, et RL, RM, RN jungantur. quoniam igitur RX perpendicularis eſt ad planum LMN circuli, et ad unamquamque ipſarum LX, MX, NX erit perpendicularis[m]. et quoniam LX eſt aequalis XM, communis autem et ad rectos angulos XR, erit baſis RL baſi RM aequalis. eadem ratione et RN utrique ipſarum RL, RM eſt aequalis. tres igitur rectae lineae RL, RM, RN inter ſe aequales ſunt. et quoniam quadratum ab XR ponitur aequale exceſſui quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX, XR aequale. quadratis autem ex LX, XR aequale[n] eſt quadratum ex RL; rectus enim angulus eſt LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL aequale erit; ideoque AB ipſi RL eſt aequalis. Sed ipſi quidem AB aequalis eſt unaquaeque ipſarum BC, DE, EF, GH, HK; ipſi vero RL aequalis utraque ipſarum RM, RN. unaquaeque igitur ipſarum AB, BC, DE, EF, GH, HK unicuique ipſarum RL, RM, RN eſt aequalis. et quoniam duae RL, RM duabus AB, BC aequales ſunt, et baſis LM eſt aequalis baſi AC; erit an-

l. 12. 11.
m. 3. Def. 11.
n. 47. 1.

d. 8. 1. gulus LRM aequalis [d] angulo ABC. eadem ratione et angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem NRL angulo GHK est aequalis. Ex tribus igitur angulis planis LRM, MRN, NRL, qui aequales sunt tribus datis ABC, DEF, GHK solidus angulus constitutus est ad R. Q. E. F.

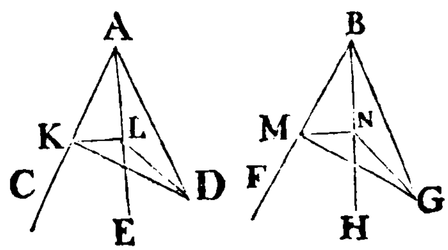
## PROP. A. THEOR.

SI sint duo anguli solidi, quorum uterque continetur tribus angulis planis qui inter se aequales sunt, singuli singulis; plana in quibus sunt aequales anguli erunt ad se invicem similiter inclinata.

Sint duo anguli solidi ad puncta A, B; et contineatur angulus ad A tribus planis angulis CAD, CAE, EAD; angulus vero B contineatur tribus angulis planis FBG, FBH, HBG, quorum angulus quidem CAD angulo FBG est aequalis, angulus vero CAE angulo FBH, et EAD ipsi HBG. erunt plana in quibus sunt aequales anguli similiter ad se invicem inclinata.

Sumatur enim in recta linea AC punctum quodvis K, et a puncto K ad rectos angulos ipsi AC ducatur in plano quidem CAD recta KD, in plano vero CAE recta KL. est igitur angulus DKL inclinatio plani

a. 6. Def. 11. CAD ad ipsum CAE [a]. in recta vero BF ipsi AK aequalis ponatur BM, et a puncto M ducantur in planis FBG, FBH rectae lineae MG, MN ad rectos angulos ipsi BF; erit igitur angulus GMN inclinatio plani FBG ad ipsum FBH [a]. jungantur LD, NG; et quoniam in triangulis KAD, MBG aequales sunt KAD, MBG

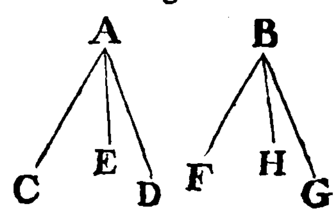


MBG anguli, ut et AKD, BMG, uterque enim eſt rectus; ſuntque latera AK, BM quae aequalibus angulis adjacent inter ſe aequalia; erit KD quidem aequalis ipſi MG, AD vero ipſi BG[b]. eadem ratione, in b. 26. 1.
triangulis KAL, MBN, erit KL aequalis MN, AL vero ipſi BN. in triangulis autem LAD, NBG duae LA, AD duabus NB, BG aequales oſtenſae ſunt, altera alteri, et aequales continent angulos; baſis igitur LD baſi NG eſt aequalis[c]. Denique in triangulis KLD, MNG, c. 4. 1.
duae DK, KL duabus GM, MN ſunt aequales, et eſt baſis LD aequalis baſi NG; angulus igitur DKL aequalis eſt angulo GMN[d]. eſt d. 8. 1.
vero angulus DKL inclinatio plani CAD ad planum CAE, et angulus GMN inclinatio plani FBG ad ipſum FBH, quae propterea plana ad ſe invicem ſunt ſimiliter inclinata[e]. et eadem ratione reliqua plana in e. 7. Def. 11.
quibus ſunt aequales anguli ad ſe invicem ſimiliter inclinata oſtendentur. Si igitur ſint duo anguli ſolidi &c. Q. E. D.

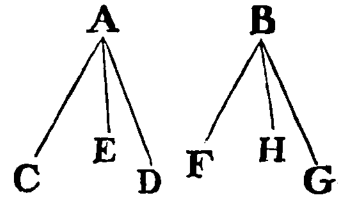
## PROP. B. THEOR.

SI ſint duo anguli ſolidi, quorum uterque continetur tribus planis angulis qui inter ſe ſunt aequales, ſinguli ſingulis, et ſimiliter poſiti; erunt anguli ſolidi inter ſe aequales.

Sint anguli ſolidi ad puncta A, B; et contineatur angulus A tribus planis angulis CAD, CAE, EAD; angulus vero B contineatur tribus FBG, FBH, HBG; quorum CAD aequalis eſt ipſi FBG; CAE ipſi FBH; et EAD ipſi HBG. erit ſolidus angulus ad A ſolido angulo ad B aequalis.




Applicato enim ſolido angulo ad A, ſolido angulo ad B; et primum applicato plano angulo CAD ipsi FBG, puncto quidem A posito in B, rectâ vero linea AC in ipsa BF; recta AD congruet rectae BG, quod angulus CAD aequalis sit angulo FBG. quoniam vero inclinatio plani CAE ad planum CAD aequalis est inclinationi



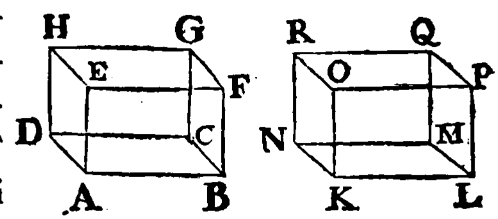

a. A. 11. plani FBH ad planum FBG[a], et congruit planum CAD plano FBG, congruet et planum CAE plano FBH; ac propterea recta linea AE congruet ipsi BH, quia scilicet angulus CAE est aequalis angulo FBH. et ostensa est recta AD congruere ipsi BG; quare planum EAD congruit plano HBG. Ergo solidus angulus ad A congruit solido angulo ad B, et in-

b. 8. Ax. 1. ter se sunt aequales[b]. Q. E. D.

## PROP. C. THEOR.

SOLIDAE figurae quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis, quarumque nullus angulus solidus pluribus quam tribus planis angulis continetur, sunt inter se aequales et similes.

Sint AG, KQ figurae solidae quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis; sitque planum AC simile et aequale plano KM; planum AF ipsi KP; BG ipsi LQ; GD ipsi QN; DE ipsi NO; et FH denique simile et aequale ipsi PR. Erit figura solida AG aequalis et similis ipsi KQ.




Quoniam

Quoniam angulus ſolidus ad A continetur tribus angulis planis BAD, BAE, EAD, qui, ſinguli ſingulis, ex hypotheſi aequales ſunt planis angulis LKN, LKO, OKN quibus continetur angulus ſolidus ad K; erit angulus ſolidus ad A angulo ſolido ad K aequalis[a]. ſimiliter a. B. 11. reliqui figurarum anguli ſolidi inter ſe aequales oſtendentur. applicatâ igitur figurâ ſolida AG figurae ſolidae KQ, et primum applicatâ figura plana AC figurae planae KM, poſitâ ſcilicet recta AB in ipſa KL, congruet figura AC figurae KM, quod ipſae ſint aequales et ſimiles. congruent igitur rectae AD, DC, CB ipſis KN, NM, ML, ſingulae ſingulis; et puncta A, D, C, B punctis K, N, M, L, angulus autem ſolidus ad A congruet angulo ſolido ad K[a], quare et planum AF congruet plano KP, et figura AF figurae KP, quia ſunt inter ſe aequales et ſimiles. congruent igitur rectae AE, EF, FB rectis KO, OP, PL; et puncta E, F ipſis O, P. ſimiliter oſtendetur figura AH congruere ipſi KR, recta DH rectae NR, et punctum H puncto R. et quoniam ſolidus angulus ad B aequalis eſt ſolido angulo ad L, ſimiliter oſtendetur figura BG congruere figurae LQ, et recta CG rectae MQ, punctumque G puncto Q. Quoniam igitur plana, et latera omnia figurae ſolidae AG congruunt planis et lateribus figurae ſolidae KQ, erit AG aequalis et ſimilis ipſi KQ. Et ſimiliter aliae figurae ſolidae quaecunque quae continentur planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et ſimiliter poſitis, quarumque nullus angulus ſolidus continetur pluribus quam tribus angulis planis, aequales et ſimiles inter ſe oſtendentur. Q. E. D.

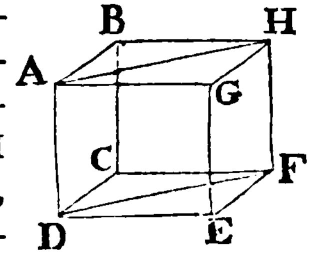
## PROP. XXIV. THEOR.

SI ſolidum ſex parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, parallelogramma erunt ſimilia et aequalia.

Solidum

Solidum enim CDGH parallelis planis AC, GF; BG, CE; FB, AE, contineatur. Dico opposita ejus plana, parallelogramma esse similia et aequalia.

Quoniam enim duo plana parallela BG, CE a plano AC secantur, a. 16. 11. communes ipsorum sectiones parallelae sunt[a]; ergo AB ipsi CD est parallela. rursus, quoniam duo plana BF, AE secantur a plano AC, communes ipsorum sectiones parallelae sunt[a], parallela igitur est AD ipsi BC. ostensa autem est AB parallela CD; ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, et unumquodque ipsorum CE, FG, GB, BF, AE parallelogrammum esse. jungantur AH, DF; et quoniam parallela est AB quidem ipsi DC, BH vero ipsi CF; erunt duae rectae lineae AB, BH sese tangentes duabus DC, CF sese tangentibus parallelae, et non in eodem plano; quare aequales angulos con- b. 10. 11. tinebunt[b]. angulus igitur ABH angulo DCF est aequalis. et quoniam duae AB, BH duabus DC, CF aequales sunt, et angulus ABH aequalis angulo DCF, erit basis AH basi DF aequalis, et ABH triangulum c. 4. 1. aequale triangulo DCF[c]. et est ipsius quidem ABH trianguli duplum[d] d. 34. 1. BG parallelogrammum; ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE; erit igitur BG parallelogrammum aequale et simile parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus, et AC parallelogrammum parallelogrammo GF, et parallelogrammum AE parallelogrammo BF aequale esse et simile. Si igitur solidum &c. Q. E. D.



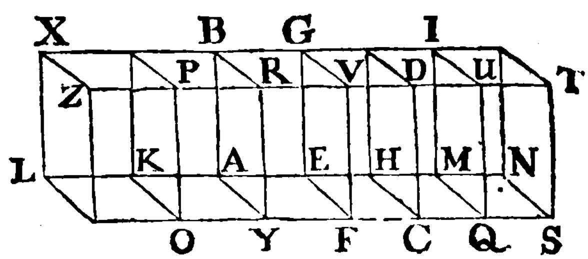

## PROP. XXV. THEOR.

**SI solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.**

Solidum

Solidum enim parallelepipedum ABCD, plano EV secetur oppositis planis AR, HD parallelo. Dico ut basis AEFY ad basim EHCF, ita esse ABFV solidum ad solidum EGCD.

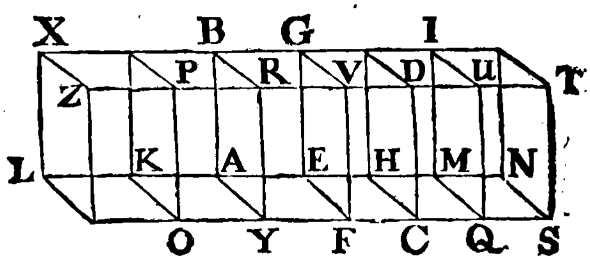
Producatur enim AH ex utraque parte; et ponantur ipsi quidem EH aequales quotcunque HM, MN; ipsi vero EA aequales quotcunque AK, KL, et compleantur parallelogramma LO, KY, HQ, MS, et solida LP, KR, HU, MT. quoniam igitur aequales inter se sunt LK, KA, AE rectae lineae, erunt et parallelogramma LO, KY, AF inter se aequalia[a]; itemque aequalia inter se parallelogramma KX, a. 36. 1.
KB, AG, et adhuc parallelogramma LZ, KP, AR inter se aequalia[b]; opposita enim sunt. eadem ratione et parallelogramma [a] b. 24. 11.
EC, HQ, MS sunt aequalia inter se; itemque parallelogramma




[a] HG, HI, IN inter se aequalia; et insuper parallelogramma [b] HD, MU, NT. tria igitur plana solidi LP aequalia et similia sunt tribus planis solidi KR, atque etiam solidi AV. sed tria tribus oppositis sunt aequalia et similia[b], et nullus ex ipsorum angulis solidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo tria solida LP, KR, AV inter se aequalia erunt[c]. eadem ratione et tria solida ED, HU, MT sunt ae- c. C. 11.
qualia inter se. quam multiplex igitur est basis LF ipsius AF basis, tam multiplex est et LV solidum solidi AV. eadem ratione quam multiplex est NF basis ipsius basis HF, tam multiplex est et solidum NV ipsius ED solidi. et si basis LF est aequalis basi NF, et solidum LV solido

NV

c. C. 11. NV aequale erit[c]; et si basis LF superat NF basim, et solidum LV solidum NV superabit; et si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF, FH, et duobus solidis AV, ED; basis quidem AF et AV solidi sumpta sunt utcunque aeque multiplicia, videlicet basis LF et solidum LV; basis vero FH et ED solidi




sumpta sunt alia utcunque aeque multiplicia, nempe basis FN et solidum NV. et demonstratum est si basis LF superat basim FN et LV solidum solidum NV superare; et si aequalis, aequale; et si minor, minus. est igitur ut AF basis ad basim FH, ita AV solidum ad solidum ED. Quare si solidum &c. Q. E. D.

## PROP. XXVI. PROB.

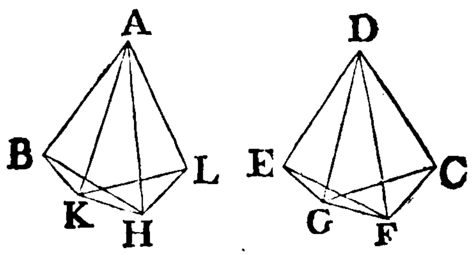
**AD datam rectam lineam, et ad datum in ipsa punctum dato angulo solido tribus planis angulis contento, aequalem angulum solidum constituere.**

Sit data quaedam recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, et datus solidus angulus ad D. qui angulis planis EDC, EDF, FDC continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, et ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D aequalem angulum solidum constituere.

Sumatur enim in recta linea DF quodvis punctum F, a quo ad planum

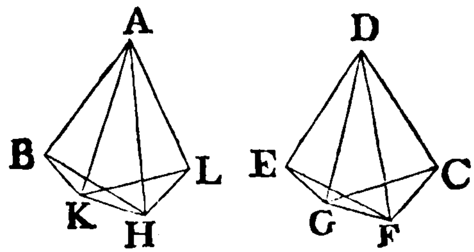
planum per ED, DC transiens ducatur perpendicularis FG[a], et plano a. 11. 11.
in puncto G occurrat; jungaturque DG, et ad rectam lineam AB, et ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC aequalis angulus constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur aequalis BAK[b]. b. 23. 1.
deinde ipsi DG ponatur aequalis AK, et a puncto K plano BAL ad rectos angulos erigatur KH[c]; ponaturque ipsi GF aequalis KH, et c. 12. 11.
HA jungatur. Dico angulum solidum ad A qui angulis planis BAL, BAH, HAL continetur, aequalem esse angulo solido ad D, planis angulis EDC, EDF, FDC contento.

Sumantur enim aequales rectae lineae AB, DE, et jungantur HB, KB, FE, GE. Quoniam igitur FG perpendicularis est ad subjectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt, et in subjecto sunt plano, rectos faciet angulos[d]. d. 3. Def. 11.
uterque igitur angulorum FGD, FGE rectus est. eadem ratione, et uterque ipsorum HKA, HKB est rectus. et quoniam duae KA, AB




duabus GD, DE aequales sunt, altera alteri, et angulos aequales continent, erit basis BK basi EG aequalis[e]. est autem et KH aequalis GF, e. 4. 1.
atque angulos rectos continent; aequalis igitur erit HB ipsi FE[e]. rursus, quoniam duae AK, KH duabus DG, GF aequales sunt, et rectos continent angulos; erit basis AH basi DF aequalis; estque AB aequalis DE; duae igitur HA, AB duabus FD, DE sunt aequales, et basis HB est aequalis basi FE; ergo angulus BAH angulo EDF aequalis erit[f]. eadem ratione, et angulus HAL angulo FDC est aequalis. quan- f. 8. 1.
doquidem si assumamus aequales AL, DC, et jungamus KL, HL, GC, FC, quoniam totus angulus BAL est aequalis toti EDC, quorum BAK ipsi EDG ponitur aequalis; erit reliquus KAL aequalis reliquo GDC.

et quoniam duae KA, AL duabus GD, DC aequales ſunt, et angulos e. 4. 1. aequales continent, baſis KL baſi GC aequalis erit[e]. eſt autem et KH aequalis GF, duae igitur LK, KH duabus CG, GF ſunt aequales; anguloſque rectos continent; ergo baſis HL aequalis eſt baſi FC. rurſus, quoniam duae HA, AL duabus FD, DC aequales ſunt, et baſis HL aequalis baſi FC, erit angulus HAL aequalis angulo f. 8. 1. FDC[f]. quoniam igitur tres anguli plani BAL, BAH, HAL quibus continetur angulus ſolidus ad A, aequales ſunt tribus angulis planis EDC, EDF, FDC quibus angulus ſolidus ad D continetur, ſinguli ſingulis, et ſimiliter ſunt poſiti; erit g. B. 11. ſolidus angulus ad A angulo ſolido ad D aequalis[g]. Ad datam igitur rectam lineam, et ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido tribus planis angulis contento aequalis angulus ſolidus conſtitutus eſt. Q. E. F.




## PROP. XXVII. PROB.

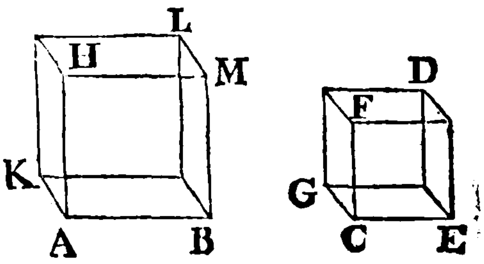
A Data recta linea dato ſolido parallelepipedo ſimile, et ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

Sit recta quidem linea AB, datum vero ſolidum parallelepipedum CD. oportet a data recta linea AB dato ſolido parallelepipedo CD ſimile, et ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

Conſtituatur enim ad rectam lineam AB, et ad datum in ipſa puncа. 26. 11. tum A angulo ſolido ad C aequalis angulus[a] qui planis angulis BAK, KAH, HAB, contineatur, ita ut angulus quidem BAK aequalis ſit angulo ECG, angulus vero KAH angulo GCF, et adhuc angulus HAB angulo

angulo FCE; et fiat ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH[b]; ergo ex aequali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH[c]. compleatur parallelogrammum BH, et AL ſolidum. quoniam igitur eſt ut EC ad CG, ita BA ad AK, circa aequales angulos ECG, BAK latera ſunt proportionalia; ſimile igitur eſt parallelogrammum BK parallelogrammo EG. eadem quoque ratione parallelogrammum KH ſimile eſt parallelogrammo GF, et parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma ſolidi AL tribus parallelogrammis ſolidi CD ſimilia ſunt; ſed tria tribus oppoſitis ſunt ſimilia et aequalia[d]. et quoniam anguli plani quibus continentur ſolidorum anguli ſolidi, ſunt inter ſe aequales et ſimiliter poſiti, erunt et anguli ſolidi inter ſe aequales[e]. Ergo AL ſolidum ſolido CD ſimile[f] erit. A data igitur recta linea AB dato ſolido parallelepipedo CD, ſolidum parallelepipedum AL ſimile, et ſimiliter poſitum deſcriptum eſt. Q. E. F.

b. 12. 6.
c. 22. 5.
d. 24. 11.
e. B. 11.
f. 11. Def. 11.




## PROP. XXVIII. THEOR.

SI ſolidum parallepipedum plano ſecetur per diagonales oppoſitorum planorum, ab ipſo plano bifariam ſecabitur.

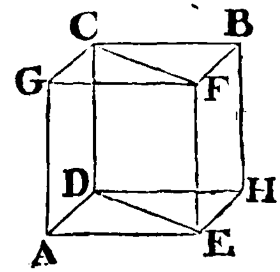
Sit enim ſolidum parallelepipedum AB, et oppoſitorum planorum AH, GB diagonales ſint DE, CF quae ſc. ductae ſunt inter aequales angulos parallelogrammorum AH, GB. et quoniam utraque CD, FE parallela eſt ipſi GA, non in eodem cum ipſa plano, erunt CD, FE inter ſe parallelae[a]; quare diagonales CF, DE ſunt in plano in quo

a. 9. 11.

 ſunt

b. 16. 11. ſunt hae parallelae; et inter ſe parallelae erunt[b]. Dico igitur ſolidum AB a plano CDEF biſariam ſecari.

Quoniam enim aequale eſt CGF triangulum triangulo CBF, trian-
c. 34. 1. gulum vero DAE triangulo DHE[c]; eſt autem et CA parallelogram-
d. 24. 11. mum parallelogrammo BE aequale[d], oppoſitum enim eſt; et parallelogrammum GE parallelogrammo CH: erit priſma contentum duobus triangulis CGF, DAE, et tribus parallelogrammis CA, GE, EC aequale priſmati quod continetur duobus triangulis CBF, DHE, et tribus paralle-
e. C. 11. logrammis BE, CH, EC[e]; etenim planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et ſimiliter poſitis continentur, et nullus ex ipſorum angulis ſolidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo totum AB ſolidum a plano CDEF biſariam ſecatur. Q. E. D.

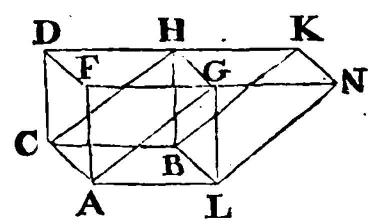



## PROP. XXIX. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae in eadem ſunt baſi, et eadem altitudine, quorum inſiſtentes rectae ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt aequales.

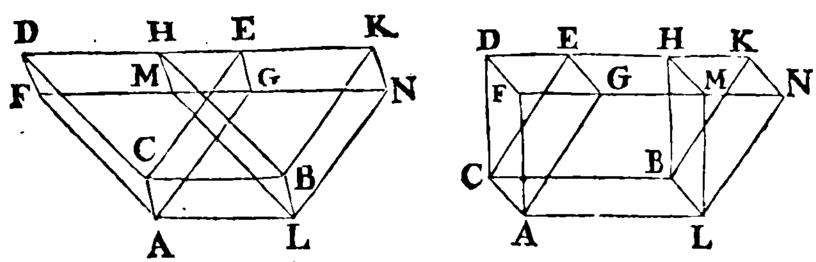
Vid. Fig. 2, 3. Sint enim in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda AH, AK, eadem altitudine, quorum inſiſtentes rectae AF, AG, LM, LN; CD, CE, BH, BK ſint in eiſdem rectis lineis FN, DK. Dico ſolidum AH ſolido AK aequale eſſe.

Vid. Fig. 1. Primo habeant parallelogramma DG, HN baſi AB oppoſita, latus commune HG. quoniam igitur ſolidum AH ſectum eſt plano AGHC per diagonales



gonales AG, CH oppoſitorum planorum ALGF, CBHD, biſariam ſe-
cabitur AH a plano AGHC [a]. duplum igitur eſt ſolidum AH priſmatis a. 28. 11.
quod triangulis ALG, CBH continetur. eadem ratione, quoniam ſoli-
dum AK ſectum eſt plano LGHB per diagonales LG, BH oppoſitorum
planorum ALNG, CBKH, erit ſolidum AK duplum ejuſdem priſmatis
quod triangulis ALG, CBH continetur. ſolidum igitur AH ſolido AK
eſt aequale.

Non autem habeant parallelogramma baſi oppoſita videlicet DM, EN latus commune. quoniam igitur parallelogrammum eſt utrumque ipſorum CH, CK, erit CB utrique rectarum DH, EK aequalis [b]; ergo b. 34. 1.
et DH eſt aequalis EK. communis addatur, aut auferatur HE; erit




igitur DE aequalis HK. quare et CDE triangulum triangulo BHK
eſt aequale [c]. parallelogrammum autem DG eſt aequale parallelogram- c. 38. 1.
mo HN [d]. eadem ratione et AFG triangulum eſt aequale triangulo d. 36. 1.
LMN. et eſt parallelogrammum quidem CF aequale parallelogrammo
BM, parallelogrammum vero CG parallelogrammo BN [e]; oppoſita enim e. 24. 11.
ſunt. Ergo et priſma contentum duobus triangulis AFG, CDE, et
tribus parallelogrammis AD, DG, GC eſt aequale [f] priſmati quod duo- f. C. 11.
bus triangulis LMN, BHK et tribus parallelogrammis BM, MK, KL
continetur. ablato igitur priſmate LMN, BHK ex ſolido cujus baſis eſt
parallelogrammum AB, oppoſitum autem ipſi, FDKN; et ex eodem
ſolido

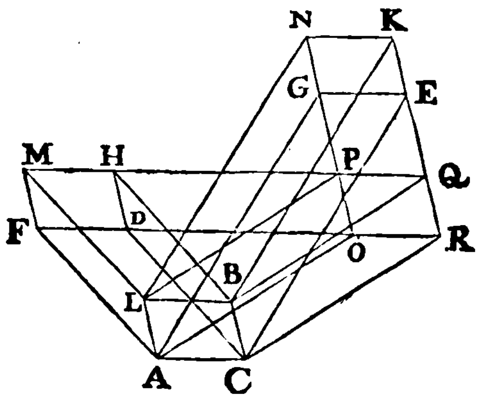
ſolido ablato priſmate AFG, CDE; erit reliquum ſolidum, parallelepipedum ſc. AH aequale reliquo ſolido, parallelepipedo ſc. AK. ſolida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

## PROP. XXX. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae in eadem ſunt baſi, et eadem altitudine, quorum inſiſtentes rectae non ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt aequalia.

Sint enim in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda CM, CN, et eadem altitudine, quorum inſiſtentes rectae AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK, non ſunt in eiſdem rectis lineis. Dico ſolidum CM, ſolido CN aequale eſſe.

Producantur enim FD, MH et NG, KE, et conveniant inter ſe in punctis O, P, Q, R; et AO, LP, BQ, CR jungantur. quoniam




igitur planum LBHM parallelum eſt plano oppoſito ACDF, et planum quidem LBHM illud eſt in quo ſunt parallelae rectae LB, MHPQ, in quo etiam eſt figura BLPQ; planum vero ACDF eſt illud in quo ſunt parallelae AC, FDOR, in quo etiam eſt figura CAOR; erunt figurae

BLPQ,

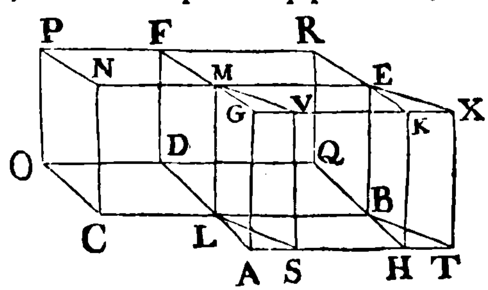
BLPQ, CAOR in planis inter ſe parallelis. ſimiliter quoniam planum ALNG oppoſito plano CBKE parallelum eſt, et planum quidem ALNG illud eſt in quo ſunt parallelae AL, OPGN, in quo etiam eſt figura ALPO; planum vero CBKE eſt illud in quo ſunt parallelae CB, RQEK, in quo etiam eſt figura CBQR; erunt figurae ALPO, CBQR in planis inter ſe parallelis. et ſunt plana ACBL, ORQP inter ſe parallela; ſolidum igitur CP eſt parallelepipedum. ſolidum autem CM cujus baſis ACBL, et parallelogrammum ipſi oppoſitum FDHM, aequale eſt [a] ſolido CP cujus baſis eſt parallelogrammum ACBL, et ei oppoſitum ORQP; in eadem enim ſunt baſi, et ipſorum inſiſtentes rectae AF, AO, CD, CR; LM, LP, BH, BQ ſunt in eiſdem rectis lineis FR, MQ. ſed ſolidum CP eſt aequale [a] ſolido CN, etenim in eadem ſunt baſi ACBL, et eorum inſiſtentes rectae AO, AG, LP, LN; CR, CE, BQ, BK ſunt in eiſdem rectis lineis ON, RK. Ergo ſolidum CM, ſolido CN aequale erit. Solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

a. 29. 11.

## PROP. XXXI. THEOR.

**SOLIDA parallelepipeda quae in aequalibus ſunt baſibus, et eadem altitudine, inter ſe ſunt aequalia.**

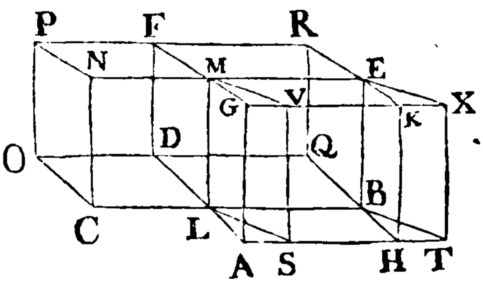
Sint in aequalibus baſibus AB, CD ſolida parallelepipeda AE, CF, et eadem altitudine. Dico ſolidum AE ſolido CF aequale eſſe.




Sint primo inſiſtentes rectae lineae ad rectos angulos baſibus AB, CD. ponantur autem ſolida ita ut baſes ſint in eodem plano, et ut in directum ſint latera

CL,

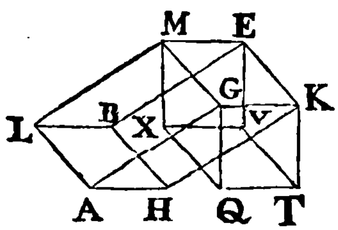
CL, LB; recta igitur LM quae insistit puncto L communis erit soli-
a. 13. 11. dis AE, CF [a]; reliquae autem insistentes rectae sint AG, HK, BE; DF, OP, CN. et primo sit angulus ALB aequalis angulo CLD; in directum igitur erunt AL, LD. producantur OD, HB et conveniant in Q, et compleatur solidum parallelepipedum LR cujus basis est parallelogrammum LQ, et LM una ex insistentibus rectis. quoniam igitur AB parallelogrammum parallelogrammo CD est aequale, erit ut basis AB ad
b. 7. 5. basim LQ, ita basis CD ad eandem LQ [b]. et quoniam solidum parallelepipedum AR sectum est plano LMEB oppositis planis AK, DR parallelo, erit ut AB basis ad basim LQ, ita solidum AE ad solidum
c. 25. 11. LR [c]. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum CR sectum est plano LF parallelo planis oppositis CP, BR, ut basis CD ad basim LQ, ita erit solidum CF ad solidum LR. sed ut basis AB ad basim LQ, ita ostensa fuit basis CD ad LQ basim. ut igitur solidum AE ad LR solidum, ita solidum CF ad solidum LR. est igitur soli-
d. 9. 5. dum AE solido CF aequale [d].

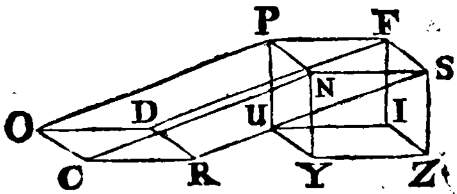



Sed sint in aequalibus basibus SB, CD solida parallelepipeda SE, CF, et eadem altitudine, sintque rectae insistentes ad rectos angulos basibus; positisque basibus SB, CD in eodem plano, ita ut in directum sint CL, LB, non sit angulus SLB aequalis angulo CLD; erit solidum SE aequale solido CF. producantur DL, TS et conveniant in A, et per B ducatur ipsi DA parallela BH; productae vero HB, OD in Q conveniant; et compleantur solida AE, LR. solidum igitur AE cujus basis est LE parallelogrammum, et oppositum ipsi AK, aequale
e 29. 11. est solido SE cujus basis est LE et oppositum ipsi SX [e]; in eadem enim sunt basi LE, et eadem altitudine, et eorum insistentes rectae lineae videlicet

delicet LA, LS, BH, BT; MG, MV, EK, EX in eiſdem ſunt rectis lineis AT, GX. quoniam vero parallelogrammum AB aequale eſt ipſi SB[f], etenim in eadem ſunt baſi LB, et in eiſdem parallelis LB, AT; f. 35. 1.
eſt autem baſis SB aequale baſi CD; erit baſis AB baſi CD aequalis. et eſt angulus ALB angulo CLD aequalis; erit igitur, ex prius oſtenſis, ſolidum AE aequale ſolido CF. ſolidum autem AE aequale oſtenſum eſt ſolido SE. Ergo et ſolidum SE ſolido CF eſt aequale.

Sed non ſint inſiſtentes rectae AG, HK, BE, LM; CN, RS, DF, OP ad rectos angulos ipſis AB, CD baſibus. Dico rurſus ſolidum AE aequale eſſe ſolido CF. ducantur[g] a punctis G, K, E, M; N, S, F, P; g. 11. 11.
ad ſubjectum planum perpendiculares GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FI, PU; et plano in punctis Q, T, V, X; Y, Z, I, U, occurrant, et jungantur QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, IU, UY. Quoniam igi-




tur GQ, KT ad rectos ſunt angulos eidem plano, erunt ipſae inter ſe parallelae[h]. et parallelae ſunt MG, EK; plana igitur MQ, ET h. 6. 11.
quorum unum tranſit per MG, GQ, et alterum per EK, KT quae ipſis parallelae ſunt et non in eodem plano, ſunt inter ſe parallela[i]. ea- i. 15. 11
dem ratione, et plana MV, GT inter ſe parallela ſunt. ſolidum igitur QE eſt parallelepipedum. ſimiliter oſtendetur ſolidum YF parallelepipedum eſſe. eſt autem, ex praemiſſis, ſolidum EQ aequale ſolido FY, in aequalibus enim ſunt baſibus MK, PS, et eadem altitudine, et eorum rectae inſiſtentes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed EQ ſolidum ſolido AE eſt aequale[k]; ſolidum vero FY aequale eſt ſolido CF[k]. ſi- k. 29. aut 30. 11.



quidem

quidem in eadem sunt basi, et eadem altitudine. Ergo et solidum AE solido CF aequale erit. Solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

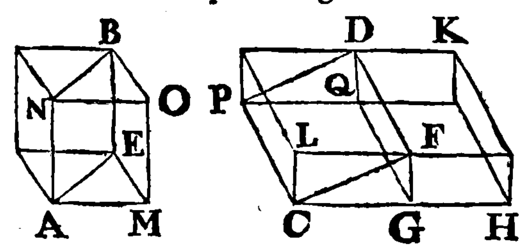
## PROP. XXXII. THEOR.

**Solida parallelepipeda quae eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.**

Sint solida parallelepipeda AB, CD quae eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse ut bases, hoc est ut AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad CD solidum.

Applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE aequale FH, ita ut angulus FGH aequalis sit angulo LCG [a]; et compleatur solidum parallelepipedum GK cujus basis sit FH, et una ex rectis insistentibus sit FD.

a. Cor. 45. 1.




b. 31. 11. solidum igitur AB solido GK est aequale [b], in aequalibus enim sunt basibus AE, FH, et eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipedum CK plano DG secatur oppositis planis parallelo, erit ut HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum [c]. atque est basis quidem FH basi AE aequalis, solidum vero GK aequale solido AB. est igitur et ut AE basis ad CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda &c. Q. E. D.

a. 25. 11.

Cor. Hinc prismata quorum bases sunt triangula, et quae eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases.

Habeant enim prismata quorum bases sunt triangula AEM, CFG, ipsisque opposita NBO, PDQ eandem altitudinem; et compleantur parallelogramma AE, CF, et solida parallelepipeda AB, CD, in quorum

primo

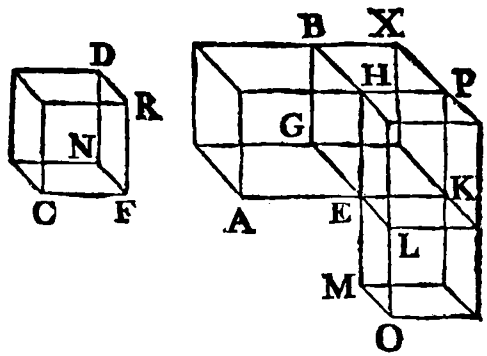
primo ſit MO una ex rectis inſiſtentibus, GQ vero in altero. Quoniam igitur ſolida parallelepipeda AB, CD eandem habent altitudinem, erunt ea inter ſe ut baſis AE ad baſim CF; quare priſmata quae ipſorum ſunt dimidia [d] ſunt inter ſe ut baſis AE ad CF baſim, hoc eſt ut triangulum AEM ad triangulum CFG. d. 28. 11.

## PROP. XXXIII. THEOR.

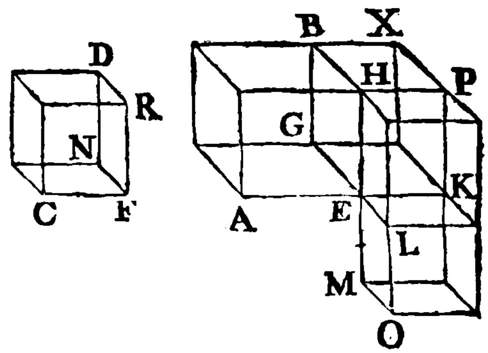
SIMILIA ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Sint ſimilia ſolida parallelepipeda AB, CD; latus autem AE homologum ſit lateri CF. Dico ſolidum AB ad CD ſolidum triplicatam rationem habere ejus quam habet AE ad CF.

Producantur enim EK, EL, EM in directum ipſis AE, GE, HE; et ipſi quidem CF aequalis ponatur EK, ipſi vero FN aequalis EL; et adhuc ipſi FR aequalis EM; et KL parallelogrammum, et KO ſolidum compleantur. quoniam igitur duae KE, EL duabus CF, FN aequales ſunt; ſed et angulus KEL angulo CFN eſt aequalis, quia et angulus AEG ipſi CFN aequalis eſt ob ſimilitudinem ſolidorum AB, CD; erit et KL parallelogrammum ſimile et aequale parallelogrammo CN. eadem ratione et parallelogrammum MK aequale eſt et ſimile parallelogrammo CR, et adhuc parallelogrammum OE ipſi FD parallelogrammo. tria igitur parallelogramma ſolidi KO tribus parallelogrammis



lelogrammis solidi CD aequalia et similia sunt. sed tria tribus op-
a. 24. 11. positis aequalia sunt et similia [a]. solidum igitur KO aequale est et si-
b. C. 11. mile solido CD [b]. compleatur GK parallelogrammum, et a basibus quidem GK, KL parallelogrammis, altitudine vero eadem cum ipso AB, solida compleantur EX, LP ita scilicet ut recta EH sit una ex earum rectis insistentibus. et quoniam ob similitudinem solidorum AB, CD, et permutando, est ut AE ad CF, ita EG ad FN, et EH ad FR; aequalis autem FC ipsi EK, et FN ipsi EL, et FR ipsi EM; erit igitur ut AE ad EK, ita EG ad EL, et HE ad EM. sed ut AE quidem ad
c. 1. 6. EK, ita [c] AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; ut autem GE ad EL, ita GK ad KL; et ut HE ad EM, ita PE ad KM. et ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, et PE ad KM. sed ut AG quidem ad GK, ita AB soli-
d. 25. 11. dum ad solidum EX [d]; ut autem GK ad KL, ita solidum EX ad PL solidum; et ut PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. et ut igitur solidum AB ad solidum EX, ita EX ad PL, et PL ad KO. si autem sint quatuor magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam. ergo et AB solidum ad solidum KO triplicatam habet rationem ejus, quam AB ad EX. sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, et AE recta linea ad ipsam EK. quare et AB solidum ad solidum KO triplicatam rationem habebit ejus, quam AE habet ad EK. aequale autem est solidum KO solido CD, et recta linea EK rectae CF est aequalis. Ergo et AB solidum ad solidum CD triplicatam habet




bet

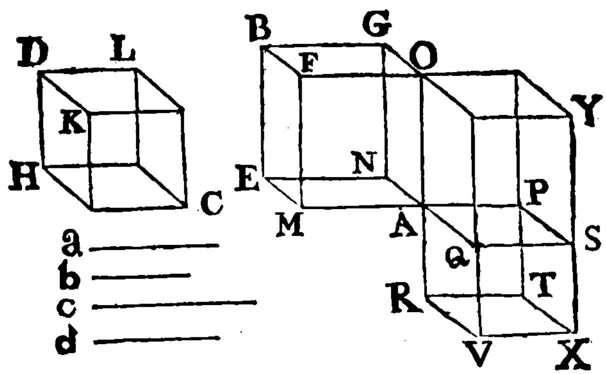
bet rationem ejus, quam ipſius latus homologum AE habet ad homologum latus CF. Q. E. D.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quatuor rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum quod fit à prima ad ſolidum quod à ſecunda, ſimile et ſimiliter deſcriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam prima ad ſecundam[e]. e. 11. Def. 5.

## PROP. D. THEOR.

**Solida parallelepipeda quae continentur parallelogrammis quae inter ſe ſunt aequiangula, ſingula ſingulis, hoc eſt quorum anguli ſolidi ſunt inter ſe aequales; habent rationem inter ſe eandem ei quae compoſita eſt ex laterum rationibus.**

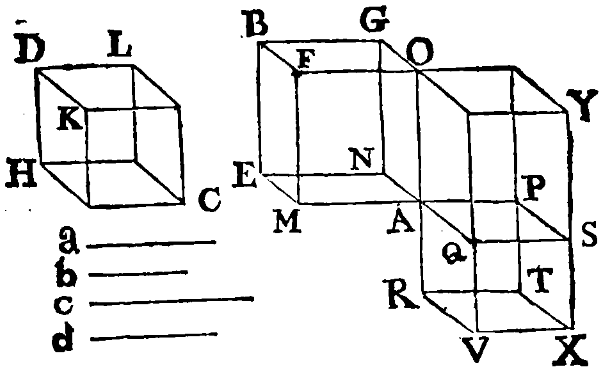
Sint ſolida parallelepipeda AB, CD, quorum AB continetur parallelogrammis AE, AF, AG, quae aequiangula ſunt, ſingula ſingulis, pa-




rallelogrammis CH, CK, CL quibus continetur ſolidum CD. erit ratio quam habet ſolidum AB ad ſolidum CD eadem ei quae compoſita eſt

ex

ex rationibus laterum AM ad DL, AN ad DK, et AO ad DH. producantur enim MA, NA, OA ad P, Q, R, ita ut AP aequalis ſit ipſi DL, AQ ipſi DK, et AR ipſi DH; et compleatur ſolidum parallelepipedum AX contentum ſc. parallelogrammis AS, AT, AV ipſis CH, CK, CL ſimilibus et aequalibus, ſingula ſingulis. ſolidum igitur AX
a. C. 11. ſolido CD eſt aequale[a]. compleatur etiam ſolidum AY cujus baſis eſt AS, una vero ex rectis inſiſtentibus eſt AO. exponatur autem recta quaevis a, et ut MA ad AP, ita fiat a ad rectam b; ut vero NA ad AQ, ita fiat b ad c; et ut OA ad AR, ita fiat c ad d. quoniam igi-




tur AE parallelogrammum aequiangulum eſt ipſi AS, erit AE ad AS, ut recta a ad ipſam c; hoc enim in 23. 6. oſtenſum eſt. ſolida vero AB, AY quae inter plana parallela BOY, EAS conſtituuntur, eadem ſunt altitudine. eſt igitur ſolidum AB ad ſolidum AY, ut baſis AE ad
b. 32. 11. baſim AS[b], hoc eſt ut recta a ad rectam c. ſolidum vero AY eſt ad
c. 25. 11. ſolidum AX, ut baſis OQ ad baſim QR[c], hoc eſt ut recta OA ad ipſam AR, hoc eſt ut recta c ad ipſam d. quoniam igitur ſolidum AB eſt ad ſolidum AY, ut recta a ad rectam c; ut vero ſolidum AY ad ſolidum AX, ita eſt recta c ad ipſam d; erit ex aequali ſolidum AB ad ſolidum AX ſive CD, ut recta a ad rectam d. ratio autem a ad d

compoſita

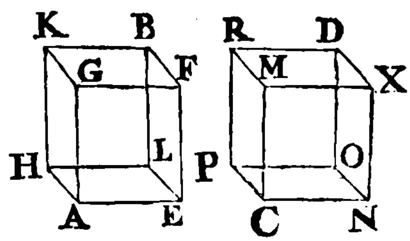
compoſita dicitur [d] ex rationibus a ad b, b ad c, et c ad d, quae eae- d. A. Def. 5.
dem ſunt, ſingulae ſingulis, rationibus laterum MA ad AP, NA ad AQ, et OA ad AR. latera autem AP, AQ, AR, aequalia ſunt lateribus DL, DK, DH, ſingula ſingulis. Ergo ſolidum AB habet ad ſolidum CD rationem eandem ei quae compoſita eſt ex rationibus laterum AM ad DL, AN ad DK, et AO ad DH. Q. E. D.

## PROP. XXXIV. THEOR.

**AEqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus; et quorum ſolidorum parallepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus, ea inter ſe ſunt aequalia.**

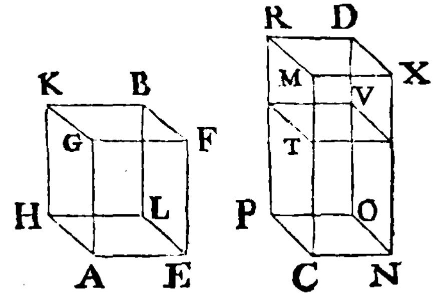
Sint aequalia ſolida parallelepipeda AB, CD; dico ipſorum baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus; hoc eſt ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem.

Sint enim primum inſiſtentes AG, EF; LB, HK; CM, NX, OD, PR ad rectos angulos baſibus ipſorum. Dico ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe CM ad AG. ſi igitur baſis EH baſi NP ſit aequalis, quoniam et AB ſolidum aequale eſt ſolido CD, erit et CM aequalis ipſi AG. ſi enim baſibus EH, NP aequalibus exiſtentibus non ſint AG, CM altitudines aequales, neque AB ſolidum ſolido CD aequale erit. ponitur autem aequale. non igitur inaequalis eſt altitudo CM altitudini AG; igitur eſt aequalis; ac propterea ut EH baſis ad baſim NP, ita erit CM ad AG.

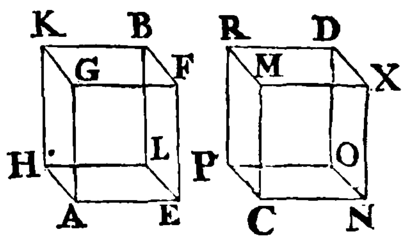



At vero non ſit baſis EH aequalis baſi NP, ſed EH ſit major. eſt autem AB ſolidum ſolido CD aequale; ergo major eſt CM ipsâ AG;

AG; si enim non, neque rursus forent solida AB, CD aequalia; ponuntur autem aequalia. itaque ponatur CT aequalis ipsi AG, et a basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum CV compleatur. Quoniam igitur solidum AB solido CD est aequale, erit ut
AB solidum ad solidum CV, ita CD
a. 7. 5. solidum ad solidum CV[a]. sed ut
AB solidum ad solidum CV, ita ba-
b. 32. 11. sis EH ad NP basim[b]; aeque alta
enim sunt AB, CV solida; ut autem
solidum CD ad ipsum CV, ita MP ba-
c. 25. 11. sis ad basim PT[c], et recta MC ad
d. 1. 6. ipsam CT[d]; et igitur ut basis EH
ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT aequalis AG; ergo et ut EH basis ad basim NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.

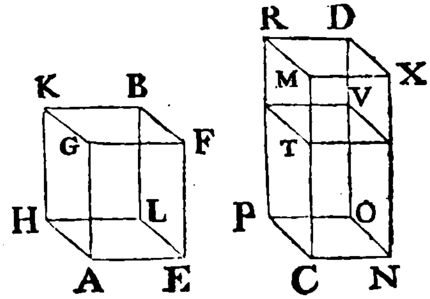



Rursus solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sint reciproce proportionales altitudinibus; sitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; dico solidum AB solido CD aequale esse. sint enim rursus insistentes ad rectos angulos basibus. et siquidem basis EH sit aequalis basi NP, estque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem; erit solidi CD altitudo al-
e. A. 5. titudini solidi AB aequalis[e]. solida autem parallelepipeda, quae sunt in
f. 31. 11. aequalibus basibus et eadem altitudine inter se aequalia sunt[f]; ergo solidum AB solido CD est aequale.



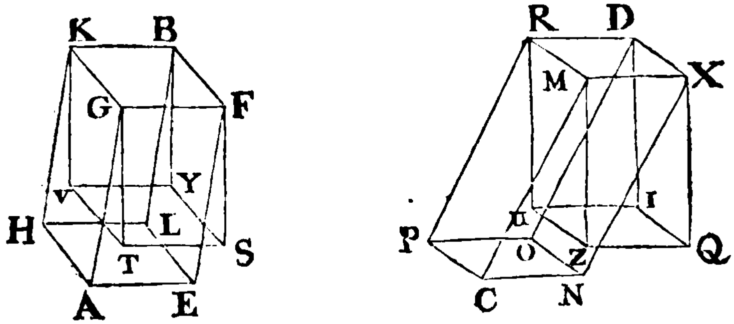

Sed non sit EH basis aequalis basi NP, et sit EH major. quoniam igitur

igitur eſt ut baſis EH ad baſim NP, ita CM altitudo ſolidi CD ad AG altitudinem ſolidi AB; erit CM major [c] ipſa AG. ponatur rurſus c. A. 5. ipſi AG aequalis CT, et ſimiliter ſolidum CV compleatur. itaque quoniam eſt ut EH baſis ad baſim NP, ita CM ad ipſam AG; aequalis autem eſt AG ipſi CT, erit ut baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. ſed ut baſis EH ad NP baſim, ita [b] AB ſolidum ad ſolidum CV; aeque b. 32. 11.



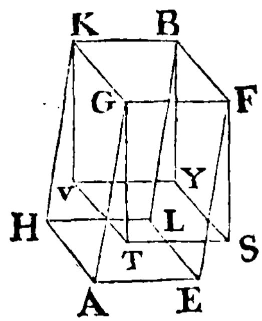

alta enim ſunt ſolida AB, CV; ut autem MC ad CT, ita et MP baſis ad baſim PT, et ſolidum CD ad ſolidum CV[c]. et igitur ut ſolidum c. 25. 11. AB ad ſolidum CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. utrumque igitur ſolidorum AB, CD ad ipſum CV eandem rationem habet; ſolidum igitur AB ſolido CD eſt aequale. Q. E. D.

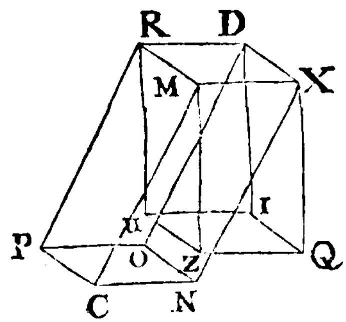
Non ſint autem ſtantes FE, BL, GA, KH; XN, DO, MC, RP ad rectos angulos baſibus ſolidorum; et a punctis F, B, K, G; X, D, R, M ad plana baſium EH, NP ducantur perpendiculares, quae planis




in punctis S, Y, V, T; Q, I, U, Z occurrant, et compleantur ſolida FV, XU, quae parallelepipeda erunt, ut in caſu ultimo Prop. 31. hujus oſtenſum fuit. Dico et ſic aequalibus exiſtentibus ſolidis AB, CD, ba-

ſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus, ſc. ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Quoniam enim ſolidum AB ſolido CD eſt aequale, ſolido autem AB aequale eſt ſoli-
g. 29. aut 30. 11. dum BT[g], in eadem namque ſunt baſi FK, et eadem altitudine; et ſolidum DC eſt aequale ſolido DZ[g], in eadem enim rurſus ſunt baſi XR, et eadem altitudine; erit et ſolidum BT ſolido DZ aequale. aequalium autem ſolidorum parallelepipedorum, quorum inſiſtentes baſibus ipſorum ſunt ad rectos angulos, baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus, ut oſtenſum fuit. eſt igitur ut baſis FK ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. atque eſt baſis quidem FK




baſi EH aequalis, baſis vero XR aequalis baſi NP. quare ut EH baſis ad baſim NP, ita eſt altitudo ſolidi DZ ad ſolidi BT altitudinem. eaedem autem ſunt altitudines ſolidorum DZ, DC, ut et ſolidorum BT, BA. eſt igitur ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi DC altitudo ad altitudinem ſolidi BA. Ergo ſolidorum parallelepipedorum AB, CD baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.

Rurſus, ſolidorum parallelepipedorum AB, CD baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus, ſitque ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinem ſolidi AB. Dico ſolidum AB ſolido CD aequale eſſe. Iiſdem namque conſtructis, quoniam ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinem ſolidi AB; et baſis quidem

dem EH eſt aequalis baſi FK; NP vero ipſi XR; erit ut FK baſis ad baſim XR, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. eaedem autem ſunt altitudines ſolidorum AB, BT, et ipſorum CD, DZ; eſt igitur ut FK baſis ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. quare ſolidorum BT, DZ parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus; ipſorum autem inſiſtentes ſunt ad rectos angulos baſibus; ergo, ut prius oſtenſum, BT ſolidum ſolido DZ eſt aequale. ſed ſolidum quidem BT aequale [g] eſt ſolido BA, ſolidum vero DZ eſt aequale ſolido [g] DC, ſiquidem in iiſdem ſunt baſibus, et eadem altitudine. Ergo et ſolidum AB ſolido CD eſt aequale. Q. E. D.

g. 29. aut 30. 11.

## PROP. XXXV. THEOR.

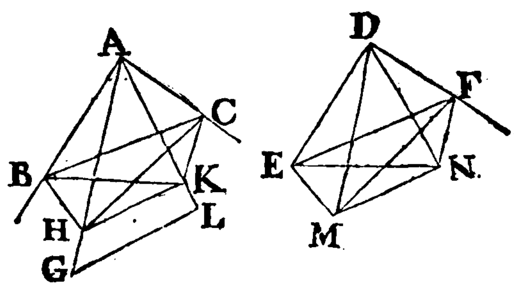
**SI ſint duo anguli plani aequales, et in ipſorum verticibus ſublimes rectae lineae inſiſtant, quae cum rectis lineis a principio poſitis angulos contineant aequales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quaevis puncta, atque ab ipſis ad plana in quibus ſunt anguli, perpendiculares ducantur; et a punctis quae a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectae lineae; hae cum ſublimibus aequales angulos continebunt.**

Sint duo anguli plani aequales BAC, EDF; et a punctis A, D ſublimes rectae lineae AG, DM conſtituantur, quae cum rectis lineis a principio poſitis aequales angulos contineant, alterum alteri; angulum quidem GAB aequalem angulo MDE, angulum vero GAC angulo MDF aequalem; et ſumantur in ipſis AG, DM quaevis puncta G, M, a quibus ad plana per BAC, EDF ducantur perpendiculares GL, MN

 occurrentes

occurrentes planis in punctis L, N; et LA, ND jungantur. Dico angulum GAL angulo MDN aequalem esse.

Ponatur ipsi DM aequalis AH, et per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum BAC; ergo et HK
a. 8. 11. ad planum BAC perpendicularis erit[a]. ducantur a punctis K, N ad rectas lineas AB, AC, DE, DF perpendiculares KB, KC, NE, NF; et HB, BC, ME, EF jungantur. Quoniam igitur HK ad rectos angulos est plano BAC, erit et planum HBK quod per ipsam HK tran-
b. 18. 11. sit ad rectos angulos plano BAC[b]; ducta autem est in plano BAC recta




AB ipsi BK planorum communi sectione ad rectos angulos; quare AB
c. 4. Def. 11. perpendicularis est ad planum HBK[c], et ad omnes rectas lineas quae
d. 3. Def. 11. in eo plano ipsam tangunt rectos faciet angulos[d]. tangit autem ipsam recta BH, in eo existens plano; rectus igitur est angulus ABH. eadem ratione et angulus DEM est rectus; ergo angulus ABH ipsi DEM est aequalis. est autem et HAB angulus aequalis angulo MDE. duo igitur triangula sunt HAB, MDE duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale, quod uni aequalium angulorum subtenditur, videlicet HA ipsi DM; ergo et reli-
e. 26. 1. qua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri[e]. quare

AB

AB eſt aequalis DE. ſimiliter, junctis HC, MF demonſtrabimus et AC ipſi DF aequalem eſſe. Quoniam igitur AB quidem eſt aequalis DE, AC vero ipſi DF, erunt duae BA, AC duabus ED, DF aequales; ſed et angulus BAC angulo EDF eſt aequalis; baſis igitur BC baſi EF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales ſunt [f]. ergo angulus ABC angulo DEF eſt aequalis. eſt autem et rectus ABK aequalis recto DEN, quare et reliquus CBK reliquo FEN eſt aequalis. eadem ratione, et BCK angulus eſt aequalis angulo EFN. itaque duo ſunt triangula BCK, EFN duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale, quod eſt ad aequales angulos, videlicet BC ipſi EF; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia [e] habebunt. aequalis igitur eſt BK ipſi EN. eſt autem et AB ipſi DE aequalis; quare duae AB, BK duabus DE, EN aequales ſunt; et rectos continent angulos. baſis igitur AK eſt aequalis baſi DN. et cum AH ſit aequalis DM, erit et quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM aequale. ſed quadrato ex AH aequalia [g] ſunt quadrata ex AK, KH; etenim rectus eſt angulus AKH. quadrato autem ex DM aequalia [g] ſunt ex DN, NM quadrata, quia angulus DNM eſt rectus. quadrata igitur ex AK, KH quadratis ex DN, NM ſunt aequalia, quorum quadratum ex AK aequale eſt quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM eſt aequale; et ideo recta linea HK ipſi MN aequalis. et quoniam duae HA, AK duabus MD, DN aequales ſunt, altera alteri, et baſis HK baſi MN oſtenſa eſt aequalis, angulus HAK angulo MDN aequalis erit [h]. Q. E. D.

f. 4. 1.
e. 26. 1.
g. 47. 1.
h. 8. 1.

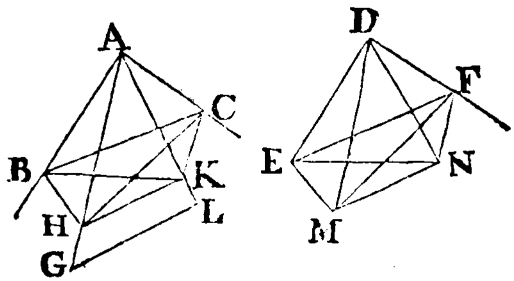
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo anguli plani aequales, ab ipſis autem conſtituantur ſublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio poſitis aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares quae ab ipſis ad plana in quibus ſunt primi anguli ducuntur, inter ſe aequales eſſe.

Corollarii

Corollarii alia Demonſtratio.

Sint duo anguli plani BAC, EDF inter ſe aequales, et rectae ſublimes et aequales AH, DM, cum ipſis BA, AC, et ED, DF aequales contineant angulos, alterum alteri, angulum ſcilicet HAB angulo MDE, et angulum HAC angulo MDF aequalem; et ad plana BAC, EDF ducantur perpendiculares HK, MN; erit HK ipſi MN aequalis.

Quoniam enim angulus ſolidus ad A contentus eſt tribus angulis planis BAC, BAH, HAC qui, ſinguli ſingulis, ſunt aequales tribus an-




gulis planis EDF, EDM, MDF quibus continetur angulus ſolidus ad D; erunt anguli ſolidi ad A et D inter ſe aequales, et ſibi mutuo congruent; ſcilicet ſi planus angulus BAC applicetur plano angulo EDF, congruet recta AH rectae DM, ut oſtenſum fuit in Prop. B. hujus Libri. et quoniam AH aequalis eſt ipſi DM, punctum H congruet puncto
i. 13. 11. M. quare perpendicularis HK ad planum BAC congruet [i] perpendiculari MN ad planum EDF, quia haec plana ſibi mutuo congruunt. aequalis igitur eſt HK rectae MN. Q. E. D.

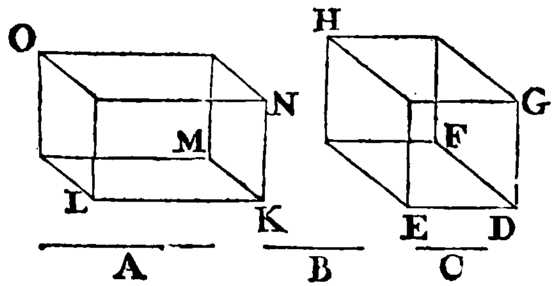
PROP. XXXVI.

## PROP. XXXVI. THEOR.

SI tres rectae lineae proportionales sint, solidum parallelepipedum quod a tribus fit, aequale est solido parallelepipedo quod fit a media, aequilatero quidem, cujusque unus angulus solidus continetur tribus angulis planis, aequalibus planis angulis quibus unus solidus angulus antedicti solidi continetur, singuli singulis.

Sint tres rectae lineae proportionales A, B, C, sit nempe A ad B, ut B ad C. Dico solidum quod fit ex ipsis A, B, C, aequale esse solido quod fit ex B, aequilatero quidem, aequiangulo autem antedicto.

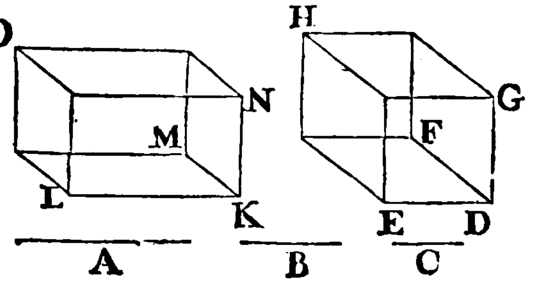
Exponatur solidus angulus ad D contentus tribus planis angulis EDF, FDG, GDE; et ipsi quidem B ponatur aequalis unaquaeque ipsarum ED, DF, DG, et solidum parallelepipedum DH compleatur. ipsi vero A ponatur aequalis recta LK, et ad rectam lineam LK, et ad punctum in ipsa K, constituatur [a] angulus solidus contentus planis angulis LKM, MKN, NKL, ipsis EDF, FDG, GDE aequalibus singuli singulis; et ponatur ipsi quidem B aequalis recta KN, ipsi vero C aequalis KM; et compleatur solidum parallelepipedum KO. Quoniam igitur est ut A ad B, ita B ad C, aequalis autem est A ipsi LK, et B utrique ipsarum DE, DF, et C ipsi KM; erit ut LK ad ED, ita DF ad KM. igitur circum aequales angulos latera sunt reciproce proportionalia; ergo parallelogrammum LM parallelogrammo EF est aequale [b]. et quoniam duo anguli plani aequales sunt EDF, LKM,




a. 26. 11.

b. 14. 6.

LKM, et in ipſis ſublimes rectae conſtituuntur DG, KN aequales inter ſe, et cum rectis lineis a principio poſitis aequales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares quae a punctis G, N ad plana EDF, LKM ducuntur, inter ſe ae-
c. Cor. 35. 11. quales[c]. Ergo ſolida KO, DH eadem ſunt altitudine. quae vero in aequalibus ba-




ſibus ſunt ſolida parallelepipeda, et eadem altitudine, inter ſe ſunt ae-
d. 31. 11. qualia[d]. Ergo ſolidum KO aequale eſt ſolido DH. atque eſt ſolidum quidem KO quod fit a tribus A, B, C; ſolidum vero DH quod fit ex B. ſi igitur tres rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. XXXVII. THEOR.

SI quatuor rectae lineae proportionales ſint; et quae ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia et ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. et ſi qui ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia et ſimiliter deſcripta proportionalia ſint; et ipſae rectae lineae proportionales erunt.

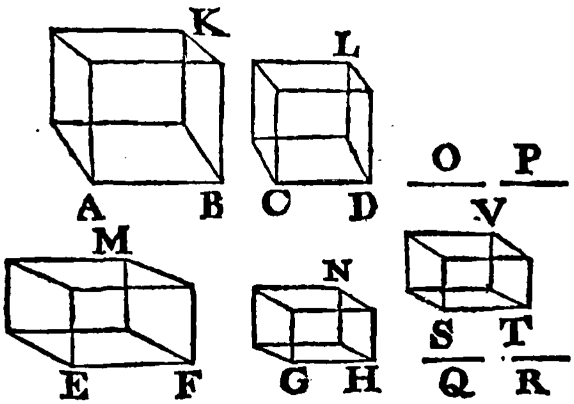
Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, EF, GH, ſit ſc. ut AB ad CD, ita EF ad GH; et deſcribantur ab ipſis ſimilia et ſimiliter poſita ſolida parallelepipeda AK, CL, EM, GN. Dico ut AK ad CL, ita eſſe EM ad GN.

a. 11. 6. Fiant enim deinceps proportionales [a] AB, CD, O, P; ut et EF, GH, Q, R. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita EF ad GH; erit
b. 11. 5. et CD ad O, ut GH ad Q; et O ad P, ut Q ad R[b]; ergo ex ae-
c. 22. 5. quali, eſt AB ad P, ut EF ad R[c]. ſed ut AB ad P, ita eſt ſolidum AK

AK ad ſolidum CL[d]; et ut EF ad R, ita eſt ſolidum EM ad ſoli- d. Cor. 33. 11.
dum GN[d]. ut igitur [b] ſolidum AK ad ſolidum CL, ita eſt ſolidum b. 11. 5.
EM ad GN ſolidum.

Sed ſit ut ſolidum AK ad ſolidum CL, ita EM ſolidum ad ſolidum GN. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita eſſe rectam EF ad ipſam GH.

Fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad ST, et ab ipſa ST deſcriba-
tur [c] ſolidum parallelepipedum SV ſimile, et ſimiliter poſitum alterutri ip- e. 27. 11.
ſorum EM, GN. Quoniam igitur ut AB ad CD, ita eſt EF ad ST, et



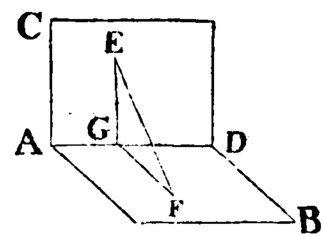

deſcripta ſunt ab ipſis quidem AB, CD ſimilia et ſimiliter poſita parallelepipeda AK, CL; ab ipſis vero EF, ST, ſimilia et ſimiliter poſita parallelepipeda EM, SV; erit ut AK ad CL, ita EM ad SV. ponitur au-
tem et ut AK ad CL, ita EM ad GN. aequale [f] igitur eſt ſolidum f. 9. 5.
GN ſolido SV. eſt autem ipſi ſimile et ſimiliter poſitum; ergo plana quibus continentur ſimilia ſunt et aequalia, ipſorumque latera homologa GH, ST inter ſe aequalia erunt. Quoniam igitur ut AB ad CD, ita eſt EF ad ST; aequalis autem ST ipſi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. XXXVIII. THEOR.

" SI planum ad planum rectum ſit, et ab aliquo puncto
" eorum quae ſunt in uno plano, ad alterum planum
" perpendicularis ducatur; ea in planorum communem
" ſectionem cadet.

" Planum enim CD ad planum AB rectum ſit, communis autem
" eorum ſectio ſit AD, et in ipſo CD plano, quodvis punctum E ſu-
" matur. Dico perpendicularem quae a puncto E ad planum AB du-
" citur, cadere in ipſam AD.

" Non enim, ſed, ſi fieri poteſt, cadat extra, ut EF; et plano AB
" in puncto F occurrat; a puncto autem F ad DA in plano AB per-
a. 12. 1. " pendicularis ducatur FG[a], quae quidem
b. 4. Def. 11. " et plano CD ad angulos rectos erit[b]; et
" EG jungatur. Quoniam igitur FG plano
" CD eſt ad angulos rectos, tangit autem ip-
" ſam recta linea EG quae eſt in eodem CD
c. 3. Def. 11. " plano, erit angulus FGE rectus[c]. ſed et
" EF plano AB ad angulos rectos eſt; rectus igitur eſt angulus EFG.
" quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis ſunt aequales; quod
" eſt abſurdum. non igitur a puncto E ad AB planum perpendicula-
" ris ducta extra rectam lineam AD cadet; cadet igitur in ipſam AD.
" Si igitur planum &c. Q. E. D."

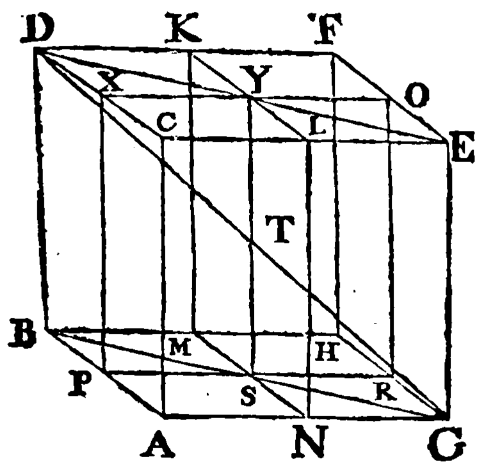



PROP. XXXIX.

## PROP. XXXIX. THEOR.

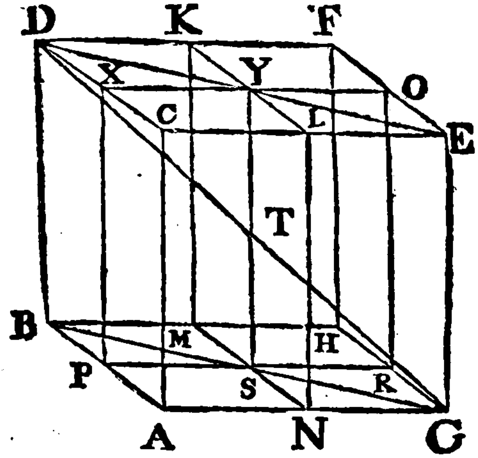
SI in ſolido parallelepipedo oppoſitorum planorum latera ſecentur bifariam, per ſectiones vero plana ducantur; communis planorum ſectio et ſolidi parallelepipedi diameter ſe mutuo bifariam ſecabunt.

In ſolido enim parallelepipedo AF, oppoſitorum planorum CF, AH latera bifariam ſecentur in punctis K, L, M, N; X, O, P, R; et jungantur KL, MN, XO, PR. et quoniam DK, CL aequales ſunt et parallelae, erunt KL, DC parallelae [a]. eadem ratione, parallelae ſunt MN, BA. eſt autem BA parallela ipſi DC; quoniam igitur utraque a. 33. 1.




ipſarum KL, BA parallela eſt ipſi DC, non in eodem cum ipſâ plano, erit KL parallela [b] ipſi BA. et quoniam utraque ipſarum KL, MN b. 9. 11. parallela eſt ipſi BA, non in eodem cum ipſâ plano, erit KL parallela [b] ipſi MN; quare KL, MN in uno ſunt plano. ſimiliter et XO, PR oſtendentur in uno eſſe plano. Communis autem ſectio planorum KN, XR ſit YS; et ſolidi parallelepipedi AF diameter ſit DG. Dico YS, DG ſibi mutuo occurrere, et ſeſe bifariam ſecare.

Jungantur enim DY, YE, BS, SG. Quoniam igitur DX parallela
c. 29. 1. eſt ipſi OE, alterni anguli DXY, YOE inter ſe aequales ſunt[c]; et quoniam DX quidem eſt aequalis OE, XY vero ipſi YO, et angulos aequales continent; erit baſis DY aequalis baſi YE, et reliqui anguli re-
d. 4. 1. liquis angulis aequales[d]; angulus igitur XYD eſt aequalis angulo OYE,
e 14. 1. et ob id recta linea eſt DYE[e]. eadem ratione, et BSG recta eſt; atque eſt BS aequalis SG. et quoniam CA ipſi DB aequalis eſt et paral-



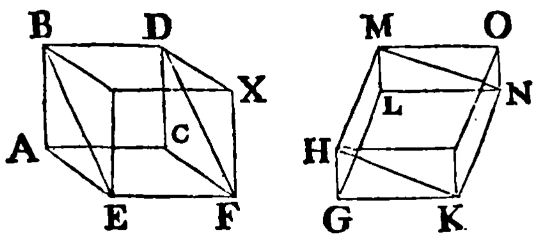

lela, et CA aequalis eſt et parallela ipſi EG; erit et DB ipſi EG ae-
b. 9. 11. qualis et parallela[b]. et ipſas conjungunt rectae lineae DE, BG; paral-
a. 33. 1. lela [a] igitur et aequalis eſt DE ipſi BG. et ſumpta ſunt in utraque ipſarum quaedam puncta D, Y, G, S, et junctae ſunt DG, YS. ergo DG, YS in uno ſunt plano. et manifeſtum eſt propterea ipſas ſibi mutuo occurrere; occurrant in T. et quoniam DE parallela eſt ipſi BG, erit et EDT angulus angulo BGT aequalis[c], alterni enim ſunt; eſt au-
f. 15. 1. tem et DTY angulus aequalis [f] ipſi GTS. duo igitur ſunt triangula DTY, GTS duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus

latus uni lateri aequale, quod uni aequalium angulorum ſubtenditur, videlicet DY ipſi GS; dimidia enim ſunt ipſarum DE, BG. ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt[g]. quare DT quidem eſt aequalis TG, YT vero ipſi TS. Si igitur in ſolido &c. Q. E. D. g. 26. 1.

PROP. XL. THEOR.

SI ſint duo priſmata triangularia aeque alta, quorum unum quidem baſim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, et parallelogrammum duplum ſit trianguli; aequalia erunt ipſa priſmata.

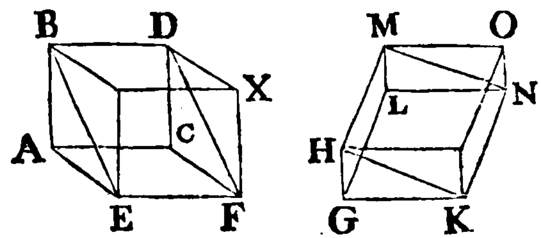
Sint priſmata aeque alta ABCDEF, GHKLMN, quorum primum continetur duobus triangulis ABE, CDF, et tribus parallelogrammis AD, DE, EC; alterum vero continetur duobus triangulis GHK, LMN, et tribus parallelogrammis LH, HN, NG; et unum quidem




baſim habeat parallelogrammum AF, alterum vero GHK triangulum, et duplum ſit AF parallelogrammum trianguli GHK. Dico priſma ABCDEF priſmati GHKLMN aequale eſſe.

Compleantur enim AX, GO ſolida, et quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK eſt duplum; eſt autem et HK parallelogrammum duplum [a] trianguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelo- a. 34. 1.
grammo

grammo HK aequale. quae vero in aequalibus ſunt baſibus ſolida pa-
b. 31. 11. rallelepipeda, et eadem altitudine, inter ſe aequalia [b] ſunt. aequale igitur eſt AX ſolidum ſolido GO. atque eſt ſolidi quidem AX dimi-




c. 28. 11. dium [c] ABCDEF priſma, ſolidi vero GO dimidium [c] eſt priſma GHKLMN. ergo ABCDEF priſma priſmati GHKLMN eſt aequale. Si igitur ſint duo priſmata &c. Q. E. D.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS

# ELEMENTORUM

## LIBER DUODECIMUS.

### LEMMA I.

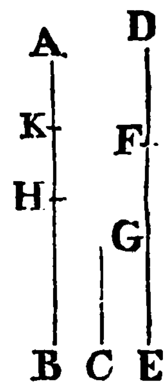
Necessarium quibusdam hujus Libri Propositionibus; est vero Propositio prima Libri decimi.

DUABUS magnitudinibus inaequalibus expositis, si a majore auferatur majus quam dimidium, et a reliquâ rursus auferatur majus quam dimidium; et hoc semper fiat; relinquetur tandem quaedam magnitudo quae minore magnitudine exposita minor erit.

Sint duae magnitudines inaequales AB, C quarum major AB. Dico si ab AB auferatur majus quam dimidium, et a reliqua rursus auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quae magnitudine C minor erit.

Etenim

Etenim C multiplicata fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, et ſit DE ipſius quidem C multiplex, major autem quam AB; dividaturque DE in partes ipſi C aequales DF, FG, GE. et ab ipſa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipſa vero AH rurſus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc ſemper fiat quoad diviſiones quae ſunt in AB multitudine aequales fiant diviſionibus quae in DE; ſint igitur diviſiones AK, KH, HB diviſionibus DF, FG, GE multitudine aequales. et quoniam major eſt DE quam AB, et ablatum eſt ab ipſa quidem DE minus quam dimidium EG, ab ipſa vero AB majus quam dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA majus. rurſus quoniam major eſt GD quam HA, et ablatum eſt ab ipſa quidem GD dimidium GF; ab ipſa vero HA majus quam dimidium HK, reliquum FD reliquo AK majus erit. eſtque FD aequalis ipſi C; ergo C quam AK eſt major. minor igitur eſt AK quam C. Ergo ex magnitudine AB relicta eſt magnitudo AK expoſita minore magnitudine C minor. Q. E. D.



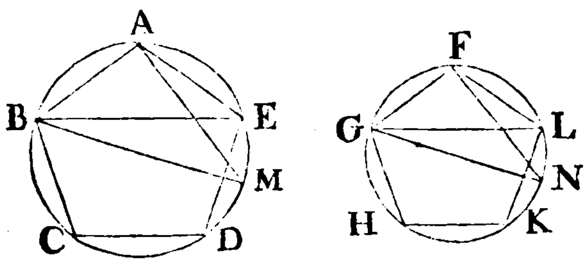

## PROP. I. THEOR.

SIMILIA polygona circulis inſcripta inter ſe ſunt ut quadrata ex diametris.

Sint circuli ABCDE, FGHKL, et in ipſis ſimilia polygona ABCDE, FGHKL; diametri autem circulorum ſint BM, GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita eſſe ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL.

Jungantur enim BE, AM, GL, FN. et quoniam polygonum ABCDE ſimile eſt polygono FGHKL, erit et angulus BAE angulo GFL

GFL aequalis[a], et ut BA ad AE, ita GF ad FL[a]. duo igitur trian- a. 1. Def. 6.
gula ſunt BAE, GFL unum angulum uni angulo aequalem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa aequales autem angulos latera proportionalia; quare triangulum ABE triangulo GFL aequiangulum eſt[b]; ac propterea angulus AEB aequalis eſt angulo FLG. ſed b. 6. 6.
angulus quidem AEB angulo AMB eſt aequalis[c], in eadem enim cir- c. 21. 3.
cumferentia conſiſtunt; angulus autem FLG aequalis eſt angulo FNG[c]; ergo et AMB angulus eſt aequalis angulo FNG. eſt autem et rectus




BAM aequalis recto GFN[d]; quare et reliquus reliquo aequalis. ae- d. 31. 3.
quiangulum igitur eſt triangulum ABM triangulo FGN. ergo ut BM ad GN, ita BA ad GF[e]; et duplicata ratio ipſius BM ad GN, ea- e. 4. 6.
dem erit[f] rationi duplicatae rationis BA ad GF. ſed rationis quidem f. 10. Def. 5.
BM ad GN, duplicata eſt ratio quadrati ex BM ad quadratum ex GN[g]; et 22. 5. g. 20. 6.
rationis vero BA ad GF duplicata eſt ratio polygoni ABCDE ad polygonum FGHKL[g]; et igitur ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL. Quare ſimilia polygona &c. Q. E. D.

## PROP. II. THEOR.

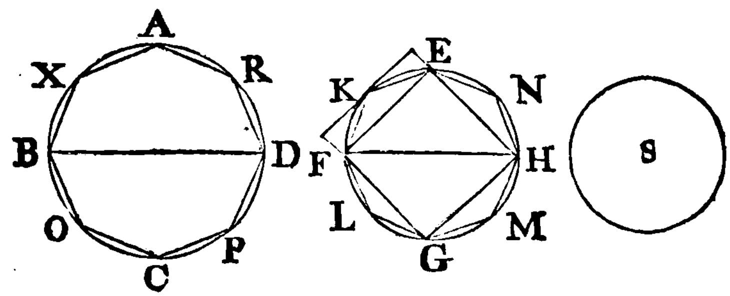
**CIRCULI inter ſe ſunt ut quadrata ex diametris.**

Sint circuli ABCD, EFGH, diametri autem ipſorum ſint BD, FH.

 Dico

Dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum.

Si enim non ita sit, erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus*. sit primum ad minus quod sit S. et in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EFGH; quoniam si per puncta E, F, G, H contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati




a 41. 1. dimidium quadratum EFGH [a]; circulus autem minor est quadrato circa circulum descripto; ergo quadratum EFGH majus est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiae EF, FG, GH, HE in punctis K, L, M, N, et EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit; quoniam si per puncta K, L, M, N contingentes circulum ducamus, et parallelogramma quae sunt super rectis lineis EF, FG, GH, HE compleamus; erit unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE dimidium parallelo-

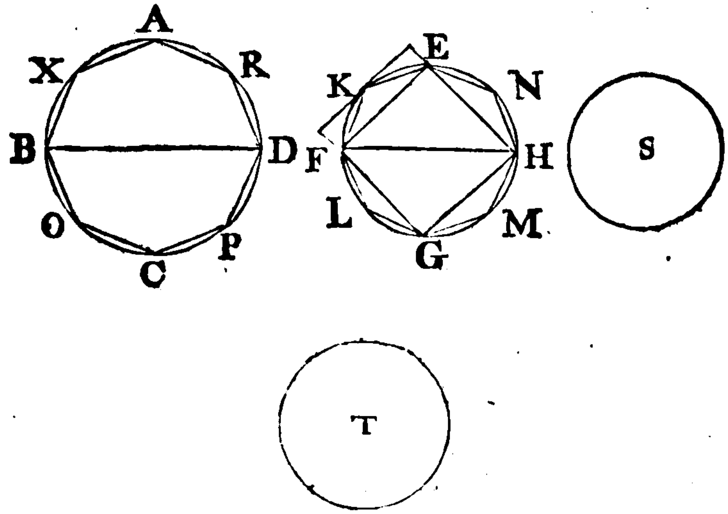
* Est enim quadratum quoddam aequale circulo ABCD; sit latus ejusdem P. potest igitur esse quarta proportionalis tribus BD, FH et P, quae sit Q. Ergo quadrata ex hisce proportionalia sunt; hoc est, quadratis ex BD, FH et circulo ABCD potest existere quartum proportionale, sit hoc S. et similiter quaedam in sequentibus quibusdam Propositionibus, intelligenda sunt.

grammi

grammi quod ad ipſum eſt[a]. ſed ſegmentum minus eſt parallelogram- a. 41. 1.
mo. quare unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit. Haſce igitur circumferentias bifariam ſecantes, et jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quaedam circuli ſegmenta, quae minora erunt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. etenim oſtenſum eſt in praecedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inaequalibus expoſitis, ſi a majori auferatur majus quam dimidium, et a reliqua, rurſus majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem aliquam, quae minori magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, quae minora ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. Ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. eſt igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN
polygonum[b]. ſed et ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita b. 1. 12.
ABCD circulus ad ſpatium S. ergo et ut circulus ABCD ad ſpatium
S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum[c]. c. 11. 5.
major autem eſt circulus ABCD eo quod in ipſo eſt polygono; quare
et ſpatium S majus eſt polygono EKFLGMHN[d]. ſed et minus, d. 14. 5.
ut prius oſtenſum; quod fieri non poteſt. non igitur eſt ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH. ſimiliter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulus EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. Dico etiam neque eſſe ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpatium majus circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium T. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex

 BD,

BD, ita ſpatium T ad ABCD circulum. erit autem ut ſpatium † T ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad ſpatium quoddam, quod d. 14. 5. quidem minus erit circulo ABCD [d], quia ſpatium T majus eſt EFGH circulo. ergo et ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD; quod fieri non poſſe




oſtenſum eſt. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpatium aliquod majus EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum ‡ EFGH. Circuli igitur ſunt ut quadrata ex diametris. Q. E. D.

† Oſtenſum enim eſt in praecedenti Nota ad poſſe exiſtere quartum proportionale quadratis ex BD, FH et circulo ABCD quod dicebatur S. et ſimiliter ſpatio T, circuliſque ABCD, EFGH poteſt eſſe quartum proportionale. eodem modo in ſequentibus quibuſdam Propoſitionibus ſimilia intelligenda ſunt.

‡ Etenim quoniam poſſit exiſtere quarta proportionalis quadratis ex BD, FH et circulo ABCD, quae quidem neque minor neque major poteſt eſſe circulo EFGH. ut oſtenſum fuit; igitur circulo huic neceſſario aequalis erit.

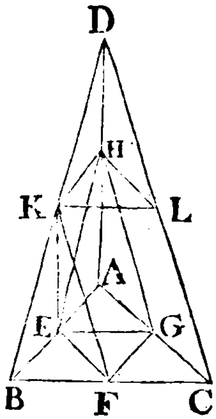
PROP. III.

## PROP. III. THEOR.

**Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides aequales et similes inter se, quae triangulares bases habent, similesque toti; et in duo prismata aequalia, quae quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.**

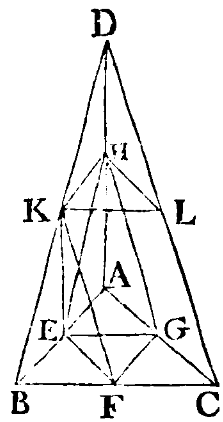
Sit pyramis cujus basis quidem ABC triangulum, vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides aequales et similes inter se, triangulares bases habentes, et similes toti; et in duo prismata aequalia; et duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora.

Secentur enim AB, BC, CA, AD, DB, DC bifariam in punctis E, F, G, H, K, L, et EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG jungantur. Quoniam igitur AE quidem est aequalis EB, AH vero ipsi HD, erit HE ipsi DB parallela [a]. eadem ratione et HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK; quare HK est aequalis EB [b]. sed EB ipsi AE est aequalis; ergo et AE ipsi HK aequalis erit. est autem et AH aequalis HD; duae igitur EA, AH duabus KH, HD aequales sunt, altera alteri; et angulus EAH aequalis angulo KHD [c]; basis igitur EH basi KD est aequalis, et triangulum AEH aequale [d] et simile triangulo HKD. eadem ratione et triangulum AGH triangulo HLD aequale est et simile. et quoniam duae rectae lineae EH, HG sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus KD, DL parallelae sunt, non autem in eodem plano,




a. 2. 6.
b. 34. 1.
c. 29. 1.
d. 4. 1.

e. 10. 11. plano, aequales angulos continebunt[e]; ergo angulus EHG eſt aequalis angulo KDL. rurſus quoniam duae rectae lineae EH, HG duabus rectis lineis KD, DL aequales ſunt altera alteri, et angulus EHG eſt d. 4. 1. aequalis angulo KDL; erit baſis EG baſi KL aequalis[d], et triangulum EHG triangulo KDL aequale [d] erit et ſimile. eadem ratione et AEG triangulum eſt aequale et ſimile triangulo HKL. Quare pyramis cujus baſis quidem eſt AEG triangulum, vertex autem punctum H, aequalis et ſimilis eſt pyramidi cujus baſis eſt triangulum KHL, et vertex f. C. 11. D punctum[f]. et quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipſi AB, parallela ducta eſt HK, erit triangulum ADB triangulo HDK aequiangulum, et propterea latera habent proportionalia[g] (g. 4. 6.). ſimile igitur eſt ADB triangulum triangulo HDK. et eadem ratione triangulum quidem DBC ſimile eſt triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo HDL; et adhuc triangulum ABC triangulo AEG. oſtenſum autem eſt triangulum AEG ſimile triangulo HKL, ergo et ABC triangulum triangulo h. 21. 6. HKL ſimile erit[h]. et pyramis igitur cujus baſis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis triangulum HKL, et vertex punctum




i. B. 11. et 11. Def. 11. D[i]. ſed pyramis cujus baſis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, oſtenſa eſt ſimilis pyramidi cujus baſis triangulum AEG, et vertex H punctum. quare et pyramis cujus baſis triangulum ABC, et vertex punctum D, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis AEG triangulum, et vertex punctum H. utraque igitur ipſarum AEGH, HKLD pyramidum ſimilis eſt toti pyramidi ABCD. et quoniam BF eſt aequalis k. 41. 1. FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC[k]. et quoniam ſi duo priſmata aeque alta ſint, quorum unum quidem baſim habet

bet parallelogrammum, alterum vero triangulum, ſitque parallelogrammum duplum trianguli; ſunt ea priſmata inter ſe aequalia[l]; aequale l. 40. 11.
igitur erit priſma cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, et oppoſita ipſi recta linea KH, priſmati cujus baſis eſt triangulum GFC, et oppoſitum ipſi triangulum HKL; etenim aeque alta ſunt, quia ſunt inter plana parallela [m] ABC, HKL. et manifeſtum eſt utrumque ipſorum m. 15. 11.
priſmatum, et cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, oppoſita autem ipſi HK recta linea, et cujus baſis eſt GFC triangulum, et oppoſitum ipſi triangulum HKL, majus eſſe utrâque pyramidum, quarum baſes quidem AEG, HKL triangula, vertices autem puncta H, D; quoniam ſi jungamus EF rectam lineam, priſma quidem cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, et oppoſita ipſi recta linea KH, majus eſt pyramide cujus baſis EBF triangulum, vertex autem punctum K; ſed pyramis cujus baſis triangulum EBF, et vertex K punctum, eſt aequalis [f] f. C. 11.
pyramidi cujus baſis AEG triangulum, et vertex punctum H; aequalibus enim et ſimilibus planis continentur. quare et priſma cujus baſis parallelogrammum EBFG, oppoſita autem ipſi recta linea HK, majus eſt pyramide cujus baſis AEG triangulum et vertex punctum H. priſma vero cujus baſis parallelogrammum EBFG, et oppoſita ipſi recta linea HK eſt aequale priſmati cujus baſis GFC triangulum, et ipſi oppoſitum triangulum HKL; et pyramis cujus baſis triangulum AEG, vertex autem H punctum, eſt aequalis pyramidi cujus baſis HKL triangulum, et vertex punctum D. Ergo duo priſmata de quibus dictum eſt, ſunt majora duabus dictis pyramidibus quarum baſes triangula AEG, HKL, vertices autem H, D puncta. tota igitur pyramis cujus baſis ABC triangulum, vertex autem punctum D, diviſa eſt in duas pyramides aequales, et ſimiles inter ſe, et ſimiles toti; et in duo priſmata aequalia; ſuntque duo priſmata dimidio totius pyramidis majora. Q. E. D.

PROP. IV.

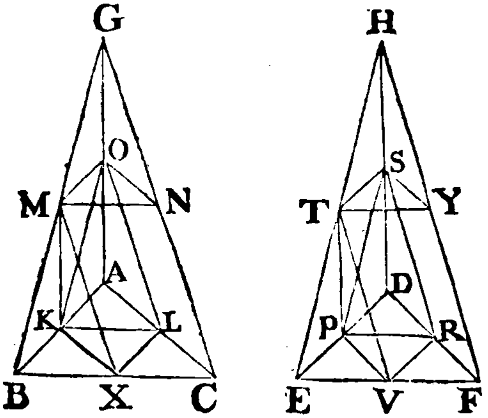
## PROP. IV. THEOR.

SI ſint duae pyramides aeque altae, quae triangulares baſes habent, dividatur autem utraque ipſarum, et in duas pyramides aequales inter ſe, ſimileſque toti, et in duo priſmata aequalia; et factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc ſemper fiat. erit ut unius pyramidis baſis ad baſim alterius, ita et in una pyramide priſmata omnia ad priſmata omnia in altera pyramide multitudine aequalia.

Sint duae pyramides aeque altae quae triangulares baſes habent ABC, DEF, vertices autem ſint puncta G, H; et dividatur utraque ipſarum in duas pyramides aequales inter ſe ſimileſque toti, et in duo priſmata aequalia; et factarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur; atque hoc ſemper fiat. Dico ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe priſmata omnia quae ſunt in pyramide ABCG ad priſmata omnia quae in pyramide DEFH multitudine aequalia.

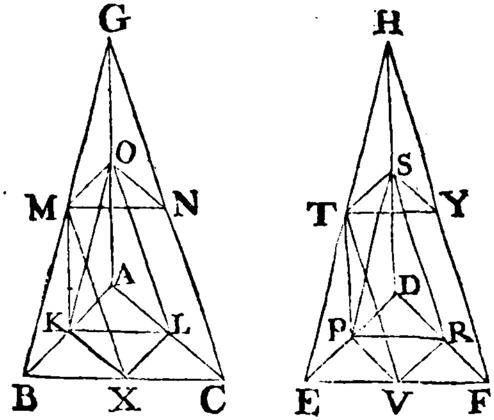
Eadem fiat conſtructio quae in praecedente, et quoniam BX qui-
a. 2. 6. dem eſt aequalis XC, AL vero ipſi LC; erit XL ipſi AB parallela [a], et triangulum ABC triangulo LXC ſimile. eadem ratione et triangulum DEF ſimile eſt triangulo RVF. et quoniam BC quidem eſt dupla CX, EF vero dupla ipſius FV, erit ut BC ad CX, ita EF ad FV. et deſcripta ſunt ab ipſis BC, CX ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea ABC, LXC; ab ipſis vero EF, FV ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea DEF, RVF. eſt igitur ut ABC triangulum ad triangulum LXC, ita triangu-
b. 22. 6. lum DEF ad RVF triangulum [b]; et permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RVF. Quo-
c. 15. 11. niam vero parallela ſunt plana ABC, OMN [c], ut et DEF, STY [c], perpendiculares

pendiculares a punctis G, H ad baſes ABC, DEF, quae ſunt inter ſe aequales, a planis OMN, STY biſariam ſecabuntur[d], quia et rectae GC, d. 17. 11.
HF biſariam ab iiſdem planis ſectae-ſunt in N, Y punctis. aeque alta igitur ſunt priſmata LXC, OMN; RVF, STY; et propterea ut baſis LXC ad baſim RVF, hoc eſt ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita eſt priſma cujus baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN ad priſma cujus baſis RVF triangulum, et oppoſitum ipſi STY[e]. e. Cor. 32. 11;
et quoniam duo priſmata quae in pyramide ABCG inter ſe aequalia ſunt, ſed et quae in pyramide DEFH duo priſmata ſunt inter ſe aequalia,




erit ut priſma cujus baſis parallelogrammum KBXL, oppoſita vero ipſi recta linea MO, ad priſma cujus baſis LXC triangulum, et oppoſitum ipſi OMN; ita [f] priſma cujus baſis parallelogrammum PEVR, et op- f. 7. 5.
poſita recta linea TS, ad priſma cujus baſis RVF triangulum, oppoſitum vero ipſi STY. quare componendo, ut priſmata KBXLMO, LXCOMN ad priſma LXCOMN; ita priſmata PEVRTS, RVFSTY ad priſma RVFSTY. et permutando, ut priſmata KBXLMO, LXCOMN ad priſmata PEVRTS, RVFSTY; ita priſma LXCOMN ad priſma RVFSTY. ut autem priſma LXCOMN ad priſma RVFSTY, ita oſ-

tensa est ABC basis ad basim DEF. ergo et ut basis ABC ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide DEFH. similiter autem et si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG, STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quae in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis




ABC ad DEF basim; et ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide DEFH; et quae in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide STYH; et quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur et in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, et DPRS, et omnium omnino multitudine aequalium. Q. E. D.

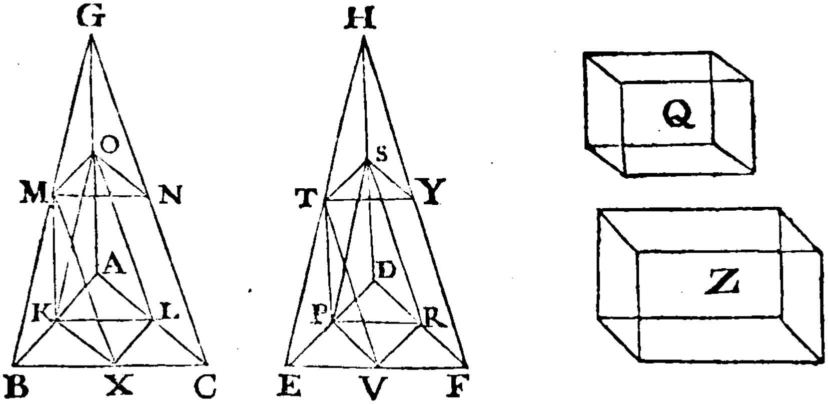
## PROP. V. THEOR.

PYRAMIDES quae eadem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC,

ABC, DEF, vertices autem puncta G, H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem.

Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus*. sit primum ad solidum minus, sitque Q. et dividatur pyramis DEFH in duas pyramides aequales inter se, et similes toti, et in duo prismata aequalia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis majora [a]. et a. 3. 12.
rursus pyramides ex divisione factae similiter dividantur, atque hoc semper fiat quoad relinquantur quaedam pyramides in pyramide DEFH,

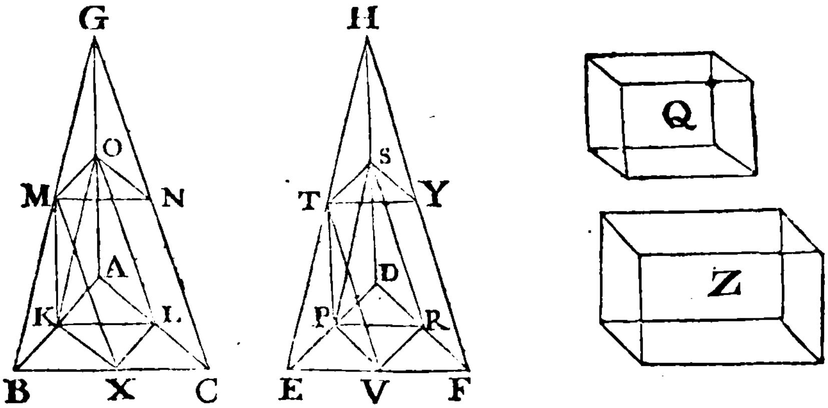



quae sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Q superat. itaque sumantur, et sint exempli causa, pyramides DPRS, STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Q majora. dividatur etiam ABCD pyramis similiter et in totidem partes atque pyramis DEFH. ergo ut ABC basis ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG prismata ad prismata quae in pyramide DEFH [b]. sed ut ABC b. 4. 12.
basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Q; et igitur ut ABCG pyramis ad solidum Q, ita quae in pyramide ABCG prismata ad prismata quae in pyramide DEFH. major autem est pyramis

* Hoc eodem modo ostendi potest quo simile ostensum est in Prop. 2. ad notam *.

 ABCG

ABCG prismatibus quae in ipsa sunt; ergo et solidum Q prismatibus
c. 14. 5. quae sunt in pyramide DEFH est majus[c]. sed et minus, quod fieri non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico etiam neque esse ut ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum Z. erit igitur invertendo, ut DEF basis ad basim




ABC, ita solidum Z ad ABCG pyramidem. erit autem ut solidum Z ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad aliquod solidum †, quod quidem minus erit pyramide ABCG[c], quia solidum Z majus est pyramide DEFH. et ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. Quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quae &c. Q. E. D.

† Hoc eodem modo ostendetur quo simile in Prop. 2. ad notam †.

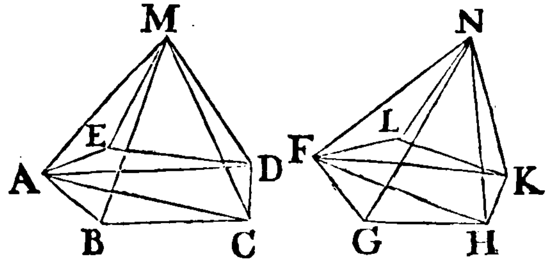
PROP. VI.

## PROP. VI. THEOR.

PYRAMIDES quae eadem ſunt altitudine et polygonas baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint eadem altitudine pyramides, polygonas habentes baſes ABCDE, FGHKL, vertices autem M, N puncta. Dico ut ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſſe ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLN.

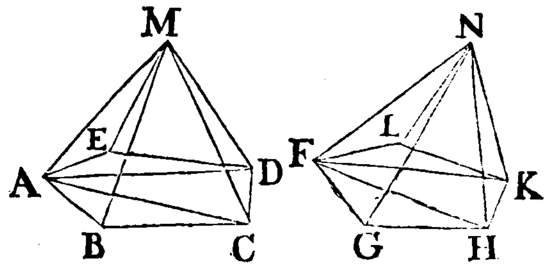
Dividatur enim baſis quidem ABCDE in triangula ABC, ACD, ADE; baſis vero FGHKL in triangula FGH, FHK, FKL. et ſuper unoquoque triangulo intelligantur pyramides quarum quae ſuper baſibus ABC, ACD, ADE vertex communis ſit M punctum, reliquarum




vero communis vertex ſit punctum N. Quoniam igitur eſt ut triangulum ABC ad triangulum FGH, ita ABCM pyramis ad pyramidem FGHN[a]; ut vero triangulum ACD ad triangulum FGH, ita ACDM a. 5. 12.
pyramis ad pyramidem FGHN; et adhuc ut ADE triangulum ad triangulum FGH, ita pyramis ADEM ad pyramidem FGHN; erit ut omnes antecedentes primi ad communem conſequentem, ita omnes antecedentes reliqui ad conſequentem communem[b]; hoc eſt erit ut baſis b. 2. Cor. 24. 5.
ABCDE ad baſim FGH, ita pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHN. eademque ratione ut baſis FGHKL ad baſim FGH, ita erit pyramis FGHKLN ad pyramidem FGHN, et invertendo. Quoniam igitur ut

baſis

basis ABCDE ad basim FGH, ita pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHN; ut vero FGH basis ad basim FGHKL, ita FGHN pyramis




c. 22. 5. ad pyramidem FGHKLN; erit ex aequali [c] ut basis ABCDE ad basim FGHKL, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quae &c. Q. E. D.

## PROP. VII. THEOR.

**Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares bases habent.**

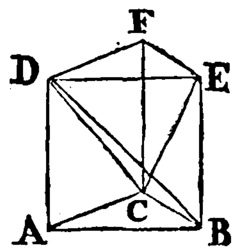
Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares habent bases.

Jungantur enim BD, EC, CD; et quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD ae-
a. 34. 1. quale [a]; ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punc-
b. 5. 12. tum C, aequalis est [b] pyramidi cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum C. sed pyramis cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, et vertex D punctum; iisdem enim planis continentur. ergo et pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, aequalis est pyramidi

midi cujus basis EBC triangulum, et vertex punctum D. rursus, quoniam FCBE parallelogrammum est cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo ECB est aequale[a]; ergo et pyramis cujus basis ECB triangulum, vertex autem punctum D, aequalis est pyramidi cujus basis triangulum ECF, et vertex punctum D[b]. sed pyramis cujus basis quidem ECB triangulum, vertex autem punctum D ostensa est aequalis pyramidi cujus basis triangulum ABD, et vertex C punctum. quare et pyramis cujus basis triangulum ECF, et vertex punctum D, aequalis est pyramidi cujus basis triangulum ABD, et vertex C punctum. prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se aequales quae triangulares bases habent, videlicet in ipsas ABDC, EBDC, ECFD. et quoniam pyramis cujus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum ABC, et vertex D punctum, iisdem namque planis continentur; pyramis vero cujus basis triangulum ABD, et vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis ABC triangulum, et oppositum ipsi DEF; et pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, et oppositum ipsi triangulum DEF. Q. E. D.

a. 34. 1.

b. 5. 12.




Cor. 1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, et altitudinem aequalem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, dividi potest prisma in alia prismata quae triangulares bases habent.

Cor. 2. Prismata aeque alta sunt inter se ut bases; quoniam pyramides super iisdem basibus et eadem altitudine inter se sunt ut bases[c]. c. 6. 12.

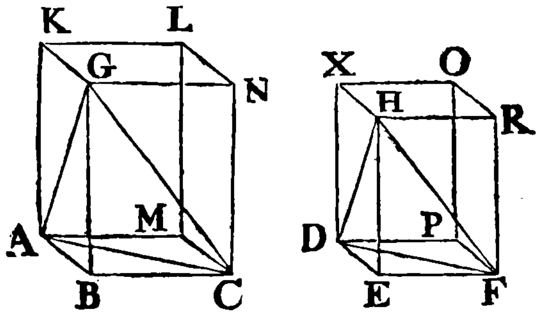
PROP. VIII.

## PROP. VIII. THEOR.

SIMILES pyramides quae triangulares baſes habent, in triplicata ſunt ratione homologorum laterum.

Sint ſimiles et ſimiliter poſitae pyramides, quarum baſes quidem triangula ABC, DEF, vertices autem G, H puncta. Dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam rationem habere ejus quam BC habet ad latus homologum EF.

Compleantur enim parallelogramma ABCM, GBCN, ABGK, et ſolidum parallelepipedum BGML quod hiſce planis, ipſiſque oppoſitis continetur. ſimiliter compleatur ſolidum parallelepipedum EHPO contentum tribus parallelogrammis DEFP, HEFR, DEHX, ipſiſque op-




poſitis. et quoniam pyramis ABCG ſimilis eſt pyramidi DEFH, erit
a. 11. Def. 11. angulus ABC angulo DEF aequalis[a], angulusque GBC aequalis angulo HEF, et angulus ABG angulo DEH. atque eſt ut AB ad BC, ita
b. 1. Def. 6. DE ad EF[b], hoc eſt circum aequales angulos latera ſunt proportionalia; parallelogrammum igitur BM parallelogrammo EP ſimile erit. eadem ratione et parallelogrammum BN ſimile eſt parallelogrammo ER, et BK ipſi EX. tria igitur parallelogramma BM, BN, BK tribus EP, ER, EX ſunt ſimilia. ſed tria quidem BM, BN, BK tribus oppoſitis

positis aequalia et similia sunt[c], tria vero EP, ER, EX tribus oppositis aequalia et similia. quare solida BGML, EHPO similibus planis multitudine aequalibus continentur, suntque ipsorum anguli solidi aequales[d]; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO[a]. similia autem solida parallelepipeda in triplicata sunt ratione homologorum laterum[e]. ergo solidi BGML ad solidum EHPO ratio triplicata est ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH[f]; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi[g], sit pyramidis triplum[h]. Quare et pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam rationem habet ejus quam BC ad EF. Q. E. D.

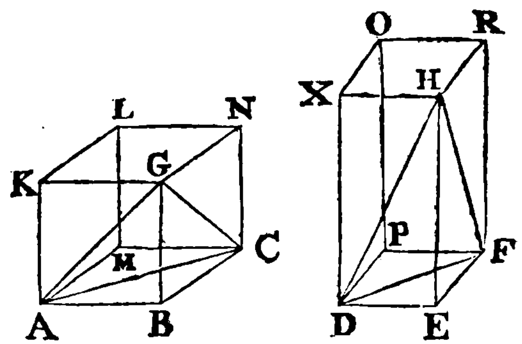
c. 24. 11.
d. B. 11.
a. 11. Def. 11.
e. 33. 11.
f. 15. 5.
g. 28. 11.
h. 7. 12.

Cor. Ex hoc perspicuum est, et similes pyramides quae multangulas bases habent, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum. ipsis enim divisis in pyramides triangulares bases habentes; quoniam et similia polygona quae sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, et multitudine aequalia et homologa totis; erit ut una pyramis, in prima pyramide, triangularem habens basim ad unam pyramidem, in secunda, triangularem basim habentem, ita omnes pyramides, in prima pyramide, triangulares habentes bases ad omnes, in secunda pyramide, triangulares bases habentes; hoc est, pyramis prima multangulam habens basim ad secundam pyramidem quae multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quae triangularem basim habet, est in triplicata ratione homologorum laterum; et pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum ad homologum latus.

## PROP. IX. THEOR.

AEQUALIUM pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales. et quarum pyramidum triangulares bases habentium bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illae sunt aequales.

Sint enim pyramides aequales triangulares habentes bases ABC, DEF, vertices vero G, H puncta. Dico pyramidum ABCG, DEFH bases et altitudines esse reciproce proportionales, scilicet ut ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG.




Compleantur enim parallelogramma AC, AG, GC ut et DF, DH, HF; compleanturque solida parallelepipeda BGML, EHPO quae planis illis, ipsisque oppositis continentur. et quoniam pyramis ABCG est aequalis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum
a. 1. Ax. 5. EHPO; erit solidum BGML solido EHPO aequale[a]. aequalium autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines sunt reciproce
b. 34. 11. proportionales[b]; est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed ut BM basis ad basim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF; ergo et ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem

solidi

ſolidi BGML. ſed ſolidi quidem EHPO altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis DEFH; ſolidi vero BGML altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis ABCG; eſt igitur ut ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Quare pyramidum ABCG, DEFH baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales.

Sed pyramidum ABCG, DEFH baſes et altitudines reciproce ſint proportionales, ſit ſcilicet ut ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH aequalem eſſe.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC baſis ad baſim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP; erit et ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. ſed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi BGML. eſt igitur ut BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi BGML. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales, ea ſunt aequalia [b]. ſolidum igitur parallelepipedum BGML aequale eſt ſolido parallelepipedo EHPO. atque eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG; ſolidi vero EHPO ſexta pars eſt pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFH eſt aequalis. Aequalium igitur pyramidum &c. Q. E. D.

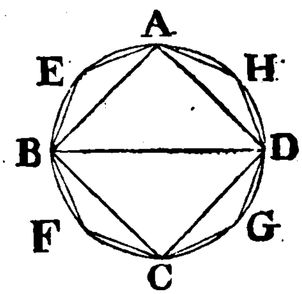
b. 34. 11.

## PROP. X. THEOR.

**OMNIS conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet et altitudinem aequalem.**

Habeat conus eandem baſim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, et altitudinem aequalem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe.

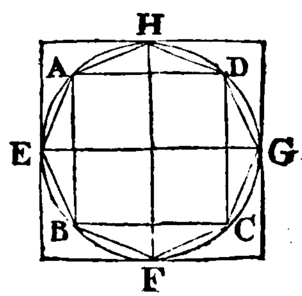
Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. Sit primo major quam triplus; et deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD; ergo quadratum ABCD majus eſt quam dimidium ABCD circuli. et a quadrato ABCD erigatur priſma aeque altum cylindro; priſma vero hoc majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ABCD quadratum deſcribatur, et ab ipſo erigatur priſma aeque altum cylindro, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti. et ſunt ab iis baſibus quadratis erecta ſolida parallelepipeda aeque alta, nimirum priſmata; priſma igitur a quadrato ABCD dimidium eſt priſmatis erecti a quadrato quod circa circulum ABCD deſcribitur. ete-



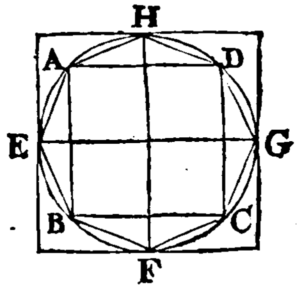

a. 32. 11. nim inter ſe ſunt ut baſes[a]. atque eſt cylindrus minor priſmate erecto a quadrato quod deſcribitur circa circulum ABCD. priſma igitur erectum a quadrato ABCD aeque altum cylindro, dimidio cylindri eſt majus. ſecentur circumferentiae AB, BC, CD, DA bifariam in punctis E, F, G, H, et AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA majus eſt dimidio portionis circuli ABCD, in qua conſiſtit, ut prius oſtenſum in Prop. 2. hujus. Erigantur ab unoquoque triangulorum AEB, BFC,

CGD,

CGD, DHA priſmata aeque alta cylindro; ergo et unumquodque erectorum priſmatum majus eſt dimidio portionis cylindri quae ad ipſum eſt; quoniam ſi per puncta E, F, G, H parallelae ipſis AB, BC, CD, DA ducantur, et compleantur ſuper ipſis AB, BC, CD, DA parallelogramma, a quibus ſolida parallelepipeda aeque alta cylindro erigantur; erunt uniuſcujuſque erectorum dimidia, ea quae ſuper triangulis AEB, BFC, CGD, DHA ſunt priſmata[b]. et ſunt cylindri portio- b. 2. Cor. 7. 12.
nes erectis ſolidis parallelepipedis minores. ergo et priſmata quae ſuper triangulis AEB, BFC, CGD, DHA majora ſunt dimidio portionum cylindri quae ad ipſa ſunt. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes priſmata aeque alta cylindro, et hoc ſemper facientes, tandem relinquemus quaſdam portiones cylindri quae minores erunt exceſſu, quo cylindrus coni triplum ſuperat[c]. relinquantur, et ſint ea quae ſunt c. Lemma.
ſuper ſegmenta circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; reliquum igitur priſma cujus baſis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quae cylindri, majus eſt quam triplum coni. ſed priſma cujus baſis AEBFCGDH polygonum, et altitudo eadem quae cylindri, triplum eſt pyramidis, cujus baſis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni[d]; et pyramis igitur cujus baſis polygonum d. 1. Cor. 7. 12.
AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major eſt cono qui baſim habet ABCD circulum. ſed et minor; ab ipſo enim comprehenditur; quod fieri non poteſt. Dico inſuper neque cylindrum minorem eſſe triplo coni. ſi enim fieri poteſt, ſit cylindrus minor quam triplus coni. erit igitur, invertendo, conus major quam tertia pars cylindri. deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD; ergo quadratum ABCD majus



jus eſt quam dimidium ABCD circuli. et a quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major eſt quam coni dimidium. quoniam, ut ante demonſtravimus, ſi circa circulum quadratum deſcribatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum deſcriptum eſt; et ſi a quadratis erigantur ſolida parallelepipeda aeque alta cono, quae et priſmata ſunt, erit quod a quadrato ABCD erigitur dimidium ejus quod erectum eſt a quadrato
a. 32. 11. circa circulum deſcripto; etenim inter ſe ſunt ut baſes [a]; quare et tertiae partes ipſarum. pyramis igitur cujus baſis quadratum ABCD, dimidia eſt ejus pyramidis quae a quadrato circa circulum deſcripto erigitur. ſed pyramis erecta a quadrato deſcripto circa circulum major eſt cono, ipſam namque comprehendit; ergo pyramis cujus baſis ABCD quadratum, vertex autem idem qui coni major eſt quam coni dimidium. ſecentur circumferentiae AB, BC, CD, DA bifariam in punctis E, F, G, H, et jungantur AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. et




unumquodque igitur triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA majus eſt quam dimidium portionis circuli in qua conſiſtit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA pyramides verticem habentes eundem quem conus. Ergo unaquaeque pyramidum hoc modo erectarum major eſt quam dimidium portionis coni quae eſt ad ipſam, quod eodem modo oſtendetur, quo ſimile oſtenſum fuit de priſmatibus et ſegmentis cylindri. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, et hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quaſdam coni portiones quae minores
c. Lemma. erunt exceſſu quo conus tertiam cylindri partem ſuperat [c]. relinquantur,

et

et ſint quae ſuper circuli ſegmentis AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. reliqua igitur pyramis cujus baſis AEBFCGDH, et vertex idem qui coni, major eſt quam tertia cylindri pars. ſed pyramis cujus baſis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, tertia pars eſt priſmatis cujus baſis polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quae cylindri. priſma igitur cujus baſis AEBFCGDH polygonum, et altitudo eadem quae cylindri, majus eſt cylindro cujus baſis eſt circulus ABCD. ſed et minus, ab ipſo enim comprehenditur; quod fieri non poteſt. non igitur cylindrus minor eſt quam triplus coni. oſtenſum autem eſt neque majorem eſſe quam triplum. ergo cylindrus coni triplus eſt; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt &c. Q. E. D.

## PROP. XI. THEOR.

**CONI et cylindri qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.**

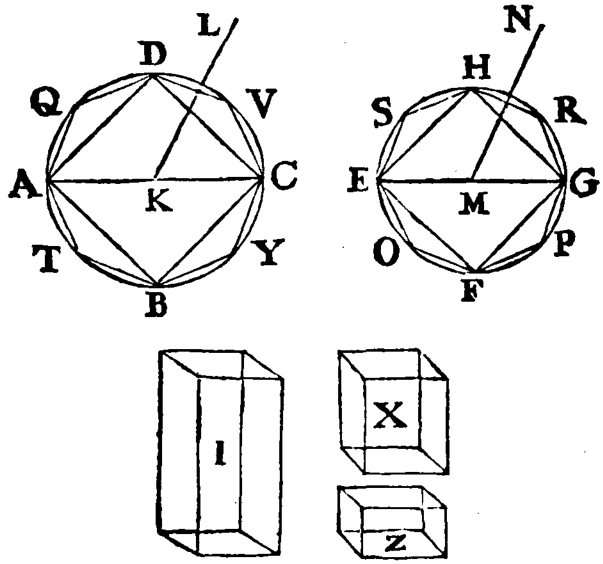
Sint in eadem altitudine coni et cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, axes autem KL, MN, et diametri baſium AC, EG. Dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſſe conum AL ad conum EN.

Si enim non ita ſit, erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod ſolidum minus cono EN, vel ad majus. ſit primo ad minus quod ſit X; et quo minus eſt ſolidum X cono EN, ei aequale ſit Z ſolidum; conus igitur EN ipſis ſolidis X, Z eſt aequalis. deſcribatur in EFGH circulo quadratum EFGH; majus igitur erit quadratum dimidio circuli. erigatur a quadrato EFGH pyramis aeque alta cono*; pyramis igitur erecta major eſt coni dimidio. nam ſi circa

* Potius, eundem quem conus verticem habens, et ſic in ſequentibus quibuſdam.

circulum

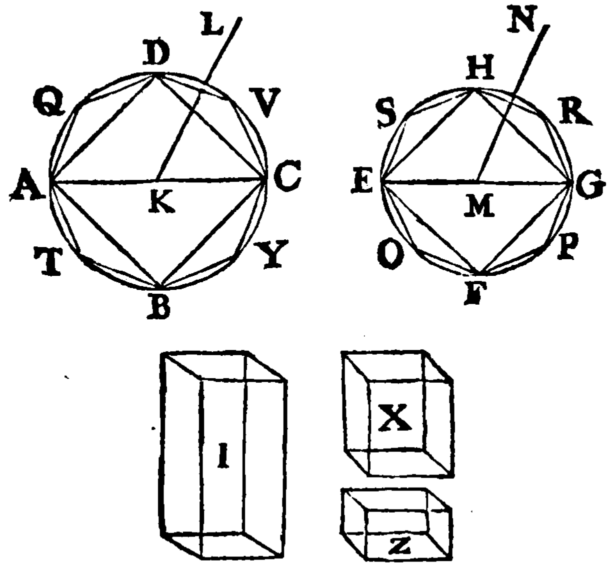
circulum quadratum deſcribamus, et ab ipſo erigamus pyramidem aeque altam cono, erit inſcripta pyramis pyramidis circumſcriptae dimidium; a. 6. 12. etenim inter ſe ſunt ut baſes [a]. conus autem circumſcripta pyramide eſt minor; ergo pyramis cujus baſis quadratum EFGH, vertex autem idem qui coni, major eſt coni dimidio. ſecentur circumferentiae EF, FG, GH, HE bifariam in punctis O, P, R, S, et EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EOF, FPG,




GRH, HSE majus eſt quam dimidium ſegmenti circuli in quo conſiſtit. erigatur ab unoquoque triangulorum EOF, FPG, GRH, HSE pyramis aeque alta cono; ergo et unaquaeque erectarum pyramidum major eſt dimidio portionis coni quae eſt ad ipſam. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, et jungentes rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides aeque altas cono, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni quae ſolido b. Lemma. Z minores erunt [b]. relinquantur, et ſint quae ſuper circuli ſegmentis EO,

EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum EOFPGRHS, altitudo autem eadem quae coni, major est solido X. describatur in circulo ABCD polygono EOFPGRHS simile polygonum ATBYCVDQ, et ab ipsa erigatur pyramis aeque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ATBYCVDQ polygonum ad polygonum EOFPGRHS[c]; c. 1. 12.
ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH[d]; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, d. 2. 12.
ita polygonum ATBYCVDQ ad polygonum EOFPGRHS[e]. sed ut e. 11. 5.
ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum; et ut polygonum ATBYCVDQ ad polygonum EOFPGRHS, ita [a] py- a. 6. 12.
ramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis cujus basis polygonum ATBYCVDQ, et vertex punctum L ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quae est in ipso; majus igitur est solidum X pyramide quae est in cono EN[f]. sed et minus; quod est absurdum. non igi- f. 14. 5.
tur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. Dico praeterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit I. Ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit solidum I ad AL conum. erit autem ut solidum I ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum, quod quidem minus erit cono AL[f], quia solidum I majus est cono EN. et igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse

oſtenſum eſt. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod ſolidum majus cono EN. oſtenſum autem eſt neque eſſe ad minus. Ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſt conus AL ad EN conum. ſed ut conus ad conum, ita eſt cy-




g. 15. 5. lindrus ad cylindrum[g]; eſt enim uterque utriuſque triplus[h]. et igitur
h. 10. 12. ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita ſunt ſuper ipſis cylindri aeque alti. Ergo coni et cylindri qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes. Q. E. D.

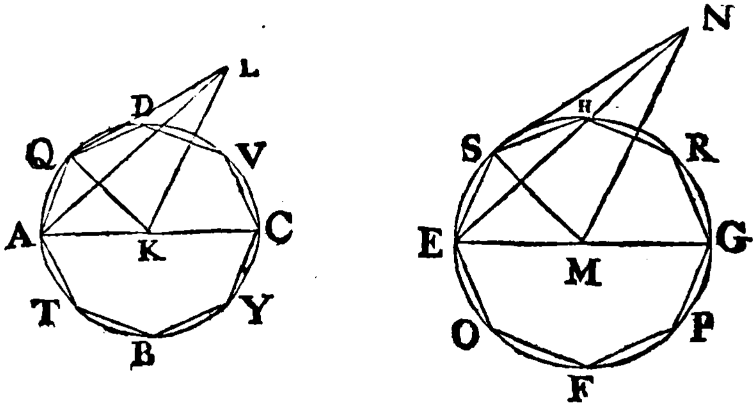
## PROP. XII. THEOR.

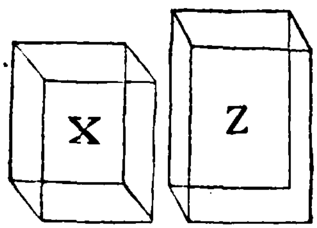
SIMILES coni et cylindri inter ſe ſunt in triplicata ratione diametrorum baſium.

Sint ſimiles coni et cylindri, quorum baſes quidem circuli ABCD, EFGH, diametri vero baſium AC, EG, et axes conorum vel cylindrorum

rum KL, MN. Dico conum cujus basis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere rationem ejus quam habet AC ad EG.

Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam rationem ejus quam AC ad EG, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplicatam rationem, vel ad majus. ha-




beat primum ad minus quod sit X; iisdemque omnino ut in propositione praecedente constructis, ostendetur, ut in ea, pyramidem cujus basis quidem polygonum EOFPGRHS, vertex autem N punctum, majorem esse solido X. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile polygonum ATBYCVDQ, a quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus; et triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ,

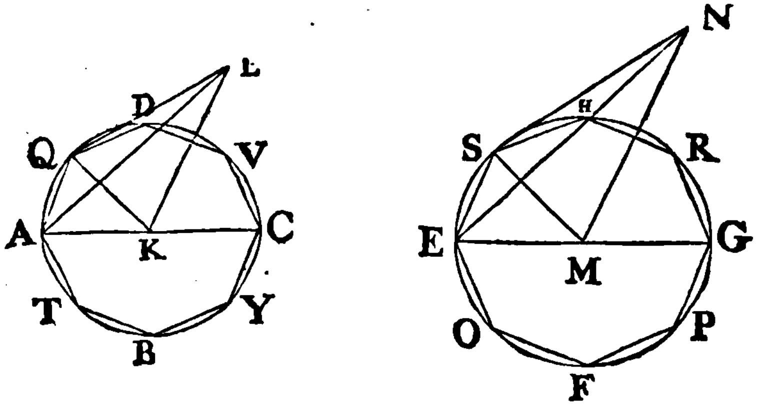
 vertex

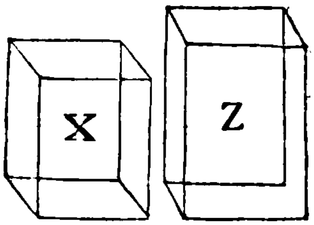
vertex autem punctum L, unum sit LAQ; triangulorum vero continentium pyramidem cujus basis EOFPGRHS polygonum, et vertex punctum N, unum sit NES; et jungantur KQ, MS. Quoniam igitur conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit ut AC ad EG, ita
a. 24. Def. 11. b. 15. 5. KL axis ad axem MN [a]; ut autem AC ad EG, ita AK ad EM [b]; itaque ut AK ad EM, ita KL ad MN; et permutando ut AK ad KL, ita EM ad MN. et anguli AKL, EMN aequales sunt, rectus enim uterque est; circa igitur aequales angulos latera sunt proportionalia, et
c. 6. 6. propterea simile [c] est AKL triangulum triangulo EMN. rursus, quoniam est ut AK ad KQ, ita EM ad MS et sunt circa aequales angulos AKQ, EMS, etenim quae pars est angulus AKQ quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, eadem est pars et angulus EMS quatuor rectorum qui sunt ad centrum M; erit triangulum AKQ triangulo EMS simile [c]. et quoniam ostensum est ut AK ad KL, ita esse EM ad MN, aequalis autem est AK ipsi KQ, et EM ipsi MS, erit ut QK ad KL, ita SM ad MN; igitur circa aequales angulos QKL, SMN, sunt enim recti, latera sunt proportionalia; quare triangulum LKQ simile est triangulo NMS. et quoniam ob similitudinem triangulorum AKL, EMN est ut LA ad AK, ita NE ad EM; ob similitudinem vero triangulorum AKQ, EMS, ut KA ad AQ, ita ME ad ES; erit ex aequali
d. 22. 5. [d] LA ad AQ, ita NE ad ES. rursus, quoniam ob similitudinem triangulorum LQK, NSM est ut LQ ad QK, ita NS ad SM; et ob similitudinem triangulorum KAQ, MES ut KQ ad QA, ita MS ad SE; ex aequali [d] erit ut LQ ad QA, ita NS ad SE. ostensum autem est et ut QA ad AL, ita SE ad EN; quare rursus ex aequali ut QL ad LA, ita SN ad NE. triangulorum igitur LQA, NSE proportio-
e. 5. 6. nalia sunt latera, ideoque aequiangula sunt LQA, NSE triangula [e], et inter se similia. quare et pyramis cujus basis triangulum AKQ, vertex autem L punctum, similis est pyramidi cujus basis EMS triangulum,

et

et vertex punctum N, ſunt enim et ipſarum anguli ſolidi inter ſe aequales[f], et ſimilibus planis multitudine aequalibus continentur. pyramides autem ſimiles, et quae triangulares baſes habent, in triplicata ſunt ratione homologorum laterum[g]; ergo pyramis AKQL ad pyramidem EMSN triplicatam habet rationem ejus quam AK habet ad EM. ſimiliter a punctis quidem D, V, C, Y, B, T ad K, a punctis

f. B. 11.
g. 8. 12.




vero H, R, G, P, F, O ad M ducentes rectas lineas, et a triangulis erigentes pyramides vertices eoſdem habentes quos coni, oſtendemus et unamquamque pyramidum ad unamquamque ejuſdem ordinis triplicatam rationem habere ejus quam habet AK latus ad homologum latus EM, hoc eſt quam AC ad EG. ſed ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia[h]; eſt igitur et ut AKQL pyramis ad pyramidem EMSN, ita tota pyramis cu-

h. 12. 5.

jus

jus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N. quare et pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N, triplicatam rationem habet ejus quam AC habet ad EG. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam rationem habere ejus quam AC ad EG; ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quae in ipso, etenim eam comprehendit; majus igitur est solidum X pyramide cujus basis polygonum
i. 14. 5. EOFPGRHS, vertex autem punctum N[i]. sed et minus; quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, et vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus EFGH, et vertex N punctum, triplicatam rationem habet ejus quam AC habet ad EG. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL, triplicatam rationem habere ejus quam habet EG ad AC. Dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere rationem ejus quam AC habet ad EG. si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo igitur, solidum Z ad conum ABCDL triplicatam rationem habet ejus quam EG ad AC. erit autem ut solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum, quod quidem minus [l] erit cono ABCDL, quoniam solidum Z majus est cono EFGHN. ergo et conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL, triplicatam rationem habebit ejus quam EG habet ad AC, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum

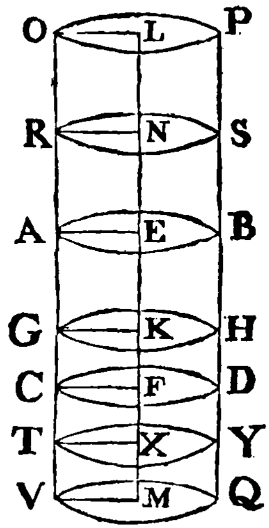
aliquod

aliquod majus cono EFGHN, triplicatam rationem habet ejus quam AC ad EG. ostensum autem est neque ad minus. Quare conus ABCDL ad EFGHN conum, triplicatam rationem habet ejus quam AC ad EG. ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum[k]; ostensum enim est omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, et aequalem altitudinem. Ergo et cylindrus ad cylindrum triplicatam rationem habebit ejus quam AC ad EG. similes igitur coni et cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium. Q. E. D. k. 15. 5.

## PROP. XIII. THEOR.

**SI cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.**

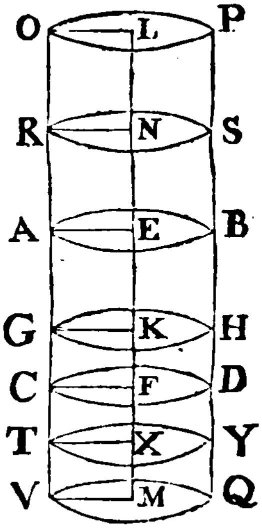
Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB, CD parallelo, et occurrat axi EF in K puncto, sitque linea GH communis sectio plani GH et superficiei cylindri AD. sit autem AEFC parallelogrammum rectangulum cujus revolutione circa rectam EF cylindrus AD describitur, in quacunque ejus positione; et sit recta GK communis sectio plani GH et ipsius AEFC. Quoniam igitur plana parallela AB, GH secta sunt plano AEKG, erunt AE, GK communes ipsorum sectiones parallelae[a]; quare parallelogrammum est AK, et propterea KG est aequalis ipsi EA quae sc. est ex centro circuli AB. eadem ratione et omnes rectae quae ducuntur a puncto K ad lineam GH aequales ostendentur iis quae sunt ex centro a. 16. 11.




circuli

circuli AB; quare et inter ſe ſunt aequales. linea igitur GH eſt circum-
b. 15. Def. 1. ferentia circuli [b] cujus centrum eſt punctum K. planum igitur GH cylindrum AD dividit in cylindros AH, GD; ſunt enim iidem qui deſcriberentur revolutione parallelogrammorum AK, GF circa rectas EK, KF. Dico igitur ut AH cylindrus ad cylindrum HC, ita EK axem ad axem KF.

Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M; et ipſi quidem EK axi ponantur aequales quotcunque EN, NL; ipſi vero FK aequales quotcunque FX, XM; et per puncta L, N, X, M ducantur plana ipſis AB, CD parallela. igitur, ut de plano GH oſtenſum fuit, planorum illorum et ſuperficiei cylindri productae communes ſectiones erunt circuli quorum centra ſunt L, N, X, M puncta, et abſcindent plana cylindros PR, RB, DT, TQ. Quoniam igitur axes LN, NE, EK inter ſe ſunt aequales, erunt cylindri PR, RB, BG
c. 11. 12. inter ſe ut baſes [c]. aequales autem ſunt baſes; ergo et cylindri PR, RB, BG ſunt aequales. quoniam vero axes LN, NE, EK ſunt inter ſe aequales, ſunt autem et cylindri PR, RB, BG, aequales inter ſe, atque eſt ipſorum LN, NE, EK multitudo aequalis multitudini ipſorum PR, RB, BG; quam multiplex eſt axis KL ipſius KE axis, tam multiplex erit et PG cylindrus cylindri GB. eadem ratione et quam multiplex eſt MK axis ipſius axis KF, tam multiplex eſt et QG cylindrus cylindri GD. et ſi quidem axis KL ſit aequalis axi KM, erit et PG cylindrus cylindro GQ aequalis; ſi autem axis KL major ſit axe KM, et cylindrus PG major erit cylindro GQ; et ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet




axibus

axibus EK, KF, et cylindris BG, GD, ſumpta ſunt utcunque aeque multiplicia, axis quidem EK et BG cylindri, nempe axis KL et cylindrus PG; axis vero KF et cylindri GD utcunque aeque multiplicia, axis ſcilicet KM, et GQ cylindrus; et demonſtratum eſt ſi KL axis ſuperat axem KM, et PG cylindrum ſuperare cylindrum GQ; et ſi aequalis, aequalem eſſe; et ſi minor, minorem. eſt igitur [d] axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare ſi cylindrus plano ſecetur &c. Q. E. D.

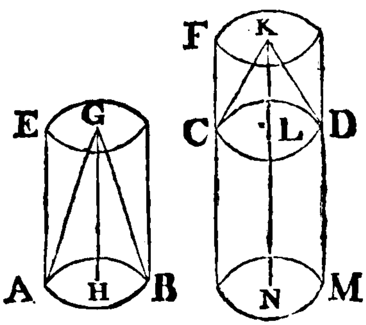
d. 5. Def. 5.

## PROP. XIV. THEOR.

**SUPER aequalibus baſibus exiſtentes coni et cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines.**

Sint enim in aequalibus baſibus AB, CD, cylindri EB, FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL.

Producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturque ipſi GH axi aequalis LN; et circa axem LN intelligatur cylindrus CM. Quoniam igitur cylindri EB, CM eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes [a]. baſes autem ſunt aequales; ergo et cylindri EB, CM inter ſe aequales erunt. et quoniam cylindrus FM ſecatur plano CD, oppoſitis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem [b]. aequalis autem eſt cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. eſt igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem. ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG conus ad conum CDK [c], cylindri enim ſunt conorum tripli [d]. Ergo et ut GH axis ad axem




a. 11. 12.

b. 13. 12.

c. 15. 5.

d. 10. 12.

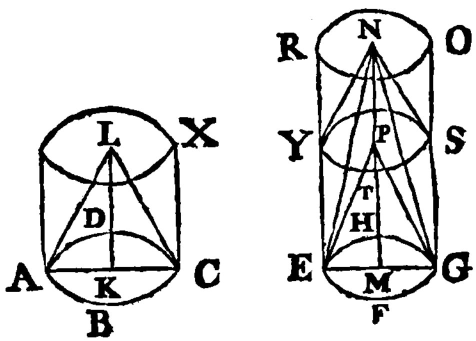
 KL,

KL, ita est ABG conus ad conum CDK, et cylindrus EB ad FD cylindrum. Super aequalibus igitur &c. Q. E. D.

## PROP. XV. THEOR.

AEQUALIUM conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales; et quorum conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt aequales.

Sint aequales coni et cylindri, quorum bases quidem ABCD, EFGH circuli, et diametri ipsorum AC, EG; axes autem KL, MN, qui quidem et conorum vel cylindrorum sunt altitudines; et sint coni quidem ALC, ENG, cylindri vero AX, EO. Dico cylindrorum AX, EO bases et altitudines reciproce proportionales esse, hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinem MN ad altitudinem KL.




Altitudo enim KL vel aequalis est altitudini MN, vel non aequalis. sit primum aequalis. est autem AX cylindrus aequalis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni et cy-
a. 11. 12. lindri inter se sunt ut bases[a]; aequalis * igitur est basis ABCD basi
* A. 5. EFGH. est igitur ut basis ABCD ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem KL. non sit autem altitudo KL altitudini MN aequalis, sed major sit MN, et auferatur ab ipsa MN altitudini KL aequalis MP, et per P secetur EO cylindrus plano TYS oppositis planis circulorum EFGH, RO parallelo; igitur, sectio communis plani TYS et superficiei cylindri EO erit circulus, et erit ES cylindrus cujus basis quidem

quidem EFGH circulus, altitudo autem MP. Quoniam igitur AX cylindrus aequalis eſt cylindro EO, erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum [b]. ſed ut AX cylindrus ad cylin- b. 7. 5.
drum ES, ita baſis ABCD ad EFGH baſim [a]; cylindri enim AX, ES a. 11. 12.
eandem habent altitudinem; ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita MN altitudo ad altitudinem MP [c], nam cylindrus EO ſecatur plano c. 13. 12.
TYS oppoſitis planis parallelo. eſt igitur ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. aequalis autem eſt MP altitudo altitudini KL; quare ut baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. aequalium igitur cylindrorum AX, EO baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales.

Sed cylindrorum AX, EO baſes et altitudines ſint reciproce proportionales, ſit ſcilicet ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. Dico AX cylindrum cylindro EO aequalem eſſe.

Primo, Sit baſis ABCD baſi EFGH aequalis; et quoniam ut baſis ABCD ad baſim FFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem, erit MN aequalis * ipſi KL, quare et cylindrus AX aequalis erit [a] cylindro EO. * A. 5.
ſed non ſit ABCD baſis aequalis baſi EFGH, et ſit ABCD major; et quoniam ut baſis ABCD ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem, erit MN major * KL; iiſdemque, ut prius, conſtructis, quoniam ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; quoniam vero altitudo KL aequalis eſt altitudini MP; erit ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem [a]; ut autem MN altitudo ad altitudinem MP ſive KL, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. eſt igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO eſt aequalis. ſimiliter autem et in conis. Q. E. D.

## PROP. XVI. THEOR.

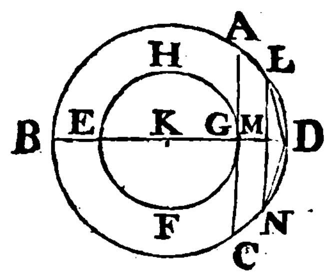
DUABUS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in majori polygonum aequalium laterum, quorumque numerus par ſit, deſcribere, quod minorem circulum non attingat.

Sint dati duo circuli ABCD, EFGH circa idem centrum K. oportet in majori circulo polygonum aequalium laterum quorum numerus ſit par, deſcribere, non attingens minorem circulum.

Ducatur per K centrum recta linea BD, atque a puncto G ipſi BD ad rectos angulos ducatur GA, et ad C producatur; continget igitur AC

a. 16. 3. circulum EFGH[a]. itaque circumferentiam BAD bifariam ſecantes, et ejus dimidium rurſus bifariam, et hoc ſemper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem

b. Lemma. ipsâ AD[b]. relinquatur ſitque LD; et a puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, et ad N producatur; junganturque LD, DN.



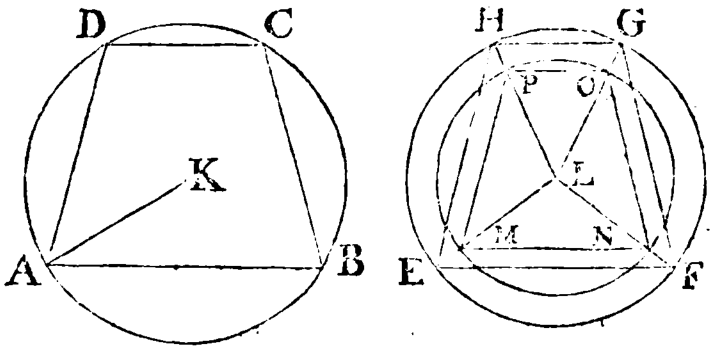

c. 3. 3. et 4. 1. aequalis igitur[c] eſt LD ipſi DN, et quoniam LN parallela eſt ipſi AC, et AC contingit circulum EFGH; ipſa LN circulum EFGH non tanget. et multo minus tangent circulum EFGH rectae lineae LD, DN. quod ſi ipſi LD aequales deinceps circulo ABCD aptabimus, deſcribetur in eo polygonum aequalium et numero parium laterum non attingens minorem circulum. Q. E. F.

LEMMA. II.

## LEMMA II.

SI duo trapezia ABCD, EFGH inſcripta ſint circulis quorum centra K, L puncta, fuerint autem latera AB, DC ut et EF, HG parallela; reliqua autem quatuor AD, BC, EH, FG inter ſe aequalia; ſit autem AB latus majus latere EF, et DC majus HG. erit recta KA quae eſt ex centro circuli in quo majora ſunt latera, major ea LE quae eſt ex centro alterius circuli.

Non enim, ſi fieri poteſt, ſit KA major recta LE; erit igitur KA vel aequalis ipſi LE vel minor eâdem. ſit primo KA aequalis LE. quoniam igitur in aequalibus circulis rectae AD, BC aequales ſunt ipſis EH, FG, erunt circumferentiae AD, BC aequales circumferentiis EH, FG[a]; quoniam vero rectae AB, DC majores ſunt ipſis EF, HG, altera a. 28. 3.

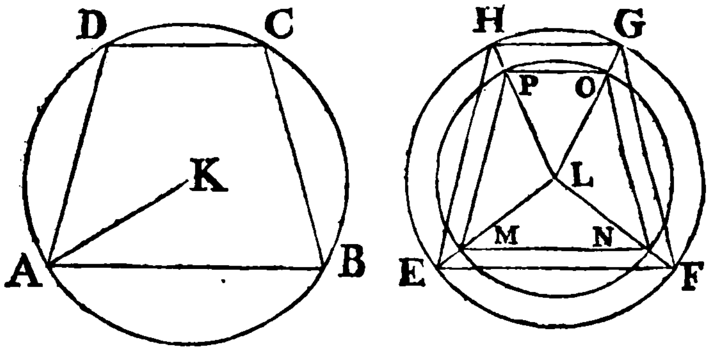



alterâ, erunt circumferentiae AB, DC majores ipſis EF, HG. Ergo tota ABCD circumferentia major eſt tota EFGH; ſed et aequalis, quod fieri non poteſt. non igitur recta KA aequalis eſt ipſi LE.

Sed ſit KA minor LE, et ipſi KA aequalis ponatur LM. et centro L, intervallo LM deſcribatur circulus MNOP, qui junctis LF, LG,

LH,

LH, LE occurrat in N, O, P, M; et jungantur MN, NO, OP, PM,
b. 2. 6. quae ipſis EF, FG, GH, HE parallelae [b] et minores erunt; ſingulae ſingulis. quoniam igitur EH major eſt MP, erit et AD quam MP major, et aequales ſunt circuli ABCD, MNOP; major igitur eſt circumferentia AD circumferentiâ MP; eadem ratione circumferentia BC major eſt ipsâ NO; et quoniam recta AB major eſt rectâ EF quae ipſa MN major eſt, erit AB quam MN multo major. eſt igitur circumferentia AB major ipſa MN; eademque ratione DC circumfe-




rentia major eſt ipſa PO. tota igitur ABCD major eſt tota circumferentia MNOP, ſed et aequalis, quod fieri non poteſt. non igitur minor eſt KA ipsâ LE, ſed neque aequalis. Recta igitur KA ipsâ LE neceſſario eſt major. Q. E. D.

Cor. Et ſi fuerit triangulum iſoſceles cujus latera ipſis AD, BC aequalia ſunt, baſis autem minor AB majori ipſarum AB, DC; ſimiliter oſtendetur recta KA major eâ quae eſt ex centro circuli circa triangulum deſcripti.

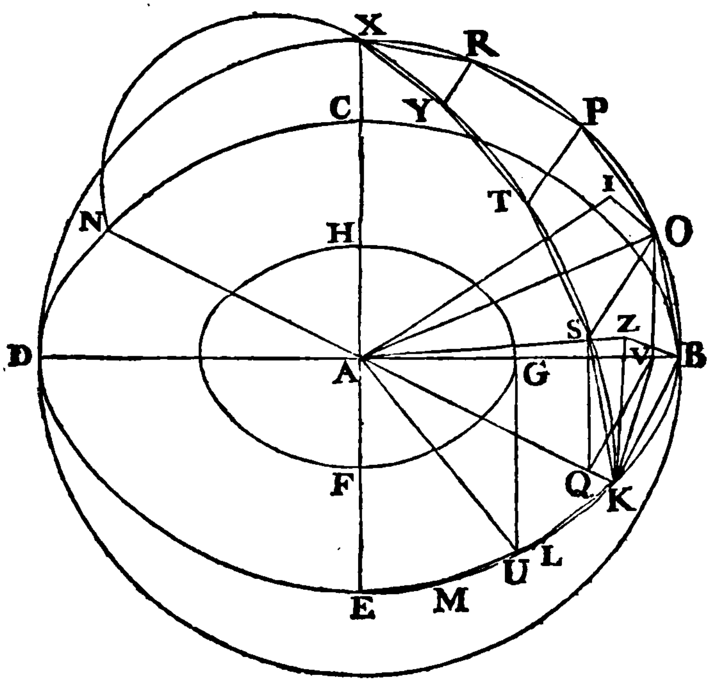
PROP. XVII.

## PROP. XVII. THEOR.

**Duabus ſphaeris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum polyedrum deſcribere, cujus ſuperficies minorem ſphaeram non attingat.**

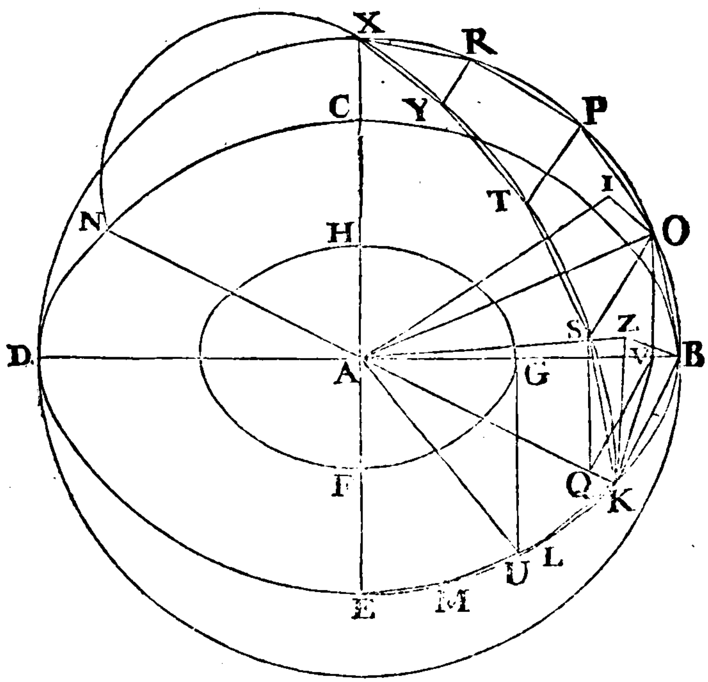
Intelligantur duae ſphaerae circa idem centrum A; oportet in majori ſphaera deſcribere ſolidum polyedrum cujus ſuperficies minorem ſphaeram non attingat.

Secentur ſphaerae plano aliquo per centrum ducto; itaque ſectiones




erunt circuli; quoniam diametro manente et ſemicirculo circumducto ſphaera facta eſt; ergo in quacunque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planum in ſuperficie ſphaerae circulum efficiet;

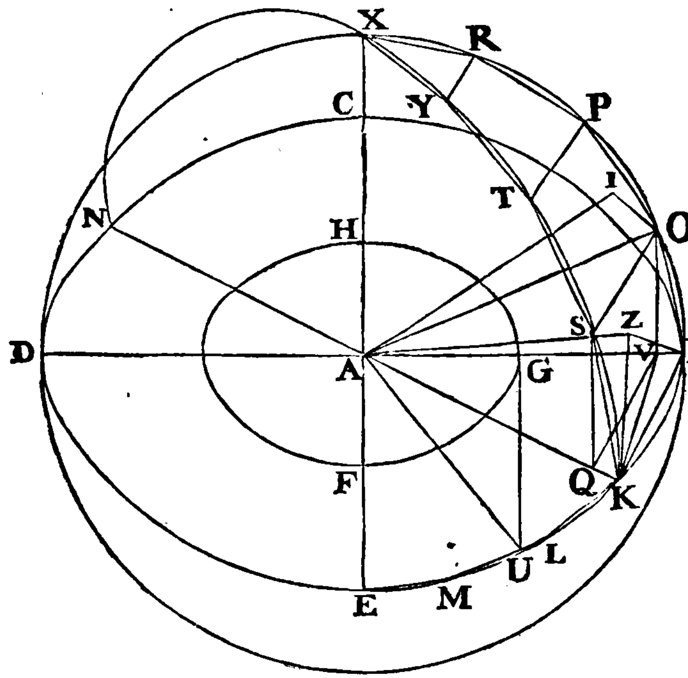
efficiet; et conſtat circulum eſſe maximum, quia diameter ſphaerae quae et circuli eſt diameter, major eſt omnibus rectis lineis quae in circulo
a. 15. 3. vel ſphaera ducuntur[a]. ſit igitur in majori quidem ſphaera circulus BCDE, in minori autem circulus FGH; et ducantur ipſorum duae diametri BD, CE ad rectos inter ſe angulos. et duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus BCDE, FGH, in majori BCDE polygonum




b. 16. 12. aequalium et parium numero laterum deſcribatur[b], non attingens minorem circulum FGH; cujus latera ſint in BE circuli quadrante BK, KL, LM. ME, et juncta KA producatur ad N; et a puncto A plano circuli BCDE ad rectos angulos ducatur AX, quae ſuperficiei ſphaerae in puncto X occurrat; et per AX, et utramque ipſarum BD, KN plana ducantur, quae ex jam dictis in ſuperficie ſphaerae maximos circulos efficient. itaque efficiant, et ſint ſuper diametris BD, KN eorum ſemicirculi

circuli BXD, KXN. Quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quae per ipsam XA transeunt ad planum circuli BCDE recta [c], quare et semicirculi BXD, KXN recti sunt ad c. 18. 11.
illud planum. et quoniam semicirculi BED, BXD, KXN aequales sunt, super aequalibus enim sunt diametris BD, KN, erunt et eorum quadrantes BE, BX, KX inter se aequales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt et in quadrantibus BX, KX aequalia ipsis BK, KL, LM, ME. describantur et sint BO, OP, PR, RX; KS, ST, TY, YX, junganturque OS, PT, RY; et a punctis O, S ad rectas AB, AK perpendiculares ducantur OV, SQ. quoniam igitur planum BOXD rectum est ad planum BCDE, et in uno ipsorum BOXD ducta est OV perpendicularis ad AB communem planorum sectionem, erit OV perpendicularis ad planum BCDE [d]. eadem ratione SQ perpendi- d. 4. Def. 11.
cularis erit ad idem planum, quia planum KSXN ad rectos angulos est plano BCDE. Jungatur VQ, et quoniam in aequalibus semicirculis BXD, KXN aequales circumferentiae sumptae sunt BO, KS, et ductae perpendiculares OV, SQ ad circulorum diametros, erit OV quidem ipsi SQ aequalis, BV vero aequalis KQ. est autem et tota BA aequalis toti KA, ergo et reliqua VA reliquae QA est aequalis. ut igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, ideoque VQ ipsi BK parallela est [e]. et quo- e. 2. 6.
niam utraque ipsarum OV, SQ recta est ad circuli BCDE planum, erit OV ipsi SQ parallela [f]; ostensa autem est et ipsi aequalis; ergo f. 6. 11.
QV, SO aequales sunt et parallelae [g]. et quoniam QV parallela est ipsi g. 33. 1.
SO, sed et parallela ipsi KB, erit et OS ipsi BK parallela [h]; ergo quae h. 9. 11.
ipsas conjungunt BO, KS in eodem sunt plano in quo parallelae OS, BK, et quadrilaterum KBOS in uno erit plano. si vero jungantur PB, TK, et a punctis P, T ducantur perpendiculares ad rectas AB, AK, ostendetur recta TP parallela ipsi KB eodem prorsus modo quo ostensa est SO parallela eidem KB; quare [h] TP parallela est ipsi SO,

et propterea quadrilaterum SOPT in uno erit plano. eadem ratione quadrilaterum TPRY est in uno plano. est autem in uno plano fi-
i. 2. 11. gura YRX[i]. si igitur a punctis O, S, P, T, R, Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quaedam figura solida polyedra inter circumferentias BX, KX, ex pyramidibus composita, quarum bases quidem KBOS, SOPT, TPRY quadrilatera, et triangulum YRX, ver-

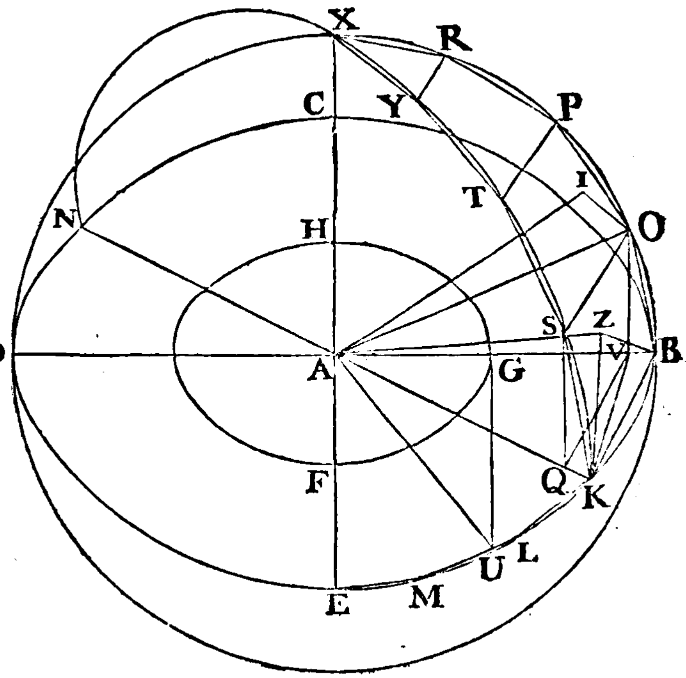



tex autem punctum A. si autem in unoquoque laterum KL, LM, ME quemadmodum in BK eadem construamus, et etiam in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo haemisphaerio; constituetur figura quaedam solida polyedra in sphaera descripta, et composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, et YRX triangulum, et quae ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. Dictae autem figurae polyedrae superficies non attinget minorem sphaeram in qua est circulus

lus FGH. Ducatur enim a puncto A ad planum quadrilateri KBOS perpendicularis AZ[k], cui in puncto Z occurrat, et BZ, ZK jungantur. k. 11. 11. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBOS planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam contingunt et in eodem sunt plano rectos angulos faciet; ergo AZ ad utramque ipsarum BZ, ZK est perpendicularis. et quoniam AB est aequalis AK, et sunt quadrato quidem ex AB aequalia quadrata ex AZ, ZB; quadrato autem ex AK aequalia ex AZ, ZK quadrata*; ergo quadrata ex AZ, ZB, quadratis * 47. 1. ex AZ, ZK aequalia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ, reliquum igitur quadratum ex BZ reliquo ex ZK est aequale; ideoque recta linea BZ rectae ZK aequalis. similiter ostendemus et quae a puncto Z ad puncta O, S ducuntur utrique ipsarum BZ, ZK aequales esse. circulus igitur centro Z, intervallo ZB descriptus per puncta K, O, S transibit, atque erit in circulo quadrilaterum KBOS. et quoniam KB major est quam QV, aequalis autem QV ipsi SO, erit et KB quam SO major. sed KB est aequalis utrique ipsarum BO, KS; quare unaquaeque aequalium circumferentiarum quas auferunt rectae KB, BO, KS, in circulo KBOS major est circumferentia quam aufert recta OS; ideoque tres illae circumferentiae una cum quarta uni ipsarum aequali majores sunt iisdem tribus una cum eâ quam aufert recta OS, hoc est totâ circumferentiâ; circumferentia igitur KB in circulo KBOS major est quarta parte totius circumferentiae KBOS circuli, et propterea angulus BZK ad centrum major est angulo recto. Quoniam igitur obtusus est angulus BZK, erit quadratum ex BK majus quadratis ex BZ, ZK[l], hoc est majus quam duplum quadrati ex BZ. Jungatur KV, l. 12. 2. et quoniam in triangulis KBV, OBV aequales sunt KB, BV ipsis OB, BV, et aequales continent angulos, erit KVB angulus angulo OVB aequalis[m]. rectus autem est OVB, rectus igitur est angulus KVB. et m. 4. 1. quoniam BD minor est quam dupla ipsius DV, erit rectangulum con-

 tentum

n. 8. 6. tentum DB, BV minus duplo rectanguli DVB, hoc eſt, erit [n] quadratum ex KB minus duplo quadrati ex KV. ſed quadratum ex KB majus eſt quam duplum quadrati ex BZ; ergo quadratum ex KV quadrato ex BZ eſt majus. et quoniam BA eſt aequalis AK, et quadrato quidem ex BA aequalia ſunt quadrata ex BZ, ZA, quadrato autem ex AK aequalia quadrata ex KV, VA, erunt quadrata ex BZ, ZA qua-




dratis ex KV, VA, aequalia; quorum quadratum ex KV majus eſt quadrato ex BZ; ergo reliquum ex VA quadratum quadrato ex ZA eſt minus, ac propterea recta linea AZ major quam recta AV. multo igitur major eſt AZ quam AG, in Propoſitione enim praecedente oſtenſum eſt rectam KV cadere extra circulum FGH. atque eſt AZ quidem ad planum KBOS perpendicularis, et propterea minima eſt omnium

nium quae ad planum illud a centro ſphaerae duci poſſunt. Planum igitur KBOS cadit extra minorem ſphaeram.

Reliqua etiam plana inter quadrantes BX, KX extra minorem ſphaeram cadere ita oſtendetur. Ducatur a puncto A ad planum quadrilateri SOPT perpendicularis AI, et IO jungatur. et, ut de plano KBOS et puncto Z oſtenſum fuit, eodem modo oſtendetur punctum I centrum eſſe circuli circa quadrilaterum SOPT deſcripti, et rectam OS majorem eſſe rectâ PT, et oſtenſa eſt PT parallela ipſi OS. Quoniam igitur trapezia KBOS, SOPT circulis inſcripta, habent latera BK, OS parallela, ut et OS, PT; reliqua autem BO, KS, OP, ST inter ſe aequalia; et eſt latus BK majus latere OS, et OS majus ipſo PT, erit recta ZB major recta IO [o]. Jungatur AO quae aequalis erit ipſi AB, o. 2. Lemma. et quoniam recti ſunt anguli AIO, AZB, erunt quadrata ex AI, IO aequalia quadrato ex AO ſive AB, hoc eſt quadratis ex AZ, ZB; et quadratum ex ZB majus eſt quadrato ex IO, reliquum igitur ex AZ quadratum quadrato ex AI eſt minus. recta igitur AZ minor eſt ipſa AI. oſtenſa autem eſt AZ major quam AG, multo igitur AI major eſt recta AG. Ergo planum SOPT cadit extra minorem ſphaeram. eadem ratione planum TPRY extra eandem ſphaeram cadere oſtendetur; ut et planum trianguli YRX, ope ſc. Corollarii Lemmatis 2. et ſimiliter reliqua omnia plana quibus continetur ſolidum polyedrum extra minorem ſphaeram cadere oſtendentur. Duabus igitur ſphaeris circa idem centrum exiſtentibus in majori ſolidum polyedrum deſcriptum eſt cujus ſuperficies minorem ſphaeram non attingit. Q. E. D.

Aliter autem et brevius ſine ope Prop. 16. oſtendetur recta AZ major ipsâ AG. Ducatur a puncto G ipſi AG ad rectos angulos GU et AU jungatur. itaque circumferentiam BE bifariam ſecantes, et dimidium ipſius bifariam, atque hoc ſemper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BCDE

quae

quae ſubtenditur a recta aequali ipſi GU. relinquatur, ſitque circumferentia KB. minor igitur eſt recta linea KB quam GU. et quoniam angulus BZK eſt obtuſus, ut oſtenſum fuit, erit BK major quam BZ. ſed GU quam BK eſt major; multo igitur major eſt GU quam BZ, et quadratum ex GU quadrato ex BZ majus. eſt autem AU aequalis ipſi AB; ergo quadratum ex AU, hoc eſt quadrata ex AG, GU, aequale eſt quadrato ex AB, hoc eſt quadratis ex AZ, ZB; minus autem eſt quadratum ex BZ quadrato ex GU; reliquum igitur quadratum ex AZ majus eſt quadrato ex AG, et ob id recta linea AZ quam recta AG eſt major.

Cor. Si vero et in altera ſphaera deſcribatur ſolidum polyedrum ducendo ſc. rectas inter puncta in quibus rectae quae a centro ſphaerae ad omnes angulos ſolidi polyedri in majori ſphaera deſcripti, ſuperficiei minoris occurrunt, eodem ordine quo puncta quibus eaedem rectae ſuperficiei majoris ſphaerae occurrunt, rectis junguntur; habebit ſolidum polyedrum in ſphaera BCDE ad ſolidum polyedrum in altera ſphaera triplicatam rationem ejus quam diameter ſphaerae BCDE habet ad alterius ſphaerae diametrum. diviſis enim ſolidis in pyramides numero aequales, et ejuſdem ordinis; erunt pyramides ſimiles. etenim habent angulos ſolidos ad verticem, ſphaerae ſc. centrum, communes, reliquos
a. B. 11. vero angulos ſolidos ad baſes inter ſe aequales[a], quoniam continentur tribus angulis planis qui, ſinguli ſingulis, inter ſe ſunt aequales; eaedemque pyramides continentur ſimilibus planis multitudine aequalibus, et
b. 11. Def. 11. propterea ſimiles ſunt[b]. ſimiles autem pyramides inter ſe in triplicata ſunt
c. Cor. 8. 12. ratione homologorum laterum[c]. Ergo pyramis cujus baſis eſt KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in altera ſphaera ejuſdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam habet AB ex centro ſphaerae majoris, ad eam quae eſt ex centro alterius ſphaerae. ſimiliter

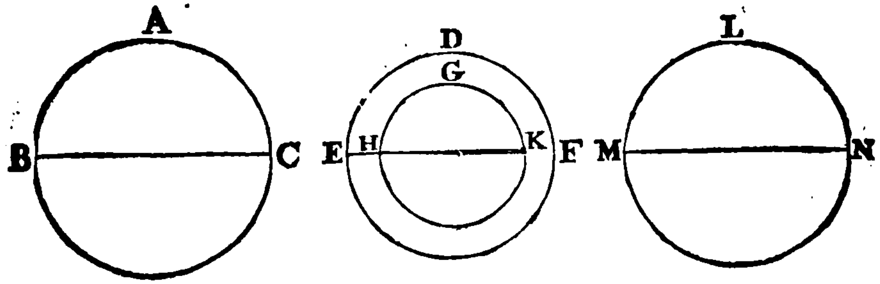
militer et unaquaeque pyramis earum quae ſunt in ſphaera majori ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis quae ſunt in altera ſphaera, triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad eam quae eſt ex centro alterius ſphaerae. et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. Quare totum ſolidum polyedrum, quod eſt in ſphaera majori, ad totum ſolidum polyedrum quod in altera ſphaera, triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad eam quae eſt ex centro alterius ſphaerae, hoc eſt quam habet BD diameter ad alterius ſphaerae diametrum.

## PROP. XVIII. THEOR.

**SPHAERAE inter ſe in triplicata ſunt ratione ſuarum diametrorum.**

Intelligantur ſphaerae ABC, DEF, quarum diametri BC, EF. Dico ABC ſphaeram ad ſphaeram DEF triplicatam habere rationem ejus quam habet BC ad EF.

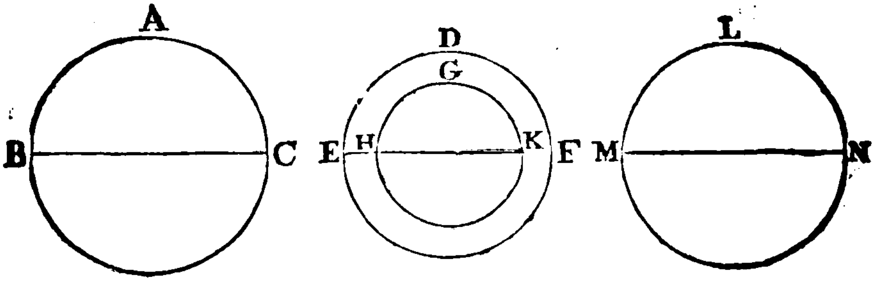
Si enim non habet, ſphaera ABC ad ſphaeram minorem ipſa DEF,




vel ad majorem, triplicatam rationem habebit ejus, quam habet BC ad EF*. habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK; et intelligatur ſphaera

* Vid. ad hanc notam Prop. 2.

ſphaera DEF circa idem centrum, circa quod eſt ſphaera GHK; de-
a. 17. 12. ſcribaturque [a] in majori ſphaera DEF ſolidum polyedrum cujus ſuperficies non attingat minorem ſphaeram GHK; et in ſphaera ABC deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile ei quod in ſphaera DEF deſcriptum eſt. ſolidum igitur polyedrum quod eſt in ſphaera ABC ad ſolidum polyedrum in ſphaera DEF, triplicatam rationem habet ejus quam
b. Cor. 17. 11. BC ad EF [b]. habet autem ABC ſphaera ad ſphaeram GHK triplicatam rationem ejus quam BC ad EF; ergo ut ABC ſphaera ad ſphaeram GHK, ita ſolidum polyedrum in ſphaera ABC ad ſolidum polyedrum in ſphaera DEF. major autem eſt ſphaera ABC ſolido polyedro




c. 14. 5. quod eſt in ipſa; ergo [c] et GHK ſphaera polyedro quod eſt in ſphaera DEF eſt major. ſed et minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. non igitur ABC ſphaera ad ſphaeram minorem ipſa DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. ſimiliter oſtendemus neque DEF ſphaeram ad ſphaeram minorem ipſa ABC triplicatam rationem habere ejus quam habet EF ad BC. Dico inſuper ſphaeram ABC neque ad majorem ſphaeram ipsâ DEF triplicatam rationem habere ejus quam BC ad EF. ſi enim fieri poteſt, habeat ad majorem LMN; invertendo igitur, ſphaera LMN ad ABC ſphaeram triplicatam rationem habet ejus quam diameter EF habet ad

BC

BC diametrum. ut autem ſphaera LMN ad ABC ſphaeram, ita ſphaera DEF ad aliam quandam ſphaeram, quae quidem minor erit ſphaera ABC[c], quoniam ſphaera LMN major eſt ſphaera DEF. ergo et DEF ſphaera ad ſphaeram minorem ipsâ ABC, triplicatam rationem habet ejus quam EF ad BC; quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ABC ſphaera ad ſphaeram majorem ipsâ DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. oſtenſum autem eſt neque ad minorem. Ergo ABC ſphaera ad ſphaeram DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. Q. E. D. c. 14. 5.

F I N I S.

# NOTAE

## CRITICAE ET GEOMETRICAE;

QUAE

Rationem reddunt eorum in quibus Editio haec differt a Textu Graeco Elementorum; inferuntur etiam eifdem paucae in quafdam Propofitiones obfervationes.

AUCTORE

ROBERTO SIMSON, M.D.

In Academia Glafguenfi Mathefeos Profeffore.

GLASGUAE:

IN AEDIBUS ACADEMICIS
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI

M. DCC. LVI.

# N O T A E &c.

## Ad DEFINITIONEM VII. LIB. I.

LOCO Definitionis quae habetur in Graecis codicibus alia magis distincta posita est, in qua continetur affectio planae superficiei quae in Elementis manifeste ponitur, rectam scilicet lineam duci posse a quovis puncto in plana superficie ad quodvis in eâdem, quae tota sit in ea superficie.

## Ad DEF. VIII. LIB. I.

Videtur eum qui hanc Definitionem posuit voluisse angulum planum in genere definire, hoc est ut non solum angulus qui duabus rectis continetur, sed et is quem aliqui concipiunt contineri rectâ linea et curvâ, vel duabus curvis lineis in plano sibi mutuo occurrentibus, simul definiretur. quamvis autem sensus verborum ἐπ' εὐθείας, in directum, vel in recta linea, manifestus sit quando duae rectae dicuntur in directum esse, non tamen apparet quo sensu intelligenda sunt haec verba, quando recta linea et curva, vel duae curvae in directum esse dicuntur; certe hoc loco explicari non potest. verosimile igitur est Definitionem hanc, et Definitionem anguli segmenti, ut et ea quae de angulo semicirculi, et segmentorum angulis habentur in Prop. 16. et 31. Lib. 3. additamenta esse Editoris minus periti. et ob hanc rationem Definitiones eae, praesertim cum inutiles omnino sint, notis inversis commatis a reliquis distinguuntur.

## Ad DEF. XVII. LIB. I.

Huic Definitioni adjecta sunt sequentia in omnibus exemplaribus

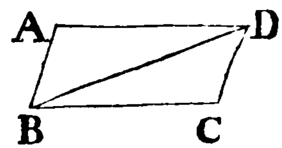
" quae

" quae quidem et bifariam circulum secat." haec autem omisimus, non enim sunt pars Definitionis, sed Corollarium ex ea. Proclus id ostendit concipiendo unum ex segmentis in quae diameter circulum dividit, altero applicari; manifestum enim est ea necessario sibi mutuo congruere; si enim non congruerent, rectae a centro ad circumferentiam ductae non essent inter se aequales. idem etiam facile ostenditur ex Prop. 31. Lib. 3. et Prop. 24. ejusdem. ex prima enim harum sequitur semicirculos similia esse circuli segmenta; et ex altera segmenta haec aequalia esse.

## Ad DEF. XXXIII. LIB. I.

Definitio haec affectionem continet superfluam rei definitae; etenim omnis figura quadrilatera quae habet latera opposita inter se aequalia, habebit etiam angulos oppositos inter se aequales; et contra.

Sit enim in quadrilatero ABCD, latus AB aequale lateri CD, et latus AD ipsi BC; ductâ igitur BD, erunt AD, DB aequales ipsis CB, BD, et basis AB basi CD est aequalis. igitur ex Prop. 8. Lib. 1. erit angulus ADB angulo DBC aequalis; unde per Prop. 4. Lib. 1. erit angulus BAD aequalis ipsi BCD, et ABD ipsi BDC; et propterea angulus ADC aequalis angulo ABC.




Si vero angulus BAD aequalis fuerit angulo BCD, et angulus ABC angulo ADC; erunt et latera opposita inter se aequalia. Quoniam enim ex Prop. 32. Lib. 1. omnes anguli quadrilateri ABCD simul conficiunt quatuor rectos, quorum anguli BAD, ADC simul aequales sunt ipsis BCD, ABC; erunt BAD, ADC simul aequales duobus rectis. parallelae igitur sunt AB, CD ex Prop. 28. Lib. 1. similiter, quoniam anguli DAB, ABC aequales sunt duobus rectis, parallelae erunt AD, BC.

BC. parallelogrammum igitur eſt ABCD; quare oppoſita ejus latera ſunt inter ſe aequalia ex Prop. 34. Lib. 1.

Omiſſa igitur eſt altera ex hiſce affectionibus in Def. 33. Lib. 1.

## Ad PROP. VII. LIB. I.

Demonſtratio hujus duos habet caſus, quorum is qui omiſſus eſt pariter eſt neceſſarius ac ille qui ſolus habetur in textu Graeco. caſum autem omiſſum primitus fuiſſe in textu, ex hoc manifeſtum eſt, quod ſecunda pars Prop. 5. Lib. 1. quae ſcilicet neceſſaria eſt demonſtrationi caſus omiſſi, nullius ſit uſus niſi ad hanc demonſtrationem; nam clare ſequitur haec pars, ex prima et Prop. 13. Lib. 1. addita igitur fuit gratia cujuſdam Propoſitionis inter 5. et 13. nulla autem harum eâ indiget praeter 7. hujus igitur gratia poſita fuit. verſio etiam ex lingua Arabica hunc caſum explicite demonſtratum habet. et Proclus agnoſcit ſecundam partem Prop. 5. additam fuiſſe gratia Prop. 7. ob ridiculam tamen rationem, " ut ſc. reſponſio fiat inſtantiis contra ſeptimam et decimam ſex- " tam Propoſitionem Lib. 1." quaſi caſus omiſſus, ut ille exiſtimat, inſtantia eſſet contra Propoſitionem ipſam. Vide ſi lubet Proclum in Prop. 5. et 7. nam piget nugas ejus referre.

Praeterea enuntiationem Prop. 7. mutavimus, ejuſdem ſenſu omnino retento. qui enim ex Graecis verbum de verbo reddunt, faciunt eam tyronibus intellectu difficilem.

## Ad PROP. XI. LIB. I.

Huic Propoſitioni Corollarium additum eſt, quod in Prop. 1. Lib. 11. et alias, neceſſarium ſit.

## Ad PROP. XX. et XXI. LIB. I.

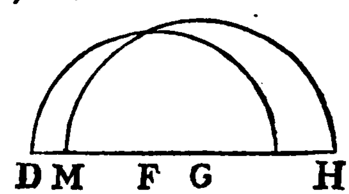
Refert Proclus in Commentariis in hanc Propoſitionem Epicureos

eam

eam impugnasse, utpote asino notam, nullaque demonstratione egentem; ipsisque respondit quamvis duo latera trianguli reliquo majora esse, sensui manifestum sit, quomodo vero hoc fiat dicere ad scientiam spectat. vera autem responsio huic objectioni contra hanc et sequentem, aliasque quasdam Propositiones, haec est, numerum axiomatum sine necessitate minime augendum esse. Clarissimus autem Dominus Clairault qui in Praefatione suis Geometriae Elementis, Parisiis Ann. 1741. editis, praefixa, refert Euclidem operam dedisse ut ostendat duo latera trianguli altero triangulo inclusi simul minora esse lateribus ejus qui ipsum includit, oblitus est addere hanc conditionem, viz. si triangula sint super eâdem basi; sine hac enim possunt latera trianguli altero inclusi simul majora esse hujus lateribus in data quacunque ratione, quae minor sit quam dupla; ut demonstratum est a Pappo Alexandrino in Prop. 3. Lib. 3. Collect. Mathem.

## Ad PROP. XXII. LIB. I.

Quidam culpant Euclidem quod non ostendat circulos, in constructione hujus Problematis descriptos, sibi mutuo occurrere. perspicuum autem hoc est ex determinatione quam dedit, viz. debere duas ex rectis DF, FG, GH reliquâ majores esse quomodocunque sumptas. Quis enim tyro adeo hebes est ut non ex hac videat circulum, centro F, intervallo FD, descriptum, occurrere rectae FH inter F et H, quoniam FD minor est FH; et similiter circulum centro G, intervallo GH vel GM descriptum, occurrere rectae DG inter G et D; ipsosque sibi mutuo occurrere, quod FD, GH, simul majores sunt reliquâ FG? et quidem determinatio haec simplicior est eâ quam, ex hac deductam, loco ejus posuit Thomas Simpson in Elementis suis Geometriae pag. 49. ut



ut hanc quam culpat Euclidis omiſſionem ſuppleret, nempe debere unam quamlibet ex tribus rectis minorem eſſe ſummâ, at majorem exceſſu reliquarum; ex qua circulos ſibi mutuo occurrere in uno caſu oſtendit, in alio quovis caſu dicit idem eodem modo oſtendi poſſe; verum recta GM quam jubet auferre ex recta GF poteſt ipsâ GF major eſſe, ut in figura hic appoſita, in quo caſu demonſtratio ejus in aliam mutanda eſt.

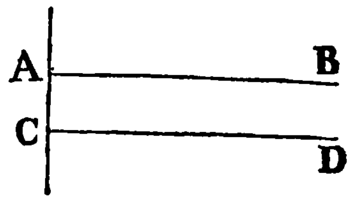
## PROP. XXIV. LIB. I.

Huic, prope initium, adjecimus verba "rectarum enim DE, DF "ſit DE ea quae non major eſt quam DF;" hoc eſt ſumatur ea rectarum DE, DF quae non major eſt alterâ, ad conſtituendum cum ea angulum EDG aequalem ipſi BAC; etenim ſine hac cautione tres eſſent caſus diverſi hujus demonſtrationis, ut Campanus aliique faciunt.

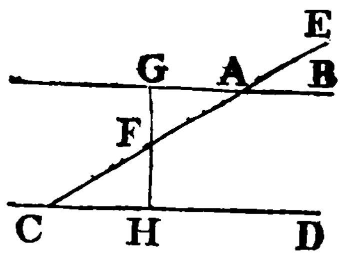
## PROP. XXIX. LIB. I.

Propoſitio quae vulgo Poſtulatum 5 tum, aut Axioma 11 mum, a quibuſdam 12 mum dicitur, ex qua haec 29 na praecipue pendet, haud parum negotii tum veteribus tum recentioribus Geometris praebuit. et quidem inter communes ſententias ſive Axiomata non ponenda videtur, non enim per ſe manifeſta eſt; ſed neque demonſtrationem, ſtricte loquendo, admittit; explicatione autem quadam indiget, ut dilucidior fiat. et hanc, viâ qua poſſumus facillima, Tyronibus ut ſequitur exponemus.

Primo facile poteſt quiſpiam concipere duas rectas AB, CD, in eodem plano, quae eidem rectae AC ad rectos ſunt angulos, aequidiſtantes quoque eſſe, i. e. nullibi ad ſe invicem accedere, vel a ſe invicem recedere, quantumvis producantur; vel potius nullus eſt qui aliter de hiſce rectis concipere potest. etenim una ipsarum AB non potest concipi vergere vel minimum versus alteram CD, ni simul concipiatur AB magis inclinari versus partes rectae AC ad quas est CD, quam versus partes contrarias; quod fieri non potest, recta enim AB ad rectos angulos est ipsi AC. idemque dicendum est




de duabus quibusvis rectis AB, CD quae cum aliqua recta EAC aequales angulos EAB, ECD ad easdem partes continent; nam hae cuidam rectae sunt ad rectos angulos. secetur enim AC bifariam in F, et ducatur FG perpendicularis ad AB, occurratque rectae CD in H. quoniam igitur in triangulis AFG, CFH, anguli GAF, AFG ipsis HCF, CFH sunt aequales, alter alteri, ex hypothesi et Prop. 15. Lib. 1. et latus AF aequale est lateri FC, erit AGF angulus aequalis ipsi CHF, ex Prop. 26. Lib. 1. rectus autem est AGF, quare et CHF rectus est. igitur rectae BG, DH ad rectos sunt angulos eidem rectae GH.



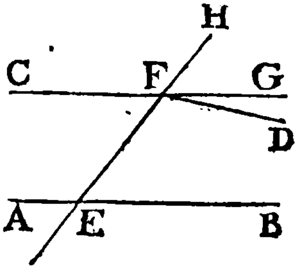

Secundo, liquido patet duas rectas ab eodem puncto exeuntes, a se invicem magis et magis divaricare seu divergere, ita ut distantia earum minima, inter finem unius et alteram rectam, fiat datâ quavis major. in longitudine enim ex. gr. decem pedum, sumpta in una rectarum a puncto a quo exeunt, si distantia ipsarum sit unius pedis, productâ rectâ in alios decem pedes, distantia ipsarum augebitur alio pede, eadem ratione qua in prima longitudine; et ita magis et magis. pendet autem hoc ex natura seu definitione rectae lineae quae eandem semper servat directionem, et ex praecedentibus stricte demonstrari non potest.

Hisce praemissis, sint duae rectae lineae AB, FD, ipsasque secet alia recta

recta

recta EFH quae faciat angulos interiores et ad easdem partes, ipsos sc. BEF, EFD simul minores duobus rectis; convenient inter se AB, FD ad partes B, D ad quas sc. anguli sunt minores duobus rectis.

Ad punctum enim F in recta FH angulo interiori BEF aequalis constituatur [a] angulus exterior GFH ad easdem partes rectae FH. igitur ex praemissis rectae parallelae EB, FG [b], aequidistantes sunt. et quoniam anguli HFG, GFE simul aequales sunt duobus rectis [c], erunt anguli BEF, EFG simul duobus rectis aequales. anguli autem BEF, EFD simul minores sunt duobus rectis; quare angulus EFG major est angulo EFD, et cadet FD inter aequidistantes seu parallelas rectas EB, FG. productae autem FG, FD quae ab eodem puncto F exeunt, a se invicem tandem distabunt magis quam rectae aequidistantes FG, EB; et propterea recta FD erit tandem ad partes ipsius EB contrarias iis ad quas est punctum F, hoc est conveniet cum ipsa EB.




a. 23. 1.
b. 28. 1.
c. 13. 1.

## PROP. XXXV. LIB. I.

Demonstratio hujus mutata est in aliam, quoniam tres essent casus seorsim demonstrandi, si argumentum quo auctor ejus utitur adhiberetur, qui quidem casus habentur in versione ex Arabica lingua; in Elementis enim nulli casus qui diversas requirunt demonstrationes, omittendi sunt. aliam igitur viam inivimus, quam primus, quantum scio, ostendit Dominus Clairault in Elementis suis Geometriae, pag. 21. eandem postea dedit Thomas Simpson in Elementis suis pag. 32. hic autem adhibet Prop. 26. Lib. 1. Euclidis ex qua sola, aequalitas triangulorum non sequitur, nam adhibenda etiam est Prop. 4. Lib. 1. ut

 in

in ſimili prorſus caſu factum videmus in Prop. 34. Lib. 1. Elem. melius igitur eſt uti ſolâ quarta.

## PROP. XLV. LIB. I.

Prope finem demonſtrationis recta KM parallela oſtenditur rectae FL, ope Prop. 33. eſt autem KH ex conſtructione parallela ipſi FG, et oſtenſae fuerunt KHM, FGL rectae lineae. adjectum eſt Corollarium ex Commandino, quod ſaepius uſui ſit.

## PROP. XIII. LIB. II.

PROPOSITIO haec enunciatur ſolummodo de triangulis acutangulis, quamvis vera ſit de omni triangulo. adjecta igitur eſt Demonſtratio in reliquis caſibus; Commandinus et Clavius ſuas etiam dederunt.

## PROP. XIV. LIB. II.

In Demonſtratione hujus aliquis inepte interpoſuit "ſin minus, una "ipſarum BE, ED major eſt; ſit BE major et producatur ad F," quaſi aliquod interſit ſive major, ſive minor earum producta fuerit. vice igitur horum ſolummodo legendum eſt "ſin minus, producatur BE ad F."

## PROP. I. LIB. III.

AUCTORES quidam, praeſertim inter recentiores, contra Demonſtrationes Apogogicas ſive indirectas nimis ſevere, et quidem imperite diſputant, non animadvertentes quaedam eſſe quae alia viâ demonſtrari non poſſunt. atque hujus rei Propoſitio haec exemplum eſt maxime evidens. directa enim ejus demonſtratio afferri minime poteſt.

nam

nam praeter circuli Definitionem, nullum eſt principium de circulo ex quo Demonſtrationem ſive directam ſive indirectam conficere licet. ex hac propterea Definitione, et Propoſitionibus ante demonſtratis, neceſſe omnino eſt oſtendere punctum in Conſtructione inventum centrum eſſe circuli. Quoniam igitur in demonſtratione utendum eſt hac Propoſitione, ſc. rectae lineae a centro ad circumferentiam ductae ſunt inter ſe aequales, atque non licitum ſit aſſumere punctum in conſtructione inventum centrum eſſe, hoc enim demonſtrandum eſt; manifeſtum eſt punctum aliud tanquam centrum aſſumendum eſſe. et ſi ex hoc aſſumpto abſurdum aliquod ſequatur, ut quidem Euclides ſequi oſtendit, tum verum non eſt punctum aſſumptum centrum eſſe; et cum utcunque aſſumptum fuerit, ſequitur nullum, praeter inventum in conſtructione punctum, centrum eſſe. unde neceſſitas demonſtrationis indirectae, ſive ab abſurdo patet.

## PROP. XIII. LIB. III.

Quoniam multo facilius eſt imaginari duos circulos poſſe ſe mutuo intus contingere in pluribus punctis quam uno, ad eaſdem eorum partes, quam ad contrarias; igitur figura hujus caſus minime omittenda fuit. ei autem figurae, conſtructio quae in textu Graeco habetur minus apta fuiſſet, centra enim circulorum prope eorum circumferentias ponenda eſſent. alia igitur conſtructio et demonſtratio tradita eſt, ea ſcilicet quae eſt pars poſterior ejus quam Campanus ex codicibus Arabicis dedit. nam ſine ratione demonſtratio apud eum in duas partes diviſa eſt.

## PROP. XV. LIB. III.

Deeſt converſa partis ſecundae hujus Propoſitionis, quamvis in praecedente, in caſu ſimili, converſa enuntiatur et demonſtratur; haec igitur

converſa

converſa addita eſt. praeterea in demonſtratione primae partis, diameter AD (in figura Commandini) major oſtenditur rectâ BC ope rectae MN, cum immediate ſine hac oſtendi poteſt. alia igitur demonſtratio poſita eſt ſimilis ei quâ Euclides utitur in praecedente 14. et eadem quam Theodoſius tradit in Prop. 6. Lib. 1. Sphaericorum, in caſu omnino ſimili.

## PROP. XVI. LIB. III.

In hac verum ſenſum Propoſitionis dedimus ſine mentione facta anguli ſemicirculi, aut ejus quem aliqui concipiunt contineri a circumferentia et contingente, de quibus angulis Clavius, Peletarius aliique recentiores multum inter ſe contenderunt, et ab iiſdem paradoxa ſatis mira deduxerunt, quibus nullum fundamentum praebet enuntiatio nunc tradita. ſimiliter nihil de angulo ſegmenti majoris, vel minoris diximus in Prop. 31. hujus Libri; ſed ſenſum Propoſitionis ſine iis enuntiavimus; et haec quidem adulterina eſſe non temere ſuſpicari aliquem poſſe affirmat Vieta in pag. 386. Oper. Math.

## PROP. XVII. LIB. III.

Huic caſum addidimus in quo punctum datum a quo ducenda eſt recta linea circulum contingens, eſt in circuli circumferentia.

## PROP. XX. LIB. III.

Verba ad initium ſecundae partis hujus demonſtrationis, "κεκλάσθω "δὴ πάλιν" ſcilicet BDC, male vertuntur a Briggio et Gregorio "Rurſus "inclinetur," debent enim verti, ut a Commandino, "Rurſus inflecta- "tur." inflecti autem dicitur recta linea ad lineam, ſive rectam ſive curvam, quando a puncto ad lineam illam ducta eſt recta linea, et a puncto occurſus ad aliud punctum ducta eſt recta linea angulum faciens

cum

cum priore; ut ex Prop. 90. Datorum manifeſtum eſt; ita enim tota linea inter punctum primum et ultimum inflexa ſive fracta eſt ad punctum occurſus ſive inflexionis. ſimili ſenſu duae rectae lineae inflecti dicuntur a duobus punctis ad tertium punctum, quando angulum faciunt ad punctum hoc; ut in deſcriptione Locorum planorum Apollonii in Praefatione Pappi Alexandrini ad Librum ſuum ſeptimum videri poteſt. Pleniorem autem reddidimus hanc locutionem ex Prop. 90. Datorum.

### PROP. XXI. LIB. III.

Hujus Propoſitionis duo ſunt caſus, quorum ſecundus in quo ſc. anguli ſunt in ſegmento minore ſemicirculo, in textu Graeco non habetur. hujus igitur demonſtratio addita eſt ſimplicior eâ quam Commandinus dedit, utpote ex primo tantum caſu ſine ope triangulorum derivata.

### PROP. XXIII. et XXIV LIB. III.

In Propoſitione 24. oſtenditur ſegmentum AEB (vid. figuram Commandini) non poſſe non congruere ſegmento CFD, et ſitum diverſum ab eo habere ut CGD, occurrentibus circumferentiis ſibi mutuo in tertio puncto G, ex eo quod circulus circulum ſecaret in pluribus quam duobus punctis. verum hoc fieri non poſſe oſtendi debuit in Prop. 23. aeque ac unum ex ſegmentis non poſſe intra alterum cadere. hoc igitur ex Prop. 24. ſublatum eſt, et, in proprio ſuo loco, in Prop. 23. repoſitum.

## PROP. XXV. LIB. III.

Haec diviſa eſt in tres caſus, quorum duo eandem conſtructionem et demonſtrationem habent; eam igitur in duas tantum diviſimus.

## PROP. XXXIII. LIB. III.

Et Propoſitio haec in textu Graeco diviſa eſt in tres caſus, quorum duo, is ſcilicet in quo angulus datus eſt acutus, et is in quo eſt obtuſus, eandem omnino et conſtructionem et demonſtrationem habent; ultimam igitur demonſtrationem tanquam ſuperfluam, et imperiti cujuſdam additamentum, ex Elementis ſuſtulimus. Praeterea demonſtratio caſus in quo angulus datus eſt rectus, inſcite per ambages facta eſt, quam propterea in ſimpliciorem, cum Clavio, mutavimus.

## PROP. XXXV. LIB. III.

Ut Propoſitio 25. et 33. in plures, ſic haec 35. in pauciores caſus quam oportuit dividitur. neque putandum eſt Euclidem eos propter ipſorum ſimplicitatem omiſiſſe; dedit enim omnium facillimum, eum ſcilicet in quo utraque recta per centrum tranſit. et in ſequente Prop. 36. ſeparatim demonſtrat caſum in quo recta tranſit per centrum. Theon igitur, ut videtur, eos brevitatis gratia ſuſtulit, quod minime in inſtitutione elementari faciendum, ut antea monitum. Caſus igitur omiſſos, quos et praebent verſiones ex Arabico, additi ſunt.

## PROP. XXXVII. LIB. III.

Verba ad finem hujus, viz. "ſimiliter demonſtrabitur et ſi centrum "ſit in AC" deleta ſunt, utpote inſcite a quodam Editore addita.

Ad

## Ad DEFINITIONES quasdam LIB. IV.

QUANDO punctum aliquod existit in recta, aut alia quavis linea, punctum illud apud Geometras Graecos ἅπτεσθαι, tangere, dicitur lineam eam. et quando recta aut circulus circulo quovis modo occurrit, alter alterum ἅπτεσθαι dicitur. quando vero recta aut circulus occurrit circulo, ita ut ipsum non secet, dicitur ἐφάπτεσθαι, contingere circulum. et hisce verbis nunquam promiscue utuntur. igitur in Definitione 5. Lib. 4. legendum est ἐφάπτηται, contingit, loco simplicis ἅπτηται. et in Definitionibus 1, 2, 3, et 6$^{ta}$ in versione Commandini legendum est "tangit" loco verbi "contingit." et in Definitione 2. et 3. Lib. 3. eadem mutatio facienda est. at in textu Graeco Propp. 18, 19. Lib. 3. verbum simplex mutandum est in compositum.

## PROP. IV. LIB. IV.

Circulum rectas lineas contingere in hac, ut et in Propp. 8. et 13. hujus Libri ex absurdo ostenditur, cum tamen idem in Propp. 17. 33. 37. Lib. 3. directe ostendatur; hanc igitur viam secuti sumus in hisce Propositionibus hujus Libri, praesertim cum brevior sit.

## PROP. V. LIB. IV.

Demonstratio hujus a quodam vitiata est, non enim ostendit rectas quae latera trianguli bifariam et ad rectos angulos secant, inter se convenire; et inepte dividit Propositionem in tres casus, cum una eademque constructio et demonstratio omnibus inserviat, ut Campanus observavit; repetitiones igitur has omisimus. textus etiam Graecus in Corollario hujus manifeste vitiatus est, nam in eo mentio facta est dati anguli; nihil autem in Propositione habetur, vel haberi potest de angulo dato.

## PROP. XV. et XVI. LIB. IV.

In Corollario primae harum deſunt voces “aequilatero et aequian-“gulo” in textu Graeco. et in Prop. 16. habetur circulus vice circumferentiae, ubi dicitur “quarum igitur partium eſt ABCDF circu-“lus.”

## DEF. III. LIB. V.

RECENTIORUM multi Definitionem hanc tanquam minime probam rejiciunt. fuſe eam explicavit vir doctiſſimus Iſaacus Barrow in fine Lect. 3. anni 1666, et, quantum ex natura rei fieri potuit, objectiones contra eam diluit, atque ita ſententiam ſuam in epilogo ejuſdem lectionis exponit.

“Nunc tantum adjiciam Elementatori hac in Definitione condenda “non aliud forſan propoſitum fuiſſe, quam ut methodi plenioris aut “ornatûs qualiſcunque causâ, praeludens ſcilicet accuratioribus iſtis e-“juſdem, majoris, et minoris rationis Definitionibus mox ſubjungen-“dis, generalem quandam et ὁλοσχερῆ τοῦ λόγου, ideam diſcentium in-“ſinuaret animis per Metaphyſicam hanc Definitionem; Metaphyſi-“cam dico, nec enim proprie Mathematica eſt, cum ab ea nihil quic-“quam dependeat, aut deducatur in Mathematicis, nec ut exiſtimo “deduci poſſit. cujuſmodi quoque cenſeri poteſt poſthac tradita Defi-“nitio Analogiae, Analogia eſt rationum ſimilitudo, quae nulli Ma-“thematico deſerviat uſui, nec alio opinor fine proponitur, quam ut “per eam generalis quaedam analogiae notio, craſſa licet et confuſa, “Tyronibus indatur. Definitionibus autem exquiſitis Mathematicis mox “ab illo ſubjunctis tota rationum Doctrina, tota res Mathematica ſub-“nititur; ad illas igitur potiſſimum attendi debet, per illas rationum doc-“trina perfectius eluceſcit; haec et conſimiles abſque notabili Mathe-

“ſeos

" ſeos detrimento prorſus omitti poſſent. ſicut in Elem. 7. factum vide-
" mus, ubi numerorum analogia definitur et pertractatur, nullâ tamen
" rationis numero competentis exhibitâ definitione, quamvis illic aeque
" neceſſaria fuit et utilis definitio talis atque hic eſt; ſed neutro loco
" magna fuit neceſſitas. quamquam haud credo rem ipſam adeo gene-
" ralem et abſtractam, eoque conceptu magis arduam et explicatu, defi-
" nitionis eſſe capacem commodioris hâc quam Elementator aſſignavit,
" quam ideo viſum eſt uberius explicare; neque non ab oppugnantium
" captionibus aſſerere." Quibus quidem nihil addendum video, praeterquam quod hiſce rationibus de inutilitate hujus et ſequentis 8vae Definitionis perſuaſus, firmiter credam eas non Euclidis eſſe, ſed cujuſdam minus periti Editoris.

## DEF. XI. LIB. V.

Verbum "deinceps" neceſſario addendum fuit ante verbum "pro-
" portionales" in hac definitione; et ita citata habetur in 33. Prop. Lib. 11.

Poſt hanc Definitionem ponenda fuit, ut in loco proprio, Definitio rationis compoſitae, cujus ſpecies ſunt ratio duplicata, triplicata &c. quae in hac et praecedente definiuntur. eam autem rejecit Theon in Def. 5. Lib. 6. ubi rationis compoſitae Definitionem inutilem omnino et abſurdam tradit. aliam igitur ejuſdem inter Def. 11. et 12. poſuimus, quam, ſine dubio, dedit Euclides, citat enim eam explicite in Prop. 23. Lib. 6. quamque tradunt Clavius, Herigonius et Barrovius, retentâ etiam Theonis Definitione, quam ex Elementis ſuſtuliſſe debuerunt.

## DEF. XIII. LIB. V.

Haec et ſequentes terminorum quorundam, qui in Lib. 5. et ſequentibus occurrunt, explicationem continent, qui quidem, paucis exceptis, ex ipsis Propositionibus hujus libri in quibus primò utuntur satis innotescunt; a Theone vel alio quodam additae videntur hae Definitiones. Utut sit, eas paulo distinctius tradere, Tyronum gratia, visum est.

## PROP. IV. LIB. V.

In constructione, demonstrationi hujus praemissa, verba ἅ ἔτυχε, utcunque, bis omittuntur in textu Graeco, et versione Latina; addita igitur sunt, utpote omnino necessaria.

Ibid. in demonstratione; in textu Graeco, et in versione Latina Commandini, et in ea Henrici Briggii quae prodiit Londini anno 1620, una cum textu Graeco priorum sex Librorum, quamque in hoc loco sequitur David Gregorius in sua editione operum Euclidis, sequentia habentur, viz. "sumptae autem sunt ipsarum A, C aeque multiplices "K, L; et ipsarum B, D aliae (ἅ ἔτυχε) utcunque aeque multiplices "M, N;" quae quidem minime vera sunt. delendum igitur fuit verbum "utcunque." mirum autem est neque Briggium qui verbum hoc recte omisit in uno loco Prop. 13. hujus Libri, neque Gregorium qui idem verbum mutavit in "quaedam" vel ipsum omisit in quatuor locis ejusdem Prop. 13. idem non omisisse in hoc loco Prop. 4. et in secundo loco in quo habetur in Prop. 17. hujus, in quibus, salva veritate, manere non potest. in nullo autem ex his locis verba ἅ ἔτυχε è textu Graeco deleverunt Editores, ut fecisse debuerunt.

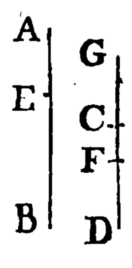
Occurrunt eadem verba in quatuor locis Prop. 11. hujus, in quorum primo et ultimo necessaria sunt, at in secundo et tertio, quamvis vera, sunt tamen superflua; ut etiam sunt in secundo loco in quo habentur eadem verba in Prop. 12. hujus.

COR.

## COR. PROP. IV. LIB. V.

Corollarium hoc ab imperito quodam additum eſt vice legitimae demonſtrationis quam Theon aliuſve Editor non ex hoc, ſed proprio ſuo loco in hoc libro ſine dubio ſuſtulit. volebat enim auctor Corollarii hujus oſtendere magnitudines proportionales E, G, F, H etiam inverſe proportionales eſſe, ſc. G eſſe ad E, ut H ad F; quod quidem verum eſt, minime autem ex hac Propoſitione vel ejuſdem demonſtratione dependet. Cum enim dicit "Quoniam igitur demonſtratum eſt, ſi K ſuperat M, et L "ipſam N ſuperare" &c. Oſtenſum quidem hoc eſt in demonſtratione Propoſitionis, non tamen ex eo quod proportionales ſint E, G, F, H, hoc enim eſt concluſio ipſius Propoſitionis. Quare illud "Quoniam "igitur demonſtratum eſt" &c. omnino ineptum eſt. Oſtendiſſe enim debuit ſi K ſuperat M, et L ipſum N ſuperare, ex hypotheſi quod E, G, F, H ſunt proportionales, et Def. 5. hujus Libri, quod quidem minime oſtendit; habetur autem hoc in Prop. B. quam loco proprio poſuimus vice hujus Corollarii. et Corollarium aliud Prop. 4$^{\text{tae}}$ additum eſt neceſſarium quidem Demonſtrationi Prop. 18. hujus libri, aliaſque non raro utile, cujus demonſtratio continetur in ea Propoſitionis.

## PROP. V. LIB. V.




In conſtructione, demonſtrationi hujus praemiſsâ, quae habetur in textu Graeco, ejuſque verſionibus Latinis, requiritur ut quotuplex eſt AE ipſius CF, totuplex fiat EB ipſius CG, hoc eſt requiritur ut EB ſecetur in tot partes aequales quot ſunt in AE aequales ipſi CF. ex hoc autem manifeſtum eſt conſtructionem hanc non eſſe Euclidis. non enim docet Euclides quomodo ſecari poſſint rectae lineae, nedum aliae magnitudines, in partes aequales, antequam ad Prop. 9. Lib. 6. veniat.

nunquam

nunquam autem in constructione jubet aliquid fieri, quod facere non prius docuerat. Constructionem igitur mutavimus in eam quam sine dubio Euclides dederat, in qua nihil requiritur praeterquam quod magnitudo sibi ipsi aliquoties addatur. et haec quidem habetur in versionibus ex Arabica lingua, quamvis in iisdem enuntiatio Propositionis, ejusque demonstratio foede depravata sint. Jacobus etiam Peletarius, qui primus, quantum scio, errorem hunc observavit, legitimam constructionem dedit in Euclide suo, postquam erroneam dederat, quam dicit se omittere noluisse, quod subtilis sit et ad similes reperiendas ingenium acuat; cum revera nulla sit inter demonstrationes differentia nisi in constructione, quam quidem ab imperito Librario ortam esse admodum verisimile videtur. Clavius etiam et vulgarem et legitimam constructionem tradit, non tamen observavit, ut neque Peletarius, rationem propter quam una alteri praeferenda sit.

## PROP. VI. LIB. V.

Hujus duo sunt casus, quorum prioris tantum, qui magis simplex est, demonstratio in Graecis habetur. et verisimile est Theonem existimasse satis fuisse hunc tradere, cum neuter eorum alicui demonstrationi inserviret in mutilata ejus editione Lib. $5^{ti}$; et eodem jure alterum casum, ut et Propositionem quintam omisisse potuisset. alterius autem demonstratio addita est, uterque enim, ut et Prop. 5. necessarius est demonstrationi Prop. 18. hujus libri. Versiones etiam ex Arabica lingua breviter praebent utrumque casum.

## PROP. A. LIB. V.

Propositione hâc saepissime utuntur Geometrae, et in 25. hujus Libri, 31. Lib. 6. 34. Lib. 11. et 15. Lib. 12. adhibetur; a Theone autem ex Elementis sublata videtur, quoniam satis evidens apparebat

parebat ei aliisque qui confusaneam et indistinctam proportionalium ideam apud vulgus receptam, substituunt loco accuratae ideae quae ex Definitione 5. Lib. 5. habetur. neque dubium est Eudoxum vel Euclidem qui hâc nihilo difficiliores $7^{timam}$ sc. et $9^{am}$ hujus Libri demonstratione munivit, etiam huic in Elementis locum dedisse.

Ex ea autem Alphonsus Borrellius ansam arripuit graviter, sed iniquissime culpandi Definitionem 5. hujus Libri. en ejus verba in pag. 126. Euclidis sui restituti Edit. Pisis 1658, "Nec demum haec minima cognitio ex dicta proprietate" quae sc. continetur in Def. 5. 5. "colligi potest, quod scilicet, si quatuor magnitudines sint proportionales, cum prima excedit secundam, necessario tertia magnitudo quartam superare debet; quod Clavius confitetur in 16. Prop. Lib. 5. Elementorum." Clavius autem hoç disertis verbis non confitetur, sed occasionem dedit Borrellio haec de se scribendi, cum in loco citato Clavius Commandinum reprehendat, et quidem recte, quod Propositionem hanc ex Prop. 16. Lib. 5. demonstret, neque tamen ipse Clavius aliquam ejus demonstrationem tradat, sed eam perspicuam esse putet ex natura proportionum, ut loquitur in fine Prop. 14. et 16. 5. suae editionis, et eum sequitur Petrus Herigonius in schol. 1. Prop. 14. Lib. 5. quasi aliqua esset natura proportionalium prior eâ quae ex ipsarum Definitione intelligenda est. et quidem, quamvis demonstratio Propositionis admodum sit facilis, nullus tamen, quantum scio, eam hactenus dedit, praeter Doctissimum Barrovium qui in responsione sua ad Borellii objectionem ex Definitione $5^{ta}$ hujus Libri eam indirecte sed breviter et perspicue ostendit pag. 322. Lect. Mathem. facile autem directe demonstratur ex eadem Definitione, quamobrem post Propositiones de aeque multiplicibus ei locum dedimus.

PROP. B.

## PROP. B. LIB. V.

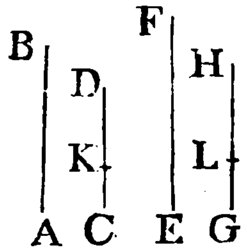
Haec etiam ex Definitione 5ta facile fluit, quare post praecedentem merito locatur. ineptissime enim posita fuit ut Corollarium Prop. 4. Lib. hujus. Vid. Notam ad Cor. ejus Prop.

## PROP. C. LIB. V.

Propositio haec saepius a Geometris usurpatur, et necessaria est Prop. 5tae et 6tae Lib. 10. Clavius in notis post Def. 8. Lib. 5. eam, in numeris tantum, ostendit ope quarundam Propositionum Libri 7. ut sc. Definitionem 5. Lib. 5. quatenus numeris congruit, ex eâ numerorum proportionalium quae habetur in Def. 20. Lib. 7. demonstret. plerique autem Commentatores existimant difficile esse ostendere quatuor magnitudines quae proportionales sunt secundum Def. 20. Lib. 7. proportionales quoque esse secundum Def. 5. Lib. 5. Verum hoc facile ut sequitur ostendi potest.

1mo, Sint A, B, C, D quatuor magnitudines quarum prima A aeque multiplex, vel eadem pars est secundae B, ac tertia C quartae D; erunt A, B, C, D proportionales. Demonstratur hoc in Prop. C.

2do, Si fuerit prima AB eaedem partes secundae CD, ac tertia EF quartae GH; erit et in hoc casu AB ad CD, ut EF ad GH.




Sit CK pars ipsius CD, et GL eadem pars ipsius GH; et sit AB aeque multiplex CK, atque EF ipsius GL. Ergo per Prop. C. Lib. 5. est AB ad CK, ut EF ad GL. sunt autem CD, GH aeque multiplices ipsarum CK, GL; quare per Cor. Prop. 4. Lib. 5. est AB ad CD, ut EF ad GH.

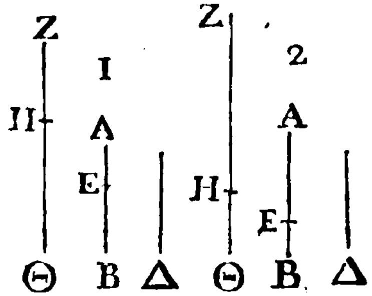
PROP. D.

## PROP. D. LIB. V.

Propositio haec non raro ad alias demonstrandas adhibetur, et necessaria est Propositioni 9. Lib. 6. videtur autem Theonem eam omisisse propter rationem in Notis ad Prop. A. memoratam.

## PROP. VIII. LIB. V.

In demonstratione hujus Propositionis ut nunc habetur in textu Graeco, duo sunt casus, (vid. demonstrationem in editione Hervagii aut Gregorii) quorum primus est is in quo AE minor est EB; et in hoc necessario sequitur HΘ multiplicem ipsius EB majorem esse ZH aeque multiplici ipsius AE, quae quidem ipsius AE multiplex, ex constructione, major est Δ; unde et HΘ major erit Δ. sed in casu secundo, in quo sc. EB minor est ipsa AE, quamvis ZH major fuerit ipsa Δ, potest tamen HΘ minor esse eâdem Δ; unde non potest sumi multiplex ipsius Δ quae primò major sit ipsâ K sive HΘ, quoniam simplex Δ eâdem est major. quare necesse fuit auctori hujus demonstrationis unam partem constructionis mutare. sine necessitate vero mutavit, in hoc secundo casu, aliam partem constructionis in primo adhibitam, quando sc. jubet sumere N multiplicem ipsius Δ primò majorem ipsâ ZH; potuit enim sumsisse ipsius Δ multiplicem quae primò major sit ipsa HΘ sive K, ut factum fuit in primo casu. inepte etiam istam K in demonstratione utriusque casus adducit, nulli enim rei inservit, nisi ut demonstratio prolixior evadat. est etiam tertius casus cujus mentio non facta est in hac demonstratione, is sc. in quo AE in primo, aut EB in secundo casu major est quam Δ; in hoc autem sumendae sunt quae-



vis ipsius AE, et EB aeque multiplices, puta duplae ipsarum, ut in hac Editione factum est, in qua omnes casus simul demonstrati sunt. ex his autem liquet Theonem aut alium non satis Geometriae peritum Propositionem hanc vitiasse.

## PROP. IX. LIB. V.

Hujus Propositionis demonstrationem dedimus magis explicitam eâ quae in Elementis hactenus habetur.

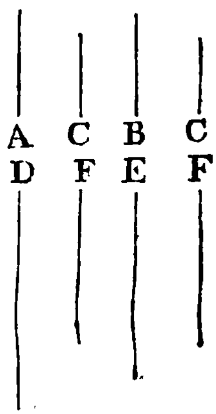
## PROP. X. LIB. V.

Aliam hujus demonstrationem tradere necessarium fuit, ea enim quae in Editionibus Graecis et Latinis, aliisque habetur legitima non est. verba enim *major*, *eadem* sive *aequalis*, *minor* de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dicuntur, ut ex definitione $5^{ta}$ et $7^{tima}$ hujus Libri patet. ope igitur harum examinemus demonstrationem Propositionis decimae, quae ita procedit. "Habeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C. dico A quam B majorem esse. si " enim non est major, vel aequalis est vel minor. aequalis autem non " est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad C eandem haberet rationem; atque eandem non habet. non igitur A ipsi B est aequa- " lis." vis hujus ratiocinii haec est, si fuerit A ad C, ut B ad C, sumptis ipsarum A, B quibuscunque aeque multiplicibus, et sumptâ quavis multiplici ipsius C, si multiplex ipsius A major fuerit multiplici ipsius C, erit, vi Definitionis 5. Lib. 5. multiplex ipsius B major eâdem multiplici ipsius C. sed quoniam, ex hypothesi, A majorem habet rationem ad C, quam B ad C, erunt, vi Definitionis 7. Lib. 5. quaedam ipsarum A, B aeque multiplices, et quaedam multiplex ipsius C tales, ut multiplex ipsius A major sit multiplici ipsius C, at multiplex ipsius B non major sit multiplici ejusdem C. haec autem Propositio directe repugnat praecedenti.

praecedenti. quare A non eſt aequalis ipſi B. pergit demonſtratio, "ſed neque minor eſt A quam B, haberet enim A ad C, minorem rationem quam B. atqui non habet minorem, non igitur A minor eſt quam B" &c. hic dicitur "haberet A ad C, minorem rationem quam B ad C," ſive, quod idem eſt, haberet B ad C, majorem rationem quam A ad C, hoc eſt, vi Def. 7. Lib. 5. erunt quaedam ipſarum B, A aeque multiplices, et quaedam ipſius C multiplex tales, ut multiplex ipſius B major ſit multiplici ipſius C, at multiplex ipſius A non major ſit eadem multiplici ejuſdem C. et oſtendendum fuit hoc nunquam contingere poſſe, ſi ratio A ad C, major fuerit quam ratio B ad C; demonſtrandum igitur fuit, in hoc caſu multiplicem ipſius A ſemper ſuperare multiplicem ipſius C, ſi multiplex ipſius B eandem ſuperet; hoc enim oſtenſo, manifeſtum eſſet non poſſe B ad C, majorem rationem habere quam A ad C, hoc eſt non poſſe A ad C, minorem habere rationem quam B ad C. minime autem oſtenſum eſt hoc in demonſtratione Propoſitionis decimae, ſed ſi decima demonſtrata eſſet, immediate ex ea deduci poſſet; verum ſine ejus ope non facile idem oſtendetur, ut demonſtrationem tentanti patebit. quare demonſtratio decimae legitima non eſt. Videtur autem eum qui demonſtrationem decimae, quae jam habetur, poſuit vice ejus quam Eudoxus aut Euclides dederat, deceptum fuiſſe transferendo id quod manifeſtum quidem eſt de magnitudinibus, ad rationes, magnitudinem ſc. quamvis non poſſe ſimul majorem et minorem eſſe aliâ. Quae eidem aequalia, et inter ſe ſunt aequalia, Axioma eſt maxime evidens, ſi de magnitudinibus intelligatur; Euclides autem eo non utitur ad oſtendendum rationes quae eidem rationi ſunt eaedem, inter ſe eaſdem eſſe, ſed hoc explicite demonſtrat in Prop. 11. Lib. 5. Demonſtrationem autem decimae quam in textu poſuimus eandem eſſe cum ea Eudoxi aut Euclidis vix dubitandum eſt, cum ex ipſa Definitione majoris rationis,

nis, $7^{\text{tima}}$ ſc. Lib. 5. concluſio decimae breviter et directe oſtendatur.

Propoſitio autem praedicta ope decimae ita oſtenditur. Habeat A ad C, majorem rationem quam B ad C, ſi ipſarum A, B ſumantur aeque multiplices quaedam, et ipſius C quaedam multiplex, ſitque multiplex B major multiplici ipſius C, erit et multiplex A major eâdem ipſius C multiplici.




Sint enim ipſarum A, B aeque multiplices D, E, et ipſius C multiplex F, ita ut E multiplex ipſius B major ſit F; erit et D multiplex ipſius A major F.

Quoniam enim A habet ad C, majorem rationem quam B ad C, erit per 10. 5. A major quam B; igitur D multiplex ipſius A major erit E aeque multiplici ipſius B. eſt autem E major F; multo igitur D major eſt ipsâ F.

## PROP. XIII. LIB. V.

In verſionibus Commandini, Briggii et Gregorii habetur ad initium demonſtrationis, "et multiplex quidem C ſuperat multiplicem D; multiplex vero E non ſuperat multiplicem F." quae quidem ex textu Graeco ad verbum tranſlata ſunt. ſenſus autem loci manifeſte requirit ita legantur, viz. "ut multiplex quidem C ſuperet multiplicem D; multiplex vero E non ſuperet multiplicem F." et hoc modo hic locus recte reſtitutus fuit in primis editionibus Elementorum ex verſione Commandini quae Oxoniae impreſſa fuerunt. in poſterioribus vero, ſaltem anni 1747, error textus Graeci retentus eſt.

Corollarium additum eſt Propoſitioni $13^{\text{tiae}}$ quod neceſſarium ſit Propp. 20, 21. hujus Libri, et aeque utile ſit ac ipſa Propoſitio.

PROP. XIV.

## PROP. XIV. LIB. V.

Hujus duos caſus, quorum demonſtratio non habetur in textu Graeco, viſum eſt addere. Eorum enim demonſtratio non omnino ſimilis eſt demonſtrationi primi caſus.

## PROP. XVII. LIB. V.

Ordo demonſtrationis hujus in alium magis naturalem, in paucis, mutatus eſt. quod etiam factum fuit in Prop. 11.

## PROP. XVIII. LIB. V.

Demonſtratio hujus minime eſt Euclidis, nec legitima eſt. nam in ea ponitur, tribus propoſitis magnitudinibus, quarum duae ſaltem ſunt ejuſdem generis, quartam exiſtere ipſis proportionalem; priuſquam autem hoc oſtenſum fuerit, nihil valebit demonſtratio quae nunc legitur. verum hoc ſine demonſtratione aſſumitur, neque, quantum video, oſtendi poteſt ope Propoſitionum hanc praecedentium; tantum abeſt ut pro Axiomate habeatur, ut Clavius poſt Definitiones Lib. 5. alios interpretes ſecutus, volebat. Euclides certe id non oſtendit, nedum quomodo quarta illa proportionalis inveniri poteſt, antequam ad 12. 6ti Elementi veniat. nunquam autem aliquid in demonſtratione Propoſitionis aſſumit quod non prius oſtenderat, ſaltem quod exiſtere poſſe non perſpicuum ſit; ope enim Propoſitionis incertae concluſio certa elici non poteſt. vice igitur demonſtrationis quae nunc habetur, quamque certum eſt Theonem, vel alium quendam, loco demonſtrationis Euclideae, utpote prolixioris, ſubſtituiſſe, legitimam repoſuimus. ut vero Prop. 17. cujus 18va eſt converſa, demonſtratur ope Prop. 1. et 2dae hujus Libri, ita in hac quam dedimus demonſtratione Prop. 18. tum Propoſitio 5ta, tum uterque caſus Prop. 6tae, Lib. 5. neceſſario adhibentur, quae

quae quidem Propositiones sunt conversae $1^{mae}$ et $2^{dae}$. hisce autem, quintâ sc. et sexta, nulla Propositio hujus Libri, ut eum nunc habemus, utitur; neque ulli in Elementis praeterquam huic $18^{vae}$ utiles esse possunt. et hoc quidem certum est indicium easdem ab Euclide in sua hujus $18^{vae}$ demonstratione adhibitas fuisse, eamque quam posuimus, quaeque, ut fieri debuit, conversa est demonstrationis $17^{mae}$, ab ea Eudoxi vel Euclidis haud differre. nulli enim usui inservirent $5^{ta}$ et $6^{ta}$ si in demonstrationibus Lib. 5. adhibitae non essent, ut reliquae de aeque multiplicibus Propositiones omnes adhibitae sunt.

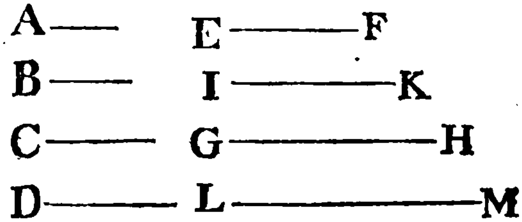
Hieronymus Saccherius naevum hunc inesse demonstrationi hujus $18^{vae}$ agnoscit in Libro suo cui Titulus Euclides ab omni naevo vindicatus, Mediolani anno 1733, impresso. ut vero naevum hunc tollat, et demonstratio $18^{vae}$ quam nunc habemus legitima reddatur, demonstrare conatur sequentem Propositionem in pag. 115. Libri praedicti, viz.

" Sint quatuor magnitudines A, B, C, D quarum duae priores in " suo proprio genere, ac similiter posteriores vel in eodem cum priori- " bus genere, vel in alio quodam suo proprio genere consistant. Dico " rationem tertiae C ad quartam D vel aequalem fore, vel majorem, " vel minorem ratione primae A ad secundam B." Post duas autem Propositiones, tanquam Lemmata, praemissas ita procedit.

" Vel inter possibiles aeque multiplices primae A, et tertiae C, ac " simul inter possibiles aeque multiplices secundae B, et quartae D, " una quaepiam reperitur EF multiplex primae A, et IK multiplex se- " cundae B invicem aequales; ac simul (in eodem casu) una quaedam " GH multiplex tertiae C aequalis ipsi LM multiplici quartae D. vel " nusquam talis aequalitas reperitur. si primum, constat ex jam demon- " stratis ita fore A ad B, ut C ad D. sin vero nusquam reperitur ejus- " modi simul ex utraque parte aequalitas; vel saltem ad alterutram

" partem

“ partem reperitur, ut puta ad partem primae A [et ſecundae B] vel
“ nuſquam. ſi primum; ergo (ex praemiſſis Euclideae majoris, ac mi-
“ noris Proportionis Definitione) habebit A ad B majorem aut mino-
“ rem proportionem, quam C ad D; prout GH multiplex tertiae C
“ minor fuerit, aut major ipſa LM multiplici quartae D. ſin vero ſe-
“ cundum; ergo ex una qui-
“ dem parte, v. g. ad ipſas A
“ primam, et B ſecundam, con-
“ tingere poterit, ut illa mul-
“ tiplex EF minor ſit alterâ
“ multiplici IK, dum vice




“ verſa ex altera parte illa multiplex GH major eſt alterâ multiplici
“ LM. Tunc autem (ſub eadem Euclidea Definitione) ratio primae A
“ ad ſecundam B erit minor ratione tertiae C ad quartam D; aut vice
“ verſâ.

“ Igitur demonſtratum manet ſubſtitutum illud Axioma,” [ i. e. Propoſitio praedicta] &c.

Minime, ſed ſine demonſtratione manet; quod enim dicit poſſe contingere, poterit innumeris caſibus nunquam contingere, et propterea demonſtratio ejus nulla eſt. nam, ex. gr. ſi fuerit A latus et B diameter quadrati; C vero latus et D diameter alterius quadrati; nunquam poterit multiplex ipſius A aequalis eſſe multiplici ipſius B; nec aliqua ipſius C aequalis alicui ipſius D, ut notum eſt; et tamen nunquam contingere poterit ut, exiſtente multiplici quadam ipſius A majore, vel minore multiplici quadam ipſius B, multiplex ipſius C vice verſa minor vel major ſit multiplici ipſius D; ſumptis ſc. ipſarum A, C aeque multiplicibus, et ipſarum B, D aeque multiplicibus. ſunt enim A, B, C, D proportionales.

Idem autem judicium ferendum eſt de Demonſtratione quam quidam

dam tradunt Propositionis 1. Lib. 6. quod de Demonstratione hujus Prop. 18. datum fuit; quoniam eodem quo haec fundamento, minime sc. demonstrato, innititur.

## PROP. XIX. LIB. V.

Corollarium huic subjunctum est, quod aeque saepe usui sit atque ipsa Propositio. Corollarium autem quod in textu Graeco huic 19$^{nae}$ appositum est, manifeste ostendit Librum 5$^{tum}$ a Geometriae ignaris corruptum fuisse. etenim conversio rationis nullo modo pendet ex 19$^{na}$. et demonstratio ejus quam ope 19$^{nae}$ tradunt varii Euclidis interpretes legitima non est, ut recte observavit Clavius, qui demonstrationem legitimam dedit, quam in Propositione E posuimus; eam autem posuit tanquam Corollarium Propositionis 19. quod his verbis incipit, "Hinc "facile sequitur," cum nullo modo inde sequatur.

## PROP. XX, XXI, XXII, XXIII, et XXIV. LIB. V.

Demonstrationes Prop. 20. et 21. breviores sunt iis quibus Euclides utitur in Propositionibus hisce facilioribus vel in praecedentibus, vel in libris sequentibus. visum igitur est eas magis explicite tradere. Propositio etiam 22. et 23. ad quotcunque magnitudines, ut fieri debuit, extenduntur. et simili modo extendi potest 24. ut in Corollario notatur, et aliud Corollarium additum est, aeque ac Propositio utile. verbum etiam "utcunque" quod in textu Graeco et versionibus deficiebat, additum est prope finem Prop. 23.

In scripto D. Philippi Naudaei, post mortem ejus edito in Historia Academiae Regiae Berolinensis anni 1745, pag. 50. Propositio 23. Lib. 5. Euclidis arguitur tanquam obscure enuntiata, et inde via longiore demonstrata. Verum enuntiatio ibi tradita non est Euclidis sed Tacqueti ut in scripto agnoscitur, quae quidem, quamvis non aeque commoda,

commoda, reipſa eadem eſt cum ea quae nunc habetur in Elementis. in ea autem nihil eſt obſcuri, quamvis auctor ſcripti, magnitudines proportionales perverſo ordine diſponat, unde obſcurior evadit enuntiatio. ſine dubio autem Euclides hanc 23$^{\text{tiam}}$, aeque ac 22$^{\text{dam}}$, de quotcunque magnitudinibus, quae binae ſumptae ſunt proportionales, non de ſex tantum enuntiavit; et huic generali caſui Naudaei enuntiatio minime rite accommodari poteſt.

Demonſtratio vero Propoſitionis 23. Lib. 5. quae in ſcripto illo traditur omnino eſt inepta; ſi enim magnitudines proportionales figurae fuerint planae aut ſolidae, nullum ex ipſis rectangulum (quod ille imperite productum vocat) fieri intelligi poteſt. et ſi dicatur, in hoc caſu rectas lineas aſſumendas eſſe figuris proportionales; eo modo demonſtratio, Euclidis demonſtratione multo longior evaderet. quin ſi apta eſſet Naudaei demonſtratio, quis non videt eam non poſſe in Libro 5$^{\text{to}}$ locum habere?

## PROPP. F, G, H, K. LIB. V.

Propoſitiones has fini Libri 5$^{\text{ti}}$ adjecimus, quoniam ſaepius iis utuntur Geometrae veteres et recentiores. et quidem in multis caſibus rationes compoſitae in demonſtrationibus ſine earum ope adhiberi non poſſunt.

Qui cupit doctrinam de proportionalibus Libro hoc quinto traditam ſolide defenſam videre, et argumenta contra eam ab And. Tacquet, Alph. Borellio aliiſque adducta pleniſſime confutata, conſulat magni Barrovii Lectiones Mathematicas 7. et 8$^{\text{vam}}$ Anni 1666.

Emendato jam Libro quinto, ſententiae Clariſſ. Barrovii lubentiſſime aſſentior, "Nihil" ſcilicet "extare in toto Elementorum opere "proportionalium doctrina ſubtilius inventum, ſolidius ſtabilitum, ac"curatius pertractatum." quod quidem Geometras exiſtimaturos non potuiſſe dici, eodem quo nunc jure, ex tempore Theonis hactenus, ſperare licet.

## DEF. II. et V. LIB. VI.

DEFINITIO ſecunda non videtur Euclidis eſſe, ſed cujuſdam imperiti. Nulla enim figurarum reciprocarum mentio fit ab Euclide, neque, quantum ſcio, a quocunque alio Geometra. obſcure enuntiata eſt, quare eam magis claram exhibuimus. vice autem ejus haec quae ſequitur ponenda videtur, viz.

## DEF. II.

Duae magnitudines dicuntur eſſe reciproce proportionales duabus aliis, quando altera priorum eſt ad alteram poſteriorum, ut reliqua poſteriorum ad reliquam priorum.

Definitio autem quinta, quae magno diſcentium incommodo a Theonis tempore in Elementis locum habuit, ex iis, propter rationes in notis ad Prop. 23. Lib. 6. adducendas, merito ſublata eſt.

## PROP. I, et II. LIB. VI.

Corollarium primae harum additum ſaepiſſime adhibetur. Enuntiatio vero ſecundae magis generalis reddita eſt.

## PROP. III. LIB. VI.

Caſus ſecundus, qui habetur in Prop. A. pariter utilis ac primus, huic Propoſitioni additus eſt; videlicet is in quo angulus trianguli exterior bifariam ſecatur recta lineâ. Demonſtratio ejus ſimillima eſt demonſtrationi primi caſus, et ob hanc forſan cauſam tum ea, tum enuntiatio caſus, omiſſa eſt ab imperito quodam editore. Pappus certe hâc,

tanquam

tanquam Propositione elementari, sine demonstratione utitur in Prop. 39. Lib. 7. Collectionum Mathematicarum.

## PROP. VII. LIB. VI.

Casum omissum, et in demonstrationibus non raro occurrentem, huic Propositioni addidimus.

## PROP. VIII. LIB. VI.

Manifestum est aliquem mutasse demonstrationem quam Euclides hujus Propositionis dederat. Etenim auctor ejus postquam demonstraverat triangula esse inter se aequiangula, particulatim ostendit latera eorum circa aequales angulos proportionalia esse, quasi hoc non factum fuisset in Propositione quarta hujus Libri. hacc autem superflua non inveniuntur in versione ex lingua Arabica et nunc omissa sunt.

## PROP. IX. LIB. VI.

Demonstratio hujus facta est in casu particulari, in quo scilicet pars tertia abscindenda est a data recta; quare minime videtur Euclidis esse. Praeterea in quatuor magnitudinibus proportionalibus concludit Auctor tertiam aeque multiplicem esse quartae, atque prima est secundae; quod quidem in Libro 5$^{\text{to}}$, ut eum nunc habemus, nullibi ostensum est. sed hoc, ut alia, assumit Editor ex confusanea apud vulgus recepta proportionalium notione. generalem igitur et legitimam Demonstrationem hujus Propositionis tradere necesse fuit.

## PROP. XVIII. LIB. VI.

Demonstratio hujus vitiata videtur. nam in quadrilateris tantum, ostenditur Propositio, neque dicitur, quo modo extendi possit ad rectilinea quinque aut plurium laterum. praeterea in duobus triangulis

 inter

inter ſe aequiangulis concluditur eſſe latus unius ad latus homologum alterius, ut latus aliud primi ad latus alterius huic homologum, ſine permutatione proportionalium, contra morem Euclidis, ut ex ſequente Propoſitione $19^{\text{na}}$ manifeſtum eſt. eodem vitio laborat concluſio, nam latera circa angulos unius rectilinei non oſtenduntur proportionales lateribus circa aequales angulos alterius, rurſus enim omiſit Auctor demonſtrationis permutationem proportionalium. Viſum igitur eſt tradere demonſtrationem hujus via Euclideana, eâdem ſc. quâ utitur in Prop. 20. hujus libri; et in figuris quinquelateris, ut modus quo extendi poteſt ad figuras plurium laterum perſpicue appareat.

## PROP. XXIII. LIB. VI.

Nihil in Geometriae elementis Tyronibus difficilius intellectu haberi ſolet, doctrinâ de rationum compoſitione, quam abſurdam et ἀγεομετρικὴν reddidit Theon, ſubſtituendo Definitionem $5^{\text{tam}}$, Lib. $6^{\text{ti}}$, vice Definitionis bonae rationis compoſitae, quam, ſine dubio, dederat Eudoxus vel Euclides poſt Definitionem rationis triplicatae &c. in Libro $5^{\text{to}}$, proprio ſcilicet ejus loco. Theonis autem Definitio haec eſt; ratio ex rationibus componi dicitur ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα. quam ita vertit Commandinus, "quando rationum quantitates inter ſe multiplicatae, aliquam efficiunt rationem." Walliſius autem πηλικότητες vertit "rationum exponentes." et Gregorius poſtrema Definitionis verba reddit "illius facit quantitatem." quocunque autem ſenſu accipiantur verba "quantitates" ſive "exponentes rationum," ipſarumque "multiplicatio," ἀγεομέτρικὴ et inutilis erit Definitio. Nulla enim poterit eſſe multiplicatio niſi per numerum; quantitas autem ſive exponens rationis, ut Eutocius in Comment. in Prop. 4. Lib. 2. Archimedis de Sphaera et Cylindro, et recentiores interpretantur, eſt numerus qui multiplicans conſequentem producit

ducit antecedentem, five, quod eodem redit, numerus ortus ex divifione antecedentis per confequentem; multae autem funt rationes tales, ut nullus numerus oriri poffit ex divifione antecedentis per confequentem; ex. gr. ratio quam diameter quadrati habet ad ejufdem latus; et ratio quam habet circumferentia circuli ad ipfius diametrum; aliaeque ejufmodi. Praeterea Definitionis hujus apud Euclidem, Archimedem, Apollonium, reliquofque veteres, qui ratione compofitâ faepius utuntur, nullum veftigium invenitur. In 23$^{\text{tia}}$ enim 6$^{\text{ti}}$ Elementi in qua primum rationis compofitae fit mentio, hujus Definitionis, quae hic, fi ullibi, neceffaria fuiffet, ne vel verbum apparet; legitima autem Definitio explicite adhibetur his verbis, " fed ratio K ad M compofita eft ex ratione K ad L, et ra- " tione L ad M." inutilis igitur prorfus et abfurda eft Theonis Definitio. Theonem enim in Elementa eam induxiffe vix dubitari poteft; extat enim in commentariis ejus in Ptolomaei Μεγάλην Σύνταξιν, pag. 62. commentarii; ubi et puerilem tradit ejus explicationem, utpote folummodo eis rationibus convenientem quae numeris exhiberi poffunt; inde autem ad verbum excerpta eft, una cum praedicta explicatione, et Libri fexti Definitionibus praefixa, ut conftat ex Hervagii Editione. Zambertus vero et Commandinus haec iifdem definitionibus in eorum Latinis verfionibus fubjungunt. Non autem agnofcit hanc Definitionem Campanus, nec, ut videtur, codices Arabici quibus ille ufus fuit. Clavius ad Def. 5. Lib. 6. recte judicavit Definitionem rationis compofitae potuiffe factam fuiffe eâdem viâ qua Definitiones rationis duplicatae, triplicatae &c. factae funt, ut fcilicet " quemadmo- " dum propofitis pluribus magnitudinibus proportionalibus, primam ad " tertiam dixit Euclides, Def. 10. Lib. 5. habere proportionem du- " plicatam ejus, quam prima habet ad fecundam; primam vero ad " quartam habere proportionem triplicatam ejus, quam prima ad fecun- " dam habet, hoc eft compofitam ex duabus aut tribus intermediis pro-

" portionibus

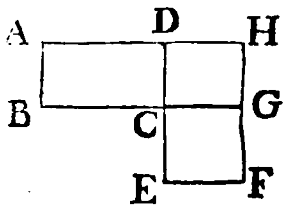
"portionibus aequalibus, et ſic deinceps: ita quoque ſi ponantur ordine plures magnitudines ejuſdem generis non proportionales, dicetur prima ad ultimam habere proportionem compoſitam ex omnibus proportionibus intermediis,—ſolum eam ob cauſam, quod illae proportiones intermediae ſunt inter extremas duas magnitudines interjectae; quemadmodum Definitione 10$^{ma}$, Lib. 5. proportio primae ad tertiam dicebatur duplicata, hoc ſolo nomine, quia duae proportiones aequales interpoſitae ſunt inter extremas duas magnitudines: adeo ut non ſit aliud diſcrimen inter hanc compoſitionem proportionum, et illam duplicationem, triplicationem &c. quae Libro 5$^{to}$ explicata eſt, quam quod in duplicatione, triplicatione &c. proportionum, interjiciuntur proportiones omnes aequales, in compoſitione vero proportionum non neceſſe eſt interpoſitas aequales eſſe." Edmundus vero Scarburgh in Euclide ſuo Anglico, pagg. 238, 266, aperte affirmat Definitionem 5. Lib. 6. ſuppoſititiam eſſe, et veram rationis compoſitae Definitionem, in Definitione 10. Lib. 5. rationis ſcilicet duplicatae, contineri, vel ex ea ſubintelligendam eſſe, eo videlicet modo quo Clavius eam in praecedente citatione explicavit. Hi autem et alii Recentiores definitionem iſtam 5$^{tam}$, Lib. 6. ſimul retinent, prolixiſque Commentariis illuſtrant, quum potius eam ex Elementis ſuſtuliſſe debuiſſent.

Etenim, comparando Definitionem 5. Lib. 6. cum Propoſitione 5. Lib. 8. clare apparebit Definitionem iſtam ſuppoſititiam eſſe. Nam in Propoſitione illa demonſtratur numerum planum cujus latera ſunt C, D habere ad numerum planum cujus latera ſunt E, Z (vid. Hervagii aut Gregorii Editionem) rationem compoſitam ex rationibus laterum, hoc eſt ex rationibus C ad E, et D ad Z. ratio vero compoſita ex rationibus C ad E, et D ad Z, ex Def. 5. Lib. 6. et explicatione quam ejuſdem tradunt omnes Commentatores, eſt ratio numeri facti ex multiplicatione

tiplicatione antecedentium C, D ad factum ex multiplicatione consequentium E, Z, hoc est ratio numeri plani cujus latera sunt C, D ad numerum planum cujus latera sunt E, Z. Igitur Propositio quae est Definitio 5. Lib. 6. eadem omnino est cum Propositione 5. Lib. 8. In altero igitur horum locorum delenda est; absurdum enim est Propositionem in Elementis poni tanquam Definitionem, et eandem in iisdem demonstrari. Nullum autem dubium est Prop. 5. Lib. 8. debere locum habere in Elementis, idem enim in ea demonstratur de numeris planis quod in Prop. 23. Lib. 6. demonstratur de parallelogrammis aequiangulis; quare Definitio 5. Lib. 6. in Elementis locum habere non potest. unde perspicue apparet eam minime positam fuisse ab Euclide, sed a Theone vel alio quodam Geometriae minus perito.

Nullus autem, quantum scio, proprium usum rationis compositae hactenus ostendit, vel propter quam causam in Geometriam introducta fuerit; quum omnia in quibus solet adhiberi ratio composita, possint etiam sine ejusdem auxilio, tum enuntiari, tum demonstrari. Usus autem rationis compositae in hoc unice consistit, quod ejus ope periphrases evitentur, et ita Propositiones possint vel enuntiari vel demonstrari brevius, vel utrumque fieri possit. Ex. gr. si Propositio haec 23. Lib. 6. enuntianda esset, non facta rationis compositae mentione, ita fieret; si duo parallelogramma aequiangula fuerint, et fiat ut latus primi ad latus secundi, ita quaevis recta assumpta ad secundam rectam; ut vero latus reliquum primi ad latus reliquum secundi, ita fiat secunda recta ad tertiam; erit parallelogrammum primum ad secundum, ut prima recta ad tertiam rectam. et demonstratio eadem esset cum ea quam nunc habemus. Veteres autem cum vidissent hanc enuntiationem posse breviorem reddi, si nomen impositum esset rationi quam habet prima recta ad ultimam, quo nomine simul indicarentur rationes intermediae, primae scilicet ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, et ita deinceps si plures

plures fuerint rectae; rationem hanc primae ad ultimam dixerunt rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, hoc est, in praesenti casu, ex rationibus quae eaedem sunt rationibus laterum. atque ita brevius Propositionem enuntiaverunt, viz. Si fuerint duo aequiangula parallelogramma, habebunt inter se rationem eandem ei quae composita est ex rationibus quae eaedem sunt rationibus laterum. quae quidem paucioribus verbis effertur quam praecedens enuntiatio, eodem autem sensu. Vel adhuc brevius; aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eandem ei quae composita est ex rationibus laterum. atque hae duae enuntiationes ultimae, prima praesertim, conveniunt demonstrationi quae nunc in textu Graeco habetur. potest autem Propositio brevius demonstrari, ut apud Franciscum Candallam hoc modo, viz. sint aequiangula parallelogramma ABCD, CEFG, et compleatur parallelogrammum CDHG; quoniam igitur tria sunt parallelogramma AC, CH, CF, habebit (ex definitione rationis compositae) primum AC ad tertium CF, rationem quae composita est ex ratione AC ad CH, et ratione CH ad CF; est autem parallelogrammum AC ad ipsum CH, ut recta BC ad ipsam CG; et parallelogrammum CH est ad ipsum CF, ut recta DC ad rectam CE; ergo habet parallelogrammum AC ad ipsum CF rationem quae composita est ex rationibus quae eaedem sunt rationibus laterum. et huic demonstrationi convenit enuntiatio quae nunc habetur, viz. parallelogramma aequiangula inter se habent rationem ex laterum rationibus compositam. nam vulgaris lectio " ex lateribus compositam" absurda est. retinuimus autem in hac Editione demonstrationem quae habetur in textu Graeco, quamvis prolixiorem eâ quam tradit Candalla, quoniam in illa, non autem in hac, ostenditur quomodo ex datis rationibus laterum, inveniatur ratio



ratio ex iis composita, hoc est ratio parallelogrammorum; ut Tyrones in similibus casibus rationem ex duabus vel pluribus rationibus datis compositam invenire queant.

Ex dictis observari potest, in magnitudinibus quibuscunque ejusdem generis A, B, C, D &c. rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, secundae ad tertiam et ita deinceps ad ultimam, nomen tantum esse seu modum loquendi, quo significatur ratio quam habet prima A ad ultimam D, et quo simul indicantur rationes omnium magnitudinum A ad B, B ad C, C ad D a prima ad ultimam ad se invicem, sive eaedem fuerint inter se, sive non fuerint; sicut in magnitudinibus deinceps proportionalibus A, B, C, D &c. ratio duplicata primae ad secundam nomen tantum est seu modus loquendi, quo significatur ratio quam habet prima A ad tertiam C, et quo simul indicatur duas esse rationes magnitudinum a prima ad ultimam, primae sc. A ad secundam B, et secundae B ad tertiam sive ultimam C, quae quidem rationes inter se sunt eaedem; et ratio triplicata primae ad secundam est nomen sive modus loquendi, quo significatur ratio primae A ad quartam D, et quo simul indicatur tres esse rationes magnitudinum a prima ad ultimam, primae sc. A ad secundam B, et ipsius B ad tertiam C, et ipsius C ad quartam seu ultimam D, quae quidem rationes sunt eaedem inter se; idemque similiter de aliis rationibus multiplicatis dicendum. hanc autem veram esse harum rationum explicationem patet ex Definitionibus rationis duplicatae et triplicatae, in quibus Euclides utitur verbo λέγεται, dicitur sive nominatur; quo verbo, sine dubio utebatur etiam in Definitione rationis compositae quam Theon aliusve ex Elementis sustulit; nam idem verbum retentum est in Definitione inepta rationis compositae quae nunc in Def. 5. Lib. 6. habetur. In citationibus autem harum Definitionum aliquando retinetur, ut in Demonstratione Prop. 19. Lib. 6. "prima ad tertiam duplicatam rationem ἔχειν λέ-

"γεται" quae verba Commandinus aliique male reddunt "habet" vice "habere dicitur;" aliquando autem omittitur, ut in Demonstratione Prop. 33. Lib. 11. ubi habetur "prima ad quartam triplicatam rationem ἔχει; sine dubio autem ἔχει hic significat idem quod ἔχειν λέγεται. ita etiam in Prop. 23. Lib. 6. ubi legitur "sed ratio K ad "M σύγκειται" composita est "ex ratione K ad L, et ratione L ad "M," brevitatis sc. gratia, cum dicendum fuit, ut in Definitione, συγκεῖσθαι λέγεται, componi dicitur.

Ex his autem, et Propositionibus quas Libro quinto subjunximus, intelligi et explicari possunt omnia quae apud Geometras tum veteres tum recentiores de ratione composita habentur.

## PROP. XXIV. LIB. VI.

Videtur imperitum quendam ex duabus diversis hujus Propositionis demonstrationibus hanc quam nunc habemus composuisse; ex una scilicet quae per Prop. 2. hujus Lib. 6. et alterâ quae per Prop. 4. ejusdem fieri potest. postquam enim per 2. hujus et componendo, permutandoque, ostenderat latera circa communem angulum parallelogrammorum proportionalia esse, immediate concludere potuisset proportionalia esse latera circa reliquos angulos aequales, ope scilicet Prop. 34. Lib. 1. et Prop. 7. Lib. 5. Verum ille hoc negligens pergit ostendere triangula et parallelogramma aequiangula esse, et longo circuitu, ope Prop. 4. hujus, et 22. Lib. 5. concludit rem eandem. manifestum propterea est hanc inscite factam demonstrationem minime Euclidis esse. superfluis igitur rejectis, demonstrationem simpliciorem dedimus ope 4$^{tae}$ hujus, eandem scilicet quam praebent codices Arabici ope 2$^{dae}$ hujus et componendo; in hisce autem permutatio negligitur, neque parallelogramma aequiangula esse ostenduntur, quod Tyronum gratia faciendum fuit,

PROP. XXV.

## PROP. XXV. LIB. VI.

Liquido patet demonſtrationem hujus quam Euclides dederat vitiatam fuiſſe ab Editore quodam Geometriae minus perito. poſtquam enim oſtenderat " ut rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE " parallelogrammum ad parallelogrammum EF" opus fuit ſolummodo addere, " eſt autem rectilineum ABC aequale parallelogrammo BE, ae- " quale igitur eſt KGH rectilineum parallelogrammo EF; videlicet " per Prop. 14. Lib. 5." ſed inter has duas ſententias interpoſuit " quare permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, " ita rectilineum KGH ad EF parallelogrammum" putavit ſcilicet non tam perſpicuum eſſe concludere ſecundam quatuor proportionalium quartae aequalem eſſe, ex aequalitate primae et tertiae, quod quidem demonſtratum eſt in Prop. 14. Lib. 5. quam concludere tertiam aequalem eſſe quartae, ex aequalitate primae et ſecundae, quod nuſpiam in Elementis quae jam habemus oſtenſum eſt. verum quamvis haec Propoſitio, tertiam ſcilicet quatuor proportionalium aequalem eſſe quartae, ſi prima aequalis fuerit ſecundae, fuiſſet ab Euclide Elementis ſuis inſerta, ut veriſimile eſt eam fuiſſe, nunquam tamen ille in praeſenti caſu eâdem uſus fuiſſet; quoniam, ut dictum fuit, ſine redundante hac permutatione proportionalium concluſio eadem directe elici poteſt. haec autem fuſius oſtendimus, tum quoniam certum praebent indicium textum Euclidis vitiatum fuiſſe, idem enim error invenitur in textu Graeco Prop. 23. Lib. 11. bis, et bis in Prop. 2. Lib. 12. et in Propp. 5. 11. 12. 18. ejuſdem; in quibus Libri 12. locis excepto ultimo, recte omiſſa eſt haec permutatio proportionalium in verſionis Commandini Editione Oxonienſi; tum ut caveant Geometrae ab uſu permutationis in ſimili caſu, non raro enim Recentiores, et inter alios ipſe Commandinus in Commentario ad Prop. 5. Lib. 3. pag. 6. b. Pappi Alexandrini, et alibi, incidunt in hunc errorem; praeoccupavit ſcilicet multorum mentes vulgaris proportionalium idea, qua fit ut accuratam vix percipiant.

Praeterea quamvis rectilineum ABC cui ſimile faciendum eſt, poſſit eſſe cujuſcunque generis, in demonſtratione tamen Graeci codices habent triangulum vice rectilinei, qui error correctus eſt in verſionis Commandini editione quae Oxonii impreſſa eſt.

## PROP. XXVII. LIB. VI.

Secundus caſus hujus habet ἀλλῶς praefixum quaſi alia eſſet demonſtratio; ab imperito ut videtur Librario. quam vocem recte omiſit Gregorius. ſchema autem hujus ſecundi caſus iiſdem literis alphabeti quae in ſchemate primi caſus adhibitae fuerunt, notari debuit. ut jam factum eſt.

## PROP. XXVIII, et XXIX. LIB. VI.

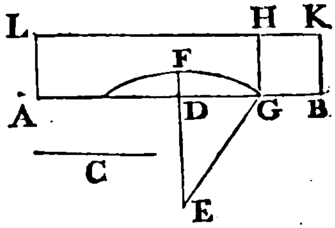
Problemata haec, quorum primo neceſſaria eſt Prop. $27^{\text{tima}}$, ſunt omnium in Elementis maxime generalia et utilia, et a veteribus in ſolutione aliorum Problematum ſaepiſſime adhibita; et propterea inſcite admodum ab And. Tacquet et Claud. Dechales in iis quas dederunt Elementorum Editionibus omittuntur, et inſulſe admodum ab iis dicuntur nullius fere eſſe uſus. Horum caſus quando ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicandum eſt, deficiens, aut excedens quadrato; et quando ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicandum eſt deficiens aut excedens quadrato, frequentiſſime a Geometris uſurpantur. Quare Tyronum gratia viſum eſt eorum conſtructiones, ut ſequitur tradere.

1. Ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare,

plicare, deficiens quadrato. oportet autem datum quadratum non majus esse eo quod a dimidia describitur.

Sit data recta linea AB, datum autem quadratum cui oportet aequale rectangulum ad AB applicare sit illud quod a data recta C describitur non majus existens eo quod sit a dimidio ipsius AB.

Secetur AB bifariam in D, et si quadratum ex AD aequale fuerit quadrato ex recta C, factum jam erit quod proponebatur. si autem non est aequale, erit AD major quam C ob determinationem. ducatur DE ad rectos angulos ipsi AB, et fiat DE aequalis ipsi C; producatur vero ED ad F, ut EF aequalis sit ipsi AD seu DB, et centro E intervallo EF describatur circulus qui occurrat rectae AB in G, et super GB describatur quadratum GBKH, et compleatur rectangulum AGHL; jungaturque EG.




Quoniam igitur bifariam secta est AB in D, erit [a] rectangulum AG, GB una cum quadrato ex DG aequale (quadrato ex DB, hoc est quadrato ex EF sive EG, hoc est) quadratis ex ED, DG. commune auferatur quadratum ex DG, et reliquum rectangulum AG, GB aequale erit quadrato ex ED, hoc est ex C. rectangulum autem AG, GB est ipsum AH rectangulum, quia GH aequalis est ipsi GB. rectangulum igitur AH aequale est dato quadrato ex recta C. Quare ad datam rectam lineam AB dato quadrato ex recta C, aequale rectangulum AH applicatum est deficiens quadrato GK. Quod facere oportebat.

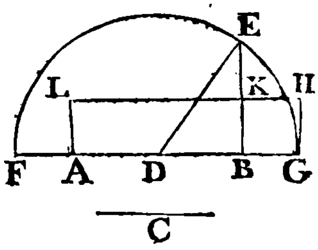
a. 5. 2.

2. Ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, excedens quadrato.

Sit data recta linea AB, datum autem quadratum sit illud quod a data recta C describitur.

Secetur AB bifariam in D, et ducatur BE ad rectos angulos ipsi AB, fiatque

fiatque BE aequalis rectae C, et, junctâ DE, centro D, intervallo DE circulus describatur, qui occurrat ipsi AB productae in G; super BG describatur quadratum BGHK, et compleatur rectangulum AGHL.



Quoniam igitur bifariam secta est AB in D, et ipsi adjicitur BG, erit [a] rectangulum AG, GB una cum quadrato ex DB aequale (quadrato ex DG seu DE, hoc est) quadratis ex EB, BD. auferatur commune quadratum ex DB, et reliquum rectangulum AG, GB aequale erit quadrato ex BE, hoc est quadrato ex recta C. rectangulum autem AG, GB est ipsum AH rectangulum, quia GH aequalis est ipsi GB. rectangulum igitur AH, aequale est quadrato ex recta C. Quare ad datam rectam AB dato quadrato ex C, aequale rectangulum AH applicatum est excedens quadrato GK. Quod facere oportebat.

a. 6. 2.

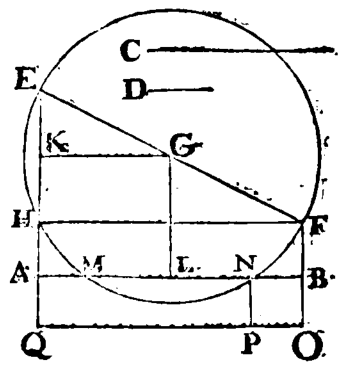
3. Ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicare, deficiens quadrato. oportet autem datum rectangulum non majus esse quadrato quod a dimidia describitur.

Sit data recta AB, datum autem rectangulum id quod rectis C, D continetur non majus existens quadrato ex dimidio rectae AB. oportet ad datam rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum applicare deficiens quadrato.

Ducantur AE, BF ad rectos angulos ipsi AB, et ad easdem ejus partes, quarum AE quidem aequalis sit ipsi C, BF vero rectae D. bifariam secetur juncta EF in G, centroque G intervallo GE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H, et jungatur HF, cui parallela ducatur GK, et ad AB ducatur GL parallela rectae AE.

Quoniam igitur angulus EHF in semicirculo aequalis est angulo recto EAB, parallelae erunt AB, HF, et parallelae sunt AH, BF; quare AH aequalis est BF, et rectangulum EA, AH aequale erit ipsi EA, BF, hoc

hoc est rectangulo C, D. et quoniam aequales sunt EG, GF, et AE, LG, BF inter se parallelae, aequales erunt AL, LB, aequales etiam sunt [a] EK, KH. est autem, ob determinationem, rectangulum C, D a. 3. 3. non majus quadrato ex AL dimidio ipsius AB, ergo et rectangulum EA, AH non majus est quadrato ex AL hoc est ex KG; commune addatur quadratum ex KE, et quadratum [b] ex AK non majus erit quadratis b. 6. 2. ex EK, KG hoc est quadrato ex EG; quare recta AK seu GL non major est ipsâ GE. et siquidem GE aequalis fuerit ipsi GL, circulus EHF continget rectam AB in L, et quadratum ex AL aequale * erit rectangulo EA, AH * 36. 3. sive dato rectangulo C, D; et factum erit quod proponebatur. si vero inaequales fuerint EG, GL erit EG major, et propterea circulus EHF secabit rectam AB; secet in M, N punctis, et super NB describatur NBOP quadratum, et compleatur rectangulum ANPQ. Quoniam igitur aequales sunt [a] ML, LN, et aequales ostensae sunt AL, LB; aequales erunt AM, NB. rectangulum igitur AN, NB aequale est ipsi NA, AM, hoc est [c] rectangulo EA, AH sive rectangulo C, D. rec- c. Cor. 36. 3. tangulum vero AN, NB est ipsum AP, est enim PN aequalis ipsi NB. Ergo rectangulum AP aequale est rectangulo C, D. Igitur ad datam rectam AB, dato C, D rectangulo aequale rectangulum AP applicatum est deficiens quadrato BP. Quod facere oportebat.

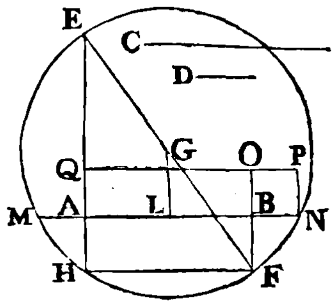



4. Ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicare, excedens quadrato.

Sit AB data recta linea, datum autem rectangulum sit id quod rectis C, D continetur. oportet ad datam rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum applicare excedens quadrato.

Ducantur

Ducantur AE, BF ad rectos angulos ipsi AB, et ad contrarias ejus partes, quarum AE aequalis sit ipsi C, et BF rectae D. jungatur EF et bifariam secetur in G, centroque G, intervallo GE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H, et jungatur HF, et ad AB ducatur GL parallela ipsi AE; occurrat vero circulus rectae AB productae in M, N, et super BN describatur quadratum NBOP, et compleatur rectangulum ANPQ. Quoniam igitur angulus EHF in semicirculo aequalis est angulo recto EAB, parallelae erunt AB, HF; aequales igitur sunt AH, BF, et rectangulum EA, AH aequale rectangulo EA, BF, hoc est ipsi C, D rectangulo. et quoniam aequales sunt ML, LN, ut et AL, LB, erunt et MA, BN aequales, et propterea rectangulum AN, NB aequale est ipsi MA, AN, hoc est [a] ipsi EA, AH sive rectangulo C, D. rectangulum igitur AN, NB, hoc est ipsum AP aequale est rectangulo C, D. ad datam igitur rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum AP applicatum est, excedens quadrato BP. Quod facere oportebat.




a. 35. 3.

Constructiones has $3^{tii}$. et $4^{ti}$. Problematis primus, quantum scio, dedit Willebrordus Snellius in Apollonio suo Batavo, et postea Cl. Halleius in Schol. ad Prop. 18. Lib. $8^{vi}$ Conicorum Apollonii, a se restituti.

Problema 3. ita aliter enuntiatur, datam rectam AB secare in puncto N, et facere rectangulum a segmentis AN, NB aequale dato spatio. vel, quod eodem redit, Datâ summa AB laterum rectanguli, datoque rectangulo magnitudine, latera invenire.

Et Problema 4. idem est cum hoc, invenire in data recta AB producta punctum N quod faciet rectangulum AN, NB aequale dato spatio,

tio, vel quod eodem redit datâ differentia AB laterum rectanguli, ipsoque magnitudine dato, invenire latera.

## PROP. XXXI. LIB. VI.

In Demonstratione hujus inversio proportionalium bis est omissa, addita igitur est, ut conclusio rite fieret ope 24$^{tae}$, Lib. 5. quod Clavius prius fecerat.

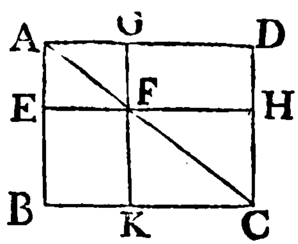
## PROP. XXXII. LIB. VI.

Enuntiatio Propositionis 26$^{tae}$, Lib. 6. non satis generalis est. etenim non tantum duo parallelogramma similia et similiter posita, quae communem habent angulum, sunt circa eandem diametrum; verum etiam duo similia et similiter posita, quorum unum habet angulum angulo alterius ad verticem oppositum, habent diametros in recta linea. videtur vero aliam fuisse horum demonstrationem, directam quidem, cui inserviebat Propositio 32$^{da}$, quae etiam aliter et paulo brevius ut sequitur ostendi potest.

## PROP. XXXII. LIB. VI.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, &c.

Sint duo triangula GAF, HFC quae duo latera AG, GF, duobus lateribus FH, HC proportionalia habeant, sc. sit sicut AG ad GF, ita FH ad HC; parallela autem sit GA ipsi HF, et GF ipsi HC. erit AF ipsi FC in directum.




Ducatur CK parallela [a] ipsi FH, occurratque rectae GF productae in K. Quoniam igitur utraque AG, KC parallela est ipsi FH, erunt et AG, KC inter se parallelae [b], quare anguli AGF, FKC sunt inter se aequales, alterni

a. 31. 1.

b. 30. 1.

 enim

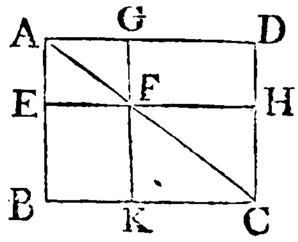
c. 34. 1. enim ſunt. eſt autem AG ad GF, ut (FH ad HC, hoc eſt [c]) CK ad
d. 6. 6. KF; et ſunt circa aequales angulos; ergo aequiangula [d] ſunt AGF, CKF triangula, et propterea angulus AFG aequalis eſt angulo CFK, eſt
e. 14. 1. autem GFK recta linea; igitur [e] AF ipſi FC eſt in directum.

Propoſitio vero 26$^{ta}$ ex 32$^{da}$ ita demonſtratur.

Si duo parallelogramma ſimilia et ſimiliter poſita communem habuerint angulum, aut angulos ad verticem oppoſitos; erunt illorum diametri in recta linea.

Primo, habeant parallelogramma ABCD, AEFG communem angulum BAD, ſintque ſimilia et ſimiliter poſita, erunt ABCD, AEFG circa eandem diametrum.

Producantur enim EF, GF ad H, K, et jungantur FA, FC. quoniam igitur ſimilia ſunt ABCD, AEFG parallelogramma, erit DA ad AB, ut GA ad AE; quare reliqua DG erit ad reliquam
a. Cor. 19. 5. EB, ut GA ad AE [a]. eſt autem DG aequalis ipſi FH, EB ipſi HC, et AE ipſi GF. ergo ut FH ad HC, ita AG ad GF; et parallelae ſunt FH, HC ipſis AG, GF; et triangula AGF, FHC ad unum angulum compoſita ſunt in puncto F; quare erunt AF, FC ſibi ipſis in
b. 32. 6. directum [b].




Secundo, ſint parallelogramma KFHC, GFEA ſimilia et ſimiliter poſita, habeantque angulos KFH, EFG ad verticem oppoſitos; erunt diametri AF, FC ſibi ipſis in directum.

Quoniam enim parallelae ſunt AG, GF ipſis FH, HC; et eſt AG ad GF, ut FH ad HC; erunt AF, FC in directum [b].

PROP. XXXIII.

## PROP. XXXIII. LIB. VI.

Verba "quippe qui ad centrum ſunt conſtituti" omiſſa ſunt, utpote imperiti cujuſdam additamentum.

In Graecis codicibus, et Latina verſione deeſt ἅ ἔτυχε, utcunque, in utriuſque partis demonſtratione, quae nunc adduntur, omnino enim ſunt neceſſaria. et in demonſtratione ſecundae partis, ubi ſc. triangulum BGC aequale oſtenditur triangulo CGK, verbum ἄρα omitti debet in textu Graeco.

## PROPP. B, C. LIB. VI.

Propoſitiones hae Libro ſexto ſunt additae, quoniam a Geometris ſaepius uſurpantur.

## DEF. IX, et XI. LIB. XI.

IN figuris planis ſimilitudo figurarum definitur ex aequalitate angulorum, et laterum circa aequales angulos proportionalitate; etenim ex ſola laterum proportionalitate, vel ſola angulorum aequalitate non ſequitur figuras eſſe ſimiles extra caſum triangulorum. et quidem ſimilis inter ſe poſitus rectarum linearum, quibus figurae continentur, partim ex utraque pendet. eademque ratione figurae ſolidae ſimiles ſunt eae quae et ſingulos angulos ſolidos aequales habent, et continentur figuris planis ſimilibus, multitudine aequalibus. ſunt enim quaedam figurae ſolidae, figuris planis ſimilibus, multitudine, quin et magnitudine aequalibus, contentae, quae neque ſimiles neque aequales ſunt, ut in Demonſtratione poſt Notas ad Def. 10. oſtendetur. neceſſe igitur fuit emendare Definitionem ſimilium figurarum ſolidarum, eique praemittere Definitionem anguli solidi. Ex hisce autem et Definitione decima, satis liquet quam multum ab imperitis depravati sint hi Libri.

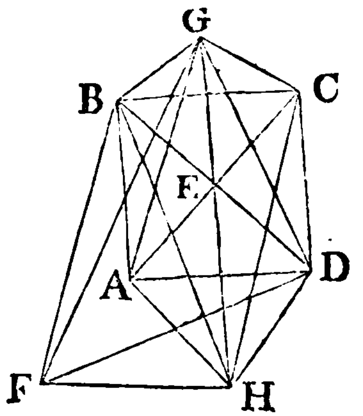
X

## DEF. X. LIB. XI.

Quoniam sensus verbi "aequalis" notus est ante hanc Definitionem, igitur Propositio quae est Definitio decima hujus Libri est Theorema quod verum aut falsum esse demonstrandum est, non assumendum; quare ex Propositione demonstranda Theon aliusve Editor inepte fecit hanc Definitionem figurarum solidarum similium et aequalium. similes enim esse figuras demonstrandum est ex Definitione similium solidarum figurarum; aequales autem esse ostendendum est ex Axiomate, "Quae sibi mutuo "congruunt inter se sunt aequalia," vel ex Propositione A, vel Prop. 9. aut Prop. 14. Lib. 5. ex quo Axiomate, vel ex earum Propositionum aliqua, omnium omnino figurarum aequalitas ultimo demonstranda venit. in praecedentibus Libris nullam aequalium figurarum Definitionem tradidit Euclides neque certe hanc dedit. quae enim dicitur Definitio prima, Lib. 3. revera est Theorema in quo asseritur eos circulos aequales esse quorum quae ex centris sunt aequales, quod quidem ex Definitione circuli perspicue apparet; ideoque a quodam inter Definitiones non proprie locatum est. non enim aequalitas figurarum definienda est sed demonstranda. Quamvis igitur verum esset figuras solidas, quae similibus planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur, inter se aequales esse, merito tamen culpandus est is qui ex hac Propositione demonstranda Definitionem fecit. Quid autem dicendum, si haec Propositio non vera sit? nonne confitendum est Geometras per mille tercentos annos in hac re Elementari deceptos fuisse? et ex hoc quidem modestiam discere debemus, atque agnoscere quam parum nobis cavere possumus, quae est mentis humanae imbecillitas, ne in errores incidamus etiam in principiis scientiarum, quae inter maxime certas merito

rito aestimantur. Propositionem enim hanc minime semper veram esse variis exemplis ostendi potest; sufficit hoc quod sequitur.

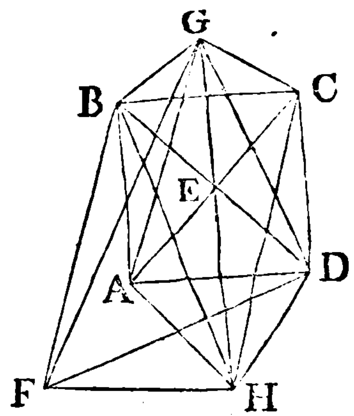
Sit quadratum ABCD et ducantur diametri AC, BD sibi mutuo occurrentes in E; et super unam ipsarum BD constituatur, in plano in quo est quadratum, triangulum isosceles BFD, a puncto vero E ad rectos angulos plano ABCD constituatur recta EG, et in ipsa sumpto quovis puncto G, ducantur GA, GB, GC, GD, GF. in triangulis igitur AEG, CEG quoniam AE, EG aequales sunt ipsis CE, EG, altera alteri, et rectos continent angulos, erit basis AG basi GC aequalis [a]. a. 4. 1.




quare in triangulis AGB, CGB aequales sunt AG, GB ipsis CG, GB, et basis AB aequalis est basi BC; angulus igitur [b] AGB aequalis est angulo CGB, et triangulum AGB triangulo CGB aequale [a]. similiter ostendetur triangulum AGD aequale ipsi CGD. Producatur GE ad oppositas partes plani ABCD, et in ea sumatur punctum quodvis H, et jungantur HA, HB, HC, HD, HF, et similiter ostendetur triangulum AHB aequale triangulo CHB, et triangulum AHD triangulo CHD. sunt igitur duo solida quorum utrumque continetur octo triangulis; unum scilicet contentum quatuor triangulis quorum vertex communis est G, bases vero rectae BA, AD, BF, FD; quatuorque triangulis quorum vertex communis est H, bases vero eaedem rectae. alterum autem solidum contentum est quatuor triangulis quorum vertex communis est G, et bases rectae BC, CD, BF, FD; et quatuor triangulis quorum vertex communis est H, et bases eaedem rectae BC, CD, BF, FD. quatuor autem triangula AGB, AGD, AHB, AHD aequalia ostensa sunt quatuor

b. 8. 1.

tuor triangulis CGB, CGD, CHB, CHD singula singulis; quatuor autem reliqua triangula BGF, DGF, BHF, DHF utrique solido communia sunt. Duo igitur haec solida continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus. inaequalia autem esse manifestum est, cum primum eorum contineatur in altero. non igitur semper verum est aequalia esse solida quae planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus continentur.




Cor. Hinc duo inaequales anguli solidi possunt contineri aequalibus et iisdem multitudine angulis planis.

Angulus enim solidus ad G qui continetur quatuor angulis planis AGB, AGD, FGB, FGD inaequalis omnino est angulo solido ad idem punctum G qui continetur quatuor angulis planis CGB, CGD, FGB, FGD; hic enim priorem illum continet. uterque autem continetur quatuor angulis planis, qui inter se sunt aequales singuli singulis vel iidem, ut ostensum fuit. et quidem innumeri possunt esse anguli solidi inaequales, qui aequalibus angulis planis singuli singulis continentur. Patet etiam figuras solidas prius memoratas minime similes esse, quoniam earum anguli solidi non sunt omnes inter se aequales.

Innumeros autem angulos solidos inter se inaequales posse contineri iisdem angulis planis, eodem ordine positis, ope trium Propositionum sequentium, manifestum erit.

## PROP. I. PROBLEMA.

Datis tribus magnitudinibus A, B, C quartam invenire ita ut tres simul majores sint reliquâ, quomodocunque sumptae.

Sit

Sit D quarta, erit igitur D minor ipſis A, B, C ſimul. ſit A non minor utrâvis ex ipſis B, C; et primum ſint B, C ſimul non minores ipsâ A; erunt igitur B, C, D ſimul majores quam A. et quoniam A non minor eſt B, erunt A, C, D majores quam B. ſimiliter oſtendetur ipſas A, B, D ſimul majores eſſe quam C. Igitur in caſu quo B et C ſimul non minores ſunt ipsâ A, quaevis D quae minor eſt ipſis A, B, C ſimul, propoſitum efficiet.

Si vero B et C ſimul minores ſint quam A, quoniam requiritur ut B, C, D ſimul majores ſint A, ex hiſce ablatis B, C erit D major exceſſu ipſius A ſupra B, C ſimul. ſumatur igitur quaevis D quae minor ſit ipſis A, B, C ſimul, at major exceſſu ipſius A ſupra B, C ſimul. erunt igitur B, C, D ſimul majores quam A; et quoniam A major eſt utrâvis ex ipſis B, C, multo magis erit A una cum D, et alterutra ex ipſis B, C major reliqua. et, ex conſtructione, A, B, C ſimul majores ſunt quam D. Q. E. F.

Cor. Si praeterea requiratur ut A et B ſimul non minores ſint quam C et D ſimul, debet exceſſus ipſarum A et B ſimul ſupra C non minor eſſe quam D, hoc eſt debet D non major eſſe hoc exceſſu.

## PROP. II. PROBLEMA.

Datis quatuor magnitudinibus A, B, C, D quarum A et B ſimul non minores ſunt quam C et D ſimul, et quarum tres ſimul majores ſunt reliquâ quartâ, quomodocunque ſumptae; quintam E invenire, ita ut duae ex tribus A, B, E quomodocunque ſumptae majores ſint reliqua tertia, et etiam duae ex tribus C, D, E quomodocunque ſumptae majores ſint reliquâ. ſit autem A non minor B, et C non minor D.

Primò ſit exceſſus ipſarum C, D non minor exceſſu ipſarum A, B. poteſt autem ſumi quaedam E quae minor eſt ſumma ipſarum C, D

at

at major exceſſu earundem; ſumatur, erit igitur E major exceſſu ipſarum A, B; quare B et E ſimul majores ſunt quam A; eſt autem A non minor B, ergo A et E ſimul majores ſunt B. et, ex hypotheſi, A una cum B, non minor eſt quam C una cum D, C autem cum D major eſt quam E, igitur et A una cum B major eſt quam E.

Sit autem exceſſus ipſarum A, B major exceſſu ipſarum C, D; et quoniam, ex hypotheſi, tres B, C, D ſimul majores ſunt quartâ A, erunt C et D ſimul majores exceſſu ipſarum A, B; igitur ſumi poteſt quaedam E quae minor eſt ipſis C et D ſimul, at major exceſſu ipſarum A, B. ſumatur, et quoniam E major eſt exceſſu ipſarum A, B, erunt B et E ſimul majores quam A. et, ut in praecedente caſu, oſtendetur A una cum E major B, et A una cum B major quam E. igitur in utroque caſu oſtenſum eſt duas ex ipſis A, B, E quomodocunque ſumptas, majores eſſe reliquâ.

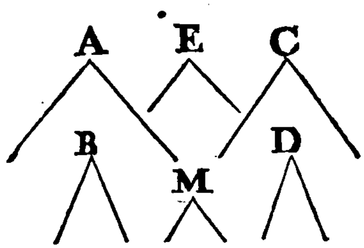
Et quoniam in utroque caſu E major eſt exceſſu ipſarum C, D, erit E una cum D major quam C; et, ex hypotheſi, C non minor eſt D, ergo E una cum C major erit quam D; eſt autem ex conſtructione C una cum D, major quam E. igitur ipſarum C, D, E duae quomodocunque ſumptae majores ſunt reliquâ. Q. E. F.

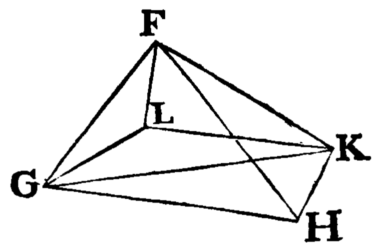
## PROP. III. THEOREMA.

Fieri poteſt ut ex iiſdem quatuor angulis planis conſtituantur innumeri anguli ſolidi inter ſe inaequales.

Sumantur tres anguli plani A, B, C quorum A non minor ſit utrovis ex ipſis B, C; ſint autem A et B ſimul minores duobus rectis; et, ope Problematis 1. et Corollarii ejuſdem, inveniatur quartus angulus D, ita ut tres ex ipſis A, B, C, D majores ſint reliquo, quomodocunque ſumpti, et ut A et B ſimul non minores ſint ipſis C et D ſimul. ope vero Problematis 2. inveniatur quintus angulus E, ita ut duo ex angulis

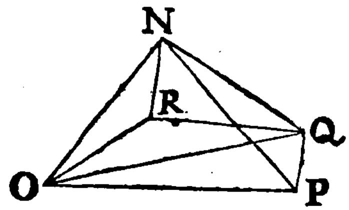
lis A, B, E, reliquo ſint majores quomodocunque ſumpti, et etiam duo ex ipſis C, D, E quomodocunque ſumpti ſint majores reliquo. et quoniam A et B ſimul minores ſunt duobus rectis angulis, erunt A et B ſimul bis ſumpti minores quatuor rectis. ſunt autem A et B ſimul majores angulo E, quare A et B ſimul bis ſumpti majores erunt angulis A, B, E ſimul, qui propterea minores erunt quatuor rectis; et duo ex ipſis reliquo ſunt majores, quomodocunqe ſumpti; ergo ope Prop. 23. Lib. 11. conſtitui poteſt angulus ſolidus ex tribus angulis planis qui ipſis A, B, E, ſunt aequales. conſtituatur, ſitque angulus ſolidus ad F, contentus ſcilicet planis angulis GFH, HFK, GFK qui angulis A, B, E aequales ſunt, ſinguli ſingulis. et quoniam anguli C, D ſimul non




ſunt majores ipſis A, B ſimul, erunt C, D, E ſimul non majores angulis A, B, E ſimul. hi autem minores oſtenſi ſunt quatuor rectis, quare et C, D, E ſimul minores ſunt quatuor rectis; et duo ex ipſis reliquo ſunt majores, quomodocunque ſumpti; ergo ex tribus angulis planis ipſis C, D, E aequalibus conſtitui poteſt angulus ſolidus [23. 11.]. huic autem angulo ſolido conſtitui poteſt ad punctum F in recta FG angulus ſolidus aequalis, ope ſcilicet Prop. 26. Lib. 11. ſitque angulus GFK, qui ſc. aequalis eſt ipſi E, unus ex tribus angulis planis qui hunc angulum ſolidum continent, reliqui autem duo ſint KFL, GFL ipſis ſc. C, D aequales, alter alteri. Igitur ad punctum F conſtitutus eſt angulus ſolidus contentus quatuor angulis planis GFH, HFK, KFL, GFL qui ipſis A, B, C, D angulis ſunt aequales, ſinguli ſingulis.

Rursus inveniatur alter angulus M talis ut duo ex tribus angulis A, B, M reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, et etiam duo ex tribus C, D, M quomodocunque sumpti sint majores reliquo. ostendetur autem, ut in praemissis, angulos A, B, M simul minores esse quatuor rectis, angulosque C, D, M simul minores esse quatuor rectis. Constituatur igitur [23. 11.] angulus solidus ad N contentus angulis planis ONP, PNQ, ONQ ipsis A, B, M aequalibus, singuli singulis, et ope Prop. 26. Lib. 11. constituatur ad idem punctum N in recta linea ON angulus solidus contentus tribus angulis planis, quorum unus sit ipse ONQ aequalis scilicet ipsi M, et reliqui duo QNR, ONR aequales ipsis C, D, alter alteri. erit igitur ad punctum N angulus solidus constitutus qui continetur quatuor angulis planis ONP, PNQ, QNR, ONR ipsis A, B, C, D aequalibus, singuli singulis. solidos autem angulos, qui praedictis quatuor angulis planis ad F et N continentur, non esse inter se aequales, sive non posse sibi mutuo congruere, patet ex eo quod anguli GFK, ONQ sive anguli E, M ex constructione sint inaequales, et propterea rectae GF, FK non possunt congruere rectis ON, NQ. igitur neque anguli solidi sibi mutuo congruent, et propterea inaequales sunt.




Et quoniam ex tribus datis angulis A, B, C possunt innumeri anguli inveniri qui eadem efficiunt cum angulo D, et rursus ex ipsis A, B, C et D, vel uno quovis ex hisce innumeris, inveniri possunt alii qui eadem praestant cum angulis E vel M, innumeri alii solidi anguli constitui possunt qui iisdem quatuor angulis planis continentur, qui omnes inter se sunt inaequales. Q. E. D.

Falluntur igitur Clavius aliique auctores qui asserunt solidos angulos qui aequalibus et iisdem numero planis angulis continentur inter se aequales

aequales eſſe. patet etiam Propoſitionem 26. Lib. 11. non legitime demonſtratam eſſe, in ea enim aequalitas ſolidorum angulorum qui tribus angulis planis aequalibus, ſinguli ſingulis, continentur, aſſumitur, non demonſtratur.

## PROP. I. LIB. XI.

Verba in fine hujus, " recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis quam uno, alias rectae lineae ſibi ipſis congruent." omiſſa ſunt tanquam imperiti cujuſdam additamentum. demonſtrandum enim hoc fuit non aſſumendum.

## PROP. II. LIB. XI.

Propoſitio haec a quodam mutata et vitiata videtur. Etenim ſecunda pars Enuntiationis, viz. " et omne triangulum in uno plano conſiſtit" demonſtratione non indiget; nam omnes figurae in primo Libro Elementorum definitae, ſunt, ex hypotheſi, figurae planae, hoc eſt, in plano deſcriptae, et inter caeteras triangulum. et quidem poteſt ſuperficies convexa tribus rectis lineis terminari. neque valet demonſtratio ad oſtendendum duas rectas ſe invicem ſecantes in uno eſſe plano. debet igitur oſtendi duas aut tres rectas ſibi mutuo occurrentes in uno plano eſſe. ut hoc fieret Enuntiationem et Demonſtrationem in eas quae in textu poſitae ſunt mutavimus.

## PROP. III. LIB. XI.

In hac prope finem habentur, " non igitur DEB, DFB rectae lineae ſunt, ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam, quae a puncto D ad B ducitur rectam eſſe," quae omiſſa ſunt. ex eo enim quod duae lineae ſpatium comprehendunt, tantum ſequitur unam ex ipſis non eſſe rectam. et vis argumenti ex hoc pendet, ſi ſcilicet communis ſectio

tio planorum non ponatur esse recta linea, duae rectae lineae spatium comprehendent, quod est absurdum; ergo communis sectio est recta linea.

## PROP. IV. LIB. XI.

"Et triangulum AED triangulo BEC aequale," haec etiam omissa sunt; saepius enim integra haec conclusio in praecedentibus libris repetita fuit, ut non necesse sit idem in hoc libro facere.

## PROP. V. LIB. XI.

In hac prope finem delenda est vox ἐπιπέδῳ in textu Graeco, utpote imperiti additamentum. et recte omissa est vox "plano" in versionis Commandini editione Oxoniensi.

## PROP. VII. LIB. XI.

Manifestum est Propositionem hanc ab Editore quodam minus perito additam fuisse. rectae enim lineae quae ab uno puncto ad aliud, in quovis plano, ducuntur in praecedentibus libris, in eo ponuntur esse plano. et nisi essent, demonstrationes quaedam in quibus una recta alteri occurrere ponitur, nullae essent; non enim occurrerent rectae. Ex. gr. in Prop. 30. Lib. 1. recta GK non occurreret ipsi EF, si non esset GK in plano in quo sunt parallelae AB, CD, in quo etiam, ex hypothesi, est recta EF. praeterea demonstratur haec septima ope praecedentis tertiae, in qua bis id ipsum assumitur quod in septima demonstrandum proponitur, rectam scilicet ab uno puncto ad aliud in quolibet plano ductam, in eo esse plano; idem etiam assumitur in praecedente Prop. 6. nam recta BD quae jungit puncta B, D in subjecto plano, in eo ponitur esse plano. locum autem dedimus septimae, mutata Demonstratione,

ſtratione, ut numerus Propoſitionum ſervaretur; manifeſta enim eſt ex Def. 7. et 35. Lib. 1. quamvis Elementis non ineſſet.

PROP. VIII. LIB. XI.

In hac prope finem, in Graecis, et in Commandini et Gregorii verſionibus habentur, "at in plano per BA, AD eſt DC," vice quorum verſionis Commandini Oxonienſis Editio recte habet "at in plano per BD, DA eſt DC." ſequentia autem quae in omnibus Editionibus leguntur, viz. "quoniam in plano per BD, DA ſunt AB, BD; in quo "autem ſunt AB, BD in eodem eſt ipſa DC," corrupta ſunt, vel a quodam textui inſerta; nulla enim neceſſitas fuit per iſtas ambages oſtendere rectam DC in eodem eſſe plano in quo ſunt BD, DA, cum immediate ſequatur ex Prop. 7. praecedente rectas BD, DA eſſe in plano in quo ſunt parallelae AB, CD. hiſce igitur omiſſis, legendum eſt, "omnes enim tres ſunt in plano in quo ſunt parallelae AB, CD."

PROP. XV. LIB. XI.

Poſt verba, "et quoniam BA parallela eſt AH," addita ſunt haec, "utraque enim ipſarum parallela eſt ipſi DE non in eodem cum ipſâ "plano," utpote manifeſte omiſſa.

PROP. XVI. LIB. XI.

In hac prope finem vice verborum, "quae autem neutra ex parte "conveniunt," legendum eſt, "quae autem in eodem plano productae, "neutrâ" &c. etenim in citando hanc Definitionem in Prop. 27. Lib. 1. non neceſſe fuit addere voces, "in eodem plano," quoniam omnes rectae de quibus agitur in libris praecedentibus ſunt in eodem plano. hic autem omnino fuit neceſſarium.

PROP. XX.

## PROP. XX. LIB. XI.

In hac prope initium habetur " ſin minus, ſit major BAC." poteſt autem angulus BAC aequalis eſſe alteri reliquorum. legendum igitur " ſin minus, ſit angulus BAC non minor utrovis reliquorum, major " autem quam DAB."

Et ad finem hujus legitur, " ſimiliter demonſtrabimus," cum nulla demonſtratione opus ſit; quoniam enim angulus BAC non minor ſit utrovis reliquorum, patet BAC una cum altero ex ipſis reliquo majorem eſſe.

## PROP. XXII. LIB. XI.

Et in hac legitur prope initium, " ſin minus, ſint inaequales anguli " ad B, E, H, et major ſit angulus ad B utrovis ipſorum qui ſunt ad " E, H." haec manifeſte vitiata ſunt, poterit enim angulus ad B aequalis eſſe uni reliquorum. legendum igitur eſt " ſin minus, ſint inaequales " anguli ad B, E, H, et ſit angulus ad B non minor utrovis ipſorum ad " E, H. non igitur minor eſt recta AC utravis ipſarum DF, GK."

## PROP. XXIII. LIB. XI.

Demonſtratio hujus paulo brevior reddita eſt, omittendo in caſu tertio ea quae prius oſtenſa fuerunt in primo; et adhibendo conſtructionem quam Campanus tradit, qui tamen Caſum 2. et 3. non demonſtrat. hujus autem tertii conſtructio et Demonſtratio ſimpliciores paulo quam in textu Graeco factae ſunt.

## PROP. XXIV. LIB. XI.

Verbum " ſimilia" Enuntiationi hujus additum eſt, quoniam plana quibus continentur ſolida quae in Prop. 25. aequalia inter ſe oſtendenda

denda sunt, similia debent esse et aequalia; ut aequalitas solidorum ex Prop. C. Lib. 11. inferatur. et quidem in Editione Oxoniensi Corollarium adjectum est Prop. 24tae, ostendens parallelogramma, de quibus agitur in hac Propositione, similia esse, ut solidorum aequalitas in Prop. 25. ex Def. 10. Lib. 11. ostendatur.

## PROP. XXV, et XXVI. LIB. XI.

In Propositione 25ta figurae solidae quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, inter se aequales ponuntur. et videtur Theonem aut alium quendam ut taedium effugeret demonstrandi figuras de quibus agitur in hac Propositione aequales esse, Definitionem decimam hujus Libri posuisse vice demonstrationis; quod quidem inscite admodum factum est.

Similiter, in Propositione 26ta duo anguli solidi aequales esse ponuntur, si uterque contineatur tribus angulis planis qui, singuli singulis, inter se sunt aequales. et satis mirum est nullum, quantum scio, ex Euclidis interpretibus vidisse aliquid duabus hisce Propositionibus deesse. Clavius quidem ad Def. 11. hujus Libri asserit, "perspicuum esse angulos solidos, qui angulis planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur sibi mutuo aequales esse, nam congruent si sese penetrare intelligantur;" sed hoc sine ulla ratione asseritur, neque semper verum est extra casum in quo anguli solidi tribus tantum angulis planis continentur quorum singuli singulis sunt aequales. et in hoc casu idem est ac asserere duo triangula sphaerica inter se aequilatera, esse etiam inter se aequiangula, et sibi mutuo congruere; quod sine demonstratione concedi minime debet. Certe Euclides hoc non assumpsit de triangulis rectilineis; ostendit enim in Propositione 8va, Lib. 1. triangula inter se aequilatera, esse inter se aequiangula, unde ipsorum aequalitas ex Prop. 4ta ejusdem Libri manifesta est. et Menelaus, in Prop. 4ta,

Lib. 1.

Lib. 1. Sphaericorum, explicite demonstrat triangula sphaerica inter se aequilatera esse etiam inter se aequiangula; unde et sibi mutuo congruere facile ostendi potest, si scilicet eorum latera eodem ordine et situ disposita fuerint.

Ad defectus igitur hos supplendos necessarium fuit tres Propositiones A, B, C huic Libro inserere. Propositiones enim 25$^{ta}$, 26$^{ta}$, et 28$^{va}$, et propterea octo aliae hujus Libri quae ex iis pendent, viz. 27. 31. 32. 33. 34. 36. 37. et 40. infirmo omnino hactenus innitebantur fundamento; ut et Prop. 8. 12. Cor. 17. et Prop. 18. Lib. 12. quae pendent ex Definitione 9$^{na}$. figuras enim solidas quae planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus continentur, ut et angulos solidos qui aequalibus et iisdem numero planis angulis continentur, non semper inter se aequales esse, ostensum est in Notis ad Def. 10. hujus Libri.

Observandum est Andream Tacquet in Euclide suo definire angulos solidos aequales esse, "qui intra invicem positi congruunt." Propositio autem haec non est Definitio sed Axioma; vera enim est de magnitudinibus quibuscunque. posuit autem Definitionem hanc inutilem ut ope ejus demonstraret Prop. 36. hujus Libri sine ope Prop. 35. ejusdem. de qua demonstratione vide Notam ad Prop. 36.

## PROP. XXVIII. LIB. XI.

In hac ostendi debuit diagonales esse in uno plano, non assumi. defectum hunc supplevit Clavius.

## PROP. XXIX. LIB. XI.

Hujus Propositionis tres sunt casus; primus scilicet in quo duo parallelogramma basi AB opposita latus habent commune; secundus in quo parallelogramma haec a se invicem separata sunt, et tertius in quo habent

bent partem communem; et huic soli demonstratio quae hactenus habetur inservit. Primus autem immediate ostenditur ex praecedente Propositione 28$^{va}$, quae quidem huic in hunc finem praemissa videtur; etenim nulli praeter ei et 40$^{mae}$ hujus Libri utilis est, quarum ultimae praemissa certe fuisset, si in hac 29$^{na}$ Euclides eam non adhibuisset. Hunc autem casum imperitus quidam ex Elementis delevit, et mutilavit Euclideam reliquorum casuum demonstrationem quam nunc restituimus, quaeque iis simul ostendendis inservit.

## PROP. XXX. LIB. XI.

In demonstratione hujus, plana opposita solidi CP in figura nostra, hoc est solidi CO in figura Commandini, non ostenduntur inter se parallela; quod Tyronum gratia visum est ostendere.

## PROP. XXXI. LIB. XI.

Hujus Propositionis duo sunt casus; primus in quo rectae insistentes ad rectos angulos sunt basibus; alter in quo non sunt. primus rursus dividitur in alios duos, quorum alter est is in quo bases sunt parallelogramma inter se aequiangula; reliquus in quo non sunt aequiangula. illius textus Graeci Editor mentionem non facit, demonstrationem autem ejus demonstrationi reliqui casus intexuit. quare Corollarium hoc ostendens addidisse debuit. satius autem visum est casus hos distincte tradere. brevior etiam reddita est demonstratio, viam sequendo qua usus est Euclides in Prop. 14. Lib. 6. Praeterea in demonstratione casus in quo rectae insistentes non sunt ad rectos angulos basibus, non ostendit Editor solida in constructione descripta esse parallelepipeda; quod quidem Euclidem omisisse minime putandum est. Verba autem ad finem Propositionis, " quorum insistentes non sunt in iisdem rectis " lineis," ab imperito quodam addita sunt; nam possunt esse in iisdem rectis lineis.

## PROP. XXXII. LIB. XI.

Omisit Editor jubere parallelogrammum FH applicari in angulo FGH aequali angulo LCG, quod quidem necessarium est; unde recte hoc supplevit Clavius.

Praeterea in constructione requiritur ut a basi FH, eadem altitudine ipsi CD, solidum parallelepipedum GK compleatur; verum innumera possunt esse solida quae eandem habent basim, et eandem altitudinem. scribendum igitur est " et compleatur solidum parallelepipedum GK cu-" jus basis sit FH, et una ex rectis insistentibus sit FD." eademque correctio facienda est in Propositione 33.

## PROP. D. LIB. XI.

Verisimile admodum est Euclidem huic Propositioni locum in Elementis dedisse, qui similem de parallelogrammis aequiangulis tradit in Prop. 23. Lib. 6.

## PROP. XXXIV. LIB. XI.

In hac ter habentur haec verba, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, " quorum insistentes non sunt in eisdem rectis lineis;" quae vel omnino sunt omittenda, ut factum est a Clavio, vel, ipsorum vice, scribenda sunt, " sive insistentes rectae sint in eisdem rectis lineis, " sive non sint," inepte enim excluditur alter casus.

Et bis habentur ὧν τὰ ὕψη, " quorum altitudines," manifesto errore, vice ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, " quorum insistentes." altitudo enim semper est ad rectos angulos basi.

PROP. XXXV.

## PROP. XXXV. LIB. XI.

In hac breviori via quam in textu Graeco anguli ABH, DEM recti ostenduntur; et similiter ostendetur rectos esse ACH, DFM. repetitio autem ejusdem Demonstrationis quae in textu habetur omissa est. verisimile enim est eam a quodam Editore textui additam fuisse, ut ex verbis, "similiter demonstrabimus" conjicere licet; ea enim non solent addi nisi quando Demonstratio non traditur, aut, si tradita sit, in quibusdam differt a praecedente Demonstratione, ut in 26. hujus Libri. Campanus autem non habet hanc repetitionem.

Aliam Corollarii hujus Propositionis Demonstrationem dedimus, cujus ope Propositio 36. quae sequitur, demonstratur sine Prop. 35.

## PROP. XXXVI. LIB. XI.

Andreas Tacquet in Euclide suo hanc Propositionem sine ope Prop. 35. demonstrat. patet autem solida quae aequiangula dicuntur, in enuntiatione Propositionis 36. ut nunc habetur in textu Graeco, ea esse quorum anguli solidi tribus angulis planis inter se aequalibus, singuli singulis, et similiter positis, continentur; ut ex constructione manifestum est. hos autem angulos solidos sibi mutuo congruere assumit, non demonstrat Tacquetus; ponit enim ille solida jam facta esse, non ostendit quomodo construantur, ut in textu Graeco factum est. ope autem secundae Demonstrationis praecedentis Corollarii, Demonstratio ejus in hac etiam quae in textu habetur hypothesi legitima redditur.

## PROP. XXXVII. LIB. XI.

In hac assumitur rationes triplicatas rationum quae inter se eaedem sunt, esse inter se easdem, ut et rationes easdem esse inter se quarum rationes triplicatae sunt inter se eaedem; quod sine Demonstratione minime concedendum eſt; certe Euclides harum Propoſitionum primam et faciliorem non aſſumpſit, ſed demonſtravit in caſu rationis duplicatae, in Prop. 22. Lib. 6. alia igitur Demonſtratio tradita eſt ſimilis ei quae habetur in ea Propoſitione, ut Clavius prius fecerat.

## PROP. XXXVIII. LIB. XI.

Si a puncto in plano aliquo quod alteri plano ad rectos eſt angulos, ducenda ſit, ad planum hoc, recta perpendicularis; fiet, ducendo ad communem planorum ſectionem perpendicularem a puncto illo; erit enim haec perpendicularis ad planum ſubjectum, vi Definitionis 4. Libri hujus. ineptum enim eſſet, in hoc caſu, uti Propoſitione 11ma hu-
* 17. 12. jus. ſed Euclides*, Apollonius aliique Geometrae jubent perpendicularem duci a puncto ad planum ſubjectum, et concludunt eam cadere in communem planorum ſectionem; quod hoc idem ſit ac ſi praedicta conſtructione uterentur, et concluderent rectam ductam perpendicularem eſſe ad planum ſubjectum; aliquis autem hoc non videns, putavit neceſſarium fuiſſe Propoſitionem hanc huic Libro addere, cujus quidem nullus eſt uſus.

## PROP. XXXIX. LIB. XI.

In hac rectae lineae quae biſariam ſecant oppoſita plana parallelepipedi, in uno ponuntur eſſe plano, quod quidem demonſtrari debuit; ut nunc factum eſt.

## LIB. XII.

EX Epiſtola Archimedis ad Doſitheum libris de Sphaera et Cylindro praemiſſa, quam integritati ſuae ex Manuſcriptis reſtituit Doctiſſimus Collega meus Dom. Jacobus Moor Graecarum literarum Profeſſor

fessor apparet, ipso me monente, Eudoxum auctorem fuisse praecipuarum Propositionum quae in hoc Libro continentur.

## PROP. II. LIB. XII.

Ad initium hujus habentur haec "si enim non ita sit, erit ut quadra-"tum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium ali-"quod minus circulo EFGH, vel ad majus." et similia rursus occurrunt prope finem hujus Propositionis, ut et in Propp. 5. 11. 12. 18. hujus Libri. de quibus observandum est, demonstrationi Theorematis sufficere, in hisce et similibus casibus, ut res quaedam possit existere, dummodo hoc perspicuum fuerit, quamvis non possit eadem Geometrice inveniri seu exhiberi. ita hic assumitur quartam existere posse proportionalem tribus magnitudinibus, viz. duobus quadratis ex BD, FH et circulo ABCD, quoniam scilicet perspicuum est esse quadratum aliquod aequale circulo ABCD, quamvis illud Geometrice inveniri non potest; tribus autem figuris rectilineis quadratis scilicet ex BD, FH, et quadrato quod circulo ABCD aequale est, existit quartum proportionale quadratum; nam tribus rectis lineis quae ipsorum sunt latera existit quarta proportionalis recta[a]. et spatium quarto huic quadrato aequale illud est quod in hac Propositione designatur litera S. simile autem intelligendum est in reliquis Propositionibus citatis; et verisimile est haec ostensa fuisse ab Euclide, et a quodam Editore ex textu deleta. Lemma enim quod huic Propositioni ab imperito quodam subjungitur huic rei explicandae minime inservit.

a. 12. 6.

## PROP. III. LIB. XII.

In textu Graeco et versionibus sequentia habentur, viz. "Et cum "duae rectae lineae sese tangentes BA, AC" &c. hic anguli BAC, KHL ope Prop. 10. Lib. 11. aequales ostenduntur, quod prius factum

tum fuit. triangulum enim EAG ſimile oſtenſum fuit ipſi KHL. repetitio igitur haec omiſſa eſt, et triangula ABC, HKL ſimilia eſſe, brevius ope Prop. 21. Lib. 6. oſtenduntur.

## PROP. IV. LIB. XII.

Pauca in hac magis explicite quam in textu Graeco tradita ſunt.

## PROP. V. LIB. XII.

In hac prope finem habentur verba ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, "ut antea oſtenſum fuit;" quae rurſus occurrunt ad finem Propoſitionis 18. hujus Libri; nullibi tamen, niſi forſan hiſce verbis citetur Lemma inutile annexum Propoſitioni 2dae, in hiſce Elementis hoc oſtenſum eſt, et forſan ab imperito Editore omiſſa ſunt, qui oblitus eſt delere etiam has voces.

## PROP. VI. LIB. XII.

Breviorem hujus Demonſtrationem dedimus. et quae nunc in textu Graeco habetur paulo brevior poteſt reddi. imperite enim ejus auctor ad finem ejus bis utitur Propoſitione 22. Lib. 5. quaſi ea non de quotcunque magnitudinibus, ſed tantum de tribus, quae totidem aliis, binae ſumptae ſunt proportionales, intelligenda ſit.

## COR. PROP. VIII. LIB. XII.

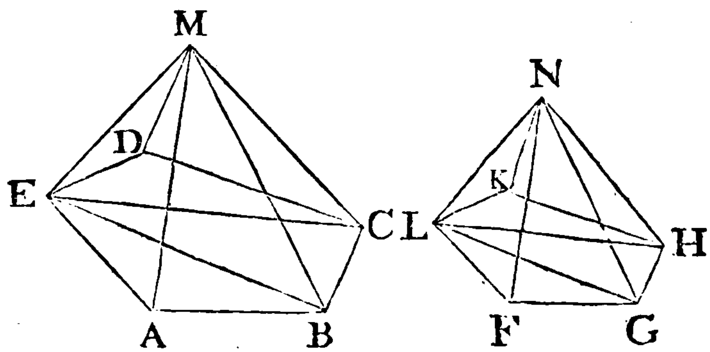
Demonſtratio hujus imperfecta eſt, etenim pyramides in quas eae dividuntur quae habent multangulas baſes, non oſtenduntur inter ſe ſimiles, quod neceſſario fieri debuit, et in ſimili caſu factum eſt in Prop. 12. hujus Libri. plena Demonſtratio eſt ut ſequitur,

Sint ſimiles et ſimiliter poſitae pyramides, quarum baſes quidem polygona ABCDE, FGHKL, vertices autem M, N puncta. habebit pyramis

ramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplicatam rationem ejus quam habet latus AB ad homologum latus FG.

Dividantur enim polygona in triangula ABE, EBC, ECD, FGL, LGH, LHK, quae inter se similia erunt, singula singulis[a]. quoniam vero pyramides sunt similes, erit [b] triangulum EAM simile triangulo LFM, et triangulum ABM ipsi FGN. est igitur [c] ME ad EA, ut NL ad LF; ut vero AE ad EB, ita est FL ad LG, quia similia sunt EAB, LFG triangula; ergo ex aequali ut ME ad EB, ita est NL ad LG. similiter ostendetur EB ad BM, ut LG ad GN; rursus igitur, ex aequali, ut EM ad MB, ita est LN ad NG. triangulorum igitur EMB,

a. 20. 6.
b. 11. Def. 11.
c. 4. 6.

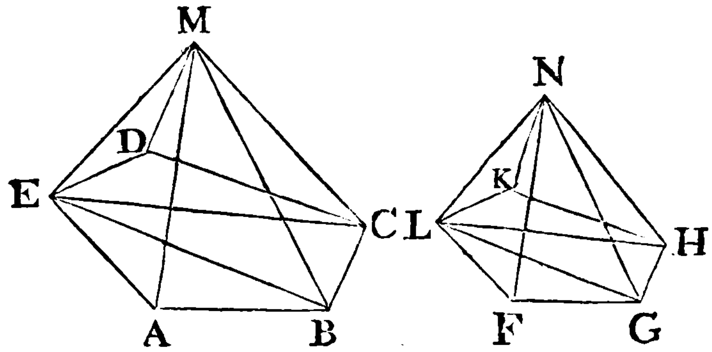



LNG proportionalia sunt latera, quare aequiangula [d] sunt EMB, LNG triangula, et inter se similia. pyramides igitur quarum bases EAB, LFG triangula, et vertices M, N sunt inter se similes, ipsarum enim anguli solidi sunt aequales[e], et continentur similibus planis multitudine aequalibus. eadem ratione pyramis EBCM similis ostendetur pyramidi LGHN, et pyramis ECDM ipsi LHKN. et quoniam pyramis EABM similis est pyramidi LFGN, et triangulares habent bases, habebit pyramis EABM ad ipsam LFGN, triplicatam rationem ejus quam habet EB ad latus homologum LG; eadem ratione, et pyramis EBCM ad pyramidem LGHN habet triplicatam rationem ejus quam habet EB

d. 5. 6.
e. B. 11.

ad

ad LG. ut igitur pyramis EABM ad pyramidem LFGN, ita pyramis EBCM ad pyramidem LGHN. eadem ratione, erit ut pyramis EBCM ad ipſam LGHN, ita pyramis ECDN ad LHKN pyramidem. et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia. eſt igitur, ut pyramis EABM ad pyramidem




LFGN, ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. Pyramis autem EABM ad pyramidem LFGN triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad FG, igitur et tota pyramis habet ad totam pyramidem triplicatam rationem quam habet AB ad homologum latus FG. Q. E. D.

## PROP. XI, et XII. LIB. XII.

Ordo literarum Alphabeti, contra morem Euclidis, non ſervatur in figuris harum Propoſitionum, quem igitur reſtituimus. unde et prima pars Prop. 12$^{\text{mae}}$ iiſdem verbis quibus prima pars Prop. 11$^{\text{mae}}$, oſtendi poteſt. omiſſa igitur eſt demonſtratio ejus partis, et ex Prop. 11$^{\text{ma}}$ aſſumpta.

Demonſtrationes Prop. 10. et 11. a diverſis auctoribus factae videntur. Etenim in Prop. 10. pyramis ſuper quadratum circulo inſcriptum dimidium oſtenditur ejus quae ſuper quadratum circumſcriptum erecta

erecta est, ope prismatum super easdem bases; in Propositione autem 11. id ipsum brevius ostenditur ope Prop. 6. hujus.

## PROP. XIII. LIB. XII.

In hac Propositione communis sectio plani basibus cylindri paralleli, et ipsius cylindri circulus esse ponitur, visum igitur est hoc breviter ostendere; unde satis liquet planum illud cylindrum in duos alios dividere. idem autem et in Prop. $14^{ta}$ suppleri intelligendum est. Verbum etiam "utcunque" omissum prope finem Prop. 13. nunc additum est.

## PROP. XV. LIB. XII.

"Et compleantur cylindri AX, EO." Cylindros aeque ac conos ut jam factos enuntiatio et expositio Propositionis exhibent. quare potius legendum "et sint coni quidem ALC, ENG; cylindri vero AX, EO."

Deest casus primus in secunda parte demonstrationis; quaedam etiam desunt in casu secundo ejusdem, ante verba "iisdem enim constructis", quae nunc addita sunt.

## PROP. XVII. LIB. XII.

Verba in textu Graeco in Enuntiatione hujus Propositionis, viz. *εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν*, ita vertuntur a Commandino aliisque interpretibus "in majori solidum polyedrum describere quod "minoris sphaerae superficiem non tangat." referunt scilicet verba *κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν* ad proxima verba *τῆς ἐλάσσονος σφαίρας*. minime autem ita verti debent, solidum enim polyedrum non solum superficiem minoris sphaerae sed et totam sphaeram minorem attingit et pervadit.

referenda igitur ſunt ea verba ad τὸ στερεὸν πολύεδρον, et vertenda "in majori ſphaera ſolidum polyedrum deſcribere cujus ſuperficies ſphaeram minorem non attingat;" ut ſenſus Propoſitionis neceſſario requirit.

Demonſtratio autem Propoſitionis depravata eſt et mutila. Etenim quae facilia ſunt explicite admodum oſtenduntur, quae vero minus obvia, explicatione deſtituuntur; ut cum aſſeritur quadratum ex KB majus eſſe quam duplum quadrati ex BZ, in prima demonſtratione; et angulum BZK obtuſum eſſe in ſecunda; quae quidem demonſtrari debuerunt. praeterea in prima demonſtratione habetur "ducatur a puncto K ad BD perpendicularis KΩ" cum dicendum fuit "jungatur KV," quae oſtendenda fuit perpendicularis ad BD. manifeſtum enim eſt ex figura in Hervagii et Gregorii editionibus, et ex ipſo textu, Editorem textus Graeci quem nunc habemus non vidiſſe perpendicularem a puncto K ad BD ductam neceſſario incidere in ipſum punctum V, incidit enim in punctum Ω diverſum a V in eorum figuris; et in demonſtratione ponuntur ea puncta tanquam diverſa, nam diverſis literis V et Ω notantur. Videtur autem Commandinum hoc vidiſſe, nam in ejus figura unum idemque punctum notatur duabus literis V, Ω. ſed et ante Commandinum vir doctus Joannes Dee in Commentariis quae huic Propoſitioni ſubjunxit in verſione Anglica Elementorum ab Henrico Billingſley facta, Londini A. D. 1570 impreſſa, errorem hunc explicite notat, et demonſtrationem conſtructioni quae in textu Graeco habetur convenientem tradit, quâ ſcilicet oſtendit perpendicularem a puncto K ad BD ductam, neceſſario cadere in V.

Praeterea quadrilatera SOPT, TPRY et triangulum YRX minime oſtenduntur non attingere ſphaeram minorem, quod neceſſarium fuit demonſtrare. ſolus Clavius, quantum ſcio, hoc obſervavit et Lemmate demonſtravit, quod paulo aliter et brevius oſtenſum Propoſitioni huic praemiſſum eſt.

# NOTAE.

In Corollario hujus Propoſitionis, poſitum eſt deſcriptum eſſe in altera ſphaera ſolidum polyedrum ſimile ei quod in ſphaera BCDE deſcriptum fuit. verum cum conſtructio qua in altera ſphaera polyedrum deſcribi poteſt non tradita ſit, ſatius putavimus eam exhibere, et demonſtrare ſimilitudinem pyramidum in hoc polyedro, pyramidibus ejuſdem ordinis in polyedro ſolido in ſphaera BCDE.

Ex praecedentibus ſatis liquet quam ab imperitis Editoribus vitiata et mutilata fuerint Euclidis accuratiſſimi Geometrae Elementa. Opinio autem quam plerique viri docti habuerunt de Editione Graeca quae nunc extat, eam ſcilicet nihil aut parum differre a vero ipſius Euclidis opere, eos ſine dubio fefellit, minuſque accuratos in Editione hac examinanda reddidit; quo factum eſt ut a Theonis tempore hactenus, errores quoſdam, ſatis licet craſſos non perſpexerint. Sperare igitur licet operam quam in eiſdem corrigendis et libris hiſce emaculandis poſuimus, non futuram fore ingratam aequis rerum aeſtimatoribus, qui Demonſtrationes legitimas ab iis quae non ſunt diſcernere valent.

FINIS.

## ERRATA.

Pag. 14. linea 5. poſt ABC; adde, et producantur AC, AD ad puncta E, F;
P. 322. l. ult. dele, ſuperficiei
P. 324. l. 2 DUABUS, lege, DUOBUS
P. 348. l. 4. a fine, Apogogicas, lege, Apagogicas
P. 408. l. 3. ECDN, lege, ECDM