EVCLIDIS &
ELEMENTORV̄
Libri
VI

Ad Per Ill.mum et Ecc.mum D. D.
Ioannem Libiolam Philo-
sophū. ac Medicū. insig.

Ferrarie
Ad instantiam Catharini
Doini.

Apud Franciscum Succium. Superiorum permissu.
1628

PERILLVSTRI,

Et Excellentissimo D.

IOANNI LIBIOLÆ

FERRARIENSI

PHILOSOPHO,

Ac Medico præstantissimo.

SIngularem ingenij tui præstantiam, perq; assiduum studium, atque vsum in omni doctrinarum genere corroboratam consumatamq; sapiētiam, adde etiam, si libent, suauissima morum tuorum innocentiã ea ſum ſemper admiratione proſecutus, eo amore atque obſeruantia exoſculatus, Excellentiſs. Domine, nihil vt mihi prius, nihil antiquius occurrare poſſe videretur, quam vt aliquo quopiã argumento meum tibi obſequendi gratificandiq; ſtudium, & voluntatẽ conteſtarer. Quotus enim quiſq; in mirificum tui amorem, & ſtudium non rapiatur, & ruat, cum videat, quàm non temerario Icari auſu, ſed quam facili, quam expedito, celeri, & vegeto ingenij volatu, philoſophiæ ſcilicet alis ſuffultus te inſinues in cæleſtium orbium receſſus, vt ibi minimè dubias rerum arcanarũ cauſas in idearum ſublimi imagine cõtempleris? non vt in illis tanquam honeſtiſſimo alioquì in otio conſeneſcas, ſed vt veram inde philoſophiã deuoces, qua mortalibus prodeſſe poſſis, & ita prodeſſe, vt præcellentiſ

ſima

ſima medendi arte è mortis faucibus raptos, immortales propemodũ reddas. Ecquem vero non ſibi demereatur virtus illa tua candidiſſima, qua non tam corporibus per interiorem quandam, & reconditam curandi peritiam, & ſcientiam, incolumitatem reddis, & ſalutem; quàm animis per amœniſſimam, indieſq; magis efloreſcentem morum integritatem, quaſi face prælucens, vitalem eamq; certiſſimam efficis medicinam? Iſta tui pectoris ornamenta mecum ipſe vtcunque agitabam, cũ hæc mihi *Euclidis* elementa euulgandi ſeſe obiecit opportunitas; quam non alienam ratus, ea ipſa tibi nunc defero, qui firmiſſimis characteribus iam dudum illa tuo animo impreſſiſti; & tuo nomini, cui præcipuè debentur, dico, adicoque. Tûte enim, qui prçcelſam quandam illis ſedem in nobiliſſima tui parte

 col-

collocasti, non grauaberis, opinor, eadem nominis tui splendore collustrare. Accipe igitur, Excellentissime Domine, hanc qualemcunque obsequij atq; obseruantiæ in te meæ tesseram; quæ vtinam ita luculenter, & perspicuè meam erga te propensissimam, omnibus testetur voluntatẽ, vt Propositiones suas luculentissimis Euclidis ipse schematis demonstrauit. Vale, vt per te valeant omnes. Ferrariæ 6. Kal. Octob. 1628.

Tuę Perillust. Excell.

addictiss. Ser.

Catherinus Duinus.

AD LECTOREM.

Illud in hac Euclidis editione propositum habui, amice Lector, vt, quanta maxima possum breuitate, tibi Euclidis ipsius demonstrationes offeram: video enim te alios scolijs, commentarijs, adnotationibus onerasse, vel si mauis, ditasse. verum obruit aliquando illa rerum multitudo illius ingenium, qui adhuc in Geometiæ initijs versatur. Hic solas habes Euclidis demonstrationes, et si verbulum aliquando addidi, non feci, nisi necessitate, vt putabam, impellente: hæ mihi sufficienter Geometriæ elementa exhibere videntur, non tamen quædam subinde corolaria prætermisi, quæ insigniora visa sunt. Quia autem obseruaui nonnullos dū nimis contendunt rem explicare longis verborum inuolucris veritatem magis consepelire; in illis demonstrationibus, quæ mihi clarissimæ visæ sunt per se se, & quę proprietatem ostendunt ferè oculis obuiam, in illis, in quam, non fui nimius, nec singula nimis *minutè rem perſecutus. vbi vero Euclidis demonſtratio obſcurior eſt, & proprietas recondita magis verbo non peperci, & ea ratione, quę mihi faciliima viſa eſt, rem explicare laboraui. ſex ſolum primos poſui libros, quia hi maximè neceſſarij viſi ſunt, & hi ferè explicantur in ſcholis, ac Geometrię ſtudioſis proponuntur, quibus præcipuè deſeruire volui; ſi tibi proderunt Lector gaudebo. Vale.*

EV-

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER PRIMVS.

DEFINITIONES.

1. PVnctum est cuius nulla pars est.
2. Linea vero longitudo latitudinis expers.
3. Lineæ autem termini sunt puncta.
4. Recta linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta. *quæ videlicet est talis, vt procedendo ab vno puncto extremo, ad alterum punctum, non discedamus neque ad hanc, neque ad illam partem; sed ex æquo procedamus. neque est plus lineæ ex vna parte, quam ex altera.*
5. Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.
6. Superficiei autem extremæ sunt lineæ.
7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas. *quod intelligitur eadem ratione, qua lineæ rectæ definitio.*
8. Planus vero angulus est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram inclinatio. *aduertere autem non hoc ita esse intelligendum, quasi vero angulus sint illæ duæ lineæ: est enim superficies lineis inclusa, seu area illa.*
9. Cum autem, quæ angulum continent, lineæ rectæ fuerint rectilineus ille angulus appellatur.

10. Cum vero rectè linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum, & quæ insistit recta, linea dicitur perpendicularis illi lineæ cui insistit, *vt esse linea A B, quæ ita cadit supe lineam C D, vt faciat duos angulos ex vtraque parte, æque accuminatos, hoc est enim esse æquales.*

11. Obtusus angulus est, qui recto maior est, *hoc est minus accuminatus.*

12. Acutus vero, qui minor est recto *magis accuminatus.*

13. Terminus est, quod alicuius extremum est.

14. Figura est, quæ sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur: *intellige linearibus non pũctualibus.*

15. Circulus est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripherea appellatur; ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes recte lineæ inter se sunt æquales. *ex quo aduerte circulum esse aream linea illa inclusam non lineam includentem, vt etiam figura est, quæ includitur terminis.*

16. Hoc vero punctum centrum circuli appellatur.

17. Diameter autem circuli est recta quædam linea per centrum ducta & ex vtraque parte in circuli periphercam terminata, quæ circulum bifaream secat. *Hoc est in duas partes æquales, hoc enim est bifariam secare.*

18. Semicirculus verò est figura, quæ continetur sub diamètro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur à *diametro.*

19 Re-

19. Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur. *hoc est terminantur rectis lineis.*

20. Trilatere quidem, quæ sub tribus.

21 Quadrilatere, quæ sub quatuor.

22. Multilatere autem, quæ sub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

23. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

24. Isoteles autem, quod duo tantum æqualia habet latera.

25 Scalenum verò est, quod tria inæqualia habet latera. *& sic diuiduntur triangula ratione laterum: ratione vero angulorum iterum.*

26. Trilaterarum figurarum, rectangulum quidē triangulum est, quod vnum habet angulum rectum.

27. Amblygonium, quod obtusum angulum habet: *seu vnum maiorem recto.*

28. Oxygonium quod tres habet acutos angulos.

29. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est, *habens angulos rectos, & latera æqualia, vt est in figura.*

30. Altera verò parte longior figura est, quæ rectangula quidem at æquilatera non est, *vt in figura.*

31. Rhombus autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.

32. Rhomboides verò, quæ aduersa, & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.

33. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapetia appellentur.

34. Parallele rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraque in infinitum producantur parte in neutram, sibi mutuo incidunt, *quod intellige de lineis rectis.*

35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

36. Cum verò in Parallelogrammo diameter ducta fuerit duæq; lineæ lateribus parallele secantes diametrum in vno eodemq; puncto, ita vt, parallelogrammum ab his parallelis in quatuor distribuatur parallelogrammia appellantur duo illa per quæ diametrum non transit complementa duo vero reliqua per quæ diameter incidit circa diametrum consistere dicuntur.

Petitiones siue postulata.

1. POstuletur, vt à quouis puncto in quoduis punctum rectam lineam ducere concedatur.
2. Et rectam lineam terminatam in continuum, seu in directum vlterius producere.
3. Item quo vis centro, & interuallo circulum describere.
4. Item quacumque magnitudine data finita sumi posse aliam magnitudinem, vel maiorem, vel minorem.

Com-

Communes notiones, siue Axiomata.

1. QVæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, & quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium; & si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam; alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus *respectiuè*.
2. Si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.
3. Si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt æqualia.
4. Si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia; & si inæqualibus inæqualia adiecta sint maiori maius, & minori minus, remanent inæqualia.
5. Si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia; et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint à maiori minus, à minori maius, reliqua sunt inæqualia.
6. Quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia; & quod vni æqualium duplum est, duplum est & alterius.
7. Quę eiusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia; & contra.
8. Quæ sibi mutuo congruunt inter se sunt æqualia.
9. Totum est maius sua parte.
10. Duæ lineę rectę non habent commune segmentum; *vt secundum unam partem quantam*

sui

se tangant, secundum aliam non se tangant.

11. Duæ rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ necessario in illo puncto se mutuo secabunt.

12. Omnes anguli recti sunt inter se æquales.

13. Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, & ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illę rectę lineę in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores. *Si.n. sint æquales duobus rectis probabitur infra, quod non coincident, si sint maiores duobus rectis constabit ex dicendis, quod ab inuicem discedent, ergo si sint minores coincident.*

14. Duę rectę lineę spatium non comprehendunt; *manendo in sua rectitudine, nec claudunt areã, aut figuram formant.*

15. Si æqualibus inęqualia adijciantur, erit totorũ excessus adiunctorum excessui ęqualis.

16. Si inęqualibus ęqualia adiungantur, erit totorum excessus excessui eorum, quæ à principio erant ęqualis.

17. Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis.

18. Si ab inęqualibus ęqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.

19. Omne totum æquale est omnibus suis partib. simul sumptis.

20. Si totum totius est duplum, & ablatum ablati, & reliquum reliqui erit duplum.

PROBLEMA PRIMA, Propositio Prima.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

SIt data recta linea terminata A B, super quam cõstruere iubemur triangulum æquilaterum. facto centro in A, ad interuallum A B, describatur circulus C B E; & facto centro in B, ad interuallum pariter B A, describatur alter circulus C A E, secans priorem in C, tum ex puncto intersectionis C. ducatur vna linea ad A. altera ad B, dico, factum esse triangulum æquilaterum super datam rectam lineam finitam A B. quoniam enim A B, & A C, suntduæ rectæ lineæ a centro A. ad circumferẽtiam erunt *b* inter se æquales. rursus quia rectæ B C, B A ducuntur ex centro B. ad circumferentiam eamdem erunt ęquales inter se: cum igitur tam B C, quam A C, sint æquales ipsi A B, erũt *c* & inter se æquales factum igitur est, quod erat faciendum. b 19. *desi.* c 2. *prom.*

Pro-

Problema 2. Propositio 2. Ad datum punctum data recta linea aequalem rectam lineam ponere.

SIt data linea B C; & sit datum pũctum A. à quo puncto incipere debeat alia linea æqualis ipsi B C si nõ sit; ducta linea ducatur à puncto A ad B. facto centro in B. interuallo C B. describatur circulus C, & super lineam B A, cõstructo triangulo æquilatere *a* producatur latus A D, vsque ad circulum si opus sit. tum facto centro in D, interuallo D G. describatur alter circulus E G, & producatur latus D A, vsq; in G. Dico A G, esse lineam imperatam, quoniam enim D C, D G æquales sunt à centro D. ad eamdem circumferentiam ablatis D A, D G æqualibus lateribus trianguli equilateri *b* remanebit A G, C B equalis cum quod erat faciendum.

a 1. pr.

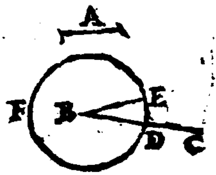
b 3. pr.

Probl. 3. Propositio 3. duabus datis rectis lineis inaequalibus, de maiore aequalem minori detrahere.

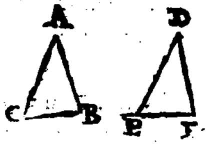
SInt datæ duæ rectę lineę inęquales A, minor B C maior; vt ex maiore detrahatur batur linea ęqualis minori A. Fiat linea B E, ex puncto B ęqualis a ipsi A, tum facto centro in B interuallo B E, describatur circulus secans lineam C B in D, dico D B esse lineam imperatam. quonian enim linea A, & linea B E sunt ęquales eidem B D erunt b ęquales inter se linea A, & linea B D, quod erat faciendum.

a 2d pri.

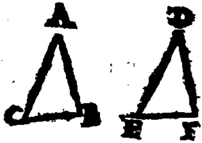
b 1. prin.



Theorema 1. Propositio 4. Si duo triangula duo latera duobus lateribus aqualia habeant, vtrunque vtrique habeant vero, & angulum angulo aqualem sub aqualibus rectis lineis contentum, & basim basi aqualem habebunt, eritque totum triangulum triangulo aquale. & anguli correspondentes aquales.



Sint duo triangula A B C, D E F, & latus B A vnius sit ęquale lateri E D alterius, & C A ipsi D F: sit autem angulus B A C angulo E D F æqualis, dico & basim B C basi E F ęquaqualem,& totum triangulum B A C triangulo D E F ęquale. quoniam enim recta A B rectę D E ponitur ęqualis, sit vt si altera superponi intelligatur alteri, collo-

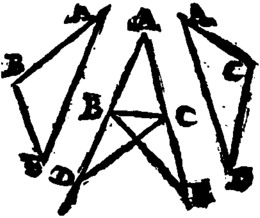


a 8. *prin.* cato puncto A in D, ipse a sibi mutuo cōgruant punctumq́; B. Cadet in puncto E,& si recta A C cadet super rectam D F,cum habeat extremū A in D, C cadet in F, & quia angulus B A C, supponitur angulo E D F, ęqualis congruet cum altero angulo,& ita superpositis duobus his triangulis A cadet in D; B in E; C in F,ergo,& basis B C congruet cum basi E F: si enim caderet supra, aut infra, duę re-
b 14. *prin.* ctę lineę superficiem clauderent *b*, quod est absurdum; & basis igitur,& omnes *c* an-
c 8. *prin.* guli correspondentes, qui ęqualibus continentur lateribus sunt inter se ęquales, & congruunt, quod erat demonstrandum.

Theor. 2. Propos. 5. Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli inter se sunt aequales,& productis aequalibus lateribus; qui sub basi sunt anguli inter se aequales erunt.

Sit triangulum Isosceles A B C in quo latera A B, A C sint æqualia inter se. dico angulos A B C, A C B inter se ęquales esse item si latera A B, A C producantur angu-

angulos quoque infra basim D B C, E C B inter se æquales esse ex linea enim A B producta sumatur A D cui abscindatur ex altera producta infinite, id est, vt nō possit de-



esse, linea A F ęqualis *a* ipsi A D, & ducantur rectę B E, C D. Considerentur iam duo triangula A B E, A C D, quę habent conditiones quartę; latus enim A B est ęquale lateri A C, quia sunt latera trianguli Isosceles, & latus A E est ęquale lateri A D ex constructione, & angulus B A E est ęqualis angulo C A D est enim angulus communis vtrique triangulo, ergo *b* & basis C D est ęqualis basi B E, & angulus A E B est æqualis angulo A D C, & angulus A B E est ęqualis angulo A C D, considerentur iam duo triangula B C D, & C B E, quę pariter habent conditiones quartę; latus enim D C monstratum est ęquale lateri B E, & cum A D, A E sint ęqualia ex constructione, si auferantur B A, C A auferuntur partes ęquales, remanebunt igitur B D, C E latera ęqualia, & angulus B *D* C monstratus est ęqualis angulo C E *B* ; ergo *c* angulus D B C infra basim in triangulo Isoscele est ęqualis

a 3. *primi.*

b 4. *primi.*

c 4. *primi.*

qualis angulo B C E pariter infra basim, & angulus B C D est ęqualis angulo C B E. Et quoniam totus angulus A C D monstratus est ęqualis angulo A B E si auferantur partes ęquales, nimirum C B E ab angulo A B E, & angulus B C D ab angulo A C D, remanebunt anguli ad basim A B C, A C B ęquales, quod erat demonstrandum.

Theor. 3. Propos. 6. Si trianguli duo anguli ęquales inter se fuerint, & sub aequalibus angulis subtensa latera aequalia inter se erunt.

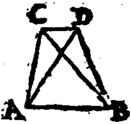
IN triangulo A B C sint duo anguli A B C, A C B super latus B C ęquales. dico & duo latera illis opposita A B, A C esse ęqualia. Si enim non dicuntur ęqualia, sit A B maius quam A C, ex quo abscindatur *a* D B ęqualis recte A C, ducaturq; recta C D, & considerentur duo triangula A C B, D B C; quę, ex illa suppositione essent ęqualia, haberent .n. proprietates quartę; nam D B dicitur ęqualis ipsi A C; B C est communis; angulus D B C supponitur ęqualis angulo A C B: ergo *b* triangulum D B C erit æquale triangulo A B C pars toto, quod est impossibile: ergo illa latera erant ęqualia, quod erat demonstrandum.

a 3. primi.

b 4. primi.

Theor.

Theor. 4. Propos. 7. Super eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ æquales vtraque vtriq; non constituentur ad aliud, atque aliud punctum ad easdem partes.

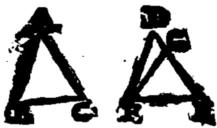


Svper recta A B sint dictæ duæ rectæ lineæ A C, C B, quæ concurrant in puncto C, dico super eandem rectam A B non posse duci alias duas lineas æquales prioribus vtraque vtrique, quæ concurrant ad aliud punctum, quam ad punctum C, si ducantur ad easdem partes; si enim possunt duci, ducantur; & cadant in puncto D. linea igitur A C supponitur æqualis lineę A D, & B C ipsi B D: ergo triangulum A D C est Isosceles, ergo *a* anguli A C D : A D C sunt æquales similiter triangulum B D C est Isosceles; ergo anguli B D C, B C D ad basim sunt æquales, sed angulus A D C est minor angulo B D C pars toto; ergo etiam est minor angulo B C D, qui ponitur æqualis angulo C D B sed angulus A D C ponitur æqualis angulo A C D, & iam ostenditur minor angulo D B C, qui est illius pars: ergo est æqualis toto, & minor parte, ergo pars est maior, quam totum. non igitur concurrent ad punctum D, quod erat demonstrandum.

a 5. primi.

Theor.

Theor. 5. Propos. 8. Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus vtrũque vtriq; æqualia, habuerint vero, & basim basi æqualem; angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.



SInt duo latera A B, A C triã guli A B C duob. lateribus D F, D E trianguli D E F æqualia, vtrunque, vtrique vnum vni, alterum alteri, sit autem Basis B C Basi E F æqualis, dico angulum A æqualem esse angulo D, intelligatur enim basis B C superponi Basi F E, cum sint æquales *a* congruent, punctum B, puncto E, & C puncto F cogitetur triangulum A B C cadere super triangulum D E F, non cadet punctum A, nisi super punctum D, alioquin duæ rectæ lineæ ductæ ad easdem partes æquales prioribus cõcurrent ad aliud punctum, quod *b* est impossibile, cum igitur anguli congruant, æquales inter se erũt, quod erat demonstrandum.

a 8. *pron.*

Problema 4. Propos. 9. Datum angulum rectilinium Bifariam secare.

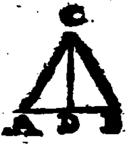
b 7. *primi.* SIt datus angulus B A C diuidendus in duas partes æquales sumantur *a* A B, A C

A C æquales lineæ,& ducatur recta B C super quam constituatur *b* triangulum æquilaterum D,B C, & ab angulo *D* ad A ducatur D A. dico hanc lineam secare angulum B A C in duas partes æquales . quoniam enim triangulum B *D* A. habet duo latera duobus lateribus æqualia triangulo D C A.vtrunque vtrique,& basim basi æqualem latus enim B *D* est æquale lateri D C trianguli æquilateris B A est æquale C A. linea *D* A est basis communis ; ergo *c* angulus D A B est æqualis angulo *D* A C, quod erat faciendum.

b 1. primi.

c 8. primi.

Problema 5. Propos. 10. Datam rectam lineam finitam bifariam secare.



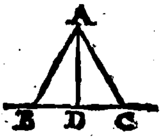
Sit data recta linea A B bifariam diuidenda . Constitue super eã *a* triangulum æquilaterum A C B,deinde diuide angulum A C B bifariam *b* per D C dico lineam A B esse diuisam bifariam in *D*: triangula enim A D C ; D B C habent conditiones quartæ; latus enim A C est æquale lateri B C; D C est commune; angulus A C D factus est æqualis angulo D C B ergo *c* linea A D est æqualis lineæ *D* B, qđ erat faciendum.

a 1. primi.

b 9. primi.

c 4. primi.

Problema 6. Propos. 11. Data recta linea, à puncto in ea dato rectam lineam ad angulos rectos excitare.

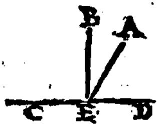


Sit data recta B C, in ea punctũ D, à quo excitanda sit *D* A perpendicularis ipsi B C, sumantur duæ æquales vtrinque C D, D B. & super totam B C consti tue triangulum æquilaterum B A C, tum ab angulo A ad D duc A D hanc dico esse perpendicularem duo enim triangula *D* A C, *D* A B habent conditiones octauæ B A est æquale lateri A C, B *D* est æquale ipsi
a 8. primi. D C, *D* A est commune: ergo *a* anguli sũt æquales; ergo angulus B D A est æqualis
b 10. defin. angulo C D A. ergo linea D A est *b* perpẽdicularis, quod erat faciendum.

Problema 7. Propos. 12. Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Sit data recta B C, & datũ punctum A, ex quo super B C demittenda sit perpendicularis. facto centro in in A describatur circulus tantæ magnitudinis, vt abscindatur pars aliqua datæ lineæ B C puta B C. diuidatur autem linea bifariam in F, & à puncto A ducatur linea ad F. hanc dico esse perpendicularem quoniam enim duo triangula B A F, F A C habent conditiones octauæ latus enim A C, est æquale lateri B A à centro ad circumferentiã ambo. B F est æquale F C ex constructione F A est commune. ergo angulus C F A est æqualis anguli. B F A; ergo est perpendicularis. *a* quod erat faciendum. a 10. *def.*

Theorema 6. Propos. 13. *Cùm recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut ducbus rectis æquales faciet.*



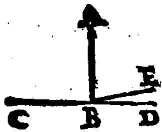
Sit recta linea A E, q̃ consistat super C D. dico vel efficere duos angulos rectos, si sit perpendicularis, vel æquales duobus rectis, si non sit perpendicularis. educatur *a* enim B E ex E; perpendicularis ad C D. quoniam angulus rectus B E D æqualis *b* est duobus angulis B E A, A E D, erunt apposito communi angulo *c* recto B E C. duo recti B E D. B E C tribus angulis D E A, A E B, B E C æquales: & quia angulus A E C est æqualis duobus angulis A E B, B E C; erunt apposito communi angulo A E D, duo anguli

a 11. *pri.* b 19. *prin.* c 2. *prin.*

B CEA,

C E A, A E D. æquales tribus C E B, B E A, A E D; sed illi tres erant æquales duobus rectis, ergo etiã isti duo sunt æquales duobus rectis. quod erat demonstrandum.

Theorema 7. Propos. 14. Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se rectæ lineæ.

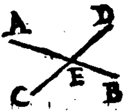


Sint ductæ duæ rectæ lineæ ad pũctum B in diuersas partes C B, B D facientes cum A B, angulos æquales duobus rectis D B A, A B C. dico lineam D B C esse vnam continuatam in directum productam. Si non est, producatur C B. in directum, & sit C B E. quoniam igitur super rectam C B E ex aduersario cadit recta A B faciet duos angulos C B A, A B E æquales *a* duobus rectis, sed & anguli D B A, A B C supponuntur æquales duobus recti, ergo æquales *b* inter se & tamen hoc est totum, illud est pars; ergo pars est æqualis toti, quod est impossibile. ergo illa linea D B C est vna linea recta. quod erat demonstrandum.

a 13. primi.
b 12. pron.

Theo-

Theorema 8. Propos. 15. Si duæ rectæ lineæ se mutuò secent angulos, qui ad verticem sunt æquales inter se efficient.



SI sint duæ rectæ A B, C D, quæ se mutuo secent in E. dico angulos ad verticem E æquales esse, nimirum angulum A E D angulo C E B, & angulum D E B, angulo A E C, cum enim super rectam A B cadit linea D E. anguli A E D, D E B. erunt *a* æquales duobus rectis similiter cum super rectam D C cadat B E. erũt anguli D E B, B E C æquales duobus rectis erunt igitur *b* duo anguli A E D, D E B æquales duobus C E B, B E D. ablato igitur communi D E B, & consequenter ab vtroque parte æquali, remanebit angulus A E D, æqualis angulo C E B eodem modo demonstrabitur angulus D E B angulo A E C æqualis. quod erat faciendum.

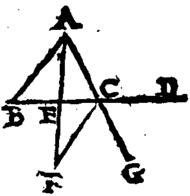
a 13. primi.

b 12. primi.

Theor. 9. Propos. 16. Cuiuscunque trianguli vno latere producto externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

SIt triangulum A B C, producto latere B C ad D. dico angulum externum A C D maiorem esse quolibet interno A B C, vel C A B. diuidatur enim B C bifariam in E,

& ducatur ab angulo A ad E linea A E, quę producatur extra triangulum in directum rātum, vt E F sit æqualis ipsi A E, & ducatur recta F C, & A C producatur vtcunque in G. quoniā igitur triangula *B* E A, C E F habent conditiones quartæ, latus enim A E est æquale ductum lateri E F, & ex diuisione latus E *C* factum est æquale lateri E *B*, & angulus *B* E A est æqualis angulo *a* ad verticem C E F: ergo angulus F, C E est æqualis *b* angulo E *B* A. sed angulus G *C* E est maior angulo F *C* E, totum, parti; ergo est ēt maior angul. E B A, & A *C* *D*, q. est ad verticē E C D, & cōsequēter est illi æqualis. *c* eodem modo ostendit idem angulus A C D maior angulo *B* A *C*, diuidendo latus A C, & ducendo lineam, vt factum est ab angulo *B*. quod erat demonstrandum.



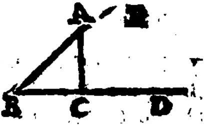
a 15. *primi*. b 4. *pri*. c 15. *pri*.

Theorema 10. *Propos*. 17. *Cuiuscumque trianguli duo anguli simul sumpti sunt minores duobus rectis.*

IN triangulo A *B* *C* dico quoscunque duos angulos simul sumptos minores esse duobus rectis. producantur enim duo quæuis latera C *B*, B *A*: quoniam *a* angulus

a 16. *primi*.

lus A C D maior est interno, & opposito *B* A *C*; cum duo anguli A C D, A *C B* sint æquales *b* duobus rectis, si loco anguli A C D ponatur angulus C A B minor illo, erunt duo anguli A *B C*, *C* A *B* minores duobus rectis, quod erat demonstrandum. b 13. *primi*.



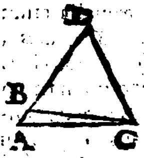
Theorema 11. *Propos.* 18. *Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.*

SIt in triangulo A *B* C latus *B* A C maius latere A *B*. dico angulum A *B* C subtensum à maiore latere maiorem esse: nam ex A C auferatur A D. æqualis *a* ipsi A *B*, & ducatur recta *B* D. quoniam igitur duo latera A *B*, A D per constructionem sunt æqualia erunt anguli *b* ad basim A *B* D, A D *B* æquales, sed angulus A D *B* est maior angulo D C *B*: externus *c* interno, & opposito in paruo triangulo; ergo etiam A *B* D est maior angulo *D C B*. ergo multo magis totus angulus A *B* C erit maior angulo A *C B*. quod erat demonstrandū. ex quo constat in triangulo scaleno angulos esse inæquales. a 3. *primi*. b 5. *primi*. c 16. *primi*.

Theorema 11. Propos. 19. Omnis trianguli maior angulus à maiore latere subtenditur.

IN triangulo A B C angulus *B* maior sit angulo *C* dico latus A C subtendens angulum maiorem maius esse: si enim non est maius, vel est æquale, vel mi-
a 5. nus; si est æquale, ergo *a* anguli *B* C ad ba
primi. sim erunt equales, sed supponitur *B* maior.
Si latus A C sit minus latere A *B*, ergo *b* an-
b 18. gulus *B* minor erit angulo C, contra suppo
primi. situm: si igitur non est nec æquale, nec minus, erit maius; quod erat demonstrandum.

Theorema 13. Propos. 20. Omnis trianguli qualibet duo latera simul sumpta reliquo sunt maiora.



IN triangulo A *B* C dico qualibet duo latera *B* A, *B* C simul maiora esse reliquo A *B*. producatur enim A *B* vsq; ad D, vt recta *B* D sit æqualis ipsi *C B*: ducaturq; recta C D. in trian
a 5. gulo igitur Isósceles D
primi. C *B* erunt anguli *a* ad basim C D *B*, *B* C D

æqua-

æquales; angulus autem A C D maior est angulo *B* C D totum, parti; ergo & latus D A maius *b* erit latere *D* C; sed latus *D* A est æquale duobus lateribus *B* A, *B* C; cum *B* D sit æqualis ipsi *B* C. ergo duo latera *B* A, *B* C simul maiora sũt reliquo A C, quod erat demonstrandum. b 18. *primi*.

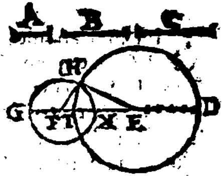
Theorema 14. *Propos.* 21. *Si super trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ ductæ fuerint, quæ interius iungantur; Hæ lineæ reliquis trianguli duobus lateribus minores erunt, maiorem verò angulum continebunt.*

Sint in triangulo A *B* C in extremitatibus B, & C constitutæ duæ rectæ lineæ, quæ iungantur intra triangulum ad punctum *D*. dico B D, D C simul minores esse quam *B* A, A *C* simul; angulum verò *B D C* maiorem esse angulo B A C. producatur enim B D vsque in E. quoniam igitur in triangulo *B* A E duo latera B A, A E simul *a* maiora sunt latere *B* E, erunt adito communi E C, tres lineæ *B* A, A E, E *C* maiores duobus B E, E C. similiter in triangulo *C* D E maiora sunt duo latera *C* E, E D simul *b* reliquo solo C D; ergo adito communi B D erũt tres lineæ *C* E, E D, D *B* maiores duobus C D, D B; ergo multo magis C D, D *B* a 20. *primi*. b 20. *primi*.

minores erunt quam C A, A B; quod autē angulus sit maior patet; nam angulus D E C maior est angulo A, qui in triangulo B A E est internus c & oppositus; sed angulus B D C est externus angulo C E D interno, & opposito, ergo est maior illo, ergo multo maior angulo A, cuius adhuc iste est maior, quod erat demonstrandum.

c 16. primi.

Problema 8. Propos. 22. Tribus datis rectis lineis, quarum duæ simul tertia sint maiores, triangulum constituere.

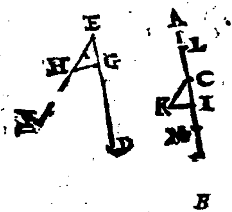


Debent esse qualibet duę lineę simul reliqua maiores, propter demonstrata positione 20. sint igitur datę tres rectę lineę A, B, C. ducatur D G, linea in infinitum, hoc est, vt non possit ex illa deesse, & sumatur G F ęqualis ipsi A, F E ęqualis ipsi C, & E D ęqualis ipsi B. tum facto centro in F ad interuallum G F describatur circulus, & facto centro in E interuallo E D describatur alter circulus, qui priorem secabit alioquin sola linea F E esset vel æqualis, vel maior quam duę simul G F, E D contra suppositum. ex puncto igitur H in quo se secant circuli ducantur duę rectę H F, H E

dico

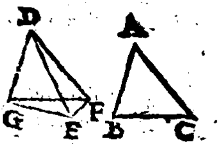
dico triangulum esse constitutum tribus lineis, quæ datis sunt æquales. nam H F est æqualis F G à centro ad circumferentiam, cui etiam est æqualis A. H E est æqualis E D, cui etiam est æqualis B, F E est æqualis ipsi C. quod erat faciendum.

Problema 9. Propos. 23. Ad datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.



Sit data recta linea A B, & in ea datum punctum C, in quo constituendus sit angulus F E D æqualis. Sumantur duæ rectæ E H, E G vtrinq;, & ducatur recta H G, tum sumantur in recta A B ex puncto C tres lineæ æquales tribus H G ipsi C I, E G ipsi I M, E H ipsi C L æqualis, & ex his tribus fiat triangulũ *a* I K C, & quoniam duo triangula C k I, G E H, habent conditiones octauæ, tria latera tribus lateribus æqualia erit *b* angulus G E H æqualis angulo I C k in dato puncto; quod erat faciendum. a 22. *primi.* b 8. *primi.*

Theorema 15. Propos 24. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, habuerint vero angulum angulo maiorem contentum æqualibus rectis lineis, & basim basi maiorem habebunt.



SInt duo latera A B, A C æqualia duobus lateribus D E, D G singula singulis angulus vero A maior sit angulo E D G. dico & basim B C maiorem esse *Basi* G F. constituatur enim angulus G D F æqualis *a* angulo A. per lineam D F, quæ fiat æqualis ipsi D E, & ducatur recta G F. quoniam igitur duo triangula B A C, F D G habent conditiones quartæ, erit basis *b* B C basi F G æqualis siue igitur dicatur linea F G cadere supra lineam G E siue non, semper E G apparebit minor quam F G; si enim congruet patenter excedet; si non congruit, vel non congruere dicatur, ducatur linea F E. quoniam enim duo latera D E, D F æqualia dicuntur erunt anguli *c* ad basim D E F, D F E. æquales ergo angulus G F E, qui est minor angulo D F E erit etiam minor angulo D E F. ergo multo minor angulo totali F E G. ergo linea E G, quæ subtenditur angulo minori. erit minor *d* linea G F.

a 23. *primi*.
b 4. *primi*.
c 5. *primi*.
d 19. *primi*.

G F; quæ subtenditur maiori erit minor. ergo etiã minor erit quam B C. quæ monstrata est æqualis ipsi G F, quod erat demonstrandum.

Theorema 16. Propos. 25. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrunque vtrique, basim vero basi maiorem, & angulum angulo maiorem habebunt.

Sint duo latera A B, A C æqualia lateribus D E, D F singula singulis, basis vero sit basi maior, & angulus A erit maior angulo D. si enim dicatur æqualis, erit per quartam basis basi æqualis; si dicatur minor, erit basis B C per 24. basi F E minor; supponitur autem maior. ergo est maior, quod erat demonstrandum.

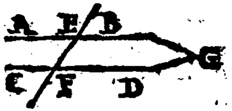
Theorema 17. Propos. 26. Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint vtrunque vtrique, vnumq; latus vni lateri æquale, quodcunque latus sit, habebunt & reliqua latera, & angulum angulo æqualem.

Sint duo anguli E F duobus angulis B A æquales, & sit latus B C lateri E F, æquale. dico reliqua latera reliquis laterib.

æqualia, & angulum angulo. Si enim B A non est æqualis ipsi E D, sed dicitur maior sumatur ex maiore B G æqualis ipsi E D,

& ducatur G C. quoniam autem duo triangula G B C, D E F habent cōditiones 4. latus B C lateri E F, B G, E D æqualia, & angulus B angulo E ex suppositione, erit angulus G C B angulo F æqualis; sed etiam angulus A C B supponitur eidem æqualis ergo illi duo G C B, A C B erunt æquales inter se, & pars esset æqualis toti, ergo etiā latera, & angulus est æqualis. quod erat demonstrandum.

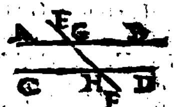
Theorema 18. Propositio 27. Si in duas rectas lineas recta incidens alternatim angulos æquales inter se fecerit, Parrallelæ erunt inter se rectæ lineæ.



Sint duo anguli A E F, E F D, quos facit recta E F incidens in lineas A B, C D inter se æquales, dico A B, C D parallelas: si enim non sunt parallele productæ concurrent ad unam ex partibus, & facient triangulum, verbi

verbi gratia, E F G in quo angulus externus A E F æqualis esset vni ex internis, & oppositis G F E, quod est *a* impossibile; ergo non concurrent, neque facient triangulum; ergo sunt parallelę *b* quod erat ostendendum. a 16. primi b 34. defi.

Theorema 19. Propositio 28. Si in duas rectas lineas recta incidens externum angulum interno, & opposito ad easdem partes æqualem fecerit, aut internos ad easdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

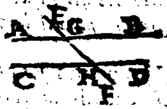


Sit angulus E G A æqualis interno, & opposito ad easdē partes G H C. dico esse parallelas, nam anguli E G A, B G H ad verticem *a* sunt æquales; ergo si ille est æqualis, etiam iste erit æqualis ipsi G H C, ergo per hoc erunt parallelę. *b* Deinde sint anguli A G H, G H C æquales duobus rectis, etiam anguli A G H, B G H sunt æquales *c* duobus rectis, ac proinde æquales *d* inter se, ablato igitur cōmuni A G H relinquetur B G H æqualis ipsi G H C alternatim posito; & ita per hoc erunt parallelę. quod erat demonstrandum. a 15. primi. b 27. primi. c 13. primi. d 12. primi.

Theo-

Theorema 20. Propos. 29. In parallelas recta incidens linea, & alternos angulos inter se æquales efficiet, & externũ interno ad easdem partes, & internos ad easdem partes duobus rectis æquales.

IN parallelis A B C D recta incidat E F. dico angulos alternos A G H; G H D inter se æquales, si enim non sunt æquales, sit maior A G H, addito communi B G H, erunt A G H, H G B maiores, quã I B G H, G H D: sed



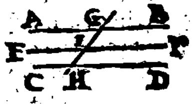
a 13. pri. illi sunt a duobus rectis æquales, ergo isti sunt minores duobus rectis; coibunt ergo lineæ, quod est contra suppositum. Est etiã angulus externus E G B æqualis interno, & opposito ad easdem partes G H D; si enim illi A G H est æqualis, cum huic E G B sit ad verticem erit etiam ipse illi æqualis, b sic monstrabuntur anguli interni ad easdẽ partes duobus rectis æquales, cum duo A G H, B G H sint æquales duobus rectis, quod erat faciendum.

b 15. pri.

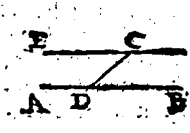
Theorema 21. Propos. 30. Lineæ, quæ sunt eidem parallelæ, inter se sunt parallelæ.

LIneę A B, C D, sint parallelæ idem E F. dico inter se esse parallelas, ducatur enim G H, quæ secet omnes; angulus I G A erit

erit ęqualis angulo F I C, cum sint parallelę, & huic erit ęqualis angulus C H I, cum etiam istæ sint parallelę ergo Angulus C H I erit ęqualis angulo A G I: ergo erunt parallelæ C D A B, quod erat demonstrandum.



Problema 10. Propos. 31. Dato puncto data recta linea ducere lineam alteri parallelam.



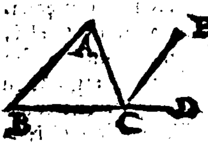
Ex puncto C, ducenda sit linea parallela A B; ducatur ex C, vtcumque ad lineam A B linea C D, & ducatur linea per punctum C, quæ cum linea C D, ducta *a* faciat angulum E C D. æqualem angulo C D B. dico hanc esse parallelam, cũ anguli *b* alterni sint ex constructione ęquales, quod erat faciendum.

a 23. *primi*. b 27. *primi*.

Theorema 22. Propos. 32. Cuiuscunque trianguli uno latere producto externus angulus duobus internis, & oppositis equalis est, & tres anguli simul sumpti interni æquales sunt duobus rectis.

IN triangulo A B C producatur latus B C in D, dico angulum A C D æqualem esse

esse duobus internis, & oppositis A, & B ducatur enim ex C linea C E, quæ sit parallela a ipsi A B; quoniam igitur linea A C incidit in parallelas A B, E C erunt anguli alterni A, & A C E æquales, b & quia recta B D pariter incidit in easdem parallelas A B, C E faciet angulum externum D C E equalem interno ad easdem partes B. ergo totus angulus A C D est equalis duobus internis A, & B; cum autem duo anguli A C B, & A C D sint equales c duobus rectis; erunt etiam angulus A C B, cum angulis A, & B, equales duobus rectis; cum isti æquivaleant externo. quod erat demonstrandum.

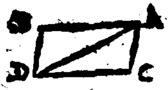


a 31. primi.

b 29. primi.

c 13. primi.

Theorema 23. Propos. 33. Recta linea, quæ æquales, & parallelas lineas ad easdem partes coniungunt, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

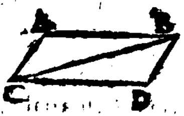


Sint duæ rectæ lineæ A C, B D equales, & parallele, que coniungantur duabus lineis A B, C D dico istas etiam esse æquales, & parallelas, ducatur enim linea A D, quæ, cum incidat in parallelas A C, D B faciet angulos a alter-

a 29. primi.

alternos C A D, A D B equales: duo igitur triangula C A D, A D B habent conditiones quartę, cum latus A C sit æquale lateri B D, & latus A D sit commune, & anguli comprehensi æqualibus lateribus sint ęquales. iam basis C D erit ęqualis basi A B, & angulus B A D erit ęqualis angulo A D C. cum igitur isti anguli alterni sint ęquales, ergo linea A B erit parallela C D, quod erat demonstrandum.

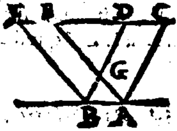
Theorema 24. Propos. 34. Parallelogrammorum spatiorum ęqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, & latera, & anguli, atque illa bifariam secat diametro.



IN Parallelogrãmo A B C D dico latera opposita esse ęqualia, & angulos oppositos æquales, & diuidi bifariam ducta diametro. hæc tria simul probantur ducta, vt libet diametro B C. triangula enim A C B, D C B, quæ resultant habent conditiones 26. latus enim B C est cõmune; angulus B C A est æqualis angulo alterno C B D. cum incidat in parallelas linea B C, angulus B C D est æqualis angulo C B A. ergo triangula illa sunt inter se æqualia; & quod ad latera, & quod ad angulos: ergo latera opposita in parallelogramma sunt ęqualia, & anguli oppositi A, & D, sic

sic probentur etiam *A*, & C. quod erat demonstrandum.

Theorema. 25. Propositio 35. Parallelogramma super eadem basi, & in ijsdem parallelis constituta inter se sunt aequalia.



Sint intra duas parallelas A B C F constituta duo parallelogrammata A B C D, & F B E A super eamdem basim A B, dico esse inter se equalia quantumuis protrahatur latus F E. considerentur enim duo triangula A E C B F D, quę habent conditiones quartæ; latus enim A C est ęquale lateri B D, cum sit latera opposita in parallelogramma, & linea F E, cum sit æqualis ipsi A B. erit etiam æqualis D C, quę eidem A *B* est æqalis, cũ sint latera opposita in parallelogrammo; addita ergo communi D E erit tota C E æ-

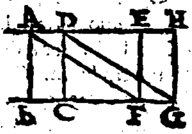
a 29. qualis ipsi F D: angulus A C E est ęqualis

primi. angulo B D F externus interno, & ad easdẽ partes. cum linea E C incidat in parallelas B D, A C. ergo totum triangulum *b* est ę-

b 4. quale alteri dempto communi triangulo G

primi. D E, quod est pars vtriusque remanebit, trapezium C A G D ęquale alteri *B* E G F addendo vtrique triangulum *B* G A erit totũ parallelogrammum A C D *B* ęquale alteri A *B* F E. quod erat demonstrandum.

Theorema 26. Propositio 36. Parallelogramma super æqualibus basibus, & in iisdē parallelis constituta inter se sunt æqualia.



SInt duo parallelogramma A D B C, & E H G F sup æqualibus basibus C B, F G, & in iisdē parallelis constituta. dico inter se esse æqualia ducantur enim nectentes lineæ A F, D G constituent parallelogramma, cum nectant parallelas, & æquales *a* A D, F G lineæ ductæ. cum igitur hoc medium parallelogramma A D F G sit & æquale, ipsi A D C B. quia est super eamdem basim *b* A D in iisdem parallelis, & sit etiam æquale ipsi E H F G, quia est super eamdem basim F G, cum illo in iisdem parallelis; ergo illa duo erunt æqualia vni tertio, & inter se, quod erat demonstrandum.

a 33. *primi.*
b 31. *pri.*

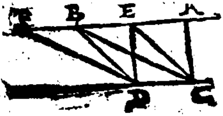
Problema 27. Propos. 37. Triangula super eadem baa constituta, & in iisdem parallelis inter se sunt æqualia.

SInt inter parallelas A B C D super basim C D constituta duo triangula A C D, & C B D hoc est, linea ducta per apices

A, &

A, & B sit parallela basi, dico esse æqualia

a 31. primi.



ducatur enim a ex D linea D E parallela ipsi A C, & D F parallela C B; erunt duo parallelogramma A C E D, & C D B F inter b se æqualia cum sint super eandem basim C D: sed horum dimidia sunt dicta triangula cũ secentur c bifariam à diametro, ergo erunt inter se æqualia, quod erat demonstrandũ.

b 35. primi.

c 34. primi.

Theorema 28. Propositio 38. Triangula super æqualibus basib. constituta, & in ijsdẽ parallelis inter se sunt æqualia.

Sint duo triangula A C B, E F D sup basibus æqualibus C B, E F in ijsdem parallelis. dico esse inter se æqualia. ducatur enim C G parallela ipsi A B, & F H ipsi E D erunt parallelogramma E D F H, A B C G æqualia a cum igitur horum dimidia sint triangula b dicta, erunt & inter se æqualia. quod erat demonstrandum.

a 36. primi.

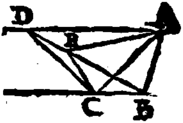
b 34. primi.

Theorema 29. Propositio 39. Si duo triangula sint super eamdem basim, & constituta ad easdem partes, & sint inter se æqualia, erunt in ijsdem parallelis.

SI enim sint inter se æqualia triangula A B C, & C B D super eadem basi C B

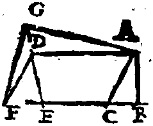
&

& ad easdem partes ducatur alia linea parallela ipsi B C,& sit A E,si non est A D,iungatur E C. erunt igitur duo triangula A B



C,& C E B,æqualia *a* sed eidem triangulo A B C est æquale triãgulum B D C ex suppositione ergo duo triangula B C D,& B C E.erunt inter se ęqualia totum scilicet, & pars ergo prima A D erat parallela basi, & non secunda A E,quare si duo triangula & cę. quod erat demonstrandum. a 37. primi.

Theorema 30. Propositio 40. Triangula, quæ sunt constituta ad easdem partes super æqualibus basibus si sint inter se æqualia erunt in ijsdem parallelis.



SI enim duo triangula A B C, D E F sint constituta ad easdem partes super ęqualibus basibus B C, E F, & sint inter se æqualia;non tamen dicatur linea A D parallela ipsi B F ducatur alia, quæ sit parallela huic, & sit A G ducatur G F, cum igitur duo triangula A B C, F G E dicantur in ijsdem parallelis super ęqualibus basib. erunt *a* ęqualia;sed eidē A B C est ęquale F D E. a 38. primi.

b 1. pron. D E. ergo *b* & duo triãgula F D E: F G E erunt inter se ęqualia, pars, & totum. non igitur A G, sed A D est parallela ipsi B F. quod erat demonstrandum.

Theor. 31. Propositio. 41. Si parallelogrammum habuerit eamdem basim, cum triangulo, & fuerit in ijsdem parallelis parallelogrammum erit duplum ipsius trianguli.

Constituatur inter easdem parallelas A E, B C super eamdem basim B C parallelogrammum A D C B, & triãgulum C B E. dico parallelogrammum triangulo esse duplum ducta enim diametro A C

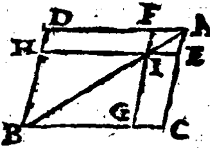
a 37. primi. erunt *a* triangula B C E, C A B æqualia; at parallelogrammum duplum est triangulo *b*
b 34. primi. A B C, ergo, & duplum triangulo C E B, quod erat demonstrandum.

Problema 11. Propos. 42. Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum A B C, & angulus rectilineus D, diuidatur vnum latus trianguli B C bifariã in a in E,& fiat b angulus B E F æqualis angulo D ducatur item per A linea A G parallela c ipsi B C, quæ secet E F in F, & ducatur ex C, C G parallela ipsi E F, & ducatur recta E A eritque parallelogrammum C E G F, cum angulo G C E æquali dato angulo rectilineo D, quod autem sit æquale triangulo patet, nam est duplum trianguli C E A super eadem basi in ijsdem parallelis; d sed triangulum A C E est dimidium trianguli B A C, cum duo triangula E A C, B A E sint æqualia e super æqualibus basibus cõstituta, erit & parallelogrammum æquale triangulo in dato angulo rectilineo, quia angulus B E F, qui est æqualis angulo D, est æqualis etiam angulo E C G interno, & opposito, & ad easdem partes, f quod erat faciendum.

a 10. primi. b 23. primi. c 35. primi. d 41. primi. e 38. primi. f 29. primi.

Theor. 32. Propos. 43. In omni parallelogrammo, complementa, quæ sunt circa diametrum inter se sunt æqualia.



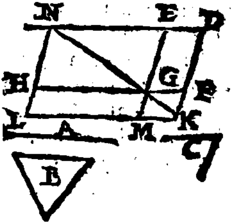
IN parallelogrammo A B C D complementa D I, & G E, dico esse æqualia; cum enim a triangula A C B, & A D B sint æqualia, similiter triangula A I E, & A I F, nec non G B I, & B I H, si ex A B C auferantur hæc duo A I E, & B G I, & ex

a 34. primi.

A B D

A B D alia duo A I F,& B H I, auferrentur partes ęquales, remanebunt igitur ęqualia complementa D I, & G E. quod erat demonstrandum.

Problema 12. Propositio 44. Ad datam rectam lineam applicare in dato angulo rectilineo parallelogrammum dato triangulo æquale.



Sit data recta linea A, supra quã sit construendũ parallelogrã mum ęquale triangulo B, quod habeat angulum C, construatur *a* parallelogrammũ G D, ęquale triã gulo B, quod habeat angulum F G E æqualem angulo C, dato; producaturq; G F ad H, vt G H sit æqualis ipsi A, ducaturque H N parallela ipsi E G donec occurrat lineę D E productæ in N. demittaturq; D F, donec occurrat lineę productę p N G, in K ducatur K L parallela G H, productis N H in L, & E G in M. dico parallelogrammum M H esse imperatum, est enim super latus. G H æquale ipsi A; angulus M G H est *b* ęqualis angulo F G E, hoc est angulo C; & est ęquale *c* complemento G D, hoc est triangulo B. quod erat faciendum.

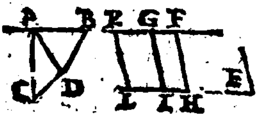
a 42. *primi.*

b 15. *primi.*

c 43. *pri.*

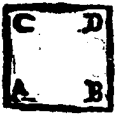
Pro-

Problema 13. *Propos.* 45. *Super datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.*



Sit datum rectilineũ A B C cui cõstituẽdum sit parallelogrãmum æquale, cuius vnum latus sit data recta L k, & datus sit angulus E. diuidatur datum rectilineum in quotlibet triangula A B D, A D C, tum constituatur parallelogrammum L G, cuius *a* vnum latus L k, & angulus L k G sit æqualis angulo E, & sit parallelogrammum æquale triangulo A B D, tum super lineam G I, & angulo I G F, fiat parallelogrammum G H æquale triangulo A C D, dico totum parallelogrammum L F esse, & parallelogrammum, & requisitum. sunt. n. latera parallela omnia, & æqualia, quæ sibi respondent datæ rectæ lineæ, & singula singulis triangulis respondentia in dato angulo, ergo totum toti rectilineo æquale est, quod erat faciendum. *a* 34. *primi.*

Problema 14. Propos. 46. data recta linea quadratum describere.



SIt data recta A B super quam oporteat quadratum describere. super A B. erigantur perpendiculares A C, B D, quæ sumantur æquales ipsi A B, & connectantur recta D C. dico A B C D esse quadratum. cum enim anguli A, & B sint recti, erunt *a* A C, B D, parallelæ, & sunt æquales igitur *b*, & A B, D C parallelæ sunt, & æquales; cũ igitur quatuor lineæ sint equales, & anguli recti omnes, erit quadratum. quod erat faciendum.

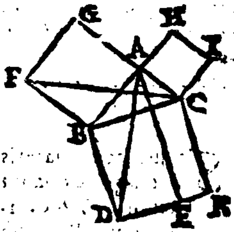
a 28. primi. b 33. primi.

Theorema 33. Propos. 47. In triangulis rectangulis quadratum, quod à latere rectũ angulum subtendente describitur æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

IN triangulo A B C, angulus B A C sit rectus: si describantur quadrata super B C, & super A B, A C dico quadratum descriptum à B C solum esse æquale alijs duobus descriptis à B A, A C. ducatur enim recta A E parallela lateribus B D, C k, quæ secet B C, & ex A ducatur A D. ducaturq; F C, quoniam igitur duo anguli B A C, B A G

sunt

sunt recti, erunt *a* G A, A C vna recta linea similiter vna recta B A, A H considerentur iam duo triangula F B C, A B D, quæ habent conditiones quartę lateris enim D B in triangulo A B D est æquale lateri B C in altero triangulo B C F, sunt. n. latera eiusdem quadrati; & A B est æquale lateri B F, eadem ratione, & angulus A B D est æquale angulo F B C. cum enim anguli F B A, C B D sint recti, & consequenter æquales, addito vtrique communi angulo A B C erit angulus A B D totus æqualis angulo F B C, ergo *b* illa duo triangula sunt æqualia, sed triangulum F B C est dimidiũ quadrati F G A B, *c* cum sit super eamdem basim F B in ijsdem parallelis F B G C. ergo etiam triangulum A B D erit dimidium eiusdem quadrati, cum sit illi æquale, sed est etiam dimidium parallelogrammi B E, cum sit super eamdem basim B D, & in ijsdem parallelis *d* ergo parallelogrammum B E est æquale quadrato F G A B eodem modo demonstrabitur parallelogrammum E C æquale quadrato A I H C, ergo totum quadratum lineæ B C est æquale duobus quadratis linearum B A, A C. quod erat demonstrandum.



a 14. *primi.*

b 4. *primi.*

c 41. *primi.*

d 41. *primi.*

Theorema 34. Propos. 48. Si quadratum, quod ab uno latere trianguli describitur, æquale sit eis quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus comprehensus illis lateribus erit rectus.

Sit quadratum lateris A C æquale quadratis laterum A B, B C. dico angulum A B C esse rectum. ducatur namq; B D perpendicularis ipsi B A æqualis rectæ B C connectaturque recta A D. quoniam igitur in triangulo A B D
a 47. pri. angulus A B D est rectus, erit *a* quadratum A D æquale quadratis A B, B D, sed quadratum B D est æquale quadrato B C, cum ex constructione sint latera æqualia D B, B C. ergo quadratum A D est æquale quadratis A B, B C, sed ijsdem est æquale quadratũ A C, ergo quadrata A D, A C sunt æqualia; ergo & lineæ A C, A D. duo igitur triangula A B C, A B D erunt æqualia cum habeant
b 8. pri. tria latera æqualia. igitur *b* angulus A B C erit æqualis angulo A B D, & consequenter rectus etiam ipse cum illo sit rectus, quod erat demonstrandum.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

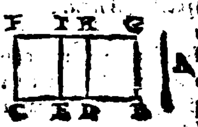
LIBER SECVNDVS.

DEFINITIONES.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ comprehendunt vnũ ex rectis angulis. *Dum enim vna supra aliam ad rectos angulos erecta duci intelligitur formari intelligitur rectangulum.*

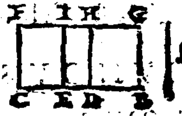
2. In omni parallelogrammo spatio, parallelogrammum illud, quod circa diametrum est, si diameter ducatur, vna cum duobus complementis Gnomon vocatur.

Theorema 1. Propos. 1. Si fuerint duæ rectæ lineæ seceturque ipsarum altera in quotcunque partes rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis æquale est eis, quæ sub non secta, & omnibus illis partibus comprehenduntur rectangulis.



Sint duæ rectæ A, & BC: quarum BC secetur in D, & E. dico rectangulum comprehensum sub A, & BC tota æquale esse re-

rectangulis, quæ fiunt ab eadem A, & B D, vna cum rectangulis,

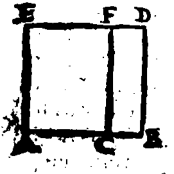


quæ fiunt ab A, & D E, A, & E C. fiat enim rectangulum B F, ex B G æquali ipsi A, & ex B C deinde ex D erigatur parallela ipsi B G linea D H, & ex E altera eidem parallela E I, ostendo in toto isto rectangulo B F esse inclusa tria rectangula ex A, & ex illis tribus partibus, quę fiunt ex secta B C, & consequenter esse æqualia: cum enim D H, sit parallela, a & æqualis ipsi B G, erit B H rectangulum ex G B, hoc est A, & B D similiter D I erit rectangulum ex D H, hoc est B G, seu A, quæ sunt inter se æquales, & D E, & cum E I sit parallela, & æqualis ipsi D H, & consequenter ipsi A, erit rectangulum E F ex A, & E C: ergo tria rectangula B H, D I, E F explent totum rectangulum B F, & consequenter sunt illi æqualia. quod erat demonstrandum.

a 23. primi.

Theor. 2. Propos. 2. Si recta linea secta sit vtcunque rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehendütur æqualia sunt quadrato, quod fit à tota.

RECta linea A B diuidatur vtcunque in C. dico rectangula, quæ fiunt à tota A B, & à partibus C D, & C B, esse æqualia quadrato, qđ fit à tota A B. fiat enim quadra-dratum totius A B, & sit A D. deinde ex C erigatur C F paralle-la ipsi A E. ostendo il-lud quadratum adæ-quatè diuisum esse in duo rectangula facta ex A B, A C, & ex A B C B, & consequenter esse illis duobus ęqua



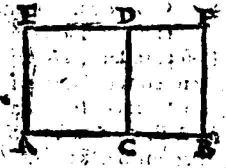
le. linea enim C F est parallela, *a* & æqua- a 29.
lis ipsi A E, hæc autem, cum sit latus quadra *primi*.
ti, erit æqualis ipsi A B, & consequenter et
C F erit ęqualis ipsi A B, cum autem angu-
lus A sit rectus, erit etiam B C F rectus, *b* e- b 34.
rit igitur A F rectangulum sub A E. hoc est *primi*
A B, & A C, similiter C D erit rectangulum
sub C F, hoc est A B, & C B: cum igitur duæ
istæ partes adęquent totum quadratum, e-
runt illi æquales. quod erat demonstran-
dum.

Theorema 3. Propositio 3. Si recta linea secetur vtcunque rectangulum sub tota, & vna segmentorum comprehensum æquale est illi rectangulo, quod fit à segmentis, vna cum quadrato, quod fit ab illo segmento prius sumpto.

SIt recta linea A B diuisa vtcunque in C. dico rectangulum comprehensum sub tota A B, & vna parte A C, vt rectangulum A F ęquale esse rectangulo, quod fit à partibus A C, C B, vna cum quadrato

 ipsius

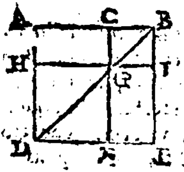
ipsius A C. fiat enim prædictum rectangulum A F ostendo in ipso includi adequatè, & rectangulum illatum partium, & quadratum ipsius A C. ex C enim erigatur C D parallela ipsi A E: C F erit rectangulum cõprehensum sub partibus A C, C B, & A D



erit quadratum ipsius A C. A E. enim supponitur æqualis. ipsi A C in rectangulo A F: ergo & F B, D C cũ sint latera opposita in parallelogrammo a A D. ergo A D est quadratum ipsius A C, & cum angulus A sit rectus etiam angulus b B C D erit rectus. ergo cum C D sit æqualis ipsi A C, erit C F rectangulũ ex C D, hoc est A C, & C B. quod erat demonstrandum.

a 29. primi.
b 34. primi.

Theorema 4. Propos. 4. Si recta linea secta sit vtcunque quadratum, quod à tota describitur æquale est eis, quæ à segmentis describitur quadratis, & eis quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo.



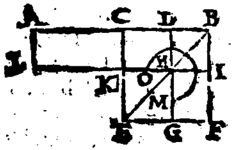
Sit recta A B diuisa vtcunque in C fiat quadratũ totius A B ostendo istud quadratum diuidi adequatè in duo quadrata

drata partium A C, C B, & in duo rectangu- la, quæ fiunt vtraque ex A C, C B. ducatur enim diameter D B, deinde ex C erigatur C F, parallela ipsi A B, & per punctum vbi secatur diameter in G ducatur I H parallela ipsi A B, cum igitur I H sit parallela ipsi A B, si angulus A est rectus, & angulus a A H G erit rectus, & similiter B C G, & linea C G erit æqualis b ipsi A H. & cum C G sit parallela ipsi B I, quæ est parallela ipsi A H, erit & illi æqualis claudens C B, & G I æquales & cum triangula D A B, E D B habeant conditiones 4. latus enim D A, æquale est lateri E B, & A B, ipsi E D, & angulus A angulo E, erit & angulus A B D angulo D B E æqualis; ergo in triãgulo paruo G C B cũ sit angulus C rectus, vt est angulus I in triangulo G I B, & angulus C B G angulo I B G, & latus G B cõe erit C G, G I, & c C B, lateri B I equale. eodem modo ostendetur latus H G, G F equale cũ triãgula D H G, D F G sint equalia, & H D, D F. erit igitur H F quadratum ipsius A C, & C I quadratum ipsius C B, cum latera omnia sint æqualia, & anguli recti. eodem modo constat A G esse rectangulum sub A C, C G, hoc est C B, & G E alterum rectangulum sub G F, quæ est equalis ipsi H G, hoc est ipsi A C, & G I, seu C B, igitur intra quadratum A E sunt adequatè duo quadrata partium A C, C B, & duo rectangula earumdem partium, quod erat demonstrandum.

a 29. primi.
b 34. primi.
c 26. primi.

Constat ex hoc Theoremate rectangula, quę sunt circa diametrum in quadrato esse quadrata.

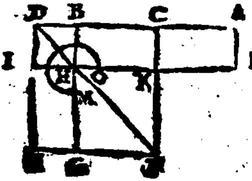
Theorema 5. Propos. 5. Si recta linea secetur in partes æquales, & non æquales, rectangulum, quod fit ab inæqualibus segmentis, una cum quadrato intermediæ sectionis æquale est quadrato, quod fit à dimidia.



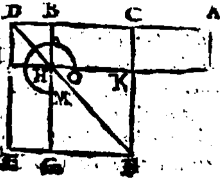
Diuidatur recta A B bifariam in C, & non bifariam in D. dico rectangulum factum ex segmẽtis inęqualibus A D, D B, vna cum quadrato intermediæ C D, quæ est inter sectiones, ęquale esse quadrato dimidię C B. fiat enim quadratum C F ex dimidia C B, & ducta diametro E B, ex D erigatur D G parallela ipsi B F, & per pũctum sectionis H, ducatur I L parallela ipsi A B, quæ elaudatur A L parallela ipsi I B ostendo rectangulum A k, quod remanet extra quadratum C F, ęquale esse rectangulo D F; quo ostenso patebit quadratum C F, ęquale esse rectãgulo L D vna cum quadrato K G. probo autem, nam linea B F est æqualis ipsi B C, quia sunt latera quadrati, & A C est ęqualis eidem C B cum tota sit di-

diuisa bifariam in C: ergo A C est æqualis ipsi B F, D B est ęqualis ipsi B I, cum D I sit quadratum ex supradictis, a ergo est & ęqualis ipsi A L. ergo rectangulum D F est æquale L C. quod erat demonstrandum; cũ sub ęqualibus lineis contineatur. a 4. secun.

Theorema 6. Propos. 6. Si recta linea secetur bifariam, & illi adijciatur alia recta linea, rectangulum comprehensum sub cõposita ex tota, & adiuncta, vna cum quadrato dimidiæ æquale est quadrato, quod fit ex linea composita ex dimidia, & adiecta.



Recta A B secetur bifariam in C illique alia adatur D B. dico rectangulum factum ex tota A D, quæ componitur ex tota, & adiecta, & ex D B adiecta, vna cum quadrato ipsius C B, ęquale esse quadrato, quod fit à C D, quę constat ex dimidia, & adiecta. describatur enim quadratum C E, ex C D, & ducta diametro F D, erigatur parallela B G ex puncto B per punctum inter sectionis H ducatur I L parallela ipsi D A. ostendo rectangulum H E ęquale esse rectangulo L C. quod vbi ostendero habebimus intentum reliqua. n. continetur intra quadratum, vt apparet C D. verò cum sit ęqualis ipsi D E, & B D, ipsi D I; cum sint latera quadratorum; si hæc auferantur à primis, remanebit E I ęqualis ipsi B C, hæc autem ęqualis est ipsi C A, cum sit diuisa bifariam. D I est ęqualis ipsi A L



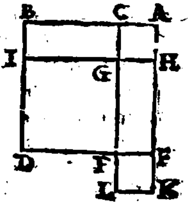
cum sint latera opposita rectanguli, huic autem est etiam ęqualis B D, seu G E, quę illi opponitur. ergo rectangulum G I, est ęquale rectangulo H E. quod erat demonstrandum, nam quadratum F H constat esse quadratum ipsius C B.

Theorema 7. Propos. 7. Si recta linea secetur vtcunque duo quadrata quæ fiunt alterũ à tota, alterum ab vno segmentorum ęqualia esse simul sumpta rectãgulo, quod fit à tota, & dicto segmento bis sumpto, et addito quadrato alterius segmenti.

SEcetur recta A B, vtcunque in C. dico quadratum totius A B, vna cum quadrato segmenti A C ęquale esse rectangulo facto à tota A B, & à segmento A C, si bis summatur, & illi addatur quadratum alterius segmenti C B: describatur enim quadratum ex tota A B ex C erigatur parallela ipsi A E, linea C F, & sumpta A H

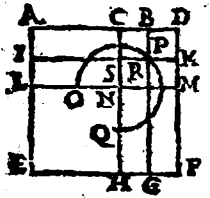
ęquali

æquali ipsi A C, ducatur H I parallela ipsi A B, & ad faciliorẽ demonstrationem producta C F, vsq; ad L. vt sit æqualis segmento A C: producatur etiam E ad k, & fiat quadratũ F k. ostendo quadratum B E vna cũ quadrato F k, quod



est quadratum ipsius C A, vt constat ex constructione continere duo rectangula ex B A, C A, & quadratum I F, quod constat esse quadratum ipsius B C. patet autem hoc, cũ enim C A, sit æqualis ipsi A H ex constructione A I erit rectangulum ex B A, A C. similiter cum A E, sit æqualis ipsi B A, A F erit rectangulum ex A B, A C, quia autem bis sumitur quadratum C H, sumatur secunda vice quadratum F k illi æquale, & erunt completa duo rectangula igitur in quadrato B E vna cum quadrato F K sunt illa duo rectangula, vna cum quadrato ipsius B C. quod est quadratum D G, vt constat. quod erat demonstrandum.

Theorema 8. Propos. 8. Si recta linea secetur vtcunque; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento tanquam ab vna linea, describitur quadrato.

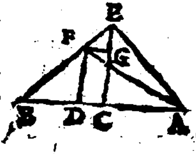


Sit recta A B diuisa vtcunque in C, dico, si sumantur quatuor rectangula facta ex A B, C B, vna cum quadrato ipsius A C, æqualia esse ista omnia quadrato, quod fit ex tota A B, B C, tanquam ex vna linea. Addatur enim B D æqualis ipsi C B, & describatur quadratum A F, tunc per punctum B, & C ducantur rectè B G, C H parallelę ipsi D F, & sumptis D k, & K M, quæ sint æquales ipsi C B, ducantur aliæ parallelæ k I, M L ostendo in toto quadrato A F esse quatuor rectangula dicta vna cum illo quadrato, ex quo sequetur illa rectangula cum quadrato dicto esse æqualia quadrato A F, nam H L est quadratum ipsius C A, vt constat ex supradictis I B, & P A, sunt duo rectangula ex A B, C B, cum K D, & M k sint sumpta æquales ipsi B C, similiter P F est rectangulum tertium ex A B, B C; nam

K F

K F est æqualis ipsi A *B*, cum A *D*, D F sint latera quadrati, ac proinde æqualia demptis ergo B D, D k, æqualibus remanebit A *B*, K F æqualis, & G *F* ipsi D B, seu *C B* est æqualis quartum esset rectangulum P H, sed illis deest quadratum R P sumptum iam in rectangulo L P, loco igitur illius ponatur quadratum P D illi æquale cum habeat latera æqualia, ergo in toto quadrato A F continentur quatuor dicta rectangula vna cum dicto quadrato, quod erat demonstrandum.

Theorema 9. Propos. 9. Si recta linea secetur in partes æquales, & non æquales; quadrata, quæ fiunt à partibus in æqualibus sunt duplicia quadratorum, quæ fiunt à dimidia, & ab interiecta inter dimidiã, & alteram sectionem.

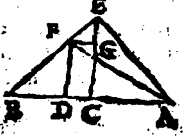


SEcetur recta A *B* bifariam in C, & non bifariam in D, dico quadrata rectarum A D, D *B* simul, esse dupla quadratorum A C, C *D*. educatur enim ex C ad A *B* perpendicularis C E, quæ sit æqualis ipsi A C iunganturque rectę E A, E B, deinde ex D erigatur recta perpendicularis vsque ad F, & per F ducatur F G parallela ipsi A *B*, & denique ducatur recta A F.

quo-

quoniam igitur in triangulo A C E, A C, C E sunt latera æqualia *a* erunt anguli C A E,

a 5. primi.



C E A æquales cum autem angulus ad C sit rectus isti, qui cōtinent *b* alterum rectum, erunt semirecti. eodē modo demonstrabitur angulus C E *B*, & C *B* E semirectus; ex quo etiam inferetur, quod anguli *D* F B, & G F E sint semirecti; cum & angulus B D F, & F G E sint recti ex cōstructione; ergo totus etiam angulus A E F constans ex duobus semirectis, erit rectus. cum igitur in triangulo A C E angulus C sit rectus, quadratū A E erit æquale *c* quadratis A C, C E, quæ cum sint æqualia erit A E duplum quadrati A C eodem modo cū in triangulo E G F angulus *G* sit rectus, erit quadratum F E æquale quadratis F G, G E, & consequenter duplum quadrati F G, cum illa latera sint æqualia, *d* & duplum quadrati *C D*, cum C D sit ęqualis ipsi G F; ergo quadrata A E, E F erunt dupla quadratorum A C, C D, cum vero in triangulo A E F angulus ad E sit rectus, *e* quadratum A F erit æquale quadratis A E, E F, & consequenter duplum quadratum A C, C D cum autem in triangulo A F *D*, angulus ad D sit rectus; erunt quadrata A D, D F, seu D B, cum illa duo sint latera æqualia, eo quod anguli sint æquales *f* æqualia quadrato A F, &c.

b 32. primi.

c 47. primi.

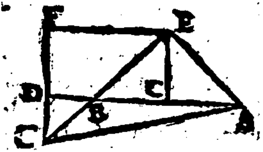
d 6. primi.

e 47. primi.

f 6. primi.

B, & consequenter dupla quadratorum A C, C D quod erat demonstrandum.

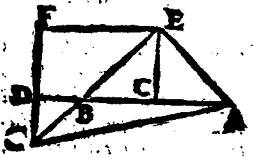
Theorema 10, Propositio 10. Si recta linea secetur bifariam, & illi addatur quauis recta linea; quadrata, quæ fiunt à tota cũ adiuncta, & ab adiuncta sola, sunt duplicia quadratorum, quę fiunt à dimidia, & à composita ex dimidia, & adiuncta.



Secetur recta A B bifariam in C, & ei addatur quęlibet B D; dico quadrata rectarum A D, D B duplicia esse quadratorum A C, C D. erigatur etiam ex C perpendicularis C E, æqualis dimidiè A C; iunganturq; rectæ A E, E B, ducaturq; per D recta G F parallela ipsi C E, & ducatur E F ad angulos rectos cum C E, & producatur E B, vt pertingat ad G; ac demum ducatur A G. Cum igitur angulus A C E sit rectus; anguli etiam A E C, C E A, ostendetur semirecti, *a* cum latera C A, C E sint æqualia, ergo et anguli ad latera æquales, *b* vt etiam C B, C E, & anguli ad C sint recti; eodem modo angulus D B G ostendetur semirectus *c* cum sit ad verticem, cũ C B E, & consequenter D G B etiã semirectus cum angulus ad *D* in triangulo B D G sit rectus *d*, cum autem in triangulo E F G an-

a 32. *primi.* b 5. *primi.* c 15. *primi.* d 32. *primi.*

angulus F sit rectus angulus ad G semirectus ad E erit semirectus; & consequenter e latera E F, F G erunt æqualia. f quoniam igitur quadratum



e 6. primi.

f 6. primi.

g 47. primi.

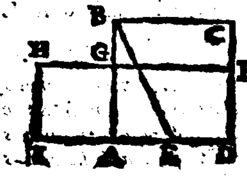
A E est æquale g quadratis A C, C E erit duplum quadrati A C; quia illa sunt æqualia: Cum verò C F sit parallelogrammum, erit E F æqualis ipsi h C D. igitur cum in triangulo E F G, quadratum E G sit æquale quadratis E F, F G erit duplum quadrati E F, seu quadrati C D. igitur quadrata A E, E G, sunt dupla quadratorum A C, C D, cum autem in triangulo A E G, quadratum A G sit æquale quadratis A E, E G, erit istud solum duplum quadratorum A C, C D, & cum triangulum A D G sit rectangulum, erunt quadrata A D, D G, seu D, B, quæ sunt liteq æquales, æqualia quadrato A G; & consequenter ipsa etiam dupla quadratorum A C, C D. quod erat demonstrandum.

h 34. primi.

Problem. 1. Propos. 11. Datam rectam lineam secare, vt rectangulum comprehensum sub tota, & altero segmentorũ æquale sit quadrato, quod fit à reliquo segmẽto.

Sit diuidenda recta A B, ita vt rectangulum comprehensum sub tota A B, & altero segmento B G æquale sit quadrato, q̃ fit

fit ab altero segmento A G. describatur ex A B quadratum A C: diuisoque latere A D bifariam in E, erigatur E ad B; cui sumatur æqualis E I producta D A, vsque



in I. Sumaturque G A æqualis ipsi A I, fiatque quadratũ A H ex A G. dico rectã A B secatã esse in G, ita vt rectangulum sub A B, B G sit æquale quadrato A G. ducatur enim G H vsque ad F erit rectangulum G C comprehensum sub A B, B G, cum B C sit æqualis ipsi A B, eo quod sint latera eiusdẽ quadrati, & A H erit quadratum ipsius G A. probo igitur rectangulum G C esse æquale quadrato A H. Quoniam igitur recta A D diuisa est bifariam in E, & addita alia A I erit a rectangulum sub D I, I A hoc est rectangulum D H, vna cum quadrato dimidiè E A æquale quadrato rectè E I. est autẽ quadratum rectè E B ęquale quadrato E I, cum sumptę sint illę lineę ęquales: ergo rectangulum sub D I, I A, vna cum quadrato A E est ęquale quadrato E B; in triangulo autem rectangulo E A B quadrata b E A, A B ęqualia sunt quadrato E B, igitur quadrata E A, A B ęqualia sunt rectangulo D H, vna cum quadrato E A ablato igitur communi quadrato E A, remanebit rectangulũ D H ęquale quadrato A B hoc est quadrato

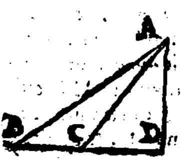
a 6. sec.

b 47. primi.

A C

A C dempta communi parte G D remanebit rectangulum F B æquale quadrato A H. quod erat demonstrandum.

Theorema 11. Propos. 12. In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere obtusum angulum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt ab alijs lateribus duplici rectangulo, quod fiat ab vno latere obtusum angulum formante, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab absumpta exterius linea inter perpendicularem, & obtusum angulum.



Sit triangulum A B C habens angulum A C B obtusum, producatur latus B C, donec demissa perpendicularis ex A cadat super ipsũ in D. dico quadratum lateris A B, quod opponitur angulo obtuso C esse maius, quam sint quadrata A C, C B dupli rectangulo comprehenso sub C B, C D. cum enim recta B D sit vtcunque diuisa in C, erit quadratum rectæ B D æquale duobus quadratis rectarum C B, D C, & rectangulo a bis comprehenso sub C B, C D addito igitur communi quadrato A D. erunt duo quadrata rectarũ B D, D A æqualia quinque figuris quadratis D C, C B, D A, & duobus rectangulis ex B C, C D, & quia.

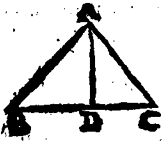
a 4. sec.

quia triangulum *A* B D est rectangulum; erit quadratum *A B* solum æquale *b* quadratis *A* D, D B. ergo erit æquale quinque dictis figuris quadratis, scilicet tribus D C, C B, D *A*, & duobus rectangulis ex C B, *C* D; cum autem & triangulum *A* C D sit rectangulũ, erit quadratum *A* C æquale quadratis *A* D, D *C*. cum igitur dictum sit quadratum *A* B æquale quinque figuris, duobus rectangulis, scilicet sub *B* C, C, *D*, & tribus quadratis B C, C D, *D A*, loco horum duorum summatur C *A*; erit igitur quadratum *A* B æquale duobus quadratis B C, C *A*, & duobus rectangulis sub B C, C D. ergo quadratum ipsius *A* B excedit illa duo quadrata ijs duobus rectangulis, quod erat demonstrandum. b 47. primi.

Theorema 12. Propositio 13. In oxygonijs triangulis quadratum à latere acutum angulum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus eundem comprehendentibus, duplici rectangulo comprehenso ab vno latere, in quod perpendiculari s cadit, & ab assumpta interius linea inter perpendicularem, & acutum angulum.

Sit triangulum *A* B C habens omnes angulos acutos, & ab *A* demissa perpendicularis *A* D, cadat in latus

tus B C. dico quadratum lateris A B minus esse quadratis laterum A C, C B duplici rectangulo facto ex C B, D C, hoc est quadratũ lateris A B, vna cum illis rectangulis æquale esse quadratis A C, C B. cum enim recta B C diuisa sit vtcunque in D, erunt a quadrata rectarum B C, C D æqualia duplici rectangulo sub B C, C D, & quadrato rectæ B D. addito ergo communi quadrato rectæ D A erunt tria quadrata B C, C D, D A æqualia quatuor figuris duobus rectangulis B C, C D, & duobus quadratis B D, D A loco autem duorum quadratorum C D, D A sumatur vnicum quadratum C A, erunt igitur duo quadrata B C, C A æqualia quatuor figuris duobus scilicet rectangulis B C, C D, & B D, D A loco horum duorum quadratorum D B, D A sumantur vnicum quadratum B A illi æquale b erunt igitur duo quadrata B C, C A æqualia tribus figuris quadrato scilicet B A, & duobus rectãgulis ex B C, C D. quod erat demonstrandum.

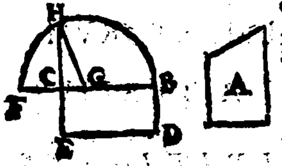


a 7. secun.

b 47. primi.

Problema 2. Propos. 14. Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A cui quadratũ æquale constituendum est constituatur rectangulum, hoc est parallelogrammum in angulo recto, æquale dato rectilineo a 45.



A, & producatur latus B C vsque in F; ita vt latus C F sit æquale lateri C E: deinde tota F B diuidatur bifariam in G, & facto centro in G describatur semicirculus B H F. tum E C producatur vsque ad peripheriam H. dico quadratum C H esse æquale rectilineo A dato. iungatur recta G H. quoniam recta B F diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C, erit rectangulum sub B C, C F, hoc est rectangulum B E seu rectilineum A, quod est illi æquale, vna cum quadrato rectæ G C b æquale quadrato rectæ G F, seu G H, quæ sunt æquales; sed quadratum G H est æquale quadratis c G C, C H, igitur rectangulum B E, seu rectilineum A, vna cum quadrato rectæ G C est æquale quadratis rectarum G C, C H, ablato igitur communi quadrato G C remanebit rectangulum B E seu rectilineum A æquale quadrato rectæ C H, quod erat demonstrandum.

a 45. pri.
b 5. secun.
c 47. primi.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER TERTIVS.

DEFINITIONES.

1. ÆQuales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.
2. Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.
3. Circuli sese mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.
4. In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineę dicuntur, cum perpendiculares, quę à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.
5. Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.
6. Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.
7. In segmento autem angulus est, cum in

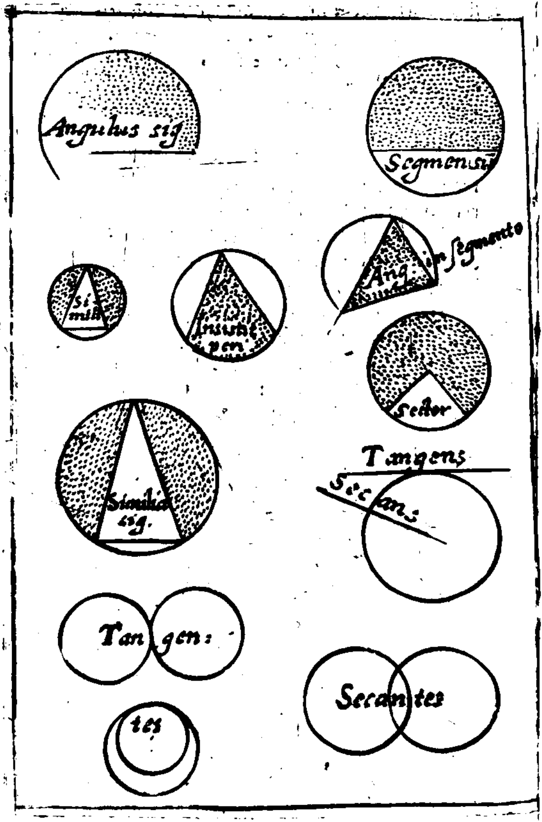
segmenti

ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in termi- nos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.

8. Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.

9. Sector autem circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis aſſumpta.

10. Similia circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.



Angulus sig
Segmen si
Si milis
Ang
in segmento
Sector
Similia sig.
Tangens
Secans
Tan gen:
tes
Secan tes

Problema 1. Propositio 1.

Dati circuli centrum reperire.

SIt circulus datus *A B* C *D*, cuius centrum opor tet inuenire. *D*ucatur in eo linea vtcunque *A* C, *a* quę bifariam diuidatur in F, & per F, ad *A* C, perpendicularis agatur *B* D, vtrinque in peripheria terminata in punctis B G. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta B D, aliud punctum, pręter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quando quidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum E, extra rectam B *D*, centrum, à quo ducantur lineæ E *A*, E C, E D. Quoniam ergo latera *A* E, E D, trianguli AED, æqualia sunt lateribus C E, ED, trianguli C E D; & basis *A* D, basi C D; (à centro enim duci dicuntur) *b* erunt anguli *A*DE, CDE, æquales, ideoque recti: Erat autem & angulus A DF, rectus ex constructione. Igitur recti *A*DF, *A*DE, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum E, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

a 10. *primi.*

b 8. *primi.*

Theorema 1. Propositio 2. Si in circuli peripheria duo qualibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

Hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta *A B*, coniungat duo puncta *A*, & *B*, in circunferentia circuli A *B*, cuius centrum C. Dico rectam *A* B, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ C A, C B, C D. Quoniam igitur duo latera C *A*, C B, trianguli C A B, a 5. pri æqualia sunt, *a* erunt anguli C A B, C B A, æquales: Est autem angulus CD*A*, *b* angulo CBD, maior, externus interno. Igitur idẽ b 16. primi angulus CDA, angulo C*A*D, maior erit, & ob id latus C *A*, *c* latere C D, maius erit. Quare cum C A, sit ducta à centro ad circũferentiam, vsque, non perueniet recta C D, c 19. primi ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulum cadit. Quod est propositum.

Theo.

Theorema 2. Propositio 3. Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariã secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos ipsam secabit. Et bifariam quoque eam secabit.

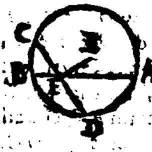
PEr centrum E, circuli BCD, recta BA, extensa diuidat rectam DC, non per centrũ extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi DC. Ductis enim rectis ED, EC, erunt duo latera ED, EF, trianguli EDF, duobus EF, EC, trianguli ECF, æqualia; & bases DF, FC, æquales. *a* Igitur anguli EFD, EFC, æquales erunt; hoc est, recti. Quod erat primo propositum. a 8.*pri*

Sit iam AF, ad angulos rectos ipsi DC. Dico rectam CD, bifariam secari in F, à recta EB. Ductis enim iterum rectis ED, EC; cum latera ED, EC, trianguli EDC, sint æqualia, *b* erunt anguli EDC, ECD, æquales. Quoniam igitur duo anguli EFD, EDF trianguli EFD, æquales sunt duobus angulis EFC, ECF, trianguli ECF; & latera EC, ED, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque; *c* erunt latera CF, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. b 5.*pri* c 26. *primi.*

D 2 Si

Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

Theorema 3. Propos. 4. Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.



Dvæ rectæ AB, CD, se mutuo in F, secent in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo se se bifariam secent. Si enim vna earū per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum n. in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur; tamen altera minime secabitur bifariā. Diuisa enim sit & A B & CD, si fieri potest, bifariam in F. a Inuento igitur centro circuli E, ducatur ab eo ad F, recta F E. Quoniam ergo FE, ponitur secare rectam A B, bifariam in F, b secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in F. Quare rectus angulus E F D, recto angulo EFA, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ

a 1. ter.

b 3. ter

lineæ

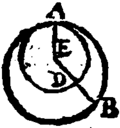
lineæ se se mutuo secent,&c. Quod erat demonstraadum.

Theor. 4. Propos. 5. Si duo circuli se se mutuo secent; non erit illorum idem centrum.

DVo circuli ABC, ADC, se mutuo secent in A,& C. Dico ipsos non habere idem centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusq; E, à quo duæ rectæ ducantur; EA, quidem ad sectionem *A*, EB; vero secans vtramque circumferẽtiam inD,& *B*. Quoniam igitur E,centrum ponitur circuli CDA,erit recta EA, rectæ ED,æqualis. Rursus quia E,centrum quoque ponitur circuli ABC, erit & recta E*B*,eidem rectæ EA, æqualis. Quare rectæ EB,E*D*, *a* æquales inter se erunt,pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo secent,&c. Quod ostendendum erat. a 1. pron.

Theor. 5. Propos. 6. Si duo circuli se se mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVo circuli A*B*, AD, se interius tangãt in A. Dico eos non habere idem centrum: Habeant enim, si fieri potest, idem centrum E, à quo duæ rectæ ducantur; E A, quidem ad tactum A. At EB, secans vtramque circumferentiam in D, & B. Quoniã igitur E, Ponitur centrum circuli AD erit recta AE, rectæ ED, æqualis. Rursus quia E, ponitur centrum circuli AB, erit recta E B, eidem rectæ EA, æqualis. Quare rectæ E D, & EB, a inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.



a 1. pron.

Theor. 6. Propositio 7. Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro AB, circuli A G E B, cuius centrum D, punctum assumatur quodcunque C. præter centrum, & ex C, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, F C, C E. Dico omnium, quæ ex C, ad circumferentiam ducuntur, maximam esse C A, in qua

est

est centrum, minimam vero reliquam C B, quæ diametrum perficit: Deinde rectam C G, quæ rectæ C A, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta C F, quę ab eadem CA, plus distat, & eadem ratione C F, maiorem recta CE, atque ita de alijs lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtrasque partes minimę lineæ C B, vel maximę CA, duci posse tantummodo duas

lineas inter se æquales. Ducantur è centro D, ad G, F, & E, rectæ lineæ D G, DF, DE. Quoniam igitur duo latera G, D, DC, trianguli GDC, *a* maiora sunt latere G C. Sunt autem rectæ G D, DC, æquales rectis AD, DC, hoc est, toti rectæ CA; erit & CA, maior quã CG. Eadem ratione maior erit recta C A, quam CF, & quam C E. Quare CA, maxima est omnium, quæ ex C, in circulum cadunt. a 20. *primi*.

Deinde, quoniam in triangulo E CD, latus ED, *b* minus est duobus lateribus DC, C E. Est autẽ DE, ipsi DB, ęqualis; erit & DB, minor duabus rectis DC, CB. Dempta ergo communi recta CD, remanebit adhuc C B, minor, quam CE. Eadem ratione minor erit CB, quam CF, & quam G C. Quare C B, minima est omnium, quæ ex C, in circuli circumferentiam cadunt. b 20. *primi*.

Rursus, quia duo latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt duobus lateribus CD,

 DE,

DF, trianguli CDF; & angulus totus CDG, maior est angulo EDC; *a* erit basis GC, maior basi FC. Eadem ratione maior erit GC, quam CF. Et Item maior erit CF, quam CE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior.

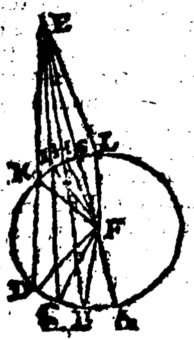
a 24. *primi.*

Fiat iam angulo BDE, ex altera parte æqualis angulus BDH, & ducatur recta CH. Quoniam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia sunt lateribus HD, DC, triãguli HDC, & anguli his lateribus cõtenti EDC, HDC, æquales; *b* erunt rectæ CE, CH, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ CB, vel maximæ CA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex C, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam CH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem CA, per centrum ducta, minor quam CH, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ CB, vel maximæ CA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

b 4. *primi.*

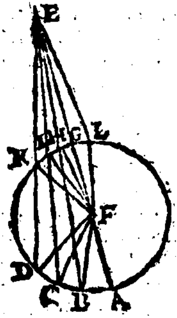
Theo.

Theorema. 7. Propositio 8. Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque pũcto ad circulum deducantur rectæ quædã lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero ut libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidẽ est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.



EX puncto E, extra circulum BCDA, cuius centrum F, lineæ secantes circulum ducantur, quarum A E, per centrum transeat, aliæ vero E B, E C, E D, utcunque. Dico omnium esse maximam AE, quæ per centrum ducitur, propinquiorem illi EB, maiorem recta EC, quæ re-

remotior est ab eadem AE: Et eadem ratione E *B*, maiorem quã ED. E contrario autem, rectam EG, omnium, quæ extra circulum sunt, minimã esse. Deinde rectam EH, quæ vicinior est minime EG, minorẽ esse recta EI, remotiore; Et eadem ratione, ipsam EI, minorẽ quam E k. Denique ex E, ad vtrasque partes minimæ lineæ EG, vel maximę AE, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro F, ad puncta C, D, *B*, G, H, I, k rectę FC, FD, F*B*, FK, FH, FI. Quoniam igitur duo latera EF, FB, trianguli EFB,



a 20. pri. a maiora sunt recta E B; Sunt autem rectæ EF, FA, æquales rectis EF, F*B*, hoc est tota recta AE; erit & AE, maior, quam EB. Eadem ratione erit A E, maior, quam E C, & quam ED. Quare AE, est omnium, quæ ex E, in circulum cadunt, maxima.

Deinde, quoniam latera EF, F B, trianguli EF*B*, ęqualia sunt lateribus EF, F C, trianguli EFC; Et angulus totus EFB, maior est angulo EFC; *b* erit basis E *B*, basi

b 24. pri. EC, maior. Eadem ratione maior erit E *B*, quam ED: Item EC, maior, quã ED. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum duci-

ducitur, maior est linea remotiore.

Rursus, quia in triangulo EFH, recta E E, *a* minor est duabus EH, HE; si auferantur æquales FG, FH: remanebit adhuc EG, minor, quam EH. Simili ratione erit E G, minor, quam EI, & quam Ek. Quare E G, omnium linearum extra circulum, quæ ex E, ducuntur, minima est. a 20. *primi*.

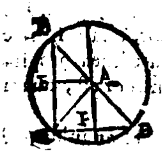
Rursus, cum intra triangulum E I F, cadant duæ rectæ EH, HF, ab extremitatibus lateris EF; *b* erunt EH, HF, minores, quam EI, I F. Sublatis igitur æqualibus F I, F H, remanebit adhuc EH, minor, quam FI. Pari ratione erit EH, minor, quam Ek: ītē E I, minor, quam Ek. Quare linea propinquior minimæ lineæ EG, minor est, quam remotior ab eadem. b 21. *primi*.

Postremo fiat angulo EFH, angulus E F L, æqualis, & ducatur recta EL. Quoniam igitur latera EF, FH, trianguli EFH, æqualia sunt lateribus EF, FL, trianguli E F L; Sunt autem & anguli EFH, EFL, dictis lateribus contenti æquales; *c* erunt rectæ E H, EL, ex vtraque parte minimæ EG, vel maximæ EA, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex E, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior à minima, maior quam EL. Quod si cadat inter G. & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam EL, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur c 4. *pri*.

extra

extra circulum sumatur punctum quodpiã, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 8. Propos. 9. Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

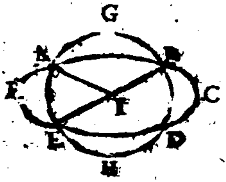


A Puncto Assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quã duæ, *A*B, AC, *A*D, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta *B*, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex *A*, rectæ AE, A F. Quoniã igitur latera A E, E B, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus *A*E, EC, trianguli *A*EC; & bases AB, *A*C, ponuntur etiam æquales; erunt anguli *A*E*B*, AEC,
a 8. pri. æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cũ rectæ *A*E, AF, diuidant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propof. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum,

non

non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

Theor. 9. Propos. 10. Circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis, non secat.



SEcēt se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis *A*, *B*, & E. *a* Inuentum autem sit I, centrum circuli A G B D H E, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectę IA, IB, IE, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum *ABCD* EF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ, rectæ ęquales, *b* erit I, centrum circuli *ABCD* EF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. *c* Quod est absurdum.

a 1. *ter.*

b 9. *ter*

c 5. *ter*

Theor. 10. Propos. 11. Si duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra, ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

Tangat circulus *A* B C, circulum ADE, intus

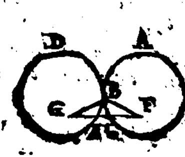
tus in A, & sit E, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADF, quod necessario ab illo diuersum erit, cũ duo circuli interius se tangẽtes, a non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G & E, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, F, & ex contactu A, ad centra E, G, rectæ ducantur AE, AG.

a 6. ter

Quoniam igitur in triangulo AEG, duo latera GE, EA, b maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADF) erunt & GE, EA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur cõmuni GE, remanebit EA, maior, quam ED. Quare cum EA, æqualis sit ipsi EB; (quod E, positum fuerit cẽtrum circuli ABC) erit & EB, maior, quam ED, pars quam totum, quod est absurdum.

b 20. primi.

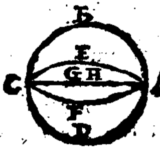
Theor. 11. Propos. 12. Si duo circuli se se exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.



Circuli duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & cẽtrum circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, cen-

centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, *a* maiora sunt latere FG: Est autem recta BF, rectę FC, equalis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta BG, rectę GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE) erunt & rectæ FC, GE, maiores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum. *a 20. primi.*

Theor. 12. Propos. 13. Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm uno, siue intus, siue extra tangat.



Tangant sese circuli ABCD, AECF, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C; Assumantur autem centra horum circulorum G, H, æquę distantia erunt, per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est *b* cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta AGHC, diameter, diuidetur AGHC, bifariam in puncto G. Similli *a 6. ter.* *b 11. ter.*

mili ratione diuidetur eadem AC, bifariam in H, quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque GC, est dimidium totius AC, erit necessario H C, dimidio minor, cũ sit pars dimidij GC.

Theor. 13. Propos. 14. In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

Sint in circulo ABCD, cuius centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducãtur enim ex E, centro ad rectas AB,
a 3. ter. CD, duæ perpendiculares EF, EG, & coniungantur rectæ EA, ED. a Secabunt rectę EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, ęquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectę videlicet AF, DG, ęqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, ęqualium, inter se
b 47. ter. sunt æqualia: Quadratum autem rectę EA, b ęquale est quadratis rectarum AE, FE; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, ęqualia quadratis rectarum D G, G E. Ablatis ergo quadratis ęqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, ęqualia, id est, quæ &

rectę

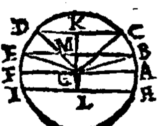
rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectę AB, CD, ęqualiter à centro E.

Rursus distent rectę AB, CD, ęqualiter à centro E. Dico eas inter se esse ęquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quę per 4. defin. huius lib. æquales erunt; *c* diuidentq. rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, *d* ęquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, ęqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplę AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo ęquales rectę lineę ęqualiter distant à centro, &c. Quod erat demonstrandum.

c 3. ter

d 47. primi.

Theor. 14. Propositio 15. In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.



IN circulo ABCDE F, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico om-

omnium esse maximam AF, & HI, maiorē quam CD. Ducantur

enim ex G, centro rectę GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, ęqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectãtur rectę GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectę perpēdiculares GM, GL, ęquales sūt, ęqualiter distabunt rectę BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. *a* & ideo inter sese quales erunt. Rursus quia rectę GB, GE, *b* maiores quidem sunt recta BE, ęquales autem diametro AF, erit & diameter AF, maior quam BE. Eadem ratione ostendetur AF, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGF, ęqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD, & angulus BGE, maior est angulo CGD; *c* erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quę ęqualis ostēsa fuit ipsi BE, maior quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. *ter.*

b 20. *primi.*

c 24. *primi.*

Theo-

Theor.15. Propos.16. Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidē angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A B, ducta DB, a erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo b minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est E F. Dico iam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam A B, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis CH, secans circumferentiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll.2.

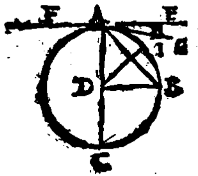
a 5. pri.

b 17. primi.

pro-

propof. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo DAH, c duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per cõstructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta D A, hoc est, recta illi æqualis D I, d maior erit, quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta A E, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulũ, faciet necessario ea linea, cum AC, angulũ rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cum AE, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hęc linea AB, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus

c 17. primi.

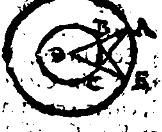


d 19. primi.

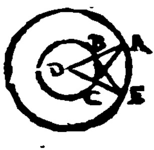
acu-

acutus CAB, minor angulo semicirculi cō-
tento sub diametro AC, & circumferentia
ABC, cum ille huius sit pars. Angulus vero
contingentiæ contentus sub tangente linea
AE, & circumferentia ABC, minor angulo
rectilineo acuto *BAE*, quod ille huius pars
sit. Eademque ratio est de omnibus alijs an
gulis acutis rectilineis, cum omnes conti-
neantur à diametro AC, vel tangente AE, &
rectis ex A, sub *AE*, ductis, quę omnes intra
circulum cadent, vt demonstrauimus. An-
gulus igitur semicirculi maior est omni a-
cuto angulo rectilineo, reliquus autem an-
gulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab
extremitate diametri; cuiusque circuli ad
angulos rectos ducitur, &c. Quod erat o-
stendendum.

Problem. 2. Propositio 17. A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



Ex puncto *A*, ducenda sit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta *A* D, secans circulum *B* *C*, in *B*. Deinde centro *D*, interuallo autem D A, describatur circulus *AE*, & ex *B*, educatur BE, perpendicularis ad A D, secans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circulum BC, BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim



duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit

4.pri. communis: Erunt a & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque C A, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est A C, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat.

Theor. 16. Propositio 18. Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

Recta linea AB, tangat in C, circulū CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur E C. Dico E C, perpendicularem esse ad AB. Si enim nō est, ducatur EF, perpendicularis ad A B, secās

cir-

circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, *a* duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare *b* maior erit recta EC, hoc est, E D, quam EF, pars quam totum. quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad A B. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat. a 17. *pri.* b 19. *primi.*

Aliter EC, nõ est perpendicularis ad *A B*, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum: Omnis siquidem angulus semicirculi *c* maior est omni acuto. d 16. *ter.*

Theorema 17. Propos. 19. Si circulum tetigerit recta quapiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAngat recta A B, circulum C D E, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse cẽtrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, à quo ad C, ducatur recta F C, quæ *a* perpendicularis erit ad A *B*. Quare rectus angulus *FCB*, recto angulo ECB, æqualis a 18. *ter.*

erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

Theorema 18. *Propos.* 20. *In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.*

IN circulo A B C, cuius centrum D, super basin B C, constituatur angulus B*DC*, ad centrum, & super eandem basin angulus *BA* C, ad peripheriam. Dico angulum BD*C*. duplum esse anguli B*AC*. per centrum D, recta extendatur A E. Quoniam igitur rectæ *DA*, D*B*, æquales sunt, a erunt anguli D*A*B, DBA, æquales: Est autem externus angulus *B*DE, *b* æqualis duobus angulis internis DAB, D*BA*. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli D*A*C. Quapropter totus B*DC*, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum, & eodem fere modo ostendetur in alijs casibus.

a *5. pri*
b *32. primi.*

Theo.

Theorema 19. Propos. 21. In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum D*AB*C, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, *a* duplus est tam anguli D*A*C, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin DC, erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. *b* Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse æquales. a 20. *ter.* b 7. *pro.*

Sit deinde segmentum DA*BC*, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur p centrum E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ *DE*, *CE*. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, *c* duplus est anguli *D*AF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli C*A*F; ac proinde duo anguli simul DEF, CEF, duorum angulorum simul DAF c 20. *ter.*

 CAF,

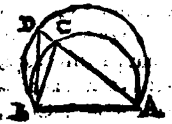
CAF, dupli erunt, hoc est, totius anguli DAC: Sunt autem anguli *D*EG, GEF, æquales angulo *D*EF: erunt quoque tres anguli *D*EG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli
d 7. pro. anguli DBC. *d* Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

Theor. 20. Propos. 22. Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadri-
a 21. ter. lateri AC, BD, *a* erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo C
b 32. pri. DA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. *b* Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur, & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam

nurrursus duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. a Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. c 32. pri. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

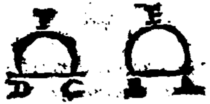
Theor. 21. Propos. 23. Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituuntur ad easdem partes.



SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur ad easdē partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod sese solum intersecent in punctis A, & B; a Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. a 10. tert. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, ex-

b 16. ternus interno: *b* quod est absurdum. Non
pri. igitur segmenta sunt similia: Quare super
eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 22. Propos. 24. Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



SVper rectis lineis æqualibus *AB*, CD, constituta sint segmenta similia A
E*B*, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim A*B*, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum AEB, segmẽto CED, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta C D, duo segmenta AE*B*, *AFB*, similia, & inæ-
a 23. qualia, quorum vnum totum extra aliud
ter. cadit, quod est absurdum. *a* Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluri-
b 10. bus punctis, quam duobus, duo circuli.
ter. Quod est absurdum. *b* Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quã duobus. Congruet igitur segmentum AE*B*, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia

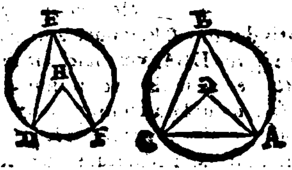
lia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

Problem. 3. Propositio 25. Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

Sit segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto; per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturq; AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Si maior, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens diametrum *a* sit omnium minima, a 7.ter quæ ex puncto D, in circumferentiã cadunt. Quare angulus DBA, *b* maior erit angulo b 18. DAB.) omnino si nõ est fiatq; angulus BAE, æ- primi. qualis angulo DBA, & secet recta AE, rectã BD, productam in E. Dico E, esse centrũ circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli A DE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli C DE, & anguli contenti, recti. *c* Quare bases c 4. EA, EC, æquales erunt; *d* Est autem & EA, primi. d 6.pri

æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, e ac propterea E, centrum e-
e 9. ter. rit circuli ABC. quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

Theorema 23. Propositio 26. In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistunt, sive super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur A B, CB, D E, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quo-
a 20. ter. niam igitur a anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H, erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera A G, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propterea

circulorum æqualitatem, & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypothesi; *b* erũt basis AC, *DF*, æquales. Cum, igitur segmenta similia *ABC*, DEF, sint super lineas æquales AC, *DF*, *c* erunt ipsa inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus demantur, remanebunt, & segmenta *AC*, *DF*, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ A C, D F: Quod est propositum. b 4. *primi*. c 24. *ter*.

Sint deinde ad peripherias cõstituti duo anguli æquales B, & E. Dico rursus, peripherias AG, *DF*, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, *DF*: (cum enim anguli G, H, æquales sint, *d* quod sint dupli angulorum æqualium B, & E, erunt, vt prius, rectæ AC, *DF*, æquales) *e* erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, *D F*, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum. d 20. *ter*. e 24. *ter*.

Theor. 24. Propositio 27. In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistãt.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripherijs A C, *DF*. Dico angulos AGC, & D

E 5 HF,

HE, æquales esse. Si enim non sunt æqua-

a 26. ter. les, sit angulus G, maior, fiatque angulus A GI, æqualis angulo DHF. a Erunt igitur peripheriæ AI, DF, ęquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriç D F, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.

Insistant deinde eisdem peripherijs æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias: quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt ABC, maior est; fiat angulo E, æ-

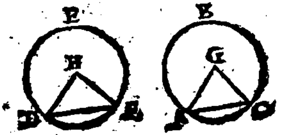
b 26. ter. qualis angulus ABI, b eruntque peripheriç AI, DF, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriç AI, AC, ęquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In ęqualibus igitur circulis, anguli, qui ęqualibus peripherijs insistũt, &c. Quod demonstrandum erat.

Theorem. 25. Propositio 28. In æqualibus circulis, ęquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN circulis ęqualibus ABG, DEF, quorũ centra G, & H, sint rectæ ęquales AC, DF.

F. Dico maiorem peripheriam ABC, æqualem esse maiori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF: erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & bases *AC*, DF, æquales. Igitur *a* anguli G, & H, æquales erunt: *Ac* propterea peripheriæ *AC*, DF, quibus insistunt, *b* æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales A*BC*, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

a 8.*pri.*
b 26.
ter.



Theor. 26. Propos. 29. In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

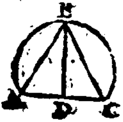
IN circulis eisdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ A*BC*, D*E*F; Item A G, & DF. *Di*co rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera *AC*, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: *S*unt autem & anguli G, H, *a* æquales, quod æqualibus peripherijs AC, *D*F, insistant.

a 27.
ter.

 stant.

b 4.pri stant. Igitur *b* bases *A*C, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 4. Propos. 30. Datam peripheriam bifariam secare.



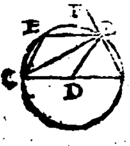
SIt peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua diuisa bifariã in D, erigatur perpendicularis DB quæ peripheriam *A*BC, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, BD, trianguli AD*B*, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CD*B*: Sunt autem &
a 4.pri anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur *a*
b 28. & bases *AB*, C*B*, æquales erunt; *A*t proptete
ter. rea *b* peripheria AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.

Theor. 27. Propositio 31. In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

CIrculi enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturque in semicirculo angulus *A*BC, existetque angu-

lus

lus BAC, in maiori segmento CAB. Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus BBC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem. At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in B. Quoniam igitur rectae DA, DB, aequales sunt, a erit angulus DBA, angulo DAB, aequalis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, aequalis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, aequalis erit. b Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, aequalis. Quare aequales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.



a 5. pri

b 32. primi.

Quoniam vero in triangulo ABC, c duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

c 17. primi.

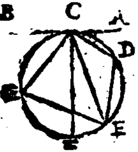
Rursus, quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, d duo anguli oppositi

d 22. ter.

sti BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

Quartum patet ex demonstratis; angulis n. segmētorū, vel addit, vel detrahit recto.

Theorema 28. Propositio 32. Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quadam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.



TAngat recta AB, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidens circulū in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque segmento. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta
a 18. ter. EF: *a* eritque CF, perpendicularis ad AB; *b* & angulus CEF, rectus; ac propterea reli-
b 31. ter. qui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo cōmuni angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: *c* Est autem angulo CF
c 21. ter. E, æqualis quoque angulus CGE, cum vterque sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam vero

vero in quadrilatero CDEG, duo *d* anguli CDB, CGE, duobus sunt rectis æquales: *e* Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat ostendendum. d 22. tex. e 13. pri.

Probl. 5. Propositio 33. Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Ad punctũ A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, secetque BF, rectam AE, in F. *a* Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & interuallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super AB, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur AE, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per corol. propos. 16. a 6. pri.

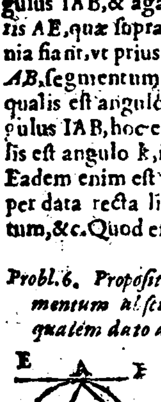
huius

b 32. huius lib. Quapropter *b* angulus D*A*B, hoc
ter. est, angulus datus

C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno A G *B*.

Si vero sit angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad I *A*, perpendicularis AE, quæ supra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, descriptumq; erit super *AB*, segmentum AKB, in quo angulus K, æ-
c 32. qualis est angulo dato obtuso H. Nam an-
ter. gulus IAB, hoc est, angulus datus H, *c* æqualis est angulo K, in alterno segmento AKB. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

Probl. 6. Propositio 34. A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.



Datus circulus sit A BC, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D.
a 17. *a* Ducatur recta EF, tan-
ter. gens circulum in A. Fiat deinde angulus FAE, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulū

ACB

ACB, in segmento ablato ACB, æqualem esse dato angulo D. Est enim *b* angulus FAC, æqualis angulo B, in alterno segmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAC; erit quoque angulus B, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendum. b 32. ter.

Theorema 29. Propositio 35. Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

SEcet CD, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ EG, FB, *a* eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam recta CD, diuisa est bifariam in F, & non bifariam in E, erit sane rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ FE, *b* æquale quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectę FB. Est autem quadratum rectæ FE, *c* æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulū sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, a 3. ter b 5. secun. c 47. primi.

æqua-

æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato rectæ G E, æquale est eidem quadrato rectę GB: propterea quod recta A B, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdem rectę GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB: quod est propositum.

fo. d. ax.

Quod si neutra per centrum trãseat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra facilè fere eodem medio fiet demonstratio: vnde cum non sit noua difficultas, aliud non addo, si igitur in circulo duæ lineę, &c. Quod demonstrandum erat.

Theor. 30. Propositio 36. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius

rius inter punctum, & conuexam peripheriam assumptæ comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

Extra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim

DA, secans vtcunque. Diuisa ergo AC, bifariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF: a eritque EB, ad BD, perpendicularis, b & EF, ad AC. a 18. ter. b 3. ter.

Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, c erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DE, FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, d æquale quadratum rectæ EC, ideoq; & quadratum rectæ EB; Et e quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE, f æquale sit quadratis rectarū DB, BE. c 6. secun. d 47. primi. e 47. primi. f 47 primi

erit

erit & rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 31. Propos. 37. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & cõuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

Extra circulum ABC, cuius cẽtrum E, punctum sumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidẽs in circulum ad punctum B; sitque rectangulũ sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. a Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans non transeat per centrum E. iungatur quoque recta DE. Quoniam igitur

a 17. tert.

rectangulo sub *B*A, DC, *b* æquale est qua- b 36.
dratum rectę tangentis. D F: Et eidem re- *ter.*
ctangulo sub D*A*, *DC*, ęquale ponitur qua-
dratum rectę D*B*: erunt quadrata rectarum
DF, DB, inter se æqualia; ideoque & rectę
DF, D*B*, æquales inter se erunt. Itaque quia
latera *DF*, *FE*, trianguli DFE, ęqualia sunt
lateribus DB, BE, trianguli *DBE*; & basis *D*
E, communis *c* erunt anguli DFE, *DBE*, æ- c 8.*pri*
quales. *d* Atqui angulus DFE, rectus est, d 18.
quod DF, circulum tangat. Igitur & angu- *ter.*
lus *DBE*, rectus erit. Quapropter per corol.
propos. 16. huius lib. *DB*, circulum tanget;
quod est propositum. Si ergo extra circu-
lum sumatur punctum aliquod, &c. Quod
erat demonstrandum.

EV-

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVARTVS.

DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

2. Similiter, & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

3. Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

4. Figura vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

5. Similiter, & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli periphe

ria

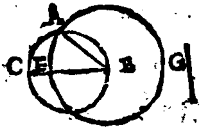
ria ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

6. Circulus autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit eius figuræ, quam circumſcribit, angulos.

7. Recta linea in circulo accommodari ſeu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

PROBLEMA 1. PROPOSITIO 1.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

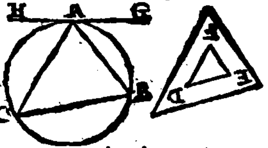


IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea ęqualis rectę lineę datę G; quę tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter *a* sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta G, ęqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi ęqualis: Si vero G, minor fuerit diametro, *b* abscindatur BE, ęqualis ipsi G, & centro B, interuallo autem BE, circulus describatur EA, secans circulum ABC, in A. Ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datę rectę G. *c* Est enim BA, ęqualis ipsi BE; & G, ęqualis eidem BE, per constructionem. Quare AB, & G, inter se ęquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

a 15. *ter.*
b 3. *primi.*
c 15. *defin. primi.*

Theo-

Theor. 2. Propos. 2. In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



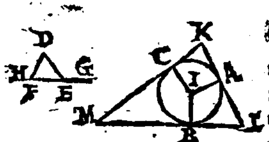
SIt in circulo ABC, dato describẽdum triãgulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC angulo E, atque extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam vsq; in puncta B, & C, coniungaturque recta *B* C. Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas A*B*, *A*G: propterea qđ anguli G*AB*, HAC, hoc est, anguli F, E, *a* minores sunt duobus rectis. *b* Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in *AB*, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter A*B*, *A*G, cadere. Dico triangulum *A*BC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, *c* æqualis angulo GA*B*; & eidem angulo G *A* B, æqualis est angulus F, ex cõstructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, *d* æqualis est angulo H*A*C; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli *B*, & C, triangu

a 17. *primi*.
b 13. *pri.*
c 32. *ter.*
d 32. *ter.*
d 32. *ter.*

li ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF. e erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Aequiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

e 32. primi.

Problema. 3. Propositio 3. Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



Circa circulũ datum ABC, describendum sit triangulum æquiangulũ dato triangulo DEF. Producto latere EF, vtrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B.C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares kL, LM, MK, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli kAC, kCA, duobus rectis minores, ac proinde AK, Ck, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet supra rectas AI, CI, quod hæ angulum constituant in I. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F, sintq;

ſintque duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum ſpatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed *a* hi minores ſunt duobus rectis. Igitur & ſpatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC. Alias ſpatium illud eſſet vel æquale duobus rectis, ſi nimirum AI, CI, vnam rectam lineam conſtituerent; vel maius duobus rectis, ſi recta AI, producta caderet ſupra IC. Cadit igitur neceſſario AI, producta infra CI, atque idcirco angulus fiet AIC, ad partes K, & ducta recta AC, faciet cum Ak, Ck, duobus angulos minores duobus rectis, ideoque rectæ AK, Ck, coibunt in K. Non ſecus oſtendemus, AL, BL, coire in L, & CM, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Deſcriptum eſt igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico eſſe æquiangulum triangulo DEF. Quoniã enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales ſunt quatuor rectis, vt ad 32. propoſ. lib. 1. oſtenſum fuit, & anguli IAL, IBL, ſunt duo recti, erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur *b* & anguli DEG, DEF, ſint duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione oſtendemus angulum M, æqualem eſſe angulo DFE, *c* Reliquus igitur angulus k, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiãngulum triangulo

a 17. *primi*.

b 13. *primi*.

gulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

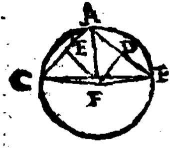
Probl. 4. Propositio 4. In dato triangulo circulum inscribere.

SIt describendus circulus in dato triangulo A B C. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quę intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt duobus angulis DBF, DFB, trianguli DBF, vterque vtrique; & latus B D, commune; a erunt quoque latera DE, DF æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, descriptus trãsibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

a 26. primi.

Pro-

Probl. 5. Propositio 5. Circa datum triangulum circulum describere.



SIt circulus describendus circa datũ triangulum ABC. Diuidantur duo latera AB, AC, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamuis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quæuis latera bifariam possint secari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; *a* erunt bases FA, FB, æquales. *a* 4. pri. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

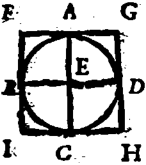
Probl.6. Propositio 6. In dato circulo quadratum describere.

SIt in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se se ad angulos rectos in centro *E*, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico *A*BCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli *A*EB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; *a* erunt Bases *AB*, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, D*A*; & rectæ D*A*, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniã quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; *b* erunt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales: *c* ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri A BC*D*, inter se æqualia sunt. Sunt autem *d* & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit ABCD, proptereaq; in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 4. pri
b 26. ter.
c 29. ter.
d 31. ter.

Pro

Probl. 7. Propositio 7. Circa datum circulum quadratum describere.



Sit circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratũ. Ducãtur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quod autem coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti, a erunt FH, AC, parallelæ, similiterque erunt GI, AC, parallelæ: b Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum est ACH F, c erunt latera opposita AG, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse; & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH, quadratum erit, cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16.

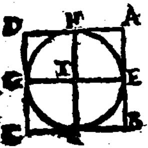
a 28. pri.

b 28. pri.

c 38. pri.

lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

Problema 8. Propositio 8. In dato quadrato circulum describere.



SIt in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducãtur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt, & dimidiæ earum AH, BF, æquales, & parallelæ. *a* Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æqualium AD, AB, &c. Quare & rectę IE, IF, IG, IH, æquales erũt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta E, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. *b* quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

a 33. pri.

b 29. pri.

Era-

Problema 9. Propositio 9. circa datum quadratum circulum describere.

SIt describendus circulus circa quadratum ABCD, Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sunt, *a* erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. *b* Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; *c* erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; necnon EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, internallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

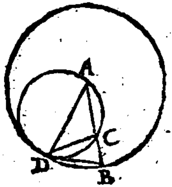
a 5. pri.
b 32. pri.
c 6. pri.

Probl. 10. Propositio 10. Isosceles triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVmatur quæuis recta linea AB, quæ *a* diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus

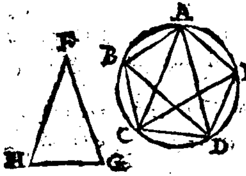
a 11. secun.

b 1. describatur, in quo *b* accommodetur recta
quar. *BD*, æqualis ipsi AC, iungaturque recta A *D*. Quoniam autem rectæ A*B*, AD, æquales sunt, erit triangulum AB*D*, Isosceles. Dico vtrumque angulorum ABD, *ADB*, duplum



c 5. esse reliqui anguli A: Ducta enim recta C
quar. D, *c* describatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC. æquale est quadrato rectæ BD, & recta *AB*, secat circulum *DCA*,
d 37. *d* tanget recta B*D*, eundem circulum DC
ter. A, in D. Quare angulus *BD*C, *e* æqualis est
e 32. angulo *A*, in alterno segmento C*A*D. Ad-
ter. dito igitur communi CD*A*, erit totus angulus *A*L*B*, æqualis duobus angulis C*AD*, C
f 32. *DA*: Sed his eisdem *f* æqualis est etiam an-
pri. gulus externus *B*CD. *A*ngulus ergo BCD,
g 5. æqualis erit angulo *ADB*; hoc est, angulo
pri. *AB*D, *g* cum A*BD*, A*DB*, æquales sint; ac
h 6. propterea *h* rectæ C*D*, B*D*, æquales erunt:
pri. Est autem BD, æqualis posita rectæ *A* C.
i 5. pri. Igitur & C D, ipsi C *A*, æqualis erit; *i* ac propterea anguli *CAD*, *CDA*, æquales. Angulus igitur AD*B*, qui æqualis ostensus est duobus angulis *CAD*, GDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum *A*. Quare, & Angulus *A*B*D*, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.

Problema 11. *Propositio* 11. *In dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.*

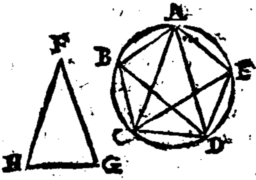


SIt ĩ dato circulo *A* B C *D*E, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Construatur triangulum Isosceles FGH, ita vt vterque angulorum G,H, duplus sit reliqui F,& in circulo *b* inscribatur triangulum *ACD*, ęquiangulum triangulo FGH,& vterque angulorum *A*CD,*A* *D*C,*c* bifariam diuidatur rectis CE,*D*B,atque rectæ iungantur *A*B,BC,CD,*D*E, E*A*. Dico pentagonum *A*BCDE,in circulo dato inscriptum,esse æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum *A*CD, *AD*C,duplus sit anguli C*AD*,& diuisus bifariam; erũt quinque anguli *ADB*, BDC, C*AD*,DCE,EC*A*,æquales. *d* Quare arcus *A*B,BC,C*D*,*D*E,E*A*, super quos ascenderunt,atque idcirco *e* & rectæ *AB*,BC, CD, *D*E,E*A*,æquales erunt. *A*equilaterum est igitur pentagonum *A*BCDE. Rursus, quia arcus *A*B,E*D*, æquales sunt, addito communi *B*CD,fient æquales *AB*CD,EDC*B*. *f* Anguli ergo *A*ED,B*A*E,dictis arcubus insisten-

a 10. *quar.*
b 2. *quar.*
c 9. *pri.*
d 26. *ter.*
e 29. *ter.*
f 27. *ter.*

ſiſtentes æquales erunt. Eodem modo ęquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſinguli ex ternis arcubus æqualibus componuntur. Aequiangulum eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & ęquilaterum eſſe ſit oſteſum inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.

Broblema 12. Propoſ. 12. circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.



Sit circa datũ circulum ABGDE, deſcribendum pẽtagonũ æquilaterũ, & æquiangulum. a Inſcribatur ĩ eo pẽtagonũ æquilaterũ, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducãtur rectę FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, Ik, KL, LG, coeuntes in G, H, I, k, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus ſint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; b coibunt rectę AG, EG, ad partes G, & ſic de alijs. Et quia ipſæ tangunt circulum, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. erit deſcriptum pentagonum GHIkL, circa circulum; quod dico eſſe æquilaterum atque æqui-

a 11. quar.

b 13. pron.

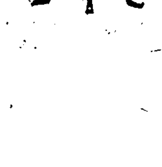
æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL, erunt quadrato rectæ FH, c æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quam rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarum FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum, tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli AFH, æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, vt ostensum est; d erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur e & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFG, & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulum BIC, anguli BIF. Cum igitur f anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circumferentijs AB, BC, g quæ æquales sunt, cum a rectis æqualibus subtendantur AB, BC; erunt & dimidij eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis adiacens commune BF, h erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus GH, rectam duplam esse re-

c 47. primi.
d 8. pri.
e 4. pri.
f 27. ter.
g 28. ter.
h 26. pri.

ctæ HA. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas Ik, kL, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Aequilaterum ergo est pentagonum GHIkL. Rursus

quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, æquales esse, ac semisses angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IkL, kLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorũ BHA, BIC. Aequiangulum igitur est pentagonum GHIkL. Quapropter cum, & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

Problema 13. Propositio 13. In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.



Sit inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. a Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quę coeant in F. Cũ

a 9. pri

enim

enim ex scholio præcedentis propos. rectæ *A*F, BF, secent opposita latera CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas *A*F, BF, se mutuo intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ F*C*, FD, FE. Quoniam igitur latera A*B*, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales A*B*F, CBF; *b* erunt bases AF, CF, & anguli BAF, *B*CF, æquales. Cum igitur anguli B*A*E, BC*D*, ponantur æquales, & *BA* F, dimidium sit anguli *B*AE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli *BC* D. Diuisus est ergo angulus *B*CD, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos *CDE*, *DEA*, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpẽdiculares FG, FH, FI, Fk, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FL*A*, FAL, trianguli *FAL*; estque latus *A*F, subtẽsum vni æqualium angulorum commune *c* erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterq; ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, Fk. æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hũc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo, qđ angulos rectos faciant cum semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

b 4. *pri*

c 26. *primi.*

Theo.

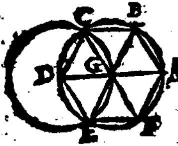
Theorema 14. Propos. 14. Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIt circa pentagonum ABCDE, æquilaterũ & æquiangulum, circulus describendus, Diuisis duobus angulis B*A*E, *A* *B*C, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos *B*C*D*, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, qđ toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales

a 6.pri sunt FAB, F*B*A; *a* erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem F*A*, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

Pro-

Problema 15. Propos. 15. In dato circulo, hexagonum, & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.



SIt in dato circulo A BCDEF, cuius centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, interuallo vero DG, qui secet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse, & æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectæ GD; & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli, erunt & rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare *a* tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum *b* æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorū. Sunt autem tres anguli CGD, DGE, EGF, *c* æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus cum etiam

a 5. pri.
b 32. pri.
c 13. pri.

æqua-

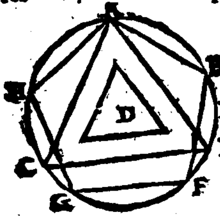
d 15. pri. *d* æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. *e* Quare circumferentiæ, quibus insi-

e 26. ter. stunt, *f* ac propterea rectæ *AB*, BC, C*D*, *D*E, EF, F*A*, equales erunt. f 29. ter. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC, æqualis est circumferentię AF; si addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, equales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, *g* equales erunt. g 27. ter. Similiterque ostendemus, reliquos angulos BC*D*, CDE, DEF, EFA, equales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes equalibus arcubus insistere. Quare equiangulum quoque est hexagonum ABC*DEF*. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

Problema 16. Propositio 16. In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIt in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum equilaterum, & equiangulum. Constituto triangulo æquilatero

tero D, quod ex coroll. propof. 5. lib. 1. erit etiam ęquiangulũ; *a* inscribatur ei æquiangulum triangulum *A*BC, in dato circulo, quod & erit ęquilaterum, ex coroll. propof. 6 lib. 1. *b* eruntque tres arcus AB, BC, CA, ęquales, vel propter tres rectas *A*B, BC, CA, ęquales, vel propter tres ęquales angulos A, *B*, C, trianguli A B C. Qualium igitur partium ęqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB, qui tertia pars est totius circumferentię. *c* Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum ęquilaterum, & ęquiangulum AEFGH, applicans vnum angulorum ad punctum A, *d* eruntq; quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales, Qualium igitur partium æqualiũ quindecim est tota circumferentia *AB*C, taliũ trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus *AB*, contineat tales partes quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus arcus E*B*, duas. Diuiso ergo arcu EB, bifariam in I, erit arcus BI, pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, subtendet decimaquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim, *f* ęquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in cir-



a 2. quar.

b 26. vel 28 ter.

c 11. quar.

d 28. ter.

e 30. ter.

f 1. quar.

circulo quintidecagonum æquilaterum; quod g & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perspicuum est, In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

g 27. tert.

Similiter autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12, 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

EV-

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVINTVS.

DEFINITIONES.

1 PArs eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

2 Multiplex autem eſt maior minoris, cũ minor metitur maiorem.

3 Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quędam, ſecundum quantitatem, habitudo.

4 Proportio vero eſt rationum ſimilitudo.

5 Rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe ſe mutuo ſuperare.

6 In eadem ratione magnitudine dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ ęque multiplicia, a ſecundæ & quartę ęque multiplicibus, qualiſcunque ſit hęc multiplicatio, vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, vel vna ex-

ce-

cedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

7 Eandem autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.

8 Cum vero; que multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

9 Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit.

10 Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

11 Homologæ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

12 Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

13 Inuersa ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

14 Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu vnius, ad

ad ipſam conſequentem.

15 Diuiſio rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſam conſequentem.

16 Conuerſio rationis, eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſam conſequentem.

17 Ex ęqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quę binæ ſumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ſic & in ſecundis magnitudinibus prima ad vltimam ſe ſe habuerit.

Vel aliter. Sumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.

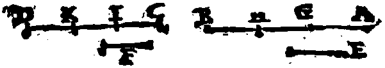
18 Ordinata proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, vt cõſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

19 Perturbata autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidē magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

THEO-

THEOREMA 1. PROPOSITIO 1.

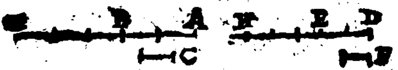
Si ſint quotcunque magnitudines quotcunq; magnitudinem æqualium numero, ſingulę ſingularum, æque multiplices; quam multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt, & omnes omnium.



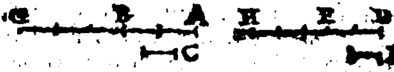
SInt quotcunque magnitudines A B, CD, totidem magnitudinum E, F, ęque multiplices. Dico magnitudines A B, CD, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex A B, ipſius E, vel CD, ipſius F. Cum enim AB, CD, ſint æque multiplices ipſarum E & F, ſi AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipſi E, ęquales, & CD, quoque in magnitudines CI, Ik, kD, ipſi F, ęquales; (Diuidi autem poterit quęlibet in partes omnino ęquales, cum A B, C, D, E, F, ęque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfecte cõtineatur, quoties F, in CD, vt ex ijs, quę in defin. 2. huius lib. ſcripſimus, conſtat) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI, IK, kD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur ęquales CI, & F, *a* erunt A
a 2. pro G, CI, ſimul, ęquales ipſi E, & F, ſimul. Eodem

dem modo erunt GH, & IK, simul æquales ipsis E, & F, simul; Necnon HB, & KD, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties, & E, F, simul, in AB, CD, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul, ipsarum E, & F, simul, vt constat ex ijs; quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus. Quare si sint quotcũque magnitudines quotcunque magnitudi num, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 2. Propositio 2. Si prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & cõposita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

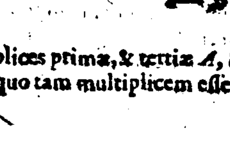


SIt magnitudo prima AB, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex DE, tertia, quartæ F; Rursus, tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est EH, sexta ipsius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quã multiplex est, DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt



in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt, & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus *AB*, DE, addantur æquales multitudines BG, E H, erunt totæ multitudines AG, *DH*, æquales. Quare toties comprehenditur *C*, in *AG*, quoties F, in DH. Quod erat ostendendum.

Theor. 3. Propositio 3. Si sit prima secunda æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

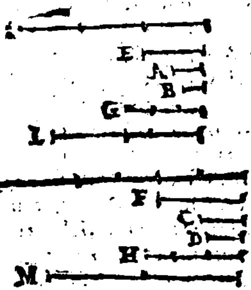


Sit prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quã multiplex est C tertia quartę D: sumanturq; E, F, æque multiplices primæ, & tertiæ *A*, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, dæ, quam est F, ipsius D, quartæ Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis *A*, & C, æquales, vt in EG, GH, HI, & FK, kL, LM, erunt tot partes in *E*, æquales ipsi *A*, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem *A*, & *C*, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, Fk, earundem *B*, & *D*, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL, Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & *D*, erunt igitur & compositæ *a* ex EG, GH; quæ mul tiplices ipsius B, vt compositæ ex FK, KL, ip sius C, ergo & pariter composita ex EH, H I, & ex FL, LM. & eadem erit ratio si plures sint partes. Quod ostendendum erat. a 2. quin.

Theor. 4. Propositio 4. Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices prima, & tertia, ad æque multiplices secunda, & quarta, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebũt rationem, si prout inter se respondent, ita sumpta fuerint.

SIt proportio A, ad *B*, quæ C, ad *D*, sumanturque primæ *A*, & tertiæ *C*, æque multiplices E, & F; Item secũdæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quã nis multiplicationem: sine E, F, ita multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarũ

B, D, siue non, His positis, constat ex defin.



6. huius lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. *Alioquin* non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æque multiplicia nõ semper ita se haberent. *Dico* iam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum vna deficere à multiplicibus secundæ, ac quartæ, aut vna æqualia esse, aut vna excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius *A*, secundæ, quã F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: *a* Erũt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum

a 5. quin.

farum *A*,C,secundæ,& quartæ. Eadem ratione erunt L,M,ipsarum B,*D*, æque multiplices. Et quia ponitur proportio *A*, primæ ad *B*,secũdam,quæ *G*,tertiæ ad D,quartam,ostensæque sunt I,k,æque multiplices primæ,& tertiæ A,*C*. Item L,M, ęque multiplices secundæ, & quartæ *B*,*D*, istæ quæ illorum sunt ęque multiplices vna deficiẽt, vel excedent,vel æquales erunt. *b* ergo ita se habebit E,ad F,quorum IK, sunt æque multiplices,vt G,ad H,quorum LM, sunt æque multiplices. Quod erat ostendendũ. b 6. *defin. quin.*

Theor. 5. Propositio 5. Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ;Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit,vt tota totius.

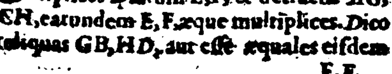
ITa multiplex sit tota *AB*, totius C *D*, vt est multiplex *A*E,ablata ablatæ C,F. Dico reliquam E*B*,ita esse multiplicem reliquæ FD,vt est tota *AB*,totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis,videlicet ipsius GC, vt est *A*E, multiplex ipsius CF,vel tota *A*B, totius C D.Quoniam igitur *A*E,E*B*,æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; *a* erit tota *A*B, totius GF,ita multiplex,vt AE, ipsius CF, hoc est omnes omnium, vt vna vnius : Sed a 1. *quin.*

tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD, quam est multiplex AE, ipsius CF. Igitur

AB, tam est multiplex ipsius GF, quã multiplex est ipsius CD: *b* atque ideirco æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, vt AE, ipsius CF, hoc est, vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua EB, reliquæ FD, quam est tota AB, totius CD: quod est propositum.

b 6. pron.

Theor. 6. Propositio 6. Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

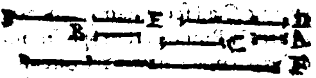


Sint magnitudines AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F: & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut esse æquales eisdem

E, F,

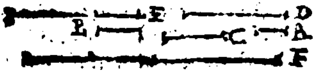
E,F, aut certe earundem æque multiplices. Quoniam *AB,CD*, sunt ipsarum E,F, æque multiplices; erunt in *AB*, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in *CD*, æquales ipsi F. Rursus quia *AG*, *CH*, earundem E,F, æque multiplices sunt; erũt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus *AB,CD*, demantur multitudines æquales *AG*, CH; remanebunt multitudines GB,HD, æquales. Quare toties continebitur E, in G*B*, quoties F, continetur in HD; ac proinde si GB, æqualis sit ipsi E; erit quoque HD, ipsi F, æqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E: erit ita multiplex HD, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E; quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in H*D*, existit, vt ostensum est.

Theor. 7. Propositio 7. Aequales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.



SInt duæ magnitudines *A*, *B*, æquales inter se; & tertia quæuis C. Dico *A*, & *B*, habere eandem proportionem ad C. & C, vicissim ad *A*, & B, eandem quoque pro-

portionem habere. Sumantur *D*, E, æque
a 6. pron. multiplices ipsarum æqualium *A*, *B*; *a* e-

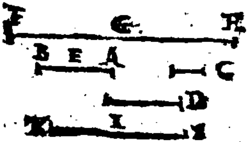


runtque D,*E*, æquales inter se. Capiatur
rursus F, vtcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sunt, fit vt vtraq; vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & *B*, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplice secundæ, & quartæ C, (est enim C, instar duarum ma-
b 6. gnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores;
defin. *b* erit ea proportio primæ A, ad C, secundã,
quin. quæ tertiæ B, ad C, quartam.

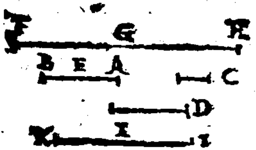
Eodem pacto ostendemus *F*. vel minorẽ esse vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ, & tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B; vel vna
c 6. æqualis sit, vel maior; *c Erit* quoque ea pro-
defin. portio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ
quin. C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit, esse A, ad C, vt *B*, ad C, erit conuertendo C, ad *A*, vt C, ad *B*. Aequales ergo ad eandem, eandem habẽt rationem. Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

Theo.

Theor.8. Propositio 8. Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor; Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quã ad maiorem.



SInt magnitudines inæquales, AB, maior, & C, minor, Tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad AB. Intelligatur enim in AB, magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis minori C, vt sit reliqua EB. Vtraq; deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt GF, multiplex ipsius EB, maior quidem sit, quam D, At HG, multiplex ipsius AE, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. Quoniam igitur duæ FG, GH, eque multiplices sunt duarum BE, EA; erit & tota FH, ita multiplex totius AB, vt HG, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & AE. Capiatur quoque ipsius D, multiplex Ik, quæ proximè maior sit, quam HG. Abscissa ergo Lk, quę ęqualis sit ipsi D, non erit IL, maior,



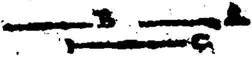
quam HG, (alias Ik, non esset multiplex ipsius D, proxime maior quam HG; sed & IL, maior quoque esset quam HG. Quod si Ik, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse maiorem, quàm HG, cum HG, posita sit non minor quam D, hoc est, quàm IL,) & idcirco HG, erit vel ęqualis ipsi IL, vel maior. Et quia FG, maior est posita quã D, Lk, vero ęqualis eidem D: erit quoque FG, maior quam Lk. Cum ergo HG, non minor sit quam IL, vt demonstratum est, sed vel ęqualis, vel maior; erit tota FH, maior quam IK. Itaque cum FH, HG, sint ęque multiplices primæ AB, & tertię C; atque Ik, multiplex ipsius D, quę instar est secundæ & quartæ: sit autem FH, multiplex primę, maior quam Ik, multiplex secundę; At HG, multiplex tertię, non sit maior, quam Ik, multiplex quartę, immo minor, ex hypothesi; (sumpta enim est Ik, multiplex ipsius D, maior quam HG,) erit maior proportio AB, primę ad D, secundã, quam C, tertię ad D, quartam.

Quoniam vero è cõtrario IK, multiplex primę D, (ponatur enim nunc D, prima ac

sec.

tertia; At C, secunda & *AB*, quarta) maior est quam HG, multiplex secundę C; At IK, multiplex tertię D, maior non est, quam FH, multiplex quartę AB, immo minor, cum FH, maior sit, quam IK, vt ostensum est; erit maior proportio D, primę ad C, secundam, quam D, tertię ad AB, quartam: quod est propositum. Inequalium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

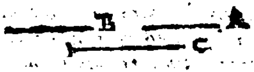
Theor. 9. Propositio 9. Quę ad eandem, eandem habent rationem, aequales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, ea quoque sunt inter se aequales.



HAbeant primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico *A*, & B, esse inter se aequales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor, *a* Erit igitur maior proportio *A*, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesim. Non ergo inequales sunt A, & B, sed equales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B esse equales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; *b* haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad — a 8. *quin.* — b 8. *quin.*

ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed equalis. Que igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

Theor. 10. Propositio 10. Ad eandem magnitudinem rationem habentium, qua maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

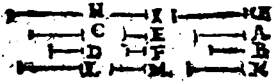


Habeat primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C.
a 7. quin. Dico A, maiorem esse, quam *B*: Si enim A, foret ipsi *B*, equalis, *a* haberent A, & *B*, eandem proportionem ad C: Si autem *A*, minor esset, quam B, *b* haberet B, maior ad C, proportionem maiorem, quàm *A*, minor ad eandem C, quod est contra hypothesin. Non est igitur A, equalis vel minor quam B, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad *A*. Dico *B*, minorem esse quam *A*. Non enim æqualis erit *B*, ipsi A, *c* alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque vero *B*, maior erit quã A, *d* alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod

Margin notes: b 8. quin. — c 7. quin. — d 8. quin.

quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est *E*, quam A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationē habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 21. Propos. 11. Quæ eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.



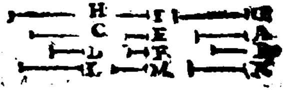
SInt proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E. ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices k, L, M. Quoniam igitur ponitur esse *A*, prima ad B, secundā, vt E, tertiam ad F, quartā; *a* fit vt si G, multiplex primæ deficit a k, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: *b*Sed (vt eodem modó ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior. est quoque H, minor quam, L. vel æqualis, vel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, vt C, tertia

a 6. def quin.

b 6. def quin.

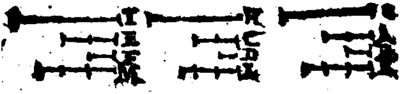
tia

tia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab



L, multiplice quartæ D. Et si G, æqualis est, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æque multi-
e6.def. plicibus. e Quapropter erit A, prima ad B,
quin. secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

Theorema 12. Propositio 12. Si sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.



QVod in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, *B*; C, *D*; E, F, proportionales, hoc est, sit *A*, ad *B*, vt C, ad *D*, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentium ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul *A*, C, E, ad omnes consequentes simul *B*, *D*, *F*. Sumptis enim G, H, I, æquæ multiplicibus antecedentium; & k, L, M, æquæ multiplicibus consequentium, *a* erũt omnes G, H, I, simul omnium *A*, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes, k, L, M, simul omniũ *K*, *D*, *F*, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt k, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse *A*, prima ad *B*, secũdam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; *b* fit vt si G, multiplex primæ deficit a K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et si G, æqualis est ipsi k, vel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quam k, & omnes G, H, I, simul omnibus k, L, M, simul minores sint, vel æquales, vel maiores. *c* Quocirca vt est A, prima ad B, secundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

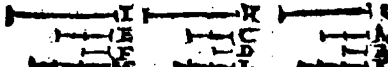
a 1. *quin.*

b 6. *def quin.*

c 6. *def quin.*

Theon

Theorema 13. Propos. 13. Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quã tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quã quinta ad sextam.



SIt prima *A*, ad B, secundam, vt C, tertia ad *D*, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quã E, quintæ ad F, sextam. Dico, & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsarum A, E; Item æque multiplicibus ipsarum B, F, contingere posse, vt multiplex ipsius *A*, excedat multiplicem ipsius B; at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et k, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit *A*, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam; *a* fit vt si G, multiplex primæ excesserit k, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit

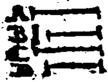
a 6. def. quin.

dit ipsam L, *b* non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliq- ando erit, vel minor; quod maior ponatur proportio C, primæ ad D, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam: Igitur si G, excedit K, non necessario I excedit M. *c* Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quamobrem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat. b8. def quin. c8. def quin.

Theor. 14. Propositio 14. Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quã tertia ad quartam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

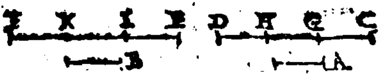
SIt enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D. Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primum A, maior quam C, *a* eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, ma- a 8. quin.

b 13. ior est, vt ostendimus, quam C, quintæ ad B,
quin. sextam: b Maior quoque erit



proportio C, primæ ad D, secundam, quã C, quintæ ad B, sextam.
c 10. tam. c Minor est ergo D, quam
quin. B; Ideoque B, maior erit quam
d 7. D. Quod est propositum.
quin. Sit deinde A, æqualis ipsi C, d eritque id-
circo A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur
e 11. proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sũt
quin. proportioni A, ad B, e erunt quoque inter se
f 9. eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; f
quin. Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est
g 8. propositum.
quin. Sit tertio A, minor quam C, g eritque ob
hoc maior proportio C, maioris ad B, quam
A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur
est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad
B, quartam; est autem proportio A, tertiæ
ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad
h 13. B, sextam; h Minor quoque erit propor-
quin. tio C, primæ ad D, secundam, quam C, quin
i 10. tæ ad B, sextam; i Ideoque B, minor erit
quin. quam D, quod est propositum. Si prima igi
tur ad secundam eandem habuerit ratio-
nem, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. Propos. 15. Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.



Sint partium A, & *B*, æque multiplices C D, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt *A*, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B, continebitur A, toties in C*D*, quoties B, in E F. Diuidatur ergo C*D*, in partes CG, GH, HD, æquales ipsi A, & EF, in partes EI, Ik, kF, æquales ipsi B, *a* eritque CG, ad E I, vt A, ad B, quod C G, & A, æquales inter se sint, necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & HD, ad kF, vt A, ad *B*, *b* ideoque CG, GH, HD, ac EI, Ik, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad *B*, *c* ita erit CD, ad EF. nempe omnes C G, GH, HD, simul ad omnes EI, Ik, KF, simul quod est propositum. Partes itaq; cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

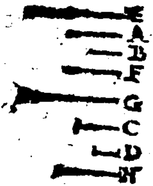
a 7. *quin.*

b 8. *quin.*

c 12. *quin.*

Theor.

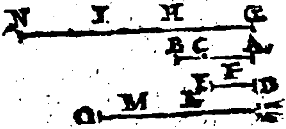
Theorema 16. Propositio 16. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.



HIC demonstratur Alterna, siue Permutata proportio, seu ratio, quæ defin. 12. explicata est. Sit enim *A*, ad B, vt C, ad D. *Dico* vicissim, seu permutando, esse quoque *A*, ad C, vt B, ad D. Sumantur
enim ipsarum A, B, primę ac secundæ, æque
a 15. multiplices E, F, Item ipsarum C, *D*, tertiæ,
quin. & quartæ æque multiplices G, H; *a* eritque
E, ad F, vt *A*, ad *B*, cum E, & F, sint pariter
multiplices partium *A*, & *B*. Eadem ratio-
ne erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur pro-
portiones E, ad F, & G, ad D, sint eædem
b 11. proportioni A, ad B; erunt & ipsæ *b* inter se
quin. eædem. Rursus, quia proportiones E, ad F,
& G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad
c 11. D; *c* erunt & ipsæ eædem inter se; hoc est,
quin. vt est E, prima ad *F*, secundam, ita erit G,
d 14. tertia ad H, quartam. *d* Quare si E, prima
quin. maior est quam G, tertia, vel æqualis, vel
minor, erit quoque F, secunda maior quam
H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacũ-
que multiplicatione accepta sint æque mul-
e 6. def tiplicia E, F, & ęque multiplicia G, H. *e* Est
quin. igitur A, prima ad C, secundam, vt B, tertia
ad

ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ *A*, ac tertiæ *B*; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant, &c.) Quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

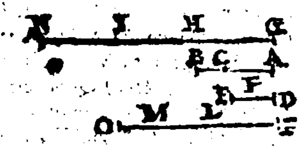
Theor. 17. Propositio 17. Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



HOc loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines *AB*, CB, & *DE*, FE, proportionales, hoc est, sit A*B*, ad CB, vt DE, ad *FE*. *Dico* & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad C*B*, ita esse *DF*, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim A*C*, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, K L, LM; *a* eritque GI, ita multiplex ipsius A *B*, vt est GH, ipsius *AC*, hoc est, vt kL, ipsius *D*F. Sed vt est multiplex KL, ipsius DF, *b* ita quoque multiplex est kM, ipsius DE. a 1. quin. b 1. quin.

Aeque

æque multiplices, ergo sunt GI, KM, ipsa-



ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æque multiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE. Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE;

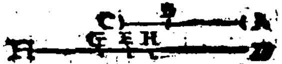
c 2. quin. *c* erit & HN, sic multiplex secundæ CB, vt LO, multiplex est quartæ FE, Itaque cum sit AB, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æque multiplices GI, kM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item secundæ, & quartæ CB, FE, æque multiplices HN, LO, *d* fit vt si GI, multi-

d 6. def quin. plex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam kM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quam kM, ab LO, ablatis cõibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablatis communibus HI, LM, erit, & GH, æqualis ipsi IN, & kL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & kM, ipsam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO.

Quam

Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices primę AC, & tertię DF: Item IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartę FE, ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illę ęque multiplices fuerint acceptę,) ęque multiplices primę, & tertię ab ęque multiplicibus secundę & quartę, vel vna deficere, vel ęquales esse, vel vna excedere; *e* Erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam, qđ est propositum. Si compositę igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat. e 6. def quin.

Theorema 18. *Propositio* 18. *Si diuisę magnitudines sint proportionales, hę quoque composita proportionales erunt.*



DEmonstrat hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad BC, ita esse DF, ad EF. Si enim non est, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipsa EF vel maiorem, eãdem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, mi-

no-

norem ipſa EF, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur eſt, vt AC, ad BC, ita DF, ad GF; a erit diuidendo quoque, vt AB, ad BC, ita DG, ad GF: Sed vt AB, ad BC, ita poſita quoque eſt DE, ad EF. b Igitur erit etiam, vt DG, prima ad GF, ſecundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima maior ſit, quàm DE, tertia, c erit quoque GF, ſecunda maiór quàm EF, quarta, pars quàm totum. Quod eſt abſurdum.

a 17. quin.

b 11. quin.

c 14. quin.

Habeat deinde, ſi fieri poteſt, DF, ad HF, maiorem ipſa EF, eandem proportionẽ; quam AC, ad BC. Quoniam igitur eſt, vt AC, ab BC, ita DF, ad HF; d erit diuidendo quoque vt AB, ad BC, ita DH, ad HE. Sed vt AB, ad BC, ita poſita etiam eſt DE, ad EF. e Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HE, ſecũdam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor ſit quam DE, tertia, ſi erit quoque HF, ſecunda minor quàm EF, quarta, totum quàm pars, q̃d eſt abſurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipſa EF, aut ad maiorem, eandẽ proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipſam EF, erit, vt AC, ad BC. q̃d eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

d 17. quin.

e 11. quin.

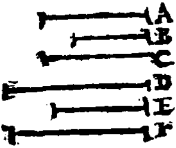
Theo-

Theor. 19. Propositio 19. Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

QVod in propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, et irrationali demonstratur. Sit enim tota A B, ad totam CD, vt ablata A E, ad ablatã C F. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam F D, vt est tota AB, ad totam CD. Cum enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. *a* erit & permutando AB, ad AE, vt CD, ad CF. *b* Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF. *c* Quare permutando rursus erit EB, ad F D, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totã CD, cum posita sit AB, ad CD, vt AE, ad C F. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 16. *quin.*
b 17. *quin.*
c 16. *quin.*

Theorema 20. Propositio 20. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ bina, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.



Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico, & D, quartam esse maiorem F, sexta.

a 8. Cum enim A, maior sit quam C, *a* erit ma-
quin. ior proportio *A*, ad B, quam C, ad *B* Est au-
b 13. tem vt *A*, ad B, ita ad *D*, ad E. *b* Maior igi-
quin. tur proportio quoque erit D, ad E, quam C,
ad B. *At* vt *C*, ab B, ita est F, ad E. (Cum .n.
sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C,
ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque pro
c 10. portio erit D, ad *E*. quam F, ad E. *c* Quare
quin. *D*, maior erit, quam *F*. Quod est propositũ.

Sit deinde A, æqualis ipsi *C*. Dico, & *D*,
æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi
d 7. C, æqualis, *d* erit A, ad B, vt C, ad *B*. Est aũt
quin. vt A, ad B, ita *D*, ad E. Igitur erit & D, ad
E, vt C, ad *B*: At vt C, ad B, ita est F, ad E, p
inuersam rationem, vti prius. Quare erit
e 9. quoque D, ad E, vt F, ad E; *e* Ideoque æqua-
quin. les erunt *D*, & E. Quod est propositum.

Sit tertio *A*, minor quam C. Dico & D,
minorem esse, quam F. Cum enim *A*, mi-
nor sit quam C, *e* erit minor proportio A,
f 8. ad B, quam C, ad *B*, Sed vt A, ad *B*, ita est D,
quin. ad E. *f* Minor ergo quoque proportio est
D, ad E, quam C, ad B. Est autem conuertẽ-
do, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur mi-
nor est quoque proportio D, ad E, quam F,

ad

ad E, proptereaq; D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaq; tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c.

Theor. 21. Propositio 21. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

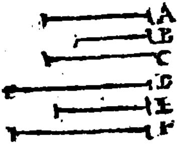
SInt tres magnitudines A, B, C, & totidẽ D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt *A*, ad B, ita *E*, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum *A*, prima maior quã C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta *F*. Cum enim A, maior sit quam C, *a* erit maior proportio *A*, ad *B*, quam *C*, ad B. Est autem, vt *A*, ad B, ita E, ad F. *b* Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt *B*, ad *C*, ita est *D*, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad *D*, *c* Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.

a 8. *quin.* b 13. *quin.* c 10. *quin.*

Sit deinde *A*, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A,

d 7. quin. fit æqualis ipsi C, *d* erit A, ad B, vt C, ad *B*: Sed vt *A*, ad B, ita est E, ad F. *e* Igitur erit
e 11. quin. vt *C*, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius.
f 9. quin. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad *D*; *f* atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

Sit tertio *A*, minor, quam C. Dico, & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, *g* erit minor proportio A, ad B
g 8. quin. quam *C*, ad *B*: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. *h* Minor est ergo proportio E, ad F, quam C. ad *B*. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad *B*, ita E, ad D; erit



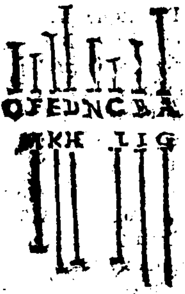
quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

Theor. 22. Propos. 22. Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ bina in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAm hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata.

Sint

Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliç tres D, E, F: sitque A, ad B, vt D, ad E: & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æque multiplicibus G, H. Item ipsarum B, E, I k, & ipsarum C, F, L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam, *a* erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicē quartæ E. (a 4. quin.) Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; *b* erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt k, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. (b 4. quin.) Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; *c* fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. (c 10. quin.) Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna æquales sint, vel vna excedant; in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.



Deinde sint plures magnitudines tribus ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse, vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensũ in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F: ponatur autẽ C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idẽ ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratũ fuit per tres; Et sic de pluribus. Itaque si fint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

Theor. 23. Propositio 23. Si sint tres magnitudines, aliaque ipsis æquales numero, quæ bina in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint.

Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F; sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse, vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æquemultiplicibus k, L, M; a Erit vt A, ad B, ita G, ad I, cum G, I, sint ipsarum A, B, æquemultiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F; b Igitur vt G, ad I, ita quoque est E, ad F; c Sed vt E, ad F, ita est quoque k, ad M; quod K, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. d Igitur erit quoq; vt G, ad I, ita k, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; e erit quoque vt I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, ita H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, k, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; estq. earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse vt G, ad I, ita k, ad M; Et vt H, ad k, ita I, ad L; f fit vt si G, prima superat tertiam L, superet quoq; quarta H, sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaq; cum G, & H, æquemultiplices primę A, & tertię D, ab L, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant; g erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandũ erat.

a 11. quin.
b 11. quin.
c 15. quin.
d 11. quin.
e 4. quin.
f 21. quin.
g 6. def quin.

Theorema 24. Propositio 24. Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundã eandem habebit rationem, quã tertia cum sexta, ad quartam.

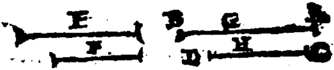
QVod propositione 24. demonstrauit Euclides de sola proportione multi-

plici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim *A*B, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, vt EH, sexta ad F, quartam. *Dico* ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est DH, compositã ex tertia, & sexta, ad quartam *F*. Cum enim sit vt B G, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad *B*G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est *AB*, ad C, vt *D*E, ad F; & C, ad BG, vt F, ad
a 22, quin. FH; *a* erit ex æquali A*B*, ad *B*G, vt DE, ad EH. *b* Componendo igitur erit vt tota AG, ad
b 18. quin. BG, ita tota *D*H, ad E H. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, vt DH, ad EH; & *B*
c 22. quin. G, ad C, vt EH, ad F: *c* erit ex æquali A G, ad

ad C, vt DH, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 25. Propositio 25. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

Sit enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitque AB, omnium maxima, & F, minima. Di-

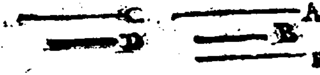


co duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH: *a* erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur, & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt, si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fiet AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quam E, & CD, simul cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor ma- *a 19. quint.*

gnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 26. Propositio 26. Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

HAbeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico pro-



portionem B, ad A, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; *a* ac propterea A
a 10. maior erit quam E. *b* Quare minor erit pro-
quin. portio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, mi-
b 8. norem: Sed vt est B, ad E, ita est conuerten-
quin. do D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.

Theor. 27. Propositio 27. Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartã.

HAbeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permumutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D, eritq. proportio A, ad *B*, maior etiam quam E, ad *B*: *a* Ideoque A, maior erit quam E. *b* Quare maior erit proportio *A*, ad C, quam E, ad C. *c* Quoniam vero permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad *D*. Quod est propositum.

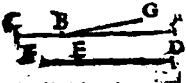
a 10. *quin.* b 8. *quin.* c 16. *quin.*

Theor. 28. Propositio 28. Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIt maior proportio A *B*, ad BC, quam DE, ad EF. *Dico* & componendo maiorem esse proportionem AC, ad *B*C, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritq; proportio A *B*, ad B C, maior quoque, quam G*B*, ad BC; *a* Ideoq; *A*B, maior quam G*B*. Addita ergo communi BC, fiet AC, maior quam GC, *b* maiorq. propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad *BC*. Sed componendo, *c* vt est GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit G*B*, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiã erit proportio *AC*, ad *B*C, quam DF, ad EF. Quod est propositum.

a 10. *quin.* b 8. *quin.* c 18. *quin.*

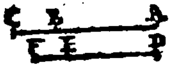
Theor. 29. Propos. 29. Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.



SIt maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionē AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritque
a 10. proportio AC, ad BC, maior quoque pro-
quin. portione GC, ad BC: *a* ideoque maior erit
b 8. AC, quam GC. Ablata ergo communi BC;
quin. maior erit AB, quam GB: *b* Ac propterea
c 17. maior erit proportio AB, ad BC, quam GB,
quin. ad BC. *c* Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

Theor. 30. Propositio 30. Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartum: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionē, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

Sit



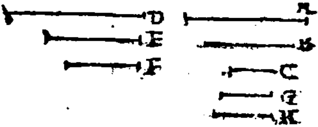
SIt maior proportio AC,ad BC,quam DF,ad EF. Dico per conuersionem rationis,minorem esse proportionem *A*C, ad AB,quam *D*F,ad DE. Cum enim sit AC,ad BC,maior proportio,quam DF, ad EF; *a* a 10. quin.
erit & diuidendo,maior proportio AB, ad BC,quam *D*E, ad EF. *b* Quare conuertendo,minor erit proportio BC,ad AB, quam EF,ad *D*E; *c* Ac propterea, & componendo,minor erit proportio totius *A*C,ad AB, quam totius DF, ad *D*E. Quod est propositum.

b 26. quin.
c 28. quin.

Theorema 31. Propositio 31. Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SInt tres magnitudines A, *B*, C, & aliæ tres *D*,E,F,sitque maior proportio *A*, ad *B*,quam D,ad E: Item maior B,ad C, quam E,ad F. Dico ex æqualitate maiorem

quoq;



quoque esse *A*, ad *C*, quam D, ad *F*. Intelligatur enim esse G, ad *C*, vt E, ad F; eritque

a 10. quin. propterea proportio *B*, ad *C*; maior, quam G, ad *C*; *a* Ideoque B, maior erit quam G.

b 8. quin. Quare *b* maior erit proportio A, ad G, minorem, quam A, ad *B*, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam *D*, ad E Intelligatur rursus esse H ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior

c 10. quin. proportio *A*, ad G, quam H, ad C; *c* Ideoq. A, maior erit, quā H. *d* Quare maior quan-

d 8. quin. titas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas, H, ad eandem

e 22. quin. C: *e* Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

Theor. 32. *Propositio* 32. *Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiā maior, quam primæ posteriorum ad secūdam: Erit quoque ex æqualitate, maior*

pro-

proportio prima priorum ad tertiam, quã prima posteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines A, B, C. & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quam E, ad F. Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E, eritque propterea proportio B, ad G, maior quam G, ad C. a Ideoque maior erit B, quam G. b Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam eiusdem A, ad B, maiorem; Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proportio A, ad G, quã H, ad G; c ideoque maior erit A, quam H. d Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C: e At vt H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C: & vt E, ad F ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

a 10. quin.
b 8. quin.
c 10. quin.
d 8. quin.
e 23. quin.

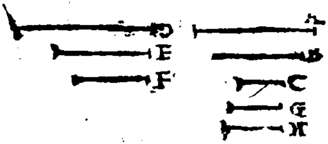
Theorema 33. Propos. 33. Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit, & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

Sit maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico

Dico & proportionẽ reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem esse, quam totius AB, ad totam CD. Cum n.
maior sit proportio *A*B, ad CD, quam AE,
a 27. quin. ad CF; a erit quoque permutando, maior
proportio *A*B, ad AE, quam CD, ad CF; b
b 30. quin. ac propterea, per conuersionem rationis,
minor erit proportio AB, ad EB, quam CD,
c 27. quin. ad FD. c Permutando igitur, minor quoque
erit proportio *A*B, ad CD, quam EB, ad FD.
hoc est, EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB
ad totam CD. Quod est propositum.

Theorema 34. Propositio 34. Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secunda ad secundam; & hæc maior, quã tertia ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quã omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorẽ autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorũ.

SInt primum tres magnitudines *A*, *B*, C, & aliæ tres D, E, F, Sit antẽ maior proportio *A*, ad D; quam B, ad *E*; Item maior *B*, ad E, quam C. ad F. Dico proportionem ipsarum A, *B*, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum, B, C, simul



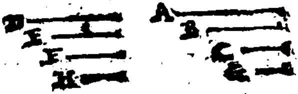
mul ad ipsas E,F,simul; minorem vero, pro-
portione A, ad D; maiorem denique etiam
proportione C, ad F. Cum enim maior sit
proportio A, ad D, quam B, ad E; a erit per- a 27.
mutando maior A, ad B, quã D, ad E, b Igi- quin.
tur componendo, maior erit proportio ip- b 28.
sarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, quin.
E, simul ad E; c Permutando ergo rursus, c 27.
maior erit proportio A, B, simul ad D, E, si- quin.
mul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B,
ad totam D, E, maiorem habeat proportio- d 33.
nem, quam ablata B, ad ablatam E; d habe- quin.
bit quoque reliqua A, ad reliquam D, ma-
iorem proportionem, quam tota A, B, ad
totam D, E. Eadem ratione, maior erit pro-
portio B, ad E, quam totius B, C, ad totam
E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad
D, quam B, C, totius ad totam E, F. e Permu- e 27.
tando igitur, maior erit proportio A, ad B, quin.
C, quam D, ad E, F; f & componendo ergo f 28.
maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quin.
quam totius D, E, F, ad E, F. g Et rursus per- g 27.
mutando, maior proportio omnium A, B, C quin.
simul ad omnes D, E, F, simul quam B, C, ad
E, F. quod est primum.

Itaque sit maior proportio totius A, B, C

ad

ad totam D, E, F, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F, h erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

h 33. quin.



Quoniam vero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; i erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; k & componendo, maior totius BC, ad C, quam totius E, F, ad F: l & rursus permutando, maior B, C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F, quod est tertium.

i 27. quin. k 28. quin l 27. quin.

Deinde sint quatuor magnitudines vtrobique cū eadem hypothesi, hoc est, sit quoque maior proportio tertię C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H. quartam. Dico eadē consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H, a Permutando ergo minor erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H, b & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H, & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior.

a 27. quin. b 28. quin.

ior quam B,C,G,ad E,F,H . quod est primum .

Itaque cum sit maior proportio totius A, B,C,G,ad totam D,E,F,H, quam ablatæ B,C,G,ad ablatam E,F,H', erit & reliquæ A,ad reliquam D, maior proportio, quam totius A,B,C,G,ad totam D,E,F,H . quod est secundum.

Quoniam vero, vt in tribus est demonstratum; maior est proportio B,C, G, ad E, F,H,quam G,ad H;& maior A,B,C,G, ad D,E,F,H,quam B,C,G,ad E,F, H, vt fuit ostensum;multo maior erit proportio A,B, C,G,ad D,E,F,H,quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

Eadem arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor,& in sex per quinque; & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

Finis Elementi quinti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER SEXTVS.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.
2. Reciprocæ autem figuræ sunt, cum in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.
3. Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.
4. Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.
5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.
6. Parallelogrammum secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando nõ

occu-

occupat totam lineam. Excedere vero, quādo occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamem, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinē, cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

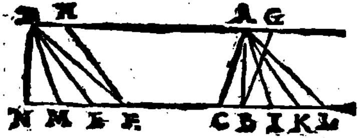
THEOREMA 1. PROPOSITIO 1.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

Sint duo triangula *ABC*, *DEF*, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases *BC*, *EF*. Dico ita esse triangulum *ABC*, ad triangulum DEF, & parallelogrammū CG, ad parallelogrammum EH, vt est basis BC, ad basin EF. Collocentur enim tā triangula, quam parallelogramma inter easdē parallelas GH, & LN. & ex *BL*, sumantur;

quot.

quotcunque rectæ BI, Ik, kL, ipsi BC, æqua

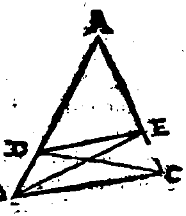


les; Item ex FN, abscindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde
a 38. pri. ex A, & D, deducantur rectæ AI, Ak, AL; DM, DN. a Erunt igitur triangula ABC, AIB, AkI, ALk, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis
b 38. pri. CL, æqualis fuerit basi EN, b necessario triangulum ACL, æquale est triangulo DEN, ac proinde si CL, maior fuerit quam EN, necessario ACL, maius est quam DEN, & si minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta triangulo DEN, æquemultiplicibus

bus secundæ EF, & quartæ DEF, vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. *a* Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundam EF, basis ad basim, ea est tertiæ ABC, ad quartã DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum. *a 6. def. quin.*

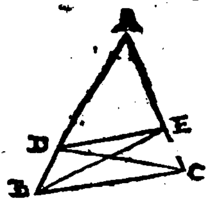
Quoniam autem *b* vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (*c* quod duplum est trianguli ABC.) ad parallelogrammum EH, (*d* quod est duplum trianguli DEF) perspicuum est, *e* ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod erat demonstrandum. *b 15. quin. c 34. pri. d 34. pri. e 11. quin.*

Theor. 2. Propositio 2. Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.



IN triangulo *AB* C, ducatur primum recta *DE*, parallela lateri BC. Dico latera A*B*, *A*C, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est,

est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Du-
a 37. pri. ctis enim rectis CD, BE, a erunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & in-
b 7. quin. ter easdem parallelas DE, BC, constituta, inter se æqualia. *b* Quare vt triangulum AD
c 1. sex. E, ad triangulum *DEB*, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: *c* Atqui vt triangulum A D E, ad triangulum *D*E B, ita est basis A *D*, ad basin *D*B; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi *AB*.) & eadem ratione, vt triangulum *A*DE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. *d*



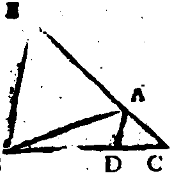
d 11. quin. Vt igitur A*D*, ad DB, ita est AE, ad EC, (cũ hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli A*D*E, ad triangulum D E C.) quod est propositum.

Secet deinde recta *D*E, latera *AB*, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri *BC*. Ductis enim rursum re-
e 1. sex. ctis CD, *BE*, *e* erit vt basis AD, ad basin *DB*, ita triangulum *AD*E, ad triãgulum DE*B*, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autẽ
f 11. quin. vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. *f* Igitur erit vt triangulum A*D*E, ad triangulum *DE*B, ita *A*E, ad EC: Sed rursus, vt basis *A*E, ad basin EC, ita est triangulum *A*DE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem.

Igitur

a Igitur vt triangulum ADE, ad triangulũ DEB, ita est triangulum idẽ ADE, ad triangulum DEC. b Aequalia ergo sunt triangula DEB, & DEC: Ac propterea, cum eandẽ habeant basin DE, c inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC. quod est propositum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum. a 11. quin. b 9. quin. c 39. pri.

Theorema 3. Propositio 3. Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit, & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeãt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.



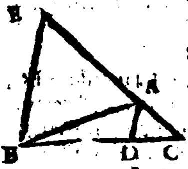
IN triangulo ABC, recta AD, secet primo angulum BAC, bifariam. Dico esse vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cum CA. producta cõueniat in E. d eritque angulus EBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, d 29. pri.

a 6. pri. inter se æquales: *a* Ideoque & rectæ B A, E A, inter se æquales. *b* Vt igitur EA, ad A C, ita BA, ad eandem AC. *c* Atqui vt E A, ad AC, ita est BD, ad DC, cum in triangulo BCE, recta AD, sit parallela lateri BE. *d* Igitur vt BA, ad AC, ita est B D, ad DC. quod est propositum.

b 7. quin. c 2. sex. d 11. quin.

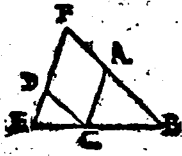
Sit deinde vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulũ BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD, parallela coiens cum CA, protra-cta in E. Quoniam igitur vt BA, ad AC, ita ponitur BD, ad DC. *e* Vt autem BD, ad DC ita est EA, ad AC; (quod in triangulo BC E, recta AD, sit lateri BE, parallela) *f* Erit vt BA, ad AC, ita EA, ad eandem AC. *g* Aequales igitur sunt BA, & EA, inter se, *h* atque propterea anguli ABE, & E, æquales quoq; erunt. *i* Cum igitur angulus ABE, æqualis sit alterno BAD, & angulus E, externo DAC. erunt, & duo anguli B AD, DAC, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

e 2. sex. f 11. quin. g 9. quin. h 5. pri. i 29. pri.



Theorema 4. Propositio 4. Aequiangulorũ triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint

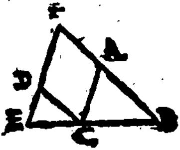


Sint æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE; ita. n. latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homólogaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituãtur latera BC, CE, secundum lineam rectã, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, *a* minores sunt duobus rectis; est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt, & anguli B, & E, duobus rectis minores. *b* Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & cõueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis est interno opposito ABC; *c* parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur AGDF; *d* propterea que recta AF, æqualis rectę CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est la-

a 17. pri.
b 13. pron.
c 28. pri.
d 34. pri.
e 2. sex.

teri BF, e erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando f igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus, quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, g erit BC ad CE, vt FD, hoc est, vt CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando h igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: i erit & ex æquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum, Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

f 16. quin.



g 2. sexti.

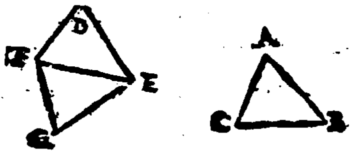
h 16. quin.

i 22. quin.

Theor. 5. Propositio 5. Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebũt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

Habeant triangula ABC, DEF, latera proportionalia, itaque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF, ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico trian-

triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum

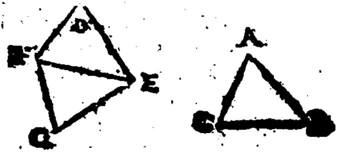


B, angulo E, & angulum G, angulo F. Sic. n. anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, conueniantque rectæ EG, FG, in G: a eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula ABC, GEF. Quare b vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Vt aũt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. c Igitur vt GE, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: d proptereaque æquales erunt GE, DE. Rursus, e quoniam vt BC, ad CA, ita est EF, ad FG: Vt autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; f erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; g ideoq; æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & basis communis EF; h erunt anguli G, & D, æquales; i ac propterea, & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit

a 32. pri.
b 4. sext.
c 11. quin.
d 9. quin.
e 4. sext.
f 11. quin.
g 9. quin.
h 8. pri.
i 4. pri.

angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit: quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

Theor. 6. Propositio 6. Si duo triangula unum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq; habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



Sit angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera AB, BC, proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D; & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritque, vt in præcedenti proposi. dictum est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare a vt AB, ad BC, ita

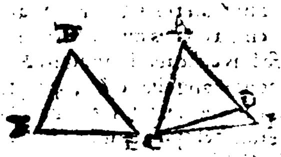
a 4. sexti.

est.

est GE, ad EF. Sed vt AB, ad BC, ita ponitur b 11. quin.
DE, ad EF. *b* Igitur vt DE, ad EF, ita est G
E, ad eandem EF; *c* atque idcirco DE, GE. c 9. quin.
æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF,
æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ip-
sis contenti æquales quoque; (nam angulo
B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqua
lis est positus angulus DEF, proptereaque
æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GE
F.) *d* erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis d 4. pri
angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angu-
lus G sit æqualis angulo A, & angulus EF
G, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æ-
quales anguli D, EFD, & ob id æquiangula
erunt triangula ABC, DEF, quod est propo-
situm; Si igitur duo triangula vnum angu-
lum vni angulo æqualem, &c. Quod erat
demonstrandum.

Theor. 7. Propositio 7. Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorē recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebūt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

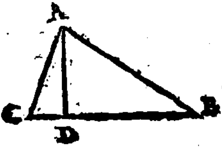
SIt angulus *A*, trianguli *ABC*, æqualis angulo *D*, trianguli *D*EF, & latera *A* C, *CB*, circa angulum *ACB*, propotrionalia lateribus *D*F, FE, circa angulum F, hoc est sit vt *A*C, ad CB, ita DF, ad FE, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet



cet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, & F, non sunt æquales, sit ACB, maior, quam F; fiat-
a 32. pri. que ipsi F, æqualis ACG. Cum igitur & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, a erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideo-
b 4. sex. que triangula AGC, DEF, æquiangula erunt. Quare b vt AC, ad CG, ita erit DF, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad C
c 11. quin. B. c Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB; d ac propterea æquales erunt CG,
d 9. quin. CB; e & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit
e 5. pri. & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recta maior; f cum AGC, CGB, sint
f 13. pri. duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.
Sit deinde tam B, angulus, quam E, recto.

cto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, æqualis, ideo que & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis. quod est absurdum. Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli *ACB*, & F, sed æquales, atque idcirco reliqui etiam anguli *B*, & E, æquales erunt. quod est *propositum*. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

Theorema 8. Propositio 8. Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.



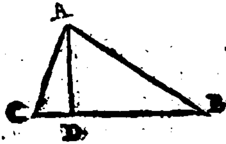
IN triangulo *A* BC, angulus B*A*C, sit rectus à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triãgula ADB, ADC, similia esse, & toti triangulo *ABC*, & inter se. Cum enim in triangulis *ABC*, *DBA*, anguli B*A*C, & *AD*B, sint recti, & angulus B, communis; *a* erunt & reliqui anguli *AC*B, & DAB, æquales. Aequiangulum est igitur triangulum D*BA*, triangulo ABC, *b* ac pro- a 32. pri. b 4 sex.

 pterea

pterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt CB, ad BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita BD, ad DA; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4. huius lib. Quare simile est triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem modo ostendetur triangulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus C, communis; c ac propterea reliqui anguli ABC, & CAD, æquales. Quare d vt BC, ad CA, ita est CA, ad CD; & vt CA, ad AB, ita CD, ad DA, & vt CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic. n. opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC, sint recti, & anguli ABD, CAD, ostensi æquales, nec nõ anguli BAD, ACD. Atque idcirco fit e vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; & vt DA, ad AB, ita DC, ad CA; & vt AB, ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

c 32. primi.

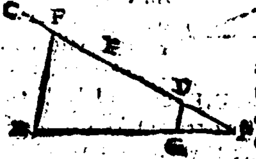
d 4. sex.



e 4. sex.

Pro-

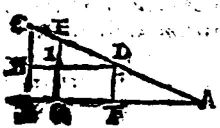
Probl. 1. Propos. 9. A data recta linea imperatam partem auferre.



IMperetur, vt ex linea AB auferamus partẽ tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunque faciens angulum CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela sit recta DG; *a* erit vt *a* 2. *sex.* FD, ad DA, ita BG, ad GA. *b* Componendo *b* 18. igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed *quin.* FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur & BA, ipsius AG, erit tripla; ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur. A data ergo recta linea, imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

Probl. 2. Propositio 10. Datam rectam lineam infectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

SIt recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta AC, in D,



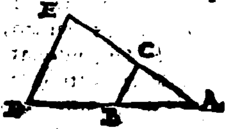
a 2. sex. & E. Nam a vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; b erit rursus,

b 2. sex. vt DE, ad EC, ita DI ad IH, hoc est, ita FG

c 34. pri. ad GB: c quòd FG, ipsi DI; & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

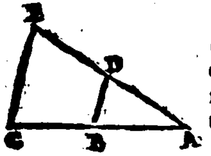
Probl. 3. Propos. 11. Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

SInt duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum A, quemcunque, sitq; inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiã. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, tum, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ



consequens esse debet, sine media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cũ enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC; erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualẽ ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

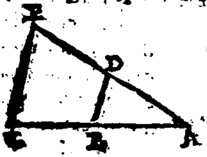
Problema 4. Propositio 12. Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.



Sint tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidẽ AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur

BD,

BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto.

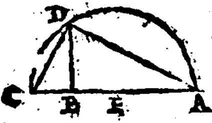


Dico DE, esse quartam proportionalē. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE acta sit parallela BD,

a 2. sex.

a erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.

Probl. 5. Propositio 13. Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

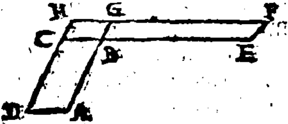


Sint duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositę secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus describatur ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD,

a 31. ter.

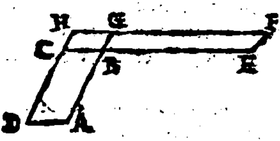
CD, a erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin sit AC, perpendicularis DB; erit per demõstrata propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis ~~lineis, mediam~~ proportionalẽ adinuenimus. Quod erat faciendum.

Theorema 9. Propositio 14. Aequalium & vnum vni aequalem habentium angulum parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quae circum aequales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo aequalem habentium reciproca sunt latera, quae circum aequales angulos; illa sunt aequalia.



Sint duo parallelogramma aequalia AB CD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, aequales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos aequales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint aequales, erunt & FB, BC, vna recta linea; vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstratũ est. Producantur latera DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur aequalia sunt parallelogramma DB, BF: erit vt DB, ad a 7.
BH, quin-

BH, ita *BF*, ad idem BH: Sed vt *DB*, ad *BH*
b. 1. sex. b ita est *AB*, basis ad basin BG, quod paral-

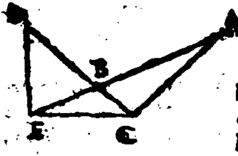


lelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt BF, ad *BH*, ita est basis EB, ad basin BC. Igitur vt *AB*, ad *BG*, ita est EB, ad BC. Quod est propositum.

Econtrario sint iam latera circa æquales angulos *ABC*, *EBG*, reciproca, hoc est, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma *D*B, BF, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cum sit, vt *AB*, ad *BG*, ita E
c 1. sex. B, ad BC: c Vt autem *AB*, ad BG, ita *D*B, ad BH; & vt EB, ad BC, ita BF, ad idem *BH*; erit quoque vt *D*B, ad BH, ita BF, ad idem BH; erit quoque vt *D*B, ad *B*H, ita BF, ad
d 9. quin. idem BH. d Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma *DB*, *BF*. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 10. Propositio 15. Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulũ, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

Sint



SInt duo triangula æqualia *ABC*, *DBE*, habentia angulos, qui ad *B*, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt *AB*, ad *BE*, ita *DB*, ad *BC*. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt *AB*, *BE*, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli *ABC*, *DBE*, sint æquales; erunt & *DB*, *BC*, vna recta linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta *CE*, quoniam æqualia sunt triangula *ABC*, *DBE*, *a* erit vt *ABC*, ad *BCE*, ita *DBE*, ad idem *BCE*. Sed vt triangulum *ABC*, ad triangulum *BCE*, *b* ita est basis *AB*, ad basin *BE*, quod hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt *DBE*, ad *BCE*, ita est basis *DB*, ad *BC*. Quare vt *AB*, ad *BE*, ita est *DB*, ad *BC*. Quod est propositum.

a 7. quin.

b 1. sex.

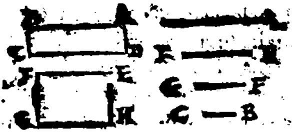
Iam vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad *B*, reciproca, hoc est, vt *AB*, ad *BE*, ita *DB*, ad *BC*. Dico triangula *ABC*, *DBE*, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt *AB*, ad *BE*, ita *DB*, ad *BC*; vt autem *AB*, ad *BE*, *c* ita triangulum *ABC*, ad triangulum *BCE*; & vt *DB*, ad *BC*, ita triangulum *DBE*, ad triangulum idem *BCE*; Erit vt *ABC*, ad *BCE*, ita *DBE*, ad idem *BCE*, *d* propterea que æqualia erunt triangula *ABC*, *DBE*. Aequalium igitur

c 1. sexti.

d 9. quin.

igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

Theor. 11. Propositio. 16. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; vt quidem AB ad FG, ita EF ad BC: Sitque rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis AB, BC; rectangulum vero EFGH, comprehensum sub mediis EF, FG. Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt AB ad FG, ita EF ad BC; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod est propositum.

Contra vero, sint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse

vt

vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG; habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F, b erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. b 14. sexti.

Theor. 12. Propositio 17. Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD, cõtentum sub extremis AB, BC, & quadratũ mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensũ sub medijs EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. a Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub medijs EF, FG, comprehenso. Quod est propositum. a 16. sexti.

Sed.

Sed ſint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico eſſe vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia ſint rectangula AC, & EG, *b* erit vt *AB*, ad EF, ita FG, ad BC: *c* Vt autem FG, ad BC, ita eſt EF, ipſi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita eſt EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 16. ſex.
c 7. quin.

Probl. 6. Propoſ. 18. A data recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere.

SIt data recta AB, ſuper quam deſcribẽdum ſit rectilineũ rectilineo CDE, FG, ſimile ſimiliterq; poſitum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad ſingulos angulos oppoſitos rectæ lineæ, quæ rectilineũ reſoluant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde ſuper AB, conſtituatur AIB, triangulum, æquiangulum CDF; & ſuper AI, triangulum AkI, æquiangulum CGF, & IBH, æquiangulum DEF; ex quo conſtat rectilinium eſſe æquiangulum dato ex conſtructione. Quoniam vero ita eſt AB, ad BI vt CD, ad *DF*: & ita *BI*, ad *BH*, vt DF, ad DE.

DE. *a* erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, *b* quemadmodum, & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. *c* Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC: & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. *d* Igitur ex æquo erit ita HI, ad Ik, vt EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cũ sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq. descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq. positum rectilineum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 22. quin. b 4. sex. c 4. sex. d 22. quin.

Theor. 13. Propositio 19. Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SInt triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera ta homologa BC, & EF, & quidem si sint æqualia latera AB, DE, constat triangula esse æqualia ex 26. prim. cum anguli sint æquales, & ita etiam media proportionalis inuenta erit æqualis, & duplicata proportio erit æqualitatis. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde, & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, a quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis, E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF. tota erunt æqualia.

a 11. nx.

Sit deinde BC, latus latere EF, maius; & ex BC, a abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturque recta A G

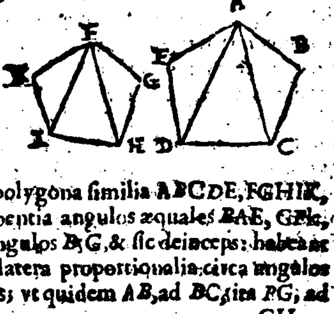
Quia igitur est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem BC, ad EF, ita est per constructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, ad DE, b ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E æquales reciproca, c ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad trian-

b 11. quin.

c 15. sex.

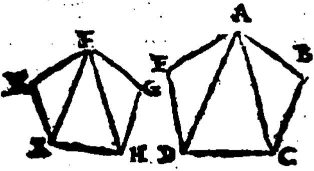
triangulum DEF; *d* ita erit idem triangulũ ABG, ad triangulum ABG. Vt autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, eiusdem altitudinis, ita est basis BC, ad basin BG: Igitur vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint continuè proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum. d 7. quin.

Theor. 14. Propositio 20. Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



Sint polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK, Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH;

GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hęc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFk, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quę sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula ABC, FGH. & eadem ratione ostendetur de omnibus triangulis in quibus resoluitur.



Dico præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorũdem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cum vtraque hæc propor

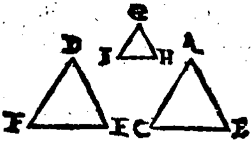
tio

tio triangulorum sit duplicata eiusdẽ proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt A CD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequens, *a* ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erũt totis polygonis.

a 12. *quin.*

Dico postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim sit, vt triangulum *AB*C, ad triangulum FGH, ita polygonum ABC*D*E, ad polygonum FGH IK; *T*riangulum vero *A*BC, ad triangulũ FGH, habeat proportionem duplicatam eius, quam habẽt latera homologa *A*B, FG, hoc est, eandem, quam habet *AB*, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatã proportionis eorundem laterum homologorũ AB, FG, hoc est, eandem, quam habet *A*B, ad illam tertiam inuentam. Itaque similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

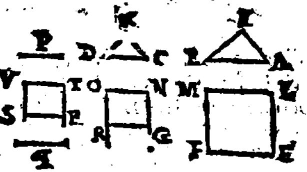
Theor. 15. Propos. 21. Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.



SInt rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico, & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdẽ
a 1. pron. rectilinei GHI; *a* erunt anguli rectilinei *A*BC, æquales angulis rectilinei *D*EF. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circum æquales sunt angulos; Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI;
b 11. quin. *b* erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

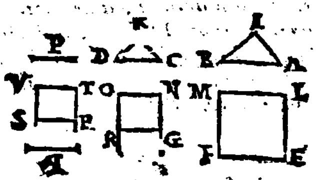
Theo-

Theor. 16. Propos. 22. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



SInt primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDk; item super EF, GH, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem ABI, ad CDk, ita EM, ad GO. *a* Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. *b* eritque ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q: Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDk, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. vel si fue- a 11. sex. b 22. quin.

rint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadē ratione, vt EE, ad Q, ita rectilineum EM, ad



c 11. quin. rectilineum GO. c Igitur vt ABI, ad CDk, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

Deinde sint ABI, CDk, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB. CD, EF, GH, esse quoq; proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. d Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterq; positum; e & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam est ostensum, Vt ABI, ad CDk, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDk, ita quoque ponitur EM, ad GO. f Igitur erit vt EM, ad RV, ita EM, ad GO; g Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quę cum sint similia similiterq; posita, consistent necessario, vt mox ostendemus, super rectas RS, GH, æquales. h Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH

d 12. sex.

e 21. sex.

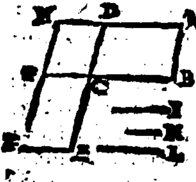
f 11. quin.

g 9. quin.

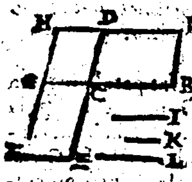
h 7. quin.

H, Quamobrem si quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 17. Propos. 23. Aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eã, quæ ex lateribus componitur.



Sint parallelogramma æquiangula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in vno Parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrãmi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiã ex proportionibus rectę BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Idest, si sumantur tres lineæ I, k, L, ita vt I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG, & k, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad k, & k, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compositã esse ex eisdem proportionibus, hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE.

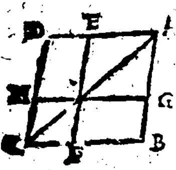


Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectã: Quo posito, cum anguli BCD, ECG. sint æquales; erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demõstratum est. Producantur deinde AD, FG, donec conueniãt in H.
a. 21 sexti. Sumptaque recta I, quacunque, a inueniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & k, quarta pro-
b 1. sex. portionalis L. Quoniam igitur est, b vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad C
c 11. quin. G, ita posita est I, ad K, c erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt HC, ad CF, ita k, ad L. Nã
d 1. sex. vt DC, ad CE, d ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L: Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L. per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque

ra-

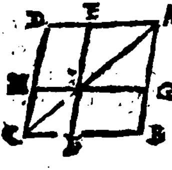
ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dũmodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt B C, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostẽdendum est.

Theor. 18. Propos. 24. In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia.



Esto parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, EH, circa diametrũ, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quod enim æquiangula sint toti, facilè ostendetur. Nam angulus GAE, idem est, qui angulus *BAD*; *a* & angulus externus *AEI*, æqualis interno *ADC*; & angulus *AGI*, externus interno *ABC*, & angulus EI G, externus interno BFI; & hic externus interno *BCD*. Quare æquiangulum est EG, parallelogrammum. parallelogrammo *B D*. Et eadem ratione eidem *BD*, æquiangu- *a 29. pri.*

lium erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI æquiangulum sit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, vt perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel



b 4. *sexti.* etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. *b* erit vt AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus *c* erit. vt BC, ad CA, ita

c 4. *sex.* GI, ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad

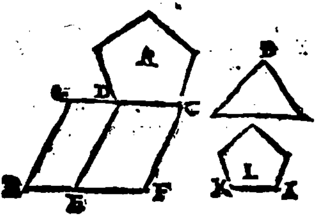
d 22. *quin.* IE. *d* Ex æquo igitur, vt *BC*, ad *e* CD, ita est GI, ad IE, ac propterea, & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera, circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD;

e 21. *sex.* *e* atque adeo, & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

Era-

Probl. 7. Propositio 25. Dato rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

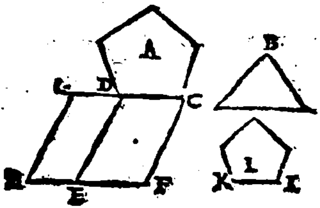
Sint data duo rectilinea A, & B; sitq; cõstituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B.



Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, *a* constituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo *A*; Et super rectam DE. in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum *D*H, æquale ipsi *B*, eritque tam CDG, quam FEH, linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. 1. *b* Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis Ik; *c* super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi *A*, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo *B*. Cum enim sint proportionales tres rectę CD, Ik, DG; erit per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. vt *CD*, prima ad *D*G, tertiam,

a 44. *vel* 45. *primi*.
b 13. *sex*.
c 18. *sex*.

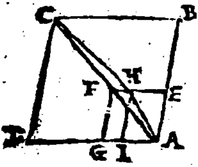
ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super I k, secundam simile si-



a 1. sex. militerque descriptum: *a* Vt autem CD, ad
b 11. DG, ita est parallelogrammum CE, ad pa-
quin. rallelogrammum DH, eiusdem altitudi-
c 7. nis. *b* Igitur erit vt CE, ad DH, ita *A*, ad L.
quin. *c* Vt autem CE, ad DH, ita est *A*, ad B: pro-
pterea quod parallelogrammum CE, recti-
d 11. lineo A; & parallelogrammum DH, rectili-
quin. neo B, constructum est æquale. *d* Quare e-
e 9. rit vt A, ad B, ita A, ad L; *e* propterea que
quin. æqualia erunt rectilinea B, & L; Est autem
& L, simile ipsi *A*, similiterque positum per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

Theo-

Theor. 19. Propos. 26. Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circa eandem cum toto diametrum consistit.

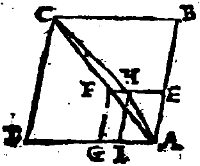


EX parallelogrāmo *BD*, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterq; positum, habens cū ipso angulum communem E*A*G. *Di*co EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ *A*F, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & *A*C, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi Quod si *A*F, CF, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter *A*C, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; *a* ipsa erunt similia, similiterque posita. *b* Quare erit vt BA, ad AD, ita FA, ad *A*I. Sed vt *BA*, ad *AD*, ita quoque est E*A*, ad AG, quod parallelogramma *BD*, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. *c* Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG.

a 24. *sex.*
b 1. *def. sexti.*
c 11. *quin.*

K 6

d 9. quin. G. *d* Ac propterea æquales erunt rectæ AI, AG, pars, & totum: quod est absurdum.



Quod si dicatur recta AHC, secare alterum latus F G, Tunc ducta HI, parallela ipsi EF, *e* erũt. rursus similia parallelogramma B D, I G, similiterque posita. *f* Quare erit vt DA, ad *AB*, ita GA, ad AI: Sed vt *DA*, ad AB, ita quoque est GA, ad *A*E, ob similitudinem parallelogrammorum *BD*, E G. *g* Igitur erit vt *GA*, ad AI, ita *GA*, ad AE, *h* ideoque æquales erunt rectæ *A*I, AE; pars & totum: Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, *FC*, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F; & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

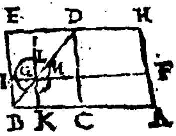
e 24. sex. Et. def sexti.

f 11. quin.

g 9. quin.

Theor. 20. Propositio 27. Omnium parallelogrammorum secundum eãdem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiã applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

Detur



DEtur recta AB, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam BC, constituatur quodcunque parallelogrammum CDEB, cuius diametes BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum ABEH, erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC, consistens, applicatum secundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & existens simile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum, deficiensque parallelogrammo CE, maximum esse omnium, quæ secundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi CE. Sũpto enim puncto G, vtcunque in diametro BD; & ductis per G, rectis FGI, kG, quæ sint parallelę rectis AB, BE; erit parallelogrammum Fk, secundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo kI, *a* quod ipsi CE, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum CE, diametrum. *b* Quoniã vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune kI, erunt quoque æqualia CI, kE: *c* Est autem CI, æquale ipsi CF, propter bases æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additoque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cum CE, maius sit gnomone LM, (continet enim CE, præter

a 24. sex.
b 43. pri.
c 36. pri.

ter gnomonem, parallelogrammum adhuc *DG*,) erit quoque *AD*, *d* æquale existens ipsi CE, propter bases æquales AC, C *B*, maius quam parallelogrammum A G, eodem parallelogrammo *D G*. Eodemque modo ostendetur *AD*, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, vt punctum *G*, sit inter puncta *B*, & *D*, hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse A *C*, habentque minorem altitudinem, quam A *D*; dummodo defectus similes sint ipsi C E.

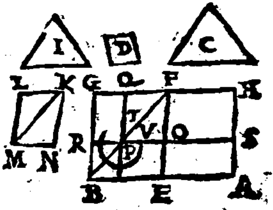
d 36. pri.

Probl. 8. Propos. 28. Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineam A*B*, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo *D* Secta A B, bifariam in E, super medietatem EB, *a* describatur parallelogrammũ EFGB, simile ipsi D, similiterq; positum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale est ipsi

a 18. sex.

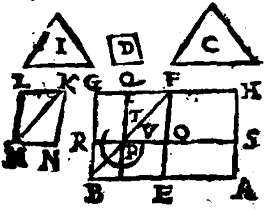
ipsi C, cum sit applicatum ad AB, deficiens



parallelogrammo EG, simili ipsi D; factum erit, quod iubetur. Si autem AF, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllũ ad AB, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, dictum est ad propos. 45 lib. 1.) b & constituatur parallelogrammum KLMN, simile quidem similiterq; positum ipsi D, seu ipsi EG, æquale vero excessui inuento I; vt sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, simul; & ob id maius quam K M. Cum igitur ob similitudinem sit vt EF, ad FG, ita Nk, ad KL; erunt quoque latera EF, F G, b 25. sex.

ma-

maiora lateribus NK, ad KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam EG, æquale ipsi NL, vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis FO, FQ, quæ sint æquales ipsis KN, KL, & completo parallelo-

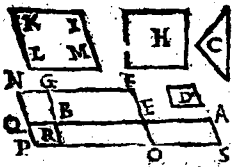


grammo FQPO, erit hoc ipsi LN, æquale, & eidem simile similiterq; positum, & propterea ipsi EG: *a* atque adeo circa eandem diametrum cum EG, consistet, quæ sit BE. Productis iam rectis QP, OP, erit parallelogrammum *A*P, ad rectam A*B*, applicatum deficiens parallelogrammo P*B*, *b* quod simile est ipsi EG, similiterq; positum, & propterea ipsi *D*. Dico igitur *A*P, æquale esse ipsi C, rectilineo. *c* Nam cum PG, æquale sit complemento PE; si addatur commune P*B*, erit & *B*Q, æquale ipsi EB, hoc est, ipsi ES, *d* quod æquale est ipsi ER, propter bases æquales EA, E*B*. Quare si æqualibus AO, BQ, commune addatur EP, erit *A*P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon TV, æqualis est rectilineo *C*, (Nam cum EG, paral-

a 26. sex.
b 24. sex.
c 43. pri.
d 36. pri.

rallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cũ LN; si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C; æqualis.) Igitur & AP, eidem C, æquale erit. *Ad* rectam ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

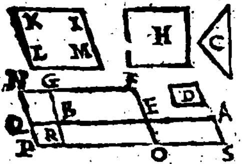
Probl. 9. Propos. 29. Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.



AD datam rectã lineam AB, dato rectilineo C, applicãdum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa AB, bifariam in E; *a* super dimidiam EB, construatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum. *b* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; *c* cui quidem fiat parallelogrammum IkLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterque positũ; eritque propterea IkLM, maius quam EF GB.

a 18. sex.
b 14. sextur.
c 25. sex.

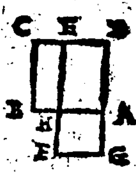
GB, quandoquidem æquale est quadrato



H, quod constructū, est rectilineo C, vna cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem Mk, EG, sit vt MI, ad Ik, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, Ik, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque Mk, vel æquale ipsi *EG*, vel minus, vt perspicuū est. Productis igitur FE, FG, vt rectæ FO, FN, æquales sint rectis IM, IK, & completo parallelogrammo ON; erit hoc simile similiterque positum ipsi *EG*, cum sit æquale ipsi M
d 26. K, & simile, similiterq. positum. *d* Quare O
sex. N, EG, circa eandem diametrum consi-
stent. Productis iam A*B*, G B, ad Q, R;
& FO, donec cum *AS*, ipsi FO, parallela cō-
ueniat in S, erit parallelogrammum *A* P,
applicatum ad rectam AB, excedens paral-
e 24. lelogrammo QR, *e* quod simile est ipsi E
sex. G, ac propterea ipsi *D*. Dico igitur *A*P, æ-
f 36. quale esse rectilineo C. *f* Nam cum AO, E
pri. *R*, sint æqualia, *g* & ER, æquale complemē-
g 43. to BN; erit & AO, ipsi *B*N, æquale. Addito
pri. ergo communi OQ fiet *A*P, æquale gno-
moni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cum Mk, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, vna cum EG; si auferatur cōe EG, remanebunt æqualia gnomon

mon EPG,& rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedẽs parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

Probl. 10. Propos. 30. Propositam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.



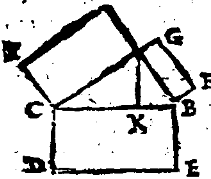
Sit recta *AB*, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato A*B*CD; *a* ad latus D*A*, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato, ita vt sit A F, quoque quadratum, cũ quadrato solũ quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam *AB*, in H. Dico A*B*, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum .n. æqualia sint DF, & AC, si demãtur cõe AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeãt angulos ęquales AHF, BHE, vtpote rectos, *b* erunt latera circa illos reciproca, hoc est, erit vt EH, hoc est, vt *A*B, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad H B. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, ita segmẽtum AH, ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatã, &c. Quod erat faciendum.

a 29. sex.

b 14. sex.

Theo-

Theor. 21. Propos. 31. In rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulũ subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.



TRiangulũ rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectum; describaturq; super BC, quæcunque figura rectilinea BCDE, a cui similes similiterque positæ super AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa n. ex A, ad BC, perpendiculari Ak, erit per corollarium propos. 8. huius lib. vt BC, ad CA ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura B D, super primam, ad figurã CH, super secundam similem similiterq; positã, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non secus ostendetur, esse quoq; vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, Bk, sint quoq; proportionales &c. Quoniam igitur est vt Ck, prima quãtitas ad BC, secundã, ita CH, tertia ad BD, quartã; Item vt Bk, quinta quãtitas ad BC, secundã, ita BG, sexta ad BD, quartã; b erit vt prima CK, cum quinta Bk, ad BC, secũdam,

a 18. sex.

b 24. quin.

dam, ita tertia CH, cum sexta *BG*, ad *BD*, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta Bk, simul æquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, simul æquales quoq; erunt quartæ BD, Quod est propositum.

Theor. 22. Propos. 32. Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

Habent triangula ABC, DCE latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturq; ad angulum *ACD*, ita vt latera homologa AB, *DC*; Item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineã. Cum n. parallelæ sint *AB*, DC, *a* erit angulus A, alterno *ACD*, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidẽ *A*CD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoq; existẽt æquales. Quoniã igitur triangula ABC, DCE, habẽt latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa *b* erunt inter se æquiangula, habebuntq; æquales angulos B, & *D*CE. Additis ergo æqualibus A, & *A*CD, erũt duo anguli *B*, & *A*, duobus angulis DCE, *A*CD, hoc est angulo ACE, æquales. Rursus addito cõi AC*B*, fient tres anguli

a 29. pri.

b 6. sex

guli

guli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

Theor. 23. Propos. 33. In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero, & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SInt duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra D, H; sumanturq; ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistãt anguli BDD, FHG; ad circumferẽtias vero anguli BaC, FEG. Dico esse, vt arcum BC, ad arcũ FG; ita angulum BDC, ad FHG; & BAG, ad FEG; &c. sectorem BDC, ad sectorem FHG. a Applicentur enim in circulis æquales CI, quidẽ
a 1. quar. ipsi BC, & ipsi FG; GK, KL. Aequales igi-
b 28. ter. tur erunt b arcus, quibus hæ rectæ insistunt,
c 27. ter. ergo & anguli c ad centra æquales inter se erunt

erunt BDC,& CDI; similiter FHG, & GH L, &c. ergo æque multiplices sunt arcus,& anguli ad centra , cum sint diuisa in partes æquales,& spacia ad centra, & arcus. si ergo arcus se excedent,vel æquales erunt , similiter,& anguli. *d* ergo vt se habet arcus BC,ad FG; ita angulus BDC, ad FHG, & hoc idem de spacio , vt arcus ad arcum,ita spacium ad spacium . ergo etiam vt angulus BDE,ad FGH; ita dimidium *f* BAC,ad dimidium FEG. d 6. def quin. f 20. ter.

Constituantur iã in segmẽtis BC,CI, anguli BMC,CNI,*g* qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC,CNI *h* atq; adeo inter se æqualia, propterea qđ sunt super rectas BC,CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC,CDI, quæ æqualia quoq; sunt,fient sectores BDC,CDI,æquales. Quapropter tã multiplex erit sector BDI.sectoris BDC, quã est multiplex arcus BCI,ipsius arcus BC.Similiter ostendemus sectorẽ FHL,tam multiplicẽ esse sectoris FHG,quã multiplex est arcus FGKL , ipsius arcus FG.Quoniã vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoq; BDI, sectori FH L,æqualis est ; (vt in sectoribus BDC,CDI,ostensum fuit,) & si maior,maior,& si minor,minor; Deficient propterea vna arcus BCI,& sector BDI,æque multiplicia primę magnitudinis BC,& tertiæ BDC,ab arcu FGkL , & sectore FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis F G, g 27. ter. h 24. ter.

&c

& quartæ FHG; vel vna æqualia erunt: vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcũ FG, secundam magnitudinem, ea erit secto ris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonstrandum erat.

FINIS.

Pag.	Ver.	Errata.	Corrigi.
3	8	suauissima	suauissimam
10	5	esse	est
11	27	Rhambus	Rhombus
12	13	Diametrum	diameter
15	1	PRIMA	PRIMVM
20	11	iater	inter
25	13	æquilateris	æquilateri
25	21	Anguli	angulo
35	1	erit minor	abundat
47	17	oppouto	opposito
50	15	æquale	æqualis
64	20	quadratum	quadratorum
100	10	duoaus	duobus
102	14	fini	fint
113	2	Arigulo	angulo
132		figura propria est versa pagina	
137	20	cub	cum
144	2	Magnitudinẽ	magnitudinum
147	13	;que	ęque