LES ELEMENS DE LA GEOMETRIE D'EVCLIDES MEGARIEN.

TRADVITS ET RESTITVEZ A LEVR ancienne breueté, ſelon l'ordre de Theon. Auſquels ont eſté adiouſtez les quatorze & quinzieſme d'Ipſicles Alexandrien.

SECONDE EDITION.

Reueuë & augmentée par l'Autheur.

A PARIS,

Chez IACQVES LE ROY, à l'Eſperance, deuant le College de Cambray.

M. DC. XIII.

DOVNOT DE BAR-LE-DVC.

Au Lecteur.

IL semble que la breueté & l'obscurité soient tellement liees, que l'vne ne puisse estre sans l'autre : la premiere est tant commune à la Geometrie, qu'elle ne peut euiter la reputation de la derniere. Ainsi disoit vn ancien. *Quis ignorat, ij qui Mathematici vocantur, quanta in obscuritate rerum, & quam recondita in arte versentur.* Ce pendant & Aristote neglige la paraphrase, & Archimede s'expedie en deux mots : que dirons nous de Ptolomee auec son Almageste tant racourcy ? Et à mon iugement, ces trois sont les plus excellens de toute l'antiquité, pour establir vne doctrine solide. Pappus represente si naïfuement son Archimede, qu'il semble auoir peur de mettre quelque parole inutille. Quant à Euclides, il est bien difficile de iuger, s'il a esté amateur de cette breueté, puis qu'il ne nous reste de luy quasi presque que la memoire de son nom. Car si on prend garde aux demonstrations que Proclus luy attribuë : tout l'ouurage des Elemens demeurera entierement à Theon. Quoy que ce soit, tous les grands personnages ont affecté la breueté, bien que non pas si heureusement les vns comme les autres. Le Sieur de Candalles surprend quelquefois Theon en paralogisme, pour estre trop court : & quelquefois Campanus luy semble se fier trop à son esprit. Ainsi ce sont les choses à demy prouuees qui engendrẽt l'obscurité, & en cette façon doit estre pris le dire du Poëte Lyricque, *Breuis esse laboro obscurus fio.* Non pas qu'il condamne le racourcissement des paroles, puis qu'ailleurs il veut que l'on s'en serue, *Quicquid præcipias esto breuis.* Nonobstant cela Theon & Campanus ont conserué long-temps la dictature en cette Prouince : Iusques à ce que l'ignorance du temps, & le peu de soin des Libraires, a laissé glisser plusieurs erreurs dans leurs liures, qui les ont rendu presque incomprehensibles. Ainsi si tost que l'on a veu renaistre les bonnes lettres, les premiers Mathematiciens ont fort bien iugé qu'ils auoient besoin de reformation : mais ils ont entrepris ce restablissement tout à contrepied. Car estimans que cette obscurité procedoit du peu de paroles, & que par icelles la promptitude de memoire estoit empeschee, Ils ont desplié les demonstrations, & par paraphrases infames ils ont baillé vingt paroles pour deux. De façon que pensans rafreschir la memoire par redittes inutiles, Ils ont estourdy la viuacité d'esprit de ceux qui apprennẽt, sans considerer que les anciens auoient produict tant d'excellens Geometres, auec leurs courtes demonstrations. Aussi n'ont-ils rien aduancé iusques icy, que de rendre la Geometrie odieuse, & tourmenter les subtils & genereux esprits qui la conuoitent.

Ce n'est pas que ie vueille dire qu'il faille trancher si court les Elemens, comme si on auoit affaire à des Geometres desia faicts : N'y qu'il faille demonstrer comme Archimedes, Pappus, Appollonius, Ptolomee : lesquels parlent en grands Seigneurs, & ne prouuent la plusspart de ce qu'ils disent, sinon ce qui est plus difficille. Mais il y a vn chemin mediocre, par lequel toutes les difficultés sont esclaircies, sans auoir tant de langage. Ainsi ceux qui sont venus apres considerans ce deffaut, l'ont reparé en partie, en partie ont augmenté le mal par vne effrenee & insatiable ostentation. Car lors qu'ils font parade de leurs esprits en demonstrant vne chose de trois ou quatre façons, ou qu'ils se contraignent de prouuer par certaines propositions, en repudiant les autres; Que font ils autre chose, que se mettre des entraues, pour marcher auec plus de peine, & grossir leurs liures d'vn trauail inutil. Vn grand esprit de nostre siecle auoit entrepris de deliurer la Geometrie des demonstrations literalles, il nous reste encores quelque chose de son trauail, mais trauail qui est mal reüssi: Car il est tombé dans l'obscurité, sans auoir affecté la breueté. Ie dis donc que celuy la emportera le pris qui sera court & intelligible. Quant à moy i'ay bien visé à tous les deux, & suis certain d'en auoir touché l'vn, mais ie doute de l'autre. C'est de ton equitable iugement (amy Lecteur) que m'en viendra la cognoissance. Mon dessein a esté tel. Ie me suis vn peu eslargy aux demonstrations des quatre premiers liures, tant par ce que c'est le commencement de la Geometrie, & que l'explication en doit estre vn peu plus familiere, qu'aussi les demonstrations d'elles mesmes, estoient assez courtes: Et aux endroicts ou elles me sembloient embarassees par leurs prolixitez, ie les ay racourcy par sommaires, afin que par iceux, le Lecteur ait vne idee du chemin que tient le Geometre pour paruenir à sa conclusion, lequel autrement estoit difficile à recognoistre parmy la confusion de tant de preuues. Aux cinq liures d'apres, i'ay pris vn peu plus de licence à racourcir: Mais i'ay employé tout mon eſtude, & mon trauail au dixieſme liure, voyãt que chacun le tenoit pour fort difficil. Auſſi qui conſiderera le grand nombre de lemmes, & de corollaires que i'ay retranché de ce liure, ſans auoir groſſi mes demonſtratious, ny les auoir laiſſé defectueuſes, & imparfaictes; Iugera aiſément que ie y ay employé du temps. En beaucoup d'endroicts, i'ay eſté contrainct de changer la demonſtration du tout, lors qu'elle s'appuyoit ſur lemmes, ou corollaires que i'auois reiecté. Autrement i'euſſe eſté contrainct de mettre deux demonſtrations en vne. Quant aux quatorze & quinzieſme liure, i'auois deliberé les retrancher du tout, n'eſtans iceux d'Euclides, que meſmes ils ſont ſuperflus à l'ouurage des Elemens, qui doit eſtre terminé en l'inſcription des cinq figures regulieres dans vne meſme ſphere: Veu meſmes que la fin d'iceux (comme enſeigne Proclus) eſt la meſure d'icelles cinq figures, que Platon au Thimee appelle mondaines: attribuãt la Pyramide au feu, le Cube à la terre, l'octaëdre à l'air, l'icoſaëdre à l'eau, & le dodecaëdre au ciel, le tout enfermé dans vne meſme ſphere. Toutefois conſiderant le petit nombre de propoſitions, bien qu'elles n'ayent gueres d'vtilité, ie les ay ioinct auec les autres. Voila mon trauail: reçois-le (Amy Lecteur) & qu'il te profite. ADIEV.

ADVERTISSEMENT SVR LA SECONDE EDITION.

AMY LECTEVR, i'auois deliberé en ceste seconde edition de te donner la traduction du commentaire de Proclus sur le premier liure d'Euclides, Mais i'ay consideré de plus pres que toute ces meditations sur la diuine Mathematique en general, & ces distinctions des operations de l'ame, & de l'entendement, prouuées par les figures de Geometrie, nous enseignoient vn genre de philosopher assez maigre, & par lequel on n'a point de verité assez constante. Et pourtant Proclus est du tout ennuyeux auec ces enrichissemens, ou plustost despouilles des escolles de Pytagoras & de Platon, lesquelles il vaut mieux laisser aux Orateurs, & autres sortes de gens qui s'estudient plus à delecter & contenter leurs auditeurs, qu'a rechercher la verité: estant indigne d'vn Geometre qui fait profession de la rechercher auec vn discours tres-certain, de quitter ses demõstrations pour s'arrester a des opinions. Ie trouuerois bon qu'on esloignast toutes ces moralitez de la Geometrie, & qu'on enseignast seulement de qu'elle façon ceste diuine science doit estre traictée, en esclarcissant les choses difficiles, distinguant les ambigues, courant au deuant des erreurs, & les arrachant, voires en vn mot monstrant le chemin Royal, c'est à dire le plus court, le plus methodique, pour paruenir à la cognoissance de la Geometrie. Ce grand chemin, ou chemin Royal nous est ouuert dans ce liure des Elemens, sur lequel il me sembloit bien plus raisonnable d'entreprendre vn commentaire entier, mais le trauail est vn petit de plus longue haleine que ne permet mon peu de loisir. Ainsi (Amy Lecteur) tu en receuras petit à petit quelques morceaux, en attendant que i'aye la commodité de te donner le tout entierement.

QV'EST-CE QVE GEOMETRIE & qu'Element.

ENTRE toutes les ſciences, il n'y en a point qui ait le diſcours plus releué que la Geometrie. Auſſi diſoit Ciceron, que les autres ſciences perſuadent, mais que celle-cy force la croyance, *Geometria cogit credere.* Les Dialecticiens enſeignent bien que ceſt que demonſtration, & ne s'en ſeruent quaſi point, voires à peine en toutes les autres ſciences pourra l'on en trouuer vne ou deux: mais le Geometre demonſtre perpetuellement. Auſſi ſans la Geometrie, Galien fuſt deuenu Pyrthonien, comme il confeſſe au liure qu'il a faict de ſes liures, tant il auoit trouué peu de certitude aux autres ſciences. Platon la trouuee tant certaine, & ſi propre à rendre les iugemens ſolides, qu'il ne veut point d'autre examen pour eſprouuer la capacité des eſprits, pour quelque charge que ce ſoit. Voires meſmes, il a eſtimé toutes les autres ſciences viles & abiectes, qui eſtoient deſtituees de la Geometrie. C'eſt elle ſeulle qui monſtre la certitude aux autres parties de Mathematique, de laquelle Ariſtote ne faict iamais mention ſans l'honorer du titre de diuine, faiſant par tout grand eſtat de la certitude de ſes demonſtrations.

Or ceſte Geometrie n'eſt rien autre choſe que la ſcience qui enſeigne à cognoiſtre la nature des quantitez egalles ou inegalles, que le vulgaire eſtime l'art de bien meſurer. Car meſurer n'eſt rien autre choſe que comparer vne petite quantité auec vne grande, ou la meſure meſurante à la meſure meſuree. Donc Geometrie ne ſera rien autre choſe que la ſcience des raiſons & proportions, leſquelles ſi elles ſont conſiderees en l'Arithmetique, la verité n'en pourra eſtre eſclaircie que par le moyen de la Geometrie. Ceſt pour cela que la pluſpart des gens doctes de ce ſiecle, ont penſé qu'il n'y auoit point d'autre Theorie d'Arithmetique que la Geometrie, & Ramus reiecte la reigle de fauſſe poſition, d'autant qu'elle ne tire point ſa lumiere de la Geometrie, cõme auſſi François Viette, *Ageometrica praxis*, dict-il, *ab exilio, quod ab homine* λογικόπατω *Imperatum eſt, ne reducitor.* Faute de ceſt eſclairciſſement aux operations d'Arithmetique, quelques ignorans ont penſé qu'il n'y auoit que deux reigles des nombres, ſçauoir Addition, & ſoubſtraction, ſouſtenans que la multiplication eſtoit vne eſpece d'Addition, & diuiſion, vne eſpece de ſouſtraction. Que s'ils euſſent conſideré que la ligne adiouſtee à la ligne faict vn compoſé de meſme eſpece, c'eſt à ſçauoir ligne: mais que la ligne multipliee par la ligne, donne vn produict de differente eſpece ſçauoir vn plan: Ils euſſent bien apperceu que ce n'eſtoit point ſans cauſe que les anciens auoient diſtingué l'Addition de la multiplication. Ils apperçoiuent bien leur faute quand ils multiplient des pieds par des pieds, & qu'il faut reduire le produict en thoiſes, d'autant qu'ils tomberoient en des grands erreurs, s'ils ne prenoient des toiſes quarrees de trente ſix pieds &c. Il aduient le meſme inconuenient en la diuiſion,

n'eſtant

n'estant icelle rien autre chose que l'application d'vn rectangle sur l'vn de ses costez, & le quotient est l'autre costé. Ainsi la Geometrie m'enseigne que le produict d'vne multiplication, ou le quotient d'vne diuision, sont d'autre espece, que ny le multiplicateur ou multiplicande, ny le diuiseur ou le diuidende (excuse Lecteur ces mots barbares, ils sont significatifs.) Mais que la somme d'vne Addition, ou le reste d'vne soubstraction, sont tousiours de mesme espece, que les quantitez à adiouster ou soustraire. Mais nous traitterons de ces choses plus amplement en vn autre lieu.

Le Geometre donc considerant les raisons & proportions des lignes, des superficies, & des solides, entant qu'ils sont egaux ou inegaux, l'egalité luy sert à faire ses reductions, mais les raisons & proportions sont les degrez d'inegalité par le moyen desquels il paruient à l'egalité. Son but est de reduire toutes les superficies à la quarree, & tous les solides au cube, & tous les deux aux lignes, comme mesures les plus simples & plus aisées à cognoistre. De toutes ces figures tant planes que solides, les vnes sont regulieres, les autres irregulieres. Les regulieres seulement tombent soubs la science, & nous n'auons cognoissance des irregulieres, sinon entant qu'elles sont reduictes aux regulieres par le moyen de l'egalité ou de la proportion, eschelle qui conduit à l'egalité. Et pour autant que la Geometrie ne cherche point d'autre quantité par dessus les solides, & qu'entre les figures solides on n'en trouue point plus de cinq qui soient regulieres, ils ont faict vn traicté de la mesure d'icelles cinq figures solides regulieres, qu'ils ont appellez Elemens de Geometrie. Les Elementaires donc ayant esté la plus part Platoniciens, ils ont accommodé leurs Elemens à la doctrine de Platon, enseignant comment il falloit inscrire icelles cinq figures regulieres dans vne mesme Sphere. Or par ce mot (Elemens) nous deuons entendre les principes & commencemens de Geometrie, & non pas la consommation de ceste science, à l'accomplissement de laquelle y a beaucoup d'autres traictez que cestuy des Elemens. Pappus en faict vne recapitulation en la docte preface du 7. liure de ses collections Mathematiques. Mais les Elemens sont receus comme principes par tous les Geometres, & par iceux posez pour veritables sans aucune subiection de preuue, & tout ce qu'ils prononcent au dela d'iceux, doit estre estabili par bonnes demonstrations. Donc au iugement de Pappus, la Geometrie peut estre commodément diuisee en la partie Elementaire, & la partie Analytique. La partie Elementaire n'est rien autre chose que ce liure des Elemens ausquels on pourroit bien adiouster les Elemens Spheriques de Theodose, voires mesmes toute la Trigonometrie. La partie Analytique seroit celle-là mesme descripte par Pappus, de laquelle il faict trois Autheurs, Euclides, Appollonius, Pergeus, & Aristæus l'ancien, mais la pluspart de leurs œuures seruans à ceste Analytique ont esté perduës. De nostre temps François Vyette s'est efforcé de restituer ceste Analytique, par vne nouuelle sorte d'Algebre qui a apporté vne grande lumiere à ceux qui s'estudient à la composition des Problemes soit de Geometrie, soit d'Arithmetique. Le Geometre qui sera instruit en toutes ces deux parties, aura gaigné vn grand aduantage pour surmonter toutes les difficultez de toutes les autres parties de Mathematique.

QVI, ET QVELS ONT ESTE' LES premiers Geometres.

QVANT à l'origine de la Geometrie Proclus liure 2. chap. 3. la rapporte aux Egyptiens : à cause (comme il pense) qu'ils ont esté les premiers peuples qui en ont eu affaire pour mesurer leurs champs, lors que les bornes d'iceux estoient brouillees par les inondations du nil; tout ainsi que les Pheniciens ont inuenté l'Arithmetique pour la neceßité de leur traffic.

Mais il est bien difficile en vne chose si ancienne, de prononcer sans deuiner. De l'attribuer aux enfans d'Adam, pour gratifier l'Autheur de l'antiquité Iudaïque : nous n'en trouuerons que le nom de la science, sans aucun precepte d'icelle. De maniere qu'il seroit encores plus difficil de coniecturer quelle estoit ceste Geometrie des enfans d'Adam, & si elle ressembloit à la nostre. Quant à moy ie ne diray pas auec Proclus que les Egyptiens soient inuenteurs de la Geometrie, mais que nous n'auons point de memoire qu'aucun peuple se soit serui de Geometrie auparauant les Egyptiens. Quant à celle que nous auons, elle est entierement des Grecs, encores que Thales ait esté en Egypte pour apprendre leur Geometrie. Car il y a grande apparence que la Geometrie des Egyptiens estoit fort mechanique, & qu'elle ne consistoit qu'en la mesure de quelques superficies sans aucune contemplation ny demonstration, veu que le mesme Thales fut admiré d'iceux pour auoir mesuré la hauteur des Pyramides par l'ombre du Soleil, qui estoit peu de chose, si on considere les autres subtilitez que les Grecs ont depuis inuenté par le moyen de la Geometrie. En apres toute nostre Geometrie est contemplatiue, & demonstre par des raisons inuincibles. Thales sera donc le premier (selon Proclus) qui l'ayant appris des Egyptiens, la enseigné aux Grecs, inuentant plusieurs choses, & baillant les commencemens de plusieurs autres à la posterité. Apres cestuy-cy on faict mention d'vn Ameristus frere du Poëte Stesicorus, comme d'vn homme qui s'estoit addonné à la Geometrie, & Hyppias Eleus luy attribue beaucoup de gloire pour ceste science. Apres ceux-cy Pytagoras luy a baillé la forme de science contemplatiue, & la changee en art liberal, recherchant ses principes plus haut, & separant ses demonstrations du sens & de la matiere. Puis apres, Anaxagoras Clazomenien a inuenté beaucoup de choses. Platon faict mention d'vn Enopides de Chios apres Anaxagoras, comme d'vn sçauant Geometre. Hippocrates de Chios celuy qui a quarré le Croissant de Lune, succedant à ceux-cy, & Theodore Cyremien, se sont rendus fort celebres.

Hyppocrates le premier de tous escriuit des Elemens de Geometrie : Mais Platon succedant à tous ceux-cy, a merueilleusement augmenté, & la Geometrie, & toutes les autres parties de Mathematique, par la grande affection qu'il a porté à ces diuines sciences. Du mesme temps Leodamas Thasien, Architas Tarentin, & Theetetus Athenien ont adiousté beaucoup à ceste science. Neoclides a esté depuis Leodamas, & son disciple Leon, lequel a escrit des Elemens de Geometrie, auec plus de diligence que les precedens, non seulement à cause de la multitude de ceux qu'il a adiousté, mais aussi à cause qu'il a inuenté la determination, c'est à sçauoir, quand le probleme proposé, est de possible solution ou non. Eudoxus Gnidien quelque temps apres augmenta fort la Geometrie de ces Theoremes qui sont vniuersels : Il adiousta trois autres sortes de proportions, à trois qui estoient lors seulement cognues : Il augmenta aussi la doctrine des sections que Platon auoit inuentee. Depuis Amyclas d'Heraclee, Menechmus & son frere Dinostratus tous familiers de Platon ont grandement augmenté la Geometrie. Mais Theudius de Magnesie les a surpassé, & aux Mathematiques & aux autres parties de Philosophie. Cestuy-cy a escrit des Elemens, & a rendu beaucoup de choses particulieres plus vniuerselles. En ce mesme temps estoit Cyricinus d'Athenes fort versé en Geometrie. Tous ceux-cy estudioient à l'Academie de Platon, proposans des questions communes. Mais Hermotimus de Colophon a fort enrichi ce qu'il auoit receu d'Eudoxus & Theetetus : a inuenté plusieurs Elemens, & a escrit quelques lieux. Philippus Mandeus disciple de Platon proposoit des questions, & cherchoit principallement les problemes qui estoient propres à la Philosophie Platonique. C'est icy ou acheuent les histoires de la Geometrie.

Quant à Euclides, il n'est pas beaucoup depuis, il a ramassé tous les Elemens de ceux qui l'ont precedé, il a construit plusieurs propositions d'Eudoxus, limé plusieurs choses inuentees par Theetetus, & ce que ses predecesseurs auoient prouué legerement, Il a estably par des demonstrations qu'on ne sçauroit reprendre ny conuaincre. Sa methode est singuliere & digne d'admiration, si on considere l'ordre & le chois qu'il a faict des propositions distribuees dans ses Elemens. Car il n'a pas choisi toutes les plus belles : mais seulement celles qui conuenoient à l'ordre de ses Elemens. Il a vescu du temps de Ptolomee le premier, car on dict qu'estant vn iour interrogé par Ptolomee, s'il y auoit point vn chemin plus court à la Geometrie qu'iceluy de ses Elemens, il respondit qu'il n'y auoit point de chemin Royal pour la Geometrie. Il est donc depuis les familiers de Platon, mais deuant Eratosthenes, & Archimedes (car Archimedes faict mention d'Euclides dans ses œuures) il a esté Philosophe Platonique, c'est pourquoy il a dressé ses Elemens pour constituer les fondemens des cinq figures mondaines de Platon. Proclus s'arreste icy. Mais Theon merite encores lieu entre ceux qui ont escrit des Elemens, puis que nous n'auons point d'autres Elemens d'Euclides que les siens, si ce n'est le premier liure commenté par Proclus. Et à la verité on les pourroit à bon droict appeller les Elemens de Theon, puis qu'il leur a donné la derniere forme. Plusieurs sont en doute si ce sont point les vrays Elemens d'Euclide, & que Theon n'y ait rien changé, puis qu'il les a laissé soubs le nom d'Euclides, se fondans sur le commentaire de Proclus, dans lequel infailliblement sont les vrayes propositions d'Euclide, l'ordre desquels est le mesme de Theon, voire les mesmes principes (sinon quelques vns.) Toutesfois il y a plus d'apparence qu'ils soient de Theon. Car les commencemens estant les choses les plus faciles sont moins subiects à changement. En apres plusieurs demonstrations de ce premier liure que Proclus attribue à Euclide, sont du tout differents des demonstrations de Theon. Adioustons que tous les Euclides Grecs sont inscripts ἐκ τῶν θέωνος συνουσιῶν, C'est à dire de l'explication de Theon. Que s'il n'y auoit rien changé, il n'eust pas esté si presomptueux que de s'attribuer cest ouurage, que luy mesme appelle ses demonstrations, cest au premier liure du commentaire qu'il a faict sur l'Almageste de Ptolomee, ou il dict, δέδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει ἕκτου βιβλίου. C'est à dire nous auons demonstré en nos expositions sur les Elemens à la fin du sixiesme liure. Voila touchant l'origine de la Geometrie & de ses premiers Autheurs.

DES PRINCIPES DE GEOMETRIE.

Ecy est vniuersel à tous les principes des sciences qu'ils doiuent estre non seulement veritables, mais aussi euidemment veritables, & n'ayans besoin d'aucune preuue : autrement ils ne seroient point principes. Mais il faut penser que tous les principes aux demonstrations geometriques, ne sont point de ceste nature là. Car toute proposition, de puis qu'elle a esté prouuée veritable, sert de peincipe à la suiuante demonstration. Et ne sçauroit-on nier que telle sorte de principe ne soit autant veritable, & aussi euidemment que tout autre : mais ceste verité n'est point immediate, ains elle depend d'vne autre precedente. Que si on regarde le nom de principe, il ne luy conuient point proprement, que si on prend garde à la chose, la verité en est aussi euidente que des principes, & par consequent sont les demonstrations autant veritables. Nous parlerons donc de la premiere sorte de principe, puis apres de ceste autre. Les principes donc purement principes sont de trois sortes parmy les Geometres, sçauoir deffinitions, demandes, & communes sentences, par les deffinitions nous entendons les explications des termes, cmome par ce mot quarré nous entendons vne figure cõprise de quatre costez egaux & de quatre angles droits, triangle equilateral vne figure comprise de trois costez egaux & ainsi des autres. Que si on me monstre vne figure comprise de trois costez egaux, il faudra conclurre que c'est vn triangle equilateral. Il est euident par là que les deffinitions n'ont point d'vsage, si elles ne sont conuerties auec les choses deffinies. Car ie ne sçaurois cognoistre vn quarré, que ie ne sçache premierement que les quatre costez sont egaux, & les quatre angles droicts. Il faudra donc que la deffinition comprenne toute lessence, & la nature de la chose deffinie, autrement elle ne pourra estre conuertie. Ce n'est pas que ie vueille dire qu'il faut que la deffinition cõtienne expressémét toutes les proprietez essentielles de la chose deffinie, mais seulement qu'elle y soit obligée. Comme par exemple en deffinissant les lignes parallelles, il suffit de dire que ce sont celles qui estant continuées infiniement ne se rencontrent iamais, sans y adiouster qu'estans transuersées d'vne ligne droicte les angles opposez alternatiuement soient egaux, encore que ce soit vne proprieté essentielle des lignes parallelles, mais qui est tirée par consequence necessaire de la deffinition. Que si en la deffinition du quarré, l'egalité des quatre costez obligeoit l'egalité des quatre angles, ainsi que l'egalité des trois costez, oblige l'egalité des trois angles, au triangle equilateral, il suffiroit de deffinir le quarré estre vne figure comprise de quatre costez egaux. Ceux qui entendront bien ces obligations deffiniront tousiours brefuement & parfaictement. Cecy n'est autre chose que la difference d'essence, par laquelle les Dialecticiens veulent que la chose deffinie soit differente de toute autre.

Quant aux demandes & communes sentences, ce sont choses si euidemment veritables qu'elles peuuent estre aisément accordées, & nous demandons qu'on les tienne pour veritables. Quant aux deffinitions nous ne demandons point qu'on nous les accorde, mais plustost nous nous expliquons: sçauoir que par ce mot triangle equilateral nous entendons vne figure qui a les trois costez egaux. Il faut bien prendre garde, que comme les conuerses des deffinitions sont veritables, nous venions a penser qu'aussi les conuerses des communes sentences soient veritables, qui est vn insigne erreur d'Oronce, & de Pelletier. Car Oronce a conuerty presque toutes les communes sentences aux demonstrations des six premiers liures des Elemens: Et Pelletier prononce que toutes conuerses, & des principes, & des propositions sont veritables. C'est en la Scholie sur la 6. p. 1. Où il parle ainsi, *Animaduertendum conuersas propositionum in vniuersum esse veras, sicut & principiorum*, &c. Ce qui est faux, car si les angles droicts sont egaux entre eux, il ne s'ensuit pas que les angles egaux entre eux soient droicts. Si les choses qui commencent sont egalles, il ne s'ensuit pas que les choses egalles puissent conuenir, comme nous enseignerons sur ceste commune sentence, il y a donc plusieurs principes desquels les conuerses sont fausses. Quant aux propositions, cela est bien veritable que deux triangles qui ont les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, ont les trois angles egaux aux trois angles chacun au sien: mais que les triangles qui ont les trois angles egaux aux trois angles chacun au sien, ayent aussi les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, cela est faux. Il a bien commis d'autres fautes, comme à la fin de la 8. p. 1. où il dit, *Quis enim negauerit superficies esse equales quarum latera & quantitate & numero sunt aqualia.* Il s'ensuiuroit de là que les quatre costez d'vn Rhombe estans egaux aux quatres costez d'vn quarré, que le Rhombe seroit egal au quarré, ce qui est absurde. Mais ce n'est pas nostre dessein de ramasser les fautes d'autruy. Nous tiendrons donc que les conuerses des deffinitions sont veritables, & non pas celles des communes sentences. Ramus pense que la difference que l'on met entre les principes est ridiculle, mais elle est vtile, quant ce ne seroit que pour la raison des conuersions.

DES PROPOSITIONS, THEOREMES, *Problemes, lemmes, Corollaires.*

L'AVTRE sorte de principe de Geometrie, est des propositions. Or proposition, comme dit Proclus est vne enonciation douteuse qui peut estre demonstrée. En la proposition y a tousiours trois parties: Le donné, le requis, & la demonstration: ou bien l'hypothese, la conclusion, & la demonstration: & quelque fois la construction. Pappus en la preface du troisiesme liure, appellé Probleme, toute proposition en laquelle il faut faire ou construire quelque chose: & Theoreme toute proposition en laquelle de quelques hypotheses on tire certaines consequences. Mais il adiouste apres, que la pluspart des anciens appelloient toutes propositions problemes, ou toutes Theoremes. Et certes Archimedes & Theodose ny ont fait aucune distinction. Theodose appelle Theoreme, *trouuer le centre d'vn sphere donneé.* Pareillement Vetello ny fait aucune distinction. Proclus dit que Menecmus appelloit probleme toute sorte de proposition. Voires mesme Euclides appelle Theoremes les 18. 19. & 20. prop. de l'optique, lesquelles selon ceste difference deuroient estre problemes. Aussi la difference que l'on assigne entre Theoreme & probleme, est de si peu de consideration, que tout Theoreme peut estre aisément changé en Probleme, & tout Probleme en Theoreme, par exemple ce Theoreme, *Les triangles Isosceles font les angles sur la base egaux*, On reduira en probleme, en laissant l'hypothese pour la construction, & en prenant la conclusion en ceste sorte, *Faire vn triangle qui ait les angles sur la base egaux.* Pareillement tout probleme sera aussi aisément changé en Theoreme, si l'on prend la construction pour hypothese: comme en ce probleme, *Coupper vne ligne en deux egallement*, on en pourra faire vn Theoreme en ceste façon, *si sur vne ligne donnée on descrit vn triangle equilateral, & de l'angle du sommet, on meine vne ligne droicte qui couppe l'angle en deux egallement, icelle diuisera aussi la base en deux egallement.* Et c'est en ceste façon que Archimedes au 2. liure de la sphere, & du Cylindre, dit auoir changé les problemes en Theoremes. De toutes ces choses il est euident que les anciens Geometres n'ont pas faict grand cas de ceste distinction entre Theoreme & probleme, aussi la science ne receura aucun detrimét, encores que toute enonciation Geometrique soit appellée proposition: voire mesme les lemmes & les corollaires.

Or nous appellons lemme ou *lemma*, quelque enonciation, laquelle estant necessaire à nostre demonstration, nous la prenons & prouuons auparauant que demonstrer, de peur de grossir nostre demonstration, & en ceste façon toute proposition qui sert à la preuue de sa suyuante, peut estre appellée *lemma*. Mais Corollaire est ce qui resulte de quelque demonstration, en laquelle on a plus prouué, que ce qui estoit proposé, comme si c'estoit le pardessus. Que si ce pardessus est aussi adiousté en la proposition, le corollaire deuiendra proposition. Comme si l'on propose que *En tout triangle, l'angle exterieur est egal aux deux opposez interieurs.* De la preuue de ceste prop. resulte *que les trois angles interieurs sont* *egaux à deux droicts*. Et c'est enonciation sera corollaire. Que si elle est adioustée dans la proposition mesme, elle prendra la nature de proposition. On peut trouuer plusieurs autres exemples semblables, par lesquels on cognoistra que ces distinctions ne sont pas de grande consequence, & qu'il n'y aura pas beaucoup de perte, quand on appellera toute nonciation Geometrique, proposition. Il reste icy vne question, sçauoir si les constructions que l'on fait aux Theoremes doiuent estre demonstrées veritables auparauant que s'en seruir, & pratiquees exactement, tout ainsi qu'en vn Probleme, la fin duquel est la construction: La pluspart ont pensé qu'ouy, principallement voyant Euclyde l'obseruer si exactement aux premiers liures des Elemens. Car si on demande à Proclus, pourquoy la 24. p. 1. ne suit point la 4. p. 1. auec laquelle elle a tant d'affinité, il respondra qu'en icelle il faut construire vn angle egal à vn angle, ce qu'il ne pouuoit enseigner auparauant la 23. p. 1. Mais pour monstrer que cela n'est point necessaire (d'autant que la fin des Theoremes n'est point de construire, mais de mediter seulement sur la verité des maximes qu'elle enseigne) ny Euclide mesme ne l'a pas tousiours obserué, ny aucun ancien Geometre. Car au dixiesme liure des Elemens en la construction de la 43. proposition, Il demande que le binome soit diuisé en ses noms, sans auoir enseigné comment vn binome estant donné, il le faut diuiser en ses noms; non plus qu'aux cinq autres prop. suiuantes ou il faut diuiser cinq autres sortes de lignes irrationelles. Pareillement en la 79. p. 10. a vn residu il adiouste sa conuenable, sans auoir enseigné comment telle conuenable y doit estre adioustee. Il en faict tout autant aux cinq autres prop. suiuantes. Mais que dirons nous d'Archinedes en la premiere prop. de la dimension du cercle la ou il prend vn triangle rectangle ayant l'vn des costez egal à la circonference d'vn cercle. Et encores que cela ne se puisse pratiquer, la demonstration ne laisse pas d'estre veritable. Et en la premiere prop. du second liure de la sphere & du Cylindre, il demande que l'on construise deux moyennes continuellement proportionelles entre deux lignes donnees. Et en vn mot Pappus, & Appollonius prennent par Hypothese la plusspart de leurs constructions, voires mesme celles des Problemes, lesquels ils ne construisent sinon apres les demonstrations. Il est donc euident que la demonstration de telles constructions n'est point necessaire, sinon lors que ce qui a esté demonstré en ces Theoremes doit estre reduict en pratique.

ELEMENT PREMIER

DEFFINITIONS.

AMY LECTEVR, Quand tu trouueras ce mot *Ligne* posé simplement, tu entendras ligne droicte: Et par ce mot *Angle* aussi posé sans explication des costez, tu entendras angle rectiligne: Et ainsi des figures, ausquelles cela peut estre aisément entendu.

1. Le point est ce qui n'a aucune partie.

Ramus reprend ceste deffinition, & la suyuante pour estre negatiues, contre les preceptes de Dialectique, & propose vne question en ses escolles de Physique & Metaphysique, si le point est quantité: veu que Pytagoras, Democritus, Anaxagoras, Platon, Xenocrate & autres, ont soustenu qu'il y auoit vne quantité indiuisible. Et pour autant que Platon deffinit le point estre vne ligne indiuisible, il semble que ces grands Philosophes ayent entendu que le point fust ceste quantité indiuisible, & la plus petite des quantitez: mais cecy doit estre entierement reiecté de la Geometrie. Pareillemét aussi ceste opinion de quelques Phylosophes, que le point soit à la ligne, ce que l'*vnité* est au nõbre: s'appuyans sur cest deffinition des Pytagoriciens, que le point n'est autre chose que l'vnité ayant position. Car si le point estoit la plus petite des quantitez, il s'ensuyuroit que toutes les grandeurs seroient commensurables, ayans le point pour cõmune mesure: ainsi que tous les nombres sont commensurables, ayans l'vnité pour commune mesure. Et cependant au 10. liure des Elemens ceste Assymetrie ou incommensurance entre certaines grandeurs, est fort bien demonstrée. Si bien que la plus petite quantité ne se peut donner: & le point n'estant ny la plus petite quantité ny aucune quantité diuisible, ne sera point du tout quantité. Quant à ce que le point soit à la ligne, ce que l'vnité est au nombre, Stenin l'a confuté en son Arithmetique.

2. La ligne est vne longueur sans largeur.

3. Les extremitez des lignes, ce sont points.

Cecy est assez intelligible si on escoute Hero le mechanique ou ingenieur, qui deffinit la ligne estre le coulement du point: d'autant que la ligne commençant au point, elle acheuera au point. Et ce coulement ou mouuement de point n'est pas seulement vsurpé par Hero, mais aussi par Archimedes en descriuant sa spiralle: par Pappus en descriuant sa quadrataire: voires mesme la circonferance d'vn cercle peut estre descrite par le mouuement ou coulement de l'vne des extremitez du demy diametre, toutes lesquelles lignes commencent au point, & acheuent au point.

4. La ligne droicte est celle qui est egallement comprise entre ses points.

Archimedes deffinit la ligne droicte estre celle qui est la plus courte entre ses extremitez. Ces choses sont faciles.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur tant seulement.

6. Les extremitez de la superficie ce sont lignes.

Il faut icy entendre que les trois costez d'vn triangle, ne sont pas le triangle, mais les bornes d'iceluy : & y a difference entre le triangle & ses costez, comme entre les bornes & la chose bornée, Donc superficie sera ce qui est enfermé dans les bornes. Faut icy noter que ceux qui expliquent la sphere & la Geographie, errent grandement, quand ils disent des cercles pour des circonferances, & en la Trigonometrie ceux qui pensent mesurer le triangle, en mesurant les costez d'iceluy.

8. Angle plan, est la rencontre de deux lignes enclinées sur vn mesme plan.

9. Si les lignes comprenant l'angle sont droictes, l'angle sera rectiligne.

L'angle consiste en l'inclination des lignes, moyennant quelles se rencontrent : que si elles se rencontroient directement, elles n'auroient aucune inclination, & par consequent ne constitueroient aucun angle. Ceux qui pensent que l'angle ne soit point quantité, à cause qu'il n'est point expressément compris en la diuision de quantité selon les Peripateticiens, se mocquent bien de tous les Geometres qui s'en seruent comme d'vne quantité : aussi ne meritent ils pas qu'on leur responde.

10. Si vne ligne droicte tombant sur vne autre ligne droicte, faict les angles de part & d'autre egaux, les angles sont droicts, & la ligne est perpendiculaire à celle là, sur laquelle elle tombe.

11. Angle obtus, est celuy qui est plus grād qu'vn droict.

12. Angle aigu, est celuy qui est plus petit qu'vn droict.

13. Terme est la borne de quelque chose.

14. Figure est ce qui est compris d'vn ou de plusieurs termes.

Il faut faire difference entre terme, & borne ou extremité ὅρος & πέρας, en sorte que terme ou ὅρος enuironne, & πέρας extremité n'enuironne pas. Ainsi les extremitez des lignes sont appellees πέρατα, non pas ὅροι, ny ayant que les figures ou planes ou solides qui soient enuironnees de termes: d'vn, comme le cercle: de plusieurs, comme le triangle le quarré.

15. Cercle est vne figure plane, terminee par vne ligne courbe appellee circonferance, ayant vn point au milieu, duquel toutes les lignes droites menees vers la circonferance sont egalles.

16. Le point du milieu du cercle, est appellee centre.

17. Diametre du cercle, est la ligne droitte, laquelle passant par le centre du cercle, le diuise en deux egallement.

18. Demi cercle est vne figure comprise du diametre & de partie de la circonferance.

Toutes ces definitions sont aisees, par icelles sont distinguez le cercle, sa circonferance ou borne, son centre, son diametre, toutes choses cognues voires aux plus ignorans.

19. Section de cercle, est vne figure comprise d'vne ligne droicte & de partie de la circonferance.

Il semble que ceste deffinition estoit inutille, aussi elle est repetee au troisiesme liure.

20. Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droictes.

21. Figure de trois costez, est celle qui est comprise de trois lignes droictes.

22. Figure de quatre costez, est celle qui est comprise & quatre lignes droites.

23. Figures de plusieurs costez, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droictes.

Les Geometres deffinissent les figures tantost par le nombre des costez, tantost par le nombre des angles interieurs, ils ne considerent point les exterieurs; à cause peut estre qu'ils pensent qu'il y a tousiours autant de costez que d'angles. Mais Proclus semble n'en estre point d'aduis, voulant que la figure de trois costez soit appellee trilateralle plustost que triangle : Et celle de trois angles, triangle plustost que trilateralle. Et la dessus il faict mention de quelques figures ayant trois angles interieurs & quatre costez que les anciens appelloient τρίγωνα κοιλογώνια triangles ayans vn angle caue, mais les nouueaux mettent ceste figure au rang des Trapezes.

24. Triangle equilateral, est celuy qui a les trois costez egaux.

25. Triangle Isoscele, est celuy qui a deux costez egaux seulement.

26. Scalene, est celuy qui a les trois costez inegaux.

27. Triangle rectangle, est celuy qui a vn angle droit.

28. Ambigone, qui a vn angle obtus.

29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

Il deffinit icy six sortes de triangles, trois sortes pour les costez, & trois sortes pour les angles. Le reste est facil.

30. Quarré, est vne figure qui a les quatre costez egaux & les quatre angles droicts.

31. Quarré long, qui a les quatre angles droits, mais non pas tous les costez egaux.

32. Rhombe, qui a les quatre costez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.

33. Rhomboide, qui a les angles & les costez opposez egaux tant seulement.

Il deffinit icy quatre sortes de parallelogrames. Or nous appellons parallellograme toute figure enuironnee de quatre lignes droites parallelles, & laquelle est tousiours l'vne de ces quatre: quarre, quarre long, Rhombre, Rhomboide. Elles sont differentes l'vne de l'autre par les costez, ou par les angles. Le reste est facil.

34. Toute autre figure de quatre costez est appellée trapeze.

35. Lignes droites paralleles, sont celles qui estant sur vn mesme plan prolongees de part & d'autre ne se rencontrent iamais.

DEMANDES.

1. D'vn point donné à vn autre point mener vne ligne droicte.
2. Continuer infiniement vne ligne droicte donnee & terminee.
3. Descrire vn cercle de quelque centre & interual que ce soit.

Ce sont icy les principes seruans aux constructions des problemes Geometriques. En ces Elemens Euclides ne se sert que de deux sortes de lignes simples, de la droicte, & de la circulaire : il demande donc qu'il luy soit permis de descrire ou de s'imaginer des lignes droictes de telles longueur qu'il voudra. Pareillement des cercles de tel diametre qu'il voudra, sans qu'il soit contrainct de demonstrer que cela est possible. Que s'il estoit necessaire de construire des angles, ou des lignes selon quelques raisons, ou quelques autres constructions, comme figures semblables, ou egalles, ou proportionelles à quelques autres, il demonstrera la possibilité de telles constructions auparauant que de s'en seruir aux problemes. Ce n'est pas que telles demonstrations de construction soiét necessaires aux Theoremes, comme nous auons enseigné cy deuant, mais tant seulement aux problemes. Il demande donc qu'on luy accorde la description de la ligne droicte, & de la ligne circulaire, comme choses qui sont fort faciles.

COMMVNES SENTENCES.

1. Les choses egalles à vne, sont egalles entre elles.

Ramus pense que ceste maxime est laxiome des axiomes, & qu'elle doit estre la premiere, & en l'ordre & en l'vsage : mais il semble bien plustost que celle qui enseigne l'egalité ou inegalité par la superposition & conuenance, deuoit estre la premiere en l'ordre comme elle est en l'vsage, que neantmoins Euclides a mis la huictiesme en l'ordre, *les choses qui conuiennent entre elles, sont egalles entre elles.* Car la premiere & plus facile cognoissance que nous ayans de l'egalité ou inegalité des choses, nous vient en posant les grandeurs les vnes sur les autres. Comme par exemple, ie sçay qu'il y a deux trois ou quatre aulnes en vn morceau de Satin, lors que l'on peut poser deux, trois, ou quatre fois l'aulne de bois sur la longueur d'iceluy morceau : Et ceste superposition ou conuenance de l'aulne de bois & morceau de satin, me monstre l'egalité en longueur. Mais pourautant que toutes grandeurs ne peuuent pas estre posées l'vne sur l'autre, pour en recognoistre l'egalité ou inegalité : on a recours à vne troisiesme mesure mobile, laquelle puisse estre posée tantost sur l'vne, tantost sur l'autre des grandeurs pour en recognoistre l'egalité selon ceste maxime.

En cest endroict Proclus se mocque d'Appollonius, pour auoir voulu demonstrer ce Principe, veu que tous les principes de leur nature sont indemonstrables. En apres que ce qu'il prend pour demonstrer est plus obscur que ce qu'il faut demonstrer & que ceste maxime tombe plus aisément soubs nostre sens que la demonstration d'icelle, elle est bien au long dans Proclus.

2. Si a choses egalles, on adiouste choses egalles, les touts sont egaux.

3. Si de choses egalles, on oste choses egalles, les restes sont egaux.

4. Si a choses inegalles, on adiouste choses egalles, les touts sont inegaux.

5. Si de choses inegalles, on oste choses egalles, les restes sont inegaux.

6. Les choses doubles d'vne autre, sõt egalles entre elles.

7. Les moitiez d'vne mesme chose, ou de choses egalles, sont egalles entre elles.

Ces maximes sont faciles. Elles ont vn grand vsage aux equations algebraïques pour retrancher les plus & les moins. De ces principes, Pappus en fait encores d'autres, comme resultans d'iceux, il semble toutesfois que le moins de principes & de propositions que l'on peut poser, que c'est le meilleur, de peur de charger la science de trop de preceptes. Ainsi nous les reiectons aisément, puis qu'ils ne nous seruent aux demonstrations suyuantes. Car qui voudroit accumuler tous les principes veritables, & les belles propositions de Geometrie, ce seroit rendre le volume des Elemens excessif, & confondre ceste excellente methode qui est en iceux.

8. Les choses qui conuiennent entre elles, sont egalles entre elles.

Conuenir c'est auoir les extremitez sur les extremitez. Ie m'estonne fort que Proclus n'ait expliqué ce principe, ny pas vn autre des Scholiastes, & principallement ceux qui pensent que tous les principes estans conuertis, sont aussi veritables.

Car Proclus à conuerti ce principe en la 4. p. 1. lors qu'il dict διότι γὰρ ἴσαι εἰσιν αἱ δύο πλευραὶ ταῖς δυσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα: ἐφαρμόσουσι ἀλλήλαις. C'est à dire que lors que deux costez sont egaux à deux costez chacun au sien, ils conuiennent entr'eux. Ce qui peut estre faux, estant la proposition entenduë vniuersellement comme elle est proposee. Car la conuertir vniuersellement, c'est se mocquer, puis que l'on peut faire vn triangle egal à vn quarré, lesquels neantmoins ne conuiendront iamais. Que si quelqu'vn vouloit dire comme le sieur de Candalles ou apres luy Clauius, que la maxime doit estre entenduë des longitudes seullement, ou des latitudes seullement, & non des deux ensemble, c'est à dire des lignes & non des superficies : encores sa conuerse seroit-elle fausse. Car s'il se trouuoit vne ligne droicte egalle à vne circonferance, ou à vne ligne mixte telle que la trouue Archimedes περὶ ἑλικῶν, elles ne conuiendroient pas pourtant. Que dirons-nous des angles, puis que à tout rectiligne, il se baille vn curuiligne egal, comme enseigne Proclus: lesquels pourtant ne peuuent iamais conuenir. Et ce pendant le mesme Proclus en la 4. p. 1. conuertit ceste maxime pour les angles egaux.

Quant à la maxime, la directe est veritable vniuersellement, sçauoir, *Que toutes choses qui conuiennent sont egalles*, non pas la conuerse. Or de cest axiome nous pouuons conuertir & prendre pour principe: *Que les lignes droictes egalles conuiennent*. Car si l'vne des extremitez estant sur l'extremité, l'autre extremité ne tomboit pas sur l'autre, les lignes droictes ne pourroient estre egalles: ou bien si les extremitez estans sur les extremitez, les lignes droictes ne conuenoient, elles enfermeroient vn espace, contre la derniere commune sentence. Pareillement on conuertira, *que les angles rectilignes egaux conuiennent*. Car si le sommet estant posé sur le sommet, & l'vne des lignes droictes sur l'vne des lignes droictes, l'autre ne tomboit pas sur l'autre : elle tomberoit dedans ou dehors l'angle, & les angles ne seroient pas egaux. Les voila donc propositions demonstrees, si on ne les veut receuoir pour principes indemonstrables.

On peut encores tirer quelques autres conuerses veritables de ce principe, comme les parties egalles d'vne mesme ligne simple conuiennent, comme les parties egalles d'vne mesme circonferance de cercle, ou d'vne ligne spiralle descrite à l'entour d'vn cilindre: Mais cela ne sert à nos Elemens.

9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droicts sont egaux entr'eux.

Les conuerses de ces deux principes sont fausses. Car ce qui est plus grand que la partie n'est pas son tout, si ce n'est que l'on rende la partie subiecte à plusieurs touts. Pareillement tous les angles egaux ne sont pas droicts, voires mesme Pappus enseigne dedans Proclus, que tout angle egal à vn angle droict, n'est pas aussi droict: car il monstre que à vn angle rectiligne droict, on peut faire vn curuiligne egal, sans que pour cela il soit droit. Mais nous conuertirons ce principe en ceste façon, *Que tout angle rectiligne egal en vn angle droict,* *est aussi droict*. Et sans ceste conuerse, il est necessaire que plusieurs demonstrations en la Geometrie soient fausses. Que si on ne la veut receuoir pour principe indemonstrable, on en trouuera la demonstration dans Proclus.

11. Deux lignes droictes n'enferment pas vn espace.

12. Si vne ligne droicte tombant sur deux autres lignes droictes fait les angles interieurs d'vn mesme costé plus petits que deux droicts, icelles estant continuees à l'infini se rencontreront du costé ou les angles sont plus petits que deux droicts.

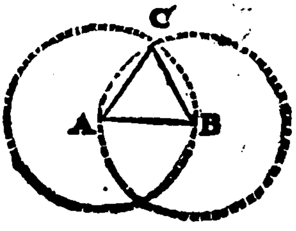
Ce principe demande vne explication plus grande que ne peuuent permettre ces annotations : comme aussi la deffinition des lignes paralles, & à ceste occasion, ie les reserueray à vn autre lieu plus commode.

ELEMENT PREMIER.

PROP. I.

Sur vne ligne droite donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

Soit la ligne donnée AB sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.



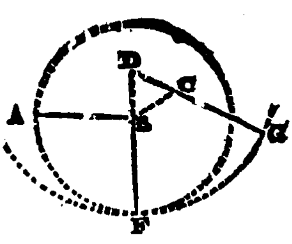
Sur les extremitez d'icelle A & B soient descrits deux cercles de l'interual de la ligne donnée, & se coupans au point C: duquel point soient menees les deux lignes droictes CA & CB. Ie dis que le triangle ABC est equilateral.

Car le costé AC est egal au costé AB par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le costé BA est egal au costé BC. Donc par la 1. com. sent. les costez CA & CB seront egaux, estant chacun egal à AB & les choses egalles à vne sont egalles entre elles, partant le triangle ABC est equilateral.

PROP. II.

D'vn point donné mener vne ligne droite egalle à vne ligne droite donnée.

Soit le point donné C, duquel on doit mener vne ligne droite egalle à la donnée AB.

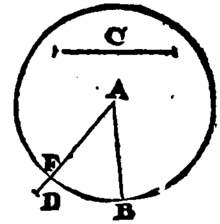


Soit menée vne ligne de B à C, & sur BC soit basti le triangle equilateral BCD par la 1. p. 1. puis du centre B & interual BA soit descrit vn cercle, & soit continuée la ligne BD iusques à la circonferance F semblablement du centre D & interual DF soit descrit vn cercle, à la circonference duquel soit continuée la ligne DC iusques en G. Ie dis que CG est la ligne demandée egalle à AB.

Car DG & DF sont egalles, d'autant qu'elles procedent de mesme centre vers vne mesme circonferance, desquelles si on oste DB & DC qui soient egalles, estant DBC triangle equilateral, les restes BF & CG seront egalles par la 3. com. sent. Mais BA est egalle à BF, parce qu'elle procede de mesme centre vers mesme circonferance. Donc CG sera egalle à BA, parce que les choses egalles à vne sont egalles entre elles.

PROP. III.

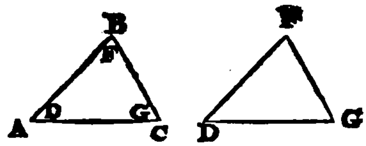
Deux lignes droites inegales estants données, oster de la plus grande, vne partie egalle à la plus petite.



Soient les deux lignes inegalles AB & C, desquelles C est la plus grande, & d'icelle il faut oster vne partie egalle à AB.
Soit mené du point A la ligne AD egalle à C par la 2. p. 1. & du centre A & interual AB soit descrit vn cercle coupant DA au point F. il est euident que AF, & AB seront egalles par la definition du cercle: dont on a ce qu'on auoit demandé.

PROP. IIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux chacun au sien, & l'angle d'iceux egal à l'angle: la base sera egalle à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien, & le triangle egal au triangle.



Soient les deux triangles ABC & DFG, desquels le costé AB soit egal au costé DF, & BC à FG, & l'angle B egal à l'angle F: Ie dis que la base AC sera egalle à la base DG, & l'angle A egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle G, & le triangle au triangle.

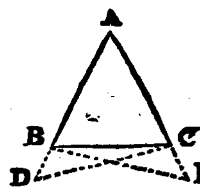
Qu'il ne soit ainsi. Si le point F est posé sur le point B, & que FD tombe sur BA, aussi FG tombera sur BC, autrement l'angle B ne seroit pas egal a l'angle F. Et d'autant que les costez AB & BC sont egaux aux costez DF & FG chacun au sien, ils conuiendront, c'est à dire que les extremitez A & C, tomberont sur les extremitez D & G par la 8. commune sent. Ainsi les deux bases AC & DG conuiendront, & seront egalles, par la mesme 8. com. sent. Et le triangle conuiendra auec le triangle, & l'angle A conuiendra auec l'angle D, & l'angle C auec l'angle G, Partant egaux. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Quelques vns, comme le sieur de Candalles, Pelletier, & autres ont pensé que ceste demonstration d'Euclide estoit mecanique, estant demonstré par la superposition des costez, mais ils se trompent s'ils pensent que toute superposition soit mecanique. Quant les geometres ne veulent recevoir aucune demonstration mecanique, c'est afin quelles ne soient point assuiecties au sens. Or tout ce qui est prouué egal à vn autre, par le compas, ou quelque autre machine, l'œil en est le iuge, Pareillement ce qui est prouué egal à vn autre en les posans l'vn sur l'autre, l'œil en est aussi le iuge, & ceste preuue est mecanique, & a bon droit reiectée par les Geometres. Mais en ceste Demonstration, il n'y a rien de semblable, & l'œil ne iuge aucunement de l'egalité qui y est prouuée. Car cest vne necessité geometrique que les choses egalles conuiennent, & que celles qui conuiennent soient egalles. Que si ceste conuanance n'estoit autrement prouuée que par la veuë, la demonstration seroit à bon droit reiettée, mais elle est forcée par les principes de la science.

PROP. V.

Les triangles Isosceles, ont les angles sur la base egaux, & les costez egaux estans continuez, les angles exterieurs soubs la base, sont egaux.



Soit le triangle Isoscele ABC. Ie dis que les angles ABC, & ACB, sur la base BC, sont egaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongés AB & AC, costez egaux iusques en D & F: & soit faict AD egalle à AF par la 3.p.1. & soiét menées les lignes BF & CD, les deux triangles ADC, & AFB, ayans l'angle A commun, ont les deux costez AD & AC egaux aux deux costez AF & AB, chascun au sien & par la 4.p.1. la base BF sera egalle à la base CD, & l'ágle ABF esgal à l'angle ACD. Item les triangles DCB, & FBC, ayant l'angle D egal à l'angle F, & les deux costez DB, & DC, egaux aux deux costez CF & FB. (car BF a esté prouué tantost egal à DC, & AD & AF estant egaux, & AB, & AC aussi egaux, les restes BD, & CF seront aussi egaux) par la 4.p.1. la base sera egalle à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chascun au sien: sçauoir l'angle BCD, sera egal à l'angle CBF. Et qui des angles egaux ABF & ACD, oste les angles egaux CBF, & BCD, les demeurans ABC, & ACD, seront egaux.

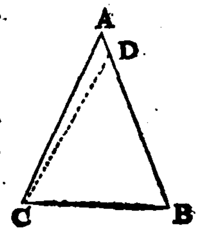
Pour la seconde partie. Que les angles exterieurs soubs la base sont egaux sçauoir DBC à BCF, elle a esté suffisamment demonstrée, lors qu'on a prouué que les triangles BDC, & CFB, auoient leurs angles egaux chascun au sien.

SOMMAIRE.

Les angles ABF, & ACD sont egaux.
Mais le retranché CBF est egal au retranché BCD.
Partant le reste ABC est egal au reste ACB.

PROP. VI.

Les triangles qui ont les deux angles ſur la baſe egaux, ont les deux autres coſtez egaux.

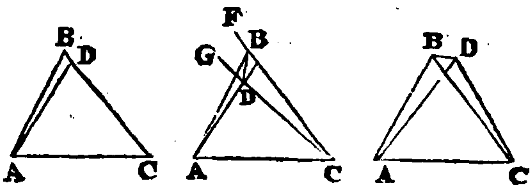


Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ACB, & ABC ſur la baſe BC ſont egaux, Ie dis que les deux autres coſtez A C, & AB ſont auſſi egaux.

Autrement ſoit AB plus grand que A C, s'il eſt poſſible: on en pourra retrancher vne partie egalle à A C, par la 3. p. 1. ſoit icelle BD egalle à AC, & ſoit menée la ligne DC: ainſi les deux triangles DBC, & ACB, ont les deux coſtez BD, & BC egaux aux deux coſtez AC, & CB, & l'angle B egal à l'angle ACB, & par la 4. p. 1. ils ſeront egaux, ce qui eſt impoſſible: car l'vn eſt partie de l'autre: donc les coſtez AC & AB n'eſtoient pas inegaux.

PROP. VII.

Si deux lignes droites menées des extremitez d'vne autre ligne droite ſe rencontrent en vn poinct, & des meſmes extremitez on en meine deux autres egalles aux deux premieres, elles ſe rencontreront au meſme poinct: pourueu que chaſcune ſoit du coſté de ſon egalle.



Soient les deux lignes droites menées AB, & CB, menées des extremitez A & C, ſe rencontrans au point B. Ie dis que ſi des meſmes poincts A & C on en meine deux autres, egalles aux deux premieres, chaſcune d'vn coſté de ſon egalle, qu'elles ſe rencontreront au meſme poinct D, comme les premieres.

Autrement ſi quelqu'vn le nioit, il eſt euident que ſi les dernieres lignes menées egalles aux deux premieres AB, & CB, ne ſe rencontrent au poinct B, comme les deux premieres, qu'elles ſe rencontreront ou en vn poinct dans le triangle ABC, ou en vn point hors iceluy, ou en vn poinct ſur la ligne AB ou ſur la ligne CB,

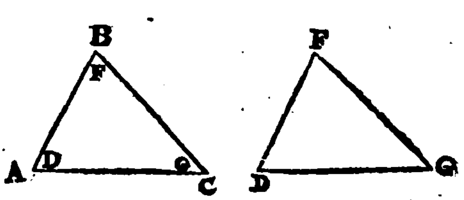
Premierement iceluy poinct de rencontre ne peut eſtre ſur la ligne CB, car s'il eſt poſſible ſoit au poinct D. Il faudroit que les deux lignes AD, & CD fuſſent egalles aux deux AB, & CB: ſçauoir CD à CB, la partie au tout: ce qui eſt abſurde, partant la rencontre ne ſe fera point ſur CB, ny ſur AB à cauſe de la meſme abſurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre dans le triangle ABC comme au point D: & apres auoir prolõgé CD iuſques en G, & CB iuſques en F, ſoit menée BD. Puis que les deux lignes AB, & AD doiuent eſtre egalles, le triangle ABD ſera Iſoſcele, & par la 5. p. 1. les deux angles ABD & ADB ſur la baſe BD ſeront egaux. Pour la meſme raiſon le triangle CDB doit eſtre Iſoſcele, & les angles ſous la baſe DB exterieurement, ſçauoir FBD & GDB ſeront egaux par la 5. p. 1. ce qui eſt euidemment faux, car tantoſt l'angle ABD, qui n'eſt que partie de l'angle FBD eſtoit egal à l'angle ADB, qui eſt encores plus grande que l'angle GDB. Ainſi il eſt euident que le point de rencontre ne ſe pouuoit faire dans le triangle ABC, d'autant que quelque poinct qu'on puiſſe prendre dans iceluy, il s'enſuyra meſme abſurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre hors iceluy triangle, comme au point D s'il eſt poſſible apres auoir mené la ligne BD, il s'enſuiura que les deux triangles BAD & BCD ſeront Iſoſceles, & qu'ils feront les angles ſur la baſe BD egaux: ce qui eſt auſſi faux comme cy deſſus, d'autant que la partie ſeroit plus grande que le tout, comme il ſe voit euidemment. Le poinct de rencontre ne ſe fera pas donc hors le triangle, ny dedans iceluy, ny ſur les lignes AB & CB: Il faut donc que ce ſoit au point B.

PROP. VIII.

Si deux triãgles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chaſcun au ſien, & la baſe egalle à la baſe, ils auront auſſi l'angle egal, compris d'iceux coſtez egaux.



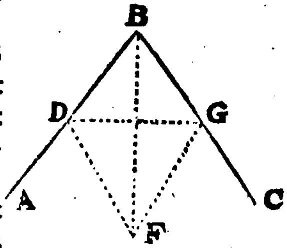
Soient deux triangles ABC & DFG deſquels le coſté AB eſt egal DE, BC à FG, & la baſe AC à la baſe DG; Ie dis que les angles B & F ſont egaux.

Car puis que la baſe AC eſt egalle à la baſe DG, eſtant poſées l'vne ſur l'autre, elles conuiendront tombant le poinct D ſur le poinct A, & G ſur C: & par la 7. p 1. les deux lignes DF & FG, qui ſont egalles à AB & BC, ſe rencontreront au poinct B, & conuiendront auec les lignes AB & BC: partant les angles B & F conuiendront & ſeront egaux par la 8. com. ſent.

PROP. IX.

Couper en deux egallement vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné ABC, lequel il faut couper en deux egallement.



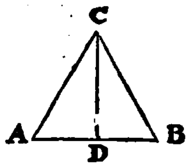
Soit de AB, & CB retranché deux parties egalles BD & BG: & apres auoir mené la ligne DG sur icelle, soit basti le triangle equilateral DFG par la 1. p. 1. & soit menée la ligne BF. Ie dis que icelle ligne couppe l'angle ABC en deux egallement.

Car les deux lignes BD & BF du triangle DBF estãt egalles aux deux lignes GB & BF du triangle GBF, & la base DF egalle à la base FG (estant DFG triangle equilateral) par la 8. p. 1. l'angle DBF sera egal à l'angle GBF. Ce qu'il falloit faire.

PROP. X.

Couper en deux egallement vne ligne droite donnée & terminée.

Soit la ligne donnée & terminée AB, laquelle il faut couper en deux egallement: soit sur icelle ligne construit le triangle equilateral ACB. par la 1. p. 1. & soit l'angle C couppé en deux egallement par la ligne CD par la 9. p. 1. Ie dis que CD coupe AB en deux egallement en D.

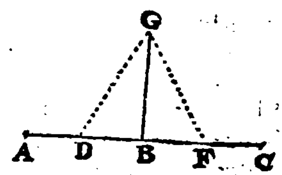


Car puis que les angles du poinct C sont egaux, & le triangle ACB est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux costez egaux à deux costez & vn angle egal à vn angle, & par la 4. p. 1. la base AD sera egalle à la base. DB.

PROP. XI.

Sur vne ligne droite donnée, & d'vn point en icelle, mener vne ligne perpendiculaire.

Soit la ligne droicte donnée AC, & le poinct en icelle B: d'iceluy poinct il faut mener vne ligne perpendiculaire.



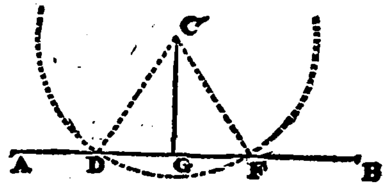
Soient du poinct B prises les deux lignes egalles BF, & BD par la 3. p. 1. & sur DF soit basti le triangle equilateral DGF, & soit menée la ligne BG. Ie dis que icelle BG est la ligne perpendiculaire demandée.

Car les triangles DGB, & FGB, ayans les trois costez egaux aux trois costez chascun au sien, sçauoir DB à BF: & DG à GF, par la construction & GB commun, ils auront les trois angles egaux chascun au sien. par la 4. & 8. p. 1. ainsi DBG,

& FBG, seront egaux, & par la deff. de la ligne perpendiculaire iceux angles seront droits & BG sera perpendiculaire.

PROP. XII.

Abaisser vne ligne perpendiculaire sur vne ligne droite infinie, & d'vn point hors icelle.



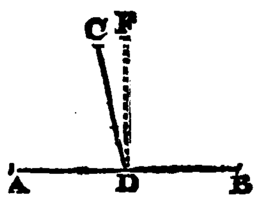
Soit la ligne droicte donnée AB, & le point hors icelle C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire qui tombe sur AB.

Soit pris vn poinct à l'auenture dans la ligne AB, comme le point D : & apres auoir mené la ligne CD, soit d'escrit vn cercle du centre C, & interual CD, coupant la ligne AB en D & en F, & apres auoir mené la ligne CF, soit l'angle DCF coupé en deux egallement par la ligne CG, comme enseigne la 9. p. 1. Ie dis que icelle ligne CG est la perpendiculaire demandée.

Car les deux triangles DCG, & FCG, ont deux costez egaux à deux costez: comme DC, & CG à FC & CG, & les deux angles sous le point C, egaux, & par la 4. p. 1. les bases DG & GF seront egalles, & les autres angles egaux aux autres angles, chascun au sien : ainsi les deux angles au poinct G seront egaux, & par la deffinition de l'angle droit, ils seront droicts, & la ligne perpendiculaire.

PROP. XIII.

Si vne ligne droite tombant sur vne autre ligne droite fait deux angles, ou iceux seront droits, ou egaux à deux droits.

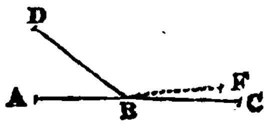


Soit la ligne donnée AB, sur laquelle tombe vne autre ligne CD, faisant les deux angles CDA, & CDB. Ie dis que iceux angles sont droicts ou egaux à deux droicts.

Car ou icelle ligne CD est perpendiculaire, ou elle ne l'est pas. Si elle est perpendiculaire les angles sont droicts; Si elle ne l'est pas, soit leuée la perpendiculaire DF par la 11. p. 1. les deux angles ADF & BDF seront droicts; mais les deux angles ADC, & CDB, n'occupent pas plus d'espace que iceux ADF, & FDB, & conuiennent auec iceux, & par la 8. comm. sent. ADC, & CDB seront egaux à deux droicts.

PROP. XIIII.

Si à l'extremité d'vne ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d'icelle faisant deux angles egaux à deux droits, icelles lignes se rencontreront directement.

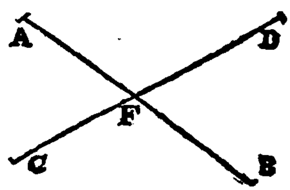


Soit la ligne DB, à l'extremité de laquelle B se rencontrent deux autres lignes droites AB. & CB, faisant les deux angles ABD, & CBD egaux à deux droicts. Ie dis que AB, & BC, se rencontrent directement, & que ABC est vne ligne droicte.

Autrement si ABC n'est ligne droite, soit continuée AB directement, tant qu'il sera de besoin: ce qui sera adiousté à AB directement, ou bien tombera au dessoubs de BC, ou au dessus, soit au dessus, & soit ABF, ligne droite, les deux angles ABD, & DBF, seront egaux à deux droits par la 13. p. 1. & les deux ABD & DBC, sont aussi egaux à deux droits, & par la 1. com. sent. ils seront egaux aux deux ABD, & DBF, c'est à sçauoir que DBC, & DBF, seront egaux le tout à la partie, ce qui est impossible: donc AB, & BC, se rencontroient directement.

PROP. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, elles feront les angles opposez au sommet egaux.



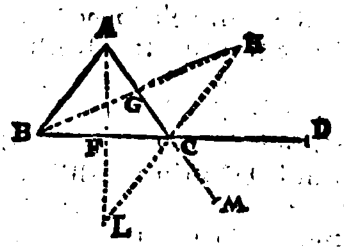
Soient les deux lignes AB, & CD, se coupans l'vne l'autre au point F. Ie dis que les angles opposez au sommet AFC, & DFB, sont egaux.

Car d'autant que AF tombe sur la ligne CD, les angles AFC, & AFB, sont egaux à deux droicts par la 13. p. 1. Item pour la mesme raison AFD & DFB seront egaux à deux droicts: partant les deux AFC & AFD, sont egaux aux deux DFA, & DFB. Que si on oste le commun AFD, le demeurant AFC sera egal au demeurant CFB. Le mesme se peut dire des deux AFD, & CFB.

PROP. XVI.

Vn costé d'vn triangle estant prolongé, l'angle exterieur est plus grand que l'vn ou l'autre des opposez interieurement.

Soit



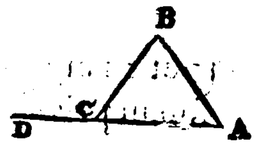
Soit le triangle ABC, duquel le costé BC soit continué iusques en D: Ie dis que l'angle exterieur AGD, est plus grand que l'vn des opposez interieurs BAC, ou ABC.

Qu'ainsi ne soit: Apres auoir couppé AC en deux egallement en G, soit menée la ligne BG, & icelle continuée iusques en H, Et soient faictes BG & GH egalles, & soit menée HC. Les deux triangles AGB & CGH auront les deux costez AG & GB egaux aux deux costez GC & GH, par la construction, & l'angle AGB egal à l'angle HGC, par la 15. p. 1. & par la 4. p. 1. Les bases AB, & HC seront egalles, & les autres angles egaux chacun au sien, & par ce moyen l'angle BAG, sera egal à l'angle GCH, qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour ceste raison sera plus grand que l'opposé BAC.

Pour la seconde partie, la mesme demonstration peut estre repetée pour monstrer que l'angle exterieur ACD est aussi plus grand que l'opposé interieur ABC: car estant BC couppé en deux egallement en F: & FL egal à FA, le triangle CFL aura l'angle FLC egal à CBA: Item FCL estant plus petit que FCM (lequel est egal ACD, par la 15. p. 1.) Aussi ABC sera plus petit que FCM, ou son egal ACD

PROP. XVII.

De tout triangle deux angles de quelle façon qu'ils soient pris sont plus petits que deux droicts.



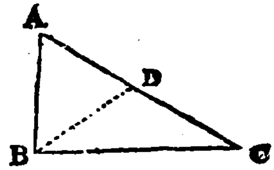
Soit le triangle ABC: Ie dis que les deux angles B & C sont plus petits que deux droicts.

Car apres auoir continué le costé AC iusques en D, Il est euident par la 16. p. 1. que l'angle exterieur DCB, est plus grand que l'opposé interieur B: Mais les deux DCB & BCA sont egaux à deux droicts, par la 13. p. 1. Partant ABC & BCA sont plus petits que deux droicts. Le mesme se peut faire des autres angles en prolongeant vn autre costé.

PROP. XVIII.

De tout triangle le plus grand costé soustient le plus grand angle.

B

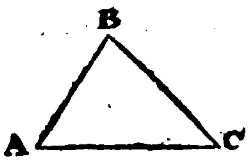


Soit le triangle donné ABC, duquel le costé AC est plus grand que le costé AB : Ie dis que l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB.

Qu'il ne soit ainsi. Puis que AC est plus grand que AB, soit d'iceluy retranché AD egal à AB : & soit mené BD. Le triangle ABD est Isoscelle, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base BD seront egaux. Or l'angle exterieur ADB est plus grand que l'opposé interieur C par la 16. p. 1. Mais ABC estant plus grand que ABD sera aussi plus grand que son egal ADB, & à plus forte raison ABC sera plus grand que C.

PROP. XIX.

En tout triangle le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.

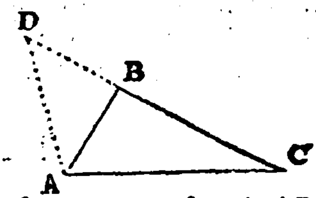


Soit le triangle ABC, duquel l'angle A est plus grand que l'angle C : Ie dis que le costé BC est plus grand que le costé AB.

Autrement il sera egal ou plus petit. Il ne peut estre egal, d'autant que le triangle seroit Isoscelle, & par la 5. p. 1. les deux angles A & C seroient egaux contre l'hypotese. Il ne peut aussi estre plus petit : d'autant que par la 18. p. 1. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, qui est aussi contre l'hypothese. Il sera donc plus grand.

PROP. XX.

En tout triangle les deux costez, de quelle façon qu'ils soient pris sont plus grands que le troisiesme.

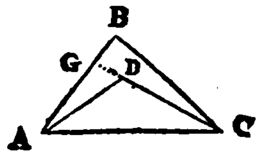


Soit le triangle ABC : Ie dis que les costez AB & BC sont plus grands ensemble que le troisiesme AC.

Qu'il ne soit ainsi apres auoir prolongé CB iusques en D, & faict BD egal à BA, soit menée la ligne DA. Le triangle DBA sera Isoscelle, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base DA, seront egaux, sçauoir ADB & DAB. Mais DAC, est plus grand que DAB : aussi sera-il plus grand que son egal ADB, & par la 19. p. 1. DC sera plus grand costé que AC. Mais DC est egal aux deux costez CB & BA, partant iceux CB & BA seront plus grands que AC.

PROP. XXI.

Si des extremitez d'vn costé de quelque triangle, on meine deux lignes droites se rencontrans au dedans d'iceluy, icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront l'angle plus grand.



Soit le triangle ABC, & des extremitez du costé AC, soient menées interieuremét deux lignes se rencõtrans au point D. Ie dis que icelles lignes sont plus petites que AB, & B C. Mais que l'angle D est plus grand que l'angle C.

Qu'ainsi ne soit continuée CD, iusques au point G par la 20. p. 1. les deux costez CB, & B G du triangle CBG, seront plus grands que la troisiesme CG. Que si à GB, & BC, plus grãds que GC, on adiouste chose egalle AG, les touts AG, & G C, seront tousiours plus petits que les touts AG GB BC. Pareillement les deux costez AG, & GD du triangle AGD sont plus grands que le troisiesme AD : ausquels si on adiouste chose egalle, sçauoir CD, les touts AG GD DC seront tousiours plus grands que les touts AD & DC: à plus forte raison AB & BC seront encores plus grands que AD & D C.

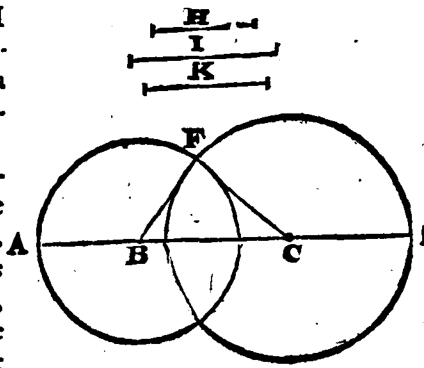
SOMMAIRE.

Les deux costez AB & BC sont plus grands que les deux AG & GC.
Mais les deux AG GC sont plus grands que les deux AD & DC.
A plus forte raison AB & BC seront plus grands que AD & DC.

Pour la seconde partie. Ie dis que l'angle D est plus grand que l'angle B. Car d'autant qu'il est exterieur au triangle DGA, il sera plus grand que son opposé interieurement DGA par la 16. p. 1. lequel pour la mesme raison est aussi plus grand que son opposé interieurement B: & à plus forte raison D sera plus grand que B.

PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droites, egalles à trois autres données, mais il faut que deux costez de quelle façon qu'ils soient pris, soient plus grands que le troisiesme.



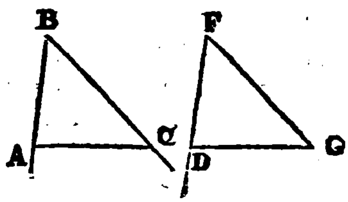
Soient les trois lignes données H I K, desquelles deux de quelle façon quelles soient prises sont plus grandes que la troisiesme. Il faut faire vn triangle d'icelles ou de trois autres egalles à icelles.

Soit prise vne ligne droite, tant grande qu'il sera de besoin, comme AD, de laquelle soit retranchée AB, egalle à H, & du reste, BC, egalle à I, & CD. egalle à K: & soit descrit vn cercle du centre B, & interual BA. Item vn autre du centre C, & interual CD, coupant le premier cercle au poinct F, duquel soient menées les deux lignes FC, FB. Ie dis que les costez du triangle BFC, sont egaux aux trois lignes données HIK.

Car BA, & BF estans egalles par la diff. du cercle, item CF & CD, Il est euident que les trois costez du triangle BFC, sont egaux aux trois lignes AB, BC, CD, lesquelles estants egalles aux donnees, aussi les costez du triangle, seront egaux aux lignes données.

PROP. XXIII.

Sur vne ligne droite donnée, & sur vn poinct donné en icelle faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

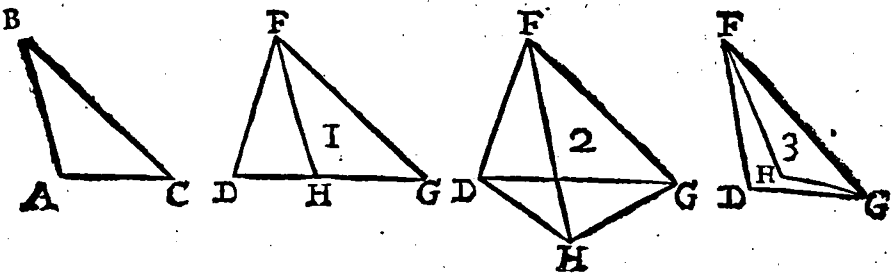


Soit la ligne donnée A B: & le poinct en icelle B, sur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné D F G.

Soit menée la ligne D G, & sur BA, soit basti par la 22. p. 1. le triangle BAC, ayant les trois costez egaux aux trois costez du triangle DFG. Il est euident par la 8. p. 1. que l'angle B sera egal à l'angle F.

PROP. XXIIII.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle d'iceux costez plus grand que l'angle, ils auront la base plus grande que la base.



Soient deux triangles ABC & DFG, lesquels les deux costez AB & BC sont egaux aux deux costez DF & FG, chascun au sien, Mais l'angle F est plus grand que l'angle B. Ie dis que la base DG est plus grande que la base AC.

Et d'autant que l'angle DFG est plus grand que l'angle B, soit faict l'angle GFH egal à B par la 23. p. 1. Et apres auoir egallé les costez, soit menée la base GH. Laquelle ou tombera sur la base DG, comme à la 1. figure, ou au dessus d'icelle, comme en la 2. ou au dessus comme en la 3. figure.

1. Qu'elle tombe premierement sur la ligne DG, comme en la 1. figure par la 4. p. 1. La base GH sera egalle à la base AC, ayans les deux triangles ABC & GFH deux costez egaux à deux costez, & l'angle B egal à l'angle GFH. Et parce que GH est plus petit que DG, aussi AC son egalle, sera plus petite que DG.

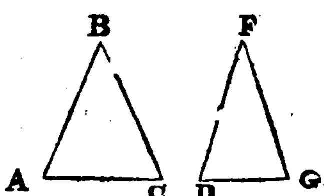
2. Qu'elle tombe au dessous la base DG, comme en la 2. figure, & soit menée la ligne GH. Le triangle FGH sera Isoscele. Et par la 5. p. 1. les angles FGH & FHG seront egaux, Et partant au triangle D G H, l'angle D H G qui est plus grand que l'angle FHG, sera aussi plus grand que l'angle DGH qui n'est que partie de son egal FGH, & par la 18. p. 1. DH sera plus petit costé que DG, d'autant qu'il soustient vn plus petit angle, & par consequent son egalle AC.

3. Quelle tombe finalement au dessus de la base DG, comme en la 3. figure. Il est euident que les deux lignes interieures HG & HF sont plus petites que FD, & DG par la 21. p. 1. Mais FD est egalle à FH, par consequent D G plus grande que HG.

PROP. XXV.

Si deux triãgles ont deux costez egaux à deux costez chascun au sien, & la base plus grande que la base, ils auront aussi l'angle d'iceux costez plus grand que l'angle.

Soient deux triangles A B C & D F G, desquels les deux costez A B & BC sont egaux aux deux DF & F G chascun au sien, Mais la base A C est plus grande que la base DG. Ie dis que l'angle B est plus grand que l'angle F.

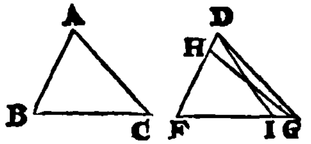


Autrement il sera egal ou plus petit. Mais il ne peut estre egal d'autant que par la 4. p. 1. les bases AC & DG seroient egalles contre l'hypotese. Pareillement il ne peut estre plus petit, d'autant que par la 24. p. 1. la base AC seroit plus petit que DG. donc il sera plus grand.

PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles chascun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir son semblable, l'autre angle, & les autres costez seront egaux, chacun au sien.

Soient deux triangles ABC & DFG, desquels les angles B & C sont egaux aux deux F, G chascun au sien, & le costé BC egal au costé FG. Ie dis que les deux autres costez sont egaux chascun au sien. Et l'autre angle egal à l'autre angle.



Car puis que BC est egal à FG, aussi AB sera egal à FD. Autrement il sera plus grand ou plus petit. Et s'il est possible que FD soit plus grand que AB, on pourra retrancher FH egalle à AB. Et par la 4. p. 1. l'angle B estant egal à l'angle F, la base sera egalle à la base, & les autres angles egaux aux autres angles chascun au sien : c'est à sçauoir que l'angle HGF sera egal à l'angle C, auquel est aussi egal l'angle DGF. Partant les deux angles DGF & HGF seroient egaux la partie au tout: ce qui est absurde : donc DF n'estoit point plus grand que BA.

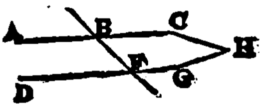
Soient maintenant deux autres costez que BC & FG egaux, sçauoir AB à DF, ou AC à DG. Il s'ensuiura tousiours le mesme inconuenient, les deux angles B, & C demeurans tousiours egaux aux deux F & G. Car en posant AB egal à FD, il faudra que BC soit egal à FG. Que si on dict que FG soit plus grand, on retranchera FI egalle à BC, & apres auoir mené ID, on conclura par la 4. p. 1. que l'angle B estant egal à l'angle F, les autres angles du triangle ABC seroient egaux aux autres angles du triangle FDI, chascun au sien, sçauoir l'angle C egal à l'angle I. Mais les angles C, & G sont aussi egaux. Partant les deux angles I & G seroient egaux, l'exterieur à son opposé interieur contre la 16. p. 1. Donc FG n'estoit pas plus grand que BC.

SOMMAIRE.

Les costez BC & FG estans egaux, aussi AB sera egal à DF.
Mais les angles d'iceux B & F sont egaux.
Partant on peut conclurre toute la prop. par la 4. p. de ce liure.

PROP. XXVII.

Si vne ligne droite tombant ſur deux lignes droites faict les angles oppoſez alternatiuement egaux, icelles lignes ſeront parallelles.

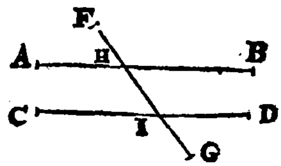


Soient deux lignes droictes AC & DG ſur leſquelles tombant la ligne droicte BF faict les angles CBF, & BFD alternatiuement egaux. Ie dis que AC & DG ſont parallelles.

Autrement ſi elles ne ſont parallelles, eſtants continuées, elles ſe rencontreront. Que ſi elles ſe rencontroient comme au point H, elles feroient vn triangle auec le coſté BF, & l'angle exterieur DFB ſeroit plus grand que l'oppoſé interieur FBC par la 16. p.1. ce qui eſt contre l'hypoteſe. Donc les deux lignes AC: & DG ne ſe rencontreront iamais: & par la derniere deff. icelles ſeront parallelles.

PROP. XXVIII.

Si vne ligne droite tombant ſur deux lignes droictes, faict l'angle exterieur egal à ſon oppoſé interieur du meſme coſté, ou bien les deux interieurs de meſme coſté egaux à deux droits, icelles lignes ſeront parallelles.



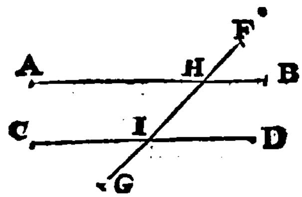
Soient deux lignes AB & CD, ſur leſquelles tombant vne autre ligne FG elle fait l'angle exterieur FHB, egal à HID ſon oppoſé interieur de meſme coſté. Ie dis que AB & CD ſont parallelles.

Car par la 15. p.1. l'angle FHB eſt egal à l'oppoſé au ſommet AHI, & par la 1. comm. ſent. AHI ſera egal alternatiuement à HID, egal à FHB, & par la 27. p.1. AB, & CD ſeront parallelles.

Pour la ſeconde partie. Ie dis que ſi les deux angles interieurs de meſme coſté BHI & HID ſont egaux à deux droits, que auſſi AB & CD ſeront parallelles. Car par la 13. p.1. Les deux angles CHI & HID ſont egaux à deux droits, partant auſsi egaux aux deux BHI & HID. Que ſi d'iceux angles egaux on oſte le commun HID, les demeurans BHI & HIC ſe trouueront alternatiuement egaux, & par la 27, p,1. AB & CD ſeront parallelles.

PROP. XXIX.

Si vne ligne droite tombe ſur deux lignes parallelles, elle ſera les angles oppoſez alternatiuement egaux, & l'exterieur egal à ſon oppoſé interieur du meſme coſté : & les deux interieurs de meſme coſté egaux à deux droits.



Soit la ligne droicte FG tombant ſur les deux parallelles AB, &.CD. Ie dis en premier lieu que les angles AHI. & HID oppoſez alternatiuement ſont egaux.

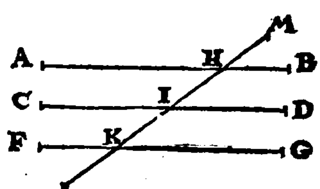
Autrement s'ils ne ſont egaux l'vn ſera plus grand ou plus petit. Soit donc AHI plus petit s'il eſt poſſible que HID : & ſi à iceux angles inegaux on a adiouſté choſe commune, ſçauoir l'angle HIC, Les deux AHI & HIC ſeront plus petits, que les deux HIC & HID, leſquels par la 13. p. 1. eſtans egaux à deux droicts, HIC & AHI ſeront plus petits que deux droits, & par la penult. comm. ſent. les deux lignes AB & CD ne ſont point parallelles: ce qui eſt contre noſtre hypoteſe. Donc il falloit que l'angle AHI fuſt egal à l'angle HID ſon alterne oppoſé.

Pour la ſeconde partie, Ie dis que l'angle exterieur FHB eſt egal à ſon oppoſé interieur de meſme coſté HID: ce qui eſt manifeſte par ce qui a eſté demonſtré cy deſſus, que les angles AHI & HID eſtoient egaux, eſtât auſsi FHB egal à AHI par la 15. p. 1. & par la 1. comm. ſent. FHB & HID ſeront egaux, eſtans tous deux egaux au meſme AHI.

Pour la troiſieſme partie, Ie dis que les deux oppoſez interieurement de meſme coſté AHI, & HIC ſont egaux à deux droicts: car s'il eſtoit autrement les lignes AB & CD ne ſeroient parallelles par la penult. com. ſent.

PROP. XXX.

Les lignes droites parallelles à vne meſme ligne droicte, ſont parallelles entre elles.



Soit AB parallelle à CD, & CD parallelle à FG. Ie dis que AB, & FG ſont parallelles.

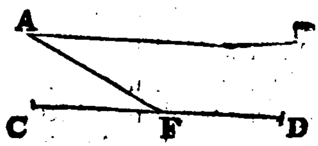
Car par la 29. p. 1. ſi on meine la ligne MK l'angle exterieur MHB ſera egal à l'oppoſé interieur HID, eſtant AB, & CD parallelles, pareillement HID ſera egal à IKG pour la

meſme

mesme raison, estans CD & FG parallelles, & par la 1. comm. sent. l'angle exterieur MHB sera egal à l'opposé interieur IKG, & par la 28. p. 1. AB & FG seront parallelles.

PROP. XXXI.

Sur vn poinct donné, mener vne ligne droite parallelle à vne ligne droicte donnée.

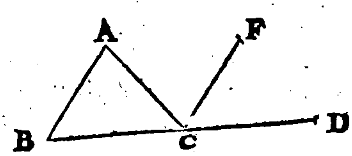


Soit le point donné A, duquel faut mener vne ligne parallelle à la donnée CD.

Soit menée la ligne AF faisant l'angle AFC, & sur icelle, & au point A soit faict l'angle BAF egal à l'angle AFC alternatiuement, & par la 27. p. 1. Les lignes AB & CD seront parallelles. Car la ligne droite AF tombant sur icelles faict les angles opposez alternatiuement egaux.

PROP. XXXII.

En tout triangle l'vn des costez estant prolongé, l'angle exterieur est egal aux deux opposez interieurs, & de chacun triangle les trois angles interieurs sont egaux à deux droits.



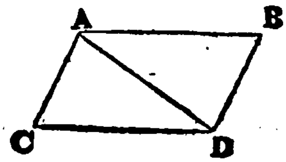
Soit le triangle ABC, duquel le costé BC soit prolongé iusques en D. Ie dis en premier lieu que l'angle exterieur ACD, est egal aux deux opposez interieurs B & A.

Qu'il ne soit ainsi, qu'on meine CF parallelle à BA par la 31. p. 1. & par la 29. p. les angles BAC, & ACF seront alternatiuement egaux: item l'exterieur FCD sera egal à son opposé interieur CBA. Partant il est manifeste que le total ACD, est egal aux deux A & B opposez interieurement.

Pour la seconde partie que les trois angles A, B & C interieurs du triangle ABC sont egaux à deux droits: Il est euident, estant ACD egal aux deux A, & B: Mais ACD auec ACB sont egaux à deux droits par la 13. p. 1. Partant les deux A & B auec ACD, seront egaux à deux droits.

PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conioignent deux lignes droites egalles & parallelles, & de mesme costé, sont aussi egalles & parallelles.

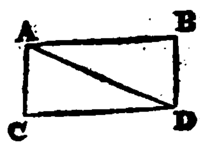


Soient deux lignes droictes AC, & BD, qui conioignent de mesme costé les deux autres lignes AB, & CD egalles & Parallelles. Ie dis que AC, & BD sont aussi egalles & parallelles.

Qu'il ne soit ainsi, soit menée la diagonalle AD. Icelle tombant sur les deux parallelles AB, & CD fera les angles BAD, & ADC alternatiuement egaux par la 29. p. 1. Item AB, & CD estant egalles, les deux triangles BAD, & CDA auront deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle, & par la 4. p. 1. la base AC sera egalle à la base BD, & l'angle CAD sera egal alternatiuement à l'angle ADB, & par la 27. p. 1. les egalles AC, & BD seront aussi parallelles.

PROP. XXXIIII.

En tout parallellograme, les costez & les angles oposez sont egaux, & la diagonalle le coupe en deux egallemét.

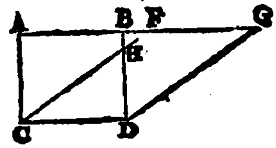


Soit le parallelograme ABCD. Ie dis que le costé AB est egal à son opposé CD, & CA à DB. L'angle C egal à l'angle B, & l'angle A à l'angle D, & qu'il est couppé en deux egallement par la diagonalle, AD.

Car puis que ABCD est parallelograme AB sera parallelle à CD, & AC à BD, & par la 29. p. 1. l'angle BAD sera alternatiuement egal à l'angle ADC: Item l'angle CAD alternatiuement esgal à l'angle ADB. Ainsi les deux triangles BAD, & ADC auront BAB, & BDA angles egaux aux angles ADC & CDA chascun au sien, & le costé commun entre iceux angles AD. Et par la 26. p. 1. les autres costez AB & BD seront egaux aux autres costez AC, & CD chascun au sien & l'autre angle C egal à l'angle B. Et si il est euident que les deux angles au point A seront egaux aux deux ensemble au point D. Encores par la 4. p. 1. les triangles ABD, & ACD seront egaux: ce qui estoit à prouuer.

PROP. XXXV.

Les parallellogrames constituez sur mesme base, & entre mesmes parallelles, sont egaux entre eux.



Soient deux parallellogrames ABCD, & CDGF tous deux sur mesme base CD, & entre mesmes parallelles AG, & CD. Ie dis qu'ils sont egaux.

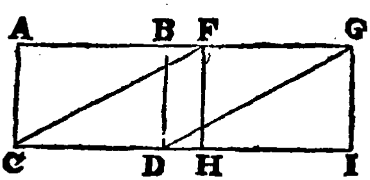
Car par la 34. p. 1. les costez oposez des parallelogrames estans egaux AB, & CD seront egaux. Item CD, & FG, & partant AB, & FG egaux, ausquels si on adiouste la ligne commune BF, AF sera egalle à BG. Item AC à BD: lesquelles estant parallelles l'angle exterieur DBG sera egal a l'opposé interieur CAF, & par la 4. p. 1. les triangles CAF, & BDG seront egaux: desquels si on oste le triangle commun BHF, les demeurans trapezes BACH, & DHFG seront egaux: ausquels si on adiouste le triangle commun CHD. le parallelog. ABCD sera egal au parallellograme CDGF.

SOMMAIRE.

Les triangles ACF, BDG sont egaux.
Mais les parallellogrames ABCD & CDGF sont composez d'iceux en retranchant la piece commune BAF, & adioustant aussi la commune CHD.
Partant par les communes sentences iceux parallellogrames sont egaux.

PROP. XXXVI.

Les parallellogrames constituez sur bases egalles, & entre mesmes parallelles, sont egaux entre eux.



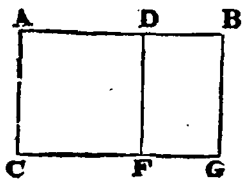
Soient les deux parallellogrames ABCD, & FGIH ayans les bases CD, & HI egalles & entre les mesmes parallelles AG, & CI. Ie dis qu'ils sont egaux.

Qu'il ne soit ainsi: soient menées les deux lignes CF, & DG lesquelles par la 33. p. 1 seront parallelles, d'autant qu'elles conioignent CD, & FG egalles & parallelles. Car CD estant egalle à HI, & HI à FG aussi FG & CD seront egalles. Et par consequent FGDC sera parallellograme sur mesme base & entre mesmes parallelles que le parallelog. ABCD, & par la 35. p. 1. ils seront egaux, & par la mesme prop. il sera aussi egal au parallellog. FGIH estant sur mesme base auec iceluy FG, & entre mesmes parallelles AGCI. Et par la com. sent les parallellog. ABCD, & FGIH seront egaux.

SCHOLIE.

Il faut icy entendre que lors que l'on dit, que les parallellogrames soient sur vne mesme base & entre mesmes parallelles, ou sur bases egalles, qu'il faut que la base soit portion des lignes parallelles. Autrement on pourroit monstrer la proposition estre fausse en ceste façon.

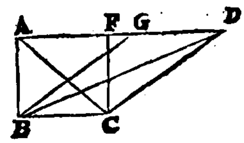
Soiét les deux parallellogrames AF & FB, tous deux sur la base DF, & entre mesmes parallelles AB & CG. Ie dis qu'ils sont egaux. Ce qui est euidemment faux. Le mesme soit entendu des triangles, aux prop. suiuantes.



PROP. XXXVII.

Les triangles qui sont sur mesme base, & entre mesmes parallelles, sont egaux.

Soient deux triangles ABC, & BDC tous deux sur la mesme base BC, & entre mesmes parallelles AD, & BC. Ie dis qu'ils sont egaux.

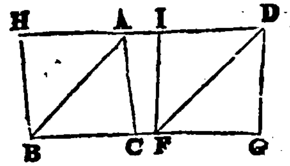


Car si on meine CF parallelle à AB, & BG parallelle à CD, les parallellogrames seront accomplis AFBC, & BCDG: desquels les triangles donnez sont la moitié chascun du sien par la 34. p. 1. Lesquels par ce moyen seront egaux, estans leurs doubles parallellogrames egaux par la 35. p. 1.

PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur bases egalles & entre mesmes parallelles sont egaux.

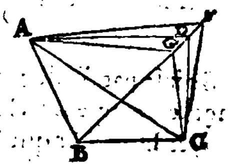
Soient deux triangles ABC, DFG sur bases egalles BC, & FG, & entre mesmes parallelles HD, & BG. Ie dis qu'ils sont egaux.



Car apres auoir mené BH parallelle à CA, & FI parallelle à DG par la 31. p. 1. Les deux parallelogrames HC, & IG estans sur bases egalles, & entre mesmes parallelles, seront egaux par la 36. p. 1. aussi egalles seront leurs moitiez, sçauoir les triangles donnez BAC, FDG par la 34. p. 1. estant les parallelogrames coupez en deux egallement par les diagonalles BA. & FD.

PROP. XXXIX.

Les triangles egaux constituez sur mesme base, & de mesme part sont aussi entre mesmes parallelles.

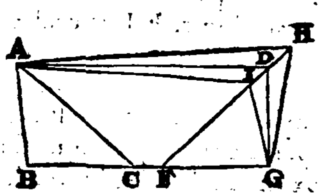


Soient deux triangles egaux ABC, & BCD constituez sur mesme base BC, & de mesme part. Ie dis qu'ils sont entre mesmes parallelles, c'est à dire que si on meine la ligne AD, elle sera parallelle à BC.

Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallelle à BC (si AD ne l'est) par la 31. p. 1. Laquelle tombera ou bien au dessus de AD ou au dessous, qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle AF, s'il est possible: & apres auoir continué BD iusques en F, & mené FC. Les deux triangles BAC, & BFC par la 37. p. 1. ayans mesme base, & entre mesmes parallelles seront egaux. Item BAC, & BDC sont aussi egaux, partant BFC, & BDC seroient aussi egaux la partie au tout, donc AF parallelle ne pouuoit tomber par dessus AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on pose la parallelle AG au dessous de AD, car il s'ensuiura que les triangles BGC, & BDC sont egaux, ce qui ne peut estre: donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallelle à BC.

PROP. XL.

Les triangles egaux constituez sur bases egalles & de mesme part, sont aussi entre mesmes parallelles.

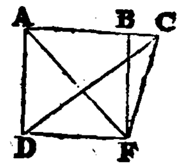


Soient deux triangles egaux ABC, & DFG constituez sur bases egalles BC, & FG, & de mesme part. Ie dis qu'ils sont aussi entre mesmes parallelles, c'est à dire que si on meine vne ligne droite de A, en D, que icelle sera parallelle à BG.

Autrement du point A on en pourra mener vne autre qui sera parallelle à BG. (si AD ne l'est) par la 31. p. 1. Laquelle tõbera ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc premierement au dessus, & soit icelle AH s'il est possible. Les deux triangles BAC, & FHG seront egaux par la 38. p. 1. Mais BAC, & FDG sont aussi egaux: partant FHG & FDG seront egaux par la 1. com. sent. ce qui est impossible comme en la precedente. Partant la parallelle menée du point A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on la faict tomber au dessoubs, comme AI: car les triangles FIG, & FDG se trouueroient egaux, donc du point A ne pourra estre menée autre ligne que AD parallelle à BG.

PROP. XLI.

Si vn parallellograme & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes parallelles, le parallellograme sera double du triangle.

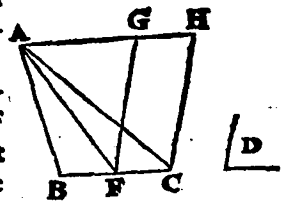


Soit le parallellograme ABDF estant sur la mesme base DF auec le triangle DFC, & tous deux entre mesmes parallelles AC, & DF, Ie dis que la parallellograme est double du triãgle.

Car si on meine la diagonalle AF, le triangle ADF sera la moitié du parallellogr. par la 34. p. 1, lequel sera egal au triangle DCF, par la 38. p. 1. partant le parallellograme qui est double de l'vn sera aussi double de l'autre.

PROP. XLII.

Faire vn parallellograme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

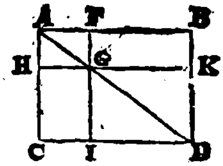


Soit le triangle donné ABC, auquel il faut faire vn parallellograme egal, ayant vn angle egal à l'angle donné D.

Soit la base du triangle BC coupée en deux egallement en F, & apres auoir mené AF soit faict l'angle GFC egal à l'angle D par la 23. p. 1. & par la 31. p. 1. soient menées les parallelles AH à BC, & CH à FG. Ie dis que le parallellogra. FH est egal au triangle donné BAC: Car il est euident qu'il a vn angle egal à l'angle donné par la construction, le reste se preuue par la prop. precedente, sçauoir que le parallelog. FH est double du triangle FAC, duquel est aussi double BAC estant BAF egal à FAC par la 39. p. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egalles, & entre mesmes parallelles, & les deux ensemble BAC (qui est le triangle donné) seront egaux au parallellograme.

PROP. XLIII.

En tout parallellograme, les supplemens des parallellogrames qui sont sur le diametre sont egaux entre eux.

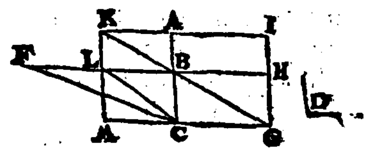


Soit le parallellograme CB, son diametre AD, à l'entour duquel sont les parallellog, HF; & IK. Ie dis que les supplemens CG, & GB sont egaux.

Car par la 34. p. 1. Le triangle ABD est egal au triangle ACD, & AFG, & GKD egaux à AHG, & GID, car iceux parallellogrammes sont tousiours coupez en deux egallement, & partant le reste GB sera egal au reste GC: d'autant que qui de choses egalles oste choses egalles les restes sont egaux.

PROP. XLIIII.

Sur vne ligne droite donnée descrire vn parallellograme egal à vn triangle donné ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



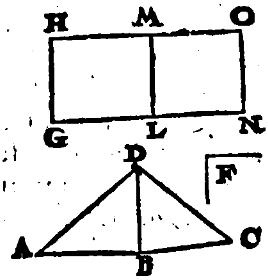
Soit la ligne donnée AB, sur laquelle il faut descrire vn parallellograme egal au triãgle FBC, & ayant vn angle egal à l'angle D.

Soit prolongée AB iusques en C, & soit construit le parallellog. BM egal au triangle FCB ayant l'angle LBC egal au donné D, le tout par la 42. p. 1. & apres auoir continué les lignes ML iusques en K, & MC tant qu'il sera de besoin, soit menée AK parallelle à LB, & la diagonalle KB continuée iusques à ce qu'elle rencontre MG au point G, ce qui doit arriuer n'estant KB parallelle à M C par la penult. com. sent. & du point G soit menée GI parallelle à CA, & soit prolongée KA iusques en I & LB iusques en H: Ie dis que BI est le parallellogr. demandé.

Car par la 43. p. BI construit sur la ligne BA est egal à BM partant aussi au triangle FCB, & si par la 15. p. 1: l'angle ABH est egal à LBC, lequel estant egal au donné D, ABH, sera aussi egal au donné D.

PROP. XLV.

Faire vn parallellograme egal à vne figure rectiligne donnée, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



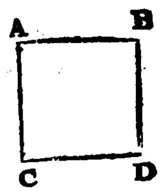
Soit la figure rectiligne donnée ABCD, & l'angle donné F sur lequel il faut faire le parallellograme demandé.

Soit menée la ligne DB faisant deux triangles de la figure rectiligne donnée, & par la 42. p. 1. soit faict le parallellog. GM egal au triangle ABD, ayant vn angle egal à l'angle donné F. Item sur LM soit basty le parallellog. LO egal au triangle DBC ayant vn angle egal au donné F par la 44. p. 1. iceux GM, & LO seront egaux à la figure rectiligne donnée ABCD.

Ie dis d'auătage qu'ils ferőt vn parallellograme: c'est à dire que les lignes GL & LN, HM & MO se rencontrent directement: Car les angles GHM, & LMO estant chascun egal à l'angle donné F, ils le seront aussi entre eux: ausquels si on adiouste l'angle commun LMH, les deux angles GHM, & LMH qui sont egaux à deux droicts par la 29. p. 1. estant HL, parallellograme: seront egaux aux deux angles LMH, & LMO, lesquels partant serőt egaux à deux droicts, & par la 14. p. 1. les deux lignes HM, & MO se rencontreront directement. Pareillement les deux angles GLM, & LNO estans egaux par la 34. p. 1. & pour estre opposez à angles egaux, Que si à iceux on adiouste l'angle commun MLN, par le mesme discours que cy dessus les deux lignes GL & LN se rencontreront directement ainsi HO, & GN estant lignes droictes, & conioignant de mesme part les egalles & parallelles HG & ON, elles seront aussi egalles & parallelles par la 33. p. 1. & GO sera parallellograme.

PROP. XLVI.

Sur vne ligne droicte donnée d'escrire vn quarré.



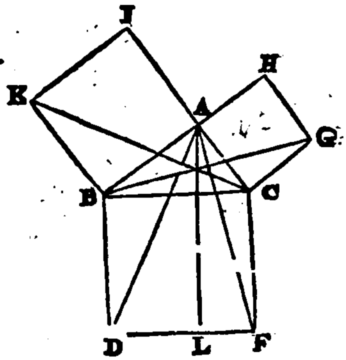
Soit la ligne droicte AB sur laquelle il faut d'escrire vn quarré du point A, soit menée AC ligne perpendiculaire à AB par la 11. p. 1. laquelle soit faicte egalle à AB par la 3. p. 1. & apres auoir mené CD parallelle à AB, & BD parallelle à AC par la 31. p. 1. Ie dis que le parallellograme AD est quarré.

Car estant parallellograme, les costez, & les angles opposez sont egaux, partant AB egal à CD, & AC à BD, mais AC estant egal à AB, par la construction il est euident que les quatre costez sont egaux. Item l'angle A estant droit par la construction, aussi son opposé D sera droict par la 34. p. 1. & par la 29. p. 1. les deux angles A & C opposez interieurement de mesmes costez estans egaux à deux droicts, & l'angle A estant droict l'angle C sera aussi droict: partant aussi droict son opposé B, & les quatre angles ABCD seront droicts, & par la deff. du quarré, la figure AD sera quarrée.

PROP.

PROP. XLVII.

Au triangle rectangle, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux deux quarrez des deux autres costez.



Soit le triangle rectangle ABC, sur les costez duquel soient descrits les trois quarrez AK, AG BF. Ie dis que le quarré du costé BC, qui soustient l'angle droict BAC, sçauoir FB, est egal aux deux quarrez des deux autres costez AK & AG.

Qu'il ne soit ainsi. Premierement il est euident que les quatre angles au point A sont droits par la deff. du quarré, & par la 14. p. 1. IA, & AC se rencontreront directement. Item BA, & AH. Soient menées les deux lignes AD, & KC, & du point A soit menée AL parallele à CF.

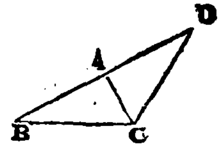
Ie dis maintenant que les deux triangles ABD, & KBC ont deux costez, egaux à deux costez sçauoir KB à BA, & BC à BD: car les costez des quarrez sont egaux & l'angle KBC est egal à l'angle ABD, d'autant que les angles KBA, & CBD sont droicts & egaux, & ABC est commun à tous les deux, & par la 4. p. 1. les triangles ABD, & KBC sont egaux. Mais le quarré KA est double du triangle KBC par la 41. p. 1. car ils sont sur mesme base KB, & entre mesmes parallelles, il sera aussi double de son egal ABD: duquel le rectangle BL est aussi double par la mesme 41. p. 1. & par consequent le quarré AK sera egal au rectangle BL, car les choses doubles d'vne mesme sont egalles entre elles: par mesme discours on prouuera que le rectangle CL est egal au quarré AG partant les deux ensemble BL, & CL seront egaux aux deux quarrez ensemble AK, & AG.

SOMMAIRE.

Le rectangle BL est egal au quarré BI, & LC egal au quarré CH.
Mais les deux rectangles BL, & LC sont egaux au quarré BF,
La conclusion est facille.

PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'vn des costez d'vn triangle, est egal aux quarrez des deux autres costez, le triangle sera rectangle.



Soit le triangle donné ABC, duquel le costé BC descrit vn quarré egal aux deux quarrez des deux autres costez BA, & AC. Ie dis que l'angle BAC est droict.

Car apres auoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. p. 1. & fait AD egalle à AB soit menée CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. p. 1. le quarré de CD sera egal aux deux quarrez de CA, & AD lesquels sont egaux aux quarrez de BA, & AC, estans leurs lignes egalles; & par la 1. com. sent. le quarré de BC sera egal au quarré de CD: partant la ligne CB egalle à CD, & les triangles BAC, & CAD ayans les trois costez egaux aux trois costez chascun au sien, l'angle BAC sera egal à l'angle droit CAD par la 8. p. 1. partant il sera aussi droit.

Fin du premier Element.

ELEMENT SECOND

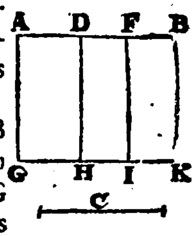
DEFINITIONS.

1. TOVT parallellograme rectangle est compris des deux lignes droites qui font l'angle droit.

2. En tout parallellograme, l'vn des parallellogrames descrits à l'entour du diamettre auec les supplemens est appellé Gnomon.

PROP. I.

Si de deux lignes droites, l'vne est coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle compris des deux toutes est egal au rectangle de la non coupée, & d'vne chascune partie de celle qui est coupée.

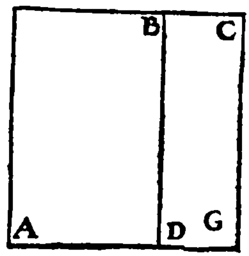


Soient les deux lignes AB, & C dont la premiere AB est coupée à l'aduanture en AD, DF, FB. Ie dis que le rectangle composé des deux lignes AB, & C sera egal aux trois rectangles compris des trois sections, & de la ligne C.

Qu'il ne soit ainsi, Qu'on meine AG perpendiculaire à AB par la 11. p. 1. laquelle par la 3. p. 1. soit faicte egalle à C, & du point G soit menée GK parallelle à AB, & BK parallelle à AG par la 31 p. 1. Il est euident que le rectangle AK sera compris des deux lignes données. Item soient menées les deux lignes DH, & FI parallelles à AG par la 31. p. 1. les trois parallellogrames AH, DI, FK seront compris des lignes AG, DH, FI, & des trois segmens AD, DF, FB, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallellogrames rectangles conuiennent au rectangle AK compris des lignes données: & par la 8. com. sent. ils luy sont egaux:

PROP. II.

Si vne ligne droite eſt coupée comme on voudra, les rectangles compris de la toute & d'vne chaſcune partie, ſont egaux au quarré de la toute.

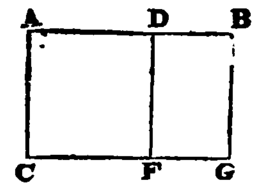


Soit la ligne droicte AG, couppée comme on voudra au point D. Ie dis que le rectangle de la toutte AG & de la partie AD, auec le rectangle de la toutte AG & de l'autre partie DG, ſont egaux au quarré de la toutte AG.

Qu'il ne ſoit ainſi. Sur AB ſoit deſcrit le quarré AC, & menée BD parallelle a GC, Il eſt euident que les deux rectangles AB & DC, ſont compris de la toutte ou ſon egalle BD & des deux parties AD & DG, & ſi ils conuiennent auec le quarré AC, & par conſequent egaux.

PROP. III.

Si vne ligne droite eſt coupée comme on voudra, le rectangle compris de la toute, & de l'vne des parties, eſt egal au rectangle compris des parties, & au quarré d'icelle partie premierement priſe.

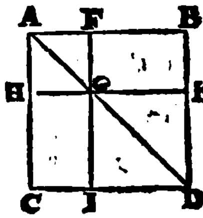


Soit la ligne droite AB coupée à l'aduenture au point D. Ie dis que le rectangle compris de la totalle AB, de la partie AD, eſt egal aux deux rectangles compris des deux parties AD, & DB, & au quarré de la partie AD, laquelle auoit eſté premierement priſe.

Qu'il ne ſoit ainſi, ſur la partie AD ſoit faict le quarré AF par la 46.p. 1. item ſoit prolongé la ligne CF iuſques à G, & menée BG parallelle à DF par la 31.p. 1. Il eſt donc euident que AF eſt le quarré de AD, & DG le rectangle de AD & DB (car DF eſt egal à DA, par la definition du quarré) & AG le rectangle de AB & AD partie ſur laquelle a eſté faict le quarré. Or par la 8.com.ſent. le quarré AF & rectangle DG conuiennent auec le rectangle AG, par conſequent egaux à iceluy.

PROP. IIII.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra, le quarré de la toute est egal aux deux quarrez des deux parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.



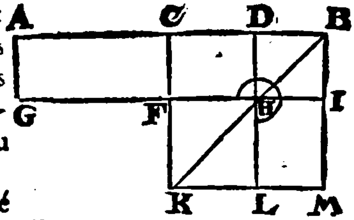
Soit la ligne donnée AB, coupée à l'aduenture au point F, Ie dis que les deux quarrez descrits sur les parties AF & FB auec deux fois le rectangle de AF & FB sont egaux au quarré de la totalle AB.

Qu'ainsi ne soit sur la ligne totalle AB soit descrit le quarré AD, & apres auoir mené la diagonalle AD, & du point F, FI parallelle à AC, par le point G soit menée HK parallelle à AB le tout par la 31 p. 1. ie dis premierement que HF, & IK sont quarrez.

Car des-ja il appert qu'ils sont parallellogrames estans d'escrits entre lignes parallelles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & BD seront egaux, & le triangle ABD est Isoscele, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base BAD, & BDA seront egaux. Pareillement la ligne AD tombant sur les deux parallelles FI & BD fera l'angle exterieur FGA egal à l'opposé interieur KDG par la 29. p. 1. lequel estant egal à FAG par la 1. com. sent. FAG, & FGA seront egaux, & par la 1. prop. 1. les deux costez AF & FG seront egaux : & par la 34. p. 1. le parallellograme AG aura les quatre costez egaux: On prouuera aussi aisément que les quatre angles sont droits par la 29. p. 1. partant qu'il sera quarré, par mesme discours, on monstrera IK estre aussi quarré. Item que le rectangle FK est compris des deux lignes AF & FB, estant AF egalle à FG. Mais HI est egal à FK par la 43. p. 1. Partant HI & FK sont deux fois le rectangle de AF & FB, lesquels auec les deux quarrez AG & GD conuiennent auec le quarré total AD, & par la 8. comm. sent. ils luy seront egaux.

PROP. V.

Si vne ligne droite est coupée en deux parties egalles & en deux inegalles: Le rectangle des deux parties inegalles auec le quarré de la section du milieu, sont egaux au quarré de la moitié de la toute.



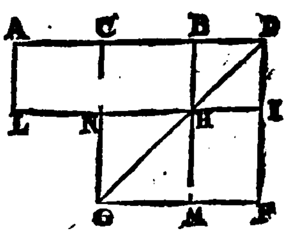
Soit la ligne donnée AB coupée en deux parties egalles au point C, & en deux inegalles au point D. Ie dis que le rectangle compris des deux parties inegalles AD, & DB auec le quarré de la section du milieu CD sont egaux au quarré de la moitié CB.

Soit donc sur la ligne CB descrit le quarré CM par la 46. p. 1. & apres auoir mené DL parallelle à BM soit menée la diagonalle BK coupant DL au point H soit mené GHI parallelle à AB, & AG parallelle à DH par la 31. p. 1. Ie dis que les rectangles BH & HK seront quarrez, par ce qui a esté demonstré à la 4. p. 2. Item que le rectangle AH composé des deux sections AD, & DB (d'autant que DH est egalle à DB pour estre DI quarré) auec le quarré FL fait sur la section du milieu CD (d'autant que KL par la 34. p. 1. est egalle à CD) est egal au quarré CM faict sur la ligne CB moitié de la toute AB.

Car le rectangle AF est egal au rectangle CI par la 36. p. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egalles AC, & CB, & entre mesmes parallelles AB, & GI. Pareillement les supplemens CH, & HM sont egaux par la 43. p. 1. ausquels si on adiouste le quarré commun DI les touts CI, & DM seront egaux: & par la 1. com. sent. DM sera egal à AF: ausquels pareillement si on adiouste le suplement commun CH le gnomon FBM sera egal au rectangle AH. Mais iceluy gnomon, & le quarré FL conuiennent auec le quarré CM, & sont egaux par la 8. com. sent. aussi le rectangle AH, & quarré FL seront egaux au quarré CM par la 1. com. sent.

PROP. VI.

Si vne ligne droite est coupée en deux parties egalles, & on luy adiouste directement quelque autre ligne droite: le rectãgle de la toute & de l'adioustée comme d'vne, & de l'adioustée, auec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est faict de la moitié & de l'adioustée comme d'vne.



Soit la ligne droite AB, coupée en deux egallement au point C, & à icelle soit adioustée directement BD. Ie dis que le rectangle compris de la totalle DA, & de l'adioustée DB, auec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré de la ligne DC.

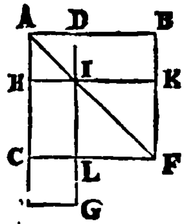
Qu'ainsi ne soit: sur la ligne DC soit descrit le quarré DG auec sa diagonalle DG, & apres auoir menée BM parallelle à DF laquelle coupera la diagoualle au point H: d'iceluy point H soit menée IHL parallelle à AD par la 31. p. 1. Item AL parallelle DI.

Premierement le rectangle AI est compris de la toute & adioustée comme d'vne AD, & de l'adioustée DI (car elle est egalle à l'adioustée BD, estant BI quarré) Item le quarré NM est fait sur MH egal à la moitié CB par la 34. p. 1. Ie dis dõc que le rectangle AI, & le quarré NM sont egaux au quarré CF.

Car les deux supplemens CH, & HF estans egaux par la 43. p. 1. Item les deux rectangles LC, & CH aussi egaux par la 36. p. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egalles, & entre mesmes parallelles, & par la 1. comm. sent. AN sera egal à HF, & en adioustant à chascun d'iceux le rectangle commun CI, le Gnomon NDM sera egal au rectangle AI. Mais iceluy gnomon auec le quarré NM sont egaux au quarré CF. Ainsi le rectangle AI auec le quarré NM sera egal au mesme quarré CF.

PROP. VII.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra: le quarré de la toute & le quarré de l'vne des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle de la totalle, & de la partie premierement prise.



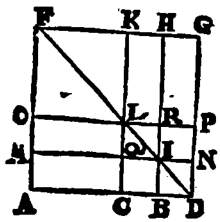
Soit la ligne AB coupée à l'aduenture au point D. Ie dis que les deux quarrez de la totalle AB, & de la partie AD, sont egaux au quarré de l'autre partie DB, & le rectangle deux fois, de AB, AD.

Qu'il ne soit ainsi, sur AB soit descrit le quarré AF auec sa diagonalle AF, & apres auoir mené du point D DL parallelle à AC, laquelle coupera la diagonalle AF au point I, d'iceluy point soit mené HIK parallelle à AB par la 31. p. 1. & sur CL soit faict le quarré CG.

Il est euident que AF, & CG sont les quarrez de AB, & AD, car CL par la 34. p. 1. est egalle à AD. Item que IF est le quarré de DB, tant par ce qui a esté prouué à la 4. p. 2. que par ce que IK est egalle à DB par la 34. p. 1. Item que AK est vne fois le rectangle, de AB & AD, estant AH egalle à AD, & HG vne autre fois le mesme rectangle estans les supplemens CI, & IB egaux. Item les quarrez CG, & HD. Partant les deux rectangles HG, & AK estans deux fois le rectangle de AB, & AD, lesquels auec le quarré IF conuiennent auec les deux quarrez AF & CG, ils leur seront egaux par la 8. comm. sent. ce qu'il falloit prouuer.

PROP. VIII.

Si vne ligne droite est coupée comme on voudra, quatre fois le rectangle de la toute & de l'vne des parties auec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré de la toute & d'icelle partie premierement prise comme d'vne seule ligne.



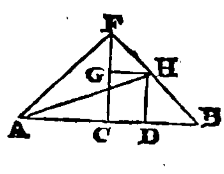
Soit la ligne donnée AB couppée à l'aduanture au point C. Ie dis que quatre fois le rectangle de AB & BC, c'est à dire de AB, & BD (si apres auoir prolongé la ligne on faict BD egal à BC) auec le quarré de AC sont egaux au quarré de AD.

Qu'il ne soit ainsi, sur AD soit faict le quarré FD auec sa diagonalle F D,& des deux points C & B soient menées CK, & BH parallelles à DG. Item des poincts I, & L ausquels elles coupent la diagonalle soient menées PLO, & NIM parallelles à AD par la 31.p.1.

Premierement parce qui resulte de la 4.p. 2. les rectangles FL,LI,ID,au long de la diagonalle seront quarrez.Item d'autant que CB est egal à BD,CI & ID seront egaux & qnarrez(estant l'vn d'iceux quarré) pareillement QR & RN aussi egaux quarrez:ainsi les quatre QB,ID,QR,RN,seront quarrez & egaux,& par la 43. p. 1.les quatre supplemens AQ, ML, LH, RG, seront aussi egaux. Mais comme aux precedentes, il est euident que AI est vne fois le rectangle de AB & BI(egalle BD) qui est vn des quatre supplemens, & vn des quatre petits quarrez egaux, dont iceux quatre supplemens auec iceux quatre quarrez faisant le Gnomon ODK seront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD,lequel Gnomon auec le quarré de OL(egal à AC par la 34.p.1.)conuiennent auec le quarré FD,& par la 8.com.sent.ils luy seront egaux:ce qui estoit à demonstrer.

PROP. IX.

Si vne ligne droite est couppée en deux parties egalles, & en deux inegalles, les quarrez des parties inegalles seront doubles des quarrez de la moitié & de la section du milieu.



Soit la ligne donnée AB coupée en deux egallement au point C, & en deux inegallement en D. Ie dis que les quarrez de AD & DB parties inegalles, sont doubles des quarrez de AC moitié,& de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi, au point C soit leuée la perpendiculaire CF, qu'on fera egalle à CA, & apres auoit mené

AF, & FB soit leuée la perpendiculaire DH; & mené HG parallelle à CD soit menée AH.

Premierement les triangles ACF, & FCB seront Isosceles, & feront les angles sur les bases AF, & FB egaux par la 5. p. 1. sçauoir GFH, à HBD, & demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle FCB droit pour estre CF perpendiculaire. Item HDB estant droict, & DBH demy droict, aussi par la 32. p. 1. DHB sera demy droict & par la 6. p. 1. le triangle HDB sera Isoscelle, sçauoir HD sera egal à DB par le mesme discours FG sera egal à GH. Item il est euident que l'angle AFB sera droict estant composé de deux demy droicts.

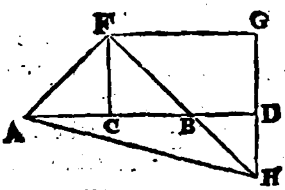
Maintenant il faut demonstrer ce qui est proposé, sçauoir que par la 47. p. 1. au triangle rectangle ACF, le quarré de AF costé qui soustient l'angle droict, est double du quarré de AC, estant egal à tous les deux de AC, & CF. Par le mesme discours FH est double du quarré de GH, ou CD son egal par la 34. p. 1. partant les deux quarrez de AF, & FH seront doubles des deux de AC, & CD. Pareillement le quarré de AH estant egal aux deux de AF & FH par la 47. p. 1. iceluy sera double des deux de AC, & CD. Mais le quarré de AH est egal aux deux de AD, & DH, ou DB son egal par la mesme 47. p. 1. ainsi les deux quarrez de AD & DB seront doubles des deux AC, & CD, ce qui estoit à demonstrer.

SOMMAIRE.

Les deux quarrez de AD & DB, sont egaux aux deux quarrez de AF & FH.
Mais les deux quarrez de AF & FH, sont doubles des deux quarrez de AC & CD.
Partant leurs egaux quarrez de AD & DB, seront doubles des mesmes.

PROP. XI.

Si vne ligne droite est couppée en deux parties egalles, & on luy adiouste directement quelque autre ligne droite, le quarré de la toute auec l'adioustée comme d'vne, & le quarré de l'adioustée, sont doubles aux quarrez de la moitié, & de celle qui est faicte de la moitié, & de l'adioustée comme d'vne.



Soit la ligne droite AB coupée en deux egallement au point C, à laquelle soit adioustée directement BD. Ie dis que les quarrez de AD & BD, sont doubles des quarrez de AC, & CD.

Qu'ansi ne soit, au point C soit leuée la perpendiculaire CF par la 11. p. 1. egalle à AC, & aprés auoir mené les deux lignes AF & FB, soient menées FG parallelle à CD, & DG

ÇF par la 31. p. 1. & soient continuées FB, & DG iusques à ce qu'elles se coupent au point H. Finablement soit tirée la ligne AH.

Premierement puis que AC & CF sont egaux, aussi par la 5. p. 1. les angles FAC, & C[illegible] sont egaux & demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle ACF droit. Par mesme discours, les angles CBF & BFC seront aussi demy droicts, & l'angle AFB droict estant composé de deux demy droits. Item par la 15. p. 1. l'angle DBH sera egal à CBF, & demy droict, & les deux lignes CD & FG estans parallelles par la 29. p. 1. l'angle interieur de mesme costé BFG sera demy droict, & l'angle G estant droict par la 34. p. 1. car il est opposé à vn droict, BHD sera demy droit par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles FGH, & BDH seront isosceles rectangles, & CG parallellograme rectangle.

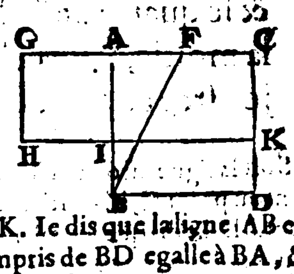
Maintenant il faut demonstrer ce qui est proposé sçauoir par la 47. p. 1. que le quarré de AF costé qui soustient l'ãgle droict, est egal aux deux quarrez des deux autres costez, partant double du quarré de AC. Par mesme discours FH se trouuera double du quarré de FG, ou de CD qui luy est egalle par la 34. p. 1. Ainsi les deux quarrez de AF & FH, ou le seul de AH qui leur est egal par la 47. p. 1. sera double des deux de AC & CD. Mais par la mesme 47. p. 1. il est egal aux deux quarrez de AD & DH, ou BD son egal, & par consequent les deux quarrez de AD & BD seront doubles des deux de AC & CD, ce qu'il falloit prouuer.

SOMMAIRE.

Les deux quarrez de AF & FH sont egaux aux deux quarrez de AD & DC.
Mais les quarrez de AF & FH sont doubles des quarrez de AC & CD.
Partant les deux quarrez de AD & DB seront doubles des deux quarrez de AC & CD.

PROP. XI.

Couper vne ligne droite donnée, tellement que le rectangle de la toute & de l'vne des parties, soit egal au quarré de l'autre.



Soit la ligne droicte donnée AB, laquelle il faut diuiser selon le requis de la prop.

Apres auoir construit sur icelle le quarré AD soit diuisée CA en deux egallement au point F, & apres auoir mené FB, & prolongé FA iusques en G soit faicte FG egalle à FB, & sur GA soit faict le quarré GI, & soit continuée HI iusques en K. Ie dis que la ligne AB est coupée au point I, en sorte que le rectangle ID compris de BD egalle à BA, & de BI partie de BA, est egal au quarré de l'autre partie AI, sçauoir à GI.

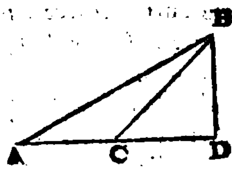
Car la ligne AC estant coupée en deux egallement en F, & on luy adiouste directement GA, le quarré de la moitié & de l'adioustée comme d'vne, sçauoir FG, ou de son egalle FB est egal au rect. de GC, & GA, & au quarré de AF par la 6. p. 2. Mais le quarré de FB est egal aux deux de BA, & AF par la 47. p. 1. ainsi les deux quarrez de BA, & AF seront egaux au rectangle de GC, & GA & au quarré de AF, lequel estant commun à toutes les deux grandeurs, s'il est osté, les demeurans quarré de AB, sçauoir AD & le rectangle de GA, & GC, sçauoir GK seront egaux, desquels GK & AD, si on oste le rectangle commun AK, le demeurant quarré GI sera egal au demeurant rectangle ID.

SOMMAIRE.

Le rectangle GK est egal au quarré AD.
Partant en ostant le rectangle commun AK, le demeurant GI sera egal au demeurant ID.

PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus est plus grand que les quarrez des deux autres costez de la quantité des deux fois du rectangle, compris du costé contenant l'angle obtus, celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.



Soit le triangle ambligone ABC, duquel soit prolongé le costé AC iusques en D, & du point B soit menée la perpendiculaire BD par la 12. p. 1. Ie dis que le quarré du costé AB qui soustient l'angle obtus ACB, est plus grand que les quarrez de AC & CB de deux fois le rectangle de AC & CD, sçauoir AC qui est l'vn des costez faisant l'angle obtus celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire BD, & CD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire.

Car le triangle ADB estant rectangle, le quarré de AB sera egal aux deux quarrez de AD & DB par la 47. p. 1. pareillement au triangle CBD, le quarré du costé CB, sera egal aux quarrez des deux autres costez CD & DB, ainsi les quarrez des lignes AC, CD, & DB seront egaux aux deux quarrez des costez AC, & CB. Mais les quarrez de AC, CD, & DB sont plus petits que les quarrez de AD, & DB (d'autant que si on oste le quarré de BD, les deux quarrez de AC, & CD se trouueront plus petits que le quarré commun de AD de deux fois le rectangle de AC, & CD par la 4. p. 1.) lesquels estans egaux au quarré de AB, Il s'ensuit que iceluy quarré de AB sera plus grand que les quarrez de AC, CD, & DB ou leurs egaux de AC, & CB de la quantité de deux fois le rectangle de AC & CD ce qui estoit à prouuer.

SOMMAIRE.

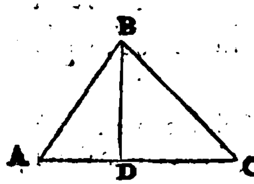
Le quarré de AB vaut les trois quarrez de BD, DC, CA, & deux fois le rectangle de AC, & CD.

Mais les quarrez de AC, & CB ne vallent que les trois quarrez de AC, CD, DB.

Partant le quarré de AB est plus grand que les quarrez de AC, & CB de deux fois le rectangle de AC, & CD.

PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle de l'vn des costez qui font l'angle aigu, sçauoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne au dedans entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.



Soit le triangle oxigoné ABC, & l'angle aigu en iceluy A, apres auoir mené la perpendiculaire BD. Ie dis que le quarré du costé BC, qui soustient l'angle aigu A est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez BA, & AC de deux fois le rectangle de AC & AD, sçauoir AC, l'vn des costez qui font l'angle aigu A sur lequel tombe la perpendiculaire, & AD prise entre la perpendiculaire & l'angle aigu A.

Car les deux triangles ADB, & CDB estans rectangles le quarré de BC sera egal aux quarrez de CD, & DB. Item le quarré de AB sera egal aux deux quarrez de AD, DB par la 47. prop. 1. il faut donc prouuer que les quarrez de BD & DC sont plus petits que les quarrez de AD, DB & AC de la quantité cy dessus. Mais les quarrez de AC, & AD sont egaux au quarré de DC, & deux fois le rectangle de AC & AD par la 7. p. 2. ausquels si on adiouste le quarré commun de BD, les touts seront egaux, sçauoir les quarrez AD, BD, & AC, aux deux quarrez de BD de DC, & deux fois le rectangle de AC, & AD: En ostant donc iceux deux rectangles, les quarrez de BD & DC seront d'autant plus petits que les quarrez de AD, DB, & AC. Ce qui estoit à prouuer.

SOMMAIRE.

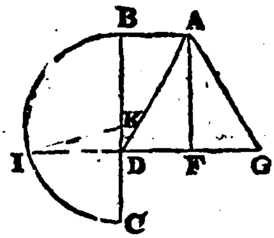
Les quarrez de BA, & CA sont egaux aux quarrez de DB, DA, DC, & deux fois le rectangle de AC, & AD.

Mais le quarré de BC, ne vaut que les quarrez de DB & DC.

Partant le quarré de BC, est plus petit que les deux quarrez de AC, & AB de la quantité d'iceux deux rectangles.

PROP. XIIII.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnée.



Soit donnée la figure rectiligne ADG, à laquelle il faut faire vn quarré egal.

Soit premierement fait le rectangle BF egal à la figure ADG par la 45. p. 1. Item soit prolongé le costé BD iusques en C, & soit faict DC egal à DF: & apres auoir couppé BC, en deux egallement au point K, & d'iceluy point descrit le demy cercle BIC, soit continuée DF iusques en I en la circonferance du demy cercle. Ie dis que le quarré de ID est egal à la figure rectiligne DAG.

Car puisque BC est couppée en deux egallement au point K & en deux inegallement au point D, le rectangle de BD & DC, sçauoir BF, auec le quarré de la section du milieu KD, est egal au quarré de la moitié KC par la 5. p. 2. ou de son egalle KI, lequel estant egal aux deux quarrez de KD & DI par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de KD, le demeurant quarré de ID se trouuerra egal au demeurant rectangle BF: & par consequent à la figure rectiligne donnée ADG.

Fin du second Element.

ELEMENT TROI-SIESME.

DEFINITIONS.

CERCLES egaux ſont ceux deſquels les diametres ſont egaux, ou deſquels les lignes menées du centre à la circonference ſont egalles.

2 Vne ligne droite eſt dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt continuée ne le couppe point.

3 Les cercles ſont dicts ſe toucher l'vn l'autre, quand en ſe touchant ils ne ſe couppent point.

4 Les lignes droictes ſont dictes eſtre equidiſtantes du centre, lors que les perpendiculaires tirées du centre ſur icelles ſont egalles. Mais celle eſt plus eſloignée du centre, ſur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

5 Section de cercle eſt vne figure compriſe d'vne ligne droite, & de la circonferance du cercle.

6 L'angle de la ſection eſt compris d'vne ligne droite, & de la circonferance du cercle.

7 Vn angle ſe dit eſtre en la ſection, lors que ſur vn point

pris en la circonferance sont menees deux lignes droictes des deux extremitez de la ligne qui sert de base à la section, & c'est l'angle compris d'icelles deux lignes.

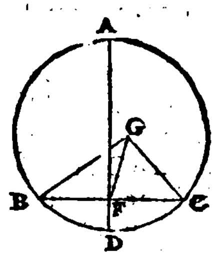
8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embrassent quelque circonferance, l'angle est dit estre en icelle.

9. Secteur de cercle est la figure de deux lignes droictes embrassant quelque circonferance, & faisant angle au centre du cercle.

10. Semblables sections du cercle sont, desquelles les angles sont egaux.

PROP I.

Trouuer le centre du cercle donné.



Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouuer le centre.

Soit tirée la ligne BC à l'aduenture, laquelle par la 10. & 11. p. 1. soit coupée en deux egallement, & à droicts angles par la ligne DA, Ie dis que en DA est le centre du cercle.

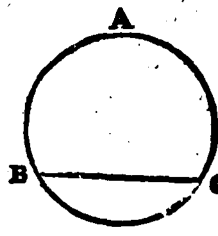
Autrement il sera dehors DA d'vne part ou d'autre d'icelle. Soit donc s'il est possible au point G, & soient menées les trois lignes droictes GB, GF, & GC. Ie dis doncque si G estoit le centre, par la deff. du cercle, BG & GC seront egalles: mais BF & FC sont aussi egalles, & GF commune. Partant les deux triangles GFB & GFC ont les trois costez egaux au trois costez chacun au sien, & par la 8. p. 1. les angles BFG & CFG seroient droicts, & la ligne FG perpendiculaire par la 10. deff. 1. Mais l'angle BFA par la construction est droict, & tous les angles droicts sont egaux par la 10. commune sentence, ainsi les deux angles BFG & BFA seroient egaux, sçauoir le tout à sa partie. Partant le centre ne peut estre hors la ligne DA, Soit donc icelle couppée en deux egallement, alors on aura le requis.

PROP. II.

Si en la circonferance d'vn cercle on prend deux points à l'aduenture, la ligne droicte menée de point à l'autre tom-

bera dans le cercle.

Soit la circonferance de cercle ABC, les deux points pris à l'aduenture en icelle B & C, Ie dis que la ligne droicte menée d'vn point à l'autre tombera dans iceluy cercle.

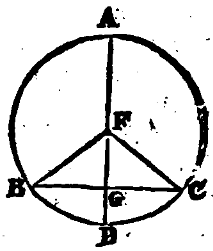


Ceste demonstration est fort intelligible: car si elle ne tomboit dans le cercle, il faudroit ou qu'elle tombast sur la circonferance du cercle, & elle seroit courbe, comme icelle circonferance, ou qu'elle tombast dehors la circonferance du cercle, ce qui n'est pas imaginable, d'autant qu'elle seroit encore moins droicte que la circonferance: elle tombera donc dans le cercle.

PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre, & couppe en deux egallement vne autre ligne droicte ne passant point par le centre, elle la couppera à droicts angles, & si à droits angles, aussi en deux egallement.

Soit le cercle donné ACDB, son centre F, la ligne passant par le centre AD, laquelle couppe en deux egallement BC laquelle ne passe point par le centre, ie dis que AD coupera aussi BC en angles droits.



Qu'il ne soit ainsi, soient menées les deux lignes CF & FB, les deux triangles BGF & CGF auront les deux costez BG & GF egaux aux deux costez CG & GF chacun au sien & la base BF egalle à la base FG, & par la 8. p. 1. les deux angles au poinct G seront egaux & droicts par la 10. def. 1.

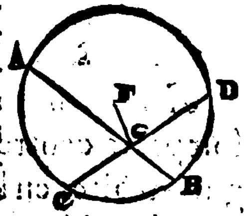
Ie dis pareillement que si AD couppe BC en angles droicts, qu'elle la couppera aussi en deux egallement. Car les deux angles au point G estans droicts seront egaux, & l'angle B egal à l'angle C par la 5. p. 1. estant BFC Isoscelle, & le costé FG commun aux deux triangles BGF & CGF, & par la 26. p. 1. BG sera egalle à GC.

PROP. IIII.

Si dans le cercle deux lignes droites ne passans point par le centre, s'entrecoupent, elles ne se couperont point l'vne l'autre en deux egallement.

Soit

Soit le cercle ACBD, les deux lignes AB & CD s'entrecoupans au point G, & ny l'vne ne l'autre ne passe par le centre F. Ie dis que l'vne ou l'autre est coupée inegallement.



Car si du centre F on meine la ligne FG, si icelles lignes se coupent en deux egallement au point G, FG les coupera au mesme point aussi en deux egallement & à droicts angles par la 3.p.3. & les angles FGA & FGB seront droits & egaux à FGC, & FGD aussi droits & egaux: ce qui est impossible, n'estant FGA que partie de FGC, ainsi les lignes AB, CD ne se coupoient pas en deux egallement.

PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'vn l'autre, ils n'auront pas mesme centre.

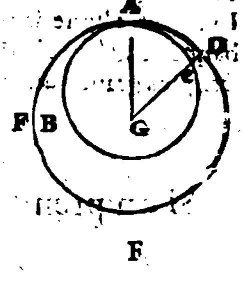
Soient les deux cercles se coupans l'vn l'autre AFC & ABD, ie dis qu'ils ne sçauroient auoir vn mesme centre.

Autrement s'il est possible soit leur centre commun G, ainsi puisque toutes les lignes tirées du centre à la circonferance sont egalles par la quinziesme deff. 1. D'iceluy centre G soient menées les deux lignes GA & GD, dans le cercle ABD, lesquelles seront egalles. Item les lignes GA & GC dans le cercle AFC, lesquelles seront aussi egalles, & par la 1. commune sentence GD & GC seroient egalles: ce qui est impossible. Partant les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre.

PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles AFD & ABC se touchans l'vn l'autre au point A, Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.



Autrement s'il est possible soit leur centre commun G, & d'iceluy soient menées les deux lignes GA & GD au cercle AFD. Item GA & GC au cercle ABC il s'ensuiura la mesme absurdité que en la precedente, sçauoir que GD & GC seroient egalles: donc G ne pouuoit estre leur centre commun.

PROP. VII.

Si au diametre du cercle se prend quelque point qui ne soit pas le centre, & d'iceluy point tombent quelques lignes droites en la circonferance, la plus grande sera celle en laquelle est le centre, & la plus petite celle qui reste. Mais des autres tousiours la plus proche de celle qui couppe le centre est plus grande que la plus esloignée: Et deux lignes droictes tant seulement venans d'iceluy point de part & d'autre du diametre sont egalles.

Soit le cercle donné ACBF, le centre d'iceluy H le diametre AB, le point pris dans le diametre qui ne soit point le centre I, & d'iceluy point I soient menées les lignes IC, IG, ID, IF. Ie dis que IA qui passe par le centre H, est plus grande que IC.

Qu'ainsi ne soit, il faut du centre H mener la ligne HC, laquelle par la defin. du cercle sera egalle à HA: ausquelles si on adiouste la commune HI, les deux IH & HC, seront egalles aux deux IH & HA: mais IH & HC sont plus grandes que IC par la 20. p. 1. Aussi IA sera plus grande que IC.

Secondement ie dis que IB est plus petite que ID ou autre quelconque, car si on mene du centre H la ligne HD, au triangle DIH, les deux costez DI & IH, seront plus grands que le troisiesme HD par la 20. p. 1. ou que son egalle HB. Que si on oste la ligne commune HI, le demeurant ID sera plus grand que le demeurant IB.

Tiercement ie dis que GI est plus petite que CI plus proche de la ligne AI: Car si on mene la ligne HG, les deux triangles CHI & GHI auront les deux costez CH & HI, egaux aux deux costez GH & HI chacun au sien: mais l'angle CHI plus grand que GHI, & par la 24. p. 1 la base IC sera plus grande que la base IG.

Finablement ie dis que la seule ID est egalle à IF, estans autant distantes l'vne comme l'autre du diametre AB, car il est euident qu'on ne pourra tirer du point I vne autre ligne dans le cercle qui ne s'approche ou recule de la ligne IA tombant de costé ou d'autre de IF ou ID, & par ce qui a esté monstré cy dessus, elle sera plus grande ou plus petite.

PROP. VIII.

Si on prend quelque point hors le cercle, & d'iceluy soient menées quelques lignes droictes dans la circonferance, celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes celles qui seront menées dans la circonferance concaue. Quant aux autres tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignée. Mais de celles qui passent par la circonferance conuexe la plus petite est celle qui est comprise entre le point & le diametre. Quant aux autres la plus esloignée est plus grande que la plus proche de la plus petite, & n'y a que deux lignes droictes qui puissent tomber egalles de part & d'autre de la plus petite.

Soit le cercle donné KDBH, le point pris hors iceluy A. duquel soient menées les lignes AB, AG, AD, AH, dans la concauité d'iceluy cercle, Ie dis que la ligne AB qui passe par le centre C, est plus grande que pas vne des autres, & specialement que sa plus proche AG.

Qu'ainsi ne soit du centre C il faut mener la ligne CG, il est euident que les deux lignes AC & CB sont egalles aux deux lignes AC & CG, lesquelles estant plus grandes que AG par la 20. p. 1. aussi les deux AC & CB, ou la seule AB sera plus grande que AG.

Ie dis secondement que AG est plus grande que AD, ce qui est euident par la 24. p. 1. comme il a esté prouué en la precedente.

Ie dis tierçement que les seules AG & AH sont egalles, ce qui se peut aussi prouuer comme en la precedente.

Ie dis quartement que des lignes qui tombent du point A sur la conuexité du cercle, sçauoir AN, AM, AL, AK, que AN comprise entre le centre C & le point A est la plus petite de toutes.

Car si du centre C on mene les lignes CM, CL, CK, par la 20. p. 1. Des deux lignes CL & LA seront plus grandes que CA : desquelles si on oste les egalles CN & CL, LA demeurera plus grande que NA. Item il se prouuera par la 24. p. 1. comme cy dessus que KA est aussi plus grande que LA, qui n'est pas tant esloignée de NA. Car les deux costez LC & CA sont egaux aux deux costez KC & CA & l'angle KCA plus grand que l'angle LCA : la base KA sera aussi plus grande que la base LA.

Finablement il se prouuera comme en la precedente que les seules lignes AL & AM sont egalles : car si on en mene vne autre du point A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus esloignée de AN.

PROP. IX.

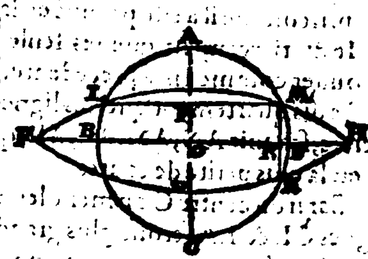
Si on prend quelque point au cercle, & d'iceluy point vers la circonferance tombent plus de deux lignes droictes egalles, le point pris est le centre du cercle.

Au cercle donné BCD soit pris le point A, & d'iceluy point soient menées les trois lignes AC, AB, AD, Ie dis que si elles sont egalles que le point pris est le centre.

Qu'il ne soit ainsi : il faut mener les lignes BC & BD, & apres les auoir coupé en deux egallement aux points G & K, d'iceux points au point A soient menées les deux lignes GH & KL; les deux triangles BGA & CGA ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, les deux angles au point G seront egaux, & la ligne GAH sera perpendiculaire, & par ce qui a esté demonstré à la 1. p. 3. Le centre du cercle sera en icelle, par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en KL. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant point d'autre point commun.

PROP. X.

Vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts.

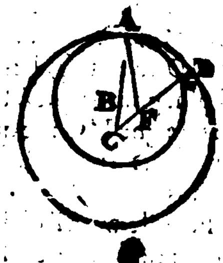


Soient les deux cercles ABCD & FGEH se couppans aux trois poincts L, M, N, s'il est possible. Item soient menées les deux lignes LM & MN, lesquelles soient couppées en deux egallement aux poincts I & K par la 10. p. 1. & soient menées les lignes IG & KB à droicts angles, il faudra que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC, ils seront aussi en la ligne FH par ce qui a esté demonstré à la premiere prop. 3. Ce sera donc au point de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre contre la 5. p. 3. Donc les cercles ne se pouuoient coupper en trois poincts.

PROP. XI.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, la ligne

droicte menée par les deux centres passera par lattouchement des cercles.

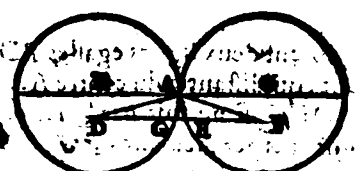


Soient deux cercles se touchans interieurement au point A, desquels les centres sont C du plus grand & B du plus petit. Ie dis que la ligne droicte menée par les deux centres CB tombera sur le point de l'attouchement A.

Autrement elle tombera ailleurs. Soit donc s'il est possible au point D couppant les deux cercles, & soient les deux centres C, & F desquels soient menées les lignes C A, & FA, le triangle CAF aura les deux costez CF, & FA plus grands que le troisiesme AC par la 20. p. 1. Item la ligne CD estant egalle à CA les deux CF, & FA seront aussi plus grandes que CD, ce qui est absurde, estant FD egal à FA, & CF commun, donc la ligne passera par l'attouchement A.

PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dehors la ligne menée d'vn centre à l'autre, passera par l'attouchement.

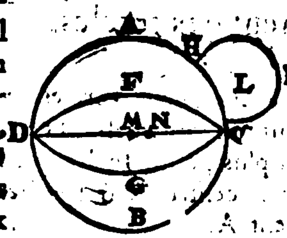


Soient deux cercles se touchans au point A, desquels les centres soient B, & C. Ie dis que si d'vn centre à l'autre on meine vne ligne droicte, que icelle passera par le point d'attouchement A.

Autrement il s'ensuiura absurdité : car si icelle ligne ne passe par le point d'attouchement, qu'elle passe ailleurs s'il est possible, sçauoir aux points G, & H, les deux centres estans D, & F : autrement la ligne ne sera pas droicte, & du point A soient menées les deux lignes DA, & FA, lesquelles par la 20. p. 1. seront plus grandes que DF, & par la deff. du cercle, il s'ensuit que DG estant egalle à DA, & FH à FA que les deux lignes DG, & HF seroient plus grandes que DF, ce qui est contre la 8. com. sent.

PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'vn point, tant dehors que dedans.



Soient les deux cercles ADBC, & DFGC se touchans interieurement aux deux points D, & C, s'il est possible, & d'autant qu'ils ne peuuent auoir vn mesme centre par la 6. p. 3. soient les deux centres diuers M, & N par la deff. du cercle, il faut que MC, & MD soient egalles. Item NC, & ND. Mais ND est plus grande que MD. Partant NC sera aussi plus grande que MC : ce qui est impossible, donc les deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.

Pareillement il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'vn point : car si le cercle HIC pouuoit toucher le cercle ADC en deux points, sçauoir H, & C, il faudroit que la ligne droicte menée par les deux centres M & L, coupasse les deux points d'attouchement H, & C par la 12. p. 3. ce qui est impossible : ainsi les cercles ne se touchent point à plus d'vn point tant dehors que dedans.

PROP. XIII.

Dans vn cercle les lignes droictes egalles sont equidistantes du centre ; & les equidistantes du centre sont egalles entre elles.

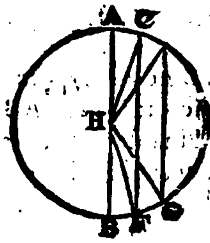
Soient deux lignes egalles BD, & CF, Ie dis qu'elles seront equidistantes du centre A.

Qu'ainsi ne soit par la 12. p. 1. soient menées les deux lignes perpendiculaires AG, & AH. Item les deux AC, & AB. Ie dis premierement que les deux lignes BD, & CF estans couppées en angles droicts par les perpendiculaires AG, & AH, qu'elles seront aussi couppées en deux egallement par la 3. p. 3. & partant BG sera egalle à CH. Pareillement BA estant egalle à AC, & le quarré de AB estant egal aux deux quarrez de BG, & GA par la 47. p. 1. & son egal quarré de AC estant aussi egal aux deux quarrez de AH, & HC, les deux quarrez de BG, & GA seront egaux aux deux quarrez de AH, & HC. Mais le quarré de BG est egal au quarré de CH, & par consequent le quarré de AG est egal au quarré de AH, & la ligne AG sera egalle à AH, & par les deff. du 3. BD, & CF seront equidistantes du centre du cercle donné.

Quant à la seconde partie, Ie dis que si elles sont equidistantes qu'elles seront egalles ; car les perpendiculaires AG & AH seront egalles, & par deduction de la 47. p. 1. comme cy dessus BG se trouuera egalle à CH, & par consequent aussi leurs doubles BD, & CF seront egalles, ce qui estoit à demonstrer.

PROP. XV.

Dans le cercle la plus grande ligne est le diametre : quant aux autres tousiours la plus proche du centre est plus grande que la plus esloignée.



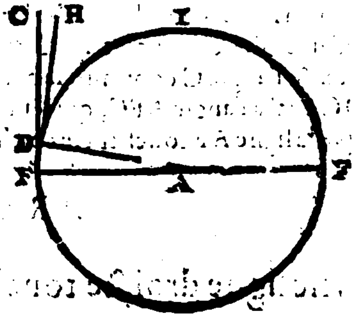
Soit le cercle donné ABGD, les lignes dans iceluy AB CF, DG. Ie dis que AB (qui est le diametre) est plus grande que CF, ou autre quelconque, & CF plus proche du centre H que DG, est plus grande que DG.

Qu'il ne soit ainsi du centre H soient menées les lignes HC, HD, HF, HG. Ie dis que au triangle CHF, les deux costez CH, & HF sont plus grands que le troisiesme CF par la 20. p. 1. Mais CH, & HF sont egaux à HA, & HB par la deffinition du cercle, donc AB, sera plus grande que CF.

Item des triangles CHF, & DHG, les costez, HC, HD, HF, HG, sont egaux par la deffinition du cercle, l'angle CHF, plus grand que DHG & par la 24. p. 1. la base CF sera plus grande que la base DG, & ainsi des autres.

PROP. XVI.

Si a l'extremité du diametre d'vn cercle on leue vne ligne perpendiculaire icelle tombera dehors le cercle, & entre icelle perpendiculaire & la circonferance ne tombera pas vne autre ligne droicte, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.



Du cercle donné soit le centre A, le diamettre BF, sur l'extremité duquel B soit leuée la ligne perpendiculaire BC, par la 11. p. 1. Ie dis premierement que toutes les parties d'icelle ligne BC, tomberont hors le cercle.

Qu'ainsi ne soit si on pense que quelque partie de BC entre dans le cercle, soit marqué l'endroict d'icelle partie en la ligne BC & soit par exemple le point D duquel soit menée la ligne DA, il est euident que le triangle DBA aura l'angle droit DBA plus grand que pas vn des autres, & par la 19. p.1. le costé DA qui soustient le plus grand angle sera plus grand que le demy diametre BA. Il est donc necessaire qu'il sorte hors la circonferance, ainsi le point D ne touchera point icelle circonferance, ainsi adviendra il de tous les autres points que l'on pensera toucher le cercle.

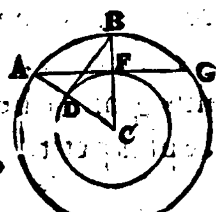
Ie dis secondement qu'vne autre ligne droicte ne pourra tomber entre la premiere CB, & la circonferance BI, qu'elle n'entre dans le cercle.

Car, s'il est possible, soit menée HB, laquelle ne peut estre perpendiculaire à BA, donc par la 12. p. 1. Soit menée AD perpendiculaire sur icelle HB, l'angle ADB sera droict, & par la 19. p. 1. BA sera plus grand costé que AD. Il faut donc que AD ne voise point iusques à la circonferance, autrement par la deff. du cercle elle seroit egalle à AB. Partant il faut que HB entre dans le cercle.

Finablement il s'ensuit que tout l'angle du demy cercle IBA est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celuy qui reste IBC est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puisque CBA est angle droit diuisé par la seule circonferance IB, & que entre icelle circonferance IB & la droicte CB n'en peut tomber vne autre droicte, L'angle CBI ne peut estre diuisé par aucune ligne droicte, ainsi ne sera diminué par aucune ligne droicte, ny par consequent IBA ne sera augmenté par aucune ligne droicte.

PROP. XVII.

D'vn point donné mener vne ligne droicte qui touche le cercle donné.



Soit le point donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte qui touche le cercle donné DF.

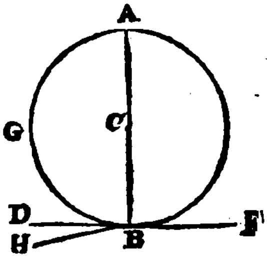
Soit menée la ligne AC du point donné au centre & du centre C & interual CA, soit descrit le cercle AB. Et apres auoir leué la perpendiculaire DB au bout du diametre DC par la 11. p. 1. Soit menée la ligne BC couppant le cercle DF au point F, & du point donné à iceluy point F. soit menée la ligne AF, ie dis qu'elle touche le cercle au point F.

Car les deux triangles AFC & BDC ayans deux costez egaux & l'angle C commun, la base AF sera egalle à la base DB, & l'angle droict BDC egal à l'angle AFC, qui sera aussi droict. Et parce qui a esté demonstré à la 16. p. 3. la ligne AF touchera le cercle DF au seul point F.

PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte touche le cercle, & du centre à l'attouchement

chement on meine vne ligne droicte, elle sera perpendiculaire à la touchante.

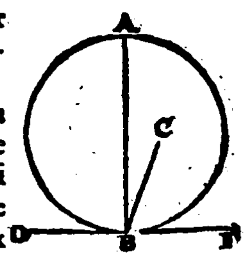


Soit la ligne DF touchant le cercle donné au point B, & d'iceluy point soit menée la ligne AB passant par le centre C. Ie dis qu'elle sera perpendiculaire à DF.

Autrement si elle n'est perpendiculaire, l'angle DBC, sera plus grand ou plus petit qu'vn angle droict. Il ne peut estre plus petit: car ayant leué la perpendiculaire BH, DB tomberoit entre la perpendiculaire HB, & la circonferance contre la 16. p. 3. Il ne peut estre aussi plus grand: car par la 14. p. 1. l'angle de l'autre costé CBF, seroit plus petit qu'vn angle droict. & de la s'ensuiuroit le mesme inconuenient que dessus, partant la ligne AB sera perpendiculaire à DF.

PROP. XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & au point de l'attouchement est leuée vne perpendiculaire, icelle coupera le centre du cercle.

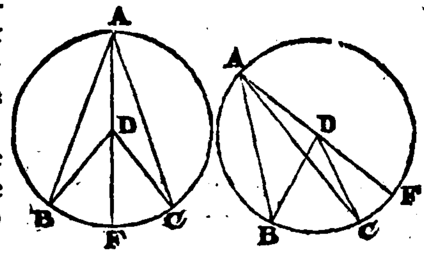


Soit la ligne DF touchant le cercle au point B, & sur iceluy soit leuée la perpendiculaire AB. Ie dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne.

Autrement il sera dehors icelle ligne, soit donc au point C, s'il est possible, & d'iceluy poinct soit menée la ligne CB au poinct de l'attouchement B, elle sera aussi perpendiculaire à DF par la 18. p. 3. ce qui est impossible car les deux angles ABF, & CBF, seroient droits, & egaux contre la 8. com. sentence, partant le centre du cercle n'estoit pas hors de la ligne AB, ains dedans.

PROP. XX.

Dans le cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonferance quand iceux angles ont vne mesme circonference pour base.



Dans le cercle ABC soient les deux angles, sçauoir BAC en la circonferance & BDC au centre ayant BC mesme circonferance pour base. Ie dis que BDC sera double de BAC.

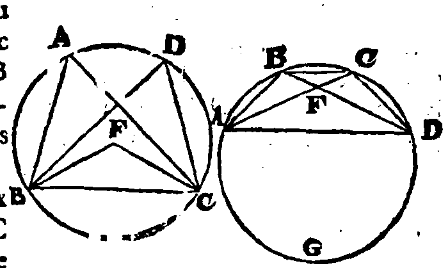
Qu'ainsi ne soit, il faut mener la ligne ADF diuisant iceux angles. Ie dis que pour autant que les lignes DA, DB, & DC, sont egalles, les deux triangles ADB, & ADC seront Isosceles, & par la 5. p. 1. auront les angles egaux sur les bases AB, & AC. Mais l'angle exterieur BDF par la 32. p. 1. est egal aux deux angles interieurs DAB, & DBA : qui sont egaux. Partant il sera aussi double du seul DAB, par mesme discours FDC se trouuera double de DAC, & par consequent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC.

Que si l'angle de la circonferance A est comme en ceste seconde figure, il s'ensuiura tousiours le mesme, sçauoir que BDC sera double de BAC.

Car apres auoir mené la ligne ADF tout ainsi comme cy dessus par la 32. p. 1. l'angle exterieur BDF sera egal aux deux opposez interieurs ABD, & DAB, & double du seul DAB estant le triangle Isoscele, par mesme discours CDF sera double de CAD, & par les com. sent. Si de BDF double de BAF on oste CDF, double de CAF le demeurant BDC sera double du demeurant BAC.

PROP. XXI.

Dans le cercle les angles qui s'appuyent sur vne mesme section sont egaux.



Toute section est ou plus grande ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement vne plus grande section BADC, les deux angles, sur la mesme section BC soient BAC, & BDC. Ie dis qu'ils sont egaux.

Car si du centre F on meine les deux lignes FB, & FC, l'angle du centre BFC sera double de l'angle en la circonferance BAC par la 20. p. 3. & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle CDB. Mais les choses qui sont moitié d'vne mesme sont egalles entre elles, ainsi les angles A, & D seront egaux.

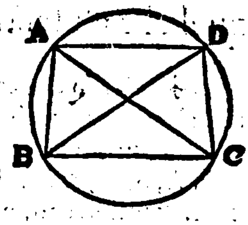
Soit maintenant la section ABCD, plus petite que le demy cercle. Ie dis que les deux angles ABD, & ACD estans sur la mesme section AD sont egaux.

Car si on meine la ligne BC, il se fera vne section BGC, plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demonstré cy dessus les deux angles BAG

&BDC qui sont sur vne mesme section BC seront egaux, pareillement aux deux triangles BAF, & CDF: les angles opposez au point F sont egaux par la 15. p. 1. & par ce qui a esté demonstré à la 32. p. 1. le troisiesme B sera egal au troisiesme C, ce qui estoit à prouuer.

PROP. XXII.

Les figures de quatre costez inscrites au cercle ont les angles opposez egaux à deux angles droits.

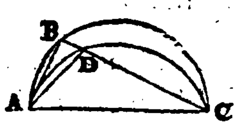


Soit la figure de quatre costez inscrite au cercle ABCD. Ie dis que les angles opposez B, & D sont aussi egaux à deux droicts.

Car si on meine les deux lignes AC, & BD, les deux angles ACD, & ABD sur la mesme section AD seront egaux par la 21. p. 3. Pareillement DBC, & CAD seront egaux sur la mesme section DC, donc les deux angles sous le poinct B seront egaux aux deux DAC, & DCA, lesquels auec les deux du point D sont egaux à deux droits, par la 32. p. 1. partant aussi les deux sous le point B auec les deux sous le point D seront egaux à deux droits.

PROP. XXIII.

Deux sections de cercles semblables & inegalles ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte & de mesme part.



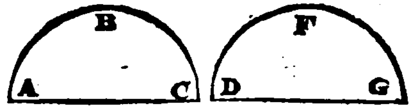
Soient deux sections de cercles semblables, & inegalles ABC, & ADC sur la ligne droicte AC, & de mesme costé. Ie dis qu'il s'ensuiura absurdité.

Car si du point B on meine la ligne BC, & les deux lignes BA, & DA par la deffinition des semblables sections, les deux angles ABC, & ADC seront egaux, ce qui est absurde: car par la 16. p. 1. l'angle exterieur ADC doit estre plus grand que l'opposé interieur B: donc les deux sections ABC, & ADC (estant semblables, & inegalles) ne se pouuoient mettre sur la mesme ligne AC.

PROP. XXIIII.

Semblables sections de cercle estans constituées sur lignes droictes egalles, sont egalles entre elles.

Soient deux sections de cercles semblables ABC, & DFG constituez sur lignes egalles AC, & DG. Ie dis qu'elles sont egalles.

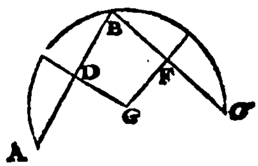


Autrement, si elles estoient inegalles il s'ensuiuroit que deux sections semblables, & inegalles pourroient estre posées sur lignes droictes egalles contre la 23. p. 3. donc les deux sections seront egalles.

PROP. XXV.

La section du cercle estant donnée descrire le cercle duquel elle est section.

Soit la section de cercle ABC de laquelle il faut trouuer le centre pour acheuer le cercle d'icelle section.



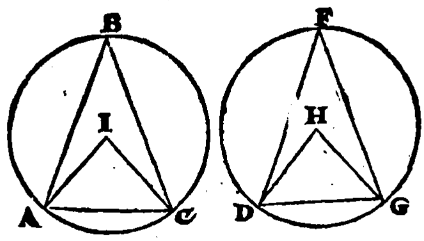
Soient pris trois poincts à l'aduanture en icelle section A, B, C, & apres auoir mené les deux lignes AB, & BC & icelles couppées en deux egallement, en D, & F d'iceux points soient leuées les perpendiculaires DG, & FG se rencontrans au point G. Ie dis que G est le centre cherche pour acheuer le cercle.

Car par ce qui a esté demonstré à la 1. p. 3. le centre sera à la ligne DG. Il sera aussi en FG: ce sera donc au point G qui leur est commun.

PROP. XXVI.

Dedans cercles egaux les angles egaux, tant aux centres que aux circonferances ont pour base circonferances egalles.

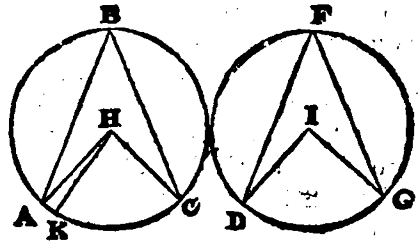
Soient les cercles egaux ABC & DFG, & les angles dans iceux egaux, sçauoir aux circonferances B egal à F, & aux centres I egal à H. Ie dis que les circonferances qu'ils ont pour base sont egalles, sçauoir AC, DG.



Car d'autãt que les cercles sont egaux, les lignes du centre à la circonferance seront egalles par la p. d. 3. Ainsi les deux triangles AIC, & DHG ont deux costez egaux chacun au sien, & l'angle I egal à l'angle H, & par la 4. p. 1. la base AC sera egalle à la base DG. Pareillement l'angle B estant egal à l'angle F, la section ABC sera semblable à la section DFG par la 10. d. 3. & par la 24. p. 3. elles seront egalles; & qui de cercles egaux oste sections egalles, sçauoir ABC & DFG, le demeurant AC sera egal au demeurant DG, ainsi les angles egaux auront pour base circonferances egalles.

PROP. XXVII.

Dedans cercles egaux les angles sont egaux, qui ont pour bases egalles circonferances, soit au centre, ou en la circonferance.



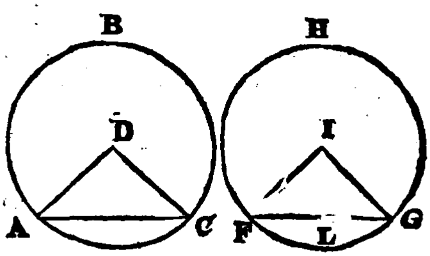
Soient deux cercles egaux ABC & DFG, & sur les circonferances egalles AC & DG soient les angles ABC & DFG tous deux en la circonference. Item AHC & DIG au centre, ie dis que les angles H & I seront egaux.

Autrement l'vn d'iceux sera plus grand ou plus petit. Soit donc AHC plus grand que DIG, s'il est possible il faudra par la 23. p. 1. sur CH faire CHK egal à DIG, & par la 26. p. 3. les circonferances KC & DG seront egalles: ce qui est contre nostre hypotese: car nous auions posé AC egalle à DG: Il faudroit donc que AC & KC fussent egalles contre la 8. commune sentence. Donc l'angle H n'estoit point plus grand que l'angle I.

L'egalité des angles du centre estant prouuée, les angles de la circonferance sont entendus egaux par la 20. p. 3.

PROP. XXVIII.

Dedans cercles egaux les lignes droictes egalles couppent circonferances egalles, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

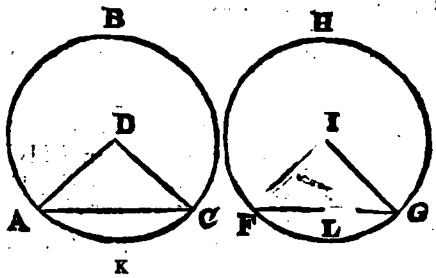


Soient les deux cercles egaux ABC, & FHG, & dans iceux deux lignes egalles AC, & FG. Ie dis que les circonferances qu'elles couppent sont egalles, sçauoir la petite AKC à la petite FLG, & la grande ABC, à la grande FHG.

Qu'il ne soit ainsi, des centres D, & I soient menées les lignes DA, DC, IF, & IG qui seront egalles par la premiere deff. 3. estant les cercles egaux, & la ligne AC, estant egalle à la ligne FG, les deux triangles ADC, & FIG auront les 3. costez egaux chascun au sien, & par la 8. p. 1. l'angle D sera egal à l'angle I, & par la 26. p. 3. ils auront egalles circonferances pour bases & AKC sera egalle à FLG, & qui de cercles egaux oste circonferances egalles AKC, & FLG les demeurantes sections ABC, & FHG seront egalles.

PROP. XXIX.

Dedans cercles egaux les circonferances egalles comprennent lignes droictes egalles.

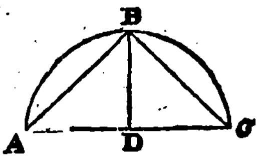


Soient les cercles egaux BAKC & FLGH, desquels les sections AKC & FLG sont egalles, si on meine les lignes AC & FG, ie dis qu'elles sont egalles.

Qu'ainsi ne soit des centres D, & I soient menées les lignes droictes DA, DC, FI, IG. Mais d'autant que l'on pose les circonferances AKC, & FLG egalles, les angles D, & I, (qui ont pour bases icelles circonferances egalles) seront egaux par la 27.p.3. pareillement les costez DA, & DC, estans egaux aux costez IF, & IG par la 1.p.3. la base AC, sera egalle à la base FG, par la 4.p.1. ce qui estoit à prouuer.

PROP. XXX.

Coupper vne circonferance en deux egallement.



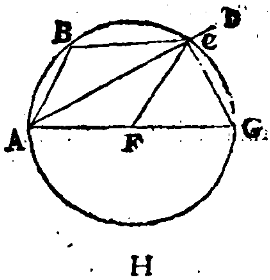
Soit la circonferance donnée ABC, laquelle il faut coupper en deux egallement.

Soit menée la ligne AC, laquelle soit couppée en deux egallement au point D, duquel point il faut mener la perpendiculaire DB. Ie dis que en B la circonferance est couppée en deux egallement.

Qu'il ne soit ainsi, il faut mener les lignes AB, & BC & pour autant que les deux costez AD, & DB du triangle ADB sont egaux aux deux costez CD, & DB du triangle CDB, & les deux angles au point D egaux par la 4.p.1. la base AB sera egalle à la base BC, & par la 28. p.3. les circonferances AB, & BC seront egalles.

PROP. XXXI.

Dedans le cercle l'angle qui est au demy cercle est droit: & celuy qui est en la plus grande section est plus petit qu'vn droict: Mais celuy qui est en la plus petite est plus grand qu'vn droict.



Soit l'angle dans le demy cercle ACG, Ie dis qu'il est droit.

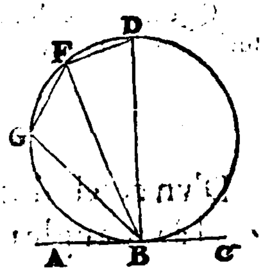
Qu'il ne soit ainsi, il faut mener la ligne FC apres auoir continué AC iusques en D. Il est euident que les triangles AFC, & CFG sont Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base egaux, sçauoir FAC, à FCA, & FCG, à FGC; & les deux ensemble ACF, & GCF seront egaux aux deux ensemble CAF, & CGF. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur DCG est egal à iceux deux angles CAF, & CGF, & partant les deux au point C, faisans le seul ACG seront aussi egaux à l'exterieur GCD, & par la 10. p. 1. ACG, & DCG seront tous deux angles droicts.

Ie dis d'auantage que l'angle CGA qui est en la plus grande section CGHA est plus petit qu'vn droit: ce qui est aisé à prouuer par la 32. p. 1. d'autant que l'angle ACG, estant droict, les deux autres ensemble ne vaudront qu'vn droict, ainsi l'angle G est plus petit qu'vn angle droict, & ainsi des autres.

Ie dis finablement que en la petite section ABC, l'angle ABC est plus grand qu'vn droict: car par la 22. p. 3. la figure de 4. costez ABCG, inscrite au cercle faict les deux angles opposez egaux à deux droicts, sçauoir B, & G. Mais nous auons prouué G estre plus petit, par consequent B sera plus grand.

PROP. XXXII.

Si quelque ligne droicte touche le cercle, & de l'attouchement on meine quelque ligne droicte couppant le cercle: les angles qu'elle faict à la touchante sont egaux à ceux qui sont alternatiuement aux sections du cercle.



Soit la ligne droicte AC touchant le cercle au point B, & d'iceluy point soit menée FB couppant le cercle en deux sections inegalles. Ie dis que l'angle FBA est egal à tout angle qui peut estre fait en la plus grande section, & que FBC est egal à tout angle qui peut estre faict en la plus petite section.

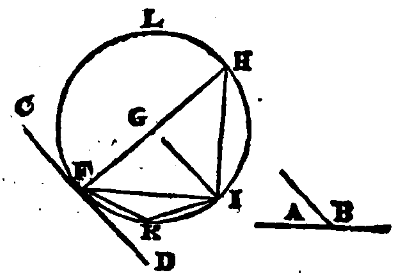
Qu'il ne soit ainsi apres auoir menè le diametre BD, soient menées les lignes DF, FG, GB, maintenant par la 31. p. 3. l'angle DFB dans le demy cercle est droict, & par la 32. p. 1. les deux autres D, & FBD sont egaux à vn droit, c'est à dire à DBA lequel est droit par la 18. p. 3. desquels si on oste l'angle cômun FBD, le demeurât FBA, sera egal au demeurât D. Pareillemêt par la 22. p.

3. la figure de 4. costez inscrite au cercle DFGB fera les angles opposez G, & D egaux à deux droicts: c'est à dire aux deux FBA, & FBC, desquels si on oste choses egalles, c'est à sçauoir les angles D, & FBA egaux, les demeurans FGB & FBC seront egaux.

Que si la ligne coupant le cercle estoit le diamettre d'iceluy, tous les angles tant en l'vn qu'en l'autre demy cercle seroient droits par la 31. p. 3.

PROP. XXXIII.

Dessus vne ligne droicte donnée, descrire la section d'vn cercle capable d'vn angle egal à l'angle rectiligne donné.



Soit la ligne donnée FI, il faut sur icelle descrire vne section de cercle comprenant vn angle egal à l'angle donné A.

Soit construit IFD egal à l'angle donné A par la 23. p. 1. & apres auoit continué FD iusques en C, & du point F leué la perpendiculaire FH, sur la ligne FI, & au point I soit l'angle FIG egal à l'angle IFG par la 32. p. 1. rencontrant la perpendiculaire FH au point G par la 6. p. 1. GI, & GF seront egaux. Partant le cercle descrit du centre G & interual GI passera aussi par le point F, & apres auoir mené la ligne HI l'angle IFD (qui est egal à l'angle A) sera egal à l'angle H, descrit dans la section FLHI, par consequent l'angle H sera egal à l'angle A, ainsi nous auons descrit vne section de cercle sur la ligne donnée, capable d'vn angle egal à vn angle donné.

Que si l'angle donné eust esté obtus comme B, il eust fallu construire IFC egal à iceluy, & chercher le centre G comme dessus, pour descrire le cercle LFKIH, & par la 32. p. 3. la plus petite section IKF eust compris l'angle IKF egal à l'angle IFC.

Que si l'angle donné eust esté droit, ne falloit que descrire vn demy cercle sur la ligne donnée.

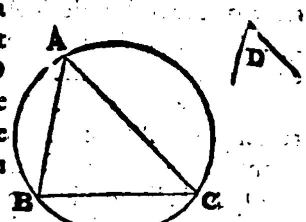
PROP. XXXIV.

D'vn cercle donné, oster vne section capable d'vn angle, egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut oster vne section capable d'vn angle rectiligne egal à l'angle donné D.

Soit

Soit menée à l'aduenture la ligne CA, touchant la circonferance aux points C & A, & sur icelle ligne soit basty l'angle CAB egal à l'angle rectiligne donné D par la 23.p.1. & soit menée la ligne BC, ie dis qu'icelle diuisera le cercle en deux sections, dont la plus grande comprend l'angle BAC, par construction egal au donné.



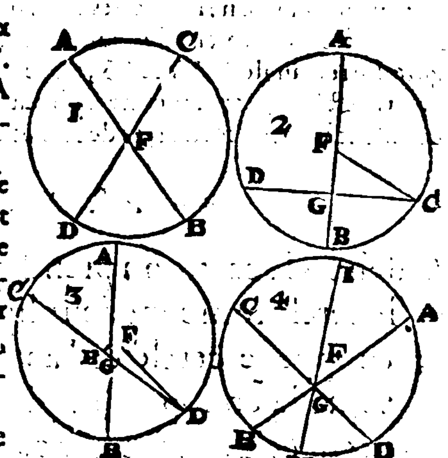
SCHOLIE.

Il aduient quelquesfois que l'angle donné estant obtus, si on faisoit vn angle obtus sur la ligne tirée à l'aduenture, que l'autre ligne sortiroit hors le cercle. Mais pour euiter cest inconuenient, si vn angle obtus estoit donné faudra prendre l'angle aigu, lequel auec l'angle obtus donné accompliroit deux angles droicts, cela est aisé à practiquer en continuant directement l'vne des lignes qui comprennent l'angle donné, puis practiquer comme enseigne la proposition. Et dedans la grande section on aura l'angle aigu. Et dans la petite section vn angle obtus egal au donné par la 32.p.3. d'autant que iceux deux angles font vne figure de quatre costez.

PROP. XXXV.

Si dans vn cercle deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, le rectangle des deux pieces de l'vne, est egal au rectangle des deux pieces de l'autre.

Soit le cercle donné ACBD les deux lignes en iceluy se couppans au point F. Ie dis que le rectangle des deux pieces AF & FB, est egal au rectangle des deux pieces CF & FD.



Mais d'autant que les lignes qui se couppent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'vne d'icelles seulement, ou ny l'vne ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre, comme en la premiere figure, les quatre lignes feront egalles, & par ainsi la proposition est euidente.

Que si la seulle AB passe par le centre F, & diuise D C en deux egallement comme en la 2. figure, elle la diuisera aussi à droicts angles, par la 3. p. 3. Et apres auoir mené FC, il est euident par la 5. p. 2. que le rectangle de AG & GB auec le quarré de GF seront egaux au quarré de FB ou FC (car la ligne AB est couppée en deux egallement au poinct F, & en deux inégallement en G) & par la 47. p. 1. le quarré de FC estant egal aux deux quarrez de FG & GC en ostant le quarré commun de FG, le demeurant rectangle de AG & GB, se trouuera egal au quarré de GC, comme il a esté demonstré à la 14. p. 2. ou au rectangle de DG & GC.

Que si la ligne AB passant par le centre F (comme en la 3. figure) diuise inegallement CD ne passant point par le centre, il s'ensuiura la mesme chose. Car (apres auoir mené la perpendiculaire FH, & la ligne droite FD) pour autant que AB est couppée en deux egallement en F, & en deux inegallement en G, le rectangle de AG & GB auec le quarré de GF sera egal au quarré de FB ou de son egalle FD par la 5. p. 2. Mais le quarré de FG est egal aux deux de FH & HG par la 47. p. 1. Pareillement le quarré de FD est egal aux deux de FH & HD par la 47. p. 1. Donc en ostant le quarré commun de FH, le demeurant quarré de HD sera egal au rectangle de AG & GB, & quarré de HG. Par mesme discours & par la mesme 5. p. 2. le quarré de HD est egal au rectangle de CG & GD, & quarré de HG: & en ostant le quarré commun de HG, le rectangle de AG, & GB se trouuera egal au rectangle de CG, & GD.

SOMMAIRE.

Le rectangle de AG & GB auec les deux quarrez de FH & HG, sont egaux aux quarrez de FH & HD:

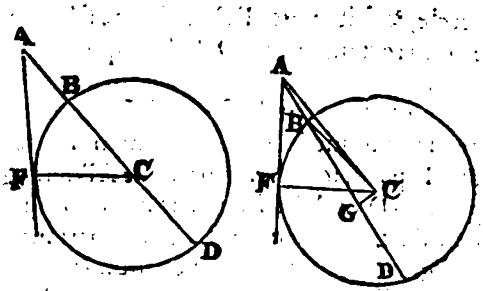
Mais le rectangle de CG & GD auec les deux quarrez de FH & HG, sont aussi egaux aux mesmes quarrez de FH, & HD.

Partant en ostant tous les quarrez de part & d'autre, le rectangle de AG & GB, demeurera egal au rectangle de CG & GD.

Que si ny l'vne ne l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, il s'ensuiura le mesme: car si on meine le diametre IK, passant par le point commun de la 4. figure. Le rectangle de IG & GK, sera egal au rectangle de CG, & GD, comme cy dessus a esté dit, & par mesme raison aussi au rectangle de AG & GB, & par la 1. com. sent. les deux rectangles de AG & GB, Item de CG & GD seront egaux.

PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'vne desquelles couppe le cercle & l'autre le touche, le rectangle de toute la couppante & de sa partie dehors prise entre le point & la circonferance conuexe, est egal au quarré de la touchante.



Soit A point pris hors le cercle donné, duquel soit menée la ligne AD couppante, & AF touchante: Ie dis que le rectangle de la toute AD & de la partie AB prise entre le poinct donné & le cercle, est egal au quarré de la touchante AF.

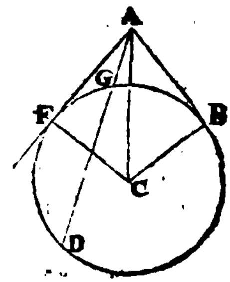
Qu'il ne soit ainsi, du centre C, au point d'attouchement F, Soit menée la ligne CF, laquelle par la 18. p. 3. sera perpendiculaire à icelle touchante FA, & pourautant que la ligne BD est couppée en deux egallement au point C, & à icelle est adiousté directement BA, le rectangle de la totalle AD, & de sa partie AB auec le quarré de BC (ou FC son egalle) est egal au quarré de CA par la 6. p. 2. ou aux deux de AF & FC par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de FC, le demeurant quarré de AF sera egal au demeurant rectangle de AD & AB, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passoit par le centre du cercle donné faudra demonstrer en ceste sorte: du centre C soient menées les lignes CA, CB, CF, & la perpendiculaire CG, laquelle couppera BD en deux egallement par la 3. p. 3. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus le rectangle de AD & AB auec le quarré de BG sera egal au quarré de AG, ausquelles choses egalles si on adiouste le quarré commun de GC, le rectangle de AD & AB auec les deux quarrez de BG & GC, ou le seul de BC, par la 47. p. 1. sera egal aux deux quarrez de AG & GC, ou au seul de AC, par la 47. p. 1. ou aux deux de AF, & FC, par la mesme 47. p. 1. Que si on oste les quarrez egaux de BC, & FC, les demeurans quarre de AF, & le rectangle de AD & AB seront egaux.

PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent deux lignes droictes vers iceluy cercle, l'vne desquelles couppe le cercle, & l'autre latteint: Si le rectangle de toute la couppante, & de la partie prise entre le poinct & la circonferance conuexe est egal au quarré de celle qui tombe aupres, Icelle tombante touchera le cercle.

Hors le cercle donné soit pris le point A, & d'iceluy soit menée la ligne AD qui couppe le cercle au point G, & la ligne AF terminée au point F sur iceluy



cercle, & soit menée FC, ie dis que si le quarré de AF, est egal au rectangle de AD & AG, que la ligne AF touche le cercle donné.

Car si du point A est menée la ligne AB touchant le cercle au point B, apres auoir mené les deux lignes CA & CB, par la 36. p. 3. le quarré de AB sera egal au rectangle de AD & AG: Mais par hypotese le quarré de AF est aussi egal à iceluy rectangle, & partant les quarrez & les lignes AF & AB seront egalles. Item CF, & CB sont aussi egalles par la deff. du cercle & CA à soy-mesme: ainsi les deux triangles ABC & AFC, ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, les angles B, & F seront egaux par la 8. p. 1. & B estant droict par la 18. p. 3. aussi F sera droict, & par ce qui a esté demonstré à la 16. p. 3 la ligne AF sera touchante.

Fin du troisiesme Element.

ELEMENT QVATRIESME.

DEFINITIONS.

VNe figure rectiligne se dict estre inscrite en vne figure rectiligne, lors que vn chacun des angles de la figure inscrite, touche vn chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2 Semblablement aussi la figure se dict estre circonscrite à vne figure, quand vn chascun costé de la circonscrite, touche vn chascun angle de l'inscrite.

3 Mais la figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite, touche la circonferance du cercle.

4 Et la figure rectiligne se dict estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonferance du cercle.

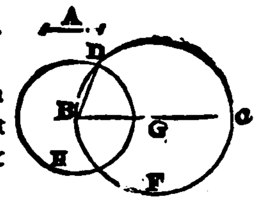
5 Semblablement aussi le cercle se dit estre inscrit en vne figure rectiligne, quand la circonferance du cercle touche vn chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6 Mais le cercle se dit estre circonscrit à vne figure, quand la circonferance du cercle, touche vn chacun des angles, à l'entour de laquelle il est descrit.

7 Vne ligne droite se dit estre accõmodée dans le cercle, quand les extremitez d'icelle sont en la circonference du cercle.

PROP. I.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droite egalle à vne ligne droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.



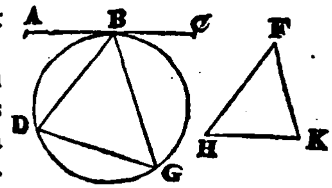
Soit le cercle donné BFC, dans lequel il faut accommoder vne ligne droite egalle à la ligne droite donnée A.

Soit du diamettre BC couppée BG portion egalle à la ligne A. En apres du centre B, & interual BG soit descrit le cercle DGH couppant le cercle donné au point D, & soit menée la ligne BD. Ie dis que BD est egalle à A.

Car par la deff. du cercle, BG & BD sont egalles, & par la construction BG est egalle à A, & par la 1. com. sent. BD & A seront egalles. Ce qui estoit à demonstrer.

PROP. II.

Dans vn cercle donné, inscrire vn triangle equiangle au triangle donné.



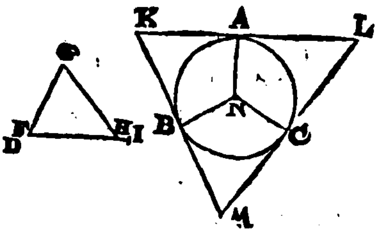
Soit le cercle donné DBG, dans lequel il faut inscrire vn triangle equiangle au donné FHK.

Soit menée la ligne AC qui touche le cercle au point B, auquel point soient faits les deux angles ABD egal à l'angle H, & CBG egal à l'angle K par la 23 p.1, Puis soit mené DG. Ie dis que le triangle inscrit BDG est equiangle au donné FHK.

Car puis que la ligne BD couppe le cercle en deux, l'angle G en la grande section sera egal à l'angle de l'attouchement ABD, & par consequent à l'angle H par la 32.p.3 & par la mesme raison, la ligne BG coupant le cercle, l'angle D se trouuera aussi egal à l'angle K, & par la 32. p. 1. le troisiesme B, sera aussi egal à l'angle F, & les triangles seront equiangles.

PROP. III.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn triangle equiangle au triangle donné.



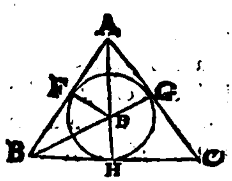
Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn triangle equiangle au triangle donné FGH.

Soit prolongé le costé FH de part & d'autre iusques en D, & I, & du centre N soit menee la ligne à l'aduanture N A, sur laquelle au point N soient construits les deux angles ANB egal à DFG, & ANC egal à l'angle GHI par la 23. p. 1. & soient menees les trois lignes perpendiculaires KAL à AN, LCM à CN, MBK à BN, lesquelles se rencontreront aux trois points K, L, M. Ie dis que KLM est le triangle demandé.

Car d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à 4 angles droits (car elle peut estre diuisee en deux triangles, & chasque triangle a les trois angles egaux à deux droicts par la 32. p. 1.) ainsi le trapese KANB aura les 4. angles egaux à quatre droits. Mais les deux A & B estans droits par la construction, les deux autres K & N seront egaux à deux droicts, c'est à dire egaux aux deux GFD & GFH, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. p. 1. & par construction ANB est egal à GFD : donc l'angle K sera egal à l'angle GFH, par mesme discours l'angle L se trouuera egal à l'angle GHF. Et par la 32. p. 1. le troisiesme M sera egal au troisiesme G : ainsi les triangles circonscrits & donnés seront equiangles.

PROP. IIII.

Dans vn triangle donné descrire vn cercle.



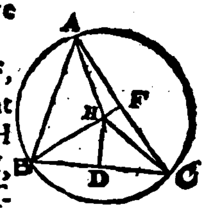
Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descire vn cercle.

Soient les denx angles A & B couppez en deux egallement par la 9. p. 1. par les deux lignes AD & BD, se rencontrans au point D: Item diceluy point de rencontre D, soient menees les trois perpendiculaires FD, DG, DH par la 12. p. 1. & du centre D, & interual DG soit descrit le cercle GFH. Ie dis que iceluy cercle touchera les trois lignes DF, DG, DH, au mesme point où icelles lignes touchent les trois costez du triangle donné.

Car l'angle DGA estant droit, il sera egal à l'angle DFA qui est pareillement droit, & le total A estant couppé en deux egallement, les deux DGA, & GAD, seront esgaux aux deux DFA, & FAD, & le costé DA estant commun, le costé FD sera egal au costé DG par la 26. p. 1. Par mesme discours DH se prouuera egalle à DF, & par la 1. com. sent. les trois DF, DG, DH, seront egalles: ainsi le cercle de l'interual CG sera aussi de l'interual des deux autres, & partant il touchera les trois points F, G, H.

PROP. V.

A l'entour d'vn triangle donné, descrire vn cercle.



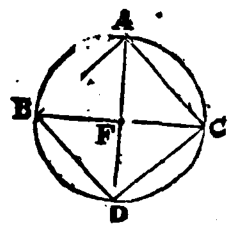
Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient couppez egallement les deux costez AC au point F, & CB au point D par la 10. p. 1. & d'iceux points D, & F soient leuées les perpendiculaires DH, FH, se rencontrans au point H par la 11. p. 1. & apres auoir mené les trois lignes HA, HB, HC, soit descrit le cercle du centre H & interual HA: Ie dis qu'il passera par les trois points A, B, C : c'est à dire que les trois lignes HA, HB, HC sont egalles.

Car les deux lignes BD, & DC estant egalles, DH commune, & les deux angles au point D egaux (pour estre droicts) les bases BH, & HC seront egalles par la 4. p. 1. par mesme discours HC, & HA seront egalles, & par la 1. com. sent. les trois lignes HA, HB, HC, seront egalles.

PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.



Soit le cercle donné ABDC, dans lequel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres BC, & AD se couppans au centre F en angles droits, & soient menées les 4. lignes AB, BD, DC, & CA. Ie dis que ABDC est quarré inscrit au cercle donné : c'est à dire qu'il a les 4. costez egaux & les 4. angles droits.

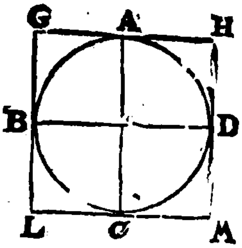
Car les quatre lignes FA, FB, FD, FC estant egalles par la deff. du cercle, & les quatre angles au point F droits & egaux par la constru-ction, Aussi par la 4. p. 1. repetée, tant de fois qu'il sera de besoin, les quatre bases AB, BD, DC, CA seront egalles. Item chascun des quatre triangles est Isoscele, faisant les angles sur la base egaux par la 5. p. 1. & par la 32. p. 1. ils seront chacuns demy droits (estans les 4. angles au point F droits) partant les deux soubs chacun des points A, B, D, C, vaudront vn droit, & par consequent ABDC, ayans les quatre costez egaux, & les quatre angles droits sera quarré.

PROP. VII.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.

Soient

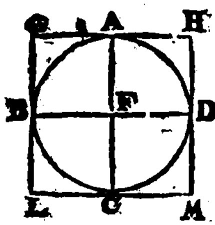


Soient menez les deux diametres AC, & BD se couppans au centre F à droicts angles, & sur les points A & C, soient menées les deux lignes GAH, LCM parallelles à BD: Item les deux points B, & D soient menées les deux lignes LBG, & MDH parallelles à AC par la 31. p. 1. icelles quatre lignes parallelles se rencontrans aux points G, H, L, M, Ie dis que GHML est le quarré demandé.

Car en premier lieu il est euident par la construction que GLMH est parallellograme, & par la 34. p. 1. les quatre costez seront egaux, estans egaux à l'vn ou l'autre des deux diametres AC & DB, qui sont egaux entre eux. Pareillement par la mesme 34. p. 1. les 4. angles G, H, M, L, sont egaux aux 4. qui sont au point F chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallellogrames. Mais iceux estans droits aussi les quatre G, H, M, L, seront chascun droits, & par consequent le parallellograme GHMI, aura les 4. costez egaux, & les quatre angles droits, & sera quarré.

PROP. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle.



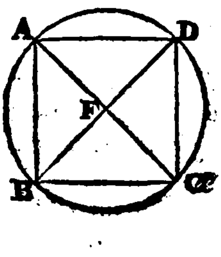
Soit le quarré donné GHML, dans lequel il faut descrire vn cercle.

Soient les quatre costez couppez en deux egallement aux points A, B, C, D, & apres auoir mené les deux lignes AC, & BD se rencontrans au point F, d'iceluy point F, & interual FA, si on descrit vn cercle, ce sera le demandé.

Car par la 33. p. 1. AC sera egalle & parallelle à HM: & BD, à GH; ainsi le quarré donné sera diuisé en quatre parallellogrames, lesquels par la 34. p. 1. auront les costez opposez egaux, ainsi AF, & BG seront egaux; Item BF, & GA; AH, & FD; FC, & DM; mais toutes icelles moitiez des costez du quarré sont egalles, partant FA, FB, FC, FD, seront aussi egalles, & comme elles touchent le quarré aux points A, B, C, D, aussi le cercle descrit de l'interual de l'vne d'icelles, touchera le quarré aux mesmes points.

PROP. IX.

A l'entour d'vn quarré donné, descrire vn cercle.



Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

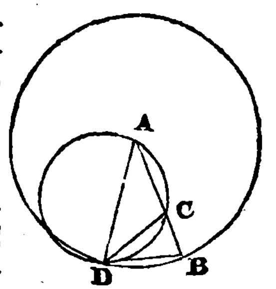
Soient menées les deux diagonalles AC & BD, s'entrecouppans au point F, & du centre F, & interual FA, soit descrit le cercle ADCB. Ie dis qu'il sera le demandé: c'est à dire qu'il touchera les quatre angles du quarré.

Car le costé AB estant egal à AD, Le triangle BAD sera Isoscele, & par la 5. p. 1. les angles sur la base BD serõt egaux & seront chacun demy droicts par la 32. p. 1. estant l'angle B

AD droit. Par mesme discours, les deux angles sur la base AC du triangle ADC seront aussi demy droits, ainsi les deux angles FAD & FDA seront egaux, & par mesme discours FD sera egal à FC, & FC à FB, & les 4. lignes FA, FD, FC, FB, estans egalles, il est aisé de conclure comme aux precedentes, que le cercle descrit de l'interual de l'vne d'icelles, touchera l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné.

PROP. X.

Descrire vn triangle Isoscele, ayant vn chacun des angles de la base double de l'autre.

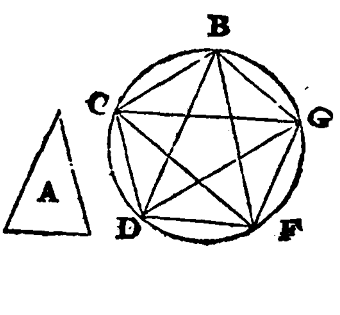


Soit la ligne AB, couppée en C comme enseigne la 11. p.2. & soit accommodée dans le cercle la ligne DB egalle à AC, & apres soit menée la ligne AD. Ie dis que ABD est le triangle Isoscele demandé.

Car apres auoir mené CD, si à l'entour du triangle ACD, on descrit le cercle ACD comme il a esté enseigné cy dessus; Puisque la ligne AB a esté couppée en C, comme enseigne la 11. p.2. le rectangle de AB & BC, sera egal au quarré de CA, ou son egalle DB; & par la 37. p.3. la ligne DB touchera le cercle en D, & l'angle CAD sera egal à l'angle CDB, par la 32. p.3. & si à iceux on adiouste l'angle commun ADC, les touts seront egaux, sçauoir le total ADB, aux deux CAD & ADC: mais l'angle exterieur DCB, est aussi egal aux deux CAD & ADC, par la 32. p. 1. Partant il sera aussi egal à l'angle ADB, ou à son egal ABD par la 5. p. 1. (car le triangle est Isoscele) & par la 6 p.1. le triangle DCB sera aussi Isoscele, & le costé DC egal à DB, partant aussi egal à CA; & le triangle DCA estant Isoscele, il aura les deux angles sur la base AD egaux par la 5. p.1. & l'angle exterieur DCB (qui est egal à tous les deux) sera double du seul A: aussi sera son egal B; & partant aussi son autre egal ADB: voila donc ABD triangle Isoscele ayant les angles de la base doubles du troisiesme.

PROP. XI.

Dans vn cercle donné, descrire vn pentagone equiangle & equilateral.



Soit le cercle donné BDF, dans lequel il faut inscrire le pentagone demandé.

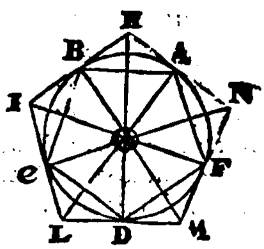
Dans iceluy cercle, il faut inscrire le triangle BDF equiangle au triangle A, lequel ait esté construict selon le requis de la precedente proposition & apres auoir mené les deux lignes CF & DG couppant les deux angles BDF, & BFD, en deux egallement par la 9. p.1. soient menées les lignes DC, CB, BG, GF. Ie dis que BCDFG, est le pentagone inscrit equiangle & equilateral.

Car puisque le triangle BDF est du precepte de la precedente proposition, les deux angles sur la base DF seront doubles au troisiesme B, lesquels estans couppez en deux egallement par les lignes CF & DG: les cinq angles BDG, GDF, BFC, CFD, & DBF sont egaux, & par la 26. p. 3. ils auront circonferances egalles pour bases, mais les egalles circonferances comprennent lignes droictes egalles par la 29. p. 3. donc tous les cinq costez estans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi sera-il bien aisé de prouuer qu'il est equiangle par la 27. p. 3. d'autant que chacun angle est soustenu de circonferances egalles, sçauoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs sont egaux.

PROP. XII.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn pentagone equiangle & equilateral.



Soit le cercle donné ABLF, à l'entour duquel il faut descrire le pentagone demandé.

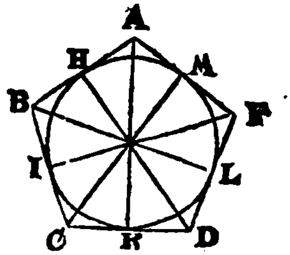
Dans iceluy soit descrit le pentagone ABCDF par la precedente, & apres auoir mené les cinq lignes GA, GB, GC, GD, GF, soient menées sur icelles les cinq lignes perpendiculaires HN, NM, ML, LI, IH, par la 11. p. 1. se rencontrans aux cinq points H, I, L, M, N. Ie dis que HILMN est le pentagone demandé equiangle, & equilateral.

Car il est euidemment circonscrit, en apres si on meine les cinq lignes GH, GI, GL, GM, GN, d'autant que les angles GBI & GCI sont droits par la 47. p. 1. le quarré de IG sera egal aux deux quarrez de GB, & BI: Il sera aussi egal aux deux de GC & CI, & par consequent les deux quarrez de GB & BI, seront egaux aux deux de GC & CI. Mais les quarrez de GB & GC, sont egaux (estans descrits sur lignes egalles) aussi ceux de BI & IC seront aussi egaux, & les lignes BI, & IC seront egalles, & par la 8. p. 1. les angles BGI & IGC seront egaux, & BGC double de BGI. Par mesme discours aussi CGD (egal à BGC, car ils ont egalles circonferences pour bases) sera double de CGL, & par consequent IGC, & CGL seront egaux, & par la 4 p. 1. IC sera egalle à CL. Par mesme discours IB, & BH se trouueront egalles: Mais BI & IC estant egalles, aussi leurs doubles IH, & IL seront egalles. Par mesme discours on prouuera tous les autres costez estre egaux, & le pentagone sera equilateral.

Qu'il soit aussi equiangle, nous auons monstré que les angles CIG, & CLG estoient egaux, Item BIG, & CIG, & que on en pouuoit dire autant des autres donc les deux angles soubs le point I, seront egaux aux deux angles sous le poinct L: ainsi des autres, par ainsi le pentagone sera equiangle & equilateral.

PROP. XIII.

Dans vn pentagone equiangle & equilateral, descrire vn cercle.



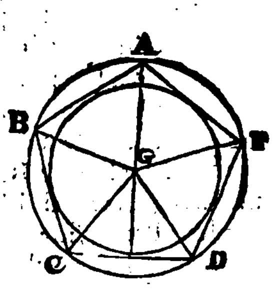
Soit le pentagone equiangle & equilateral ABCD F, dans lequel il faut inscrire vn cercle.

Soient couppez en deux egallement chacun des angles A, & B, par les lignes AK, & BL par la 9. p. 1. se rencontrans au point G; & par la 12. p. 1. du poinct G soient menées les perpendiculaires GH, GI, GM, & du centre G, & interual G H soit descrit le cercle HIKLM. Ie dis que c'est le cercle demandé.

Car pour prouuer qu'il touche chacun costé du pentagone donné, il faut prouuer que les cinq lignes GH, GI, GK, GL, GM, sont egalles, ce qui s'obtient en ceste façon. Puisque par construction les deux angles sous le poinct A sont egaux, ayant esté le total couppé en deux egallement, & l'angle droict H egal à l'angle droict M (car les lignes GH, & GM sont perpendiculaires) & le costé GA commun aux deux triangles AHG, & AMG, par la 26. p. 1. les deux autres costez seront egaux, sçauoir AH, à AM, & HG, à GM, & par mesme discours GL, GK, & GI, se trouueront egalles, & partant le cercle touchera le pentagone aux points H, I, K, L, M, ce qu'il falloit faire.

PROP. XIV.

A l'entour d'vn pentagone equiangle & equilateral, descrire vn cercle.



Soit le pentagone equiangle & equilateral ABCDF, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

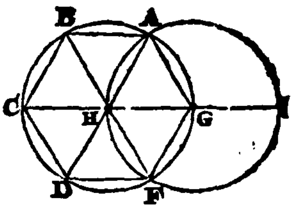
Soient couppez les cinq angles A, B, C, D, F, en deux egallement par la 9. p. 1. auec les lignes GA, GB, GC, G D, GF se rencontrans au point G, & d'iceluy point G, & interual de l'vne d'icelles cinq lignes soit descrit le cercle ABCDF. Ie dis qu'il sera circonscrit au pentagone, c'est à dire que les cinq lignes GA, GB GC, GD, GF sont egalles.

Car puis que le pentagone est equiangle, & chacun angle d'iceluy couppé en deux egallement, les deux angles sur la base BA seront egaux, & par la 6. p. 1.

les deux costez AG & BG seront aussi egaux, & par le mesme discours BG, & GC seront aussi egalles ainsi des autres, & par la 1. commune sentence il est euident que icelles cinq lignes seront egalles entre elles, & que partant le cercle descrit de l'interual de l'vne d'icelles touchera les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné.

PROP. XV.

Dans vn cercle donné, inscrire vn hexagone equiangle, & equilateral.



Soit le cercle donné ABCDFG, dans lequel il faut inscrire l'exagone demandé equiangle & equilateral.

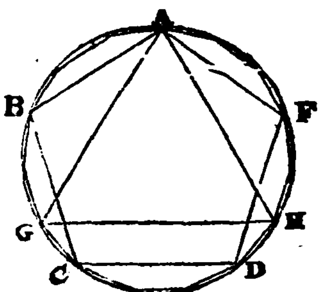
Soit mené le diametre CG, & du centre G & interual GH, soit descrit vn autre cercle AHF coupant le donné aux points A & F, desquels points soient menees les deux lignes AHD, FHB finablement soient menees les lignes AB, BC, CD, DF, FG, GA. Ie dis que ABCDFG est l'exagone demandé.

Car il est euident en demonstrant comme en la 1. p. 1. que les deux triangles HAG, & HFG sont equilateraux, & par la 5. p. 1. repetee deux fois ils seront aussi chacun equiangles, & par la 32. p. 1. vn chacun de leur angles vaudra le tiers de deux angles droits, & l'angle CHD par la 15. p. 1. vaudra le tiers de deux angles droits: ainsi par la 13. & 15. p. 1. tous les angles au point H, seront egaux valant chacun vn tiers de deux angles droits, partant les six bases AB, BC, CD, DF, FG, GA, seront egalles: & l'hexagone sera equilateral.

Il est aisé à demonstrer qu'il est aussi equiangle.

PROP. XVI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quindecagone equiangle & equilateral.



Soit le cercle donné ABCDF, dans lequel il faut inscrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement descrit dans iceluy le triangle equilateral AGH par la 2. p. 4. les trois costez estans egaux, la circonference sera diuisee en trois egallement par les 26. & 28. p. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone ABCDF par la 11. p. 4. ayant l'vn des angles ſur le point A. Ie dis que GC ſera le coſté du quindecagone demandé.

Car comme il a eſté dict l'arc ABG eſt le tiers de la circonference, partant doit contenir cinq coſtez du quindecagone. Item BA coſté du pentagone ſouſtient l'arc BA cinquieſme partie de la circonference, partant doit contenir trois coſtez du quindecagone, & les deux arcs AB, & BC contiendront ſix coſtez du quindecagone. Mais l'arc ABG en contient cinq, donc l'arc GC ſera la quinzieſme partie de toute la circonference, partant la ligne droite GC ſera le coſté du quindec. ce qui eſtoit à prouuer.

Fin du quatrieſme Element.

ELEMENT CINQVIESME.

DEFINITIONS.

PARTIE est vne grandeur tiree d'vne plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grande.

2. Multiplice est vne grandeur plus grande qu'vne plus petite, quand la plus grande est mesuree de la plus petite.

3. Raison est vne habitude de deux grandeurs, de mesme genre, comparees l'vne à l'autre selon la quantité.

4. Proportion est vne similitude de raisons.

5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'vne à l'autre, lesquelles estans multipliées se peuuent exceder l'vne l'autre.

6. Les grandeurs sont dictes estre en mesme raison, & la premiere à la seconde comme la troisiesme à la quatriesme, quand les equemultiplices de la premiere & troisiesme, excedent, sont egalles, ou defaillent aux equemultiplices de la seconde & quatriesme, en quelque multiplication que ce soit.

7. Les grandeurs qui sont en mesme raison, soient appellees proportionnelles.

8. Quand des equemultiplices, celuy du premier excede celuy du second,&le multiplice du troisiesme n'excede celuy du quatriesme, lors il y aura plus grande raison du premier au second, que du tiers au quart.
9. Proportion ne peut estre constituee sur moins de trois termes.
10. Quand trois grandeurs sont proportionelles, la premiere est dite auoir à la tro isiesme la raison doublee de la premiere à la seconde: s'il y en a quatre, la premiere est dicte estre à la quatriesme, en raison triplee de la premiere à la seconde.
11. Les grandeurs sont de semblables raisons, quand les antecedans sont aux antecedans, comme les consequens aux consequens.
12. Raison alterne est lors que l'antecedent est à l'antecedent, comme le consequent au consequent.
13. Raison renuersee est lors qu'on prend le consequent comme l'antecedent, pour le comparer à l'autre consequent, comme si cestoit l'antecedent.
14. Raison composée est lors qu'on prend l'antecedēt auec le consequent, comme vne mesme chose au mesme consequent.
15. Raison diuisee est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent, pour le comparer à iceluy mesme consequent.
16. Raison egalle est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'vn costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en mesme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere de mesmes, comme la premiere des secondes, est à la derniere des mesmes.
17. Autrement c'est lors qu'on prēd les extremes par la sou-

straction

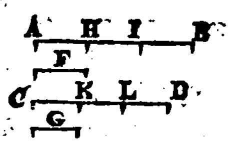
ſtraction des moyennes.

Proportion ordonnée eſt quand l'antecedent eſt au conſequent comme l'antecedent eſt au conſequent de l'autre: & ainſi que l'vn des conſequens eſt à quelque autre, l'autre conſequent ſoit auſſi à quelque autre.

Proportion troublee eſt quand trois grandeurs eſtans d'vn coſté, & autant d'vn autre, la premiere eſt à la ſeconde comme la cinquieſme à la ſixieſme, & comme la ſeconde à la troiſieſme, ainſi la quatrieſme à la cinquieſme.

PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, equemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la ſienne, comme l'vne ſera multiplice de l'vne, ainſi les toutes ſeront multiplices de toutes.

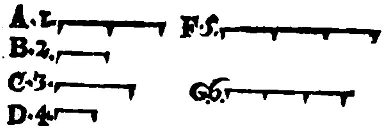


Soient deux grandeurs AB & CD, equemultiplices de deux autres F & G: Ie dis que les deux grandeurs enſemble AB & CD, ſeront autant multiplices de F & G enſemble, comme AB eſt de F.

Qu'il ne ſoit ainſi: puis que AB eſt multiplice de F, F meſurera AB certain nombre de fois par la par la 2. deff. 5. qu'elle l'a meſure donc trois fois, & de AB ſoient imaginees trois parties, egalles AH, HI, IB, qui ſeront chacune egalle à F. Le meſme ſe peut dire de la grandeur CD, de laquelle on imaginera trois parties egalles CK, KL, LD, eſtant chacune d'icelles egalle à G, mais qui à choſe egalles, ſçauoir à F & H, adiouſte choſes egalles, ſçauoir G & CK, les toutes AH CK, ſeront egalles aux toutes F & G, par meſme raiſon HI & KL, ſeront egaux à F & G, pareillement IB & LD, & par ainſi il eſt euident que les trois enſemble AB auec les trois CD, ſeront triples des deux enſemble F & G, comme la ſeule AB, eſt triple de la ſeule F.

PROP. II.

Si la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte, & que les cinquieſme & ſixieſme me ſoient equemultiplices de la ſeconde & de la quarte, la compoſee de la premiere & cinquieſme, ſera autant multiplice de la seconde, comme la composee de la troisiesme & sixiesme, de la quarte.

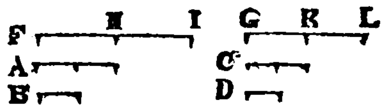


Soit la premiere grandeux A autant multiplice de la seconde B, comme la 3. C est de la 4. D, & soit la 5. F autant multiplice de la 2. B, comme la 6. G de la 4. D: Ie dis que la 1. & 5. ensemble A & F, seront autant multiplices de la 2. B, comme la 3. & 6. ensenble C & G, seront de la 4. D.

Car puis que A est autant multiplice de B, comme C de D, Item que F est autant multiplice de B comme G de D, la composee de A, & F sera autant multiplice de B, comme la composee de C, & G est multiplice de D par la 2. com. sent. en les prenant toutes l'vne apres l'autre comme en la precedente.

PROP. III.

Si la premiere est autant multiplice de la seconde, comme la tierce de la quarte, & on prend la cinquiesme autant multiplice de la premiere, que la sixiesme de la tierce, aussi la cinquiesme sera autant multiplice de la seconde, que la sixiesme, de la quarte.



Soit A autant multiplice de B, comme C est de D, & de la 1. & 3. A & C, soient prises les equemultiplices F & G: Ie dis que F sera autant multiplice de B, que G, de D.

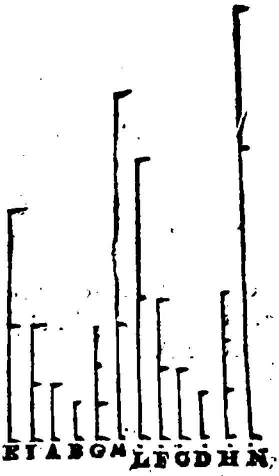
Car puis que F est autant multiplice de A, que G, l'est de C: F contiendra autant de parties egalles à A, comme G de parties egalles à C, soit donc F diuisee en FH & HI chacune egalle a A: Item G diuisee en GK, & KL, chacune egalle à C, ainsi la premiere FH qui est egalle à A sera autant multiplice de la 2. B, comme la 3. GK egalle à C, est de la 4. C, & la cinquiesme HI aussi egalle à A, sera autant multiplice de la 2. B, comme la 6. KL aussi egalle à C, est multiplice de la 4. D: & par la 2. p. 5. la composee de la premiere & cinquiesme FI, sera autant multiplice de la seconde B, comme la composee de la 3. & 6. GL, l'est, de la quatriesme D.

PROP. IIII.

Si quatre grandeurs sont proportionelles, aussi leurs equemultiplices seront proportionelles, en quelque multiplication que ce soit.

Soit A a B comme C a D, & on prend leurs equemultiplices I, G, F, H, Ie dis qu'il y aura mesme raison de I à G que de F à H.

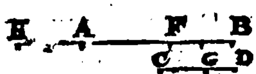
Car si on prend K & L equemultiplices de I & F, pareillement M & N equemultiplices de G & H, d'autant que I & F sont equemultiplices de A & C, Item G & H aussi equemultiplices de B & D (bien que par diuerses multiplications) aussi par la 3. p. 5. K, & L seront equemultiplices de A & C, & par la mesme p. M & N seront aussi equemultiplices de B & D, & par la conuerse de la 6. deff. 5. si K defaut, est egal, ou plus grand que M, aussi L defaudra, sera egal, ou plus grand que N: Et pour autant que K & L, sont equemultiplices de I & F. pareillement M & N, de G & H, par la mesme 6. deff. 5. il y aura mesme raison de I à G comme de F, à H.



PROP. V.

Si vne grandeur est autant multiplice d'vne grandeur, que la retranchee de la retranchee, aussi le reste sera autant multiplice de la reste, que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multiplice de la toute CD, comme la retranchee AF, de la retranchee CG: Ie dis que le reste FB, sera autant multiplice du reste GD, que la toute AB est de la toute CD.

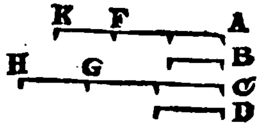


Qu'il ne soit ainsi, que le reste FB, ne soit autant multiplice du reste GD, que la toute de la toute: soit prise AH autant multiplice de GD, comme AF est de CG: & par la 1. p. 5. FH sera autaet multiplicé de CD, comme AF de CG: Mais aussi AB estoit autant multiplice de CD comme AF de CG: Il est dont euident que AB sera egalle à FH, & en ostant ce qui est de commun AF: HA demeurera egal à FB, & par consequent comme AB à GD, ainsi FB sera à GD.

PROP. VI.

Si deux grãdeurs sõt equemultiplices de deux autres grandeurs, & d'icelles on retrãche des equemultiplices: ou les restes serõt egaux aux restes, ou equemultiplices d'iceux.

Soient quatre grandeurs ABCD, desquelles A est autant multiplice de B, que C l'est de D, & la retranchée FA est autant multiplice de B, que la retranchée GC est multiplice de D: Ie dis que les restes GH & FK seront egalles ou equemultiplices de B & D.

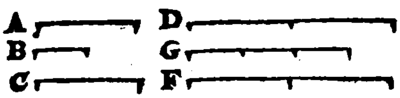


Car d'autant que A & C sont equemultiplices de B, & D; en A il y aura autant de grandeurs egalles à B, comme en C de grandeurs egalles à D; Pareillement d'autant que la retranchée AF est autant multiplice de B, que la retranchée CG l'est de D, AF contiendra autant de grandeurs egalles à B, que CG de grandeurs egalles à D, par la 1. & 2. deff. 5. Si donc d'egalles multitudes de grandeurs AK & CH, on oste egalles multitudes de grandeurs FA & GC, les multitudes demeurantes KF & HG seront egalles: c'est à dire que KF contiendra autant de fois B, comme HG contiendra D, ou bien si KF est egalle à B, aussi HG sera egal à D, & si KF est multiplice de B, aussi HG sera autant multiplice de D.

PROP. VII.

Les grandeurs egalles, ont mesme raison l'vne que l'autre à une troisiesme; & ceste troisiesme aura mesme raison à deux grandeurs egalles.

Soient deux grandeurs egalles A & C, & vne autre quelle qu'elle soit B: Ie dis que A & C ont mesme raison l'vne que l'autre à B, & que B aura mesme raison à A que à C.

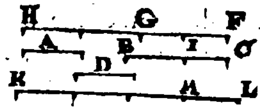


Qu'il ne soit ainsi, soient pris D & F equemultiplices de A & C, soit aussi pris G multiplice de B; donc pour autant que D est autant multiplice de A, que F est multiplice de C, & que A & C sont egalles, aussi D, & F seront egalles par la 6. com. sent. Si donc D est plus grande, egalle, ou plus petite que G, aussi F sera plus grande, egalle, ou plus petite que la mesme G, & par la 6. deff. 5. il y aura telle raison de A à B comme de C à la mesme B.

Quant à l'autre partie elle se prouue tout de mesme à par la 6. def. 5. en prenant les mesmes equemultiplices, & monstrant l'exces.

PROP. VIII.

De deux grandeurs inegalles, la plus grande à plus grande raison à vne troisiesme, que la plus petite; & ceste troisiesme à plus grande raison à la plus petite, que à la grande.



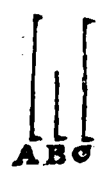
Soient deux grandeurs inegalles A, & BC, desquelles BC est la plus grande: Ie dis que BC à plus grande raison à la troisiesme D, quelle qu'elle soit, que non pas A.

Qu'il ne soit ainsi; soit entenduë BC premiere, D 2. A 3. D 4. & d'autant que BC est plus grande que A, soit retranchée BI egalle à icelle A, & soient trouuées les equemultiplices, à sçauoir HG de BI, & GF de IC, en sorte que HG, & GF, soient plus grandes chacune que D, & par la 1. p. 5. HF sera autant multiplice de BC, comme HG de BI ou de A son egalle: Maintenant soit trouuée KM plus petite que HF, mais plus grande que HG: Cecy est facille, d'autant que D est plus petit que ny HG, ny GF; si bien qu'il faut seulement adiouster tant de fois la grandeur D, iusques à ce que l'on ait ce que l'on cherche. Si donc KM est prise pour l'equemultiplice tant de D seconde, que D quatriesme, il est aisé à voir que HF multiplice de BC premiere, estant plus grande que KM multiplice de D seconde, HG multiplice de A 3. n'est pas plus grande que KM multiplice de D 4. & par la huictiesme deff. 5. il y aura plus grande raison de BC à D que de A à la mesme D.

Quant à la seconde partie elle se prouue de mesme façon en changeant l'ordre seulement, c'est à sçauoir D premier, A second, D 3. BC 4. &c.

PROP. IX.

Les grandeurs qui ont mesme raison à vne troisiesme, sont egalles entre elles: & ceste troisiesme ayant mesme raison à deux autres, icelles seront egalles entre elles.



Soient deux grandeurs A & C, lesquelles ont mesme raison l'vne que l'autre à la troisiesme B: Ie dis qu'elles sont egalles entre elles.

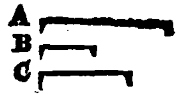
Car si elles n'estoient egalles, il faudroit que l'vne ou l'autre fust plus grande: & par la 8. p. 5. icelle plus grande auroit plus grande raison à B, que la plus petite: ce qui est contre l'hypotese donc A ne sera pas plus grande que C.

PROP. X.

De deux grandeurs inegalles, celle qui a plus grande raison à la troisiesme, est la plus grande: & celle à laquelle la troisiesme à plus grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & la raison de A à B soit plus grande que de C, à B: Ie dis que A sera plus grande que C, & si B à plus grande raison à C que non pas à A, que C sera plus petite que A.

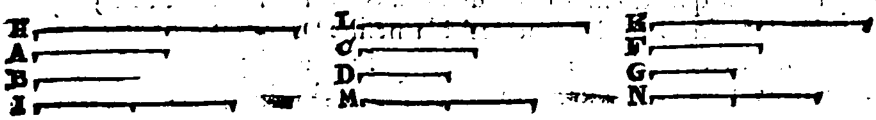
Autrement pour la premiere partie: si A n'estoit plus grande, elle seroit egalle, ou plus petite; ce qui est impossible: car si elles estoient egalles, elles auroient mesme raison l'vne que l'autre à la troisiésme B, par la 7. p. 5. ce qui seroit contre la supposition; si aussi elle estoit plus petite, elle auroit plus petite raison à B que non pas à C, par la 8. p. 5. ce qui est pareillement contre l'hypotese. Donc A sera plus grande que C.



Quant à la seconde partie tant de ceste proposition que de la precedente, elles sont aisées à demonstrer par les mesmes discours en changeant l'ordre.

PROP. XI.

Les raisons qui sont semblables à vne, sont semblables entre elles.

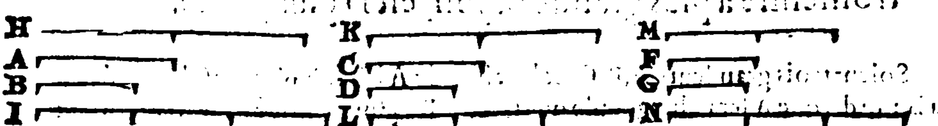


Soit A à B, comme C à D; & comme C à D, ainsi F à G: Ie dis que comme A à B, ainsi F sera à G.

Qu'il ne soit ainsi, il faut prendre de A, C, F, les equemultiplices H, L, K: Pareillement de BDG, les equemultiplices I, M, N. Pour autant donc que A est à B comme C à D, par la conuerse de la 6. def. 5. si H multiplice de A est egalle, plus grande, ou plus petite que I, multiplice de B; aussi L multiplice de C, sera egalle, plus grande, ou plus petite que M, multiplice de D. Item puis que comme C à D, ainsi F à G, si L multiplice de C est egalle, plus grande, ou plus petite que M, multiplice de D, aussi K multiplice de F sera egalle, plus grande, ou plus petite que N, multiplice de G: Et puis que comme H est plus grande, egalle, ou plus petite que I., aussi K est plus grande, egalle, ou plus petite que N, par la 6. d. 5. la raison de F à G sera comme de A à B.

PROP. XII.

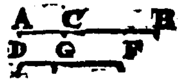
Si tant de grandeurs qu'on voudra, sont proportionelles à autant d'autres, comme l'vne des antecedentes sera à l'vne des consequentes, ainsi toutes les antecedentes feront à toutes les consequentes.



PROP. XVII.

Si les grandeurs diuisées sont proportionnelles : icelles composées seront proportionnelles.

Apres auoir long-temps consideré la demonstration de Theon, comme elle est embarassée en la construction de tant d'equemultiplices differentes pour prouuer la 17.p.m'estudiant à la briefueté & à l'esclaircissement des demonstrations, ie me suis licentié de changer la 17. à la 18. l'vtilité en est euidente, si on confere ma demonstration, auec celles des anciens.



Soit A C a CB, comme DG a GF: Ie dis que en composant AB sera a BC, comme DF a FG.

Car en changeant par la precedente AC sera à DG, comme CB a GF, & par la 12.p.5. toutes les antecedentes AB, seront a toutes les consequentes DF, comme CB l'vne des antecedentes, à GF l'vne des consequentes.

PROP. XVIII.

Si les grandeurs composées sont proportionelles, icelles diuisées seront aussi proportionelles.

Soit AC à CB, comme DG à GF : Ie dis qu'en diuisant que AB sera BC, comme DF à FG.

S'il n'est ainsi, soit donc imaginé comme AB à BC, ainsi DH à HG, en composant par la 17.p.5. AC sera à CB, comme DG à GH. Mais DG est à GF, comme AC à CB, & par la 11.p.5. DG auroit mesme raison à GF, que à GH, & par la 9 p.5. icelles seroient egalles, ce qui est absurde. Donc comme AB à BC, ainsi DF à FG.

PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché, le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AC, à la toute DG, comme le retranché AB, au retranché DF : Ie dis que le reste BC, est au reste FG, comme la toute AC, à la toute DG.

Car puis que AC est à DG, comme AB à DF, en changeant par la 16.p.5. AC sera à AB, comme DG à DF; & par la 18.p.5. en diuisant comme AB à BC, ainsi DF à FG, &

en changeant par la 16. p. 5. BC sera à FG, comme AB à DF, c'est à dire le reste au reste comme le retranché au retranché: & par la 11. p. 5. le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

PROP. XX.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, estant prises de deux en deux sont en mesme raison, & que en raison egalle la premiere soit plus grande que la troisiesme, aussi la quatriesme sera plus grande que la sixiesme; & si egalle, egalle; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre D, F, G, & comme A à B, ainsi D à F, & comme B à C, ainsi F à G: & que A 1. soit plus grande que C 3: Ie dis que D 4. sera plus grande que G 6. &c.

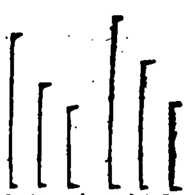
A B C D F G

Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B, par la 8. p. 5. Mais comme A à B ainsi D à F, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à F que de C à B. Item comme C est à B ainsi G à F: Il y aura donc plus grande raison de D à F, que de G à F, & par la 10. p. 5. D sera plus grãde que G Par le mesme discours en changeant les hypoteses si A est egalle à C, ainsi D sera egalle G par la 7. & 9. p. 5. Si A est plus petite que C, aussi D sera plus petite que G, par la 8. & 10. p. 5.

PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, prises de deux en deux sont en mesme raison, estant leur proportion sans ordre, & que la premiere soit plus grande que la troisiesme, aussi la quatriesme sera plus grande que la sixiesme; & si egalle, egalle; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre D, F, G, lesquelles prises de deux en deux soient en mesme raison estant leur proportion troublée, sçauoir que comme A à B, ainsi F à G, & comme B à C, ainsi D à F; Ie dis que comme A sera egalle, plus grande, ou plus petite que C, aussi D sera egalle, plus grande, ou plus petite que G.



A B C D F G

Car si A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A à B, ainsi F à G, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de F à G que de C à

B: Item C estant à B comme F à D, il y aura aussi plus grande raison de F à G, que de F à D, & par la 10. p. 5. D sera plus grande que G.

On peut prouuer comme en la precedente, si elle est egalle ou plus petite.

PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles estant prises de deux en deux soient en mesme raison, icelles en raison egalle seront proportionelles.

Soient trois grandeurs d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre D, F, G, & soit A à B comme D à F, & B à C, comme F à G: Ie dis que en en raison egalle, comme A à C, ainsi D à G.

Qu'il ne soit ainsi, soient imaginées deux grandeurs H, & I, en sorte que A soit à B comme C à H: & D à F, comme G à I: d'autant que A est à B comme D à F, par la 11. p. 5. les 4. A, B, C, H, seront l'vne à l'autre comme les 4. D, F, G, I, en changeant par la 16. p. 5. comme A à C ainsi B à H, ou comme D à G, ainsi F à I, & par la 11. p. 5. comme A à C, ainsi D à G.

PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en mesme raison en proportion troublée: icelles en raison egalle seront proportionelles.

Soient 3. grandeurs A, B, C, & trois autres D, F, G, & soient prises de deux en deux en mesme raison estant la prop. troublée, sçauoir que comme A à B, ainsi F à G, & comme B à C ainsi D à F. Ie dis que A sera à C, comme D à G.

Car si on prend H, L, I, equemultiplices de A, B, D: & M, K, N, equemultiplices de C, F, G, par la 4. & 15. p. 5. H, L, M, & I, K, N, serōt en la mesme raison de leurs simples, sçauoir H, sera à L, comme K à N, & comme L a M, ainsi I a K & par la 21. p. 5. comme H sera plus grande, egalle, ou plus petite que M, ainsi I sera plus grand, egal, ou plus petit que N: & par la deff. & 16. p. 5. A sera a C, comme D est à G.

On pouuoit ainsi demonstrer la precedente.

PROP. XXIIII.

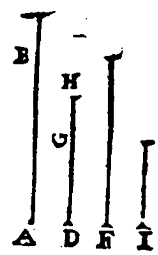
Si la premiere est à la seconde, comme la troisiesme à la quatriesme, & la cinquiesme à la seconde, comme la sixiesme à la quatriesme; la composee de la premiere & cinquiesme sera à la seconde, comme la composee de la troisiesme & sixiesme, sera à la quatriesme.

Soit la premiere AB à la 2.D, comme la 3.FG est a la 4. I; & la 5. BC a la 2. D, comme la 6.GH a la 4. I. Ie dis que la toute AC, sera a D, comme la toute FH, a I.

Car puis que comme AB a D ainsi FG a I, aussi en changeant AB sera a FG, comme D a I: & par le mesme discours BC sera a G H, comme D a I, (ou AB a F G) & en composant AC sera a FH, comme AB est a FG, ou D a I: & en changeant par la 16.p.5. tant de fois qu'il sera de besoin, AC sera a D, comme FH est a I.

PROP. XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionelles, la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.



Soient quatre grandeurs proportionelles A, D, F, I. Ie dis que la plus grande & la plus petite A & I, sont plus grandes que les deux autres D & F.

Car si de A on retranche AB egalle a F, & de D on retranche DG egalle a I: AC sera a DH, comme AB a DG, & par la 19. p. 5. le reste CB sera plus grand que le reste GH, comme le tout est plus grand que le tout. Et pour autant que AB & I, sont egalles a F & DG, si on adiouste les grãdeurs inegalles CB & H G, il est euident que A C & I, seront plus grandes que D & F. Ce qu'il falloit demonstrer.

Fin du cinquiesme Element.

ELEMENT SIXIESME.

DEFINITIONS.

1. SEMBLABLES figures rectilignes sont celles qui ont les angles egaux, & les costez qui sont au long des angles egaux proportionaux.

2. Figures reciproques sont celles desquelles les costez sont alternatiuement proportionaux.

C'est à dire que des quatre costez proportionaux, le premier & dernier sont en l'vne des figures, le second & troisiesme en l'autre.

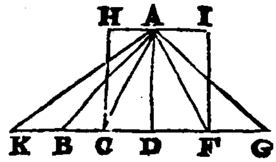
3. Vne ligne droicte est dite estre diuisée en la moyenne & extreme raison, quand la toute est au plus grand segmẽt, comme le plus grand segment est au moindre.

4. La hauteur d'vne chacune figure, est la perpendiculaire tirée du sommet à la base.

5. Vne raison est dite estre composée de raisons, quand elle est produite d'icelles raisons multipliées l'vne par l'autre.

PROP. I.

Les triangles & parallellogrames de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.



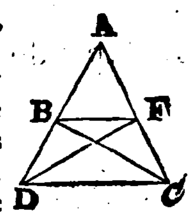
Soient deux triangles ACD & AFD, de mesme hauteur, sur les bases CD & DF : Ie dis que le triangle CAD, est au triangle FAD, comme la base CD, est a la base DF : c'est à sçauoir que si on pose pour premiere grandeur la base CD, pour seconde la base DF, pour troisiesme le triangle CAD, pour quatriesme le triangle FAD, que les equemultiplices de la premiere & troisiesme, seront plus petites, egalles, ou plus grandes que les equemultiplices de la seconde & quatriesme ainsi que le requiert la 6. def. 5.

Qu'il ne soit ainsi, qu'on prolonge CF de part & d'autre, & apres auoir couppé KB & BC, egalles a CD, d'vn costé: Item FG, egalle a DF, de l'autre, soient menées les lignes KA, BA, GA. Donc par la 38. p. 1. les trois triangles AKB, ABC, ACD, estant sur bases egalles & entre mesmes parallelles, seront egaux ; aussi par les mesmes raisons les deux triangles AGF, & AFD, seront egaux: ainsi il est euident que autant de fois que la base KD, contiendra CD, autant de fois le triangle AKD, contiendra le triangle ACD. Pareillement autant de fois que DG contiendra DF, autant de fois DAG, contiendra DAF. Que si la base KD est egalle à DG, le triangle KAD sera egal au triangle DAG, par la 38. p. 1. Que si la base est plus grande, il sera plus grand; si plus petite, plus petit; & par la 6. deff. 5. comme la base CD, à la base DF, ainsi le triangle CAD, sera au triangle DAF, ce qui estoit à demonstrer pour la premiere partie.

Quant à la seconde partie touchant les parallellogrames, le mesme se peut dire que des triangles, Par ce que les parallellogrames sont doubles des triangles, par la 41. p. 1. & par la 15. p. 5. ce qui est prouué des triangles s'entendera des parallellogrames.

PROP. II.

Si l'on meine vne ligne parallelle à l'vn des costez d'vn triangle, icelle couppera les autres costez d'iceluy proportionellement: & si les costez sont couppez proportionellement, la ligne couppante sera parallelle à l'autre costé.



Soit le triangle ADC, dans lequel soit menée BF parallelle à DC, couppant les deux autres costez AD & AC aux points B, & F. Ie dis que AB sera à BD, comme AF, à FC.

Qu'il ne soit ainsi: Il faut mener les deux lignes CB, & DF, & par la 37. p. 1. les deux triangles FBC, & BFD, estans sur mesme base & entre mesmes parallelles, sont egaux ; & par la 7. p. 5. ils auront mesme raison l'vn comme l'autre au troisiesme ABF. Mais par la 1. p. 6. les triangles DFB, & BFA estans de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme la base DB, à la base BA, &

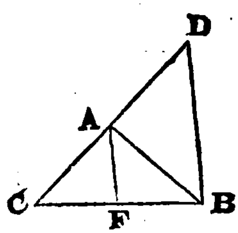
& par la mesme proposition, le triangle CBF, estant de mesme hauteur que le triangle FBA, ils seront l'vn à l'autre comme CF est à FA, & par la 11 p.5. DB sera à BA, comme CF à FA.

Pour la seconde partie. Ie dis que si DB est a BA, comme CF, a FA, que aussi BF sera parallelle à DC.

Car les triãgles DFB, & BFA, seront par la 1.p 6. l'vn a l'autre, comme DB à BA. Item les deux autres CBF, FAB, seront aussi l'vn a l'autre, cõme CF, a FA, & par la 11.p.5. le triangle DFB, sera au triangle BFA, comme le triangle CBF est au triangle FBA; & par la 9.p.5. les deux triangles BFD, & FBC seront egaux, lesquels estans sur mesme base BF, par la 39.p.1. Il seront entre mesmes parallelles, & BF sera parallelle a DC.

PROP. III.

Si l'angle d'vn triangle est couppé en deux egallement, tombant la ligne couppante sur la base: les segmens de la base seront l'vn à l'autre comme les autres costez: Et si les segmens de la base sont l'vn à l'autre comme les autres costez, la ligne tombante couppera l'angle en deux egallement.



Soit l'angle BAC, du triangle BAC, couppé en deux egallement par la ligne AF: Ie dis qu'il y a mesme raison de CF, a FB, comme de CA a AB.

Qu'il ne soit ainsi, apres auoir mené du poinct B, BD, parallelle a FA, soit continué CA directement iusques a ce qu'elle rencontre BD, (car d'autant qu'elles ne sont parallelles, elles se rencontreront, estans continuées) & par ce que AF & BD sont parallelles, l'angle FAB, sera egal a son alterne ABD, par la 29.p.1. Et si l'exterieur CAF, sera egal a l'opposé interieur ADB. Mais CAF, & FAB, estant egaux par hypotese, aussi par les com. sent. ADB, & ABD seront egaux, & par la 6 p.1. les costez AB, & AD seront egaux. Mais par la 2.p.6. CA est à AD, comme CF, à FB, (estant AF parallelle à DB) & par consequent CA sera aussi à AB (egalle à AD) comme CF, à FB.

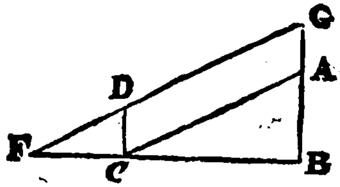
Pour la seconde partie. Ie dis que si CA est à AB, comme CF à FB, que l'angle CAB sera couppé en deux egallement.

Car apres auoir construit comme dessus, CA sera à AD, comme CF à FB, par la 7.p.6. Et par la 11.p.5. CA sera à AD, comme le mesme CA, à AB, & par la 7. p. 5. AD & AB seront egaux, & par la 5. p. 1. les deux angles ADB, & ABD, seront egaux, & par la 29.p 1. ils sont egaux, l'vn à CAF, & l'autre à FAB, lesquels par ce moyen seront aussi egaux, ce qui estoit à prouuer.

PROP. IIII.

Les triangles equiangles, ont les costez qui sont au long

des angles egaux, proportionaux.



Soient deux triangles sur la ligne FB, FCD, & CBA, equiangles: c'est à dire que l'angle F soit egal à l'angle ACB, & l'angle DCF à l'angle B, & le troisiesme au troisiesme, Ie dis que comme DF, à FC, ainsi AC à CB, ou bien comme AB à BC, ainsi DC, à CF.

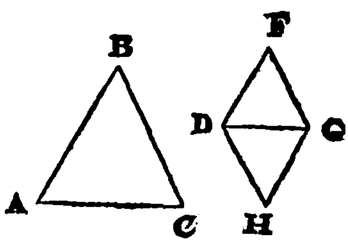
Qu'il ne soit ainsi, d'autant que les costez BA, & FD, ne sont point parallelles, estans continuez ils se rencontreront, comme au point G. Il est euident que l'angle exterieur FCD, estant egal à son opposé interieur CBA (car les triangles sont equiangles) DC sera parallelle à GB, par la 29.p.1. Pareillement l'angle exterieur ACB, estant egal à son opposé interieur DFC, par la mesme raison de l'hypotese, aussi par la 29 p.1. CA, & FG, seront parallelles. Partant ACDG sera parallelograme, & par la 34.p.1. il aura les angles, & les costez opposez ega. Mais DC estant parallelle à GB par la 2.p.6. FD sera à DG, ou CA sont egalle, comme FC à CB, & en changeant par la 16.p.5. FD sera à FC, comme CA à CB.

Pareillement CA estant parallelle à FG, comme BA sera à AG ou CD son egalle, ainsi BC à CF, & en changeant BA sera à BC, comme DC à CF, par les mesmes raisons que dessus.

On pourra aussi demonstrer que FD est à DC, comme CA a AB: car, par la 11. p.5. FD estant a DG, cõme FC a CB; & FC a CB, cõme GA a AB, aussi FD sera a DG, ou CA cõme GA ou DC a AB: & par la 16.p.5. FD est a DC, cõme CA a AB

PROP. V.

Les triangles qui ont les costez proportionaux, ont aussi les angles egaux, ceux qui sont compris des costez proportionaux.



Soient deux triangles ABC, & DFG, ayans les costez proportionaux: Ie dis qu'ils ont aussi les angles egaux, sçauoir les compris des costez de mesme raison.

Qu'il ne soit ainsi, sur la ligne DG, & aux deux points D, & G soient construits les deux angles DGH, egal à C, & GDH egal à A: par la 32.p.1. le troisiesme H, sera egal au tiers B, & les deux triangles ABC, & DGH, serõt equiangles: & par la 4.p.6. comme BA a AC, ainsi sera HD a DG. Mais par hypotese FD est a DG en mesme raison, & par la 9. p. 5. FD & DH seront egalles: & d'autant que comme BC a CA, ainsi FG à GD, & HG a GD, par les mesmes raisons FG & GH seront egalles: ainsi les deux triangles

DFG &

DFG & DHG, ont les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 4. & 8. p. 1. les angles seront egaux aux angles chacun au sien, & seront equiangles, & par les com. sent. FDG & BAC seront aussi equiangles.

PROP. VI.

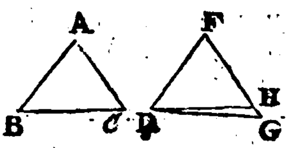
Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'iceux angles egaux proportionaux, ils seront equiangles.

Soient les deux triangles ABC & DFG en la figure de la precedente proposition, ayans l'angle A egal à l'angle D, & comme BA à AC, ainsi FD à DG: Ie dis qu'ils sont equiangles.

Qu'il ne soit ainsi, sur la ligne DG, faut bastir cōme en la precedente le triangle DGH, equiangle au triangle ABC: & par la 4. p. 6. HD sera à DG, comme BA à AC, ou FD à DG (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. p. 5. FD & DH, (qui ont vne mesme raison à DG) seront egalles, & les deux triangles FDG & HDG auront deux costez egaux à deux costez, sçauoir FD & DG, à HD & DG, & les deux angles au point D, egaux (car ils sont chacun egal à l'angle A) & par la 4. p. 1. ils auront la base egalle à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, & seront equiangles. Mais l'vn d'iceux DGH est equiangle à ABC par construction, aussi sera l'autre par les communes sentences.

PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'vn autre angle, proportionaux, estant les troisiesmes angles de mesme espece: Iceux triangles seront equiangles.

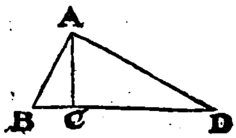


Soient deux triangles ABC, & DFG, desquels les deux angles A & F soient egaux, & que AB soit à BC, comme FD à DG, Mais les angles C & G, de mesme espece: c'est à dire aigus, ou obtus. Ie dis qu'ils seront equiangles.

Car l'angle B sera egal ou non à l'angle D; si egal, aussi par la precedente les triangles seront equiangles. Si inegal, comme si B estoit plus petit que D, soit fait FDH egal à B, par la 23. p. 1. le troisiesme FHD, sera egal au troisiesme C, & partāt aigu, ou obtus, comme iceluy, & les deux triangles ABC, & FDH seront equiangles, & par la 4. p. 6. comme AB, à BC, ainsi FD, à DH. Mais par hypotese, comme AB, à BC, ainsi FD à DG; & par la 11. p. 5. comme FD à DG, ainsi FD à DH, & par la 9. p. 5. DG, & DH, seront egalles; & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base GH seront egaux, & tous deux aigus, & par consequent les deux angles au point H se trouueront aigus contre la 13.p.1. Donc l'angle B, n'estoit pas plus petit que l'angle D.

PROP. VIII.

Si de l'angle droict d'vn triangle rectangle, on tire vne perpendiculaire sur la base, les triangles au long de la perpendiculaire sont semblables au tout, & entre eux.

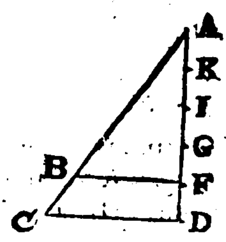


Soit le triangle rectangle BAD, & l'angle droict A, duquel soit menée la perpendiculaire AC : Ie dis que les triangles ABC, & ADC, sont equiangles au total BAC, & entre eux, & par consequent semblables.

Qu'ainsi ne soit; d'autant que AC est perpendiculaire l'angle BCA est droit, & egal à l'angle droit BAD, du total, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD, & BCA, & par la 32. p.1. le troisiesme BAC, est egal au troisiesme ADB, & les deux triangles BAD, & BAC, seront equiangles; & par la 4.p.6. & 1.def.6. ils seront semblables. Par mesme discours on prouuera que les deux triãgles BAD, & CAD, sont aussi equiangles, & semblables: car l'angle D est commun à tous les deux, & l'angle droit egal à l'angle droict, le troisiesme CAD sera egal au troisiesme B. Il est aussi aisé de monstrer que les deux triangles BCA & DCA, sont equiangles, & semblables.

PROP. IX.

D'vne ligne droicte donnée, oster la partie demandée.



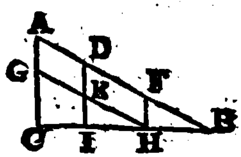
Soit la ligne donnée AC, de laquelle il faut oster la cinquiesme partie, ou telle autre qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne AD, faisant angle auec AC, & en icelle AD, soient prises à l'aduenture cinq parties egalles (car il faut que icelle ligne soit tant grande qu'il sera de besoin) & soient icelles AK, KI, IG, GF, FD, & apres auoir mené la ligne CD, du point F, soit menée FB, parallele à CD : Ie dis que CB est la cinquiesme partie de CA.

Car par la 2.p.6. AB est à BC, comme AF à FD, & en composant par la 18. p. 5. AC sera à BC, comme AD à FD; mais FD est la cinquiesme partie de AD, partant aussi BC sera la cinquiesme partie de AC.

PROP. X.

Coupper semblablement vne ligne donnée non couppée, à vne autre ligne droicte donnée & couppée.

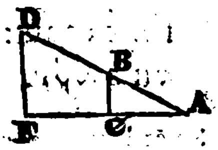


Soit la ligne donnée & couppée CB, sçauoir en I & H, & la ligne non couppée AB, laquelle il faut coupper en parties semblables, & proportionelles.

Soient accommodées icelles lignes données en sorte qu'elles facent vn angle ABC, & apres auoir mené la ligne CA, soient menées ID & HF parallelles à icelles, & GH parallelle à AB, par la 31.p.1. Il est euident par la 2.p.6. repetée deux fois que AB est couppée aux points D, & F; comme CB aux points I, & H.

PROP. XI.

A deux lignes droictes données, trouuer la troisiesme proportionnelle.

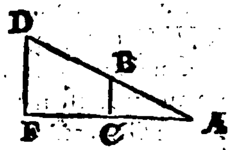


Soient deux lignes données AB, & AC, ausquelles il faut trouuer la troisiesme proportionnelle.

Soient disposées icelles lignes en vn angle CAB; & apres auoir prolongé CA iusques en F, soit faicte CF egalle à BA, & apres auoir mené CB, & du point F, FD parallelle à CB; soit prolongé AB iusques à ce qu'elle rencõtre FD au point D: Ie dis que BD est la troisiesme proportionnelle demandée. Cecy est euident par la 2.p.6. car AC estant à CF, comme AB à BD, & CF est egalle à AB; AC sera à AB, comme AB à BD, ce qu'il falloit prouuer.

PROP. XII.

A trois lignes droictes données, trouuer la quatriesme proportionnelle.

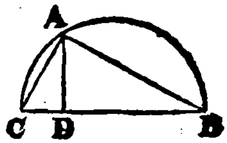


Soient les trois lignes données AC, CF, AB ausquelles il faut trouuer la quatriesme proportion.

Soit prolongé AB, tant qu'il sera de besoin, & apres auoir mené CB, du point F soit menée FD parallelle à CB Il est euident par la 2.p.6. que comme AC à CF, ainsi AB à BD, ce qui estoit requis.

PROP. XIII.

Entre deux lignes données, trouuer la moyenne proportionelle.



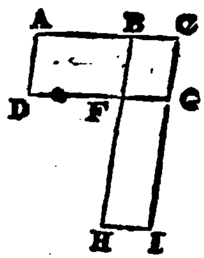
Soient les deux lignes données CD & DB, ausquelles, il faut trouuer la moyenne proportion.

Soient icelles disposées en vne ligne droite CB, sur laquelle soit descrit vn demy cercle CAB, & apres auoir du poinct D leué la perpendiculaire DA, Ie dis que icelle est la moyenne proportionnelle demandée.

Car si on meine les deux lignes CA & AB, l'angle CAB, dans le demy cercle sera droit par la 31.p.1.& le triangle CAB rectangle, & par la 8.p.6. la perpendiculaire AD, le diuisera en deux triangles equiangles BDA, & ADC, & par la 4.p.6. les costez qui sont au long des angles droits, seront proportionaux, sçauoir que comme BD à DA, ainsi DA à DC: par ainsi DA sera moyenne proportionelle.

PROP. XIV.

Les parallellogrames egaux ont les costez reciproques, & les parallellogrames qui ont les costez reciproques, sont egaux, moyennant qu'ils ayent vn angle egal à vn angle.



Soiét deux parallellogrames egaux AF, & FI, desquels les deux angles BFD & GFH soient egaux: Ie dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux sont reciproques: c'est à dire que DF est à FG, comme HF à FB.

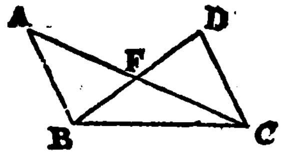
Qu'il ne soit ainsi. Il faut disposer les parallellogrames de telle façon que DF & FG, facent vne ligne droicte, en apres prolonger AB & IG iusques en C. Puis donc que les deux parallellogrames AF & FI sont egaux, ils auront vne mesme raison au parallellograme BG, par la 7.p.5. Mais la raison des parallellogrames AF & BG est par la 1.p.6. comme celle de la base DF à la base FG. Item celle de BG & FI, est comme celle de HF à FB, & par la 11.p.5. comme DF à FG, ainsi HF à FB.

Pour la seconde partie, si DF est à FG, comme HF à FB, & que les angles DFB, & HFG soient egaux: Ie dis que les parallellogrames AF & FI, seront aussi egaux.

Car demeurant la mesme construction, on prouuera par la 1.p.6.& 11.p.5. qu'il y a mesme raison du parallellograme AF, au parallellograme BG, que de la base DF à FG: pareillement qu'il y a mesme raison du parallellograme HG, au parallellograme GB, que de HF à FB: mais les raisons des bases sont semblables, aussi les raisons des parallellogrames DB & HG, au troisiesme BG seront semblables par la 11.p.5.& par la 9.p.5. ils seront egaux.

PROP. XV.

Les triangles egaux ont les costez reciproques, & les triangles qui ont les costez reciproques sont egaux, moyennant qu'ils ayent vn angle egal à vn angle.



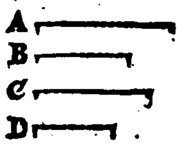
Soient deux triangles egaux AFB & CDF, ayans les angles au point F egaux : Ie dis que les costez qui sont au long des angles egaux sont reciproques: c'est à dire que comme AF à FC, ainsi DF à FB.

Qu'il ne soit ainsi: Il faut disposer les triangles en sorte que les deux lignes AF & FC, se rencontrent directement, & mener la ligne BC. Pour autant que les deux triangles AFB & DFC sont egaux, ils auront vne mesme raison au triangle BFC par la 7. p 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle AFB, au triangle FBC, (estant de mesme hauteur) est comme de la base AF à la base FC; pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DCF sera au triangle FCB, comme DF à FB, & par la 11. p. 5. AF sera à FC, comme DF à FB.

Pour la seconde partie elle se prouuera comme en la precedente en retrogradant par la 1. p. 6. 11. p. 5. & 9. p. 5.

PROP. XVI.

Si quatre lignes sont proportionelles, le rectangle compris des extremes, est egal à celuy des moyennes, & si le rectangle des extremes est egal au rectangle des moyennes, les quatre lignes sont proportionelles.



Soient quatre lignes proportionelles A, B, C, D, Ie dis que le rectangle des extremes A & D, est egal au rectangle des moyennes B & C.

Car par la 2. deff. 6. iceux rectangles auront les costez reciproques, & par la 14. p. 6. ils seront egaux. La seconde partie se prouuera aussi par la 14. p. 6.

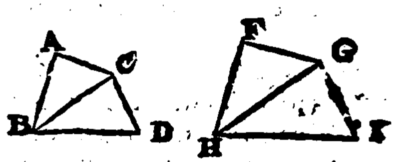
PROP. XVII.

Si trois lignes sont proportionelles, le rectangle des extremes sera egal au quarré de la moyenne, Et si le rectangle des extremes est egal au quarré de la moyenne, les trois lignes seront proportionelles.

Ceste demonstration est semblable à la precedente, en doublant la moyenne des trois proportionelles, affin qu'il y en ait 4.

PROP. XVIII.

Sur vne ligne droite donnée descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posée à vne figure rectiligne donnée.



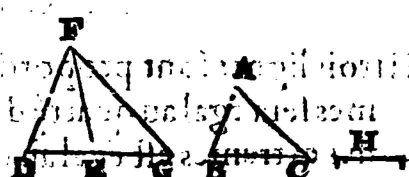
Soit la ligne droicte donnée HI, sur laquelle il faut bastir vne figure semblable, & semblablement posée à la figure ABDC.

Soit diuisée la figure donnée en deux triangles, par la ligne CB: & apres auoir par la 23. p. 1. basty sur la ligne HI, & aux points H, & I, les deux angles GHI, & GIH egaux, l'vn à l'angle CBD, & l'autre à l'angle CDB. Il est euident par la 32. p. 1. que le troisiesme sera egal au troisiesme, & les triangles CBD, & GHI seront equiangles, & auront les costez proportionaux par la 4. p. 6. & seront semblables. Pareillement sur la ligne HG, & aux deux points H & G, soient bastis les deux angles FHG & FGH, egaux aux deux ACB & ABC, chacun au sien, aussi par la 32. p. 1. le troisiesme A sera egal au troisiesme F, & les triangles ABC, & HFG, seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux, ainsi l'angle F estant egal à l'angle A, & l'angle I à l'angle D, les deux de B aux deux de H, & les deux de G aux deux de C; les deux figures seront equiangles, & pour autant qu'elles sont composées de triangles equiangles, il est aisé à monstrer qu'elles ont les costez proportionaux, & par la 1. def. 6. elles seront figures semblables.

Que si la figure donnée auoit plus de 4. costez, il la faudra diuiser en plusieurs triangles, & operer sur chacun triangle, comme il a esté dit cy dessus.

PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'vn à l'autre en raison doublée de leurs costez proportionaux.



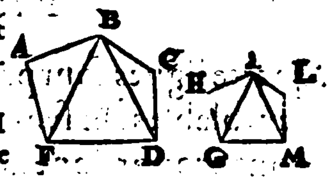
Soient deux triangles semblables FDG, & ABC: Ie dis qu'ils seront l'vn à l'autre en raison doublée de leurs costez proportionaux DG, & BC: c'est à dire que si à DG & BC on trouue la troisiesme proportionelle H, que le triangle FDG sera au triangle ABC, comme la ligne DG, est à la 3. H, car telle est la raison doublée par la 10. def. 5.

Qu'il ne soit ainsi, de la ligne DG il faut retrancher DK egalle à la troisiesme proportionelle H, & mener la ligne FK; Et pour autant que les deux triangles F

DG & ABC sont semblables, les angles D & B seront egaux, & si comme DF à DG, ainsi BA à BC, & en changeant (par la 16.p.5.) DF sera à BA, comme DG à BC: mais comme DG à BC, ainsi BC à H, ou DK son egalle par la construction, & par la 11.p.5. DF sera à BA, comme BC à DK, & par ainsi les deux triangles FDK & ABC, auront les costez reciproques, & l'angle D egal à l'angle B, & par la 15. p.6. ils seront egaux, & par la 7.p.5. ils auront vne mesme raison au triangle DFG. Mais DFG & DFK, sont l'vn à l'autre comme la base DG à la base DK par la 1.p. 6. aussi DFG & BAC, seront l'vn l'autre comme DG à DK ou à la 3. proportionnelle H son egalle.

PROP. XX.

Les Poligones semblables, sont l'vn à l'autre en raison doublée de leurs costez proportionaux, & peuuent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables entre eux, & proportionaux à leur tout.



Soient deux poligones semblables ABCDF & GHILM. Ie dis premierement qu'ils peuuent estre diuisez en nombre egal de triangles semblables.

Car apres auoir mené les lignes BF, BD, IG, IM, il est euident que l'vne des figures est diuisée en autant de triangles que l'autre. Mais pour autant que les figures sont semblables, l'angle A sera egal à l'angle H, & comme BA sera a AF, ainsi IH a HG: & par la 6.p.6. les triãgles FAB & GHI seront equiangles, & par la 4.p.6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables: par mesme discours, les triangles BCD & ILM seront aussi semblables. Pareillement par ce qui a esté dit cy dessus, BF est a FA, comme IG a GH, mais AF est a FD, comme HG a GM, car ce sont costez de figures semblables, & en raison egalle par la 22.p.5. BF sera a FD, comme IG a GM; par mesme discours BD sera a DF, comme IM a MG, & par la 5. p. 6. les triangles BFD, & IGM, seront equiangles & semblables.

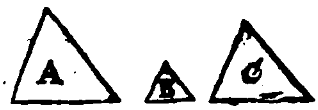
Ie dis secondement, que iceux triangles sont proportionaux a leur tout, ce qui est euident par la 12. p. 5. estans les trois triangles de l'vne des figures semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & par la 19.p.6. ils sont l'vn a l'autre, en raison doublée de leurs costez proportionaux, les triangles FAB, & GHI, seront l'vn a l'autre en raison doublée de BF a IG; aussi en la mesme raison doublée seront les triangles BFD & IGM: & le troisiesme BCD estant au troisiesme ILM, en raison doublée de BD a IM, qui est la mesme que de FB a GI, estans costez de triangles semblables, aussi les triangles BCD & ILM, seront l'vn l'autre en raison doublée de BF a IG: & par la 12. p. 5. tous les triangles du premier poligone, seront a tous les triangles de l'autre poligone, comme l'vn des triangles de l'vn d'iceux, a son respondant de l'autre.

Ie dis tiercement que le poligone eſt au poligone, en raiſon doublée des coſtez FD & GM: car puis que toute la figure ABCD, eſt à toute la figure HILM, comme l'vn des triangles de l'vne FBD, eſt à l'vn des triangles de l'autre GIM, leſquels par la 19. p. 6. ſont en raiſon doublée de FD, à GM, par la 11. p. 5. le poligone ſera au poligone, en raiſon doublée de FD, à GM.

PROP. XXI.

Les figures rectilignes ſemblables à vne, ſont ſemblables entre elles.

Soit la figure A ſemblable à la figure B, & la figure C ſemblable auſſi à la meſme B: Ie dis que A, & C, ſeront ſemblables entre elles.

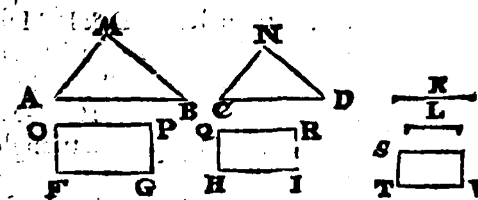


Cecy eſt aiſé à demonſtrer par la 1. p. 6. en explicquant l'egalité des angles, & proportion des coſtez par la 4. p. 6.

PROP. XXII.

Si quatre lignes ſont proportionelles, les figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur icelles, ſeront proportionelles: & ſi icelles figures ainſi deſcrites ſont proportionelles, icelles lignes ſeront auſſi proportionelles.

Soient 4. lignes proportionelles AB, CD, FG, HI, & ſur AB, & CD, ſoient deſcrits deux triangles ſemblables MAB, & NCD: Item ſur FG, & HI ſoient deſcrits OG, & QI rectangles ſemblables. Ie dis premierement que ceux triangles & parallellogrames ſont proportionaux.



Qu'il ne ſoit ainſi: aux deux lignes AB, & CD, ſoit trouuée K troiſieſme proportionelle par la 11. p. 6. & aux deux FH, & HI, ſoit trouuée L auſſi troiſieſme proportionelle: & d'autant que AB eſt à CD, comme FG eſt à HI; Item CD, à K, comme HI, à L: en raiſon egalle AB ſera à K, comme FG à L, par la 22. p. 5. Mais comme AB eſt à K, ainſi le triangle MAB eſt au triangle CND, par la 19. p. 6. & comme FG à L, ainſi le rectangle OG eſt au rectangle QI, & par la 11. p. 5. les quatre figures ſont proportionelles.

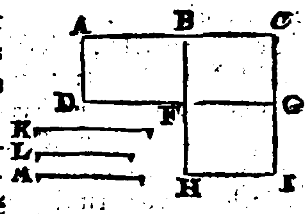
Ie dis pour la ſeconde partie, que ſi icelles figures ſemblables ſont proportionelles que les lignes ſur leſquelles elles ſont deſcrites ſerōt auſſi proportionelles

Car

Car si aux trois AB, CD, FG; HI n'est quatriesme proportionelle, soit prise TV quatriesme proportionelle par la 12. p. 6. & sur icelle soit descrite SV figure semblable à OG, par la 18. p. 6. & par ceste proposition, Puis que AB est à CD, comme FG, à TV, le triangle MAB sera au triangle NCD, comme le poligone OG est au poligone SV: Mais telle est QI à OG par hypotese, & par la 9. p. 5. QI, & SV sont egaux, ainsi descrits sur lignes egalles, comme on peut recueillir de la 20. pr. 6.

PROP. XXIII.

Les parallellogrames equiangles sont l'vn à l'autre en raison composée de leurs costez.

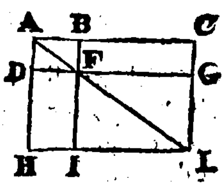


Soient deux parallellogrames equiangles BD, & GH, ayant les deux angles au point F egaux: Ie dis que la raison de l'vn à l'autre est composée de leurs costez DF, FG, BF, & FH.

Qu'il ne soit ainsi, il faut disposer les deux parallellogrames, en sorte que DF, & FG, se puissent rencontrer directement, & paracheuer le Gnomon. Ité soient prises les deux lignes K, & L, en la raison de DF à FG: Pareillement soit L, à M, comme BF à FH, alors BD sera à CF, comme DF est à FG par la 1. p. 6. & par la 11. p. 5. les rectangles BD, & CF, feront l'vn à l'autre comme K est à L, le mesme se peut dire de BG, & FI, qu'ils sont l'vn à l'autre, comme L est à M par la 1. p. 6. & 11. p. 5. partant en raison egalle BD est à GH, comme K est à M, par la 22. p. 5. Mais la raison de K à M, est composée de K, à L, & de L à M, par la 5. d. 6. & par consequent ils seront en raison composée d'iceux costez DF, FG, BF, FH, qui est la raison de K à M.

PROP. XXIIII.

En tout parallellograme, les parallellogrames descrits sur le diametre, ayans vn angle commun au total, sont semblables entre eux, & au total.

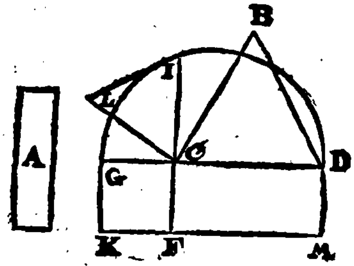


Soit le parallellograme ACHL, duquel le diametre est AL: Ie dis que les deux parallellogrames BD, & GI, descrits sur iceluy diametre, ayans les angles A, & L, communs auec le total, sont semblables entre eux, & au total ACHL.

Car d'autant que les lignes AC, DG, & HL, sont parallelles, sur icelles tombans AL, & BI, elles feront les angles alternatiuement egaux, par la 29. p. 1. ainsi les triangles ABF, & FGL, seront equiangles entre eux, & au total ACL, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux. Le mesme se peut dire des trois autres ADF, FIL, & AHL, lesquels ſont egaux aux trois premiers, chaſcun au ſien par la 34. p. 1. ainſi le parallellograme AF, ayant les coſtez AB & BF proportionaux à AC & CL coſtez du parallellograme AL, & aux coſtez FG & GL, du parallellograme FL, &c. Il eſt euident par la 1. p. 6. qu'ils ſeront ſemblables entre eux, & au tout.

PROP. XXV.

Deſcrire vne figure rectiligne, ſemblable à vne autre donnée, & egalle à vne autre propoſée.



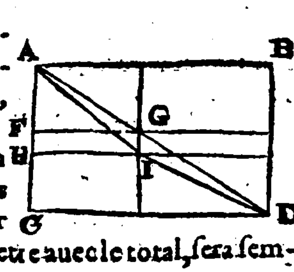
Soient deux figures rectilignes A, & BCD, il faut faire vne figure rectiligne egalle à A, & ſemblable à BCD.

Sur la ligne CD, ſoit faict le rectangle CM egal à la figure BCD: Item ſur la ligne CF, ſoit baſty GF rectangle egal à la figure donnée A, le tout par la 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouué C I, moyenne proportionelle entre GC & CD, Sur icelle, ſoit deſcrite la figure CIL, ſemblable & ſemblablement poſée à la figure CBD, par la 18. p. 6. Ie dis qu'elle ſera auſſi egalle à la figure donnée A.

Car puis que par conſtruction, le rectangle CK eſt egal à A, & CM à BCD, & que par la 1. p. 6. CK eſt à CM, comme GC à CD: Pareillement que les deux figures ſemblables BCD, & ILC, ſont l'vne à l'autre en raiſon doublée de CD à CI, par la 19. p. 6. ſçauoir comme DC à la 3. proport. CG, Auſſi par la 11. p. 5. CBD, ſera à CIL, comme CM, à CK; & en changeant CBD, ſera à CM, comme CIL, à CK, par la 16. p. 5. & CBD eſtant egal à CM, auſſi ILC ſera egal à CK, & par conſequent egalle à A.

PROP. XXVI.

Si d'vn parallellograme on oſte vn parallellograme ſemblable & ſemblablement poſé au tout, ayant vn angle commun auec le tout, l'oſté ſera auec le tout ſur vn meſme diametre.

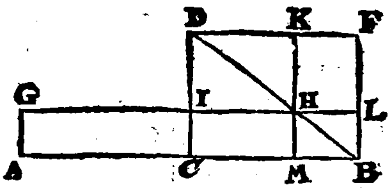


Soit le parallellograme ABCD, duquel on retranche AG parallellog. qui luy eſt ſemblable & ſemblablement poſé, ayans l'angle A commun auec le total, Ie dis qu'ils ſont ſur meſme diametre AGD.

Autrement s'ils ne ſont ſur meſme diametre, Soit vn autre diametre AID, qui ne ſoit commun à tous les deux, & du point I ſoit menée IH parallelle à AB par la 31. p. 1. donc le parallellog. AI eſtant ſur meſme diametre auec le total, ſera ſemblable à iceluy, par la 24.p.6. auquel total, AG est aussi semblable par hypotese, & par la 21.p.6. AG & AI seront semblables, & par la 1.p.6. GF sera à FA, comme IH à HA: Mais IH & GF estant egalles, il faudroit aussi que HA fust egalle à FA: ce qui est absurde, donc les parallellogrames AG & AD, retranché & total, estoient sur mesme diametre.

PROP. XXVII.

De tous les parallellogrames descrits sur vne mesme ligne, defaillans à icelle d'vn parallellograme semblable à vn autre descrit sur la moictié de la mesme ligne, le plus grand est celuy qui est descrit sur l'autre moitié de la ligne.



Nous appellõs vn parallellograme defaillir à vne ligne, lors qu'il ne l'ocupe point entierement. Et le parallellograme descrit sur le reste de la ligne est appellé le defaut de la ligne.

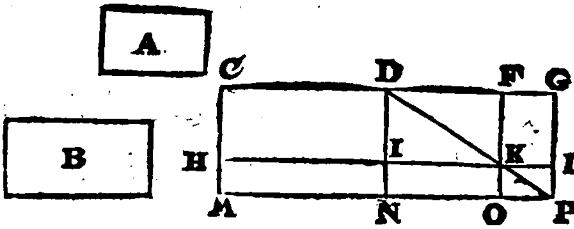
Soit la ligne AB couppée en deux egallement en C, & sur la moitié d'icelle soit le parallellograme DB, ayant la diagonalle DB: Ie dis que de tous les parallellogrames defaillans à icelle ligne d'vne figure semblable à DB, le plus grand est celuy qui est descrit sur la moitie, sçauoir DB.

Qu'ainsi ne soit; Il faut descrire le parallellograme AH, ou autre quelconque sur plus ou moins que la moitié AC: Mais il est requis en ceste proposition que le parallellograme que l'on veut defaillir d'vne figure semblable à DB, vienne toucher la diagonalle DB afin que par la 24. p. 6. le defaut HB soit semblable au parallellograme descrit sur la moitié de la ligne CB: ainsi HA est defaillant d'vne figure semblable à DB, sçauoir HB, & par la 36. & 43. p. 1. le Gnomon IBK se trouuera egal au parallellograme AH. Partant AH sera plus petit que BD, comme iceluy Gnomon est aussi plus petit que BD, ainsi de tous les autres. Mais celuy qui seroit descrit sur la moité AC seroit egal à DB, estans sur les bases egalles, & entre mesmes parallelles, &c.

PROP. XXVIII.

Sur vne ligne droite donnée, appliquer vn parallellograme defaillant d'vn parallellograme semblable à vn autre donné, & egal à vne figure donnée, laquelle soit plus petite que le parallellograme semblable au donné, def-

crit sur la moitié de la ligne.



Soit la ligne donnée M P, sur laquelle il faut appliquer vn parallellograme defaillant d'vn parallellograme semblable à A, mais egal à B.

Sur la moitié NP soit descrit le parallellograme DNPG semblable à A, par la 18. p. 6. Puis apres auoir accomply le parallellograme CP, soit tirée la diagonalle DP:

Maintenant si MD est egal à B, on a ce que l'on demande; si B est plus petit (car il ne peut estre plus grand que MD) soit trouué l'excez, lequel excez soit reduit en parallellograme semblable à A, ou DP, par la 25. & 26. p. 6. & soit iceluy excez DIKF, & apres auoir continué les costez IK, & FK, tant qu'il sera de besoin. Ie dis que MK est le parallellograme demandé.

Car il est defaillant de la figure OL, laquelle par la 24. p. 6. est semblable à DP, partant aussi à la donnée A. Item puis que IF est l'excez par lequel NG excede B, il est euident que le Gnomon IPF sera egal à la figure B. Mais il est aussi egal à MK, comme il a esté prouué à la precedente, donc MK sera egal à B, & defaudra à la ligne donnée de la figure OL semblable à A.

Faut noter que les parallellogrames semblables, soient aussi semblablement posez.

PROP. XXIX.

Sur vne ligne droicte donnée, descrire vn parallellograme egal à vne figure rectiligne donnée, excedant d'vn parallellograme semblable à vn autre donné.

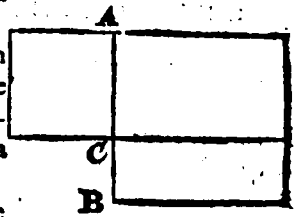
Soit la ligne HK sur laquelle faut descrire vn parallellograme excedant d'vne figure semblable à A, mais egal à B.

Soit couppée en deux egallement HK au point I, & sur la moitié IK soit descrit IF figure semblable & semblablement posée à la figure A par la 18. p. 6. En apres soit descrit le parallellograme DP egal aux deux figures B, & IF, & semblable à IF par la 25. p. 6. Mais de telle façon que ce soit en accomplissant le parallellograme FI, Puis soient continuées LI en H, PN en M, FK en O, & mené HM: Ie dis que ML est le parallellograme demandé egal à B, & excedent la ligne HK, de la figure OL, semblable à A.

Car par la 36. & 43. p. 1. le Gnomon IPF est egal au parallellograme ML, mais NG ayant esté construict egal à IF, & à B, il est euident que le Gnomon sera egal à B, & par consequent ML egal a B, & par la 24. p. 6. l'excez OL se trouuera semblable a A.

PROP. XXX.

Coupper vne ligne droite donnée en la moyenne & extreme raison.



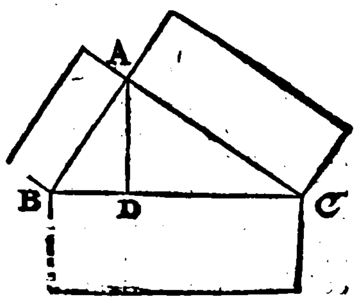
Soit la ligne A B, laquelle il faut coupper en la moyenne & extreme raison.

Soit donc icelle couppée au point C de telle façon que le quarré de la partie AC, soit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie CB, comme il a esté enseigné en la 11.p.2. Ie dis que en C, elle sera couppée en la moyenne & extreme raison.

Car puis que le quarré de AC est egal au rectangle de AB & CB, Les trois lignes AB, AC, & CB, seront continuellement proportionelles par la 17. p. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment A C, comme AC, au plus petit segment CB, & par la 3. d. 6. AB est couppée en C, en la moyenne & extreme raison.

PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le costé qui soustient l'angle droict, est egalle aux deux autres figures qui luy sont semblables & semblablement posées sur les deux autres costez.

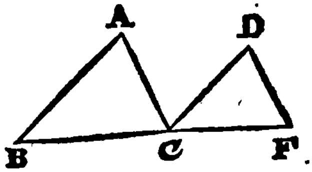


Soit le triangle rectangle ABC, l'angle droict A: Ie dis que la figure sur le costé BC qui soustient l'angle droict, est egalle aux deux autres figures semblables, & semblablement posées sur les deux autres costez AB, & BC.

Car si du point A qui faict l'angle droict, on mene la perpendiculaire AD, par la 8.p.6. elle fera deux triangles equiangles entre eux, & au total: ainsi les trois triangles ACD, DBA, & ABC seront semblables par la 4.p.6. & 1.p.6. & par la 19.p.6. seront l'vn à l'autre en raison doublée des costez AB, BC, CA. Pareillement, les trois figures estans semblables, elles seront aussi l'vne à l'autre en raison doublée de leurs costez proportionaux AB, BC, CA les mesmes costez des triangles, & par la 11. p. 5 les parallellogrames seront entre eux, comme les triangles entre eux, mais le triangle BAC, est egal aux deux autres, donc la figure sur BC, sera aussi egalle aux deux autres.

PROP. XXXII.

Si deux triangles ont deux costez proportionaux à deux costez, & sont disposez faisant vn angle de telle façon que les costez proportionaux soient parallels, les deux autres costez se rencontreront directement.

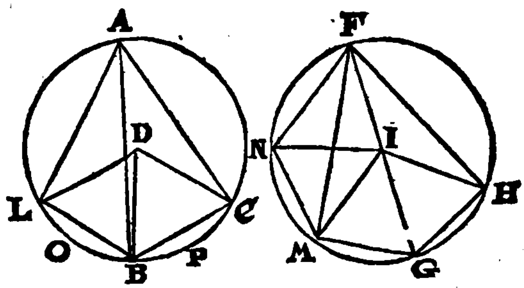


Soient deux triangles ABC, & CDF, ayans les costez BA & AC, proportionaux aux costez CD & DF, disposez de telle façon qu'ils facent l'angle ACD, & que BA soit parallel à CD, & AC à DF, ie dis que BC & CF se rencontreront directement.

Car BA & CD estans parallels, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallelle à DF, l'angle D sera egal à son alterne ACD: ainsi l'angle D sera egal à l'angle A, & par la 6. p. 6. les deux triangles seront equiangles; donc l'angle ACD estant egal à l'angle A, l'angle DCF, à l'angle B, il est euident que les trois angles au point C, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droits par la 32. p. 1. & par la 14 p. 1. les deux lignes se rencontreront directement.

PROP. XXXIII.

Aux cercles egaux, les angles tant au centre que en la circonferance sont entre eux, comme les circonferances qui les soustiennent. Les secteurs sont aussi de mesme.



Soient deux cercles egaux ABC, & FGH, desquels les centres sont D, & I, & soient les deux angles au centre BDC, & GIH, ou en la circonferance BAC, & GFH; ie dis qu'ils sont l'vn à l'autre comme la circonferance BC à la circonferance GH.

Qu'il ne soit ainsi, soient pris les deux arcs NM, & MG, egaux à GH; item LB egal à BC; & soient menées les lignes LA, LD, NF, NI, MF, MI, les trois angles NIM, MIG, GIH sont egaux entre eux, par la 26. p. 3. ainsi NH est autant multiplice de GH, comme l'angle NIH l'est de GIH; & par le mesme discours LC, est autant multiplice de BC, comme l'angle LDC, l'est de BDC: partant si l'arc LC est egal à l'arc NH, l'angle LDC sera egal à l'angle NIH par la 26.

p.3. si plus grand plus grand, si plus petit plus petit, & par la 6. p. 5. comme l'arc à l'arc, ainsi l'angle à l'angle, le mesme discours est des angles en la circonferance.

Pour la seconde partie. Ie dis que le secteur BDC est au secteur GIH, comme l'arc BC est à l'arc GH.

Car on prouuera aisement (demeurant la mesme construction) que les trois arcs NM, MG, GH estans egaux que leurs cordes seront egalles, & les trois sections egalles: mais les trois triangles NMI, MGI, & GHI sont egaux, & par les communes sentences, les trois secteurs NIM, MIG, GIH seront egaux & l'arc NMGH, sera autant multiplice de l'arc GH, que le secteur NIH, le sera du secteur GIH; & par mesme discours, l'arc LBC sera autant multiplice de l'arc BC que le secteur LDC sera du secteur BDC; la conclusion est aisée par la 6. p. 5. comme en la premiere partie.

Fin du sixiesme Element.

ELEMENT SEPTIESME.

DEFINITIONS.

VNITE' est selon laquelle toutes choses sont appellées vnes.

2. Nombre est vne multitude d'vnitez assemblées.

3. Partie est vn petit nombre tiré d'vn plus grand, lors que le petit mesure le plus grand, & ceste partie est appellée aliquote.

4. Partie aliquante est lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand, & icelle est appellée parties.

5. Multiplice est vn grand nombre composé d'vn petit, lors que le plus petit mesure le plus grand.

Nombre pair est celuy qui peut estre diuisé en deux egallement.

6. Impair est celuy qui ne peut estre diuisé en deux egallement.

7. Pairement pair est celuy qu'vn nombre pair mesure par vn nombre pair.

8. Pairement impair est celuy qu'vn nombre impair mesure par vn nombre pair.

9. Nombre premier est celuy qui est mesuré par la seule

vnité.

vnité.

10. Ceux-là sont nombres premiers entre-eux, qui n'a de commune mesure que l'vnité.

11. Nombre composé est celuy qui est mesuré par quelque nombre.

12. Ceux-là sont composez entre eux, qui ont autre commune mesure que l'vnité.

13. Vn nombre est dit multiplier vn autre, lors que le multiplice est autant de fois composé, qu'il y a d'vnitez au multipliant.

14. Lors que deux nombres se multiplient l'vn l'autre, le produict est appellé plan, & les multiplians sont les costez d'iceluy plan.

15. Lors que trois nombres se multiplient l'vn l'autre, le produict est appellé solide, & les multiplians sont les costez d'iceluy.

16. Nombre quarré est le produict de deux nombres egaux.

17. Nombre cube est le produit de trois nombres egaux.

18. Nombres proportionaux sont lors que le premier est la mesme partie soit aliquote ou aliquante du second, comme le troisiesme du quatriesme.

19. Nombres semblables plans ou solides, ont les costez proportionaux.

20. Nombre parfaict est celuy qui est egal à toutes ses parties aliquotes.

COMMVNES SENTENCES.

Celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

Celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

Encores que ces principes soient icy posez pour tels, neantmoins ils ont esté prouuez generallement pour toute sorte de quantitez au 5. liure, mais en nombres ils peuuent estre posez plus aisement, ensemble plusieurs autres de mesme estoffe. Quant aux propositions, nous auons tousiours suiuy l'ordre de Theon, non pas de Campanus.

PROP. I.

Si de deux nombres proposez on soustraict tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le petit residu ne mesure iamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité, les nombres proposez seront premiers entre eux.

A ..... 5 F .. 2 G . 1 B
C .. 3 H .. 2 D
E .. 2

Soient deux nombres inegaux AB, & CD, si on soustraict continuellement le plus petit du plus grand, & que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand iusques à ce qu'on ait pris l'vnité: Ie dis qu'iceux nõbres AB, & CD serõt premier entr'eux.

Autrement s'ils ne sont premiers, ils seront composez, & par la 14. p. 7. ils seront mesurez par quelque nombre: soit iceluy E commune mesure à tous les deux: ainsi CD plus petit nombre estant soustrait de AB, soit le reste FB, plus petit que CD. Item FB estant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB. Pareillement HD estant soustraït de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi AF; & d'autant qu'il mesure la toute AB, il mesurera aussi le residu FB, lequel mesure CH, ainsi E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure la toute CD, il mesurera aussi le reste HD, & par consequent FG, & par le mesme discours il mesurera le reste GB, sçauoir luy estant vn nombre, ce qui est impossible, donc AB & CD, sont nombres premiers entre eux.

Ceste demonstration, & quelques autres suiuantes sont fondées sur le sens commun, & bien qu'elles se puissent appuyer sur quelques prop. du 5. toutesfois nous les laissons, estant euident que Euclide a voulu distinguer le nombre d'auec la grandeur. Cela a esmeu Campanus de poser des principes nouueaux, lesquels chascun entendra aisement sans les poser.

PROP. II.

Trouuer la plus grande commune mesure de deux nombres proposez non premiers entre eux.

Soient deux nombres non premiers AB, & CD, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure, laquelle sera nombre non pas vnité par la 1. p. 7.

A 9	F 6	B	
C 6	G . . . 3	D	
H . . . . 4.			

d'autant que les nombres proposez ne sont premiers entre eux.

Soit soustrait le plus petit CD, tant de fois que faire se pourra du plus grand AB, s'il reste quelque chose comme FB, soit soustraict continuellement le plus petit du plus grand, iusques à ce qu'il ne reste rien comme GD mesurant FB, il ne reste rien. Ie dis que GD est la plus grande commune mesure de AB, & CD.

Qu'ainsi ne soit. Ie dis en premier lieu que GD mesure AB, & CD: Car mesurant FB, il mesure aussi CG, & d'autant qu'il se mesure soy mesme, il mesure la toute CD Pareillement il mesurera AF, & puis qu'il mesure aussi FB, il mesurera la toute AB, ainsi il mesure toutes les deux AB, & CD.

Ie dis secondement que GD est la plus grande commune mesure de AB, & CD. Autrement soit vn plus grand nombre: sçauoir H qui mesure tous les deux nombres AB, & CD: & puis qu'il mesure CD, il mesurera aussi AF, & mesurant le tout AB, il mesurera aussi le residu FB, & par consequent il mesurera CG. Item mesurant le tout CD, il mesurera aussi le reste GD sçauoir vn plus grand nombre mesurera vn plus petit, ce qui est impossible donc GD est la plus grande commune mesure entre AB, & CD.

Il resulte que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure.

PROP. III.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entre eux.

A 12	D 4
B 8	F . . 2
C 4	G . . . 3
C 6	

Soient trois nombres non premiers entre eux A, B, C, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure, car ils en ont vne autre que l'vnité par la 14. p. 7.

Soit tirée la plus grande commune mesure des deux A, & B, par la 2. p. 7. sçauoir D. Si D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entre eux, tant par l'hypotese que par ce qui resulte de la 2. p. 7. donc par icelle mesme proposition soit trouuée F plus grande comme mesure entre C & D. Il est euident que F mesurera toutes les trois A, B, C, d'autant qu'elle mesure C, & D, lequel mesure B, & A. Ie dis d'auantage que F est aussi la plus grande mesure commune. Autrement si elle n'est la plus grande, soit vne autre plus grande, sçauoir G s'il est possible: car mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par ce qui resulte de la 2. p. 7. & par la mesme raison mesurant C, & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure F, sçauoir le plus grand, le plus petit. ce qui est impossible. Donc F sera la plus grande commune mesure des trois nombres A, B, C.

PROP. IIII.

De deux nombres inegaux, le plus petit eſt partie, ou partie du plus grand.

Par ces mots nous entendons partie aliquote, ou aliquante.

A 6	B 4	B ... 3	B 5

Soient deux nombres A, & B inegaux. Ie dis que B plus petit eſt ou partie aliquote ou aliquante de A.

Car ou B meſure A, ou non. S'il le meſure, il eſt partie aliquote par la 3.p.7. s'il ne le meſure pas ou bien A & B, ſeront compoſez, ou premiers: ſi compoſez, ils auront vne commune meſure par la 14. d. 7: ſi premiers ils auront l'vnité pour commune meſure par la 12. d. 7. ainſi B contiendra certain nombre d'vnitez ſemblables aux vnitez qui ſont en A.

PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier eſt telle partie du ſecond, que le tiers du quart, le premier & tiers enſemble ſeront telle partie du ſecond & du quart, qu'eſt le premier du ſecond.

A ... 2.		
B ... 3	F ... 3	H
C 4		
D 4	G 4	I

Soient quatre nombres ABCD, deſquels A eſt telle partie de B, que C eſt de D. Ie dis que A & C enſemble ſont telle partie de B & D enſembles, comme A l'eſtoit de B.

Qu'ainſi ne ſoit, puis que A eſt telle partie de B, que C de D, B contiendra A autant de fois, comme D contiendra C par la 3. p. 7. Soit donc B diuiſé en autant de parties qu'il contient de fois A, ſçauoir en BF, & FH; D ſe diuiſera auſſi en autant de parties egalles à C par l'hypoteſe, ſçauoir en DG, & GI: & d'autant que BF eſt egal à A, & DG à C. ſi à choſes egalles on adiouſte choſes egalles, ſçauoir A & BF, à C & DG, les tous AC, & BF DG ſeront egaux: le meſme ſe dira de A, FH, C & GI, ainſi autant de fois qne BH contient A, autant de fois BH & DI enſemble contiendront A & C enſemble.

PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond que le tiers du quart: le premier & tiers enſemble ſeront telles parties du ſecond & quart, que le premier du ſecond.

Soient quatre nombres A, C, D, H, desquels le premier A contient autant de parties du second C que le 3. D est du 4. H. Ie dis que A, & D ensemble contiendront autant de parties de C & H ensemble, que A de C.

A ... 3 F ... 3 B
C 9
D ... 4 I .... 4 G
H 12

Qu'ainsi ne soit, pour autant que AB contient telles parties de C, que DG en contient de H : estans A & D diuisez aux parties de C & H, il y aura autant de parties de C en AB, comme de H en DG, & par la 5. p. 7. AF, & DI ensemble seront telle partie de C & H ensemble, comme AF est de C. Item FB & IG ensemble seront telle partie de C & H ensemble, comme FB seul, est de C seul; ainsi AB & DG seront deux fois telle partie ensemble de C, & H ensemble, comme AB, estoit de C.

PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'vn autre nombre, que le retranché du retranché, le reste sera telle partie du reste, comme le tout estoit du tout.

Soit AB telle partie de CD, que le retranché AF est du retranché CG. Ie dis que le reste FB, sera telle partie du reste GD, que le tout AB estoit du tout CD.

A .... 4 F .. 2 B
H .... 4 C .... 8 G .... D

Qu'il ne soit ainsi, soit pris le nombre HC, de telle façon que le reste FB soit telle partie de HC, que le retranché AF est du retranché CG. Les deux AF & FB serõt telle partie de HC & CG ensemble, qu'est AF de CG, par la 5 p. 7. Mais par l'hypotese AB est à CD, comme AF à CG : donc HG & CD seront egaux par la 9. p. 5. & en ostant le nombre commun CG, les demeurans HC & GD seront egaux, le reste est aisé à conclure.

PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché, le reste contiendra telles parties du reste que le tout du tout.

Si le nombre total CD, contient telles parties du total AB, que le retranché CG du retranché AF : Ie dis que le reste GD contiendra telles parties du reste FB, que le total CD, du total AB.

A .... 6 F ... 3 B
H .. 2 C .... 4 G .. 2 D

Qu'il ne soit ainsi, si on pose HC estre telles parties de FB, que CG de AF, par la 6. p. 7. le tout HG sera telle partie du tout AB, que le reste HC du reste FB, ou le retranché CG, de AF, & par la 13. & 9. p. 5. on monstrera comme en la precedente que HC sera egalle à GD, & que par consequent ce qui se prouuera del' vne s'entendra de l'autre.

PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second que le tiers du quart, aussi en changeant le premier sera telle partie ou telles parties du tiers, que le second du quart.

1 A ... 3		
2 B ... 3	F ... 3	G
2 C 4		
4 D 4	H 4	K

Soit A telle partie de B que C est de D Ie dis que B sera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que A de C : pourueu que A & B soient plus petits que C, & D.

Qu'il ne soit ainsi, pour autant que par l'hypotese A est telle partie de B, comme C, de D : DK sera diuisé en autant de parties egalles à C, que BG, d'egalles à A. Or par la 4.p.7. A est partie de C ou contient parties d'iceluy, & consequemment tous les autres BF, de DH, & FG, de HK. Mais parce que BF est egal à A, & DH, à C, BF contiendra telles parties de DH, que A de C : semblablement aussi FG, de HK. Soient donc 4. nombres BF 1. à DH 2. comme FG 3. à HK 4. BG. 1. & 3. sera telle ou telles parties de DK second, & 4. que BF. 1. de DH, 2. ou leurs egaux A & C, par la 5. & 6. p. 7. ce qu'il falloit prouuer.

PROP. X.

Si de quatre nombres le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart, aussi en changeant le premier contiendra telle ou telles parties du second, que le tiers du quart.

A .. 2	F .. 2	H
B 6		
C 5	G 5	I
D 15		

Soient 4. nombres A, B, C, D, desquels A contienne telles parties de B, que C de D Ie dis que en changeant A sera telle ou telles parties de C, que B est de D, moyennant que A & B soient plus petits que C, & D comme en la precedente.

Qu'il ne soit ainsi, soit diuisé A, en AF & FH parties de B, & C, en CG & GI parties de D, par l'hypotese AH sera diuisé en autant de parties que CI, estant A telles parties de B que C de D. Ainsi AF sera telle partie de B que CG, de D. par sa diuision. Et par la 9.p.7. AF sera telle ou telles parties de CG, en changeant, que B est de D. Mais AF, & FH estans egaux comme CG, & GI, FH sera telle ou telles parties de GI, que AF, de CG : & par la 6. p. 7. les deux AH seront telles parties des deux CI, que AF est de CG. Mais AF est telles parties de CG que B est de D, & par consequent AH sera telles parties de C I, que B est de D, ce qu'il falloit prouuer.

PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché, le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Si le tout AB est au tout CD, comme le retranché AF est au retranché CG, le reste FB sera au reste GD, comme le tout au tout.

A ... F ... B
C .... G .... D

Car puis que AB est à CD, comme AF, à CG; AB la plus petite sera telle ou telles parties de CD, que AF de CG, & le reste FB sera telle ou telles parties du reste GD, que le tout du tout par la 7. & 8. p. 7. & par la 20. p. 7. les raisons seront semblables.

PROP. XII.

Si autant de nombres qu'on voudra sont proportionaux: comme l'vn des antecedens sera à l'vn des consequens, ainsi tous les antecedens seront à tous les consequens.

Soient 4. nombres proportionaux ABCD: c'est à sçauoir qu'il y ait telle raison de A, à C, que de B à D: A, & B, les deux antecedens ensemble seront aux deux consequens ensemble C & D, comme A l'vn des antecedens à C l'vn des consequens.

A 9
B 6
C ... 3
D .. 2

Qu'il ne soit ainsi, puis que les 4. nombres sont proportionaux, par la 20. p. 7. D la plus petite sera telle ou telles parties de B, que C de A. Et par la 5. ou 6. p. 7. C & D ensemble seront telle ou telles parties de A & B ensemble, que D est de B, & par la 20. p. 7. conuertie, ce sera vne mesme proportion.

PROP. XIII.

Si quatre nombres sont proportionaux, aussi en changeant ils seront proportionaux.

Soient 4. nombres proportionaux, A, B, C, D, sçauoir qu'il y ait telle raison de A, à B, que de C, à D: Ie dis que en changeant il y aura telle raison de A à C, que de B à D.

A 12
B 8
C 9
D 6

Car puis qu'ils sont proportionaux par la 20. p. 7. B sera telle ou telles parties de A que D est de C, & par la 9. ou 10. p. 7. C sera telle ou telles parties de A que D est de B, & par la 20. p. 7. conuertie, ce sera vne mesme proportion.

PROP. XIV.

Si tant de nombres qu'on voudra d'vn costé, & autant d'vn autre, sont de deux en deux en mesme raison, iceux en raison egalle seront proportionaux.

Soient d'vne part trois nombres A, B, C, & autant d'autre part D, F, G, & que de deux en deux il y ait telle raison de A à B que de D à F, & de B à C que de F à G: En raison egalle, il y aura telle raison de A à C, que de D à G.

A 9	D 6
B 6	F 4
C ... 3	G .. 2

Car par la 13. p. 7. A estant à D comme B à F, & B à F comme C à G, & par la 11. p. 5. A sera à D, comme C, à G, & en changeant A sera à C, comme D à G par la mesme 13. p. 7. ce qu'il falloit prouuer.

PROP. XV.

Si l'vnité mesure quelque nombre autant de fois qu'vn tiers mesure vn quart, aussi en changeant le second mesurera le quart autant de fois, que l'vnité mesure le tiers.

Soit l'vnité A mesurant autant de fois B, que C mesure D: Ie dis que en changeant B mesurera D, comme A mesure C.

Car par l'hypotese B estant diuisé par vnitez, & D par la partie de C: Icelle partie C sera autant de fois en D, comme A en B, & chacune partie de D sera egalle à C, comme chacune de B, à l'vnité; donc l'vnité BF, est à la partie DI, comme FG à IK, & GH, à KI, donc toutes les antecedentes BH seront à toutes les consequentes DK, comme BF à DI, ou leur egalle A à C, par la 12. p. 7. ce qui estoit à prouuer.

A . 1
B . 1 F . 1 G . 1 H
C .. 2
D .. 2 I .. 2 K .. 2 L

PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'vn l'autre, leurs produicts seront egaux entre eux.

Soient deux nombres A, & B, & que A multipliant B produise C, & B multipliant A produise D: Ie dis que iceux deux produits sont egaux entre eux.

Car puis que A multipliant B produit C, B sera autant dans C, que l'vnité est en A, en A, par la 15. d. 7. & par la 15. p. 7. en changeant A sera autant de fois dans C, que l'vnité est en B. Item B multipliant A & produisant D, A sera autant de fois dedans D, qu'il y a d'vnitez en B par le mesme 15. d. 7. & nous auons prouué que A estoit autant en C, que l'vnité en B, donc A est autant en C ou D que l'vnité en B; ainsi C & D seront egaux par la 9. p. 5.

Vnité.
A ... 3 B 4
C 12
D 12

PROP. XVII.

Vn nombre multipliant deux autres, les produicts seront entre eux en mesme raison que les multipliez.

Soit le nombre A multipliant B & C: Ie dis que les deux produicts D, & F, sont entre eux, comme B, à C.

Car par la 15. d. 7. B multiplié par A est autant de fois dans son produit D, que l'vnité est en A, & C dans son produict F, comme la mesme vnité en A: par consequent telle raison de l'vnité à A, que de B à D: & telle raison de l'vnité à A, que de C à F, & par la 11. p. 5. B sera à D, comme C à F, & en changeant par la 13. p. 7. D sera à F comme B, à C.

Vnité.
A .. 2
B ... 3 C 4
D 6
F 8

PROP. XVIII.

Deux nombres multiplians vn autre, les produicts seront entre eux en mesme raison que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, multiplians C, & soient les deux produicts D & F: Ie dis qu'iceux D & F seront l'vn à l'autre cõme A est à B.

Car puisque A multipliant C produict D, aussi C, multipliant A produira D par la 16. p. 7. Le mesme se dit de B, C, F: ainsi A & B multipliant C, c'est comme si C multiplioit A & B. Or C multipliant A & B, les deux produicts D & F, seront l'vn à l'autre comme A est à B, par la 17. p. 7. ce qui estoit à prouuer.

A ... 3 B 4
C .. 2
D ...... 6 F 8

PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportionaux, le produict du premier & quart, sera egal au produict du second & tiers. Et si le produict du premier & quart, est egal au produict du second & tiers, iceux quatre nombres sont

proportionaux.

A ..... 6 B 4
C ... 3 D .. 2
F 12
G 12
H 18

Soient 4. nombres proportionaux A, B, C, D, & que le premier A multiplié par le dernier D produiſe F, & le ſecond B par le tiers C produiſe G. Ie dis que F & G, ſont egaux.

Qu'ainſi ne ſoit. Soit multiplié A par C, & le produict ſoit H, d'autant que A multipliant C & D, produict F & H, il y aura telle raiſon de F à H, que de D à C par la 17. p. 7. Pareillement C multipliant A, & B, produict G, & H: il y aura telle raiſon de G à H, que de B à A, par la 18. p. 7. ou de D à C qui ſont en meſme raiſon que B & A. Mais F & H ſont comme D à C, & par conſequent F & H ſeront comme G & H; ainſi F & G auront meſme raiſon à H, l'vn comme l'autre, & par la 9. p. 5. egaux.

Pour la ſeconde partie ſoit F produict de D multiplié par A, egal à G produit de C multiplié par B: Ie dis que A eſt à B, comme C eſt à D.

Car ſi H eſt produict de C multiplié par A, F & G egaux auront meſme raiſon à H, par la 7. p. 5. Mais il y a telle raiſon de H à G, comme de A à B, par la 18. p. 7. & telle raiſon de H à F, comme de C à D, par la 17, donc par la 11. p. 5. A ſera à B, comme C, à D, ce qu'il falloit prouuer.

PROP. XX.

Si trois nombres ſont proportionaux, le produict des extremes eſt egal au produict du milieu, & au contraire.

Campanus dit que ceſte propoſition n'eſt d'Euclide, & quelle ſe peut demonſtrer ainſi que la precedente en poſant le ſecond & tiers nombres egaux, à ces deux reſpondent la 16. & 17. p. 6.

PROP. XXI.

Les plus petits nombres ſelon quelque raiſon, meſurent tous autres nombres qui ſont en meſme raiſon, ſçauoir le plus petit, le plus petit, le plus grand, le plus grand.

A ... 3 B 4
C .... 6 D 8

Soient deux nombres les plus petits en leur raiſon A & B, & deux autres C & D en meſme raiſon qu'iceux A & B: Ie dis que de meſme façon que A meſure C, auſſi B meſure D.

Car puiſque iceux A, B, C, D, ſont proportionaux, ils le ſeront auſſi en changeant par la 13. p. 7. A ſera doncq C, comme B à D, & par la 20. d. 7. ils ſerót les meſme parties ou parties. Nota que ſi ceſtoiét parties A, & B ne ſeroiét les plus petits.

PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'vn costé, & autant d'vn autre, lesquels pris de deux en deux soient en mesme raison, la proportion estant troublée, en raison egalle, ils seront proportionaux.

A....4 B...3 C..2
D..............12 F..........8 G......6

Soient trois nombres d'vn costé A, B, C, & trois d'vn autre DFG, & que en proportion troublée A soit à B, comme F à G, & B à C, comme D à F: Ie dis que en raison egalle A sera à C, comme D à G.

Car A estant à B, comme F à G, le produict de A multiplié par G, sera egal au produict de B multiplié par F par la 19.p.7. Item B estant à C, comme D à F, le produict de B multiplié par F, sera egal au produict de C multiplié par D, par la mesme prop. & par la premiere com. sent. le produit de A par G sera egal au produit de C par D, & par la 19.p.7. Il y aura telle raison de A à C, comme de D à G.

PROP. XXIII.

Les nombres premiers entre eux, sont les plus petits qui soient en la mesme raison.

Soient deux nombres premiers entre eux A & B. Ie dis qu'ils sont les plus petits qui soient en la mesme raison.

A........6 B.......5
C....4 D...3 F..2

Car s'il n'est ainsi. Soient C & D plus petits en la mesme raison s'il est possible, par la 21.p.7. ils mesureront A & B, l'vn comme l'autre: qu'ils mesurent donc par le nombre F, donc F sera commune mesure entre A & B, ainsi ils ne seroient point premiers entre eux, contre l'hypotese, ils sont donc aussi les plus petits de ceux qui sont en mesme raison.

PROP. XXIIII.

Les plus petits nombres d'vne mesme raison sont premiers entre eux.

Soient les mesmes nombres A & B, les plus petits d'vne mesme raison: Ie dis qu'ils sont premiers entre eux.

A........6 B.....5
C.... D...3 F..2

Autrement s'ils ne sont premiers, que F les mesure tous deux s'il est possible sçauoir A par C, & B par D. Il y aura telle raison de A à B, comme de C à D, par la 17. p. 7. Mais C & D estans plus petits que A & B, Il s'ensuiura que A & B ne seroient pas les plus petits d'vne mesme raison.

PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entre eux, celuy qui en mesurera l'vn, sera premier à l'autre.

Ceste proposition est aisée: car s'il n'estoit premier à l'autre il seroit composé, ainsi il les mesureroit tous deux, & par consequent ils ne seroient pas premiers.

PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre, le produit des deux sera premier à cest autre.

A . . 2	B . . . 3	C 5
D 6	F . . 2	G . . . 3

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produise D. Ie dis que D est premier à C.

Autrement si D & C ne sont premiers entre eux, qu'ils soient composez, & que F les mesure tous deux, sçauoir D par le nombre G: F par G sera egal à D, comme aussi A par B: ainsi A, F, G, B, seront proportionaux par la 19. p. 7. Item A & C sont premiers, donc F mesurant C sera premier à A, par la 25. p. 7: & par la 23. p. 7. A & F estant premiers, ils seront les plus petits de leur proportion, ainsi ils mesureront B & G qui sont en la mesme raison, sçauoir A mesurera G, & F mesurera B. Mais il mesure aussi C: B & C ne seroiét donc pas premiers, cõtre la prop.

PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entre eux, le produict de l'vn d'iceux multiplié par soy, est premier au restant.

A . . . 3	B 4
C 9	D . . . 3

Soient deux nombres premiers A, & B, & que A multiplié par soy produise C. Ie dis que B, & C sont premiers.

Car si on prend D, egal à A, B sera premier à D, & A multiplié par D, produira le mesme C premier à B, par la 26. p. 7.

PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres, leurs pro-

duicts seront premiers entre eux.

So ient deux nombres A, & B premiers à deux autres C, & D, & que F soit le produict de A multiplié par B, & G produit de C multiplié par D: Ie dis que F, & G sont premiers entre eux.

A . . 2		B 4	
C . . . 3		D 5	
F	8	G	15

Car A, & B estans premiers à C, leur produict F sera aussi premier à C, par la 26. p. 7. D est aussi premier à F par le mesme discours, & par la mesme 26. p. 7. G sera premier à F.

PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entre eux sont multipliez chascun par soy, leurs produicts seront premiers entre eux. Et si iceux deux produicts sont encore multipliez par les nombres premiers, les produicts seront encores premiers entre eux.

A . . 2		B . . . 3	
C 4		D 9	
F	8	G	27

Soient deux nombres premiers entre eux A, & B, lesquels multipliez chascun par eux A produise C, B produise D. Ie dis que C, & D, seront premiers entre eux. Item si A multipliant C produict F, & B multipliant D produict G; F & G seront premiers entre eux, & ainsi à l'infiny.

Car par la 27. p. 7. A, & B estans premiers, C produict de A multiplié par soy, sera premier à B restant: par la mesme raison D sera aussi premier à C estant B & C premiers. Or A, & C estans premiers à B, & D leurs produicts F & G, seront aussi premiers entre eux par la 28. p. 7.

PROP. XXX.

Si deux nombres premiers entre eux sont adioustez ensemble, le produict sera premier à tous deux: & si le produict est premier à iceux deux nombres, ils seront premiers entre eux.

Soient deux nombres premiers entre eux AB, & BC: Ie dis que le composé des deux AC sera premier à tous deux.

A . . . 3 B . . . . 4 C
D . . 2

Autrement s'ils ne sont premiers, soit D leur commune mesure; si donc D mesure le tout AC, & la partie AB, il mesurera aussi le reste BC: ainsi AB, & BC ne seroient premiers entre eux contre l'hypotese.

Secondement si le tout AC est premier à AB, & à BC: AB, & BC seront premiers entre eux. Autrement que D les mesure s'ils ne sont premiers, il mesurera aussi le composé des deux AC, ainsi AC ne seroit premier à AB, & BC.

PROP. XXXI.

Tout nombre premier est premier à tout autre qu'il ne mesure pas.

Ceste proposition est aisée à demonstrer, car s'ils n'estoient premiers ils auroient vne commune mesure autre que l'vnité, ainsi pas vn des deux ne seroient premiers contre l'hypotese.

PROP. XXXII.

Si deux nombres se multiplient l'vn l'autre, & quelque nombre premier mesure leur produict, il mesurera aussi l'vn d'iceux deux nombres.

Soit C produit de A multiplié par B, & que D nombre premier le mesure.

A . . . . 4 B 6
C . . . . 24 D . . . 3 F 8

Ie dis qu'il mesurera aussi l'vn ou l'autre de A ou B.

Autrement s'il ne mesure pas vn, qu'il mesure C par le nombre F: donc s'il ne mesure A, par la 31. p. 7. il sera premier à iceluy, & par la 23. p. 7. ils seront les plus petits de leur proportion. Mais pour autant que D par F faict C, aussi bien que A multiplié par B, & par la 19. p. 7. A sera à D, comme F, à B, & par la 21. p. 7. D mesurera B, ce qui estoit à prouuer.

PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par vn nombre premier.

Ceste demonstration est euidente par la deff. du nombre composé: car tout nombre composé a vn nombre qui le mesure, lequel est premier ou non: s'il n'est premier, il sera mesuré par vn autre nombre, lequel sera premier ou non, ainsi on viendra iusques à vn nombre premier, lequel mesurant le mesureur, mesurera aussi le mesuré.

PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier ou bien mesuré par vn nombre premier.

Ceste demonstration est aussi euidente; car si vn nombre n'est premier, il est composé, & par la 33. p. 7. tout nombre composé est mesuré par vn nombre premier.

PROP. XXXV.

A tous nombres donnez trouuer les plus petits de la mesme raison.

A . . . . . . 6 B 8
C . . 2 D . . . 3 F 4
G . . 2 H . . 3 K . . . 3

Soient les deux nombres A & B, ausquels il faut trouuer les plus petits en la mesme raison.

Si A & B sont premiers entre eux, on a ce que l'on cherche par la 24. p. 7. s'ils sont composez, soit trouué C plus grande commune mesure d'iceux A, & B, par la 2. p. 7. laquelle mesure A selon D, & B selon F. Ie dis que D, & F sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, & B.

S'il n'est ainsi, soient G, & H plus petits en la mesme raison s'il est possible, & que G mesure A par K: A sera produit de G multiplié par K, lequel estant aussi le produit de C multiplié par D, par la 19. p. 7. Il y aura telle raison de C à K, comme de G à D, & par consequent C sera plus petit que K, ainsi C n'estoit pas la plus grande commune mesure contre l'hypotese, & la 2. p. 7.

PROP. XXXVI.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer deux nombres donnez.

A . . . 3 B 4
C 12
D 10
F . . . G . .

Soient les nombres donnez, A & B, il faut trouuer le plus petit nombre mesuré par iceux.

Si le plus petit mesure le plus grand, iceluy plus grand sera ce que nous cherchons; sinon, ou A & B seront premiers entre eux, ou non; si premiers, Soit C, produit de A multiplié par B. Ie dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B.

S'il n'est ainsi. Soit D plus petit nombre mesuré par A, & par B s'il est possible, & selon F, & G: par la 19. p. 7. A sera à B comme G à F, par ce que leurs produicts sont egaux. Item A, & B, estans premiers, ils seront les plus petits de leur proportion par la 23. p. 7. & A mesurera G par la 21. p. 7. & d'autant que B multipliant A produit C, & multipliant G produit D, il y aura telle raison de C à D, que de A à G. Mais nous auons monstré que A mesuroit G, donc C mesurera aussi D, sçauoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qu'est impossible.

Soient donc les deux nombres A, & B composez, & par la 35. p. 7. soient trouuez C, & D les plus petits nombres de la mesme proportion, par la 19. p. 7. F produit de A multiplié par D, sera egal au produit de B multiplié par C, ainsi F sera mesuré par B, & par A, & par le mesme impossible de la precedente demonstration, on monstrera qu'il est le plus petit nomrbe mesuré par A, & par B.

A .... 4 B 6
C .. 2 D ... 3 F 12

PROP. XXXVII.

Si deux nombres mesurent vn autre nombre: le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi iceluy autre.

Soient deux nombres A, & B qui mesurent vn autre DG, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit C. Ie dis que C mesurera aussi DG.

A .. 2 B ... 3 C 6
D .... 4 F .... 8 G

Autrement, si C ne mesure DG, apres auoir mesuré FG qu'il laisse DF plus petit que soy: A, & B mesurans C, ils mesureront aussi FG: Mais ils mesurent le tout DG, ils mesureront aussi le reste DF plus petit que C, ce qui est impossible estant le plus petit qu'ils mesurent.

PROP. XXXVIII.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer trois nombres donnez.

A ... 3 B .... 4 C 5
D 12
F 60
G 59

Soient trois nombres donnez A, B, C, ausquels il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils mesurent.

Soit trouué D plus petit nombre que peuuent mesurer A & B, par la 36. p. 7. si C mesure

C mesure aussi D, on aura ce qu'on demande; sinon par le mesme 36. p. 7. soit trouué F plus petit nombre mesuré par C & D: Ie dis que F sera le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

Car premierement F est mesuré par A, B, C, d'autant que C, & D, le mesurent; & A & B mesurant D, mesureront aussi F mesuré par D. Que si F n'est le plus petit mesuré par A, par B, par C, soit G plus petit s'il est possible: A & B donc mesurant G. D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi G, par la 37. p. 7. Mais C mesure aussi G (car A, B, & C le mesurent) donc C, & D mesureront G. Et par la 37. p. 7. F plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi G: le plus grand vn plus petit qui est impossible, donc F estoit le plus petit mesuré par A, B, C.

PROP. XXXIX.

Si vn nombre mesure vn autre nombre, le mesuré aura vne partie denommée par le mesurant.

Vnité.

A ... 3 B ...... 6 C .. 2

Ceste proposition veut dire que tout nombre mesuré par 3. à troisiesme, par 4. à quatriesme, &c. comme si A mesure B, iceluy B contiendra vne partie denommée par A.

Qu'ainsi ne soit, que A mesure B selon C, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'vnitez en C, par la 15. p. 7. C mesurera B autant de fois, que l'vnité mesure A, & C sera telle partie de B que l'vnité de A. Mais par ce que l'vnité est telle partie de tout nombre, qu'iceluy nombre denommé, ainsi C sera telle partie de B denommée par A.

PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie qu'elle elle soit: le nombre nommant ceste partie le mesurera.

C'est a dire que si 9. à trois pour partie que 3. mesurera 9. Or ceste prop. est euidente par la deff. de la partie sans autre demonstration.

PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre qui ayt les parties données.

A deuxiesme	G	.. 2
B tiers	H	... 3
C quart.	I	 4
D		 12

Soient les parties données A, B, C, que doit auoir le nombre qu'on cherche.

Soient pris les trois nombres denommez par icelles G, H, I, & par la 38. p. 7. soit trouué D, le plus petit nombre qu'ils peuuent mesurer: Ie dis que D contient les parties A, B, C ce qui est euident par la 39. p. 7. Ie dis aussi que c'est le plus petit qui ait icelles parties par la 38. p. 7.

Fin du septiesme Element.

ELEMENT HVICTIESME.

PROP. I.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionaux, & les extremes sont premiers entre eux, ils seront les plus petits de leur raison.

A . 4. B . 6. C . 9
D . 3 . F . 5 . G . 8.

SOIENT trois nõbres continuellemẽt proportionaux A, B, C, & que les extremes A, & C, soient premiers entre eux: Ie dis que A, B, C, sont les plus petits qui soient en la mesme raison.

Autrement soient D, F, G, plus petits en la mesme raison s'il est possible, en raison egalle D, sera à G, comme A est à C par la 14. p. 7. & par ce que A, & C sont premiers entre eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. p. 7. & par la 21. p. 7. ils mesureront D, & G, ce qui est impossible pour estre plus petits que iceux. Donc A, B, C estoient les plus petits, en la mesme raison.

PROP. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, les plus petits en la raison donnée.

G. 8.
C. 4.
A. 2. H. 12.
D. 6.
B. 3. I. 18.
F. 9.
K. 27.

Soient les deux nombres A, & B les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison, il faut trouuer le requis.

Que A multiplié par soy produise C, A par B produise D, B par soy produise F. Ie dis premierement que C, D, F, sont continuellement propotionaux en la raison de A à B, par la 17. & 18. p. 7. & parce que A & B sont premiers aussi par la 29. p. 7. C, & F seront premiers: & par la 1. p. 8. C, D, F, seront les plus petits en la raison donnée.

Que si on en voulloit quatre. Que A multiplié par C produise G, A par D produise H, B par D produise I, B par F produise K : Ie dis que G H I K sont les nombres requis. Car par le mesme discours de la 17. & 18. p. 7. Les 4. nombres seront continuellement proportionaux & par la 29. p. 7. G & K seront premiers entre eux: & par la 1. p. 8. Ils seront les plus petits qui ayēt mesme raison auec iceux. Et en ceste façon on en trouuera tant que l'on voudra.

PROP. III.

Si tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison : Les extremes seront premiers entre eux:

Soient quatre nombres continuellement proportionaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison, A, B, C, D: Ie dis que les extremes A, & D sont premiers entre eux.

Qu'il ne soit ainsi. Il faut prendre les plus petits qui soient en la raison de A à B, sçauoir F, & G, ils seront premiers entre eux, par la 23. p. 7. & comme il a esté enseigné en la precedente, soient trouuez quatre nombres continuellement proportionaux & les plus petits en la raison de F à G, sçauoir premierement les trois, H, I, K. Puis apres les quatre L, M, N, O. Iceux estans les plus petits en la raison de F à G, ils seront egaux aux quatre A, B, C, D, qui sont aussi les plus petits en la mesme raison. Et comme les extremes L, & O sont premiers entre eux, aussi seront A, & D.

A. 8.			L. 8.
		H. 4.	
B. 12.	F. 2.		M. 12.
		I. 6.	
C. 18.	G. 3.		N. 18.
		K. 9.	
D. 27.			O. 27.

PROP. IIII.

Estans données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons, trouuer tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionaux selon les raisons données.

Soient données les deux raisons de A à B & de C à D aux plus petits termes d'icelles, il faut trouuer trois nombres en continuelle proportion, les plus petits de ceux qui sont selon les raisons données.

Soit trouué F, le plus petit nombre qui soit mesuré par B, & par C, par la 36. p. 7. en apres soit trouué G, autant de fois mesuré par A, que F, par B. Pareillement H autant de fois mesuré par D que F par C. Ie dis que les trois nombres G, F, H sont

A. 2.		
	G. 8.	L. 7.
B. 3.		
	F. 12.	M. 11.
C. 4.		
	H. 15.	N. 13.
D. 5.		

les nombres requis.

Car on prouuera qu'ils sont continuellement proportionaux en la raison donnée par la 18.p.7. d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F: & que par consequent que G est à F, en mesme raison que A à B. Et par mesme discours que F sera à H, comme C à D.

On prouuera aussi qu'ils sont les plus petits, selon les raisons données, d'autant que s'il n'est ainsi, en soient trouuez de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui respondent aux raisons données comme les trois F, H, G, il est euident que B, & C doiuent mesurer M, à cause des semblables raisons, par la 21.p.7. Mais F est le plus petit nombre mesuré par B, & par C, & par la 37.p.7. F mesurera M, le plus grand, le plus petit, ce qui est impossible. Partant G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons données.

Que si trois raisons estoient données aux plus petits termes, selon lesquelles il fallut trouuer quatre nombres tels que requiert la proposition: on procedera en ceste sorte.

Soient trouuez les trois nombres I, H, K, comme dessus. Ie dis que ou F mesure K: ou non. S'il le mesuroit faudroit prendre L autant de fois mesurée par G, que K par F, & par la precedente demonstration, il est euident qu'on auroit satisfaict. Que si F ne mesure K, soit trouué O le plus petit nombre mesuré par F, & par K, par la 36.p.7. Et que G mesure autant de fois P que F mesure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N, & I mesure M. Ie dis que M, N, O, P sont les quatre nombres requis.

A. 2.		
	I. 8.	M. 16.
B. 3.		
	H 12.	N. 24.
C. 4.		
	K. 15.	O. 30.
D. 5.		
F. 6.		
	L.	P. 35.
G. 7.		

La demonstration se fera de mesme que la precedente.

PROP. V.

Les nombres plans sont l'vn à l'autre en raison composée de leurs costez.

Soient les deux nombres plans B, & C, les costez de B soient D, & F, & les costez de C, soient G, & H. Ie dis que le plan B est au plan C, en raison composée de D à G, & de F à H.

Qu'il ne soit ainsi. Que F multiplié par G produise A. Donc F multipliant D & G, produira B & A en mesme raison que D & G, par la 17.p.7. Et par mesme raisõ G multipliãt F & H, produira A & C en mesme raison que F & H: ainsi la raison de B à A, & de A à C, sera comme de D à G, & de F à H. Et par la 5.p.6. La raison de B à C estant composée de B à A & de A à C, la raison du nombre plan B au nombre plan C sera composée de la raison des costez D à G, & F à H.

		D. 3.
	B. 12.	
		F. 4.
A. 8.		
		G. 2.
	C. 18.	
		H. 9.

PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, Et que le premier ne mesure le second, ny pas vn autre ne mesurera pas vn autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux A, B, C. D. Et que le premier A, ne mesure point le second B. Ie dis que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre.

A. 8. B. 12. C. 18. D. 27.
F. 4. G. 6. H. 9.

Car premierement, comme A ne mesure point B, ainsi B ne mesurera C, ny C ne mesurera D, d'autant qu'ils sont en mesme raison, que si on vouloit dire que en passant quelque vn, les extremes se pourroient mesurer, comme si A pouuoit mesurer C, Soient trouuez trois nombres F, G, H les plus petits en la raison de A, B, C par la 37. p. 7. ainsi A estant à B comme F à G, & comme B à C, ainsi G à H: en raison egalle A sera à C comme F à H par la 14. p. 7. & comme F ne mesure point H estant iceux premiers par la 1. p. 8. aussi A ne mesurera point C. Par le mesme discours on prouuera de tous les autres.

PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux A, B, C, D, & que le premier A mesure le dernier D. Ie dis qu'il mesurera aussi le second B.

A. 3. B. 6. C. 12. D. 24.

Car si A ne mesuroit B, aussi pas vn autre ne mesureroit pas vn autre, & par consequent A ne mesureroit pas D, contre l'hypotese. La conclusion est aisée.

PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionaux, il en tombera autant entre deux autres estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & D, entre lesquels tombent B & C continuellement proportionaux: & qu'il y ayt telle raison de K à N, que de A à D. Ie dis que entre K, & N se trouueront deux nombres moyens continuellement

A. 3.	F. 1.	K. 2.
B. 9.	G. 3.	L. 6.
C 27.	H. 9.	M. 18.
D. 81.	I. 27.	N. 54.

proportionaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouuez par la 2.p.8.les quatre nombres F, G, H, I, continuellement proportionaux, & les plus petits en la raison de A, B, C, D : en raison egalle comme A sera à D, ainsi F à I par la 14. p. 7. & par mesme discours, comme K à N, ainsi F à I. Mais F & I sont premiers entre eux, par la 3. p. 8. & par la 21.p.7. F & I mesureront K & N. Que si on trouue L, & M autant mesurez par G & H, que K est mesuré de F, ou N, de I, comme F mesurera K, ainsi G mesurera L, H mesurera M, I mesurera N : & par la 19. d.7. les 4. nombres K, L, M, N, seront continuellement proportionaux, comme F, G, H, I & partant L & M sont les deux nombres moyens tombans continuellement proportionaux entre K & N.

PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entre eux, autant de nombres continuellement proportionaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chascun d'iceux, & l'vnité.

Soient deux nombres premiers entre eux N, & Q, entre lesquels tombent deux nombres continuellement proportionaux O & P: Ie dis que entre chacun d'iceux, & l'vnité, il en tombera deux continuellement proportionaux.

			H. 8.	N. 8.
		G. 4.		
	B. 2.		I. 12.	O. 12.
A. 1.		D. 6.		
	C. 3.		K. 18.	P. 18.
		F. 9.		
			L. 27.	Q. 27.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'vnité A, puis B & C les plus petits nombres qui soient en la raison de N, O, P, Q, par la 35. p.7. & par la 2.p.8. soient trouuez les trois G, D, F, puis les quatre H, I, K, L, D'autant que les quatre nombres N, O, P, Q, sont egaux en nombre aux quatre H, I, K, L, & chascun les plus petits d'vne mesme raison, ils seront egaux chascun au sien, Et si il est euidét que B multipliant G, & produisant H, par la 15. p. & 19. d.7. l'vnité A sera à B multipliant, comme G multiplié à H produict: Item que B se multipliant soy mesme, & produisant G, l'vnité A sera à B multipliant, comme B multiplié à G produit : Et les quatre nombres A, B, G, H, ou N son egal, seront continuellement proportionaux : & entre l'vnité A, & N, tomberont B, & G. Par mesme discours A, C, F, L, ou Q son egal se trouueront continuellement proportionaux C & F estans ceux qui tomberont continuellement proportionaux entre l'vnité A, & le nombre Q.

PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionaux entre l'vnité & chacun de deux nõbres proposez, autant en tombera il entre iceux deux nombres,

Soient deux nombre proposez K, & N, & que entre l'vnité A, & chascun d'iceux, tombent deux nombres continuellement proportionaux, comme B & G, entre A & K: Item C, & H, entre A & N. Ie dis qu'aussi il en tombera deux continuellement proportionaux entre K, & N.

K. 27.
G. 9.
B. 3. L. 36.
A. 1. F. 12.
C. 4. M. 48.
H. 16.
N. 64.

Car si on acheue à multiplier par la 2. p. 8. pour trouuer les trois nombres, F, L, M, c'est à sçauoir que F, soit le produit de B multiplié par C: L, le produit de B, par F: & M, le produit de C par F. Puis que comme A à B, ainsi B à G, & G à K: comme A vnité mesure B, par les vnitez qui sont en B, ainsi B mesurera G, par les vnitez qui sont en B, & G mesurera K, par les mesmes vnitez de B, ainsi il est euident que B multiplié par soy-mesme produit G, & G multiplié par B, a produict K. Par mesme discours se prouuera que C par soy mesme, a produict H, & que C par H, a produit N.

Maintenant puis que B multiplié par soy-mesme, & par C, a produict G, & F, par la 17. p. 7. comme B à C, ainsi G à F. Pareillement C, multiplié par B, & par soy mesme produit F, & H: F aussi sera à H comme B à C: Et les trois nombres G, F, H, seront en continuelle proportion. D'auantage B multipliant G, & F, produit K, & L, comme G sera à F, ainsi K sera à L: & puis que B, & C multiplient F, & produisent L & M, L sera à M, comme B à C. Par mesme discours M sera à N à la mesme raison, estans les produits de F, & H multipliez par C: le tout par la 17. & 18. p. 7. Il est donc euident que K, L, M, N, sont continuellement proportionaux, & que partant L, & M sont tombez en continuelle proportion entre K, & N.

PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionel, & le quarré est au quarré en raison doublee du costé au costé.

Soient deux nombres quarrez C & F desquels les costez soient A & B. Ie dis que entre iceux tombera vn moyen proportionnel.

C. 9.
A. 3.
D. 12.
B. 4.
F. 16.

Car puis que A est le costé de C, A multiplié par soy-mesme produit C: pareillement B multiplié par soy-mesme produit F. Maintenant soit trouué D, produict de A multiplié par B. Et par la 17. p. 7. comme A à B, ainsi C à D & D à F. Partant D est le moyen proportionel entre C & F.

C. 9.
A. 3.
D. 12.
B. 4.
F. 16.

Pour la seconde partie, il est euident que le quarré C, est au quarré F, en raison doublée du costé A au costé B. Car C, D, F, estans continuellement proportionaux, C est à F en raison doublée de C à D par la 10. d. 5. qui est la mesme raison de A à B.

PROP.

PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionaux: & le cube eſt au cube en raiſon triplée du coſté au coſté.

Soient les deux nombres cubes G, & K, deſquels les coſtez ſoient A & B. Ie dis que entre iceux tomberont deux moyens proportionaux.

Qu'il ne ſoit ainſi. Que A ſe multipliant ſoy-meſme produiſe C, A par B produiſe D, B par ſoy produiſe F, & que A par D produiſe H, B par D produiſe I: & puis que G, & K ſont cubes, ils ſeront les produicts de A multiplié par C, & de B multiplié par F: il eſt donc euident que la conſtruction eſt ſemblable à celle de la 2.p.8. & par la demonſtration de la meſme G, H, I, K ſeront continuellement proportionaux ſelon la raiſon de A à B. Partant H & I ſeront les deux moyens proportionaux.

G. 27.
C. 9.
A. 3. H. 36.
D. 12.
B. 4. I. 48.
F. 16.
K. 64.

Quant à la ſeconde partie, que le cube G, eſt au cube K en raiſon triplée de A à B, ou G à H: (car c'eſt la meſme raiſon) cela eſt clair par la 10.d.5.

PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionaux, iceux eſtans multipliez chaſcun par ſoy, leurs produicts ſeront continuellement proportionaux: & ſi chaſcun multiplie encores ſon produit, les derniers produicts ſeront continuellement proportionaux: & cela aduiendra touſiours aux derniers.

Soient trois nombres continuellement proportionaux A, B, C: Et que iceux ſe multiplians chaſcun par ſoy produiſent D, F, G. Item que les meſmes multiplians chaſcun ſon produit facent K, N, Q. Ie dis que D, F, G, & K, N, Q, ſont entre eux continuellemẽt proportionaux.

A. 2. D. 4. K. 8.
L. 16.
R. 8.
M. 32.
B. 4. F. 16. N. 64.
O. 128.
S. 32.
P. 256.
C. 8. G. 64. Q. 512.

Qu'il ne ſoit ainſi: Que R ſoit le produict de A multiplié par B, & S, de B par C: Pareillement que L ſoit le produit de A par R, M, de A par F, O, de B par S, P, de B par G: par la 17 p.7. A, ſe multipliant, & multipliant B, les produicts D & R ſeront en la meſme raiſon de A à B: & par meſme diſcours B multipliant A & ſoy-meſme, les produicts R, & F ſeront auſſi en la meſme raiſon. & ainſi des autres: Partant D, R, F, S, G, ſeront continuellement proportionaux en la raison de A à B, & en raison egalle D, F, G, seront continuellement proportionaux.

Pareillement, A, B, C, multiplians D, R, F, S, G, produisent K, L, M, N, O, P, Q, & par la 17. & 18. p. 7. K, L, M, N, O, P, Q, seront aussi continuellement proportionaux en les prenans de deux en deux, & en raison egalle en soustrayant L, M, O, & P: K, N, Q, seront continuellement proportionaux.

PROP. XIV.

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, aussi le costé mesurera le costé: que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Ceste demonstration est aisée, d'autant qu'entre deux nombres quarrez y a vn moyen proportionel, & le quarré est au quarré en raison doublée du costé au costé, par la 11. p. 8. c'est à dire que le costé est au costé, comme l'vn des quarrez est au moyen proportionel partant d'autant que iceluy quarré mesurera le moyen proportionel par la 7. p. 8. aussi le costé mesurera le costé. Pour la seconde partie. Si le costé mesure le costé aussi le quarré mesurera le moyen proportionel, & le moyen proportionel l'autre quarré, & par consequent le quarré mesurera l'autre quarré, parce que qui mesure le mesureur mesure aussi le mesuré.

PROP. XV.

Si vn nombre cube mesure vn nombre cube, aussi le costé mesurera le costé: & si le costé mesure le costé, aussi le cube mesurera le cube.

Ceste demonstration est aussi aisée comme la precedente: d'autant que entre deux cubes y a deux moyens proportionaux. Et puis que le cube est au cube en raison triplée du costé au costé, par la 12. p. 8. c'est à dire que le costé est au costé comme l'vn des cubes est à son prochain moyen proportionel, lequel il mesurera par la 7. p. 8. & par consequent le costé mesurera le costé. La seconde partie se demonstrera cõme en la precedente, en prenant la raison triplée pour la doublée.

PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne mesure pas vn nombre quarré, aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Ceste demonstration se faict par l'impossible de la 14. p. 8. Car si le costé mesuroit le costé, aussi le quarré mesureroit le quarré.

PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure point vn nombre cube, aussi le costé ne mesurera le costé: que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera le cube.

Ceste demonstration se faict aussi par l'impossible de la 15. p. 8. Car si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesureroit le cube.

PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables y a vn moyen proportionel: & le plan est au plan en raison doublée des costez de semblable raison.

Soient les deux nombres plans semblables F, duquel les costez A, B, & H, duquel les costez C, D. Ie dis qu'entre iceux F & H se trouuera vn moyen proportionel, & que F est à H en raison doublée de A à C.

Car puis que les plans F & H sont semblables, A sera à B comme C à D, & si F sera le produict de A par B. Item H le produit de C par D, par la 17. d. 7. Maintenant que B multipliant C produise G, par la 17. p. 7. puis que B multipliant A & C produict F, & G, F sera à G, comme A à C. Item C multipliant B, & D produict G & H, iceux seront l'vn à l'autre comme B à D ou A à C, ainsi F, G, H seront continuellement proportionaux, & G, sera le moyen proportionel.

A. 2.	
	F. 6.
B. 3.	
	G. 12.
C. 4.	
	H. 24.
D. 6.	

La seconde partie est aisée. Car F est à H en raison doublée de F à G qui est la mesme raison que de A à C, costez de semblable raison.

PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, y a deux moyens proportionaux: & le solide est au solide, en raison triplée des costez de semblable raison.

Soient les deux solides semblables L, duquel les costez soient A, B, C, & O, duquel les costez soient D, F, G. Ie dis que entre L, & O, on trouuera deux moyens proportionaux, & que L est à O en raison triplée de A à D.

Qu'il ne soit ainsi. Que H soit produict de A multiplié par B, I produict de B par D, K produict de D par F, M produict de C par I, & N produict de G par I.

Maintenant puis que A, B, C, sont l'vn à l'autre comme D, F, G, aussi en changeant, comme A sera à D, ainsi B sera à F, & C à G: Et puis que B multipliant A & D produict H & I, iceux H & I seront l'vn à l'autre comme A à D par la 17. p. 7. Par mesme discours D multipliant B & F, produict I, & K, iceux seront aussi l'vn à l'autre comme B à F, c'est à dire en mesme raison: ainsi il est euident que H, I, K sont continuellement proportionaux en la raison de A à D. Pareillement, puis que le solide L est le produict des trois nombres A, B, C, & H, le produict de A & B, aussi L sera le produict de H par C: & par mesme discours O sera le produict de G par K, & par la 17. p. 7. C multipliant H, & I, produict L & M, en la raison de H à I: & par mesme discours I, multipliant C, & G produict M & N en la raison de C à G, qui est la mesme de H à I, aussi G, multipliant I, & K, les produits N & O seront aussi en la raison de I à K. Et partant les quatre nombres L, M, N, O sont continuellemẽt proportionaux, & M, & N serõt les deux moyens.

L. 24. A. 2.
H. 6. B. 3.
M. 48. C. 4.
I. 12.
N. 96. D. 4.
K. 24. F. 6.
O. 192. G. 8.

Pour la seconde partie elle est euidente, puis que les quatre nombres ont esté prouuez continuellement proportionaux en la raison de A à D (estant L à O en raison triplée de L à M par la 10. d. 5.) & L à M comme à A à D.

PROP. XX.

Si entre deux nombres tombe vn moyen proportionel: iceux seront nombres plans semblables.

Soient les deux nombres A, & C, entre lesquels tombe B, moyen proportionel. Ie dis que A & C sont nombres plans semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient pris G, & H les plus petits termes en la raison de A à B, iceux G, & H mesureront A & B l'vn comme l'autre, par la 21. p. 7. Ils mesureront aussi B & C, qui sont en la mesme raison. Donc que G mesure les nombres A, & B selon le nombre D, & que H mesure B, & C selon le nombre F: D & F, seront en mesme raison que G & H, & par les deff. du 7. A, estant le produict de G par D, & C le produit de H, par F, iceux A & C seront plans semblables.

A. 12.
D. 6. G 2.
B. 18.
F. 9. H. 3.
C. 27.

PROP. XXI.

Si entre deux nombres tombent deux moyens continuellement proportionaux, iceux seront nombres solides semblables.

Soient les deux nombres L & O, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionaux M & N. Ie dis qu'ils sont nombres solides sẽblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouuez trois nombres H, I, K, les plus petits en la raison de L à M, par la 2.p.8. par la precedente 20.p.8. H & K seront plans semblables. Soient leurs costez A, B & D,F, lesquels seront proportionaux par les deffinitions de ce liure, & puis que H,I,K, sont les plus petits en la raison que L,M,N, ils les mesureront egallement par la 21. p.7. soit selon le nombre C: c'est à dire que H,I,K, estans multipliez par C produisent L, M, N: Item par le mesme discours H, I, K, mesureront egallement les trois nombres M, N, O, chascun le sien, soit selon le nombre G: c'est à dire que G multipliant H,I,K, produise M,N, O. Il est donc euident, que L & O sont nombres solides, desquels les costez sont A,B,C, & D,F, G, mais pour autant que C, & G multiplians I, produisent M & N: par la 18.p.7. C sera à G en la raison de M à N, qui est la mesme raison de H à I, ou de A à D, ou de B à F, ainsi A,B,C, seront en mesme raison que D, F, G, & par les deffinitions de ce liure L & O seront nombres solides semblables.

A. 2.		L. 16.
B. 2.	H. 4.	M. 24.
C. 4.	I. 6.	
D. 3.		N. 36.
F. 3.	K. 9.	
G. 6.		O. 54.

PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux, & que le premier soit quarré, le troisiesme sera aussi quarré.

Ceste demonstration est aisée, car par la 20.p.8. les extremes seront plans semblables & l'vn d'iceux quarré, partant aussi l'autre.

PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Ceste demonstration est aisée, car par la 21. p. 8. les extremes seront solides semblables, mais l'vn est cube, & partant l'autre.

PROP. XXIV.

Si deux nombres sont l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'vn d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Ceste demonstration est aisée, d'autant qu'il y aura vn milieu proportionel entre iceux deux nombres, ainsi que entre les quarrez de semblable raison, & par la 20.p.8. ils seront plans semblables, & par la 22.p.8. tous deux quarrez.

PROP. XXV.

Si deux nombres sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'vn d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

Ceste demonstration est aysée, d'autant qu'il y aura deux moyens proportionaux entre iceux deux nombres, ainsi que entre les cubes de semblable raison, & par la 21.p.8.ils seront solides semblables, & par la 23.p. 8.tous deux cubes.

PROP. XXVI.

Nombres plans semblables sont l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré.

A.	33.	D.	9.
B.	40.	F.	20.
C.	50.	G.	25.

Soient les deux nombres plans semblables A & C, & le moyen proportionel entre iceux B, (car il y en doit auoir vn par la 18.p.8.) Ie dis que A sera à C comme nombre quarré à nombre quarré.

Car si on prend les plus petits termes de la raison de A à B: & que en la raison d'iceux, on trouue les trois nombres en continuelle proportion D, F, G, par la 2. p. 8. D & G seront quarrez, & si en raison egalle, comme D à G, ainsi A à C.

PROP. XXVII.

Nombres solides semblables, sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

A.	16.	F.	8.
B.	24.	G.	12.
C.	36.	H.	18.
D.	54.	I.	24.

Soient les nombres solides semblables A, & D, & les deux moyés continuellemét proportionaux entre iceux B & C (car il y en doit auoir deux par la 19. p.8.) Ie dis que A sera à D, comme nombre cube à nombre cube.

Ca. si on prend les plus petits termes de la raison de A à B, & que en la raison d'iceux, on trouue les quatres nombres en continuelle proportion F, G, H, I, par la 2.p.8. F & I seront cubes, & en raison egalle comme F à I, ainsi A à D, ce qui estoit a demonstrer.

Fin du huictiesme Element.

ELEMENT NEVFIESME.

PROP. I.

Deux nombres plans semblables se multiplians l'vn l'autre, produisent vn nombre quarré.

Ceste demonstration est facile, d'autant qu'entre deux plans semblables y a vn moyen proportionel par la 18. p. 8. duquel le produict, c'est a dire le quarré est egal au produict des extremes par la 20. p. 7.

PROP. II.

Si deux nombres se multiplians l'vn l'autre produisent vn nombre quarré, iceux seront plans semblables.

Ceste demonstration est aussi facille. Car le nombre quarré estant egal au produict des deux autres nombres: iceux auec le costé du quarré seront continuellement proportionaux, & par la 20. p. 8. les extremes qui sont nos deux nombres seront plans semblables.

PROP. III.

Si vn nombre cube se multiplie soy-mesme, le produict sera cube.

Soit le nombre cube B, lequel se multipliant soy mesme produise C. Ie dis que C est nombre cube.

Ceste demonstration sera fort aisée, si on prend l'vnité A pour vn nombre cube. Car puis qu'il y a telle raison de l'vnité A à B multipliant comme de B multiplié à C produict, & que entre A & B,

A.	1.
B.	8.
C.	64.

tombent deux moyens proportionaux par la 12. p. 8. autant en tombera-il entre B & C par la 8. p. 8. & par la 21. p. 8. B & C seront plans semblables, & par la 25. p. 8. C sera cube.

PROP. IIII.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produict sera cube.

A. 8. B. 27.
C. 64. D. 216.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise D: Ie dis que D est aussi nombre cube.

Car si on prend C, produict de A multiplié par soy-mesme, par la 5. p. 9. il sera cube, & A multipliant B, & soy il y aura telle raison de C a D que de A à B. par la 17. p. 7. Et par la 8. & 12. p. 8. il tombera deux moyens proportionaux entre C D. Et par la 23. p. 8. D. sera cube.

PROP. V.

Si vn nombre cube mulpliant quelque autre nombre produict vn nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

A. 8. B. 27.
C 64. D. 216.

Soit le nombre cube D. produict de A nombre cube multipliant vn autre nombre B: ie dis que B multiplié est aussi nombre cube.

Car si on prend C, produict de A multiplié par soy comme en la precedente: A sera à B comme C à D, & par la 8. p. 8. entre A & B se trouueront deux moyens proportionaux, comme entre les deux nombres cubes C & D. Et par la 23. p. 8. B multiplié sera nombre cube.

PROP. VI.

Si vn nombre se multipliant soy mesme produict vn nombre cube, iceluy nombre sera cube.

A. 8. B. 64. C. 512.

Soit B nombre cube produict de A multiplié par soy-mesme. Ie dis que A est aussi nombre cube.

Car si on prend C, produict de A multiplié par B, il sera cube par la deffinition de nombre cube, & par la 5. p. 9. A sera aussi cube.

PROP. VII.

Vn nombre composé estant multiplié par quelque autre, le produict sera solide.

Ceste

Ceste proposition n'a pas besoin de demonstration, car tout nombre composé est le produict de deux nombres: Que si on adiouste le troisiesme multiplicateur, le produict sera solide par la 16. d. 7.

PROP. VIII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, le troisiesme depuis l'vnité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront vn; Mais le quatriesme sera cube, & tous les suiuans qui en laisseront deux: Et le septiesme sera cube & quarré, & tous les suiuans qui en laisseront cinq.

Vnité	A.	B.	C.	D.	F.	G.
1	3	9	27	81	243	729

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité, A, B, C, D, F, G, Ie dis que le troisiesme B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront vn de l'ordre comme D & G: en apres que le quatriesme C est cube, & tous les autres en laissant deux nombres comme G. Pareillement que le septiesme G est cube, & quarré ensemble, & autant d'autres qui pourroient suiure en laissant cinq nombres.

Pour la premiere partie, puis que les nombres sont continuellement proportionaux, comme l'vnité mesure A selon les vnitez qui sont en A, ainsi chacun mesurera son suiuant selon les vnitez de A: partant B troisiesme qui sera en ce faisant le produit de A multiplié par soy, sera quarré: & par la 22. p. 8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionaux, & B est quarré, aussi D sera quarré. Par mesme discours G sera quarré, & ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie, puis que A multiplié par soy produit B, & B par A produit C, Il est euident par les deffinitions du 7. que C sera cube, & par la 23. p. 8. C, D, F, G, estans continuellement proportionaux, G sera aussi cube. Ainsi de tous les autres en laissant deux.

Pour la troisiesme partie. Il est euident par les deux precedentes parties que G a esté prouué & quarré & cube, il en sera ainsi de tous les autres.

PROP. IX.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux; & que celuy qui suit l'vnité soit quarré, aussi tous les autres seront quarrez: que s'il estoit cube, aussi les autres seront cubes.

Vnité	A.	B.	C.	D.	*Vnité*	A.	B.	C.	D.
1.	4.	16.	64.	256.	1.	8.	64.	512.	4096.

• Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité A,B,C,D, Ie dis que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarrez: Que si le premier A est cube, que tous les autres seront aussi cubes.

Pour la premiere partie, il est euident comme en la precedente, que puis que les nombres sont continuellement proportionaux, comme l'vnité mesurera A par les vnitez qui sont en A, ainsi A mesurera B par les vnitez qui sont en A & par consequent B sera nombre quarré, mais A est aussi quarré par hypothese, & par la 22.p.8. C sera aussi quarré: & par la mesme raison B estant quarré aussi sera D. Et ainsi de tous les autres.

Pour la seconde partie, Si A est cube aussi tous les autres seront cubes: Car il est euident que A mesurera B par soy-mesme comme en la premiere partie: C'est à dire que A multiplié par soy produira B, lequel estant cube, B sera aussi cube par la 3. p.9. Mais tous les suiuans sont en la raison de A à B & par la 25. p. 8. Ils seront tous cubes.

PROP. X.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui suit l'vnité ne soit nombre quarré, aussi pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiesme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent vn. Que si celuy qui suit l'vnité n'est nombre cube, aussi pas vn autre ne sera cube sinon le quatriesme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Vnité	A.	B.	C.	D.	F.	G.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité A, B, C, D, F, G, Et que A qui suit l'vnité ne soit nombre quarré. Ie dis pour la premiere partie, que pas vn autre ne sera quarré, sinon le troisiesme B, ou D ou G en laissant C & F.

Car par la 8. p. 9. B, D, G sont quarrez: Que si quelqu'vn veut dire qu'il y en ayt d'autres comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fusse aussi nombre quarré (estans C, B, A, continuellement proportionaux & C quarré) ce qui est contre l'hypotese. Par mesme discours on monstrera que pas vn autre ne peut estre quarré sinon ceux qui ont esté exceptez.

Pour la seconde partie, si A n'est cube, aussi pas vn autre ne sera cube, sinon C

& G & tous les autres qui en laisseront deux.

Car par la 8.p.9. C & G sont cubes: que si quelqu'vn veut dire que D soit aussi cube, Il faudroit par la 23.p.8. que A le soit, contre l'hypotese. Par mesme deduction on monstrera tous ceux qui ne peuuent estre cubes.

PROP. XI.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, le plus petit mesure le plus grand selon quelqu'vn de ceux qui sont entre les proportionaux.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité, B, C, D, F, G. Ie dis que B mesurera G par le nombre F.

A.	B.	C.	D.	F.	G.
1.	3.	9.	27.	81.	243.

Ceste demonstration est aisée. Car en raison egalle l'vnité A sera à F comme B est à G. Et par les deff. du 7. comme l'vnité A mesure F par F: ainsi B mesurera G par F.

PROP. XII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux; Autant de nombres premiers mesureront le nombre d'apres l'vnité qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, B, C, D, F, Ie dis que autant de nombres premiers se trouueront mesurer le dernier F, autant mesureront celuy qui suit l'vnité B.

A.	B.	C.	D.	F.	G.
1.	3.	9.	27.	81.	3.

Car si G nombre premier mesurant F dernier, ne mesure pas aussi B, B & G seront premiers: Et d'autant que B multiplié par soy produit C, C & G seront premiers par la 27.p.7. Item B multipliant C produit D, D & G seront premiers par la 26.p.7. Pareillement B multipliant D produit F, G & F seroient aussi premiers contre l'hypotese: Donc G mesuroit aussi B.

PROP. XIII.

Si depuis l'vnité y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui suit l'vnité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre nombre, sinon par ceux qui sont entre les pro-

portionaux.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux A, B, C, D, F, & que celuy qui suit l'vnité B soit premier, Ie dis que le plus grand F ne sera mesuré par aucun autre que l'vn d'iceux B, C, D.

A. 1.	B. 3.	C. 9.	D. 27.	F. 81.	
	K. oo.	I. oo.	H. oo.	G. oo.	

Autrement, s'il est possible, que G mesure F, G ne peut estre autre nombre premier que B, autrement il faudroit par la 12. p. 9. qu'il mesurast B: G sera donc composé & mesuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut estre autre que B, d'autant qu'il mesurera F, & par la 12. p. 9. Il faudroit qu'il mesurast aussi B. Que B donc mesure G par H, & puis que B multipliant D & H produit F & G par la 17. p. 7. comme F à G ainsi D à H, mais G mesure F, aussi H mesurera D. On prouuera comme dessus qu'il ne peut estre premier ny mesuré par vn autre nombre premier que B. Donc H mesure D par le nombre I? On prouuera aussi comme dessus que comme H mesure D ainsi I mesure C, & que I ne peut estre nombre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre K: par mesmes raisons comme I mesure C, ainsi K mesurera B nombre premier: Il faut donc que à tout le moins qu'il luy soit egal, ce qui est impossible, d'autant que B est moyen proportionel entre K & I par la 20. p. 7. puis que C est produit de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produict de B multiplié par soy mesme. Partant aucun nombre ne mesurera F, sinon B, C, D, qui le mesurent par la 11, p. 9.

PROP. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier que ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres premiers B, C, D. Ie dis que aucun nombre premier autre que B, ou C ou D ne mesurera A.

A.	B.	C.	D.	F.	G.
30.	2.	30.	5.	oo.	oo.

Autrement s'il est possible, que F autre nombre premier mesure A par G, donc F multiplié par G produira A, lequel est mesuré par B, C, & D, & par la 32. p. 7. B, C, D, mesureront l'vn ou l'autre de F, ou G: Ils ne mesureront pas F autre nombre premier que pas vn d'iceux, ils mesureront donc G lequel estat plus petit que A, iceluy ne seroit le plus petit de ceux qui peuuent estre mesurez par A, B, C, D. Donc F ne pouuoit mesurer A.

PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux & les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison auec iceux: le composé de deux tels que l'on voudra sera premier à l'autre.

Soient les trois nombres continuellement proportionaux A,B,C, les plus petits qui soient en la mesme raison: Ie dis que les deux ensemble A & B sont premiers à C, ou bien A & C sont premiers à B.

A. 9. B. 12. C. 16.
D. 3. F. 4.

Car si on prend D & F les plus petits qui soient en la mesme raison par la 35. p. 7. Il est euident par ce qui a esté demonstré à la 2. p. 8. que A & C sont les quarrez de D & F, & que B est le produit de D multiplié par F: Et par la 3. p. 2. D & F comme vn seul nombre multiplié par D, produira A & B comme vn seul nombre Mais D & F estans premiers seront premiers au seul F par la 30. p. 7. ou à son quarré C par la 27. p. 7. Et par la mesme proposition D sera premier à C & par la 26. p. 7. le produit de D & F comme vn seul nombre multiplié par D (sçauoir A & B ensemble) sera premier à C. Par mesme discours on prouuera que B & C ensemble sont premiers à A.

Pour la seconde partie, ie dis que A & C ensemble sont premiers à B produict de D multiplié par F. Car par la 4. p. 2. Le produit de D & F comme vn seul nombre multiplié par soy-mesme est egal à A, & C, & deux fois B, Mais D & F estans premiers par hypotese, & premiers au composé des deux par la 30. p. 7. leur produit B sera premier au cōposé des deux par la 26. p. 7. & par la 27. p. 7. Le produit de DF comme vn nombre, multiplié par soy, sera premier à B, c'est à sçauoir, que A & C & deux fois B, sont premiers à B, & par la 30. p. 7. le cōposé de A & C sera premier au composé de deux fois B & à sa moitié vne fois B: ce qui se peut entendre aisement, autrement il faudroit qu'ils eussent vne commune mesure.

PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entre eux, on ne trouuera pas leur troisiesme proportionel.

Soient deux nombres premiers entre eux A & B. Ie dis que on ne trouuera pas leur troisiesme proportionel.

A. 3. B. 4. C. 00.

Autrement s'il est possible, soit A à B, comme B à C: par la 23. d. 7. A & B estans premiers ils seront les plus petits qui soient en la mesme raison, & par la 21. p. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypotese, donc C n'estoit le troisiesme proportionel.

PROP. XVII.

A trois nombres, desquels les extremes sont premiers entre eux, on ne trouuera pas le quatriesme proportionel.

Ceste demonstration est aisée; d'autant que si A & C estoient premiers, & que D fut quatriesme proportionel par la 21. p. 7.

A. 3. B. 4. C. 5. D. 00.

Il faudroit que A estant à B comme C à D, que A mesurast C, & ils ne seroient pas premiers.

PROP. XVIII.

A deux nombres donnez considerer si on pourra trouuer leur troisiesme proportionel.

PROP. XIX.

A trois nombres donnez considerer si on pourra trouuer leur quatrieme proportionel.

Les demonstrations de ces deux propositions sont aysées si on considere de pres les 19. & 20. p. 7. Car sans faire tant de distinctions que font Theon & Campanus, si les extremes sont premiers ou non: s'ils sont composez, si l'vn mesure l'autre: Faut seulement considerer, pour la 18. si le quarré du dernier peut estre mesuré, c'est à dire diuisé par le premier, s'il peut estre mesuré ou diuisé le quotient sera quatriesme proportionel par la 20. p. 7. Sinon on n'en trouuera point. Pour la 19. si le produict des second & troisiesme peut estre mesuré par le premier on aura ce que l'on cherche, sinon on ne trouuera aucun quatriesme proportionnel.

Que si on considere bien les demonstrations de Theon & Campanus, on trouuera que l'affaire reuient tousiours-là, si le premier terme mesure, ou ne mesure pas le produict.

PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

A.. B... C.....

D................ F. G.

H......

Soit multitude quelconque de nombres premiers à A, B, C, Je dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

Car si on trouue le nombre D F le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurés par les trois nombres A B C par la 38. p. 7. & a iceluy on adiouste l'vnité F G le tout D G sera premier ou non: S'il est premier, on a vn autre nombre premier que pas vn des proposez, s'il n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. p. 7. Soit donc mesuré par H: Il est euident que H ne peut estre pas vn des trois A, B, C, Car s'il estoit quelqu'vn d'iceux il mesureroit D F, & le tout D G, Partant il mesureroit aussi l'vnité F G, luy qui est vn nombre. Donc H est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en trouuera infiniement d'autres.

PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adioustez, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aysée, d'autant que tout nombre pair peut estre diuisé en deux parties egalles, partant les moitiez de chacun des proposez feront la moitié du tout: Et par consequent le tout sera pair, puis qu'il peut estre diuisé en deux egallement, par la deff. du nombre pair.

PROP. XXII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nõbre d'iceux soit pair, le tout sera pair.

Ceste demonstration est aussi aysée, d'autant que si de chacun d'iceux nombres impairs on oste l'vnité on les rendra pairs, & par la 21. p. 9. leur tout sera pair: Et pourautant que leur multitude est en nombre pair, les vnitez retranchées feront vn nombre pair, lequel auec tout le reste qui est desia nombré pair, le tout sera pair: par la 21. p. 9.

PROP. XXIII.

Si plusieurs nombres impairs sont adioustez, & que le nõbre d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Ceste demonstration est aysée, Car si on retranche vn nombre impair, tout le reste sera vn nombre pair par la precedente: Et si du restant impair on oste l'vnité, ce qui restera sera pair, lequel adiousté à tout le reste sera vn nombre pair par la 21. p. 9. Partant il est euident que si on adiouste l'vnité restant que le tout sera impair.

PROP. XXIIII.

Si d'vn nombre pair, on oste vn nombre pair, le reste sera pair.

Car si le reste n'estoit pair, en ostant l'vnité on ne le rendroit pair: Et le retranché auec iceluy seroit aussi vn nombre pair par la 21. p. 9. Ce qui est absurde, d'autant que c'est le tout nombre pair duquel on a retranché l'vnité.

PROP. XXV.

Si d'vn nombre pair, on oste vn nombre impair, le reste sera impair.

Car si le reste estoit pair, & le tout aussi pair le retranché ne pourroit estre impair par la 24. p. 9.

PROP. XXVI.

Si d'vn nombre impair on oste vn nombre impair, le reste sera pair.

Car si le reste estoit impair, le reste & le retranché feroient vn nombre pair par la 22. p. 9. contre l'hypotese.

PROP. XXVII.

Si d'vn nombre impair, on oste vn nombre pair, le reste sera impair.

Cecy est aysé à demonstrer.

PROP. XXVIII.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produit sera pair.

Cela est euident: Car le produit contiendra autant de fois le multipliant qu'il y a d'vnitez au multiplié nombre pair par les deff. du 7. Et par ainsi le produit sera la somme de plusieurs nombres impairs desquels la multitude est en nombre pair, & par la 22. p. 9. le produit sera pair.

PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair le produit sera impair.

Car comme en la precedente ce sera vne addition de plusieurs nombres impairs desquels la multitude sera en nombre impaire, & par la 23. p. 9. le tout ou le produit sera impair.

PROP. XXX.

Si vn nombre impair mesure vn nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit

Soit le nombre impair B, qui mesure le nombre pair C. Ie dis qu'il mesurera aussi sa moitié D.	A 4
Car puis puis que B mesure C, soit par le nombre A, iceluy sera pair, d'autant que s'il estoit impair, estant	B . . . 3
multiplié par B impair, leur produict seroit aussi impair	C 12
par la 29. p. 9. contre l'hypotese: A sera donc pair & se	D 6

pourra diuiser en deux egallement par les deff. du 7. Mais puis que A multipliant B produit C, B sera autant de fois en C qu'il y a d'vnitez en A: Et par consequent autant de fois en sa moitié D qu'il y a d'vnitez en la moitié de A.

PROP. XXXI.

Si vn nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

Ceste demonstration est euidente par la precedente. Car s'il n'est premier au double, il le mesurera: partant aussi sa moitié à laquelle il ne sera pas premier, contre l'hypotese.

PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suiuent le binaire en progression double, son pairement pairs seulement.

Soient tant de nombres qu'on voudra C, D, F, continuellement proportionaux en raison double depuis le binaire B, Ie dis qu'ils sont tous pairement pairs, & qu'il n'y en a point d'autres.

A. 1. B. 2. C. 4. D. 8. F. 16.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'vnité A, Et puis que depuis l'vnité A, B C D F sont continuellement proportionaux, le plus petit mesurera le plus grand selon quelqu'vn de ceux qui sont entre les proportionaux par la 11. p. 9. lesquels estans tous pairs, il est euident par les deff. du 7. que C, D, F seront pairement pairs, & tous les autres qui pourtoient suiure en la mesme progression. Mais pour autant que B prochain de l'vnité A est nombre premier par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la mesme progression, Lesquels estans tous pairs: Iceux nombres seront pairement pairs seulement.

PROP. XXXIII.

Si la moitié d'vn nombre est impair, iceluy nombre sera pairement impair seulement.

Soit le nombre A duquel la moitié B est impair, ie dis que A sera pairement impair seulement.

	A. 30.	
B. 15.		C. 2.
F. 00.		D. 00.

Car puis que B est moitié de A, il le mesurera par C nombre binaire, & par les deff. 7. A sera pairement impair: Mais qu'il soit seulement pairement impair on le prouuera ainsi. S'il estoit pairement pair, vn nombre pair comme D le mesureroit par vn nombre pair comme F, & par la 19. p. 7. Le produit de B par C estant egal au produit de D par F: Il y auroit telle raison de C à F, comme de D à B, Mais C nombre binaire mesure F, il faudroit donc aussi que D mesurast B qui est vn nombre impair contre les deff. du 7. Donc A estoit nombre pairement impair seulement.

PROP. XXXIV.

Si vn nombre pair n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié soit nombre pair, il sera pairement pair, & pairement impair.

Ceste demonstration est aisée. Car sa moitié estant pair il sera mesuré par vn nombre pair selon le binaire qui est aussi pair: Et pour autant qu'il n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, si on le diuise tousiours en deux egallement, on viendra à vne moitié impaire auparauant que paruenir iusques au binaire, & par consequent il sera mesuré par vn nombre impair. Et par les deff. 7. Il sera pairement pair & pairement impair.

PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux, & que du second & dernier on soustraict le premier, comme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

A 8

B. .... 4 C .... 8 D

F 18

G. 9. H 6. I. 4. K. 8. L.

Soient quatre nombres continuellement proportionaux A, B, F, G, & du second B on retranche CD egal au premier A: Et du dernier G, l'on retranche KL aussi egal à A: Ie dis que comme BC sera à A, ainsi l'autre reste GK sera à tous les trois A, B, F.

Car si de GL on retranche LI egal à BD, il est euident que KI sera egal à BC (estant KL egal à DC) & si on retranche LH egal à F, comme les quatre nombres G, F, B, A, sont continuellement proportionaux, aussi seront leurs egaux GL, HL, IL, KL: & en diuisant GH sera à HL, comme HI à IL, ou IK à KL & par la 12. p. 7. Tous les antecedent GH, HI, IK, (c'est à dire GK) seront à tous les consequens HL, IL, KL, (c'est à dire A, B, F,) comme l'vn des antecedens IK, est à l'vn des consequens KL, ou leurs egaux BC à A, ce qu'il falloit prouuer.

PROP. XXXVI.

Si on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité & en raison double, iusques à ce que le tout soit nombre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira le nombre parfaict.

Vnité.
A .. 2
B 4
C 8
D 16
F. 31.
G. 31. N. 31. O
H. 124.
I. 248.
K. 31. P. 465. Q.
L. oo.
M. oo.

Soient depuis l'vnité A, B, C, D continuellement doubles, la somme desquels & de l'vnité soit F nombre premier. Ie dis que si F est multiplié par le dernier D, que le produit KQ sera nombre parfaict.

Car si on prend G double de F, H double de G & I double de H, ainsi des autres: F, G, H, I, seront continuellement proportionaux en la raison de A, B, C, D, en raison egalle A sera à D comme F à I, & par la 19. p. 7. A multiplié par I, sera le produict de D par F, sçauoir KQ: mais A estans binaire KQ sera double de I, ainsi F, GO, H, I, KQ, seront continuellement proportionaux. Maintenant de GO soit retranché GN egal à F, & de KQ soit retranché KP egal à F. par la 35. p. 9. comme GN est egal à F (d'autant que GO estoit double de F) ainsi PQ sera egal à F, GO, H, I: Mais KP egal à F, est aussi egal à l'vnité & à A, B, C, D: Et par consequent KQ sera egal à l'vnité plus A, B, C, D, F, GO, H, I. Et si il est euident que puis qu'ils sont en proportion double I mesurera KQ par le binaire A, H par B, G par C, F par D comme cela peut estre prouué aisement par la 19. p. 7. Que si KQ ne peut estre mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy par les deff. du 7. Il sera nombre parfaict estant egal à toutes ses parties aliquotes.

Si on pense qu'il puisse estre mesuré par quelque autre nombre autre que les deuant dits, que L le mesure s'il est possible selon M, donc L multipliant M produira KQ & par la 32. p. 7. F nombre premier qui mesure KQ mesurera aussi L ou M, qu'il mesure L s'il est possible, par la 19. p. 7. Il faudra que D mesure aussi M (car il y aura telle raison de D à M, comme de L à F) ce sera donc par A, ou B, ou C, par la 13. p. 9. Mais nous auons monstré que A, B, C, mesuroient KQ, par G, H, I, donc L & M ne seront point autres nombres que les deuant dicts. Et KQ sera nombre parfaict.

SOMMAIRE.

KQ n'a point d'autres parties aliquotes que A, B, C, D, F, G, H, I, & l'vnité, ausquels il est egal. Et par les deff. du 7. KQ sera nombre parfaict.

Fin du neufiesme Element.

ELEMENT DIXIESME.

DEFINITIONS.

1. Ommensurables grandeurs sont les mesurées par vne mesme mesure.

2. Incommensurables grandeurs sont celles qui n'ont aucune commune mesure.

3 Lignes droites commensurables par puissance, sont celles desquelles les quarrez peuuent estre mesurez par vne mesme superficie.

4. Lignes incommensurables sont celles desquelles les quarrez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

Cela estant ainsi, il est euident que à toute ligne proposée, on trouuera infinies lignes commensurables, & infinies incommensurables: les vnes en longitude & puissance, les autres en puissance seulement.

Encore que ceste annotation soit mise entre les principes, si est-ce qu'il est aysé à coniecturer qu'elle ne doit estre prise que pour Scholie. Ainsi nous l'auons distingué d'auec les principes par different caractere, elle est démonstrée puis apres en la 11.p.10.

5. Les lignes commensurables à vne ligne rationelle, soit

en longitude, ſoit en puiſſance, ſont appellées rationelles.

6. Et les lignes incommenſurables à vne ligne rationelle, ſont irrationelles.

Il faut remarquer icy trois ſortes de lignes rationelles. La premiere, ſçauoir toute ligne propoſée, laquelle peut eſtre expliquée par quelque nombre. La ſeconde toute ligne commenſurable en longitude à la rationelle propoſée. La tierce toute ligne commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationelle propoſée. Et toute ligne incommenſurable tant en longitude que en puiſſance à la rationelle propoſée eſt irationelle.

7. Le quarré deſcrit ſur vne ligne rationelle, eſt appellé rationel.

8. Les figures commenſurables au quarré rationel, ſont auſſi rationelles.

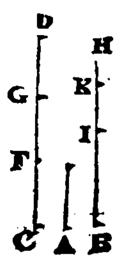
9. Et celles qui ſont incommenſurables au quarré rationel, ſont irrationelles & ſourdes.

10. Et les lignes qui peuuent icelles figures irrationelles, ſont irationelles & ſourdes.

Vne ligne eſt dicte pouuoir vne figure quand elle peut deſcrire vn quarré egal à icelle figure, d'autant que tout quarré eſt la puiſſance de ſa racine ou de ſon coſté. Ainſi il a dict cy deſſus deux lignes eſtre commẽſurables en puiſſance, lorsque non pas les lignes, mais les quarrez d'icelles lignes ſont commenſurables.

PROP. I.

Si de deux grandeurs inegalles on retranche de la plus grande plus de la moitié, encores du reſidu plus de la moitié en continuant touſiours: Il demeurera à la fin vne grandeur plus petite que la plus petite des deux propoſées.

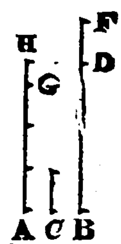


Soient deux grandeurs inegalles A & BH, eſtant A la plus petite: Ie dis que ſi on retranche plus de la moitié de BH & du reſidu encores plus de la moitié en continuant touſiours, on trouuera à la fin vn reſidu plus petit que A.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la grandeur A multipliée tant de fois qu'elle excede la plus grande BH (car cela eſt poſſible) & ſoit la produicte d'icelle multiplication CD laquelle ſera multiplice de A, Et plus grande que BH: qu'elle ſoit donc diuiſée en parties egalles à A comme en CF, FG, & GD: Item soit osté de BH plus de la moitié sçauoir BI, & du residu IH plus de la moitié sçauoir IK, en continuant iusques à ce que BH soit diuisée en autant de parties que CD, sçauoir en BI, IK, & KH; comme CD est diuisé en CF, FG, & GD. Pour autant que CD est plus grande que BH & que le retranché CF n'est plus grand que la moitié de CD, comme le retranché BI est plus grand que la moitié de BH, le reste FD sera plus grand que le reste IH. Semblablement si du plus grand residu FD on oste FG qui n'est pas plus que la moitié, & du plus petit residu IH on oste plus de la moitié IK, le reste KH sera plus petit que le reste GD egal à A: & par consequent KH sera plus petit que A: ce qu'il falloit demonstrer.

PROP. II.

Si de deux grandeurs inegalles on retranche tousiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, sans que le residu mesure sa grandeur precedente, telles grandeurs sont incommensurables.



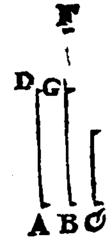
Soient deux grandeurs inegalles AH & BF, si on retranche continuellement & alternatiuement la plus grande de la plus petite, & que le residu ne mesure iamais sa grandeur precedente, c'est à dire que le plus petit residu ne mesure iamais le plus grand residu, Ie dis que AH & BF sont incommensurables.

Autrement il faudra qu'elles soient commensurables: Partant aussi qu'elles ayent vne commune mesure, soit donc icelle C s'il est possible. Maintenant, de la plus grande BF soit retranchée BD egalle à AH, Et s'il se peut faire soit continué ce retranchement iusques à ce que le reste DF soit plus petit que AH: donc C commune mesure, mesurera la toute BF & la retranchée BD egalle à AH, elle doit aussi mesurer le reste DF. Item soit retranchée DF de AH tant de fois que faire se pourra, iusques à ce que le reste GH soit plus petit que C, lequel mesure FD & par consequent sa multipliée AG: & par consequent le reste GH, Ce qui est laissé pour impossible: Partant BF & AH n'auoient point de commune mesure, partant incommensurables.

PROP. III.

Trouuer la plus grande commune mesure entre deux grandeurs commensurables.

Soient deux grandeurs commensurables AD & BF, il faut trouuer leur plus grande commune mesure. Premierement si AD mesure BF, il est euident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne le mesure point, soit alternatiuement retranchée la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure



le reſte (ce qui doit aduenir d'autant que les grandeurs données ſont commenſurables) donc que AD ſoit retranché de BF & que le reſte FG meſuré AD, Ie dis que FG ſera icelle commune meſure plus grande.

Car puis qu'elle meſure AD elle meſurera auſſi BG ſon egalle: & ſe meſurant ſoy meſme, elle meſurera auſſi la toute BF. Que ſi on nie qu'elle ſoit la plus grande commune meſure, que on en trouue vne autre plus grande ſçauoir C (s'il eſt poſſible) C donc meſurera AD & BF, & le retranché BG egal à DA, & par conſequent le reſte FG, qui eſt plus petit, ce qui eſt impoſſible. Partãt FG eſtoit la plus grande commune meſure.

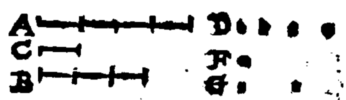
PROP. IV.

Trouuer la plus grande commune meſure entre trois grandeurs commenſurables.

Soient trois grandeurs commenſurables A, B, C, deſquels il faut trouuer la plus grande commune meſure. Soit trouuée D plus grande commune meſure entre A & B par la 2. p. 10. Si D meſure C, on a ce que l'on demande: que ſi D ne meſure pas C, ſoit trouuée F plus grande commune meſure entre C & D par la meſme 2. p. 10. Il eſt euident que F meſurera auſſi A & B d'autant qu'elle meſure D qui les meſure. Que ſi on nioit qu'elle fuſſe la plus grande, on le prouuera par le meſme inconuenient que en la precedente, ſçauoir que ſi on en prenoit vne plus grande, il faudroit auſſi qu'elle meſuraſſe F, ce qui eſt impoſſible.

PROP. V.

Grandeurs commenſurables, ſont entre elles comme nombre à nombre.



Soient deux grandeurs commenſurables A & B, Ie dis qu'elles ſont entre elles comme nombre à nombre.

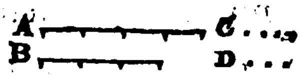
Car puis qu'elles ſont commenſurables, elles auront vne commune meſure, ſoit icelle C, donc C meſurera A ſelon quelque nombre comme ſelon D: il meſurera auſſi B ſelon quelque autre nombre comme ſelon G: ainſi puis que C eſt en A comme F eſt en D, & C en B comme F en G: A, C, B, ſeront l'vn à l'autre comme D, F, G, & en raiſon egalle A ſera à B comme le nombre D eſt au nombre G par la 22. p. 5. ce qu'il falloit demonſtrer.

PROP.

PROP. VI.

Si deux grandeurs sont l'vne à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.

Soient deux grandeurs A & B, qui soient l'vne à l'autre comme le nombre C est au nombre D, Ie dis qu'elles seront commensurables.

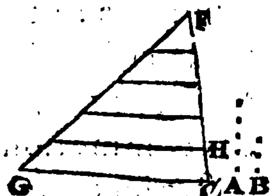


Car comme l'vnité mesure C & D par les deff. du 7. Si on diuise A en autant de parties, que C contient d'vnitez, & B en autant que D contient d'vnitez, puis que A est à B comme le nombre C est au nombre D, vne partie de A sera commune mesure de A & B, comme l'vnité est commune mesure des nombres C & D: Et par les deff. de ce liure A & B seront commensurables.

SCHOLIE.

Il faut icy sçauoir si deux nombres & vne ligne estoient donnez, comment on trouueroit vne autre ligne qui fust à la dónée, comme le nombre est au nombre, ce qu'on trouuera en ceste façon.

Soient les deux nombres A & B, & la ligne CF, & soit menée la ligne FG, de laquelle soient retranchées autant de parties egalles qu'il y a d'vnitez au plus grand des deux nombres, & apres auoir mené GC, soient menées les autres cinq qui luy soient paralleles, par les 9. & 10. p. 6. CF sera diuisé comme FG: & par consequent en autant de parties qu'il y a d'vnitez au nombre A: maintenant si on prend FH contenant autant d'icelles parties, qu'il y a d'vnitez en B; FC & FH seront l'vne à l'autre, comme le nombre A est au nombre B.



Il faut encores trouuer à deux nombres donnez & vne ligne droicte, vne autre ligne droicte de laquelle le quarré soit au quarré de la premiere, comme l'vn des nombres est à l'autre.

Soit trouuée vne autre ligne laquelle soit à la donné comme le nombre est au nombre, ainsi que dessus CF & HF, & par la 13. p. 6. Soit trouuée la moyenne proportionelle, Ie dis que le quarré d'icelle moyenne sera au quarré de CF comme CF est à FH qui sera alors troisiesme proportionelle par la 20 p. 6. Et par consequent comme le nombre A est au nombre B. Voila ce qu'il falloit demonstrer.

PROP. VII.

Grandeurs incommensurables, ne sont entre elles comme nombre à nombre.

Ceste demonstration est aisée & par l'impossible. Car si les grandeurs données estoient entre elles comme nombre à nombre, elles seroient commensurables par la 6.p.10.ce qui est contre l'hypotese.

PROP. VIII.

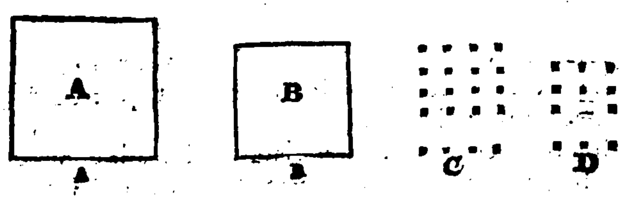
Si deux grandeurs ne sont entre elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

Ceste demonstration est aussi facile. Car si les grandeurs données estoient commensurables, il faudroit qu'elles fussent comme nombre à nombre par la 5. p.10. ce qui est contre nostre hypotese.

PROP. IX.

Les quarrez descrits sur lignes commens. en longitude, sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, & les quarrez qui sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez commens. en longitude : Et les quarrez descrits sur lignes incommens. en longitude, ne sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré : Et les quarrez n'estans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez incommens. en longitude.

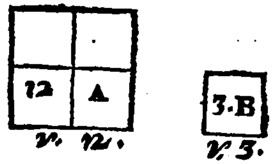
Soit la ligne A à la ligne B commens. en longitude: Ie dis que leurs quarrez sont entre eux cõme nõbre quarré à nombre quarré.



Car puis que les lignes A & B sont commens. en longitude, elles seront entre elles comme nombre à nombre, par la 5. p.10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D : Mais les quarrez de A & B sont en raison doublée de leurs costez par la 20.p 6. Le mesme se prouuera des quarrez des nombres C & D, par la 11.p.8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré de C est au nombre quarré de D : C'est à sçauoir en raison doublée des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mesme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré de C au nombre quarré de D : Ie dis que les lignes A & B seront commenſ. en longitude. Car par la 20. p. 6. & 11. p. 8. La raiſon des quarrez aux quarrez, eſt la raiſon doublée de leurs coſtez, & par la 15. p. 5. comme le coſté A au coſté B, ainſi le nombre C au nombre D. Et par la 6. p. 10. A & B ſont commenſurables en longitude.

SCHOLIE.



Nota que la propoſition s'entend auſſi des lignes inexplicables par nombres, pourueu qu'elles ſoient commenſ. en longitude; Comme ſi les quarrez de A & B eſtoient 12. & 3. Leurs coſtez ſeroient r. 12. & r. 3. qui ſont inexplicables par nombres, toutefois commenſ. Car par la 20. p. 6. 12. ſeroit à 3. en raiſon double de r 12. à r 3. Mais 12. eſt quadruple de 3. Ainſi le coſté A ſeroit double du coſté B par la 10. d. 5. Car la double raiſon doublée eſt quadruple.

Quant à la troiſieſme & quatrieſme parties, elles ſe prouuent par l'impoſſible, par conſequence contraire à la premiere & la ſeconde partie, comme cy deſſus les huictieſme & neufieſme propoſitions, par conſequence contraire des 6. 5. prop. du 10. On doit icy noter que deux nombres eſtre quarrez, & eſtre en raiſon de nombre quarré à nombre quarré, n'eſt pas la meſme choſe.

PROP. X.

Si quatre grandeurs ſont proportionelles, & la premiere eſt commenſurable à la ſeconde, la troiſieſme ſera auſſi commenſurable à la quatrieſme. Que ſi la premiere eſt incommenſurable à la ſeconde, la troiſieſme ſera auſſi incommenſurable à la quatrieſme.

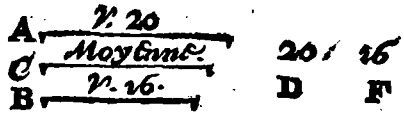
Soient quatre grandeurs proport. A, B, C, D: ſi A eſt commenſurable à B, Ie dis que C ſera auſſi commenſ. à D.

Car ſi A eſt commenſurable à B, ils ſeront entre eux comme nombre à nombre: Mais comme A à B ainſi C à D, Partant C eſt à D, comme nombre à nombre, & par conſequent commenſ. par la 6. p. 10. Que ſi A eſtoit incommenſ. à B, auſſi C ſeroit incommenſ. à D: Car ils ne ſeroient pas comme nombre à nombre par la 8. p. 10.

PROP. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables à vne ligne rationelle, ſçauoir vne en longitude ſeulement, & l'autre en longitude & puiſſance.

Soit la ligne rationelle A, à laquelle il faut trouuer deux autres lignes incommensurables l'vne seulement en longitude, & l'autre en longitude & puissance.



Soient trouuez deux nombres n'estans quarrez, ny ayans la raison entre eux de nombre quarré à nombre quarré: Item soit trouuée la ligne B, de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A, comme le nombre F est au nombre D: Mais d'autant que iceux quarrez de A & B sont comme nombre à nombre, ils seront commens. entre eux par la 6. p. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & B commens. en longitude, mais en puissance seulement par la 9. p. 10. Voila la premiere ligne trouuée. Puis entre A & B soit trouuée la moyenne proportionelle C, par la 13. p. 6. D'autant que les quarrez sont entre eux en raison doublée de leurs costez, le quarré de B sera au quarré de C, comme B est à A troisiesme proportionelle par la 20. p. 6. C'est à dire incommens. Partant leurs costez B & C, seront incommens. en puissance. Ainsi C est la seconde ligne demandée.

PROP. XII.

Les grandeurs commensurables à vne autre, sont commensurables entre elles.

Soient les deux grandeurs A & C, commens. chascune à la grandeur B: Ie dis qu'elles sont commensurables entre elles.

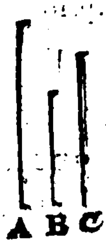
Car puis que A & B sont commens. Icelles seront comme nombre à nombre par la 5. p. 10. Ainsi de mesme B à C sera comme nombre à nombre: Et A, B, C serons entre elles comme trois nombres: Partant commens. Car tous les nombres sont commens. entre eux ayans l'vnité pour commune mesure.

PROP. XIII.

Si de deux grandeurs commens. l'vne est incommens. à vne tierce, aussi sera l'autre à la mesme.

Soient deux grandeurs commens. A & B, & que A soit incommens. à la tierce C: Ie dis que B & C sont aussi incommensurables.

Autrement: Si B est commens. à C, il sera aussi commens. à A, par la 12. p. 10. Contre nostre hypotese: Donc B est incommensurable à C.



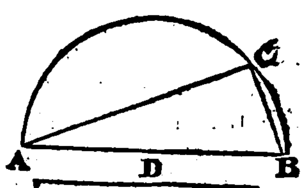
PROP. XIV.

Si quatre lignes ſont proportionelles, & la premiere peut plus que la ſeconde du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, auſſi la troiſieſme pourra plus que la quatre du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. Que ſi la premiere peut plus que la ſeconde du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude : auſſi la troiſieſme pourra plus que la quatrieſme du quarré d'vne ligne qui luy ſera incommenſurable en longitude.

Soient 4. lignes proport. A, B, D, F, & que A puiſſe plus que B du quarré de C, & D plus que F du quarré de G : Ie dis que comme A ſera commenſ. ou incommenſ. à C, ainſi D ſera commenſurable ou incommenſurable à G.

Car puis que A, B, D, F, ſont proport. leurs quarrez ſeront auſſi proportionaux, par la 22. p. 6. Et puis que les quarrez de B & C ſont egaux au quarré de A, & les quarrez de F & G ſont egaux au quarré de D: Les quarrez de A & D ſeront les touts, Ceux de B & F ſeront les retranchez, & ceux de C & G ſeront les reſtes : Mais comme A à B ainſi D à F, & en changeant comme A à D, ainſi B à F : C'eſt à dire comme le tout quarré de A, eſt au tout quarré de D, ainſi le retranché quarré de B, au retranché quarré de F, le reſte quarré de C, ſera au reſte quarré de G, comme le tout quarré de A, eſt au tout quarré de D: Et en changeant comme le quarré de A au quarré de C, ainſi le quarré de D, eſt au quarré de G, Et par la 22. p. 6. comme A à C ainſi D à G: Et par la 10. p. 10. Si A eſt commenſ. ou incommenſ. à C, ainſi D ſera commenſ. ou incommenſ. à G : ſoit en lõgitude, ſoit en puiſſãce.

SCHOLIE.



D'autant qu'il eſt parlé en ceſte propoſition d'vne ligne qui peut plus qu'vn autre, il faut icy enſeigner comment on pourra trouuer de deux lignes inegalles combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient donc les deux lignes inegalles AB & D, & ſur la plus grande AB ſoit deſcrit le demy cercle AGD, & dans iceluy ſoit accommodée AC egalle à D par la 1. p. 4. Item ſoit menée CB : par la 31. p. 3. l'angle C dans le demy cercle eſt droit, Et par la 47. p. 1. Le quarré de AB vaudra les deux de AC & CB, Partant AB pourra plus que D (qui eſt egalle à AC) du quarré de BC. Voila comment nous auons troué de deux lignes inegalles combien la plus grande peut plus que la plus petite.

PROP. XV.

Si deux grandeurs commenſ. ſont iointes, la compoſée ſera commenſ. à chacune de ſes parties: Et ſi la compoſée eſt commenſ. à vne de ſes parties, icelles parties ſeront commenſ. entre elles.

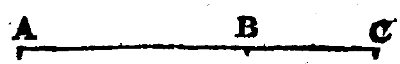
Soient ioinctes deux grandeurs commenſ. A B & BC: Ie dis que la compoſee AC, eſt commenſ. à AB & à BC parties.

Car puis que AB & BC ſont commēſ. elles auront vne commune meſure, laquelle meſurant AB & B C, meſurera auſſi la toute A C: Partant la toute AC eſt commenſ. à ſes parties.

Pour la ſeconde partie. Si la toute AC eſt commenſ. à vne de ſes parties, Icelles ſeront commenſ. entre elles. Car ſi AC & AB ſont commenſ. elles auront vne commune meſure, laquelle meſurant le tout & le retranché, meſurera auſſi le reſte, Partant le retranché & le reſte ſeront commenſ. dautant qu'ils ont vne commune meſure.

PROP. XVI.

Si on conioinct deux grandeurs incommenſurables, la compoſée ſera incommenſ. à chacune de ſes parties: Et ſi la compoſée eſt incommenſ. à l'vne de ſes parties, Icelles parties ſeront incommenſ. entre elles.



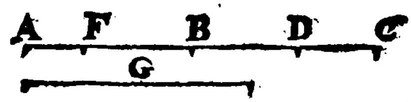
Soient conioinctes deux grandeurs incommenſ. AB & BC: Ie dis que la toute A C eſt incommenſ. à vne chacune de ſes parties.

Autrement ſi A C eſtoit commenſ. à AB, Il le ſeroit auſſi à B C, Car la commune meſure qui meſureroit AC & le retranché AB, meſureroit auſſi le reſte BC: Et AB & BC ſeroient commenſ. (ce qui eſt contre l'hypotheſe) Donc AC & AB ſont incommenſ. Il s'enſuiura le meſme inconuenient ſi on nie que AC & BC ſoient incommenſurables.

Pour la ſeconde partie: Ie dis que ſi AC & BC, ſont incommenſ. que AB & BC ſeront auſſi incommenſ. Autrement ſi elles eſtoient commenſ. La toute AC ſeroit auſſi commenſ. à ſa partie BC par la 15. p. 10. contre noſtre hypoteſe.

PROP. XVII.

S'il y a deux lignes inegalles, & sur la plus grande on aplique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, defaillant d'vne figure quarrée, & que le rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties commens. en longitude, la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. en longitude: Et si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude, estant apliqué vn rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarrée, le rectangle diuisera icelle plus grande ligne en parties commens. en longitude.



Soient deux lignes inegalles AC & G, & sur la plus grande AC soit apliqué vn rectangle egal au quart du quarré de G, defaillant d'vne figuré quarrée (c'est à dire d'vne ligne egalle à son autre costé) Et soit iceluy de AD & DC, trouué par la 28. p. 6. Ie dis que si AD & DC sont commens. en longitude, que AC pourra plus que G du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. en longitude.

Qu'il ne soit ainsi. Soit la ligne AC couppée en deux egallement en B, & soit faicte BF egalle a BD: Il est euident que AF sera egal à DC. Maintenant puis que AC est couppée en deux egallement en B, & en deux inegallement en D, Le rectangle de AD & DC auec le quarré de BD, seront egaux au quarré de BC, Lequel n'estant que le quart du quarré de AC, quatre fois le rectangle de AD & DC & quatre fois le quarré de BD, sont egaux au quarré AC. Mais quatre fois le rectangle de AD & DC valent le quarré de G, d'autant que par hypothese le rectangle de AD & DC est le quart du quarré de G. Donc le quarré de CA est plus grād que le quarré de G, de quatre fois le quarré de BD, ou du seul FD egal à iceux. Que si AD & DC sont cōmens. en longitude, La toute AC sera commens. en longitude à se partie DC par la 15. p. 10. Et partant à son egalle AF, & à toutes les deux ioinctes en vne: Et par consequent au reste de la ligne FD par la mesme 15. p. 10.

Pour la seconde partie sans rien changer à la construction, Si AC peut plus que G du quarré de FD, lequel soit commens. en longitude à AC: AD & DC seront aussi commens. en longitude le tout par la 15. p. 10. en posant AC la toute, FD la retranchée, AF & DC, comme vne le reste: Que si AC est commens. à AF &

CD comme vne, Il sera aussi à sa moitié DC, & par la 15. p. 10. les parties AD & DC seront commens. entre elles.

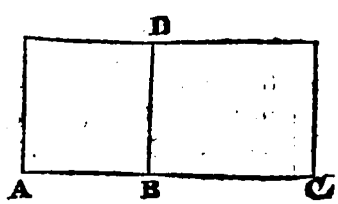
PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes inegalles, & sur la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarrée, Et que le rectangle diuise icelle plus grãde ligne en parties incommens. en longitude: la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy sera incommens. en longitude. Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longitude, estant appliqué vn rectangle sur la plus grande ligne egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarrée, le rectangle diuisera la plus grande ligne en parties incommens. en longitude.

Soit l'hypothese la construction & la demonstration tout de mesme que en la precedente, Sinon que au lieu de prouuer AC & FD commens. en longitude par la 15. p. 10. estant posée AD & DC commens. en longitude, Il les faudra prouuer incommens. en longitude par la 16. p. 10. En posant AD & DC incommens. en longitude: Et tout de mesme en la seconde partie, sans en rien changer que la commensurance en incommensurance.

PROP. XIX.

Le rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en longitude selon quelqu'vne des manieres cy deuant dictes, est rationel.



Soient les deux lignes rationelles commens. en longitude DB & BC, comprenant le rectangle DC: Ie dis qu'iceluy rectangle est rationel.

Car si sur DB on faict le quarré DA, il sera rationel par la 7. d. 10. Mais comme AB à BC ainsi le quarré au rectangle, par la 1. p. 6. Et

BA est

AB est commens. à BC (estant AB & BD egalles) Partant le quarré sera commẽs. au rectangle par la 10. p 10. Mais le quarré est rationel (estant descrit sur vne ligne rationelle) Aussi sera le rectangle qui luy est commens.

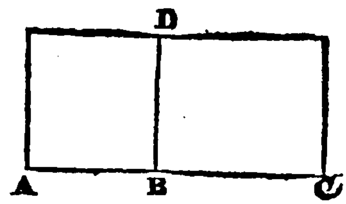
SCHOLIE.

Faut icy noter qu'il a dict selon quelqu'vnes des manieres cy deuant dictes. Parce qu'il y a trois sortes de lignes rationelles, sçauoir la proposée la commen. en longitude à la proposée, & la commens. en puissance à la proposée. Or la proposition est generalle à toutes les trois sortes : Que si on vouloit demonstrer des deux dernieres sortes, faudroit prendre vne ligne à laquelle DB. & BC. seroient commens. en longitude ou en puissance, & proceder comme dessus.

PROP. XX.

Si vn rectangle rationel à l'vn des costez rationel, il aura aussi l'autre costé rationel: & iceux seront entre eux commens. en longitude.

Soit le rectangle rationel DC ayant le costé DB rationel, ie dis que BC sera aussi rationel commens. en longitude à DB.



Car sur DB, soit fait le quarré AD, lequel sera rationel, Et comme le rectangle au quarré ainsi CB à BA par la 1. p. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationaux, & partant commens. Donc CB & BA ou BD son egalle, seront rationelles & commens. en longitude.

PROP. XXI.

Le rectangle compris de deux lignes rationelles commen. en puissance seulement, est irationel: & la ligne qui peut iceluy, irationelle. Soit icelle appellée Mediale.

Sur la figure de la prop. precedente. Soit le rectangle DC, compris de deux lignes rationelles DB & BC commens. en puissance seulement, Ie dis que le rectangle est irrationel.

Car si sur le rationelle DB on descrit le quarré AD, il sera rationel, & sera au rectangle comme AB ou DB son egalle est à BC, par la 1. p. 6. Mais AB & BC sont incommens. en longitude, & par la 10 p. 10. Le quarré & le rectangle seront incommens. Or le quarré est rationel, Et par consequent le rectangle sera irationel. Item ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est irationelle

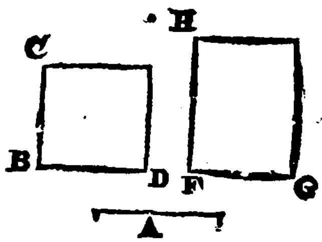
Autrement si elle estoit rationelle, son quarré seroit rationel, & son egal rectangle aussi rationel, que nous auons prouué irrationel, Elle est donc irrationelle appellée ligne Medialle.

SCHOLIE.

Il faut icy remarquer que ligne medialle, est celle qui peut vn rectangle irrationel medial : Or vne ligne est dicte pouuoir vn rectangle laquelle est le costé d'vn quarré egal à iceluy rectangle : Car tout quarré descrit sur vne ligne, est la puissance d'icelle ligne. Il faut aussi noter que medialle est differente de moyenne proport. Car moyenne proportionelle generalement, est celle qui peut vn quarré egal à tout rectangle tant rationel que irrationel, mais medialle est seulement celle qui peut vn quarré egal à vn rectangle irrationel medial.

PROP. XXII.

Le quarré d'vne ligne medialle appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé rationel commens. en puissance seulement à la ligne à laquelle se fait l'application.



Pour appliquer sur vne ligne rationelle vn rectangle egal au quarré d'vne ligne medialle, faut poser quelconque ligne rationelle, en second lieu la medialle, & chercher la tierce proportionelle, laquelle sera l'autre costé du rectãgle: Car par la 17. p. 6. le quarré de la moyenne est egal au rectangle des extremes.

Soit la medialle A, le quarré de laquelle soit appliqué sur la ligne rationelle BD, faisant le rectangle CD: Ie dis que CB & BD sont rationelles commens. en puissance seulement.

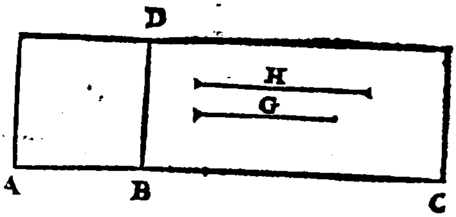
Car A estant medialle, elle peut vn rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, comme il a esté deffiny en la precedente: soit iceluy HG, lequel sera egal à CD (estant aussi la puissance de A) & par la 14. p. 6. CD & HG auront les costez reciproques, sçauoir que comme CB à HF, ainsi FG à BD, & par la 22. p. 6. les quarrez d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BD ligne rationelle, est commens. au quarré de FG aussi ligne rationelle, & par la 10. p. 10. le quarré de HF sera aussi commens. au quarré de BC, & le quarré de HF estant rationel, le quarré de CB sera aussi rationel, & les lignes CB & BD rationelles.

Reste à prouuer que CB & BD sont commens. en puissance seulement: Ce qui est euident par ce qui a esté demonstré à la 20. p. 10. Car si elles estoient commensurables en longitude le rectangle seroit rationel que nous auons posé medial c'est à dire egal au quarré de la medialle A.

PROP. XXIII.

Vne ligne droicte commensurable à vne ligne medialle,

est aussi medialle.



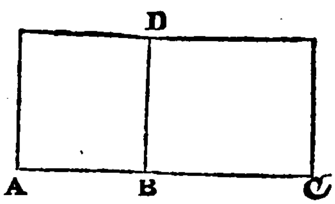
Soit la ligne H, commens. à la medialle G soit en longitude ou en puissance seulement : ie dis qu'elle est medialle.

Car si sur la rationelle DB on faict le rectangle DC egal au quarré de H: & le rectâgle AD egal au quarré de G d'autant que le quarré de la medialle G, est appliqué sur la rationelle DB, l'autre costé BA est rationel commensurable en puissance seulement à BD par la 22. p. 10. Mais G & H estans commensurables, leurs quarrez (ou leurs egaux rectangles DA & DC) seront commens. & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. AB & BC seront commens. en longitude : Partant BC rationel comme AB. Item AB estant incommens. en longitude à BD par la 13. p. 10 BC sera aussi incommens. en longitude à DB, mais en puissance seulement, & par la 21. p. 10. le rectangle DC sera medial, & la ligne H qui le peut sera medialle.

De cecy resulte que toute figure commensurable à vne figure medialle, est aussi medialle : d'autant que les quarrez egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commens. les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'vne d'icelles estant medialle, l'autre qui luy sera commens. sera aussi medialle par ceste proposition.

PROP. XXIV.

Le rectangle compris de deux lignes medialles commensurables en longitude, est aussi medial.

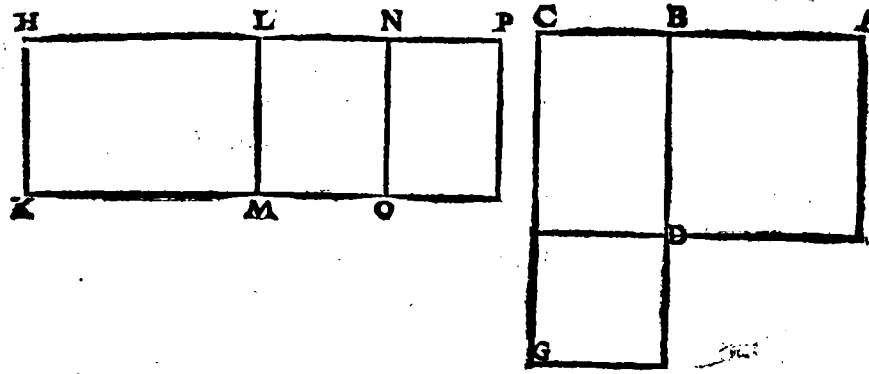


Soit le rectangle DC, compris des deux medialles commens. en longitude DB & BC: Ie dis qu'il est medial.

Car si sur la ligne DB on descrit le quarré DA, il sera medial, estant descrit sur vne ligne medialle : mais BD ou BA son egalle est commens. en longitude à BC. Partant par la 1. p. 6. & 10. p. 10. le quarré medial AD, sera commens. au rectangle DC: & par ce qui resulte de la 23. p. 10. iceluy rectangle sera medial.

PROP. XXV.

Le rectangle compris de deux lignes medialles commensurables en puissance seulement, est rationel ou medial.



Soient les deux medialles commenſ. en puiſſance ſeulement BD & BC, comprenant le rectangle DC: ie dis qu'iceluy rectangle eſt rationel ou medial.

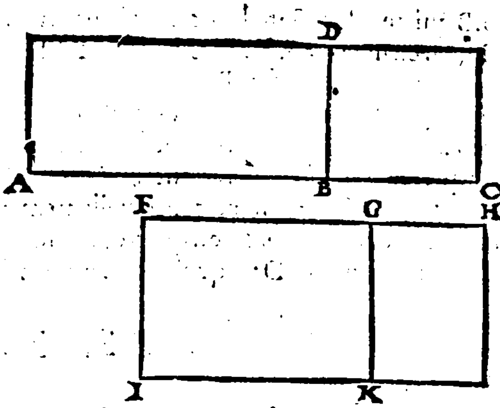
Qu'ainſi ne ſoit. Sur DB & BC ſoient faicts les quarrez AD & DG, leſquels comme eſtans faicts ſur lignes medialles ſeront mediaux: maintenant ſoit propoſée la ligne rationelle HK, & ſur icelle ſoient deſcrits les trois rectangles KL, MN, OP, egaux aux trois figures AD, DC, DG, par la 45. p. 1. Et d'autant que les quarrez AD & DG ſont mediaux, leurs egaux rectangles KL & OP ſeront mediaux: leſquels appliquez ſur la rationelle HK, leurs autres coſtez HL & NP ſeront rationaux commenſ. en puiſſance ſeulement à HK par la 22. p. 10. Mais d'autant que les quarrez AD & DG ſont commenſ. (eſtans faicts ſur lignes commenſ. en puiſſance) leurs egaux rectangles KL & OP ſeront auſſi commenſ. & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. HL & NP ſeront commenſ. en longitude, & par la 19. p. 10. le rectangle de HL & NP ſera rationel, & par conſequent le quarré de la moyenne proport. LN qui luy eſt egal par la 17. p 6 Partant le coſté LN ſera rationel, & par conſequent commenſ. à la rationelle LM, ou à ſon egalle HK, ou en longitude, ou en puiſſance ſeulement: ſi en longitude, MN ſera rationel par la 19. p. 10. Si en puiſſance ſeulement, il ſera medial par la 21. p. 10. Ce qui eſtoit à prouuer.

Or que LN ſoit moyenne proport. entre HL & NP on le prouue ainſi. Le rectangle DC eſt moyen proportionel entre les deux quarrez AD & DG par la 1. p. 6. repetée deux fois, auſſi ſon egal rectangle MN ſera moyen proport. entre les deux rectangles KL & OP, egaux aux deux quarrez AD & DG: Et puis que les trois rectangles ſont continuellement proportionaux par la 1. p. 6. les lignes HL, LN, NP ſeront continuellement proportionelles.

PROP. XXVI.

Vne figure medialle, n'eſt pas plus grande qu'vne figure medialle, d'vne figure rationelle.

Soit la figure medialle ADC, de laquelle on retranche le medialle AD: ie dis



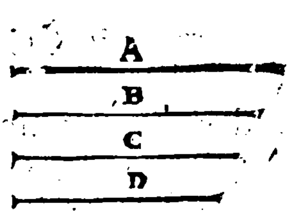
que le reste DC n'est pas figure rationelle.

Qu'il ne soit ainsi: Sur la proposée rationelle FI soient faicts les rectangles FK & KH, egaux aux rectangles AD & DC par la 45.p.1. le total sera egal au total, partant IH & FK seront mediaux, lesquels estans appliquez sur la rationelle FI, les autres costez FG & FH seront lignes rationelles commens. en puissance seulement à FI par la 22.p.10.

Maintenant si on dit que KH est rationel, estant appliqué sur la rationelle GK, l'autre costé GH sera rationel commens. en longitude à GK par la 20.p.10. mais FG est incommens. en longitude à GK, ou FI: & par la 13.p.10. FG & GH seront incommens. en longitude: mais comme FG à GH ainsi le rectangle de FG & GH au quarré de GH par la 1. p. 6. (car ils sont de mesme hauteur) Partant le quarré de GH est incommens. au rectangle de FG & GH. Il le sera aussi à deux fois le rectangle de FG & GH par la 13.p.10. Item le mesme quarré de GH est commens. au quarré de FG qui est aussi rationel, & par la 15. p. 10. les deux quarrez de FG & GH, seront commens. au quarré de GH: lequel est incommensurable à deux fois le rectangle de FG & GH & par la 13.p.10. les deux quarrez de FG & GH seront incommens. à deux fois le rectãgle de FG & GH lesquels deux quarrez & deux fois le rectangle de FG & GH estãs egaux au quarré de FH par la 4.p.2. & par la 16.p.10. le quarré de FH sera incõmens. aux deux quarrez de FG & GH ensemble: lesquels estans rationaux (car ils sont faits sur lignes rationelles) il faudra que le quarré de FH soit irrationel: & la ligne FH irrationelle: laquelle cy dessus nous avõs monstré estre rationelle, Ce qui est absurde: Donc le rectangle KH ou son egal DC n'estoit pas rationel.

PROP. XXVII.

Trouuer deux medialles commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel.



Soient deux lignes rationelles commens. en puissance seulement A & C (trouuées comme il est enseigné en la 11.p.10.) Item soit trouuée la moyenne proportionelle B, & la quatriesme proportionelle D: Ie dis que B & D sont les deux lignes demandées.

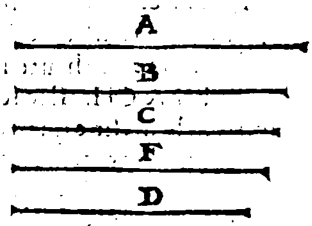
Car puis que B est moyenne proport. entre A & C, le rectangle de A & C (lequel par la 21.p.10. est medial) sera egal au quarré de B par la 17. p. 6. & par la 21. p.

10. B qui peut le rectangle medial, est medialle: Item puisque comme A à B ainsi C à D, en changeant A sera à C comme B à D: mais A est commens. en puissance seulement à C, aussi sera B à D. par la 10. p. 10. & par la 23. p. 10. D. sera ligne medialle (pour estre commens. en puissance à la medialle B) Voila donc les deux lignes medialles commens. en puissance seulement qui sont trouuees. Reste à prouuer que leur rectangle est rationel.

Car A, B, C, D, estans continuellement proportionelles, C sera moyenne entre B & D: & par la 17. p. 6. son quarré (lequel est rationel) sera egal au rectangle des deux medialles B & D: lequel par ce moyen sera aussi rationel.

PROP. XXVIII.

Trouuer deux lignes medialles commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial.



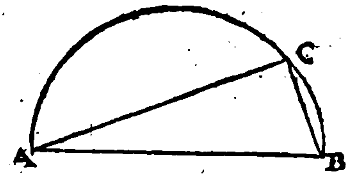
Soient trois lignes rationelles commens. en puissance seulement A, C, D, qu'il faut trouuer comme il a esté enseigné à la 11. p. 10. Puis soit trouuee sa moyenne proportionnelle B: Item soit trouuee F par la 12. p. 6. laquelle soit à B comme D est à C: ie dis que B & F sont les deux medialles demandees.

Car en premier lieu, il est euident que B est medialle par la 22. p. 10. d'autant que par la 17. p. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & C: mais comme C à D ainsi B à F, & C est commens. en puissance seulement à D, aussi par la 10. p. 10. B sera commens. en puissance seulement à F: Et par la 23. p. 10. B estant medialle, F sera aussi medialle commens. en puissance seulement à B.

D'auantage le rectangle des deux medialles B & F est aussi medial. Car puis que comme B à F ainsi C à D en changeant B sera à C comme F à D, mais A est à B comme B à C: partant comme A est à B, ainsi F est à D: & par la 16. p. 6. Le rectangle des extremes A & D (lequel est medial par la 21. p. 10.) sera egal au rectangle des moyennes B & F: & par ce qui resulte de la 23. p. 10. il sera aussi medial.

PROP. XXIX.

Trouuer deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.



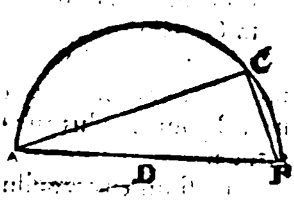
Soit trouué le nombre DG, diuisé en DF, & FG en sorte que le total DG soit à FG comme nombre quarré à nombre quarré: mais non pas à DF: Cecy se peut faire en prenant vn nombre quarré, qui se puisse diuiser en nombre quarré & non quarré, comme 9. en 5. & 4. Item soit trouuée la rationelle AB, sur laquelle (apres auoir fait le demy cercle) soit menée la ligne AC, de laquelle le quarré soit au quarré de AB, comme le nombre DG est à DF: Finalement soit menée CB. Ie dis que AB & AC sont les deux lignes demandées.

Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AC comme nombre à nombre, ils seront commens. ensemble leurs costez AB & AC: mais AB est rationelle, & par consequent aussi rationelle AC qui luy est commeus. mais les quarrez de AB & AC n'estans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. p. 10. les lignes AB & AC seront rationelles commens. en puissance seulement.

Ie dis d'autant que CB est commens. en longitude à AB. Car d'autant que AB peut plus que AC du quarré de CB, & que le nombre DG est plus grand que DF du nombre FG: Item que le tout DG est au retranché DF, comme le tout quarré de AB, est au retranché quarré de AC: par la 19. p. 5. le reste nombre FG est au reste quarré de CB. comme le tout nombre DG, est au tout quarré de AB: & en changeant, comme DG à FG (c'est à dire comme nombre quarré à nombre quarré) ainsi le quarré de AB au quaré de BC: & par la 9. p. 10. AB & BC sont commens. en longitude: ainsi AB & AC sont deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que que AC du quarré de la ligne CB qui luy est commens. en longitude.

PROP. XXX.

Trouuer deux lignes rationalles commensurables en puissance seulement, & que la grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude.



Soit trouué le nombre DG, diuisé en DF & FG, en sorte que le total DG ne soit ny à DF ny à FG comme nombre quarré à nombre quarré, cecy se peut faire en adioustāt deux nōbres non quarrez, desquels la somme face vn quarré, comme 6. & 3. Item soit trouuée la rationelle AB, sur laquelle apres auoir fait le demy cercle, soit menee la ligne AC, de laquelle le quarré soit au quarré de AB comme le nombre DG est à DF (on la trouuera comme il a esté enseigné apres la 6. p. 10.) finablement soit menee CB: Ie dis que AB & AC sont les deux lignes demandees.

Car on prouuera tout ainsi que à la precedente, que AB & AC sont rationelles commens. en puissance seulement (d'autant que leurs quarrez ne sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré) Pareillement tout ainsi que en la precedente, le quarré de AB est au quarré de BC, comme le nombre DG à FG, (ce n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré) & par la 9. p. 10. AB & BC seront incommens. en longitude: ainsi AB & AC sont rationelles commens. en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AC, du quarré de la ligne CB, qui luy est incommens. en longitude.

PROP. XXXI.

Trouuer deux medialles commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuées par la 29. p. 10. deux lignes rationelles A & C commens. en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite C du quarré d'vne ligne qui luy soit comens. en longitude. Item soit trouuée B moyenne proportionelle entre A & C, & la quatriesme en continuelle proportion D, Ie dis que B & D sont les deux lignes demandées.

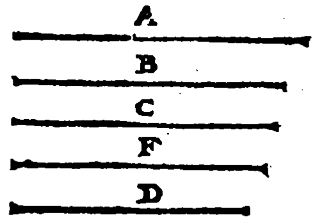
Car puis que comme A à B ainsi C à D, en changeant A sera à C comme B à D: Mais A est commens. en puissance seulement à C, ainsi B sera commens. en puissance seulement à D par la 10 p. 10. Item B peut le rectangle medial de A & C par la 17. p. 6. elle sera donc medialle par la 21. p. 10. & par la 23. p. 10. D sera aussi medialle qui luy est commens. en puissance seulement: & par la 14. p. 10. A pouuant plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, aussi B pourra plus que D du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. en longitude. Item C estant moyenne proport. entre B & D, son quarré (qui est rationel) est egal au rectangle de B & D: lequel sera par consequent rationel, ainsi B & D sont medialles commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, B pouuant plus que D du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude.

Que si on eust voullu que B peut plus que D du quarré d'vne ligne qui luy fust incommens. en longitude il ne falloit que demander pareille chose en l'hypotese de A & C comme en la proposition precedente.

PROP.

PROP. XXXII.

Trouuer deux medialles commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

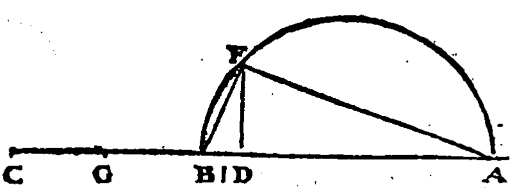


Soient trois lignes rationelles commens. en puissance seulement A, C, D, & que C puisse plus que D du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude, comme enseigne la 29. p. 10. Item soit trouuée la moyenne B entre A & C: Soit aussi trouuee F laquelle soit à D comme B à C: Ie dis que B & F sont les deux lignes demandees.

Car puis que c'est mesme construction que en la 28. p. 10. Il se prouuera comme là, que B & F sont medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial. Maintenant en changeant comme B à F ainsi C à D, & par la 14. p. 10. C pouuant plus que D du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, aussi B pourra plus que F du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. en longitude.

PROP. XXXIII.

Trouuer deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel.



Soient deux lignes rationelles commensurable en puissance seulement AB & BC, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude comme enseigne la 30. p. 10. & apres auoir couppé en deux egallement CB au point G, soit abliqué vn rectangle sur BA egal au quarré de BG, defaillant d'vne figure quarrée par la 28. p. 6. & soit iceluy rectangle de AD & DB: & apres auoir faict le demy cercle sur la ligne BA & mené la perpendiculaire DF, soient menees BF & FA: Ie dis que icelles lignes sont les lignes demandees.

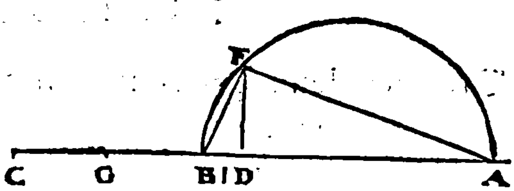
Car puis que AB & BC sont inegalles, & que la plus grande AB peut plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy est incommensf. en longitude

& que le rectangle defaillant de AB & BD est egal au quart du quarré de BC (c'est à dire au quarré de GB) les deux lignes AD & DB seront incommens. en longitude par la 18. p. 10. entre lesquelles DF est moyenne proport. & comme il a esté demonstré à la 11. p. 10. elle sera incommensurable en puissance à DA. Mais comme FD à DA ainsi BF à FA par la 4. p. 6. car iceux triangles sont equiangles par la 8. p. 6. & par la 10. p. 10. BF & FA sont incommens. en puissance. Item le quarré de AB, est egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. lequel quarré de BA est rationel estant la ligne AB rationelle, partant le composé des quarrez de BF & FA sera aussi rationel.

Ie dis d'auantage que le rectangle de BF & FA est medial. Car le rectangle de AD & DB, est egal au quart du quarré de BC par hypotese, il est aussi egal au quarré de la moyenne porport. DF par la 17. p. 6. ainsi le quarré de FD sera egal au quarré de BG : partant DF egalle à BG : & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA sera egal au rectangle de BA & DF ou BG sont egalle, car par la 8. & 4. p. 6. AB est à BF comme FA à FD.) Mais le rectangle de AB & BC est medial par la 21. p. 10. & aussi sa moitié rectangle de AB & BG : & par consequent medial son egal rectangle de BF & FA.

PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial.



Soient deux medialles commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle rationel, & que AB puisse plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude par la 31. p. 10. & soit acheuee la construction comme en precedente. Ie dis que BF & FA sont les deux lignes demandees.

Car par 18. p. 10. le rectangle defaillant appliqué sur BA, diuisera BA en BD & DA incommens. en longitude, & la moyenne proport. DF sera incommensurable en puissance à DA (comme il a esté demonstré en la precedente) & par la 4. p. 6. & 10. p. 10. BF & FA seront incommensurable en puissance. Item le quarré de BA est medial, estant descrit sur vne ligne medialle, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. Partant le composé des deux quarrez de BF & FA est medial. reste à prouuer que le rectangle de BF & FA est rationel. Le rectangle de AB & BC est rationel, aussi sera la moitié le rectangle de AB & BG, & par consequent son egal rectangle de BF & FA comme il a esté prouué à la precedente proposition 33. Ce qui estoit a faire.

PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes incommensurable en puissance, com-

prenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial.

Soient deux medialles commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant vn rectangle medial, & que la plusgrande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longitude comme nous auons enseigné à la fin de la 31. p. 10. & apres auoir acheué la construction comme en la 33. p. 10. Ie dis que BF & FA sont les lignes demandees.

Car premierement elles sont incommens. en puissance, comme en la demonstration de la 33. p. 10. & le quarré de BA estant medial comme en la precedente, le composé des quarrez de BF & FA sera aussi medial: Item le rectangle de AB & BC estant medial par hypothese, le rectangle de AB & BG (ou DF son egale) qui est sa moitié sera aussi medial par ce qui resulte de la 23. p. 10. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a esté demonstré en la 33. proposition 10.

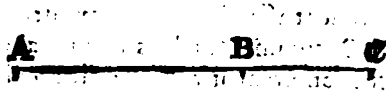
Finablement d'autant que AB est incommensurable en longitude à BC par hypothese, par la 13. p. 10. la moitié BC sera aussi incommensurable en longitude à AB & par la 1. p. 6. le quarré de AB sera au rectangle de AB & BG (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de BA) comme AB à BG c'est à dire incommens. & par consequent le rectangle de BF & FA egal au rectangle de AB & BG sera incommens. au quarré de BA, c'est à dire au composé des quarrez de BF & FA. Ce qui estoit à demonstrer.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES DES lignes irrationelles par la composition.

PROP. XXXVI. Six. 1.

Si deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement sont assemblees, la toute est irrationelle: soit icelle appellee Binome.

Soient assemblees deux lignes rationelles commens. en puissance seulement AB & BC: Ie dis que la toute AC est irrationelle.



Car le rectangle de AB & BC est au quarré de BC, comme AB à BC par la 1. p. 6. & par la 10. p. 10. le rectangle sera incommens. au quarré, & par la 13. p. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens. au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB, & BC sont rationelles commens. en puissance seulement, leurs quarrez seront commensurables entre eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC par la 15. p. 10. & par la 13. p. 10. les deux quarrez de AB & BC seront incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 16. p. 10. le composé de deux fois le rectangle & des deux quarrez (qui est egal au seul quarré de AC par la 4. p. 2.) est incommens. aux deux quarrez de AB & BC lesquels estans rationaux & le composé d'iceux rationel, le quarré de AC qui luy est incommensurable sera irrationel & par consequent la ligne AC irrationelle: icelle donc sera appellee binome.

PROP. XXXVII.

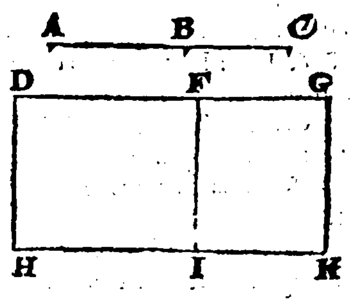
Si deux lignes medialles commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel sont assemblees, la toute est irrationelle: soit icelle appellee bimedialle premiere.

Soient assemblees deux medialles AB & BC commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel ainsi qu'il est ordonné en la 27. p. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.

Car par la mesme demonstration de la precedente propos. le quarré de CA se trouuera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC: lequel estant rationel par hypotese, le quarré de AC sera irrationel qui luy est incômensurable par la 13. p. la 10. & la ligne AC sera aussi irrationelle laquelle sera appellee bimedialle premiere.

PROP. XXXVIII.

Si deux medialles commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial sont assemblees, la toute sera irrationelle: soit icelle appellee bimedialle seconde.



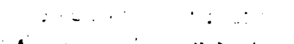
Soient assemblees les deux medialles AB & BC commensurables en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, ainsi que ordonne la 28. p. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.

Qu'il ne soit ainsi: Sur la ligne rationelle DH soit appliqué le rectangle DK egal au quarré de AC, & le rectangle DI egal aux quarrez de AB & BC par la 45. p. 1. Il est euident par la 4. p. 2. que le rectangle FK est egal à deux fois le rectangle de AB & BC: lequel rectangle estant par hypothese medial, FK sera aussi medial par ce qui resulte de la 23. p. 10. car il est double d'iceluy rectangle. Item le rectangle DI, egal aux deux quarrez de AB & BC commensurables entre eux par hypothese, sera commensurable à vn chascun d'eux par la 15. p. 10. Mais iceux quarrez faicts de lignes medialles sont mediaux: partant DI sera aussi medial, par ce qui resulte de la 23. p. 10. ainsi les deux rectangles DI & FK estans mediaux, & appliquez sur la rationelle DH, leurs autres costez DF & FG seront rationaux commensurables en puissance seulement à DH par la 22. p. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC est au quarré de BC comme AB est à BC par la 1. p. 6. c'est à dire incommensurable par la 10. p. 10. & deux fois le rectangle de AB & BC sera aussi incommens. au quarré de BC: & les deux quarrez de AB & BC estans commensurables entre eux, les deux ensemble seront commensurables au seul de BC par la 15. p. 10. & par la 13. p. 10. les deux quarrez de AB & BC seront incommensurables à deux fois le rectangle de AB & BC: & par consequent aussi leurs egaux rectangles DI & FK: & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. DF & FG lignes rationelles seront incommensurables en longitude: elles seront donc commensurable en puissanee seulement, (car autrement elles ne seroient rationelles si elles estoient incommensurables) & par la 36. p. 10. DG sera binome & irrationel: & le rectangle DK sera irrationel: car s'il estoit rationel DH estant rationelle, il faudroit par la 20. p. 10. que l'autre costé DG fut rationel, ce qui n'est pas, DK est donc irrationel: & partant irrationel son egal quarré de AC, & par consequent la ligne AC irrationelle, qui sera appellee bimedialle seconde.

PROP. XXXIX.

Si deux lignes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, mais le composé de leurs quarrez est rationel sont assemblees, La toute est irrationelles soit icelle appellee ligne maieure.

Soient assembles les deux lignes AB & BC incommensurable en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rational par la 33. p. 10. Ie dis que la toute est irrationelle.



Car par hypothese le rectangle de AB & BC estant medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial parce qui resulte de la 23. p. 10. Mais par hypotese le composé des quarrez de AB & BC est rationel: partant incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC: Et par la 16. p. 10. le composé des deux rectangles & des deux quarrez (qui est le quarré de AC par la 4. p. 2.) sera incommens. au composé des deux quarrez de AB & BC qui est rationel: partant le quarré de AC sera irrationel: & son costé AC aussi irrationel, lequel sera appellé ligne maieure.

PROP. XL.

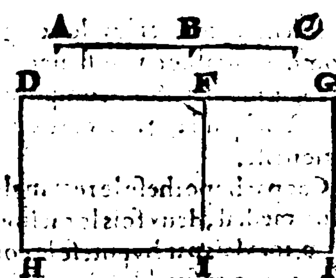
Si deux lignes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, ſont aſſemblees, La toute eſt irrationelle: ſoit icelle appellee ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soient aſſemblees les deux lignes AB & BC, de telle nature que demande la propoſ. & qu'enſeigne à trouuer la 34. p. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Car puis que le composé des quarrez de AB & BC eſt medial, & leur rectangle rationel, deux fois iceluy rectangle ſera auſſi rationel & incommenſ. au composé des quarrez de AB & BC, lequel eſtant medial par la 16. p. 10. le composé des deux quarrez & des deux rectangles ſçauoir le quarré de AC par la 4. p. 2. ſera incommenſ. à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel eſt rationel: Ainſi le quarré de AC ſera irrationel: & par conſequent la ligne AC: laquelle ſera appellee ligne pouuant vn rationel & vn medial.

PROP. XLI.

Si deux lignes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle medial incommenſurable au composé de leurs quarrez auſſi medial ſont aſſemblees, La toute eſt irrationelle: Soit icelle appellee ligne pouuant deux mediaux.



Soient aſſemblees les deux lignes AB & BC de telle nature que demande la prop. & ſelon la 35. p. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Qu'il ne ſoit ainſi. Sur la ligne rationelle DH ſoit faicte meſme conſtruction que en la 38. p. 10. Sçauoir que le rectangle DK ſoit egal au quarré de AC, DI aux deux quarrez de AB & BC, lequel ſera medial comme le composé d'iceux & incommenſ. au rectangle FK egal à deux fois le rectangle de AB & BC auſſi medial: & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. DF & GD ſeront auſſi incommenſ. en longitude. Mais les deux rectangles DI & FK eſtans mediaux, & appliquez ſur la rationelle DH, feront les deux autres coſtez DF,

& FG rationaux par la 22. p. 10. Ainsi DF & FG seront rationelles commens. en puissance seulement & par la 36. p. 10. DG sera irrationelle. Mais DH estant rationelle le rectangle DK sera irrationel comme nous auons prouué à la fin de la 38. p. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle sçauoir AC sera irrationelle : laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux.

PROP. XLII. Six.

La ligne binome ne peut estre diuisée en ses noms qu'en vn point seulement.

SCHOLIE.

Auparauant que d'expliquer la diuision des six sortes de lignes irrationelles composées, il faut remarquer en premier lieu que jamais les deux noms d'icelles lignes ne peuuent estre egaux : Autrement ils seroient entre eux commensurables en longitude, & nous les auons demonstrez incommens. en longitude.

Secondement que quand l'autheur dict qu'elles ne peuuent estre diuisées qu'en vn seul point, cela s'entent quen toute diuision les deux parties de l'vne sont egalles aux deux parties de l'autre chacune à la sienne : car alors Euclide entend qu'elles ne sont diuisées qu'en vn seul point. De maniere que le contredisant apportant vne autre diuision que la proposée, on entendra que les deux parties de sa diuision seront inegalles aux parties de la proposée.

Tiercement que pour prouuer icelle diuision, nous auons affaire de deux principes, outre ce qui a esté demonstré cy deuant : le premier est tel.

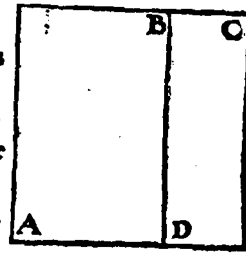
Si vne ligne est couppée en deux inegallement en vn point, & en deux inegallement en vn autre point, & les parties de l'vne des diuisions sont inegalles aux parties de l'autre diuision chacune à la sienne, les quarrez des deux lignes de la plus inegalle diuisiõ sont plus grãds, que les quarrez des lignes de la moins inegalle.

On le prouue ainsi.

Soit AC diuisée inegallement en AD & DC : & encores plus inegallement en AB & BC (c'est à dire que BC soit plus petite partie que AD.) Ie dis que les quarrez de AB & BC sont plus grands que ceux de AD & DC.

Car si AC est coupée en deux egallement en G, Il est euident que puis que AD est plus grand que BC, que DG sera plus petit que GB : or par la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC, auec le quarré de GB, est egal au quarré de GC : Item le rectangle de AD & DC auec le quarré de DG, est aussi egal au quarré de GC : partant le rectangle de AD & DC auec le quarré DG est egal au rectangle de AB & BC auec le quarré de GB. Et en ostant les quarrez inegaux le rectangle de AD & DC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC : & son double aussi sera plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarrez de AB & BC & deux fois le rectangle de AB & BC, sont egaux au quarré de AC par 14.

p. 2. auquel sont aussi egaux les deux quarrez de AD & DC & deux fois le rectangle de AD & DC : Et par consequent les composez des quarrez & rectangles sont egaux entre eux : mais les deux rectangles de AD & DC sont plus grands que les deux de AB & BC : partant les deux quarrez de AB & BC seront plus grands que les deux quarrez de AD & DC. Le second est tel.

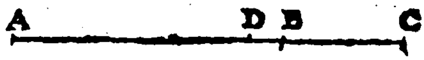


Vne figure rationelle, excede vne figure rationelle, d'vne figure rationelle.

Soient les deux rationelles AC & AB, estant AC plus grande que AB de DC : Ie dis DC est figure rationelle.

Car AC & AB estant rationelles, elle seront aussi commens. & par la 15. p. 10. AB & DC seront commens. entre elles, & par consequent rationelles.

Venons à la demonstration de la proposition.



Soit le binome AC diuisé en ses noms au poinct B : Ie dis qu'on ne le diuisera pas en ses noms en vn autre point.

Autrement s'il se peut faire soit diuisé au point D suiuant l'intention de l'autheur. il faut que AD & DC soient plus grandes ou plus petites que AB & BC chacune à la sienne : autrement si elles estoient egalles elles seroint diuisées sur vn mesme point. Si AD & DC sont parties plus grandes que AB & BC, le composé des quarrez de AB & BC sera plus grand que le composé des quarrez de AD & DC (comme nous auons demonstré au commencement de ceste proposition) & pour autant que iceux composez sont rationaux (car ce sont quarrez bastis sur lignes rationelles) leurs excez sera aussi rationel comme nous auons demonstré : Or est il que le composé des quarrez AB & BC auec deux fois le rectangle de AB & BC est egal au composé des quarrez de AD & DC auec deux fois le rectangle de AD & DC (car iceux sont chacun egaux au quarré de AC par la 4. p. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AB & BC sont plus grands que les quarrez de AD & DC, d'autant les rectangles de AB & BC soient plus petits que les rectangles de AD & DC : mais l'excez des quarrez est rationel, donc l'excez des rectangles sera aussi rationel (puis que c'est le mesme excez) qui est contre la 26. p. 10. Car iceux rectangles par la 21. p. 10 sont mediaux, d'autant que les lignes AB & BC, ou AD & DC sont rationelles commens. en puissance seulement. Donc le binome AC n'a peu estre diuisé en ses noms que en B : Car en quelque autre point qu'on le diuise, il s'ensuiura la mesme absurdité.

PROP. XLIII.

La bimedialle premiere n'est diuisee en ses noms qu'en vn point seulement.

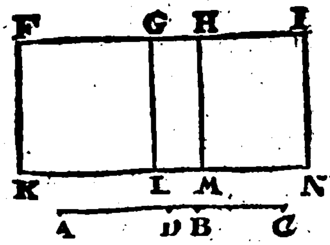
Soit la

Soit la bimedialle premiere AC, diuisée en ses noms au point B en sorte que AB & BC soient medialles commens. en puissance seulemeht comprenant vn rectangle rationel : Ie dis qu'on ne la poura diuiser en ses noms en vn autre point.

Autrement s'il se peut faire soit diuisee en D, sçauoir que AD & DC soient medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel : il s'ensuiura parce que nous auons demonstré à la 42. p. 10. que deux fois le rectangle de AD & DC sera autant plus grand que deux fois le rectangle de AB & BC, que les quarrez de AD & DC sont plus petits que les quarrez de AB & BC : Or tous iceux rectangles sont rationaux, donc leur excez sera rationel : mais les quarrez estans mediaux il faudroit que leur excez fust rationel, contre la 26. p. 10. Donc la ligne bimedialle premiere AC ne pouuoit estre diuisee en ses noms sinon au point B.

PROP. XLIV.

La bimedialle seconde, n'est diuisée en ses noms, qu'en vn point seulement.



Soit la bimedialle seconde AC, diuisee en ses noms au point B, en sorte que AB & BC soient medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial : Ie dis qu'elle ne pourra estre diuisée en vn autre point.

Autrement si faire se peut qu'elle soit encores diuisee en AD & DC en la sorte que dessus : & sur la ligne rationelle FK soit construit le rectangle FN, egal au quarré de AC, & FM egal aux deux quarrez de AB & BC (lequel sera medial comme iceux quarrez) il est euident que HN sera egal à deux fois le rectangle de AB & BC, & sera medial comme iceux : & par la 22. p. 10. les deux rectangles mediaux FM & NH appliquez sur la rationelle FK, auront les autres costez FH & HI rationaux. Item par la 1. p. 6. Le quarré de AB est au rectangle de AB & BC, comme AB est à BC, laquelle luy est incommens. en longitude & par la 10. p. 10. le quarré sera incommens. au rectangle : Partant aussi incommens. à son double HN. Mais les deux quarrez de AB & BC sont commens. entre eux, & par la 15. p. 10. le composé des deux FM sera commens. à celuy de AB, & par la 13. p. 10. les rectangles de FM & NH seront incommens. Aussi seront leurs bases FH & HI, lesquelles estant rationelles & commens. en puissance seulement par la 36. p. 10. la toute FI sera binome, & par la 42. p. 10. elle ne pourra estre diuisee en ses noms que au seul point H.

Maintenant si AC peut estre diuisée en D comme nous auons proposé, & que les deux quarrez de AD & DC soient plus grands ou plus petits que les deux de AB & BC (car autrement la bimedialle ne seroit diuisee en vn autre point) Soient donc plus petits : & sur la rationelle KH soit bastile rectangle FL egal aux deux quarrez de DA & DC: & par les mesmes raisons que cy dessus, il est euident que GN rectangle, sera egal à deux fois le rectangle de AD & DC: & les deux lignes FG & GI se trouueront rationelles commens. en puissance seulement: & par la 36.p.10. FI est binome, lequel seroit diuisé en G & en H contre la 42.p.10. si AC estoit diuisé en autre point qu'en B.

Que si quelqu'vn vouloit maintenir que FG & HI estant egalles que le binome FI n'est point diuisé en diuers points en G & H: On niera l'egalité de FG & HI. Car il faudroit aussi que les rectangles FL & HN fussent egaux, sçauoir les deux quarrez de AD & DC, egaux aux deux rectangles de AB & BC, ce qui est faux: parce que les quarrez de AD & DC, sont plus grands que deux fois le rectangle de AD & DC, lesquels rectangles sont plus grands que deux fois le rectangle de AB & BC.

PROP. XLV.

La ligne maieure, n'est diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

Soit la ligne maieure AC, diuisee en ses noms au point B, en sorte que AB & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel: Ie dis que on ne la pourra diuiser en vn autre point.

Autrement si faire se peut qu'elle soit diuisee en ses noms au point D. Par ce qui a esté demonstré à la 42. p. 10. les composez des quarrez de AB & BC, & de AD & DC ont vn mesme excez que les doubles rectangles de AB & BC, & de AD & DC. Mais d'autant que les quarrez sont rationaux leurs excez est rationel, Il faudroit donc que l'excez des rectangles fut rationel, estant iceux mediaux, ce qui est contraire à la 26. p. 10. Donc la ligne maieure AC, ne sera diuisee en ses noms en autre point qu'en B.

PROP. XLVI.

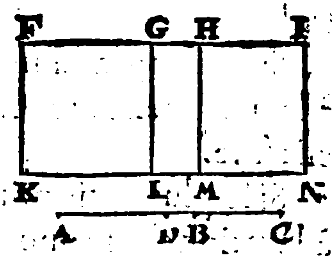
La ligne pouuant vn rationel & vn medial, n'est diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AC, diuisee en ses noms au point B, en sorte que AB & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial. Ie dis que on ne la pourra diuiser en vn autre point.

La demonstration peut estre semblable à la precedente, sçauoir que si on la diuisoit encores au point D, il s'ensuiuroit que l'excez des quarrez & des rectangles, seroit rationel & irrationel.

PROP. XLVII.

La ligne pouuant deux mediaux, n'est diuisee en ses noms, qu'en vn point seulement.



Soit la ligne pouuant deux mediaux AC diuisee en ses noms au point B, en sorte que AB & BC soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrez aussi medial: Ie dis qu'on ne la diuisera point en ses noms en vn autre point.

Autrement si faire se peut soit diuisée au point D: & sur la rationelle FK soit faicte pareille construction qu'en la 44. p. 10. Le rectangle FN egal au quarré de AC, FM egal aux deux quarrez de AD & DC, & HN egal au double du rectangle de AB & BC comme il a esté demonstré en la 44. p. 10. les deux rectangles FM & HN qui sont mediaux, feront les lignes FH & HI rationelles: mais par hypothese le composé des quarrez de AB & BC est incommens. au double de leur rectangle: partant aussi les rectangles FM & HN seront incommens. Ainsi les lignes rationelles FH & HI seront commens. en puissance seulement: & par la 36. p. 10. AC sera binome diuisé en ses noms au point H. Que si on veut dire que AC peut encores estre diuisé en ses noms au point D: il s'ensuiura, comme en la 44. prop. 10. Que le binome FI diuisé en ses noms au point H, se pourroit encores diuiser en ses noms au point G, Contre la 42. p. 10. Ainsi AC ne pouuoit estre diuisé en ses noms que au seul point B.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationelle estant proposee, & le binome diuisé en ses noms: lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude.

Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationelle proposee: toute la ligne soit appellee Binome premier.

Si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationelle proposee: toute la ligne soit appellee Binome second.

Si ny l'vn ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationelle proposee: toute la ligne soit appellee Binome troisiesme.

Lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationelle: toute la ligne soit appellee Binome quatriesme.

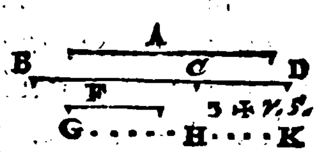
Si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationelle proposee: toute la ligne est appellée Binome cinquiesme.

Si ny l'vn ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationelle proposee, soit la toute Binome sixiesme.

Icy ne se faict point mention de lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longitude à la rationelle proposée: parce que telles lignes ne sont irrationelles: ny par consequent aucune sorte de binomes, puis que nous auons cy dessus demonstré en la 36.p.10. que tout binome est ligne irrationelle.

PROP. XLVIII. Six. 3.

Trouuer vn Binome premier.



Soit trouué vn nombre quarré comme GK, qui puisse estre diuisé en KH quarré, & HG non quarré: & soit proposée la rationelle A, auec vne autre BC, qui luy soit commens. en longitude: Et soit trouuée CD de laquelle le quarré soit au quarré de BC, comme le nombre GH est à GK, ainsi qu'il est enseigné apres la 6.p.10. Ie dis que la toute BD est binome premier.

Car puis que les quarrez des deux noms BC & CD sont comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes BC & CD seront rationelles, mais commens. en puissance seulement par la 9.p.10. (car BC est rationelle) & par la 36.prop.10. BD sera binome. Ie dis d'auantage qu'il est binome premier.

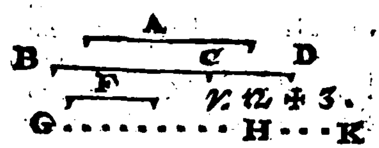
Car puis que les quarrez de BC & CD sont entre eux comme les nombres G

K & GH: Or Gk eſt plus grand que GH, auſſi le quarré de BC ſera plus grand que le quarré de CD : ſoit donc du quarré de F. Ainſi les deux quarrez de CD & F, ſeront egaux au quarré de BC : comme les deux nombres GH & HK, ſont egaux au ſeul GK. Mais puis que le quarré total de BC eſt au nombre total GK, comme le retranché quarré de CD eſt au retranché GH : le reſte quarré de F ſera au reſte nombre HK, comme le tout quarré de BC eſt au tout nombre GK : & en changeant, comme le nombre quarré GK eſt au nombre quarré HK, ainſi le quarré de BC eſt au quarré de F : & par la 9. 10. BC & F ſeront commenſ. en longitude. Mais BC plus grand non eſt commenſ. en longitude à la rationelle A par hypotheſe, & peut plus que CD du quarré de F qui luy eſt commenſ. en longitude, & par les ſecondes deff. BD eſt binome premier.

PROP. XLIX.

Trouuer vn binome ſecond.

Au nombre quarré GH ſoit adiouſtée le nombre HK, en ſorte que le tout GK ſoit à HK comme nombre quarré à nombre quarré, mais non pas à GH : & ſoient propoſées les deux rationelles A & CD commenſ. en longitude: & ſoit trouuée BC de laquelle le quarré ſoit au quarré de CD, comme GK à GH nombre quarré à nombre quarré : Ie dis que BD eſt binome ſecond.



Car on prouuera premierement tout ainſi que en la precedente, que BD eſt binome. Pareillement que BC plus grand nom peut plus que CD plus petit nom du quarré de F qui luy eſt commenſ. en longitude: Item le plus petit nom BC eſt commenſ. en longitude à la rationelle A : & par les ſecondes deff. BD eſt binome ſecond.

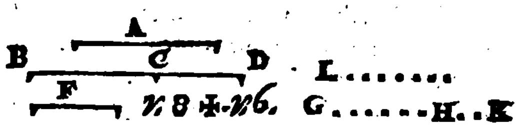
SCHOLIE.

Il faut noter que pour trouuer deux nombres qui ſoient entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, Il ne faut que prendre l'vn quadruple de l'autre : Et pour faire qu'ils ne ſoient entre eux comme nombre quarré à nombre quarré, il faut trouuer vn nombre quarré & vn non quarré, ou que l'vn ſoit double de l'autre.

POP. L.

Trouuer vn binome troiſieſme.

Soient trouuez les deux nombres L & GK, en ſorte que GK diuiſé en GH & HK le tout GK ſoit à HK comme nombre quarré à nombre quarré, mais non pas à GH : & que L ne ſoit ne à GK ne à GH, comme nombre quarré à nombre quarré : & apres auoir trouué la rationelle A, ſoit priſe BC de laquelle le quarré soit au quarré de A, comme le nombre L est au nombre GK: Item soit trouuée CD de laquelle le quarré soit au quarré de BC, comme le nombre GK est à GH. Ie dis que BD est binome troisiesme.



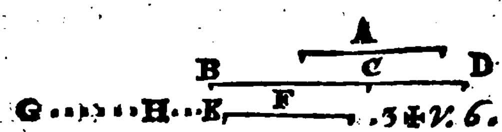
Car puis que les quarrez de BC & CD sont comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes BC & CD seront commens. en puissance seulement par la 9. p. 10. Item le quarré de BC est commens. au querré de la rationelle A (estans comme nombre à nombre non pas quarré) BC sera commens. en puissance seulement à A & BC & CD seront rationelles, & par la 36. p. 10. BD sera binome. Ie dis d'auantage que c'est binome troisiesme.

Car les trois quarrez de BC, CD, & de la rationelle A, sont l'vn à l'autre comme les trois nombres L, GK, GH, c'est à dire qu'ils ne sont comme nombre quarré à nombre quarré, & par la 9. prop. 10. BC & CD sont incommens. en longitude à la rationelle A. Pareillement on prouuera comme à la 48. p. 10. que BC le plus grand nom peut plus que CD du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude (car GK est à HK comme nombre quarré à nombre quarré) & par les secondes deff. BD est binome troisiesme.

PROP. LI.

Trouuer vn binome quatriesme.

Soit le nombre quarré GK, diuisé en GH & HK en sorte que le tout ne soit a pas vne de ses parties comme nombre quarré à nombre quarré: & apres auoir trouué les deux rationelles commens. en longitude A & BC, soit trouué CD de laquelle le quarré soit au quarré de BC, comme le nombre GH est à GK. Ie dis que BD est binome quatriesme.

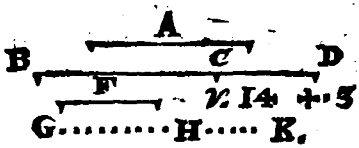


Car comme il a esté demonstré au binome premier, BD sera binome. Item le plus grand nom BC est commens. en longitude à la rationelle A, & peut plus que CD du quarré de F, laquelle luy est incommens. en longitude par la 9. p. 10. (d'autant que GK n'est pas à HK comme nombre quarré à nombre quarré) & en cecy seulement il est different du binome premier: & par les secondes deff. BD est binome quatriesme.

PROP. LII.

Trouuer vn binome cinquiesme.

Soit au nombre quarré GH, adiousté HK en sorte que le tout GK ne soit à GH ny à HK comme nombre quarré à nōbre quarré: & apres auoir trouué les deux rationelles commens. en longitude A & CD, soit trouuee BC, de laquelle le quarré soit au quarré de CD, comme le nombre GK est à GH. Ie dis que BD est binome cinquiesme.

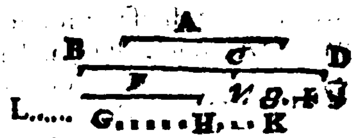


Car tout ainsi qu'il a esté demonstré au binome second, BD sera premierement binome: Puis que CD est plus petit nom & commens. en longitude à la rationelle. Item comme il a esté demonstré en la 48. & 51. p. 10. BC peut plus que CD du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par les secondes deff. BD est binome cinquiesme.

PROP. LIII.

Trouuer vn binome sixiesme.

Soit le nombre GK non quarré, diuisé en GH & HK en sorte que GK ne soit à GH ny à HK, comme nombre quarré à nombre quarré. Item soit trouué le nombre L qui ne soit à GK ny à GH comme nombre quarré à nombre quarré & apres auoir trouué la rationelle A & BC, de laquelle le quarré soit au quarré de la rationelle A, comme le nombre L est à GK: soit trouuée CD de laquelle le quarré soit au quarré de BC, comme GH à Gk: Ie dis que BD est binome sixiesme.



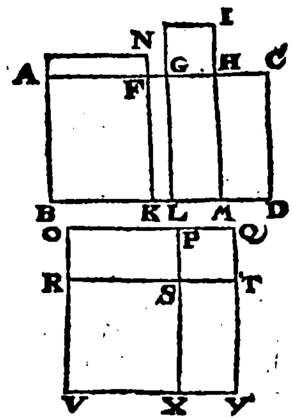
Car comme il a esté monstré à binome troisiesme, on prouuera premierement BD estre binome: en apres que les deux noms sont incommens. en longitude à la rationelle A, finablement que BC peut plus que CD du quarré de F qui luy est incommens. en longitude, comme au binome quatriesme & cinquiesme: & par les secondes deff. BD est binome sixiesme.

SCHOLIE.

Puis que les six sortes de binome ne sont trouuees que par benefice des nombres, & que nous auons obmis tous les lemmes seruans à l'inuention d'iceux, nous enseignerons icy en deux mots le moyen de les trouuer. Donc pour auoir binome premier, faut prendre nombre quelconque pour plus grand nom, & apres auoir soustraict le quart de sa puissance, la racine du reste sera le plus petit nom: comme 4. sa puissance 16. le quart soustraict reste 12. ainsi 4 + $\sqrt{}$ 12. est binome premier. Pour binome second, le nombre pris sera le plus petit nom, à la puissance duquel si on adiouste le tiers d'icelle, la racine quarree du tout sera le plus grand nom: comme $\sqrt{}$ 12. + 3. Pour binome troisiesme, la racine quarree de nombre quelconque non quarré sera le plus grand nom, & la racine des trois quarts du mesme pour le plus petit nom : comme $\sqrt{}$. 8. + $\sqrt{}$. 6. Pour binome quatriesme, cinquiesme, on fera ainsi que à binome premier & second, sinon qu'on ostera ou adioustera la moitié de la puissance: comme 4. + $\sqrt{}$. 8. binome quatriesme $\sqrt{}$. 54 + 6. binome cinquiesme: pour binome sixiesme, on prendra les racines de deux nombres non quarrez l'vn desquels sera double de l'autre: comme $\sqrt{}$. 10. + $\sqrt{}$. 5.

PROP. LIV. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationnelle & d'vn binome premier, la ligne pouuant iceluy rectangle est binome.



Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome premier AC: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est binome.

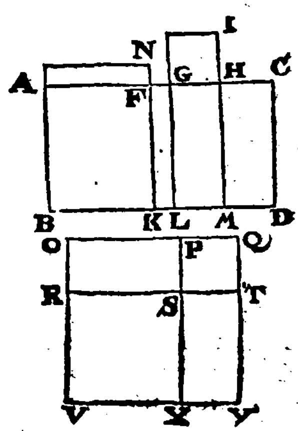
Qu'il ne soit ainsi. Puis que AC est binome premier qu'il soit diuisé en ses noms au point G, de sorte que AG soit le plus grand nom: Et soit le plus petit nom GC couppé en deux egallement en H & soit sur GH descrit le quarré GI qui sera le quart du quarré de GC: Et sur AG, soit descrit le rectangle AN egal au quarré GI, & defaillant d'vne figure quarrée par la 28. p. 6. soient aussi descrits les quarrez VS & SQ, egaux aux deux rectangles AK & FL disposez en sorte que RS & ST, facent vne ligne droite: Puis soit acheué le rectangle OY, lequel sera quarré. Maintenant il est euident que le rectangle OS, est egal au rectangle GM: Car d'autant que le rectangle AN est egal au quarré GI, la ligne GH sera moyenne prop. entre AF & FN, ou son egalle FH & par la 1. p. 6. le rectangle GM sera moyen proportionel entre AK & FL, ou leurs egaux quarrez VS & SQ: Et par consequent il sera egal au rectangle OS, qui est aussi moyen proport. entre iceux quarrez par la 1. p. 6. Repetee deux fois & son egal SY sera aussi egal à l'autre HD. Et le quarré OY egal à tout le rectangle AD, & la ligne RT pourra iceluy rectangle: Laquelle ie dis qu'elle est binome.

Car puis que le rectangle defaillant AN est egal à GI quart du quarré de GC plus petit nom, & que AC est binome premier, (sçauoir que pour cela AG peut plus que GC du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude) par la 17. p. 10. AF & FG sont commens. en longitude, & par la 15. p. 10. La toute AG sera commens. à chacune de ses parties AF & FG, laquelle toute estant commens. en longitude à la rationelle AB (pour estre AC binome premier) par la 12. p. 10. AF & FG seront rationelles commens. en longitude à AB, & par la 19. p. 10. AK

p. 10. AK & FL seront rationaux, & leurs egaux quarrez VS & SQ: Partant rationelles les lignes RS & ST. Pareillement AC estant binome, AG est incommens. en longitude à GC, partant aussi à sa moitié GH, & par la 13. p. 10. AF & GH seront incommens. en longitude, & les rectangles AK & GM seront incommens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. aussi incommens. leurs egaux RX & XT & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. Les deux lignes rationelles RS & ST seront incommens. en longitude, mais en puissance seulement & par la 36. p. 10. RT sera binome.

PROP. LV.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle est bimedialle premiere.



Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome second AC: Ie dis que (apres auoir faict pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne qui peut iceluy rectangle RT, est bimedialle premiere.

Car puis que AC est binome second, AG sera incommens. en longitude à la rationelle AB: Item AF & FG (qu'on prouuera estre commens. en longitude entre elles, cōme en la precedente, & par la 15. p. 10. à leur toute AG) seront par la 13. p. 10. commens. en puissance seulement à la rationelle AB, & seront rationelles, & par la 22. p. 10. Les rectangles AK & FL seront mediaux, & leurs egaux quarrez VS & SQ: Et partant les lignes RS & ST mediales, lesquelles on prouuera estre commens. en puissance seulement tout ainsi qu'en la precedente. Et d'autant que GC est commens. en longitude à la rationelle AB le rectangle GD sera rationel par la 19. p. 10. aussi sera sa moitié GM, & son egal SY, compris des deux mediales RS & ST: Et par la 37. p. 10. RT est bimedialle premiere.

PROP. LVI.

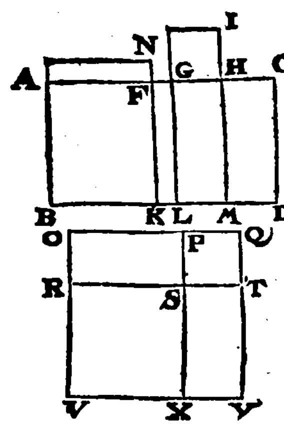
Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome troisiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est bimedialle seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome troisiesme AC (apres auoir construict comme aux precedentes) ie dis que RT qui peut iceluy rectangle, est bimedialle seconde.

Car on prouuera comme en la precedente, que les deux quarrez de VS & SQ sont mediaux, & partant medialles les lignes RS & ST, qu'on prouuera aussi estre commens. en puissance seulement: Item d'autant que AC est binome troisiesme, GC est commens. en puissance seulement à la rationelle AB, & par la 21. p. 10. Le rectangle GD sera medial, aussi sera sa moitié GM: Et par consequent medial son egal SY (compris des deux medialles RS & ST.) Ainsi RS & ST sont deux medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, & par la 38. p. 10. RT sera bimedialle seconde.

PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome quatriesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Maieur.



Soit le rectangle AD, compris du binome quatriesme AC & de la rationelle AB (apres auoir construict comme aux precedentes) Ie dis que RT qui peut iceluy rectangle, & ligne maieur.

Car puis que AC est binome quatriesme, AG plus grand nom est commens. en longitude à la rationelle AB, & peut plus que GC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par la 18. p. 10. Le rectangle defaillante AN (egal au quart du quarré de GC) diuisera AG, en AF & FG incommens. en longitude: Et les rectangles AK & FL seront incommens. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. aussi incommens. leurs egaux quarrez VS & SQ, & les lignes RS & ST seront incommens. en puissance: Mais le rectangle AL est rationel par la 19. p. 10. (qui est egal aux quarrez de VS & SQ). Et le rectangle SY compris d'icelles lignes est medial) car son egal GM est medial, comme son double GD par la 22. p. 10. estant GC rationelle commens. en puissance seulement à AB) & par la 39. p. 10. RT est ligne maieur.

PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome cinquiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB à du binome cinquiesme

AC: Ie dis (apres auoir construit comme aux precedentes) que RT qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC est binome cinquiesme, AG peut plus que GC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude: Et comme en la precedente AF & FG seront incommens. Et les lignes RS & ST seront incommens. en puissance, & le composé de leurs quarrez sçauoir le rectangle AL est medial par la 21.p.10. car les lignes AB & AG sont rationeiles commens. en puissance seulement. Et d'autant que AB & GC sont commens. en longitude, par la 19.p.10. GD est rationel, aussi sera sa moitié GM, & son egal SY compris des lignes RS & ST, & par la 40.p.10. RT est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

PROP. LIX.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome sixiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome sixiesme AC, (apres auoir construit comme aux precedentes,) ie dis que RT qui peut iceluy rectangle, est ligne pouuant deux mediaux.

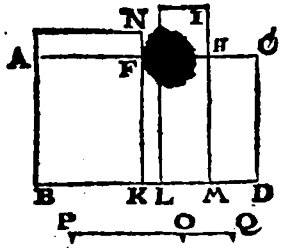
Car puis que AC est binome sixiesme, AG peut plus que GC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & si les deux noms sont incommens. en longitude à la rationelle AB: Et comme il a esté demonstré à la 57. p.10. RS & ST seront incommens. en puissance, & si par la 21.p.10. Le rectangle AL, qui est le composé de leurs quarrez est medial: Item GD est aussi medial par la mesme prop. aussi medial sa moitié GM, & son egal SY compris d'icelles lignes RS, ST. Et si iceluy rectangle SY, ou son egal GM, est incommens. au composé des quarrez de RS & ST, sçauoir AL: D'autant que les lignes AG & GC estant incommens. en longitude, aussi AG & GH le seront: Et par la 1. p.6. & 10.p.10. Les rectangles AL & GM seront incommens. Et par la 41.p.10. RT sera ligne pouuant deux mediaux.

PROP. LX. Six. 5.

Le quarré d'vn binome, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé binome premier.

Soit le binome PQ diuisé en ses noms au point O, & sur la rationelle AB soit faict le rectangle AD egal au quarré de PQ: Ie dis que l'autre costé AC est binome premier.

Soit construict AK egal au quarré de PO, & FL egal à celuy de OQ: Il est euident par la 4. p. 2. que GD est egal à deux fois le rectangle de PO & OQ: & en diuisant GC egallement en H, & en menant HM parallelle à CD, GM sera



egal au rectangle de PO & OQ: Ie dis donc que AC est binome premier.

Car puis que PQ est binome, PO & OQ sont rationelles commens. en puissance seulement, & leurs quarrez seront rationaux & leurs egaux rectangles AK & FL aussi rationaux, & par la 20. p. 10. les costez AF. & FG seront rationelles commens. en longitude à AB, & entre elles par la 12. p. 10. Et par la 15. p. 10. La toute AG sera commens. en longitude à AF & FG, & par la 12. p. 10. elle sera rationelle & commens. en longitude à AB rationelle : Et d'autant que le rectangle de PO & OQ est medial, son double GD sera aussi medial, & par la 22. p. 10. GC sera rationelle commens. en puissance seulement à AB, à laquelle AG estant commens. en longitude par la 13. p. 10. AG & GC (qui sont rationelles) seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. AC est binome. Ie dis en outre que c'est binome premier.

Car les deux quarrez de PO & OQ sont plus grands que leur rectangle deux fois: Partant AL plus grand que GD, & AG plus grand nom que GC : & si il peut plus que iceluy GC, du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude par la 17. p. 10 Aussi il se prouuera aisément comme aux precedentes que le rectangle de PO, & OQ est moyen proportionel entre les quarrez de PO & OQ, partant AK, GM & FL, seront continuellement proport. aussi seront les lignes AF, GH, FG, & par la 17. p. 6. Le rectangle defaillant AN, sera egal à GI, quart du quarré de GC, (veu mesmes que nous auons monstré que AF, & FG sont commens. en longitude, car se sont les hypotheses de la 17. p. 10.) Et puis que AG est commens. en longitude à AB, il est euident que AC est binome premier.

PROP. LXI.

Le quarré d'vne bimedialle premiere, apliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome second.

Soit la bimedialle premiere PQ, diuisée en ses noms en O, (apres auoir construit comme en la precedente) Ie dis que AC est binome second.

Car puis que PQ est bimedialle premiere, PO & OQ sont medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel, duquel le double GD sera aussi rationel, & par la 20. p. 10. GC sera rationelle commens. en longitude à AB : Mais les deux lignes PO & OQ estans medialles, leurs quarrez sont mediaux, & leurs egaux rectangles AK & FL : Et par la 15. & 23. p. 10. le total AL sera medial : Et par la 22. p. 10. son autre costé, AG sera rationel cõmens. en puissance seulement à la rationelle AB: Et par la 13. p. 10. AG & GC seront rationelles commens. en puissance seulement; & par la 36. p. 6. AC sera binome. Ie dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera aisément comme en la precedente que AG est plus grand nom, & qu'il peut plus que GC du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude par la 17. p. 10. Nous auons aussi monstré que GC plus petit nom estoit commens. en longitude à la rationelle AB: & par les secondes deff. AC est binome second.

PROP. LXII.

Le quarré d'vne bimedialle seconde, apliquée sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome troisiesme.

Soit la bimedialle seconde AQ, diuisée en ses noms en O (apres auoir construit comme aux precedentes) Ie dis que AC est binome troisiesme.

Car puis que PQ est bimedialle seconde, PO & OQ sont medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle medial, duquel le double GD sera aussi medial, & par la 22, p. 10. son autre costé GC sera rationel commens. en puissance seulement à AB, & comme il a esté demonstré à la precedente AG sera aussi rationelle cômens. en puissance seulement à AB. Item d'autant que comme PO à OQ, ains le quarré de PO au rectangle de PO & OQ par la 1. p. 6. Il est euident que le quarré sera incommens. au rectangle (estans les deux lignes incommens. en longitude) il sera aussi incommens. au double du rectangle GD. Mais le quarré de PO estant commensurable au quarré de OQ, par la 15. p. 10. AL qui est le composé d'iceux quarrez sera commens. au quarré de PO, & par la 13. p. 10. Les rectangles AL & GD sont incommens. Et les lignes AG & GC rationelles, seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. AC est binome.

Ie dis dauantage qu'il est binome troisiesme, Car tous les deux noms sont incommens. en longitude à la rationelle AB, Et se prouuera comme aux deux precedentes que AG peut plus que GC du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, & par les secondes deff. AC est binome troisiesme.

PROP. LXIII.

Le quarré d'vne ligne maieur, aplique sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome quatriesme.

Soit la ligne maieur PQ, diuisee en ses noms en O (apres auoir construit comme aux precedentes) ie dis que AC est binome quatriesme.

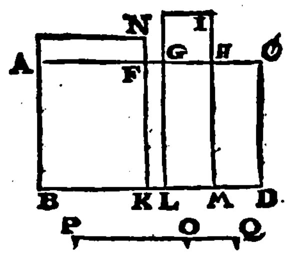
Car puis que PQ est ligne maieur, PO & OQ sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel, partant le rectangle AL est rationel & son autre costé AG rationel commens. en longitude à la rationelle AB, par la 20. p. 10. Item le rectangle GD estant medial, par la 22. p. 10. GC sera rationelle commens. en puissance seulement à AB: Et par la 13. p. 10. Les rationelles AG & GC seront commens. en puissance seulement & par la 36. p. 10. AC est binome.

Ie dis dauantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes PO &

OQ sont incommens. en puissance leurs quarrez seront incommens. partant aussi leurs egaux rectangles AK FL, & les lignes AF & FG incommens. (desquelles est compris le rectangle defaillant AN) & par la 18. p. 10. AG qui est commens. en longitude à la rationelle, peut plus que GC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par les secondes deff. AC est binome quatriesme.

PROP. LXIV.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, apliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome cinquiesme.



Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial PQ, diuisée en O (apres auoir construit comme aux preced.) Ie dis que AC est binome cinquiesme.

Car puis que PQ est ligne pouuant vn rationel & vn medial, PO & OQ sont incommens. en puissance comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial: Partant le rectangle AL est aussi medial, & par la 22. p. 10. AG est rationelle cõmens. en puissance seulement à AB. Itẽ le rectangle de PO & PQ estant rationel, son double GD sera aussi rationel, & par la 20. p. 10. GC sera rationelle commens. en longitude à AB & par la 13. p. 10. Les rationelles AG & GC seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. AC sera binome. Ie dis, de plus qu'il est binome cinquiesme. Car GC est commens. en longitude à la rationelle AB, & si on prouuera comme en la precedente, que AG peut plus que GC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par les secondes deff. AC est binome cinquiesme.

PROP. LXV.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, apliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome sixiesme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux PQ, diuisée en O (apres auoir construit comme aux precedentes) ie dis que AC est binome sixiesme.

Car puis que PQ est ligne pouuant deux mediaux, PO & OQ sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial: Ainsi il est euident que AL & GD sont mediaux & incommens. & par la 22. p. 10. Leurs autres costez seront rationaux commens. en puissance seulement entre eux & à la rationelle AB: & par la 36. p. 10. AC est binome, duquel les deux noms sont incommens. en longitude à la rationelle AB: & comme il a esté demonstré aux precedentes AG peut plus que

GC du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par les secondes deff. AC est binome sixiesme.

PROP LXVI. Six. 6.

La ligne commens. en longitude au binome, est aussi binome de mesme ordre.

Soit la ligne DG, commens. en longitude au binome AC, ie dis qu'elle est aussi binome de mesme ordre.

Qu'il ne soit ainsi (estant AC binome diuisé en ses noms en B) de DG soit retranchée DF qui soit à AB, cōme DG est à AC: par la 19. p. 5. le reste FG sera au reste BC, comme le tout est au tout: & par la 11. & 16. p. 5. AB sera à BC, comme DF est à FG. Mais AB & BC sont rationelles commens. en puissance seulement, & par la 10. p. 10. DF & FG seront rationelles commens. en puissance seulement (car DF est commens. à la rationelle AB estant à icelle comme la toute à la toute) & par la 36. p. 10. DG est binome. Maintenant ie dis qu'il est aussi binome de mesme ordre.

Car si AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude, aussi par la 14. p. 10. DF pourra de mesme plus que FG: Et si AB. est commens. en longitude, à la rationnelle, aussi sera DF par la 10. p. 10. Et AC, & DG seront binome premier: Si BC est commens. en longitude à la rationelle aussi sera FG, ainsi AC & DG seront binome second: Si AB & BC sont incommens. en longitude à ra rationelle aussi seront DF & FG, & AC & DG seront binome troisiesme. Le reste est aisé par la 14. p. 10. & 10. p. 10. Partant AC & DG sont binomes de mesme ordre.

PROP. LXVII.

La ligne commens. à vne bimedialle, est aussi bimedialle de mesme ordre.

Soit la ligne DG, commens. à la bimedialle AC, Ie dis qu'elle est aussi bimedialle de mesme ordre.

Car (apres auoir construit comme en la precedente) AB sera à BC, comme DF à FG, & AB commens. à DF: Mais AB & BC sont medialles commens. en puissance seulement, & par là 24. & 10. p. 10. DF & FG seront medialles commens. en puissance seulement: Et DG sera bimedialle. Maintenant comme AB à DF ainsi BC à FG, & par la 22. p. 6 Le quarré de AB sera au quarré de DF, comme le rectangle de AB & BC est au rectangle de DF & FG (estant iceux rectangles semblables d'autant qu'ils ont les costez proport.) Mais le quarré de AB est commens. au quarré de DF, ainsi par la 10. p. 10. les rectangles seront aussi commens. que si l'vn est rationel, l'autre sera aussi rationel. Et AC & DG seroit bi-

bimedialles premieres: Que si l'vn des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & AC & DG seront bimedialles secondes.

PROP. LXVIII.

La ligne commens. à vne ligne maieur, est aussi ligne maieur.

Soit la ligne DG, commens. à la ligne maieur AC, ie dis qu'elle est aussi ligne maieur.

Car (apres auoir constrnict comme aux precedentes) à AB sera BC comme DF à FG, & AB commens. à DF: Mais AB & BC sont incommens. en puissance, aussi DF & FG seront incômens. Item puis que icelles lignes AB BC DF FG sont proport. par la 22. p. 6. leurs quarrez seront proportionaux, & en côposant, les deux de AB & BC seront au seul de AB, comme les deux de DF & FG sont au seul de DF, lequel estant commens. au quarré de AB, aussi les deux de DF & FG seront par la 10. p. 10. commens. aux deux de AB & BC: & seront rationaux comme iceux. Item on prouuera comme en la precedente que le rectangle de DF & FG est commens. au rectangle de AB & BC: lequel estant medial, aussi sera celuy de DF & FG: & DG sera ligne maieure.

PROP. LXIX.

La ligne commensurable a vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, est aussi la ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Soit la ligne DG commens. à la ligne pouuant vn rationel & vn medial AC: Ie dis qu'elle est aussi pouuant vn rationel & vn medial.

Car (apres telle construction qu'aux precedentes (on prouuera que comme AB & BC sont incommens. en puissance, aussi seront DF & FG. Item les quarrez de AB & BC composez seront commens. au composé des quarrez de DF & FG, & le rectangle de AB & BC sera commens. au rectangle de DF & FG, mais le composé des quarrez de AB & BC est medial & leur rectangle rationel, aussi le composé des quarrez de DF & FG sera medial & leur rectangle rationel: & DG sera ligne pouuant vn rationel & vn medial. par la 40. p. 10.

PROP. LXX.

La ligne commensurable à vne ligne pouuant deux mediaux, est aussi ligne pouuant deux mediaux.

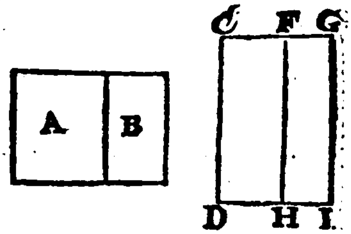
Soit la ligne DG, commens. à la ligne pouuant deux mediaux AC: Ie dis aussi qu'elle est ligne pouuant deux mediaux.

Car

Car (apres construction faicte comme aux precedentes) on trouuera tout de mesme que DF & FG sont incommens. en puissance, que le composé de leurs quarrez est medial, & leur rectangle medial: Mais puis que le composé des quarrez de AB & BC, est au composé des quarrez de DF & FG, comme le quarré de AB au quarré de DF: Et que par la 22. p. 6. comme le quarré de AB au quarré de DF, ainsi le rectangle de AB & BC au rectangle de DF & FG: par la 11. p. 5. Le composé sera au composé, comme le rectangle au rectangle: Et en changeant, comme le composé des quarrez de AB & BC est incommens. à leur rectangle, aussi le composé des quarrez de DF & FG est incommens. à leur rectangle, Et par la 41. p. 10. DG est ligne pouuant deux mediaux.

PROP. LXXII. Six. 7.

Si vne superficie rationelle & vne medialle sont ioinctes, la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimedialle premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.



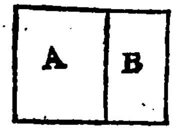
Soient ioinctes deux superficies A rationelle & B medialle, ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bimedialle premiere, ou ligne maieur, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

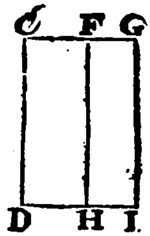
Car premierement les deux superficies ne sçauroient estre egalles (car où elles seroient toutes deux rationelles ou toutes deux medialles) Soit donc premierement A plus grande que B: Et sur la rationelle CD soient bastis les deux rectangles CH, egal à A: & FI, egal à B. Donc CH sera rationelle, & FI medialle plus petite que CH: Et par la 20. 22. p. 10. CF & FG seront rationelles, CF estant commens. en longitude à CD, & FG, commens. à icelle en puissance seulement: Et par la 13. p. 10. CF & FG seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. CG sera binome diuisé en ses noms en F: Et par la 1. p. 6. CH estant plus grande que FI, CF sera le plus grand nom, lequel peut plus que FG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. ou incommens. en longitude: Si commens. (estant CF commens. en longitude à la rationelle CD) CG sera binome premier: Et par la 54. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est binome. Si incommens. CG sera binome quatriesme, & par la 57. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI est ligne maieure. Que si A est plus petit que B, aussi CH sera plus petit que FI, & CF sera le plus petit nom cõmens. à la rationelle CD: & par ce moyen CG sera binome second ou cinquiesme: Si binome second, par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimedialle premiere. Si binome cinquiesme, par la 58. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est ligne pouuant vn rationel & vn medial.

PROP. LXXII.

Si deux ſuperficies medialles incommenſurables ſont ioinctes, la ligne qui peut tout le composé eſt bimedialle ſeconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Soient les deux ſuperficies medialles incommenſ. A & B: Ie dis que la ligne qui peut toutes les deux eſt bimedialle ſeconde, ou ligne pouuant deux mediaux.





Soit faicte conſtruction comme en la precedente ſur la rationelle CD: Les rectangles CH & FI seront mediaux & incommenſ. Et par la 22. p. 10. CF & FG seront rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement entre elles, & à la rationelle CD: Et par la 36. p. 10. CG ſera binome, Soit donc CF le plus grand nom: Car CF & FG ne ſcauroient eſtre egalles, dautant qu'elles ſont incommenſ. en longitude: Donc CF peut plus que CG du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longitude. Si commenſ. CG eſt binome troiſieſme (eſtans les deux noms incommenſ. en longitude à la rationelle) & par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimedialle ſeconde: Si incommenſ. GC ſera binome ſixieſme, & la ligne qui peut le rectangle CI eſt par la 59. p. 10. ligne pouuant deux mediaux.

SCHOLIE.

Le binome & les ſuiuantes cinq ſortes de lignes irrationelles ſont differentes entre elles & à la medialle, Car le quarré d'vne ligne medialle, appliqué ſur vne ligne rationelle, fait l'autre coſté rationel commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationelle à laquelle il eſt appliqué par la 22. p. 10.

Mais le quarré d'vn binome, fait l'autre coſté binome premier.

Le quarré d'vne bimedialle premiere, fait l'autre coſté binome ſecond.

Le quarré d'vne bimedialle ſeconde, fait l'autre coſté binome troiſieſme.

Le quarré d'vne ligne maieur, fait l'autre coſté binome quatrieſme.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, fait l'autre coſté binome cinquieſme.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, faict l'autre coſté binome ſixieſme.

Mais il faut touſiours entendre qu'ils ſoient appliquez ſur vne ligne rationelle. Et puis que tous ces coſtez ſont differens entre eux, il eſt manifeſte que toutes icelles lignes irrationelles ſont differentes entre elles.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES *des lignes irrationelles par le retranchement.*

PROP. LXXIII.

Si d'vne ligne rationelle, on retranche vne ligne rationelle commens. en puissance seulement à la toute, le reste est irrationel: Soit appellé Residu.

Soit retranchée de la rationelle AC la rationelle AB, en sorte que AC & AB soient rationelles commens. en puissance seulement: Ie dis que le reste BC est irrationel.

Car par la 1. p.6. comme AC est à AB ainsi le quarré de AC est au rectangle de AC & AB: mais AC est incommens. en longitude à AB, & par la 10. p.10. Le quarré de AC incommens. au rectangle de AB & AC: partant aussi à son double: mais les quarrez de AB & AC sont commens. & par la 15. p. 10. les deux ensemble seront commens. au seul de AC & par la 13. p. 10. les quarrez de AC & AB sont incommens. à deux fois le rectangle de AC & AB, lesquels auec le quarré de BC estans egaux aux deux quarrez de AB & AC, par la 7. p. 2. il s'ensuiura que le quarré de BC auec deux fois le rectangle de AB & AC seront incommens. à iceux deux rectangles: Et par la 16. p. 10. deux fois le rectangle auec le quarré de BC (où les deux quarrez de AB & AC) seront incommens. au quarré de BC, lesquels estans rationaux (car ils sont descris sur lignes rationelles) le quarré de BC sera irrationel: Partant la ligne de BC sera aussi irrationelle appellée Residu.

PROP. LXXIV.

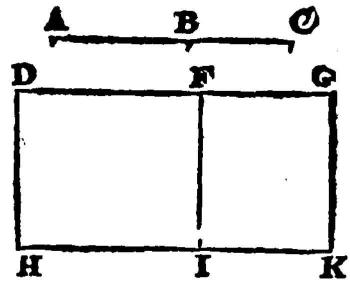
Si d'vne ligne medialle, on retranche vne medialle commens. en puissance seulement à la toute, comprenant auec la toute vne rectangle rationel, le reste est irrationel: Soit appellé residu medial premier.

Soit la medialle AC, de laquelle on retranche la medialle AB en sorte que AB & AC soient medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel: Ie dis que le reste BC est irrationel.

Car puis que AB & AC sont medialles, leurs quarrez seront mediaux, mais incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel: Et par la 7. p. 2. deux fois le rectangle de AB & AC auec le quarré de BC estans egaux aux quarrez de AB & AC seront incommens. au double du rectangle de AB & AC, & par la 15. p. 10. le quarré de BC sera incommens. au double du rectangle AB & AC, lequel estant rationel, le quarré de BC sera irrationel, & la ligne BC irrationelle, qu'on appellera residu medial premier.

PROP. LXXV.

Si d'vne ligne medialle, on retranche vne ligne medialle commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, le reſte eſt irrationel: Soit appellé reſidu medial ſecond.



Soit la medialle A C, de laquelle on retranche la medialle AB, En ſorte que AC & AB ſoient commenſ. en puiſſance ſeulement comprenant vn rectangle medial: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

Car ſi on faict le rectangle DK egal aux deux quarrez de A B & AC, duquel on retranche D I egal à deux fois le rectangle de AB & AC, le reſte FK par la 7. p. 2. ſera egal au quarré de B C, Mais AC & AB eſtant medialles, leurs quarrez ſeront mediaux & commenſ. & par la 15. p. 10. le composé d'iceux eſt medial DK. Item le rectangle de A C & AB eſt medial, & par conſequent ſon double DI auſſi medial: mais par la 26. p. 10. vn medial n'eſt pas plus grand qu'vn medial d'vne figure rationelle, partant FK ſera irrationel: & BC qui le peut auſſi irrationel, qu'on appellera reſidu medial ſecond.

SCHOLIE.

Quelqu'vn pourroit s'eſtonner pourquoy nous nous ſommes eſloignez de la diligence de Theon en demonſtrant ceſte prop. & la 78. ſuiuante, penſant que la conclusion n'eſt pas ſi certaine que celle de Theon: Car encores que par la 26. p. 10. l'excez des inegaux mediaux ſoit irrationel, il peut eſtre auſſi medial, & le reſte BC ſeroit auſſi medial: qui eſt contre l'intention de l'autheur qui veut que toutes ces lignes irrationelles ſoient differentes de la medialle. Mais on pourroit obiecter le meſme contre les concluſions de quatre autres ſortes de reſidu, auſquelles on prononce que tout ce qui eſt incommenſ. au rationel, eſt irrationel, & il pourroit eſtre auſſi medial, ce qui n'eſt à pas vne ſorte de reſidu: Partant il eſt euident que ce n'eſt pas icy le lieu de demonſtrer la difference de ces lignes, tant entre elles que de la medialle: il ſuffit ſeulement de monſtrer qu'elles ſont irrationelles: Et ceſte demonſtration eſt plus brefue, facile, & plus intelligible que celle de Theon ny de Campanus.

PROP. LXXVI.

Si d'vne ligne droicte, on en retranchera vne partie incommenſurable en puiſſance à la toute, comprenant auec

icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel, le reste sera irrationel: Soit appellé ligne Mineure.

Soit la ligne droite AC, de laquelle on retranche AB incommens. en puissance à la toute AC, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez est rationel: Ie dis que le reste BC est irrationel.

Car puis que le composé des quarrez de AB, & AC est rationel, il est incommens. au rectangle de AC & AB, lequel est medial, partant aussi au double d'iceluy rectangle: & comme il a esté demonstré à la 73. p. 10. iceux quarrez de AC & AB, seront incommens. au quarré de BC, lesquels ensemble faisant vn rationel: le quarré de BC est irrationel, & BC ligne irrationelle, qu'on appellera ligne mineure.

PROP. LXXVII.

Si d'vne ligne droite, on retranche vne partie incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, le reste sera irationel: soit appellé ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

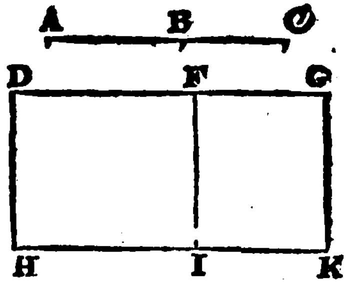
Soit la ligne droite AC, de laquelle on retranche AB incommens. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez est medial: Ie dis que le reste BC est irationel.

Car puis que le rectangle de AB & AC est rationel, aussi sera son double, & incommens. au composé des quarrez de AC & AB, lequel est medial, & par ce qui a esté demonstré à la 74. p. 10. le reste BC sera irrationel appellé ligne faisant auec vne superficie rationelle, vn tout medial, ainsi appellé à cause que le quarré d'icelle ligne adiousté auec vne superficie rationelle fait vn tout medial comme il apparoistra à la 109. p. 10.

PROP. LXXVIII.

Si d'vne ligne droite, on retranche vne partie incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle

vn rectágle medial, incõmensurable au cõposé de leurs quarrez aussi medial, le reste est irrationel : soit appellé ligne faisant auec vn superficie medialle vn tout medial.



Soit la ligne droite AC, de laquelle on retranche la ligne AB incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial: Ie dis que le reste BC est irrationel.

Car si on faict mesme construction qu'en la 75. p. 10. On concluera comme à icelle que le rectangle F K est irrationel, partant aussi irrationelle la ligne BC qui peut iceluy: qu'on appellera ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial : ainsi appellee par ce que le quarré d'icelle auec vne superficie medialle fait vn tout medial comme il aparoistra à la 110. p. 10.

SCHOLIE.

En ces six propositions dernieres, ou l'autheur monstre l'origine des residus il ne veut dire autre chose sinon que si aux six sortes de lignes irrationelles, on retranche le plus petit nom du plus grand, ce qui restera est residu. Comme si du binome 4. — $\sqrt{}$ 10. du plus grand nom 4. on retranche le plus petit, restera 4. — $\sqrt{}$ 10. lequel residu est irrationel : aussi si du plus grand nom d'vne bimedialle on retranche le plus petit nom ce qui reste est irrationel appelle residu medial. Si du plus grand nom de la ligne maieur on retranche le plus petit nom, ce qui reste est ligne mineure, &c.

PROP. LXXIX.

On ne sçauroit adiouster au residu, qu'vne seule ligne rationelle commens. en puissance seulement à la toute.

Soit le residu AD, auquel on adiouste DB en sorte que AB & BD soient rationelles commés. en puissance seulement: Ie dis qu'on ne y en adioustera pas vne autre de mesme sorte.

Autrement, soit adioustee DC s'il est possible: en sorte que AC, & CD soient rationelles commens. en puissance seulement. Maintenant par la 7. p. 2. les deux quarrez de AC & CD sont plus grands que le rectangle de AC & CD, deux fois du quarré de AD. Pareillement les deux quarrez de AB, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AB & BD, du mesme quarré de AD, & en changeant les quarrez excedront autant les quarrez, que les rectangles excedent les rectangles, & d'autant que les quarrez sont rationaux, leur excex sera rationel, & AD sera rationelle: Pareillement les rectangles estant mediaux, leur excez sera medial, & par la 26. p.10. irrationel, & AD sera irrationelle. Mais tantost elle estoit rationelle: ce qui ne peut estre. Dont on n'a peu adiouster au residu AD autre ligne conuenable que D B.

SCHOLIE.

Campanus met icy vn lemme pour prouuer, que les quarrez de AB & BD, estans autant plus grands, que deux fois le rectangle de A B & B D, comme les quarrez de AC & DC sont plus grands que deux fois le rectangles de AC & DC: Que l'on peut en changeant dire que les quarrez excedent autant les quarrez, que les rectangles, excedent les rectangles: Mais cecy est aisé à prouuer par addition & soustraction de choses egalles.

PROP. LXXX.

On ne sçauroit adiouster au residu medial premier, qu'vne seulle ligne medialle commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel.

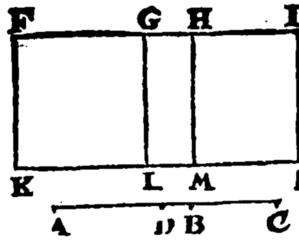
Soit le residu medial premier AD, auquel on adiouste la medialle BD, en sorte que AB, & BD, soient medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel: Ie dis qu'on ny en adioustera pas vne autre en mesme sorte.

Autrement soit encores adioustee DC selon le requis s'il est possible. Maintenant par la 7.p.2. il se prouuera cõme en la precedente que les quarrez de AC, & CD, excedent les quarrez de AB, & BD du quarré de AD. Itẽ que les rectangles de AC & CD excedent les rectangles de AB & BD du mesme quarré de AD: Or l'excez des quarrez qui sont mediaux doit est irrationel, & l'exces des rectangles qui sont rationaux doit estre rationel, ainsi le quarré de AD seroit rationel & irrationel ce qui est absurde. Donc à AD on n'a peu adiouster autre ligne que BD selon le requis.

PROP. LXXXI.

On ne sçauroit adiouster au residu medial second, qu'vne seule ligne medialle commensurable en puissance seulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial.

Soit au residu medial second AD adioustee DB en la sorte que demande la proposition: Ie dis qu'on ny adioustera pas vne autre en la mesme sorte.



Autrement si faire se peut, soit adioustee vne autre DC en la sorte requise. Et sur la rationelle FK soit basti FM egal aux deux quarrez de AB & DB, & par la 7.p.2. apres auoir basty GM egal à deux fois le rectangle de AB & BD, FL sera egal au quarré de AD: Item soit basti FN egal aux deux quarrez de AC & DC, puis que FL est egal au quarré de AD aussi GN sera egal à deux fois le rectangle de AD & DC par 7. p.2.

Maintenant les quarrez de AB & DB sont mediaux (estans faicts de lignes medialles(& si deux fois le rectangle de AB & BD doit estre medial, partant leurs egaux rectangles FM & GM seront mediaux: lesquels appliquez sur la rationelle FK, auront les autres costez FH & GH rationaux commens. en puissance seulement à FK par la 22. p. 10. en apres le quarré de AB estant au rectangle de AB, & BD, comme AB est à BD, par la 1. p. 6. elles sont incommens. en longitude, & par la 10. p.10. le quarré de AB sera incommens. au rectangle de AB & BD, & à son double GM. Item le quarré de BD est commens. au quarré de AB & par la 15. p. 10. leur total FM sera commens. au quarré de AB, auquel GM est incommens. Et par la 13. p. 10. FM & GM seront incommens. aussi seront les lignes FH & GH par la 1. p. 6. & 10. p. 10. lesquelles estant rationelles seront commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10, FG sera residu & GH sa conuenable. Par mesme discours FG se trouuera residu, & sa conuenable GI (si on maintient que DC soit bien adioustee à AD, & selon le requis) Ce qui seroit contre la 79. p. 10. Donc au residu medial AD on n'a peu adiouster autre conuenable que DB.

PROP. LXXXII.

On ne sçauroit adiouster à la ligne mineure, qu'vne seule ligne incommens. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel.

Soit adioustée à la ligne mineure AD, la ligne BD en la sorte requise: Ie dis que on n'y en pourra adiouster d'autre en la mesme sorte.

Autrement soit adioustée DC selon le requis s'il est possible: il se prouuera comme en la 79. p. 10. que les deux quarrez de AB & BD excedent autant deux fois le fois le rectangle de AB & BD, que les quarrez de AC & CD excedent deux fois le rectangle de AC & DC : & en changeant les quarrez excedent les quarrez d'vn mesme excez, que les rectangles excedent les rectangles. Or estans iceux quarrez rationaux & les rectangles mediaux, il s'ensuiura qu'vn mesme excez seroit rationel & irrationel. Donc DC n'a pas esté adiousté selon le requis.

PROP. LXXXIII.

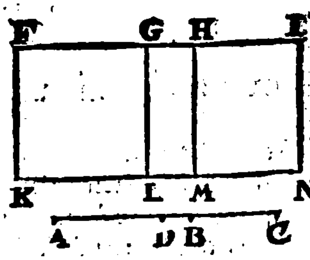
On ne sçauroit adiouster à la ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, qu'vne seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, mais le composé de leurs quarrez medial.

Soit la ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial AD, à laquelle on adiouste DB en la sorte demandée : Ie dis qu'on ny pourra adiouster vn autre en la mesme sorte.

Autrement s'il est possible soit adioustée DC selon le requis : il se prouuera comme en la precedente que les quarrez de AC, & CD, excedent les quarrez de AB & BD d'vn mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & CD excedent deux fois le rectangle de AB, & BD, sçauoir du quarré de AD : lequel comme en la precedente seroit rationel & irrationel si on pouuoit encores adiouster CD selon le requis.

PROP. LXXXIV.

On ne sçauroit adiouster à la ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial, qu'vne seule incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial.



Soit la ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial AD, à laquelle on adiouste BD en la sorte que demande la prop. Ie dis qu'on n'y en pourra adiouster vn autre en la mesme sorte.

Autrement soit adioustée DC en la sorte requise s'il est possible (apres auoir construit ainsi qu'en la 82. p. 10.) le composé des quarrez de AB & BD estant medial & incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BD aussi medial, leurs egaux rectangles FM, & GM seront mediaux & incommensurables: Et par la 22. p. 10. estans appliquez sur la rationelle FK leurs autres costez FH, & GH seront rationelles, & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. commens. en puissance seulement, (puis que leurs rectangles sont incommens.) & par la 73. p. 10. FG sera residu, auquel GH sera la conuenablement adioustée: Que si DC estoit adioustée à AD autre que BD selon le requis, on pourroit aussi adiouster au residu FG vn autre conuenable que GH, sçauoir GI: contre la 79. p. 10. Donc on ne pouuoit adiouster autre ligne conuenable à AB, sinon DB.

DEFINITIONS TROISIESMES.

Estant proposée vne ligne rationelle, & le residu: Lors que la toute composée du residu & de l'adioustée, peut plus que l'adioustée, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude.

Si la toute est commensurable à la rationelle, le residu soit residu premier.

Si l'adioustée est commensurable, la rationelle, Soit residu second.

Si ny l'vne ny l'autre n'est commensurable à la rationelle, Soit residu troisiesme.

Lors que la toute peut plus que l'adioustée, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

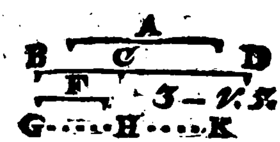
Si la toute est commensurable à la rationelle, Soit residu quatriesme.

Si l'adioustée est commensurable à la rationelle, Soit residu cinquiesme.

Si ny l'vne ny l'autre n'est commensurable à la rationelle, soit residu sixiesme.

PROP. LXXXV.

Trouuer vn residu premier.



Soient deux lignes rationelles commens. en longitude A & BD, Item soit trouué le nombre quarré GK qui puisse estre diuisé en nombre quarré KH, & non quarré HG: Et de la ligne BD soit retranché CD de laquelle le quarré soit au quarré de BD, cóme le nombre GH est au nombre GK (comme il a esté enseigné à la fin de la

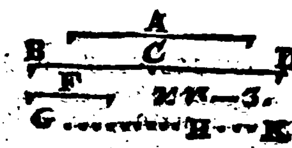
6. p. 10.) Ie dis que BC est residu premier.

Car BD estant rationelle, son quarré sera aussi rationel, & le quarré de CD qui est à iceluy comme nombre à nombre, sera aussi rationel. Et partant rationelle la ligne CD, mais d'autant qu'ils ne sont pas comme nombre quarré à nôbre quarré, les lignes rationelles BD & CD seront commens. en puissance seulement & par la 73. p. 10. BC est residu.

Ie dis d'auantage qu'il est residu premier: Car BD estant plus grande que CD elle pourra plus que CD: soit du quarré de F. Ainsi les quarrez de CD & F, seront egaux au quarré de BD: comme les deux nombres GH & HK sont egaux au seul de GK: Et par ainsi le tout quarré de BD estant au total GK, comme le retranché quarré de CD est au retranché nombre GH: par la 19. p. 5. le reste quarré de F sera au reste nombre HK, comme le tout quarré de BD est au total nombre GK: & en changeant le quarré de BD sera au quarré de F, comme GK est à HK c'est à dire comme nombre quarré est à nombre quarré: Et par la 9. p. 10. BD & F seront commens. en longitude: Ainsi la toute BD commens. en longitude à la rationelle A, peut plus que CD adioustee, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, Et par les tierces deff. BC est residu premier.

PROP. LXXXVI.

Trouuer vn residu deuxiesme.



Soient les deux rationelles commens. en longitude A & CD, & au nombre quarré GH soit adiousté HK, en sorte que GK soit à HK, comme nombre quarré à nombre quarré: mais non pas GK à GH comme nombre quarré à nombre quarré: & soit trouué BD, de laquelle le quarré soit au quarré de CD, comme GK est à GH: si d'icelle on retranche CD, ie dis que BC est residu second.

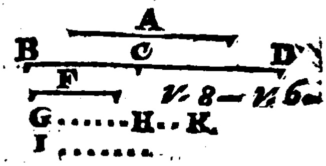
Car le quarré de la rationelle CD est au quarré de BD comme nombre à nombre, par consequent rationel, & la ligne BD rationelle: mais n'estant pas comme nombre quarré à nombre quarré, les rationelles BD & CD seront commens. en puissance seulement, par la 9. p. 10. Et par la 73. p. 10. BC sera residu.

Il se prouuera pareillement comme en la precedente que BD peut plus que CD du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Item que l'adioustee CD est commens. en longitude à la rationelle A: Et par les tierces deff. BC est residu second.

PROP. LXXXVII.

Trouuer vn residu troisiesme.

Soit la rationelle proposee A, & les nombres GK & I & apres auoir diuisé GK en GH & HK: en sorte que GK soit à HK comme nombre quarré à nombre quarré, mais non pas à GH: Et que I ne soit ny à GK ny à HG comme nombre quarré à nombre quarré: Item soit trouué BD, de laquelle le quarré soit au quarré de A, comme I est à G K: Et d'icelle soit retranchée CD, de laquelle le quarré soit au quarré de A, comme I à GH. Ie dis que BC est residu troisiesme.



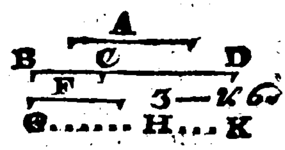
Car il est euident que puis que comme le nombre GK à I ainsi le quarré de BD à A comme I à GH ainsi le quarré de A au quarré de CD & en raison egalle comme GK à GH ainsi le quarré de BD au quarré de CD, mais GK n'est à GH comme nombre quarré à nombre quarré, & par la 9. p. 10. BD & CD seront commens. en puissance seulement, mais elles sont aussi rationelles, car leurs quarrez sont commens. à la rationelle A & par la 73. p. 10. BC est residu, ie dis dauantage qu'elle est residu troisiesme.

Car les quarrez de BD & CD ne sont pas au quarré de A comme nombre quarré est à nombre quarré, ains seulement comme les nombres GH & GK au nombre I & par la 9. p. 10. BD & CD seront incommens en longitude à la rationelle A. On prouuera aussi comme en la 85. p. 10. que BD peut plus que CD du quarré de la ligne F qui luy est commens. en longitude & par les tierces deff. BC est residu troisiesme.

PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn residu quatriesme.

Soient trouuees les deux rationelles A & BD commens. en longitude & soit trouué le nombre quarré GK diuisé en sorte que GK ne soit à GH ny à HK comme nombre quarré à nombre quarré & soit trouuee la ligne CD de laquelle le quarré soit au quarré B D comme GH est à GK, ie dis que BC est residu quatriesme.



Car il se prouuera ainsi qu'au residu premier que BC est residu. Maintenant BD estant plus grand que CD elle pourra plus que icelle soit du quarré de F & comme au residu premier comme le nombre GK à HK ainsi le quarré de BD au quarré de F, mais les deux nombres ne sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré & par la 9. p. 10. BD peut plus que CD du quarré de F qui luy est incommens. en longitude, (BD estant commens. en longitude à la rationelle) par les tierces deff. BC est residu quatriesme.

PROP. LXXXIX.

Trouuer vn residu cinquiesme.

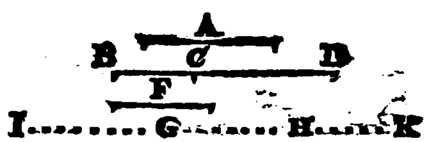
Soient trouuées les deux lignes rationelles commenſ. en longitude A & CD & au nombre quarré GH ſoit adiouſté HK en ſorte que le tout GK ne ſoit à GH ny HK comme nombre quarré à nombre quarré, & ſoit trouuée BD de laquelle le quarré ſoit au quarré de CD comme GK à GH, ie dis que BC eſt reſidu cinquieſme.

Car on prouuera comme au reſidu ſecond que BC eſt reſidu, & comme au reſidu quatrieſme que BD peut plus que CD du quarré de F qui luy eſt incommenſ. en longitude (eſtant CD commenſ. en longitude à la rationelle A) BC ſera reſidu cinquieſme par les tierces deff.

PROP. XC.

Trouuer vn reſidu ſixieſme.

Soit la rationnelle A & le nombre non quarré GK diuiſé en GH & HK en ſorte que le tout ne ſoit à ſes parties comme nombre quarré à nombre quarré, & ſoit trouué le nombre I qui ne ſoit ny à GK ny à GH comme nombre quarré à nombre quarré : Item ſoient trouuées les deux lignes BD & CD deſquelles les quarrez ſoient au quarré de la rationelle A comme les nombres G K & GH ſont à I ie dis que BC eſt reſidu ſixieſme.



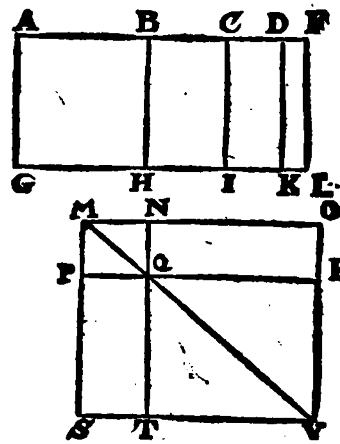
Car comme il a eſté demonſtré au reſidu troiſieſme le quarré de BD ſe trouuera au quarré de CD non comme nombre quarré à nombre quarré, & par la 9. p. 10. elles ſeront incommenſ. en longitude : mais elles ſeront rationelles eſtans leurs quarrez au quarré de la rationelle A comme nombre à nombre, ainſi elles ſeront rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 73. p. 10. BC eſt reſidu : & comme au binome quatrieſme la toute BD peut plus que l'adiouſtee CD du quarré de F qui luy eſt incommenſ. en longitude, & puis que B D & CD ſont incommenſ. en longitude à la rationelle A par les tierces deff. BC eſt reſidu ſixieſme.

SCHOLIE.

Nous auons cy-deuant enſeigné comme il falloit trouuer les ſix ſortes de binomes en nombres pour les trouuer plus facilement en lignes il en faut autant faire des reſidus. Mais les binomes eſtans trouuez on trouera aiſement les reſidus, n'eſtant reſidu autre choſe que le reſte du binome lors qu'on a ſouſtraict le plus petit nom du plus grand, Donc pour reſidu premier faut ſeulement poſer binome premier ſinon qu'au lieu + faut poſer comme 3. + $\sqrt{}$ 5. eſt binopremier 3. — $\sqrt{}$ 5. eſt reſidu premier, ainſi des autres.

PROP XCI. Six. 4.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn residu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.



Soit le rectangle AH compris de la rationelle AG & du residu premier AB: Ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Soit faicte ceste construction generalle pour toute la sixaine. Au residu AB soit adioustee la rationelle BF en sorte que AF & FB soient rationelles commens. en puissance seulement, & soit BF couppee en deux egallement au point C & apres auoir appliqué vn rectangle sur la ligne AF defaillant d'vne figure quarree, c'est à dire d'vne ligne egalle à son autre costé & egal au quart du quarré de BF qui est le quarré de CF, & soit iceluy rectangle de A D & DF: & apres auoir menees les lignes BH, CI, DK, FL, parallelles à AG, Soit continuee GH iusques en L. En second lieu soit fait le quarré MV egal au rectangle AK, & sur la diagonalle d'iceluy MV soit fait le quarré MQ egal au rectangle DL, & soient continuees les deux lignes PQR & NQT: Maintenant CF est moyenne proport. entre AD & DF par la 17. p. 6 car par hypotese le quarré de CF est egal au rectangle de AD & DF, & par la 1. p. 6. le rectangle CL sera milieu proport. entre les deux rectangles Ak & DL, il le sera aussi entre leurs egaux quarrez MV & MQ. Mais le rectangle MR est aussi milieu proport. entre iceux quarrez, cōme il est aisé de prouuer par la 1. p. 6. repetee deux fois:. Donc CL ou BI son egal, sera egal au rectangle MR, Et par consequent CK & NR (estant DL egalle à MQ) iceluy CK sera aussi egal à PT: ainsi le rectangle BK sera egal au gnomon TMR. Mais tout le quarré MV est egal au rectangle AK: Partant le rectangle AH sera egal au quarré QV. Ie dis que la ligne QR qui peut le rectangle AH est residu. Soit ceste construction generalle à la toute sixaine.

Car puis que AB est residu premier, les deux lignes A F & BF sont rationelles commens. en puissance seulement estant la toute AF commens. en longitude à la rationelle AG, & pouuant plus que l'adioustee BF du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: Et par la 17. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AD, & DF commens. en longitude, & par la 15. p. 10. Il seront commens. en longitude à la totalle AF: laquelle estans commens. en longitude à la rationelle AG, par la 12. p. 10. AF, AD, DF, AG seront toutes rationnelles commens. en longitude, & par la 19. p. 10. les rectangles AK & DL seront rationaux. & leurs egaux quarrez MV & MQ aussi rationaux, & les lignes PR, & P Q rationelles.

Pareillement les deux lignes BC & CF estans egalles & commens. elles le seront aussi à leur toute BF par la 15. p. 10. Laquelle BF estans rationelle, BC & CF seront aussi rationelles commens. en puissance seulement à AG comme leur toute BF, & par la 21. p. 10. leurs rectangles BI & CL seront mediaux. Mais le rectangle MR est egal au medial CK, partant aussi medial & incommens. au quarré rationel MQ. Et par la 1. p. 6. leurs costez PQ & PR seront incommens. en longitude, & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. QR est residu.

PROP. XCII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn residu second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.

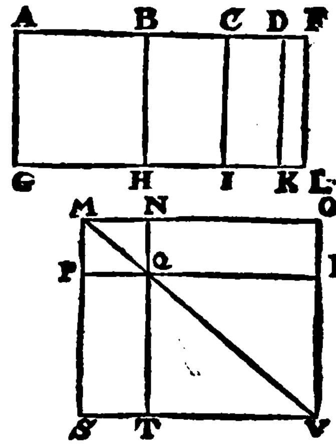
Soit le rectangle AH, compris du residu second AB, & de la rationelle AG: Je dis (apres auoir construict comme en la 91. p. 10.) que la ligne QR qui peut iceluy rectangle est residu medial premier.

Car puis que AB est residu second, les deux lignes AF & BF sont rationelles commensurables en puissance seulement, estant l'adioustée BF commensurable en longitude à la rationelle AG, & AF peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: & par la 17. p. 10. Le rectangle defaillant aura les deux costez AD & DF commens. en longitude, & par la 15. p. 10. ils seront aussi commensurables à la totalle AF, & par la 13. p. 10. icelle totalle estant incommens. en longitude à la rationelle AG, aussi seront AD, & DF qui sont rationelles: car elles sont commens. à leur totalle qui est rationelle) commens. en puissance seulement à la rationelle AG, & par la 21. p. 10. les rectangles AK, & DL seront mediaux, partant mediaux leurs egaux quarrez MV & MQ, & leurs costez RP, PQ seront lignes medialles.

Pareillement BF estant commens. en longitude à la rationelle AG, aussi sera sa moitié CF, & par la 19. p. 10. le rectangle CL sera rationel: partant aussi rationel son egal rectangle MR compris des deux medialles PQ & PR, lesquelles sont incommens. en longitude) autrement leur rectangle seroit medial par la 24. p. 10.) & par la 74. p. 10. QR est residu medial premier.

PROP. XCIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, & d'vn residu troisiesme, la ligne pouuant iceluy rectangle, est residu medial second.



Soit le rectangle AH, compris du residu troisiesme AB; & de la rationelle AG (apres auoir construit comme en la 91. p. 10.) Ie dis que la ligne QR qui peut iceluy rectangle, est residu medial second.

Car puis que AB est residu troisiesme, les lignes AF & BF sont rationelles commens. en puissance seulemét entre elles, & à la rationelle AG: mais AF peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude, & par la 17. p. 10. AD & DF seront commens. en longitude, & à leur totalle par la 15. p. 10. Et seront rationelles comme icelle: Mais AF est commens. en puissance seulement à la rationelle AG, & par la 13. p. 10. AD & DF seront cómensurable en puissance seulement à AG: Et par la 21. p. 10. les rectangles AK & DL seront mediaux: aussi mediaux leurs egaux quarrez MV & MQ, & leurs costez PR & PQ seront lignes medialles.

Pareillement BF estant incommens. en longitude à la rationelle AG, aussi sera sa moitié CF par la 13. p. 10. Et par la 21. p. 10. CF estant rationelle comme sa double BF, le rectangle CL sera medial, partant aussi medial son egal MR compris des deux medialles commens. en puissance seulement PR, & PQ (car leurs quarrez sont commensur. estans leurs egaux rectangles commens.) & ne sçauroient estre commens. en longitude, car il faudroit par la 1. p. 6. que MQ & MR fussent aussi commensurable, & par consequent leurs egaux rectangles CK & DL, ce qui n'est pas, & par la 75. p. 10. QR est residu medial second.

PROP. XCIIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, & d'vn residu quatriesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Mineure.

Soit le rectangle AH compris de la rationelle AG, & du residu quatriesme AB (apres luy auoir adiousté sa conuenable & construit comme en la 91. p. 10.) Ie dis que la ligne QR qui peut iceluy rectangle est ligne mineure.

Car puis que AB est residu quatriesme AF & BF sont rationelles commens. en puissance seulement, & AF qui est commens. en longitude à la rationelle AG, peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par la 18. p. 10. AD & DF seront incommens. en longitude: par la 1. p. 6. les rectangles AK & DL seront incommens. aussi seront leurs egaux quarrez MV & MQ. Partant les lignes PR & PQ seront incommens. en puissance: Mais AF estant commensurable en longitude à la rationelle AG, par la 21. p. 10. le rectangle AL.

gle AL sera rationel: Partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarrez MV & MQ. Pareillement BF estant commensurable en puissance seulement à AG, le rectangle BL sera medial par la 21. p. 10. aussi sera sa moitié CL, & par consequent son egal MR sera medial: partãt les deux lignes PR, & PQ qui comprénent iceluy rectangle, medialles (estans incommens. en puissance) & le composé de leurs quarrez estant rationel par la 76. p. 10. QR est ligne mineure.

PROP. XCV.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn residu cinquiesme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

Soit le rectangle AH, compris du residu cinquiesme AB & de la rationelle AG (apres auoir construit comme en la 91. p. 10.) Ie dis que QR est ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

Car puis que AB est residu cinquiesme, les lignes AF, & BF sont rationelles commensurables en puissance seulement, BF est commensurable en longitude à la rationelle AG, & AF peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, & par la 18. p. 10. Les lignes AD & DF sont incommensurables en longitude, & comme en la precedente PR, & PQ seront incommens. en puissance. Mais AF estant incommens. en longitude à la rationelle AG, le rectangle AL sera medial par la 21. p. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarrez MV & MQ.

Pareillement BF estant commens. en longitude à la rationelle AG, par la 19. p. 10. le rectangle BL sera rationel, aussi sera sa moitié CL, & son egal MR compris de deux lignes incommensurables en puissance PR, & PQ, desquelles les quarrez assemblez font vn tout medial, & par la 77. p. 10. QR. sera ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

PROP. XCVI.

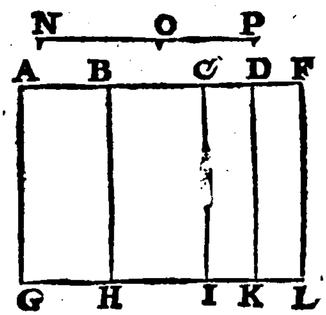
Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn residu sixiesme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

Soit le rectangle AH, compris du residu sixiesme AB & de la rationelle AG (apres auoir construit comme en la 91. p. 10. Ie dis que QR est ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

Car puis que AB est residu sixiesme, AF & FB sont rationelles commensurables en puissance seulement entre elles, & à la rationelle AG, AF pouuant plus que FB du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, Et par la 18. p. 10 AD & DF seront incommensurable en longitude: Et comme aux deux precedentes PR & PQ seront incommensurables en puissance, & tout ainsi qu'en la precedente le rectangle AL estant medial, le composé de leurs egaux quarrez MV & MQ sera medial: Item BF estant commensurable en puissance seulement à AG rationelle, le rectangle BL sera medial, aussi sa moitié CL & son egal MR, lequel estant compris des deux lignes PR & PQ incommensurable en puissance, desquelles les quarrez ensemble font vn tout medial incommensurable à leur rectangle MR aussi medial, par la 78. p. 10. QR est ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial. On prouuera l'incommensurance du composé des quarrez & du rectangle medial, par l'incommensurance en longitude des lignes AF & CF.

PROP. XCVII. Six. 5.

Le quarré d'vn residu apliqué sur vne rationelle, fait l'autre costé residu premier.



Soit le residu NO, & sur la rationelle AG soit appliqué le rectangle AH egal au quarré de NO: Ie dis que l'autre costé AB est residu premier.

Soit faicte ceste construction generalle pour toute la sizaine, sçauoir à NO soit adioustée sa conuenable OP, & sur la rationelle AG soit basty le rectangle AK egal au quarré de NP, & DL egal au quarré de OP: mais AH est egal au quarré de NO: & par la 7. p. 2. BL sera egal à deux fois le rectangle de NP & PO. Partant BF estant coupée en deux egallement en C, & la parallelle CI estant menée: CL sera egalle au rectangle de NP & PO: lequel estant moyen proportionel entre les quarrez de NP & PO (comme il a esté demonstré aux precedentes) CL sera aussi moyen proport. entre les rectangles AK & DL (qui sont egaux à iceux quarrez) & par la 1. p. 6. CF sera moyenne proport. entre AD & DF: & le quarré d'icelle sera egal au rectangle de AD & DF qui est le quart du quarré de BF. Il faut donc monstrer que BA est residu premier.

Car puis que NO est residu, & qu'on luy a adiousté sa conuenable OP, NP & PO sont rationelles commens. en puissance seulement, & leurs quarrez seront rationaux, aussi rationel sera le rectangle AL qui leur est egal: & par la 20. p. 10. le costé AF sera rationel commens. en longitude à la rationelle AG. Item par la 21. p. 10. le rectangle de PO & NP est medial, partant son double BL sera aussi medial, & par la 22. p. 10. BF sera rationelle commens. en puissance seulement à AG. Mais les deux rectangles AL & BL sont incommens. car l'vn est rationel, l'autre medial) & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les lignes AF & BF sont rationelles commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. AB sera residu. Ie dis d'auantage qu'il est residu premier.

Car les quarrez de NP & PO sont commens. aussi le seront leurs egaux rectangles AK, & DL, & les lignes AD & DF seront commens. en longitude, qui sont les costez d'vn rectangle defaillant d'vne figure quarrée, egal au quart du quarré de BF: & par la 17. p. 10. AF (laquelle desia est commens. en longitude à la rationelle AG) pourra plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: & par les tierces deff. AB est residu premier.

PROP. XCVIII.

Le quarré d'vn residu medial premier, apliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé residu second.

Soit le residu medial premier NO, duquel le quarré soit appliqué sur la rationelle AG: Ie dis que l'autre costé AB est residu second.

Car (apres auoir faict mesme construction qu'en la 97. p. 10.) puis que NO est residu medial premier, NP & PO sont medialles commens. en puissance seulement comprenant vn rectangle rationel, partant leurs quarrez seront aussi mediaux, & leurs egaux rectangles AK & DL mediaux & commens. (puis que leurs egaux quarrez sont commens. car les lignes NP & PO sont commens. en puissance) & par la 15. p. 10. & ce qui resulte de la 24. p. 10. le total AL est medial, & par la 22. p. 10. AF sera rationelle commens. en puissance seulement à AG. & d'autant que le rectangle de NP & PO est rationel, son double BL sera aussi rationel: & par la 20. p. 10. BF sera rationel commens. en longitude à AG rationelle, & les deux rectangles AL, & BL estans incommens. (car l'vn est rationel l'autre medial) les rationelles AF & FB seront commens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. AB sera residu. Mais l'adioustee BF est commens. en longitude à la rationelle AG: & si on prouuera de mesme qu'en la precedente que AF peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & par les tierces deff. AB est residu second.

PROP. XCIX.

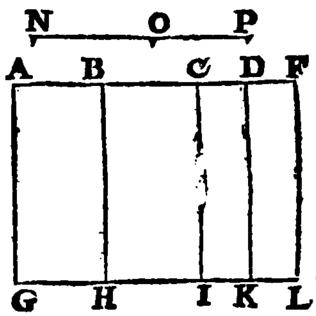
Le quarré d'vn residu medial second, appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé residu troisiesme.

Soit le residu medial second NO, duquel le quarré soit appliqué sur la rationelle AG: Ie dis que l'autre costé AB est residu troisiesme.

Car (apres auoir construit comme en la 97. p. 10.) puis que NO est residu medial second, NP & PO sont medialles commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & leurs quarrez seront mediaux & commens. & partant leurs egaux rectangles AK & DL mediaux & commens. & par la 15. p. 10. le total AL sera aussi medial, & par la 22. p. 10. son autre consté AF sera rationel commens. en puissance seulement à la rationelle AG (sur laquelle il est appliqué (Item le rectangle de NP & PO estant medial, aussi sera son double BL, & par la 21. p. 10. BF sera rationelle commens. en puissance seulement à la rationelle AG: Et puis que NP & PO sont incommens. en longitude, le quarré de NP sera incommens. au rectangle de NP & PO par la 1. p. 6. & 10. p. 10. partant aussi à son double BL: Mais il est aussi commens. au quarré de OP, & par la 15. p. 10. Les deux ensemble, ou l'esgal rectangle AL, sera incommens. à BL, & par consequent les lignes rationelles AF & BF seront commens. en puissance seulement & par la 73. p. 10. AB sera residu. Mais ny AF ny BF ne sont cōmens. en longitude à la rationelle AG, & si on prouuera comme à la 97. p. 10. que AF peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: Et par les tierces deff. AB est residu troisiesme.

PROP. C.

Le quarré d'vne ligne mineure, appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé residu quatriesme.



Soit la ligne mineure NO, de laquelle le quarré soit appliqué sur la rationelle AG, ie dis que l'autre costé est residu quatriesme.

Car (apres auoir construit comme en la 97. p. 10.) puis que NO est ligne mineure, les lignes NP & PO sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel: partant le rectangle AL est rationel, & BL medial par le discours des precedentes: & par la 20. p. 10. AF sera rationelle commens. en longitude à la rationelle AG, & BF par la 22. p. 10. sera rationelle commens. en puissance seulement à AG: & puis que AL est rationel & BL medial, ils seront incommens. & partant les rationelles AF & BF seront commens. en puissance seulement: & par la 73. p. 10. AB sera residu.

Dauantage il est residu quatriesme. Car puis que les lignes NP & PO sont incommens. en puissance, leurs quarrez seront incommens. Aussi incommens. leurs egaux rectangles AK & DL, & par consequent incommens. les lignes AD & DF costez du rectangle defaillāt d'vne figure quarree egale au quarré de FC, & par la 18. p. 10. AF (qui est commens. en longitude à la rationelle) peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude: & par les tierces deff. AB est residu quatriesme.

PROP. CI.

Le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie rationelle

vn tout medial, apliqué ſur vne ligne rationelle, faict l'autre coſté reſidu cinquieſme.

Soit la ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial NO, de laquelle le quarré ſoit appliqué ſur la rationelle AG: Ie dis que l'autre coſté AB eſt reſidu cinquieſme.

Car (apres auoir conſtruit comme en la 97. p. 10.) puis que NO eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, les deux lignes NP & PO ſont incommenſurable en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel & le compoſé de leurs quarrez medial: partant le rectangle AL ſera medial, & BL rationel, & par la 22. p. 10. AF ſera rationelle, & par la 20. p. 10. BF ſera auſſi rationelle, mais commenſurable en longitude à la rationelle AG: Item les rectangles AL & BL eſtans incommenſurables (car l'vn eſt rationel, l'autre medial) les rationelles AF & BF ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement, & par la 73. p. 10. AB ſera reſidu. Mais BF eſtant commenſurable en longitude à la rationelle AG, & ſi comme en la precedente on prouuera que AF peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & par les tierces deff. AB eſt reſidu cinquieſme.

PROP. CII.

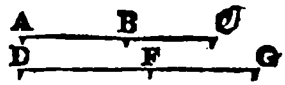
Le quarré d'vne ligne faiſant auec vne ſuperficie medialle vn tout medial, apliqué ſur vne ligne rationelle, fait l'autre coſté reſidu ſixieſme.

Soit la ligne declarée en la prop. NO, de laquelle le quarré ſoit appliqué ſur la rationelle AG: Ie dis que l'autre coſté eſt reſidu ſixieſme.

Car (apres auoir conſtruit comme en la 97. p. 10.) puis que NO eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie medialle vn tout medial, les deux lignes NP & PO ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, incommenſurable au compoſé de leurs quarrez auſſi medial: partant les deux rectangles AL & BL ſont mediaux & incommenſurable, & par la 22. p. 10. AF & BF ſeront rationelles incommenſurable en longitude entre elles, & à la rationelle AG: & par la 73. p. 10. AB ſera reſidu: Et ſi encores AF peut plus que BF du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude (ce qu'on peut prouuer comme en la 100. p. 10.) & par les tierces deff. AB eſt reſidu ſixieſme.

PROP. CIII. Six. 6.

La ligne commenſurable en longitude à vn reſidu, eſt auſſi reſidu, & de meſme ordre.



Soit la ligne DF, commensurable en longitude au residu AB: Ie dis que DF est residu de mesme porre que AB.

Qu'il ne soit ainsi. Soit à AB residu adjoustée sa conuenable BC, & soit trouuée FG laquelle soit à DF comme BC est à AB: & en changeant comme AB à BF, ainsi BC à FG, & par la 12. p.5. les antecedentes ensemble AB & BC sont aux consequentes ensemble DF & FG, comme AB est à DF ou BC à FG: & par la 10. p.10. comme AB est commens. en longitude à DF, ainsi AC à DG & BC à FG. Et en changeant comme AC à BC, ainsi DG à FG. Soit ceste construction & demonstration generalle pour toute la sixaine.

Maintenant comme AC & BC sont rationelles aussi seront DG & FG (car elles sont commensurables à icelles par la 10. p. 10.) Mais AC & BC sont commensurables en puissance seulement, partant DG & FG seront rationelles com mens. en puissance seulement, & par la 73. p. 10. DF est residu.

Ie dis d'auantage qu'il est residu de mesme ordre que AB. Car la ligne AC peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude, si commensurable, aussi DG pourra plus que FG de mesme façon par la 14. p. 10. (estans les quatres lignes proport.) que si AC est commens. en longitude à vne rationelle proposée, aussi DG qui luy est commẽsurable en longitude sera commensur. en longitude à la mesme rationelle proposée par la 12. p. 10. & AB & DF seront residus premiers. Si BC est commensurable en longitude à la rationelle, aussi sera FG: & AB & DF seront residus seconds: si AC & BC sont incommensurables en longitude à la rationelle: aussi seront DG & FG: & AB & DF seront residus troisiesmes. Que si AC peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, aussi DG pourra plus de mesme que FG par la 14. p. 10. & si AC est commensurable en longitude à la rationelle, aussi sera DG: & AB & DF seront residus quatriesmes. Si BC est commensurable en longitude à la rationelle, aussi sera FG: & AB & DF seront residus cinquiesmes. Si AC & BC sont incommensurable en longitude à la rationelle, aussi seront DG & FG: Partant AB & DF seront residus sixiesmes: par ainsi DF est residu de mesme ordre que AB.

PROP. CIIII.

La ligne commensurable à vn residu medial, est aussi residu medial de mesme ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial AB, ie dis qu'elle est aussi residu medial, & de mesme ordre.

Qu'il ne soit ainsi. Soit faicte mesme construction qu'en la 103. p. 10. Donc AC & BC seront commensurables à DG, lesquelles sont medialles commensurables en puissance seulement, & par la 24. p. 10. DG & FG seront medialles commenſurables enpuiſſance ſeulement, par la 10. p. 10. Et partant DF eſt reſidu medial : ie dis d'auantage qu'il eſt de meſme ordre.

Car le quarré de AC eſt au rectangle de AC & BC comme AC à BC: Item le quarré de DG eſt auſſi au rectangle de DG & FG comme DG eſt à FG, par la 1. p. 6. Mais le quarré de AC eſt commenſ. au quarré de DG eſtant AC & DG commenſ. Et par la 10. les deux rectangles ſeront auſſi commenſ. Que comme l'vn ſera rationel ou medial, auſſi l'autre ſera rationel ou medial : partant ſi les rectangles ſont rationaux, AB & DF ſeront reſidus mediaux premiers : ſi les rectangles ſont mèdiaux, AB & DF ſeront reſidus mediaux ſeconds.

PROP. CV.

La ligne commenſurable à vne ligne mineure, eſt auſſi ligne mineure.

Soit la ligne DF, commenſ. à la ligne mineure AB : Ie dis qu'elle eſt auſſi ligne mineure. (Car ſi on faict conſtruction & demonſtration ſemblable à la 103. p. 10.) AC & BC ſeront incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel. Mais cõme AC à CB ainſi DG à FG, & par la 10. p. 10. DG & FG ſeront incommenſ. en puiſſance. Item puis que comme AC à BC ainſi DG à FG, par la 22. p. 6. leurs quarrez ſeront proportionaux : Et par la 12. p. 5. les deux antecedens quarrez de AC & CB enſemble, ſeront aux deux conſequens quarrez de DG & FG enſemble, comme celuy de BC eſt à celuy de FG : leſquelles ſont commenſ. (car les lignes BC & FG ſont commenſ. comme AB & DF) & partant le compoſé des quarrez de AC & BC (lequel eſt rationel) ſera commenſurable au compoſé des quarrez de DG & FG: lequel ſera auſſi rationel. Pareillement d'autant que comme nous auons dit à la prop. precedente, comme le quarré de AC au rectangle de AC & CB, ainſi le quarré de DG au rectangle de DG & GF, & en changeant comme le quarré au quarré, ainſi le rectangle au rectangle : c'eſt à dire commenſ. Car les lignes AC & DG ſont commenſ. par la 10. p. 10. & par la 24. p. 10. le rectangle de AC & BC eſtant medial, celuy de DG & FG ſera auſſi medial : partant DG & FG eſtãt incommenſ. en puiſſance comprenant vn rectangle medial & le compoſé de leurs quarrez rationel DF ſera ligne mineure.

PROP. CVI.

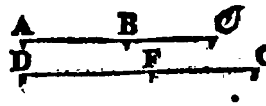
La ligne commenſurable à vne ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, eſt auſſi ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial.

Soit la ligne DF commenſ. à la ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial AB. Ie dis que DF eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial.

Car (apres auoir construit comme aux precedentes) comme AC à CB ainsi DG à FG : Mais AC & BC sont incommens. en puissance, aussi seront DG & GF (& comme en la precedente il a esté demonstré le composé des quarrez de AC & BC estoit commens. au composé des quarrez de DG & GF & que le rectangle de AC & CB estoit commensurable au rectangle de DG & GF, le composé des quarrez de AC & CB estant medial & leur rectangle rationel, aussi le composé des quarrez de DG & GF sera medial & leur rectangle rationel : par consequent AF est ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

PROP. CVII.

La ligne commensurable, à la ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial, est aussi ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

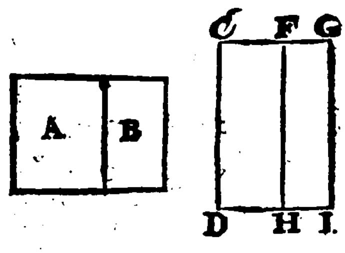


Soit la ligne DF commens. à la ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial AB: Ie dis que DF est aussi ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

Car (apres auoir construict comme aux precedentes, & monstré que DG & FG sont incommensurables en puissance) on monstrera que le composé des quarrez de AC & BC est commensurable aux composé des quarrez de DG & GF & le rectangle de AC & BC commensurable au rectangle de DG & FG : Mais le rectangle de AC, & CB est medial & incommensurable au composé des quarrez de AC & CB aussi medial : partant le rectangle de DG & GF sera medial & incommensurable au composé des quarrez de D G & FG aussi medial: & DF sera ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

PROP. CVIII.

Si d'vne superficie rationelle, on retrâche vne superficie medialle, la ligne qui peut le reste est residu, ou ligne mineure.



Soit la superficie rationelle AB, de laquelle on retranche la medialle A : Ie dis que la ligne qui peut le reste B est residu ou ligne mineure.

Qu'il ne soit ainsi. Sur la rationelle CD soit basti CH egal à A, & FI egal à B. Il est euident que CI sera rationel & par la 20.p.10. son autre costé CG sera rationel commens. en longitude à CD. Item par la 22. p. 10. CH estant medial CF sera rationelle cômensurable en puissance seulement à CD. & par la 13.p.10. CG & CF seront ratio-

nelles

nelles commensurable en puissance seulement & par la 73. p. 10. FG sera residu. Maintenant CG peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy est commens. ou incommensurable en longitude : Si commensurable GF sera residu premier, & la ligne qui peut iceluy rectangle ou son egal B est residu par la 91. p. 10. Si incommens. GF est residu quatriesme, & la ligne qui peut iceluy rectangle (ou son egal B) est ligne mineure par 94. p. 10.

PROP. CIX.

Si d'vne superficie medialle on retranche vne superficie rationelle, la ligne qui peut le reste, est residu medial premier, ou ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

Soit comme dessus la superficie medialle AB, de laquelle on retranche la rationelle A. Ie dis que la ligne qui peut le reste B (apres auoir construict comme en la precedente) ou son egalle FI est residu medial premier, ou ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

Car puis que la superficie totalle AB est medialle, aussi la totalle CI est medialle, & par la 24. p. 10. le costé CG est rationel commens. en puissance seulement à la rationelle CD. Item puis que le retranché A est rationel aussi sera son egal CH, & par la 20. p. 10. CF sera rationelle commensurable en longitude à la rationelle CD : & par la 13. p. 10. CG & CF seront rationelles commensurable en puissance seulement, & par la 73. p. 10. FG sera residu. Mais à cause que CG peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude : FG sera residu second ou residu cinquiesme. Si residu second, la ligne qui peut le rectangle FI est residu medial premier par la 92. p. 10. si residu cinquiesme la ligne qui peut le rectangle FI, est la ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial par la 95. p. 10.

PROP. CX.

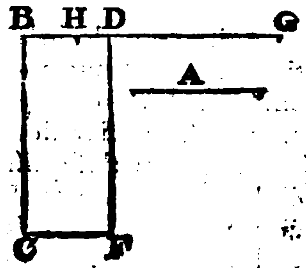
Si d'vne superficie medialle, on retranche vne superficie medialle incommensurable à la toute la ligne qui peut le reste est tout residu medial second, ou ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

Soit la superficie medialle AB, de laquelle on retranche la superficie medialle A incommensurable à la toute AB. Ie dis que la ligne qui peut le reste, est residu medial second, ou ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

Soit faicte construction comme aux precedentes. Les rectangles CH & CI seront mediaux & incommensurable entre eux : & par la 22. p. 10. & 1. p. 6. Les lignes CG & CF seront rationelles & incommensurables en longitude entre elles, & à la rationelle CD: & par la 73. p. 10. FG sera residu. Maintenant FG sera residu troisiesme ou residu sixiesme comme aux precedentes (à cause que la plus grande ligne peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude) s'il est residu troisiesme, la ligne qui peut [illegible]ctangle FI (ou B son egal) est residu medial second par la 93. p. 10. Si FG est residu sixiesme, la ligne que peut le rectangle FI (ou son egal B) par la 96. p. 10. est ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

PROP. CXI.

La ligne appellée residu, n'est pas la mesme que Binome.



Soit le residu A. Ie dis qu'elle n'est pas mesme ligne que Binome:

Autrement soit la rationelle BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle BF egal au quarré du residu A, par la 97. p. 10. BD sera residu premier: auquel si on adiouste sa conuenable DG, BG & DG, seront rationelles commẽsurables en puissance seulement, & BG commensurable en longitude à la rationelle BC.

Maintenant si on pose A estre Binome, BD sera Binome premier par la 60. p. 10. lequel estant diuisé en ses noms au point H, (estant BH le plus grand nom) BH & HD seront rationelles commensurable en puissance seulement, & BH commensurable en longitude à la rationelle BC, & par la 12. p. 10. BG & BH, seront commensurables en longitude, & par la 15. p. 10. HG sera aussi commensurable en longitude à BG: partant aussi rationelle comme icelle BG. Mais DG qui est aussi rationelle n'est commensurable en longitude à BG, & par la 13. p. 10. HG & DG sont rationelles commensurables en puissance seulement, & par la 73. p. 10. HD est irrationelle, ce qui est absurde car elle a esté prouuée tantost rationelle au Binome) donc le residu sera different du Binome.

SCHOLIE.

La ligne appellée residu, & les cinq sortes de lignes irrationelles suiuantes, sont differentes de la medialle, & entre elles. Car

Le quarré de la medialle appliqué sur vne ligne rationelle, faict l'autre costé rationel par la 22. p. 10.

Le quarré du residu, fait l'autre costé residu premier.

Le quarré du residu medial premier, fait l'autre costé residu second.

Le quarré du residu medial second, fait l'autre costé residu troisiesme.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre costé residu quatriesme.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, fait l'autre costé residu cinquiesme.

Le quarré de la ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial, fait l'autre costé residu sixiesme.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens: les lignes qui les peuuent seront aussi differentes. Mais les quarrez des Binomes, & des cinq lignes irrationelles suiuantes, estans appliquez sur vne ligne rationelle font l'autre costé Binome de quelque ordre : partant le Binome & les cinq suiuantes sont differentes du residu, & des cinq suiuantes.

Ainsi toutes les lignes irrationelles cy deuant dictes, sont treize.

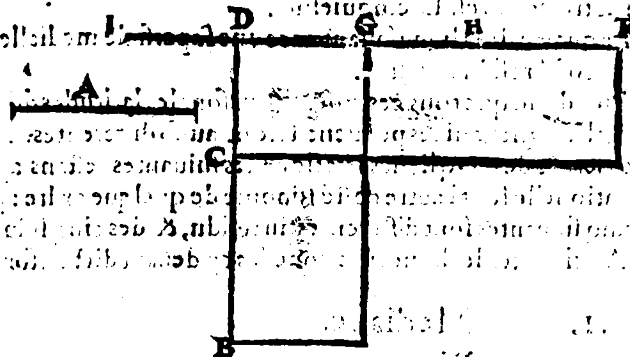
.1. Medialle.
.2. Binome.
.3. Bimedialle premiere.
.4. Bimedialle seconde.
.5. Ligne Maieure.
.6. Ligne pouuant vn rationel & vn medial.
.7. Ligne pouuant deux mediaux.
.8. Residu.
.9. Residu medial premier.
.10. Residu medial second.
.11. Ligne Mineure.
.12. Ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.
.13. Ligne faisant auec vne superficie medialle vn tout medial.

PROP. CXII.

Le quarré d'vne ligne rationelle, estant appliqué sur vn binome, faict l'autre costé residu, les noms duquel sont proportionaux & commensurables aux noms du Binome : en outre le residu est de mesme ordre que le Binome.

Sur le binome DB, soit appliqué le rectangle BG egal au quarré de la rationelle A. Ie dis que l'autre costé DG est residu tel que dit la proposition.

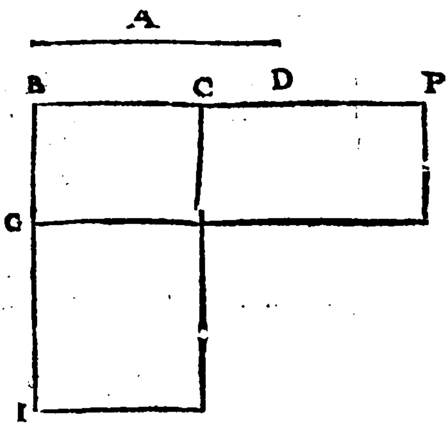
Qu'il ne soit ainsi (apres auoir diuisé le binome BD en ses noms au poinct C) sur le plus petit nom CD soit appliqué le rectangle CF egal aussi au quarré de la rationelle A: & les deux rectangles BG & CF seront egaux, & par la 14. p. 6. leurs costez serōt reciproques, sçauoir que comme BD à DC ainsi FD à DG: & en diuisant par la 18. p. 5. comme BC à CD, ainsi FG à GD, & par la 14. p. 5. comme BC est plus grande que CD, ainsi FG sera plus grande que GD. Maintenant de FG soit retranché GH egalle à GD, & soit faicte comme FH à HG, ainsi GD à DI, par la 12. p. 6. & en composant par la 17. p. 5. comme FG à GH (ou GD son egalle) ainsi GI à ID, & par la 12. p. 5. les deux antecedent FGI seront aux deux consequens GDI comme l'vn des antecedens GI à l'vn des consequens ID, & les trois lignes FI, GI, DI, seront continuellement proportionnelles en la raison de FG à GD ou BC à CD; & par la 22. p. 6. & 10. p. 10. comme le quarré de BC est commensurable au quarré de CD, ainsi que le quarré de GI sera commensurable au quarré de DI, & par la 20. p. 6. & 10. p. 10. ID sera commensurable en longitude à la troisiesme proportionelle IF, & par la 15. p. 10. ID & DF seront commensurables en longitude. Et d'autant que le rectangle CF est rationel (estant egal au quarré de la ligne rationelle A) & DC ligne rationelle, DF sera aussi ligne rationelle commens. en longitude à CD, par la 20. p. 10. Et ID sera aussi rationelle commensurable en longitude à CD, par la 12. p. 10. & par la 10. p. 10. comme DC & CB sont rationelles commensurables en puissance seulement, aussi ID & IG seront rationelles cōmensurables en puissance seulement, & par la 73. p. 10. DG sera residu, duquel les noms ID & IG sont proportionaux & commensurables aux noms du binome BC & CD, par la 14. p. 10. d'autant qu'en changeant on trouuera CD commensurable en longitude à ID, & par consequent IG à CB.



Pour prouuer que le residu est de mesme ordre que le binome, les noms de l'vn estans proportionaux & commensurables aux noms de l'autre, par la 15. p. 10 comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable ou incommensurables en longitude, le plus grand nom du residu pourra plus de mesme: Que si le plus grand nom du binome est commensurable en longitude à la rationelle, aussi sera le plus grand du residu: & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commensurable en longitude à la rationelle, aussi sera le plus petit du residu, & ils seront binome & residu second, & ainsi des autres.

PROP. CXIII.

Le quarré d'vne ligne rationelle, estant appliqué sur vn residu, faict l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux, & commensurables aux noms du residu: En outre le binome est de mesme ordre que le residu.



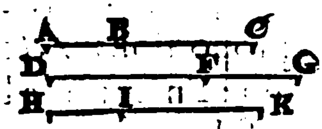
Sur le residu BG soit descrit le rectangle GP egal au quarré de la rationelle A: Ie dis que l'autre costé BP sera binome tel que demande la proposition.

Qu'il ne soit ainsi. Au residu BG soit trouuee sa conuenable GI, & sur BI, soit descrit le rectangle IC egal au quarré de la rationelle A: les rectangles CI & GP seront egaux, & ayans les costez reciproques par la 14. p. 6. PB sera à BC comme IB à BG, le tout au tout, comme le retranché, au retranché & par la 19. p. 5. le reste PC sera au reste GI, comme le tout BP au tout BI, & en changeant cóme BI à IG ainsi BP à PC. Maintenant soit faicte PD à DC cóme PB à PC par la 10 p. 6. sçauoir comme le tout BP est au tout CP, ainsi le retranché PD au retranché DC, par la 19. p. 5. Aussi le reste BD sera au reste DP, comme le retranché DP est au retranché DC: Ainsi DP sera moyenne proportionelle entre BD & DC, & par la 20. p. 6. BD sera à DC, comme le quarré de BD est au quarré de DP, ou le quarré de IB au quarré de IG par la 22. p. 6. (car le reste BD est au reste DP comme le tout BP est au tout CP: & BP est à CP, comme BI est à IG) Or les quarrez de BI & IG estans commensurables, aussi les quarrez de BD & DP seront commensurables, aussi par la 10. p. 10. BD & DC seront commensurables en longitude, & par 15. p. 10. BC & BD seront commensurables en longitude: mais BC estant rationelle par la 20. p. 10. (car IC est rectangle rationel appliqué sur BI ligne rationelle) BD sera aussi rationelle. Pareillement puis que BD est à DP cóme BI à IG, aussi par la 10. p. 10. BD & DP, seront rationelles commensurables en puissance seulement: Et par la 36. p. 10. BP est binome, duquel les noms sont proportionaux & commensurables aux noms du residu. Et si on prouuera comme en la precedente qu'il est de mesme ordre que le residu.

PROP. CXIIII.

Le rectangle compris d'vn residu & d'vn binome, des-

quels les noms sont proportionaux & commensurables, est rationel.

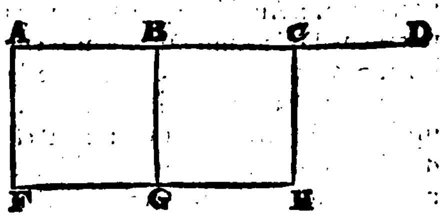


Soit le residu AB, duquel les noms AC & CB sont proport. & commensurables aux noms DF & FG du binome DG : Ie dis que le rectangle compris du binome DG & du residu AB est rationel.

Qu'il ne soit ainsi. Sur le binome DG soit appliqué vn rectangle rationel faisant l'autre costé HI : il est euident par la 112. p. 10. que HI est residu, duquel les noms HK & KI sont commensurables aux noms du binome DG : & par la 11. p. 5. ils seront aussi proport. & commensf. aux noms du residu AB. Ainsi AC sera commensf. à HK & BC à IK, & par la 19. p. 5. & 10. p. 10. le reste AB sera commensurable au reste HI. Mais iceux rectangles de AB & DG, de HI & DG estans de mesme hauteur sont l'vn à l'autre comme leurs bases AB & HI par la 1. p. 6. lesquelles estans commensf. les rectangles seront aussi commensf. Et l'vn d'iceux estant rationel, l'autre sera aussi rationel. Ainsi il est euident qu'vn rectangle rationel peut estre compris de lignes irrationelles, & si la ligne qui pourra iceluy sera rationelle.

PROP. CXV.

De la ligne medialle naissent infinies lignes irrationelles, toutes differentes des deuant dictes.

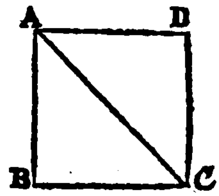


Soit la ligne medialle AB, ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationelles toutes differentes des deuant dictes.

Car si sur l'extremité de la medialle on meine la perpendiculaire AF qui soit rationelle, il faudra que le rectangle AG soit irrationel : Autrement s'il estoit rationel par la 20. p. 10. AB seroit aussi rationel, que nous auons posé medial & la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationelle, soit icelle BC : laquelle sera differente de toutes les deuant dictes. Car son quarré appliqué sur vne ligne rationelle comme AF, fait l'autre costé AB medial : Ce que ne faisoit pas vne des deuant dictes. Item si on accomplit le rectangle BH il sera aussi irrationel, & la ligne qui le peut irrationelle : laquelle sera differente de toutes les deuant dictes : Car le quarré de pas vne des deuant dictes appliqué sur vne ligne rationelle, ne faict l'autre costé tel que BC. Soit donc icelle ligne pouuant CD : & de ceste façon on peut proceder à l'infiny.

PROP. CXVI.

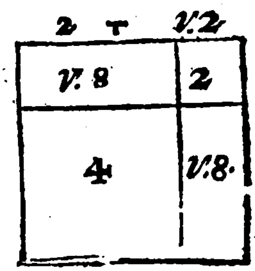
Au quarré la diagonalle est au costé incommensurable en longitude.



Soit le quarré AC. Ie dis que la diagonalle AC est incommensurable en longitude au costé AB.

Car par la 47. p.1. le quarré de AC est double du quarré de AB : mais toute grandeur double d'vne autre est comme 4. à 8. Donc le quarré de AC est au quarré de AB, comme 8. à 4. qui n'est pas comme nombre quarré, à nombre quarré, & par la 9. p. 10. leurs costez AB & AC sont incommensurables en longitude.

Pour extraire racine quarrée de binome ou residu.



Nous auons cy dessus enseigné comment il falloit trouuer toute sorte de binome ou residu en nombres, lesquels multipliez par vn nombre rationel produisent les rectangles dequoy il a esté parlé, lesquels ne sont expliquez que par binomes ou residus : Dõcques nous enseignerons maintenant à tirer la racine quarrée d'iceux rectangles, c'est à dire à expliquer par nombre la valeur des lignes qui peuuent iceux rectangles.

Soit vn binome 6. † √32. ou autre tel qu'on voudra, lequel soit imaginé estre vn quarré tel que celuy que nous auons figuré : le plus grand nom 6. estans la valleur des deux quarrez, & par la 4. p. 2. le plus petit nom √32. sera la valeur des deux rectangles egaux, partant vn rectangle vaudra √8. (car la moitié d'vne racine cest la racine du quarré de sa puissance, & iceluy rectangle est moyen prop. entre les deux quarrez, lesquels multipliez l'vn par l'autre la racine du produict est la valeur du rectangle.

Toute la question consiste donc à diuiser 6. en deux nombres tels, que leur produit soit 8. Car les racines des deux quarrez adioustees donneront la racine du binome. Ceste question est aisée à vuider à celuy qui aura tant soit peu de cognoissance de l'algebre.

On en viendra à bout, si du quarré de la moitié des 6. on oste les 8. la racine quarree du reste adioustee à la moitié des 6. sera le plus grand nombre.

ADVERTISSEMENT.

QVELQVES Geometres parcy deuant ont pensé faire commodément, de demonstrer ce dixiesme liure par les nombres sourds, n'apperceuant point qu'en ce faisant ils deuenoient circulateurs. Car toute la doctrine des nõbres sourds est fondée sur la verité de ce liure qui traicte de la commensurance & incommensurance des quantitez. Que si ces beaux geometres vouloient proceder legitimement comme on doit faire aux demonstrations geometriques, ils seroiẽt contrains d'establir leurs principes, & de demonstrer la verité des operations des nombres sourds desquelles ils se veullent seruir. Or s'il leur falloit demonstrer que les racines commensurables en puissance seulement, ne peuuent estre adioustées que par plus +. ny soustraites que par moins —, ils se trouueroient demonstrer la composition de nos binomes & de nos residus, se seruans des demonstrations de ce dixiesme liure, ou d'autres semblables: que neantmoins ils veulent prouuer par leurs operations des nombres sourds. Dauantage ils reiectent la demonstration vniuerselle pour recourir à vne particuliere. Quelques vns plus clair-voyans ont mis toutes les deux demonstrations pour satisfaire aucunement à l'opinion du vulgaire des geometres, qui trouue ce dixiesme liure trop dificil, & beaucoup plus intelligible par les operations des nombres sourds. Quant à moy ie l'ay laissé entier sans y rien brouiller, pensant qu'vn chacun y pouuoit aisément appliquer les nombres sourds, me contentant d'enseigner seulement comment il falloit extraire les racines quarrées des binomes ou residus: mais ayans depuis recognu que tout le monde n'entendoit pas les operations des nombres sourds, cõme estant esloignees de l'Arithmetique vulgaire, i'en ay icy mis vn petit abregé, afin que le studieux puisse par le moyen d'iceluy trouuer ses rectangles, faire ses applications de lignes irrationelles sur la rationelle, extraire ses racines de binome, &c. Non pas que i'approuue telle methode, mais pour satisfaire aux curieux.

ALGORITHME

ALGORITHME DES NOMBRES Radicaux ou Irrationaux.

NOMBRES radicaux, irrationaux, & sourds, sont ceux là, de la puissance desquels on ne sçauroit extraire la raciné demandee: si bien que pour expliquer telles racines, on met la marque de racine au deuant d'iceux.

Comme la racine quarree de 8. nous disons que c'est ℞. 8.
La racine cubique de 9. nous disons que c'est ℞. C. 9.
La racine quarree de quarree de 12. nous disons que c'est ℞℞. 12.
Et ainsi des autres.

Et faut noter qu'aucun nombre n'est irrationel, de la puissance duquel on peut extraire la racine demandee, encores qu'il soit expliqué auec la marque de racine. Comme si on disoit ℞. 4. *Car telle racine vaut 2.*

Les parties de cest Algorithme sont
- Addition.
- Soustraction.
- Multiplication.
- Diuision.
- Multinomie radicalle.
- Addition de multinomie.
- Soustraction de multinomie.
- Multiplication de multinomie.
- Diuision de multinomie.
- Extraction de racines de multinomie.

DE L'ADDICTION.

POVR adiouster nombre radical à nombre radical, faut diuiser la plus grande puissance par la plus petite, du quotient tirer racine telle que les donnees, à icelles adiouster vnité par regle, du tout prendre la puissance telle que les donnes, qu'il faudra multiplier par la plus petite des puissances donnees: alors la racine du produit telle que les donnees sera la somme.

Cecy peut estre facillement entendu par vn exemple. Soient deux racines pour estre adioustees ℞. 18. & ℞. 8. La plus grande puissance 18. estant diuisee par la plus petite 8. leur quotient sera $\frac{9}{4}$, sa racine quarree (d'autant que les donnees sont telles sera $\frac{3}{2}$. En adioustant l'vnité ce sera $\frac{5}{2}$ sa puissance quarrée $\frac{25}{4}$, laquelle multiplie par 8. la plus petite des deux puissances donnees, le produit sera 50. duquel la racine quarree sçauoir ℞. 50. sera la somme de ℞. 18. & ℞. 8.

Ainsi ℞. 12.	adiouftee a	℞. 3.	faict la somme	℞. 27.
℞. c. 32.	adiouftee a	℞. c. 4.	faict la somme	℞. c. 108
℞. ℞. 32.	adiouftee a	℞. ℞. 2.	faict la somme	℞. ℞. 162.
℞. $\frac{2}{4}$	adiouftee a	℞. $\frac{8}{9}$	faict la somme	℞. $\frac{98}{36}$
℞. c. $\frac{9}{2}$	adiouftee a	℞. c. $\frac{4}{3}$	faict la somme	℞. c. $\frac{500}{24}$
℞. ℞. $\frac{4}{54}$	adiouftee a	℞. ℞. $\frac{3}{8}$	faict la somme	℞. ℞. $\frac{2500}{864}$

Faut noter qu'aucun nombre rationel ou explicable ne s'adiouste auec aucun nombre radical que par + qui est la marque de plus: Comme ℞. 7. + 4. C'est à dire ℞. 7. plus 4. Pareillement les racines quarreés ne peuuent estre adioustees auec les cubiques, non plus qu'auec les racines quarrees qui leur sont incommensurables en longitude, si ce n'est pas plus +. Comme ℞. 5. + ℞. 7. On cognoit les racines quarrees estre incommensurables en longitude, lors que la plus grande puissance estant diuisee par la plus petite, le produit n'a point de racine quarree.

DE LA SOVSTRACTION.

POVR ſouſtraire nombre radical de nombre radical, faut diuiſer la plus grande puiſſance par la plus petite, du quotient tirer racine telle que les donnees, d'icelle ſuſtraire vnite par regle, du tout prendre la puiſſance telle que les donnees, qu'il faudra multiplier par la plus petite des puiſſances donnees: Alors la racine du produict telle que les donnees ſera la ſomme.

Cecy ſera auſsi facillement entendu par vn exemple. Soit propoſee ℞. 18. de laquelle il faut ſouſtraire ℞. 8. Faut diuiſer la plus grande puiſſance 18. par la plus petite 8. leur quotient ſera $\frac{9}{4}$. ſa racine quarree (d'autant que les donnees ſont telles) ſera $\frac{3}{2}$. En ſouſtrayant l'vnité reſtera $\frac{1}{2}$. ſa puiſſance quarree $\frac{1}{4}$ laquelle multipliée par 8. la plus petite des deux puiſſances, le produict ſera 2. duquel la racine quarree ℞. 2. ſera le reſte.

Ainſi qui	de	℞.	27.	oſte	℞.	12	Reſte	℞.	3
Qui	de	℞. c.	108	oſte	℞. c.	32	Reſte	℞. c.	4
Qui	de	℞.℞.	162	oſte	℞.℞.	32	Reſte	℞.℞.	2
Qui	de	℞.	$\frac{98}{36}$	oſte	℞.	$\frac{8}{9}$	Reſte	℞.	$\frac{2}{4}$
Qui	de	℞. c.	$\frac{500}{24}$	oſte	℞. c.	$\frac{4}{3}$	Reſte	℞. c.	$\frac{9}{2}$
Qui	de	℞.℞.	$\frac{2500}{864}$	oſte	℞.℞.	$\frac{3}{8}$	Reſte	℞.℞.	$\frac{4}{54}$

Faut noter icy les meſmes choſes qui ont eſté remarquees en l'addition, tant pour l'incommenſurance des nombres radicaux, que des diuerſitez des marques de racine.

Dauantage, les meſmes nombres qui ne peuuent eſtre adiouſtez que par plus + ne peuuent pas eſtre ſouſtraicts l'vn de l'autre que par moins —. Et de ces marques de plus + & de moins — naiſt la multinomie radicalle, de laquelle cy-apres nous enſeignerons les operations.

DE LA MVLTIPLICATION.

POVR multiplier nombre radical par nombre radical, faut multiplier la puissance par la puissance, & du produit tirer racine telle que les données.

Comme ℞. 3. qu'il faut multiplier par ℞. 5. Les deux puissances 3. & 5. estant multipliées l'vne par l'autre, du produit 15. faut tirer racine, sçauoir ℞. 15.

Ainsi ℞. 7. multipliée par ℞. 5. produit ℞. 35.

℞. c. 3.	par	℞. c. 10.	produict	℞. c. 30.
℞. ℞. 6.	par	℞. ℞. 10.	produict	℞. ℞. 60.
℞. 5.	par	.3.	Produict	℞. 45.
℞. 3.	par	℞. 12.	produict	.6.
℞. $\frac{2}{3}$	par	℞. $\frac{3}{4}$	produict	℞. $\frac{6}{12}$
℞. c. 3.	par	2.	produict	℞. c. 24.
℞. c. $\frac{4}{5}$	par	℞. c. $\frac{3}{7}$	produict	℞. c. $\frac{12}{35}$
℞. ℞. 32.	par	.2.	produict	℞. ℞. 512.
℞. ℞. 5.	par	℞. 2.	produict	℞. ℞. 20.

DE LA DIVISION.

POVR diuiser nombre radical par nombre radical, faut diuiser la puissance par la puissance, & du quotient tirer racine telle que les donnes.

Comme s'il falloit diuiser ℞. 15 par ℞. 3. la puissance 15. estant diuisée par la puissance 3. le quotient sera 5. duquel la racine sera ℞. 5.

Ainsi ℞. 35. Diuisée par ℞. 7. donnée quotient ℞. 5.

℞. c. 30.	par	℞. c. 10.	quotient	℞. c. 3.
℞℞. 60.	par	℞℞. 10.	quotient	℞℞. 6.
℞. 45.	par	.3.	quotient	℞. 5.
6.	par	℞. 12.	quotient	℞. 3.
℞. $\frac{6}{12}$	par	℞. $\frac{3}{4}$	quotient	℞. $\frac{2}{3}$
℞. c. 24.	par	.2.	quotient	℞. c. 3.
℞. c. $\frac{12}{35}$.	par	℞. c. $\frac{3}{7}$	quotient	℞. c. $\frac{4}{5}$
℞℞. 512.	par	.2.	quotient	℞℞. 32.
℞℞. 20.	par	℞. .2.	quotient	℞℞. 5.

DE LA MVLTINOMIE RADBCALLE.

DE l'addition & Soustraction des racines incommensurables, est sorty vn espece nombres liez l'vn auec l'autre par + & par — lequel nous appellons multinomie.

Quand il y a deux noms on l'appelle Binome.

Quand il y a trois noms on l'appelle Trinome.&c.

DE L'ADDITION DE MVLTINOMIE.

POVR adiouster multinomie à multinomie radicalle, faut disposer les nombres au dessus l'vn de l'autre, & adiouster chacune racine simple à chacune racine simple en obseruant la reigle de + & de — qui s'ensuit.

Aux signes semblables, il faut adiouster sans changer le signe.

Aux signes dissemblables, il faut soustraire auec le signe du plus grand nombre.

Comme	$R.\ 12. + R.\ 20. - R.\ 2. - R.\ \frac{3}{4} + R.\ 7.$
	$R.\ 3. - R.\ 5. - R.\ 8. + R.\ \frac{4}{3} + R.\ 28.$
La somme	$R.\ 27. + R.\ 5. - R.\ 18. + R.\ \frac{1}{12} + R.\ 63.$

DE LA SOVSTRACTION DE MVLTINOMIE.

POur souſtraire multinomie radicalle de multinomie radicalle, faut diſpoſer les racines comme en l'addition, & souſtraire chacune racine ſimple de chacune racine ſimple, en obſeruant les reigles de + & de − qui s'enſuiuent.

Aux ſignes ſemblables il faut ſouſtraire ſi on peut, ſans eſchanger ſigne: & ſi l'on ne peut en ſouſtrayant faut changer le ſigne.
Aux ſignes diſſemblables il faut adiouſter auec le ſigne d'enhaut.

Debte	℞ 27. + ℞ 5. − ℞ 18. + $\frac{1}{12}$ + ℞ 63.
Paye	℞ 3. − ℞ 5. − ℞ 8. + ℞ $\frac{4}{3}$ + ℞ 28.
Reſte	℞ 12. − ℞ 2. − ℞ $\frac{3}{4}$ + ℞ 7.
Preuue	℞ 27. + ℞ 5. − ℞ 18. + ℞ $\frac{1}{12}$ + ℞ 63.

Que ſi en ces deux pattiques d'Addition & ſouſtraction ſe rencontroient quelque racine qui ne peut eſtre adiouſtée ou ſouſtraicte, faudroit ſe ſeruir de + & de −

Quand il y a deux nombres de meſme valleur, le plus deſtruit le moins tant en addition que ſouſtraction: Comme en ceſt exemple + ℞ 5. −− ℞ 5. Leſquels ne font aucune ſomme ny aucun reſte.

DE LA MVLTIPLICATION DE MVLTINOMIE.

POur multiplier multinomie par multinomie, faut multiplier chacun ſimple nom par chacun ſimple nom comme en l'Aritmetique vulgaire en obſeruant les regles de + & de − qui enſuiuent.

Aux ſignes ſemblables faut poſer +

Aux ſignes diſſemblables faut poſer − tant en multipliant qu'en diuiſant.

Comme

℟. 5. + ℟. 7. − ℟. 3.
℟. 7. + ℟. 8. − ℟. 2.

− ℟. 10. − ℟. 14. + ℟. 6.
+ ℟. 40. + ℟. 56. − ℟. 24.
+ ℟. 35. + ℟. 49. − ℟. 21.

℟. 35. + 7 + ℟. 40. − ℟. 21. + ℟. 56. − ℟. 10. − ℟. 24. − ℟. 14. − ℟. 6.

Pour multiplier vne multinomie en ſorte que le produict ſoit plus petite multinomie, faut que le multiplicateur ſoit l'oppoſé contraire du multiplicande. C'eſt à dire que ſans changer les noms, on change les ſignes comme.

℟. 5. + ℟. 3. − ℟. 2.
℟. 5. − ℟. 3. + ℟. 2.

− ℟. 10. + ℟. 6. − 2.
− ℟. 15. − 9. + ℟. 6.
+ 5. + ℟. 15. − ℟. 10.

Le produict ℟. 24.

℟. 7. + ℟. 5.
℟. 7. − ℟. 5.

− ℟. 25.
− ℟. 35.
℟. 49. + ℟. 35.

Le produict 2.

Le plus deſtruict le moins de meſme valleur.

DE LA DIVISION DE MVLTINOMIE.

POVR diuiser multinomie faut que le diuiseur soit simple nom, & diuiser comme cy dessus en obseruant la reigle de + & de −.

Comme $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \Big\} \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{\frac{10}{3}}$

Que si le diuiseur estoit multinomie, faudra multiplier iceluy diuiseur en sorte que le produict soit simple nom, comme il a esté enseigné en la multiplication: Et apres auoir multiplié le diuidende par le mesme nombre, faudra diuiser les deux produicts du diuidende & du diuiseur l'vn par l'autre, & le quotient sera ce que l'on cherche.

Comme s'il falloit diuiser $\sqrt{10} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$ par $\sqrt{7} + \sqrt{2}$.

Diuiseur $\sqrt{7} + \sqrt{2}$
$\sqrt{7} - \sqrt{2}$
$- \sqrt{14} - 2$
$7 + \sqrt{14}$
Produict 5.

dundende $\sqrt{10} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$
$\sqrt{7} + \sqrt{2}$
$- \sqrt{20} - 4 + \sqrt{24}$
$\sqrt{70} + \sqrt{56} - \sqrt{84}$
Produict $\sqrt{70} + \sqrt{56} + \sqrt{84} + \sqrt{20} - 4 + \sqrt{24}$

Diuision des deux produicts l'vn par l'autre.

$$\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{25}} + \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{25}} - \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{25}} - \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} - \frac{4}{\sqrt{25}} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{25}}$$

$$\Big\{ \sqrt{\tfrac{70}{25}} + \sqrt{\tfrac{56}{25}} - \sqrt{\tfrac{84}{25}} - \sqrt{\tfrac{20}{25}} - \sqrt{\tfrac{16}{25}} + \sqrt{\tfrac{24}{25}}$$

• Toute diuision pouuant estre accomplie en ceste façon, on n'aura point de multinomie rompuë.

EXTRACTION DES RACINES DE MVLTINOMIE RADICALLE.

POur extraire racine de multinomie radicalle, faut poser la marque de racine au deuant d'icelle multinomie, auec nom de la multinomie.

Comme si on vouloit extraire racine quarree du binome ℞. 3. + ℞. 7. *Il faudroit dire que c'est* ℞. *bin.* ℞. 3. + ℞. 7. *Que si c'estoit vn trinome comme* ℞. 7. + ℞. 5. − ℞. 10. *faudroit dire que c'est* ℞. *trin.* ℞. 7. + ℞. 5. − ℞. 10. *Le mesme soit entendu des autres sortes de racine.*

Que si quelqu'vn vouloit chercher les proprietez des binomes & residus qui sont enseignez au dixiesme liure, nous auons à la fin d'iceluy enseigné la façon dextraire telles racines.

Quant aux autres multinomies, on trouue bien quelques racines de certaines multinomies, mais iusques icy on n'a encores rien inuenté vniuersel que ie sçache, si bien que le plus seur moyen est de proceder comme nous auons dict.

Quant aux reigles de proportion, elles se pratiqueront ainsi qu'en l'Aritmetique vulgaire.

Les operations des nombres sourds estant expliquees. Il est aisé de demonstrer toutes les propositions de ce 10. liure par les nombres sourds, en se seruant d'iceux nombres au lieu des lignes necessaires à la construction des propositions.

FIN.

ELEMENT VNZIESME.

DEFINITIONS.

1 VNe ligne droite est perpendiculairement esleuée sur vn plan, quand toutes les lignes sur iceluy plan menées vers elle la rencontrent en angles droicts.

2 Vn plan est esleué perpendiculairement sur vn plan, quand les lignes menées sur l'vn d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune section, seront aussi perpendiculaires à l'autre plan.

3 Vn plan est encline sur vn plan, quand les lignes menées sur l'vn & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune section, & vers vn mesme point d'icelle, ne sont point perpendiculaires les vnes aux autres.

4 Plans parallels, sont ceux lesquels estans continuez ne se coupent point.

5 Solides semblables, sont ceux qui sont compris de superficies semblables, egalles en nombre.

6 Solides egaux & semblables, sont ceux qui sont cōpris de semblables superficies egalles en nombre & grandeur.

7 Angle solide, c'est la rencontre de plus de deux angles plans en vn mesme point estans iceux constituez sur plans differens.

8 Pyramide est vn solide compris de plusieurs plans, se rencontrans en vn mesme point, & ayans vn autre plan pour baze.

9 Prisme est vn solide compris de cinq plans, desquels deux qui sont oppsez sont triangles egaux semblables, & parallels, & les trois autres sont parallellogrames.

10 Sphere est vne figure comprise par le demi cercle, lors que son diametre demeurant immobile, iceluy demi cercle tourne iusques à ce qu'il reuienne là, d'où il estoit party.

11 L'axe de la sphere est iceluy diamettre immobile alentour duquel tourne le demi cercle.

12 Le centre de la sphere est celuy mesme que du demi-cercle.

13 Diametre de la sphere est vne ligne laquelle passant par le centre d'icelle, est terminée à la superficie de la sphere.

14 Cone est vn solide compris par vn triangle rectangle, lors que l'vn des costez qui comprennent l'angle droict demeurant immobile, les deux autres font vn tour alentour d'iceluy.

15 Et si le costé immobile est egal à l'autre costé comprenant l'angle droict, le cone sera rectangle: si plus petit, il sera ambligone: si plus grand, il sera oxigone.

16 Icelle ligne immobile est laxe du cone.

17 Mais le cercle descrit par l'autre costé comprenant langle droict qui tourne, est la base du cone.

18 Cylindre est vn solide compris par vn parallellograme rectangle, lors que l'vn des costez demeurant immobile, les trois autres font vn tour alentour d'iceluy.

19 L'axe du cylindre est icelle ligne immobile.

20 La base du cylindre est le cercle descit par l'autre costé qui auec l'axe du cylindre comprent l'angle droit.

21 Semblables cones & cylindres, sont desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionaux.

22 Cube est vn solide compris de six quarrez.

23 Octahedre est vn solide compris de huict egaux triangles equilateraux.

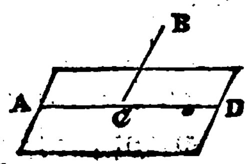
24 Dodecahedre est vn solide compris de douze egaux pentagones equilateraux.

25 Icosahedre est vn solide compris de vingt triangles equilateraux egaux.

PROP. I.

Il est impossible qu'vne partie d'vne ligne droite soit sur vn plan, & l'autre partie en l'air.

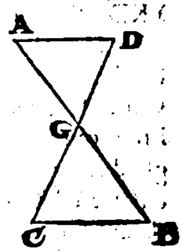
La demonstration de ceste prop. est aisée. Car si partie de la ligne ACB est sur le plan sçauoir AC, & l'autre partie en l'air sçauoir CB, il est euident que ACB ne sera pas ligne droicte, comme il est requis.



PROP. II.

Si deux lignes se coupent l'vne l'autre, elles seront sur vn mesme plan: Item tout triangle est en vn mesme plan.

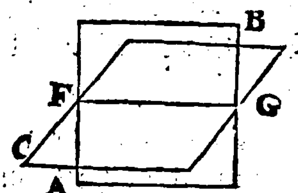
Soient deux lignes AB & CD se coupans l'vne l'autre au point G: Ie dis quelles sont en vn mesme plan: ensemble le triangle BGC.



Car d'autant qu'elles se coupent en G, CG & BG feront vn angle au point G: & par la definition de l'angle plan conuertie elles seront en vn mesme plan, & par la mesme CB faisant deux angles auec icelles deux lignes CG & BG, elle sera aussi au mesme plan: Partant tout le triangle CGB est en vn mesme plan: & les lignes CG & BG estant continuées iusques en A & D, les toutes AB & CD seront en vn mesme plan, d'autant que leurs moitiés sont en vn mesme plan, & que par la 1. p. 11. il est impossible qu'vne ligne soit en partie sur vn plan, en partie en l'air.

PROP. III.

Si deux plans se coupent l'vn l'autre, leur commune section sera vne ligne droicte.

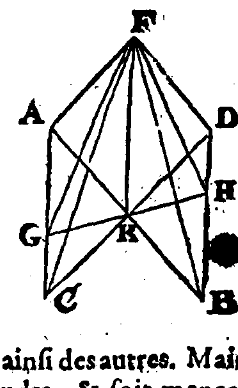


Soient les deux plans se coupans l'vn l'autre AB & CD. Ie dis que leur commune section est vne ligne droite.

Qu'il ne soit ainsi. Soient marquez les points de commune rencontre F & G, lesquels sont communs à tous les deux plans: Or d'vn point à l'autre soient menee vne ligne droite sur le plan AB, item des mesmes points soit menee vne ligne droite sur le plan CD: Ie dis qu'il est impossible qu'icelles deux lignes soient autres qu'vne seule ligne droite sçauoir FG: car si elles estoiet differentes, il s'ensuiuroit que deux lignes droites auroient leurs extremitez communes, ce qui est impossible, car elles enfermeroient vn espace.

PROP. IIII.

Si deux lignes droites se coupans l'vne l'autre, & au point de leur section on esleue perpendiculairement vne autre ligne droite, elle sera aussi esleuee perpendiculairement sur le plan d'icelles.



Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'vne l'autre au point K, & du point de section K soit esleuee la perpendiculaire KF à chacunes d'icelles: ie dis aussi qu'elle est perpendiculaire à leur plan.

Qu'il ne soit ainsi, soit egallee AK à KB Item CK à KD, il est euident par la 4. p. 1. que AC sera egalle à DB Item du point en l'air F soient menees les lignes FA, FB, FC, FD, lesquelles par la 4. p. 1. seront egalles: Car en les prenant deux à deux les triangles FKC & FKA ont les deux costez egaux à deux costez & l'angle d'iceux costez egal à l'angle (estant FK perpenculaire à AK & CK) la base FA sera egalle à la base FC, ainsi des autres. Maintenant sur la ligne DB soit pris le point H comme on voudra, & soit menee la ligne HKG: DH sera egalle à GC, & HK à KG par la 26. p. 1. Car les deux triangles DKH & GCK ont deux angles egaux à deux angles, & le costé CK egal au costé KD, & par la 4. p. 1. Si on meine les lignes FH & FG elles seront egalles (Car les deux costez FC & CG & leur angle sont egaux aux deux costez FH &

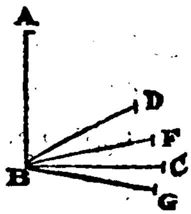
HD & à leur angle) & les triangles FKH & FKG auront les trois costez egaux chacun au sien, & par la 8. p. 1. les angles FKH & FKG seront egaux, & par la 10. p. 1. FK sera perpendiculaire à GH.

On pourra semblablement prendre tant de lignes qu'on voudra sur le mesme plan qui feront les angles droicts rencontrant la perpendiculaire FK selon les raisons cy-deuant dictes : & par la 1. d. 11. FK sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD.

PROP. V.

Si vne ligne droite rencontre en vn point perpendiculairement trois autres lignes droites, icelles trois lignes droites seront en vn mesme plan.

Soient trois lignes droictes se rencontrans au point B sçauoit DB, FB, GB, & que AB soit esleuee perpendiculairement sur vne chacune d'icelles : Ie dis qu'icelles trois lignes sont sur vn mesme plan.



Qu'il ne soit ainsi, les deux lignes DB & GB peuuent estre en vn mesme plan par la 2. p. 11. Si donc on dit que BF n'est point sur le plan DBG, mais qu'il est esleué en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. p. 11. Ainsi ABF & DBG sont deux plans differens, lesquels se touchans au point B, ne sont pas parallels, partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se couperont, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3. p. 11. soit la ligne BC, laquelle par ce moyen sera au mesme plan que DB, & par la 1. d. 11. AB & BC se rencontreront en angles droicts : mais par hypothese AB & BF se rencontrent aussi en angles droicts, par ainsi les angles ABF & ABC seroient egaux, la partie au tout : Ce qui est impossible : Donc BF estoit au mesme plan que BD & BG.

PROP. VI.

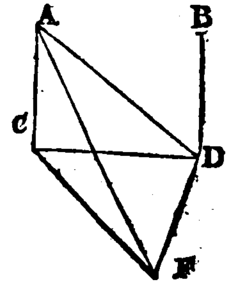
Si deux lignes droites sont esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan, elles seront parallelles.

Soient les deux lignes esleuees perpendiculairement sur vn mesme plan AC & BD : Ie dis qu'elles sont parallelles entre elles.

Car si des points ou icelles lignes rencontrent vne mesme superficie plane C, & D, on meine la ligne droite CD, les deux angles ACD & CDB seront droicts, partant si les deux lignes AC & BD sont en vn mesme plan, elles seront parallelles par la 28. p. 1.

Ores qu'elles soient en vn mesme plan on le prouue ainsi. Sur le plan de CD du point D soit menée DP perpendiculaire à CD par la 11. p. 1. & soit egallée

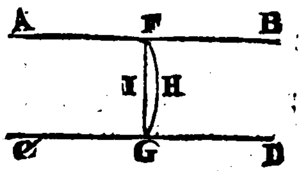
AC, & soient menées les lignes AD, & AF, FC.



Premierement les deux triangles ACD & CDF ont les deux costez AC & DF egaux, & CD commun, & l'angle ACD droit egal à l'angle CDF aussi droict: & par la 4. p. 1. la base AD sera egalle à la base CF. Item les deux triangles ACF & ADF ayans les deux costez AC & DF egaux, Item les deux autres AD & CF egaux, & la base AF: comme à tous deux par la 8. p. 1. l'angle ADF sera egal à l'angle droit ACF; partant l'angle ADF sera aussi droict: il est donc euident que FD touche perpendiculairement en vn point D les trois lignes CD AD BD, & par la 5. p. 11. icelles trois lignes seront en vn mesme plan: mais par la 2. p. 11. les trois lignes AC, CD, AD sont aussi sur vn mesme plan: partant AC & BD seront en vn mesme plan.

PROP. VII.

Si deux lignes droites sont parallelles, & de l'vne à l'autre on meine vne ligne droite, elle sera au mesme plan des lignes parallelles.



Soient deux lignes parallelles AB & CD, & de l'vne à l'autre soit menée FG ligne droicte: Ie dis qu'icelle ligne est au mesme plan des lignes paralles AB & CD.

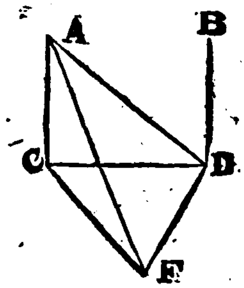
Car si elle n'estoit sur le mesme plan: soit icelle en l'air FHG, & du point F au point G soit menée la ligne droicte FIG sur le plan des lignes parallelles, ce qui est possible, il s'ensuiuroit que deux lignes droictes auroient mesmes termes, ce qui est absurde: Donc la ligne droicte FG est au mesme plan des parallelles.

PROP. VIII.

Si deux lignes parallelles passant par vn mesme plan, l'vne d'icelles le couppe en angles droits, aussi l'autre le coupera en angles droicts.

Soient les deux lignes parallelles AC & BD, & que l'vne d'icelle soit esleuée perpendiculairement sur quelque plan, ie dis que l'autre BD est aussi esleuée perpendiculairement sur le mesme plan.

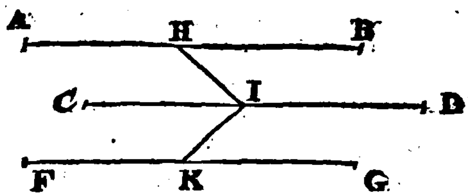
Qu'il ne soit ainsi. Soit faicte mesme construction qu'en la 6. p. 11. & comme il a esté demonstré, les deux angles ACF & ADF seront droicts, le premier par hypothese, le second ACF par la 8. p. 1. & par la 4. p. 11. FD sera esleuée perpendiculaire-



pendiculairement sur le plan des lignes AD & CD, mais par la 7. p. 11. les deux lignes AC & CD sont au mesme plan de AC & BD: car elles sont parallelles par hypothese, il s'ensuit que FD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne BD : Ainsi l'angle BDF sera droit, Mais l'angle BDC est aussi droit par la 29. p. 1. estans AC & BD parallelles & par 4 p. 11. BD sera perpendiculaire au plan de CD & DF (sur lequel est aussi perpendiculaire AC. (Ce qu'il falloit demonstrer.

PROP. IX.

Les lignes parallelles à vne, sont parallelles entre elles, encores quelles soient en diuers plans.

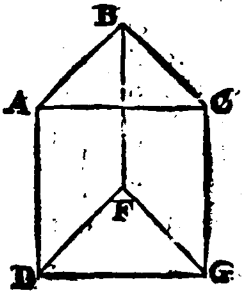


Soit la ligne AB parallelle à la ligne CD. Item FG parallelle à la mesme CD : Ie dis que AB & FG sont parallelles entre elles, encores qu'elles ne soient pas au mesme plan de AB & CD.

Qu'il ne soit ainsi. Soit pris le point I en la ligne CD, & d'iceluy soient menees les deux lignes perpendiculaires par la 12. p. 1. sçauoir IH sur AB, & IK sur FG : il est euident que HI & IK seront en vn mesme plan par la 2. p. 11. & que les lignes AB & FG coupent iceluy plan en angles droicts, & sont perpendiculaires à iceluy, & par la 6. p. 11. elles seront parallelles entre elles.

PROP. X.

Si deux lignes droites se touchant angulairement, sont parallelles à deux autres lignes droites, aussi se touchant angulairement & à diuers plans, leurs angles seront egaux.

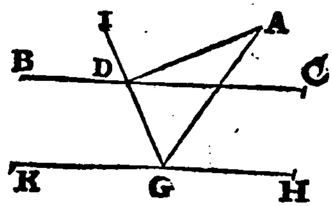


Soient les deux lignes AB & BC se touchans angulairement au point B, lesquelles soient parallelles aux deux autres lignes DF & FG se rencontrans aussi angulairement au point F : Ie dis que les angles ABC & DFG sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Soient egallees les quatre lignes AB, BC, DF, FG, & soient menees les lignes AD, BF, CG, AD, DG. Premierement AB & DF estant egalles & parallelles, AD & BF seront aussi egalles & parallelles par la 33. p. 1. & par la mesme raison BF & CG seront egalles & paralleles & par la 9. p. 11. AD & CG seront egalles & paralleles & par la 33. p. 1. AC & DG seront egalles & paralleles : Ainsi les deux triangles ABC, & DFG auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 8. 1. les angles B & F seront egaux.

PROP. XI.

D'vn point pris en l'air, mener vne ligne perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy point.

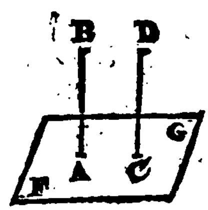


Soit le point en l'air A, & sur le plan qui est au dessous d'iceluy point soit menee comme on voudra la ligne KH, & par la 12. p. 1. du point A vers KH, soit menee la perpendiculaire AG, & par la 11. p. 1. du point G, soit menee la perpendiculaire GD, sur le plan mesme où est la ligne KH, & du point A soit menee AD perpendiculaire à DG par la 12. p. 1. Ie dis qu'elle est la perpendiculaire demandee.

Qu'il ne soit ainsi. Soit menee BDC parallelle à KGH : il est euident par le 4. p. 11. que la ligne KG est perpendiculaire au plan du triangle DGA (d'autant que les angles KGD & KGA sont droicts, & par la 8. p. 11. BD parallelle à KG, sera aussi perpendiculaire au mesme plan : ainsi l'angle BDA sera droit : mais GDA est aussi droit, & par la 4. p. 11. AD sera perpendiculaire au plan des deux lignes BD & DG, qui est le plan au dessous du point A, ce qui estoit à monstrer.

PROP. XII.

D'vn plan donné, & d'vn point pris en iceluy, esleuer en l'air vne ligne perpendiculaire.

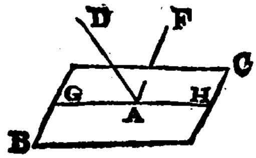


Soit le plan FG, du point A en iceluy il faut esleuer perpendiculairement vne ligne.

Soit pris en l'air comme on voudra le point D, & d'iceluy soit menee sur le plan FG, la perpendiculaire DC, rencontrant le plan au point C par la 11. p. 11. Et du point A soit menee AB parallelle à CD : il est euident que par la 8. p. 11. qu'elle sera aussi perpendiculairement esleuee en l'air sur le plan FG.

PROP. XIII.

D'vn mesme plan, & d'vn mesme point d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'vn mesme costé, deux lignes perpendiculaires.

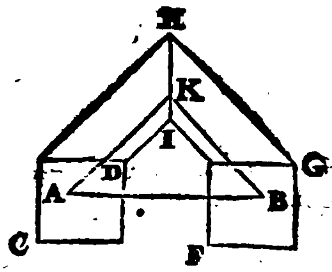


Soit pris quelque plan comme BC, & le point en iceluy A : ie dis que du point A, on n'esleuera pas en l'air deux lignes perpendiculaires sur iceluy plan, & du mesme costé.

Autrement s'il est impossible : du point A, soient esleuees en l'air les deux perpendiculaires AD & AF, elles seront en vn mesme plan par la 2. p. 11. Et iceluy plan d'autant qu'il touche le plan BC, au point A, il n'est point parallelle à iceluy : partant estans continuez ils se coupperont, & leur commune section sera vne ligne droicte : soit icelle GAH. Et parce que les lignes AD & AF sont perpendiculaires à iceluy plan BC, les angles FAG & DAG seroient droicts & egaux, la partie au tout : ce qui est impossible.

PROP. XIV.

Si vne ligne droite est perpendiculaire à deux plans, iceux plans seront parallels.



Soit la ligne droite AB, perpendiculaire à chacun des plans CD & FG : ie dis qu'iceux plans sont parallels entre eux.

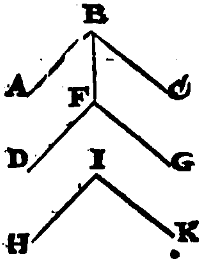
Autrement s'ils n'estoient parallels, estans continuez ils se rencontreront, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3. p. 11. soit icelle HI, en laquelle soit pris comme on voudra le point K, & soient d'iceluy menees les lignes KA, KB : maintenant puis que la ligne AB est perpendiculaire à chacun d'iceux plans CD, FG, les angles KAB & KBA, seront droicts dans le triangle KAB : contre la 17. p. 1. donc les deux plans ne se rencontreront point, ains seront parallels.

PROP. XV.

Si deux lignes droites se touchant angulairement sont parallalles à deux autres lignes droites se touchant aussi angulairement, & en diuers plans : iceux diuers plans seront parallelles l'vn à l'autre.

Soient les deux lignes AB & BC, se touchans angulairement au point B, & les deux autres HI & IK, se touchans aussi angulairement au point I, qui soient parallelles aux deux premieres, chacune à la sienne, & constituees en diuers plans, ie dis que le plan des lignes AB & BC, est parallel au plan des lignes HI & IK.

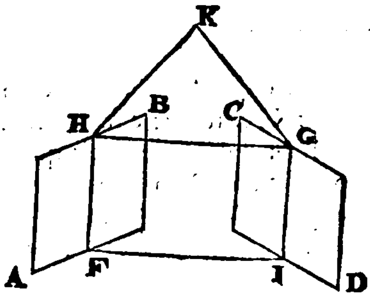
Qu'il ne soit ainsi. Du point B soit leuee en l'air la perpendiculaire BF vers le plan HIK par la 11. p. 11. rencontrant iceluy plan au point F, & du point F, soient menees FD parallelle à IH, & FG parallelle à IK: par la deff. des lignes parallelles DF & HI: Item FG & IK seront en mesme plan: & par la 9. p. 11. Seront aussi parallelles: sçauoir DF à AB, & FG à BC: & par la 19. p. 1. les angles DFB, & GFB seront droicts (d'autant que les angles ABF & CBF sont droicts par la construction.) Ainsi la ligne BF est perpendiculaire aux deux lignes AB & BC, & à leur plan, par la 4. p. 11. Item aux deux lignes DF, & FG & à leur plan, par la mesme 4. p. 11. & par la 14. p. 11. les plans ABC & DFG (ou HIK, car c'est le mesme) sont parareds. Ce qui estoit à prouuer.



PROP. XVI.

Si deux plans parallels sont couppez par vn autre plan, les lignes de commmune section seront parallelles.

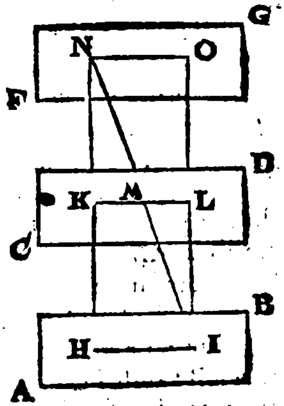
Soient les deux plans parallels AB & CD, couppez par le troisiesme plan HI: Ie dis que leurs lignes de commune section (c'est à sçauoir HF & GI) sont parallelles.



Autrement si elles n'estoient parallelles, estans continuées elles se rencontreroient comme au point K: Mais d'autant qu'iceux plans sont parallels estans continuez, ils ne se rencontrent iamais: il faudroit donc que les lignes FHK & IGK (lesquelles se rencontrent) fussent en partie sur leurs plans, en partie dehors: ce qui est contre la 1. p. 11. Donc HF & GI estant continuées ne se rencontrent point, & sont parallelles.

PROP. XVII.

Si deux lignes droites sont couppées par plusieurs plans parallels, elles seront couppées proportionellement.

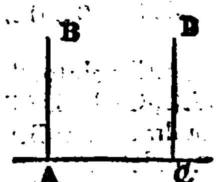


Soient les deux lignes HN & IO, trauersans les trois plans parallels AB, CD, FG, aux points H, K, N, O, L, I: ie dis que NK est à KH, comme OL est à LI.

Qu'il ne soit ainsi. Soient menées les lignes NO, kL, HI: Item NI, coupant KL au point M. D'autant que les plans parallels AB & CD, sont coupez par le plan KMIH les lignes de commune section KM & HI sont parallelles, par la 16. p. 11. & par la 2. p. 6. au triangle NHI, KM estant parallelle à HI, comme NK à KH, ainsi NM à MI. Par les mesmes raisons & propositions au triangle NIO, comme NM à MI, ainsi OL à LI: & par la 11. p. 5. (d'autant que comme NM à MI, ainsi NK à KH) OL sera à LI comme NK à KH, ce qui estoit à demonstrer.

PROP. XVIII.

Si vne ligne droite est esleuée perpendiculairement sur vn plan, tous les plans procedans d'icelle, seront perpendiculaires au mesme plan.



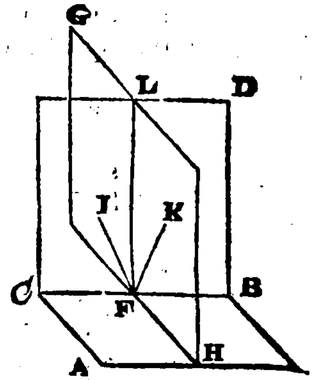
Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan: Ie dis que tous les plans de la ligne AB, menez quelle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le plan auquel BA est perpendiculaire.

Qu'ainsi ne soit. Soit mené quelque plan de la ligne AB sur le plan proposé, leur commune section sera vne ligne droite par la 3. p. 11. Soit icelle AC: & du point C pris en icelle, comme on voudra, soit menee CD perpendiculaire sur le plan de BA, par la 11. p. 1. & par la 28. p. 1. CD sera parallelle à AB: & par la 8. p. 11. AB & CD seront perpendiculaires au plan proposé: & par mesme discours on en trouuera autant qu'on voudra de semblables: & par la 5. d. 11. le plan de BACD sera esleué perpendiculairement sur le plan proposé.

PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecoupent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.

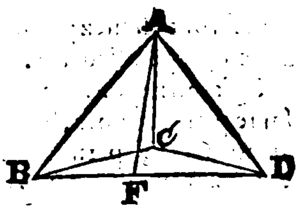
Soient les deux plans se coupans l'vn l'autre GH & CD, esleuez perpendiculairement sur le plan AB, & soit la ligne de leur commune section FL: ie dis que icelle est perpendiculaire au plan AB.



Autrement si elle n'est perpendiculaire au plan AB, puis que le plan CD est perpendiculaire au plan AB, ils auront vne commune section qui sera ligne droicte, soit icelle CB: & du point F pris en icelle soit menée FI perpendiculaire à la ligne CB, sur le plan CD, par la 11. p. 1. & par la 3. d. 11. conuertie, elle sera perpendiculaire au plan AB. Tout de mesme le plan GH estant perpendiculaire au plan AB, si à leur commune section FH, & du point F, on leue la perpendiculaire FK sur le plan GH, elle sera aussi par la mesme deff. conuertie perpendiculaire au plan AB: ainsi FI & FK seroient toutes deux d'vn mesme point esleuées perpendiculairement sur vn mesme plan: ce qui est contre la 13. p. 11. Donc du point F on n'en a peu mener d'autres perpendiculaires au plan AB, sinon vne seulle, laquelle doit estre commune à tous les deux autres plans: partant il est euident que c'est leur ligne de commune section FL.

PROP. XX.

Si vn angle solide est compris de trois angles plans, les deux pris comme on voudra sont plus grands que le troisiesme.

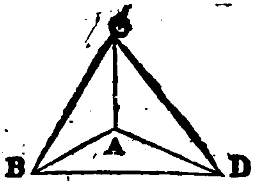


Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. ie dis que deux pris comme on voudra comme BAC & DAC, sont plus grands que le troisiesme.

Autrement, si on dit que BAD soit plus grand que les deux autres: Soit faict DAF egal à DAC par la 23. p. 1. & soient faictes egalles les trois lignes AC, AD, AF: & apres auoir mené les deux lignes CD & DF, & continué DF iusques à B du costé AB: soit menée BC. Maintenant puis que les deux costez CA & AD sont egaux aux deux costez DA & AF, & leurs angles egaux, la base CD sera egalle à la base DF. Item puis que l'on pose l'angle BAD plus grand que les deux autres, & que le retranché FAD est egal à l'vn d'iceux CAD, le reste BAF sera plus grand que l'autre BAC: mais les deux costez FA & AB sont egaux aux deux costez CA & AB, & l'angle BAF est plus grand que l'angle BAC: & par la 24. p. 1. la base BF sera plus grande que la base BC: & FD estant egalle à CD, il est euident qu'au triangle BCD le costé BD est plus grand que les deux autres: ce qui est contre la 20 p. 1. Donc l'angle BAD n'est point plus grand que les deux autres. Que si on dit qu'il est egal: il s'ensuiura par le mesme discours que BD est egalle à BC & CD: ce qui contreuient tousiours à la 20. p. 1. Il est donc plus petit que les deux autres.

PROP. XXI.

Tous les angles plans d'vn angle solide, sont plus petits que quatre angles droicts.

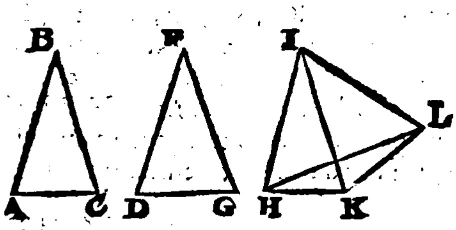


Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Ie dis qu'iceux trois angles plans sont plus petits que quatre droits.

Qu'il ne soit ainsi. Soient menées les trois lignes BC, CD, BD, faisant le triangle de la base de l'angle solide BCD: il est euident qu'aux trois angles B, C, D, il aura trois angles solides, & que par la 20. p. 11. les deux angles d'iceux pris comme on voudra, seront plus grand que le troisiesme: comme les deux sous le point C, BCA & DCA, seront plus grands que le troisiesme BCD, & les deux sous le point B, seront plus grands que le troisiesme DBC: Item les deux CDA, & BDA, sont plus grands que BDC: & partant que les six angles ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD, c'est à dire que deux droicts (car iceux trois angles vallent autant par la 32. p. 1.) Mais iceux six angles auec les trois qui font l'angle solide A, vallent six droicts, par la 32. p. 1. (D'autant que ce sont trois triangles plans) & iceux six angles sont plus grands que deux droicts: Ainsi il est manifeste que les trois qui font l'angle solide A, sont plus petits que quatre droicts.

PROP. XXII.

Il est possible de faire vn angle solide de trois angles plans compris de lignes egalles, moyennant que deux soient plus grands que le troisiesme, & les trois plus petits que quatre droicts.

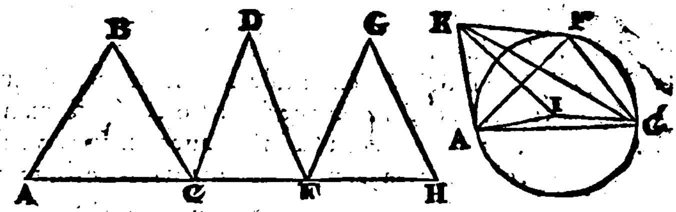


Soient les trois angles plans ABC, DFG, HIK, en sorte que les deux pris comme on voudra soient plus grands que le troisiesme, & les trois plus petits que quatre angles droicts: ie dis qu'on peut faire vn angle solide d'iceux trois angles plans, (c'est à dire qu'iceux angles estans compris de costez egaux, si on meine les bases AC, DG, HK, que d'icelles bases on pourra faire vn triangle.)

Car puis que deux d'iceux angles pris comme on voudra sont plus grands que le troisiesme: qu'on en mette deux ensemble tels qu'on voudra, comme si à HIK, on adiouste KIL egal à DFG par la 23. p. 1. & on fait IL egal à FG, l'angle HIL estant plus grand que le troisiesme ABC, la base HL par la 24. p. 1. sera plus grande que la base AC (car les deux costez sont egaux) & à plus forte raison les deux HK & KL, seront plus grandes que la troisiesme AC. Et par mesme discours on monstrera tousiours que deux d'icelles bases prises comme on voudra sont plus grandes que la troisiesme. Partant d'icelles on pourra faire vn triangle. Voyla ce qui estoit à demonstrer.

PROP. XXIII.

Faire vn angle solide de trois angles plans, plus petits que quatre droicts, moyennant que deux d'iceux soient plus grands que le tiers.



Soient trois angles plans comme les demãde la proposit. ABC, CDF, FGH, compris de costez egaux, lesquels soient soustenuz des trois bases AC, CF, & FA. Il faut faire vne angle solide.

Soit faict le triangle FAC, ayans les trois costez egaux aux trois bases AC, CF, FH par la 22. p. 1. lequel soit circonscript du cercle FAC par la 5. p. 4. & du centre soient menees les trois lignes IC, IF, IA: & apres auoir esleué en l'air perpendiculairement IK par la 12. p. 11. Soit icelle retranchee en sorte, que son quarré auec le quarré de IA, soient egaux au quarré de l'vn des costez d'iceux angles plans (lesquels doiuent estre tous egaux par hypothese) apres auoir mené les lignes KA, KC, KF: Ie dis que ACKF est vn angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez.

Car les trois lignes IA IC IF estant egalles, & KI perpendiculaire à icelles, les trois lignes KA, KC, KF, seront egalles par la 47. p. 1. d'autant qu'elles peuuent autant l'vne comme l'autre: & puis qu'elles peuuent autant que l'vn des costez des angles plans donnez, elles seront egalles aux costez d'iceux angles plans; puis les trois bases AC, CF, FA, estans egalles aux bases des angles donnez, par la 8. p. 1. les trois angles au point K, seront egaux aux trois donnez B, D, C: ce qu'il failloit demonstrer.

SCHOLIE.

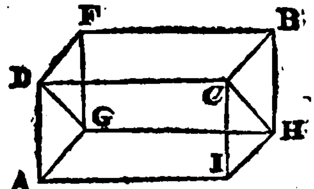
Quelqu'vn pourra obiecter que la perpendiculaire KI ne peut pas tousiours estre retranchee, en sorte que son quarré auec le quarré de IA soient egaux au quarré de l'vn des costez des triangles donnez: comme par exemple si iceluy

costé

costé estoit egal ou plus petit que AI, ce qui n'arriue iamais, non pas seulement qu'il soit egal à AI: car si AI & IF estoient egaux à AB & BC, & la base à la base, (& ainsi des deux autres triangles) les trois au point I seroient egaux aux trois angles BDG, chacun au sien, ce qui est euidemment faux: Car tousiours par hypothese les trois angles B, D, G, sont plus petits que quatre droicts, & les trois au point I sont egaux à quatre droicts.

PROP. XXIIII.

Les solides compris de six plans parallels, ont les plans opposez egaux & parallellogrames.



Soit le solide de six plans parallels AB: ie dis que les plans opposez sont egaux & parallellogrames.

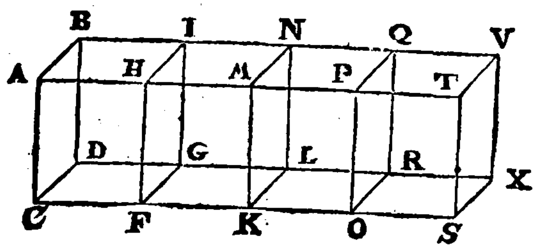
Car puis que les plans DB & AH sont parallels estans coupez par les plans AF & IB, les lignes de commune section DF & AG sont parallelles: Item CB & IH par la 16.p.11. par la mesme raison les plans DI & FH estans parallels, les lignes de commune section DA & FG, Item CI & BH sont parallelles: partant HF & IB sont parallellogrames. Par le mesme discours BD, DI, GI, GB, se prouueront estre parallellog. & par la 34. p.1. les costez opposez seront egaux: partant DF & FG seront egaux à CB & BH, & parallelles: à icelles & par la 15. p.11. les angles DFG & CBH en diuers plans sont egaux, & par la 4.p.1. le triangle DFG sera egal au triangle CBH: & par la mesme raison DAG à CIH: partant le plan AF egal à son opposé IB: par le mesme discours on prouuera les autres plans opposez egaux.

PROP. XXV.

Le parallellograme solide estant couppé par vn plan parallel aux plans opposez, les solides couppez seront l'vn à l'autre comme leur base.

Soit le solide parallellog. FQ couppé par le plan KN parallel aux deux opposez FI & OQ, & faisant deux solides FN & NO: ie dis que iceux solides seront l'vn à l'autre, comme la base FM est à la base KP.

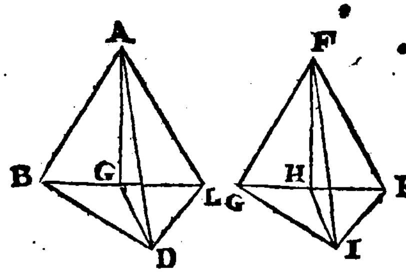
Qu'il ne soit ainsi (la ligne FO estant prolongee de part & d'autre) Soient faictes egalles OS à OK, & CF à FK, & soient accomplis les parallellogrames AF & OT. Item les solides AG & OV. Doncques puis que KO OS sont egalles, les parallellogrames KP & OT seront aussi egaux par la 1. p.6. & par la 24. p.11. les plans opposez LQ & RV seront egaux: Item KR & OX egaux à MQ & PV plans opposez, & ainsi des autres: & par les deff. de ce liure le solide



KQ est egal au solide OV. Par le mesme discours le solide KI sera egal au solide FB, comme la base FN est egal à la base CH : partant le solide KB est autant multiplice du solide KI, comme la base CM est multiplice de la base FM : Item le solide KV est autant multiplice du solide KQ, cõme la base KT est multiplice de la base KP: & par la 14. p. 5. cõme la base CM sera plus grande egalle ou plus petite que la base FM, Ainsi le solide KB sera plus grand egal ou plus petit que le solide KI. Tout de mesme comme la base KT sera plus grande egalle ou plus petite que la base KP ainsi le solide KV sera plus grand egal ou plus petit que le solide KQ. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases FM & KP, & les deux solides KI & KQ. Desquels de la premiere & troisiesme (sçauoir de la base FM & du solide KI) on a pris les equemultiplices CM base & KB solide : Item de la seconde & quatriesme (sçauoir de la base KP & du solide KQ) les equimultiplices KT base, & KV solide, lesquels nous auons monstré estre comme demande la 6. d. 5. plus grands egaux ou plus petits : & partant comme la base FM à la base KP, ainsi le solide, KI au solide KQ : ce qu'il falloit demonstrer.

PROP. XXVI.

Sur vne ligne droite, & d'vn point donné en icelle, bastir vn angle solide egal à vn angle solide donné.



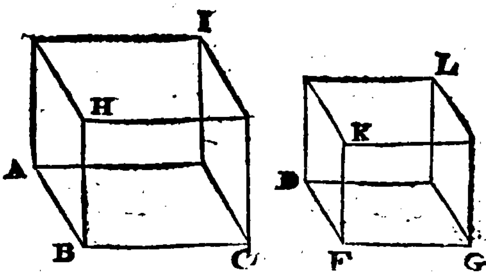
Soit l'angle solide donné A compris des trois lignes AB, AD, AL qui comprenent trois angles plans, desquels est composé le solide : sur la ligne donnee FG & au point F, il faut bastir vn angle solide egal au donné A.

Soit menee comme on voudra vne ligne qui touche angulairement FG, icelles deux lignes seront en vn mesme plan par la 2. p. 11. & sur iceluy plan soit fait l'angle GFK egal à l'angle BAL par la 23. p. 1. Maintenant du point D soit menee la ligne DC tombant perpendiculairement sur le plan BAL par la 11. p. 11. En apres soient menees les trois lignes BC, CA, BD. Item sur le plan GFK soit faict l'angle GFH egal à l'angle BAC par la 23. p. 1. & apres auoir faict egalles GF à AB & FH à AC, du plan GFK, & du point en iceluy H, soit esleuee la perpendiculaire HI par la 12. p. 11. laquelle soit faicte egalle à CD : & soient menees les trois lignes FI, IG, & GH : Ie dis que l'angle solide compris des trois lignes GF, FI, KF sera egal à l'angle solide A.

Car par la construction, les deux costez AC & CD sont egaux aux deux FH & HI, & l'angle ACD droit egal à l'angle FHI aussi droit, & par la 4. p. 1. la base AD sera egalle à la base FI : & par la mesme prop. d'autant que les deux costez BA & AC & leur angle, sont egaux par la construction aux deux costez GF & FH & à leur angle : BC & GH seront egalles : mais CD & HI sont aussi egalles, & les angles BCD & GHI egaux (d'autant qu'ils sont droicts) la base BD sera egalle à la base GI: & par la 8. p. 1. l'angle BAD sera egal à l'angle GFI. Pareillement par les mesmes raisons on prouuera que l'angle DAL est egal à l'angle IFK : & par la construction l'angle BAL est egal à l'angle GFK : par les deff. de ce liure les angles solides A & F sont egaux.

PROP. XXVII.

Sur vne ligne droite donnee, descrire vne parallellograme solide, semblable, & semblablement posé, à vn solide parallellograme donné.



Soit la ligne donnee BC, sur laquelle il faut bastir vn parallellog. solide semblable, & semblablement posé au donné FL.

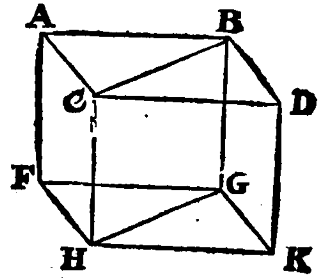
Sur la ligne BC & au point B, soit basti vn angle solide egal à l'angle solide F par la 26. p. 11. lequel soit compris des trois lignes CB, HB, AB, & par la 10. p. 6. soit faicte comme FG à FK ainsi BC à BH, & comme FG à FD ainsi BC à BA en raison egalle AB sera à BH cõme DE à FK. Soient maintenant paracheuez les parallellog. AC, CH, HA, IA, IH, IC : Ie dis que le solide BI est semblable & semblablement posé au solide FL donné.

Car ils ont autant de superficies plans l'vn comme l'autre : & d'autant que HB est à BC comme KF est FG, & l'angle HBC egal à l'angle KFG, le parallellograme HC est semblable au parallellog. KG : par la mesme raison le parallellograme HA sera semblable au parallellog. KD, & AC à DG. Partant trois parallellog. du solide BI sont semblables & semblablement posez, à trois parallellog. du solide FL. Mais par la 24. p. 11. les trois opposez estans egaux, ils seront aussi semblables, & par les deff. de ce liure les solides BI & FL seront semblables & semblablement posez.

PROP. XXVIII.

Si vn parallellograme solide est couppé par vn plan passant

par les diagonalles des plans opposez: il sera coupé en deux egallement.

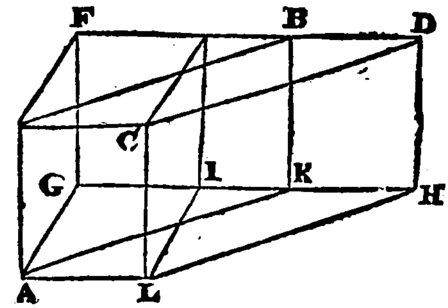


Soit le parallellog. solide AK, couppé par vn plan passant par les diagonalles des plans opposez CB & HG. Ie dis qu'il est couppé en deux egallement.

Car il est euident par la 34. p.1. que les triangles BDC & BAC sont egaux, item les deux GKH & GFH: & le plan AH egal au plan BK, & AG à CK par la 24. p.11. (car ils sont opposez) Partant les deux prismes GAH & GDH sont compris de parallellogrames, & de triangles opposez semblables & egaux: & par les deff. de ce liure iceux prismes sont egaux.

PROP. XXIX.

Les parallellogrames solides ayans mesmes base, & de mesme hauteur, & desquels les plans opposez à la base sont entre mesmes lignes droites, sont egaux.



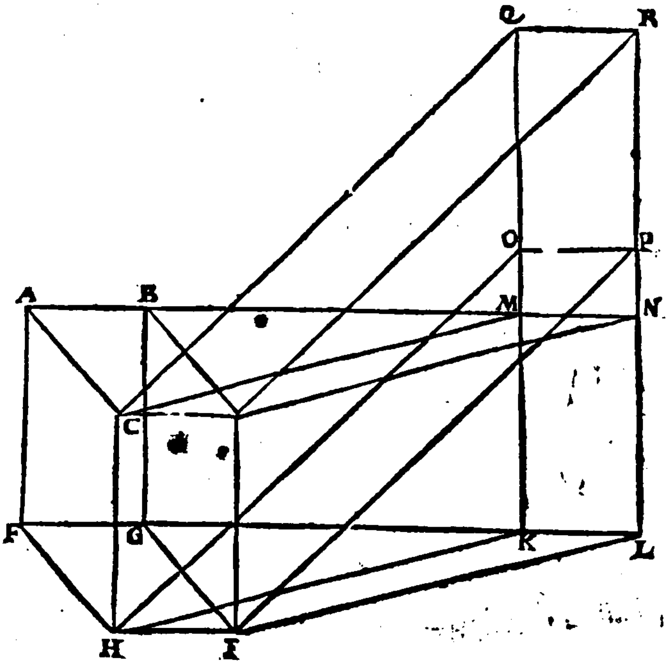
Soient les deux parellellog. solides AB & AD, tous deux sur la mesme base AC, de mesme hauteur, ayans les deux plans FI & BH opposez à la base AC constituez entre les mesmes lignes droictes FD & GH: ie dis que iceux deux parallellog. solides sont egaux entre eux.

Ceste demonstration est aisée à qui a bien conceu celle de la 35. p.1. Car ce que celle-là prouue par les triangles egaux, ausquels on oste & adiouste. Icy on prouue par les prismes egaux, desquels on retranche & adiouste vn prisme commun. Les prismes AFK, & LBH seront monstrez egaux par la 24. p. 11. par ce que les plans opposez des parallellogrames solides, sont egaux: & d'iceux sont faits les prismes. Le reste est aisé.

PROP. XXX.

Les parallellogrames solides ayans mesme base, & de mesme hauteur (encores que les plans opposez à leur base ne soient entre mesme lignes droictes) sont egaux.

Soient deux solides parallellogrames HB & HR tous deux sur mesme base CI, & de mesme hauteur (c'est à dire que leurs plans opposez, & parallels à leur base CI, sçauoir AG & QP soient en vn mesme plã, lequel soit parallel à la base CI) ie dis qu'ils sont egaux encores que les plans PQ & AG opposez à leur base cõmune CI, ne soiẽt entre mesmes lignes droites.

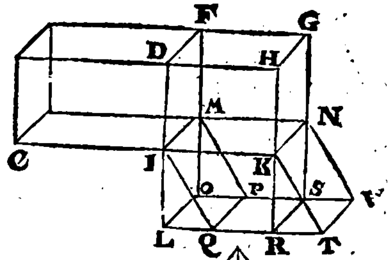


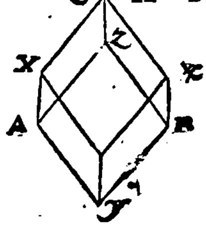
Qu'il ne soit ainsi. Puis que les plans AG & PQ sont en vn mesme plan, & qu'ils ne sont entre mesmes lignes droites : il est certain que deux costez de l'vn estans continuez, coupperont deux costez de l'autre aussi continuez. Soient donc les costez AB & FG continuez vers N & L : Item QO & RP vers K & L : elles se coupperont donc aux poincts K, L, & M, N, faisant vn parallellograme d'autant que les lignes continuees sont parallelles) lequel sera egal à la base plane CI : Car par la 34. p. 1. les lignes MK & NL estant egalles à AF & GB, elles le seront aussi à CH & DI : Item KL & MN estant egalles à OP & QR, elles le seront aussi à CD & HI: & apres auoir mené les quatres lignes CM, DN, HK, IL: il est manifeste que les deux solides HB & HN, sont sur mesme base & de mesme hauteur (car ils sont entre mesmes plans) & les plans opposez à la la base FB & KN, entre mesmes lignes droites, & par la 29. p. 11. ils sont egaux.

Pareillement le solide HN se trouuera egal au solide HR, (estans sur mesme base, de mesme hauteur, & les plans opposez à la base LM & PQ entre mesmes lignes droites) & par la 1. commune sentence le solide HB, sera egal au solide HR : ce que nous auions proposé à demonstrer.

PROP. XXXI.

Les parallellogrammes solides estant sur bases egalles, & de mesme hauteur, sont egaux entre eux.

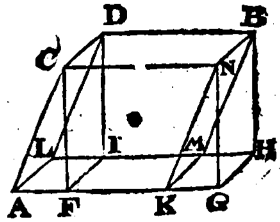




Soient les deux parallellog. solides BX, & CF, desquels les bases AB & CD, & les hauteurs AX & IM sont egalles: ie dis qu'iceux solides sont egaux.

Qu'ainsi ne soit. Leurs hauteurs sont perpendiculaires, ou non: Soient premierement perpendiculaires: & apres auoir continué CI iusques à K, sur les deux lignes MI & IK soit acheué l'angle solide MIKQ, egal à l'angle solide A. par la 26. p. 11. (Car l'angle MIK estant droit, d'autant que c'est la hauteur perpendiculaire, il peut seruir à l'angle solide, d'autant que l'angle plan XAZ est aussi droit, estant la hauteur AX aussi perpendiculaire) & les lignes IM & AX estant egalles, soit faicte IQ egalle à AZ: & IK egalle à AY: & soit acheué le parallellograme solide IV. Il est euident qu'il sera egal & semblable au solide BX, par le mesme discours de la 25. p. 11. Item soient continuees TQ iusques en L, VP iusques en O, DI iusques en L, FM iusques en O, GN iusques en S, & HK iusques en R, faisant le parallellog. solide NL: les deux parallellog. IT & KL sont egaux par la 35. p. 1. Mais IT pour estre egal à AB est aussi egal à CD: partant les bases IT & CD & KL, sont egal, & par la 7. p. 5. les deux CD, & KL auront mesme raison l'vne comme l'autre à la troisiesme DK: mais par la 25. p. 11. comme CD à DK ainsi le solide CD, au solide FK: Item comme DK & KL, ainsi le solide DN au solide NL: & par la 11. p. 5. les deux solides CF & LN, auröt mesme raison l'vne cöme l'autre au solide DK: & par la 9. p. 5. ils seront egaux, & par 29. p. 11. les deux solides NL & IV estans aussi egaux (car ils sont ainsi que demande icelle propos.) le solide CF sera egal au solide IV & par consequent à son egal BX.

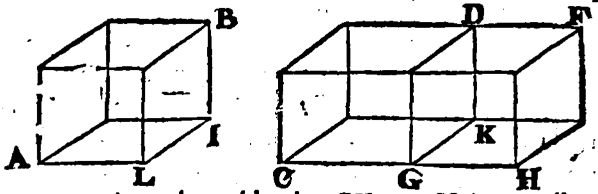
Maintenant si leurs hauteurs ne sont perpendiculaires, il les y faudra reduire en ceste sorte.



Soit le parallellog. solide AB duquel la hauteur AC n'est point perpendiculaire: Soient continuez les costez AK & LM iusques en G & en H, & sur le plan d'icelles lignes soient laissees tomber des quatres points en l'air C, D, B, N: les quatres perpendiculaires CF, DI, BH & NG par la 11. p. 11. accomplissans le solide FB: il est euident que les solides AB & FB sont egaux par la 29. p. 11. Ainsi demeurant la mesme base CB le solide AB de hauteur non perpendiculaire, est reduit à FB de hauteur perpendiculaire. Ce qui estoit à faire.

PROP. XXXII.

Les parallellogrames solides estans de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.

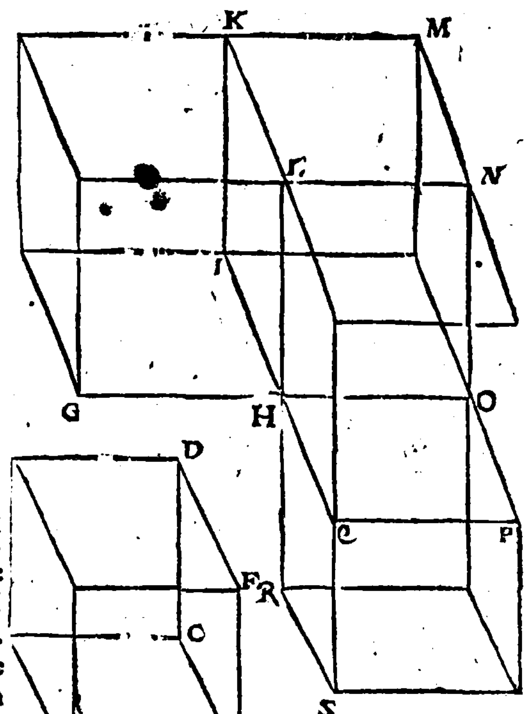


Soient les deux parellellog. solides de mesme hauteur AB & CD. Ie dis qu'ils sont entre eux comme la base AI est à la base CK.

Car si sur la ligne GK (apres auoir prolongé le plan CK vers H) & sur l'angle KGH on construit le parallellograme KH, puis on acheue le pallellog. solide GF, estant de mesme hauteur que AB, & sur base egalle. Il sera egal à AB par la 32. p. 11. & parallellog. solide CF sera couppé par le plan GD, parallel à HF : Le solide CD sera au solide GF (ou AB son egal) comme la base CK à la base KH: laquelle estant construicte egalle à AI base de AB, il est manifeste que le solide CD est au solide AB comme la base CK est à la base AI.

PROP. XXXIII.

Les parallellogrames solides semblables, sont l'vn à l'autre en raison triplée de leurs costez proportionaux.

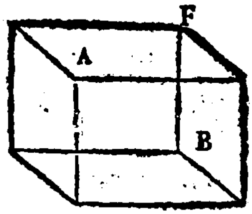


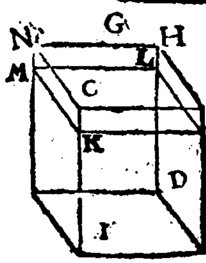
Soient les deux parallellog. solides semblables GK & AD, leurs costez proportionaux GH & AB: ie dis qu'ils sont l'vn à l'autre en raison triplée de GH à AB.

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongée les lignes GH vers O, IH vers Q, & LH vers R : en apres les auoir faites egalles, sçauoir HO à AB, HQ à BC, & HR à BF, soit accompli le parallellog. solide SO : item soient accomplis les parallellog. solides QN & HM. Premierement d'autant que les deux solides GK & AD sont semblables, les lignes GH, HL, HI, sont l'vne à l'autre comme AB, BF, BC, ou leurs egalles HO, HR, HQ: c'est à sçauoir que comme GH à HO: ainsi LH à HR, & IH à HQ Mais par la 1. p. 6. comme GH à HO, ainsi la base GI à la base OI : & comme IH à HQ, ainsi la base IO à la base OQ. Et comme LH à HR, ainsi la base LQ à la base QR, Mais toutes icelles lignes sont en mesme raison, partant icelles quatre bases planes seront en mesme raison, & continuellement proportionnelles. Mais le solide GK est au solide KO, comme la base GI est à la base IO, Item le solide KO au solide NQ comme la base IO à la base OQ, item le solide NQ au solide OS côme la base LO à la base OR : Et icelles quatre bases sont continuellement proport. & par la 32. p. 11. iceux quatre solides seront continuellement proportionaux : Et le premier GK sera au quatriesme SO (ou à son egal AD) en raison triplee du premier GK au secōd KO par la 10. d. 5. Mais GK est à KO, cōme la base plane GI est à la base plane IO par la 32. p. 11. lesquelles bases planes sont l'vne à l'autre comme GH est à HO par la 1. p. 6. & par la 11. p. 5. Le solide GK sera au solide SO, comme GH est à HO : Partant la raison triplee de GK à KO sera la mesme que de GH à HO, ou son egalle AB : Et par consequent GK estant à AD en raison triplee de GK à KO, il sera aussi en raison triplee de GH à AB. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROP. XXXIIII.

Les egaux parallellogrames solides, ont les bases & les hauteurs reciproques : Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques, sont egaux.





Soient deux parallellog. solides GF & IH. Ie dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques : c'est à dire que comme la base GB à la base ID, ainsi la hauteur IC à la hauteur GA. Nota que presques à toutes les demonstrations de ce liure, il faut que les hauteurs des solides soient perpendiculaires : que si elles n'estoient telles il les faut reduire comme nous auons enseigné à la fin de la 31. p. 11. Ie dis donc que les hauteurs & les bases sont reciproques.

Qu'il ne soit ainsi. Premierement il est euident que si les bases GB & ID sont egalles (estās les solides egaux) qu'il faudra aussi que les hauteurs soient egalles. Soient donc les bases inegalles, sçauoir GB plus grande que ID, ie dis que la hauteur IC doit estre plus grande que GA, car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egalle, d'autant que par la 32. p. 11. iceux solides seroient l'vn à l'autre comme leurs bases, partant AB plus grand que CD, & nous les posons egaux, IC sera donc plus grande que GA, & d'icelle soit retranchée IK egalle à GA, & d'iceluy point K soit imaginé le plan KL parallel à ID, couper le solide CD, les deux solides AB & CD estans egaux ils auront mesme raison l'vn comme l'autre au solide KD par la 7. p. 5. Or AB & DK estans de mesme hauteur, ils seront l'vn à l'autre comme la base GB à la base ID par la 32. p. 11. Partant CD tant CD sera aussi à KD comme la base GB à la base ID. Or comme CD à KD ainsi la base IN à la base IM par la 25. p. 11. & icelle base IN est à la base IM comme IC à IK par la 1. p. 6. & par la 11. p. 5. le solide CD est au solide KD comme IC à IK. Le solide CD est aussi à KD comme la base GB à la base ID & par la 11. p. 5. comme la base GB à la base ID, ainsi la hauteur CI est à la hauteur IK ou à son egalle AG.

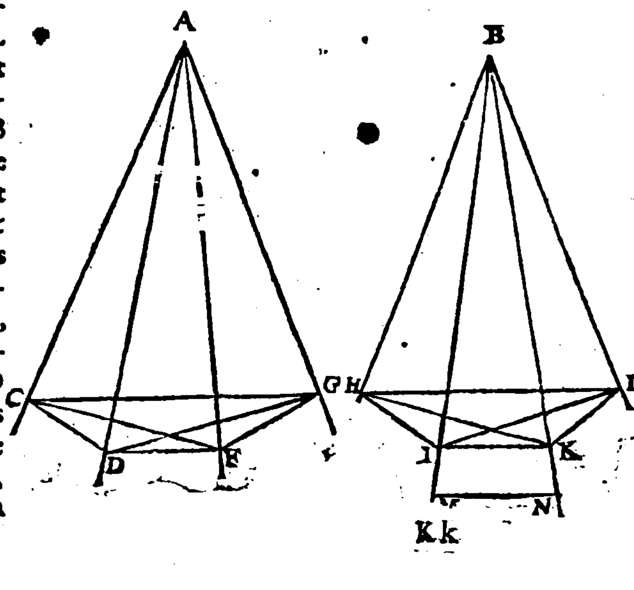
Pour la seconde partie si GB base est à ID base, comme IC hauteur est à AG hauteur (ou son egalle IK) ie dis que les deux solides AB & CD sont egaux.

Car demeurant la mesme construction, les solides CD & KD sont l'vn à l'autre comme CI à KI (comme nous auons tantost dict par la 25. p. 11. & 1. p. 6.) mais comme CI à KI ainsi GB à ID, & par la 11. p. 5. CD sera à KD comme GB à ID: Item comme GB à ID ainsi le solide AB au solide KD (car ils sont de mesme hauteur) par la 32. p. 11. & par la 11. p. 5. CD sera à KD comme AB au mesme KD: & par la 9. p. 5. AB & CD seront egaux.

PROP. XXXV.

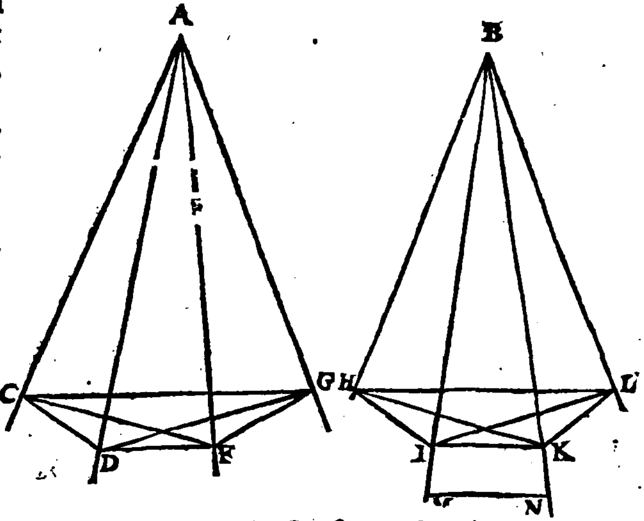
S'il y a deux angles plans egaux, du sommet desquels on leue en l'air deux lignes droites faisant angles egaux auec les costez des angles premieremẽt posez chacun au sien, & d'vn point pris à chacune des deux lignes, on meine des lignes perpendiculaires sur les plans qui sont au dessous, & des points où tombent icelles perpendiculaires on meine des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez: Les angles que font icelles lignes, auec les leuees en l'air sont egaux entre eux.

Soient les deux angles plans egaux HBL & CAG, du sommet desquels B & A on leue en l'air les lignes BN & AF en sorte que LBN & GAF soient egaux, Item HBN & CAF: ie dis que si des poincts pris à l'aduenture en icelles N & F, on abbaisse les perpendiculaires NM, & FD sur le plan des angles donnez, & on meine les lignes MB & DA, que l'angle MBN sera



egal à l'angle D A F.

Qu'il ne soit ainsi. Si les deux lignes AF & BN ne sont egalles, soit de la plus grande BN retrãché BK egalle à AF, & apres auoir baissé la perpẽdiculaire KI sur le plan HBL par la 11. p. 11. & sur les lignes HB & BL mené les perpendiculaires IH & IL, Item DC & CG sur les lignes CA & GA le tout par la 12. p. 1. soient menees les lignes KH, KL, Item FG, FC.



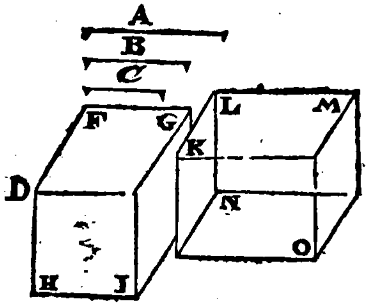
Premierement les triangles KBI, KIH, IHB, ILB sont rectangles: Item FDA FDC, DCA, DGA aussi rect. & les deux trig. BKH, & AFC ayans les angles droits BHK & ACF, & par hypothese HBK egal à CAF, & le costé BK egal au costé AF par la 26. p. 1. les deux autres costez BH & HK, seront egaux aux deux autres costez AC & CF chacun au sien. Par mesme discours de la 26. p. 1. on trouuera BL egalle à AG: & par la 4. p. 1. la base HL du triangle HBL, sera egalle à la base CG du triangle CAG (car par hypothese les angles HBL & CAG sont egaux) & l'angle EHB sera egal à l'angle GCA: mais le droit IHB estoit aussi egal au droit DCA: partant le reste IHL sera egal au reste DCG. Par mesme discours les angles ILH & DGC se trouueront egaux, & par la 26. p. 1. HI sera egal à CD: mais HK est egal à CF, & par la 47. p. 1. IK sera egal à DF: & puis que BK est egalle à AF, aussi par la mesme prop. BI sera egalle à AD: & les deux triangles AIK & ADF auront les trois costez egaux chacun au sien, & par la 8. p. 1. Les angles seront egaux chacun au sien.

PROP. XXXVI.

Si trois lignes sont proportionelles, le parallellograme solide compris d'icelles trois lignes, est egal au parallellograme solide compris de la moyenne: moyennant qu'iceux deux solides soient equiangles.

Soient les trois lignes continuellement proportionelles A, B, C, desquelles on a construit le parallellograme solide OL, ayant sa base KM parallellograme compris des lignes KL & LM, egalles aux deux A & C, & sa hauteur

LN egalle à B: & soit iceluy OL equiangle au parallellograme solide FI compris de trois fois la moyenne B, sçauoir deux fois à la base GD (qui est parallellograme) & la troisiesme à sa hauteur DH : ie dis qu'iceux solides sont egaux.

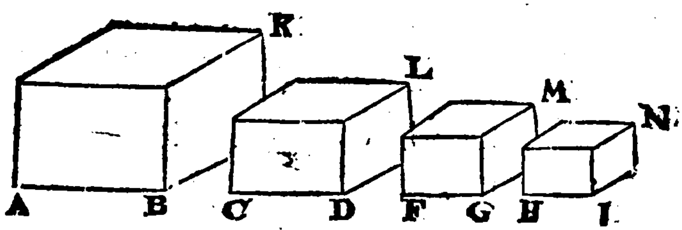


Car puis qu'ils sont equiangles, l'angle solide F sera egal à l'angle solide L: & par les deff. de ce liure ils seront cõposes d'angles plans egaux, ainsi les angles plans DFG & KLM seront egaux: mais comme LM à FG, ainsi FD à KL: c'est à dire que les parallellogrames plans DG & HM ont les costez reciproques, & par la 14. p. 6. ils sont egaux. Or iceux solides FI & LO sont de mesme hauteur DH & LN, lesquelles sont egalles: & par la 32. p. 11. ils sont egaux.

Mais il faut noter icy que la hauteur doit estre perpendiculaire pour tirer la consequence demandee de ceste proposition.

PROP. XXXVII.

Si quatre lignes sont proportionelles, les parallellogrames solides semblables & semblablement posez descrits sur icelles, seront proportionaux: Et si iceux quatre semblables solides parallellogrames sont proportionaux, les quatre lignes sur lesquelles ils seront semblablement posez, seront proportionelles.



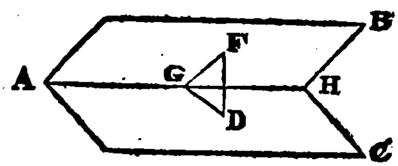
Soient quatre lignes proportionelles comme AB à CD ainsi FG à HI: & soient descris sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez AK, CL, FM, HN: ie dis qu'iceux solides sont proportionaux.

Car puis que AK est semblable à CL, par la 33. p. 11. ils seront l'vn à l'autre en raison triplee de AB & CD: Pareillement FM & HN seront aussi en raison triplee de FG à HI: mais la raison de AB à CD est comme de FG à HI: & par la 15. p. 5. la raison triplee de AB & CD, sera semblable à la raison triplee de FG à HI, & partant par la 11. p. 5. le solide AK sera au solide CL, comme le solide FM à HN.

Maintenant si les quatre solides sont proportionaux, AB sera à CD comme FG à HI. Car tout de mesmes AK sera à CL en raison triplee de AB à CD: Item FM à HN en raison triplee de FG à HI: mais le solide AK est au solide CL comme le solide FM solide HN: partant leur raison triplee sera semblable, & par consequent les quatre lignes seront proportionelles.

PROP. XXXVIII.

Si vn plan est esleué perpendiculairemẽt sur vn autre plan, & d'vn point de l'vn d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire sur l'autre: elle tombera sur leur commune section.



Soit le plan AB, esleué perpendiculairemẽt sur le plan AC, leur ligne de commune section AH, & du point F pris en AB on laise tomber vne perpendiculaire sur AC: ie dis qu'elle tombera sur la commune section AH.

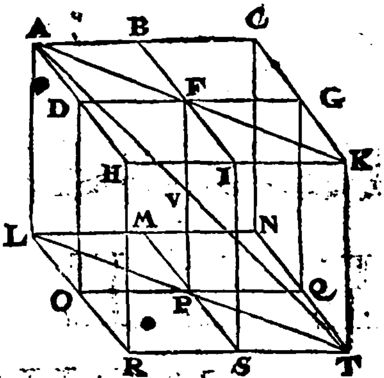
Autrement qu'elle tombe au point D, du plan AC s'il est possible: & par la 12. p. 1. du point D vers la ligne AH soit menee la perpendiculaire DG: & la ligne GF faisant le triangle GDF. Or si la ligne FD est perpendiculaire, estant GF aussi perpendiculaire, les deux angles sur la ligne GD seroient tous deux droits contre la 17. p. 1. Partant FD n'estoit pas perpendiculaire, puis qu'elle deuoit tomber sur AF.

PROP. XXXIX.

Si les costez opposez d'vn parallellograme solide sont couppez en deux egallement, & on meine des plans par les sections: la ligne de commune section d'iceux plans & le diametre du solide, se couppent en deux egallement.

Soit le parallellog. solide AT, ses costez opposez AC, AH, CK, KH. Item LN, LR. TN, TR, soient tous couppez en deux egallement en D, G, B, I: Item en O, S, Q, M: & par icelles sections soient imaginez passer les plans DQ & BS, se couppans l'vn l'autre en la ligne FP: & soit menee la diagonalle AT, couppant FP au point V. Ie dis que les lignes FP & AT se couppent l'vn l'autre en deux egallement.

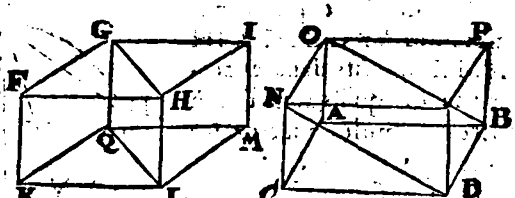
Car par la 2. p. 6. BF estant parallelle à CK, comme AB est egalle à BC, ainsi



AF se trouuera egalle à FK. Item le plan BS estant parallel au plan GT, aussi la ligne FV en iceluy, sera parallelle à la ligne KT aussi dans le mesme plan par la 16. p. 11. & par la 2. p. 6. comme AF est egalle à FK ainsi AV à VT. Item les deux lignes AK & LT estãs parallelles (car leurs plans sont parallelles.) les angles FAV & VTP sont egaux par la 27. p. 1. & les opposez au sommet vers V par la 15. p. 1. & par la 32. p. 1. les troisiesmes seront egaux, & par la 4. p. 6. Les triangles AVF & PVT estans equiangles auront les costez proportionaux, & comme AV à VF ainsi TV à VP: & en changeant comme AV egal à VT, ainsi FV est egalle à VP: partant les deux lignes AT & FP se couppent en deux egallement.

PROP. XL.

Deux prismes de mesme hauteur sont egaux, si la base de l'vn triangulaire, n'est que la moitié de la base de l'autre, estant vn parallellograme.



Soient deux prismes de mesme hauteur KGL & OD; & que OD ait le parallellograme CB pour base, double du triangle QKL, base du prisme HKGL: Iedis qu'ils sont egaux.

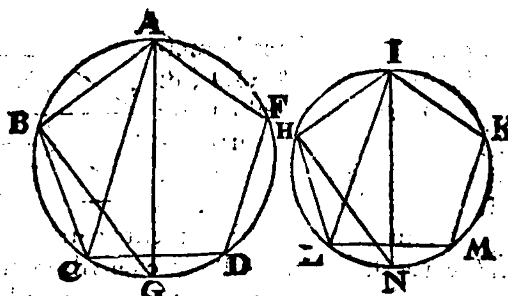
Car si on les accomplit pour estre parallellogrames solides, KI & CP, la base KM sera egalle à la base CB: & estans de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. p. 11. & par la 28. p. 11. les plans diagonaux les diuiseront en deux egalement, & les prismes donnez au commencement estans les moitiez de choses egalles seront egaux.

Fin de l'Element vnziesme.

ELEMENT DOVZIESME.

PROP. I.

LES poligones semblables inscrits aux cercles, sont l'vn à l'autre comme les quarrez descrits des diametres des cercles.

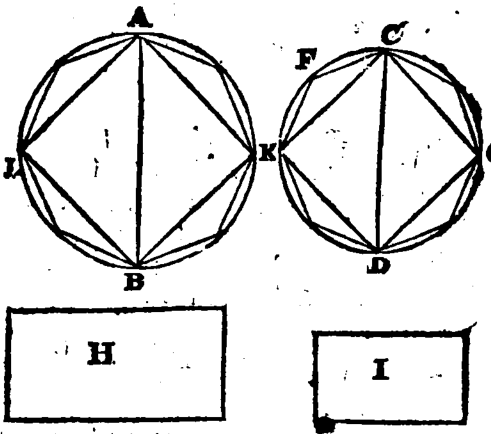


Soient deux poligones semblables A B C G D F & I H L N M K, inscrits dans les cercles: ie dis qu'ils sont l'vn à l'autre comme les quarrez des diametres AG & IN.

Qu'il ne soit ainsi. Soient menées les lignes A C, IL, item BG, & HN: puis que les pentagones sont semblables AB est à BC, comme IH à HL, & l'angle B, egal à l'angle H, & par la 6. p. 6. les triangles BAC & HIL sont equiangles, partant l'angle BCA sera egal à l'angle HLI. Mais ils sont chacun egaux, l'vn à l'angle G, l'autre à l'angle N, par la 21. p. 3. (car ils sont sur mesmes sections BA & HI) ainsi l'angle G sera egal à l'angle N: & par la 31. p. 3. les angles GBA & NHI estans droicts dans les demy cercles, & egaux, les triangles GBA & NHI seront equiangles (car le troisiesme sera egal au troisiesme, par la 32. p. 1.) & par la 4. p. 6. comme BA à AG, ainsi HI à IN: & en changeant comme BA à HI, ainsi AG à IN: & par la 22. p. 6. comme le pentagone sur BA, à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur HI: ainsi le quarré de AG au quarré de IN, ce qui estoit à prouuer.

PROP. II.

Les cercles sont l'vn à l'autre, comme les quarrez descrits de leurs diametres.



Soient les deux cercles sur les deux diametres AB & CD : ie dis qu'ils sont l'vn à l'autre comme le quarré de AB est au quarré de CD, c'est à dire que si on imagine que comme le quarré de AB, au quarré de CD, ainsi le cercle AB a quelque figure quatriesme proport. (comme H) que icelle figure H est egalle au cercle CD.

Autrement elle sera plus petite ou plus grande. Soit premierement plus petite s'il est possible: & soit le cercle CD plus grand qu'icelle de la figure I. Or par la 1. p. 10. ie peux retrancher plus de la moitié du cercle CD, & du residu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne quantité plus petite que I. Soit donc dans iceluy cercle descrit le quarré CGDK, qui est plus grand que la moitié du cercle (d'autant que le quarré de CD, qui est son double, est plus grand que le cercle.) Si les quatre sections du cercle sont plus petites que I, nous auons ce que nous demandons: Sinon, soit couppé l'arc KC en deux egallement au point F, & les trois autres arcs semblablement, & soit inscrit l'octogone dans le cercle : Il est euident que dans les quatre sections egalles, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme KFC, est plus de la moitié de sa section (car le triangle Isoscele KFC est la moitié du rectangle de mesme hauteur & sur mesme base KC, par la 41. p. 1 lequel rectangle est plus grand que la section KFC) Soient maintenant les huict petites figures restantes plus petites que la figure I : que si cela n'estoit, il faudroit tousiours coupper les arcs derniers, & tousiours inscrire des poligones, desquels le dernier auroit deux fois autant de costez que son precedent, & soustraire tousiours plus de la moitié de chacune section, sçauoir son triangle Iscocele : Il est certain qu'à la fin les dernieres sections seront plus petites que la figure I. Mais pour abreger, soient les deuant dictes huict sections restantes plus petites que la figure I : Il est euident que l'octogene sera plus grand que la figure H, puis que les deux H & I sont egalles au cercle CD, soit pareillement inscrit vn octogene semblable au cercle AB : & par la 1. p. 12. l'octogone AB sera à l'octogone CD, comme le quarré de AB : est au quarré de CD : mais comme le quarré de AB au quarré de CD, ainsi le cercle AB à la figure H : & par la 11. p. 5. comme le poligone AB sera au poligone CD, ainsi le cercle AB est à la figure H : & en changeant comme le poligone AB est au cercle A B, ainsi le poligone CD est à la figure H: mais le poligone CD, est plus grand que la figure H: il faudroit donc par la 14. p. 5. que le poligone AB fust plus grand que le cercle A B: ce qui est faux: Donc la figure H ne pouuoit estre plus petite que le cercle CD.

On prouuera aussi qu'elle ne peut estre plus grande. Autrement s'il est possible, puis que comme le quarré de AB au quarré de CD, ainsi le cercle AB à H: aussi en changeant la figure H sera au cercle AB, comme le quarré de CD au quarré de AB: mais soit imaginé que comme H est au cercle AB, ainsi le cercle CD soit à quelque autre figure, comme I: & par la 14. p. 5. comme la figure H est plus grande que le cercle CD, ainsi le cercle AB sera plus grand que la figure I: & si par la 11. p. 5. le cercle AB sera à la figure I, comme le quarré de AB est au quarré de CD. ce qui contreuient à la premiere partie de la demonstration, en laquelle nous auons monstré que l'vn des cercles estant à vne figure, en la raison des quarrez des diametres, qu'icelle figure ne pouuoit estre plus petite que l'autre cercle: Partant la figure H ne pouuoit estre plus grande que le cercle CD: ny plus petite, comme en la premiere partie: elle estoit donc egalle à iceluy: Ce qu'il falloit prouuer.

PROP. III.

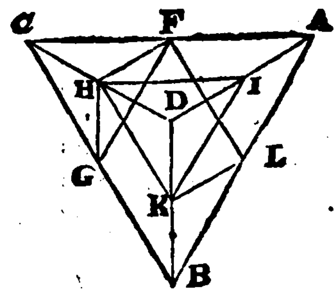
Toute pyramide ayant base triangulaire, peut estre diuisée en deux pyramides égalles, semblables entre elles, & à la totalle, & en deux prismes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totalle.

Soit la pyramide ABCD, ayant la base triangulaire ABC, & le sommet au point D: ie dis qu'elle peut estre diuisée en deux pyramides egalles, semblables entre elles, & à la totalle: & en deux prismes egaux, plus grands que la moitié de la pyramide, donnee.

Qu'il ne soit ainsi. Soient couppez en deux egallement, tous les costez d'icelle pyramide, sçauoir les trois de la base ABC aux poincts F, G, L, & les trois hypothenuses DA, DB, DC aux trois poincts H, I, K, & soient menees les lignes FL, FG, HI, IK, KH, HG, HF, KL. Premierement la base ABC est diuisée en trois figures: au quadrangle BLFG, & les deux triangles CGF, & FLA, lesquels sont semblables entre eux, & au tout ABC, duquel les costez sont couppez proportionnellement, & par la 2. p. 6. la ligne FG est parallelle à BA, & FL à BC: Partant estant l'angle A commun aux deux triangles BAC, & LAF, l'angle exterieur LFA sera egal à l'opposé interieur GCF, par la 29. p. 1. Et par la 32. p. 1. le troisiesme sera egal au troisiesme, & par la 4. p. 6. & 1. d. 6. les deux triangles BAC & LAF seront semblables. Par le mesme discours le triangle GFC, sera semblable au triangle BAC, & par la 21. p. 6. les deux triangles CGF & FLA, seront semblables entre eux & egaux, d'autant que leurs costez sont egaux. Quant au quadrangle BLFG, il est euident par la 41. p. 1. qu'il est double au triangle

FLA

FLA (car il est sur base egalle, & entre mesmes parallelles) il est aussi manifeste que toute la pyramide ABCD, est diuisée aux deux pyramides CGFH, & HKID egalles & semblables, & aux deux prismes, l'vn FHGBKL, duquel la base est le quadrangle BLFG, l'autre HIKLAF, duquel la base est le triangle LAF: & pourautant qu'ils sont de mesme hauteur, sçauoir de la hauteur du point H, ou du point K, & que la base quadrangulaire est double de la triangulaire: ils seront egaux par la 40. p. 11.



Que les pyramides GCHF, & KHID soient semblables, on le prouue en ceste sorte: d'autant que HK, & CB sont parallelles, l'angle exterieur DHK est egal à son opposé interieur HCG par la 29. p. 1. Et CHG à HDK, & par la 32. p. 1. le troisiesme sera egal au troisiesme, & par la 4. p. 6. Les triangles equiangles DHK, & HCG seront semblables entre eux & au triangle CDB: ils seront aussi egaux entre eux, par la 20. p. 6. estans les lignes CH & HD egalles. Par les mesmes raisons les triangles IDH, & FHC seront egaux, & semblables entre eux & au triangle ADC: Item le triangle IKH se prouuera facilement equiangle & semblable au triangle ABC, par la 10. p. 11. (ayans leurs costez parallels se touchant angulairement en diuers plans (partant aussi semblables au triangle GCF, & egal à iceluy par la 20. p. 6. Car HK est egal à GB, & GB à GC: & par la 10. p. 11. KDI & BDA seront semblables à GHF, & KDI egal à iceluy: & par la deff. des solides semblables & egaux, icelles trois pyramides faictes de plans semblables, seront semblables, & les deux petites seront egalles, faictes de plans egaux.

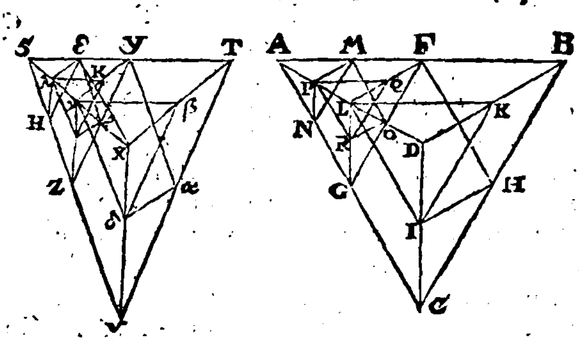
Que les deux prismes FHGBKL, & HIKLAF soient ensemble plus de la moitié d'icelle pyramide totalle, il appert ainsi: iceux deux prismes estans egaux, l'vn d'iceux FHGBKL, ayant base quadrangulaire double de la base GFC de la pyramide CGHF, & de mesme hauteur qu'icelle, on en peut retrancher vne pyramide egalle à icelle pyramide FCGH: partant iceluy prisme est plus grand que la pyramide. Et par consequent les deux prismes ensemble seront plus grands que les deux pyramides retranchées ensemble, ce qui estoit à demonstrer.

PROP. IIII.

Si deux pyramides de mesme hauteur ayans base triangulaire, sont diuisées en deux autres pyramides semblables entre elles, & à la toute, & en deux prismes egaux, & les pyramides de la diuision sont tousiours sub-diuisées de mesme façon: comme la base de l'vne des py-

ramides à la base de l'autre, ainsi tous les prismes ensemble tant de la diuision que sub-diuision d'icelle pyramide, à tous les prismes ensemble de l'autre pyramide.

Soient les deux pyramides de mesme hauteur ABCD, & SVTX (sçauoir que la hauteur du point X soit egalle à la hauteur du point D) lesquelles sont diuisées chacune en deux pyramides egalles & semblables, & en deux prismes egaux côme enseigne la 3. p. 12. Et en continuant, les pyramides rescindées AGFL & SZYγ sont aussi

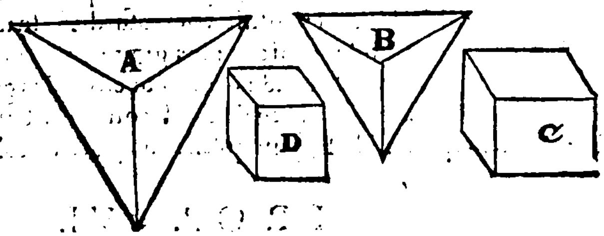


sub-diuisées en deux autres pyramides egalles & semblables, & en deux prismes egaux en continuant tousiours de mesme façon : ie dis que comme la base ABC, à la base SVT, ainsi les quatres prismes tant de la diuision que sub-diuision de la pyramide ABCD, aux quatre prismes de la diuision & sub-diuision de la pyramide SVTX.

Car les deux lignes AB & ST, estant chacune couppée en deux egallement aux poincts Y, & F, il est euident que comme AB à BF, ainsi ST à TY : Et par la 22. p. 6. comme le triangle ABC, au triangle BHF, ainsi le triangle SVT au triangle SZY ou Y α T (car par la precedente ils sont semblables, & semblablement posez). Et en changeant comme le triangle ABC au triangle SVT, ainsi le triangle FHB au triangle Y α T : Mais les deux prismes de mesme hauteur LKIHBF & γ β δ α TY) (car ils sont chacun de la demye hauteur de leur pyramide, lesquelles sont de mesme hauteur) sont l'vn à l'autre comme la base FHB à la base Y α T, par la 32. p. 11. & 15. p. 5. estans chacun la moitié de leur parallellograme solide, comme il appert par ce qui a esté demonstré à la 28. p. 11. & par la 7. p. 5. les deux autres prismes GLFHIC, & Z γ Y α δ V, egaux aux deux premiers chacun au sien, seront l'vn à l'autre comme la base FHB à la base Y α T : Et en raison composée les deux ensemble GLFHIC, & LKIHBF seront aux deux ensemble Z γ Y α δ V & γ β δ α YT, comme la base FBH à la base Y α T, par la 18. p. 5. ou comme la base ABC à la base SVT, par la 11. p. 5. car c'est la mesme raison. Maintenant en la sub-diuision des pyramides AGLF, & SZ γ Y, les deux prismes ensemble de l'vne, seront par le mesme discours aux deux prismes ensemble de l'autre, comme la base AGF à la base SZY, ou par la 11. p. 5. comme la base ABC à la base SVT : mais en la premiere diuision les deux prismes de la pyramide ABCD, estoient en la mesme raison aux deux prismes ensemble de l'autre pyramide SVTX & en raison composée par la 18. p. 5. Les quatres prismes de la pyramide ABCD sont aux quatres prismes de la pyramide SVTX, tant de la diuision que sub-diuision, comme le triangle ABC au triangle STV.

PROP. V.

Les pyramides de mesme hauteur ayans base triangulaire, sont l'vne à l'autre comme leurs bases.



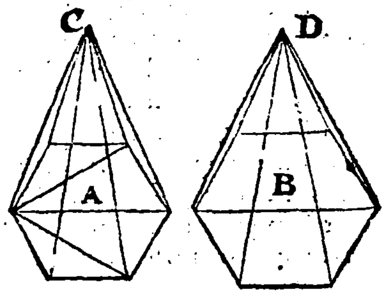
Soient les pyramides de mesme hauteur A & B, desquelles les bases sont les triangles A & B (sçauoir ceux qui soustiennent les deux poincts des hauteurs A & B) ie dis que comme la base A est à la base B, ainsi la pyramyde A, à la pyramide B.

Autrement, soit imaginé comme en la 2. p. 12. que comme la base A à la base B, ainsi la pyramide A à quelque solide, comme C: ie dis qu'iceluy solide C est egal à la pyramide B, autrement il sera plus petit ou plus grand: & soit en premier lieu plus petit comme de la quantité du solide D. Ainsi nous imaginons que les deux solides C & D, soient egaux à la pyramide B. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiser vne pyramide en deux pyramides semblables, & en deux prismes, lesquels seront plus grands que la moitié de la pyramide totalle: Que si de la pyramide B on retranche plus de la moitié, sçauoir les deux prismes comme dessus, & de chacune pyramide restante encores plus de la moitié, sçauoir deux prismes, en continuant tousiours iusques à ce que toutes les pyramides restantes apres le dernier retranchement, soient toutes ensemble manifestement plus petites que le solide D: ce qui peut arriuer par la 1. p. 10. Ainsi tous les prismes ensemble retranchez de la pyramide B, seront plus grands que le solide C, puis que le reste est plus petit que le solide D. Pareillement soient retranchez autant de fois deux prismes de la pyramide A, comme on en a retranché de la pyramide B: il est euident par ce qui a esté demonstré à la precedente proposition, que comme la base A, à la base B, ainsi tous les prismes retranchez de la pyramide A, à tous les prismes retranchez de la pyramide B: Mais nous auons posé que comme la base A à la base B, ainsi la pyramide A au solide C. Et par la 11. p. 5. Les prismes retranchez de la pyramide A seront aux prismes retranchez de la pyramide B, comme la pyramide A est au solide C: & en changeant les prismes retranchez de la pyramide A, seront à la pyramide A, comme les prismes retranchez de la pyramide B sont au solide C. Or les prismes retranchez de la pyramide A, sont plus petits qu'icelle pyramide: Et par la 14. p. 5. les prismes retranchez de la pyramide B, seront plus petits que le solide C, & nous les auions tantost prouuez estre plus grands en posant le solide C plus petit que la pyramide B. partant icelle hypothese a esté fausse, qui nous a conduit à l'absurde: Et le solide C n'estoit plus petit que la pyramide B.

Soit donc plus grand s'il est possible, puis que comme la base A à la base B, ainsi la pyramide A au solide C, en chãgeant la base B, sera à la base A, comme le solide C est à la pyramide A. Pareillement comme le solide C à la pyramide A, soit la pyramide B à quelque autre solide, comme D: Et par la 14. p. 5. d'autant que le solide C est posé plus grand que la pyramide B, aussi la pyramide A sera plus grande que le solide D: & par la 11. p. 5. comme la base B à la base A, ainsi la pyramide B à vn solide plus petit que l'autre pyramide: mais nous auons demonstré que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, sçauoir que les prismes retranchez d'vne pyramide, estoient plus grand que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: Partant le solide C ne peut estre plus grand que la pyramide B, ny aussi plus petit, il sera donc egal. Ainsi comme la base A à la base B, la pyramide A est à la pyramide B, puis qu'elle est egalle au solide C.

PROP. VI.

Les pyramides de mesme hauteur ayans bases poligones, sont l'vne à l'autre comme leurs bases.



Soit la pyramide AC de mesme hauteur que la pyramide BD, desquelles les bases A & B sont poligones: ie dis que comme la base A à la base B, ainsi la pyramide AC, à la pyramide BD.

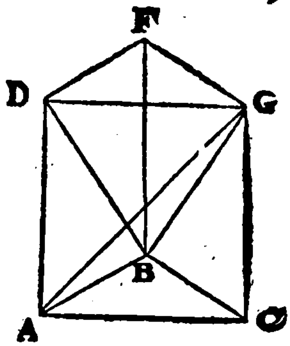
Ceste demonstration est aisee à comprendre par la veuë seulement de la figure: Car la base estant poligone elle peut estre reduicte en triangles: & autant que la base contiendra de triangles, la pyramide se diuisera en autant de pyramides de mesme hauteur que la totalle ayans bases triangulaires, lesquelles seront toutes particulierement l'vne à l'autre comme leurs bases par la 5. p. 12. & par la 24. p. 5. repetee tant de fois qu'il sera besoin, la totalle pyramide AC sera à la totalle BD, comme la totalle base A, à la totalle base B: ce qu'il falloit prouuer.

PROP. VII.

Tout prisme peut estre diuisé en trois pyramides egalles, ayans bases triangulaires.

Soit le prisme ABCDFG, ie dis qu'il peut estre diuisé en trois pyramides egalles, ayans bases triangulaires.

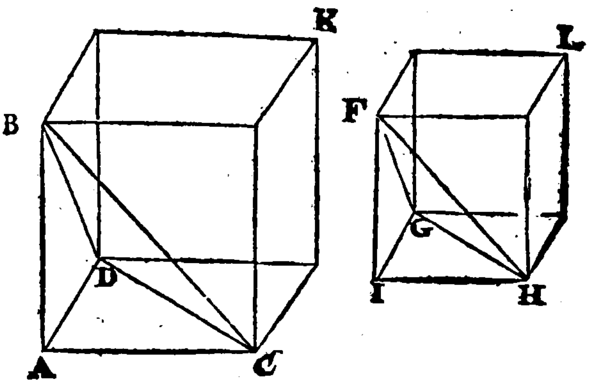
Car ſi des trois parallellogrames on meine les trois dimetientes DB,& BG,GA, il eſt euidẽt que le priſme ſera diuiſé en trois pyramides: monſtrons qu'elles ſont egalles. D'autant que la diagonalle AG, couppant le parallellog. DC en deux egallement, les triangles DGA, & GAC ſont egaux: Partant la pyramide ayant pour baſe le triangle DGA, & de la hauteur du point B par la 5.p.12. eſt egalle à la pyramide, ayant pour baſe le triangle GAC & de la meſme hauteur du point B: laquelle pyramide eſtant la meſme qui a pour baſe le triãgle ABC, & la hauteur GC, par la 5.p. 12. ſera egalle à la pyramide, ayant pour baſe le triangle DFG (qui eſt egal au triangle ABC par la deff. du priſme) & de la hauteur de FB egalle à la hauteur GC par la 34. p. 1. (car les deux lignes FB & GC eſtant egalles & parallelles, ou elles ſont toutes deux perpendiculaires, ou toutes deux ſemblablement inclinees ſur meſme plan: & par conſequent icelles trois pyramides ſeront egalles entre elles. De cecy reſulte que tout priſme eſt triple d'vne pyramide de meſme hauteur, eſtant ſur meſme baſe ou ſur baſe egalle.



PROP. VIII.

Pyramides ſemblables ayans baſes triangulaires, ſont en raiſon triplee de leurs coſtez proportionaux.

Soient les deux pyramides ſemblables ABCD & IFGH, ayant baſes triangulaires ADC & IGH: ie dis qu'elles ſont en raiſon triplee des coſtez de meſme raiſon AC & IH.

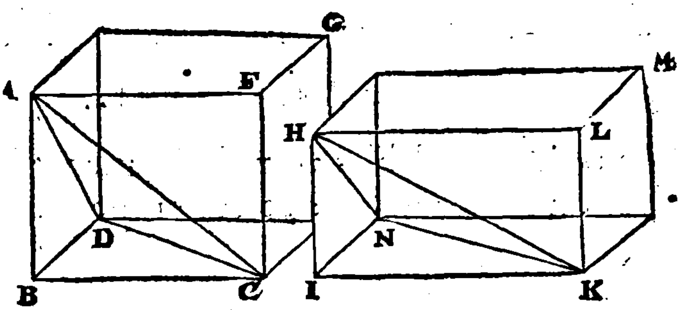


Qu'ainſi ne ſoit. Soiẽt acheuez les parallellogrames ſolides AK & IL. D'autant que les pyramides ſont ſemblables les trois coſtez AD, AB, AC, ſeront proportionaux aux trois coſtez IG, IF, IH, & l'angle ſolide A egal à l'angle ſolide I, par la deff. des ſolides ſemblables: Et par la meſme demonſtration qui a eſté faicte à la 27.p.11. les deux ſolides AK & IL ſeront ſemblables, ayans les trois coſtez AB, AD, AC, proportionaux aux trois coſtez IF, IG, IH, & les oppoſez ſeront auſſi proportionaux, & par conſequent les ſix plans proportionaux aux ſix plans: Mais les deux ſolides AK & IL, eſtans ſemblables, ils feront en raifon triplee de leurs coftez de femblable raifon AC & IH par la 33. p. 11 Et comme le folide AK au folide IL, ainfi la pyramide ABDC à la pyramide FIGH (car chacune pyramide eft la fixiefme partie de fon folide, d'autant que par la 28. p.11. chacun folide peut eftre diuifé en deux prifmes egaux, & chacun prifme en trois pyramides egalles par la 7. p. 12.) & par la 11. p. 5. les pyramides feront en raifon triplee des coftez de mefme raifon AC & IH.

PROP. IX.

Les pyramides egalles ayans bafes triangulaires, leurs hauteurs font reciproques aux bafes : Et les pyramides ayans bafes triangulaires reciproques à leurs hauteurs, font egalles.

Soient les deux pyramides egalles ABCD & HIKN, ayans bafes triangulaires: ie dis que comme la bafe ABC à la bafe HIK, ainfi la hauteur du point N à la hauteur du point D:



Car c'eft ainfi que les bafes font reciproques aux hauteurs.

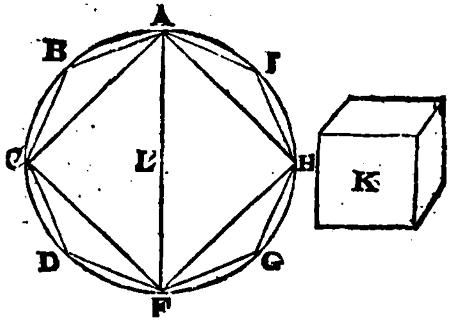
Qu'il ne foit ainfi. Soient acheuez les parallellogrames folides BG & IM, & comme en la precedente il fera euident que chacun folide ainfi bafty fera fextuple de fa pyramide: Et les deux pyramides eftant egalles, iceux folides BG & IM feront egaux: & par la 34. p. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux bafes (C'eft à dire que comme la hauteur du point D à la hauteur du point N, ainfi la bafe IL à la bafe BF) mais comme IL à BF, ainfi fa moitié le triangle HIK, à la moitié de BF, fçauoir le triangle ABC, & par la 11. p. 5. comme la hauteur du point D à la hauteur du point N, ainfi le triangle IHK au triangle BAC.

Pour la feconde partie: Si la hauteur du point D eft à la hauteur du point N, comme le triangle HIK eft au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD. & HIKN feront egalles. Car il eft euident comme cy-deffus que la hauteur du point D, fera à la hauteur du point N, comme la bafe IL, à la bafe BF (d'autant qu'elles font doubles des triangles HIK & ABC) ainfi les parallellog. folides BG & IM, auront les hauteurs reciproques aux bafes: & par la 34. p.11. Ils feront egaux, & par confequent leurs fixiefmes parties fçauoir les pyramides ABCD, & HIKN.

PROP. X.

Tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre ayant baſe egalle & de meſme hauteur.

Soit vn cylindre & vn cone tous deux de meſme hauteur & ayans vne meſme baſe ſçauoir le cercle L : ie dis que le cylindre eſt triple du cone.

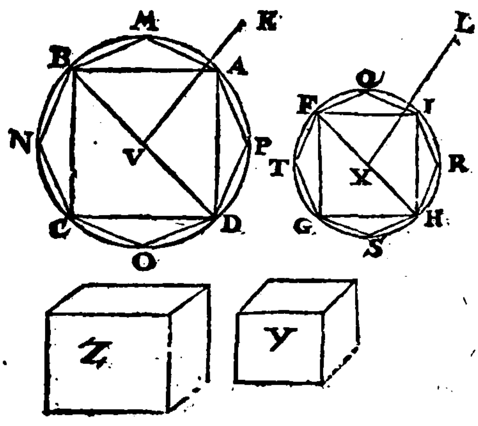


Autrement il ſera plus grand ou plus petit que le triple d'iceluy cone. Soit premierement plus grand s'il eſt poſſible, & de la quantité du ſolide K (c'eſt à dire que ſi on retranche le ſolide K du cylindre L, le reſte ſera egal au triple du cone L) Maintenant dans le cercle ſoit inſcrit le quarré ACFH, diuiſé en deux triangles par la diagonalle, & ſur iceux triangles ſoient eſleuez deux priſmes de meſme hauteur que le cylindre L : Et parce que le quarré eſt plus de la moitié du cercle, il eſt euident qu'iceux deux priſmes ſeront plus de la moitié du cylindre. Que ſi les ſegmens du cylindre (les deux priſmes eſtans ſouſtraicts) ſçauoir B, D, G, I, ſont encores plus grands que le ſolide K : ſur les baſes d'iceux ſegmens ſoient faicts les quatre triangles Iſosceles D, G, B, I, & ſur iceux ſoient eſleuez quatre priſmes de meſme hauteur que le cone ou cylindre L : il eſt euident qu'iceux quatre priſmes ſeront plus de la moitié d'iceux quatre ſegmens : Que ſi les huict petits ſegmens reſtans ne ſont plus petits que le ſolide K, ſoit touſiours en ceſte façon ſouſtrait plus de la moitié de ce qui reſtera, iuſques à ce que par la 1. p. 10. les ſegmens reſtans ſoient plus petits que le ſolide K. Et pour abreger ſoient iceux huict petits ſegmens plus petits que le ſolide K : Il eſt donc manifeſte que la colomne compoſee de ces ſix priſmes, ayant pour baſe le poligone inſcrit au cercle L, & de meſme hauteur que le cylindre donné : ſera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui a eſté dict cy-deſſus. Or par ce que chacun priſme eſt triple de ſa pyramide de meſme hauteur & ayant baſe egalle, car il peut eſtre diuiſé en trois telles pyramides egalles par la 7. p. 12. Il s'enſuit que tous iceux priſmes faiſant la colomne ayant pour baſe le poligone inſcrit au cercle L (c'eſt à dire icelle colomne de meſme hauteur que le cylindre L) eſt triple de toutes les ſix pyramides faiſant la ſeule pyramide, ayant le meſme poligone pour baſe & de meſme hauteur qu'icelle colomne. Partant icelle pyramide ſera plus grande que le cone, de meſme hauteur, ayant le cercle pour baſe, ce qui eſt impoſſible, n'eſtant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'eſtoit pas plus grãd que le triple du cone.

Soit donc plus petit s'il eſt poſſible : & de la quantité du ſolide K, c'eſt à dire que ſi on retranche le ſolide K du cone, que le reſidu ſoit la troiſieſme partie du cylindre. Maintenant du cone L, ſoit retranché plus de la moité, ſçauoir la pyramide de meſme hauteur, ayant pour baſe le quarré ACFH, & du reſidu, ſçauoir des quatre segmens B, D, G, I, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle Isoscele en iceluy segment : soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide K : ce qui doit arriuer par la 1. p. 10. Soient donc pour abreger iceux huict petits segmens plus petits que le solide K : il est donc euident que la pyramide de mesme hauteur que le cone ayant iceluy octogone pour base est plus que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le solide K: Or iceluy cone ainsi rescindé est le tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, comme il a esté dit cy-dessus, le tiers de la colomne de mesme hauteur, ayant le mesme octogone pour base. Partant icelle colomne seroit plus grande que le cylindre donné duquel elle est partie. Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone : il faut donc qu'il soit egal, ce qui estoit à demonstrer.

PROP. XI.

Les cones & cylindres de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.



Soient les deux cones de mesme hauteur BK, & FL, desquelles bases sont les cercles ABCD & FGHI, & les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs VK & XL: Ie dis que comme le cercle ABCD au cercle FGHI, ainsi le cone BK au cone FL. C'est à dire que si on imagine que comme le cercle au cercle, ainsi le cone BK a quelque autre solide, comme Z : qu'iceluy solide Z sera egal au cone FL.

Autrement il sera plus petit ou plus grand: Soit premierement plus petit, & s'il est possible de la quantité du solide Y: ainsi les deux solides Z & Y seront egaux au cone FL. Maintenant du cone FL comme en la precedente, soit retranché plus de la moitié, sçauoir vne pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant pour base le quarré FGHI : & du residu encores plus de la moitié, sçauoir quatre pyramides de mesme hauteur que le cone, ayans pour base les quatre triangles Isosceles FQI, IRH, HSG, GTF, en continuant tousiours iusques à ce que par la 1. p. 10. le residu soit plus petit que le solide Y : & soit iceluy residu pour abreger les huict petits segements : il s'ensuit que la pyramide FL de mesme hauteur que le cone FL, & ayant pour base l'octogone FTGSHRQ, sera.

sera plus grande que le solide Z. Dans le cercle DB, soit inscrit vn poligone semblable au poligone de la base circulaire FH, & sur iceluy soit bastie vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK : par la 1. & 2. p. 12. comme le quarré du diametre BD au quarré du diametre FH, ainsi le poligone BD au poligone FH : & comme le quarré de BD au quarré de FH, ainsi le cercle BD au cercle FH, & par la 11. p. 5. comme le poligone BD au poligone FH, ainsi le cercle BD au cercle FH: mais comme le cercle BD au cercle FH, ainsi le cone BK au solide Z, & par la 6. p. 12. comme le poligone BD au poligone FH, ainsi la pyramide BK à la pyramide FL, & par la 11. p. 5. La pyramide BK sera à la pyramide FL, comme le cone BK à solide Z : & en changeant comme le cone BK à la pyramide BK, ainsi le solide Z à la pyramide FL, lequel estant plus petit qu'icelle pyramide par la 14. p. 5. Le cone BK sera aussi plus petit que la pyramide BK, qui n'est que sa partie, ce qui est impossible: Donc le solide Z n'estoit pas plus petit que le cone FL.

Soit donc plus grand s'il est possible: & soit en changeant comme le solide Z au cone BK, ainsi le cercle FH au cercle BD & comme iceluy solide Z au cone BK soit aussi le cone FL à quelque autre solide comme Y : Et par la 14. p. 5. puis que le solide Z est plus grand que le cone FL, aussi le cone BK sera plus grand que le solide Y. Item comme le cercle FH est au cercle BD, ainsi le solide Z est au cone BK, & par la 11. p. 5. comme le cercle FH est au cercle BD ainsi le cone FL au solide Y plus petit que le cone BK, ce que tantost nous auõs monstré estre impossible, donc le solide Z n'est plus grand ne plus petit que le cone FL: ains egal.

Ce que nous auons prouué des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur, d'autant que le cylindre est triple de son cone de mesme hauteur, & ayant base egalle. Que si le cone est au cone comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base, par la 15. p. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base.

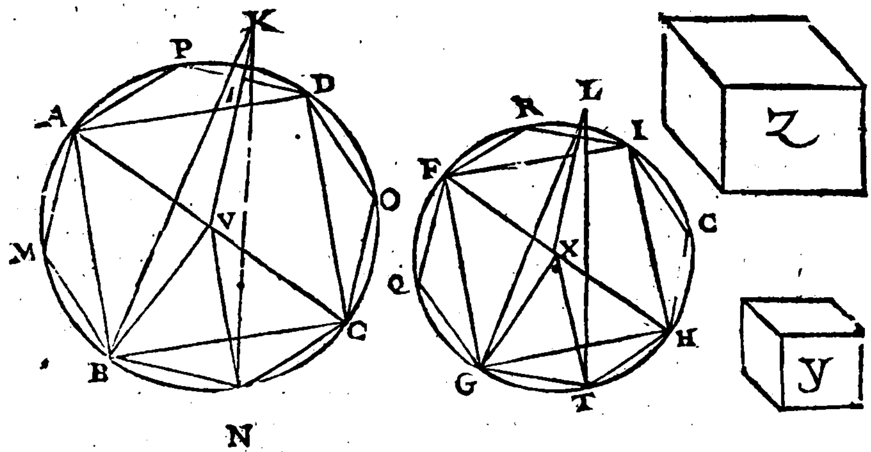
Or on prouue la triplicité du cylindre au cone par la 10. p. 12. Voila ce que nous auions entrepris à demonstrer.

PROP. XII.

Les cones & cylindres semblables sont l'vn à l'autre en raison triplee des diametres de leurs bases.

Soit le cone AK, ayant pour base le cercle ABCD, & l'axe VK, semblable au cone FL, qui a pour base le cercle FGHI, & l'axe XL : ie dis qu'ils sont l'vn à l'autre en raison triplée du diametre AC au diametre FH : c'est à dire que si on imagine comme aux precedentes que le cone AK soit à quelque solide, comme à Z, en raison triplée du diametre AC au diametre FH : Ie dis que le solide Z est egal au cone FL.

Autrement il sera plus grand ou plus petit. Soit premierement plus petit, sçauoir de la quantité du solide Y : Donc les deux solides Y & Z seront egaux au cone FL : Et soit faicte detraction de plus de la moitié du cone FL, & du resdu encores plus de la moitié, iusques à ce que par la 1. p. 10. les restes (c'est à sçauoir pour abreger les huict petits segmens, qui sont alentour de la pyramide à la base octogone FL, ou de plus s'il est besoin) soient plus petits que le solide Y: Il est euident qu'icelle pyramide à base poligone FL, sera plus grande que le solide Z. Maintenant dans le cercle AC soit inscrit vn mesme poligone que le

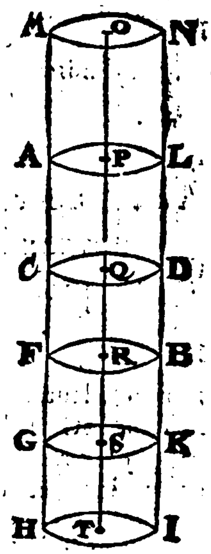


plus grand qui soit inscrit au cercle FH, sçauoir AMBNCODP: & sur iceluy soit esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone AK: Il est manifeste qu'icelle pyramide est composee d'autant de pyramides egalles, qu'il y a de costez au poligone inscrit dans le cercle (c'est à sçauoir que la pyramide totalle AC est composee de huict pyramides egalles & semblables à la pyramide BVNK de mesme hauteur de la totalle) Le mesme se peut dire que l'autre pyramide totalle FL est composee de huict pyramides egalles & semblables à la pyramide GXTL, de mesme hauteur que sa totalle. Mais d'autant que les cones AK & FL par la deff. des cones semblables, sont comme le diametre AC à l'axe VK, ainsi le diametre FH à l'axe XL: & par la 15. p. 5. le demy diametre BV sera à l'axe VK, comme le demy diametre GX est à l'axe XL: & les angles BVK & GXL estant droicts, par la 6. p. 6. Le triangle BVK sera equiangle au triangle GXL: Item NVK sera aussi equiangle à TXL, & par la 4. p. 6. ils auront les costez proportionaux & seront semblables. Item BV est à VN comme GX à XT (estans chacun egaux) & l'angle V egal à l'angle X, (ayans chacun la huictiesme partie de sa circonferance pour base) & par la 6. p. 6. les triangles BVN, & GXT, seront equiangles, partant semblables. Item NB est à BV comme TG à GX (d'autant que les triangles NBV, & GTX sont semblables) & pour la mesme raison VB est à BK comme XG & GL, & en raison egalle, NB, sera à BK comme TG à GL: Et par mesme discours BN, est à NK, comme GT à TL: Et les egalles BK & KN, seront l'vn à l'autre: comme aussi les egalles GL à LT: Et par la 5. p. 6. Les triangles BKN & GLT, seront equiangles & semblables, & par la deff. des pyramides semblables, les deux pyramides BNVK & GXLT, seront semblables: Et par la 8. p. 12. elles seront en raison triplee de leurs costez proportionaux, sçauoir des demy-diametres BV & GX: Par mesme discours on prouuera les sept autres pyramides de la totalle AK, proportionaux à vne chacune des sept autres pyramides de la totalle FL: Et par la 12.p.5. Les toutes seront aux toutes, comme l'vne d'icelles est à l'vne d'icelles: C'est à dire que toute la pyramide AK est à toute la pyramide FL, en raison triplee du demy diametre BV au demy diametre GX, ou bien par la 15.p.5. comme le diametre AC au diametre FH. Or est il par nostre hypothese que le cone AK est au solide Z, en raison triplee des deux diametres AC & FH: Et par la 11.p.5. Le cone AK sera au solide Z, comme la pyramide AK, à la pyramide FL: Et en changeant le cone AK, sera à la pyramide AK, comme le solide Z, à la pyramide FL: laquelle estant plus grande que le solide Z: La pyramide AK par la 14.p.5. sera plus grande que le cone AK, duquel elle est partie, ce qui est impossible. Donc le solide Z, n'estoit pas plus petit que la pyramide FL. On prouuera aussi comme aux precedentes qu'il n'est pas plus grand: Il sera donc egal.

Ceste preuue soit aussi entenduë des cylindres semblables, car leurs cones estans en raison triplee des diametres par la 15.p.5. Les cylindres qui sont triples d'iceux cones seront l'vn à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

PROP. XIII.

Si vn cylindre est couppé par vn plan parallel, aux plans opposez d'iceluy cylindre: les segmens des cylindres sont l'vn à l'autre comme les segmens de l'axe.

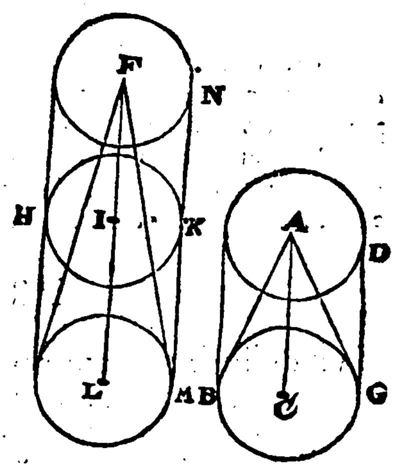


Soit le cylindre AB, couppé par le plan CD, parallel aux deux plans opposez AL & FB: ie dis que le segment de cylindre AD, est au segment de cylindre CB, comme l'axe PQ, est à l'axe QR.

Qu'il ne soit ainsi, apres auoir continué l'axe de part & d'autre, soit faicte PO egalle à PQ & RS & ST de l'autre costé egalles à QR: Et soit imaginé le cylindre AB, continué d'vn costé iusques au point O, & de l'autre iusques au point T. Il est euident que tous les cylindres ML, AD, CB, FK, GI, sont tous sur bases egalles, & par la 11.p.12. les deux qui ont les axes egaux ML & AD (c'est à dire qui sont de mesme hauteur) sont egaux: Item les trois CB, FK, GI, estans de mesme hauteur, sont aussi egaux: Ainsi il est euident que comme l'axe OQ est multiplice de l'axe PQ, ainsi le cylindre MD, est multiplice du cylindre AD: Pareillement que comme l'axe QT est multiplice de l'axe QR, ainsi le cylindre CI, est multiplice du cylindre CB, & par la 14.p.5. si l'axe OQ est egal plus grand ou plus petit que l'axe QT, aussi le cylindre MD sera egal plus grand ou plus petit que le cylindre CI: & par la 6. deff. 5. comme l'axe PQ à l'axe QR, ainsi le cylindre AD au cylindre CB. Ce qui estoit à demonstrer: Il faut noter que ceste demonstration sera aisée a qui aura compris la 1. p. 6. & 25. p. 11.

PROP. XIIII.

Les cones & cylindres ayans bases egalles, sont l'vn à l'autre, comme leur hauteur.



Soient deux cylindres BD, & HN, sur bases egalles BG & HK: ie dis qu'ils sont l'vn à l'autre comme leur hauteur, c'est à dire cóme l'axe AC à l'axe FI.

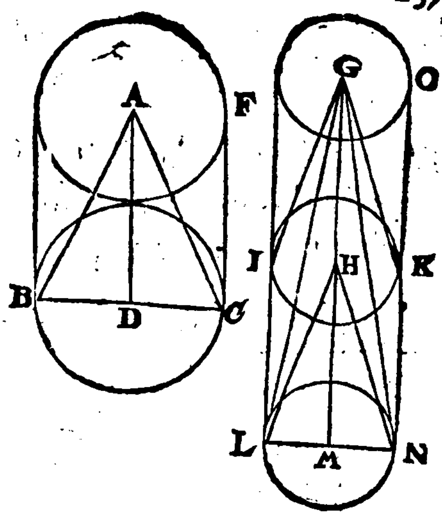
Qu'il ne soit ainsi: Soit continué l'axe FI, iusques au point L, & soit faicte IL egalle à AC, & soit imaginé le cylindre NH continué iusques au point M. Et d'autant que le plan KH couppe le total cylindre NHM estant parallel aux deux plans opposez, par la 13. p. 12. Les cylindres NH, & HM, seront l'vn à l'autre comme les axes FI & IL: Mais IL est egal à AC, & la base HK à la base BG: Et par la 11. p. 12. Le cylindre HM sera egal au cylindre BD: Partant comme CA à IF: ainsi le cylindre BD au cylindre HN. Ce qui estoit à demonstrer. Il faut aussi noter que comme aux precedentes, cecy soit entendu des cones par la 15. p. 5. estans iceux cones la troisiesme partie de leurs cylindres.

PROP. XV.

Aux cones & cylindres egaux, les hauteurs sont reciproques aux bases: Et les cones & cylindres sont egaux, desquels les hauteurs sont reciproques aux bases.

Soit le cylindre BF egal au cylindre LO: ie dis que leurs hauteurs sont reciproques à leurs bases, c'est à dire que comme la base BC, à la base LN, ainsi la hauteur MG à la hauteur DA.

Qu'il ne soit ainsi Premierement, si MG est egal à DA, les cylindres estans egaux, il est euident par la 11. p. 12. que la base sera egalle à la base. Que si MG est plus grand que DA, soit retranchee MH egalle à DA: Et soit couppé le cylindre au point H, par le plan IK, parallel à LN, par la 13. p. 12. Le cylindre LQ sera au cylindre LK, comme l'axe MG à l'axe MH, & par la 7. & 11. p. 5. son

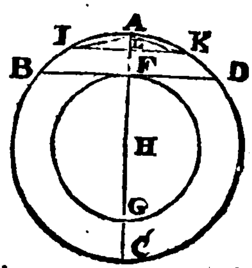


egal BF sera au cylindre LK, comme MG est à MH: & par la 11. p. 12. comme le cylindre BF est au cylindre de mesme hauteur LK, ainsi la base BC à la base LM: Et par la 11. p. 5. comme la base BC, à la base LN, ainsi la hauteur MG, à la hauteur MH, ou DA son egalle.

Maintenant soient les bases reciproques aux hauteurs: Ie dis que les cylindres BF & LO sont egaux. Car puisque la base BC, est à la base LN, comme la hauteur GM, à la hauteur AD, ou MH son egalle: Et comme la base BC, à la base LN, ainsi le cylindre BF au cylindre de mesme hauteur LK: Item comme la hauteur MG à la hauteur MH, ainsi le cylindre LO au cylindre LK: par la 11. p. 5. Les deux cylindres BF & LO, auront mesme raison au troisiesme LK, l'vn comme l'autre: Et par la 9. p. 5. ils seront egaux. Cecy soit aussi entendu des cones egaux comme aux precedentes.

PROP. XVI.

Deux cercles inegaux estans sur vn mesme centre, inscrire au plus grand vn poligone, duquel les costez ne touchent point le plus petit.



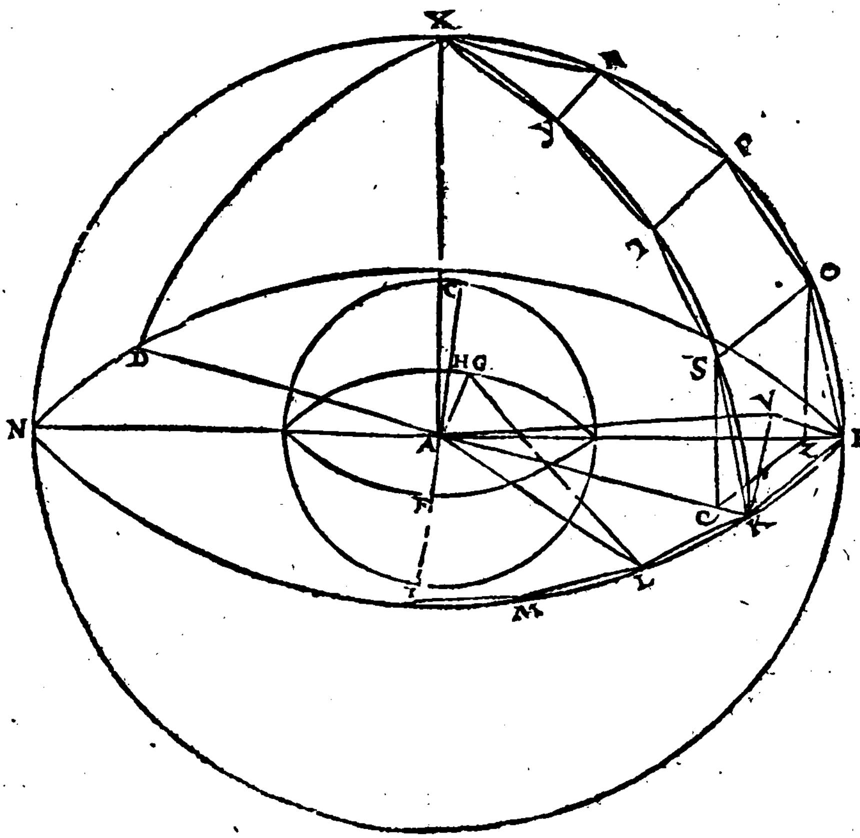
Soient deux cercles inegaux ABCD, & FG, tous deux sur le centre H: Il faut dans le plus grand ABCD, inscrire vn poligone, duquel les costez ne touchent point la circonferance du plus petit.

Soit mené le diametre commun AC passant par le centre H, & couppant le petit cercle au point F: Et d'iceluy point soit menee la perpendiculaire BFD, rencontrant la circonferance du grand cercle aux poincts B & D: Item soit couppee la demie circonferance AC en deux egallement. Et la moitié encores en deux egallement, en continuant tousiours iusques à ce qu'on viéne à vn arc plus petit que l'arc BA, ce qui est possible par la 1. p. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IA. Et du point I soit menee IK parallelle à BD: il est euident que puis que BD est touchante seulement, que IK qui luy est parallelle, ne touchera pas le petit cercle: à plus forte raison la ligne IA ne le touchera pas aussi. Laquelle sera certain nombre de fois egallement dans le cercle: d'autant que les arcs ont tousiours esté diuisez par la moitié: AI est donc le costé du poligone inſcrit dans le grand cercle qu'on auoit demandé.

PROP. XVII.

Deux ſpheres inegalles eſtãt ſur vn meſme centre, inſcrire en la plus grande vn poliedre, duquel les plans ne touchent point la conuexité de la petite ſphere.

Soient les deux ſpheres inegalles ſur le centre A: dans la plus grande il faut inſcrire le poliedre demandé.



Soient les deux ſpheres couppées par vn plan paſſant par le centre, il eſt euident par la deff. de la ſphere (qui eſt faicte par la circonduction du demy cercle) que les communes ſections ſeront cercles, & les plus grands de toute la ſphere: d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la ſphere, puiſque le plan couppant paſſe par le centre de la ſphere.

Soit donc en la plus grand sphere le cercle BDNI, & en la plus petite, le cercle FGH, & soient leurs diametres se couppans en angles droicts BN & CI : Et dans le cercle de la plus grande sphere BCNI, soit inscrit vn poligone, ne touchant point la plus petite, par la 16.p.12. Duquel les costez de la quarte BI, soient BK, KL, LM, MI. Et soit menee la ligne KA, continuee iusques au point N : Item la perpendiculaire AX, sur le plan du cercle BCNI, par la 12.p.11. Pareillement soient prolongez le plans NAX, XAB, & DAX, XAK. Ils feront (par ce qui a esté dit cy-dessus) les demy cercles DXK, & NXB, tres-grands en la sphere) d'autant que leurs diametres passent par le centre) Et d'autant que la ligne AX, est esleuee perpendiculairement sur le plan du cercle BCDI, les deux demy-cercles plans DXK & NXB, seront par la 18. p. 11. esleuez perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle : Et d'autant que les trois demy cercles BLN, BXN, & KXD sont egaux (ayans les diametres egaux) aussi leurs moitiez seront egalles, sçauoir les quartes IB, BX, XK. Partant autant qu'il y aura de costez du poligone en la quarte BI, on en pourra inscrire autant en chacune des quartes KX, & BX : Soient iceux KS, ST, TY, YX, & BO, OP, PR, RX, & soient menees les lignes SO, TP, YR : Item les perpendiculaires SQ, & OZ, par la 11. p. 11. Elles tomberont sur les lignes AK, & AB, qui sont les communes sections des quarts de cercles ABX & AKX, esleuez perpendiculairement sur le quart ABI, par la 38. p. 11. Soit aussi menee la ligne QZ. Maintenant puis que les arcs & les cordes SK & OB, sont egalles : les perpendiculaires SQ & OZ, (estans demies cordes d'arcs egaux dans demy cercles egaux) aussi ZB, & QK, seront egalles par la 47. p. 1. Et par consequent egalles les restantes AZ & AQ (car AB & AK sont egalles.) Partant comme AZ, à ZB, ainsi AQ, à QK : & par la 2. p. 6. QZ sera parallelle à KB. Item les deux perpendiculaires QS & ZO estant egalles, sont aussi parallelles par la 6.p. 11. & par la 33.p.1. SO & QZ, seront egalles & parallelles : & par la 9. p. 11. SO & KB seront parallelles, & par la 7. p. 11. SK & OB, seront au mesme plan d'icelles : Partant tout le quadrilatere BKSO, est en vn mesme plan. Par mesme discours on monstrera aussi que les quadrilateres OT, PY, & le triangle XYR, ont chacun toutes leurs parties en vn mesme plan : Que si des poincts S, O, T, R, Y, P, on imagine des lignes menées vers le centre A, on se representera vne figure poliedre, comprise entre BX & XK, & composee de quatre pyramides, desquelles le sommet est au centre A, & leurs bases sont les quadrilateres KO, OT, TR, & le triangle RXY. Et si on construict pareillement sur les distinctions KL, LM, & MI, comme on a faict sur BK : Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura inscrit vn poliedre en la sphere donnée.

Ie dis d'auantage qu'iceluy poliedre ne touche la petite sphere. Car si du centre A on meine vne ligne perpendiculaire sur le plan KO, sçauoir AV : Ie dis qu'elle sera plus grande que le demy-diametre de la petite sphere.

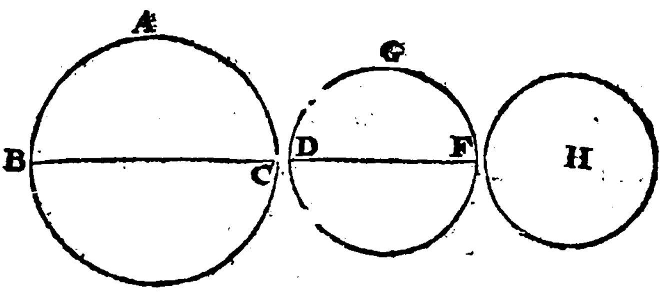
Qu'il ne soit ainsi : Pour inscrire le poligone par la precedente proposition, on meine vne ligne qui touche le petit cercle, de laquelle la moitié est plus grande que le costé du poligone inscrit : Soit imaginée estre icelle demy touchante GL : il est euident par la precedente prop. que GL, sera plus grande que KB, costé du poligone inscrit : Mais KB est plus grande que BV : Aussi GL, sera plus grande que BV. Item par la 47. p. 1. Les quarrez de AG & GL, sont egaux aux quarrez de AV & VB, (estans chacuns egaux au quarré du demy-diametre de la grande sphere, d'autant que les triangles AVB, & AGL, sont rectangles) & le quarré de GL, est plus grand que le quarré de BV : Partant le quarré de AV, sera plus grand que le quarré de AG, & la ligne AV, plus grande que la ligne AG: ce qu'il falloit prouuer.

On prouue que KB soit plus grande que BV, d'autant que par la 47. p. 1. on prouuera que VK & VB sont egalles aussi par la mesme prop. VO, & VS, seroient egalles, partant V seroit le centre du cercle circonscrit au quadrilateral KO, duquel les costez SK, KB, BO, estans egaux, & OS plus petit l'angle KVB, sera plus que droit, & par la 19. p. 1. KB, sera plus grand costé que BV.

De ceste demonstration & des autres cy-dessus, resulte que si en vn autre sphere, on inscrit vn poliedre semblable au poliedre cy-dessus descrit qu'iceux poliedres seront en raison triplée des diametres des spheres, auquelles ils seront inscrits. Car iceux poliedres estans semblables par la deff. des solides semblables, ils auront en leur conuexité autant de plans semblables l'vne comme l'autre : partant ils se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'vn comme l'autre, ayant toutes le demy-diametre de leur sphere pour vn de leurs costez : Partant prises vne à vne elles seront en raison triplee du demy-diametre au demy diametre, par la 8. p. 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raison triplee des mesmes demy-diametres, par la 12. p. 5. Et par la 15. p. 5. en raison triplée des diametres entiers.

PROP. XVIII.

Les spheres sont l'vne à l'autre, en raison triplée de leurs diametres.



Soient les deux spheres A B C, D GF : Ie dis qu'elles sont l'vne à l'autre en raison triplee du diametre BC, au diametre DF: C'est à dire que si on imagine que comme la raison triplee de BC à DF, ainsi la sphere BAC, à quelque autre sphere, cóme H: icelle sera egalle à la sphere DGF.

Autrement elle sera plus grande ou plus petite. Soit premierement la sphere H, plus petite que la sphere DGF s'il est possible: Elle pourra estre enfermee dans icelle, si on les met toutes deux sur vn mesme centre. Maintenant dans la sphere GDF, soit inscrit vn poliedre qui ne touche point la plus petite sphere H, par la

H par la 17. p. 12. Et dedans l'autre sphere soit pareillement inscrit vn semblable poliedre, par la mesme prop. Et par ce qui resulte d'icelle, le poliedre en la spere BAC, est au poliedre de la sphere GDF, en raison triplée du diametre BC, au diametre DF: mais en telle raison est la spere BAC, à la sphere H, & par la 11. p. 5. comme la sphere BAC, à la sphere H, ainsi le poliedre de la sphere BAC, au poliedre de la sphere GDF: & en changeant comme la sphere BAC, à son poliedre, ainsi la sphere H au poliedre de la sphere GDF. Or la sphere BAC, est plus grande que son poliedre n'estant que partie d'icelle, & par la 14. p. 5. La sphere H est plus grande que le poliedre de la sphere GDF, ce qui est impossible, n'estant que partie d'iceluy (d'autant qu'iceluy poliedre inscrit à la sphere GDF, a esté circonscrit à la spere H, sans la toucher). Donc la sphere BAC, ne peut estre en raison triplée des diametres BC & DF, à vne autre sphere plus petite que GDF.

Soit donc la sphere H plus grande que GDF: icelle H sera à la sphere BAC, en raison triplee du diametre DF, au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la sphere H à la sphere BAC, ainsi la sphere GDF, à vne quatriesme proportionelle, laquelle sera plus petite que BAC, par la 14. p. 5. d'autant que H est posée plus grande que GDF: Et partant icelle quatriesme pourra estre inscrite en la sphere BAC: Et si par la 11. p. 5. La sphere GDF, sera à icelle quatriesme inscrite dans BAC, en raison triplee du diametre DF au diametre BC, ce que nous auons demonstré estre impossible: Donc la sphere H, n'a peu estre plus grande ne plus petite que la sphere DGF, mais egalle: & par consequent les spheres sont l'vne à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

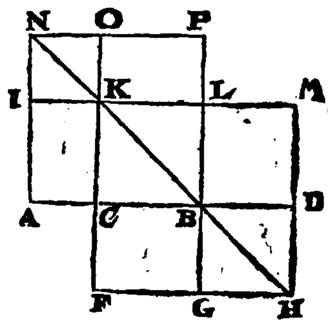
Fin de l'Element douziesme.

Nn

ELEMENT TREZIESME.

PROP. I.

SI vne ligne est couppee en la moyenne & extreme raison : le quarré de la moitié de la toute & du plus grand segment comme d'vne ligne, est quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totalle.



Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raison au point C, à laquelle on adiouste BD, ligne egalle à la moitié de la totalle AB: ie dis que le quarré de DC est quintuple du quarré de DB.

Qu'ainsi ne soit sur la ligne AB, soit construit le quarré AP, & soit menee CO parallelle à BL, & la diagonalle NKBH, & du point de section K soit menee IM egalle & parallelle à AD, & sur KM soit faict le quarré KH, & soient prolongez les lignes CD, LG: ie dis donc que le quarré de CD sçauoir FM, est quintuple du quarré de BD, sçauoir DG.

Car par la 4. p. 2. il est euident que le quarré de AB, sçauoir AP, est quadruple du quarré GD qui est fait de sa moitié BD: & le rectangle IB est double du rectangle LD par la 1. p. 6. ou egal aux deux LD & FB par la 43. p. 1. & par la 17. p. 6. le rectangle IP est egal au quarré de CB, sçauoir CL (estant NP couppee en la moyenne & extreme raison au point O, comme AB au point C) & par consequent le gnomon GKD sera egal au quarré AP. Partant quadruple de GD, lequel estant adiousté fera le quarré FM, euidemment quintuple du quarré GD.

PROP. II.

Si le quarré d'vne ligne, est quintuple du quarré d'vne partie d'icelle: le double d'icelle partie estant couppee en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera l'autre partie de la donnee.

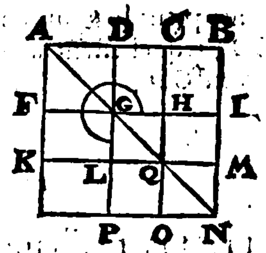
Soit la ligne CD diuisee en CB & BD, en sorte que le quarré de la toute, sçauoir FM, soit quintuple du quarré de la plus petite partie BD, sçauoir GD: ie dis que si on prolonge BA, iusques à ce qu'elle soit double de BD, & qu'on la diuise en la moyenne & extreme raison, que le plus grand segment sera CB, autre partie de la totalle CD.

Qu'il ne soit ainsi. Soit acheuee la construction comme en la precedente: Et puis que AB est double de BD, le rectangle AL sera double du rectangle BM par la 1. p. 6. ou egal aux deux BM & BF. Or par la 4. p. 2. Le quarré AP est quadruple du quarré GD, & le quarré FM est quintuple du mesme par hypothese: Il est donc euident que le quarré AP est egal au gnomon GKD: duquel les deux rectangles FB & BM sont egaux au rectangle AL. Il faut donc que le rectangle IP soit egal au quarré CL, fait sur vne ligne egalle à OP: & par la 17. p. 6. comme NP à PO, ainsi PO à ON: partant NP sera couppee en la moyenne & extreme raison au point O, ou son egalle AB au point C: partant il est euident que CB autre partie de la totalle CD, est le plus grand segment d'icelle.

PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, le quarré du plus petit segment & de la moitié du plus grand segment comme d'vne est quintuple du quarré de la moitié du plus grand segment.

Soit la ligne AB, couppee en la moyenne & extreme raison au point D, de laquelle le plus grand segment BD est couppé en deux egallement en C: ie dis que le quarré du petit segment & de la moitié du grand AC, est quintuple au quarré de la moitié du grand segment DC.

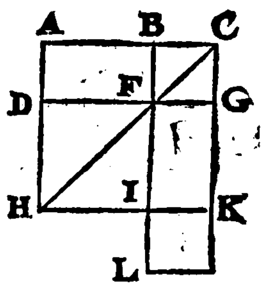


Qu'il ne soit ainsi, sur AB soit descrit le quarré AN, & sur AC le quarré CK, & soient menées les parallelles DP & CO, & aux poincts où la diagonalle NA les coupera, soient menées les parallelles FI & KM : ie dis donc que le quarré KC est quintuple au quarré LH fait sur la ligne GH egalle à DC.

Car par les deff. du 6. & 17. p. 6. Le rectangle des extremes AB & AD (sçauoir AI) est egal au quarré la moyenne DB, lequel estant quadruple de LH quarré par la 4. p. 2. le rectangle AI sera aussi quadruple de LH : mais DH & CI estant sur bases egalles, sont egaux par la 1. p. 6. Et DH estant egal à FL, par la 43. p. 1. Le gnomon LAH sera egal au rectangle AI, quadruple du quarré HL ; Ainsi il est euident que le quarré KC, est quintuple du quarré LH.

PROP. IIII.

Si vne ligne est couppée en la moyenne & extreme raison, le quarré de la toute, & le quarré du petit segment ensemble, sont triples du quarré du plus grand segment.



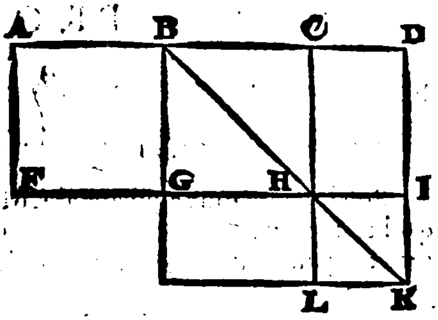
Soit la ligne AC, couppee en la moyenne & extreme raison au point B : ie dis que le quarré de la toute AC, & le quarré de BC plus petit segment, sont triples du quarré de AB plus grand segment.

Soit faicte construction comme en la 7. p. 2. en laquelle construction les deux rectangles AG & GL, sont egaux (estant KL quarré de BC) partant egal à BG & AF egal à FK : mais l'vn d'iceux rectangles AG, est egal au quarré FH, fait sur ligne egalle à AB, par la 17. p. 6. Partant le gnomon DGL sera double au quarré HF : il est donc euident que les quarrez AK & KL, sont triples au quarré HF.

PROP. V.

Si vne ligne droicte est couppée en la moyenne & extreme raison, & à icelle on adiouste directement le plus grand segment, la toute composée, sera couppée en la moyenne & extresme raison, & la toute simple sera le plus grand segment.

Soit la ligne BD, couppée en la moyenne & extreme raison au point C, & à icelle on adiouste directement BA egalle à BC grand segment : ie dis que AD est aussi couppée en la moyéne & extreme raison au point B, & que la toute donnée BD est le plus grand segment, c'est à dire que le quarré de BD est egal au rectangle de DA, & AB.



Qu'ainsi ne soit, Sur la toute simple BD soit faict le quarré BK, & sur AB le quarré BF, & apres auoir mené la diagonalle BK, soient menées les parallelles CL & FI. Maintenant puis que BD est couppée en la moyenne & extreme raison, le rectangle de BD & DC (sçauoir GK) est egal au quarré de BC (sçauoir GC, ou à son egal GA, par la 17. p. 6. Ainsi le quarré BF estant egal au rectangle GK, en leur adioustant le rectangle commun BI : le rectangle AI sera egal au quarré BK, & par la 17. p. 6. BD sera moyenne entre AD & AB, ainsi AD la toute composée est diuisée en la moyenne & extreme raison au point B, & la toute simple BD est le plus grand segment.

PROP. VI.

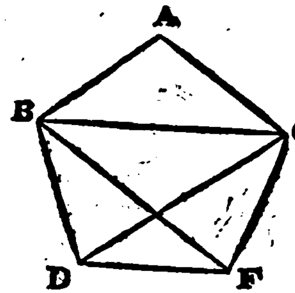
Si vne ligne rationelle est couppée en la moyenne & extreme raison : l'vn & l'autre segment est ligne irrationelle appellée residu.

Soit la ligne rationelle AC, couppée en la moyenne & extreme raison au point B (estant AB plus grand segment) ie dis que AB & BC sont irrationelles & residus.

Car si à AC on adiouste directement DA, egal à la moitié de AC : il est euident qu'estant moitié d'vne rationelle qu'elle sera aussi rationelle : Item le quarré de DB composée de la moitié de AC, & du plus grand segment AB, est quintuple du quarré de DA, par la 1. p. 13, Et partant est à iceluy comme nombre à nombre, mais non pas comme nombre quarré à nombre quarré : Et par la 9. p. 10. DA & DB seront commensurable en puissance seulement. Mais DA est rationelle, partant DB sera aussi rationelle, & par la 73. p. 10. AB sera residu. Item AC estant couppé en la moyenne & extreme raison au point B, le quarré de AB sera egal au rectangle de AC & CB, par la 17. p. 6. Or le quarré du residu AB appliqué sur la rationelle AC, doit faire l'autre costé BC residu premier, par la 97. p. 10. Donc AB & BC sont residus.

PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral trois angles pris comme on voudra sont egaux : il sera equiangle.

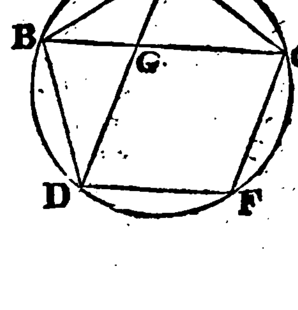


Soit le pentagone equilateral ABDFC, duquel trois angles pris comme on voudra sont egaux, sçauoir A, D, F, ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Qu'il ne soit ainsi : il faut tirer les bases d'iceux trois angles egaux BC, CD, BF : lesquelles par la 4. p. 1. seront egalles (estans tous les costez egaux). Item les deux triangles DBF & DCF, ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, les deux angles DBF & DCF seront egaux, par la 8. p. 1. Item BAC estant Isoscele, les deux angles sur la base BC seront egaux. Pareillement les deux triangles CBF & BCD, ayans les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, ils auront l'angle CBF egal à l'angle BCD, par la 8. p. 1. Partant le total angle B est egal au total angle C. Mais d'autant que BCD est triangle Isoscele, & que BAC a les trois costez egaux aux trois costez du triangle DFC chacun au sien, l'angle ABC sera egal à l'angle CDF, par la 8. p. 1. le total D sera egal à l'angle total B, & par la 1. comm. sent. Ils seront tous egaux entre eux. Partant le pentagone sera equiangle.

PROP. VIII.

Si deux lignes droictes sont tirées d'angle en angle en vn pentagone equiangle & equilateral, elles se coupperont l'vne l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs plus grands segmens seront egaux aux costez du pentagone.

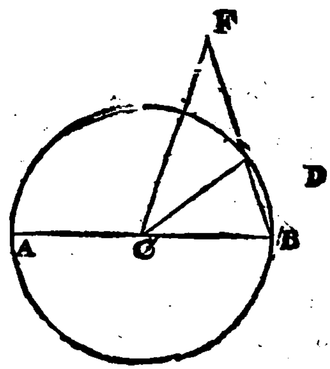


Soit dans le cercle le pentagone ABDFC equiangle & equilateral, & d'angle en angle on meine les deux lignes AD & BC se couppans au point G : Ie dis qu'elles seront ainsi couppées en la moyenne & extreme raison, & que leurs plus grands segmens DG & CG, seront egaux au costez BD.

Car les costez & les angles estans egaux, il est euident par la 4. p. 1. que les deux bases BC & DA sont egalles : Item que les deux angles GBA & BAG sont egaux, estans appuyez sur circonferences egalles BD & AC, par la 33. p. 6. & que l'angle exterieur BG D est egal à tous les deux, partant double de BAG, duquel DBG est aussi double (estant la circonference CFD double de BD) ainsi les deux angles GBD & BGD sont egaux: partant DG egal à DB, par la 6. p. 1. de mesme GC sera egal à CA, & si les deux triangles DAB & GAB seront equiangles (estant l'angle BAG commun à tous deux, & BDA egal à ABC, par la 33. p. 16.) & par la 32. p. 1. Le troisiesme sera egal au troisiesme, & par la 4. p. 6. comme DA à AB, ainsi AB à BG, ou leurs egalles DA à DG, ainsi DG à GA (car DG est egal à BA, & BG à GA.) ainsi de l'autre BC. Voyla ce qui estoit à demonstrer.

PROP. IX.

La ligne droicte composée du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mesme cercle: est couppée en la moyenne & extreme raison, delaquelle le plus grand segment est le costé de l'hexagone.

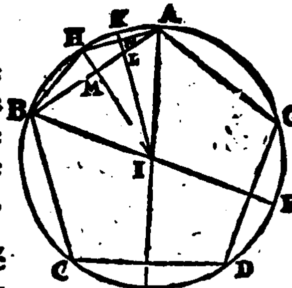


Dans le cercle ADB soit inscrit le costé du decagone BD, auquel soit adiousté directement le costé de l'hexagone DF qui peut estre inscrit dans le mesme cercle, c'est à dire que DF soit egalle à CB ou CD: ie dis que BF est couppée en la moyenne & extreme raison, & que DF costé de l'hexagone est le plus grand segment.

Car si du centre C on meine les deux lignes CD & CF, il est euident par la 33. p. 6. que comme la circonference A D est quadruple de la circonference BD (qui est celle du costé du decagone) aussi l'angle ACD sera quadruple de l'angle DCB: & par la 32. p. estant exterieur, il vaudra les deux CDB & CBD: lesquels estans egaux, par ce que le triangle BCD est Isoscele, par la 5. p. 1. L'vn ou l'autre sera double de D CB: mais l'vn d'iceux CDB estant exterieur est egal aux deux opposez interieurement DFC & DCF (lesquels sont egaux, estant le triangle FDC Isoscele) ainsi l'angle CDB sera double de l'angle F: lequel par ce moyen sera egal à l'angle DCB, ainsi les deux triangles FCB & CDB seront equiangles, ayans l'angle B commun, & l'angle F egal à l'angle DCB, par la 32. p. 1. Le tiers sera egal au tiers, & par la 4. p. 6. comme FB à BC, ou FD son egalle, ainsi CB ou FD son egalle à BD: partant il est manifeste que FB est couppee en la moyenne & extreme raison, & que le costé de l'hexagone est le plus grand segment.

PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone inscrit en vn cercle, est egal aux deux quarrez des costez du decagone, & de l'hexagone, inscrits au mesme cercle.



Soit dans le cercle inscrit le pentagone ABCDG, l'vn des costez d'iceluy BA, duquel la circonference BA soit couppee en deux egallement par la ligne menee du centre IH, & soient menees les lignes HA & HB: il est euident que l'vne d'icelles sera le costé du decagone, & IB le costé de l'hexagone: ie dis que les quarrez d'iceux deux costez HA & BI, sont egaux au quarré du costé du pentagone BA.

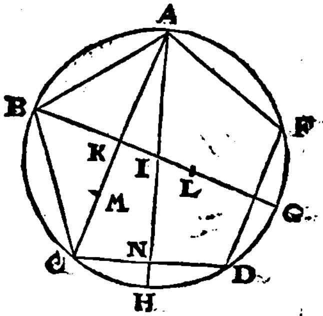
Car apres auoir acheué le diametre BIF, & mené IA, & couppé l'arc HA en deux egallement au point K, par la ligne IK: icelles lignes IK & IH couppans le costé du pentagone BA aux poincts M & L, ie dis que les deux triangles BIL & BIA sont equiangles, estant l'angle BIK egal à l'angle LBI: car les deux arcs GF & FD estans egaux, Item les deux AK & KH, il est euident que l'arc FGA sera double de l'arc BHK: & par la 20. p. 3. l'angle à la circonference FBA, sera egal à l'angle au centre BIK: ainsi l'angle IBA estant egal à l'angle IAB (car le triangle est Isoscele (les deux angles BIL & IAB seront egaux; & l'angle IBA estant commun à tous les deux triangles, le tiers sera egal au tiers par la 32. p. 1. Et les deux triangles BIA & BIL seront equiangles, & par la 4. p. 6. comme AB à BI, ainsi BI à BL: Et par la 17. p. 6. le quarré de BI sera egal au rectangle de BA & de BL.

Pareillement la ligne IK couppant l'arc HA en deux egallement couppera aussi la corde HA en deux egallement & à droicts angles (parce qui a esté demonstré au troisiesme liure) & le costé LN estant commun aux deux triangles ALN & HLN par la 4. p. 1. les deux bases AL & LH seront egalles, & les angles LAN & LHN seront egaux par la 5. p. 1. Mais l'angle LAN est aussi egal à l'angle LBH, d'autant que les arcs BH & HA sont egaux: l'angle ABH sera egal à l'angle LHA: & l'angle LAH estant commun à tous les deux triangles BAH & HAL, le tiers sera egal au tiers par la 32. p. 1. ainsi ils seront equiangles: & par la 4. p. 6. comme BA à AH, ainsi AH à AL: & par la 17. p. 6. Le quarré de HA sera egal au rectangle de AL & AB Or nous auons tantost prouué que le quarré de IB estoit egal au rectangle de AB & BL: Partant les deux quarrez ensemble de IB & HA costez de l'hexagone & decagone, sont egaux aux deux rectangles de AB & BL: Item de AB & LA: lesquels ensemble sont egaux au quarré de BA costé du pentagone par la 2. p. 2.

PROP.

PROP. XI.

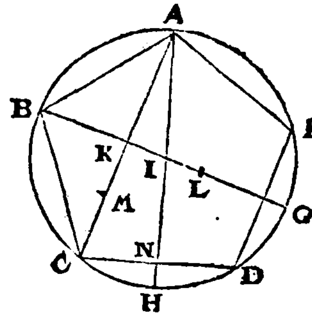
Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inſcrit vn pentagone equilateral, le coſté du pentagone eſt irrationel : appellé ligne Mineure.



Soit le pentagone equilateral ABCDF, inſcrit dans le cercle ABCDF, duquel le diametre BG ou AH eſt rationel : ie dis que le coſté du pentagone BC eſt irrationel appellé ligne mineure.

Qu'ainſi ne ſoit (apres auoir mené la ligne AC) Il eſt euident que le point I rencontré des deux diametres eſt le centre du cercle, & que les deux arcs CH & HD eſtans egaux, que les deux lignes CN & ND ſont auſſi egalles : & par la 3. p. 3. la toute CD ſera couppee par le diametre en angles droicts : Item CA ſera auſſi couppee en deux egallement & en angles droicts par le diametre BG, par la 3. p. 3. Car les arcs BA & BC eſtans egaux, les lignes BA & BC ſeront auſſi egalles, & les deux triangles ABK & CBK auront deux coſtez egaux à deux coſtez, & les deux angles au point B egaux, les arcs qui les ſouſtiennent eſtans egaux, les deux baſes CK & KA ſeront egalles & par la 3. p. 3. BK couppera CA à droicts angles.

Or par ce moyen il eſt manifeſte que les deux triangles ACN & AKI ſont equiangles, car l'angle du poiut A eſt commun à tous les deux, & le droict AKI egal au droict ANC, le tiers ſera egal au tiers par la 32. p. 1. Et par la 4. p. 6. comme NC à CA, ainſi KI à IA. Item du demy diametre IG (lequel eſt rationel & egal à IA) ſoit retranché IL egal au quart de IA, lequel IL ſera rationel eſtant le quart d'vne ligne rationelle : Item de AC ſoit retranché CM quart d'icelle ligne : Et par la 15. p. 5. CN ſera à CM quart de CA, comme KI à IL quart de IA : Que ſi on double les deux CN & CM par la meſme 15. p. 5. CD ſera à CK (car elle eſt la moitié de CA & double de CM) comme KI à IL : & en compoſant par la 18. p. 5. Comme les deux CD & CK à CK, ainſi les deux KL à IL : Et par la 22. p. 6. le quarré de CD & CK comme vne, ſera au quarré de CK, comme le quarré de KL au quarré de IL : Mais d'autant que la ligne AC eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus ſegment eſt egal au coſté du pentagone par la 8. p. 13. Le quarré de CD & CK comme vne ſera egal au quarré du plus grand ſegment & de la moitié comme d'vne de la ligne AC eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon : & par la 1. p. 13. Iceluy quarré de CD & CK comme vne ſera quintuple au quarré de CK : partant auſſi le quarré de KL, ſera quintuple du quarré de IL : Mais la ligne BL eſt auſſi quintuple de IL, eſtant IL quart de IB, donc comme BL à IL, ainſi le quarré de KL, au quarré de IL,

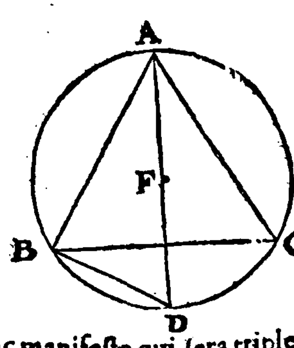


c'est à dire en raison doublee de KL à IL: Et il s'ensuit que KL sera moyenne proportionelle entre BL & IL: Partant par la mesme raison doublee de la 10. d. 5. & 20. p. 6. Le quarré de BL sera au quarré KL, cõme BL à IL, c'est à dire que le quarré de BL sera quintuple du quarré de KL: Partant iceux quarrez seront entr'eux comme nombre à nõbre, mais non pas cõme nombre quarré à nombre quarré, & par la 9. p. 10. Les lignes BL & KL, seront commensurable en puissance seulement: desquelles BL estant rationelle, BL & KL seront rationelles commensurables en puissance seulement, & par la 73. p. 10. BK sera residu. Et pour autant que BL est rationelle commens. en longitude à la rationelle proposee BI (estant entre elles comme 5. à 4.) Et que BL peut plus que KL, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude, car estant sa puissance quintuple de la puissance de KL, ce qui restera apres auoir osté le quarré de KL, sera au quarré de BL, comme 4. à 5. qui n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré (& par la 9. p. 10. BL pourra plus que KL du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude) Et par les tierces deff. du 10. BK sera residu quatriesme.

Maintenant par la 35. p. 3. le rectangle de GK & KB, est egal au rectangle de AK & KC, c'est à dire au quarré de KC, lequel adiousté au quarré de KB, est egal au quarré de BC, costé du pentagone par la 47. p. 1. (estant le triangle BKC rectangle, partant le quarré de BK & le rectangle de BK, & KG ou le seul rectangle de BK & BG auquel sont egaux, iceux quarré de BK & le rectangle de BK & KG, sera egal au quarré de BC: Lequel quarré estant appliqué sur la ligne rationelle BG, & faisant l'autre costé GK residu quatriesme par la 94. p. 10. BC sera ligne mineure.

PROP. XII.

Le quarré du costé du triãgle equilateral inscrit dãs vn cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

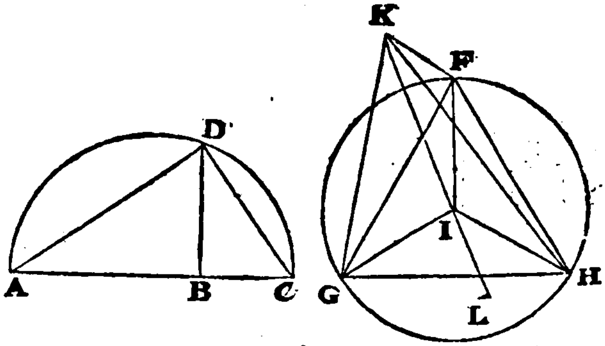


Soit le triangle equilateral inscrit en vn cercle ABC, duquel le demy-diametre est FD: Ie dis que le quarré de AB costé d'iceluy, est triple du quarré de FD.

Car si on meine la ligne BD, l'arc BDC estant le tiers de toute la circonference, BD sera la sixiesme partie: partant sera le costé de l'hexagone, & egal au demy-diametre DF. Or le quarré du diametre AD sera quadruple du quarré de BD, egal au demy-diametre par la 4. p. 2. & par la 47. p. 1. Il est aussi egal aux deux de BA & BD: il est donc manifeste qu'il sera triple du quarré de BD ou FD son egal.

PROP. XIII.

Dans la ſphere donnee inſcrire vne pyramide equilateralle: Et monſtrer que le quarré du diametre d'icelle ſphere, eſt en raiſon ſeſqui-autre au quarré du coſté d'icelle pyramide.



Soit la ligne AC, diametre de la ſphere donnee, diuiſee en B, de ſorte que AB ſoit double de BC: Et apres auoir mené le demy-cercle, & leuee la moyenne proportionelle BD, & mené les lignes DA & DC: Soit deſcrit le cercle FGH, duquel le demy-diametre IH ſoit egal à BD: & apres auoir inſcrit en iceluy le triangle equilateral FGH, du centre I ſoit leuee la perpendiculaire IK, par la 12. p. 11. laquelle ſoit egallee à AB, puis ſoient menees les lignes KH, KG, KF: Ie dis premierement que la pyramide KGHF, eſt equilateralle, qu'elle peut eſtre inſcrite en la ſphere, de laquelle le diametre eſt AC, & que le quarré du diametre AC, eſt en raiſon ſeſqui-autre au quarré du coſté HG.

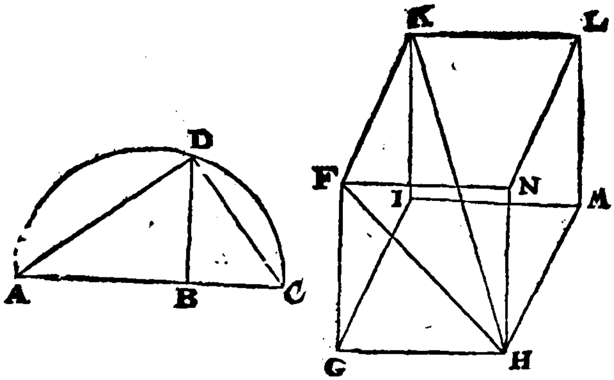
Que la pyramide ſoit equilateralle: Il appert en premier lieu que le triangle FHG, eſt equilateral: Item que les trois lignes KF, KG, KH, ſont auſſi egalles entre-elles (d'autant que par la 47. p. 1. le quarré d'vne chacune d'icelle eſt egalle au quarré de la perpendiculaire IK, & au quarré de l'vne des trois lignes IF, IG, IH, leſquelles ſont egalles) Pareillement que HF, eſt egalle à HK: Car IK eſtant egalle à AB, & IH à BD, par la 47. p. 1. HK & AD ſeront egalle: Et pour autant que le quarré de AB, eſt double du quarré de BD (car ils ſont l'vn à l'autre comme AB, à BC le quarré de AD, qui eſt egal à tous les deux, ſera triple du quarré de DB, ou de ſon egalle HI: Mais par la 12. p. 13. Le quarré de HF, eſt auſſi triple du quarré de HI: Partant HF, & AD ſont egalles: & par la 1. comm. ſent. HF & HK, ſeront egalles: Et par conſequent la pyramide KGHF, eſt equilateralle.

Qu'elle puiſſe eſtre inſcrite à la ſphere ayant pour diametre AC, il appert: Soit continuee la ligne perpend. KI par deſſoubs la baſe de la pyramide iuſques en L, Et ſoit faicte KL egalle à AC, & ſoit poſé le demy cercle ADC à l'entour de la pyramide: ſçauoir le point A, au point K, le point C, au point L. Puis que AB & BC ſont egalles à KI & IL, & IG egalle à DB: faiſant angle droict auec KI, auſſi bien que leurs egalles AB & BD: il eſt certain que le point D, du demy-cercle tombera ſur le point G. Partant le diametre demeurant immobile, si le demy-cercle faict vne reuolution, il touchera les deux a utres angles de la pyramide H & F, (estans les lignes IF, IG, IH, egalles) ainsi la pyramide est inscrite en la sphere donnée. Ou bien si on ayme mieux prouuer que l'angle KGL, seroit droict, si on auqit méné la ligne GL: & que l'angle dans le demy cercle estant droict par la 31. p. 3. Et par la conuerse d'icelle le demy cercle sur le diametre KL, touchera les poincts I, H, G, en faisant sa reuolution.

Que le quarré du diametre AC, soit sesquiautre au quarré du costé AD, qui est egal à chacun costé de la pyramide, il appert: Car puis que AC est triple de BC, aussi AC sera en raison sesquiautre à AB: Mais par la 8. p. 6. comme AD, se trouue moyenne proportionelle entre AC & AB, estans les deux triangles DAC & DAB, equiangles: partant le quarré de AC, sera au quarré de la moyenne AD, comme AC à AB, c'est à dire en raison sesquiautre.

PROP. XIIII.

Dans la sphere donnée, inscrire vn cube: Et monstrer que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quarré du costé d'iceluy cube.



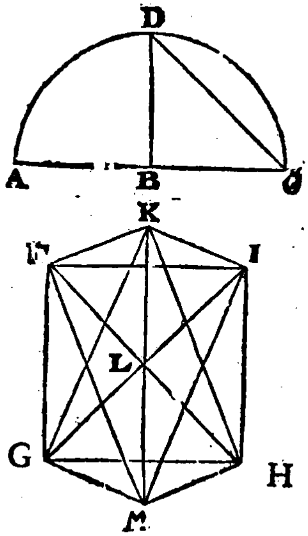
Soit le diametre de la sphere donnée AC, lequel soit coupé au poinct B, en sorte que AB, soit double de BC: Puis apres auoir construit le demy-cercle, leué la moyenne proportionelle BD, & mené les deux lignes AD, & DC: Sur GH, egalle à DC, soit faict le quarré GHMI: Sur lequel soit basty le cube GL, en leuant les quatres lignes perpendiculaires GF, IK, ML, HN, par la 12 p. 11. qu'on fera egalles à GH, & en menant les quatres lignes KF, FN, NL, LK.

Ie dis premierement qu'il est inscriptible en la sphere donnée: Car apres auoir mené les lignes FH, & KH, sur la ligne KH, soit imaginé vn demy cercle, comme sur son diametre faire vne reuolution à l'entour du cube: Il est euident que iceluy demy cercle touchera tous les angles du cube: Car l'angle KFH, estant droict (d'autant que KF est perpendiculaire au plan FH) le demy cercle passera par l'angle F, (car tout angle dans le demy cercle est droict): Semblablement si on meine la ligne KG, l'angle KGH, sera aussi droict (estant GH perpendiculaire au plan GK) ainsi le demy cercle passera par l'angle G, de mesme façon on prouuera qu'il touche en passant tous les autres qui sont tous angles droicts par la construction.

Ie dis finablement que KH, est egal au diametre de la sphere donnée AC: Et que son quarré est triple du quarré de GH. Car GH estant egalle à GF, le quarré de FH sera double du quarré de GH, par la 47. p. 1. ou de son egalle FK: Mais le quarré KH, est egal à tous les deux de KF, & FH: partant il sera triple du seul de KF, ou de son egalle GH. Item le quarré de AC est aussi triple du quarré de DC. Car ils sont l'vn à l'autre comme la ligne AC, à la ligne BC: Or la ligne DC est posée egalle à GH, par consequent aussi sera egalle KH à AC, & le quarré du diametre AC, sera triple du quarré du costé du cube.

PROP. XV.

Dans la sphere donnée, inscrire vn octaëdre: Et monstrer que le quarré du diametre de la sphere, est double du quarré du costé de l'octaëdre.



Soit le diametre de la sphere donnée AC, couppé en deux egallement au poinct B: & apres auoir construit le demy cercle, & leué la perpendiculaire BD, & mené la ligne DC, sur la ligne FG, egalle à DC, soit construit le quarré FGHI, dans lequel soient menées les deux diagonalles FH, & GI, se couppans au poinct L, duquel point par la 12. p. 11. soit esleuée la ligne LK, perpendiculairement sur le quarré GI: laquelle soit aussi continuée perpendiculairement par dessoubs iceluy plan, & soit icelle LM: laquelle soit faite egalle à BC, & LK aussi à BC: Item du point K, soient menées les quatre hypothenuses KF, KG, KH, KI: & du point M, les quatre MB, MG, MH, MI.

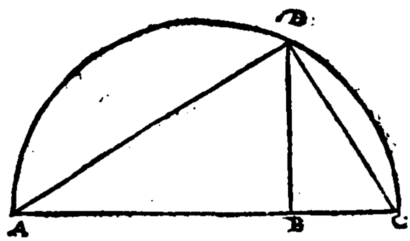
Ie dis maintenant qu'icelle figure solide KM, est enuironnée de huict triangles equilateraux, & que c'est vn octaëdre. Car le quarré FH, ayant les costez egaux à DC: Il est euident que les diagonalles FH & GI, seront egalles à AC: Partant leurs moitiez à BC, par la 47. p. 1. Mais les deux lignes LK & LM, sont aussi egalles à BC: & par consequent elles seront egalles à vne chacune d'icelles demy diagonalles, & par la 4. p. 1. les huict lignes KF, KG, KH, KI, & MF, MG, MH, MI, seront toutes egalles entre elles, & aux quartes du quarré FGHI, par la mesme 4. p. 1. (estans les demy diagonalles egalles aux perpendiculaires LK & LM, en constituant des angles droicts au point L milieu du quarré) & puis que tous les costez sont egaux, tous les triangles seront equilateraux, sçauoir quatre au dessus du quarré FGHI, & ayans leurs bases sur les quatre costez d'iceluy quarré, & se terminans au poinct K: & quatre autres au dessoubs du mesme quarré, ayans aussi leurs bases sur les costez du quarré, & se terminant au point M, ainsi le solide KM, compris de huict triangles equilateraux sera octaëdre.

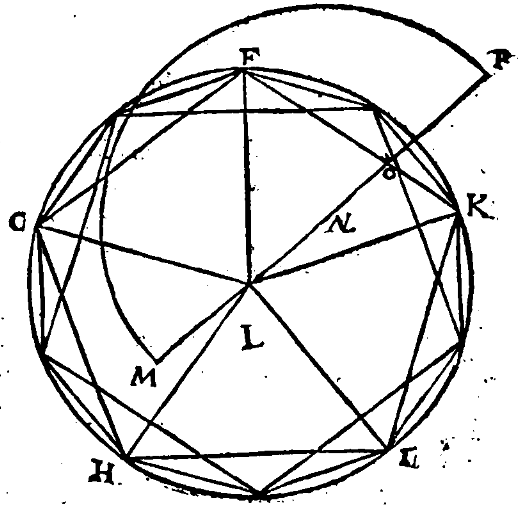
Ie dis dauantage qu'iceluy octaëdre est inscriptible en la sphere donnée. Car il est euident que la ligne KM, est egalle au diametre AC: & que l'angle KGM, est droict (d'autant que les deux lignes KL, & LG estant egalles, les angles sur la base seront egaux, & l'angle KGL, vaudra vn demy droict: Car les deux ensemble valloient vn droict, & par mesme raison MGL, demy droict:) Partant le demy cercle ayant pour diametre KM, & faisant vne reuolution à l'entour de l'octaëdre touchera le poinct G: Et par mesme discours il touchera aussi les trois autres F, I, H, desquels angles sont egaux à l'angle G.

Finablement il est aisé à voir que le quarré du diametre KM, est egal aux deux quarrez de KG & GM, par la 47. p. 1. partant double du quarré de l'vn d'iceux costez, ce qu'il falloit demonstrer.

PROP. XVI.

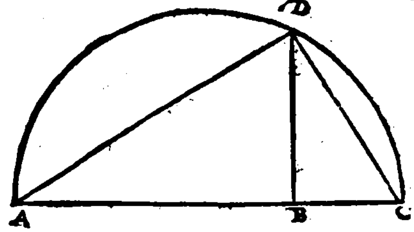
Dans la sphere donnée, inscrire vn icosaëdre: Et monstrer que son costé est ligne irrationelle appellée ligne mineure.



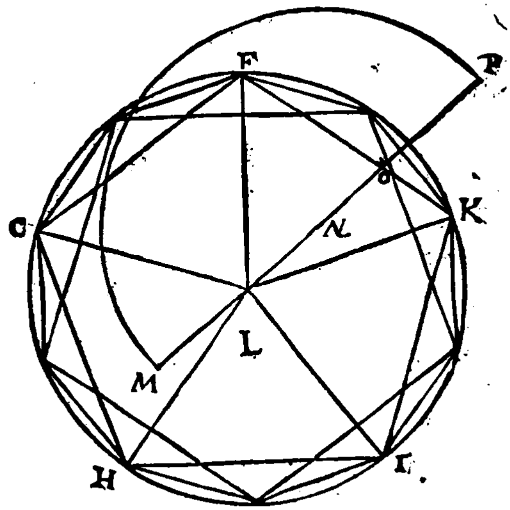


Soit le diametre de la sphere donnée AC, lequel soit diuisé au point B, en sorte que AB soit quadruple de BC, & apres auoir construit le demy cercle, leué la moyenne proportionelle BD, & mené la ligne DC, du centre L, & interual LG, egalle à DC: Soit faict vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHIK, & du centre L, soient menées les lignes LF, LG, LH, LI, LK, & dans le mesme cercle soit inscrit vn decagone equilateral (ce qui se fera en couppãt en deux egallemẽt l'arc d'vn chacun costé du pentagone:) & par la 12. p. 11. soient leués des lignes perpendiculaires sur chacun angle du pentagone, qu'on fera toutes egalles à DC, & seront parallelles entre elles, par la. 6. p. 11. & de l'extremité d'vne chacune, à l'extremité de l'autre soient menees des lignes droictes, lesquelles par la 33. p. 1. seront egalles & parallelles, aux costez du pentagone FGHIK. Maintenant le decagone inscrit à cinq angles communs auec les cinq du pentagone, & cinq autres, desquels vn chacun est posé egallement entre deux angles du pentagone: soit menée vne ligne d'angle en angle, de ces dernieres on fera vn autre pentagone, de chacun angle, duquel si on meine deux lignes hypotenusallement vers l'extremité de chacune des cinq lignes perpendiculaires, de sorte que deux d'icelles hypotenuses se viennent terminer, & faire angle à chasque extremité des lignes perpendiculaires: Et en ceste façon entre icelles lignes perpendiculaires, il y aura dix triangles, desquels les costez seront les cinq costez du pentagone secondement inscrit, les cinq lignes qui lient ensemble les cinq lignes perpendiculaires, & sont egalles & parallelles aux costez du premier pentagone: Item les dix lignes hypotenuses, lesquelles vingt lignes il faut monstrer qu'elles sont egalles entre elles, afin qu'iceux dix triangles soient equilateraux: En premier lieu il est euident que dix d'icelles sont egalles entre elles, sçauoir les cinq costez du pentagone second, & les cinq lignes qui lient les perpendiculaires (car elles sont egalles & parallelles aux cinq costez du premier pentagone.) Quand aux hypothenuses, chacune d'icelle fait vn rectangle triangle, auec vne des perpendiculaires, & vn des costez du decagone: Et par la 47. p. 1. le quarré d'icelle hypothenuse, est egal aux deux quarrez les deux autres lignes, desquelles la perpendiculaire a esté faicte egalle à DC, à la quelle est aussi egal le demy diametre L G, (qui est le costé de l'hexagone inscrit dans le mesme cercle: & partant chaque perpendiculaire sera egalle au costé de l'exagone inscrit au mesme cercle: Et le quarré de chacune hypothenuse, sera egal aux quarrez du costé de l'hexagone, & du costé du decagone inscrit en vn mesme cercle: & par la 10. p. 13. chaque hypothenuse sera egalle au costé du pentagone: Et par ce moyen icelles vingt lignes seront egalles entre elles, & les dix triangles seront equilateraux.

Dauantage sur le centre L, il faut leuer la perpendiculaire LO, par la 12. p. 11. qu'on fera egalle à l'vne des cinq premieres: Et de l'extremité d'icelles, on menera cinq lignes droictes vers l'extremité de chacune des cinq premieres perpendiculaires, & icelle perpendiculaire du centre, sera parallelle aux autres perpédiculaires par la 6. p. 11. & par la 33. p. 1. les cinq lignes menees vers chacune des cinq autres perpendiculaires, sera costé de l'hexagone, comme les cinq qui leur sont opposees dans le premier pentagone: ausquelles elles sont egalles. Item soit adiousté directement à icelle perpendiculaire du centre LO, la ligne OP, qui sera egalle au costé du decagone inscrit dans le cercle: Et au dessoubs du cercle soit aussi adioustee directement la ligne LM, aussi egalle au costé du decagone: Et du point P, soient menees cinq hypotenuses vers les cinq angles, lesquels de tous ceux des dix triangles sont tournez en haut: Et du point M, soient aussi menees cinq hypotenuses vers les cinq angles tournez en bas: Icelles dix lignes seront toutes egalles aux costez du pentagone (comme nous auons prouué des autres par la 47. p. 1. & 10. p. 13.) Et feront encores dix triangles equilateraux: Voila donc vn Icosaedre enuironné de vingt triangles equilateraux, desquels les dix sont à l'entour du milieu du diametre PM, entre les cinq lignes perpendiculaires, cinq autres sont au dessus se terminans au point P, & cinq au dessoubs se terminans au point M.



Ie dis encores qu'iceluy icosaëdre, est inscriptible en la sphere donnee, de laquelle le diametre est AC. Car puis que la ligne LO, est egalle au costé de l'hexagone, & OP au costé du decagone, la toute LP sera couppee au point O en la moyenne & extreme raison par la 9. p. 13. & le plus grand segment sera LO: Soit donc diuisee LO en deux egallement au point N: NP sera egalle à NM (estant LM egalle à OP.) Or le quarré de NP estant quintuple du quarré de NO par la 3. p. 13. aussi le quarré de PM sera quintuple du quarré de LO par la 15. p. 5. (ou de son egalle DC, au quarré de laquelle le quarré de AC est aussi quintuple, car par la 8. p. 6. elle est moyenne proport. entre AC & CB) partant les diametres AC & MP sont egaux: Ainsi si on descrit vn demy-cercle sur le diametre MP, faisant vne entiere reuolution à l'entour de l'icosaëdre, il escrira vne sphere egalle à la donnee. Et d'autant que LO, est moyenne proportionelle entre LP & LM, aussi les demy-diametres qui luy sont egaux, seront aussi moyens proport. entre LP & LM: Partant le diametre MP estant perpendiculaire au diametre LG, le demy-cercle touchera iceluy point G par la 13. p. 6. Et tous les extremitez des autres demy-diametres: Et par le mesme discours il touchera aussi les extremitez des cinq lignes procedant du point O, vers les perpendiculaires esleuees sur les angles du premier pentagone, que nous auons monstré estre egalles aux demy-diametres. Et par ainsi iceluy icosaëdre est inscriptible à la sphere donnee.

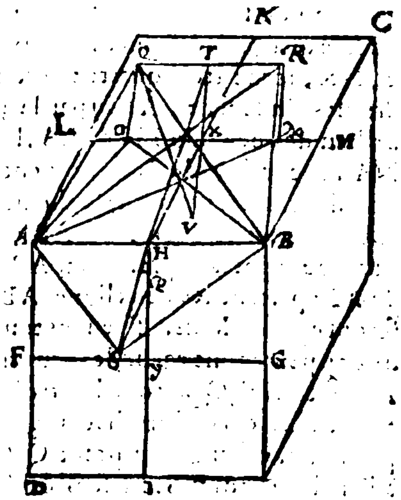


Ie dis finablement que le costé de l'icosaëdre est ligne mineure: ce qui est euident par la 11. p. 13. estant le demy-diametre LG ou son egalle DC, ligne rationelle commens. en puissance à la rationelle AC, de laquelle nous auons monstré que le quarré estoit quintuple du quarré de DC.

PROP. XVII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn dodecaëdre: Et monstrer

strer que son costé est ligne irrationelle appellee residu.

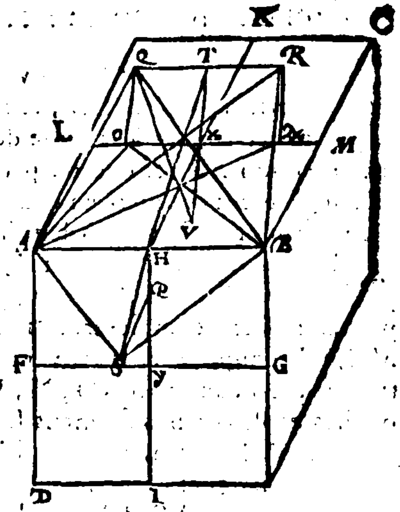


Soit le cube DC, & d'iceluy les deux plans exterieurs AC & DB, se rencontrans à droicts angles à la ligne de commune section AB: & d'iceux plans tous les costez soient couppez en deux egallement, sçauoir AC, par les deux lignes HK & LM, se couppans au poinct X, & DB, par les lignes FG & HI, se couppans au poinct Y. Item soient les trois lignes LX, MX, HY, couppées en la moyenne & extreme raison aux poincts O, N, P, desquelles les plus grands segmens soient OX, NX, PY: Et par la 12. p. 11. soient leuées les trois lignes perpendiculaires OQ & NR sur le plan AC, & PS sur le plan BD, qu'on fera egalles à QX, XN, PY. Puis soient menées les lignes AS, SB, BR, RQ, QA: Ie dis que ASBRQ, est pentagone equilateral constitué sur vn mesme plan & equiangle.

Qu'il ne soit ainsi: Soient menees les lignes AO, AN, AR: Et d'autant que LX est couppée en la moyenne & extreme raison au poinct O, & que OX, est le plus grand segment, par la 4. p. 13. les deux quarrez de LX & LO seront triples du quarré de OX: Et LX estant egalle à LA, & OX à QO, les deux quarrez de LA, & LO, ou par la 47. p. 1. le seul de AO, est triple du quarré de OQ: & le quarré de AQ, qui est egal à tous les deux, par la 47. p. 1. sera quadruple du seul de QO: Et d'autant que QR est double de QO, son quarré, par la 4. p. 2. sera aussi quadruple du quarré de QO, aussi bien que le quarré de AQ: Partant les lignes AQ, & QR seront egalles. Par mesme discours on monstrera l'egalité des trois autres costez RB, BS, SA, Voila donc le pentagone equilateral.

Ie dis maintenant qu'il est en vn mesme plan. Soit menée XT, parallelle à OQ: Item les deux TH & HS, Ie dis qu'icelles deux lignes se rencontrent directement, & font vne seule ligne droicte THS. Car pour autant que HY est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct P, YH sera à YP, comme YP, à PH: Or HX est egalle à HY & XT à PY, & PS à PY: Partant comme HX à XT, ainsi SP à PH: & les deux lignes XH & PS estant parallelles, par la 6. p. 11. aussi par la 32. p. 6. THS sera vne seule ligne droicte: Or par la 1. p. 11. Toute ligne droicte est en vn mesme plan: par consequent le pentagone est en vn mesme plan.

Ie dis encores qu'il est equiangle: Car puis que LX est couppée en moyenne & extreme raison, estant OX, plus grand segment, par la 5. p. 13. en adioustant à LX, XN egalle au plus grand segment OX, la toute LN sera couppee en la moyenne & extreme raison au point X, & sera LX le plus grand segment: & par



la 4. p. 13. les quarrez de LN & NX (ou NR son egalle) sont triples du quarré de LX (ou de son egalle LA) & en adioustant le quarré de LA auec les deux de LN & NR, iceux trois quarrez seront quadruples du seul de LA (ou par la 47. p. 1. au lieu des deux de LN & LA, le seul de NA auec celuy de NR, ou encores le seul de RA, sera quadruple du quarré de LA) duquel le quarré de AB est aussi quadruple par la 4. p. 2. estant AB double de AL: partant les deux lignes AB & AR seront egalles: Mais aussi estans tous les costez du pentagone egaux, les deux triangles ABS & ARQ auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, Et par la 8. p. 1. l'angle au point Q sera egal à l'angle au point S. Et semblablement nous monstrerons que l'angle QRB est egal à l'angle BSA: ainsi trois angles du pentagone seront egaux, & par la 7. p. 13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral & sur AB l'vn des costez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de mesme façon vn pentagone, sur chacun des vnze costez restans, on trouuera vne figure solide enuironnee de douze pentagones equiangles & equilateraux: Et par les deff. sera dodecaëdre.

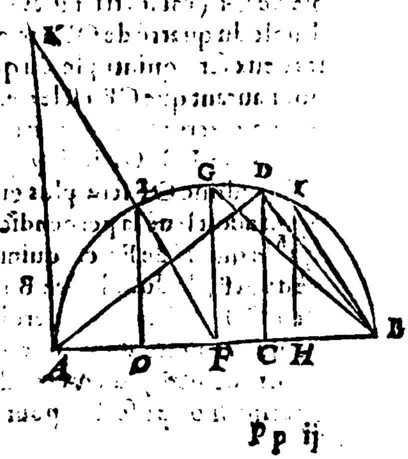
Ie dis dauantage qu'il est inscriptible en la sphere donnee, car si on prolonge TX par la 39. p. 11. elle couppera la diagonalle du cube en deux egallement qu'elle la couppe donc au point V, auquel point sera le centre de la sphere enuironnant le cube, & XV est egalle au demy-costé du cube: Soit menee la ligne QV. Or nous auons tantost monstré par la 4. p. 13. que les quarrez de LN & NX sont triples du quarré de LX: Mais TV est egalle à LN (car XV & XL sont egalles, & XT, XN) Item QT & XN: Partant les deux quarrez de QT & TV) ou le seul de QV par la 47. p. 1.) est triple du quarré de LX: Mais par la 15. p. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscrite au cube, est triple du quarré du costé d'iceluy cube: Et par la 15. p. 5. le quarré du demy-diametre est triple au quarré du demy-costé. Or LX est le demy costé du cube, partant QV sera le demy-diametre de la sphere circonscrite au cube DC, duquel le centre est V, par mesme discours nous monstrerons que du point V toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaëdre, sont egalles au demy-diametre de la sphere circonscrite au cube. Partant vne mesme sphere pourra estre circonscrite au cube & au dodecaëdre.

Ie dis finalement que le costé du dodecaëdre est irrationel appellé residu. Car d'autant que les deux demy-costez du cube LX & XM sont chacun couppez en la moyenne & extreme raison, en raison composee toute la ligne LM sera aux deux plus grands segmens, comme iceux plus grands segmens sont aux plus petits par la 19. p. 5. Par ainsi il est euident que d'autant que les deux plus grands segmens ensemble ON, font le costé du dodecaëdre: que si le costé du cube est couppé en la moyenne & extreme raison, que le plus grand segmēt sera le costé du dodecaëdre inscrit en vne mesme sphere, de laquelle le diametre ensemble le costé du cube, estant posees lignes rationelles, le costé du dodecaëdre (sçauoir le plus grand segment d'icelle ligne, diuisee en la moyenne & extreme raison) est residu par la 6. p. 13.

PROP. XVIII.

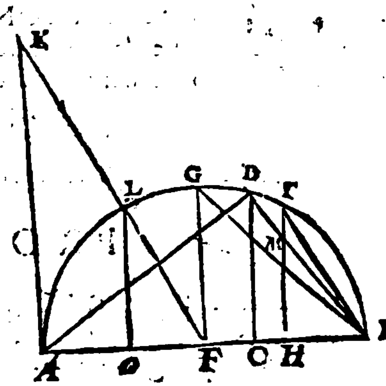
Le diametre d'vne sphere estant donné, trouuer les costez des cinq figures inscrites en icelle, ensemble leur raison.

Auparauant que de venir à la demonstration de ceste proposition, nous tiendrons pour certain, que outre les cinq figures deuant declarees, on n'en pourra trouuer d'autre comprises de superficies planes, equiangles, & equilateralles. Car de deux triangles, ou deux autres superficies planes, on ne comprendra aucun solide, ne pouuant constituer vn angle solide. De trois triangles equilateraux, est constitué l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaedre: de cinq, l'angle de l'icosaëdre: de six triangles equilateraux on ne con stituera aucun angle solide: car iceux sont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'vn angle solide, doiuent estre plus petits que quatre angles droicts par la 21. p. 11. Partant on ne pourra constituer vn angle solide de plus de six angles plans. De trois angles droicts est composé l'angle solide du cube: de quatre angles droicts on ne fera aucun angle solide: car ce seroit tousiours contreuenir à la 21. p. 11. L'angle solide du dodecaëdre est compris de trois pentagones equiangles. De quatre pentagones, il sera impossible: estans iceux plus grands que quatre droicts. Et de pas vn autre poligone equiangle, on ne pourra constituer aucun angle solide, d'autant qu'il s'ensuiuroit absurdité. Partant il est euident qu'outre les cinq figures regulieres cy-dessus declarees, on n'en trouuera point d'autres.



Venons à la demonstration de ceste proposition. Soit le diametre de la sphere donnee AB, il faut trouuer les costez des cinq figures, ensemble la raison qui est entre iceux.

Soit le diametre AB de la sphere donnee diuisé au point C, en sorte que AC soit double de CB: & au point C soit leuee la perpendiculaire & moyenne proportionelle CD: Item soit couppé AB en deux egallement au point F, & apres auoir leué la perpendiculaire FG, soient menees les lignes AD, DB, BG.



Premierement par la 8. p. 6. les triangles DAB & DAC sont equiangles, & par la 4. p. 6. comme CA à AD, ainsi AD à AB : & par la 10. d. 5. le quarré de AD sera au quarré de AB, comme la ligne AC est à la ligne AB : laquelle estant double de BC, il est euident que AB sera à AC en raison sesqui-autre; Partant aussi le quarré du diametre AB sera sesqui-autre au quarré de AD : & par la 13. p. 13. AD sera à costé de la pyramide inscrite en la sphere du diametre AB.

Pyramide.

Cube.

Et pour autant que par le mesme discours de la 8. & 4. p. 6. AB est à BD comme BD à BC par la 10. d. 5. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC, qui est en raison triple : Et par la 14. p. 13. DB, sera costé du cube inscrit en la sphere du diametre AB.

Octaëdre.

Et pour autant que AB est couppee en deux egallement en F : & la perpendiculaire FG est egalle à FB par la 47. p. 1. le quarré de AB sera double du quarré de GB : & par la 15. p. 13. GB sera le costé de l'octaëdre inscrit en la sphere de AB.

Dodecaëdre.

Et pour autant que DB est costé du cube, soit iceluy couppé en la moyenne & extreme raison au point M, duquel le plus grand segment soit MB : iceluy (par ce qui a esté demonstré à la fin de la 17. p. 13.) sera le costé du dodecaëdre inscrit en la mesme sphere que le cube, qui est celle-là mesme qui a pour diametre AB.

Icosaëdre.

Pour le costé de l'icosaëdre soit leuee la perpendiculaire AK egalle à AB : & apres auoir mené la ligne FK du point L, ou icelle couppera le demy-cercle, soit menee LO perpendiculaire à AF par la 12. p. 1. Or KA estant egalle à AB, elle sera double de AF : & par la 4. p. 6. LO. sera double de OF (car les triangles sont equiangles) & le quarré de LO sera quadruple du quarré de OF par la 4. p. 2. & le quarré de LF qui est egal à tous les deux sera quintuple du quarré de OF, estant FB & FL egalles. Mais pour autant que CB est le tiers du diametre AB, & FB sa moitié; FC sera le demy-tiers : & FB sera triple de FC, & son quarré vaudra neuf fois le quarré de FC. Or iceluy quarré de FB, n'est que quintuple du quarré de OF : donc OF sera plus grande que FC. Soit prise FH egalle à FO, & apres auoir leué la perpendiculaire HI, soit menee la ligne IB. Puis donc que le quarré de FB est quintuple du quarré de OF par la 15. p. 5. Le quarré de AB (la double de FB) sera quintuple du quarré de OH (la double de FO.) Or si on considere bien la demonstration de la 16. p. 13. Le quarré du diametre de la sphere circonscrite à l'icosaëdre, est quintuple au quarré du demy-diametre du cercle sur lequel se faict la construction. Partant si on pose AB pour diametre de la sphere qui doit estre circonfcrite à l'Icosaëdre, OH sera le demy-diametre du cercle, sur lequel se fera la construction : lequel comme il a esté demonstré à la mesme proposition, est egal au costé de l'hexagone inscrit au cercle de construction : & qu'auec deux fois le costé du decagone inscrit dans le mesme cercle, il doit estre egal au diametre de la sphere que nous auons monstré estre AB. Il faut donc que HB & AO lignes egalles, soient les deux costez du decagone inscrit dans le mesme cercle, dans lequel OH est le costé de l'hexagone. Mais OH & HI sont egalles (car HI est egalle à LO pour estre en mesme distance du centre, laquelle estant double de OF sera egalle à OH.) Partant IH sera costé de l'hexagone, & HB du decagone : & par la 47. p. 1. & 10. p. 13. IB sera le costé du pentagone inscrit au mesme cercle comme nous auons declaré à la 16. p. 13. Il sera aussi le costé de l'Icosaëdre. Partant IB est le costé de l'Icosaëdre.

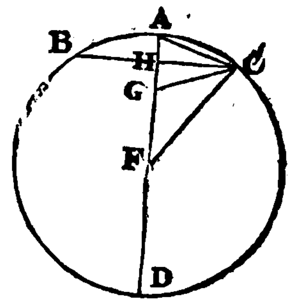
Venons maintenant à la raison d'iceux costez : C'est à dire lesquels d'iceux sont les plus grands. Par ce qui a esté dict cy-dessus AD costé de la pyramide, est plus grand que GB costé de l'octaëdre : par ce que l'arc AGD est plus grand que l'arc GDB. Item GB est plus grand que DB costé du cube : & DB plus grand que IB, costé de l'iscosaëdre pour la mesme raison. Il faut maintenant prouuer que IB est plus grand que BM costé du dodecaëdre. Nous auons monstré cy-deuant que par la 4. & 8. p. 6. que AB est à BD comme BD à BC : & par la 10. d. 5. comme AB & BC, ainsi le quarré de BD au quarré de BC, c'est à dire triple, comme AB est triple de BC : mais le quarré de AC est quadruple du quarré de BC (estant AC double de CB) partant le quarré de AC sera plus grand que le quarré de BD : & la ligne AC plus grande que BD : & AH sera donc encor plus grande que BD. Mais les deux lignes AH & DB sont couppees l'vne comme l'autre en la moyenne & extreme raison aux poincts O & M : & par la 14. p. 5. Le plus grand segment OH de la ligne AH, sera plus grand que le plus grand segment MB de la ligne BD. Mais OH est egalle à HI, & HI plus petite que IB, à plus forte raison MB sera plus petite que IB. Ce qui estoit à demonstrer.

Fin du treziesme Element.

ELEMENT QVATORZIESME.

PROP. I.

LA ligne perpendiculaire menée du centre vers le costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié des deux costez de l'hexagone, & decagone, inscrits au mesme cercle.



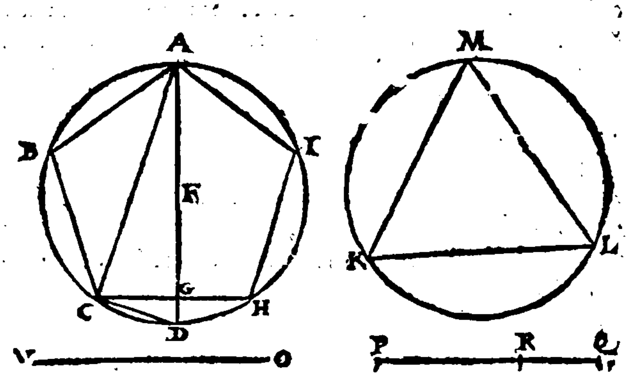
Soit dans le cercle le costé du pentagone BC, & du centre F soit mené la ligne FH, tombant perpendiculairement sur iceluy costé, & icelle prolongée iusque en A, couppera l'arc BAC en deux egallement comme la ligne BC, par la 3. p. 3. ainsi la ligne AC sera le costé du decagone, & AF costé de l'hexagone: Ie dis que la perpendiculaire FH est a moitié des deux costez ensemble AC & AF.

Qu'il ne soit ainsi. Apres auoir pris HG egalle à HA, soit menée la ligne GC. Puis que l'arc BAC est la cinquiesme partie de la circonference, AC sa moitié sera la cinquiesme partie de la demy circonference ACD: Et partant l'arc CD sera quadruple de CA, & par la 33. p. 6. l'angle CFD sera quadruple de CFA au centre, & double de DAC à la circonference: lequel par ce moyen sera double à CFA: mais par la 4 p. 1. AC est egalle à CG, & par la 5. p. 1. les deux angles sur la base AG seront egaux, & HGC sera double de GFC: & par la 32. p. 1. iceluy estant egal à tous les deux opposez interieurement, les deux angles sur la base FC seront egaux entre eux: & par la 6. p. 1. GC & GF seront egalles, & AC à chacune d'icelles. Or les deux GH & HA estant egalles, la seule FH, sera egalle aux deux comme vne HA & AC: & FH adiousté aux deux

HA & AC, sera double de la seulle FH: mais FH adioustée à HA & AC fait les deux FA costé de l'hexagone & AC costé du decagone. Partant iceux deux costez sont doubles de FH.

PROP. II.

Si en vne mesme sphere on inscrit le dodecaëdre & l'icosaëdre, aussi vn mesme cercle contiendra le triangle de l'icosaëdre, & le pentagone du dodecaëdre.



Auparauant que d'expliquer ceste proposition, il conuiêt de mõstrer que le quarré du costé du pentagone auec le quarré de la ligne qui soustient vn angle d'iceluy, est quintuple du quarré du demy-diametre du cercle dans lequel est inscrit iceluy pentagone.

Soit le costé du pentagone inscrit dans vn cercle CH, la ligne qui soustient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FD: ie dis que les deux quarrés de CA & de CH sont quintuples du quarré de FD.

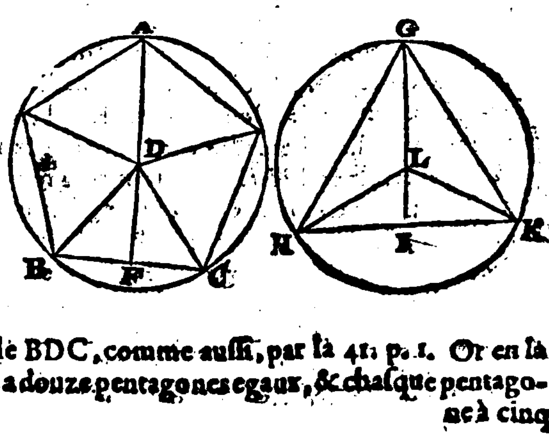
Car si on meine CD, ce sera le costé pu decagone: & le quarré de AD, sera quadruple du quarré du demy-diametre FD, aussi les deux AC & CD seront quadruples du quarré de FD: & les trois de AC, CD, & DF, seront quintuples du seul de DF: Mais les deux de CD & DF, costez de l'hexagone & decagone sont egaux au quarré de pentagone CH, par la 10. p. 13. partant les deux quarrez de AC & CH sont quintuples du seul quarré de DF.

Pour la proposition. Soit le diametre de la sphere comprenant le dodecaëdre & l'icosaëdre ON, & d'iceluy dodecaëdre soit vn pentagone ABCHI, & de l'icosaëdre soit le triangle equilateral KLM, le dis que les cercles qui les enuironnent dans icelle sphere sont egaux, & que ce n'est qu'vn mesme cercle.

Car CA sera le costé du cube inscrit en la mesme sphere par la construction de la 17. p. 13. Soit trouuée la ligne PR egalle au demy-diametre du cercle dans lequel on construict l'icosaëdre: il est euident que le quarré du diametre de la sphere NO sera quintuple du quarré de PV, comme il a esté monstré à la 16. p. 13. Soit icelle ligne PR couppée en la moyenne & extreme raison, & soit le plus grand segment RQ adiousté à la toute directement, la composée PQ sera aussi diuisée en la moyenne & extreme raison, par la 5. p. 13. & PR estant le costé de l'hexagone inscrit au cercle de la construction de l'icosaëdre, par la 9. p. 13. RQ sera le costé du decagone inscrit au mesme cercle. Et d'autant que le quarré de NO est quintuple du quarré de PR, comme nous auons dit, & le mesme quarré du diametre NO est triple du quarré de CA costé du cube inscrit en la mesme sphere: Trois quarrez de CA, seront egaux à cinq quarrez de PR: Mais par la 7. p. 13. lors que CA est diuisée en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment est BA, Item PR diuisée de mesme son plus grand segment est RQ. Partant trois quarrez de AC seront à cinq de RP, comme trois de BA à cinq de RQ: & par la 14. p. 5. Trois quarrez de BA seront egaux à cinq de RQ. Or par ce qui a esté demonstré en la 16. p. 13. Le costé du triangle KL, est egal au costé du pentagone inscrit dans le cercle, dans lequel PR est costé de l'hexagone: & par la 10. p. 13. Cinq quarrez de MK, seront egaux à cinq quarrez de PR, & à cinq de RQ: ou à trois de BA, & trois de AC: & les deux quarrez de BA, & AC estans quintuples du quarré du demy-diametre FA: (car nous auons demonstré cela au commencement de ceste proposition) trois quarrez de AB & AC seront egaux à quinze quarrez du demy-diametre FA du mesme cercle. Mais cinq quarrez de KM, costé du triangle equilaterel, sont aussi egaux à quinze quarrez du demy-diametre du cercle KLM (car chacun quarré de KM est triple du quarré du demy-diametre, par la 12. p. 13.) Et les trois de BA & AC, estans egaux aux cinq de KM, les quinze du demy-diametre FA, seront egaux aux quinze du demy-diametre du cercle KLM: Partant vn quarré d'iceux sera egal à vn quarré, & le demy-diametre au demy-diametre: & les cercles seront egaux, ce qu'il falloit demonstrer.

PROP. III.

Si vn pentagone equiangle & equilateral est inscrit en vn cercle, du centre duquel on meine vne ligne perpendiculaire vers le costé d'iceluy, trente fois le rectangle de la perpendiculaire, & du costé du pentagone, sont egaux à toute la conuexité du dodecaèdre.



Soit le pentagone equiangle & equilateral inscrit dãs vn cercle ABC, la perpendiculaire du centre vers le costé BC soit DF: Ie dis, que trente fois le rectangle de DF & BC, est egal à la conuexité du dodecaedre.

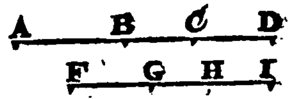
Car par la 34. p. 1. il est euident que le rectangle de DF & BC est double du triangle BDC, comme aussi, par la 41. p. 1. Or en la conuexité du dodecaedre, il y a douze pentagones egaux, & chasque pentagone à cinq ne à cinq pareils triangles que BDC, qui sont en tout soixante triangles, desquels soixante rectangles seroient le double: Donc trente rectangles de DF & BC leur seront egaux.

Semblablement pour l'icosaëdre, sa conuexité contient vingt triangles equilateraux semblables à GHK, & chacun, d'iceux se diuise en trois egaux entre eux, & semblables & egaux à HLK, qui font en tout soixante triangles comme HLK: mais le rectangle de la perpendiculaire LI, & du costé HK est double du triangle HLK, par la 34. & 41. p. 1. Et soixante rectangles seroient doubles de soixante triangles: Donc trente rectangles de LI & HK seront egaux à la conuexité totalle de l'icosaëdre.

De cecy resulte, par la 15. p. 5. que comme vn seul rectangle de DF & BC, à vn seul rectangle de LI & HK, ainsi la conuexité du dodecaëdre à la conuexité de l'icosaëdre.

PROP. IIII.

Si vne ligne est couppée en la moyenne & extreme raison, les segmens d'icelle, seront proportionaux aux segmens de toute autre ligne couppée de mesme.



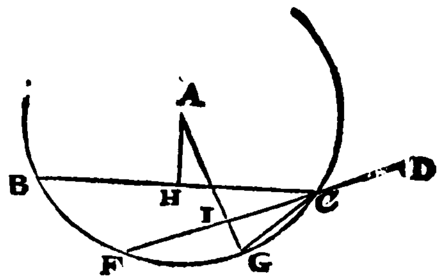
Soient les deux lignes AC & FH couppées en la moyenne & extreme raison aux poincts B & G leurs plus grands segmens AB & FG: ie dis que comme AC à FH ainsi AB à FG.

Car par la 17. p. 6. le rectangle de AC, & CB, comme il sera egal au quarré de AB, ainsi le rectangle de FH & HG sera egal au quarré de FG, & par la 15. p. 5. quatre fois le rectangle de AC & CB sera au quarré de AB, comme quatre fois le rectangle de FH & HG au quarré de FG: & en composant (apres auoir adiousté directément CD egalle à BC, & HI egalle à HG) quatre fois le rectangle de AC & CB auec le quarré de AB (ou par la 8. p. 1. le seul quarré de AD) est au quarré de AB, comme quatre fois le rectangle de FH & HG, auec le quarré de FG (ou le seul quarré de FI) est au quarré de FG, & par la 22. p. 6. comme AD à AB, ainsi FI à FG. Et en composant comme AD & AB à AB, ainsi FI & GF à FG: mais AD & AB sont double de AC, & FI auec FG double de FH: & par la 15. p. 5. comme AD & AB à AB, ainsi FI & FG à FG, & la moitié AC sera à BA, ainsi FH la moitié à FG: & en changeant comme AC à FH, ainsi AB à FG: & le reste au reste BC à GH, par la 19. p. 5.

PROP. V.

Comme la conuexité du dodecaëdre, à la conuexité de l'icosaëdre: ainsi le costé du cube au costé de l'icosaëdre

inscrits en vne mesme sphere.

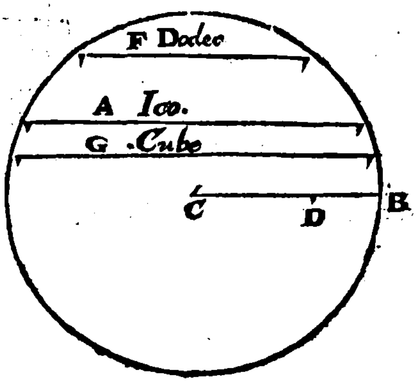


Dans le cercle donné soit pris le costé du triangle equilateral de l'icosaëdre BC, & dans le mesme cercle le costé du pentagone du dodecaëdre (ce que nous auons monstré estre possible par la 2. p.14. qu'vn mesme cercle comprend & le triangle de l'icosaëdre, & le pentagone du dodecaëdre:) Soit donc iceluy costé du pentagone FC, lequel soit prolongé hors le cercle iusques à ce qu'il soit egal au costé du cube inscrit dans la mesme sphere que le dodecaëdre ou icosaëdre, sçauoir iusques en D: Ie dis que toute la conuexité de l'icosaëdre est à toute la conuexité du dodecaëdre cōme le costé de l'icosaëdre BC, est au costé du cube FD. Cecy se demonstre ainsi.

Puis que FC est costé du pentagone, Soit menee la perpendiculaire AG qui le couppera en deux egallement en I, & GC qui sera costé du decagone inscrit au mesme cercle: & par la 9. p. 13. AG estant costé de l'hexagone, les deux comme vne AG & GC, seront couppee en la moyenne & extreme raison, & AG sera le plus grand segment. Item par ce qui a esté demonstré à la 17.p. 13. FD costé du cube estant couppee en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera le costé du pentagone FC. Soit maintenant menee AH perpendiculaire à BC, laquelle sera egalle à la moitié du demy-diametre: d'autant qu'icelle estant prolongee, elle seroit la base du triangle equilateral de l'hexagone, & la perpendiculaire BH, la diuiseroit en deux egallement: AH sera donc la moitié de AG. Item AI la moitié des deux AG & GC ensemble par la 1. p. 14. Lesquelles estant couppees en la moyenne & extreme raison, AG est le plus grand segment: aussi par la 15. p. 5. leur moitié AI estant couppee en la moyenne & extreme raison la moitié de AG sçauoir AH, sera le plus grand segment car la moitié du plus grand segment, & la moitié du plus petit segment faict la moitié de la ligne) en apres les toutes sont aux toutes, comme les moitiez aux moitiez: Mais toutes les lignes couppees en la moyenne & extreme raison ont leurs segmens proportionaux par la 4. p.14. Partant comme la toute FD au plus grand segment FC, ainsi la toute IA au plus grand segment HA: Et par la 16. p. 6. Le rectangle de FD & HA sera egal au rectangle de FC & IA: & par la 7. p. 5. Ils auront mesme raison l'vn que l'autre au rectangle troisiesme de BC & HA. Or par ce qui resulte de la precedente, comme le rectangle de BC & HA au rectangle de FC & IA, ainsi la conuexité de l'icosaëdre à la conuexité du dodecaëdre: Partant icelles conuexitez seront aussi l'vne à l'autre comme le rectangle de BC & HA, au rectangle de FD & HA: Lesquels estans de mesme hauteur, ils sont l'vn à l'autre comme leurs bases BC & FD, par la 1. p. 6. & par la 11. p. 5. La conuexité de l'icosaëdre est à la conuexité du dodecaëdre comme BC costé de l'icosaëdre à FD costé du cube.

PROP. VI.

Si vne ligne eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, comme les deux quarrez de la toute & du plus grand ſegment, ſont aux deux quarrez de la toute & du plus petit ſegment, ainſi le quarré du coſté du cube, au quarré du coſté de l'icoſaëdre.



Soit le cercle comprenant & le triangle de l'icoſaëdre & le pentagone du dodecaëdre, duquel le demy-diametre CB, ſoit couppé en la moyenne & extreme raiſon en D, le plus grand ſegment ſoit CD, lequel ſera le coſté du decagone inſcrit dans le meſme cercle par la 5. & 9. p. 13. (eſtant CB coſté de l'hexagone:) Item ſoient priſes trois lignes, F coſté du dodecaëdre, A coſté de l'icoſaëdre, G coſté du cube: Ie dis que le quarré de G, eſt au quarré de A, comme les deux quarrez de CB & CD, ſont aux deux quarrez de CB & DB.

Car F eſtant le coſté du pentagone, & A coſté du triangle, tous deux inſcrits dans le cercle donné: lors que G coſté du cube eſt diuiſé en la moyenne & extreme raiſon F eſt ſon plus grand ſegment comme il a eſté demonſtré à la 17. p. 13. Donc A eſtant le coſté du triangle inſcrit au cercle donné, ſon quarré ſera triple du quarré du demy-diametre CB, par la 12. p. 13. & par la 4. p. 13. les deux quarrez de CB & BD ſont triples du quarré de DC: Ainſi le quarré de A, eſt au quarré de CB, comme les deux quarrez de CB & BD ſont au quarré de CD: Et en changeant le quarré de A, ſera aux deux quarrez de CB & BD, comme le quarré de CB au quarré de CD. Mais comme le quarré de CB au quarré de CD, ainſi le quarré de G, au quarré de F, par la 4. p. 14. (car F eſt le plus grand ſegment de G) & par la 11. p. 5. comme le quarré de A aux quarrez de CB & BD, ainſi le quarré de G, au quarré de F: Et en changeant comme le quarré de A au quarré de G, ainſi les quarrez de CB & BD, ſont au quarré de F, coſté du pentagone: lequel par la 10. p. 13. eſt egal aux deux quarrez de CB & CD coſtez de l'hexagone & decagone inſcrits en vn meſme cercle, & par conſequent le quarré de A coſté de l'icoſaëdre eſt au quarré de G, coſté du cube, comme les deux quarrez de CB & BD, aux deux quarrez de CB & C D. Ce qui aduiendra à quelque ligne que ce ſoit diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, d'autant que par la 4. p. 14. tous leurs ſegmens ſont proportionaux.

PROP. VII.

Comme le costé du cube au costé de l'icosaëdre, ainsi le dodecaëdre à l'icosaëdre inscrits en vne mesme sphere.

Ceste demonstration est facile à celuy qui a bien entendu les precedentes. Car puis que le pentagone du dodecaëdre, & le triangle de l'icosaëdre sont inscrits dans vn mesme cercle, iceux triangle & pentagone seront equidistans du centre de la sphere: Partant si on diuise le dodecaëdre & l'icosaëdre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre solide seront de mesme hauteur: Et par ce qui a esté monstré au douziesme liure, elles seront l'vne à l'autre, comme leurs bases: c'est à sçauoir douze pyramides du dodecaëdre à vingt pyramides de l'icosaëdre, comme douze pentagones à vingt triangles: C'est à dire que comme la conuexité du dodecaëdre à la conuexité de l'icosaëdre, ainsi le dodecaëdre à l'icosaëdre. Mais par la 4. p. 14. icelles conuexitez sont l'vne à l'autre, comme le costé du cube au costé de l'icosaëdre: & par la 11. p. 5. comme le costé du cube au costé de l'icosaëdre, ainsi le dodecaëdre à l'icosaëdre

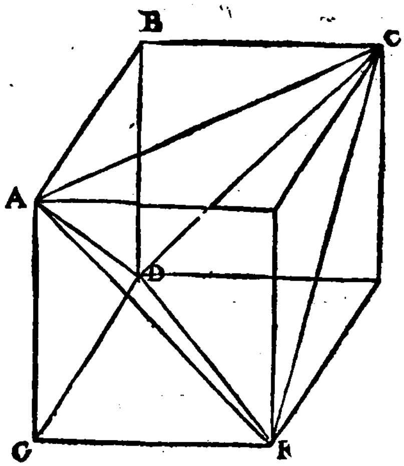
Fin du quatorziesme Element.

ELEMENT QVINZIESME.

PROP. I.

DANS le cube donné, inſcrire vne pyramide.

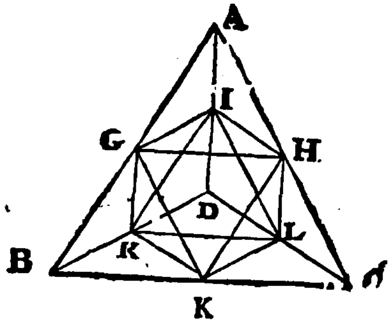
Soit le cube donné GC, dans lequel il faut inſcrire vne pyramide. Soient menez les diagonalles AF, FC, CA, AD, DF, DC. Toutes leſquelles diagonalles ſont egalles entre elles: par ce que les ſix quarrez dans leſquelles elles ſont menées ſont egaux par la deffinition du cube: Partant les quatre triangles compoſez d'icelles ACD, DCF, ADF, ACF, ſont equilateraux: Et par la deff. de la pyramide ADCF eſt pyramide equilateralle inſcrite au cube donné.



PROP. II.

Dans la pyramyde donnée, inſcrire vn octaëdre.

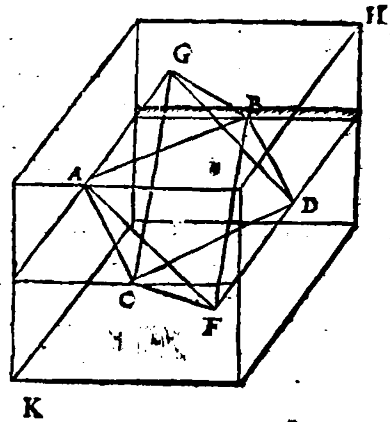
Soit la pyramide donnée ABCD, dans laquelle il faut inſcrire vn octaëdre. Soient couppez tous les coſtez d'icelle pyramide en deux egallement aux poincts G, F, H, L, I, K: Et soient menées les lignes GI, IH, HG, GF, FH, GK, KL, LF, LH, KI, IL. Toutes lesquelles lignes sont egalles entre elles, par la 4. p. 1. estant toutes les lignes couppées egalles, & les angles des triangles plans de la pyramide egaux: Et partant le quadrilatere IKFH, à les quatre costez egaux, & les quatre triangles commençant sur iceluy, & finissant au point G, IGH, IGK, KGF, FGH, sont tous equilateraux: Item les quatre autres commençans au dessoubs du quadrilatere, & finissans au point L, ILK, ILH, HLF, FLK, sont aussi equilateraux, & par la deffinition de l'octaëdre la figure comprise entre les deux poincts G & L, ayans le quadrilatere au milieu est octaëdre inscrit en la pyramide A B C D.



PROP. III.

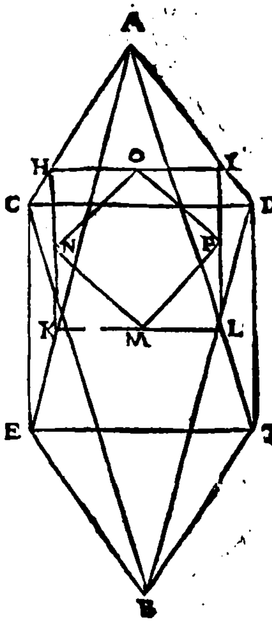
Dans le cube donné, inscrire vn octaëdre.

Soit le cube donné KH, dans lequel il faut inscrire vn octaëdre. Soient trouuez les centres des six quarrez d'iceluy cube, & soient les poincts A, B, C, D, G, F: Item soient menés les quatres lignes AB, BD, DC, CA, lesquelles seront toutes egalles, par la 4. p. 1. d'autant qu'elles sont bases de quatre triangles ayans deux costez egaux à deux costez, & vn angle egal à vn angle: Icelle quatre lignes feront aussi vn quarré qui est au milieu de l'octaëdre. Or des quatres angles d'iceluy quarré soient menées les quatres lignes vers le poinct G, lesquelles comme il a esté dit cy-dessus seront toutes egalles AG, BG, DG, CG, & feront les quatres triangles equilateraux A G B, B G D, D G C, C G A: Item des mesmes quatres angles au dessoubs du quarré vers le centre F, soient aussi menées les lignes qui seront egalles, comme dessus AF, BF, DF, CF faisant icelles quatres autres triangles equilateraux A F C, C F D, D F B, B F A, lesquels seront aussi egaux aux quatre premiers: Et par la deffinition de l'octaëdre le solide compris entre les deux poincts F & G, ayant au milieu le quarré A B C D, sera octaëdre inscrit au cube donné.



PROP. IIII.

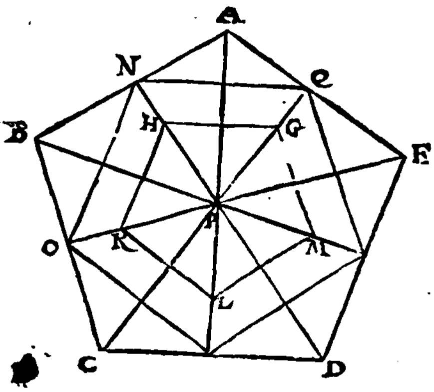
Dans l'octaëdre donné, inscrire vn cube.



Soit donné l'octaëdre A B, dans lequel il faut inscrire vn cube des quatre triangles qui se terminent au poinct A, CAD, CAF, FAG, GAD: Soient pris les centres M, N, O, P, & soient menées les lignes MN, NO, OP, PM: Il est euident que M N O P, sera quarré, & si d'iceux quatre centres on meine KH, HI, IL, LK, parallelles chacune à son costé, du quarré du milieu de l'octaëdre C D G F. Aussi est-il aisé à prouuer que LIHK est quarré: Que si semblablement des autres triangles on prend les centres, & par le moyen d'iceux, & des lignes parallelles, on descrit des quarrez, on trouuera à la fin le cube inscrit à l'octaëdre donné.

PROP. V.

Dans l'icosaëdre donné, descrire vn dodecaëdre.



Soit le pentagone de l'icosaëdre composé de cinq triangles equilateraux se terminans au point P, ABC DF, & soit trouué le centre de chacun d'iceux triangles aux poincts H, G, M, L, K, & d'iceux soient menees les lignes HG, GM, ML, LK, KH: Item les lignes PG, PH, PK, cōtinuees iusques à Q, N, O: Il est euident qu'elles coupperoit en deux egallement les lignes FA, AB, BC: Et apres auoir mené les lignes NO, NQ, on prouuera aisement par la 4. propop. 1. qu'elles sont egalles, & par la 4. prop. 6. que comme NQ à NO, ainsi GH, à HK, (car tous les triangles sont equilateraux) ainsi on monstrera que les cinq costez du pentagone GHKLM, sont egaux: On prouuera encores aisement qu'iceluy pentagone est equiangle (estans tous ses triangles equilateraux) il se prouuera encores aisément comme à la dix-septiesme proposition treiziesme, qu'il est en vn mesme plan. Partant puis qu'il y a douze angles à l'icosaëdre composez chacun de cinq triangles equilateraux, on pourra comme dessus des centres d'iceux triangles descrire douze pentagones qui feront le dodecaëdre. Nous auons legerement expliqué ces inscriptions de figures n'en estant la cognoissance tant excellente en Geometrie qu'on pourroit bien dire, voires mesme que l'on se passeroit bien aisément de ce dernier liure.

Fin de l'Element quinziesme, & dernier.