

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

14. 2. 11. 21
Cat. in/rip. 17. 10. 11. 21. 21. 21.

Euclidis elemētorum

LIBER DECIMVS, PETRO

Montaureo interprete.

Ad Ioannem Bellaium Cardinalem.



LVTETIAE

Apud Vascofanum, uia Iacobaea ad insigne Fontis.

M. D. LI.

CVM PRIVILEGIO.

LIBER DECIMVS, PETRO

PRIVILEGII SENTENTIA.

Regio diplomate cautum est, ne quis alius prater
Vasco sanum hunc Euclidis elementorum librum
decimum, interprete Petro Montaureo uiro senatorio
ante sexennium imprimat, neue uendat. Qui secus fe-
cerit, libris & pœna in sanctione aestimata multabitur.
Datum Blefis decimo Calendas Februarij M. D. L.
De Moulins.

CVII PRIVILEGIO.

AD IO. BELLAIVM CARDI-
nalem Petri Montauri

PRÆFATIO.



VM ad insitam mihi magno naturæ
erga me beneficio incredibilem de-
scendi cupiditatem, illud quoq; iu-
diciū progrediente sensum atate
studioque confirmatum accessisset, nihil esse tam
vehementer homini expetendum, quàm rerum
maximarum perceptam habere naturam, feci nō
inuitus adhuc, ut quò uocaret illa, eò me deduci
facile paterer: in idq; uitæ curriculum immitti,
quod & dignitati hominis conuenientissimū, &
naturæ præterea meæ accommodatum esset, hui-
us uerò consilij tantum abesse uideo ut me pœni-
tere cœperit, ut maiores etiam quotidie uberior-
esque fructus mihi non contingere tantum ipse
sentiam, sed & deinceps multo præstatiores per-
ceptum iri certo sperem. Nam quanto in altum
longius euehimur, tanto laborē minui magis, qui
maximus in cuiusque rei principiis solet esse, ani-
mi uero uoluptatē nulla alia re tantū, quā discēdo
ali augerique cognoscimus. Is autem meus in su-
scipiēdo uitæ genere sensus cum uniuersę philo-
sophiæ studium mihi proponeret amplectēdum,
simul animo subiiciebat illud, nihil in ea re ma-
gnopere profici posse, nisi quis ueterum philoso-
phorum uestigia summa diligentia persequutus,

P R Æ F A T I O.

eandem quam ipsi, uiam institisset. Itaq; nihil, ut hoc quidem loco dicam de nostris cæterarū philosophiæ partium studiis, ad mathematicam cognitionem animum applicans, in eum me locum sensim abductum diuertisse intelligo, unde suscepti primum instituti que illius itineris recordatio propemodum effluxerit: neque id uero repugnante me admodum. Quid enim est, cum ex ea philosophiæ parte, quæ omnis est in agendi rationibus occupata, tantum præceptorum acceperis, quātum ad unius hominis rei que priuatę cuiusq; suę actionem attinet, unde maior animum uerit cupiditate flagrantissimū permulcere possit oblectatio, quàm quæ ueri cognitionem subsequi solet. Nam illa quidem studia ciuilis disciplinę, quę publicis rebus consilio administrandis idonea totius hominum uite multo præstantissimas actiones ex recto rationis præscripto moderari debuerant, plane refrikerunt: tanta profecto perturbatione rerum omnium, ut cuius scientię ratio clauum aliquando in rerum pub. gubernatione magna cum sua laude, hominū uero longe maxima felicitate, cursūque prospero tenuerit, eidem nūc sit uix aliquid relictū in sentina loci. Tertia quædam supererat illa philosophādi exercitatio, quæ naturam rerum persequens, ut est omnium ingeniorum cognitione dignissima, ita propter multiplices ipsius materiæ formas & motus incōstantes, acutum quoddam habet & subtile disputandi

P R Æ F A T I O.

di genus, sed obscurum tamē, adeóque repugnan-
tes inter se summorum philosophorum senten-
tias, ut uerisimilia tantum, non etiam uera doce-
re uideri possit. Vna ergo est mathematicarū re-
rum tractatio, quæ constantibus necessariisque
ducta principiis, uias quoque consimiles perse-
cuta, eò nos progredientes manu ueluti ducit,
ubi ueritatis ipsius cubilia, quæ quidem mētibus
humanis sua ipsarum ui facultatēq; cerni queāt,
explicitet intuenda. Quid autem est, quod hac una
re præstantius magnificentiusque dici possit? An
quid erit aliud, quod cuiquam anteuertendū ui-
deri queat? Tibi certe non arbitror, Bellai amplif-
sime, cui neque ad acumen ingenij doctrinæ cul-
tum, neque ad doctrinam iudicij uim deesse in-
telligo. Quæ cum ita sint in te illustria, ut fortu-
næ tuæ, illius quidem per se splendide, luminibus
ego unus omnium minime blandus fortunæ ad-
mirator offecisse putem, tibi homini grauissimo,
idoneoque uiso de tota nostra ratione iudiciique
sensu perscribam paulo liberius: si forte plus au-
thoritatis ex personæ tuæ dignitate nostra habitu-
ra est oratio, ut sane habitura est, ad iuuentutem
in eum studiorū cursum, quem ualde uolumus,
inducendam. Verum enim, ut ipse tecum, hoc est
cum homine intelligente loquar, iam pridem er-
rabunde de uia defleximus: ueteremque illam di-
scendi consuetudinem præ studiis quibusdam no-
uis amisimus. Hic cū plurima quæ recte dici pos-

P R Æ F A T I O.

sint,omittenda ducam,unum illud quidem certe nunc maxime mihi dicendum est,illius perturbationis,de qua paulo ante diximus,eā esse causam, & potissimā quidem, quòd totius institutionis, quā à pueris *παιδείας* ueteres illi ueritatis magistri uocare soliti sunt,priscis quondam te seculis tantopere conseruate,ca est,hac quidem ætate,peruerſitas,ut quod primum potissimūque studiorum esse debuerat,perexignū quidem omnino locum apud nos,plurimorum autem hominum iudiciis nullam etiam dignitatis æstimationisque partem mereatur aut obtineat. Quid ergo est:dicat aliquis,quid habes quod reprehendas? Ego uero permulta,pene dixi omnia,ut iam indubitāter illud affirmare possim,tum demū optime rebus hominum consultū iri,cum illud poëtarum *ὑσπέρ τε τῶν ποιητῶν* ipsi in suas actiones transtulerint:quòdque primum ducunt,postremū habuerunt,& quod postremo,aut,ut uerius dicam,nullo loco ipsis est,si primum existimauerunt. Nunc unius artis,uixdum etiā artis præſidiis opibúsq; immodicis tam flagitiose-circūuenti tātis clamoribus obtundimur,ut naturæ uox ad scientiæ cupiditatem inuitantis, ne exaudiri quidem ulla ratione queat. Quæ si loco suo cōtenta non se cōmouisset,diiudicandisque hominum litibus occupata munus alienum aut nūquam appetiisset, aut certe non impediisset,minus profecto haberemus quod dolendum uideretur: est enim & iudiciis

P R Æ F A T I O.

diciis accommodata: iudicia porro ipsa discepta-
 tionibus rerum controuersarū, quibus carere nul-
 lo modo possumus, pernecessaria. Neque sane est
 in ea re quod reprehēdi iure possit, si quis morem
 maiorum in illa consequēda retineat, ut philoso-
 phiæ totius institutis abunde suppeditatis, hanc
 ipsam illius quidem imitationē quandā & quasi
 sobolem aggrediatur discere, cum intellexerit id
 quod in genere sciētiarum est perpetuum, ut aliis
 aliæ subsint, idem ipsum hīc quoque fieri, ut iu-
 risperitia philosophiæ partē illam, quæ est de mo-
 ribus tum singulorum tum uniuersorū, tāquam
 architectam agnoscat & obseruet. Sed hæc tota
 cōtrouersorum ratio iudiciorum illius partis est
 iustitiæ, quæ *συντάγματα* tantum continet. Nam
 de altera illa quæ multo est & dignitate præstan-
 tior & utilitate in omnem uitæ societatem ube-
 rior, quæ præmia recte factis, pœnāsque sceleri-
 bus pro rata cuiusque rei personæq; portione di-
 stribuens, duo uincula rerumpub. firmissima cō-
 plectitur, aut omnino de iusti ipsius ui atque na-
 tura, ne literam quidem: se tamen ueram philo-
 sophiam profiteri rerūmq; maximam guberna-
 tioni unam idoneam prædicans, illam ipsam phi-
 losophiam, cum omnium artium parentem, tum
 uero erga se beneficentissimā magistrāmque ui-
 tæ certissimam lēdens, dignitatis inuadit posses-
 sionē alienæ: neque se animaduertit (ne quid ipse
 criminosis dicam) alienum appetentem contra

P R Æ F A T I O .

sua ipsius, quid autem dico sua? imò magis cōtrā rationis uniuersę decreta, cuique suū minime tribuere: quāmq̃ue matris loco uereri debuerat ab ipsa genita & educata, unde suum aliquem in repub. locum ut tenere posset, habuerat, quod in parentes impij filij solent, ipsi quasi senectute desipienti, ut bonorum suorum administrationi interdiceretur, efficere. Nā si nihil aliud esset, quis quāso remigem in naui ferat gubernatoris munus arrogāter affectantem? Iam uero ut à primis ordiamur, hęc totas urbes suis sacris initiorūque pertractationi cōsecratas habet: ad quas undique concursus puerorum iuuenūmq; fiant, nō tam discendi, quā à magistris discedendi cupidorum: sic ætas maxime imbecilla, suique impotens, effrenis, incustodita, suo unius impetu ferenda permittitur, quam unam alieno parētem imperio, authoritate bonorum nixam, insolētia, leuitati, audacię, uoluptati frenum ceteris etiā animorum motibus modum imponendum esse maxime doceri oportuit: hīsque uocibus assidue aures illius personare, ut concursantes immensique cupiditatum æstus, quibus ætas illa plurimū nata est commoueri, reprimeretur. At enim qui recte præcipiāt, doceāntq; præsto sunt, si modo eos audire in animum induxerint. Credo sane, quod ad illorum artem attinet, ut est captus horum hominum & temporum, non indiligenter exponere testamēta, substitutiones, obligationes, stipulationes,

P R Æ F A T I O.

lationes. Sed quid hæc ad mores informãdos? Ita fit ut alij ne audiantur quidem, propter abhorrentem ab illis studiis multorum ingeniorum naturam: alij quãuis studiose soleant audiri, tamẽ uel rei ipsius per se æstuosẽ traditione perplexa, uel docendi imperitia præpediti, nihilo doctiores amittant auditores, quã acceperint. Ex quo illud malum interea sequi omnino necesse est in iuuenum animis, cum uoluptates ex doctrina institutionẽque liberales ipsi non habeant, ut consecrandis alienis illiberalibũsq; totos sese dedant: prorsus enim eos aliquid agere quietẽque contemnere, necesse est. Pauci quidã ex illo sunt genere, qui gloriẽ, nescio cuius, utilitatĩque expectatione delintri, è toto studiorum suorum quinquennio fructus tenues illos quidem & austeros, sed quẽsitos tamen colligant. Præclara uero res, hominem natura quidẽ ipsum sua nullius uirtutis, uitiũque præsentia habitũque fretum, uerum facultatibus nudis in utrãuis partem ferentibus, præditum, magis tamen improbãdorũ exemplorum multitudine, opinionũque peruersitate deprauatum: cum opes, honores, diuitias præcipue duxerit expetendas, ad alendum morbum ex contagione contractum. artem etiam per omne uitẽ tempus exercẽdam adhibere: cuius tota ratio disputandi sit de meo & tuo: deque iis rebus & modis, quibus quod meum est, tuum effici possit. Ad quam quidem disciplinã nimis multos docilio-

P R Æ F A T I O.

res reddi scimus,quàm societati hominũ conducat tranquille constantérque moderandẽ. Ita credo priscos illos non tam antiquitate quàm dignitate memorabiles uiros,domi forisq; in sua quẽque ciuitate rerum gestarum gloria præstantes,liberos suos ad maiorum imitationẽ instituisse:ac non potius Athenas,Rhodum,Massiliam,& quò non? ad cultum ingenij capeffendum,mercaturamque artium optimarum dimisisse. Vnde philosophiẽ præceptis instructi,cum se ipsi regere didicissent,agendisq; rebus adhiberentur,non ex artis illius formulis,sed ex iustitiẽ scitis immutabilibus hominum cœtus,& quidem uolentiũ,regendos acciperent. Age modo,hunc ipsum hominem ex hac nostra exercitatione,tali cultũ educationẽque in forum ex umbra tanquã in aciem producamus:ut studij sui rationẽ & usum aliquẽ nobis tandem explicet.Ibi uero quanta prudentia,grauitate,constantia,probitate se gerat,dicere meũ non est. Vos quæso dicite Pierides,& quidem hominibus ignaris: nobis enim nihil attinet,quos plura scire necesse est,quàm referre iuuet.hoc tatum dicam,cum se existiment parum in ea arte profecturos,nisi toti sint in illius cognitione per omnem uite cursum occupati,tantumque sibi periisse temporis,quantũ aliis studiis accessant,homines ignorantes quantũ cuique sciẽtiẽ temporis sit tribuẽdum,nimis magnam mercedem statuũt,si præstantissimarum rerum, officij

P R Æ F A T I O.

cij dico munerisq; sui ignorance, hæc una fortuitarum rerū cognitio disceptatrix sibi ipsis comparanda uideatur: neque uero intelligunt rei per se infinite finem nullū reperiri posse. Verū ipse me longius scribendo prouectum in offensiones multorum incurrisse uideo, quod equidem nollem: sed cum nulla remedia tam faciāt dolorem quā quæ sunt salutaria, si quid est quod sanari possit, plus apud me ualere debere nonnullorum salutem quā plurimorum indignationē ex remediorum acerbitate collectā semper existimaui. Quod cū optimis quibusque uiris, quales iam bene multos hic noster ordo recipit, probatū iri certo sciam, de ceteris minus est mihi laborandū. Atque haud scio an quæ auditū nunc quidē grauius acerbāque uideātur, ipsis in experiundo suauiissima futura sint: ut longior oratio comprobāde rationis huius causa defensioque nulla requiratur alia, nisi quā rei ipsius intellectu perceptio attulerit. Neque quenquam accepimus aut uidimus, qui, cum utrāque scientiam tenuisset, non utrāque adamarer: alteram uero nobiscum etiā admirationi maxime summōque studio non habuisset. Porro alterius expertem & ignarum, de utraque iudicium suum esse uelle iniurium est. Præterea fuit ea profecto semper grauissimorum eruditissimorumque hominum omnibus seculis de tota uitæ ratione consensus, cum expetendarū rerum tria summa genera reperirētur, ut bono-

P R Æ F A T I O.

rum animi prima potissimâq; esset dignatio: cæ-
 terorum autem, ut quæque proxime nos attinge-
 rent. Ex quo illud efficeretur necessario, scientia-
 rum quoque quæ bonorum adipiscendorum vias
 persequerentur & traderent, eandem esse debere
 rationem: ut cuiusque rei præstantissima uis esset,
 ita scientiæ, cui res ea subiiceretur, illi plurimum
 & tēporis & industriæ nostræ deberetur. Ad quā
 sane normam si studia nostrorum hominum ab
 ipsis exigerentur, & firmior animorum tranquil-
 litas, & uero maior ex ipsis in repub. esset utilitas:
 cuiusque mali, cuius mole propemodum obruti le-
 uationem aliquam iam pridem exposcimus, me-
 dicinam non leuem haberemus: cum non essent
 qui litigiosorum hominum audaciam, flagitium,
 furorem inconsultis suis consiliis adiuuantes, aut
 potius ipsos inter sese miserrimo concertationū
 genere committentes, alienis incōmodis ad suas
 utilitates per iustitiæ conseruandę speciem abuti
 uellēt: quodque rerum omnium præcipuum est,
 illud boni præterea consequeretur, ut improbitas
 uirtuti suo loco dignitatique restitute in rerū ad-
 ministratione facile cōcederet. hoc enim munus
 esse philosophiæ unius maxime proprium, huma-
 narum rerum artem moderandarū diuinarū-
 que scientiam tradere quis non uidet? qui modo
 rem ullam unquā mentis acie perceperit? Ne for-
 te homines rerum omnium imperiti criminētur
 eam otij tantum esse, nō item negotij. Cuius qui-
 dem

P R Æ F A T I O.

dem calumnię perfacilis esset mihi quoque refellendę ratio, nisi rem huius loci, aut operis nō esse intelligerem: ipsam tamen etiam scriptis grauiissimis cuiusque ætatis hominū prudentissimorum agitātā, tum uero unius Iacobi Sadoleti uiri præstantissimi doctissimique libello pereleganti, ab eo perscripto tanta diligentia & eruditione, ut maiore scribi posse non existimem. Quod si exemplis agēdum esset, nonne permultos omnibus historię monumentis celebratos accepimus, qui studia doctriņę ad rerumpub. moderationem conferentes, ciuitatum suarum statum ab initio constituerint, cōseruauerint, perditūque restituerint, tanta omniū gentium admiratione, ut summis etiam honoribus deferendis magnitudinem meritorum assequi se nullo modo posse faterentur? Quid enim? (ut uetera omittamus) nūquid unquam grauiissimum sanctissimūq; istud uestrum cardinalium collegium pœnituit, quantū dignitatis ornamentique ex duorum hominum studiis, uirtute prudentiāque percepisset, Gasparis Contareni, & huius ipsius, de quo modo dixi, Sadoleti? Quorū ille per omnes pene gradus honorum in moderatissima florētissimāque Vene-
torum repub. peruagatus, suis ciuibz ita se probauit, ut præsentem colerent & admirarētur: absentem etiam propter singularis uirtutis memoriam permanentem requirerent, uobisq; ipsis, qui abs se ciuem totius ciuitatis optimum nihil

P R Æ F A T I O.

tale ambientem aut omnino cogitantem abdu-
xissetis, pene inuiderent. Et sane fuit ille uir omni
laude cumulatus, tum propter excellentē doctri-
nam, tum etiam probitatem & prudentiam mul-
tarum gentium imperio dignissimus: hic uero al-
ter magis est otio delectatus, nō illo quidē inani,
sed fructuoso in omnem posteritatē & literato.
Quid de Petro Bembo & Nicolao Ridolfo uiris
certe in omni uirtutum genere maximis dicam?
Libētius autem in commemoratione mortuorū
nostra uersatur oratio, ne quid assentationi uiuo-
rum tribuisse iudicetur, si eorū qui nunc sunt, lau-
dationes attingeret. Hi quidē in philosophiæ sinu
statim à pueris educati tales ad rempub. cum ac-
cessissent, utilitates ex se permagnas uniuerso qui-
dem hominū generi maxime, sibi uero ipsis im-
mortalitatem præterea gloriæ cōpararunt. Quo-
rum si qui studia imitatione cōsequuti erunt, quī
fieri potest, ut respub. non maximam suę dignita-
tis recipiendę spem in illorum prudentia & mo-
deratione sibi repositam arbitretur? Ac profecto
fuit tempus illud sane mihi periucūdum, cū spes
esset melius fore, propter alacritatē animorū in
id stadium sese dedentiū, quod est ad ueram glo-
riam expeditissimum: nisi permultorum studia
cogitationesque in alia traduxisset sua ipsorū crē-
dulitas, nescio cuius hominis uanitati assentien-
tium. Itāne uero? quo quęque uox proferetur ab-
surdior eo facilius in animis nostris uiam ad per-
suadendum

P R Æ F A T I O.

suadendum inueniet? Ergo repertus est, si diis placet, qui cum bellum nefarium omnibus bonis artibus indixisset, & sapientiæ fructū iam plane maxima bonorum omnium gratulatione renascentis nobis inuideret, Lutetiæ in luce atque oculis nō Galliæ modo, sed totius Europæ castra figeret ignorantie: & uniuersæ philosophiæ uiteq; adeo è philosophia constituendæ authorē Aristotelē oppugnatum palam etiam accederet, nihil in dialecticis, nihil in physicis, nihil usquam ueri uidisse aut tradidisse argueret. Audax negotium dicerem & impudens, nisi uerborum omniū acerbitate rei ipsius per se inaudite neque tam audientē indignitas ipsa superaret. O imperitos maiores nostros, qui nunquam quiuerūt istud animo intelligere! Quid est quod profectum esse dicam recenti sophistarum clade, atque exilio, si sophistas alios asciscimus? Quasi uero non iam miseram rerum omnium ignorationem deprecemur, sed mutationem tantum in ipsis ignorantie magistris expetamus. At certe totum illud eiusmodi est, ut censoria magis animaduersione, quā cuiusquam omnino contra disputantes oratione reprimendum sit. Neque uero de hac ipsa re uerbum ullū facturum eram, si moderatius insanientem sibi putasset: suæque ipse contentus iuuentutis credulæ & rerū imperite non augeret ignauiam: nam de ipso quidem leuior omnino iactura fuerat. Impune esse cuique debet periculo suo insa-

P R Æ F A T I O.

nire: sed cum ad aliorum perniciem morbus animi conuertitur, id uero ferendū nō est. Huic certe malo nisi maturis consiliis obuiam eatur, & audacissimos impetus diligentia continuerit magistratum, ne præclara illa studiorum nobis promissa compendia permagno constiterint iuuentuti: cum grauissima mercede totius temporis iactura didicerit nihil è nouis illis, sed non satis eruditis magistris, interea nisi arrogantis cuiusdā & confidentis ignorantia ignauieque præcepta didicisse. Sed de hac re tota satis hæcenus: alias fortasse pluribus, si commodum erit. Nūc autē quod est huius potissimū loci & instituti persequamur. Cum itaque, ut ante dictum est, mathematicā cognitionem uniuersam iam tum à prima iuuentute uehementer amplexatus essem, & sæpius ipse per me Euclidis elementa reuoluerem, in ceteris quidem libris modicus sane labor mihi fuit: ubi uero decimum hūc multorum opinione perobscurum attigissem, ea certe opinio non mediocri mihi quoque fraudi fuit, cum nō arbitrarer, qui locus à plerisque propter suspectam ipsius difficultatem præteriri solitus esset, mihi nō periturū, quicquid in eo laboris impendissem. Itaque plurima extrinsecus adiumenta mihi ipse excogitās, iterum atque iterum repetita diligenti lectione, cum nihilo minor maneret rei ipsius obscuritas, coepi cogitare unū Euclidem in primis libris sibi ipsi ad ipsorum intelligētiam sufficere: neq; fieri posse

P R Æ F A T I O.

posse, ut suum in docendo modū atque ordinem repudians, hīc alienum quendam & nouum adhiberet. Vtq; uia simpliciōri cum rem aggredi cōpissēm, sola librorum p̄cedentium ipsius Euclidis ope, & uocum simpliciū quæ sunt huic libro maxime proprię, intelligentiā, omnia uisa sunt quā̄m antea illustriora multo atque clariora: Euclidēque sui ubique similem hoc quoque libro ut olim cogitatione p̄ceperam, nullius omnino rei externę indigentem, se ipso contentū: rem illam quidem paulominus inuulgatam, sed alia ratione nulla, neq; alia uia, quā̄m sua & familiari tradere plane uidi: hæc uero est, ut à rebus cognitīs ad ignotas sensim progrediēs ex prioribus rerum subsequentiū comprobet intelligentiā, & ueritatem. Quæ cum perspicerem, in eāque re sæpenumero uersatus, magnāque animi intētiōne & studio singulas quā̄sque res inter se conuenire, nihil collidere intelligerem, nullā moram studiis hominum putauī, quantum per me effici posset, diutius afferendā, quin laboribus nostris animāque exercitationibus fruerentur. Cūque ex maiorum lucubrationibus, quō posteritatem iuuaremus, aliquid uideremur cōsequuti, & quibus omnia deberemus nihil esset quod post mortem hominibus bene meritis gratius per nos referri posse uideretur, quā̄m si quorum industriā experti uehementē admiitāmur & suspicimus, eorum etiam humanitatis exemplum studiūque

P R Æ F A T I O.

posteritatis adiuuandę uellemus imitari, cœpi cō
siliū rei totius illustrandę. Itaque Græcorum
demonstrationes interpretādo consequutus, si-
ue fuerint illę Euclidis singulorūue geometra-
rum, quorum symbolis hoc totum est opus abso-
lutum, siue *ἐκ τῶν στοιχείων συνασθῆναι*, ubi pressius subti-
liusque compositę uidebātur, fusiore quodā scri-
bēdi genere ita patefecisse me puto, ut lectori nō
dormitanti, sed attento nihil deesse possit ad rerū
intelligētiam: obitērque uiam & rationem resol-
uendi in primis theorema exemplorum copia no-
tauimus. Sed quo res adhuc multis incognita cō-
mendetur uberius, placuit nonnulla ex ueterum
libris, Procli in primis, arbitrato quidem nostro
sumpta, Latinis literis illustrata proponere. qui-
bus initiis mathematica ducta cognitio, quam al-
tum ediderit rerum maximarū fastigium: ut quā
incredibilem ex se utilitatē seculis prioribus attu-
lerit, eandem quoque sibi de ipsa polliceantur ho-
mines, si modo penitus ea studia inspexerint: ne-
que, quod adhuc factum est, in primo liminis adi-
tu, uixdum quinque sexue passus (totidem enim
libris uulgo contenti sunt) in ea re progressi, resti-
terint. Illud itaque sciendum est, quod finitum &
infinitum dicitur, principia summa esse mathe-
maticarum specierum omnium. Nam ea princi-
pia inter se aliter atque aliter copulata, sufficiunt
ad generandam eam uarietatē, quę in rebus ipsis
cernitur. Inde fit ut ipsarum proportionēs in infi-
nitum

P R Æ F A T I O.

nitum excrescant: quas tamen ipsas finiri etiam
 necesse est, ob eam saltē causam, quia finiti quoq;
 naturam in ipsis existentem continent. Primum
 enim in arithmeticiis, si ab unitate cœperis pro-
 grediendo, reperiēs mundos in infinitum augeri:
 neque unquam excrescendi finem, ubi quiescant
 ipsi, fieri posse, ut cum eò perueneris, cessandum
 in illo numerorum auctu tibi prorsus intelligas.
 Quécunque porro numerum effeceris, illum o-
 mnino finitū esse necesse est. Deinde in ipsis quo-
 que magnitudinibus idem apparet, ut in infinitū
 diuisio illarum fieri possit. Ipsę uero res ita diui-
 se, omnino (& quod dicitur) actu ipso finite sunt:
 ut cum diuiditur aliquod totū in partes suas un-
 de componitur, necesse est ipsas partes quę ex di-
 uisione procedunt, esse finitas: nam nisi finite es-
 sent, ne partes quidem ipsę esse possent. Præterea
 si nihil esset infinitum, illa duo perabsurde cōse-
 querentur, & ut magnitudines omnes essent cō-
 mensurabiles, neque in ipsis quicquam incōmen-
 surabile: ideóque ne irrationale quidem. Hoc au-
 tem est, quo differunt ea, quę in geometria per-
 tractantur ab arithmeticiis: siquidem in illis sunt
 quædam irrationalia, de quibus hoc libro: in arith-
 meticiis uero nihil irrationale, aut incommen-
 surabile cognoscitur: sunt enim omnes numeri
 commensurabiles inter se, ea saltē mēsurā, quę
 minima est in numeris, nempe unitate. Alterum
 quod perabsurde sequeretur, si nihil esset infinitū

P R Æ F A T I O.

illud est, quod ea uis & facultas unitatis, ut ex se
numerorum sobolem infinitā procreare queat,
non existeret: neque uero numeri proportionēs
omnes intra se continerent, quas in rebus singu-
lis inesse perspicimus, multiplices dico, superpar-
ticulares & reliquas tales. Omnis enim numerus
unitati comparatus ad ipsam unitatē habet pro-
portionem aliam, quā idem ipse numerus ad aliū
numerum comparatus. Similiter si finitum nihil
erit, commensurabilitas & communio propor-
tionum, similitudo & æqualitas specierū, ceterā-
que huiusmodi quæ melioris cuiusdam sunt ge-
neris, in rebus distinguendis nulla sint: quæ tamē
ipsa in mathematicis esse conspiciamus. Ea uero si
non essent, ne mathematica quidem ulla scientia
superesset, cum nihil certo, constanter subtilitē
ue diceretur, quod cogitatione firma concipi pos-
set. Quantum uero utilitatis ea scientia commu-
ni hominum uitę & societati conferat, id quidē
non ad usus ipsius uitę necessarios respicientē æ-
stimare conuenit: ita enim fieret ut cognitionem
omnem & cōtemplationem rerum tanquā inu-
tilem repudiaremus, quippe quæ à rerum huma-
narum necessaria suppeditatione sese quā longi-
ssime soleat abducere, ne earum quidem rerū
ullam omnino cognitionem aut curam appetēs,
quibus usus uitę necessarius cōtineri solet. Est ue-
ro mathematicę scientię sua certa, propriāque di-
gnitas & utilitas, illa quidem per se æstimanda,
neque

P R Æ F A T I O.

neque quicquam externum respiciens, quò se referat, nullius omnino rei ministerio suam utilitatem accommodàs, neque uitę necessitati subseruiens. Quin & liberales disciplinę à libertate dicte, sui nominis dignitatem sustinere tueriue nullo modo possint, si ad seruiendum usibus necessariis reuocentur. Quòd si ulla ratione illud admitendum uidebitur, ut aliud quippiam extra se spectare debeat, cuius utilitatem consecutandam sibi putet, quid est in omni rerum uniuersitate splendidius & magis excellens, quàm quod mathematica scientia uiam munire solet animis nostris: eamque certissimam ad rerum intelligibilium, omni materia solutarum cognitionem absolutam? Et quidem si qua est utilitas expetenda, illa est profecto, quam ex se prestantissimam & eximiã profert: nam & quasi manu ducit ad res intelligibiles percipiendas: & quod est in Timeo scriptum diuinitus, illius sciëntię cognitio uia quædam est ad plenam & integram mentis nostrę institutionem: cuius rei ea certe causa est atque ratio, quòd eadē est ipsi proportio ad cognitionem totius & primam philosophiam, quæ est institutioni puerili ad uirtutis ipsius summam & habitum. Hæc enim efficit bonis & rectis moribus assuefaciendos, ut animus puerilis ad uitam ex uera uirtute perfectam adolescat: illa uero animi nostri partē eam quæ *Ἀρετή* dicitur ita suis commoditatibus instruit & cumulat, ut multo paratior ad res exi-

PRÆFATIO.

mias inspiciēdas & cognoscēdas accedat. Ex quo Socratis uerissimū illud mihi uideri solet, oculū animę, quem mentē dicimus, ipsum quidē studiis & cupiditatibus obtutūque rerum alienarū excecatur, & ueluti defossū, solē sciētiae ratione diligentiaque recreatur excitari, & quodam ueluti collyrio persanatum cōualescere solere: ita sane, ut rursū ad speculationem ipsius entis, ab imaginibūque perspectis ad res ipsas, quarum illę fuerāt imagines, erigi: & tanquam ex caliginoso specu in locū illustrissimū eductus, illud ipsum lumen intelligibile acie constanti possit intueri: omninoque carcere quodam egressus, & rerum generabilium uinculis inconstantisque materię nodosa uarietate tandem exolutus, ad incorpoream & impartibilem substantiam attolli. Nam & pulchritudo & ordinis illius ratio, qui in mathematicis elucet disciplinis, ipsa que rerum ibidem perspectarum certa constantia, animum nostrum propius sistunt ad intelligibilia, ipsa quoque semper eodem modo se habētia, pulchritudinique diuinę conuenientissima. Quę cum ita sint, mathematica scientia est & ipsa quidē per se & sua pte uī dignissima, quę studiose colatur: neque tamen non plurimum momenti ad eam uitam affert, quę mentis unius maxime propria est & accommodata. Illud autem in hac re satis est argumenti sciētiam eam per se sua ipsius dignitate & æstimatione niti, ut est quodam loco scriptum ab Aristotele,

P R Æ F A T I O:

Aristòtele, quòd qui res illas exquisiuerunt, nullo prēmio, magna diligentia studiòque uehementi illud sunt assequuti, ut paruo temporis interuallo illa permagnum acciperet incremētum, cum ipsi cæteris omnibus posthabitis huic uni studio se totostradidissent: atq; hi maxime, qui diuiniorē natura præditi, diuinitatē suis factis exprimere, quoad licitum esset, elaborauerunt. Itaque uerissimū illud est, si qui sunt, qui contēptui habendum hoc studium existiment, eos sine gustu esse summarum, quæ quidem in homine libero constantiq; existere possunt, uoluptatū. Quid ergo? nunquid habet ea sciētia quod contemni debeat; ea re tantum quod nihil adiuuet cōmunis hominum uitę necessarias utilitates? Nullo certe modo: nam & extremi illius effectus ubi se cum materia coniungere incipiunt, eò maxime tendunt, ut paulo post dicturi sumus. Quin eo maiore digna res est admiratione, quòd citra ullius omnino materię contagionem suum ipsa finem in eoque fine situm bonum persequatur: & in se ipsa conuersa nihil spectet externum: homines enim rerum ad usum uitę necessarium comparandarū occupationibus uacui plane solutiq;, sese ad sciendum scientiæque adoptionem contulerunt: neque id tamen non recte, cum prima cura rerum illarum esse debeat, quibus natura ipsa ad sui educationem & tuicionē carere nullo modo potest. Huic porro si quādo satisfactū erit, hoc est, si na-

P R Æ F A T I O.

naturam ducem consequuti, cupiditatem habendi rerum necessariorum modo naturæque metiri uoluerimus, tū uero illa nos cogitatio debet excipere, rerum à necessitate generationeque remotarum, & uerum ipsum proxime attingentium: quod cum acciderit, unā quoque id quod in anima nostra inchoatum & rude fuerat, integrū absoluitur & perpolitum. Scientiæ porro mathematicæ diuisione eam attulerūt ueterum plerique, inter quos & Geminus, ut diceret aliam quidem circa res uersari solo intellectu perceptiles, aliam uero res sensui subiectas pertractare. Res autem intelligibiles illas esse dixerunt, quarū intelligentiam ipse per se animus absque ulla rerum consilium participatione seipsum ad contemplationē excitans persequitur: cuius generis duę sunt præcipue potissimeque partes, arithmetica, & geometria: alterū uero genus quod rebus sensilibus addictum illa sex comprehendit, astrologiam, musicam, supputatricem, mechanicā, perspectiuam, mensuratricem. Nam quod ad instruendas pertinet artes, (~~namque~~ uocant) in partibus mathematicæ habendum non arbitrat̃ur, quāuis interdum ipsius auxiliis uti adiuuarique soleat, modo supputatricem adhibeas, ut in enumerandis copiis, modo & mensuratricem, id est, ~~per artem~~, ubi diuidenda sunt castrorum metatione campi spatia & dimetienda: multo uero minus aut historiam aut medicendi artem dixeris partē ullam esse mathematicæ,

PRÆFATIO

maticę, licet utraque ipsius ope interdum adiuue-
tur. Nam & historie perscribendę mathematica
theorematę solere scimus appingi, ubi tractus si-
tūsque regionū, urbium magnitudines, diame-
tros, ambitus colligere uolunt. Ipsi quidem medi-
ci quā multa in arte sua, quā elucidate tractant
fidei mathematicę cognitionis subsidio: Nam
quod ad astrologiam pertinet, quanta eius in o-
mnem medicinę partē manare possit utilitas, do-
cent de ea re scripti diligenter Hippocratis libri:
ceteri quoque omnes, qui modò de tempestatum
ratione locorūque situ sibi scribendum puta-
uerūt. Eadem quoque ratio erit eius, qui aciebus
instruēdis operam accommodat: nam utetur &
ipse mathematicis theorematibus: neq; tamē cō-
tinuo mathematici nomine perhibēdus, licet ali-
quando quā minimos cupiens in speciē uideri
suos exercitus ad circuli figurā constituat, castro-
rum ambitum nonnunquam in quadratum pen-
tagonum aut aliam multorum angulorum for-
mam, ubi quā maximos apparere cupit. Tales
autem primę species cum sint ipsius mathemati-
cę, geometria rursus diuiditur in tractatus duos,
alterum planorum, alterū solidorum: nam pun-
ctorum & linearum propria nulla omnino ars re-
periri potest, cum nulla figura punctis aut lineis
constet, quę non simul plana sit aut solida. Nihil
enim aliud agit geometria ulla sui parte, quā ut
plana & solida cōstituatur: constituta inter se com-

PRÆFATIO.

paret aut diuidat. Hoc idem efficitur in arithmetica: nam & numeri diuiduntur in lineares, planos & solidos, quorum omnium singulatim sua est tractatio. Nam & species numerorū ipse per se ab unitate prodeuntēs explicantur, & generationes planorum, similium, inquam, & dissimilium, & solidorum etiā, qui tertia quadā multiplicatione confici solent. Illa autem quam mensuratricem dicimus, item alia quam supputatricem superiorum similitudinem nonnullam referentes, ipse tamen sunt in eo dissimiles, quod non de numeris aut figuris intellectu solo comprehensis inuestigant, sed de sensilibus: neque enim munus mensuratricis esse posueris, ut cylindrum aut conum metiatur, sed rerum in materia demersarum acervos tanquam conos, puteos autem ut cylindros: sed neque lineis quibusdam intelligibilibus id assequitur, uerum sensilibus, & ut exactissime, radiis solaribus: ruditer autē, per applicationem amussis lineæ, aut alterius rei non dissimilis opera, quæ materia constet. Quam uero diximus supputatricem, ne ea quidem passiones numerorum ipsas per se cōsiderat, sed numeros rebus materialibus inuolutos: & diuidendo quidem nihil statuit esse minimum, quomodo neque arithmetica: quod tamē spectat ad certum genus unum, ponit aliquid quod sit minimum: unus enim aliquis homo est illi pro mensura totius hominum multitudinis, sicut unitas quoque mensura communis

P R Æ F A T I O.

munis est omnium numerorum. Perspectiua rursus & musica sunt quædam ueluti partes, illa quidem geometriæ, hæc autem arithmeticæ. Nam perspectiua uisu nostro, ceu linea abutitur, & iis angulis qui ex radiis uisoriis constituuntur: diuiditurque in eam quæ proprio nomine dicitur perspectiua, causas explicans eorum, quæ aliter quam sint, apparere solent, ob ipsorum alios atque alios positus & distantias: quales sunt lineæ parallelæ concurrere uisæ: rerum quoque quadratarum figuræ circulari forma conspectæ. item in eam quæ in uniuersum specularis dici potest, quæ cuiusque generis radios fractos siue flexos perscrutatur, uisorum seu imaginum cognitionem adiunctam habens, simul & illud afferens quæ fieri possit, uti quod conspicitur, amœnum sit uisu iucundumque, nulla partium suarum discrepantia aut deprauatione corruptam imaginem propter interuallum aut eleuationem rei uisæ, oculis spectantium exhibens. Musica uero consonantium numerorum rationes auribus acceptas cum indagasset, canones suos & fides ipsas ita secandas ostendit, ut faciles ad cognitionem nostram illæ sonorum conuenientiæ fierent: cumque passim ad sensuum delectationem iudiciumque diuerteret sermonem, Platoni dedit affirmanti eam esse, quæ menti aures ipsas prætulisse uisa sit. Ad illas superiores accedit mechanica, pars & ipsa quædam existens totius tractationis & cognitionis rerum sensilium & materiæ con-

P R Æ F A T I O.

iunctarum. Huius autem generis illa est quæ opera & machinas cuiusque modi efficit ad usum totius rei bellicę necessarium idoneas: qualia multa diuino uir ingenio Syracusius Archimedes excogitasse scribitur & construxisse, uim permagnam & incredibilem habentia, ipsis quoque Romanis Syracusas terra marique obsidētibus formidabilia: quorum tamen ipsorū nihil apud Archimede[m] tanti fuerat, ut magno studio dignum arbitraretur. uerum sicut Plutarchus in Marcello scribit elegantissime, *καμίστρας ποιήσας ἐκ γυρί πείδοντα τὰ πλῆστα*: ea tamen fuerūt unius hominis ludicra, ut Romanorum uires toti pene terrarum orbi formidabiles diutius eluserint, nec antè urbis potiùde Marcello imperatori clarissimo spes facta fuerit, quàm ex insidiis noctu, mœnibus per absentiam Archimedis indefensis scalas admouerit. Fabulosa hæc profecto uideri possint, si ad nostrorū hominum ingenia, quæ uspiam sunt nobilissima, conferantur. Verum tamē perinque faceremus, si primum aliorum industriam ex cæterorū metiri uellemus ignauia: ut quod hi non possint, ne illi quidem potuisse uideantur. Deinde qui fieri possit, quæ præstantissimi quique, iidemque grauissimi scriptores, nō Græci tantum, qui suis ambiciosius fauisse uideri possint, sed etiā Latini, iique Græcis hominibus sæpius iniqui, M. Tullius, T. Liuius in unius hominis laudibus consentientes ad cælum extulerūt, ut his fidem abrogemus: Quòd
fine

P R Æ F A T I O.

sine auctoritate quidem ulla ad credendum adducimur, sunt in oculis manibûsq; nostris Archimedis ipsius opera, non illa quidem de machinis ipsis aut operibus conscripta, nihil enim tale descriptione dignû magnopere indicauit, sed quæ longe maiora diuinioraque censenda sint, rerum illarum uniuersalia theorematata, quæ si quis uia ordinèque aggressus erit, cum iisdem uestigiis institerit, quibus Archimedes & ueteres illi nobilesq; geometræ, eodem quoque peruenturum sese confidat. Nobis quidem si uita suppetet, illud in primis curæ futurum est, quod adhuc fuit in hoc decimo Euclidis libro, ut difficillimi quique prisce geometrarum libri certa spe & fiducia intelligedi legi possint ab iis, qui modo studiorû suorum rationem ad ueterum normam exigere, ordinemque certissimum discendi magistrum conseruare uolêt. Ordinem autem ipsum si quis obseruauerit, nihil præterea putet esse, quod sibi deesse possit. Sed iam ad institutû ut reuertamur, ad eas artes quas ante memorauimus accedit & illa, quæ rebus ex sese immobilibus motum attribuit, nûc per quasdam asperationes, quemadmodum perfecuti sunt Ctesibius & Heron: nûc per librationes ponderûmque momenta, quorum inæqualitas mouendi causam affert, æqualitas uero quietis necessitatē, ut est in Timeo, nunc quibusdā neruis & funiculis attractus & motiones animatorum corporum imitantibus. Est & alia ge-

P R Æ F A T I O.

neris eiusdem, quæ sphæris construendis operam
adhibēs, circuitus orbium cælestium imitatione
consequitur: qualem idem ille nunquā fatis lau-
datus Archimedes effinxit. Astrologia superest:
disputationem instituens de mundi ipsius cōuer-
sione mirabili, de magnitudine, figura, situ, cele-
ritate, tarditate corporum cælestium: quæ uis sit
in illis illuminādi, qui discessus à terra, qui ad ean-
dem accessus: & quæ sunt his cōsequentia, ex sen-
su quidem & ipsa permultum instructa, nihilo ta-
men minus cognitioni rerum naturalium fami-
liariter communicans. Cuius illa pars contemnē-
da non est, quæ ex normarum & umbilicorum si-
tu, horarum spatia & tempestatum interualla di-
metitur: quæq; sublimia uestigando poli cælestis
altitudines in quaque terrarum parte, astrorū-
que diffitas positiones comprehendit, pleraq; si-
mul alia persequens, quæ sunt astrologo specu-
lanti proposita. Est & illa quæ dioptrica dicitur
per rimulas in sole, luna ceterisq; syderibus cele-
ritates tarditatēque motuū uenari solita. Eæ qui-
dem sunt partes scientiæ mathematicæ, ita descri-
ptæ à ueteribus mathematicis, quemadmodū ex-
plicuimus. Nunc autem de fine ad quem feratur
intendatque, cum hæc tota tractatio elemento-
rum geometricorum, tum ea de lineis rationali-
bus & irrationalibus, quæ est huius decimi libri
propria, pauca quædam afferamus. Qua in re il-
lud sane cum primis est intelligendum, propositū
duplex

P R Æ F A T I O.

duplex Euclidi fuisse in his quidem libris, aliud quod traditionem rerum perquisitarum respiceret, aliud præterea quod discētis animum omnibus modis informaret & erudiret: ut si res ipsę inuestigationi subiectę considerandę sint, dicēdū profecto uideatur toto hoc de geometria sermone nihil aliud quęri, quàm ut nobiles illę figurę quinque plane comprehensione intelligantur, à quibus mundus hic uniuersus, iudicio quidē Platonis, descriptas suas habet partes. Itaq; primum cœpit agi de simplicissimis quibúsq; rebus: deinde sensim assurgente compositionis structura, eò tandem peruentum est, ut uarietas omnis illarum figurarum aperiretur, & separatim quidem unaquęque prius constituta, tum denique simul omnes eodem globo contentę inuoluerētur, expositis etiam proportionibus, quas lineis lateralibus cuiusque figurę inter se, quásque superficiebus ipsis, & quas solidis etiam figuris inter ipsas inesse compertum est. Quod autem ad illud propositum attinet, erudiendi eius qui ad hoc studiū discendum accesserit, huiusmodi est, ut secundū Elementorum geometricorū intelligētiam perfecte cumuletur animus, absoluatúrque ipsius habitus & compleatur: quo facile possit ad quālibet geometrię tractationē comprehendēdam ipse sibi sufficere. Ab his enim uelut initiis auspiciati, ceterarū quoq; permultarū uel potius omniū huius scientiæ partiū poterimus cognitionem assequi,

P R Æ F A T I O

eiusdemq; multiplicem animo complecti uarie-
 tatem: neque id tantum, quin & illud quoq; ue-
 rissime dici potest, sine iisdem ipsis reliquorum
 omnium non obscuram solum, uerum neque o-
 mnino possibilem esse intelligentiâ. Nam & pri-
 ma quæque atq; simplicissima theoremata proxi-
 me etiam ad primas hypotheses accedentia, sunt
 his libris ita coagmentata, ut interim nullum or-
 dinem magis cuiq; rei conuenientem afferri po-
 tuisse cognoscamus: ex quibus cæterarû partium
 scriptores ad propositû suû accõmodate, certissi-
 mis & incõuullis usi sunt suarû demonstrationû
 fundamentis. Quo in genere est Archimedes, A-
 pollonius Pergeus, & cæteri omnes nō geometræ
 tantû, sed & astrologi, & qui mathematicorû no-
 mine censerî solent. hoc autem cû alibi semper,
 tum uero in legendis Cõmici Apollonij certifi-
 simû esse nuper ipsi uidimus: ad quæ nisi diligen-
 ter instructus ab Euclide ueneris, operâ plane tibi
 peruisse senties. Est enim Euclidis geometria non
 ad eorum tantû cognitionem, quæ sunt de eodem
 genere scripta, necessario perdiscenda, sed etiam
 in quauis mathematicarû scientiarû nihil cuiquã
 satis poterit esse notum, qui nō à geometria pro-
 fectus peruenerit ad cætera: quam si quis secundû
 Philonẽ esse dixerit principiû & tanquã *μητρόπολις*
 reliquarum omnium mathematicarum, is profe-
 cto à rei totius ueritate non aberrauerit. Nam ex
 illa matrice ueluti quadam urbe populosa dedu-
 ctæ

P R Æ F A T I O .

Etę sunt illę deinceps colonię, quę sunt à nobis sū-
 perius explicatę. Est ergo finis ille geometricorū :
 elementorum absolutus discentis habitus, scien-
 tię uniuerse capax, traditióque mundanarum fi-
 gurarum, quę sint cuiusq; proprię fabricationes
 & inter se cōuenientię. Id uero de quo cōscriptus
 est hic decimus liber, de commensurabilitate di-
 co & incommensurabilitate, rationalitate & ir-
 rationalitate linearum, cō pertinet, ut cum extre-
 mum totius operis futurum illud esset exponere,
 figurarum de quibus antea dictum est, dimensus,
 ea pręfari oportere uisa sunt, sine quibus illud
 percipi nullo modo posset. In primis necessarium
 fuit, quoniā illę figurę æqualibus superficiebus,
 lateribus item & angulis æquis comprehenden-
 dę erant, & eodem globo ita coercendę, ut quili-
 bet angulus solidus cuiusque figurę intimam fa-
 ciem pertingeret, ostendere quāto diameter glo-
 bi longior esset unoquoque cuiusque figurę late-
 re. Cūque uidisset Euclides in pyramide, octa-
 edro & cubo talem esse habitudinem ipsorū la-
 terum ad globi diametrū, quam rationalem esse
 posuerat, ut essent ipsa inter sese comparata lon-
 gitudine quidem incommensurabilia, sed poten-
 tia tamen commensurabilia, ideóque rationalia:
 in eicosaedro uero & dodecaedro nō solum esse
 inter ipsa latera longitudinis incommensurabi-
 litatem, sed & potentię quoque, ob eāque cau-
 sam illa esse simpliciter irrationalia. certę cuiusdā

P R Æ F A T I O.

speciei. Ea ratione priusquã ad illa demonstranda aggredieretur, intellexit omnino sibi faciendũ esse, ut de linearum rationalitate irrationalitæque tractatũ institueret, quorũque & quales essent species irrationalium linearum: ut non appellationibus tantũ discretois notari possent, sed quod multo certius est, ad quãquerem cognoscendam, quid cuique speciei singulatim necessarioque cõueniret, perspicuum fieret. Proinde tractatum illud absolui non posse sine cognitione numerorũ cum facile intelligeret, ideo de vi numerorũ quantum satis uisum est ad sermonem susceptum tribus est libris diligentissime commẽtatus. Neque enim ferendus est nescio quorum hominũ error, affirmantium proportionem linearum irrationalium esse non nobis tantum, sed & naturæ ignotas: ob idque potissimum, quod illę tales proportionem nõ extent in numeris. Quod si ita esset, primum quàm inanis uideri deberet conatus Euclidis, operam in re per se inexplicabili abutentis: tum autem adeo sunt illustres hoc libro notæ, tamque proprii cuiusq; ueluti mores expressi, ut quod Euclides conari uisus est, illud abunde perfectęque præstitisse intelligatur. Nobilissimũ itaque totius geometrię locum à Pythagora philosopho præstantissimo ante patefactum ita perpoliuit excoluitque, ut desiderio nihil reliquerit. Hæc habui Bellai amplissime, quę nõ quidem dicere possem, finem enim nullũ habitura esset oratio,

P R Æ F A T I O

tio, sed quæ cum dixissem, existimaui iuuentutis partem aliquam excitatum iri, ut cuperet imitatione studiorum, ueterum philosophorum nominis gloriam æmulari: cuius præclarissimæ contentionis in animis hominum excitandæ facultatem uiris concessam esse principibus, eamque amplissimam cum intelligeret Franciscus Rex huius nostri pater omnium bonarum artium fidelissimus tutor, patronus atq; propugnator acerrimus, iuuit ille quidem mirifice studia literarum: uerum minus profecto quàm uoluit, magis autem multo, quàm licitum illi fuit per quorundam auersas à laudabilissimo studio rationes atque uoluntates. Illius tu Regis alumnus, illius tu beneficentia ad summos fortunæ dignitatisque gradus, doctrinæ commendatione sublatus, recte constanterque feceris, si quod per te nauiter facis, patrociniū philosophiæ à te quidem à Rege liberalissimo susceptum, ita retinere pergas, ut Margareta Regis filia, iudiciique paterni, atque animi in bonarum artium studiis, bonorumque omnium tuitione obseruantissima atque æmula, bene collocatum in te ornando patris beneficium prædicare possit. Per multos autem esse multis in locis cum acceperim, quorum in philosophiæ literis studia, tuis paratissimis opibus alantur & sustententur: hæc autem una mathematica cognitio, cuius tantæ sunt in omni philosophiæ parte commoditates, deserta plane destitutâq; reliquorum hominum præ-

P R Æ F A T I O.

fidiis passim iaceat atq; ignoretur, tuę certę partes illę sunt, ut huic quoq; studio pro tua humanitate per te consultum uelis: ex istoque præclaro tuorum grege, de quo paulò ante dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundissimi atque fructuosissimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi penitusque perscrutati, possint ceteros exemplo doctriinæque ad sui æmulationem permouere.

Vale. Luteria Calend. Iulij. 1551.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER DECIMVS.

Petro Montaureo interprete.

COMMENSVRABILES magnitudi-
nes dicuntur illæ, quas eadem mensura
metitur.

PROPOSITVM nobis illud est hunc decimū elemē-
torum librum (cuius intelligentiam plerique difficilli-
mam suspicantur, neq; uerò possibilem absque auxilio
eius partis arithmetica, quam multorum scriptis illu-
stratā Algebram uocant) sine omnino ullis numeris ir-
rationalibus dictis ostendere, nō solū non difficillimū,
sed etiam facillimum esse, si quis attentum animum &
instructum scientia librorum superiorum Euclidis af-
ferat: neque porrò cuiusquam externa scientia, nedum
algebrae demonstrationibus indigere: sed ex suis ipsius
Euclidis tantum demonstrationibus, & familiarissimo
ipsi ordine dependere. Vt autem clarius intelligatur
hac definitio, prius explanādum puto, si quid in ea sub-
obscurum contineri uideatur. sic enim præcipiunt dia-
lectici. Cum itaque dicitur aliqua mensura magnitu-
dinē aliam metiri: illud intelligitur primū, ut ea men-
sura sit minor illa quam metitur, aut ei saltem aqua-
lis. maior enim nullo modo metiri minorem potest. De-
inde ut ea mensura semel sumpta si aqualis erit, aut si
minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudi-
nem quam metitur, præcise referat, id quod ex numeris

P R Æ F A T I O.

sidiis passim iaceat atq; ignoretur, tuę certę partes illę sunt, ut huic quoq; studio pro tua humanitate per te consultum uelis: ex istoque præclaro tuorum grege, de quo paulò ante dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundissimi atque fructuosissimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi penitusque perscrutati, possint ceteros exemplo doctrinaque ad sui æmulationem permouere.

Valé. Lutetia Calend. Julij. 1551.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER DECIMVS.

Petro Montauereo interprete.



COMMENSVRABILES magnitudi-
nes dicuntur illæ, quas eadem mensura
metitur.

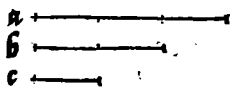
PROPOSITVM nobis illud est hunc decimū elemē-
torum librum (cuius intelligentiam plerique difficilli-
mam suspicantur, neq; uerò possibilem absque auxilio
eius partis arithmetica, quam multorum scriptis illu-
stratā Algebram uocant) sine omnino ullis numeris ir-
rationalibus dictis ostendere, nō solum non difficillimū,
sed etiam facillimum esse, si quis attentum animum &
instructum scientia librorum superiorum Euclidis as-
ferat: neque porro cuiusquam externæ scientiæ, nedum
algebræ demonstrationibus indigere: sed ex suis ipsius
Euclidis tantum demonstrationibus, & familiarissimo
ipsi ordine dependere. Ut autem clarius intelligatur
hæc definitio, prius explanādum puto, si quid in ea sub-
obscurum contineri uideatur. sic enim præcipiunt dia-
lectici. Cum itaque dicitur aliqua mensura magnitu-
dinē aliam metiri: illud intelligitur primū, ut ea men-
sura sit minor illa quam metitur, aut ei saltem equal-
is. maior enim nullo modo metiri minorem potest. De-
inde ut ea mensura semel sumpta si equalis erit, aut si
minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudi-
nem quam metitur, præcise referat, id quod ex numeris

EVCLIDIS ELEMENTOR.

deprehendi facillime potest. Quāvis enim Euclides hac definitione comprehendat magnitudines tantū quas quantitates continuas appellant, quales sunt lineæ, superficies, & corpora: tamen arbitror non inepte requiringdam esse explicationem huius loci à numeris: quum præsertim magnitudines commensurabiles eam habeāt proportionem inter se, quam numerus ad numerum.

Campanus uir ex geometriæ studijs laudem nō immeritō consequutus, illud principium recte inserit cæteris libri septimi principijs, cum græcum exemplar nihil tale habeat. Numerus aliū numerare dicitur, qui secundum aliquem multiplicatus, illum producit. cuius rei hoc sit exemplum. Ternarius numerat ternariū per unitatē multiplicatus. idem ternarius numerat senarium per binarium multiplicatus: numerat nouenarium per ternarium multiplicatus: numerat 12 per 4: numerat quoq; cæteros infinitos. Ille ipse tamen ternarius alios numeros superioribus interpositos minime numerat. Nam neq; unitatem ipsam, aut binarium numerat. Maior enim minorem nullo modo numerare potest: sicut in magnitudinibus (ut antè diximus) maior mensura minorem seipsa magnitudinem non metitur. Neque uerò ternarius numerat 4 aut 5. per unitatem enim multiplicatus nihil amplius efficit quàm 3. binario uerò multiplicatus, excedit & 4 & 5. multo magis si alio ternario aut maiore aliquo numero multiplicatus fuerit, eosdem 4 & 5 exceßerit. Eadē ratio est septenarij, octonarij, denarij & undenarij, si unum ex his quemlibet coneris per ternariū numerare. Si quis
autem

autem erit qui me res nimium minutas persequi reprehendat: consilium nostrum illud esse sciat, ut librum hunc, non tam natura sua difficile, quam ignoratione principiorum, ad intelligendum facillimum reddam his qui amoenissimum hunc geometriae locum perlustrare uolent. Et certe in maximos errores plerumque imprudentia sua uicio & principiorum parua siue dicas praua intelligentia turpiter incidisse, neminem dubitaturum arbitror, qui modo nostra legens, ipsarum rerum intelligentiam assequutus erit. De his autem haecenus nos in uiam redeamus. Dicimus hanc definitionem magnitudinum commensurabilem, siue malis principium nominare, per analogiam quandam ex illo Campani loco plane intelligi. Nam quod dicitur in numeris alios numeros numerantibus: idem aut simile quiddam intelligas in magnitudinibus, quarum alteram dicimus per alteram mensurari. Quod ut planius intelligatur, sumamus exemplum in una specie magnitudinis. Sint duae lineae $\bar{a}$ & b . quae si fuerint commensurabiles, erit quoque communis utrique aliqua mensura quae sit c . Nam illa linea c bis repetita, refert praecise lineam b . ter uero repetita, lineam $\bar{a}$, & ipsa quoque praecise refert.



Incommensurabiles uero magnitudines dicuntur haec, quarum nullam mensuram communem contingit reperiri.

Hic locus pluribus uerbis non uidetur indigere, quam ut

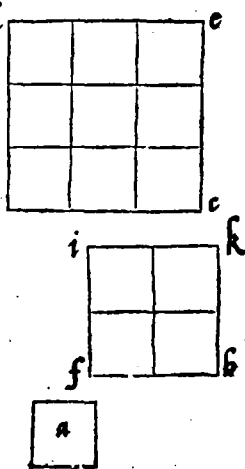
EVCLIDIS ELEMENTOR.

moneamus ex superius dictis intelligendū esse. Contra-
ria enim ex contrarijs intelligi posse receptum est. Por-
rò accidentia & passionēs his congruentes ex ipso Eu-
clide reperi debere sequentium rerum lectio docebit.

Lineæ rectæ potentiâ commensurabiles sunt: qua-
rum quadrata una eadem superficies siue area
metitur.

Quantum ad hunc locum attinet, duo quadam præscri-
benda puto. Primum, ut intelligamus per hanc uocem,
lineæ potentia, quadratū illius. tantum enim dicitur
linea posse, quantum quadratum describere potest. Al-
terum, ut tali distinctione hinc utamur. Linearum hæ
quidem sunt longitudine inter se commensurabiles: illæ
uero potentiâ inter se commensurabiles. Alterum mem-
brum linearum longitudine commensurabiliū non ex-
plicat Euclides, quia uisus erat illud comprehendisse an-
tea uniuersali definitione magni-
tudinum commensurabiliū. Nam
lineæ sunt sub genere magnitudi-
nis. Sed quia lineæ habent illud
quoque in se propriū & peculia-
re, præter ceteras magnitudines, *b*
ut quadam ex his sint potentiâ cō-
mensurabiles: hoc uero sibi nō exi-
stimauit prætermittendum.

Sit lineæ *b c*. eius quadratū sit *b c d*
e. sit etiā lineæ *f h*. eius quadratū
sit *f h i k*. hæc duo quadrata me-



siatur

tiatur una quæpiã superficies, uerbi gratia superficies $\bar{a}$, quæ metiatur primò quadratum $b c d e$, nouies repetita, qui est numerus areolarum in eodẽ quadrato descriptarum. Præterea metiatur quadratũ $f h i k$, quater repetita, secundum numerum suarum areolarum. Erit itaque superficies $\bar{a}$, illa, quæ metitur ea quadrata duo. Horum ergo, quadratorũ inquam, $b c d e, f h i k$, latera siue lineæ potentes illa quadrata, quæ sunt lineæ $b c, f h$, erunt potentiã commensurabiles.

Incommensurabiles verò lineæ sunt, quarum quadrata, quæ metiatur area communis, reperiri nulla potest.

Hoc loco nihil aliud dico, quàm ut adiueas intelligentiam huius loci additione uocis, potentia, quæ superiori definitioni additur, ut intelligas de lineis illis quæ sunt incommensurabiles potentiã. quæ cum sint potentiã incõmensurabiles: illud quoque habent, ut sint præterea longitudine incommensurabiles. hæcenus dictũ sit. Quòd si plura hoc quidem loco scire desideres: peruerter ordinem disciplinæ, qui certissimus est ad discẽdũ magister.

Hæc cum ita sint, ostendi potest, quòd quãtacunq; linea recta nobis proponatur: existunt etiam alię lineæ innumerabiles eidem cõmensurabiles: alię item incommensurabiles. hæc quidẽ longitudine & potentia: illæ verò potentia tantũ.

Huius libri præcipuum illud esse uelim scias, quod non, ut cæterorum superiorum, in prima lectione percipi possit.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

eius doctrina, sed iterata & sæpius repetita: eoque fit ut pleraque principia hic scripta, non quidem demonstrantur ex sequentibus: sed melius intelligantur, si cum ad sequentia ueneris, ad principia subinde redeas. Vñs enim harum uocum, qui est in ipsis theorematibus, res illis uocibus expressas faciliores intellectu reddit. Sic itaque faciendum puto hoc quidem loco. Nam sequentes propositiones magnam illi lucem asferent. Tantum enitere ut concipias animo res nudas, quarum significatio his uocibus simplicibus continetur: in quo te iuuabunt ea quæ superius à nobis scripta sunt. Vocetur igitur linea recta, quantacūque proponatur ἐν τῇ, id est rationalis. Quam lineam uocari uult ἐν τῷ, eam interpretes Latini nominauerunt rationalē. qua ratione ducti, nescio: mihi quidē non ualde probatur. Sit ergo ἐν τῇ linea recta quacunque, de qua sermo institui debeat. Etymologiæ rationem in enuntiatione rerū uocibus simplicibus significandarum, sicut uisi sunt ueteres magna diligentia consequuti: ita nobis non contemnendā existimo, ut rerum ipsarum cognitionem adiueamus. huius uocis ἐν τῇ ratio ducta mihi uideri solet ἀπὸ τῆς ἐξ ἡμῶν unde τὰ ἐν τῇ καὶ ἀπὸ τῆς ἐν τῇ illud interpretor quod est effabile, certum, concessum, & determinatum: ac si, uerbi causa, dicas id esse, quod est dicibile, & uoce significari possit. ἐν τῇ itaq; erit quacunque linea, quantacunque magnitudine proponatur. Ideo ἐν τῇ nominata, quia datam lineā possumus diuidere in quā multas partes uoluerimus. Scitum est enim ex nona propositione sexti libri, A data linea iussam partē auferre.

ferre. Quod quum ita sit, proposita linea diuisiones eas admittit, quas animo conceperis: ut dicas, hac linea qua proponitur, tot partes habet, tres puta, quatuor aut quinque, quas aut pedes aut passus, aut aliud quoduis mensuræ genus esse contigerit, ut tres pedes aut passus quatuor longa sit. hæc autem linea, quam ἐν τῷ uoco, omnibus penè propositionibus huius libri, & eis maxime quæ à decima incipiunt, fundamenta præstat: ut nī si hanc primo loco posueris, & animo conceperis antequam demonstrationem cuiusque theorematīs attingas, nullum facile intelligas. Est enim uelut norma omnium linearum ex qua ipsarum quoque mensura peti debet an sint rationales necne. Nam hæc ipsa ἐν τῇ qua hic denominatur, est ἐν τῇ ex suppositione quod quidem hæc uox ἀρρητὸν facile indicat, quasi dixerit ἁπλοῦς, quæ uelut ἐν τῇ id est rationalis primo loco dici potest, ut ipsa uoce differat à cæteris lineis rationalibus, de quibus mox agit. Cuius rei te perpetuò meminisse uelim.

Lineæ quoque illi ἐν τῇ commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantū, vocentur & ipsæ ἐν τῇ id est rationales.

Hic locus plane intelligitur ex duabus definitionibus supradictis, nempe magnitudinum commensurabilium, & linearum potentia commensurabilium. Obiter tamen aduertat in his uerbis, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantū, quantā cautionem adhibuit Euclides, ut uocibus ipsis coniungeret

res eas quæ natura sua coniunguntur, seiungeretq; con-
 trarias. quod religiosissime mathematici penè omnes vi-
 si sunt observare: ut in hoc loco, quia lineæ longitudine
 commensurabiles, sunt & ipsæ quoque potentia com-
 mensurabiles, quum de commensurabilibus longitudi-
 ne loqueretur, addere voluit, & potentia. cum uerò
 de potentia cōmensurabilibus, apposit, tantum. Quæ
 enim lineæ sunt potentiâ commensurabiles, non cōtinuò
 sunt & longitudine. Hæ uerò ἐν τοῖς id est rationales,
 quæ hoc loco talem denominationem acceperunt, iam
 non sunt ἐν τοῖς ex suppositione, id quod erat illa prior
 ἐν τοῖς: sed sunt tales propter relationem quam habent ad
 illam. Quia sunt aut longitudine simulq; potentia, aut
 potentia tantum, ipsi ἐν τοῖς quæ primo loco ita dicitur,
 commensurabiles. Præterea hîc est animaduertendum,
 uoces illas, longitudine & potentia, aut potentia tan-
 tum, coniungi cum illis uocibus commensurabiles, aut
 incommensurabiles: illis uerò uocibus, rationales, aut
 irrationales, nunquam adponi, ut dicantur longitudi-
 ne siue potentia rationales aut irrationales lineæ. quod
 Campanus uidetur promiscue usurpasse. Si plura cupis,
 auidum discendi animū hîc retineto, ne uestigia autho-
 ris, eiusdemq; ducis tui deseras, qui principia quidē sim-
 plicissime tradenda sibi putauit, ut discantium animos
 nuda rei notione tantum informaret. quod & uerius
 est, & ad docendum magis appositum.

Quæ uerò lineæ sunt incommensurabiles, illi τῶ ἐν-
 τοῖς id est primo loco rationali, vocentur ἀλογοὶ id
 est irrationales.

Illud

Illud intellige de lineis longitudine & potentia incommensurabilibus. Nam incommensurabiles potentia tantum, ut eadem non sint longitudine etiam incommensurabiles, esse nulla possunt. neque hic existimes Euclidem agere de lineis longitudine tantum incommensurabilibus, potentia uero commensurabilibus. has enim nuper posuit inter $\epsilon\upsilon\kappa\lambda\omicron\iota\varsigma$ id est rationales. Vult autem hic lineas omni ratione incommensurabiles, id est potentia & longitudine vocari $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$. Quod cum non ita perceptum esset à Campano, uidetur homini causam erroris attulisse, quam ipse posteris quoque tradidit, ut mox dicemus. Quid sit $\epsilon\upsilon\kappa\lambda\omicron\iota\varsigma$, & $\epsilon\upsilon\kappa\lambda\omicron\iota\varsigma$, antè dictum est. Quod uero ad hanc uocem $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$ pertinet, ex commetarijs Procli scire licet, $\epsilon\upsilon\kappa\lambda\omicron\iota\varsigma$ uel $\alpha\epsilon\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\iota\varsigma$ opponi per priuationem, ut $\alpha\epsilon\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\iota\varsigma$ sit contrarium $\tau\tilde{\omega}$ $\epsilon\upsilon\kappa\lambda\omicron\iota\varsigma$: $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$ autem saepius usurpari pro hac uoce $\alpha\epsilon\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\iota\varsigma$, cum tamè idem sit $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$ & $\alpha\epsilon\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\iota\varsigma$. hoc $\alpha\epsilon\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\iota\varsigma$ $\alpha\epsilon\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\iota\varsigma$, illud $\alpha\epsilon\gamma\epsilon\iota\tau\omicron\iota\varsigma$ $\lambda\iota\chi\alpha\delta\alpha\iota$, quæ idè significant. Itaque $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$ linea erit cuius proportio siue longitudo comparata ad longitudinem $\tau\tilde{\omega}$ $\epsilon\upsilon\kappa\lambda\omicron\iota\varsigma$ id est ipsius linea primo loco, & ex suppositione rationalis, nullis numeris referri potest. Neq; putes $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$ dici per priuationem $\tau\tilde{\omega}$ $\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$ id est proportionis. Est enim sua proportio linearum alogarum inter se non quidem nobis planè incognita, nedum ut natura cognitionè effugiât: quod quidam uolunt, alioqui frustra sumpsisset eam operam Euclides hoc quidè in libro in quo nihil aliud agit, quàm ut doceat passionès illarum linearum, & proportionès quas illæ lineæ $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$ inter se retinent. Verù ea ratione dicuntur $\alpha\lambda\omicron\gamma\alpha\varsigma$, quia numeris earum proportio

EVCLIDIS ELEMENTOR.

reddi non potest. Nam quod isti uocant irrationale, cur
ita uocent, non intelligo. Surdas autem lineas dici, quas
hîc ἀλόγους uocat Euclides, non omnino displicet: quā-
uis mathematici nō facile huiusmodi translationes ad-
mittant, sed quia propriam huius rei uocē deesse agno-
scimus, ferri potest hac translatio. Neque tamen hoc lo-
co pratermittendū puto, quod Nicolaus Tartalea geo-
metra apud Venetos, & libris eruditis nobis quoq; non
incognitus, animaduertit Campanum & reliquos ab
eo geometras falso existimauisse radices siue lineas quæ
quadrata producant, illa quidem numero significabi-
lia, sed non quadrato numero, ueluti 10, 11, 12, & simili-
bus, eas inquam lineas ἀλόγους esse id est, ut eorum uerbo
utar, surdas: hoc uerò pugnare contra hypothesen Eucli-
dis, qui uoluit eas uocari ῥητὰς id est rationales, quæ
sunt ad lineam propositam commensurabiles, siue longi-
tudine & potentia, siue potentia tantum: ex quo ma-
gnas opinionum differentias in plerisque huius libri lo-
cis extitisse. hætenus Tartalea. Neque sanè hoc nihil
est, neque tamen in eo sunt omnia. Ego uerò illud affir-
mare non dubitem, hinc capisse noctis illius initiū, quæ
tam densas tenebras offuderit ueritati rerum his libris
traditarum, quæ docentes & discentes plerasq; omnes
diuersos egerint: ut quum ulterius progredērētur, nihil
amplius intelligerent, quàm se nihil intelligere. nostrum
quidem de ea re iudicium cum opus fuerit, afferemus.
Et quadratum quod à linea proposita describitur,
quam ῥητὴν uocari uoluimus, uocetur ῥητὴ.
Non uideo quid planius dici possit.

Et

Et quæ sunt huic commensurabilia, uocentur *ἐντάλ*.

Hanc uocem *commensurabilia*, intelligas siue sint quadrata, siue alia quacunque figura rectilinea. Scitum est enim cuicunque parallelogrammo, æquale quadratum describere: per ultimum theorema libri secundi, siue per inuentionem lineæ mediæ proportionalis secundum 13 theorema libri 6. quam ubi repereris, colliges statim per 17. 6. parallelogrammum rectangulum cōprehensum ex duabus lineis extremis esse æquale quadrato lineæ mediæ. Simili ratione rursus cuicunq; quadrato parallelogrammum æquale describitur, per inuentionem tertriæ lineæ proportionalis secundum theorema 11. 6. hic uides nihil tale dici de quadratis & cæteris figuris, quale de lineis antea, quarum est & longitudo & potentia commensurabilis. Figurarum enim solæ consideratur capacitas, quam longitudo latitudini iuncta determinat.

Quæ uerò sunt illi quadrato, *ἐντὶ* scilicet, incommensurabilia uocentur *ἄλογα* id est furda.

Incommensurabilia hîc quoq; accipias, quales quales fuerint figura rectilinea.

Et lineæ quæ illa incommensurabilia describunt, uocentur *ἄλογα*. Et quidem si illa incommensurabilia fuerint quadrata, ipsa eorum latera uocabuntur *ἄλογα*, lineæ. quod si quadrata quidem nō fuerint, uerum alia quæpiam superficies siue figura rectilinea, tunc uerò lineæ illæ quæ descri-

bunt quadrata æqualia figuris rectilineis, vocen-
tur ἀλογα.

Vnum est quod hoc loco animaduertendum putem. Cum dixisset ἀλογα esse quæ sunt incommensurabilia & ἐντῷ, subiungere uoluit de lineis illa incommensurabilia describentibus, & eas uocauit similiter ἀλογα; cum tamē antea loqueretur de commensurabilibus ipsi ἐντῷ, nihil egit de lineis illa commensurabilia describentibus. hoc autem ea ratione prætermisit, quia satis sibi fecisse uidebatur, & de his innuisse, cum loqueretur de lineis τῷ ἐντῷ cōmensurabilibus, sub illis uerbis, siue potētia tantū. Nam potentia lineæ est ipsius quadratum, ut antè diximus. Quod si quadratum commensurabile fuerit ipsi ἐντῷ, ipsa quoque lineæ quæ illud quadratum potest, commensurabilis erit saltem potentia. Itaque per definitionem linearum commensurabilium ἐντῷ etiam erit. Extat libellus nomine Aristotelis περὶ ἀτόμων ᾠκισμῶν, quem quidem non esse Aristotelis ex multis locis ipsius faciliè intelligitur. eruditio tamen facit, ut attribui debeat alicui ex nobili illa Peripateticorum & docta familia. in eo multa leges intelligentiæ horum principiorum conducentia. Quorum illud unū annotabimus; quod ferè summam totius rei declarationem continere uideri possit. Commensurabilitatem & incommensurabilitatem magnitudinum inter se, natura quidem ipsarum magnitudinum constare. Rationalitatem uerò & irrationalitatem positione fieri, quia quæ primo loco lineæ sic dicitur, nempe rationalis positione talis efficitur. Aliæ uerò lineæ ad illā relatæ, sunt aut rationa-
les,

les, aut irrationales, quatenus sunt eidem commensurabiles aut eidem incommensurabiles. Rursus linea rationalis quæ talis est, quia cõmensurabilis est linea illi primo rationali, & ipsa relata siue comparata alteri lineæ, quæ item proponatur primo loco rationalis esse, si eidem fuerit incommensurabilis, dicitur etiam irrationalis. Itaque eadem linea alteri atque alteri commensurabilis & incommensurabilis, erit similiter rationalis & irrationalis. Hoc autem ideo fit, quia rationalitas, & irrationalitas omnis pender ex positione, non autem ex natura ipsarum magnitudinum, quod tamen in commensurabilitate & incommensurabilitate aliter est. Sunt & communes quadam animi conceptiones, quas hîc omisit Euclides, tum quia sunt infinitæ, tum uerò quia sunt eiusmodi, ut eas unusquisque possit animo modica quadam animaduersione subijcere, ut locus ipse postulare uidebitur: ex quibus tamen illas non prætermittimus, quæ singulis locis conuenientes erunt, quales reperiantur in demonstrationibus primi & secundi theorematum.

Campanus principijs huius libri illud quoq; inserit. Quamlibet quantitatem toties posse multiplicari, ut quamlibet eiusdem generis quantitatem excedat, quod quidem recte fecit. nam huius principij auxilio statim nititur demonstratio primi theoremat. huius libri. De illa autem magnitudine hîc dicit, quam geometra & cæteri mathematici tractant, ut augeri possit in infinitum. Hoc loco uisum est addere, quod cum alij obscure, Proclus tamen luculentissimè prædit: cuius libros (de ijs

- E V C L I D I S . E L E M E N T O R .

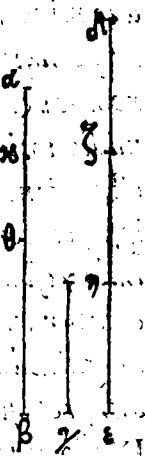
intelligo quos in Euclidem scripsit) ut omnes qui quidē mathematici fieri cupiunt, studiose legant, uehementer hortor: quibus ego plurimum debere me, nunquam inficiabor. Quod ad rem attinet, id est huiusmodi, principium illud Campani uniuersaliter quantitatem omnē (siue sit ea quam continuā uocant, siue discreta sit qualis est numerus), comprehendere. Porro aliud est quod quantitati continuæ soli conueniat, ut in infinitum minui possit, sicut in linea. Quantacunque enim decur in partes infinitas, minui siue diuidi potest, quarum tamē unaquæque linea erit. Illa porro itidē in alias quo eandem naturam retinent: neq; unquam ad minimum ex sectione deuenitur, ne si punctum quidem dicas, quāuis illud per se sit in geometria minimum. Eo sit ut sint lineæ quædam ἀόροι, quarum quidē est inter se quādā proportio, sed numero exprimi nequit, itaque uocatur à Proclo ἀόροι ἀπειρά. Nam ubicunque est sectio siue diuisio in infinitum, ibi quoque reperitur illud ineffabile, quod ἀόροι dicunt. hoc uerò non ita est in numeris. Nublus enim est numerus quem diuidendo non reducas ad illud minimum quod est unitas, ex quo numeros omnes esse intra τὸ συμπληρωτέον necesse est. omnes enim metitur unitas. Nulli igitur sunt numeri ἀλόγοι. Quod autem ad sequentium theorematum expositionem attinet, hoc habetote, non fuisse consilij nostri initio suscepti operis singulis manuum adiuuere. Actum enim agere hoc quiddē esse uidebatur, si quæ à maioribus recte tradita sunt (sunt autem bene multa) hic describerem. Neque sanē cupiam si maxime possim, alieno labore partem gloriæ

in me trāsferre: sed morem gestum amicis oportuit, qui me ad totius libri cōmentationem impulerunt, ut quam lucem rerum incognitarū obscuritas desideraret, eam quantum in me esset ingenij, quantumque diuturnum studiū huius præstantissimæ disciplinæ illud adiunisset, ipse uobis afferrem, quos ueritatis studio ad rerum acutissimarū & dignissimarū cognitionē rapi intelligo.

Primum Theorema.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si de maiori detrahatur plus dimidio, & rursus de residuo iterum detrahatur plus dimidio, idq; semper fiat: relinquetur quædā magnitudo minor altera minore ex duabus propositis.

Sint duæ magnitudines inæquales α β , γ , quarū maior sit α β : dico si de α β detrahatur plus dimidio, & de residuo iterū plus dimidio, idq; semper fiat, relinquetur quædā magnitudo minor q̃ magnitudo γ . Nam γ multiplicata erit tādē aliquādo maior magnitudine α β . multiplicetur & sit α θ multiplex quidē ipsius γ : maior uerò ipsa α β : diuidaturque α θ in partes æquales ipsi γ , quæ sint α 2 , 2 1 , 1 1 : & detrahatur de α β plus dimidio, sitq; β 0 . rursus detrahatur de α 0 plus dimidio, sitq; 2 1 , idq; eò usq; fiat, donec diuisiones magnitudinis α β tot fuerint quot sunt diuisiones in magnitudine α 1 . Sint igitur diuisiones α 2 , 2 1 , 1 1 & totidem numero quot sunt diuisiones



EVCLIDIS ELEMENTOR.

$\alpha\beta$ & $\gamma\delta$ haftenus constructio: deinde se-
quitur demonstratio. Quia maior est $\alpha\beta$
quàm $\gamma\delta$, & detractum est de $\alpha\beta$ minus
dimidio, scilicet ipsum $\gamma\delta$, (qua quidem de-
tractio intelligitur facta ex superiori di-
uisione ipsius magnitudinis $\alpha\beta$, in partes
aequales ipsi γ . diuidendo enim minuitur
magnitudo, sicut augetur multiplican-
do.) de $\alpha\beta$ uero detractum est plus dimi-
dio $\beta\delta$: residuum ergo $\alpha\delta$ est maius residuo
 $\gamma\delta$, quod & uerissimum est, & ad cogitā-
dum facillimum, si ad principium illud
reuocetur (qualia multa sunt in animis hominum pe-
nitus insita) residuum maioris magnitudinis post de-
tractum dimidium uel minus dimidio, esse maius resi-
duo minoris post detractum plus dimidio. Cum itaque
 $\alpha\delta$ sit maius quàm $\beta\delta$, detractumq; sit de $\alpha\delta$ dimidiū,
nempe $\alpha\gamma$: & de $\beta\delta$ sit detractum $\beta\gamma$, quod est plus di-
midio totius $\beta\delta$: residuum ergo $\alpha\gamma$ residuo $\beta\gamma$ maius
est, ratione principij modo scripti. Atqui $\alpha\gamma$ est aequale
ipsi $\gamma\delta$ ex consensu & suppositione: ergo etiam magni-
tudo $\gamma\delta$ est maior magnitudine $\alpha\delta$: quod idem est ac si
dicatur, minorem esse $\alpha\delta$ ipsa $\gamma\delta$. relinquitur itaque de
magnitudine $\alpha\beta$, magnitudo $\alpha\delta$ minor ea qua ex dua-
bus propositis minor erat. Quod erat demonstrandum.
Dictio autem illa $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$, in exemplari graeco postponē-
da est post ea uerba $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$ de $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$ $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$
& $\alpha\beta$ & $\gamma\delta$. Hunc ordinem in demonstrationibus per-
petuò retinet Theon, quem compositorum uocant.

Nunc

Nunc autem tractemus resolutorium per syllogismos resoluentes theorema in sua principia indemonstrabilia. Sic ergo agamus. Omnis magnitudo minor αz , est minor γ . Omnis αx est minor αz . Ergo omnis αx est minor γ . Quod si cupis propius accedere ad terminos ipsius theorematum: sit maior terminus, esse minorem altera minore ex duabus inaequalibus propositis. minor uero sit illa pars prior theorematum duabus inaequalibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore: iterumque de residuo, tali continuata detractioe perpetuo residuum ipsum. Medius terminus sit, minorem esse altera magnitudine, quae aequalis est ipsi minori ex duabus propositis. itaque; dices,

Omnis magnitudo minor altera quae aequalis est minori ex duabus propositis, est minor minore ex duabus propositis. Duabus inaequalibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore, itidemque de residuo continuata tali detractioe perpetua, residuum est, magnitudo minor altera quae aequalis est minori ex duabus propositis. Ergo duabus inaequalibus propositis magnitudinibus detracta &c. residuum est magnitudo minor minore ex duabus propositis. Maior propositio est principium indemonstrabile & per se notum, quod uniuersalius dici solet, quae aequalia sunt inter se, ad idem eodem modo se habere. Minor uero probatur ex illis uerbis demonstrationis. Residuum ergo αz residuo αx maius est, quod idem ualeat ac si dicatur αx esse minus, quam αz . Sit ergo syllogismus per resolutionem: reuoceturque res ad ele-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

menta, quomodo solēt uti geometra, ut paucioribus uerbis concludatur demonstratio, eoq; promptius ab intellectu nostro comprehendatur. Primò quia composita est propositio minor, qualitas illa adiecta prædicato, quæ equalis est minori, probatur ex consensu & suppositione præcedentibus. Maiorem uerò terminum inesse minori sic probabis: Residuū minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detractòq; dimidio de maiore: de minore uerò detractò plus dimidio, est minus residuo maioris. Sed αx est residuum minoris ex duabus magnitudinibus nempe ex $\theta \alpha$, $\alpha \lambda$ & c. Ergo αx est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λz , ergo αx est minus λz . Maior uerò cōtracta est ex principio uniuerfali. Si ab inæqualibus inæqualia auferas, residua sunt inæqualia, & minus id quod residuū est, eius à quo plus ablatum est. Quantum ad minorem propositionem attinet, illud solū probatione indiget, αx esse residuum minoris. primò residuum esse patet, ex suppositione. Quod uerò magnitudo $\theta \alpha$ (cuius residuum est αx) sit minor magnitudo $\alpha \lambda$, patet ita. Residuum minoris magnitudinis ex duabus inæqualibus, detractòq; minus dimidio de maiore: de minore uerò plus dimidio, est minus residuo maioris. Sed $\theta \alpha$ est residuum minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus, detractòq; minus dimidio ex maiore $\lambda \nu$: de minore uerò $\alpha \beta$ plus dimidio & c. Ergo $\theta \alpha$ est minus residuo maioris. sed residuum maioris est $\lambda \nu$, ergo $\theta \alpha$ est minus quàm $\lambda \nu$. Maior patet ex principio indemonstrabili. Minor uerò probatur, primò quòd $\theta \alpha$ sit residuum. probatur ex suppositione,

sitione, propter detractiōē factam. Quod uerò $\alpha \beta$ sit minor quàm $\alpha \gamma$, patet similiter ex suppositione & principio: quamlibet quantitatem toties posse multiplicari &c. Addit Theon hoc quoq; theorema uerum esse, etiā si partes detractæ sint dimidiæ. Quod uerò dicitur in theoremate, Si detrahatur plus dimidio, eò pertinet ut si minus dimidio detrahatur, non semper uerum sit residuum esse minus minore ex duabus propositis.

Secundum Theorema.

Duabus magnitudinibus propositis inæqualibus, si detrahatur semper minor de maiore, altera quadam detractiōe, neque residuum unquam metiatur, id quod ante se metiebatur, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.

videtur ea vox abundare si græcus codex consulat. uel dicatur id quod ante se erat.

Sint magnitudines duæ inæquales $\alpha \beta, \gamma \delta$: minorq; sit $\alpha \beta$: detractaq; per detractiōem alternatim, & semper cōtinuatā minore de maiori: id quod relinquitur ex ea quæ maior fuerat ante detractiōē, nunquam metiatur hoc ipsum, quod antequā id reliquum fieret, metiebatur maiorem magnitudinem. Dico incommensurabiles illas esse magnitudines $\alpha \beta, \gamma \delta$. Quod si neges, illud cōtinuo affirmas, commensurabiles eas esse. Porro si sint commensurabiles, metietur eas quadam communis magnitudo per diffinitionem linearum commensurabilium. Metiatur itaque, si fieri potest: eāque sit ϵ , detrahaturque de maiori

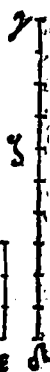


divisio linearum in partibus est inepta.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

minori

magnitudine γ a pars quaedam, puta $\alpha\zeta$ quae sit equalis maiori magnitudini $\alpha\beta$: aut si aequalis non erit, sit tamen huiusmodi, ut illa minor magnitudo $\alpha\beta$ aliquot vicibus repetita, representet ipsam magnitudinem $\alpha\zeta$. hoc enim est quod dicitur, magnitudinem $\alpha\beta$ metiri $\alpha\zeta$: talique detractioe facta, minoris inquam de maiore, relinquatur ex maiore portio quaedam $\gamma\zeta$ minor magnitudine $\alpha\beta$. hoc uero est quod dicitur in theoremate, neq; residuum unquam metiatur id quod ante se erat. Similiter de $\alpha\beta$ detrahatur portio quaedam $\beta\eta$ equalis magnitudini $\gamma\zeta$, relinquaturque ex ea detractioe portio $\alpha\eta$ minor quam $\gamma\zeta$, idque semper si sit opus fiat, saltem dum relinquatur quaedam magnitudo minor ipsa magnitudine. hoc enim tandem euenire necesse est, per primum theorema huius. Si propositis illis duabus magnitudinibus inaequalibus $\alpha\beta$, (quarum minor ex consensu & suppositione tua erat. hanc enim posuisti esse communem mensuram duarum magnitudinum $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, itaque minorem alterutra) de maiore $\alpha\beta$ detrahatur plus dimidio, itemque de residuo plus suo dimidio: itaque relicta sit $\alpha\eta$ minor quam $\alpha\zeta$. haecenus ea quae ad structuram pertinet. nunc ad demonstrationem ueniamus. Cum igitur magnitudo $\alpha\zeta$ metiatur magnitudinem $\alpha\beta$, ipsa uero $\alpha\beta$ metiatur $\alpha\zeta$: etiam $\alpha\eta$ metietur similiter magnitudinem $\alpha\zeta$ per communem conceptionem. Si magnitudo quaedam metiatur aliam, metietur quoque omnem aliam ab ea mensuratam. cui simile quiddam apposuit



apposuit Campanus in numeris inter principia septimi. Itaque α metietur β & eadem etiā magnitudo α metietur totam magnitudinem γ & ex tua suppositione, positum enim est eam esse communem mensuram ambarū α β , & α . Ergo α metietur ϵ ipsum residuum, quod est γ δ , per illam communem conceptionem, Quae magnitudo metitur aliam totam, & partem ab ea detractā, metitur quoque reliquā. Idem in numeris posuit Campanus. Cum itaque α metiatur γ δ : γ δ autem metiatur β : ipsa quoque α metietur β per superiorem illam conceptionem. Atqui α metitur totam magnitudinem α β : itaque per alteram conceptionē metitur residuum α γ . Metietur ergo maior magnitudo aliam se ipsa minorem. hoc autem fieri nullo modo potest, ut antē diximus inter principia. Non igitur illas magnitudines α β , & α metietur ulla magnitudo. Incommensurabiles igitur erunt α β , & α . Duabus itaque magnitudinibus propositis inaequalibus et ceteris, quod demonstrandum erat.

Hac demonstratio conclusa est per deductionem ad impossibile. Positum est enim contradictorium conclusionis uerum: ex qua propositione per plures gradus syllogismorum deuentum est tandem ad id quod falsissimum est, nempe maiorem magnitudinem esse quae minorem metiatur. Quia ergo ex ueris nunquam colligitur falsum: nunc autem conclusa est hac falsitas, necesse est positionem illam tuam falsam exiisse, quod ipsum per destructionem consequentis ostendi posse tradunt dialectici. Falsum autem est maiorem metiri minorem, quod consequens erat ad illud antecedens.

EVCLIDES ELEMENTOR.

duas magnitudines $\alpha \beta$, $\gamma \delta$ esse commensurabiles. sequitur ergo ipsum antecedens falsum esse. Incommensurabiles ergo necesse est esse $\alpha \beta$, $\gamma \delta$. Verum ex quibus medijs processerit illa conclusio falsa, maiorem magnitudinem metiri minorem, uideamus per resolutionem, sit q; syllogismus huiusmodi. Omnis magnitudo metiens totam magnitudinem $\alpha \beta$, & de ea detractam $\alpha \beta$, metitur residuum $\alpha \alpha$. Magnitudo $\gamma \delta$ est magnitudo metiens totam $\alpha \beta$, & detractam $\alpha \beta$. Ergo magnitudo $\gamma \delta$ metitur residuum $\alpha \alpha$. falsa est conclusio, quia positum fuit $\alpha \alpha$ esse minorem quam $\gamma \delta$. Maior est indemonstrabilis, contra tracta ex principio uniuersali: quod quale esset, ante retulimus. Minoris uero probatio quia plura continet, hinc petenda est. Primo ex suppositione magnitudo $\gamma \delta$ metitur totam $\alpha \beta$. deinde quod eadem $\gamma \delta$ metiatur detractam partem quae est $\alpha \beta$, ita probatur. Omnis magnitudo metiens magnitudinem $\gamma \delta$, metitur & $\alpha \beta$, quam $\gamma \delta$ metitur. $\gamma \delta$ metitur $\gamma \delta$, ergo $\gamma \delta$ metitur & $\alpha \beta$. Maior similiter est per se nota ex principio uniuersali. Quaecunque magnitudo metitur aliam, metitur & eam quam ipsa metitur. Minor uero sic probatur. Omnis magnitudo metiens totam magnitudinem $\gamma \delta$, & detractam $\alpha \delta$, metitur & residuum $\gamma \delta$. metitur totam magnitudinem $\gamma \delta$, & detractam $\alpha \delta$, ergo metitur $\gamma \delta$. Maior iterum per se nota est ex principio. Minor uero quia duo membra habet, ita probatur. Primo metitur tota magnitudinem $\gamma \delta$ ex suppositione. deinde quod eadem $\gamma \delta$ metiatur $\alpha \delta$, ita probandum est. Omnis magnitudo metiens $\alpha \beta$, metitur & $\alpha \delta$ quam metitur $\alpha \beta$. metitur $\alpha \beta$, ergo

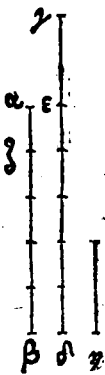
ergo ϵ metitur γ Δ , quam metitur α β . Maior uerissima est, γ per se nota. Minore uero falsam esse ideo necesse est, quia causa fuit illius conclusionis falsa, nempe quod maior magnitudo minore metiatur. Non erit itaque communis mensura ambarum magnitudinum α β , γ Δ . Idem reperies, si quacunque aliam magnitudinem posueris pro communi illarum mensura. Quia igitur nulla reperiri potest, erunt illae magnitudines incommensurabiles, quod demonstrandum erat. Ex hoc elicitur $\pi\epsilon\iota\sigma\mu\alpha$ siue corollarium à destructione consequentis.

Si duae magnitudines inaequales propositae non fuerint incommensurabiles, sed fuerint commensurabiles: continuata detractioe minoris alternatim facta de maiore, necesse est residuum metiri id quod ante se metiebatur.

Tertium Theorema.

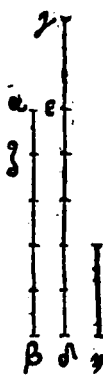
Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram reperire.

Sint datae duae magnitudines commensurabiles α β , γ Δ , quarum minor sit α β : oportet itaque magnitudinum α β , γ Δ maximam communem mensuram reperire. Primum ipsa magnitudo α β aut metitur γ Δ , aut non metitur. Si itaque α β metitur γ Δ , seipsam quoque cum metiatur, ipsa ergo α β est communis mensura magnitudinum α β , γ Δ . Manifestum porro est maximam quoque eam ambarum mensuram communem esse. Nam nulla maior magnitudo quam α β metietur ipsam α β . Sed ne metiatur α β ma-



EVCLIDES ELEMENTOR.

gnitudinem γ A. Detracta igitur per mutuā
detractionem minore de maiori, residuū me-
rietur aliquando id quod ante se est per præ-
cedens corollarium Nam data sunt magni-
tudines α B, γ A esse commensurabiles. itaque
magnitudo α B metiendo γ a partem magnitu-
dinis γ A, relinquat magnitudinem γ se α B
inquam minorem. Ipsa uerò γ metiendo ma-
gnitudinem γ B partē magnitudinis α B, re-
linquat similiter α z se γ inquam minorem.
Ipsa uerò α z metiatur magnitudinem γ γ . Illud autē est
metiri, id quod ante se est, quādo nihil relinquitur post
mensurationem factam. haftenus constructio. sequitur
statim demonstratio. Cum igitur α z metiatur magni-
tudinē γ γ , autē metiatur γ B: ergo α z metitur ma-
gnitudinem γ B. Sed α z metitur seipsam: ergo α z metie-
tur α B. Sed quia α C metitur A: ergo α z metietur A.
Sed eadem α z metitur γ γ : totam ergo γ A metietur: ergo
 α z metietur ambas magnitudines α B, γ A, earūq; cō-
munis mēsurā erit. Dico præterea illam esse communē
utriusque maximam mensuram. Quod si neges illam
esse maximam mensuram: erit itaque magnitudo quæ-
dam maior quā α z, quæ metiatur utramque α B, γ A.
ea uero sit α . Cum igitur per te α metiatur α B: ipsa au-
tem α C metiatur A: ergo α metietur A. ipsa etiam α per
te metitur totam γ A: ergo metietur α residuū γ γ . Sed
cum γ γ metiatur γ B, etiam α metietur γ B. metitur uerò
eadem α per te totam α C: ergo metietur α residuū α z.
Itaque magnitudo maior metietur minorem: quod sane
fieri



fieri nullo modo potest. Nulla ergo maior magnitudo quàm $\alpha\zeta$ metietur utramq; $\alpha\beta, \gamma\delta$: ergo $\alpha\zeta$ est maxima earum communis mensura. Duarum igitur magnitudinum commensurabilium $\alpha\beta, \gamma\delta$ reperta est communis maxima mēsurā, nempe $\alpha\zeta$. quod faciendū fuit.

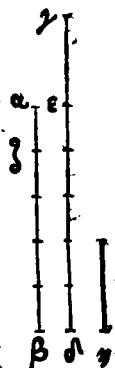
Corollarium.

Ex hoc cōcluditur, si magnitudo quæpiam duas alias magnitudines metiatur, metietur quoque & communem utriusq; maximam mēsuram. Hoc corollarium probatur ex postrema parte demonstratōis. Sint duæ magnitudines $\alpha\beta, \gamma\delta$, quarum sit maxima communis mensura $\alpha\zeta$: sit porro alia $\alpha\epsilon$ quæ etiam metiatur utramque $\alpha\beta, \gamma\delta$. dico magnitudinem $\alpha\epsilon$ metiri $\alpha\zeta$. Sint eadem suppositiones quas modò posuimus. Cum igitur $\alpha\epsilon$ metiatur $\alpha\beta$: $\alpha\beta$ autem metiatur $\alpha\zeta$: ergo $\alpha\epsilon$ metietur $\alpha\zeta$. Sed $\alpha\epsilon$ metitur etiam tota $\gamma\delta$: metietur ergo & reliquum $\gamma\epsilon$. Sed quia $\gamma\epsilon$ metitur $\zeta\epsilon$: ergo $\alpha\epsilon$ metietur $\zeta\epsilon$. sed metitur totam $\alpha\beta$: metietur ergo & reliquum, quod est $\alpha\zeta$. ergo $\alpha\epsilon$ metiens utrāque $\alpha\beta, \gamma\delta$, metietur & maximam utriusque communem mensuram, nempe $\alpha\zeta$. Docet Proclus differentiam inter problemata & theoremata geometrica eā esse, ut problemata sint ea quæ proponunt aliquid fieri oportere, qualia sunt omnia quæ uerbo infinito concipiuntur, ut reperire, cōstituere, secare, & similia. Theoremata uerò sunt quæ asserendo ponunt & definiūt de unoquoq; accidente cuiusque subiecti, qualia sunt duo prima huius libri. Hoc autem 3. problema est. Huius ergo pro-

EVCLIDIS. ELEMENTOR.

blematis demonstrationem sic resolvere nos oportet. Primum aggrediamur partē eā quae syllogismo directo & categorico. cōcludit ipsam magnitudinē $\alpha\gamma$ esse cōmunem mensurā magnitudinū $\alpha\epsilon$, $\gamma\delta$. Omnis magnitudo metiens magnitudines $\gamma\epsilon$ & $\epsilon\delta$, metitur totam $\gamma\delta$. Sed $\alpha\gamma$ metitur $\gamma\epsilon$ & $\epsilon\delta$: ergo $\alpha\gamma$ metitur totam $\gamma\delta$. Maior patet ex principio indemonstrabili. Quaecūq; magnitudo metitur duas, metitur etiam compositam ex illis, cuius simile ponit Campanus in numeris inter principia libri septimi. Minoris pars illa quod $\alpha\gamma$ metiatur $\gamma\epsilon$, patet per corollarium secundi theoremat. Quod uero eadē $\alpha\gamma$ metiatur $\epsilon\delta$, probatur. Omnis magnitudo metiens $\alpha\beta$, metitur α mensuratam ab $\alpha\beta$. Sed $\alpha\gamma$ metitur $\alpha\beta$: ergo $\alpha\gamma$ metitur α . Maior patet ex principio. Quaecūq; magnitudo metitur aliam, metitur quamcunque mensuratam ab ea. Minore ita probabis: Omnis magnitudo metiens magnitudines $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, metitur ϵ totam compositam ex illis $\alpha\epsilon$. Sed $\alpha\gamma$ metitur $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$: ergo $\alpha\gamma$ metitur totam $\alpha\epsilon$. Maior ex principio eodē patet. Minoris pars quod $\alpha\gamma$ metiatur $\alpha\gamma$, patet etiam ex eo, quia omnis magnitudo seipsam metitur per unitatem. Quod uero $\alpha\gamma$ metiatur $\gamma\beta$, probatur sic. Omnis magnitudo metiens $\gamma\epsilon$, metitur ϵ $\gamma\beta$, mensuratā ab ea. Sed $\alpha\gamma$ metitur $\gamma\epsilon$, ergo $\alpha\gamma$ metitur $\gamma\beta$. Maior pendet ex principio. Minor etiam pendet ex antē dictis. Nunc uero restat persequenda pars illa demonstrationis, qua ostēditur magnitudinem $\alpha\gamma$ communem atriūsq; $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ mensuram: esse

præterea



præterea maximam ambarum cōmunem mensurā. hoc autem fit per deductionem ad impossibile. Nam si neges illam $\alpha \beta$ esse mensuram maximam communem utriusque magnitudinis $\alpha \beta$, $\gamma \delta$. sit alia maior quā $\alpha \beta$ maxima communis utriusque mensura quæ sit ι . Tunc dico te deductum iri ad illud impossibile magnitudinem maiorem, nempe ι metiri minorem, scilicet $\alpha \beta$. Manentibus enim his quæ superius posita sunt. Omnis magnitudo metiens totam $\alpha \beta$, & de ea partem detractam $\beta \gamma$, metitur & residuū $\alpha \gamma$. Sed ι metitur totam $\alpha \beta$ & detractam $\beta \gamma$; ergo ι metitur $\alpha \gamma$. Maior est indemonstrabilis. Minor sic probatur. Primum ι metitur totā $\alpha \beta$ ex tua positione. Quod uerò eadem ι metiatur $\beta \gamma$, probo. Omnis magnitudo metiens $\gamma \delta$ metitur $\beta \gamma$ quam $\gamma \delta$ metitur. Sed ι metitur $\gamma \delta$, ergo ι metitur $\beta \gamma$. Maior rursum nō eget probatione. Minoris probatio hinc deducitur. Omnis magnitudo metiens totam $\gamma \delta$ & eius partē $\delta \epsilon$, metitur & residuū $\gamma \epsilon$. Sed ι metitur totam $\gamma \delta$ & eius partem $\delta \epsilon$, ergo ι metitur $\gamma \epsilon$. Maior item est indemonstrabilis. Minoris probationē sic deduces. Primum quod ι metiatur totam $\gamma \delta$, patet ex tua positione. Quod uerò eadem ι metiatur $\delta \epsilon$, sic agas. Omnis magnitudo metiens $\alpha \beta$, metitur $\alpha \iota$ mensuratam ab ea. Sed ι metitur $\alpha \beta$; ergo ι metitur $\alpha \iota$. Maior est indemonstrabilis. Minor patet ex tua positione quādo uoluisti $\alpha \beta$ esse communem maximam mensuram utriusque nempe $\alpha \beta$, $\gamma \delta$. ex qua quia sequitur illa cōclusio falsa, scilicet maiorem ι metiri minorem $\alpha \beta$, necesse est illā tuam positionem falsam extitisse. nam ex ueris nō sequi falsum

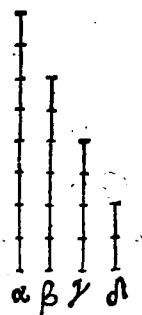
EVCLIDIS ELEMENTOR.

compertum est. Ergo α non erit communis utriusque maxima mensura. idemq; fiet si quâcunq; aliam posueris. Constat igitur α & esse communem maximam utriusque mensuram. Quod autem hoc problemate proponitur inquirendum, id licet in theorema conuertere collata summa totius demonstrationis, propositis duabus magnitudinibus inaequalibus & commensurabilibus: si minor metitur maiorem, illa est communis maxima utriusque mensura: sin minus, facta mutua detractione quandocunque residuum metitur id quod ante se metiebatur postremo, illa est communis utriusque mensura atque ea maxima. Simili ratione poteris ex quocunque problemate theorema efficere.

Quartum Theorema.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram reperire.

Sint datae tres magnitudines cōmensurabiles α, β, γ , oportet ipsarum communem maximam mensuram reperire. Sumatur maxima communis duarum priorum α, β , mensura per præcedens problema, sitq; δ : hac magnitudo δ , aut metitur magnitudinem tertiam quæ est γ , aut eam non metitur. metiatur prius. Hactenus constructio huius partis, nunc ad demonstrationem. Cum itaque δ metiatur γ , metiaturq; magnitudines α, β , Ergo δ metietur α, β, γ : ipsarumque communis men-



sura

sura est. Præterea hanc esse illarum maximam communem mensuram constat hac ratione. Nam nulla magnitudo maior quàm α metietur illas α, β, γ . Quod si fieri posse defendis, sit magnitudo ϵ maior quàm α , quam dicis metiri magnitudines illas α, β, γ . Cum itaque ϵ per te metiatur α, β, γ , metitur duas priores ex illis scilicet α, β : Et præterea maximam communem utriusque mensuram, nempe α per corollarium præcedens. Ergo ϵ maior quàm α , metietur ipsam α , quod est impossibile. Sed ne metiatur α magnitudinem γ , hoc primum dico magnitudines γ, α esse commensurabiles. quod ita demonstratur. Cum sint commensurabiles datae magnitudines α, β, γ , metietur eas profecto quaedam magnitudo quæ similiter metietur separatas ex illis duas α, β . Quare metietur quoque maximam communem utriusque mensuram, nempe α . Metitur etiam ipsa eadem magnitudinē γ . Quare metietur utraq̃ue γ, α . Ergo γ, α sunt commensurabiles ex definitione. Sumatur itaque maxima communis mensura ambarum γ, α , sitq̃; ι . Hactenus constructio huius partis, nunc est demonstratio. Quoniā ι metitur α , Et α metitur magnitudines α, β , itaque ι metietur α, β . metitur præterea magnitudinem γ . Ergo ι est communis mensura trium α, β, γ . Dico autem illam etiam esse maximam. Nam si fieri potest ut ϵ non sit maxima mensura communis trium α, β, γ , sit quaedam maior quàm ϵ , magnitudo ζ , metiaturque tres illas α, β, γ . Cūmq̃; ζ metiatur α, β, γ , etiam metietur α, β , Et ipsarum maximam

EVCLIDIS ELEMENTOR.

commānem utriusque mensurā, nempe α .
Metitur præterea ipsa γ magnitudinem γ .
ergo γ metitur γ, α , & ambarum commu-
nem maximā mensuram, nempe α . Maior
videlicet magnitudo minorē hoc uero fieri
nullo modo potest. Nulla ergo maior quā
magnitudo metietur magnitudines $\alpha, \beta, \alpha\beta\gamma$ & γ .
Ergo α est maxima trium dictarum communis men-
sura. siquidem α non metitur magnitudinem γ . Quod
si α metitur γ , ipsamet α erit communis trium maxi-
ma mensura. Datis igitur tribus magnitudinibus com-
mensurabilibus, reperta est ipsarum communis maxi-
ma mensura, quod faciendum erat.

Corollarium.

Ex hoc manifestum relinquitur, si magnitudo tres magni-
tudines metiatur, metiri quoque maximam commū-
nem ipsarum mensuram. Similiter etiam in pluribus
magnitudinibus maxima illarum communis mensu-
ra reperitur. In illis quoque uerum erit hoc corolla-
rium. Huius corollarij demonstratio continetur in po-
stremis uerbis ipsius Theonis. itaque dices. Sint tres
magnitudines α, β, γ , quarum communis maxima men-
sura sit α . sit porro alia ueluti γ , ipsa quoque metiēs tres
illas magnitudines, dico γ metiri α . Demonstrationē au-
tem requires ab illis uerbis. Cumq; γ metiatur α, β, γ
etiā metietur α, β usque ad ea uerba, Maior uidelicet:
Hac demonstratio quia uarias partes habet, singula ue-
rò pluribus syllogismis cōtinētur: singillatim omnes re-
soluemus. Primò si α communis maxima mensurā am-
barum

harum α, β metiatur γ per se, clarum est magnitudinem α esse communem mensuram magnitudinum α, β, γ . Quod uero eadem α sit earumdem communis mensura maxima, hinc liquet per deductionem ad illud impossibile, Maiorem magnitudinem metiri eam quae se ipsa minor est. Nam si negas α esse maximam mensuram, sit quaevis maior quam α , uidelicet ϵ metiens illas α, β, γ . Ex hoc sequitur ϵ metiri ipsam α , quod falsum est. Et impossibile, cum maior non metiatur minorem.

Omnis magnitudo metiens α, β , metitur α maximam α, β , mensuram. Sed ϵ metitur α, β : ergo ϵ metitur α . Maior patet, quia collecta ex corollario superioris problematis. Minor patet ex tua positione. quam tamen falsam esse constas, quia causa est falsitatis illius ex ea consequentis. Verum est itaque α esse communem et maximam trium mensuram, si modo α metitur γ . Sin autem α non metiatur γ , illud imprimis uerum esse dico (quod ueluti lemma quoddam demonstrandum est antequam eatul ulterius) magnitudines γ, α esse cōmensurabiles. Omnes magnitudines quas eadē mēsurā metitur, uidelicet θ , sunt cōmensurabiles. Sed γ, α sunt magnitudines quas eadē mēsurā metitur, uidelicet θ . ergo γ, α sunt cōmensurabiles. Maior patet ex definitione. Minor patet ex eo, quia α, β, γ , posita sunt cōmensurabiles per cōmunē mēsurā, uidelicet θ . sic itaq; probabitur: Omnis magnitudo metiēs tres α, β, γ , metitur duas priores, et maximā mēsuram duarū priorū nempe α , per corollarium precedentis theorematis. Sed θ metitur tres α, β, γ . ergo θ metitur α . Quod autē θ metiatur γ , patet ex positione. Cū

EVCLIDES ELEMENTOR.

igitur & metiatur utraq; γ, δ , sequitur ex definitione ambas γ, δ esse cōmēsurabiles. Sit maxima cōmunis mēsurā ipsarū γ, δ , quā uocetur. Dico primo ipsam esse cōmunem mēsurā trium α, β, γ sic probari. Omnis magnitudo metiens δ , metitur α, β , mensuratas à δ . Sed & metitur δ , ergo & metitur α, β . Maior patet ex principio. Minor uerò ex suppositione quā nō posuitur est ipsam esse maximam communem mēsurā duarum γ, δ , ex eadem etiam suppositione & metiebatur γ . Ergo & metitur α, β, γ , estq; earum communis mēsurā. Dico præterea eandem esse communem maximam mēsurā earūdem trium. sin minus, esto magnitudo quādā maior quā & metiēs illas, sitq; ϵ . Ex hac positione sequi uidebis illud idem impossibile, maiorem ϵ metiri minorem. Omnis magnitudo metiens γ, δ , metitur & communem maximam utriusque mēsurā. Sed ϵ metitur γ, δ , ergo ϵ metitur &. Maior patet ex corollario superiori. Minor uerò ita probatur. Primo quod ϵ metitur γ , patet ex suppositione, quia positū est eam metiri singulas α, β, γ . Quod uerò eadem ϵ metiatur δ probatur. Omnis magnitudo metiens α, β , metitur & a communem utriusque maximam mēsurā. Sed ϵ metitur α, β , ergo ϵ metitur δ . Maior patet ex corollario. Minor uerò à te posita est, quā cum sit unica causa illius falsæ conclusionis, necesse est ipsam quoq; falsam esse. Nulla ergo alia magnitudo quā & erit communis illarum trium maxima mēsurā. Hoc autem problema potes redigere in formam theorematism hoc modo. Si maxima mēsurā duarum primarum ex tribus commensurabilibus magnitudinibus

itudinibus metitur tertiam, illa est communis maxima mensura trium. sin minus, maxima mensura tertia & maxima mensura duarum primarum est cōmunis maxima mensura trium.

Quintum Theorema.

Cōmēsurabiles magnitudines inter se proportionē eam habent, quā habet numerus ad numerū.

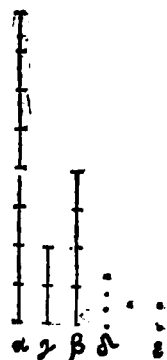
Magnitudines dicuntur inter se proportionem habere, quā habet numerus ad numerum, quādo quæ proportio est inter illas magnitudines, ea reperitur inter aliquos numeros, ut puta si magnitudo magnitudini sit, uel equalis, ut numerus 2 numero 2: uel dupla, ut numerus 4 ad 2: uel tripla, ut 6 ad 2: uel in alia quavis multiplici proportionē. Idem de superparticulari, si magnitudo sit sesquialtera ad magnitudinem, ut numerus 3 ad numerum 2. Idem de aliis speciebus superparticularis proportionis. Idem de superpartienti, de multiplici superparticulari, & de multiplici superpartienti, quæ sunt omnia proportionum genera, quæ in numeris reperiuntur. Sint magnitudines cōmēsurabiles α , β . Dico ipsas habere proportionem inter se, quā numerus aliquis ad aliquem aliū numerum. Nam cū sint cōmēsurabiles α , β , sit γ cōmunis earū mēsurā, & quoties γ metitur α , (id est quot partes reperiuntur in α æquales ipsi γ) tot sint unitates in numero α . quoties uerò eadem γ meti-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

tur β , tot sint unitates in numero ι .

Sequitur demonstratio. Cum itaque
 γ metiatur α toties quot sunt unita-
 tes in α numero, ipsa quoque unitas metia-
 tur numerum α toties quot sunt in ipso
 α unitates. totidem ergo vicibus γ me-
 titur α , quot vicibus unitas metitur nu-
 merum α . Ergo γ eandem proportio-
 nem habebit ad α , quam unitas ad nu-



merum α . per conuersam etiam proportionalitatem e-
 rit ut α ad γ : sic numerus α ad unitatem. Rursum cum
 γ metiatur ϵ toties quot sunt unitates in numero ι : me-
 tiaturque unitas numerum ι toties, quot sunt in eo uni-
 tates. tot vicibus itaque γ metietur β , quot vicibus u-
 nitas metitur numerum ι . Ergo per equam proportio-
 nalitatem (hanc uero uocat Euclides $\delta\iota\tau\epsilon\lambda\omicron\gamma\sigma\iota$) quam
 proportionem habet magnitudo α ad magnitudinem ϵ ,
 eandem habet numerus α ad numerum ι . Itaque com-
 mensurabiles magnitudines, puta α , β , inter se propor-
 tionem eam habent, quam numerus α ad numerum ι .
 quod demonstrandum erat.

Resolutio.

Omnia extrema duorum ordinum continentium equalē
 numerum magnitudinum coniugarum in eadē pro-
 portione, sunt & ipsa in eadem proportione. Sed α , β ,
 & α , ι sunt extrema duorum ordinum, & c. Ergo α , β ,
 & α , ι sunt in eadem proportione. Maior patet ex
 22.5. Minoris pars prior scilicet α , ϵ & α , ι esse extre-
 ma duorum ordinum equalē numerum continentium
 magnitu-

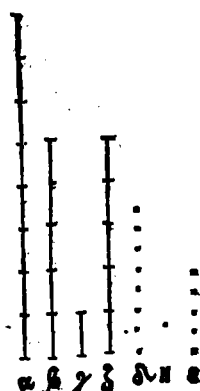
magnitudinum patet ex suppositionibus admissis in cōstructione. Quod uerò magnitudines contentæ in illis ordinibus sint in eadem proportionē coniugata, id est singula paria prioris ordinis cum singulis paribus alterius sint proportionalia, probatur ita. Primò quòd γ , & habeant eandem inter se proportionem quam unitas & numerus α . Omnis magnitudo metiens & tot uicibus, quot uicibus unitas metitur α , habet ad & eandem proportionem, quam unitas ad numerum α . Sed γ tot uicibus metitur & quot uicibus unitas metitur α . Ergo γ habet ad & eandem proportionem, quam unitas ad numerum α . Maior per se patet contracta ex definitione proportionalium, quæ est in principiis lib. 5. de quibus doctissime differentem lege Petrum Nonium Lusitanū. Minor uerò concessa est per suppositionem. Quod uerò α , & habeant eam proportionem quam numerus α ad unitatem, probatur eodem modo. Omnis magnitudo quam metitur γ tot uicibus quot unitas metitur numerum α , habet ad γ eandem proportionem quam numerus α ad unitatem. Sed α est magnitudo quam metitur γ tot uicibus, &c. Ergo α habet ad γ eandem proportionem quam α ad unitatem. Maior probatur eodem modo quo superior. Minor item patet ex suppositione. Ut uerò reperiatis numeros duos, quorum proportionem habeant inter se duæ magnitudines commensurabiles, uide quot uicibus mensura earum communis unamquæque metiatur. Numeri enim uicibus illis expressi retinent eam proportionem, quam magnitudines commensurabiles.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Sextum Theorema.

Si duæ magnitudines proportionem eam habent inter se quam numerus ad numerum, commensurabiles sunt illæ magnitudines.

Duæ enim magnitudines α , β , inter se habeant eam proportionem, quam numerus λ ad numerum ι . Dico cõmensurabiles esse magnitudines α , β . Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales quot sunt unitates in numero λ (hoc uerò idem est ac si uelis quamcunque partem auferre de magnitudine α , quod quomodo fiat, docet 9.6.) sitque ma-



gnitudo γ æqualis uni ex illis partibus æqualibus ipsius α . sit etiam alia magnitudo ζ composita ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi γ , quot unitates sunt in numero ι . Hic incipit demonstratio. Cùm igitur tot magnitudines æquales ipsi γ sint in magnitudine α , quot sunt unitates in λ , quota pars ipsius λ est unitas, eadem pars erit magnitudo γ magnitudinis α . Est ergo ut γ ad α , ita unitas ad λ . metitur uerò unitas numerum λ . ergo ϵ γ metietur α . Et quia est ut γ ad α , sic unitas ad numerum λ . conuersa igitur proportionem erit ut α ad γ , sic numerus λ ad unitatem. Rursum quia quot sunt unitates in numero ι , tot sunt in magnitudine ζ magnitudines siue partes æquales ipsi γ . Erit itaque ut γ ad ζ , sic unitas ad ι . Nuper uerò conclusum est sicut α ad γ , ita numerus

numerus α ad unitatem. Per equam igitur proportionem erit ut α ad ζ , sic α ad ι . Sed sicut α ad ι , ita se habet α ad β . Itaque etiam ut α ad β , similiter se habebit α ad ζ . Ipsa igitur magnitudo α ad utranque β , ζ , eandem proportionem retinebit. Aequalis est igitur magnitudo β magnitudini ζ per secundam partem 9. 5. Sed γ metitur ζ , ergo metitur β . Sed ϵ eadem γ metitur α , igitur γ metitur α , β . commensurabiles igitur sunt magnitudines α , β . Si ergo duae magnitudines ϵ & c . quod demonstrandum fuit.

Resolutio.

Omnes magnitudines quas eadem mensura metitur, sunt commensurabiles. Sed magnitudines α , β , habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, metitur eadē mensura, puta γ . Ergo magnitudines α , β , habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt commensurabiles. Maior patet ex definitione commensurabilium magnitudinum. Minoris uero pars illa quod γ metiatur β , ita probanda est. Magnitudo ζ est magnitudo β , quia aequales. γ metitur ζ , ergo γ metitur β . Minor patet ex concessione supposita inter construendum, illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ . Maior sic probatur. Omnes magnitudines ad quas eadem magnitudo, puta α eandem proportionem habet, sunt aequales. Sed ζ , β sunt huiusmodi. ergo ζ β sunt aequales. Maior patet ex secunda parte nonae quinti. Minor uero ita probetur. Omnes proportionēs aequales eidem proportioni, puta ei quae est inter α , ι numeros, sunt inter se aequales. Sed proportionēs inter α , ζ & α , β sunt aequales eidē proportioni, puta quae est

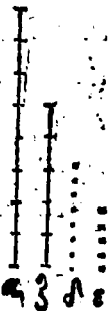
EVCLIDIS ELEMENTOR.

inter α, ι . Ergo proportiones inter α, ζ & α, β sunt inter se æquales. Maior patet ex undecima quinti. Minoris pars illa, quod proportio inter α, β sit æqualis ei quæ est inter α, ι numeros, patet ex suppositione. Quod uerò α, ζ eandem habeant proportionem quam α, ι , probetur sic. Omnia extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum coniugarum in eadem proportionem, sunt & ipsa in una & eadẽ proportionem. Sed α, ζ , & α, ι sunt extrema duorum ordinum, &c. Ergo α, ζ & α, ι sunt in una & eadem proportionem. Maior patet ex 22.5. Minoris uerò pars prior scilicet α, ζ & α, ι esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum, patet ex suppositionibus admissis in construendo. Nam primus ordo est α, γ, ζ . Secundus uerò est α, ι, ι . enim est loco unitatis. Quod uerò magnitudines in his ordinibus cõtente sint in eadem proportionem cõiugate, probetur. Et primo loco α, γ habere inter se eandem proportionem quam α ad unitatem ι , patet ex suppositione admissa inter cõstruendũ illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales, &c. Quauis ea pars syllogismo quoque demonstrari possit. Omnes quatuor magnitudines inter se proportionales, sunt quoque conuersa proportionem proportionales. Sed γ, α, ι unitas & α sunt magnitudines proportionales. Ergo γ, α, ι & α sunt conuersa proportionem proportionales. Maior patet per corollariũ quarti theorematidis libri quinti. Minor uerò patere potest ex suppositione, illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur. Secundum erat in illa minore γ, ζ habere eandem proportionem

portionem quam unitas ϵ ϵ . quod quidem etiā patet ex suppositione inter construēdum admissa illis uerbis. Sit etiam alia magnitudo ζ . Quantum ad alteram partem minoris assumptæ in primo syllogismo, nempe γ metiri magnitudinem α , ea quoque patet ex illa suppositione, Nam magnitudo α diuidatur, ϵ c. Nihilominus potest ϵ ipsa syllogismo demonstrari: sed quia est ex suppositione nota, nihil est opus syllogismo.

Corollarium.

Ex hoc fit manifestū, si fuerint duo numeri ut α , β , ϵ rectæ linea ut α , dari posse aliam lineam ad quam linea α retineat eandem proportionem quā numerus α ad numerum ϵ . Diuidatur linea α in tot partes æquales quot sunt unitates in altero numero α per nonam sexti, ϵ cōponatur altera linea, puta ζ ex tot partibus, quæ sint æquales partibus lineæ α , quot sunt unitates in altero numero ϵ , itaque linea α erit ad lineā ζ sicut numerus α ad numerū ϵ . Hac ratione potes cuicunque lineæ propositæ, aliā dare commensurabilem in longitudine. Nam si duæ lineæ habent proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt inter se quoque longitudine commensurabiles, per hoc theorema 6. Quod uerò sequitur in exemplari graeco, continet, subobscurè tamen lemma quoddam, ipsum etiam alieno loco positū. inuenitur enim inter alia lemmata post 29 theorema huius libri, uerbis conceptis in formam problematis.

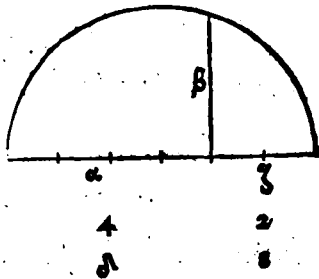


EVCLIDIS ELEMENTOR.

Lemma.

Duobus numeris datis, & linea recta, oportere efficere ut numerum ad numerum: sic quadratum lineæ datæ ad quadratum alterius.

Sint dati numeri α, ϵ : recta uero sit α : propositumque sit efficere id quod præcipitur hoc problemate. reperiatur igitur per postremum corollarium linea ζ ad quam linea α sit in ea proportione in qua numerus α ad numerum ϵ : sumaturq; inter duas illas lineas α, ζ media proportionalis per tertiam decimam sexti, sitque β . Cum igitur sit sicut numerus α ad numerum ϵ , ita linea α ad lineam ζ . & quemadmodum se habet linea α ad lineam ζ , ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β , per secundum corollarium uicesime sexti. Itaque sicut numerus α ad numerum ϵ , ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β .

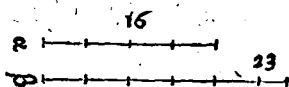


Septimum Theorema.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Magnitudinum non habentium proportionem inter se quam numerus ad numerum, nullum exemplum efferre possumus in numeris, sicut fecimus in 5 huius. nam impossibile est numerum ad numerum non habere proportionem quam numerus ad numerum. Sint magnitudines incommensurabiles α, β . Dico α, β nullam omnino proportionem

proportionem inter se talē habere, qualis inter ullos numeros reperitur. Quod si contra-

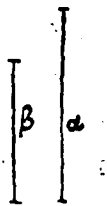


dicatur α, β habere proportionem inter se quam numerus ad numerum: sequitur illud continuo, commensurabiles quoque esse α, β per sextum theorema huius libri. Sed hoc theorema ponit illas esse incommensurabiles. Nullo igitur modo α habebit proportionem ad β , quam numerus ad numerum, quod demonstrandum fuit. Hic modus argumentationis & certissimus est, & breuissimus: sumiturque ex syllogismis hypotheticis, quem à destructione consequentis uocant. Illudque in uniuersum uerum esse deprehendes, quotiescunque in disciplinis mathematicis aut aliis quibuscunque, quæ nomine censentur scientiarum, reperiuntur duæ conclusiones ex earum numero, quas conuersas uocant, quales sunt quintum & sextum theorema huius libri: in his potentia contineri præterea alias duas conclusiones & ipsas conuersas, contrario tamen modo quàm superiores, quales sunt hoc theorema & proximum.

Octauum Theorema.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.

Duæ enim magnitudines α, β , inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum. Dico incommensurabiles esse magnitu-

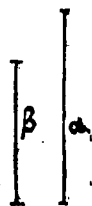


G



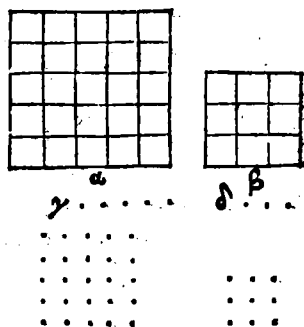
EVCLIDIS ELEMENTOR.

dines α, β . Quòd si contradicas, uidelicet cō-
mensurabiles esse, habent statim proportio-
nem quam numerus ad numerum, per quin-
tum theorema huius. sed hoc theorema sup-
ponit eas non habere. incommensurabiles er-
go sunt magnitudines α, β . Si igitur dua ma-
gnitudines, &c. quod demonstrandum fuit.



Nonum Theorema.

Quadrata quæ describun-
tur à rectis lineis longitu-
dine commēsurabilibus,
inter se proportionē ha-
bent, quā numerus qua-
dratus ad alium numerū
quadratum. Et quadrata
habentia proportionem
inter se quam quadratus
numerus ad numerum



quadratum, habebunt quoque latera longitū-
dine commensurabilia. Quadrata verò quæ descri-
buntur à lineis longitudine incommensurabili-
bus, proportionem non habent inter se quā qua-
dratus numerus ad numerum alium quadratū.
Et quadrata non habentia proportionem inter
se quam numerus quadratus ad numerum qua-
dratum, neque latera habebunt longitudine cō-
mensurabilia.

*Quia difficile uidetur hoc theorema, dignum quoque ir-
sum*

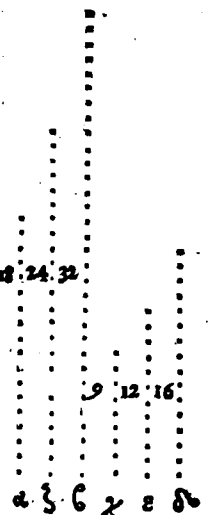
sum est, quod pluribus modis demonstraretur. Nos uerò antequam ad demonstrandum accedamus, nonnulla præfabimur de significatione uocum siue terminorum huius theorematum, quæ rem totam illustrabūt. Hoc sane theorema & quæ proxime sequuntur, huiusmodi sunt, ut nisi plane percipiantur, res alioqui non difficillima inexplicabiles uideri possint. Imprimis illud intelligendum est, lineas esse longitudine commensurabiles, & lineas habere proportionem inter se quam numerus ad numerum, idem esse. Vt quacunque linea sunt longitudine commensurabiles, habeant etiam proportionem inter se quam numerus ad numerum. & contrà, quæ lineæ habent proportionem inter se quam numerus ad numerum, sint quoque longitudine commensurabiles, ut patet ex 5. & 6. huius libri. Similiter illud conuertitur, lineas esse longitudine incommensurabiles, & non habere proportionem quam numerus ad numerum, ut patet per 7 & 8 huius. Itaque intelligi debet quod dicitur in hoc theoremate, de lineis longitudine commensurabilibus, & longitudine incommensurabilibus. Sed dicat aliquis, priusquàm Euclides docuit modum reperiendi lineas longitudine incommensurabiles, tractat de quadratis ipsarum, cum tamen contrà fieri oportere uideri possit. prius enim exquiri debet de re aliqua an sit, quàm quid ei accidat, consideretur. Nos uerò dicimus Euclidem quidem tradere modum reperiendi lineas longitudine incommensurabiles in theoremate 11. quod est in Græco 10. neque tamen peruerse quicquam fecisse. Nam hoc theoremate sumit has

EVCLIDIS ELEMENTOR.

*lineas longitudine incommensurabiles ex hypothesi, neque amplius quicquam sibi demonstrandum hoc quidem loco assumit, quàm ex illa hypothesi scilicet linearum longitudine incommensurabilium quadrata non habere proportionem, & cetera. Quod ubi uerum esse demonstrauerit, sat fecisse uidebitur. Ex hoc autem theoremate gradum sibi faciet ad inuestigationem linearum illarum in theoremate undecimo. Illud præterea intelligendum est quid uocibus illis significetur, habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod ut assequi possis, repetenda tibi sunt nonnulla theoremata, eorumque demonstrationes ex arithmeticeis suprascriptis: atque ea maxime quæ agunt de numeris similibus superficialibus ex quibus est uicesimumsextum octauum. Numeri similes plani inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Similes uerò plani numeri sunt (ut est in principijs libri septimi) qui habent latera proportionalia. Latera uerò cuiusque numeri sunt, ex quibus inter se multiplicatis, singuli numeri producuntur. ex illo theoremate 26 octauum constat non solos numeros quadratos habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratum, sed eandem etiam proportionem habere numeros omnes similes superficiales inter se. Neque uerò idem est numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque hæc inter se conuerti possunt. Quæuis enim numeri quadrati habeant proportionem quæ
numerus*

numerus quadratus ad quadratum, non ideo tamē omnes habentes proportionē quam quadratus ad quadratum sunt quadrati. Sunt enim similes superficiales & idem non quadrati, qui tamen proportionē habent quam quadratus ad quadratum, quanvis omnes quadrati sint similes superficiales. nam inter duos numeros quadratos incidit unus medius proportionalis, per. 11. 8. Si uerò inter duos numeros incidat unus medius proportionalis, illi duo numeri sunt similes superficiales per 20. 8. Dico præterea illud theorema 26. 8. conuerſi. Duo numeri habentes inter ſe proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum sunt similes superficiales: cuius rei illa demōſtratio afferri poteſt.

Sint duo numeri α, β habentes proportionem inter ſe quam quadratus ad quadratum. Illi duo numeri aut ambo ſimul ſunt quadrati, aut ambo ſimul ſunt nō quadrati. (de illis autē non intelligimus hīc quicquam dicere, quorum alter eſt quadratus, alter uerò non quadratus. tales enim non poſſunt habere proportionem quā numerus quadratus ad numerum quadratum, per 24. 8. à deſtructione conſequentis.) Ergo ſi ambo ſunt quadrati, ſunt etiam ſimiles superficiales, ut modo concluſum eſt. Si non ſint quadrati, ſint illi duo quadrati γ, δ , quorum proportionem habeant α, β . quia ergo α, β habent proportionem inter



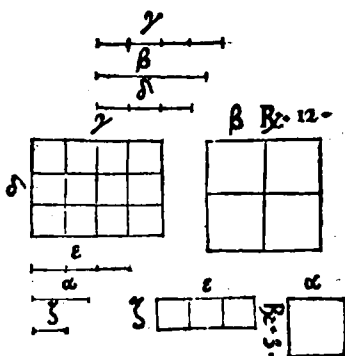
EVCLIDIS ELEMENTOR.

se quā γ , α , & inter γ , α incidit unus
medius proportionalis puta ϵ , per 11.
8. Ergo inter α , β incidet unus medius
proportionalis, puta ζ per 8.8. Sed si
inter duos numeros nempe α , ϵ unus
medius incidat proportionalis, illi duo
numeri sunt similes superficiales, per
20.8. Ergo numeri α , β sunt similes su-
perficiales. Duo ergo numeri habētes
proportionē quā quadratus ad qua-
dratum, sunt similes superficiales. Ex
his intelligi potest numeros habentes
proportionem inter se quam quadra-
tus ad quadratum esse aut quadra-
tos, aut similes planos id est superficiales. Similes uerò su-
perficiales qui sint, intelligitur quidem ex definitione.
sed quibus notis statim agnosci possint numeri propo-
si- ti, an similes superficiales sint nec ne, sic habetote. Pri-
mum si inter duos numeros propositos non incidit me-
dius proportionalis, illi duo numeri non sunt similes su-
perficiales per 18.8. à destructione consequentis. Quòd
si incidit medius proportionalis, sunt illi similes superfi-
ciales per 20.8. Deinde duo numeri similes superficiales
multiplicatione alterius in alterum facta, producunt
numerum quadratum, per primam 9. Ergo si non pro-
ducunt quadratū, non sunt similes superficiales. Quòd
si fecerint quadratū ex multiplicatione sui ipsius, sunt
illi similes superficiales per 2.9. Quo uerò facilius ap-
prehendantur consequentes demonstrationes, & simul
exemplum

exemplum adducamus eorum quæ diximus. Sit linea

γ longa pedes quatuor. sit
 & alia linea α longa &
 ipsa pedes tres, reperia-
 turque media propor-
 tionalis per 13. 6. quæ media
 proportionalis sit linea ϵ .

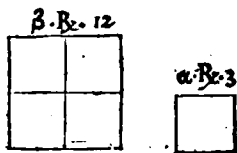
Ergo quadratum linea β
 erit æquale parallelogra-
 mo rectangulo quod fit
 ex lineis γ , α , per 17. 6.



Quod quadratum continebit pedes 12, sicut & pa-
 rallelogrammum ex lineis γ , α . Sit etiam linea ι lon-
 ga pedes 3, & linea ζ longa pedem 1, media propor-
 tionalis inter lineas ι , ζ sit α . Quadratum linea α , erit
 pedum trium, sicut & parallelogrammum ex lineis
 ι , ζ . Dico quadratum linea β quod est 12. pedum, ha-
 bere proportionem ad quadratum linea α , quod est pe-
 dum triū, quā numerus quadratus ad numerū qua-
 dratū. Nam quemadmodū se habet numerus 12. ad nu-
 merum 3, ita se habet quadratū linea β , quod est 12 pe-
 dum, ad quadratū linea α quod est 3. Sed numeri 12 &
 3 sunt similes superficiales, quia latera numeri 12 quæ
 sunt 2 & 6, sunt proportionalia lateribus numeri 3,
 quæ sunt 1. & 3. Ergo quadratum linea β quod est 12,
 habebit eam proportionem ad quadratū linea α , quod
 est 3, quam habet numerus similis superficialis ad simile
 superficiale. Sed numeri similes superficiales habent
 proportionē inter se quam numerus quadratus ad nu-

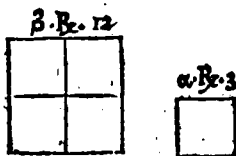
EVCLIDIS ELEMENTOR.

merum quadratum qui sunt 4 & 1, per 26. octavi. Ergo quadratū lineæ ϵ quod est duodecim, habebit proportionem ad quadratum lineæ α quod est 3, quam numerus quadratus ad quadratum, eam scilicet quam quaternarius ad unitatem



quæ est quadrupla proportio. Nam quadratum maius quod est duodecim, continet quater quadratum minus quod est 3, quia latus quadrati duodecim quod est linea β , est duplū ad latus quadrati 3 quod est linea α . Habet ergo linea β ad lineā α proportionē quā numerus ad numerum. Ergo sunt longitudine commensurabiles per 5. huius, quæ est hypothesis necessaria ad conclusionē eius passionis siue predicati hoc theoremate comprehensi, nempe quadrata talium linearum habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sic & numerus denominās maiorem extremitatem proportionis lineæ ϵ ad lineā α , qui est 2. si in se ducatur reddet quadratum numerum nempe 4. similiter & numerus denominans minorem extremitatē nempe 1. si ducatur in se, nihil amplius efficit quā 1. quæ unitas est etiam potentia quadratus numerus. Ergo quadratum lineæ β ad quadratum lineæ α habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, nempe quā 4. ad 1. Ex hoc uidet (quod modò dicebamus) non idem significare numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratū. Nam nu-
meros

meros 12 & 3 quadratos nō
esse constat, cum tamē qua-
drata eos numeros continen-
tia illam proportionem ha-
beāt. Sed & latus quadra-



ti 12, quanuis numero per se exprimi nequeat, ut dicas
latus illud est longū tot pedibus, qui pedes quadrati nu-
mero 12 complent totum illud quadratum: tamen ad
aliud relatum siue comparatum, nempe ad latus qua-
drati 3, quod nec ipsum per se numero possis exprimere,
ad latus inquam quadrati 3, proportionem duplam ha-
bet. Nam quadratum quadruplum ad aliud quadra-
tum (ut quadratum lineæ β quod est 12, ad quadratum
lineæ α quod est 3) habet latus suum duplum ad latus
alterius quadrati, per illud uniuersale corollarium 20.
6. Similes figuræ habent proportionem inter se suorum
laterum relatiuorum duplicatam. Quod si dicas latus
quadrati 12 numerari posse, quia eius proportio quam
habet ad latus quadrati 3 numeratur per binarium, cū
sit proportio dupla: illud primū fac cogites, non esse id
quod dicitur per se numerari aliquam magnitudinē,
sed illius proportionem. Magnitudo autem illa scilicet
latus quadrati 12 per se numeraretur, quādo nulla ha-
bita ratione proportionis ipsius ad aliud, dicere posse-
mus, Quadrati continētis pedes quadratos 12, latus est
longum tot pedibus, quorum numerus in se ductus effi-
ceret numerum illum 12. sed hoc fieri non potest, quia 12
non est numerus quadratus. Sic itaq; dices. Quatenus
quadratum illud 12 per se consideratur, nulla habita

H

EVCLIDIS ELEMENTOR.

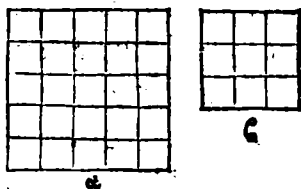
ratione proportionis ad aliud, sed tantum ut est 12 pedum, non habet quidem latus per se numerabile, sed si conferatur ad aliud, puta ad quadratum 3 pedum, tunc dices, latus quadrati 12 est 2. latus uero quadrati 3 est 1. sed hac est denominatio ipsius proportionis quae dupla dicitur. quae proportio non potest esse aut considerari in paucioribus terminis quam duobus, cum sit relatio ad aliud, hoc est in praedicamento ad aliquid. Itaque binarius non est numerus pedum talium quales 12 sunt in ipso quadrato. Deinde si binarius esset latus quadrati 12, ut dicas illud latus esse duo, ex multiplicatione duorum in se, non efficeretur illud quadratum 12, sed quadratum aliud quod esset 4 pedum, quemadmodum ex binario numero in se ducto fit quadratus numerus quaternarius. Sed nec si dicas illud latus quadrati 12 numerari alio ullo numero, duxerisq; numerum illum in seipsum, unquam efficitur duodenarius numerus. Cum tamen omnes numeri denominantes latus cuiuscunque quadrati multiplicatione sui ipsius, illum ipsum numerum efficiant denominantem quadratum, cuius latera denominant, puta 2, multiplicatione sui in seipsum reddit 4. ternarius reddit 9. quaternarius reddit 16. & similiter ceteri omnes. Non igitur idem est aliquas magnitudines habere inter se proportionem quam numerus ad numerum, & numerari per se singulas ex illis nulla ratione habita proportionis, ut hic latus quadrati 12 per se quidem numerari nullo modo potest sed comparatum ad aliam magnitudinem, puta ad latus quadrati 3, numeratur illius proportio. Sic & latus ipsius quadrati

quadrati 3 & ceterarum omnium figurarum quas geometra quadratas uocant, quarum area tamen per numeros quadratos non designantur. Quod uero dicimus, manifestum est ex uerbis ipsius Euclidis in theorematibus 5, 6, 7, & 8 huius libri, cum ubique dicat commensurabiles & incommensurabiles magnitudines non quidem per se numerari, sed habere aut non habere proportionem quam numerus ad numerum. Quae res non bene animaduersa uidetur plerisque causam erroris attulisse, ut ex sequentibus planum fiet. Nunc uero qui aggressi sunt demonstrationem huius theorematibus magis particularem aliquam demonstrationem nonnullis uideri possent attulisse, quam uniuersalem. Et sane non deesse arbitror qui illorum dicta secus intelligant, cum existiment ab eis suppositas esse lineas quasdam non tam longitudine commensurabiles, quales in theoremate supponuntur esse, quam numero certo singillatim numerabiles. Itaque non intelligentes, illud de demonstrationibus illorum dicere potuerunt: cum ea ratione credidissent à se conclusum illud uniuersale quod est in hoc theoremate Euclidis, Quadrata descripta ex lineis longitudine commensurabilibus habere proportionem inter se, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: illud particulare tantum concluderunt, Quadrata descripta ex lineis numero certo per se numerabilibus habere proportionem &c. Quod tamen aliter est, & demonstrationes illorum recta sunt, & proposito theoremati conuenientes. Tantum pictura figurarum quas graecus codex habet, posset ambi-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

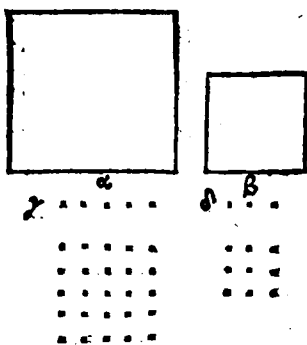
gnitatis aliquid afferre. Nam ita pinguntur quadrata, & describuntur certis areolis, ut earum numerus quadrato numero denominetur.

Ex quo uideri posset lineas α , β , quæ describunt ipsa quadrata, oportere esse numero aliquo per se numerabiles, ut



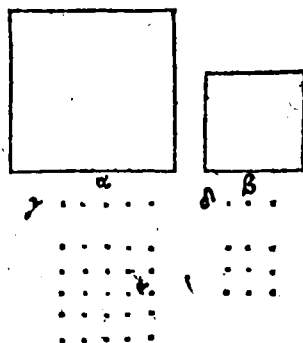
linea α sit pedum 5, & linea β pedum 3, ueluti pictura ipsa refert hic. Quod tamen non supponit Euclides, sed unum illud supponit & requirit eas esse longitudine commensurabiles, ut in superiori exemplo de quadratis duobus, quorum alterum spatium totum est 12, alterum uero est 3. Nam quanuis latera ipsorum non sint numero aliquo certo per se numerabilia, sunt tamen ipsa eadem longitudine commensurabilia. Præterea hæc pictura quadratorum α , β per areolas distinctorum illum errorem efficere posset, ut quis existimet idem esse numeros duos quadratos esse, & habere proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nam numerus areolarum in quadrato α , est numerus quadratus, nempe 25 productus ex radice 5, quæ est longitudo ipsius lineæ α . Similiter numerus areolarum quadrati β est quadratus, nempe 9, & ipse productus ex suo latere 3, longitudine in qua ipsius lineæ β . Nos uero nuper ostendimus aliud esse numeros quadratos dici, & habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaque quantum ad illas areolas attinet contentas maiore quadrato lineæ α , quæ sunt numero 25, exprimunt numerum illum quadratum 25, qui effici-

tur ex numero 5 in se ducto. qui numerus 5 est maior extremitas proportionis inter 5 & 3, quæ est proportio linearum α, β . Hac autem proportio, nempe numeri 5 ad 3 facit ut linea ipsa α, β sint inter se longitudine commensurabiles per 6 huius. Idem dices de minoris quadrati areolis. Neque necesse est intelligere illas areolas quadratas esse aut pedes aut passus quadratos conficiētes ipsa quadrata, quanuis tales esse possunt, si modò latera ipsorum quadratorum sint tot pedibus longa, nempe 5 aut 3. Omnino tamen necesse est numeros ambos exprimentes numerum pedum aut passuum quadratorum ipsis quadratis comprehensorum esse simul aut quadratos, ut in his figuris quadratis linearum α, β : aut ambos esse similes superficiales, ut in superioribus quadratis quæ erant 12, et 3, de quibus numeris constat ex antedictis eos esse similes superficiales, itaq; habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaq; potes pingenda tibi proponere ipsa quadrata linearum α, β , ut nullam distinctionem areolarum in se recipiāt, sintq; quadrata singula plane uacua, solisque quatuor lineis æqualibus cōrēta. quod ut intelligatur, demonstrationes ipsas explicabimus. Sint duæ lineæ α, β longitudine commensurabiles. Dico quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β habere proportionem quæ quadratus numerus ad quadra-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

tum numerum. Cum enim
commensurabilis sit longitu-
dine linea α linea β . Ergo α
ad β habet proportionē quā
numerus ad numerum, per
5. huius. habeat itaque pro-
portionem quā numerus γ
ad λ . Cū igitur sit quem-
admodum linea α ad ϵ , ita γ

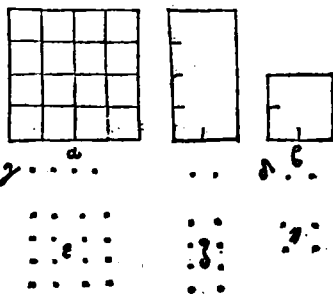


numerus ad λ numerum: cumq; proportio quadrati
quidem linea α ad quadratum linea β sit proportio cō-
tinens duplicatam proportionem linea α ad lineam ϵ ,
(similes enim figurae sunt in duplicata proportionē suo-
rum laterum relatiuorum, per primum corollarium 20.
6.) itidem cum proportio numeri quadrati, qui produ-
citur à radice γ , ad quadratum numerum productum
à radice λ sit proportio duplicata numeri γ , ad numerū
 λ per secundam partem 11. 8: cūque unius ϵ eiusdē
proportionis, puta quæ est linea α ad lineam β , uel nu-
meri γ ad numerum λ , proportionēs æque multiplices,
nempe quadrati linea α ad quadratum linea β , & nu-
meri quadrati producti à radice γ ad numerum qua-
dratum productum à radice λ , sint inter se æquales: est
igitur sicut quadratum linea α ad quadratum linea
 β , ita numerus quadratus productus à radice γ , ad nu-
merum quadratum productum à radice λ .

Aliter.

Sint α, β linea rectæ longitudine commensurabiles. Dico
quadratum descriptum ab α ad quadratum descriptū
ad

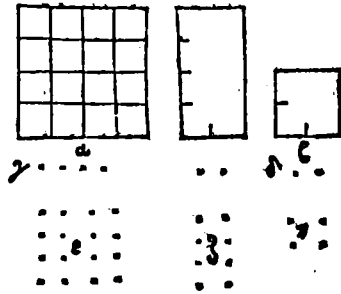
ad β habere proportionē
quā numerus quadra-
tus ad alium numerum
quadratum: Quia enim
linea α est longitudine cō
mensurabilis linea β , ha-
bent inter se proportionē
quam numerus ad nume-
rum, per quintū theore-



ma huius libri. Habeant itaque proportionem eam quā
numerus γ ad numerum α , & numerus γ se ipse multi-
plicans efficiat numerū ι , idem porro numerus γ multi-
plicans numerum α reddat numerum ζ , numerus uerò
 α ex sui ipsius multiplicatione producat numerum κ .
Cū igitur γ ex sui ipsius multiplicatione reddiderit nu-
merum ι , multiplicatus etiam per α effecerit numerum
 ζ ; est ergo ut numerus γ ad numerum α , id est linea α ad
lineam β , sic numerus ι ad numerum ζ per septimam-
decimam septimi. Sed quemadmodum se habet linea
 α ad lineam β , sic se habet quadratū lineæ α ad paral-
lelogrammum descriptum ex lineæ α in lineam β ducta
per primam sexti. Quemadmodum igitur quadratū
lineæ α ad parallelogrammum ex α, β , sic numerus ι ad
numerum ζ . Rursus quia numerus α ex sui ipsius mul-
tiplicatione reddidit numerum κ , multiplicatus uerò idē
 α in γ produxit numerum ζ : est igitur quemadmodum
 γ ad α hoc est quemadmodum linea α ad lineam β , sic
numerus ζ ad numerum κ per eandem septimam deci-
mam septimi. Sed quemadmodum linea α ad lineam β ,

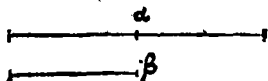
EVCLIDIS ELEMENTOR.

ita parallelogrammū ex li-
neis α, β , ad quadratū li-
neæ β per primā sexti. Est
igitur sicut parallelogrā-
mū ex lineis α, β ad qua-
dratum lineæ β , ita nu-
merus γ ad numerum α .



Sed modò cōclusum est
sicut se habebat quadra-
tum lineæ α ad parallelogrammum ex α, β , ita se habe-
re numerum γ ad numerum α . Per æquam igitur pro-
portionem erit quemadmodum quadratum lineæ α ad
quadratum lineæ β , sic numerus γ ad numerum α . Uter-
que uerò illorum numerorū est quadratus. Nam γ pro-
ductus est ex multiplicatione γ in seipsum: α uerò ex
multiplicatione α sui etiam ipsius in seipsum. Ergo qua-
dratum lineæ α ad quadratū lineæ β habet proportio-
nem quam numerus quadratus ad quadratum nume-
rum. quod primo loco demonstrandū erat. Priore de-
monstrationis modo usi sunt Theon & Campanus, po-
steriore etiam Theon aut quis alius. Ex his duabus no-
bis simplicior uidetur illa quam priore loco retulimus.
Vacua itaque pingi possunt quadrata quæ describun-
tur à lineis longitudine commensurabilibus, modò con-
stet tales esse suppositiones, quales accipiuntur in theo-
remate, lineas scilicet esse longitudine commensurabi-
les. tunc enim in uniuersum illud uerum erit, quotquot
pedes aut passus quadrati fuerint in illis figuris qua-
dratis, semper numerabuntur à numeris habentibus
proportionem

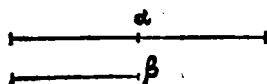
proportionem inter se quā quadratus numerus ad numerum. Sed quia perobscurus hic locus totus uideri solet, non alienum existimauimus nostram quoque demonstrationē apponere, si forte iuuare possimus, quod cupimus quidem, & certe confidimus. Sint lineæ duæ longitudine commensurabiles α , β . dico quadrata earū &c. Cum enim lineæ α , β sint longitudine commensurabiles, habebunt proportionem inter se quam numerus ad numerum per 5. huius. habeat igitur α ad ϵ



proportionē duplam, quæ est quam habet numerus ad numerū, puta 4 ad 2, & 6 ad 3, & plerique alij: reperianturque minimi numeri tres continuè proportionales in proportione dupla per 2. 8, sintq; illi 4, 2, 1. ergo per corollarium eiusdem 2. 8, numeri 4 & 1 erunt quadrati. Nam sicut 4 est quadratus ex 2 in se multiplicato productus, ita 1 est etiam numerus quadratus. fit enim ex eadem unitate in seipsam multiplicata. Dico præterea hos numeros quadratos illos esse, quorum proportionem habent inter se quadrata linearum α , β . Nam sicut numerus 4 ad numerum 2, ita se habet lineæ α , ad lineam β . Utrobiq; enim est dupla proportio per suppositionem. Sed quemadmodum se habet lineæ α ad lineam ϵ , ita se habet quadratum lineæ α ad parallelogrammum, quod fit ex ductu lineæ α in lineam β , per primam sexti. Ergo sicut se habet numerus 4 ad 2, ita se habebit quadratum lineæ α ad parallelogrammum productum ex α & β . Idem sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habet lineæ α ad li-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

neam β . utrobique enim etiã
est dupla proportio per sup
positionẽ. Sed quemadmo-



dum se habet linea α ad lineam β , ita se habebit paral-
lelogrammum productum ex α & β ad quadratum li-
neæ β per eandem primam sexti. Ergo sicut se habet nu-
merus 2 ad 1, ita se habebit parallelogrammum produ-
ctum ex α & β ad quadratum lineæ β . Ergo per defi-
nitionẽ æquæ proportionalitatis, & per 22.5 erit qua-
dratum lineæ α ad quadratum lineæ β , sicut numerus
4 ad 1, qui quadrati sunt. Illud ergo uerum est uniuersaliter, Quadrata descripta ex lineis longitudine com-
mẽsurabilibus, habere proportionẽ inter se quam qua-
dratus numerus ad quadratum numerum, quẽcunque
numerum areolarum siue spatiorum intra se capiant il-
la quadrata: semper tamen necesse erit numeros ab illis
contentos esse aut quadratos: aut si quadrati non erũt,
(neque enim semper necesse est tales esse) similes sal-
tem superficiales esse omnino necesse est. Porro secun-
da partis huius theorematidis quæ est conuersa prioris il-
la est demonstratio. Sit quadratũ lineæ α ad quadra-
tum lineæ β , sicut quadratus numerus productus à γ
ad quadratum productũ ex δ . Dico lineas α , β esse lon-
gitudine commensurabiles. Nam proportio quadrati α
ad quadratum β est duplicata proportio lineæ α ad li-
neam β , per 20.6. Similiter proportio numeri quadrati
producti ex γ ad quadratum productum ex δ est du-
plicata proportio ipsius numeri γ ad numerum δ , per
11.8. Igitur per 15.5, quemadmodum linea α ad lineam β ,
sic

sic numerus γ ad numerum α . Commensurabilis est ergo longitudine linea α linea β per 6 huius libri. Tertiam uerò partem theorematis demonstrare non est difficile per secundum syllogismum hypotheticum, quem à destructione consequentis uocant. Sit linea α incommensurabilis longitudine linea β : quadratū linea α ad quadratum linea β non habebit proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Nam si contradicatur, sequitur statim per secundam partem huius theorematis, illa quadrata habere latera longitudine commensurabilia, quod est contrarium his quæ supposita sunt. Sic enim essent linea α , β , & commensurabiles & incommensurabiles longitudine, quod est impossibile. Simili ratione postrema pars huius theorematis demonstratur. Nam si quadrata inter se proportionē non habent quam quadratus numerus ad quadratum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia. Si contradicatur, continuo sequitur per primam partem huius theorematis, illa quadrata habere proportionem inter se quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quod est contrarium suppositioni.

Corollarium.

Ex quibus ita demonstratis, manifestū illud est, lineas longitudine commensurabiles, omnino potentia quoque commensurabiles esse. Quæ uerò sunt potentia commensurabiles, non omnino longitudine quoque commensurabiles esse. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino potentia etiam incommensurabiles esse. Quæ uerò potentia incommensurabiles sunt, omnino

EVCLIDIS ELEMENTOR.

longitudine quoque incommensurabiles esse. Cum enim quadrata linearum longitudine commensurabiliū proportionem eam inter se habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ea uerò quæ proportionem habeant quadrati numeri ad quadratum numerum, simpliciter etiam habeāt proportionem quam numerus ad numerum. Et quæ proportionē habent quā numerus ad numerum, sint commensurabilia per 6 huius. Sequitur omnino lineas longitudine commensurabiles non tantū esse longitudine commensurabiles, sed etiā esse potentia. Huius probatio pendet ex prima parte theorematis. Rursus quia quadrata quadam sunt quæ non habēt proportionem eam inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, habētia tamē ipsa proportionem eam simpliciter quam numerus ad numerum, latera quidem eorum sunt potētia commensurabilia, quia describunt quadrata habētia proportionem quam numerus simpliciter ad numerum, itaque commensurabilia per 6 huius: latera uerò ipsa inter se sunt longitudine incommensurabilia, per postremam partem theorematis. Verum est igitur lineas potentia commensurabiles nō statim esse longitudine etiā commensurabiles. Hac eadē ratione probatur et illud tertium corollarij membrum, lineas longitudine incommensurabiles non statim etiam esse potentia incommensurabiles. Possunt enim esse longitudine quidem incommensurabiles, potentia tamen commensurabiles, ut in quadratis quæ habent quidem proportionem inter se quam numerus ad numerum, sed non quam numerus quadratus

quadratus ad numerum quadratum. Quartum uero probatur per secundum syllogismum hypotheticum à destructione consequentis, lineas potentia incommensurabiles, longitudine quoque incommensurabiles esse. Nam si dicas eas esse longitudine commensurabiles, sequitur esse ipsas quoque potentia cōmensurabiles, quod est contra suppositionem. Nam posita sunt incommensurabiles longitudine. Resolutio autē eius demonstrationis quam attulimus illa est. Omnia quadrata habentia proportionem inter se quam extremi trium numerorum minimorum suæ proportionis continuæ proportionalium, habēt proportionē quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sed quadrata duarū linearum longitudine commensurabilium sunt huiusmodi. Ergo quadrata duarum linearū longitudine commensurabilium habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Maior patet ex corollario 2.8. Minor patet ex 22.5.

Lemma.

Demonstratum est in arithmetice theoremate 26.8 similes planos numeros habere proportionem inter se quā numerus quadratus ad numerum quadratū. Conuersum uerò theorema numeros habentes proportionē inter se quam numerus quadratus ad numerū quadratum esse similes planos superficiales, non quidē demonstratur in libris arithmetice, sed est à nobis in præcedēti theoremate libri huius demonstratum. Vnde manifestum est numeros qui non sunt similes plani superficiales, id est non habētes latera inter se proportionalia, nō

EVCLIDIS ELEMENTOR.

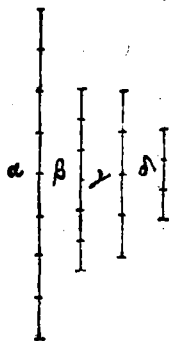
habere etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Eam enim proportionē si inter se haberent, sequeretur simul eos esse similes superficiales. cuius contrarium est positum, eos inquam non esse similes planos. Ergo numeri non similes superficiales non habent inter se proportionem eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Antequam attingamus theorema quod est decimo loco positum in hoc libro, illud omnino faciendum est, ut ei proponamus illud quod uulgo proximum locum tenet, scilicet undecimum. Aliter enim si fecerimus, demonstratio illius theorematum quod decimo loco scribi diximus, non procederet à priori, ut patebit in explicatione illius. Itaque Campanus fieri oportere recte indicauit, dum situm utriusque theorematum inuerteret.

Decimum Theorema.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, prima uerò secundæ fuerit commensurabilis, tertia quoque quartæ commensurabilis erit. Quòd si prima secundæ fuerit incommensurabilis, tertia quoque quartæ incommensurabilis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. ut α ad β , sic γ ad δ . Sitq; α commensurabilis magnitudini β , dico etiam γ esse commensurabilem magnitudini δ . Cum enim α sit commensurabilis β , Ergo α habebit proportio-



nem

nem ad β quam numerus ad numerum, per 5 huius.

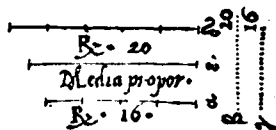
Sed ex suppositione est sicut α ad ϵ , sic γ ad λ . Ergo γ ad λ habebit etiam proportionem quam numerus ad numerum. Ergo commensurabilis erit magnitudo γ magnitudini λ per 6 huius. Rursus sit α incommensurabilis magnitudini β , dico etiam γ esse incommensurabilem λ . Cum enim α sit incommensurabile β , igitur α non habebit proportionem ad ϵ , quam numerus ad numerum per 7 huius. Est autem sicut α ad β , ita γ ad λ . Ergo neque γ ad λ proportionem habebit quam numerus ad numerum. Incommensurabilis est igitur γ magnitudini λ per 8 huius. Si itaque quatuor magnitudines & cetera. Corollarium.

Si fuerint quatuor lineæ proportionales, fuerintque duæ priores, aut duæ posteriores inter se cōmensurabiles potentia tantum, ceteræ quoque duæ erunt potentia tantum cōmensurabiles. hoc probatur per 22.6, & per hoc theorema 10. quo corollario utitur demonstrator in sequentibus theorematibus 28.29. & alijs.

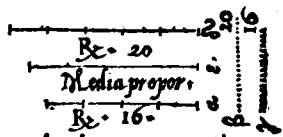
Vndecimum Theorema.

Propositæ lineæ rectæ (quam *ἐκτὼς* uocari diximus) reperire duas lineas rectas incommensurabiles, hanc quidē longitudine tantum, illam uerò non longitudine tantum, sed etiam potentia incommensurabilem.

Sit lineæ rectæ proposita α , repertiendæ sunt duæ lineæ incommensurabiles lineæ α , alia qui-

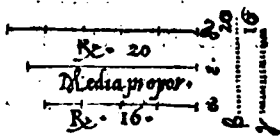


dem longitudine tantum, alia
 uerò etiam potentia incommen-
 surabilis. Afferantur numeri



duo β , γ inter se rationem eam non habentes quã qua-
 dratus numerus ad quadratum numerum, hoc est, ne
 sint illi numeri similes plani: fiatque sicut numerus β
 ad numerum γ , ita quadratum lineæ α ad quadratum
 alterius lineæ quæ sit α . Quomodo uerò id fiat, didici-
 mus per lemma illud positum in theoremate 6 huius li-
 bri. Commensurabile est igitur quadratũ lineæ α , qua-
 drato lineæ α per 6 huius libri. Et quia numerus β ad
 numerum γ non habet eam proportionem quam nume-
 rus quadratus ad numerum quadratum: neque etiam
 quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ α habebit eam
 proportionem quam numerus quadratus ad numerũ
 quadratum. Ergo lineæ α erit incommensurabilis longi-
 tudine tantum lineæ α per 9 huius libri. Sic itaq; re-
 perta est prior lineæ, nempe α incommensurabilis longi-
 tudine tantum lineæ propositæ quæ est α . Rursus re-
 periaturs media proportionalis inter α , α quæ sit ϵ per 13.
 6. Est itaque sicut lineæ α ad lineam ϵ , ita quadratũ li-
 neæ α ad quadratum lineæ ϵ per secundum corollarium
 20.6. Sed lineæ α est incommensurabilis longitudine
 lineæ ϵ , ut modò conclusum est. Ergo quadratum etiam
 lineæ α erit incommensurabile quadrato lineæ ϵ , per se-
 cundam partem postremi theorematiss. Nec te impediatur
 quod illud theorema 10 loquatur de magnitudinibus
 cõmensurabilibus & incõmensurabilibus. Lineæ enim
 quando consyderantur earum lōgitudines, ut sint lon-
 gitudine

gitudine cōmensurabiles aut
 incommēsurabiles lineæ, ma-
 gnitudinis uoce comprehen-
 duntur, & contrā, si con-
 siderantur ut magnitudines, ut sint magnitudines
 commensurabiles siue incommensurabiles, de longitu-
 dinibus ipsarum linearum loqui intelligimus. neque
 tum quicquam de potentia lineæ intelligimus. Nam ma-
 gnitudo lineæ est ipsa longitudo, tum lineæ nihil aliud
 sit quàm longitudo sine latitudine. De quadratis ue-
 rò nihil est necesse ita loqui, quia magnitudo ipsius qua-
 drati est ipsum quadratum. potentia enim quadrati
 non dicitur. Cum ergo quadratū lineæ a sit incommen-
 surabile quadrato lineæ c, erit igitur per definitionem
 linearum incommensurabilium lineæ a incommēsurabi-
 lis potentia lineæ c. Ergo lineæ recta proposita ueluti a
 quam prius diximus, & ex qua mensuras ceterarum
 linearum accipi oportere dicebamus inter principia hu-
 ius libri, reperta est lineæ a longitudine tantum incom-
 mensurabilis. Est itaque ea lineæ a sicut siue rationalis,
 longitudine tantum incommensurabilis, supple lineæ c
 quæ primò & ex suppositione rationalis est. Reperta est
 item lineæ c eidem lineæ a incommensurabilis non lon-
 gitudine tantum, sed etiam potentia. quæ lineæ c per
 definitionem linearum incommensurabilium lineæ ra-
 tionali erit irrationalis. Nam in uniuersum solet Eucli-
 des eas uocare ἀλόγους id est irrationales, quæ & longi-
 tudine & potentia sint incommensurabiles lineæ pro-
 positæ, & ex suppositione ἐντὶ id est rationali. Hoc au-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

tem problema licet in theorema conuertere, quomodo diximus cetera conuerti posse.

Duodecimum Theorema.

Magnitudines quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, inter se quoq; sunt cōmēsurabiles.

Vtraque magnitudo α, β sit commensurabilis magnitudi-
ni γ . Dico magnitudines etiam α, β esse inter
se commensurabiles. Nam cum α sit commen-
surabilis magnitudini γ , igitur α ad γ habe-
bit proportionem quam numerus ad nume-
rum habeat proportionem quam numerus λ
ad numerum ι . Rursus cum β sit commen-
surabilis γ , igitur γ ad β habebit proportionē
quam numerus ad numerum, habeat itaque
quam numerus ξ ad numerum κ . Sumantur
minimi numeri continuati in proportionibus datis se-
cundum 4. 8. qui numeri sint $\theta,$



κ, λ , ut quæ sit proportio nume- $\alpha \dots 6 \dots \gamma \dots 4$
ri λ ad numerum ι , eadē sit nu- $\iota \dots 4 \dots \eta \dots 8 \dots$
meri θ ad numerum κ : quæ ue- $\theta \dots 3 \dots$
rō proportio sit numeri ξ ad nu- $\kappa \dots 2 \dots$
merum ι , eadē sit numeri κ ad $\lambda \dots 4 \dots$
numerū λ . Cum igitur sit si-
cut α ad γ , ita λ ad ι , sitq; λ ad ι sicut θ ad κ : est itaq; ut α
ad γ , sit numerus θ ad numerū κ . Itē cū sit ut γ ad β , sic
 ξ ad ι , sitq; sicut ξ ad ι , ita κ ad λ . Ergo sicut γ
ad β , ita κ ad λ . sed modò probatū est, sicut erat
 α ad γ , ita θ ad κ . Per equā igitur proportionē

$\alpha, \gamma, \beta.$
$\theta, \kappa, \lambda.$

sicut

sicut α ad β , ita numerus 6 ad numerum 1. Ergo per 6 huius libri, magnitudo α erit commensurabilis magnitudini β . ergo magnitudines quæ eidem sunt commensurabiles & cætera.

Decimumtertium Theorema.

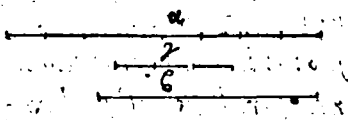
Si ex duabus magnitudinibus hæc quidem commensurabilis sit tertiæ magnitudini, illa uerò eidem incommensurabilis, incōmensurabiles sunt illæ duæ magnitudines.

Sint duæ magnitudines α , β .

porrò sit tertia magnitudo

γ : sitq; α commensurabilis

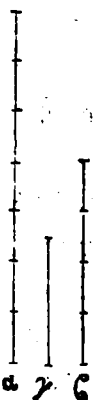
ipsi γ : sit etiam β incommensurabilis eidem γ . dico magnitudinem α esse incommensurabilem ipsi β . Nam si α esset commensurabilis ipsi β , cum sit α commensurabilis ipsi γ : ipsa quoque magnitudo β esset commensurabilis magnitudini γ , per 12. cuius positum est contrarium.



Decimumquartum Theorema.

Si duarum magnitudinum cōmensurabilium altera fuerit incōmensurabilis magnitudini alteri cuiuspiam tertiæ, reliqua quoque magnitudo eidem tertiæ incōmensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles α , β : altera uero ipsarum, nempe α alteri cuiuspiam quæ γ sit, incommensurabilis esto. dico reliquam quoque magnitudinem β esse incommen-

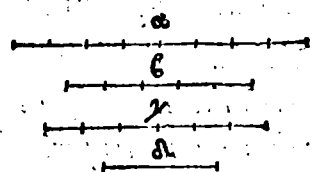


K ij

EVCLIDIS ELEMENTOR.

furabilem ipsi γ . Nam si β esset commensurabilis γ , cum etiam α sit commensurabilis β : ipsa quoque magnitudo α magnitudini γ erit commensurabilis, per præcedens theorema. Sed positum est eas esse incommensurabiles: quod est factu impossibile. Non ergo erit commensurabilis β ipsi γ . ergo incommensurabilis. Si duarum ergo magnitudinum &c. Corollarium.

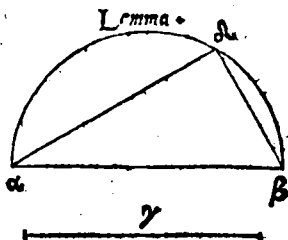
Quæ sunt commensurabilia incommensurabilibus, sunt inter se incommensurabilia. Sint magnitudines, α, β incommensurabiles: sit ϵ magnitudo γ commensurabilis ipsi α : sit item magnitudo δ commensurabilis ipsi β . disco γ, δ esse inter se incommensurabiles. Nam α, γ sunt commensurabiles, ex quibus α est incommensurabilis ipsi ϵ . Ergo per hoc theorema 14. γ, δ sunt incommensurabiles. Sed β, δ sunt commensurabiles. ergo per hoc ipsum theorema, aut per 13, γ, δ sunt inter se incommensurabiles. hac autem corollario sæpe utitur Theon, ut in 23, 27, 38, & alijs.



Lemma.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quanto plus potest maior quam minor.

Sint data duæ inæquales rectæ α, β , & γ , quarum maior sit α , inueniendum est quanto plus possit linea α, β , quam γ . Describatur super lineam α, β semicirculus α, β , & intra eum usque



ad

ad ipsius semicirculi circumferentiam collocetur linea recta α α æqualis ipsi γ per primam quarti, & cōiungātur puncta α , β linea ducta, quæ sit α β . Cōstat sane angulum α α β rectum esse per 31.3. præterea lineam α β posse plus quàm lineam α α , quæ est æqualis ipsi γ : tantòque plus posse quantum est quadratum lineæ α β , per 47.1. Similiter quoq; duabus datis rectis, linea utrâque potens reperietur hac ratione. Sint due data rectæ α α , α β , inueniendâq; proponatur linea quæ utrâque possit. applicentur inter se eo situ quo angulum rectum conficiat, qui sit α α β , & ducatur linea à puncto α in punctum β . constat item lineam α β esse eam quam querimus potentē quantū illæ ambæ α α , α β , per 47.1.

Decimumquintum Theorema.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, possit autem prima plusquam secunda tanto quātum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine: tertia quoque poterit plusquam quarta tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quòd si prima possit plusquam secunda quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: tertia quoque poterit plusquam quarta quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.

Sint quatuor lineæ rectæ proportionales α , ϵ , γ , π , sicut α ad β , ita γ ad δ . possit autem α plusquam β tanto quātum est quadratum lineæ α : possitq; γ plusquam δ quadrato lineæ ϵ . Dico si α fuerit commensurabilis longitudine li-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

nea ϵ , erit etiam γ commensurabilis longitudine linea ζ . sin autem α incommensurabilis longitudine fuerit linea ϵ , erit similiter γ incommensurabilis longitudine linea ζ . Ex eo enim quod est sicut α ad β , ita γ ad δ : erit etiam ut quadratū linea α ad quadratum linea β , ita quadratum linea γ ad quadratum linea δ



per 22, 6. Sed ex suppositione quadrato linea α equalia sunt quadrata linearum β , ϵ : quadrato uero linea γ equalia sunt quadrata linearū δ , ζ . Est igitur sicut proportio quadratorum earum linearum β , ϵ ad quadratū linea α : ita proportio quadratorum duarum linearum δ , ζ ad quadratum linea α . Per disiunctā igitur proportionalitatem sicut quadratum linea ϵ ad quadratū linea β , ita quadratum linea ζ ad quadratum linea δ .

Est itaque ueluti ϵ ad β , sic ζ ad δ , per secundam partē 22, 6. Per cōtrariam ergo proportionem, sicut β ad ϵ , ita δ ad ζ . Erat autem ex suppositione sicut α ad β , ita γ ad δ . Per equam igitur proportionem est ut α ad ϵ , ita γ ad ζ . Itaque per decimam huius, si α est commensurabilis longitudine ipsi ϵ , erit quoque γ commensurabilis longitudine ipsi ζ . Si uero incommensurabilis fuerit α ipsi ϵ , erit similiter incommensurabilis γ ipsi ζ . Ergo si quatuor recte proportionales etc.

Decimum sextum Theorema.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, tota magnitudo composita singulis partibus commensurabilis

commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo composita alterutri parti commensurabilis fuerit, illæ duæ quoque partes commensurabiles erunt.

Componantur duæ magnitudines commensurabiles α β ,

ϵ γ . Dico totam magnitudinem

α γ singulis par-

tibus α β , β γ cõ-

mensurabilem esse. Cum enim α β & ϵ γ sint commẽ-

surabiles, metietur ipsas quædam magnitudo cõmunis

ambarum mensura. Metiatur igitur, sitq; δ . Cum itaq;

δ metiatur α β γ metietur quoque totam magnitudi-

nem compositam α γ per communem cõceptionẽ. Quæ-

cunque magnitudo metitur duas alias, metitur quoque

compositam ex illis. Sed eadem δ metiebatur α β , β γ ex

suppositione. Ergo δ metitur α β , β γ , & α γ . Commensu-

rabilis est itaque α γ utriq; magnitudini α β , & β γ . Sit

præterea α γ tota composita commensurabilis alteri ex

duabus α β , β γ ; sitq; illa α β . Dico duas illas α β , β γ esse

commensurabiles. Nam cum α γ & α β sint commensu-

rabiles, metiatur ipsas communis quædam mensura: sit

autem illa magnitudo δ . Cum itaq; δ metiatur α β &

α γ , reliquam quoque magnitudinem β γ metietur ma-

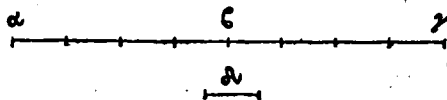
gnitudo δ per illam communem conceptionem. Quic-

quid metitur totũ, & detractum metitur & reliquũ.

sed eadem δ metiebatur magnitudinem α β ex supposi-

sitione. Ergo δ metitur utranque α β , & β γ . Commensu-

rabiles itaque sunt α β , β γ . itaq; amba partes theore-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

matris ueræ.

Corollarium.

Si tota magnitudo fuerit commensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliqua ex duabus commensurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti $\alpha \gamma$ est commensurabilis magnitudini $\beta \gamma$, ergo per secundam partem huius theorematis 16, magnitudines $\alpha \beta, \beta \gamma$ sunt commensurabiles. ergo per priorem partem eiusdem theorematis magnitudo $\alpha \gamma$ erit commensurabilis singulis $\alpha \beta, \beta \gamma$. Hoc corollarium utitur Theon in demonstratione 18, & aliorum theorematum. omissum tamen est Euclidi, quia facile uidebatur ut cetera ferè corollaria.

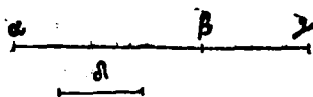
Decimumseptimum Theorema.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componentur, ipsa quoque tota magnitudo singulis partibus componentibus incommensurabilis erit. Quod si tota alteri parti incommensurabilis fuerit, illæ quoque primæ magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles $\alpha \beta, \beta \gamma$. Dico totam magnitudinem $\alpha \gamma$, utricunque magnitudini $\alpha \beta, \beta \gamma$ incommensurabilem fore. Quod si negetur incommensurabiles esse $\gamma \alpha, \alpha \beta$, metietur ipsas quædam magnitudo metiatur itaque, ea quæ sit δ si fieri potest. Cum igitur δ metiatur per te $\gamma \alpha, \alpha \beta$, metietur similiter reliquam magnitudinem $\beta \gamma$; sed per te eadē δ metiebatur $\epsilon \alpha$. Ergo

$\alpha \beta,$

α, β, γ sunt commensurabiles. Sed ex suppositione erant incommensurabiles: fieri



ergo nō potest ut $\gamma, \alpha, \alpha, \beta$ sint cōmensurabiles: sunt itaq; incommensurabiles. Eadem uia demonstrari potest magnitudines $\alpha, \gamma, \gamma, \beta$ esse incommensurabiles. Ergo α, γ singulis magnitudinibus $\alpha, \beta, \beta, \gamma$ est incommensurabilis.

Rursus α, γ alteri magnitudini, nempe ipsi α, ϵ , sit incommensurabilis. dico etiam $\alpha, \beta, \beta, \gamma$ esse incommensurabiles. Nam si commensurabiles fuerint, metietur ipsas magnitudo quaedam. metiatur, sitq; δ . Cum igitur δ metiatur $\alpha, \beta, \beta, \gamma$, metietur quoque totam magnitudinem α, γ . sed per te δ metiebatur α, β : ergo δ metietur $\gamma, \alpha, \alpha, \epsilon$. Cōmensurabiles itaq; sunt $\gamma, \alpha, \alpha, \epsilon$. Sed ex suppositione erant incommensurabiles. illud autem fieri nullo modo posse certum est, ut simul sint & commensurabiles & incommensurabiles. Nulla ergo magnitudo metietur $\alpha, \beta, \beta, \gamma$. Ergo incommensurabiles sunt $\alpha, \beta, \beta, \gamma$. Eadem quoque uia demonstrari potest illud idem, si posuerimus magnitudinem α, γ esse incommensurabilem ipsi β, γ . Ergo si duae magnitudines incommensurabiles & c.

Corollarium.

Si tota magnitudo fuerit incommensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliqua ex duabus incommensurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti α, γ est incommensurabilis magnitudini β, γ , ergo per secundam partem huius theorematism. magnitudines $\alpha, \beta, \beta, \gamma$ sunt incommensurabiles.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

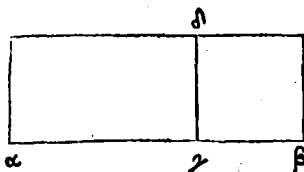
mensurabiles. ergo per priorem partem eiusdē theore-
matis magnitudo $\alpha \gamma$ erit incommensurabilis singulis
 $\alpha \beta, \beta \gamma$. hoc corollario utitur Theon in demonstratione
73 theorematis, & aliorum.

Lemma.

Si parallelogrammum applicetur secundum lineam re-
ctam, lineaque illa tanto plus excedat parallelogram-
mi latus, quantum est alterum latus ipsius parallelo-
grammi: illud parallelogrammū sic applicatum, est æ-
quale alteri parallelogrammo, quod fit ex sectionibus
lineæ, quæ factæ sunt per applicationem ipsius paralle-
logrammi secundum lineam illam.

Hoc per se manifestum uideri potest, tamen quia reperitur
inter cetera, demonstrationem eius afferemus. Secū-

dum lineam rectam $\alpha \beta$ ap-
plicetur parallelogrammum
 $\alpha \delta$, cuius alterū latus sit æ-
quale illi portioni lineæ re-
ctæ, quæ excurrit extra pa-



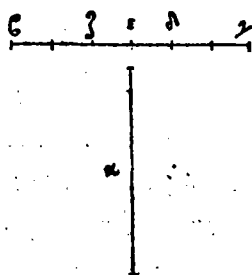
rallelogrammū. Dico parallelogrammū $\alpha \delta$ esse æquale
superficie rectangulæ quæ fit ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$. quod per se pa-
tet, ut modò diximus. Nam quia quadratum est $\alpha \beta$, li-
nea $\alpha \gamma$ est æqualis lineæ $\beta \gamma$: estq; parallelogrammum
 $\alpha \delta$, id quod est superficies rectangulæ $\alpha \gamma, \gamma \beta$. Ergo si pa-
rallelogrammum applicetur &c.

Decimooctauum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ
parti quadrati quod describitur à minore, æqua-
le

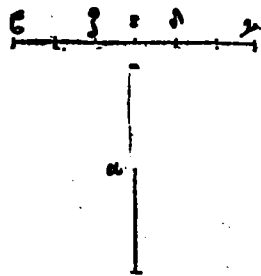
le parallelogrammum applicetur secundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi. Si præterea parallelogrammum sui applicatione diuidat lineā illam in partes inter se cōmensurabiles longitudine: illa maior linea tanto plus potest quā minor, quantum est quadratum lineæ sibi cōmensurabilis longitudine. Quod si maior plus possit quā minor, tanto quantum est quadratum lineæ sibi cōmensurabilis longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur secundū maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi, parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se longitudine cōmensurabiles.

Sint duæ rectæ inæquales α , ϵ δ , quarum maior sit β γ . Quarta autem parti quadrati lineæ minoris α , hoc est ipsi quadrato quod describitur à dimidia lineæ α , æquale parallelogrammum secundum lineā β γ , applicetur, quod relinquat ex lineæ β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipsius parallelogrammi: sitq; illud parallelogrammū quod fiat ex β δ , α γ (hoc uerò quemadmodū fiat, docet Campanus in fine demonstrationis 13.) sit quoque. commen-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

furabilis longitudine linea β a ipsi
linea α γ . Dico lineam β γ plus posse
quàm linea α , tanto quantum est
quadratum lineæ cuiusdã sibi ipsi
lineæ, dico β γ , longitudine cõmen-
surabilis. Secetur enim linea β γ
in duas partes æquales in puncto



ϵ , ponaturque lineam ϵ z æqualem esse lineæ α ϵ : reliqua
ergo linea α γ erit æqualis lineæ β z . Cumq; linea re-
cta β γ divisa sit in partes æquales in puncto ϵ , in par-
tes autem inæquales in puncto α , superficies rectangu-
la contenta ex β α , α γ cum quadrato lineæ α α , æqualis
est quadrato lineæ ϵ γ , per quintum theorema secundi li-
bri. Itaque superficies rectangula contenta ex ϵ α , α γ
quater sumpta cū quadrato lineæ α α item quater sum-
pto, est æqualis quadrato lineæ ϵ γ quater sumpto. Nam
æqualia quæ sunt æqualiter multiplicata, simul æqua-
lia sunt. Sed superficiei rectangulæ contentæ ex β α ,
 α γ quater sumptæ, æquale est quadratū lineæ α ex sup-
positione. Nam parallelogrammum ex ϵ α , α γ positum
est æquale quartæ parti quadrati lineæ α . Quadrato
verò lineæ α ϵ quater sumpto æquale est quadratum li-
neæ α z . Nam linea α z est dupla ad lineam α ϵ , quadra-
to autem lineæ ϵ γ quater sumpto æquale est quadratū
lineæ ϵ γ . Similiter enim linea ϵ γ dupla est ad lineam
 α γ . Ergo quadrata linearū α , α z sunt æqualia quadra-
to lineæ ϵ γ . Quocirca quadratum lineæ ϵ γ maius est
quàm quadratum lineæ α tanto quantum est quadra-
tum lineæ α z . Ergo maior linea ϵ γ plus potest quàm
minor

minor $\bar{a}$ quadrato lineæ αz . Nunc autem demonstrandum est lineam $\epsilon \gamma$ esse longitudine commensurabilem ipsi lineæ αz . Cum enim ex suppositione lineæ $\epsilon \alpha$ sit longitudine commensurabilis ipsi $\alpha \gamma$: ergo lineæ tota $\epsilon \gamma$ erit longitudine commensurabilis lineæ $\alpha \gamma$, per sextum decimum theorema huius libri. Atqui lineæ $\alpha \gamma$ est æqualis lineæ ϵz . Ergo lineæ tota $\epsilon \gamma$ est commensurabilis longitudine lineis ϵz , $\gamma \alpha$. Componantur illæ duæ lineæ ut unam lineam efficiant. Cum itaque lineæ tota $\beta \gamma$ sit commensurabilis longitudine duabus lineis unius loco sumptis ϵz , $\gamma \alpha$. Ergo lineæ βz , $\gamma \alpha$ unius loco sumptæ sunt commensurabiles longitudine ipsi lineæ αz , per secundam partem sextidecimi theorematum huius libri. Quare etiam residua lineæ αz commensurabilis longitudine erit tota lineæ $\epsilon \gamma$, per priorem partem eiusdem sextidecimi theorematum. hoc ipsum tamen probari potest per corollarium à nobis positum post 16. Ergo lineæ $\beta \gamma$ plus potest quam lineæ α quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Rursus lineæ $\beta \gamma$ plus possit quam lineæ α tanto quantum est quadratum lineæ sibi longitudine commensurabilis: quarta autem parti quadrati lineæ α æquate secundum lineam $\beta \gamma$ parallelogrammum applicetur, quod relinquat ex lineæ $\beta \gamma$ portionem æqualem alteri ipsius lateri: sitq; superficies rectangula contenta ex $\beta \alpha$, $\alpha \gamma$, demonstrandum est lineas $\epsilon \alpha$, $\alpha \gamma$ esse inter se longitudine commensurabiles. Manentibus constructionibus & suppositionibus præcedentibus similiter demonstrabimus lineam $\epsilon \gamma$ plus posse lineæ α tanto quantum est quadratum lineæ αz . Sed ex suppositione lineæ $\beta \gamma$ plus

EVCLIDIS ELEMENTOR.

potest quàm linea α , tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Commensurabilis est itaque longitudine linea $\beta\gamma$ lineæ α . Ergo linea composita ex duabus $\beta\zeta$, $\alpha\gamma$ est commensurabilis longitudine lineæ α , per secundam partem sextidecimi theorematum huius libri. Quocirca per 12. huius, siue per priorem partem sextidecimi theorematum, linea $\beta\gamma$ est commensurabilis longitudine lineæ compositæ ex $\beta\zeta$, $\alpha\gamma$. Sed tota linea composita ex $\beta\zeta$, $\alpha\gamma$ est commensurabilis longitudine ipsi $\alpha\gamma$. nam $\beta\zeta$ est equalis ex antè dictis ipsi $\alpha\gamma$. Ergo linea $\beta\gamma$ est longitudine commensurabilis ipsi $\alpha\gamma$, per 12. huius. Quare et linea $\beta\alpha$ est longitudine commensurabilis lineæ $\alpha\gamma$, per secundam partem sextidecimi theorematum. Ergo si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales &c. Quod demonstrandum erat.

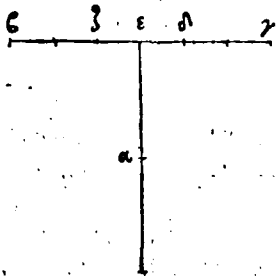
Decimumnonum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum secundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus eiusdem parallelogrammi: si parallelogrammum præterea sui applicatione diuidat lineam in partes inter se longitudine incommensurabiles, maior illa linea tanto plus potest quàm minor, quantum est quadratum lineæ sibi maiori incommensurabilis longitudine. Quod si maior linea tanto plus possit quàm minor, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis

commensurabilis sibi longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur secundum maiorem, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius, parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se incommensurabiles longitudine.

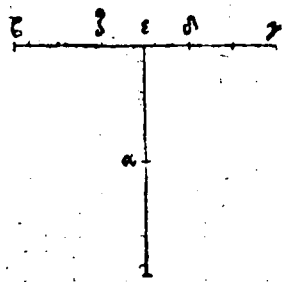
Sint duæ rectæ inæquales $\alpha, \beta \gamma$

quarum maior sit $\epsilon \gamma$: quartæ autem parti quadrati minoris nempe α , æquale parallelogrammum applicetur secundum lineam $\epsilon \gamma$, quod relinquat ex linea $\epsilon \gamma$ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipsius parallelogrammi: sitque illud parallelogrammum ex $\epsilon \alpha, \alpha \gamma$: incommensurabilis autem longitudine sit $\beta \alpha$ ipsi $\alpha \gamma$. Dico lineam $\epsilon \gamma$ posse plus quam linea α tanto, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Sint primum eadem constructiones & ratiocinandi uia, quæ in proximo theoremate. Similiter ostendemus lineam $\beta \gamma$ posse plus quam linea α tanto, quantum est quadratum lineæ $\alpha \gamma$. Restat ut demonstremus lineam $\epsilon \gamma$ esse incommensurabilem longitudine ipsi $\alpha \gamma$. Cum enim linea $\beta \alpha$ sit incommensurabilis longitudine lineæ $\alpha \gamma$ ex suppositione, incommensurabilis etiam longitudine erit linea $\epsilon \gamma$ ipsi lineæ $\alpha \gamma$, per 17 huius: sed $\alpha \gamma$ est commensurabilis ambabus lineis $\epsilon \gamma, \alpha \gamma$ simul compositis, quia $\alpha \gamma$ est



EVCLIDIS ELEMENTOR.

æqualis ipsi $\epsilon\zeta$. Ergo $\epsilon\gamma$ est incommensurabilis ambabus $\beta\zeta$, $\alpha\gamma$ simul compositis, per 14 huius. Ergo per secundam partem septimidecimi theorematibus libri linea composita ex $\epsilon\zeta$, $\alpha\gamma$ simul & unius loco sumptis est incommensurabilis linea



$\zeta\alpha$. Ergo per priorem partem eiusdem septimidecimi theorematibus linea $\beta\gamma$ est incommensurabilis longitudine lineæ $\zeta\alpha$. Linea igitur $\beta\gamma$ potest plus quam linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Rursus linea $\beta\gamma$ potest plus linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine: quarta autem partii quadrati lineæ α æquale parallelogrammum applicetur secundum lineam $\beta\gamma$, quod relinquat excurrentem portionem lineæ $\beta\gamma$ æqualem alteri ipsius lateri: sitq; illud parallelogrammum ex lineis $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$. Demonstrandum nobis est illud lineam $\beta\alpha$ esse incommensurabilem longitudine lineæ $\alpha\gamma$. Maneant enim eadem constructiones & ratiocinandi uix: similiter etiam ostendemus lineam $\beta\gamma$ posse plus quam linea α quadrato lineæ $\zeta\alpha$. Primum ex suppositione linea $\beta\gamma$ potest plusquam linea α tantum quantum est quadratum lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Ergo linea $\beta\gamma$ erit incommensurabilis longitudine lineæ $\zeta\alpha$. Itaque linea composita ex $\epsilon\zeta$, $\alpha\gamma$ & unius loco sumpta erit incommensurabilis longitudine linea $\zeta\alpha$, per secundam partem septimidecimi theore-

matis

matris libri huius. Quare & per primam partē eiusdē theorematī, linea $\beta\gamma$ erit incommensurabilis longitudine lineae compositae ex $\epsilon\zeta, \alpha\gamma$. Sed linea composita ex $\beta\zeta, \alpha\gamma$ est commensurabilis longitudine lineae $\alpha\gamma$, eō quia $\beta\zeta$ est aequalis ipsi $\alpha\gamma$ ex anteprobatis. Itaque linea $\beta\gamma$ est incommensurabilis longitudine ipsi $\alpha\gamma$ per 14 huius. Ergo per secundā partem eiusdem septimidecimi theorematī, linea $\beta\alpha$ est incommensurabilis longitudine lineae $\alpha\gamma$. Quamobrem si fuerint duae rectae inaequales &c.

Lemma.

Cum sit demonstratum lineas longitudine commensurabiles omnino potentia quoque commensurabiles esse, eas uerō quae potentia sunt commensurabiles non omnino longitudine quoque commensurabiles esse, sed esse posse & longitudine commensurabiles & incommensurabiles, constat si linea proposita (quam *ἰσχυρὰ* uocari diximus, eandēque rationālē à recentioribus) linea quaedam fuerit commensurabilis longitudine, illam uocari debere rationalem, & commensurabilem non longitudine solum, sed etiam potentia. Nam linea longitudine commensurabiles, omnino potentia quoque commensurabiles sunt. Quod si proposita linea, quam rationalem uocant, quaedam fuerit linea commensurabilis potentia: siquidem & longitudine etiam commensurabilis ipsi fuerit, uocabitur illa rationalis, & commensurabilis ipsi

M

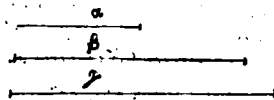
EVCLIDIS ELEMENTOR.

longitudine & potētia. Si uerò ipsi lineæ propositæ, quæ rationalem uocant, lineæ quædam potentia commensurabilis, longitudine eidem fuerit incommensurabilis: uocabitur & illa rationalis, potentia tantum commensurabilis.

Illa duæ uoces $\pi\epsilon\iota\lambda\omicron\varsigma$ & $\rho\acute{\omicron}\lambda\omicron\iota\varsigma$ quæ sunt in exemplari impresso, non sunt in uetusto: & quod sequitur, continuata serie scribitur, addita particula $\gamma\omicron\upsilon\tau$ hoc modo, $\gamma\omicron\upsilon\tau$ $\gamma\omicron\upsilon\tau$ sic itaque dicemus. Rationales enim uocat Euclides (ut est in principijs huius libri) illas lineas quæ sunt lineæ propositæ quam $\gamma\omicron\upsilon\tau$ uocat, siue longitudine & potentia commensurabiles, siue potentia tantum. Sunt tamen & alia lineæ rectæ longitudine quidem incommensurabiles lineæ propositæ, id est $\tau\eta$ $\gamma\omicron\upsilon\tau$, siue dicas rationali, potentia tantum eidem commensurabiles, eoq; uocantur rationales & cōmensurabiles inter se ea ratione qua sunt rationales. sed & illæ eadem possunt esse cōmensurabiles inter se siue longitudine, & ideo potentia quoque, siue potentia tantum. Et quidē si fuerint inter se commensurabiles longitudine, uocabuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut tamen simul intelligatur potentia quoque cōmensurabiles esse. Quod si potentia tantum inter se fuerint commensurabiles, uocabuntur & ipsæ rationales potentia tantum commensurabiles. Corollarium.

Quod autem lineæ duæ siue plures rationales & commensurabiles longitudine ipsi rationali sint inter se commensurabiles longitudine, hinc cōstat. Nam cum sint rationales & longitudine commensurabiles ipsi prima rationali,

ionali, ea autem magnitudines quae sunt uni & eidem
 commensurabiles sunt inter se commensurabiles, per 12
 huius. Ergo lineae rationales ipsi primo rationali longi-
 tudine commensurabiles, sunt inter se quoque commen-
 surabiles longitudine. Sed quantum ad eas attinet, quae
 sunt rationales potentia tantum commensurabiles ipsi
 primo rationali, fieri omnino necesse est ut illae quoque
 inter se sint potentia saltem commensurabiles. Cum enim
 quadrata earum sint rationalia, erant commensurabi-
 lia quadrato lineae propositae quae dicitur primo ratio-
 nalis. Itaque per 12 huius ipsa quoque inter se erunt co-
 mensurabilia. Ergo lineae eorum sunt inter se potentia
 saltem commensurabiles. Sed nihil vetat easdem esse praeterea
 longitudine inter se commensurabiles. Sit enim li-
 nea α rationalis, sitq; linea β
 eidem lineae α rationali poten-
 tia tantum commensurabilis,



hoc est longitudine incommensurabilis eidem sit praeterea
 alia linea γ . lineae β longitudine commensurabilis (hoc
 enim esse posse constat ex principijs huius libri) per 14
 huius, linea γ est incommensurabilis longitudine ipsi li-
 neae α : sed quadratum lineae α est commensurabile qua-
 drato lineae β ex suppositione: quadratum item lineae γ
 est commensurabile eidem quadrato lineae β , per suppo-
 sitionem. Ergo per 12 huius, quadratum lineae γ est com-
 mensurabile quadrato lineae α . Ergo linea γ erit per de-
 finitionem rationalis, potentia tantum commensurabi-
 lis ipsi lineae α , sicut & ipsa linea β . Dantur ergo duae
 rationales potentia tantum commensurabiles ipsi ra-

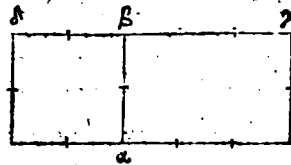
EVCLIDIS ELEMENTOR.

rionali, inter se uerò longitudine commensurabiles. Hic obiter repetendū esse puto, quod antea diximus in definitione linearū rationalium, Campanū, ceterosq; deinceps ab eo latinos geometras tenuisse illas uoces sine terminos, ut quasdam lineas uocarent rationales potentia tantum, quasdam uerò longitudine & potentia, quibus nunquam Euclidem usum esse reperies. hæ enim uoces longitudine & potentia nunquā referuntur ad rationalitatem aut irrationalitatem, sed semper ad commensurabilitatem, aut incommensurabilitatem linearum. Quæ peruersiones solent rerum per se difficilium etiam difficultatem & obscuritatem augere. Itaque te monitum iterum atque iterum uelim, ut principiorum id est simplicium terminorum simplicem uim diligenter intelligas & retineas, neque quicquam externum admiscendum existimes.

Vigesimum Theorema.

Superficies rectangula contenta ex lineis rectis rationalibus longitudine commensurabilibus secundum unum aliquem modum ex antedictis, rationalis est.

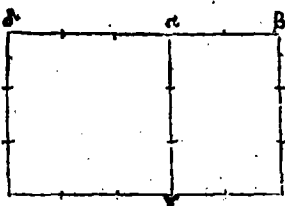
Nam ex lineis α , β , γ rationalibus longitudine commensurabilibus secundum unū aliquem modum ex antedictis cōtineatur superficies rectangula quæ sit α γ . dico superficiem α γ esse rationalem. Describatur enim à linea α β quadratum α δ : rationale est



itaque

itaque quadratum illud $\alpha\alpha$ ex definitione. Cūque sit commensurabilis longitudine linea $\alpha\beta$ linea $\beta\gamma$, equalisq; sit linea $\alpha\beta$ linea $\beta\alpha$, commensurabilis itaque longitudine erit linea $\beta\alpha$ linea $\beta\gamma$. Est autē sicut linea $\epsilon\alpha$ ad lineam $\epsilon\gamma$, ita quadratum $\alpha\alpha$ ad superficiē rectangulam $\alpha\gamma$, per primam sexti. Sed modo conclusum est lineam $\beta\alpha$ esse commensurabilem lineam $\beta\gamma$. Ergo per decimam huius libri quadratum $\alpha\alpha$ est commensurabile superficiē rectangulæ $\alpha\gamma$. Sed quadratum $\alpha\alpha$ est rationale: itaque per definitionem superficies $\alpha\gamma$ erit etiā rationalis. Ergo superficies rectangula cōtenta & cetera.

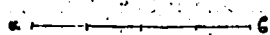
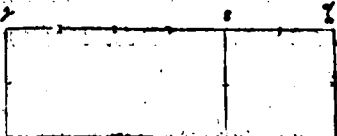
Sed & alia quadam descriptione placet idem demonstrare. Prior enim demonstratio quadratum minoris lineæ cōscripsit, nunc mutato casu demonstrationis quadratum maioris describamus. Sit superficies rectangula $\beta\gamma$ contenta ex lineis rationalibus inæqualibus longitudine inter se commensurabilibus $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$: sitque maior $\alpha\gamma$. Describatur ex linea



$\alpha\gamma$ quadratum $\alpha\gamma$. dico parallelogrammum $\gamma\epsilon$ rationale esse. Nam linea $\alpha\gamma$ est commensurabilis longitudine lineæ $\alpha\beta$ ex suppositione: sed linea $\alpha\alpha$ est equalis lineæ $\alpha\gamma$. Ergo linea $\alpha\alpha$ est commensurabilis longitudine lineæ $\alpha\beta$: sed quam proportionem habet $\alpha\alpha$ ad $\alpha\beta$, eandem habet quadratum $\alpha\gamma$ ad parallelogrammum $\gamma\beta$, per primam sexti. Ergo per 10 huius libri commensurabile est quadratum $\alpha\gamma$ parallelogramo $\gamma\beta$. Quadratum autem $\alpha\gamma$ rationale esse constat, quia est qua-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

dratum lineæ rationalis, nempe $\alpha\gamma$. Itaque per definitionem, parallelogrammum etiam $\gamma\delta$ erit rationale. Præterea cum demonstrationes illæ uideantur loqui de eo parallelogrammo quod sit ex duabus lineis, quarum altera sit ea proposita quam primo loco rationalem dicimus, unde diximus mensuras cæterarum linearum ad illam comparatarum capi oportere, altera uero sit eidem primo rationali commensurabilis longitudine, quæ est prima species linearum rationalium longitudine commensurabilium, alium casum afferendum puto de altera specie, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, ut demonstremus generalem huius theorematæ ueritatem, neq; frustra in eo positum illud extitisse secundum unum aliquem modum ex antedictis. Sit itaque lineæ primo rationalis $\alpha\beta$: sit etiam parallelogrammum $\gamma\delta$ contentum ex lineis $\gamma\epsilon$, $\epsilon\delta$ rationalibus id est lineæ primo rationali $\alpha\beta$ commensurabilibus longitudine. Sint tamen illæ duæ lineæ $\gamma\epsilon$, $\epsilon\delta$ diuersæ & inæquales lineæ primo rationali $\alpha\beta$. Dico parallelogrammum $\gamma\delta$ esse rationale. Describatur quadratum lineæ $\epsilon\delta$, sitq; $\alpha\zeta$. Primum constat lineas $\gamma\epsilon$, $\epsilon\delta$ esse inter se commensurabiles longitudine per 12 huius. Nam positum est utrâque esse longitudine commensurabilem ipsi $\alpha\beta$. Sed $\epsilon\delta$ est æqualis lineæ $\epsilon\zeta$. Ergo lineæ $\gamma\epsilon$ erit commensurabilis longitudine lineæ $\epsilon\zeta$. Sed quæadmodum se habet lineæ $\gamma\epsilon$ ad lineam $\epsilon\zeta$, ita se habet pa-



rallelogrammum

rallelogrammum $\gamma \delta$ ad quadratū az , per primā sexti.
 Ergo per decimam huius parallelogrammum $\gamma \delta$ erit
 commensurabile quadrato az . Sed quadratum az est
 commensurabile quadrato lineæ $\alpha \epsilon$, quia lineæ $\epsilon \delta$ posi-
 ta est cōmensurabilis longitudine lineæ $\alpha \beta$, quæ est pri-
 mo rationalis. Ergo per 12 huius, parallelogrammū $\gamma \delta$
 est commensurabile quadrato lineæ $\alpha \beta$. Sed quadratū
 lineæ $\alpha \beta$ est rationale per definitionem. Ergo per defini-
 tionem quoque figurarum rationalium parallelogram-
 mum $\gamma \delta$ erit etiam rationale. Nunc restat alius ca-
 sus tertiæ speciei, linearum inquam rationalium longi-
 tudine commensurabilium, quæ sunt ipsi quidem lineæ
 primo rationali $\alpha \beta$ commensurabiles potentia tantum,
 itaque rationales tamen. inter se uerò longitudine com-
 mensurabiles sint ipsæ lineæ $\gamma \epsilon$, $\delta \epsilon$, maneat itaque eadē
 constructio quæ in proximo casu modo lineæ $\gamma \epsilon$, $\delta \epsilon$ sint
 rationales potentia tantum commensurabiles ipsi $\alpha \beta$;
 inter se uerò sint longitudine etiam commensurabiles.
 Dico sic quoque parallelogrammum $\gamma \delta$ esse rationale.
 Primo probabitur, sicut modo dictum est parallelogrā-
 mum $\gamma \delta$ esse commēsurabile quadrato az : sed quadra-
 tum lineæ $\alpha \beta$ est commensurabile quadrato az . Ergo
 per 12 huius parallelogrammum $\gamma \delta$ erit commensura-
 bile quadrato lineæ $\alpha \beta$. sed quadratū lineæ $\alpha \beta$ est ra-
 tionale. Ergo per definitionem parallelogrammum $\gamma \delta$
 erit etiam rationale. Hunc autem casum notandum ti-
 bi memineris. Quum enim uentum erit ad 26 theore-
 ma, ad illius theorematidis demonstrationem & intelli-
 gentiam illum tibi usui fore intelliges.

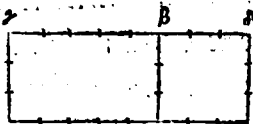
EVCLIDIS ELEMENTOR.

Vigesimumprimum Theorema.

Si rationale secundum lineam rationalem applicetur, habebit alterum latus lineam rationalem & commensurabilem longitudine lineæ, cui rationale parallelogrammum applicatur.

Hoc theorema est ueluti *ἀντιστοιχεί*

precedentis. Rationale enim parallelogrammum $\alpha \gamma$ applicetur secundum lineam $\alpha \beta$ rationale uno aliquo modo ex antedictis,



sive sit illa primo rationalis, sive alia ipsi primo rationali commensurabilis, idq; longitudine & potentia, uel potentia tantum. his enim tribus modis dicitur linea rationalis. Dico lineam $\beta \gamma$ esse rationalem & longitudine commensurabilem ipsi lineæ $\alpha \beta$. Describatur enim quadratum lineæ $\alpha \beta$ quod sit $\alpha \delta$. Rationale est igitur quadratum $\alpha \delta$, sed & parallelogrammum $\alpha \gamma$ est rationale per positionem. Ergo per definitionem rationaliū quæ in se conuertitur, sive per 12 huius, commensurabile est quadratum $\alpha \delta$ parallelogrammo $\alpha \gamma$. Est autem sicut quadratum $\alpha \delta$ ad parallelogrammū $\alpha \gamma$, ita linea $\alpha \epsilon$ ad lineam $\epsilon \gamma$, per primam sexti. Itaq; per decimam huius, linea $\alpha \beta$ erit commensurabilis lineæ $\beta \gamma$. sed linea $\epsilon \delta$, est æqualis lineæ $\beta \alpha$, commensurabilis est ergo linea $\alpha \beta$, lineæ $\beta \gamma$. Rationalis autem est linea $\alpha \beta$, Rationalis ergo erit & linea $\beta \gamma$, & commensurabilis longitudine lineæ $\alpha \beta$. Ergo si rationale secundum lineam rationalem &c.

Lemma.

Linea

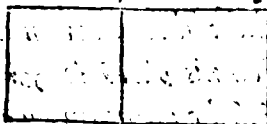
Linea potens superficiem irrationalem, est irrationalis. Possit enim linea α superficiem irrationalem, hoc est quadratum, quod ab α describitur, quale esto area irrationali. dico lineam α esse irrationalem. Nam si linea α esset rationalis, rationale quoque esset quadratum ab illa descriptum: (sic enim est positum inter definitiones) sed ex positione est irrationale; irrationalis est ergo linea α , quod demonstrandum erat.

Hic inferitur quoddam scholium, quod lemmatis inscriptionem habet, sed illud nihil aliud est quam demonstratio quaedam sequentis theorematum.

Vigesimum secundum Theorema.

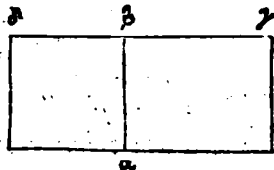
Superficies rectangula contenta duabus lineis rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus, irrationalis est. Linea autem quæ illam superficiem potest, irrationalis & ipsa est: uocetur uero medialis.

Superficies enim rectangula $\alpha \gamma$ comprehendatur à duabus lineis rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quæ sint α & β . Dico superficiem illam esse irrationalem, & lineam quæ illam potest, irrationalem etiam esse: uocetur autem medialis. Describatur enim à linea α quadratum $\alpha \delta$. rationale est itaq; quadratum $\alpha \delta$. Et quoniam incommensurabilis est longitudine linea α &



EVCLIDIS ELEMENTOR.

linea $\beta\gamma$ (nam ex suppositione sunt illa inter se potentia tantum commensurabiles) equalisq; est linea $\alpha\beta$, linea $\alpha\epsilon$ incommensurabilis longitudine ergo erit li-



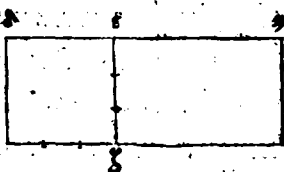
nea $\alpha\epsilon$ linea $\epsilon\gamma$. Est autem sicut linea $\alpha\epsilon$ ad lineam $\beta\gamma$, ita quadratum $\alpha\alpha$ ad parallelogrammum $\alpha\gamma$, per primam sexti. incommensurabile: est ergo quadratum $\alpha\alpha$ ad parallelogrammum $\alpha\gamma$ per secundam partem decimi theoremati huius libri. Sed quadratum $\alpha\alpha$ est rationale: irrationale est ergo parallelogrammum $\alpha\gamma$. Quare et linea quae illud parallelogrammum $\alpha\gamma$, hoc est ea quae quadratum ipsi parallelogrammo aequale describit, irrationalis erit per lemma postremum. Vocetur autem medialis ea ratione, quia quadratum quod ab ea describitur, aequale est parallelogrammo quod comprehenditur à lineis $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$, itaque media ipsa proportionaliter intercudit inter illas lineas $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$ per 17. 6. quod demonstrandum erat. Hac autem $\mu\omicron\tau\omicron\iota$ de qua hoc libro agitur, simpliciter $\mu\omicron\tau\omicron\iota$ dicitur: illa uero cuius inuentionem tradidit lib. 6. theoremate 13. dicitur $\mu\omicron\tau\omicron\iota$ $\alpha\iota\alpha\lambda\omicron\gamma\epsilon$. Neque omnis $\mu\omicron\tau\omicron\iota$ $\alpha\iota\alpha\lambda\omicron\gamma\epsilon$ est potens superficiem irrationalē, sed ea tantum quae est media proportionalis inter duas lineas potentia tantum commensurabiles. Campanus in propositione apud eum 19 addidit, diciturque superficies medialis: quod tamē non est ita intelligendū, ut omnis superficies medialis contineatur ex duabus lineis rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

hoc —

hoc enim refellitur per sequentia theorematum 18. & 19. ubi superficies medialis contineri dicitur ex duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. Itaque superficies omnis rectangula duabus rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensa, medialis dicitur, sed non e converso, ut omnis medialis superficies rectangula sit comprehensa duabus rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus. est enim & medialis comprehensa duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. sed tamen in uniuersum superficies quam potest linea medialis est & ipsa medialis.

Lemma.

Si sint duae lineae rectae, erit sicut prior ad secundam, ita quadratum quod à priori describitur, ad parallelogrammum quod comprehenditur duabus illis rectis. Hoc Lemma nihil aliud affert quam quod theorema primum libri sexti. Sint duae rectae z , u . Dico sicut est linea z ad lineam u , ita quadratum lineae z ad parallelogrammum comprehensum ex z , u . Describatur enim quadratum lineae z , sitq; a z , & compleatur parallelogrammum u z . Cum igitur linea a sit equalis lineae z , sit autem sicut linea a ad lineam u , ita quadratum a z ad parallelogrammum u z per 1.6. Ergo sicut linea z ad lineam u , ita quadratum a z ad parallelogrammum u z . Est autem quadratum a z , quadratum lineae z , parallelogrammum uero u z , id quod comprehenditur dua-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

bus lineis α & β . Est ergo sicut linea α ad lineam α , ita quadratum linea α ad parallelogrammum comprehensum lineis duabus α & β . Et e converso sicut parallelogrammum comprehensum duabus lineis α & β ad quadratum linea β , ita linea α ad lineam β .

Vigesimum tertium Theorema.

Quadrati lineæ medialis applicati secundum lineam rationalem, alterum latus est linea rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ secundum quam applicatur.

Sit linea medialis α , rationalis

uerò sit γ β : & quadrato li-

neæ α parallelogrammum re-

ctangulum æquale ϵ α appli-

cetur secundum lineam ϵ γ

cuius alterum latus sit γ α . Di-

co lineam γ α esse rationalem

& longitudine incommensu-

rabilem lineæ ϵ γ . Cum enim

linea α sit medialis, potest pa-

rallelogrammum contentum ex lineis rationalibus po-

tentia tantum commensurabilibus. possit itaque paral-

lelogrammum rectangulum α β : sed ex suppositione po-

test etiam parallelogrammum β α . æquale est igitur pa-

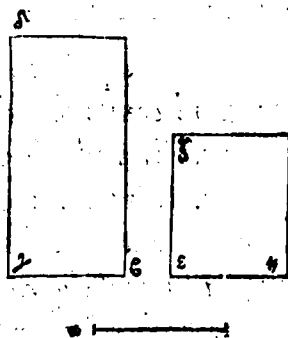
rallelogrammum β α parallelogrammo α β . Sed & am-

bo parallelogramma sunt æqualium angulorum, quia

sunt rectangula. Æqualium uerò & æquiangulorum

parallelogrammorum latera quæ sunt circa æquales an-

gulos



gulos reciprocam inter se proportionem habent per 14
 sexti. proportionaliter ergo erit sicut linea $\epsilon\gamma$ ad lineam
 $\epsilon\iota$, ita linea $\iota\zeta$ ad lineam $\gamma\delta$. Est igitur sicut quadratum
 lineae $\beta\gamma$ ad quadratum lineae $\epsilon\iota$, ita quadratum lineae
 $\iota\zeta$ ad quadratum lineae $\gamma\delta$, per 22 sexti. sed quadratum
 lineae $\epsilon\gamma$ est commensurabile quadrato lineae $\epsilon\iota$: est enim
 utraque linea rationalis. commensurabile ergo erit etiam
 quadratum lineae $\iota\zeta$ quadrato lineae $\gamma\delta$, per 10 huius.
 sed quadratum lineae $\iota\zeta$ est rationale. ergo similiter ra-
 tionale erit quadratum lineae $\gamma\delta$. linea ergo $\gamma\delta$ erit ra-
 tionalis. Et quoniam linea $\iota\zeta$ est longitudine incommen-
 surabilis lineae $\epsilon\iota$. nam illae sunt potentia tantum inter
 se commensurabiles. Sicut autem linea $\iota\zeta$ ad lineam $\epsilon\iota$, ita
 quadratum lineae $\iota\zeta$ ad parallelogrammum ex amba-
 bus lineis $\epsilon\iota$, $\iota\zeta$ contentum per lemma proximum. in-
 commensurabile est ergo quadratum lineae $\iota\zeta$ parallelo-
 grammo ex lineis $\epsilon\iota$, $\iota\zeta$, per secundam partem decimi
 theorematidis huius libri. Sed quadrato lineae $\iota\zeta$ qua-
 dratum lineae $\gamma\delta$ est commensurabile; modo enim pro-
 batum est utraque lineam esse rationalem. Ergo per 13
 huius, quadratum lineae $\gamma\delta$ est incommensurabile pa-
 rallelogrammo ex lineis $\epsilon\iota$, $\iota\zeta$. Sed parallelogrammum
 ex lineis $\gamma\delta$, $\gamma\beta$ est aequale parallelogrammo ex lineis
 $\epsilon\iota$, $\iota\zeta$, ut modo probatum est. Ergo quadratum lineae $\gamma\delta$
 est incommensurabile parallelogrammo ex lineis $\gamma\delta$, $\gamma\beta$.
 (hac uero pars breuius concluditur per corollarium à no-
 bis positum post 14. theorema.) Sed sicut se habet quadratum
 lineae $\gamma\delta$ ad parallelogrammum ex lineis $\delta\gamma$, $\gamma\epsilon$, ita se
 habet linea $\delta\gamma$ ad lineam $\gamma\epsilon$ per lemma proximum:

EVCLIDIS ELEMENTOR.

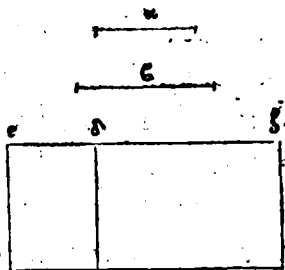
incommensurabilis longitudine est itaque linea γ & linea β . Rationalis est ergo linea γ & longitudine incommensurabilis linea β . quod demonstrandum erat.

Hoc theorema est uti ~~si~~ proxime precedentis. Ut uero fieri possit quod requiritur hoc theorema, scilicet applicari quadratum lineae medialis secundum lineam rationalem, reperienda est tertia linea proportionalis sicut docet II. sexti, ita tamen ut linea rationalis sit prima, secunda sit linea medialis quae potest quadratum applicandum. Nam superficies quae fit ex prima & tertia est aequalis quadrato mediae per 17 sexti.

Vigefimumquartum Theorema.

Linea recta mediali commensurabilis, est ipsa quoque medialis.

Sit linea medialis α , sitq; linea illi commensurabilis β siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, ut recte addidit Campanus, & in uetusto exemplari graeco legitur. dico lineam β esse mediale. Exponatur linea rationalis γ , & quadrato lineae α aequale parallelogrammum rectangulum applicetur secundum lineam γ , sitq; parallelogrammum γ , eiusque alterum latus sit linea α . Rationalis itaq; erit linea α , & incommensurabilis longitudine linea γ , per proximum theorema. Rursus quadrato lineae β aequale secundum lineam γ applicetur parallelogrammum



num rectangulum γz , cuius alterum latus sit αz . Cum igitur commensurabilis sit linea α lineæ β , commensurable quoque erit quadratum lineæ α , quadrato lineæ ϵ . sed quadrato lineæ α æquale est γ , quadrato autem lineæ β æquale est γz : commensurabile est ergo parallelogrammum γ parallelogrammo γz . Est autem sicut parallelogrammum γ ad parallelogrammum γz , ita linea α ad lineam αz per primam sexti. commensurabilis est ergo longitudine linea α lineæ αz per 10 huius. Sed linea α est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ γ α . Rationalis est ergo linea αz & incommensurabilis longitudine lineæ α γ per 13 huius. Ergo lineæ γ α , αz sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Sed linea quæ potest parallelogrammum rectangulum comprehensum rationalibus potentia tantum commensurabilibus, medialis est per 22 huius. Igitur medialis est quæ parallelogrammum ex γ α , αz potest. Id uero potest linea β , ergo linea ϵ medialis est.

Corollarium.

Vnde manifestum est superficiem commensurabilem superficiei mediali, medialem esse. Nam linea quæ possunt tales superficies, sunt potentia commensurabiles, quarum linearum altera, quæ scilicet potest superficiem medialem, medialis est, quare & reliqua medialis erit per hoc theorema 24. Sane quemadmodum diximus de lineis rationalibus, ita dicendum est in lineis medialibus, nempe lineam mediali commensurabilem esse etiã medialem, lineam inquam quæ sit commensurabilis mediali siue sit longitudine & potentia commensurabilis, siue

EVCLIDIS ELEMENTOR.

potentia tantum in uniuersum, enim uerum est lineas longitudine commensurabiles, esse quoque potentia cōmensurabiles. Quod si linea mediāli fuerit, alia commensurabilis potentia, siquidem & longitudine cōmensurabilis fuerit, dicuntur illa linea mediales longitudine & potentia commensurabiles. si uerò potentia tantum fuerint inter se commensurabiles, dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles. Sunt autem & alie linea recta longitudine quidem incōmensurabiles mediāli, potentia tantum eidem commensurabiles, hæ uerò dicuntur & ipsa mediales, eò quia commensurabiles sunt potētia linea mediāli, & ea ratione qua sunt mediales, sunt inter se potētia commensurabiles, sed & inter se ipsa comparata, possunt esse siue longitudine & ideo etiam potentia commensurabiles, siue potētia tantum. Et quidem si longitudine, dicuntur & ipsa mediales longitudine commensurabiles, ut consequenter intelligatur potentia quoque commensurabiles esse. Quod si potentia tantum sint inter se commensurabiles, nihilominus tamen & ipsa dicuntur mediales potētia tantum commensurabiles. Hoc loco addit exemplar græcū, quod autem linea mediales sint cōmensurabiles, ita demonstrari potest. Quoniā mediales mediāli cuidā sunt commensurabiles: quæ uerò sunt eidem commensurabilia, inter se quoque sunt commensurabilia. Ergo mediales sunt inter se commensurabiles. hoc totum nō est Euclidis, neque ullius omnino geometra, nam quum dicitur, quoniam mediales mediāli cuidam sunt commensurabiles, petitur principium. Præterea falsum est simpliciter

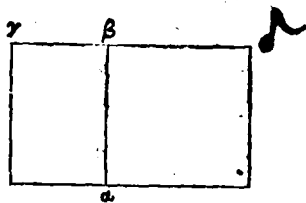
pliciter lineas mediales esse commensurabiles, quod patebit ex theoremate 35 huius libri, ubi propositum est reperire lineas duas potentia incommensurabiles cōficiētes compositum ex quadratis ipsarū mediale, & id parallelogrammum quod fit ex eisdē mediale, ipsum etiā incommensurabile composito ex quadratis illarum. Cū ergo reperiantur duo medalia incōmensurabilia, certum est lineas quæ illa possunt esse mediales potentia incommensurabiles, quas necesse est esse etiam longitudine incommensurabiles.

Vigesimumquintum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum contentū ex lineis medialibus longitudine commensurabilibus mediale est.

Ex lineis enim medialibus longitudine commēsurabilibus

α β , β γ contineatur parallelogrammum rectangulū α γ , dico illud parallelogrammum esse mediale. Describatur enim ex linea α β quadratum



α α : mediale est ergo quadratum illud α α . Et quoniā linea α β est longitudine cōmēsurabilis linea β γ , æqualisque est linea α β lineæ β α , commensurabilis est ergo longitudine lineæ β α , lineæ β γ . sed quemadmodum se habet linea α β ad lineam β γ , ita quadratum α α ad parallelogrammum α γ per primam sexti. Ergo per decimum theorema huius libri quadratum α α est commensurabile parallelogrammo α γ . sed quadratū α α est me-

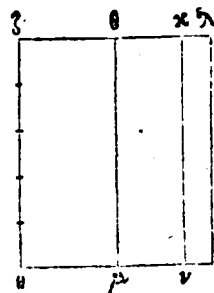
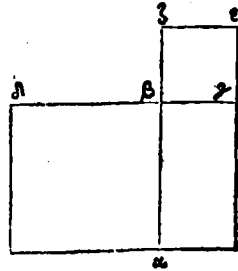
EVCLIDIS ELEMENTOR.

diale quia describitur à linea mediali. Ergo per corollarium proximi theorematís parallelogrammũ $\alpha\gamma$ erit etiam mediale. quod demonstrandum erat.

Vigesimumsextum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum comprehensum duabus lineis medialibus potentia tantum commensurabilibus, uel rationale est, uel mediale.

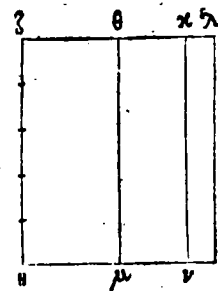
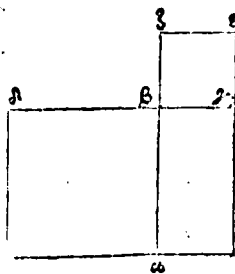
Proposita linea quæ sit medialis, alia reperitur potētia tantum commensurabilis eidem per 11 huius, sicut de rationalibus ibidem dictum est. Ex duabus itaque medialibus potentia tantum cōmensurabilibus $\alpha\beta, \beta\gamma$, parallelogrammum rectangulum comprehendatur quod sit $\alpha\gamma$. Dico illud parallelogrammum esse aut rationale aut mediale. Describatur enim quadrata linearũ $\alpha\beta, \beta\gamma$ quæ sint $\alpha\delta, \beta\epsilon$, mediale est ergo utrũque per 22 huius. Proponatur linea rationalis $\mu\zeta$ secundũ quam applicetur æquale quadrato $\alpha\delta$ parallelogrammum rectangulum $\mu\theta$, cuius alterũ latus sit $\zeta\theta$. (hoc autẽ quomodo fiat diximus in theoromate 23.) parallelogrammo uerò $\alpha\gamma$ æquale secundum lineam $\theta\mu$, æqualem lineæ $\zeta\mu$ applicetur parallelogrammum rectangulum $\mu\kappa$, cuius alterũ latus sit $\theta\kappa$. (ut autem id fiat, sumēda est quarta li-



nea proportionalis ad lineas $\theta\mu, \alpha\epsilon, \beta\gamma$ per 12 sexti, quæ quarta sit $\theta\kappa$: ergo per 16 sexti parallelogrammum ex $\theta\mu, \theta\kappa$ erit æquale parallelogrammo ex lineis $\alpha\beta, \beta\gamma$.) præterea quadrato $\beta\epsilon$ æquale similiter secundum lineam $\kappa\iota$ applicetur parallelogrammum rectangulum $\iota\lambda$, cuius alterum latus sit $\kappa\lambda$. In eadem ergo recta linea sunt lineæ $\theta\iota, \theta\kappa, \kappa\lambda$. (Nam illa parallelogramma sic applicata secundum lineas $\theta\iota, \theta\mu, \kappa\iota$ sunt rectangula, & anguli $\angle\theta\mu, \kappa\theta\mu$ æquales duobus rectis, quia sunt ipsi recti. Itaque lineæ $\angle\theta\iota, \theta\kappa$ sunt in eadem linea recta per 14 primi. idem dices de angulis $\theta\kappa\iota, \lambda\kappa\iota$.) Cum igitur mediale sit utrumque quadratum $\alpha\lambda, \beta\epsilon$ parallelogramma illis æqualia $\iota\theta, \iota\lambda$ similiter medialia erunt. Illa autem applicantur secundum lineam rationalem, nempe $\angle\iota$: rationalis est ergo utraque lineæ $\angle\theta, \kappa\lambda$ & incommensurabilis longitudine lineæ $\angle\iota$ per 23 huius. Sed quia lineæ $\alpha\beta, \beta\gamma$ posite sunt potentia commensurabiles: ergo quadratum $\alpha\lambda$ est commensurabile quadrato $\beta\epsilon$. similiter igitur illis æqualia parallelogramma $\iota\theta, \iota\lambda$ erunt inter se commensurabilia. Sed sicut se habet parallelogrammum $\iota\theta$ ad parallelogrammum $\iota\lambda$, ita se habet lineæ $\angle\theta$, ad lineam $\kappa\lambda$ per primum sexti. Ergo per decimum huius lineæ $\angle\theta$ erit commensurabilis longitudine lineæ $\kappa\lambda$. Lineæ ergo $\angle\theta, \kappa\lambda$ sunt rationales, longitudine inter se commensurabiles. inter se dico longitudine commensurabiles. Nam ipsi lineæ $\angle\iota$ propter quam sunt rationales, sunt longitudine incommensurabiles, ut modo probatum est. Ergo parallelogrammum contentum ex illis lineis $\angle\theta, \kappa\lambda$ est rationale per 20 huius. & quoniam

EVCLIDIS ELEMENTOR.

linea $\beta \lambda$ est æqualis lineæ $\beta \alpha$, lineæ
 uerò $\zeta \beta$ æqualis lineæ $\beta \gamma$: est igitur
 sicut lineæ $\beta \lambda$ ad lineam $\beta \gamma$, ita li-
 nea $\alpha \zeta$ ad lineam $\beta \zeta$. Sed sicut lineæ
 $\lambda \beta$ ad lineam $\beta \gamma$, ita quadratū $\lambda \alpha$
 ad parallelogrammum $\alpha \gamma$ per pri-
 mum sexti. sicut autem lineæ α , ad
 lineam $\beta \zeta$, ita parallelogrammum
 $\alpha \gamma$ ad quadratū ϵ . Est igitur sicut
 quadratū $\alpha \lambda$ ad parallelogrammū
 $\alpha \gamma$, ita parallelogrammū $\alpha \gamma$ ad qua-
 dratū β . quadrato autē $\alpha \lambda$ æqua-
 le est parallelogrammū $\mu \theta$. paral-
 lelogrammo autē $\alpha \gamma$ æquale est item
 parallelogrammū $\mu \kappa$. quadrato uerò
 β æquale est parallelogrammū λ . Est igitur sicut paral-
 lelogrammū $\mu \theta$ ad parallelogrammū $\mu \kappa$, ita parallelogram-
 mū $\mu \kappa$ ad parallelogrammū $\nu \lambda$. Est ergo per primū sexti
 sicut lineæ $\zeta \theta$ ad lineam $\theta \kappa$, ita lineæ $\theta \kappa$ ad lineam $\kappa \lambda$. Ergo
 parallelogrammū contentum ex lineis $\zeta \theta$, $\kappa \lambda$ est æquale
 quadrato lineæ $\theta \kappa$ per 17 sexti. sed parallelogrammū ex
 lineis $\zeta \theta$, $\kappa \lambda$ est rationale, ut modo probatū est, rationa-
 le est ergo quadratū lineæ $\theta \kappa$. ergo lineæ $\theta \kappa$ erit ratio-
 nalis. Et quidē si ipsa lineæ in quā $\theta \kappa$ fuerit longitudine
 cōmensurabilis lineæ $\theta \mu$, id est lineæ $\zeta \mu$ ipsi æquali, ratio-
 nale tūc erit parallelogrammū $\theta \nu$ per 20 huius. Quod
 si fuerit longitudine incōmensurabilis ipsi lineæ $\zeta \mu$, tunc
 lineæ $\theta \mu$, $\theta \kappa$ sunt rationales potentia tantū cōmensura-
 biles: sic igitur parallelogrammū $\theta \nu$ erit mediale. Ergo
 paral-

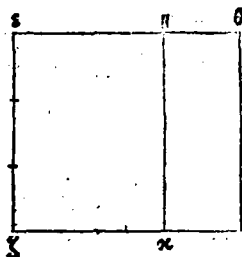
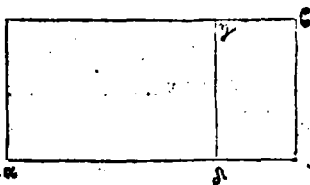


parallelogrammū θ erit uel mediale uel rationale: sed parallelogrammū θ est æquale parallelogrammo $\alpha\gamma$. Ergo parallelogrammum $\alpha\gamma$ erit aut mediale aut rationale. Quomodo autem reperiantur lineæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale parallelogrammum continentes, item aliæ mediale continentes, docebunt theoremata 28. & 29.

Vigesimalseptimum Theorema.

Mediale non est maius quàm mediale superficie rationali.

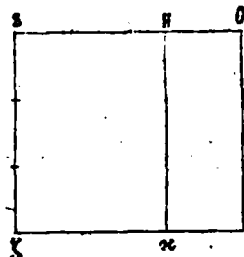
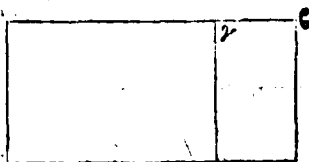
Nam si fieri potest mediale $\alpha\beta$ sit maius quàm mediale $\alpha\gamma$ superficie rationali quæ sit $\alpha\delta$, & proponatur linea rationalis $\iota\zeta$, & mediæ $\alpha\beta$ æquale secundum lineam $\iota\zeta$ applicetur parallelogrammum $\zeta\theta$, cuius alterum latus sit $\iota\theta$. ipsi autem mediæ $\alpha\gamma$ æquale itē auferatur parallelogrammū $\zeta\eta$.



Reliquum ergo $\zeta\alpha$ reliquo $\iota\theta$ æquale est. sed per positionem $\beta\alpha$ est rationale, ergo rationale etiam erit $\iota\theta$. Cum igitur mediale sit utrumque $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, sitq; $\alpha\epsilon$ æquale ipsi $\zeta\theta$: sit etiā $\alpha\gamma$ æquale ipsi $\zeta\eta$, mediale est ergo utrumque etiam $\zeta\theta$, $\zeta\eta$. & secundum lineam rationalem $\iota\zeta$ applicatur. rationalis est ergo utraq; linea $\theta\iota$, $\iota\eta$ & incommensurabilis longitudine lineæ $\iota\zeta$ per 23 huius. Et quoniam rationale est $\alpha\epsilon$, ipsiq; æquale $\iota\theta$: rationale etiam erit $\iota\theta$, & secundum lineam ra-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

rationalem & uel ei aequalem $\mu\mu$
applicatur: rationalis est ergo
linea $\mu\theta$, & commensurabi-
lis longitudine linea $\mu\mu$ per 21
huius. sed linea $\mu\mu$ est equalis
linea $\mu\zeta$: ergo linea $\mu\theta$ est ra-
tionalis, & cōmensurabilis lō-
gitudine linea $\mu\zeta$. sed & linea
 $\mu\mu$ rationalis est & incommen-
surabilis longitudine linea $\mu\zeta$.



Ergo linea $\mu\mu$ erit incommen-
surabilis longitudine linea $\mu\theta$ per 14 huius. Est autē fi-
cut linea $\mu\mu$ ad lineam $\mu\theta$, ita quadratū linea $\mu\mu$ ad pa-
rallelogrammum ex $\mu\mu, \mu\theta$ per lemma suprapositū post
theoremata 22. Incommensurabile est ergo quadratum li-
nea $\mu\mu$ parallelogrammo ex lineis $\mu\mu, \mu\theta$ per 10 huius. sed
quadrato linea $\mu\mu$ commensurabilia sunt quadrata li-
nearū $\mu\mu, \mu\theta$. ambo enim sunt rationalia, ut modo pro-
batum est. Ergo quadrata linearum $\mu\mu, \mu\theta$ sunt incommen-
surabilia parallelogrammo ex lineis $\mu\mu, \mu\theta$ per 14
huius. parallelogrammo uero ex lineis $\mu\mu, \mu\theta$ commen-
surabile est id quod fit bis ex lineis $\mu\mu, \mu\theta$ (habent enim
proportionem sicut numerus ad numerum, nempe sicut
unitas ad binariū, aut sicut binarius ad quaternariū:
itaque per 6 huius sunt commensurabilia) Ergo per ean-
dem 14 huius, id quod fit bis ex lineis $\mu\mu, \mu\theta$ est incommen-
surabile quadratis linearum $\mu\mu, \mu\theta$. hoc breuius conclu-
ditur per corollarium 14. theorematis. Sed quadrata li-
nearum $\mu\mu, \mu\theta$ & id quod fit bis ex lineis $\mu\mu, \mu\theta$ sunt
equalia

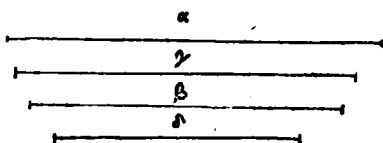
aqualia quadrato totius lineæ ϵ θ per 4. secundi. Ergo quadratum lineæ ϵ θ est incommensurable quadratis linearum ϵ η , η θ per 17 huius. sed quadrata linearum ϵ η , η θ sunt rationalia: ergo quadratum lineæ ϵ θ est irrationalis. irrationalis est ergo lineæ ϵ θ . Sed modo demonstratum est eam esse rationalem, quod fieri nullo modo potest. non igitur mediale maius est mediali superficie rationali.

Vigesimumoctauum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cōmensurabiles rationale comprehendentes.

Proponantur duæ rationales lineæ potentia tantum commensurabiles α , ϵ : sumaturq; media proportionalis inter eas

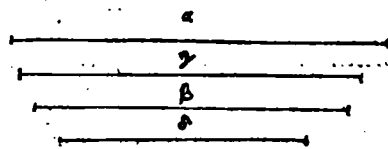
linea γ , sitq; sicut lineæ α ad lineam ϵ , ita



linea γ ad lineam α per 13 sexti. Cū igitur lineæ α , ϵ sint rationales potentia tantum commensurabiles, parallelogrammum comprehensum ex lineis α , ϵ , hoc est quadratum lineæ γ (nam quadratum lineæ γ est æquale parallelogrammo ex lineis α , ϵ per 17 sexti) est mediale: medialis est ergo lineæ γ . Et quoniam est sicut lineæ α ad lineam ϵ , ita lineæ γ ad lineam α . erit sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ϵ , ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ α per 22. 6. sed quadrata linearum α , ϵ sunt commensurabilia, quia lineæ α , ϵ posite sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo ϵ quadrata linearum γ , α sunt etiam commensurabilia per

EVCLIDIS ELEMENTOR.

10 huius. ergo ϵ li-
nea γ , δ sunt etiā po-
tentia commensura-
biles per diffinitionē.

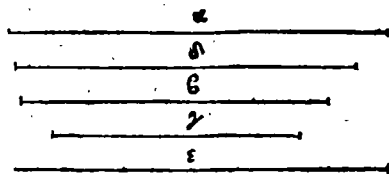


Est autē linea γ me-
dialis. Medialis ergo est etiam linea δ per 2. 4 huius. En-
go linea γ , δ sunt mediales potentia tantum commensu-
rabiles. Dico praterea eas continere parallelogrammū
rationale. Cum enim sit sicut linea α ad lineam ϵ , ita li-
nea γ ad lineam δ , permutata ergo proportione erit si-
cut linea α ad lineam γ , ita linea ϵ ad lineam δ . sed sicut
est linea α ad lineam γ , ita linea γ ad lineam β . ergo si-
cut linea γ ad lineam β , ita linea β ad lineam δ . ergo pa-
rallelogrammum ex lineis γ , δ est aequale quadrato li-
neae β : sed quadratum lineae β est rationale, quia linea β
posita est rationalis. Rationale est ergo parallelogram-
mum ex lineis γ , δ . reperta sunt ergo mediales potentia
tantum commensurabiles rationale continentes, quod
faciendum erat.

Vigesimumnonum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cōmen-
surabiles mediale comprehendentes.

Proponātur tres rationa-
les potentia tantum cō-
mensurabiles α , ϵ , γ , su-
maturq; inter lineas α ,
 ϵ media proportionalis
 δ per 13. 6. fiatq; sicut li-

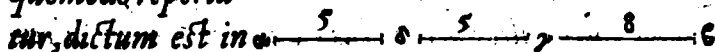


nea

nea β ad lineam γ , ita linea α ad lineam ϵ per 12.6. Cum igitur linea α, β sint rationales potentia tantum cōmensurabiles, ergo parallelogrammum ex α, β , hoc est quadratum linea α est mediale, medialis est ergo linea α . Et cum linea β, γ sint potentia tantum cōmensurabiles, fitq; sicut β ad γ , ita α ad ϵ . ergo α, ϵ sunt potentia tantū cōmensurabiles. sed linea α est medialis. ergo linea ϵ , erit etiam medialis. ergo linea α, ϵ sunt mediales potentia tantum cōmensurabiles. Dico præterea eas continere mediale. Cum enim sit sicut linea β ad lineam γ , ita α ad ϵ : permutatim ergo sicut β ad α , ita γ ad ϵ . sed sicut β ad α , ita α ad α per cōmensam siue contrariam proportionem, quæ probatur per corollarium quarti theorematu libri quinti. Itaque sicut α ad α , ita γ ad ϵ . itaque parallelogrammum ex α, γ est æquale parallelogrammo ex α, ϵ per 16.6. Sed parallelogrammū ex α, γ per 22 huius mediale est, ergo mediale quoque erit parallelogrammum ex α, ϵ . Reperta sunt ergo mediales potentia tantum cōmensurabiles mediale comprehendentes, quod demonstrandum erat.

Lemma.

Reperire duos numeros quadratos huiusmodi, ut numerus qui efficitur ex ipsorū additione sit etiā quadratus. Proponantur duo numeri α, β , ϵ et similes superficiales, qui quomodo reperiatur, dictum est in



theoremate 9. sint

autem ambo pares uel ambo impares, sit etiam maior α, β . Et quia siue à numero pari par auferatur, siue ab

impari impar re-

siduus est par, per α $\xrightarrow{5}$ δ $\xrightarrow{5}$ γ $\xrightarrow{8}$ ϵ

24 & 26.9. Dem-

pro itaque ϵ γ de α ϵ residuus α γ par erit. Secetur nume-
rus α γ in duas partes aequales in puncto δ , numerus er-
go productus ex multiplicatione numerorū α ϵ , ϵ γ cum
numero quadrato producto ex multiplicatione γ δ in
seipsum, est aequalis quadrato producto ex multiplica-
tione β δ in se ipsum, per ea quæ demonstrat Campanus
propositione 16. libri 9. quam demonstrationem sumpsit
ex 6 theoremate libri secundi. Est autē numerus pro-
ductus ex multiplicatione α β , β γ , quadratus, per 1.9.
Reperiti sunt ergo duo numeri quadrati, nempe alter pro-
ductus ex α ϵ , β γ , alter autem ex multiplicatione γ δ in
seipsum, qui compositi per additionē efficiunt numerū
quadratum, nempe productum ex multiplicatione β δ
in seipsum. Corollarium.

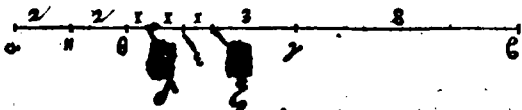
Ex hoc manifestum etiā illud est repertos esse duos nume-
ros quadratos, nempe alterum productum ex multipli-
catione β δ in seipsum, item alterum ex multiplicatio-
ne γ δ in seipsum tales, ut numerus quo excedit alter
alterum, ille inquam numerus qui producitur ex mul-
tiplicatione α β , β γ : sit etiam quadratus quando vi-
delicet numeri α β , β γ fuerint similes superficiales.
Quod si nō fuerint similes superficiales, reperti sunt duo
quadrati, nempe alter productus ex radice β δ & alter
productus ex radice γ δ , quorum excessus, id est nume-
rus quo maior excedit minorem, videlicet productus ex
 α ϵ , β γ non est quadratus.

Lemma.

Lemma.

Reperire duos quadratos números huiusmodi ut compositus ex ipsorum additione ne sit quadratus.

Sit numerus productus ex multiplicatione numerorum

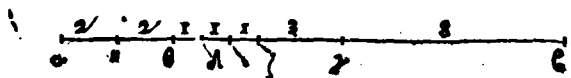


$\alpha \gamma, \beta \gamma$, ut diximus in proximo lemmate, quadratus: sitq; numerus $\gamma \alpha$ par, diuidaturque idem numerus $\gamma \alpha$ in duas partes aequales in puncto λ . Manifestum est numerum quadratum qui fit ex multiplicatione $\alpha \beta, \epsilon \gamma$, cum quadrato radices $\gamma \lambda$, aequalem esse quadrato radices $\beta \lambda$, per ea quae dicta sunt in proximo lemmate. auferatur unitas ex $\alpha \gamma$, quae unitas sit λ . Ergo quadratus productus ex multiplicatione $\alpha \beta, \epsilon \gamma$; cū quadrato radices $\gamma \lambda$, minor est quadrato radices $\beta \lambda$. Dico itaque numerū compositū ex quadrato producto per multiplicationē $\alpha \epsilon, \beta \gamma$, & quadrato radices $\gamma \lambda$, non esse quadratū. Quod si dicas esse quadratū, simul oportet eū esse maiore aut aequalē aut minore quadrato radices $\epsilon \lambda$. Primum non potest eo maior esse. Modo enim probatū est numerū productū ex $\alpha \epsilon, \beta \gamma$, unā cū quadrato radices $\gamma \lambda$, esse minorem quadrato radices $\epsilon \lambda$: sed inter quadratū radices $\beta \lambda$ & quadratum radices $\epsilon \lambda$, nullus medius quadratus interuenit. Nam radix $\beta \lambda$ excedit radicem β , sola unitate quae unitas in numeros diuidi nullo modo potest. Aut si numerus productus ex $\alpha \epsilon, \beta \gamma$, unā cū quadrato radices $\gamma \lambda$ esset maior quadrato radices $\beta \epsilon$,

EVCLIDIS ELEMENTOR.

oporteret eundem numerum productum ex α , β , γ unà cum quadrato radicis γ , esse equalē quadrato radicis β , cuius modo probatū est cōtrarium. Sit ergo, siquidē illud fieri posse dicis, numerus productus ex α , β , ϵ , γ , unà cum quadrato radicis γ , equalis quadrato radicis β , sitq; numerus α duplus ad unitatē α , id est binarius. Cum igitur totus numerus α γ totius numeri γ sit duplus ex suppositione, & numerus α sit duplus ad unitatē α : ergo residuus numerus γ ad residuū numerū ϵ , duplus erit per 5.5. siue per 7.7. & II. eiusdē 7. Ergo in duas partes aequales diuisus est numerus γ , in puncto ϵ . Numerus itaq; productus ex α , β , γ unà cū quadrato radicis γ , est equalis quadrato radicis ϵ , sed per positionem tuam numerus productus ex α , β , γ unà cū quadrato γ , est equalis eidē quadrato radicis ϵ . Ergo numerus productus ex α , β , γ unà cū quadrato radicis γ , est equalis numero producto ex α , β , γ unà cū quadrato radicis γ , quia quæ uni & eidē sunt equalia, inter se quoq; sunt equalia. sed si ab equalibus equalia demas, quæ remanēt sunt equalia. Ergo numerus productus ex α , β , ϵ , γ , est equalis numero producto ex α , β , γ . Ergo per 17. uel 18. 7. numerus α β est equalis numero α β minor maiori, quod est impossibile. Non igitur erit numerus productus ex α , β , γ cū quadrato radicis γ , equalis quadrato radicis ϵ . Dico similiter eundem numerum productū ex α , β , γ unà cum quadrato radicis γ , non esse minorem quadrato radicis β . Si enim fieri posse dicas, erit ergo equalis cuipiam numero quadrato minori quàm est quadratus radicis β . sit ergo

ergo numerus ille productus ex $\alpha\beta, \beta\gamma$, unà cum quadrato radicis γ , equalis quadrato radicis βz , sumaturque numerus $\theta\alpha$ duplus ad numerum αz . efficitur similiter ut numerus $\theta\gamma$ sit duplus ad numerum $z\gamma$, ita ut etiam $\theta\gamma$ secetur in partes duas aequales in puncto z . ideoque simul numerus productus ex $\theta\beta, \beta\gamma$ cum quadrato radicis $z\gamma$ erit equalis quadrato radicis βz .



Sed per positionem tuam numerus productus ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ unà cum quadrato radicis γ erat equalis quadrato radicis βz . efficitur ergo ut numerus productus ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ unà cum quadrato radicis γ sit equalis numero producto ex $\theta\epsilon, \epsilon\gamma$, unà cum quadrato radicis γz , quod est impossibile. Nam si esset equalis, cum quadratus radicis γz sit minor quadrato radicis ϵz , oporteret numerum productum ex $\theta\epsilon, \epsilon\gamma$ esse maiorem numero producto ex $\alpha\beta, \beta\gamma$, itaque simul necesse esset numerum $\theta\epsilon$ esse maiorem numero $\alpha\epsilon$, cum tamen sit eo minor. Non erit ergo numerus productus ex $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$ cum quadrato radicis γ equalis numero minori quam sit quadratus radicis ϵz . Sed demonstratum est neque esse posse eidem aequalem, neque maiorem: igitur numerus ex $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$ unà cum quadrato radicis γ , compositus quadratus esse nullo modo potest.

Trigesimum Theorema.

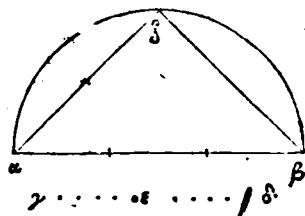
Reperire duas rationales potentia tantum commen-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

surabiles huiusmodi, ut maior ex illis possit plusquam minor quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine.

Esto propofita linea rationalis

$\alpha \epsilon$, & duo numeri quadrati $\gamma \delta$, huiusmodi, ut excessus illorū $\gamma \epsilon$ ne sit quadratus numerus per corollarium prioris lemmatis ex



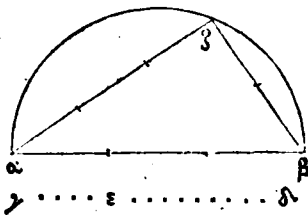
duobus modo dictis: describatūque super linea $\alpha \beta$, semicirculus $\alpha \zeta \beta$, fiatq; sicut numerus $\gamma \delta$ ad numerum $\gamma \epsilon$, ita quadratum lineæ $\alpha \beta$ ad quadratum alterius lineæ quæ sit $\alpha \zeta$ per lemma positum post 6. theorema huius libri, & ducatur linea $\alpha \zeta$. Cum igitur sit sicut quadratum lineæ $\alpha \beta$ ad quadratum lineæ $\alpha \zeta$, ita numerus $\gamma \delta$ ad numerum $\gamma \epsilon$, ergo commensurabile est quadratum lineæ $\alpha \epsilon$, ad quadratum lineæ $\alpha \zeta$ per 6 huius. sed quadratum lineæ $\alpha \beta$ est rationale. ergo etiam rationale erit quadratum lineæ $\alpha \zeta$. Rationalis est ergo linea $\alpha \zeta$. Cumq; numerus $\delta \gamma$, ad numerum $\gamma \epsilon$ proportionem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum per 24. 8. à destructione consequentis: neque similiter quadratum lineæ $\alpha \epsilon$ ad quadratum lineæ $\alpha \zeta$ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo linea $\alpha \beta$ erit incommensurabilis longitudine lineæ $\alpha \zeta$, per 9 huius. ergo linea $\alpha \beta$, $\alpha \zeta$, sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Cumque sit sicut numerus $\gamma \delta$ ad numerum $\gamma \epsilon$, ita quadratum lineæ $\alpha \beta$, ad quadratū lineæ $\alpha \zeta$. per euer-

sam

Item ergo porportionem quæ dicitur ααζφφι λόγος, demonstraturque per corollarium 19 theorematibus libri 5. sicut numerus γ α ad numerum α ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ β ζ, qui est excessus quadrati lineæ α ε, supra quadratum lineæ α ζ per lemma positum post 14 huius libri. sed numerus γ α ad numerum α ε habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ ε ζ proportionem habet quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo lineæ α ε est commensurabilis longitudine lineæ ε ζ, per 9 huius. Est autem quadratum lineæ α ε æquale duobus quadratis linearum α ζ, ζ ε. Ergo lineæ α β plus potest quam lineæ α ζ quadrato lineæ ε ζ sibi commensurabilis longitudine. Reperta sunt ergo duæ rationales potentia tantum cōmensurabiles huiusmodi &c. quod demonstrandum erat. Lemma.

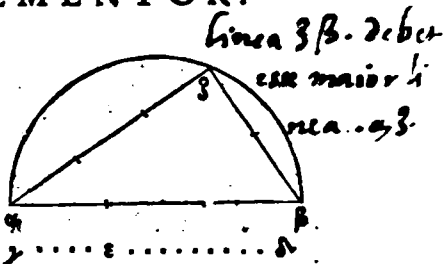
Reperire duas rationales potentia tantum commensurabiles huiusmodi, ut maior plus possit quam minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.

Proponatur lineæ rationalis α ε, & numeri quadrati duo γ ε, ε α, tales ut compositus ex ipsis nempe γ α, ne sit quadratus per alterū lemma positum, post 29 theorema huius libri: describatūque super lineæ α ε semicirculus α ζ ε, fiatq; sicut numerus α γ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ: duca-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

utque linea à puncto γ in
punctum ϵ qua sit $\gamma \beta$, quæ-
admodū in præcedēti theo-
remate. similiter hīc demon-
strabimus lineas $\alpha \epsilon$, $\alpha \gamma$, esse
rationales potentia tantum



commensurabiles. Et cum sit sicut numerus $\Lambda\gamma$ ad numerum $\gamma\epsilon$, ita quadratum linea $\alpha\epsilon$ ad quadratum linea $\alpha\zeta$. Per euerfam ergo proportionem quemadmodum numerus $\Lambda\gamma$ ad numerum $\Lambda\epsilon$, ita quadratum linea $\alpha\beta$ ad quadratum linea $\alpha\zeta$, ut diximus in precedenti theoremate. sed numerus $\gamma\Lambda$ ad numerum $\Lambda\epsilon$ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum per corollarium illatum à destructione consequentis 24 lib. 8. Neque ergo quadratum linea $\alpha\beta$ ad quadratum linea $\beta\zeta$ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo per 9 huius linea $\alpha\epsilon$ erit incommensurabilis longitudine linea $\alpha\zeta$. Potest autem linea $\alpha\epsilon$ plus quàm linea $\alpha\zeta$ quadrato linea $\epsilon\zeta$ sibi incommensurabilis longitudine. Ergo linea $\alpha\beta$, $\alpha\zeta$ sunt duæ rationales potentia tatum commensurabiles, & potest linea $\alpha\beta$ plus quàm linea $\alpha\zeta$ quadrato linea $\alpha\zeta$ sibi incommensurabilis longitudine.

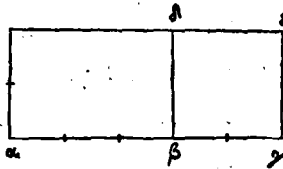
Lemma.

*Si sint duæ lineæ rectæ habentes inter se aliquam propor-
tionem, erit ut lineæ rectæ ad lineam rectam, ita paral-
lelogrammum contentum ex ambabus ad quadratum
lineæ minoris ex illis duabus. Hoc lemma nihil amplius
affert quàm primum theorema libri sexti, itaque non
reperitur*

reperitur in quibusdam exemplaribus.

Sint duæ rectæ lineæ α ϵ , ϵ γ in aliqua proportionē. Dico sicut lineæ α ϵ ad lineam ϵ γ , ita esse parallelogrammum ex α ϵ , ϵ γ ad quadratū

ϵ γ . Describatur enim quadratū lineæ ϵ γ , quod sit ϵ λ ϵ γ , compleaturq; parallelogrammum α λ . manifestum

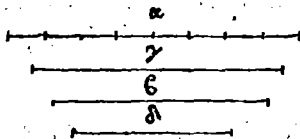


est sicut lineæ α ϵ ad lineam ϵ γ , ita parallelogrammū α λ ad parallelogrammum uel quadratum ϵ ϵ per primam sexti. Est autem parallelogrammum α λ contentū ex lineis α ϵ , ϵ γ , est enim æqualis lineæ ϵ γ lineæ ϵ λ . parallelogrammum autem ϵ ϵ est quadratum lineæ ϵ γ . Ergo sicut lineæ α β ad lineam ϵ γ , ita parallelogrammum ex α ϵ , ϵ γ ad quadratum lineæ ϵ γ . quod demonstrandum erat.

Trigesimum primum Theorema.

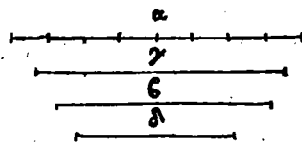
Reperire duas lineas mediales potentia tantum cōmensurabiles rationalem superficiem continentes, tales inquam, ut maior possit plusquā minor quadrato lineæ sibi cōmensurabilis longitudine.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α , ϵ , tales ut maior α possit plusquā minor ϵ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 30 theorema, sitq; parallelogrammo ex α , β æquale quadratum lineæ γ (quod sit reperta lineæ me-



Q

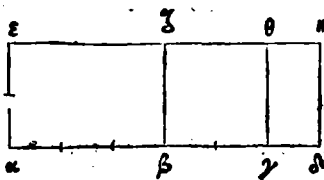
dia proportionali, nempe
 linea γ inter α, β , ut tra-
 ditur libro sexto). Est au-
 tem mediale parallelogra-



mū ex α, β per 22 huius libri. ergo similiter mediale erit
 quadratū lineæ γ . linea ergo γ erit medialis. Quadra-
 to autē lineæ β æquale sit parallelogrammū ex γ, δ , re-
 perta tertia proportionali, nempe linea δ , ad duas lineas
 γ, β , ut traditur libro 6. Est autem quadratum lineæ β
 rationale. est ergo & parallelogrammum ex γ, δ ratio-
 nale. Et quoniā sicut linea α ad lineam β , ita est paral-
 lelogrammum ex α, β ad quadratum lineæ β per lem-
 ma modo positum. Sed parallelogrammo ex α, β , æquale
 est quadratum lineæ γ . quadrato autē lineæ ϵ æquale est
 parallelogrammum ex lineis γ, δ , ut modo probatū est.
 Est ergo sicut linea α ad lineam β , ita quadratum lineæ
 γ ad parallelogrammum ex γ, δ . Sed sicut est quadratū
 lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ , ita linea γ ad li-
 neam δ per lemma positum ante 23 huius libri. Ergo si-
 cut linea α ad lineam β , ita linea γ ad lineā δ . Sed linea
 α est posita commensurabilis potentia tantum lineæ β .
 Ergo etiam linea γ est commensurabilis potentia tantū
 lineæ δ per 10 huius. Sed linea γ est medialis, ergo etiam
 linea δ erit medialis per 24 huius. Et quoniam est sicut
 linea α ad lineam β , ita linea γ ad lineam δ . lineæque α
 potest plusquam linea β quadrato lineæ sibi commen-
 surabilis longitudine per suppositionem. Ergo etiam li-
 nea γ poterit plusquam linea δ quadrato lineæ sibi cō-
 mēsurabilis longitudine per 15 huius. Reperta sunt er-

go due mediales potentia tantum commensurabiles γ , α , rationalem superficiem continentes, potestque linea γ plusquam linea α quadrato linea sibi commensurabilis longitudine. Similiter etiam reperiri possunt due mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, tales ut maior possit plusquam minor quadrato linea sibi incommensurabilis longitudine, quando videlicet linea α poterit plusquam linea β quadrato linea sibi incommensurabilis longitudine. quod facere docuit prius lemma positum post 30 theorema huius libri. Manente eadem constructione potest facilius illa pars huius theorematism demonstrari ab illis verbis. Et quoniam sicut linea α usque ad ea verba, Sed linea α est posita commensurabilis. Nam linea γ , β , α sunt continue proportionales per secundam partem 17. 6. Sed etiam α , γ , ϵ sunt tres continue proportionales. Ergo per 11. 5. erit sicut linea α ad lineam γ , ita linea β ad lineam α . Ergo permutata proportionem sicut linea α ad lineam β , ita linea γ ad lineam α &c. Lemma.

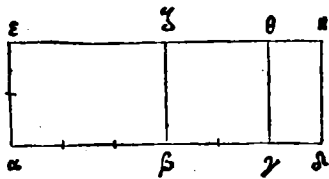
Si sint tres linea recta habentes proportionem aliquam inter se, erit sicut prima ad tertiam, ita parallelogrammum ex prima & media ad parallelogrammum ex media & tertia. Sint tres linea recta in aliqua proportionem $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$. Dico sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\alpha$, ita esse parallelogrammum ex $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$ ad parallelogrammum ex $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$. Erigatur enim ex puncto α supra lineam $\alpha\beta$ perpendicularis linea $\alpha\epsilon$,



Qij

EVCLIDIS ELEMENTOR.

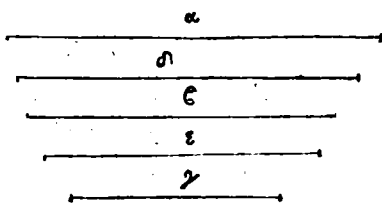
sitq; illa α & equalis linea ϵ ζ ,
 & à pūcto ϵ linea α δ ducatur
 parallela linea ϵ χ , & à
 singulis punctis β , γ , δ , linea
 α ϵ , parallela linea ducan-
 tur β ζ , γ θ , δ χ . Cūque sit sicut linea α β ad lineam β γ ,
 ita parallelogrammum α ζ ad parallelogrammum ϵ θ ,
 per primam sexti. sicut autem linea β γ ad lineam γ δ , ita
 parallelogrammum β θ ad parallelogrammum γ χ . Per
 equam itaque proportionem erit sicut linea α β ad li-
 neam γ δ , ita parallelogrammum α ζ ad parallelogram-
 mum γ χ . Est autem parallelogrammū α ζ ex lineis α β ,
 β γ . posita est enim equalis α ϵ linea β γ , estq; parallelo-
 grammum γ χ ex lineis ϵ γ , γ δ . Nam β γ est equalis li-
 nea γ θ , quia γ θ est equalis linea α ϵ per 34.1. Ergo si sint
 tres linea recta & c. quod demonstrandum erat.



Trigesimumsecundum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potētia tantum cō-
 mensurabiles medialem superficiem continen-
 tes, huiusmodi ut maior plus possit quàm minor
 quadrato lineæ sibi cōmensurabilis longitudine.

Proponantur tres rationales α , β , γ , potentia tantum com-
 mēsurabiles, tales ut li-
 nea α plus possit quàm
 linea γ quadrato lineæ
 sibi commēsurabilis lon-
 gitudine. Et parallelo-
 grāmo ex α , β sit aqua-



le quadratum lineæ α . Parallelogrammum autem ex α, β est mediale, mediale ergo erit, & quadratum lineæ α . ergo lineæ α erit medialis. parallelogrammo uero ex β, γ sit æquale parallelogrammum ex α, ϵ (quod sit reperta quarta proportionali ad lineas α, ϵ, γ quæ sit lineæ ϵ .) Cum itaque sit sicut parallelogrammum ex α, β ad parallelogrammum ex ϵ, γ , ita lineæ α ad lineam γ per lemma proximū. Sed parallelogrammo ex α, ϵ est æquale quadratum lineæ α : parallelogrammo uero ex β, γ est æquale parallelogrammum ex α, ϵ . Est ergo sicut lineæ α ad lineam γ , ita quadratū lineæ α , ad parallelogrammum ex α, ϵ . Sed sicut quadratum lineæ α ad parallelogrammū ex α, ϵ , ita lineæ α ad lineam ϵ per lemma positum post 22 theorema. Ergo sicut lineæ α ad lineam γ , ita lineæ α ad lineam ϵ . Sed lineæ α est communisurabilis potentia tantum lineæ γ . Ergo lineæ α erit communisurabilis potentia tantū lineæ ϵ . Sed lineæ α est medialis. ergo lineæ ϵ erit etiā medialis per 24 huius. Cūq; sit sicut lineæ α ad lineam γ , ita lineæ α ad lineam ϵ . lineæ autem α possit plus quàm lineæ γ quadrato lineæ sibi cōmensurabilis longitudine. Ergo lineæ α poterit plusquā lineæ ϵ quadrato lineæ sibi communisurabilis longitudine per 15 huius. Dico præterea parallelogrammum ex α, ϵ esse mediale. Nam est æquale parallelogrammo ex β, γ quod est mediale per 22 huius. Mediale est ergo similiter parallelogrammum ex α, ϵ . Reperta sunt ergo duæ mediales potentia tantum communisurabiles, nempe α, ϵ &c. quod fecisse oportuit. Rursus eadem ratione reperiuntur duæ mediales potentia tantum communisurabi-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

les mediale continentes, huiusmodi, ut maior plus possit
quàm minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis lon-
gitudine, quandocunque lineæ α plus poterit quàm li-
nea γ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.

Lemma.

Sit triangulum rectangulum $\epsilon \alpha \gamma$, habens rectum angulū
 α , ducaturque perpendicularis $\alpha \lambda$. dico primò paralle-
logrammum ex $\gamma \beta$, $\beta \lambda$ esse

æquale quadrato lineæ $\beta \alpha$.

dico secundò parallelogram-

mmum ex $\beta \gamma$, $\gamma \lambda$ esse æquale

quadrato lineæ $\gamma \alpha$. dico ter-

tiò parallelogrammū ex $\beta \lambda$,

$\lambda \gamma$ esse æquale quadrato li-

neæ $\lambda \alpha$. dico quartò paralle-

logrammum ex $\beta \gamma$, $\alpha \lambda$ esse

æquale parallelogrammo ex $\epsilon \alpha$, $\alpha \gamma$. Quod ad primum

attinet, parallelogrammū ex $\gamma \beta$, $\beta \lambda$ esse æquale quadra-

to lineæ $\epsilon \alpha$, ita demonstratur. Cū ab angulo recto trian-

guli rectanguli ad basim perpendicularis ducta sit lineæ

$\alpha \lambda$. Ergo triangu- $\alpha \beta \lambda$, $\alpha \lambda \gamma$ sunt similia toti triangu-

lo $\alpha \beta \gamma$, & ipsa inter se per 8.6. Et cum triangulū $\alpha \beta \gamma$

fit simile triangulo $\alpha \beta \lambda$. sunt igitur ambo triagula æ-

qualium angulorum per definitionem similium figura-

rum. Ergo per 4.6. sicut lineæ $\gamma \beta$ ad lineā $\beta \alpha$, ita lineæ

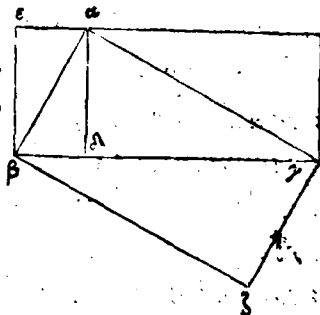
$\beta \alpha$ ad lineam $\beta \lambda$. Ergo parallelogrammum ex $\gamma \beta$, $\beta \lambda$

erit æquale quadrato lineæ $\alpha \epsilon$ per 17.6. Quod ad secū-

dum, parallelogrammū ex $\beta \gamma$, $\gamma \lambda$ esse æquale quadra-

to lineæ $\alpha \gamma$, eadem ratione demonstratur. Nam trian-

gulum



gulum $\alpha \beta \gamma$ est simile triangulo $\alpha \delta \gamma$. Est igitur sicut linea $\beta \gamma$ ad lineam $\alpha \gamma$, ita linea $\alpha \gamma$ ad lineam $\delta \gamma$. Ergo parallelogrammum ex $\beta \gamma, \gamma \delta$ est æquale quadrato lineæ $\alpha \gamma$. Quod ad tertium, parallelogrammum ex $\beta \delta, \delta \gamma$ esse æquale quadrato lineæ $\delta \alpha$, ita demonstratur. Cum à recto angulo trianguli rectanguli ad basim ducta sit perpendicularis, illa perpendicularis est media proportionalis inter sectiones basis per corollarium 8. theorematum libri 6. Est igitur sicut linea $\beta \delta$ ad lineam $\delta \alpha$, ita $\alpha \delta$ ad $\delta \gamma$. Ergo parallelogrammum ex $\delta \alpha, \delta \gamma$ est æquale quadrato lineæ $\delta \alpha$. Quod ad quartum, parallelogrammum ex $\delta \gamma, \alpha \delta$ esse æquale parallelogrammo ex $\delta \alpha, \alpha \gamma$, ita demonstratur. Cum enim, sicut modo dictum est, triangulum $\alpha \beta \gamma$ sit simile triangulo $\alpha \delta \gamma$, & ideo æqualium angulorum. Est igitur sicut linea $\beta \gamma$ ad lineam $\gamma \alpha$, ita linea $\delta \alpha$ ad lineam $\alpha \delta$ per 4.6. Ergo per 16.6. parallelogrammum ex $\beta \gamma, \alpha \delta$ esse æquale parallelogrammo ex $\beta \alpha, \alpha \gamma$. Dico præterea si compleatur parallelogrammum rectangulum ex $\beta \gamma, \alpha \delta$ quod sit $\epsilon \gamma$, compleaturq; parallelogrammum ex $\beta \alpha, \alpha \gamma$ quod sit $\alpha \zeta$. Alia ratione demonstrabitur, parallelogrammum $\epsilon \gamma$ esse æquale parallelogrammo $\alpha \zeta$. Nam utrumque ipsorum est duplum trianguli $\alpha \gamma \beta$, per 41.1. Et quæ unius & eiusdem sunt dupla, inter se sunt æqualia. ergo &c.

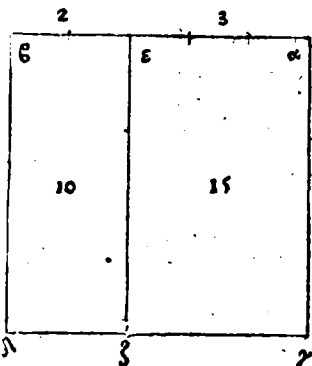
Lemma.

Si linea recta scindatur in partes duas inæquales, erit ut maior portio ad minorem, ita parallelogrammum ex tota & maiore portione ad parallelogrammum ex tota & minore. Recta linea $\alpha \beta$ diuidatur in partes

EVCLIDIS ELEMENTOR.

*duas inæquales in puncto, sitq; α maior portio. Dico
sicut α ad lineã β , ita parallelogrammũ ex $\beta \alpha$, α ad
parallelogrammũ ex $\epsilon \alpha$, β .*

Describatur enim quadratū
lineæ $\alpha \epsilon$ quod sit $\alpha \gamma \delta \epsilon$, & à
puncto utrique $\alpha \gamma, \delta \beta$ pa-
rallela ducatur $\epsilon \zeta$, manifestū
est sicut lineæ $\alpha \epsilon$ ad lineā $\delta \beta$,
ita parallelogrammū $\alpha \zeta$ ad
parallelogrammū $\epsilon \zeta$ per pri-
mam sexti. Est autem paral-
lelogrammum $\alpha \zeta$ contentum



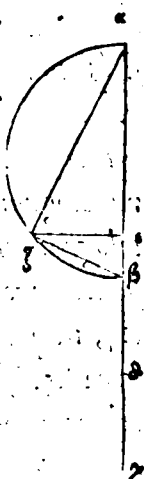
ex lineis $\beta\alpha, \alpha\epsilon$. est enim linea $\alpha\gamma$ equalis lineæ $\alpha\beta$, parallelogrammum uerò $\zeta\epsilon$ est cōtentum ex lineis $\alpha\beta, \zeta\epsilon$. Nam $\alpha\zeta$ est equalis lineæ $\alpha\epsilon$, sicut ergo linea $\alpha\epsilon$ ad lineam $\zeta\epsilon$, ita parallelogrammum ex $\beta\alpha, \alpha\epsilon$, ad parallelogrammum ex $\alpha\beta, \zeta\epsilon$. quod demonstrandum erat.

Hoc lemma nihil aliud affert quàm quod primum
theoremæ sexti. Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ inæquales, diuidatûrque minor in partes duas æquales, parallelogrammum ex ambabus lineis inæqualibus est duplum parallelogrammi ex maiore & media minoris. Quanuis hoc lemma sit in græco exemplari post 33. theorema, uisum est tamen hoc loco ponere, quia sequentis theorematís 33. demonstratiõnem adiuuat. Sint duæ rectæ inæquales $\alpha \beta$, quarum maior sit $\alpha \beta$, diuidatûrque $\beta \gamma$ bifariam in puncto δ . Dico parallelogrammum ex $\alpha \delta$, $\beta \gamma$ esse duplum parallelogrammi ex $\alpha \beta$, & δ . ducatur enim à puncto β super lineam

EVCLIDIS ELEMENTOR.

lelogrammū quadrata figura deficiens per
 28.6. (Hæc autem uerba, quadrata figura
 deficiēs, idem significant quod ea quibus uſi
 ſumus in 18 & 19 theoremate, ex qua maio
 re tantum excurrat extra latus parallelo
 grammi, quantum eſt alterum latus ipſius
 parallelogrammi.) ſitq; parallelogrammū ex
 $\alpha\iota, \beta$. deſcribatur ſuper linea $\alpha\epsilon$ ſemicir
 culus $\alpha\epsilon\zeta$, & à linea $\alpha\beta$ ad circumferentiā
 ſemicirculi ducatur perpendicularis $\iota\zeta$, du
 canturq; linea $\alpha\zeta, \zeta\beta$. Cum igitur ſint due
 rectæ inæquales $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$, poſſitq; linea $\alpha\beta$ pluſquam
 linea $\beta\gamma$ quadrato linea ſibi incommenſurabilis longi
 tudine: quartæ autē parti quadrati linea minoris $\beta\gamma$
 hoc eſt quadrato illius dimidiæ quod eſt $\alpha\beta$, æquale pa
 rallelogrammum deficiens figura quadrata applicatū
 ſit ſecundum lineam $\alpha\beta$, quod parallelogrammum eſt
 ex $\alpha\iota, \beta$. Ergo incommenſurabilis eſt longitudine linea
 $\alpha\iota$ linea $\epsilon\beta$, per ſecundam partem 19 huius libri. Eſt au
 tem ſicut linea $\alpha\iota$ ad lineam $\epsilon\beta$, ita parallelogrammū
 ex $\beta\alpha, \alpha\iota$ ad parallelogrammum ex $\alpha\beta, \beta\epsilon$, per lemma
 penultimo loco poſitum ante hoc theorema. Eſt autē pa
 rallelogrammum ex $\alpha\beta, \alpha\iota$ æquale quadrato linea $\alpha\zeta$,
 per ſecundam partē lemmatis primo poſiti poſt 32 the
 rema: parallelogrammum autem ex $\alpha\beta, \beta\epsilon$ eſt æquale
 quadrato linea $\beta\zeta$ per primā partem eiſdem lemma
 tis. Ergo incommenſurabile eſt quadratū linea $\alpha\zeta$ qua
 drato linea $\beta\zeta$ per 10 huius, ergo linea $\alpha\zeta, \zeta\beta$ ſunt po
 tentia incommenſurabiles. Sed quia linea $\alpha\epsilon$ eſt ratio
 nalis,



nalis, rationale est ergo quadratum ipsius, ergo compositum ex additione amborum quadratorum, nempe descriptorum ex lineis $\alpha\zeta, \zeta\epsilon$, quæ sunt æqualia quadrato lineæ $\alpha\beta$ per 47.1. erit inquam illud compositum rationale. Rursum parallelogrammum ex $\alpha\zeta, \zeta\epsilon$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\zeta$ per tertiam partem eiusdem lemmatis. Sed per suppositionem idem parallelogrammum ex $\alpha\zeta, \zeta\epsilon$ est æquale quadrato lineæ $\beta\alpha$. Ergo lineæ $\zeta\epsilon$ est æqualis lineæ $\epsilon\alpha$. ergo lineæ $\beta\gamma$ est dupla ad lineam $\zeta\epsilon$. Quare & parallelogrammum ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ est duplū ad parallelogrammū ex $\alpha\zeta, \zeta\epsilon$, per proximū lemma, quod perperam positū esse diximus in exemplari græco post huius theorematism demonstrationem. Sed parallelogrammum ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ est mediale per suppositionem & 22 theorema. Ergo etiam mediale erit parallelogrammum ex $\alpha\beta, \zeta\epsilon$ per corollarium 24 theorematism. Sed parallelogrammum ex $\alpha\beta, \zeta\epsilon$ est æquale parallelogrammo ex $\alpha\zeta, \zeta\epsilon$ per quartam partem illius lemmatis positi post 32. theorema. Ergo parallelogrammum ex $\alpha\zeta, \zeta\epsilon$ erit mediale. Sed modo probatū est compositū ex quadratis earundem linearum $\alpha\zeta, \zeta\epsilon$ esse rationale. Reperta sunt ergo duæ lineæ rectæ, nempe $\alpha\zeta, \zeta\epsilon$ potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarū rationale: parallelogrammum uerò ex eisdem cōtentiū, mediale, quod faciendum erat.

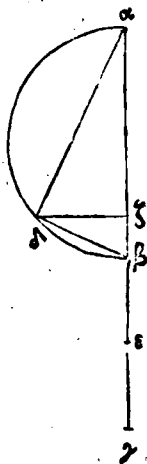
Trigesimumquartum Theorema.

Reperire lineas duas rectas potentia incommensurabiles conficientes compositum ex ipsarū qua-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

dratis mediale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum rationale.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$ rationale continentes parallelogrammum ex ipsis, tales inquam, ut linea $\alpha\beta$ possit plus quàm linea $\beta\gamma$ quadrato linea sibi incommensurabilis longitudine, per postremam partem demonstrationis theorematís 31. Describatúrque super linea $\alpha\epsilon$ semicirculus $\alpha\delta\beta$. diuidatur etiam linea $\epsilon\gamma$ bifariam ζ æqualiter in puncto ζ : & secundũ lineã $\alpha\beta$ quadrato linea $\beta\gamma$ æquale parallelogrammum applicetur, deficiens figura quadrata quod parallelogrammum sit ex $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, ut dictũ est in proximo theoremate. Incommensurabilis est ergo longitudine linea $\alpha\zeta$ lineã $\zeta\beta$, ut ibidem dictum est: & à puncto ζ erigatur linea $\zeta\delta$ perpendicularis super linea $\alpha\beta$, ducantúrque linea $\alpha\delta$, $\delta\beta$. Et quoniam est sicut linea $\alpha\zeta$ ad lineam $\zeta\beta$, ita parallelogrammum ex $\beta\alpha$, $\alpha\zeta$ ad parallelogrammum ex $\beta\alpha$, $\beta\zeta$ per alterum lemma positum ante theorema 33. uel per primũ sexti. Ergo per 10 huius, parallelogrammum ex $\beta\alpha$, $\alpha\zeta$ est incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\epsilon$, $\beta\zeta$. Sed per lemma positum post 32 theorema, parallelogrammum ex $\epsilon\alpha$, $\alpha\zeta$ est æquale quadrato linea $\alpha\delta$: parallelogrammũ uerò ex $\alpha\beta$, $\epsilon\zeta$ est item æquale quadrato linea $\beta\delta$. Incommensurabile est ergo quadratum linea $\alpha\delta$ quadrato linea $\beta\delta$. Ergo linea $\alpha\delta$, $\delta\beta$ sunt potentia incommensurabiles.



63
*rabiles. Et quoniam quadratum lineæ $\alpha\beta$ est mediale, quod est æquale duobus quadratis duarum linearum $\alpha\lambda$, $\lambda\beta$ per 47.1. Ergo compositum ex illis duobus quadratis linearum $\alpha\lambda$, $\lambda\beta$ est etiam mediale. Et quoniam lineæ $\beta\gamma$ est dupla ad lineam $\lambda\zeta$, ut probatū est in proximo theoremate. Ergo parallelogrammum ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ erit duplum ad parallelogrammum ex $\alpha\beta$, $\lambda\zeta$ per lemma positum ante 33 theorema, uel per primam sexti, quare $\epsilon\gamma$ eidem erit commensurabile per 6 huius. Sed per positionem parallelogrammum ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est rationale. ergo parallelogrammum ex $\alpha\beta$, $\lambda\zeta$ est etiam rationale. parallelogrammo uero ex $\alpha\zeta$, $\lambda\zeta$ æquale est parallelogrammum ex $\alpha\lambda$, $\lambda\beta$ per tertiam partem lem- ~~ma~~ *¶ quartam* matis positi post 32. theorema. quare parallelogrammū ex $\alpha\lambda$, $\lambda\beta$ erit etiam rationale. Reperta sunt ergo duæ lineæ rectæ, nempe $\alpha\lambda$, $\lambda\beta$ potentia incommensurabiles $\epsilon\gamma$ c.*

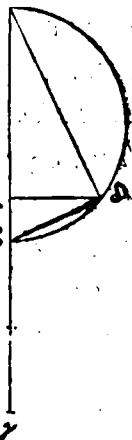
Trigesimumquintum Theorema.

Reperire duas lineas rectas potentia incommensurabiles, conficientes id quod ex ipsarum quadratis componitur mediale, simulque parallelogrammum ex ipsis cōtentū, mediale, quod præterea parallelogrammum sit incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$ mediale continentes, tales inquam, ut $\alpha\epsilon$ plus possit quàm $\beta\gamma$ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, per postremam partem demonstrationis theorematiss 32. Describatūque super lineam $\alpha\epsilon$

EVCLIDIS ELEMENTOR.

semicirculus $\alpha \beta$, ceteraque constructa sunt eo modo quo in precedentibus. Cum linea $\alpha \gamma$ sit incommensurabilis longitudine linea $\gamma \beta$, est etiam incommensurabilis potentia linea $\alpha \alpha$ linea $\alpha \beta$, per ea quae sunt demonstrata in proximo theoremate. Et quoniam quadratum linea $\alpha \beta$ est mediale, ergo compositum ex quadratis linearum $\alpha \alpha$, $\alpha \gamma$ quod est aequale quadrato linea $\alpha \epsilon$ per 47.1. erit etiam mediale. Et quoniam parallelogrammum ex $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ est aequale alterutri quadrato ex singulis lineis $\beta \epsilon$, $\alpha \gamma$.



nam ex suppositione parallelogrammum ex $\alpha \gamma$, $\gamma \epsilon$ est aequale quadrato linea $\epsilon \beta$. idem etiam parallelogrammum ex lineis $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ est aequale quadrato linea $\alpha \gamma$ per tertiam partem lemmatis positi post 32. theorema. Ergo linea $\alpha \gamma$ est aequalis linea $\epsilon \beta$ dupla est ergo linea $\beta \gamma$ ad lineam $\gamma \alpha$. Quare $\epsilon \gamma$ parallelogrammum ex $\alpha \beta$, $\beta \gamma$ erit duplum ad parallelogrammum ex $\alpha \beta$, $\gamma \alpha$. Itaque sunt commensurabilia per sextam huius. Sed parallelogrammum ex $\alpha \beta$, $\beta \gamma$ est mediale per positionem. Ergo parallelogrammum ex $\alpha \epsilon$, $\gamma \alpha$ erit etiam mediale per corollarium 24. theorematum. Sed parallelogrammum ex $\alpha \epsilon$, $\gamma \alpha$ est aequale parallelogrammo ex $\alpha \alpha$, $\alpha \beta$ per quartam partem eiusdem lemmatis. Ergo parallelogrammum ex $\alpha \alpha$, $\alpha \epsilon$ erit etiam mediale. Et quoniam linea $\alpha \epsilon$ est incommensurabilis longitudine linea $\beta \gamma$: linea uero $\epsilon \gamma$ est commensurabilis longitudine linea $\beta \epsilon$, est ergo linea $\alpha \beta$ longitudine incommensurabilis linea $\beta \epsilon$ per 13. uel 14. huius.

huius. quare & quadratum linea $\alpha \beta$ erit incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha \beta, \beta \gamma$ per primum sexti & 10 huius. Sed quadrato linea $\alpha \epsilon$ est æquale compositum ex quadratis linearum $\alpha \delta, \delta \beta$. parallelogrammo uero ex $\alpha \beta, \beta \gamma$ est æquale parallelogrammum ex $\alpha \beta, \beta \gamma$, hoc est parallelogrammum ex $\alpha \delta, \delta \beta$. Nam parallelogrammum ex $\alpha \beta, \beta \gamma$ est æquale parallelogrammo ex $\alpha \delta, \delta \epsilon$. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearum $\alpha \delta, \delta \epsilon$ parallelogrammo ex eisdem lineis $\alpha \delta, \delta \epsilon$. Reperta sunt ergo duæ rectæ nempe $\alpha \delta, \delta \epsilon$ potentia incommensurabiles & c.

Principium senariorum per compositionem.

Trigesimum sextum Theorema.

Si duæ rationales potentia tantum commensurabiles componantur, tota linea erit irrationalis. Vocetur autem Binomium.

Componantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles $\alpha \beta, \epsilon \gamma$, quales reperire docet 11 huius.

Dico totam lineam $\alpha \gamma$ esse irrationalem. Cum enim sit incommensurabilis longitudine linea $\alpha \beta$, linea $\epsilon \gamma$, posita sunt enim potentia tantum commensurabiles: cumque sit sicut linea $\alpha \epsilon$ ad lineam $\beta \gamma$, ita parallelogrammum ex $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ ad quadratum $\epsilon \gamma$ per 1.6. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ex $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ quadrato linea $\beta \gamma$ per 10 huius. Sed parallelogrammo ex $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ commensurabile est id quod fit bis ex $\alpha \epsilon, \beta \gamma$ per 6. huius. Ergo id quod fit bis ex $\alpha \epsilon, \beta \gamma$ est incommensurabi-

le quadrato linea $\beta \gamma$ α $\beta \quad \gamma$
per 14 huius. Qua-

drato autem linea $\epsilon \gamma$ est commensurabile compositum ex quadratis linearum $\alpha \beta, \epsilon \gamma$ per 16 huius, quia per suppositionem linea $\alpha \beta, \epsilon \gamma$ sunt potentia tantum commensurabiles. Ergo per 14 compositum ex quadratis linearum $\alpha \beta, \epsilon \gamma$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha \beta, \epsilon \gamma$. Ergo per 17 id quod fit bis ex $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ cum quadratis linearum $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$, quod est aequale quadrato totius lineae $\alpha \gamma$ per 4.2. est incommensurabile composito ex quadratis linearum $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$. Sed compositum ex quadratis linearum $\alpha \epsilon, \beta \gamma$ est rationale, quia est commensurabile alterutri quadrato linearum $\alpha \beta, \epsilon \gamma$, quorum utrumque est rationale per positionem. Ergo quadratum linea $\alpha \gamma$ est irrationale, quare & linea $\alpha \gamma$ erit irrationalis. Vocetur autem linea illa Binomium. Hic autem & in ceteris deinceps denominationibus linearum irrationalium, nihil innotandum censuimus de uocibus triis & iamdudum inter latinos geometras receptis, nisi si quando ratio contrarium suaserit.

Trigesimumseptimum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes componantur, tota linea est irrationalis. Vocetur autem bimediale prius.

Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ rationale conti- $\beta \quad \gamma$
nentes (quales reperire docet

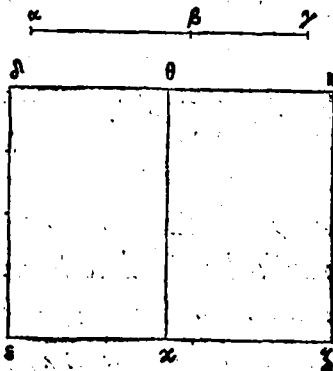
28) dico totam lineam $\alpha \gamma$ esse irrationalem. sicut enim dictum

dictum est in proximo theoremate, compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$. Ergo per 17 huius, compositum ex quadratis linearum $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$ cum eo quod fit bis ex $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$, quod est æquale quadrato totius lineæ $\alpha\gamma$, est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$. Sed id quod fit bis ex $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ est commensurabile ei quod fit semel ex $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ per 6 huius. Ergo quadratum totius lineæ $\alpha\gamma$ est incommensurabile ei quod fit semel ex $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ per 14 huius. Sed per positionem id quod fit semel ex $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ est rationale. Ergo quadratum totius lineæ $\alpha\gamma$ est irrationale. Irrationalis est ergo tota lineæ $\alpha\gamma$. Vocetur autem Bimediale prius.

Trigesimumoctauum Theorema.

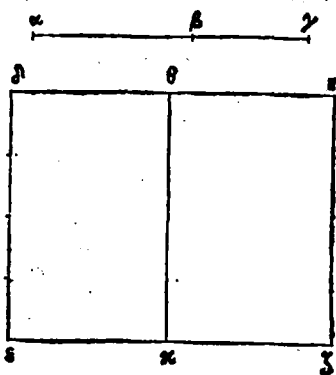
Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes componantur, tota lineæ est irrationalis, uocetur autem Bimediale secundum.

Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ mediale continentes (quales docet reperire 29.) Dico totam lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Proponatur enim lineæ rationalis $\alpha\epsilon$, et quadrato lineæ $\alpha\gamma$ æquale secundum lineam $\alpha\epsilon$ applicetur parallelogrammum $\alpha\zeta$, cuius alterum latus



EVCLIDIS ELEMENTOR.

fit ΔH . Cum quadratū lineæ
 $\alpha \gamma$ sit æquale quadratis li-
 nearum $\alpha \beta, \beta \gamma$. & ei quod
 fit bis ex $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ per 4.2. ap-
 plicetur secundum lineā Δ
 quadratis linearum $\alpha \beta, \beta \gamma$
 æquale parallelogrammum
 $\epsilon \theta$. Residuum ergo paralle-
 logrammum $\zeta \theta$, est æquale



ei quod fit bis ex $\alpha \beta, \beta \gamma$. Sed positū est parallelogrammū
 ex $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ esse mediale, cui id quod fit bis ex $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ est
 commensurabile per 6 huius. Ergo per corollarium 24
 theorematidis id quod fit bis ex $\alpha \beta, \beta \gamma$ est etiam media-
 le. Est autem parallelogrammum $\epsilon \theta$ æquale quadratis
 linearum $\alpha \beta, \beta \gamma$, quæ quadrata sunt inter se commen-
 surabilia ex suppositione. Ergo per 16 huius, parallelo-
 grammum $\epsilon \theta$ erit commensurabile utrique quadrato
 lineæ $\alpha \epsilon$, & lineæ $\epsilon \gamma$. Sed illa quadrata sunt medialia,
 quia ex positione lineæ $\alpha \beta, \beta \gamma$ sunt mediales. Ergo per
 corollarium 24 theorematidis parallelogrammū $\epsilon \theta$ erit
 etiam mediale. Ei uerò quod fit bis ex $\alpha \beta, \beta \gamma$ æquale est
 residuum parallelogrammū $\theta \zeta$. Mediale est ergo utrū-
 que parallelogrammum $\epsilon \theta, \theta \zeta$, & secundum lineam ra-
 tionalem Δ applicantur. Rationalis est ergo utraq; li-
 nearum $\Delta \epsilon, \epsilon \theta$, & incommensurabilis longitudine lineæ
 $\Delta \epsilon$, per 23. Et quoniam per positionem est incommensu-
 rabilis longitudine lineæ $\alpha \beta$, lineæ $\beta \gamma$: est autem sicut
 lineæ $\alpha \beta$ ad lineam $\beta \gamma$, ita quadratum lineæ $\alpha \beta$ ad pa-
 rallelogrammum ex $\alpha \beta, \epsilon \gamma$ per 1.6. incommensurabile

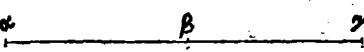
est

est ergo quadratum linea $\alpha\beta$ parallelogrammo ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ per 10 huius. Sed quadrato linea $\alpha\beta$ est commensurabile compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$ per 16, quia quadrata linearum $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$ sunt commensurabilia, cum linea $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ posita sint potentia tantum commensurabiles. Ergo compositum ex quadratis linearum $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ est incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$ per 14. Parallelogrammo uero ex $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ commensurabile est id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Ergo per idem 14 theorema incommensurabile est compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ei quod fit bis ex $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$. Ergo eis æqualia parallelogramma $\alpha\theta$, $\theta\zeta$ sunt etiam inter se incommensurabilia. quare & linea $\alpha\theta$ linea $\theta\zeta$ est incommensurabilis longitudine per 1.6 & 10 huius. Sed modo probatum est eas esse rationales. linea ergo $\alpha\theta$, $\theta\zeta$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: quare & linea $\alpha\zeta$ est irrationalis per 36 huius. Sed parallelogrammum $\alpha\zeta$ contentum ex linea irrationali $\alpha\zeta$, & rationali $\alpha\epsilon$ est ipsum etiam irrationale. nam si esset rationale cum applicetur secundum lineam rationalem puta $\alpha\epsilon$, esset & altera linea nempe $\alpha\zeta$ etiam rationalis per 21. cum tamen probata sit irrationalis. Irrationale est ergo parallelogrammum $\alpha\zeta$. quare & linea qua illud parallelogrammum potest, nempe $\alpha\gamma$, est etiam irrationalis. Vocetur autem Bimediale secundum. Vocavit autem illam eo nomine, quia mediale est non rationale quod continetur ex illis medialibus lineis $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$, quarum compositione fit linea $\alpha\gamma$. Posterius est autem & natura & cognitione mediale rationali.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Trigesimumnonum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur, conficientes compositum ex quadratis ipsarum rationale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum mediale, tota linea recta est irrationalis. Vocetur autem linea maior.

Componantur enim duæ rectæ potentia incommensurabiles $\alpha\beta, \beta\gamma$ conficiētes α  γ
id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 33.) Dico totam lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Nam parallelogrammum ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ est mediale: & quod fit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ est commensurabile ei quod fit semel ex $\alpha\epsilon, \beta\gamma$ per 6 huius. Ergo per corollarium 24 huius, quod fit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ erit mediale. Sed per positionem compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ est rationale. Ergo id quod fit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ est incommensurabile composito ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \beta\gamma$. Quare per 17 compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ cum eo quod fit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ est incommensurabile composito ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \beta\gamma$. Sed compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ cum eo quod fit bis ex $\alpha\beta, \epsilon\gamma$ est æquale quadrato totius lineæ $\alpha\gamma$ per 4.2. Compositum uerò quod fit ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$ est rationale per positionem. Ergo quadratum totius lineæ $\alpha\gamma$ est irrationale. ergo tota linea $\alpha\gamma$ est etiā irrationalis. Vocetur autem linea maior. Vocavit autē ideo maiorem, quia compositum ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$ quæ sunt rationalia, est minus eo quod fit bis ex $\alpha\epsilon$.

$\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$ ut modo dicemus. Et sane decet fieri denominationem à convenientia rationalium.

Lemma.

Quod autem compositum ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \beta\gamma$ sit maius eo quod fit bis ex $\alpha\epsilon, \alpha\epsilon, \epsilon\gamma$, ita demonstretur. Primò manifestum est lineas $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$ esse inaequales. Nam si aequales essent, equalia quoque essent quadrata linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ ei quod fieret bis ex $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$. itaque ambo, compositum inquam ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \beta\gamma$, & id quod ex illis continetur, essent simul aut medialia aut rationalia, quod est cōt̄ra-positionem. Ergo inaequales sunt lineae $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$. Sit autem per suppositionem maior linea $\alpha\epsilon$: fit autē aequalis linea $\beta\alpha$ lineae $\epsilon\gamma$. Ergo per 7.2. quadrata linearum $\alpha\epsilon, \epsilon\alpha$ sunt equalia ei quod fit bis ex $\alpha\epsilon, \epsilon\alpha$, & quadrato lineae $\alpha\alpha$. Est autem aequalis $\alpha\epsilon$ lineae $\beta\gamma$. Ergo quadrata linearum $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$ sunt equalia ei quod fit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$, & quadrato lineae $\alpha\alpha$. Quare quadrata linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ sunt maiora quàm id quod fit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$, tanto quantū est quadratū lineae $\alpha\alpha$.

Quadragesimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componentur confidentes compositū ex ipsarum quadratis mediale: id uerò quod fit ex ipsis rationale, tota linea est irrationalis. Vocetur autem potens rationale & mediale.

Componentur duæ rectæ potentia incommensurabiles $\alpha\beta, \beta\gamma$ confidentes id quod dicitur in theoremate (quales

EVCLIDIS ELEMENTOR.

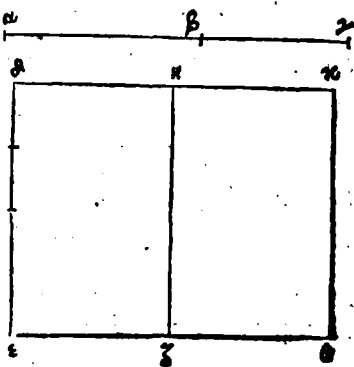
reperire docet 34.) Dico α ϵ γ
 totam lineam $\alpha \gamma$ esse ir-
 rationalem. Cum enim compositum ex quadratis linea-
 rum $\alpha \beta, \beta \gamma$ sit mediale: id uero quod sit bis ex $\alpha \beta, \beta \gamma$
 sit rationale. Incommensurabile est ergo compositum ex
 quadratis linearum $\alpha \beta, \beta \gamma$ ei quod sit bis ex $\alpha \beta, \beta \gamma$. Er-
 go per 17 compositum ex quadratis linearum $\alpha \epsilon, \epsilon \gamma$ una
 cum eo quod sit bis ex $\alpha \beta, \beta \gamma$, quod est quadratum totius
 $\alpha \gamma$, est incommensurabile ei quod sit bis ex $\alpha \beta, \beta \gamma$. Sed id
 quod sit bis ex $\alpha \beta, \beta \gamma$ est rationale, quia id quod conti-
 netur ex $\alpha \beta, \beta \gamma$ positum est esse rationale. Ergo irratio-
 nale est quadratum totius lineae $\alpha \gamma$, quare & ipsa li-
 nea $\alpha \gamma$ erit irrationalis. Vocetur autem potens rationa-
 le & mediale. Quam ideo sic uocauit, quia potest duas
 superficies, aliam quidem rationalem, aliam uero media-
 lem. Et quia rationale precedit ordine natura & co-
 gnitionis, prius intulit mentionem ipsius rationalis. Scien-
 dum est has rationes denominationum quae sunt in 38.
 39. & hoc theoremate, item in 41 esse additiones, quae
 tamen ut in nonnullis conueniant hac certe non satisfacit.

Quadragesimum primum Theorema.

Si duae rectae potentia incommensurabiles compo-
 nantur conficientes compositum ex quadratis ip-
 sarum, mediale & quod continetur ex ipsis me-
 diale, & praeterea incommensurabile composito
 ex quadratis ipsarum, tota linea est irrationalis.
 Vocetur autem potens duo medialia.

Componantur duae rectae potentia incommensurabiles $\alpha \epsilon$,
 $\beta \gamma$

Et conficiētes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 35.) Dico totam lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Proponatur linea rationalis $\alpha\iota$, & secundum illā quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ æquale parallelogrammum $\alpha\zeta$ applicetur.



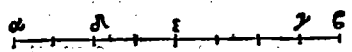
Item secundum eandem lineam $\alpha\iota$ uel ei æqualem $\alpha\zeta$ ac æquale ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ parallelogrammum $\alpha\theta$ applicetur: totum ergo parallelogrammum $\alpha\theta$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\gamma$ per 4. 2. Et quoniam compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est mediale cui est æquale parallelogrammū $\alpha\zeta$. Ergo mediale erit etiā $\alpha\zeta$ per ea quæ scripsimus in demonstratione 38 theorematibus. ergo linea $\alpha\iota$ est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ $\alpha\iota$ per 23. Eadē ratione linea $\alpha\iota$ erit rationalis & incommensurabilis longitudine eidē lineæ $\alpha\iota$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$: ergo etiam incommensurabile erit parallelogrammum $\alpha\zeta$ parallelogrammo $\alpha\iota$. Quare & linea $\alpha\iota$ lineæ $\alpha\iota$ erit incommensurabilis per 1. 6. & 10 huius. Sed modo probatum est illas esse rationales: sunt ergo lineæ $\alpha\iota$, $\alpha\iota$ rationales potentia tantum cōmensurabiles. ergo tota linea $\alpha\iota$ est irrationalis quæ uocatur Binomiū per 36. Sed linea $\alpha\iota$ est rationalis. ergo parallelogrammum $\alpha\theta$ est irrationale per id quod probatum est in fine 38.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Ergo linea potens illud parallelogrammum nempe $\alpha\gamma$ erit irrationalis. Vocetur autem potēs, duo medialia. Hāc uerò uocauit hoc nomine, quia potest duas superficies mediales, & eam quæ componitur ex quadratis linearum $\alpha\beta, \epsilon\gamma$, & eam quæ sit ex $\alpha\epsilon, \beta\gamma$. Quod uerò dicta irrationales linea unico modo, id est uno tantum in puncto diuiduntur in rectas lineas ex quibus componuntur, & quæ constituunt singulas species illarū irrationalium, mox demonstrabimus, si prius demonstrauerimus huiusmodi lemma.

Lemma.

Proponatur recta linea $\alpha\beta$, diuidaturque in partes inæquales duas in puncto γ , iterumque diuidatur eadem linea $\alpha\beta$ in partes duas inæquales in alio puncto δ . Sit



autem linea $\alpha\gamma$ maior quàm linea $\delta\epsilon$. Dico compositum ex quadratis duarum linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ esse maius quàm compositum ex quadratis $\alpha\delta, \delta\beta$. Diuidatur enim bifariam & aequaliter linea $\alpha\beta$ in puncto ι . Quoniam linea $\alpha\gamma$ est maior linea $\delta\epsilon$, auferatur ab utraque ea pars quæ utriusque est communis nempe $\delta\gamma$. Residua ergo linea $\alpha\delta$ est maior residua linea $\gamma\beta$. Quia de duabus lineis inæqualibus quarum maior erat $\alpha\gamma$, idem ablatum est nempe $\delta\gamma$. Est autem equalis linea $\alpha\iota$ lineæ $\iota\epsilon$. Ergo linea $\delta\iota$ est minor linea $\iota\epsilon$. ergo puncta γ, δ , non aequaliter distant à puncto ι , quod est punctum sectionis in partes duas æquales. Et quoniam parallelogrammum contentum ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ cum quadrato lineæ $\gamma\iota$ est æquale quadrato lineæ $\iota\epsilon$ per 5.2.

¶

Et eadem ratione parallelogrammum contentum ex
 $\alpha A, A B$ unà cum quadrato linea A est æquale eidem
 quadrato eiusdem linea ϵB . Ergo parallelogrammum
 contentum ex $\alpha \gamma, \gamma B$ unà cum quadrato linea γ est
 æquale parallelogrammo ex $\alpha A, A B$ unà cum quadra-
 to linea A , quia quæ sunt æqualia uni tertio sunt æ-
 qualia inter se. Sed quadratū linea A est minus qua-
 drato linea $\epsilon \gamma$, quia linea A est probata minor linea
 $\epsilon \gamma$. Ergo et residuum nempe parallelogrammum ex
 $\alpha \gamma, \gamma B$ est minus parallelogrammo ex $\alpha A, A B$. quare
 Et id quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma B$ est minus eo quod fit bis
 ex $\alpha A, A B$. Sed per 4. 2 quadratum totius linea αB
 est æquale composito ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma B$
 unà cum eo quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma B$, Et eadem ratione.
 Idem quadratum totius linea αB est æquale composito
 ex quadratis linearum $\alpha A, A B$ unà cum eo quod fit bis
 ex $\alpha A, A B$. Ergo compositum ex quadratis linearum
 $\alpha \gamma, \gamma B$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma B$ est æqua-
 le composito ex quadratis linearum $\alpha A, A B$ unà cum
 eo quod fit bis ex $\alpha A, A B$. Sed modo probatū est id quod
 fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma B$ esse minus eo quod fit bis ex $\alpha A, A B$.
 Residuum ergo nempe compositum ex quadratis linea-
 rum $\alpha \gamma, \gamma B$ est maius residuo nempe composito ex qua-
 dratis linearum $\alpha A, A B$, quod erat demonstrandum.

Lemma.

Rationale excedit rationale superficie rationali.

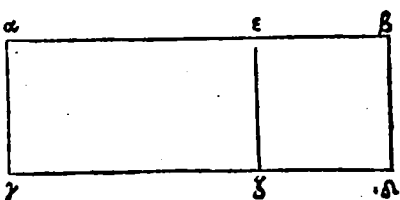
Sit rationale αA excedēs aliud rationale αZ , superficie ϵA .

Dico superficiem ϵA esse etiam rationalem. Nam pa-

T

EVCLIDIS ELEMENTOR.

rallelogrammū $\alpha \delta$ est
commēsurabile paralle
logrammo $\alpha \zeta$. Ergo per
secundam partē 16 hu
ius, parallelogrammū γ

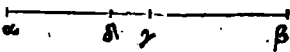


$\alpha \zeta$ est commēsurabile parallelogrammo $\epsilon \delta$. Sed paral
lelogrammum $\alpha \zeta$ est rationale. Ergo etiam parallelo
grammum $\epsilon \delta$ est rationale.

Quadragesimum secundum Theorema.

Binomium in unico tantū puncto diuiditur in sua
nomina, id est in lineas ex quibus componitur.

Sit binomium linea $\alpha \beta$ diuisa in puncto γ in sua nomina,
hoc est in lineas ex quibus linea tota $\alpha \beta$ cōponitur. Ergo
linea $\alpha \gamma, \gamma \beta$ sunt rationales po
tentia tantum commēsurabi-



les per 36. Dico lineam $\alpha \beta$ non posse diuidi in ullo alio
puncto quā γ , in alias lineas duas rationales potentia
tantum commensurabiles. Nam si contradicatur, diui
datur in pūcto δ , ita ut linea $\alpha \delta, \delta \beta$ sint due rationa
les potentia tantum commensurabiles. Primò constat
neutrum illorum punctorum γ, δ diuidere lineā $\alpha \beta$ in
partes aequales, alioquin essent linea $\alpha \gamma, \gamma \delta$, rationales
longitudine cōmensurabiles, similiter $\epsilon \delta$ linea $\alpha \delta, \delta \epsilon$.

Qualibet enim linea seipsam metitur $\epsilon \delta$ quācunque
aliā sibi aequalem. Præterea linea $\alpha \epsilon$ uel est eadem cū
linea $\alpha \gamma$, hoc est æqualis linea $\alpha \gamma$, uel eadem maior, uel
minor eadem. Si est æqualis linea $\alpha \beta$ linea $\alpha \gamma$, impossi
ta ergo linea $\alpha \beta$ linea $\alpha \gamma$ singulæ extremitates unius
tribuunt

tribunt cū singulis extremitatibus alterius. Posito itaque puncto β super puncto α , punctum etiam λ incidet super punctum γ , & residua linea $\alpha \lambda$ ex linea $\alpha \gamma$ erit etiam equalis linea $\gamma \beta$ residua ex $\lambda \epsilon$. Ergo linea $\alpha \beta$ diuiditur in puncto γ , in sua nomina. Sic itaque linea $\alpha \beta$ diuisa per punctum λ , diuisa erit, in eodem puncto quo fuerat prius diuisa eadem linea $\alpha \epsilon$ per punctū γ , quod est contra hypothesin contradicentis. nam ex positione erat diuisa aliter atque aliter in punctis γ, λ . Quod si linea $\lambda \epsilon$ est maior quā linea $\alpha \gamma$, diuidatur linea $\alpha \beta$ bifariam & equaliter in puncto ι . non itaque puncta γ, λ equaliter distabunt à puncto ι . Sed per lemma modo positum post 41, compositum ex quadratis linearum $\alpha \lambda, \lambda \beta$ est maius composito ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$: & compositum ex quadratis linearum $\alpha \lambda, \lambda \epsilon$ unā cum eo quod fit bis ex $\alpha \lambda, \lambda \beta$ est aequale composito ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$, unā cum eo quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$. quia utrunque est aequale quadrato totius lineae $\alpha \beta$ per 4.2. Ergo quanto compositum ex quadratis linearum $\alpha \lambda, \lambda \beta$ est maius cōposito ex quadratis linearū $\alpha \gamma, \gamma \beta$, tanto id quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ est maius eo quod fit bis ex $\alpha \lambda, \lambda \beta$. Quod ipsum quāuis sit indemonstrabile, modica tamen inductione fit manifestius, si duabus lineis equalibus propositis, puta quatuor pedes longis, ab altera pedes tres abstuleris, ab altera pedes duos. Residuum eius à qua pedes duos abstulisti, est maius quā residuum eius à qua pedes tres abstulisti pede uno. quāto scilicet maiores erant pedes tres ablati quā pedes duo ablati. Sed compositum ex quadratis linearum $\alpha \lambda, \lambda \beta$

EVCLIDIS ELEMENTOR.

excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ superficie rationali per lemma positum ante hoc theorema. Sunt enim utraq; composita rationalia, quia linea $\alpha\delta, \delta\beta$, sunt posite rationales potentia tantum cōmensurabiles, similiter & linea $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$. Ergo etiam id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$ excedit id quod fit bis ex $\alpha\delta, \delta\epsilon$ superficie rationali, cum sint tamē ambo medialia per 22 huius, quod est impossibile per 27. Quod si linea $\delta\epsilon$ est minor linea $\alpha\gamma$, eadem uia deducitur ad idem impossibile. Non igitur binomium diuidetur aliter atque aliter in sua nomina, sed unico tantum modo. Qui defendebant unitatem entis ex opinione Parmenidis, existimauerunt esse quasdam lineas infecabiles, de quibus ageretur hoc theoremate & ceteris sequentibus, quam tamen illorum opinionem Aristoteles in libello $\pi\epsilon\pi\lambda\alpha\tau\omicron\mu\omicron\upsilon\tau\omicron\varsigma$ seu quis alius author eius opusculi, falsam esse arguit, & peruerse ab illis intellectū hoc theorema.

Quadragesimum tertium Theorema.

Bimediale prius in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit bimediale prius linea $\alpha\beta$, diuisa in puncto γ , ita ut linea $\alpha\gamma, \gamma\beta$ sint mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes. Dico lineam $\alpha\beta$ non posse diuidi in alio puncto quā γ in sua nomina. Quod si cōtradicatur, diuidatur in puncto δ , ita ut $\alpha\delta, \delta\beta$ sint mediales potentia tantum commensurabiles rationale continētes. Cum igitur tanto differat id quod fit bis ex

$\alpha\delta,$

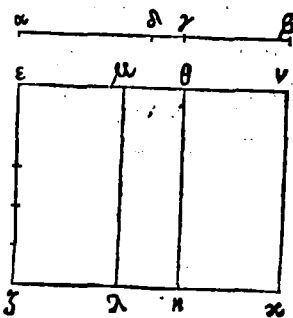
$\alpha \lambda, \lambda \beta$, ab eo quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, quanto differt compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, à composito ex quadratis linearum $\alpha \lambda, \lambda \epsilon$, & quod fit bis ex $\alpha \lambda, \lambda \beta$ differat ab eo quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, superficie rationali, sunt enim ambo rationalia. Ergo & cōpositū ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$ differt à composito ex quadratis linearum $\alpha \lambda, \lambda \beta$ mediale inquam à mediali superficie rationali quod est impossibile. Non igitur bimediale prius aliter atque aliter diuiditur in sua nomina, ergo unico tantum modo.

Quadragesimumquartum Theorema.

Bimediale secundum in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit Bimediale secundum lineam $\alpha \epsilon$ diuisa in puncto γ , ita ut

linea $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$ sint mediales potentia tantum cōmēsurabiles, mediale continentes. Manifestū est igitur punctum γ non secare totam lineam $\alpha \beta$ bifariā & æqualiter, quia linea $\alpha \gamma, \gamma \beta$ non sunt longitudine inter se commensurabiles. Dico lineam $\alpha \beta$

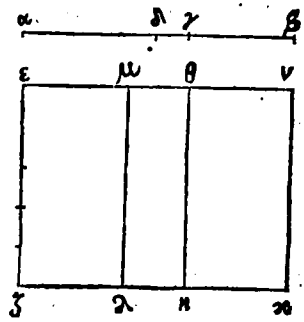


non posse diuidi aliter quàm in pūcto γ , in sua nomina.

Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto λ , ita ut linea $\alpha \gamma$ ne sit eadem, hoc est ne sit æqualis linea $\lambda \beta$, sed ea maior. linea autē $\alpha \lambda, \lambda \beta$ sint mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes per te. Manifestum est primo quadrata linearū $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$ esse maiora

EVCLIDIS ELEMENTOR.

quadratis linearū $\alpha\lambda$, $\lambda\beta$ per
lemma positum ante 42. Pro-
ponatur linea rationalis $\epsilon\zeta$, &
quadrato linea $\alpha\epsilon$ aequale se-
cundum lineā $\epsilon\zeta$ applicetur pa-
rallelogrammum $\epsilon\chi$. Ex quo pa-
rallelogrammo detrahatur id
quod aequale est quadratis li-



nearum $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$, puta parallelogrammum $\epsilon\chi$. Residuum
ergo, nempe parallelogrammum $\theta\chi$ est aequale ei quod
fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$. Rursus quadratis linearū $\alpha\lambda$, $\lambda\epsilon$ quae
sunt minora quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$ aequale detra-
hatur parallelogrammum $\epsilon\chi$. Residuum ergo paralle-
logrammum $\mu\chi$ est aequale ei quod fit bis ex $\alpha\lambda$, $\lambda\beta$. Et
quoniam quadrata linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$ sunt medialia, ergo
parallelogrammum $\epsilon\chi$ erit etiam mediale, & secū-
dum lineā rationālē $\epsilon\zeta$ applicatur rationalis. Est ergo
linea $\epsilon\theta$ incommensurabilis longitudine lineae $\epsilon\zeta$. Ea-
dem ratione quia parallelogrammum $\theta\chi$ est mediale.
(nam id quod est ei aequale, nempe quod fit bis ex $\alpha\gamma$,
 $\gamma\beta$ est mediale.) Ergo linea $\epsilon\theta$ est rationalis & in-
commensurabilis longitudine lineae $\epsilon\zeta$. Et quoniam li-
nea $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$ sunt mediales potentia tantum commensu-
rabiles, ergo sunt longitudine incommensurabiles. Sed si-
cut linea $\alpha\gamma$ ad lineā $\gamma\beta$, ita quadratū lineae $\alpha\gamma$ ad pa-
rallelogrammum ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ per 16. ergo quadratum li-
neae $\alpha\gamma$ est incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\gamma$,
 $\gamma\beta$. Sed quadrato lineae $\alpha\gamma$ est commensurabile compo-
situm ex quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ per 16. quia linea

$\alpha\gamma, \gamma\beta$ sunt potentia inter se commensurabiles. parallelogrammo uero ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est commensurabile id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$. Ergo compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$, per corollarium à nobis additum theoremati 14. Sed composito ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$ est æquale parallelogrammum $\epsilon\kappa$, ei uero quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est æquale parallelogrammum $\theta\kappa$. Incommensurabile est ergo parallelogrammum $\epsilon\kappa$ parallelogrammo $\theta\kappa$. quare et linea $\epsilon\theta$, erit incommensurabilis longitudine linea $\theta\iota$. sunt autem ambæ rationales. Sunt ergo illæ lineæ $\epsilon\theta, \theta\iota$ rationales potentia tantum commensurabiles, per lemma positum post 19 theorema. Nam eo ipso quod sunt rationales sunt potentia saltem commensurabiles. Ergo tota linea $\epsilon\iota$ erit binomium per 36. quæ diuisa est in puncto θ , in sua nomina. Eadem uia demonstrabitur lineas $\mu\upsilon, \mu\iota$ esse rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea $\epsilon\iota$ quæ est binomium, in alio atque alio puncto nempe θ, μ , diuiditur in sua nomina quod est impossibile per 42. Quod si quis dicat posse fieri ut linea $\epsilon\theta$ sit eadem hoc æqualis linea $\mu\iota$, itaque nihil consequi impossibile, neque lineam $\epsilon\iota$ quæ est binomium diuidi in sua nomina alio, atque alio puncto, sed in uno tantum. hoc etiam demonstrabimus, nempe lineam $\epsilon\theta$ non esse eandem, hoc est æqualem lineæ $\mu\iota$. Nam quadrata linearum $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$, sunt maiora quadratis linearum $\alpha\delta, \delta\epsilon$ per lemma positum post 41. Sed quadrata linearum $\alpha\delta, \delta\beta$ sunt maiora eo quod fit bis ex $\alpha\delta, \delta\beta$, per lemma positum post 39. Ergo multo maiora sunt quadrata linearum $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$, hoc

EVLIDIS ELEMENTOR.

est illis æquale parallelogrammū, et est maius eo quod fit bis ex $\alpha \Delta$, $\Delta \beta$ hoc est, quàm parallelogrammum $\mu \kappa$, quod est æquale ei quod fit bis ex $\alpha \Delta$, $\Delta \beta$. Ergo per 1. 6. Linea etiam $\epsilon \theta$ erit maior quàm linea $\mu \nu$. Ergo linea $\epsilon \theta$ non erit eadem cum linea $\mu \nu$. Quod si posueris ab initio lineam $\alpha \gamma$ esse minorem linea $\Delta \beta$. Idem etiam tunc impossibile consequetur, hoc est lineam $\epsilon \nu$, quæ est binomiū diuidi in sua nomina alio atque alio puncto. Non igitur bimediale secundum in alio atque alio puncto diuiditur in sua nomina, ergo in uno tantum.

Quadragesimumquintum Theorema.

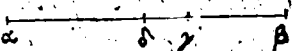
Linea maior in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit linea maior $\alpha \beta$ diuisa in puncto γ , ita ut $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ sint potentia incommensurabiles conficiētes compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$, rationale, contentū uero ex ipsis parallelogrammum mediale. Dico lineam $\alpha \beta$ non posse diuidi in sua nomina alibi quàm in puncto γ . Quod si contradicatur, diuidatur in puncto Δ in sua nomina. Et quoniam quanto differt compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ à composito ex quadratis linearū $\alpha \Delta$, $\Delta \beta$, tanto differt id quod fit bis ex $\alpha \Delta$, $\Delta \beta$ ab eo quod fit bis ex $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ per ea quæ scripsimus in demonstratione 42. theoremat. Sed compositum ex quadratis linearū $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha \Delta$, $\Delta \beta$, superficie rationali. Sunt enim ambo rationalia. Ergo et id quod fit bis ex $\alpha \Delta$, $\Delta \beta$ excedet id quod fit bis ex

ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ superficie rationali, sed illa sunt medialia. Ergo mediate excedet mediale superficie rationali, quod est impossibile per 27. Non igitur linea maior diuiditur aliter atq; aliter in sua nomina, ergo in uno tantū puncto diuidetur.

Quadragesimum sextum Theorema.

Linea potens rationale & mediale in unico tantum puncto, diuiditur in sua nomina.

Sit linea potens rationale & mediale $\alpha\beta$, diuisa in puncto γ , ita  ut lineae $\alpha\gamma, \gamma\beta$ sint potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ mediale: id autem quod continetur ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ rationale. Dico lineam $\alpha\epsilon$ in alio puncto quam γ non posse diuidi in sua nomina. Quod si contradicatur, diuidatur in puncto δ , in sua nomina. Cū igitur quanto differt id quod fit bis ex $\alpha\delta, \delta\beta$ ab eo quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$, tanto differat compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$ à composito ex quadratis linearum $\alpha\delta, \delta\beta$, id autem quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ excedat id quod fit bis ex $\alpha\delta, \delta\epsilon$, superficie, rationali quia utrunque est rationale. Ergo & compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$ excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha\delta, \delta\epsilon$ superficie rationali, cum tamē utrunque illorum sit mediale. Quod est impossibile. Non igitur linea potens rationale & mediale diuiditur aliter atque aliter in sua nomina. Ergo diuiditur tantum in puncto uno.

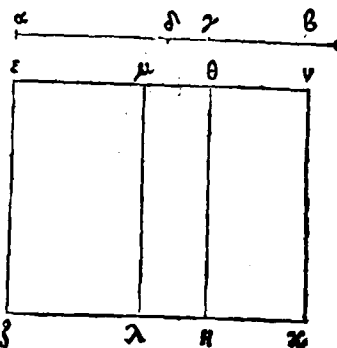
Quadragesimum septimum Theorema.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Linea potens duo medialia in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit linea potens duo medialia $\alpha \epsilon$, diuisa in puncto γ , ita ut

linea $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$ sint potētia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$ mediale: similiter $\epsilon \gamma$ quod continetur ex ipsis mediale, item contentum ex ipsis incommensurabile composito ex quadratis ipsarum $\alpha \gamma \gamma \beta$. Dico



lineam $\alpha \epsilon$ non posse diuidi in alio puncto, quam γ in sua nomina. Quod si contradicatur, diuidatur in puncto δ , ita ut linea $\alpha \delta, \delta \epsilon$ conficiant ea quae linea $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$. Sitq; rursus ex suppositione linea $\alpha \gamma$ maior linea $\alpha \beta$. Sit autem rationalis linea $\epsilon \gamma$, secundum quam applicetur parallelogrammum $\epsilon \lambda$ aequale quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$. ei uero quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ aequale applicetur $\theta \lambda$. Totum ergo parallelogrammum $\epsilon \lambda$ est aequale quadrato lineae $\alpha \beta$. Rursus secundum eandem lineam $\epsilon \gamma$ applicetur aequale quadratis linearum $\alpha \delta, \delta \beta$ parallelogrammum $\epsilon \lambda$. Residuum ergo parallelogrammum $\mu \lambda$ est aequale residuo, nempe ei quod fit bis ex $\alpha \delta, \delta \epsilon$. Et quoniam ex suppositione compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$ est mediale. Est ergo parallelogrammum illi aequale, nempe $\mu \lambda$: etiam mediale $\epsilon \gamma$ secundum lineam rationalem $\epsilon \gamma$ applicatur. Ergo linea $\epsilon \gamma$ est rationalis, $\epsilon \gamma$ incommensurabilis longitudine linea $\alpha \gamma$. Eadem ratione

$\epsilon \gamma$

Et linea θ est etiam rationalis & incommensurabilis longitudine eidem lineæ α . Et quoniam compositum ex quadratis linearum α , γ , ϵ est incommensurabile ei quod fit bis ex α , γ , β (quia positum est esse incommensurabile ei quod fit semel ex α , γ , ϵ .) Ergo parallelogrammum α est incommensurabile parallelogrammo θ . quare & linea α est incommensurabilis lineæ θ . Sunt autem α , θ rationales. Ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea α est binomium per 36, & diuisa in puncto θ , in sua nomina. Similiter demonstrabimus eandem lineam α diuidi in puncto μ in sua nomina: nec est linea α lineæ μ eadem, hoc est equalis, ut probatum est in fine demonstrationis 44. Ergo binomium alicubi atque alibi diuiditur in sua nomina, quod est impossibile per 42. Non igitur linea potens duo medialia diuiditur alibi atque alibi in sua nomina. Ergo in puncto uno tantum diuiditur.

Termini secundi siue definitiones secunda.

Proposita linea rationali, & binomio diuiso in sua nomina, cuius binomii maius nomen, id est maior portio possit plusquam minus nomen quadrato lineæ sibi, maiori inquam nomini commensurabilis longitudine.

Siquidem maius nomen fuerit commensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea Binomium primum.

Si uerò minus nomen, id est minor portio binomii fuerit commensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea Binomium secundum.

Si uerò neutrum nomen fuerit commensurabile longitu-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

dine proposita linea rationali, uocetur binomiũ tertium.
 Rursus si maius nomen possit plusquã minus nomen quadrato linea sibi incommensurabilis longitudine, siquidem maius nomen est cõmensurable lōgitudine proposita linea rationali uocetur tota linea binomiũ quartum.
 Si uerò minus nomen fuerit commensurable longitudine linea rationali, uocetur binomium quintum.
 Si uerò neutrum nomen fuerit longitudine commensurable linea rationali, uocetur illa binomium sextum.
 Hic nihil dicitur de lineis illis quarũ ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles proposita linea rationali, quia lineæ tales non sunt binomia, cum scilicet illa cõponantur ex duabus rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, ut est in 36. Lineæ uerò quarum ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles proposita linea rationali non sunt binomia, quia portiones taliũ linearum essent inter se quoque longitudine commensurabiles per 12 huius. Ergo non essent quales requiruntur ad compositionem binomij. Præterea lineæ tales nõ essent irrationales sed rationales, quia sunt commensurabiles singulis partibus se componẽtibus per 16. Ergo essent rationales quia componentes essent rationales.

Quadragesimum octauum Theorema.

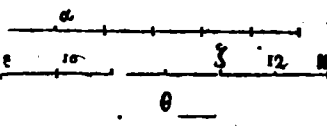
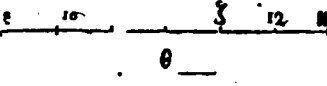
Reperire binomium primum.

Proponantur numeri duo α , γ , γ ϵ tales ut compositus ex ipsis totus α β ad alterum ex iisdẽ nempe γ β habeat proportionem quã numerus quadratus ad numerũ quadratum: ad alterum uerò α , γ , idem α ϵ proportionẽ eam

ne

ne retineat quam numerus
 quadratus ad numerū qua-
 dratum, qualis est numerus
 quadratus diuisibilis in qua
 dratum & non quadratū, inquit Campanus theore-
 mate 17. Sit autem linea rationalis λ , eiq; commēsurabi-
 lis longitudine sit linea ϵ : rationalis est ergo linea ϵ .
 Fiat autē sicut numerus α β ad numerum α γ , ita qua-
 dratum lineæ ϵ ad quadratum alterius lineæ quæ sit
 ϵ per lemma repositum à nobis post 6 theorema. Ergo
 quadratum lineæ ϵ ad quadratū lineæ ϵ proportionē
 habet quam numerus ad numerū. Quare illa quadra-
 ta sunt commensurabilia per 6. Est autem linea ϵ ra-
 tionalis, ergo linea ϵ erit etiam rationalis. Et quoniam
 numerus ϵ α ad numerum α γ non habet proportionem
 quam numerus quadratus ad numerum quadratum,
 neque etiam quadratum lineæ ϵ ad quadratum lineæ
 ϵ habebit proportionem quā numerus quadratus ad
 numerum quadratum. incommensurabilis est ergo lon-
 gitudine lineæ ϵ lineæ ϵ . Ergo illæ lineæ ϵ , ϵ sunt ra-
 tionales potentia tantum commensurabiles. Ergo tota
 linea ϵ est binomium per 36. Dico præterea eandem li-
 neam esse binomium primum. Nam cum sit sicut nume-
 rus ϵ α ad numerum α γ , ita quadratū lineæ ϵ ad qua-
 dratū lineæ ϵ sitq; numerus ϵ α maior numero α γ :
 maius quoq; erit quadratum lineæ ϵ quadrato lineæ
 ϵ . Sint igitur quadrato lineæ ϵ æqualia quadrata li-
 nearum ϵ , ϵ (quæ quomodo reperiantur docet lemma
 positū post 14.) Et cum sit sicut numerus β α ad numerū

EVCLIDIS ELEMENTOR.

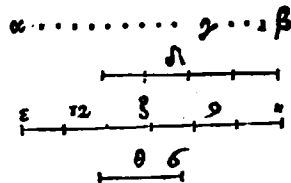
$\alpha \gamma$, ita quadratum linea $\epsilon \zeta$ 
ad quadratū linea $\zeta \eta$. Per 
euerfam ergo proportionem

sicut numerus $\epsilon \alpha$ ad nume- $\alpha \dots \gamma \dots \epsilon$.
rum $\beta \gamma$, ita quadratum linea $\epsilon \zeta$ ad quadratum linea
 θ . Sed numerus $\alpha \beta$ ad numerum $\alpha \gamma$ habet proportionē
quam numerus quadratus ad numerum quadratum.
Ergo quadratum linea $\epsilon \zeta$ ad quadratum linea θ habet
etiam proportionem quam numerus quadratus ad nu-
merum quadratum. Ergo linea $\epsilon \zeta$ erit longitudine com-
mensurabilis linea θ , per 9. ergo linea $\epsilon \zeta$ plus potest q̃
linea $\zeta \eta$ quadrato linea sibi commensurabilis longitudi-
ne. Sunt autem linea $\epsilon \zeta \zeta \eta$ rationales potentia tantum
commensurabiles. est q̃; linea $\epsilon \zeta$ longitudine cōmensura-
bilis linea rationali Δ . ergo linea $\epsilon \eta$ est binomiū primū.

Quadragesimumnonum Theorema.

Reperire binomium secundum.

Proponantur numeri duo $\alpha \gamma$, $\gamma \epsilon$
tales ut compositus ex ipsis to-
tus $\alpha \beta$ ad $\epsilon \gamma$ proportionem ha-
beat quam numerus quadra-
tus ad numerum quadratum:



ad $\gamma \alpha$ uerò proportionem eam ne habeat quam nume-
rus quadratus ad numerū quadratum, ut dictum est in
proximo theoremate. & proponatur linea rationalis
 Δ , & linea Δ sit cōmensurabilis longitudine linea $\zeta \eta$. ra-
tionalis est ergo linea $\zeta \eta$. Fiat autē sicut numerus $\gamma \alpha$ ad
numerum $\alpha \beta$, ita quadratum linea $\zeta \eta$ ad quadratum
alterius

alterius lineæ quæ sit ϵ . Ergo commensurabile est quadratum lineæ ζ lineæ ϵ . est ergo rationalis etiam lineæ ϵ . Et quoniam numerus γ ad numerum α non habet proportionem quam quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ζ ad quadratum ϵ habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Ergo lineæ ζ est incommensurabilis longitudine lineæ ϵ per 9. ergo lineæ ζ , ϵ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo lineæ ϵ est binomium. Dico præterea eandem esse binomium secundum. Cum enim per contrariam siue dicas conuersam proportionem sit sicut numerus α ϵ ad numerum α γ , ita quadratum lineæ ϵ ad quadratum lineæ ζ . maior autem est numerus α ϵ , numero α γ . maius etiam erit quadratum lineæ ϵ quadrato lineæ ζ . Sint quadrato lineæ ϵ æqualia quadrata linearum ζ , θ , ut dictum est in proximo theoremate. Per euersam ergo proportionem sicut numerus α β ad numerum β γ , ita quadratum lineæ ϵ ad quadratum lineæ θ . Sed numerus α ϵ ad numerum β γ habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ ϵ ad quadratum lineæ θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum. ergo lineæ ϵ erit commensurabilis longitudine lineæ θ , per 9. Quare lineæ ϵ plus potest quam lineæ ζ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sed lineæ ζ quæ est minus nomen, est commensurabilis longitudine propositæ lineæ rationali α per hypothesin. Ergo lineæ ϵ est binomium secundum.

Quinquagesimum Theorema.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Reperire binomium tertium.

Proponantur numeri duo α ϵ ,

γ ζ ; tales ut cōpositus ex

ipsis, totus α β ad nume-

rum ϵ γ proportionem ha-

beat quā numerus qua-

dratus ad quadratum, ad numerū uerò α γ proportio-

nem ne habeat quam numerus quadratus ad quadra-

tum. Proponatur autē ζ alius numerus siue quadra-

tus, siue non quadratus, qui sit δ , qui ad singulos α β , α γ

proportionem non habeat quam numerus quadratus

ad quadratum. Proponaturq; linea rationalis ι ϵ fiat

sicut numerus δ ad numerum α β , ita quadratum lineæ

ι ad quadratum ζ ν . Commensurable est ergo quadra-

tum lineæ ι quadrato lineæ ζ ν . Sed linea ι est rationalis:

rationalis est ergo linea ζ ν . ϵ quoniam numerus δ ad

numerum α β proportionem non habet quam numerus

quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum li-

neæ ι ad quadratum lineæ ζ ν proportionem eam habet

quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo li-

neæ ι incōmensurabilis longitudine lineæ ζ ν . Rursus fiat

sicut numerus α β ad numerum α γ , ita quadratum li-

neæ ζ ν ad quadratum lineæ ν θ . Commensurable ergo

est quadratum lineæ ζ ν quadrato lineæ ν θ . Sed linea ζ ν

est rationalis. ergo linea ν θ erit etiā rationalis. Et quo-

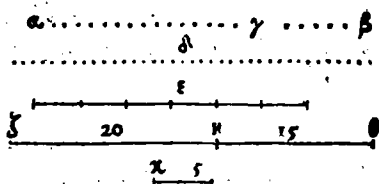
niam numerus α β ad numerum α γ proportionem non

habet quam quadratus numerus ad quadratum, neq;

etiam quadratum lineæ ζ ν ad quadratū lineæ ν θ pro-

portionem habet quam quadratus numerus ad qua-

dratum.



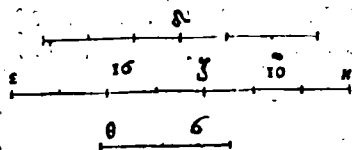
dratum. Est ergo linea z longitudine incommensurabilis linea α . ergo linea z sunt rationales potentia tantum commensurabiles. tota ergo linea z erit binomium. Dico praterea illam esse binomium tertium. Cum enim sit sicut numerus α ad numerum β , ita quadratum lineae α ad quadratum lineae z . Sicut vero numerus α β ad numerum α γ , ita quadratum lineae z ad quadratum lineae α . Per aquam ergo proportionem sicut numerus α ad numerum α γ , ita quadratum lineae α ad quadratum lineae α . Sed numerus α ad numerum α γ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo quadratum lineae α non habet proportionem ad quadratum lineae α quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo linea α longitudine incommensurabilis linea α per 9. Et quoniam est sicut numerus α β ad numerum α γ , ita quadratum lineae z ad quadratum lineae α . Ergo quadratum lineae z est maius quadrato lineae α . sint ergo quadrato lineae z equalia quadrata linearum α β . Per euerfam ergo proportionem sicut numerus α β ad numerum β γ , ita quadratum lineae z ad quadratum lineae β . Sed numerus α β ad numerum β γ habet proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. ergo quadratum lineae z ad quadratum lineae β habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea z est longitudine commensurabilis linea β . ergo linea z plus patet quam linea α quadrato lineae sibi longitudine commensurabilis. Sunt autem linea z α rationales potentia tantum commensurabiles: & neutra est commensurabilis lon-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

— gitudine lineæ ϵ . Ergo lineæ $\zeta \theta$ est binomium tertium.
 Quinquagesimum primum Theorema.

Reperire binomium quartum.

Proponantur numeri duo $\alpha \gamma$, $\alpha \dots \dots \dots \gamma$
 γ & tales, ut cōpositus ex ip-
 sis nempe $\alpha \beta$ ad neutrum eo-
 rum habeat proportionem
 quam numerus quadratus



ad quadratū (qualis est omnis numerus quadratus ad
 duos numeros non quadratos se minores ipsum compo-
 nentes.) Sit autem lineæ rationalis α , & lineæ δ sit com-
 mēsurabilis longitudine lineæ ϵ . est ergo rationalis ϵ .
 Sitq; sicut numerus $\beta \alpha$ ad numerum $\alpha \gamma$, ita quadratū
 lineæ ϵ ad quadratū lineæ $\zeta \eta$. ergo quadratum lineæ
 ϵ est commensurabile quadrato lineæ $\zeta \eta$. Est ergo lineæ
 $\zeta \eta$ rationalis. Et quoniam numerus $\beta \alpha$ ad numerū $\alpha \gamma$
 proportionem nō habet quam quadratus numerus ad
 quadratum: neque quadratum lineæ ϵ ad quadratum
 lineæ $\zeta \eta$ habebit proportionem quam quadratus nume-
 rus ad numerum quadratum. ergo lineæ ϵ est longitu-
 dine incommensurabilis lineæ $\zeta \eta$. Ergo lineæ ϵ , $\zeta \eta$ sunt
 rationales potentia tantum commensurabiles, quare to-
 ta lineæ $\epsilon \eta$ est binomium. Dico præterea eam esse bino-
 mium quartum. Cum enim sit sicut numerus $\beta \alpha$ ad nu-
 merum $\alpha \gamma$, ita quadratum lineæ ϵ ad quadratum li-
 neæ $\zeta \eta$: est autem numerus $\beta \alpha$ maior numero $\alpha \gamma$. Ergo
 quadratum lineæ ϵ erit maius quadrato lineæ $\zeta \eta$. Sint
 ergo quadrato lineæ ϵ æqualia quadrata linearū $\zeta \theta$, $\theta \delta$.

Per

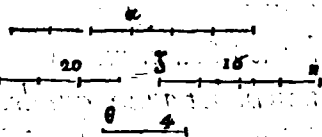
Per euerſam ergo proportionem ſicut numerus β ad numerum γ , ita quadratum lineæ z ad quadratum lineæ θ . Sed numerus ϵ ad numerum γ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, igitur neque quadratū lineæ z ad quadratum lineæ θ habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Eſt ergo lineæ θ incommenſurabilis longitudine lineæ z , ergo lineæ z plus poteſt quā lineæ z quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, Sunt autem lineæ z & θ rationales potentia tantū commenſurabiles, eſt q; lineæ z & lineæ rationalis & cōmēſurabilis lōgitudine, Ergo lineæ z eſt binomiū quartū.

Quinquageſimum ſecundum Theorema.

Reperire binomium quintum.

Proponatur numeri duo α & β , ſc. tales, ut totus α & ad ſin-
gulos α & β proportionē
eam nō habeat quā qua-
dratus numerus ad qua-
dratum, ſicut in proximo theoremate. Et ſit lineæ ratio-
nalis a : lineæ autem a ſit commenſurabilis longitudine
lineæ z . Eſt ergo lineæ z rationalis: ſit q; ſicut numerus
 γ ad numerum α , ita quadratū lineæ z ad quadra-
tum lineæ z , ergo quadratum lineæ z eſt commenſu-
rabile quadrato lineæ z . Eſt ergo etiam lineæ z ratio-
nalis. Et quoniam numerus α & β ad numerum α & β nō ha-
bet proportionem quam numerus quadratus ad qua-
dratum, neque etiam quadratum lineæ z ad quadra-

tum linea λ habebit proportionem. quā numerus quadratus ad quadratū, Ergo linea λ et ν sunt longitudine incommensurabi-



les. ergo linea λ et ν sunt rationales potentia tantum cōmensurabiles: ergo tota linea ν est binomiū. Dico præterea eam esse binomium quintum. Cum enim sit sicut numerus α γ ad numerum α β , ita quadratum linea λ ad quadratum linea ν . Per conuersam ergo proportionem sicut numerus ϵ α ad numerum α γ , ita quadratum linea ϵ λ ad quadratum linea λ ν . Est ergo quadratum linea ϵ λ maius quadrato linea λ ν . Sint ergo quadrato linea ϵ λ equalia quadrata linearū λ ν , θ . Per euer sam ergo proportionem sicut numerus ϵ α ad numerum β γ , ita quadratum linea ϵ λ ad quadratum linea ν θ . Sed numerus β α ad numerum β γ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo neque quadratum linea ϵ λ ad quadratū linea ν θ , habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea λ longitudine incommensurabilis linea θ . ergo linea λ plus potest quā linea ν quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis. Sunt autem linea λ et ν rationales potentia tantum commensurabiles, et linea λ minus nomen est, commensurabile longitudine linea rationali α . Ergo linea ν est binomium quintum.

Quinquagesimum tertium Theorema.

Reperire binomium sextum.

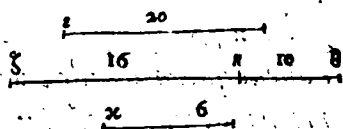
Proponantur

Proponantur numeri duo $\alpha \gamma$, $\alpha \dots \dots \gamma \dots \dots \beta$
 $\gamma \beta$ tales, ut totus $\alpha \beta$ ad sin- $\delta \dots \dots \dots$
 gulos $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$ proportionē ne
 habeat quam quadratus nu- $\begin{array}{c} 20 \\ \hline 15 \quad 5 \quad 10 \quad 0 \\ \hline x \quad 6 \end{array}$
 merus ad quadratū. Sit etiā

ϵ alius numerus δ , quique ad singulos $\alpha \epsilon, \alpha \gamma$ non ha-
 beat proportionem quam quadratus numerus ad qua-
 dratum. Sitq; linea rationalis ι : sit etiam sicut numerus
 δ ad numerum $\epsilon \alpha$, ita quadratum linea ι ad quadratū
 linea $\zeta \iota$. Ergo linea ι erit potentia commensurabilis li-
 nea $\zeta \iota$. est autem rationalis linea ι . ergo ϵ linea $\zeta \iota$ erit
 rationalis. Et quoniam numerus δ ad numerū $\alpha \beta$ non
 habet proportionē quam numerus quadratus ad qua-
 dratum: neque etiam quadratum linea ι ad quadratū
 linea $\zeta \iota$ habebit proportionem quā numerus quadra-
 tus ad quadratum. Est ergo linea ι longitudine incommen-
 surabilis linea $\zeta \iota$. Rursus fiat sicut numerus $\beta \alpha$ ad
 numerum $\alpha \gamma$, ita quadratum linea $\zeta \iota$ ad quadratum li-
 nea $\iota \theta$. Ergo quadrata illa sunt commensurabilia. Sed
 quadratum linea $\zeta \iota$ est rationale: est ergo etiā quadra-
 tum linea $\iota \theta$ rationale. Ergo ϵ linea $\iota \theta$ rationalis. Et
 quoniam numerus $\beta \alpha$ ad numerum $\alpha \gamma$ proportionē nō
 habet quam numerus quadratus ad quadratum: neq;
 quadratum linea $\zeta \iota$ ad quadratum linea $\iota \theta$ propor-
 tionem habebit quam quadratus numerus ad quadra-
 tum. Est ergo linea $\zeta \iota$ longitudine incommensurabilis li-
 nea $\iota \theta$. ergo linea $\zeta \iota, \iota \theta$ sunt rationales potentia tantū
 commensurabiles. ergo tota linea $\zeta \theta$ erit binomium. Di-
 co prater ea eam esse binomium sextum. Cum enim sit

EVCLIDIS ELEMENTOR.

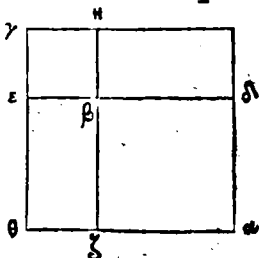
sicut numerus α ad numerum β , ita quadratum lineae ϵ ad quadratum lineae ζ . Est autem sicut numerus β ad numerum α , ita quadratum lineae ζ ad quadratum lineae ϵ . Per eam ergo proportionem sicut numerus α ad numerum α , ita quadratum lineae ϵ ad quadratum lineae ϵ . Sed numerus α ad numerum α non habet proportionem quam quadratus numerus ad quadratum: neque etiam quadratum lineae ϵ ad quadratum lineae ϵ habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo linea ϵ est longitudine incommensurabilis lineae ϵ . Sed modo probatum est lineam ζ esse etiam longitudine incommensurabilem lineae ϵ . Ergo ambae lineae ζ et ϵ sunt incommensurabiles longitudine lineae ϵ . Et quoniam est sicut numerus ϵ ad numerum α , ita quadratum lineae ζ ad quadratum lineae ϵ . maius est ergo quadratum lineae ζ quadrato lineae ϵ . Sint ergo quadrato lineae ζ aequalia quadrata linearum ϵ et χ . Ergo per eversam proportionem sicut numerus ϵ ad numerum ϵ , ita quadratum lineae ζ ad quadratum lineae χ . Sed numerus β ad numerum ϵ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo neque quadratum lineae ζ ad quadratum lineae χ habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo linea ζ est longitudine incommensurabilis lineae χ . ergo linea ζ potest plusquam linea ϵ quadrato lineae sibi longitudine incommensurabilis. Sunt autem lineae ζ et ϵ rationales potestiam tantum



tum commensurabiles, & ambæ lineæ $\lambda\mu$ & θ incommensurabiles longitudine lineæ rationali α . Ergo tota lineæ $\lambda\theta$ est binomium sextum.

Lemma.

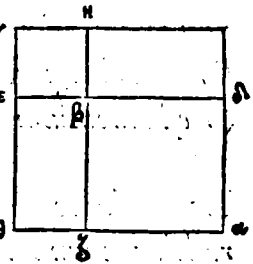
Si lineæ recta secetur in partes duas quocunque modo parallelogrammum rectangulum contentum ex sectionibus ambabus est medium proportionaliter inter quadrata sectionum. Et parallelogrammum rectangulum contentum ex tota lineæ & altera sectione est medium proportionaliter inter quadratū totius lineæ & quadratum dictæ sectionis. Sint duo quadrata $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ita collocata ut lineæ $\alpha\epsilon$, $\epsilon\gamma$ sint in eadem recta lineæ. Erunt ergo & lineæ $\lambda\beta$, $\beta\mu$ in eadem recta lineæ per 14.1. Compleatur ergo parallelogrammū $\alpha\gamma$.



Dico parallelogrammum rectangulum $\alpha\gamma$ ut in lemmate. Imprimis parallelogrammum $\alpha\gamma$ est quadratum, quia lineæ $\alpha\beta$ est æqualis lineæ $\lambda\beta$: lineæ uerò $\beta\epsilon$ lineæ $\beta\mu$. tota ergo lineæ $\alpha\epsilon$ est æqualis toti lineæ $\lambda\mu$. Sed lineæ $\alpha\epsilon$ est æqualis utrique $\gamma\mu$, & $\theta\alpha$. lineæ item $\lambda\mu$ est æqualis utrique $\alpha\mu$, & γ per 54.1. ergo utraque linearum $\alpha\theta$, $\lambda\gamma$ est æqualis utrique $\alpha\mu$, & γ . Ergo parallelogrammum $\alpha\gamma$ est æquilaterum. Est etiam rectangulum per 29.1. ergo parallelogrammum $\alpha\gamma$ est quadratum. Et quoniam est sicut lineæ $\lambda\beta$ ad lineam $\beta\mu$, ita lineæ $\alpha\epsilon$ ad lineam $\epsilon\gamma$. Sed sicut lineæ $\lambda\beta$ ad lineam $\epsilon\mu$, ita parallelogrammum $\alpha\beta$, quod est quadratū lineæ $\alpha\epsilon$, ad parallelogrammū $\lambda\mu$ per 1.6. Sicut autem lineæ $\alpha\beta$ ad lineam $\epsilon\mu$, ita pa-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

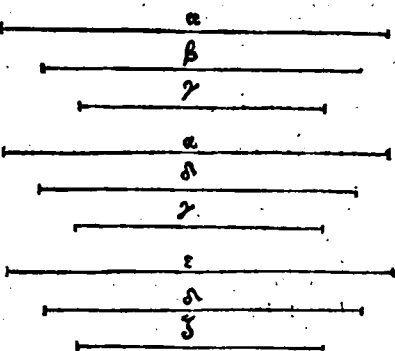
parallelogrammum $\Delta\kappa$ ad paralle- γ
 logrammū $\beta\gamma$, quod est. quadra-
 tū lineæ $\epsilon\zeta$ per 1.6. Ergo sicut qua-
 dratum $\alpha\epsilon$ ad parallelogrammū
 $\Delta\kappa$, ita parallelogrammum $\Delta\kappa$ ad
 quadratū $\beta\gamma$. Ergo parallelogram-
 mum $\Delta\kappa$ est medium proportionaliter inter quadrata
 $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$. Dico præterea parallelogrammum $\Delta\gamma$ esse me-
 dium proportionaliter inter quadrata $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$. Cum e-
 nim sit sicut lineæ $\alpha\Delta$ ad lineam $\Delta\kappa$, ita lineæ $\kappa\Delta$ ad li-
 neam $\kappa\gamma$. singulæ enim sunt singulis æquales. Per com-
 positam ergo proportionem quæ probatur per 18.5, si-
 cut lineæ $\alpha\kappa$ ad lineam $\kappa\Delta$, ita lineæ $\kappa\gamma$ ad lineam $\Delta\gamma$. Sed
 sicut lineæ $\alpha\kappa$ ad lineam $\kappa\Delta$, ita quadratum lineæ $\alpha\kappa$,
 quod est quadratum $\alpha\gamma$, ad parallelogrammum ex $\alpha\kappa$,
 $\kappa\Delta$, hoc est parallelogrammum $\Delta\gamma$ per 1.6. Sicut autem
 lineæ $\kappa\gamma$ ad lineam $\kappa\gamma$, ita parallelogrammum $\Delta\gamma$ ad
 quadratum lineæ $\kappa\gamma$, quod est quadratum $\beta\gamma$. Sicut er-
 go quadratum $\alpha\gamma$ ad parallelogrammum $\Delta\gamma$, ita paral-
 lelogrammum $\Delta\gamma$ ad quadratum $\beta\gamma$. Ergo parallelo-
 grammum $\Delta\gamma$ est medium proportionaliter inter qua-
 drata $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$. quod demonstrandum erat.



Lemma.

Quæ sunt media proportionaliter inter eadē aut æqualia
 sunt, ipsa quoque inter se æqualia. Sint tres magnitudi-
 nes α , ϵ , γ . Sit quæ sicut α ad ϵ , ita β ad γ . Sit similiter sicut
 eadē magnitudo α ad Δ , ita Δ ad eandē magnitudinē γ .
 Dico β , Δ esse inter se æqualia. Nam proportio α ad γ est
 proportio duplicata ipsius α ad ϵ per diffinitionē, simi-
 liter

liter proportio eadē ip-
sius α ad γ , est proportio
duplicata ipsius α ad δ ,
per eandē diffinitionē.
sed quorum equaliter
multiplicia sunt aqua-
lia, aut eadē ipsa quoq;
sunt equalia. Ergo si-
cut α ad β , ita α ad δ :

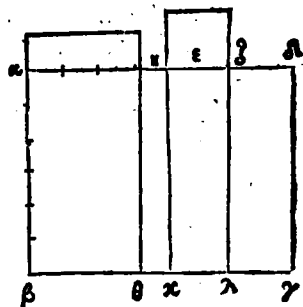


ergo per 9.5. β, δ, ϵ sunt inter se equalia. Idē, si fuerint alia magnitudines equalēs ipsis α, γ puta ι, κ inter quas sit media proportionalis magnitudo λ .

Quinquagesimumquartum Theorema.

Si superficies contenta fuerit ex rationali & binomio primo, linea quæ illam superficiē potest, est irrationalis quæ binomium uocatur.

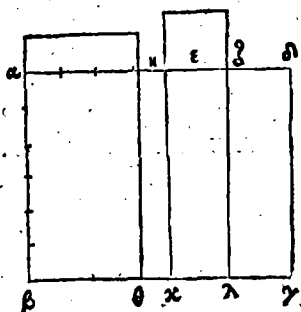
Superficies enim, $\alpha \beta \gamma \delta$, cōtineatur ex linea rationali $\alpha \beta$ & binomio primo linea $\alpha \delta$. Dico lineam quæ superficiem $\alpha \gamma$ potest esse irrationalē illam quæ uocatur binomium. Cum enim linea $\alpha \delta$ sit binomium primū, diuidatur in sua nomina in pū



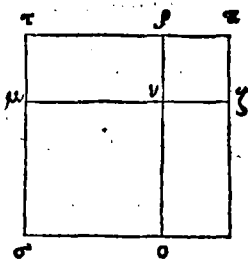
cto ι , sitq; maius nomen $\alpha \iota$, constat lineas $\alpha \iota$, & δ esse racionales potentia tantum commensurabiles, & lineam $\alpha \iota$ plus posse, quàm linea $\iota \delta$ quadrato lineæ sibi cōmensurabilis longitudine, & lineam $\alpha \iota$ esse longitudine cō-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

mensurabilem lineæ propositæ
rationali $\alpha\epsilon$. Diuidatur linea
 $\alpha\delta$ bifariam, & æqualiter in
puncto ζ . Et quoniam linea $\alpha\epsilon$
plus potest quàm linea $\alpha\delta$ qua-
drato lineæ sibi longitudine cõ-
mensurabilis, si quarta parti
quadrati lineæ minoris, hoc est



quadrato lineæ $\alpha\zeta$ æquale secundum maiore lineæ, nem-
pe $\alpha\epsilon$ applicetur, deficiēs figura quadrata diuidet lineā
maiores, nempe $\alpha\epsilon$ in partes inter se longitudine com-
mensurabiles, per secundam partem 18 huius. applice-
tur ergo secundum lineam $\alpha\epsilon$ æquale quadrato lineæ $\alpha\zeta$
parallelogrammum ex $\alpha\eta, \eta\epsilon$. Ergo linea $\alpha\eta$ est longitu-
dine commensurabilis lineæ $\alpha\epsilon$. Ducantur per puncta
 α, ζ alterutri linearum $\alpha\beta, \delta\gamma$ parallela $\eta\theta, \epsilon\lambda, \zeta\epsilon$ per
31.1. & parallelogrammo $\alpha\theta$ æquale quadratum con-
struatur $\sigma\upsilon$: parallelogrammo ue-
ro $\eta\epsilon$, sit æquale quadratum $\iota\pi$,
& ita describatur, ut linea $\mu\upsilon$ sit
in eadem recta linea cum $\iota\xi$. sunt
ergo in eadē recta linea linea $\epsilon\iota$,
 $\iota\theta$, & compleatur parallelogram-
mum $\sigma\pi$. Ergo parallelogrammū

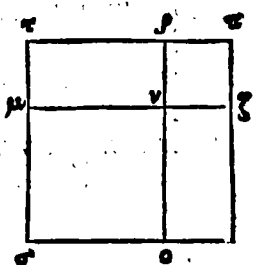


$\sigma\pi$ est quadratum per ea quæ dicta sunt in demonstra-
tione lemmatis penultimi. Et quoniam parallelogram-
mum ex $\alpha\eta, \eta\epsilon$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\zeta$: Est igitur
sicut linea $\alpha\eta$ ad lineam $\alpha\zeta$, ita linea $\alpha\zeta$ ad lineā $\eta\epsilon$ per
17.6. Ergo per 1.6. sicut parallelogrammum $\alpha\theta$ ad pa-
rallelo-

rallelogrammum $\iota \lambda$; ita parallelogrammum $\iota \lambda$ ad pa-
 rallelogrammum $\alpha \theta$. Ergo parallelogrammum $\iota \lambda$ est me-
 dium proportionaliter inter parallelogramma $\alpha \theta$, $\alpha \nu$.
 Sed parallelogrammum $\alpha \theta$ est æquale quadrato $\sigma \nu$. pa-
 rallelogrammum uero $\alpha \nu$ est æquale quadrato $\nu \pi$. Ergo
 quadratorum $\sigma \nu$, $\nu \pi$ mediū proportionale est $\iota \lambda$, quorū
 quadratorum $\sigma \nu$, $\nu \pi$ mediū quoque proportionaliter
 est parallelogrammum $\mu \xi$ per lemma penultimū. ergo
 $\mu \xi$ est æquale parallelogrammo $\iota \lambda$ per lemma proxi-
 mum ante hoc theorema. Sed parallelogrammū $\mu \xi$ est
 æquale parallelogrammo $\sigma \xi$ per 43.1. parallelogram-
 mum uero $\iota \lambda$ est æquale parallelogrammo $\xi \gamma$. Totū er-
 go parallelogrammum $\iota \gamma$ est æquale duobus parallelo-
 grammis $\mu \xi$, $\sigma \xi$ inter se æqualibus. Sed parallelogram-
 ma $\alpha \theta$, $\alpha \nu$ sunt æqualia quadratis $\sigma \nu$, $\nu \pi$. totum ergo pa-
 rallelogrammum $\alpha \gamma$ est æquale toti quadrato $\sigma \pi$, hoc
 est quadrato lineæ $\mu \xi$. Ergo lineæ $\mu \xi$ potest parallelo-
 grammum $\alpha \gamma$. dico lineam $\mu \xi$ esse binomiū. Cum enim
 lineæ $\alpha \nu$ sit longitudine commensurabilis lineæ $\alpha \iota$, ergo
 lineæ tota $\alpha \iota$ est commensurabilis longitudine utrique
 $\alpha \nu$, $\alpha \iota$ per 16. Sed per suppositionem lineæ $\alpha \iota$ est longitu-
 dine commensurabilis lineæ $\alpha \beta$, ergo $\epsilon \gamma$ utraque $\alpha \nu$, $\alpha \iota$
 est commensurabilis longitudine lineæ $\alpha \beta$ per 12. est au-
 tem lineæ $\alpha \beta$ rationalis: rationalis est ergo utraque $\alpha \nu$,
 $\alpha \iota$. Est ergo utrūq; parallelogrammum $\alpha \theta$, $\alpha \nu$ rationale
 per 20. Ergo $\epsilon \gamma$ parallelogrammum $\alpha \theta$ erit commensu-
 rabile parallelogrammo $\alpha \nu$. ergo $\epsilon \gamma$ quæ sunt illis æqua-
 lia, nempe quadrata $\sigma \nu$, $\nu \pi$ quæ sunt quadrata linearū
 $\mu \nu$, $\nu \xi$ sunt rationalia $\epsilon \gamma$ commensurabilia. Et quoniā

EVCLIDIS ELEMENTOR.

linea α est per positionem longitudine incömensurabilis linea ϵ λ , sed linea α & linea α ν est commensurabilis, ut modo probatum est: linea autem ϵ λ est commensurabilis linea ϵ ξ . Ergo per corollarium à nobis positum post 14. linea α ν est



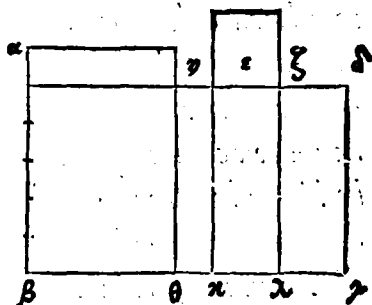
incommensurabilis longitudine linea ϵ λ . Quare & parallelogrammum α θ parallelogrammo ϵ λ est incömensurabile. Ergo & quadratum σ ν est incommensurabile parallelogrammo μ ϵ , quia per positionem parallelogrammum α θ est aequale quadrato σ ν : & parallelogrammum ϵ λ probatum est aequale parallelogrammo μ ϵ . Sed sicut quadratum σ ν , ad parallelogrammum μ ϵ , ita linea α ν ad lineam ϵ ξ per 1.6. ergo per 10 linea α ν est incommensurabilis linea ϵ ξ . est autem linea α ν aequalis linea α ν : linea autem ϵ ξ linea ϵ ξ . est ergo incommensurabilis linea μ ν linea ϵ ξ . Modo autem probatum est quadrata amborum linearum μ ν , & ϵ ξ esse rationalia & commensurabilia. Ergo linea μ ν , & ϵ ξ sunt rationales potètia tantum commensurabiles. ergo linea μ ξ est binomium, & potest parallelogrammum α γ . quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumquintum Theorema.

Si superficies contenta fuerit ex linea rationali & binomio secundo, linea potens illam superficiem est irrationalis quæ bimediale primum uocatur.

Superficies enim, α ϵ γ λ , contineatur ex rationali α β & binomio secundo, quæ sit linea α λ . Dico lineam quæ superficiem

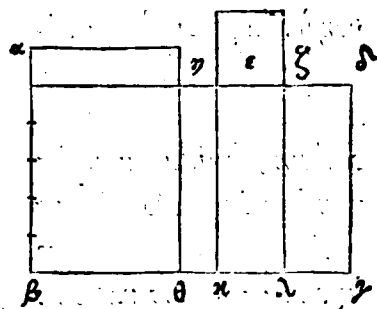
perficiē $\alpha \gamma$ potest, esse bi-
mediale primū. Cū enim
linea $\alpha \delta$ sit binomium se-
cūdum, diuidatur in sua
nomina in pūcto ϵ , ita ut
maius nomen sit $\alpha \epsilon$. ergo
linea $\alpha \epsilon$, $\epsilon \delta$ sunt rationa-



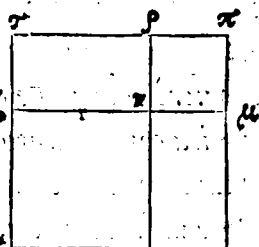
les tantum potentia commensurabiles, & linea $\alpha \epsilon$ po-
test plus quā linea $\epsilon \delta$ quadrato linea $\alpha \epsilon$ sibi longitudine
commensurabilis, & minus nomen nempe $\epsilon \delta$ est com-
mensurable longitudine linea $\alpha \epsilon$. Secetur linea $\alpha \delta$ bifa-
riam & equaliter in puncto ϵ , & quadrato linea $\epsilon \delta$
equale secundum lineam $\alpha \epsilon$ applicetur parallelogram-
mum deficiens figura quadrata, quod parallelogram-
mum sit ex lineis $\alpha \epsilon$, $\epsilon \delta$. Ergo linea $\alpha \epsilon$, est longitudine cō-
mensurabilis linea $\epsilon \delta$. & per puncta α , ϵ , δ ducantur pa-
rallela lineis $\alpha \epsilon$, $\alpha \gamma$, linea $\epsilon \theta$, $\epsilon \kappa$, $\epsilon \lambda$. Et parallelogramo
 $\alpha \theta$ equale quadratum construatur $\sigma \nu$. parallelogram-
mo uerò $\epsilon \kappa$, equale quadratum similiter cōstruatur $\nu \mu$,
& ita componantur ut linea $\mu \nu$, & linea $\nu \sigma$ conficiant
unam lineam rectam. ergo & linea $\alpha \sigma$, & $\sigma \nu$ cōficiunt unā
& eandem lineam, & compleatur quadratū $\sigma \theta$. Con-
stat ex his quæ demonstrata sunt in proximo theoremate
parallelogrammum $\mu \epsilon$ esse proportionaliter mediū in-
ter quadrata $\sigma \nu$, $\nu \theta$, & equale parallelogramo $\epsilon \lambda$ &
lineam $\mu \epsilon$ posse superficiē $\alpha \gamma$. Modo superest ut demon-
stremus lineam $\mu \epsilon$ esse bimediale primum: quoniā li-
nea $\alpha \epsilon$ est longitudine incommensurabilis linea $\epsilon \delta$, &
linea $\epsilon \delta$ est commensurabilis longitudine linea $\alpha \epsilon$. est

EVCLIDIS ELEMENTOR.

ergo linea α longitudine
incommensurabilis linea
 $\alpha \beta$ per 14. Et quoniam li-
nea α est commensurabi-
lis longitudine linea α , est
ergo tota linea α longitu-
dine commensurabilis li-



nea utrique α , per 16. est autē linea α rationalis, er-
go utraque α , rationalis. Et quoniam linea α est
longitudine incommensurabilis linea $\alpha \beta$. est autem linea
 α commensurabilis longitudine utrique α , ergo li-
nea α sunt longitudine incommensurabiles linea $\alpha \beta$.
ergo linea $\alpha \beta$, sunt rationales potentia tantum cō-
mensurabiles. Quare utrumque parallelogrammū $\alpha \theta$,
est mediale per 22. quare utrūque quadratum ϵ ,
est etiam mediale, ergo linea ϵ , sunt mediales. Et quo-
niā linea α est longitudine cōmē-
surabilis linea α , commensurabile
est parallelogrammū $\alpha \theta$ parallelo-
grammo $\alpha \theta$ per 1.6. Et 10 huius,
hoc est quadratum ϵ quadrato
 ϵ , hoc est quadratum linea ϵ ,
quadrato linea ϵ , quare linea
 ϵ sunt potentia cōmensurabiles. Et quoniā linea α
est longitudine incommensurabilis linea α . sed linea α est
longitudine cōmensurabilis linea α , linea uerō α est lō-
gitudine commensurabilis linea ϵ . est ergo linea α in-
commensurabilis longitudine linea ϵ per corollarium
14 theoremat. Quare ϵ parallelogrammū $\alpha \theta$ est in-
commen-



commensurabile parallelogrammo λ , hoc est quadratum σ , parallelogrammo $\mu\epsilon$, hoc est linea σ , linea $\nu\epsilon$, hoc est linea μ , linea ν , ξ est longitudine incommensurabilis. Ergo linea μ , ν , ξ sunt potentia tantum commensurabiles. Sed modo probatum est easdem esse mediales, ergo linea μ , ν , ξ sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico praterea eas continere superficiem rationalem. Cum enim linea λ sit longitudine commensurabilis utrique $\alpha\beta$, λ . Est ergo linea λ longitudine commensurabilis linea λ quæ est æqualis linea $\alpha\epsilon$. Est autem utraque linea λ , λ rationalis, ergo parallelogrammum λ est rationale per 20 huius, hoc est ei æquale parallelogrammum $\mu\epsilon$. Sed parallelogrammum $\mu\epsilon$ est contentum ex lineis μ , ν , ξ . Ergo per 37 linea μ , ξ est bimediale primum quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumsextum Theorema.

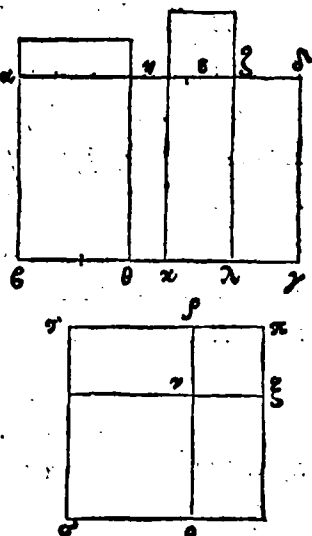
Si superficies contineatur ex rationali & binomio tertio, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis quæ dicitur bimediale secundum.

Superficies enim $\alpha\beta\gamma\lambda$ contineatur ex rationali $\alpha\beta$ & binomio tertio linea $\alpha\lambda$, quæ sit diuisa in sua nomina in puncto ν , quorum maius nomen sit linea $\alpha\nu$. Dico lineam quæ potest superficiem $\alpha\gamma$ esse irrationalem uocatam bimediale secundum. Sit enim eadem constructio figurarum quæ in proximis theorematibus. Quoniam linea $\alpha\lambda$ est binomium tertium linea $\alpha\nu$, λ sunt rationales potentia tantum commensurabiles, & linea $\alpha\nu$ plus potest quàm linea λ quadrato linea sibi longitudine com-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

mēsurabilis, & neutra linearū

$\alpha \beta$, α est longitudine commēsurabilis linea $\alpha \beta$. Sicut in superioribus est demonstratū, ita hic demonstrari potest lineā $\mu \xi$ posse superficiē $\alpha \gamma$, & lineas $\mu \nu$, $\nu \xi$ esse mediales potentia tantū cōmensurabiles, itaque lineam $\mu \xi$ esse compositā ex lineis medialibus potentia tantum commensurabilibus. Restat demonstrandum eandem lineam $\mu \xi$ esse bimediale secundum, quoniam linea $\alpha \beta$



est longitudine incommēsurabilis linea $\alpha \beta$, hoc est linea $\alpha \kappa$. sed linea $\alpha \beta$ est commēsurabilis lōgitudine linea $\alpha \zeta$. Est ergo linea $\alpha \zeta$ lōgitudine incommēsurabilis linea $\alpha \kappa$. ergo linea $\alpha \zeta$, $\alpha \kappa$ sunt rationales, quia ex hypothesi linea $\alpha \beta$ est rationalis, cui linea $\zeta \kappa$ est commensurabilis. Ergo linea $\alpha \zeta$, $\alpha \kappa$ sunt rationales potētia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum $\alpha \lambda$ est mediale per 22. hoc est parallelogrammum $\mu \epsilon$, quod continetur ex lineis $\mu \nu$, $\nu \xi$. Ergo linea $\mu \xi$ est bimediale secundum.

Quinquagesimumseptimum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio quarto, linea potens superficiem illam est irrationalis, quæ dicitur maior.

Superficies $\alpha \gamma$ contineatur ex linea rationali $\alpha \epsilon$, & binomio quarto, linea $\alpha \delta$ diuisa in sua nomina in pācto, sitq;

fitq; maius nomen α . Dico lineam qua potest superfi-
ciem $\alpha\gamma$ esse irrationalē eam, quæ dicitur maior. Cum
enim linea α sit binomium

quartum, ergo linea α & β

sunt rationales potentia tan-
tum commensurabiles: & li-

nea α plus potest quàm linea

β quadrato lineæ sibi incom-

mensurabilis longitudine: & β

linea α est longitudine com-

mēsurabilis rationali $\alpha\epsilon$. Se-

cetur linea α bifariā & æ-

qualiter in puncto ζ , & secū-

dum lineam α quadrato li-

nea β æquale applicetur pa-

rallelogrammum ex $\alpha\beta$. Ergo linea α est incommē-

surabilis longitudine lineæ β per secundam partem 19

theorematis. Duceantur ad lineam $\alpha\epsilon$ parallele $\alpha\delta$, $\alpha\zeta$,

$\zeta\lambda$, & fiant cetera ut in superioribus. constat lineam

$\mu\epsilon$ posse superficiem $\alpha\gamma$. Nunc demōstremus illam lineā

$\mu\epsilon$ esse irrationalē, quæ maior dicitur. Cum enim li-

nea α sit incommensurabilis longitudine lineæ β , ergo

etiam erit parallelogrammū $\alpha\delta$ incommensurabile pa-

rallelogrammo $\alpha\zeta$, hoc est quadratū $\epsilon\iota$ quadrato $\iota\theta$.

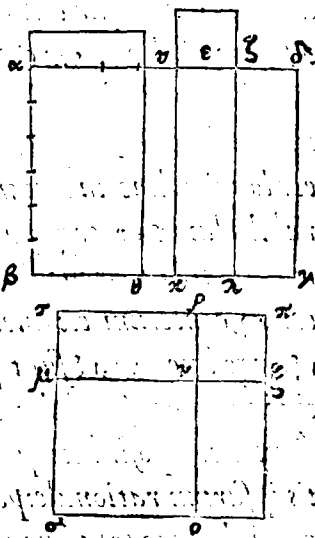
ergo linea $\mu\iota$, $\iota\epsilon$ sunt potentia incommensurabiles. Et

quoniā linea α est longitudine cōmensurabilis ratio-

nali $\alpha\epsilon$, id est per positionē, parallelogrammū $\alpha\zeta$ est ra-

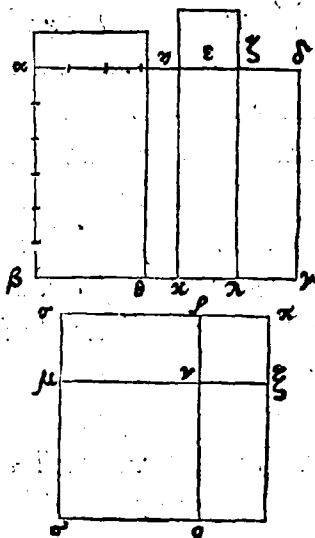
tionale per 20. ergo & compositū ex quadratis illi æ-

qualibus, nempe $\epsilon\iota$, $\iota\theta$, quæ sunt quadrata linearū $\mu\iota$,



EVCLIDIS ELEMENTOR.

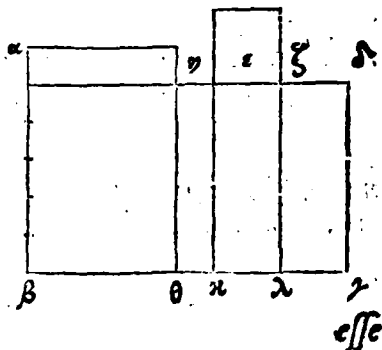
$\nu \xi$, erit similiter rationale. & quoniam linea $\iota \alpha$ est longitudine incommensurabilis linea $\alpha \beta$, hoc est linea $\iota \alpha$: & linea $\iota \alpha$ est commensurabilis longitudine linea $\iota \zeta$: Ergo linea $\iota \zeta$ est longitudine incommensurabilis linea $\iota \alpha$. ergo parallelogrammum $\iota \lambda$ est mediale, hoc est $\mu \xi$, contentum ex lineis $\mu \nu$, $\nu \xi$. ergo linea $\mu \nu$, $\nu \xi$ sunt potentia incommensurabiles confidentes compositum ex quadratis ipsarum rationale: parallelogrammum uero ex ipsis mediale. ergo tota linea $\mu \xi$ est irrationalis quæ dicitur linea maior, & potest superficiem $\alpha \gamma$ quod demonstrandum erat.



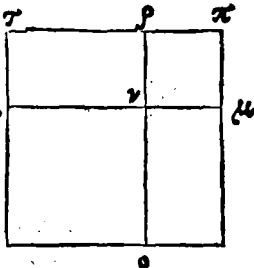
Quinquagesimum octauum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio quinto, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis, quæ dicitur potes rationale & mediale.

Superficies $\alpha \gamma$ contineatur ex rationali $\alpha \epsilon$ & binomio quinto, linea $\alpha \alpha$ diuisa in sua nomina in puncto ι , ita ut maius nomen sit $\iota \alpha$. Dico lineam quæ potest superficiem illam $\alpha \gamma$,



esse irrationalem, quæ dicitur potens rationale & mediale. Sint enim eadem constructiones quæ in præcedenti. Constat lineam quæ potest superficiem $\alpha\gamma$ esse $\mu\xi$. Demostremus illam lineam $\mu\xi$, esse lineam potentem rationale & mediale. Cum enim linea $\alpha\lambda$ sit incommensurabilis longitudine lineæ $\alpha\iota$, est etiam incommensurable parallelogrammum $\alpha\theta$ parallelogrammo $\theta\iota$, hoc est quadratū lineæ $\mu\iota$, quod est quadratū $\tau\iota$ quadrato lineæ $\iota\xi$, quod est quadratū $\iota\pi$. Ergo lineæ $\mu\iota$ & $\iota\xi$ sunt potentia incommensurabiles. Et quoniam linea $\alpha\lambda$ est binomium quintū, estq; minus eius nomē linea $\iota\lambda$ illa linea $\iota\lambda$, est longitudine cōmensurabilis rationali $\alpha\beta$. Sed linea $\alpha\iota$ est longitudine incommensurabilis lineæ $\iota\lambda$. Ergo linea $\alpha\iota$ est longitudine incommensurabilis rationali $\alpha\beta$. ergo lineæ $\alpha\beta$, $\alpha\iota$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum $\alpha\lambda$, est mediale hoc est compositum ex quadratis linearum $\mu\iota$, $\iota\xi$. Et quoniam est commensurabilis longitudine lineæ $\iota\lambda$ lineæ $\alpha\beta$, hoc est linea $\iota\lambda$. sed linea $\iota\lambda$ est commensurabilis longitudine lineæ $\iota\zeta$. Ergo & linea $\iota\zeta$ est longitudine commensurabilis lineæ $\iota\lambda$, & linea $\iota\lambda$ est rationalis. ergo & parallelogrammū $\iota\lambda$ erit rationale per 20. hoc est parallelogrammum $\mu\epsilon$ quod continetur ex lineis $\mu\iota$, $\iota\xi$. Ergo illa lineæ $\mu\iota$, $\iota\xi$ sunt potētia incōmensurabiles cōficiētes compositum ex quadratis ipsarum mediale: parallelogrammum uerò ex ipsis rationale. Ergo tota linea $\mu\xi$



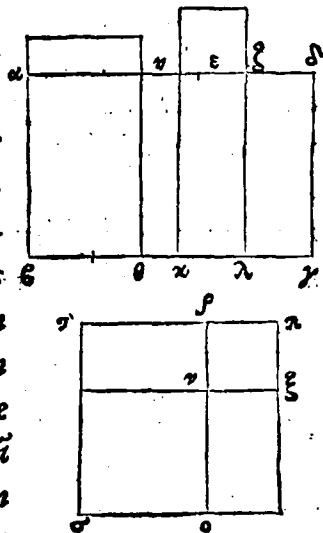
EVCLIDIS ELEMENTOR.

est irrationalis, quæ dicitur potēs rationale & mediale:
& potest superficiem $\alpha\gamma$. quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumnonum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio sexto, linea quæ illam superficiem potest est irrationalis, quæ dicitur potens duo medialia.

Superficies $\alpha\beta\gamma\delta$, contineatur ex rationali $\alpha\epsilon$, & binomio sexto linea $\alpha\delta$ diuisa in sua nomina in puncto ϵ , ita ut maius illius nomē sit $\alpha\epsilon$: dico lineā quæ potest superficiem $\alpha\gamma$ esse irrationalem eam, quæ dicitur potens duo medialia. Sint enim eadem constructiones quæ in præcedentibus. Manifestum est lineā quæ potest superficiem $\alpha\gamma$ esse lineā $\mu\xi$, & lineam $\mu\iota$ esse incommensurabilem potentia lineæ $\iota\xi$: &



quoniam est incommensurabilis longitudine lineæ $\alpha\iota$ lineæ $\alpha\epsilon$. ergo lineæ illæ $\alpha\iota$, $\alpha\epsilon$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo parallelogrammum $\alpha\kappa$, hoc est compositum ex quadratis linearum $\mu\iota$, $\iota\xi$ est mediale. Rursus cum lineæ $\alpha\iota$ sit incommensurabilis longitudine lineæ $\alpha\epsilon$, ergo etiam incommensurabilis longitudine erit lineæ $\epsilon\zeta$ lineæ $\epsilon\kappa$. Ergo mediale erit parallelogrammum $\epsilon\lambda$, hoc est $\mu\epsilon$, quod continetur ex $\mu\iota$, $\iota\xi$. Et quoniam est longitudine incommensurabilis lineæ $\alpha\iota$ li-

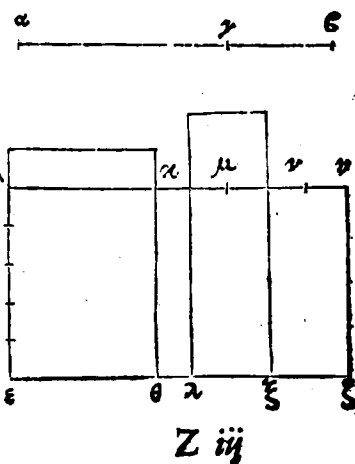
nea

nea ϵ γ . ergo etiam parallelogrammum $\alpha \kappa$ erit incommensurable parallelogrammo $\epsilon \lambda$. Sed parallelogrammum $\alpha \kappa$ est aequale composito ex quadratis linearum $\mu \nu$, $\nu \xi$: parallelogrammum uero $\epsilon \lambda$ est aequale ei quod fit ex $\mu \nu$, $\nu \xi$. Ergo compositum ex quadratis linearum $\mu \nu$, $\nu \xi$ est incommensurable ei quod fit ex $\mu \nu$, $\nu \xi$, estq; mediale utriusque: & linea $\mu \nu$, $\nu \xi$ sunt potentia incommensurabiles. Ergo tota linea $\mu \xi$ est potens duo medialia, & potest superficiem $\alpha \gamma$. quod demonstrandum fuit. Hic legitur quoddam lemma, quod quia uisum est idem cum eo quod postponitur 39 theoremati, ideo pratermisimus. praterea quae hic affertur illius demonstratio, cum non satisfaciat, superiore illa, quae & certissima & facillima est, contenti sumus: hoc ipsum lemma persecutus est Campanus post 35.

Sexagesimum Theorema.

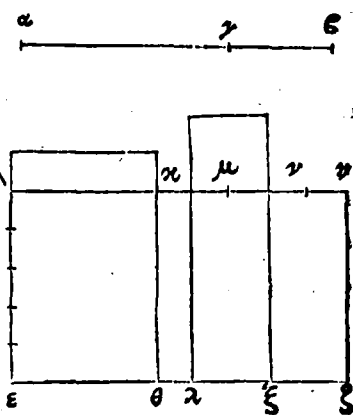
Quadratum binomij secundum lineam rationalem applicatū facit alterū latus binomiū primū.

Sit binomium linea $\alpha \epsilon$ diuisa in sua nomina in pūcto γ , ita ut maius nomē sit $\alpha \gamma$: & proponatur linea rationalis linea $\alpha \nu$: & quadrato linea $\alpha \beta$ aequale secundum lineam $\alpha \epsilon$ applicetur parallelogrammum $\alpha \epsilon \zeta \eta$ latus alterum faciēs lineam $\alpha \nu$. Dico lineam $\alpha \nu$



EVCLIDIS ELEMENTOR.

esse binomiū primum. Nā
secundum lineam α qua-
drato linea $\alpha\gamma$ aequale ap-
plicetur parallelogrammū
 $\alpha\theta$. quadrato autem linea
 $\beta\gamma$ aequale applicetur pa-
rallelogrammum $\alpha\lambda$. Resi-
duum ergo, nempe id quod
fit bis ex lineis $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est æ-
quale residuo uidelicet pa-



rallelogrammo $\mu\zeta$. Secetur linea μ bifariā & aqua-
liter in puncto ν . & ducatur linea $\nu\zeta$ parallela utriq; li-
nearum $\mu\lambda, \alpha\zeta$. Virumvis ergo parallelogrammorū $\mu\zeta$,
 $\alpha\zeta$ est æquale ei quod fit semel ex lineis $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$. Et quo-
niam linea $\alpha\beta$ est binomium diuisa in sua nomina in
puncto γ . ergo linea $\alpha\gamma, \gamma\beta$ sunt rationales potentia tan-
tum commensurabiles. Ergo quadrata linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$
sunt rationalia, ideoque cōmensurabilia inter se. quare
& compositum ex illis quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est
commensurabile singulis quadratis linearū $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$ per
16. Ergo compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est
rationale. est autem æquale parallelogrammo $\alpha\lambda$. ergo
& parallelogrammum $\alpha\lambda$ est rationale, & secundum
lineam rationalem applicatur $\alpha\lambda$. Ergo linea $\alpha\mu$ est ra-
tionalis & longitudine cōmensurabilis linea α per 21.
Rursus quoniam linea $\alpha\gamma, \gamma\beta$ sunt rationales. potentia
tantum commensurabiles: ergo id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$,
nempe parallelogrammum $\mu\zeta$ est mediale per 22. & il-
lud parallelogrammum $\mu\zeta$ applicatur secundum ratio-
nalem

nalem $\mu\lambda$. est ergo linea μ rationalis & incommensu-
 rabilis longitudine linea $\mu\lambda$, hoc est linea λ . Est autem
 & linea λ rationalis & longitudine commensurabi-
 lis linea λ . Est ergo linea λ , linea μ longitudine incō-
 mensurabilis. Sunt autem ambæ rationales. sunt ergo
 linea λ , μ rationales potentia tantum commensura-
 biles. Ergo linea λ est binomium. Demonstramus præ-
 terea illam esse binomium primum. Nam cum quadra-
 torum linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$ sit proportionaliter medium pa-
 rallelogrammum ex $\alpha\gamma\gamma\beta$ per lemma positum post 53.
 Ergo etiam parallelogrammorum $\lambda\theta$, $\kappa\lambda$, proportiona-
 liter medium erit parallelogrammum $\mu\xi$, quia singula
 singulis sunt equalia. Est ergo sicut parallelogrammum
 $\lambda\theta$ ad $\mu\xi$, ita $\mu\xi$ ad $\kappa\lambda$, hoc est sicut linea λ ad lineam
 μ , ita linea μ ad lineam $\mu\lambda$. Ergo quadratum linea μ
 est æquale parallelogrammo ex λ , $\mu\lambda$. Et quoniā qua-
 dratum linea $\alpha\gamma$ est cōmensurabile quadrato linea $\gamma\epsilon$:
 ergo & parallelogrammum $\lambda\theta$ est cōmensurabile pa-
 rallelogrammo $\kappa\lambda$. Quare & linea λ est longitudine
 commensurabilis linea μ per 1.6. & 10 huius. Et quo-
 niam quadrata linearū $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sunt maiora eo quod sit
 bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ per lemma positū post 39. ergo & paral-
 lelogrammū $\lambda\theta$ est maius parallelogrammo $\mu\xi$. Qua-
 re & linea λ est maior linea μ per 1.6. Et est æquale
 parallelogrammū ex λ , $\mu\lambda$ quadrato linea μ hoc est
 quartæ parti quadrati linea $\mu\lambda$, quia linea $\mu\lambda$ diuisa est
 bifariam & æqualiter in puncto ν , & est linea λ lon-
 gitudine commensurabilis linea μ . Ergo per 18. linea
 λ plus potest quàm linea μ quadrato linea sibi lon-

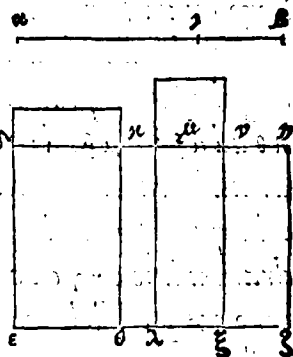
EVCLIDIS ELEMENTOR.

gitudine commensurabilis. Sunt autem & linea $\Lambda\mu$, $\mu\eta$ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea $\Lambda\mu$, quæ est maius nomen, est longitudine commensurabilis propositæ lineæ rationali $\Lambda\epsilon$. Ergo linea $\Lambda\eta$ est binomium primum. quod demonstrandum erat.

Sexagesimum primum Theorema.

Quadratum bimedialis primi secundum rationalem lineam applicatum facit alterum latus binomium secundum.

Sit bimediale primum linea $\alpha\beta$ diuisa in sua nomina in puncto γ , quorum maius nomē sit, $\alpha\gamma$. & proponatur linea rationalis $\Lambda\epsilon$, secundū quam applicetur æquale quadrato lineæ $\alpha\beta$ parallelogrammū $\Lambda\zeta$ faciens alterum latus lineam $\Lambda\eta$: dico lineā $\Lambda\eta$ esse binomiū



secundum. Sint enim eadem constructiones quæ in proximo theoremate, quoniam bimediale primum diuisum est in sua nomina in puncto γ . Quadrata linearum, $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sunt medialia. ergo parallelogrammum $\Lambda\lambda$ est etiā mediale. Est ergo rationalis linea $\Lambda\mu$, & incommensurabilis longitudine lineæ $\Lambda\epsilon$ per 23. Rursus quoniam id quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ est rationale, etiā parallelogrammum $\mu\zeta$ erit rationale. Ergo linea $\mu\eta$ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ $\mu\lambda$, hoc est lineæ $\Lambda\epsilon$, ergo linea $\Lambda\mu$ est longitudine incommensurabilis lineæ

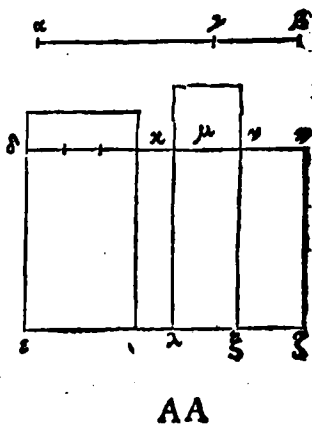
$\mu\eta$

$\mu\eta$, & sunt rationales: ergo linea $\lambda\mu$, $\mu\eta$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea $\lambda\eta$ est binomium. demonstremus illam esse binomium secundum. Quoniam quadrata linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sunt maiora eo quod sit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$. erit ergo parallelogrammum $\lambda\lambda$ maius parallelogrammo $\mu\zeta$. quare & linea $\lambda\mu$ maior linea $\mu\eta$. & quoniam quadratum linea $\alpha\zeta$ est commensurabile quadrato linea $\gamma\zeta$, etiam parallelogrammum $\lambda\theta$ erit commensurabile parallelogrammo $\kappa\lambda$. quare & linea $\lambda\kappa$ erit commensurabilis longitudine linea $\kappa\mu$. & est parallelogrammum ex $\lambda\kappa$, $\kappa\mu$ aequale quadrato linea $\mu\eta$, hoc est quarta parti quadrati linea $\mu\eta$. Ergo linea $\lambda\mu$ plus potest quam linea $\mu\eta$, quadrato linea sibi commensurabilis longitudine per 18. & est linea $\mu\eta$ longitudine commensurabilis linea rationali $\lambda\epsilon$. ergo linea $\lambda\eta$ est binomium secundum.

Sexagesimum secundum Theorema.

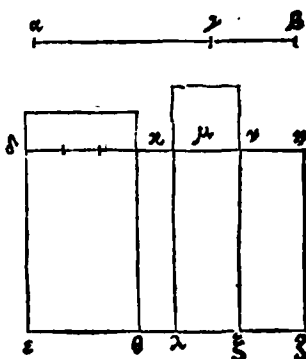
Quadratum bimedialis secundi secundum rationalem applicatū, facit alterū latus binomiū tertiū.

Sit bimediale secundum linea $\alpha\zeta$ diuisa in sua nomina in puncto γ : ita ut maius nomen sit $\alpha\zeta$. Sitque rationalis $\lambda\epsilon$ secundum quam quadrato linea $\alpha\beta$ aequale applicetur parallelogrammum $\lambda\zeta$, facies alterum latus lineam $\lambda\eta$. dico lineam $\lambda\eta$ esse binomium tertium. Sint enim



EVCLIDIS ELEMENTOR.

eadem constructiones, quæ in
precedentibus, quoniam linea
 $\alpha\beta$ est bimediale secundū, di-
uisum in puncto γ in sua nomi-
na. ergo $\square$ cōpositū ex qua-
dratus linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est me-
diale, estque æquale parallelo-
grammo $\Lambda\lambda$. ergo $\square$ $\Lambda\lambda$ erit
mediale. ergo linea $\Lambda\mu$ erit ra-



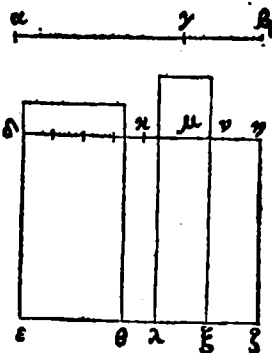
tionalis $\square$ longitudine incommensurabilis linea $\Lambda\epsilon$ per
23. Eadem ratione $\square$ linea $\mu\kappa$ erit rationalis $\square$ lon-
gitudine incommensurabilis linea $\mu\lambda$, hoc est linea $\Lambda\epsilon$. ergo
utraq̃ue linearum $\Lambda\mu, \mu\kappa$ est rationalis $\square$ incommen-
surabilis longitudine linea $\Lambda\epsilon$. Et quoniam est incom-
mensurabilis longitudine linea $\alpha\gamma$ linea $\gamma\beta$: $\square$ sicut li-
nea $\alpha\gamma$ ad lineam $\gamma\beta$, ita $\square$ quadratum linea $\alpha\gamma$ ad
parallelogrammū ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ per 1.6. Ergo $\square$ quadra-
tum linea $\alpha\gamma$ erit incommensurabile parallelogrammo
ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$. Quare $\square$ cōpositum ex quadratis linearū
 $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$, hoc
est parallelogrammum $\Lambda\lambda$, parallelogrammo $\mu\zeta$. Qua-
re $\square$ linea $\Lambda\mu$ erit incommensurabilis longitudine li-
nea $\mu\kappa$. Sunt autē ambæ rationales. tota ergo linea $\Lambda\kappa$
est binomium. Demonstrandum est præterea illam esse
binomium tertium. quemadmodum in superioribus, ita
hic cōcludemus lineam $\Lambda\mu$ esse maiorem linea $\mu\kappa$, esse-
que lineam $\Lambda\kappa$ longitudine commensurabilem linea $\mu\kappa$,
esse etiam parallelogrammum ex $\Lambda\kappa, \mu\kappa$ æquale qua-
drato linea $\mu\epsilon$. ergo $\square$ linea $\Lambda\mu$ plus posse quàm linea

μ quadrato linea sibi commensurabilis longitudine: & neutra ex $\lambda\mu$, μ est longitudine commensurabilis linea λ . ergo linea λ est binomium tertium.

Sexagesimum tertium Theorema.

Quadratum lineæ maioris secundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum.

Sit linea maior $\alpha\epsilon$ diuisa in sua nomina in puncto γ , ita ut maius nomen sit $\alpha\gamma$, sitq; rationalis λ , & secundum lineam λ quadrato lineæ $\alpha\epsilon$ æquale applicetur parallelogrammum $\lambda\delta$ faciens alterum latus $\lambda\mu$. dico lineam $\lambda\mu$ esse binomium quartum. Sint eadem constructiones quæ in præcedentibus.

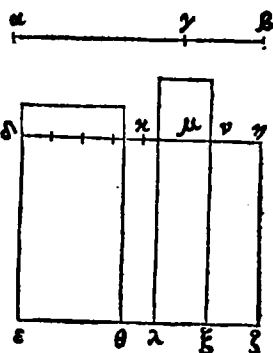


& quoniam linea $\alpha\beta$ est linea maior diuisa in sua nomina in puncto γ , linea $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sunt potentia incommensurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$ sit rationale: ergo & parallelogrammum $\lambda\delta$ erit rationale. ergo & linea $\lambda\mu$ erit rationalis & longitudine commensurabilis linea λ . Rursus cum id quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, hoc est parallelogrammum $\mu\zeta$ sit mediale, & secundum lineam rationalem $\mu\lambda$ sit applicatum: ergo & linea $\mu\eta$ erit rationalis, & longitudine incommensurabilis linea λ . ergo & linea $\lambda\mu$ erit longitudine incommensurabilis li-

AA ij

EVCLIDIS ELEMENTOR.

nea $\mu\kappa$. ergo linea $\lambda\mu$, $\mu\kappa$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea $\lambda\kappa$ erit binomium. Demonstrandum est illam præterea esse binomium quartum similiter, ut in præcedentibus concludetur lineam $\lambda\mu$ esse maiorem linea $\mu\kappa$. Cum igitur quadratum lineæ $\alpha\gamma$ sit incōmēsurabile quadrato lineæ $\gamma\epsilon$. ergo & parallelogrammum $\lambda\theta$ erit incōmēsurabile parallelogrammo $\kappa\lambda$. Quare & linea $\lambda\kappa$ erit longitudine incōmensurabilis lineæ $\kappa\mu$. Ergo per 19. linea $\lambda\mu$ plus potest, quàm linea $\mu\kappa$ quadrato lineæ sibi longitudine incōmensurabilis: sunt q̄; lineæ $\lambda\mu$, $\mu\kappa$ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea $\lambda\mu$ longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali $\lambda\iota$. ergo tota linea $\lambda\kappa$ erit binomium quartum.

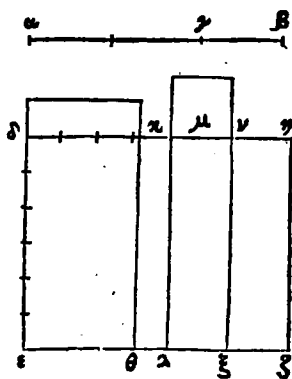


Sexagesimumquartum Theorema.

Quadratum lineæ potētis rationale & mediale secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quintum.

Sit linea potens rationale & mediale $\alpha\epsilon$ diuisa in sua nomina in puncto γ , ita ut maius nomen sit $\alpha\gamma$: sit q̄; rationalis $\lambda\iota$, & secundum lineam $\lambda\iota$ quadrato lineæ $\alpha\epsilon$ æquale applicetur parallelogrammum $\lambda\zeta$, faciens alterum latus lineæ $\lambda\kappa$. dico lineam $\lambda\kappa$ esse binomium quintum. Sint eadem constructiones quæ in præcedentibus. Cum igitur linea $\alpha\beta$ sit potēs rationale & mediale diuisa in sua

sua nomina in pūcto γ , linea $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sunt potentia incommensurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarum, mediale: id uerò quod fit ex ipsis, rationale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sit mediale, ergo parallelogrammum $\lambda\lambda$ erit etiam mediale. quare li-



nea $\lambda\mu$ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineae $\lambda\epsilon$. Rursus cum id quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sit rationale, hoc est parallelogrammum $\mu\zeta$, ergo linea $\mu\epsilon$ erit rationalis longitudine commensurabilis lineae $\lambda\epsilon$. Igitur linea $\lambda\mu$ est longitudine incommensurabilis lineae $\mu\epsilon$. Ergo lineae $\lambda\mu$, $\mu\epsilon$ erunt rationales potentia tantum commensurabiles, ergo tota linea $\lambda\epsilon$ erit binomium. dico praeterea illam esse binomium quintum. Similiter enim demonstrabitur parallelogrammum ex $\lambda\kappa$, $\kappa\mu$ esse aequale quadrato lineae $\mu\epsilon$, & lineam $\lambda\kappa$ esse longitudine incommensurabilem lineae $\kappa\mu$. Ergo per 19. linea $\lambda\mu$ plus potest quam linea $\mu\epsilon$ quadrato lineae sibi longitudine incommensurabilis: suntque lineae $\lambda\mu$, $\mu\epsilon$ rationales potentia tantum commensurabiles, estque minor linea $\mu\epsilon$ longitudine commensurabilis lineae $\lambda\epsilon$, ergo tota linea $\lambda\epsilon$ erit binomium quintum.

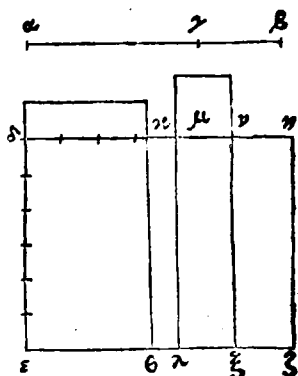
Sexagesimumquintum Theorema.

Quadratum lineae potentis duo medialia secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium sextum.

AA iij

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Sit linea potens duo medialia $\alpha \beta$ diuisa in sua nomina in puncto γ , sitq; linea rationalis λ , secundum quam quadrato linea $\alpha \beta$ aequale applicetur parallelogrammum $\lambda \zeta$ faciēs alterū latus $\lambda \mu$. dico lineā $\lambda \mu$ esse binomiū sextum. Sint eadem constructiones quae in praecedentibus. quoniam



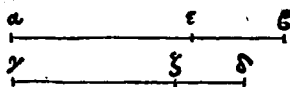
linea $\alpha \epsilon$ est potens duo medialia diuisa in sua nomina in puncto γ , sicut in ceteris dictum est, utrumque parallelogrammum $\lambda \lambda$, $\mu \zeta$ est mediale, & secundum lineā rationalem λ applicantur. ergo utraque linea $\lambda \mu$, $\mu \mu$ est rationalis & longitudine incommensurabilis linea λ . Et quoniam compositum ex quadratis linearū $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ est incōmēsurabile ei quod fit bis ex $\alpha \gamma$, $\gamma \epsilon$. Ergo & parallelogrammum $\lambda \lambda$ est incommensurabile parallelogrammo $\mu \zeta$. ergo linea $\lambda \mu$ est longitudine incōmēsurabilis linea $\mu \mu$. ergo linea $\lambda \mu$, $\mu \mu$ sunt rationales potētia tantum commēsurabiles. ergo linea $\lambda \mu$ est binomiū. dico praeterea illam esse binomium sextum. Quemadmodum enim in ceteris est demonstratum, ita hic etiam demonstretur parallelogrammum ex $\lambda \lambda$, $\mu \mu$ esse aequale quadrato linea $\mu \nu$, lineamq; $\lambda \mu$ esse longitudine incōmēsurabilem linea $\mu \mu$, itaque per 19. lineam $\lambda \mu$ plus posse quā linea $\mu \mu$ quadrato linea sibi incommensurabilis longitudine. sed neutra linearum $\lambda \mu$, $\mu \mu$ est longitudine commensurabilis linea rationali λ . ergo tota linea $\lambda \mu$ est binomium sextum.

Sexta-

Sexagesimum sextum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis binomio est,
& ipsa binomium eiusdem ordinis.

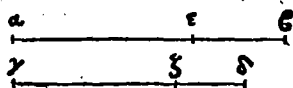
Sit binomium linea $\alpha\beta$, sitq; ei lon-
gitudine commensurabilis linea
 $\gamma\delta$. dico lineam $\gamma\delta$ esse etiam bi-



nomium eiusdem ordinis, cuius est $\epsilon\zeta$ linea $\alpha\zeta$. cū enim
linea $\alpha\beta$ sit binomium, diuidatur in sua nomina in pun-
cto ϵ , sitq; maius nomē $\alpha\epsilon$. Ergo linea $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$ sunt ratio-
nales potentia tantum commensurabiles, fiatq; sicut li-
nea $\alpha\zeta$ ad lineam $\gamma\delta$, ita linea $\alpha\epsilon$ ad lineam $\gamma\zeta$ per 12.
6. Ergo $\epsilon\zeta$ residua $\epsilon\zeta$ ad residuam $\zeta\delta$ erit sicut tota li-
nea $\alpha\beta$ ad totam lineam $\gamma\delta$ per 19.5. Sed linea $\alpha\epsilon$ est lon-
gitudine commensurabilis linea $\gamma\delta$. ergo etiam erit lon-
gitudine commensurabilis linea $\alpha\epsilon$ linea $\gamma\zeta$: $\epsilon\zeta$ linea $\epsilon\zeta$
linea $\zeta\delta$ per 10 huius. Sunt autem linea $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$ rationa-
les. sunt ergo etiam rationales linea $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$. Et quoniam
est sicut linea $\alpha\epsilon$ ad lineam $\gamma\zeta$, ita linea $\epsilon\zeta$ ad lineam $\zeta\delta$.
permutata ergo proportionem sicut linea $\alpha\epsilon$ ad lineam $\epsilon\zeta$,
ita linea $\gamma\zeta$ ad lineam $\zeta\delta$, sed linea $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$ sunt potentia
tantum commensurabiles. ergo $\epsilon\zeta$ linea $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ sunt po-
tentia tantum commensurabiles per 10 huius. Sunt autē
 $\epsilon\zeta$ rationales: ergo linea tota $\gamma\delta$ est binomium. Dico
præterea esse binomium eiusdem ordinis cuius $\epsilon\zeta$ linea
 $\alpha\zeta$. nam linea $\alpha\epsilon$ plus potest quàm linea $\epsilon\zeta$ quadrato li-
neæ sibi commensurabilis longitudine, aut quadrato li-
neæ sibi longitudine incommensurabilis. Si primum plus
potest quadrato lineæ sibi longitudine commensurabi-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

lis, ergo et linea $\gamma\delta$ plus poterit,
quàm linea $\zeta\alpha$, quadrato linea
sibi longitudine commensurabi-



lis per 15 huius. Et siquidem linea $\alpha\epsilon$ est longitudine com-
mensurabilis linea proposita rationali: ergo linea $\gamma\delta$,
quæ est longitudine commensurabilis linea $\alpha\epsilon$, erit in-
quam linea $\gamma\delta$ etiam longitudine commensurabilis ei-
dem linea proposita rationali per 12 huius, ob eamque
causam utraque linea $\alpha\beta$, $\gamma\alpha$ est binomiũ primum, hoc
est utraque erit eiusdem ordinis. Si uerò linea $\epsilon\beta$ est lon-
gitudine commensurabilis linea proposita rationali, er-
go linea $\zeta\alpha$, quæ est longitudine commensurabilis linea
 $\epsilon\beta$, erit etiam longitudine commensurabilis linea pro-
posita rationali, ob eamq; causam erit utraque binomiũ
secundum, hoc est utraque eiusdem ordinis. Si uerò neu-
tra linearum $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$ est longitudine cõmensurabilis pro-
posita rationali, neutra etiam linearum $\gamma\delta$, $\zeta\alpha$ erit eidẽ
proposita linea rationali commensurabilis longitudine
per 14 huius. sic ergo utraque linea erit binomium ter-
tium. Quòd si linea $\alpha\epsilon$ plus potest, quàm linea $\epsilon\beta$ qua-
drato linea sibi longitudine incommensurabilis, ergo et
linea $\gamma\delta$ plus poterit quàm linea $\zeta\alpha$, quadrato linea si-
bi longitudine incõmensurabilis per 15 huius. Et si qui-
dem linea $\alpha\epsilon$ est longitudine commensurabilis proposita
rationali, et linea $\gamma\delta$ erit eidem rationali longitudine
commensurabilis: tunc erit utraque binomium quartũ.
Quòd si linea $\epsilon\beta$ fuerit rationali commensurabilis lon-
gitudine, et linea $\zeta\alpha$ erit eidem longitudine commensu-
rabilis: eritque hoc modo utraque binomium quintum.

Quòd

Quòd si neutra linearum $\alpha \iota, \beta$ fuerit rationali commensurabilis longitudine, neutra etiam $\gamma \zeta, \eta$ erit eidem commensurabilis longitudine: eritq; utraque binomium sextum. Quare linea longitudine commensurabilis binomio, est etiam binomium eiusdem ordinis.

Sexagesimumseptimum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis alteri bimédiale, est & ipsa bimédiale etiã eiusdẽ ordinis.

Sit bimédiale linea $\alpha \beta$: eidem sit alia $\gamma \delta$ cõmensurabilis lōgitudine $\gamma \delta$. dico lineam $\gamma \delta$ esse etiã bimédiale eiusdem ordinis, cuius & linea $\alpha \beta$. Diuidatur linea $\alpha \beta$ in sua nomina in puncto ι , fiatq; sicut linea $\alpha \iota$ ad lineam $\gamma \delta$, ita linea $\alpha \iota$ ad lineam $\gamma \zeta$: residua ergo linea $\iota \beta$ erit ad lineam $\zeta \delta$ sicut tota linea $\alpha \beta$ ad totam $\gamma \delta$: sed linea $\alpha \beta$ est longitudine commensurabilis lineæ $\gamma \delta$. ergo & linea $\alpha \iota$ erit longitudine commensurabilis lineæ $\gamma \zeta$, & linea $\iota \beta$ lineæ $\zeta \delta$. Sunt autẽ linea $\alpha \iota, \iota \beta$ mediales. ergo & linea $\gamma \zeta, \zeta \delta$ sunt etiã mediales per 24. Et quoniam est sicut linea $\alpha \iota$ ad lineam $\iota \beta$, ita linea $\gamma \zeta$ ad lineam $\zeta \delta$: sed linea $\alpha \iota, \iota \beta$ sunt potentia tantum commensurabiles, ergo & linea $\gamma \zeta, \zeta \delta$ sunt potetia tantum cõmensurabiles. sed modo probatum est eas etiam esse mediales, ergo tota linea $\gamma \delta$ erit etiã bimédiale: dico præterea esse bimédiale eiusdẽ ordinis, cuius & linea $\alpha \beta$. cum enim sit sicut linea $\alpha \iota$ ad lineam $\iota \beta$, ita linea $\gamma \zeta$ ad lineam $\zeta \delta$: sitq; sicut linea $\gamma \zeta$ ad lineam $\zeta \delta$, ita quadratũ lineæ $\gamma \zeta$ ad $\zeta \delta$ parallelogrammum ex $\gamma \zeta, \zeta \delta$ per 1.6.

BB

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Ergo sicut linea $\alpha\epsilon$ ad lineam $\epsilon\beta$,
 ita quadratū lineæ $\gamma\zeta$ ad paralle-
 logrammū ex $\gamma\zeta, \zeta\lambda$ per 11.5. Sed
 sicut linea $\alpha\epsilon$ ad lineam $\epsilon\beta$, ita quadratum lineæ $\alpha\epsilon$ ad
 parallelogrammū ex $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$, per 1.6. Ergo sicut quadra-
 tum lineæ $\alpha\epsilon$ ad parallelogrammum ex $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$, ita qua-
 dratum lineæ $\gamma\zeta$ ad parallelogrammum ex $\gamma\zeta, \zeta\lambda$ per
 11.5. permutata ergo proportione sicut quadratū lineæ
 $\alpha\epsilon$ ad quadratum lineæ $\gamma\zeta$, ita parallelogrammū ex $\alpha\epsilon,$
 $\epsilon\beta$ ad parallelogrammum ex $\gamma\zeta, \zeta\lambda$: sed quadratum
 lineæ $\alpha\epsilon$ est commensurabile quadrato lineæ $\gamma\zeta$, quia
 modo probatum est lineas $\alpha\epsilon, \gamma\zeta$ esse commensurabiles.
 Ergo parallelogrammum ex $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$ erit commensura-
 bile parallelogrammo ex $\gamma\zeta, \zeta\lambda$. Si ergo parallelogrā-
 mum ex $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$ fuerit rationale, hoc est si linea $\alpha\epsilon$ fuerit
 bimediale primum, parallelogrammum quoque ex $\gamma\zeta,$
 $\zeta\lambda$ erit rationale, ergo linea $\gamma\lambda$ erit etiā bimediale pri-
 mum. Si uerò parallelogrammum ex $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$ fuerit me-
 diale, hoc est si linea $\alpha\epsilon$ fuerit bimediale secundum, erit
 etiam parallelogrammum ex $\gamma\zeta, \zeta\lambda$ mediale. Ergo etiā
 linea $\gamma\lambda$ erit bimediale secundū, quare & ambæ erunt
 eiusdem ordinis, quod demonstrandum erat: hoc autem
 theorema 67. potest uniuersaliter concipi. linea commē-
 surabilis alteri bimedialium longitudine & sententia
 siue sentētia tantum, est & ipsa bimediale, etiam eius-
 dem ordinis, neque eo minus uerum erit. quod ipsum,
 etiam eadem uia demonstrabitur.

Sexagesimumoctauum Theorema.

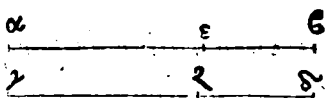
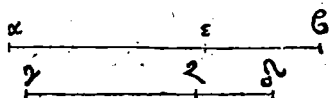
Linea cōmēsurabilis lineæ maiori est & ipsa maior.

Sit

Sit linea maior $\alpha \beta$ cui sit commensurabilis linea $\gamma \delta$ quocunque modo, hoc est, siue sit longitudine & potentia simul commensurabilis, siue potentia tantum. Dico lineam $\gamma \delta$ esse etiam lineam maiorem.

Diuidatur linea $\alpha \beta$ in sua nomina in puncto ϵ , fiantq; cætera quemadmodum in superioribus.

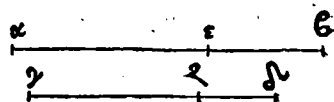
Et quoniam est sicut linea $\alpha \beta$ ad lineam $\gamma \delta$:



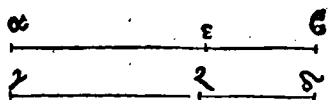
ita & linea $\alpha \epsilon$ ad lineam $\gamma \zeta$, & linea $\epsilon \beta$ ad lineam $\zeta \delta$. ergo sicut linea $\alpha \epsilon$ ad lineam $\gamma \zeta$: ita linea $\epsilon \beta$ ad lineam $\zeta \delta$. sed linea $\alpha \epsilon$ est commensurabilis lineæ $\gamma \delta$. ergo & linea $\alpha \epsilon$ erit commensurabilis lineæ $\gamma \zeta$, & similiter linea $\epsilon \beta$ lineæ $\zeta \delta$. Et quoniam est sicut linea $\alpha \epsilon$ ad lineam $\gamma \zeta$, ita linea $\epsilon \beta$ ad lineam $\zeta \delta$. permutata ergo proportione sicut linea $\alpha \epsilon$ ad lineam $\epsilon \beta$, ita linea $\gamma \zeta$ ad lineam $\zeta \delta$. ergo sicut quadratum lineæ $\alpha \epsilon$ ad quadratum lineæ $\epsilon \beta$, ita quadratum lineæ $\gamma \zeta$ ad quadratum lineæ $\zeta \delta$, per 22. 6. Ergo per coniunctam proportionem (quæ probatur per 18. 5.) sicut compositum ex quadratis linearum $\alpha \epsilon$, $\epsilon \beta$ ad quadratum lineæ $\alpha \beta$, ita compositum ex quadratis linearum $\gamma \zeta$, $\zeta \delta$ ad quadratum lineæ $\gamma \delta$. Ergo per contrariam proportionem sicut quadratum lineæ $\alpha \epsilon$ ad compositum ex quadratis linearum $\alpha \epsilon$, $\epsilon \beta$, ita quadratum lineæ $\zeta \delta$ ad compositum ex quadratis linearum $\gamma \zeta$, $\zeta \delta$. Ergo permutata proportione sicut quadratum lineæ $\epsilon \beta$ ad quadratum lineæ $\zeta \delta$, ita compositum ex quadratis linearum $\alpha \epsilon$, $\epsilon \beta$, ad compositum ex quadratis linearum $\gamma \zeta$, $\zeta \delta$. Sed quadratum lineæ $\epsilon \beta$ est commensurabile qua-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

drato lineæ λ Δ , quia modo
probatũ est lineas ϵ ζ Δ esse
cõmensurabiles: ergo & cõ-



positum ex quadratis linea-
rum α ϵ β erit commẽsur-
abile cõposito ex quadratis li-



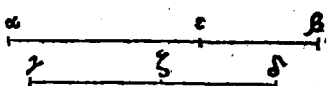
nearum γ ζ Δ . Sed compositum ex quadratis linearum
 α ϵ β est rationale per positionem. ergo & compositũ
ex quadratis linearum γ ζ Δ erit etiam rationale. Si-
cut autem lineæ α ϵ ad lineam β , ita lineæ γ ζ ad lineam
 Δ . Sicut autem lineæ α ϵ ad lineam ϵ , ita quadratũ li-
neæ α ϵ ad parallelogrammũ ex α ϵ β . ergo sicut lineæ
 γ ζ ad lineam Δ , ita quadratum lineæ α ϵ ad parallelo-
grammum ex α ϵ β . sed sicut lineæ γ ζ ad lineam Δ , ita
quadratum lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex γ ζ Δ :
ergo sicut quadratum lineæ α ϵ ad parallelogrammũ ex
 α ϵ β , ita quadratũ lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex
 γ ζ Δ . ergo permutata proportione sicut quadratũ li-
neæ α ϵ ad quadratum lineæ γ ζ , ita parallelogrammũ
ex α ϵ β ad parallelogrammum γ ζ Δ . sed quadratũ
lineæ α ϵ est commensurable quadrato lineæ γ ζ , quia
modo probatum est lineas α ϵ γ ζ esse commensurabiles,
ergo & parallelogrammum ex α ϵ β erit commensu-
rabile parallelogrammo ex γ ζ Δ . sed parallelogram-
mũ ex α ϵ β est mediale per positionem. ergo & paral-
lelogrammũ ex γ ζ Δ erit etiam mediale per corolla-
rium 24. Sed (ut modo probatum est) sicut lineæ α ϵ ad
lineam β , ita lineæ γ ζ ad lineam Δ : lineæ autẽ α ϵ erat
per suppositionem potentia incommẽsurabilis lineæ β .

ergo

ergo per 10 & linea $\gamma\zeta$ erit potentia incommensurabilis lineæ $\alpha\zeta$. Ergo lineæ $\gamma\zeta, \zeta\alpha$ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. ergo tota linea $\gamma\alpha$ erit linea maior per 39 huius. ergo linea commensurabilis lineæ maiori erit & ipsa linea maior. In hoc theoremate 68 ideo persequuti non sumus demonstrationē Theonis, quia difficilior uisa est, & indigere lem-mate ad id probandū, quod pro demonstrato sumit, illis uerbis? $\alpha\epsilon\iota\ \alpha\varsigma\ \alpha\epsilon\alpha\ \gamma\ \alpha\epsilon\gamma\ \gamma\ \alpha\ \beta\ \pi\epsilon\varsigma\ \tau\alpha\ \alpha\epsilon\gamma\ \tau\eta\ \alpha\epsilon\iota\ \beta$.

Sexagesimumnonum Theorema.

Linea cōmensurabilis lineæ potēti rationale & mediale, est & ipsa linea potēs rationale & mediale.

Sit linea potēs rationale & mediale $\alpha\beta$, cui sit commensurabilis linea $\gamma\alpha$, siue sit longitu-

dine & potentia siue potentia tantum commensurabilis: dico etiam $\gamma\alpha$ esse lineam potentē rationale & mediale. Diuidatur linea $\alpha\beta$ in sua nomina in pūcto ϵ : sint quoque eadem construtiones quæ in pracedentibus. Similiter demonstrabimus lineas $\gamma\zeta, \zeta\alpha$ esse potentia incommensurabiles, sicut sunt lineæ $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$: & compositū ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$ esse commensurabile composito ex quadratis linearum $\gamma\zeta, \zeta\alpha$: item parallelogrammum ex $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$ esse commensurabile parallelogrammo ex $\gamma\zeta, \zeta\alpha$. Quare & compositum ex quadratis linearum $\gamma\zeta, \zeta\alpha$ erit etiam mediale, sicut compositū ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \epsilon\beta$: item parallelogrammum ex $\gamma\zeta, \zeta\alpha$.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

erit etiam rationale sicut & parallelogrammū ex $\alpha\beta$,
 & β . ergo linea $\gamma\delta$ erit etiam linea potens rationale &
 mediale per 40.

Septuagesimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ potenti duo media-
 lia, est & ipsa linea potens duo medialia.

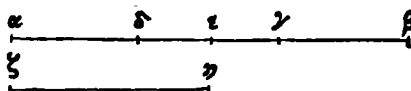
Sit linea potens duo medialia $\alpha\epsilon$,
 eiq; cōmensurabilis linea $\gamma\delta$, si-
 ue sit longitudine & potētia, si-
 ue potentia tantum commensurabilis: dico lineam $\gamma\delta$
 esse etiam lineam potentem duo medialia. Diuidatur li-
 nea $\alpha\epsilon$ in sua nomina in puncto ϵ : sint quoque eadem
 constructiones quæ in præcedentibus. Similiter demon-
 strabimus lineas $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ esse potentia incommensurabi-
 les, & compositum ex quadratis linearum $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$ esse cō-
 mensurabile composito ex quadratis linearū $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$: pa-
 rallelogrammum uero ex $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$ esse commēsurabile pa-
 rallelogrammo ex $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$. quare & compositū ex qua-
 dratis linearum $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ erit etiam mediale: & similiter
 parallelogrammum ex $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ erit mediale. Quod autē
 compositum ex quadratis linearum $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ sit incommē-
 surabile parallelogrāma quod fit ex $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$, ita proba-
 tur. Cum sit enim sicut compositum ex quadratis linea-
 rum $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$ ad quadratum lineæ $\alpha\epsilon$, ita compositum ex
 quadratis linearum $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ ad quadratum lineæ $\gamma\delta$ (ut
 probatū est in præcedentibus.) ergo permutata propor-
 tione, sicut compositum ex quadratis linearū $\alpha\epsilon$, $\epsilon\delta$ ad
 compositum ex quadratis linearum $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$, ita quadra-
 tum

rum linea α ad quadratū linea $\gamma\delta$: sed in superioribus, nempe in 68 theoremate probatum est, sicut quadratū linea α ad quadratum linea $\gamma\delta$, ita parallelogrammū ex α, β ad parallelogrammum ex $\gamma\delta, \delta\lambda$. Ergo sicut cōpositum ex quadratis linearum α, β ad compositum ex quadratis linearum $\gamma\delta, \delta\lambda$, ita parallelogrammum ex α, β ad parallelogrammum ex $\gamma\delta, \delta\lambda$. ergo permixta proportione sicut compositum ex quadratis linearum α, β ad parallelogrammum ex α, β , ita compositum ex quadratis linearum $\gamma\delta, \delta\lambda$ ad parallelogrammum ex $\gamma\delta, \delta\lambda$. Sed per suppositionē compositū ex quadratis linearum α, β est incommensurabile parallelogrammo ex α, β . ergo & compositum ex quadratis linearum $\gamma\delta, \delta\lambda$ est incommensurabile parallelogrammo ex $\gamma\delta, \delta\lambda$. Ergo linea $\gamma\lambda$ est potens duo medialia.

Scholium.

Haecenus dictum est de senarijs sex, quorum primus senarius cōtinet generationem linearum irrationalium per compositionem: secundus diuisionem, nempe quòd hae diuidantur in unico tantum puncto: tertius inuētionem binomiorum, primi inquam, secundi, tertij, quarti, quinti & sexti, post quem incipit quartus senarius continēs differentiam linearum irrationalium inter se. Nam ex usu singulorum binomiorum demonstrantur differentiae irrationalium. Quintus autem docet de applicationibus quadratorum cuiusq; linea irrationalis, ex quilibet scilicet irrationalibus sint latitudines cuiusque superficies applicatae. In sexto uerò senario dicitur singulas lineas singulis irrationalibus commensurabiles, esse

etiam ipsas irracionales eiusdem speciei. Mox uero dicitur de septimo senario, in quo reliquæ ipsarum rursus inter se differentiæ dilucide pertractantur. Existit etiam in illis ipsis lineis irrationalibus proportionalitas arithmetica. eaque linea quæ sumitur media proportionaliter secundum medietatem arithmeticam inter nomina cuiusque lineæ irrationalis similiter est irrationalis eiusdem speciei. Prius autem constat proportionalitatem arithmeticam inter illa nomina reperiri. Sit enim lineæ $\alpha \beta$ quæcunque ex dictis irrationalibus. uerbi gratia, sit binomium, diuidaturque in sua nomina in puncto γ sitque maius nomen $\alpha \gamma$, de quo auferatur lineæ $\alpha \delta$ æqualis minori nomi-



ni, nempe $\gamma \beta$: diuidaturque; lineæ $\gamma \delta$ bifariam & æqualiter in puncto ϵ : manifestum est lineam $\alpha \epsilon$ esse æqualem lineæ $\epsilon \beta$. Sit alterutri earum æqualis lineæ $\zeta \eta$, manifestum est, quanto differt lineæ $\alpha \gamma$ à lineæ $\zeta \eta$, tanto eandem lineam $\zeta \eta$ differre à lineæ $\gamma \beta$. utrobique enim est differentia $\delta \epsilon$ uel $\epsilon \gamma$, quod est proprium arithmetice proportionalitatis. Constat autem lineam $\zeta \eta$ esse commensurabilem longitudine lineæ $\alpha \beta$, quia est eius dimidia quare per 66 lineæ $\zeta \eta$ erit etiam binomium, eodemque modo demonstrabitur de cæteris irrationalibus. Totum hoc scholium non reperitur in uetusto.

Septuagesimum primum Theorema.

Si duæ superficies rationalis & medialis simul componantur, lineæ quæ totam superficiem compositam

tam potest, est una ex quatuor irrationalibus, uel ea quę dicitur binomiũ, uel bimediale primũ, uel linea maior, uel linea potēs rationale & mediale.

Sint duę superficies, altera

rationalis $\alpha \beta$, altera uerò

medialis sit $\gamma \delta$. Dico li-

neam potētem superficiē

$\alpha \delta$, esse uel binomiũ, uel

bimediale primũ, uel li-

neam maiorem uel lineā

potentem rationale & mediale. Nam superficies $\alpha \beta$, est

uel maior uel minor superficiē $\gamma \delta$: nā æquales esse nul-

lo modo possunt, cū alia sit rationalis, alia uerò media-

lis. Sit prius ea maior proponaturq; linea rationalis $\epsilon \zeta$,

secundũ quam æqualis superficiē $\alpha \beta$, applicetur super-

ficies parallelogramma rectangula $\epsilon \eta$, faciens alterum

latus $\epsilon \theta$: superficiē autem $\gamma \delta$ æqualis secundum eandē

lineam $\epsilon \zeta$, hoc est secundum lineam $\theta \iota$ applicetur paral-

lelogrammum $\theta \kappa$, faciens alterum latus $\theta \lambda$. Cum super-

ficies $\alpha \beta$ sit rationalis, etiā parallelogrammum $\epsilon \eta$ erit

rationale: ergo & linea $\epsilon \theta$ erit rationalis & longitudi-

ne commensurabilis lineæ $\epsilon \zeta$ per 21. Rursus eadem ra-

tione lineæ $\theta \lambda$ erit rationalis & longitudine incommē-

surabilis lineæ $\epsilon \zeta$ per 23. & quoniam superficies $\alpha \beta$ est

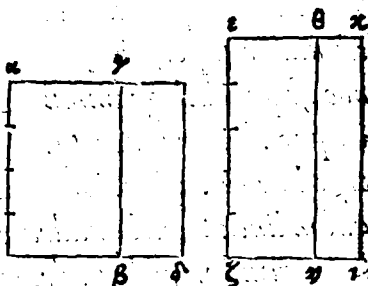
rationalis, superficies uerò $\gamma \delta$ est medialis, superficies

$\alpha \delta$, hoc est parallelogrammum $\epsilon \iota$, est incōmensurable su-

perficiē $\gamma \delta$: hoc est parallelogrammo $\theta \iota$. Ergo per 1.6 &

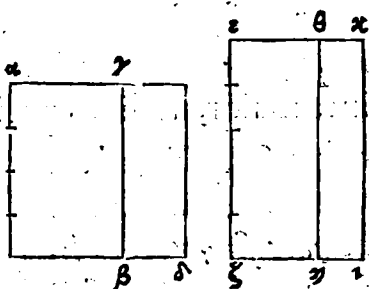
10. huius lineæ $\epsilon \theta$ est longitudine incommensurabilis li-

neæ $\theta \lambda$: ergo lineæ $\epsilon \theta$, $\theta \lambda$ sunt rationales potētia tantum



EVCLIDIS ELEMENTOR.

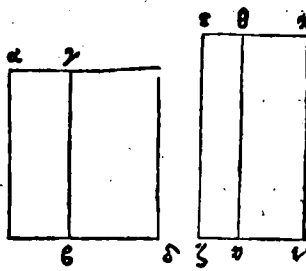
cōmensurabiles. ergo to-
ta linea $\alpha \chi$ est binomiū di-
visum in sua nomina in
pūcto θ . sed superficies $\alpha \epsilon$
est maior superficie $\gamma \delta$,
hoc est parallelogrammū
 $\epsilon \iota$ parallelogrammo $\theta \iota$.



ergo linea $\epsilon \theta$ est maior linea $\theta \chi$. sed linea $\epsilon \theta$ plus potest
quàm linea $\theta \chi$, uel quadrato linea α sibi commensurabi-
lis longitudine, uel quadrato linea α sibi longitudine incō-
mēsurabilis. Prius autem possit plus ea quadrato linea α
sibi commensurabilis: est autem linea $\epsilon \theta$ longitudine cō-
mēsurabilis linea rationali $\epsilon \zeta$, (ut modo probatum est)
ergo linea $\alpha \chi$ est binomiū primum. Ergo per 54 linea po-
tens superficiem $\epsilon \iota$ est binomium, quare $\epsilon \gamma$ linea potens
superficiem $\alpha \delta$ est binomium. Sed secundo loco linea $\epsilon \theta$
plus possit quàm linea $\theta \chi$, quadrato linea α sibi longitudi-
ne incommensurabilis: sitq; maius nomen linea $\epsilon \theta$ com-
mensurable longitudine linea rationali $\epsilon \zeta$, ergo linea
 $\alpha \chi$ est binomium quartum. sed linea $\epsilon \zeta$ est rationalis, er-
go per 57 linea potēs superficiē $\epsilon \iota$, est linea maior: qua-
re $\epsilon \gamma$ linea potens superficiem $\alpha \delta$, est linea maior. Rur-
sus superficies $\alpha \beta$, quæ est rationalis, sit minor superficie
 $\gamma \delta$, quæ est medialis, hoc est parallelogrammum $\epsilon \iota$ pa-
rallelogrammo $\theta \iota$. Quare $\epsilon \gamma$ linea $\epsilon \theta$ erit minor linea
 $\theta \chi$: linea uero $\theta \chi$ plus potest quàm linea $\epsilon \theta$, uel quadra-
to linea α sibi longitudine cōmēsurabilis, uel quadrato li-
nea α sibi longitudine incommēsurabilis. Prius possit plus
ea quadrato linea α sibi longitudine commensurabilis, est
autem

autē minus nomen, nempe $\epsilon\theta$
cōmensurable longitudine ra-
tionali lineæ rationali $\epsilon\zeta$, ut
modo probatum est: ergo li-
nea $\epsilon\chi$ est binomiū secundum.

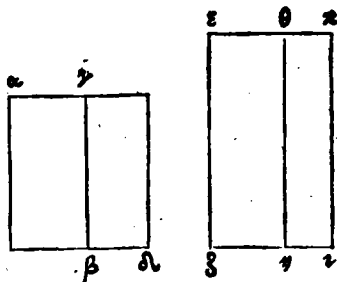
Ergo per 55 linea potens pa-
rallelogrammū $\epsilon\iota$, hoc est pa-
rallelogrammum $\alpha\delta$, est bimediale primū. Sed linea $\epsilon\chi$
plus possit quàm linea $\epsilon\theta$ quadrato lineæ sibi longitudi-
ne incommensurabilis: sit q; minus nomē $\epsilon\theta$ commensu-
rabile longitudine lineæ rationali $\epsilon\zeta$, ergo linea $\epsilon\chi$ est bi-
nomium quintum. ergo per 58 linea potens parallelo-
grammum $\epsilon\iota$, hoc est ei aequale $\alpha\delta$, erit linea potens ra-
tionale & mediale. Ergo si duæ superficies rationalis
& medialis & c.



Septuagesimum secundum Theorema.

Si duæ superficies mediales incommensurabiles si-
mul componentur, fiunt reliquæ duæ lineæ irra-
tionales, uel bimediale secundum, uel linea potēs
duo medalia.

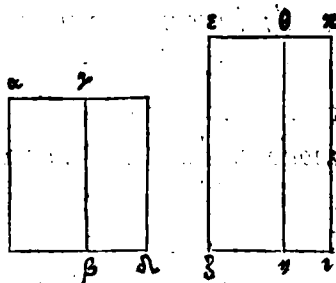
Componentur duæ superficies
mediales incommensurabi-
les inter se $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. dico li-
neam potentem superficiem
 $\alpha\delta$ esse uel bimediale secun-
dum, uel lineam potentē duo
medalia. Nā superficies $\alpha\beta$
est uel maior uel minor superficie $\gamma\delta$ (æquales enim esse



CC ij

EVCLIDIS ELEMENTOR.

nullo modo possunt, cum sint incommensurabiles.) Sit ergo prius superficies $\alpha \epsilon$ maior superficie $\gamma \lambda$, proponaturq; linea rationalis $\iota \kappa$ secundum quam aequale superficiei $\alpha \beta$ applicetur parallelogrammum $\iota \lambda$, faciens alterum latus $\iota \theta$: superficiei vero $\gamma \lambda$ applicetur aequale parallelogrammum $\theta \iota$, faciens alterum latus $\theta \kappa$: & quoniam utraque superficies $\alpha \epsilon$, $\gamma \lambda$ est medialis: hoc est utrumque parallelogrammum $\iota \lambda$, $\theta \iota$, ergo utraque linea $\iota \theta$, $\theta \kappa$ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineae $\iota \kappa$. Et quoniam superficies $\alpha \beta$, $\gamma \lambda$ sunt incommensurabiles, ergo est etiam incommensurable parallelogrammum $\iota \lambda$ parallelogrammo $\theta \iota$. ergo & linea $\iota \theta$, $\theta \kappa$, sunt longitudine incommensurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea, $\iota \kappa$, est binomium: similiter autem ac in proximo theoremate demonstratur lineam $\iota \theta$ esse maiorem lineam $\theta \kappa$, quae linea $\iota \theta$ plus potest, quam linea $\theta \kappa$, vel quadrato lineae sibi longitudine commensurabilis, vel quadrato lineae longitudine sibi incommensurabilis. Possit prius plus quadrato lineae sibi longitudine commensurabilis: neutra autem linearum $\iota \theta$, $\theta \kappa$ est longitudine commensurabilis lineae rationali $\iota \kappa$: ergo linea $\iota \kappa$ est binomium tertium. ergo per 56. linea potens parallelogrammum $\iota \lambda$, hoc est ei aequale $\alpha \epsilon$ est bimediale secundum. Sed linea $\iota \theta$ possit plus, quam linea $\theta \kappa$ quadrato lineae sibi longitudine incommensurabilis, est autem utraq; $\iota \theta$, $\theta \kappa$ longitudine



longitudine incommensurabilis linea rationali 2: ergo linea $\epsilon\epsilon$ est binomium sextum. Ergo per 59 linea potens parallelogrammū $\epsilon\epsilon$, hoc est $\alpha\alpha$ est linea potens duo medalia. Eadem ratione si superficies $\alpha\epsilon$ fuerit minor superficie $\gamma\alpha$, demonstrabimus lineam potentem superficiem $\alpha\alpha$, esse uel bimediale secundum uel lineam potentem duo medalia. Ergo si duæ superficies mediales $\epsilon\gamma$ & c. binomium $\epsilon\gamma$ cetera consequentes linea irrationales neque sunt eadē cum linea mediali, neque ipsæ inter se.

Nam quadratum lineæ medialis applicatum secundū lineam rationalem, facit alterum latus lineam rationalem, & longitudine incommensurabilem lineæ, secundum quam applicatur, hoc est lineæ rationali per 23. Quadratum uero binomij secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium primum per 60. Quadratum uero bimedialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomij secundum per 61. Quadratum uero bimedialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium tertium per 62. Quadratum uero lineæ maioris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum per 63. Quadratum uero lineæ potentis rationale & mediale secundum rationalem applicatū, facit alterum latus binomium quintum per 64. Quadratum uero lineæ potentis duo medalia secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomij sextum per 65. Cū igitur dicta latera, quæ latitudines uocantur, differant, & à prima latitudine quoniam est rationalis, cum inter se quoque differant, eo quia sunt

EVCLIDIS ELEMENTOR.

binomia diuerforum ordinum: manifestum est ipsas lineas irracionales differentes esse inter se.

Secundus ordo alterius sermonis, qui est de detractiōe.

Principium senariorum per detractiōem.

Septuagesimumtertium Theorema.

Si de linea rationali detrahatur rationalis potentia tantum commensurabilis ipsi toti, residua est irrationalis. Vocetur autem residuum.

De rationali $\alpha\beta$ detrahatur α γ β
 rationalis $\epsilon\gamma$, potentia $\alpha\gamma$ β
 commensurabilis toti $\alpha\beta$. dico residuam $\alpha\gamma$ esse irrati-
 onalem, quæ uocetur residuum. cum enim linea $\alpha\beta$ sit lon-
 gitudine incommensurabilis lineæ $\beta\gamma$, sitq; sicut linea $\alpha\epsilon$
 ad lineam $\beta\gamma$, ita quadratū lineæ $\alpha\beta$ ad parallelogra-
 mm ex $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$: ergo quadratum lineæ $\alpha\beta$ erit incommen-
 surabile parallelogrammo ex $\alpha\epsilon, \beta\gamma$. sed quadrato lineæ
 $\alpha\epsilon$ sunt commensurabilia quadrata linearū $\alpha\epsilon, \beta\gamma$ per
 16. Ergo quadrata linearū $\alpha\beta, \beta\gamma$ sunt incommensura-
 bilia parallelogrammo ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ per 14. sed parallelo-
 grammo ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ commensurabile est ei quod fit bis ex
 $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$. Ergo quadrata linearum $\alpha\beta, \epsilon\gamma$ sunt incommen-
 surabilia ei quod fit bis ex $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$. sed quadrata linearū
 $\alpha\beta, \beta\gamma$ sunt equalia ei quod fit bis ex $\alpha\epsilon, \beta\gamma$, & qua-
 drato lineæ $\alpha\gamma$, per 7. 2. ergo id quod fit bis ex $\alpha\epsilon, \epsilon\gamma$,
 cum quadrato lineæ $\alpha\gamma$, est incommensurabile ei quod
 fit bis ex $\alpha\beta, \epsilon\gamma$. Ergo per secundam partem 17 id quod
 fit

fit bis ex α , β , γ est incommensurable quadrato lineæ α , γ .
 ergo per primam partem eiusdem 17 id quod fit bis ex
 α , β , γ cum quadrato α , γ , hoc est illi toti aequalia qua-
 drata linearum α , β , γ sunt incommensurabilia qua-
 drato lineæ α , γ . Hoc breuius cõcluditur per corollarium
 à nobis demonstratum post 17. sed quadrata linearum
 α , β , γ sunt rationalia, quia lineæ α , β , γ posita sunt ra-
 tionales. ergo lineæ α , γ est irrationalis: uocetur autẽ re-
 siduum. Hoc uero theorema nihil aliud dicit, quàm por-
 tionem eam maioris nominis ipsius binomij, quæ rema-
 net post detractiõnem minoris nominis de maiori, esse
 irrationalem: quæ uocatur residuum, hoc est si de maio-
 ri nomine ipsius binomij, quod maius nomen est lineæ
 rationalis potentia tantum commensurabilis minori no-
 mini, detrahatur minus nomen, quod ipsum est etiã cõ-
 mensurable potentia tantũ maiori nomini (quod ma-
 ius nomen hoc theorema uocat lineam totam) residuã
 lineam esse irrationalem, quam uocat residuum. Itaque
 omnes lineæ, de quibus agitur hoc theoremate, & cate-
 ris quinque consequẽtibz, sunt reliquæ portiones ma-
 iorum nominum totarum linearum, de quibus actum
 est 36. 37. 38. 39. 40 & 41 post detractiõnem minoris no-
 minis de maiori.

Septuagesimumquartum Theorema.

Si de lineæ mediali detrahatur medialis potẽtia tan-
 tum cõmensurabilis toti lineæ, quæ uero detracta
 est cũ tota cõtineat superficiẽ rationalẽ, residua est
 irrationalis. uocetur autẽ residuũ mediale primũ.

De linea mediali α & detrahatur me-
dialis ϵ & potentia tantum commensurabilis toti α & β , quæ scilicet β & γ cum α & β contineat rationale, nempe parallelogrammum ex α & β , β & γ . Dico reliquã α & γ esse irrationalem. Vocetur autem residuum mediale primum. Nam cum linea α & β , ϵ & γ sint mediales, quadrata illarum erant medialia, sed quod fit bis ex α & β , ϵ & γ est rationale: ergo compositum ex quadratis linearum α & ϵ , ϵ & hoc est id quod fit bis ex α & ϵ , β & γ , cum quadrato lineæ α & γ est incommensurable ei quod fit bis ex α & β , β & γ . Ergo per secundam partem 17. id quod fit bis ex α & β , β & γ , est incommensurable quadrato lineæ α & γ , sed id quod fit bis ex α & β , β & γ est rationale, ergo quadratum lineæ α & γ est irrationale, ergo & linea α & γ irrationalis. Vocetur autem residuum mediale primum. Est etiam hoc residuum mediale primum, residua portio maioris nominis bimedialis primi, post deductionem minoris nominis de maiori: unde & denominationem habet residuum mediale primum.

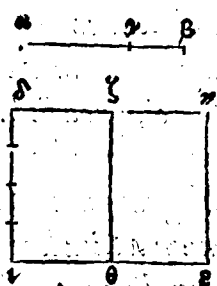
Septuagesimum quintum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis, potentia tantum commensurabilis toti, quæ uero detracta est cum tota contineat superficiem medialem, reliqua est irrationalis. Vocetur autem residuum mediale secundum.

De linea mediali α & β , detrahatur medialis ϵ & potentia tantum commensurabilis toti α & β , cum tota uero α & β continens superficiem medialem, nempe parallelogrammum ex α & β , β & γ : dico reliquã α & γ esse irrationalẽ. Vocetur au-

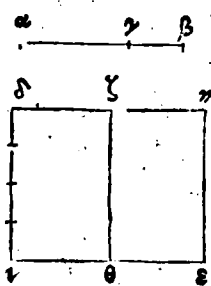
tem

tem residuū mediale secundū. pro-
ponatur linea rationalis α , & se-
cundum illam quadratis linearum
 α , β , ϵ & γ equale applicetur parallelo-
grammum α , faciēs alterum latus
 α . Et uerò quod fit bis ex α , ϵ , ϵ & γ α ,
quale secundum eandem lineam α ,
applicetur parallelogrammum α faciēs alterum la-
tus α ; parallelogrammum α est minus parallelogra-
mmo α : quia & quadrata linearum α , β , ϵ & γ sunt ma-
iora eo quod fit bis ex α , β & γ tanto, quantū est quadra-
tum lineæ α per 7. 2. Ergo & residuum nempe paral-
lelogrammū γ , erit equale quadrato lineæ α & γ . Et quo-
niam quadrata linearum α , ϵ , ϵ & γ sunt commensurabilia
& medialis: ergo compositum ex ipsis parallelogram-
mum α , erit utrique quadrato commensurabile per 16.
ergo & parallelogrammum α , erit etiam mediale per
corollarium 24. theorematum. ergo per 23 linea α erit
rationalis longitudine incōmensurabilis lineæ α . Rur-
sus cum id quod fit ex α , ϵ , ϵ & γ sit mediale: etiam id quod
fit bis ex iisdem α , β , β & γ erit mediale. ergo & illi equa-
le parallelogrammū α erit mediale. Ergo & linea α erit
rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ
 α . Et cum lineæ α & β sit longitudine incōmensurabilis
lineæ β & γ , ergo quadratum lineæ α & β erit incommēsurā-
bile parallelogrammo ex α , β , ϵ & γ per 1. 6. & 10 huius.
Sed quadrato lineæ α & ϵ sunt commensurabilia quadra-
ta linearū α , β , β & γ ; parallelogrammo uero ex α , β , ϵ & γ est
commensurabile id, quod fit bis ex α , β , ϵ & γ . ergo quadra-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

ta linearum $\alpha \epsilon, \beta \gamma$, hoc est parallelogrammum $\alpha \nu$ est incommensurable ei, quod fit bis ex $\alpha \epsilon, \beta \gamma$, hoc est parallelogrammo $\alpha \theta$: sed sicut parallelogrammum $\alpha \nu$ ad parallelogrammum $\alpha \theta$, ita linea $\alpha \nu$ ad lineam $\alpha \zeta$. Ergo linea $\alpha \nu$, est longitudine incommensurabilis linea $\alpha \zeta$: sunt autem amba rationales. Ergo linea $\alpha \zeta$ est residuum per 73. sed linea $\alpha \nu$ est rationalis: parallelogrammum uero contentum ex linea rationali & irrationali est irrationale, per ea quae scripta sunt in fine demonstrationis 38. Ergo parallelogrammum $\alpha \nu$, est irrationale: ergo & linea $\alpha \gamma$, quae illud parallelogrammum potest esse irrationale. Vocatur autem residuum mediale secundum: est quod; hoc residuum mediale secundum, reliqua portio maioris nominis ipsius bimedialis secundum post deductionem minoris nominis de maiori.



Septuagesimum sextum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti, compositum autem ex quadratis totius lineae & lineae detractae sit rationale: parallelogrammum uero ex iisdem contentum sit mediale, reliqua linea erit irrationalis: uocetur autem linea minor.

De linea recta $\alpha \beta$, detrahatur recta $\beta \gamma$ potentia incommensurabilis toti $\alpha \beta$, cuius totius inquam $\alpha \beta$ quadratum cum quadrato lineae $\beta \gamma$ sit rationale. Contentum uero ex $\alpha \beta$, $\beta \gamma$



$\beta\gamma$ sit mediale, dico residuam lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalalem, quæ uocetur minor. Cum enim compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ sit rationale, id uero quod sit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ sit mediale: ergo quadrata linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ sunt incommensurabilia ei, quod sit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$, ergo & reliquo quadrato scilicet lineæ $\alpha\gamma$, erunt incommensurabilia quadrata linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$, sicut dictum est in 73, sed quadrata linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ sunt rationalia, ergo quadratum lineæ $\alpha\gamma$ erit irrationale, & lineæ $\alpha\gamma$ irrationalis uocetur autem lineæ minor, ideo sic dicta, quia est reliqua portio maioris nominis lineæ maioris post deductionem minoris nominis de maiori.

Septuagesimumseptimum Theorema.

Si de lineâ rectâ detrahatur rectâ potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractæ sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem contentum sit rationale, reliqua lineâ est irrationalis: uocetur autem lineâ faciens cum superficie rationali totam superficiem medialem totum mediale.

De lineâ rectâ $\alpha\beta$, detrahatur rectâ

$\beta\gamma$ potentia incommensurabilis toti 
lineæ $\alpha\beta$, ex quadratis quarum scilicet $\alpha\gamma, \beta\gamma$ compositum sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem sit rationale. dico reliquâ lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalē, quæ uocetur lineâ faciens cum superficie rationali totam superficiem medialem. Cum enim compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ sit mediale, id uero quod sit bis ex $\alpha\beta,$

EVCLIDIS ELEMENTOR.

$\epsilon\gamma$ sit rationale. Ergo compositum
 ex quadratis linearum $\alpha\epsilon, \beta\gamma$ erit 
 incommensurable ei quod fit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$. Ergo & re-
 liquum nempe $\alpha\gamma$ erit incommensurable ei, quod fit bis
 ex $\alpha\beta, \beta\gamma$ per 17. Est autem id quod fit bis ex $\alpha\beta, \epsilon\gamma$ ra-
 tionale, ergo quadratum lineæ $\alpha\gamma$ erit irrationale, &
 lineæ $\alpha\gamma$ irrationalis. Vocetur autem faciēs cum super-
 ficie rationali totam medialem: ideo sic dicta, quia com-
 positum ex quadratis linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ est mediale, &
 totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex $\alpha\beta, \epsilon\gamma$ exi-
 stens & ipsum rationale. Nam quadrata linearum $\alpha\beta,$
 $\beta\gamma$ sunt æqualia ei quod fit bis ex $\alpha\epsilon, \beta\gamma$, & quadrato
 lineæ $\alpha\gamma$ per 7.2. aut ideo sit dicta est, quia quadratum
 eius iunctum cum superficie rationali facit totā super-
 ficie medialem, ut intelligetur ex theoremate 109. In
 hac autem lineæ denominanda recessimus à uoce rece-
 pta Campano, qui hanc lineam uocauit, iunctam cum ra-
 tionali componentem totum mediale: idem faciemus in
 proximo theoremate, quia denominationes illæ Campa-
 ni non satis conuenientes rebus ipsis esse uisæ sunt.

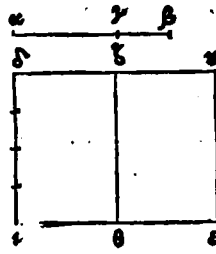
Septuagesimumoctauum Theorema.

Si de lineæ recta detrahatur recta potentia incom-
 mensurabilis toti lineæ, compositum autem ex
 quadratis totius & lineæ detractæ sit mediale, pa-
 rallelogrammum uerò ex eisdem sit etiam me-
 diale: præterea sint quadrata ipsarum incommen-
 surabilia parallelogrammo ex iisdem, reliqua li-
 nea est irrationalis: uocetur autem lineæ faciens
 cum

cum superficie mediali totam superficiem mediam.

De linea $\alpha\epsilon$ detrahatur recta $\epsilon\gamma$ poten-

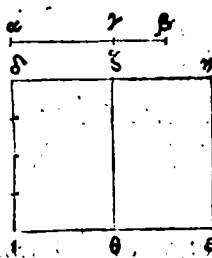
tia incommensurabilis toti $\alpha\beta$ ex quadratis, quarum compositum sit mediale: parallelogrammum quoque ex eisdem sit mediale. praeterea compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta, \epsilon\gamma$ sit in-



commensurabile parallelogrammo ex $\alpha\beta, \epsilon\gamma$. dico lineam reliquam $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Vocetur autem faciens cum mediali superficie totam medialem. Proponatur linea rationalis $\alpha\iota$, secundum quam quadratis linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$, aequale applicetur parallelogrammum $\alpha\iota$ faciens alterum latus $\alpha\iota$: ei uero quod fit bis ex $\alpha\epsilon, \beta\gamma$ aequale applicetur $\alpha\theta$ faciens alterum latus $\alpha\zeta$, residuum ergo $\zeta\iota$ erit aequale residuo, nempe quadrato lineae $\alpha\gamma$. quare linea $\alpha\gamma$ potest parallelogrammum $\zeta\iota$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$, hoc est $\alpha\iota$ est mediale, ergo linea $\alpha\iota$ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineae $\alpha\iota$. Rursus cum id quod fit bis ex $\alpha\epsilon, \epsilon\zeta$, hoc est $\alpha\theta$ sit mediale: ergo & linea $\alpha\zeta$ erit rationalis & longitudine incommensurabilis lineae $\alpha\iota$. Et quoniam quadrata linearum $\alpha\beta, \beta\gamma$ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex $\alpha\beta, \beta\gamma$: ergo incommensurable etiam erit $\alpha\iota$ ipsi $\alpha\theta$. Ergo linea $\alpha\iota$ erit incommensurabilis lineae $\alpha\zeta$: sunt autem amba rationales. ergo lineae $\alpha\iota, \alpha\zeta$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo $\zeta\iota$ erit residuum per 73. Sed linea $\zeta\iota$ est rationalis, quia aequalis rationali $\alpha\iota$: parallelogrammum

EVCLIDIS ELEMENTOR.

verò cōtentum ex linea rationali & irrationali, nēpe ζ , est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demonstrationis 38. ergo linea $\alpha\gamma$, quæ illud potest, erit irrationalis: uocetur autē

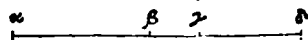


faciens cum superficie mediali totam medialem. Ideo sic dicta quia compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est mediale & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$, existens & ipsum mediale: huius quoque denominationis rationem aliam intelliges ex theoremate 110. Hic non est alienum inferere lemma quoddā positum à Campano ante propositi. 74. Illud tantum in eo emēdandū est, ut excessus linearū intelligatur secundum Arithmetica proportionalitatem, nō autem secundū geometricā: itaque loco numeri 4. qui adscribitur minime lineæ, reponatur binarius.

Septuagesimumnonum Theorema.

Residuo unica tantū linea recta coniungitur rationalis, potentia tantū commensurabilis toti lineæ.

Sit residuum linea $\alpha\beta$, cōiungaturque ipsi linea $\beta\gamma$ huiusmodi, ut linea $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ sint rationales potentia tantum com-



mensurabiles. Nego lineæ $\alpha\epsilon$ aliam posse coniungi huiusmodi, ut sit rationalis potentia tantum commensurabilis ipsi toti $\alpha\gamma$. Si dicas aliam cōiungi posse, huiusmodi sit illa linea $\beta\delta$: ergo linea $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Et quoniam quantum differunt quadrata linearum $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ab eo quod fit bis

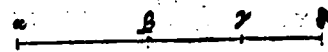
ex

ex $\alpha \Delta, \Delta \epsilon$, (differunt autem illa ab isto quadrato linea $\alpha \beta$ per 7. 2.) tantò differunt ϵ quadrata linearum $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, ab eo quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ (differunt autè illa quoque ab isto similiter eodem quadrato linea $\alpha \beta$, per 7. 2) Ergo ϵ permutate per lemma positum à Campano ante 74. quantò differunt quadrata linearum $\alpha \Delta, \Delta \epsilon$, à quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$, tantò differt id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \epsilon$, ab eo quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$: sed compositum ex quadratis linearum $\alpha \Delta, \Delta \beta$, ϵ compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \beta \gamma$ cum sint ambo rationalia differunt inter se superficie rationali, per lemma positum à nobis ante 42. Ergo ϵ id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \beta$ differet ab eo quod bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ superficie rationali. Sed id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \epsilon$ est mediale, quia est commensurabile ei, quod fit semel ex $\alpha \Delta, \Delta \beta$, quod ipsum est mediale per 22. Item eadem ratione id quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$ est mediale: ergo mediale differet à mediali superficie rationali, quod est impossibile per 27. Ergo linea $\alpha \epsilon$ alia linea coniungi non potest, quàm linea $\epsilon \gamma$ potentia tantum commensurabilis toti: ergo residuo unica tantum linea $\epsilon \gamma$. Deinceps per hanc vocem linea coniuncta seu conuenienter iuncta intellige eam, quam Euclides uocat $\pi\epsilon\sigma\epsilon\mu\alpha$: quæ scilicet iuncta cum residuo, restituit totam lineam, unde ea ablata remanent singula residua.

Octuagesimum Theorema.

Residuo mediali primo unica tantum linea coniungitur medialis, potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens rationale.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Sit residuū mediale primū $\alpha \epsilon$,  cui coniungatur linea $\beta \gamma$ huiusmodi, ut linea $\alpha \gamma, \beta \gamma$ sint mediales potentia tantum commensurabiles: quæ scilicet $\epsilon \gamma$ cum tota $\alpha \gamma$ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex $\alpha \gamma, \epsilon \gamma$. Nego aliam lineam huiusmodi posse coniungi lineæ $\alpha \beta$. Nam si fieri posse dicas, sit illa linea $\beta \lambda$. ergo linea $\alpha \lambda, \lambda \beta$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes id quod fit ex $\alpha \lambda, \lambda \epsilon$. Et quomā quanto excedit compositum ex quadratis linearū $\alpha \lambda, \lambda \beta$ id quod fit bis ex $\alpha \lambda, \lambda \epsilon$ tanto excedit compositum ex quadratis linearū $\alpha \gamma, \gamma \beta$ id quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$. (utrobique enim excedunt quadrato lineæ $\alpha \beta$) ergo $\epsilon \gamma$ permutate (sicut dictum est in proximo theoremate) quāto compositum ex quadratis linearum $\alpha \lambda, \lambda \beta$ excedit compositū ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$, tanto excedit id quod fit bis ex $\alpha \lambda, \lambda \beta$ id quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$. sed id quod fit bis ex $\alpha \lambda, \lambda \epsilon$ est rationale: item id quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ est rationale. ergo id quod fit bis ex $\alpha \lambda, \lambda \beta$ excedit id quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$ superficie rationali per lemma positū à nobis ante 42. Ergo $\epsilon \gamma$ compositum ex quadratis linearū $\alpha \lambda, \lambda \beta$, quod est mediale, sicut dictum est in 75. excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, quod ipsum est etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ posite sunt mediales) superficie rationali, quod est impossibile per 27. Ergo residuo mediali primō $\epsilon \gamma$.

Octuagesimumprimum Theorema.

Residuo mediali secundo unica tantum coniungitur

tur medialis potentia tantum commensurabilis
toti, ipsa cum tota continens mediale.

Sit residuum mediale secundum $\alpha\epsilon$,

cui coniungatur linea $\epsilon\gamma$ huius-

iusmodi, ut linea $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ sint

mediales potentia tantum com-

mensurabiles mediale continen-

tes, id scilicet quod fit ex $\alpha\gamma$,

$\gamma\beta$. Nego aliam lineam huius-

modi posse coniungi lineam $\alpha\beta$:

nam si fieri potest, coniungatur linea $\beta\delta$, ergo linea $\alpha\delta$,

$\delta\beta$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, me-

diale continentes id, quod fit ex $\alpha\delta$, $\delta\beta$. Proponatur li-

nea rationalis $\epsilon\zeta$, secundum quam quadratis linearum

$\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ aequale applicetur parallelogrammum $\alpha\eta$, faciens

alterum latus $\eta\mu$: ei uero quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ aequale

auferatur parallelogrammum $\theta\eta$, faciens alterum la-

tus lineam $\theta\mu$. ergo residuum $\epsilon\lambda$ est aequale quadrato li-

nea $\alpha\epsilon$, per 7.2. quare linea $\alpha\epsilon$ potest parallelogram-

mum $\epsilon\lambda$. Rursus secundum eandem lineam $\epsilon\zeta$, quadra-

sis linearum $\alpha\delta$, $\delta\beta$ applicetur aequale parallelogrammum

$\epsilon\iota$, faciens alterum latus $\epsilon\upsilon$. Sed quadrata linearum $\alpha\delta$,

$\delta\beta$ sunt equalia ei, quod fit bis ex $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ et quadrato

linea $\alpha\beta$. ergo parallelogrammum $\epsilon\iota$ est aequale ei, quod

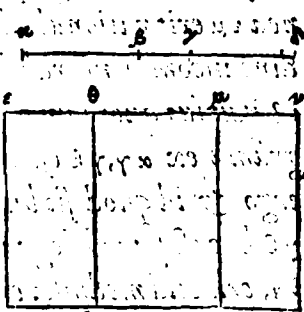
fit bis ex $\alpha\delta$, $\delta\beta$, et quadrato linea $\alpha\beta$. Est autem $\epsilon\lambda$

aequale quadrato linea $\alpha\epsilon$. ergo id quod fit bis ex $\alpha\delta$,

$\delta\epsilon$ est aequale parallelogrammo $\theta\eta$: et quoniam linea

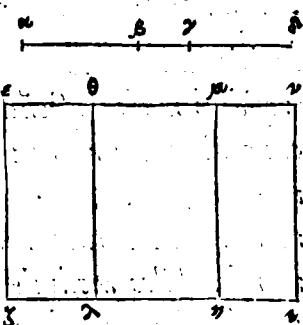
$\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sunt mediales, ergo et quadrata ipsarum sunt

medialia, et sunt equalia parallelogrammo $\alpha\eta$. ergo $\epsilon\lambda$



EVCLIDIS ELEMENTOR.

erit etiā mediale per ea quæ di-
cta sunt in 75. Ergo per 23 li-
nea ϵ erit rationalis, longitu-
dine incommensurabilis linea
 ϵ 2. Rursus quoniam parallelo-
grammū ex α γ , γ β est mediale,
ergo ϵ id quod fit bis ex α γ ,
 γ ϵ , hoc est parallelogrammum



θ μ , erit etiā mediale: ergo linea θ μ est rationalis, longi-
tudine incommensurabilis linea ϵ 2. Et quoniam linea α γ ,
 γ ϵ sunt potentia tantum cōmensurabiles, ergo ipsæ sunt
longitudine incommensurabiles. Sed sicut linea α γ ad li-
neam γ ϵ , ita quadratum linea α γ ad parallelogram-
mum ex α γ , γ β . Ergo quadratum linea α γ erit incom-
mensurabile parallelogrammo ex α γ , γ ϵ . sed quadrato
linea α γ sunt commensurabilia quadrata linearum α γ ,
 γ β : parallelogrammo uero ex α γ , γ β est commensurabi-
le id quod fit bis ex α γ , γ ϵ : ergo quadrata linearū α γ ,
 γ ϵ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α γ , γ β . Est
autē quadratis linearum α γ , γ β æquale parallelogrā-
mum ϵ μ : ei uero quod fit bis ex α γ , γ ϵ est æquale parat-
lelogrammū θ μ . Ergo parallelogrammum ϵ μ est incom-
mensurabile parallelogrammo θ μ , ergo ϵ linea ϵ μ erit
longitudine incommensurabilis linea θ μ : sunt autē am-
bæ rationales, ergo sunt rationales potentia tantum cō-
mensurabiles. Ergo linea ϵ θ est residuum, ei que coniun-
cta linea θ μ rationalis, est toti linea ϵ μ rationali com-
mensurabilis potentia tantum. Similiter etiam proba-
bimus cōiungi linea ϵ θ , lineam θ μ existentem ϵ ipsam
rationalem

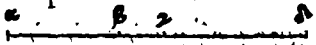
rationalem potentia tantum commensurabilem toti $\epsilon\gamma$, repetendo inquā processum demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniam lineæ $\alpha\gamma, \gamma\beta$ sunt mediales: Et loco linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ reponendo lineas $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$, Et cetera similiter, ergo residuo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commensurabilis toti, quod est impossibile per 79. Ergo residuo mediali secundo $\epsilon\gamma\epsilon$.

Octuagesimum secundum Theorema.

Lineæ minori unica tantum recta coniungitur, potentia incommensurabilis toti, faciens cum tota compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero parallelogramū, quod ex ipsis fit, mediale.

Sit linea minor $\alpha\epsilon$, sitq; illi cōiū

cta linea $\epsilon\gamma$, qualis ponitur in



theoremate. ergo lineæ $\alpha\gamma, \gamma\beta$ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarū rationale. Ad uero quod fit ex ipsis mediale, nego lineæ $\alpha\epsilon$ aliam lineam posse coniungi, quæ idem efficiat. nam si fieri potest, sit ei coniuncta linea $\beta\delta$: ergo lineæ $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. Et quoniam quāto compositum ex quadratis ipsarum excedit id quod fit bis ex ipsis, tanto excedit compositum ex quadratis linearū $\alpha\gamma, \gamma\beta$, id quod fit bis ex ipsis $\alpha\gamma, \gamma\beta$. Et permutate sicut in 79. theoremate quanto differt compositum ex quadratis linearum $\alpha\lambda, \lambda\beta$ compositum ex quadratis linearū $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$, tanto differt id quod fit bis ex $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$, id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$: sed

EVCLIDIS ELEMENTOR.

compositum ex quadratis linearum $\alpha \Delta, \Delta \epsilon$ excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, superficie rationali, quia utrumque compositum est rationale. ergo id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \beta$ excedit id, quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ superficie rationali, cum tamē utrumque sit mediale, quod est impossibile. ergo linea minori &c.

Octuagesimumtertium Theorema.

Linea facienti cum superficie rationali totā superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incōmensurabilis toti: faciens autem cum tota compositū ex quadratis ipsarū mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale.

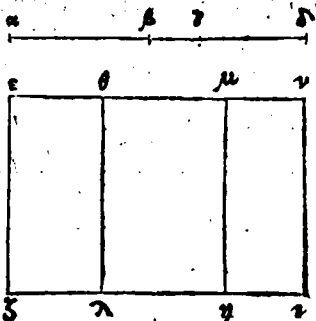
Sit linea cū rationali superficie faciens totam superficiem medialem $\alpha \beta$, etiq; coniuncta α  sit $\beta \gamma$, ergo linea $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale. Nego lineam $\alpha \epsilon$ aliam lineam posse coniungi quae idem efficiat: nam si possibile est, sit illa cōiuncta $\beta \Delta$. ergo linea $\alpha \Delta, \Delta \beta$ sunt linea potētia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum $\alpha \Delta, \Delta \beta$ tanto excedat compositū ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$, quanto id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \beta$ excedit, quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, sicut dictum est in precedentibus: sed id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \beta$ excedit id, quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$ superficie rationali, cum sit utrūq; rationale

rationale. ergo & compositum ex quadratis linearum $\alpha \delta, \alpha \epsilon$ excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$ superficie rationali, cum tamen utrumque sit mediale, quod est impossibile. Non igitur alia linea cōiungi potest linea $\alpha \epsilon$, quàm linea $\beta \gamma$, quæ idē efficiat. ergo linea facienti cum rationali &c.

Octuagesimumquartum Theorema.

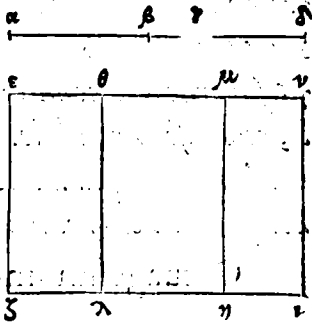
Lineæ cum mediati superficie faciēti totam superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommensurabilis, faciēs cum tota compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiam mediale: & præterea faciens compositum ex quadratis ipsarum incommensurable ei, quod fit ex ipsis.

Sit linea cum mediati superficie faciens totā medialem $\alpha \beta$, cui cōiungatur linea $\epsilon \gamma$ potentia toti incommensurabilis, faciantq; ambæ id quod dicitur in theoremate. Nego lineam $\alpha \epsilon$ aliam lineam cōiungi posse, quæ idem efficiat: nam si possibile est, cōiungatur linea $\beta \delta$, quæ idē efficiat quod linea $\epsilon \gamma$: proponaturq; linea rationalis $\iota \lambda$, secundum quam quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\iota \mu$, faciens alterū latus $\iota \mu$: ei uero quod fit his ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ æquale detrahatur parallelogrammū $\theta \nu$, faciens alterum latus $\theta \mu$. residuum ergo nempe quadratum li-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

nea $\alpha \epsilon$ est æquale parallelo-
grammo $\iota \lambda$. ergo linea $\alpha \beta$ po-
test parallelogrammũ $\iota \lambda$. Rur-
sus secundum eandem lineam
 $\iota \lambda$, quadratis linearum $\alpha \lambda$, $\lambda \beta$.
æquale applicetur parallelo-
grammum $\iota \nu$, faciens alterum
latus $\iota \nu$ est autem quadratum δ



lineæ $\alpha \beta$ æquale parallelogrammo $\iota \lambda$: ergo residuũ, nem-
pe id quod fit bis ex $\alpha \lambda$, $\lambda \beta$, est æquale parallelogram-
mo $\theta \iota$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum
 $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$, hoc est $\iota \nu$, est mediale: ergo linea $\iota \mu$ est rationalis
longitudine incommensurabilis lineæ $\iota \lambda$. Rursus quoniã
id quod fit bis ex $\alpha \gamma$, $\gamma \epsilon$, hoc est $\theta \iota$, est mediale: ergo
linea $\theta \mu$ est rationalis longitudine incommensurabilis li-
neæ $\iota \lambda$. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ
 $\alpha \gamma$, $\gamma \epsilon$, hoc est $\iota \nu$, est incommensurable ei quod fit bis ex
 $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$, hoc est parallelogrammo $\theta \iota$: ergo ϵ lineæ $\iota \mu$, $\theta \mu$
sunt longitudine inter se incommensurabiles. sunt autẽ
ambæ rationales, ergo lineæ $\iota \mu$, $\theta \mu$ sunt rationales potẽ
tia tantum commensurabiles. Ergo linea $\iota \theta$ est residuum
per 73: coniuncta uerò ei erit linea $\theta \mu$. Similiter etiam
probabimus lineam $\iota \theta$ esse residuum coniunctã ei uerò
esse lineam $\theta \nu$, repetendo processum huius demonstra-
tionis ab illis uerbis. Et quoniã cõpositũ ex quadratis li-
nearũ $\alpha \gamma$ & c. ut diximus in theoremate 81. Ergo resi-
duo alia atq; alia linea cõiungitur idẽ efficiẽs, quod est
impossibile per 79. Nõ ergo lineæ $\alpha \epsilon$ alia linea, quã $\beta \gamma$
coniungi potest similis natura, & quæ idem efficiat.

Definitiones

Definitiones tertiæ, siue termini tertij.

Proposita linea rationali & residuo, siquidem tota, nempe composita ex ipso residuo & linea illi cōiuncta, plus potest, quàm coniuncta quadrato linea sibi commensurabilis longitudine, fueritq; tota longitudine commensurabilis linea proposita rationali: residuum ipsum uocetur residuum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, ipsa autem tota plus possit quàm coniuncta quadrato linea sibi longitudine commensurabilis, residuum uocetur residuum secundū. Si uero neutra linearum fuerit longitudine commensurabilis rationali, possit autem ipsa tota plus quàm coniuncta quadrato linea sibi longitudine commensurabilis, uocetur residuum tertium. Rursus si tota possit plus, quàm coniuncta quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis: & quidem si tota fuerit longitudine commensurabilis ipsi rationali, uocetur residuum quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, & tota plus possit quàm coniuncta quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum quintum. Si uerò neutra linearum fuerit commensurabilis longitudine ipsi rationali, fueritq; tota potentior, quàm coniuncta quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum sextum.

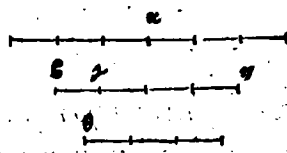
Octuagesimumquintum Theorema.

Reperire primum residuum.

Proponatur linea rationalis a , cui sit longitudine commensurabilis linea c_1 : ergo & linea c_1 erit rationalis. Sint

EVCLIDIS ELEMENTOR.

duo numeri quadrati α , β tales, ut excessus maioris α , β ne sit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis post



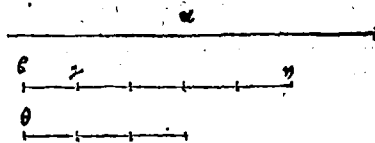
29. Neq; ergo numerus α ad numerum β habebit proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū, per 24. 8. a destructione consequētis. Sitq; sicut numerus α ad numerum β , ita quadratū lineæ β , ad quadratū lineæ γ , per lemma positum post 6. ergo quadratum lineæ ϵ est commensurabile quadrato lineæ γ : sed quadratū lineæ β est rationale, ergo ϵ quadratū lineæ γ erit rationale. ergo lineæ γ erit etiam rationalis. Et quoniam numerus α ad numerum β non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratū lineæ ϵ habebit proportionem ad quadratum lineæ γ , quam numerus quadratus ad quadratū. ergo lineæ ϵ erit longitudine incommensurabilis lineæ γ per 9. Sunt autem ambæ rationales, ergo sunt lineæ ϵ , γ rationales potentia tantum commensurabiles. ergo lineæ β , γ est residuum: dico præterea eandem esse residuum primū. Quò enim est maius quadratum lineæ β quadrato lineæ γ (maius autem esse constat, quia quadratum lineæ ϵ , ad quadratum lineæ γ est, sicut numerus α , maior, ad numerum β ex suppositione:) quò ergo quadratum lineæ β est maius quadrato lineæ γ , sit quadratum lineæ δ . Et quoniam est sicut numerus α ad numerum β , ita quadratum lineæ ϵ ad quadratum lineæ γ . per eversam ergo proportionem sicut numerus

α ad numerum ϵ , ita quadratum lineæ β ad quadratum lineæ θ : sed numerus α habet proportionē ad numerum ϵ , quam numerus quadratus ad quadratū, quia est uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ β habebit proportionem ad quadratum lineæ θ , quam quadratus numerus ad quadratum. ergo lineæ β est longitudine commensurabilis lineæ θ . Potest autē lineæ β plus, quā lineæ γ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem tota β longitudine commensurabilis rationali α . ergo lineæ β est residuū primum. Repertum est igitur residuum primum, quod faciendum erat.

Octuagesimum sextum Theorema.

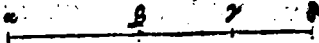
Reperire secundum residuum.

Proponatur lineæ rationalis α , cui sit cōmēsurabilis longitudine lineæ γ : sint q; numeri quadrati



duo α , ϵ , quorum excessus α ne sit quadratus: sit etiā sicut numerus α ad numerum ϵ , ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ β , ergo ambo quadrata sunt cōmensurabilia: & quia quadratum lineæ γ est rationale, etiam quadratum lineæ β erit rationale. ergo & lineæ β erit rationalis. Et quia quadrata linearū β , γ non habent proportionem inter se, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo lineæ β , γ erunt longitudine incōmensurabiles, & sunt amba rationales. ergo lineæ β , γ erūt

EVCLIDIS ELEMENTOR.

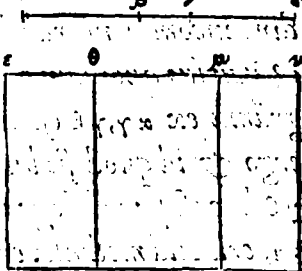
Sit residuū mediale primū. $\alpha\epsilon$, 
 cui coniungatur linea $\beta\gamma$ huiusmodi, ut linea $\alpha\gamma, \beta\gamma$ sint mediales potentia tantum commensurabiles: quæ scilicet $\epsilon\gamma$ cum tota $\alpha\gamma$ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \epsilon\gamma$. Nego aliam lineam huiusmodi posse coniungi lineæ $\alpha\beta$. Nam si fieri posse dicas, sit illa linea $\alpha\lambda$. ergo linea $\alpha\lambda, \lambda\beta$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes id quod fit ex $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$. Et quoniā quanto excedit compositum ex quadratis linearū $\alpha\lambda, \lambda\beta$ id quod fit bis ex $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$ tanto excedit compositum ex quadratis linearū $\alpha\gamma, \gamma\beta$ id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$. (utrobique enim excedunt quadrato lineæ $\alpha\beta$) ergo & permutate (sicut dictum est in proximo theoremate) quāto compositum ex quadratis linearum $\alpha\lambda, \lambda\beta$ excedit compositū ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$, tanto excedit id quod fit bis ex $\alpha\lambda, \lambda\beta$ id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$. sed id quod fit bis ex $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$ est rationale: item id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est rationale. ergo id quod fit bis ex $\alpha\lambda, \lambda\beta$ excedit id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$ superficie rationali per lemma positū à nobis ante 42. Ergo & compositum ex quadratis linearū $\alpha\lambda, \lambda\beta$, quod est mediale, sicut dictum est in 75. excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$, quod ipsum est etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ posite sunt mediales) superficie rationali, quod est impossibile per 27. Ergo residuo mediali primō &c.

Octuagesimumprimum Theorema.

Residuo mediali secundo unica tantum coniungitur

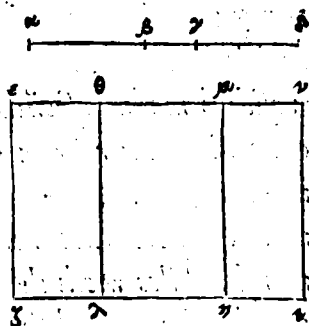
tur medialis potentia tantum commensurabilis
toti, ipsa cum tota continens mediale.

Sit residuum mediale secundum $\alpha\epsilon$,
cui coniungatur linea $\epsilon\gamma$ huiusmodi, ut linea $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ sint
mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes, id scilicet quod fit ex $\alpha\gamma$,
 $\gamma\beta$. Nego aliam lineam huiusmodi posse coniungi lineam $\alpha\beta$:
nam si fieri potest, coniungatur linea $\beta\alpha$, ergo linea $\alpha\alpha$,
 $\alpha\beta$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, mediale continentes id, quod fit ex $\alpha\alpha$, $\beta\alpha$. Proponatur linea rationalis $\iota\zeta$, secundum quam quadratis linearum
 $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ aequale applicetur parallelogrammum $\iota\kappa$, faciens alterum latus $\iota\mu$: ei vero quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ aequale auferatur parallelogrammum $\theta\iota$, faciens alterum latus lineam $\theta\mu$. ergo residuum $\iota\lambda$ est aequale quadrato lineae $\alpha\epsilon$, per 7.2. quare linea $\alpha\epsilon$ potest parallelogrammum $\iota\lambda$. Rursus secundum eandem lineam $\iota\zeta$ quadratis linearum $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$ applicetur aequale parallelogrammum $\iota\iota$, faciens alterum latus $\iota\iota$. Sed quadrata linearum $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$ sunt equalia ei, quod fit bis ex $\alpha\alpha$, $\alpha\epsilon$ & quadrato lineae $\alpha\beta$, ergo parallelogrammum $\iota\iota$ est aequale ei, quod fit bis ex $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, & quadrato lineae $\alpha\beta$. Est autem $\iota\lambda$ aequale quadrato lineae $\alpha\epsilon$, ergo id quod fit bis ex $\alpha\alpha$, $\alpha\epsilon$ est aequale parallelogrammo $\theta\iota$: & quoniam linea $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sunt mediales, ergo & quadrata ipsarum sunt medialis, & sunt equalia parallelogrammo $\iota\iota$. ergo $\iota\iota$



EVCLIDIS ELEMENTOR.

erit etiā mediale per ea qua di-
cta sunt in 75. Ergo per 23 li-
nea $\epsilon\mu$ erit rationalis, longitu-
dine incommensurabilis linea
 $\epsilon\zeta$. Rursus quoniam parallelo-
grammū ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est mediale,
ergo $\epsilon\zeta$ id quod fit bis ex $\alpha\gamma,$
 $\gamma\epsilon$, hoc est parallelogrammum



$\theta\mu$, erit etiā mediale: ergo linea $\theta\mu$ est rationalis, longi-
tudine incommensurabilis linea $\epsilon\zeta$. Et quoniā linea $\alpha\gamma,$
 $\gamma\epsilon$ sunt potentia tantum cōmensurabiles, ergo ipsa sunt
longitudine incommensurabiles. Sed sicut linea $\alpha\gamma$ ad li-
neam $\gamma\epsilon$, ita quadratum lineae $\alpha\gamma$ ad parallelogram-
mum ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$. Ergo quadratum lineae $\alpha\gamma$ erit incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$, sed quadrato
lineae $\alpha\gamma$ sunt commensurabilia quadrata linearum $\alpha\gamma,$
 $\gamma\beta$: parallelogrammo uero ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$ est commensurabi-
le id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$: ergo quadrata linearū $\alpha\gamma,$
 $\gamma\epsilon$ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\beta$. Est
autē quadratis linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ æquale parallelogrammū
 $\epsilon\mu$: ei uero quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$ est æquale paral-
lelogrammū $\theta\mu$. Ergo parallelogrammum $\epsilon\mu$ est incommensurabile parallelogrammo $\theta\mu$, ergo $\epsilon\zeta$ linea $\epsilon\mu$ erit
longitudine incommensurabilis linea $\theta\mu$: sunt autē am-
bæ rationales, ergo sunt rationales potentia tantum cō-
mensurabiles. Ergo linea $\epsilon\theta$ est residuum, eiūque coniun-
cta linea $\theta\mu$ rationalis, est toti lineae $\epsilon\mu$ rationali com-
mensurabilis potentia tantum. Similiter etiam proba-
bimus cōiungi lineam $\epsilon\theta$, lineam $\theta\mu$ existentem $\epsilon\zeta$ ipsam
rationalem

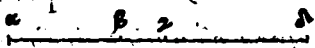
rationalem potentia tantum commensurabilem toti $\epsilon\gamma$, repetendo inquā processum demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniam lineæ $\alpha\gamma, \gamma\beta$ sunt mediales: $\epsilon\gamma$ loco linearum $\alpha\gamma, \gamma\beta$ reponendo lineas $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$, $\epsilon\gamma$ cetera similiter. ergo residuo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commensurabilis toti, quod est impossibile per 79. Ergo residuo mediali secundo $\epsilon\gamma\epsilon$.

Octuagesimum secundum Theorema.

Lineæ minori linica tantum recta coniungitur, potentia incommensurabilis toti, faciens cum tota compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero parallelogramū, quod ex ipsis fit, mediale.

Sit linea minor $\alpha\epsilon$, fitq; illi cōiun

sta linea $\epsilon\gamma$, qualis ponitur in



theoremate. ergo lineæ $\alpha\gamma, \gamma\beta$ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarū rationale. Id uero quod fit ex ipsis mediale, nego lineæ $\alpha\epsilon$ aliam lineam posse coniungi, quæ idem efficiat. nam si fieri potest, sit ei coniuncta linea $\beta\lambda$. ergo lineæ $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. Et quoniam quāto compositum ex quadratis ipsarum excedit id quod fit bis ex ipsis, tanto excedit compositum ex quadratis linearū $\alpha\gamma, \gamma\beta$, id quod fit bis ex ipsis $\alpha\gamma, \gamma\beta$. Et permutate sicut in 79. theoremate quanto differt compositum ex quadratis linearum $\alpha\lambda, \lambda\beta$ compositum ex quadratis linearū $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$, tanto differt id quod fit bis ex $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$, id quod fit bis ex $\alpha\gamma, \gamma\epsilon$: sed

EVCLIDIS ELEMENTOR.

compositum ex quadratis linearum $\alpha \Delta, \Delta \epsilon$ excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, superficiei rationali, quia utrumque compositum est rationale. ergo id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \beta$ excedit id, quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ superficiei rationali, cum tamē utrumque sit mediale, quod est impossibile. ergo linea minori &c.

Octuagesimum tertium Theorema.

Linea facienti cum superficiei rationali totā superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incommensurabilis toti: faciens autem cum tota compositū ex quadratis ipsarū mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale.

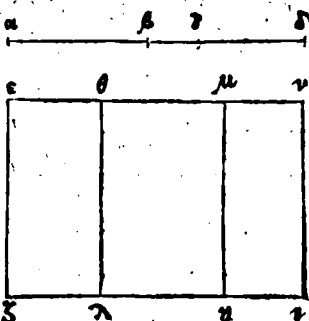
Sit linea cū rationali superficiei faciens totam superficiem medialem $\alpha \beta$, eiq; coniuncta $\alpha \beta \gamma \epsilon$, sit $\beta \gamma$; ergo linea $\alpha \gamma, \gamma \epsilon$, sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale. Nego lineam $\alpha \epsilon$ aliam lineam posse coniungi quae idem efficiat: nam si possibile est, sit illa cōiuncta $\beta \Delta$. ergo linea $\alpha \Delta, \Delta \beta$ sunt linea potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum $\alpha \Delta, \Delta \beta$ tanto excedat compositū ex quadratis linearum $\alpha \gamma, \gamma \beta$, quanto id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \beta$ excedit, quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$, sicut dictum est in precedentibus: sed id quod fit bis ex $\alpha \Delta, \Delta \beta$ excedit id, quod fit bis ex $\alpha \gamma, \gamma \beta$ superficiei rationali, cum sit utrūq; rationale

rationale. ergo & compositum ex quadratis linearum $\alpha \delta$, $\alpha \epsilon$ excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ superficie rationali, cum tamen utrunque sit mediale, quod est impossibile. Non igitur alia linea cōiungi potest linea $\alpha \epsilon$, quàm linea $\beta \gamma$, quæ idē efficiat. ergo linea facienti cum rationali &c.

Octuagesimumquartum Theorema.

Lineæ cum mediati superficie faciēti totam superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommensurabilis, faciēs cum tota compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiam mediale: & præterea faciens compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei, quod fit ex ipsis.

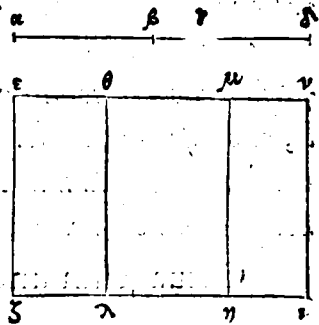
Sit linea cum mediati superficie faciens totā medialem $\alpha \beta$, cui cōiungatur linea $\epsilon \gamma$ potētia toti incommēsurabilis, faciantq; amba id quod dicitur in theoremate. Nego. linea $\alpha \epsilon$ aliam lineā cōiungi posse, quæ idem efficiat: nam si possibile est, cōiungatur linea $\beta \delta$, quæ idē efficiat quod linea $\epsilon \gamma$: proponaturq; linea rationalis $\epsilon \zeta$, secundum quam quadratis linearum $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\epsilon \mu$, faciens alterū latus $\epsilon \mu$: ei uero quod fit bis ex $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$ æquale detrahatur parallelogrammū $\theta \mu$, faciens alterum latus $\theta \mu$. residuum ergo nempe quadratum li-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

nea $\alpha \epsilon$ est aequale parallelo-
grammo $\iota \lambda$. ergo linea $\alpha \beta$ po-
test parallelogrammū $\iota \lambda$. Rur-
sus secundum eandem lineam
 $\iota \lambda$, quadratis linearum $\alpha \delta$, $\delta \beta$.
aequale applicetur parallelo-
grammum $\iota \nu$, faciens alterum
latus ν : est autem quadratum δ
lineae $\alpha \beta$ aequale parallelogram-
mo $\iota \lambda$: ergo residuū, nem-
pe id quod fit bis ex $\alpha \delta$, $\delta \beta$, est aequale parallelogram-
mo $\theta \iota$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum
 $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$, hoc est $\iota \nu$, est mediale: ergo linea $\iota \mu$ est rationalis
longitudine incommensurabilis lineae $\iota \lambda$. Rursus quoniā
id quod fit bis ex $\alpha \gamma$, $\gamma \epsilon$, hoc est $\theta \iota$, est mediale: ergo
linea $\theta \mu$ est rationalis longitudine incommensurabilis li-
neae $\iota \lambda$. Et quoniam compositum ex quadratis linearū
 $\alpha \gamma$, $\gamma \epsilon$, hoc est $\iota \nu$, est incommensurable ei quod fit bis ex
 $\alpha \gamma$, $\gamma \beta$, hoc est parallelogramo $\theta \iota$: ergo ϵ linea $\iota \mu$, $\theta \mu$
sunt longitudine inter se incommensurabiles. sunt autē
ambae rationales, ergo lineae $\iota \mu$, $\theta \mu$ sunt rationales por-
tio tantum commensurabiles. Ergo linea $\iota \theta$ est residuum
per 73: coniuncta uerò ei erit linea $\theta \mu$. Similiter etiam
probabimus lineam $\iota \theta$ esse residuum coniunctā ei uerò
esse lineam $\theta \nu$, repetendo processum huius demonstra-
tionis ab illis uerbis. Et quoniā cōpositū ex quadratis li-
nearū $\alpha \gamma$ ϵ c. ut diximus in theoremate 81. Ergo resi-
duo alia atq; alia linea cōiungitur idē efficiēs, quod est
impossibile per 79. Nō ergo linea $\alpha \epsilon$ alia linea, quā $\beta \gamma$
coniungi potest similis natura, ϵ qua idem efficiat.

Definitiones



Definitiones tertiae, siue termini tertij.

Proposita linea rationali & residuo, siquidem tota, nempe composita ex ipso residuo & linea illi cōiuncta, plus possit, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, fueritq; tota longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: residuum ipsum uocetur residuum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, ipsa autem tota plus possit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, residuum uocetur residuum secundū. Si uero neutra linearum fuerit longitudine commensurabilis rationali, possit autem ipsa tota plus quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uocetur residuum tertium. Rursus si tota possit plus, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incōmensurabilis: & quidem si tota fuerit longitudine commensurabilis ipsi rationali, uocetur residuū quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, & tota plus possit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum quintum. Si uerò neutra linearum fuerit commensurabilis longitudine ipsi rationali, fueritq; tota potentior, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum sextum.

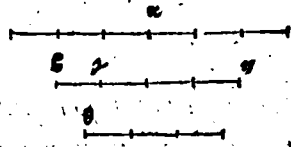
Octuagesimumquintum Theorema.

Reperire primum residuum.

Proponatur linea rationalis α , cui sit longitudine commensurabilis linea ϵ : ergo & linea ϵ erit rationalis. Sint

EVCLIDIS ELEMENTOR.

duo numeri quadrati α , ϵ tales, ut excessus maioris α , ne sit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis post



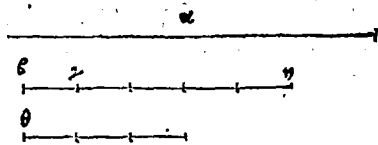
29. Neq; ergo numerus ϵ ad numerum α habebit proportionē, quā numerus quadratus ad numerū quadratū, per 24. 8. a destructione consequētis. Sitq; sicut numerus ϵ ad numerum α , ita quadratū lineæ β , ad quadratū lineæ γ , per lemma positum post 6. ergo quadratum lineæ ϵ est commensurabile quadrato lineæ γ : sed quadratū lineæ β est rationale, ergo ϵ quadratū lineæ γ erit rationale. ergo lineæ γ erit etiam rationalis. Et quoniam numerus ϵ ad numerum α non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratū lineæ ϵ habebit proportionem ad quadratum lineæ γ , quam numerus quadratus ad quadratū. ergo lineæ ϵ erit longitudine incommensurabilis lineæ γ per 9. Sunt autem ambæ rationales, ergo sunt lineæ ϵ , γ rationales potentia tantum commensurabiles. ergo lineæ β , γ est residuum: dico præterea eandem esse residuum primū. Quò enim est maius quadratum lineæ β quadrato lineæ γ (maius autem esse constat, quia quadratum lineæ ϵ , ad quadratum lineæ γ est, sicut numerus ϵ , maior, ad numerum α ex suppositione:) quò ergo quadratum lineæ β est maius quadrato lineæ γ , sit quadratum lineæ θ . Et quoniam est sicut numerus ϵ ad numerum α , ita quadratum lineæ ϵ ad quadratum lineæ γ . per eversam ergo proportionem sicut numerus

α ad numerum ϵ , ita quadratum lineæ β ad quadratum lineæ θ : sed numerus α habet proportionē ad numerum ϵ , quam numerus quadratus ad quadratū, quia est uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ β habebit proportionem ad quadratum lineæ θ , quam quadratus numerus ad quadratum. ergo lineæ β est longitudine commensurabilis lineæ θ . Potest autē lineæ β plus, quā lineæ γ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem tota β longitudine commensurabilis rationali α . ergo lineæ β est residuū primum. Repertum est igitur residuum primum, quod faciendum erat.

Octuagesimum sextum Theorema.

Reperire secundum residuum.

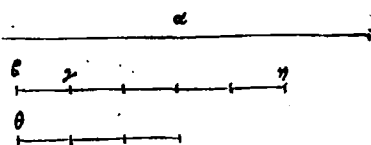
Proponatur lineæ rationalis α , cui sit cōmēsurabilis longitudine lineæ γ : sintq; numeri quadrati duo α et ϵ , quorum ex-



cessus α ne sit quadratus: sit etiā sicut numerus α ad numerum α , ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ β , ergo ambo quadrata sunt cōmensurabilia: & quia quadratum lineæ γ est rationale, etiam quadratum lineæ β erit rationale. ergo & lineæ β erit rationalis. Et quia quadrata linearū β et γ non habent proportionem inter se, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo lineæ β et γ erunt longitudine incōmensurabiles, & sunt ambæ rationales. ergo lineæ β et γ erūt

EVCLIDIS ELEMENTOR.

rationales potentia tan-
tum cōmēsurabiles. er-
go linea ϵ γ erit residuū:
dico praterea eandē ef-
se residuum secundum.



δ ζ ϵ
quò enim est maius quadratum linea α β quadrato li-
nea α γ , sit quadratum linea θ . Cum igitur sit sicut nu-
merus α ϵ ad numerum α ζ , ita quadratum linea α β ad
quadratum linea α γ : per eversam ergo proportionē si-
cut α ϵ ad numerum α ζ , ita quadratū linea β α ad qua-
dratum linea θ . Est autem uterque numerus α ϵ , α ζ qua-
dratus. ergo linea α β erit longitudine commensurabilis
linea θ : potestq; linea β α plus, quàm linea α γ quadrato
linea sibi longitudine commensurabilis. Et est linea con-
iuncta α γ longitudine commensurabilis linea rationali
 α . Ergo linea β γ erit secūdum residuum. Repertum est
ergo residuum secundum.

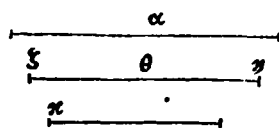
Octuagesimumseptimum Theorema.

Reperire tertium residuum.

Proponatur linea rationalis α , ϵ

Et proponantur numeri tres ϵ δ γ

ϵ , β γ , γ α proportionē non ha-
bētes inter se, quam nume-
rus quadratus ad quadra-



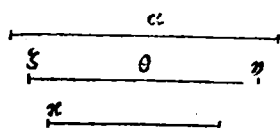
tum: Et numerus β γ ad numerum β α habeat propor-
tionem, quam numerus quadratus ad quadratū: sitq;
numerus β γ maior numero γ α . fiatq; sicut numerus ϵ
ad β γ , ita quadratum linea α ϵ ad quadratum linea α ζ .

sicut

sicut autem numerus $\epsilon\gamma$ ad numerum $\gamma\delta$, ita quadratum lineæ $z\eta$ ad quadratum lineæ $\theta\eta$. ergo quadratum lineæ α est commensurabile quadrato lineæ $z\eta$. Sed quadratum lineæ α est rationale, ergo & quadratum lineæ $z\eta$ erit rationale. ergo lineæ $z\eta$ erit rationalis: et quoniam numerus ϵ ad numerum γ non habet proportionē, quā numerus quadratus ad quadratū, neq; ergo quadratum lineæ α , ad quadratū lineæ $z\eta$ habebit proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo lineæ α erit longitudine incommensurabilis lineæ $z\eta$. Rursum quoniam est sicut numerus $\beta\gamma$ ad $\gamma\delta$, ita quadratū lineæ $z\eta$ ad quadratum lineæ $\theta\eta$, ergo quadratum lineæ $z\eta$ est commensurabile quadrato lineæ $\theta\eta$: sed quadratū lineæ $z\eta$ est rationale, ergo & quadratum lineæ $\theta\eta$ erit rationale. ergo lineæ $\theta\eta$ erit rationalis. Et quoniam numerus $\beta\gamma$ ad numerum $\gamma\delta$ non habet proportionē, quā numerus quadratus ad quadratū, neque ergo quadratum lineæ $z\eta$ habebit proportionem ad quadratum lineæ $\theta\eta$, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo lineæ $z\eta$ erit longitudine incommensurabilis lineæ $\theta\eta$: sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ $z\eta$, $\theta\eta$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo lineæ $z\theta$ erit residuum per 73. dico praterea esse residuū tertium. Cum enim sit sicut numerus ϵ ad numerū $\beta\gamma$, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ $z\eta$: sicut autē numerus $\epsilon\gamma$ ad numerum $\gamma\delta$, ita quadratum lineæ $z\eta$, ad quadratum lineæ $\theta\eta$. ergo per æquam proportionem sicut numerus ϵ ad numerum $\gamma\delta$, ita quadratū lineæ α ad quadratum lineæ $\theta\eta$: sed numerus ϵ ad $\gamma\delta$ non habet

EVCLIDIS ELEMENTOR.

proportionem, quam nume-
 rus quadratus ad quadra-
 tum: neq; ergo quadratum
 lineæ α habebit proportionē
 ad quadratū lineæ θ , quā



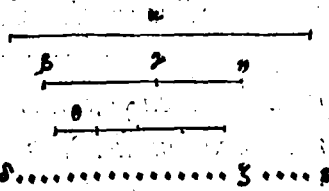
quadratus numerus ad quadratum, ergo lineæ α erit
 longitudine incommensurabilis lineæ θ . Neutra ergo li-
 nearum ζ , θ erit longitudine commensurabilis lineæ
 rationali α : quo uero maius est quadratū lineæ ζ qua-
 drato lineæ θ , maius autem esse constat, quia per sup-
 positionem numerus ϵ est maior numero γ , sit qua-
 dratum lineæ κ . Cum igitur sit sicut numerus β ad nu-
 merum γ , ita quadratum lineæ ζ ad quadratum li-
 neæ θ : per eversam ergo proportionē sicut numerus ϵ γ
 ad β , ita quadratum lineæ ζ ad quadratum lineæ κ :
 sed ϵ γ ad β habet proportionē, quam numerus qua-
 dratus ad quadratum. ergo quadratum lineæ ζ habe-
 bit proportionem ad quadratū lineæ κ , quam quadra-
 tus numerus ad quadratum. ergo lineæ ζ erit longitu-
 dine commensurabilis lineæ κ . Ergo lineæ ζ plus potest,
 quam lineæ θ quadrato lineæ sibi commensurabilis lon-
 gitudine, & neutra linearum ζ , θ est longitudine com-
 mensurabilis lineæ rationali α , cum tamen utraque li-
 nearum ζ , θ sit rationalis: ergo lineæ ζ erit residuum
 tertium. Repertum est ergo tertium residuum.

Octuagesimooctauum Theorema.

Reperire quartum residuum.

Proponatur lineæ rationalis α , cui sit longitudine commē-
 surabilis

surabilis linea ϵ : ergo linea
 ϵ erit rationalis. Proponā-
 tur numeri duo α & β huius
 modi, ut totus α ad neutrum
 α & β habeat proportionē,



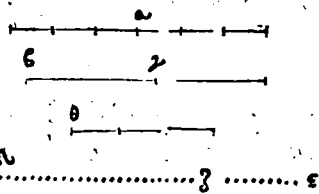
quam numerus quadratus ad quadratū: sitq; sicut nu-
 merus α ad numerum β , ita quadratum lineæ ϵ ad
 quadratum lineæ γ : ergo quadratum lineæ β erit cō-
 mensurable quadrato lineæ γ : ergo & quadratum li-
 neæ γ erit rationale, & lineæ γ rationalis. Et quoniam
 numerus α ad numerum β non habet proportionem,
 quam numerus quadratus ad quadratum, ergo linea
 ϵ erit longitudine incommensurabilis lineæ γ : sunt au-
 tem ambe rationales: ergo lineæ β est residuum. dico
 præterea esse residuum quartum: quod enim quadratum
 lineæ ϵ est maius quadrato lineæ γ , sit quadratum li-
 neæ θ . Cum igitur sit sicut numerus α ad numerum β ,
 ita quadratum lineæ ϵ ad quadratū lineæ γ : ergo per
 eversam proportionem sicut numerus α ad numerum
 β , ita quadratum lineæ ϵ ad quadratum lineæ θ : sed
 numeri α & β non habent proportionem inter se, quam
 quadratus ad quadratum: ergo lineæ β erit longitudi-
 ne incommensurabilis lineæ θ . Ergo lineæ β plus potest,
 quam lineæ γ quadrato lineæ sibi longitudine incom-
 mensurabilis: estque tota ϵ longitudine commensurabi-
 lis lineæ rationali α : ergo lineæ ϵ erit residuum quartū.
 Repertum est igitur residuum quartum.

Octuagesimumhonorum Theorema.

Reperire quintum residuum.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Proponatur linea rationalis α ,
cui sit longitudine commen-
surabilis linea γ , erit ergo li-
nea γ rationalis. Proponam-
tur numeri duo α , β tales,



ut α ad neutrum α , β habeat proportionē, quam nu-
merus quadratus ad quadratū: sitq; sicut numerus β
ad numerum α , ita quadratum lineæ γ ad quadratū
lineæ β , ergo quadratum lineæ γ erit commensurabi-
le quadrato lineæ β . ergo quadratum lineæ β erit ra-
tionale, et lineæ β rationalis: sed numeri α , β nō ha-
bent proportionem, quam quadratus ad quadratū, er-
go lineæ α , γ sunt rationales potentia tantum commē-
surabiles, ergo lineæ α , γ erit residuū, dico præterea esse
residuū quintum: quò enim maius est quadratum li-
neæ β quadrato lineæ α , sit quadratū lineæ α . Cū igitur
sit sicut numerus α ad numerum β , ita quadratū
lineæ β ad quadratū lineæ γ , ergo per eversam pro-
portionem, sicut numerus α ad numerum β , ita qua-
dratum lineæ β ad quadratum lineæ α : sed numeri α ,
 β non habet proportionem inter se, quā numerus qua-
dratus ad quadratū, ergo lineæ β erit longitudine in-
commensurabilis lineæ α . ergo lineæ β plus potest lineæ
 γ , quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis:
estque coniuncta lineæ γ longitudine commensurabilis
lineæ rationali α . ergo lineæ α , γ erit residuū quintum.

Reperitum est ergo residuū quintum.

Nonagesimum Theorema.

Reperire sextum residuū.

Sit

Sit linea rationalis α , & numeri tres ι, β, γ , γ a proportio-
nem non habentes inter se, quā
numerus quadratus ad quadra- $\frac{\alpha}{\beta}$
tum numerum: numerus autem $\frac{\gamma}{\iota}$
 $\beta \gamma$ ne habeat proportionem ad
numerus $\beta \iota$, quā quadratus β
numerus ad quadratum numerum: sitque numerus $\beta \gamma$
maior numero $\gamma \iota$, fiatque sicut numerus ι ad numerum
 $\beta \gamma$, ita quadratum lineae α ad quadratum lineae ζ : sicut
autem numerus $\beta \gamma$ ad numerum $\gamma \iota$, ita quadratum li-
neae ζ ad quadratum lineae θ . Cum igitur sit sicut ι ad
 $\beta \gamma$, ita quadratum lineae α ad quadratum lineae ζ , er-
go quadratum lineae α est commensurabile quadrato li-
neae ζ : ergo quadratum lineae ζ erit rationale, & linea
 ζ rationalis. Et quoniam numerus ι ad $\beta \gamma$ non habet
proportionem, quā quadratus numerus ad quadratum,
ergo linea α erit longitudine incommensurabilis lineae ζ .
Rursus quoniam est sicut numerus $\beta \gamma$ ad numerum $\gamma \iota$,
ita quadratum lineae ζ ad quadratum lineae θ , ergo
quadratum lineae ζ erit commensurabile quadrato li-
neae θ : sed quadratum lineae ζ est rationale, ergo &
quadratum lineae θ erit rationale. ergo linea θ erit ra-
tionalis. Et quoniam numerus $\beta \gamma$ ad numerum $\gamma \iota$ nō
habet proportionē, quam numerus quadratus ad qua-
dratum, ergo linea ζ erit longitudine incommensurabi-
lis lineae θ : sunt autem ambae rationales, ergo linea ζ ,
 θ sunt rationales potentia tantum cōmensurabiles. er-
go linea $\zeta \theta$ erit residuum: dico praeterea esse residuum
sextum. Cū enim sit sicut numerus ι ad $\beta \gamma$, ita quadra-

tum lineæ α , ad quadratum lineæ ζ κ : sicut autem numerus $\beta \gamma$ ad numerum $\gamma \Delta$, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ $\kappa \theta$.

Per equam igitur proportionem $\beta \dots \gamma$ sicut numerus β ad numerum γ Δ , ita quadratum lineæ α , ad quadratum lineæ $\kappa \theta$: sed numerus β non habet proportionem ad numerum γ Δ , quam quadratus numerus ad quadratum. ergo lineæ α erit longitudine incommensurabilis lineæ $\kappa \theta$; & neutra linearum ζ κ , $\kappa \theta$ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α : quod igitur maius est quadratum lineæ ζ κ , quadrato lineæ $\kappa \theta$, sit quadratum lineæ α . Cum igitur sit sicut numerus $\epsilon \gamma$ ad numerum $\gamma \Delta$, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ $\kappa \theta$. ergo per eversam proportionem sicut numerus $\epsilon \gamma$ ad numerum $\epsilon \Delta$, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ α : sed numerus $\epsilon \gamma$ ad numerum $\beta \Delta$ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo lineæ ζ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ α . Ergo lineæ ζ κ plus potest quam lineæ $\kappa \theta$ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & neutra linearum ζ κ , $\kappa \theta$ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α , ergo lineæ ζ θ est residuum sextum. Repertum est ergo residuum sextum. Est autem & facilius quædam ratio reperiendi cuiusque residui, ex illis sex ante dictis, hoc modo. Propositum sit reperire residuum primum. Proponatur binomium primum lineæ $\alpha \gamma$, cuius maius nomen sit α ϵ : & lineæ $\epsilon \gamma$ æqualis sit lineæ $\beta \Delta$. ergo lineæ $\alpha \beta$, $\beta \gamma$, hoc est lineæ $\alpha \epsilon$, $\beta \Delta$ sunt rationales potentia

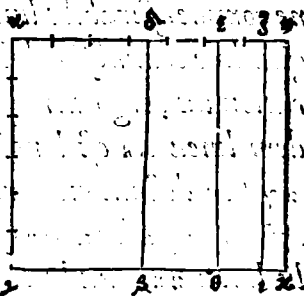
rentia tantum commensurabiles. & linea α ϵ plus potest, quam linea $\beta \gamma$, hoc est quam linea $\beta \lambda$ quadrato linea sibi longitudine commensurabilis: & linea α ϵ est longitudine commensurabilis linea proposita rationali, quia positum est lineam $\alpha \gamma$ esse binomium primum. ergo linea $\alpha \lambda$ est residuum primum. Simili ratione secundum, tertium, quartum, quintum & sextum residuum reperire licet, si proposuerimus singula binomia eiusdem ordinis.

Nonagesimum primum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo primo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

Contineatur superficies rectangula

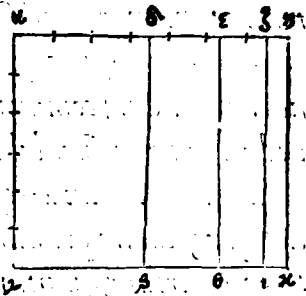
la $\alpha \beta$, ex linea rationali $\alpha \gamma$, & residuo primo $\alpha \lambda$. dico lineam, quæ possit superficiem illam, esse residuum. Cum enim linea $\alpha \lambda$ sit residuum primum, sit illi coniuncta linea $\alpha \mu$, (coniunctam intellige, qualem dixi in fine theorematum 79.)



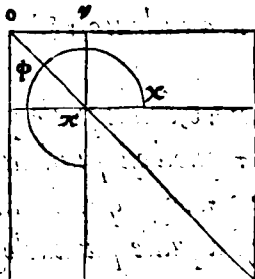
ergo linea $\alpha \mu$, $\alpha \nu$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & tota $\alpha \mu$ est longitudine commensurabilis rationali linea $\alpha \gamma$, & linea $\alpha \mu$ plus potest, quam linea $\alpha \lambda$ quadrato linea sibi longitudine commensurabilis. Secetur linea $\mu \nu$ in partes duas æquales in puncto ϵ , & quadrato lineæ $\mu \epsilon$, æquale secundum lineam $\alpha \mu$ applicetur parallelogrammum, deficient figura quadrata: sitq; illud parallelogrammum ex $\alpha \lambda$. ergo linea $\alpha \nu$ est

EVCLIDIS ELEMENTOR.

longitudine cōmensurabilis li-
nea $\alpha\gamma$ per 18. & per puncta ϵ ,
 ζ , ipsi linea $\alpha\gamma$ parallela du-
cantur $\epsilon\theta$, $\zeta\iota$, $\kappa\lambda$. Et quoniam li-
nea $\alpha\zeta$ est longitudine cōmen-
surabilis linea $\alpha\gamma$, ergo & to-
ta linea $\alpha\kappa$ utriq; ex $\alpha\zeta$, $\zeta\kappa$ est
longitudine commensurabilis per 16. sed linea $\alpha\kappa$ est lon-
gitudine commensurabilis linea $\alpha\gamma$. ergo utraque linea-
rum $\alpha\zeta$, $\zeta\kappa$ est longitudine commensurabilis linea $\alpha\gamma$: sed
linea $\alpha\gamma$ est rationalis, ergo utraque $\alpha\zeta$, $\zeta\kappa$ est etiam ra-
tionalis: quare & utrunque parallelogrammum $\alpha\iota$, $\zeta\kappa$
est rationale per 20. Et quoniam linea $\alpha\epsilon$ est longitudi-
ne commensurabilis linea $\alpha\kappa$, ergo & linea $\alpha\epsilon$ est lon-
gitudine commensurabilis utrique $\alpha\iota$, $\iota\kappa$: sed linea $\alpha\epsilon$ est
rationalis, ergo utraque $\alpha\iota$, $\iota\kappa$ est rationalis: sed ea-
dem linea $\alpha\epsilon$ est longitudine incommensurabilis linea
 $\alpha\gamma$ per definitionem residui primi. uel per 13 aut 14
huius. Quia linea $\alpha\epsilon$ est longitudine incommensurabi-
lis linea $\alpha\kappa$, quæ linea $\alpha\kappa$ est longitudine commensu-
rabilis eidem linea $\alpha\gamma$. ergo utraque linea $\alpha\iota$, $\iota\kappa$ est ra-
tionalis & longitudine incommensurabilis linea $\alpha\gamma$. Er-
go utrunque parallelogrammum $\alpha\theta$, $\iota\kappa$ est mediale per
22. Sit parallelogrammo $\alpha\iota$ æquale quadratum $\lambda\mu$: pa-
rallelogrammo uero $\zeta\kappa$ sit æquale quadratum $\nu\epsilon$, detra-
ctum ex quadrato $\lambda\mu$, habens cum illo communem an-
gulum λ ou. Quod ut fiat reperiatur media proportio-
nalis inter lineas ζ , ι , κ : nam quadratum media propor-
tionalis erit æquale parallelogrammo ex ζ , ι , κ : porro de
linea



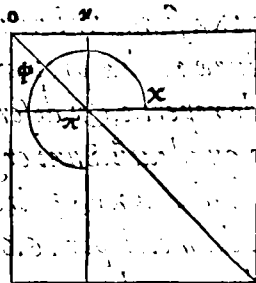
linea λ o sumatur linea equalis linea media proportionali modo reperta, & describatur eius quadratū. Sunt ergo ambo quadrata $\lambda \mu$, & circa eandem diametru per 26.6: sit eorū diameter linea $\phi \rho$, & de-



scribatur figura qualis hic uidetur. Cum igitur sit parallelogrammū ex $\alpha \zeta$, $\zeta \nu$ aequale quadrato linea $\epsilon \nu$. est igitur sicut linea $\alpha \zeta$ ad lineam $\epsilon \nu$, ita linea $\epsilon \nu$ ad lineam $\zeta \nu$ per 17.6: sed sicut linea $\alpha \zeta$ ad lineam $\lambda \mu$, ita parallelogrammum $\alpha \zeta$ ad parallelogrammum $\epsilon \nu$: sicut autem linea $\epsilon \nu$ ad lineam $\zeta \nu$, ita parallelogrammum $\epsilon \nu$ ad parallelogrammum $\zeta \nu$. Ergo parallelogrammorum $\alpha \zeta$, $\zeta \nu$ parallelogrammum $\epsilon \nu$ est mediū proportionale: sed & quadratorū $\lambda \mu$, & parallelogrammum $\mu \nu$, est medium proportionale per lemma positum post 53. Est autem parallelogrammū $\alpha \zeta$ aequale quadratū $\lambda \mu$: parallelogrammū uero $\zeta \nu$ est aequale quadratū $\nu \xi$: ergo parallelogrammū $\mu \nu$ est aequale parallelogrammo $\epsilon \nu$ per lemma positum à nobis ante 54. Sed parallelogrammum $\epsilon \nu$ est aequale parallelogrammo $\lambda \theta$ per 1.6: parallelogrammū uero $\mu \nu$ est aequale parallelogrammo $\lambda \xi$ per 43.1. Ergo parallelogrammum $\lambda \theta$ est aequale gnomoni $\nu \phi \chi$, qui gnomon constat ex illis parallelogramis. per quæ uides in figura maiorem semicirculo portionem pertransire, & præterea quadrato $\nu \xi$. Est autem & parallelogrammū $\alpha \chi$ aequale quadratis $\lambda \mu$, & $\nu \xi$: & modo conclusum est parallelogrammū $\lambda \theta$ esse aequale gnomoni $\nu \phi \chi$, & præ-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

terea quadrato, $\nu \xi$. Reliquum
ergo, nempe parallelogram-
mum $\alpha \zeta$, erit aequale quadra-
to $\sigma \tau$, quod est quadratum li-
neæ $\lambda \nu$. ergo quadratū lineæ
 $\lambda \nu$ est aequale parallelogram-
mo $\alpha \beta$. ergo lineæ $\lambda \nu$ potest il-



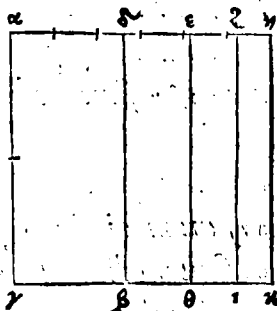
lud parallelogrammum $\alpha \beta$. dico præterea lineam $\lambda \nu$
esse residuum. Cum enim utrumque parallelogrammū
 $\alpha \nu$, & $\nu \xi$ sit rationale, ut supra dictum, ergo & illis aequa-
lia quadrata $\lambda \mu$, & $\nu \xi$; hoc est, quadrata linearum $\lambda \sigma$, & $\sigma \nu$
erunt rationalia, & lineæ ipsæ $\lambda \sigma$, & $\sigma \nu$, rationales. Rur-
sus quoniam parallelogrammum $\alpha \nu$, hoc est, $\lambda \xi$ est me-
diale, ergo parallelogrammum $\lambda \xi$ erit incommensura-
bile quadrato $\nu \xi$. ergo per 1.6 & 10. huius, lineæ $\lambda \sigma$ erit
longitudine incommensurabilis lineæ $\sigma \nu$: sunt autem am-
bæ rationales, sunt ergo rationales potentia tantum cō-
mensurabiles. ergo lineæ $\lambda \nu$ est residuum: potest autē pa-
rallelogrammum $\alpha \zeta$. ergo si superficies cōtineatur & c.
linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

Nonagesimumsecundum Theorema.

Si superficies contineatur ex lineâ rationali, & resi-
duo secundo, lineæ quæ illam superficiem potest,
est residuum mediale primum.

Superficies $\alpha \beta$ contineatur ex lineâ rationali $\alpha \gamma$, & resi-
duo secundo $\alpha \delta$. dico lineam quæ potest superficiem $\alpha \beta$
esse eam, quæ dicitur residuū mediale primum. Sit enim
lineæ $\alpha \delta$ lineâ coniuncta $\delta \nu$. ergo lineæ $\alpha \nu$, & $\delta \nu$ sunt ra-
tionales

tionales potentia tantum cōmen-
surabiles: & linea coniuncta $\Lambda\mu$,
est longitudine commensurabilis li-
nea rationali $\alpha\gamma$: linea uero $\alpha\mu$
plus potest quā linea $\Lambda\mu$ quadra-
to linea sibi longitudine commen-
surabilis. Secetur linea $\Lambda\mu$ bifariā
& aequaliter in pūcto ι , & secū-

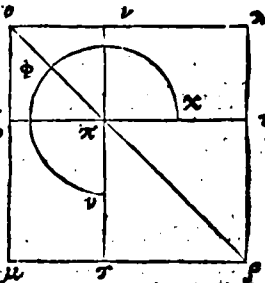


dum lineā $\alpha\mu$ applicetur quarta parti quadrati linea
 $\Lambda\mu$, hoc est, quadrato lineae $\iota\mu$ aequale parallelogrammū
ex $\alpha\zeta\iota\mu$, deficiens specie quadrata. ergo per 18 linea $\alpha\zeta$
est longitudine commensurabilis lineae $\zeta\mu$: & per puncta
 α, ζ, μ ipsi lineae $\alpha\gamma$ ducantur parallelae $\iota\theta, \zeta\iota, \mu\xi$: & quo-
niam linea $\alpha\zeta$ est longitudine commensurabilis lineae $\zeta\mu$,
ergo tota linea $\alpha\mu$ est utrique $\alpha\zeta, \zeta\mu$ longitudine cōmen-
surabilis. Est autem linea $\alpha\mu$ rationalis & longitudine
incommensurabilis lineae $\alpha\gamma$. ergo & utraque $\alpha\zeta, \zeta\mu$ est
rationalis & longitudine incommensurabilis lineae $\alpha\gamma$.
ergo utrumque parallelogrammum $\alpha\iota, \zeta\mu$ est mediale
per 22. Rursus cum linea $\Lambda\mu$ sit commensurabilis longi-
tudine lineae $\iota\mu$, ergo & $\Lambda\mu$ est utrique $\Lambda\iota, \iota\mu$ longitudi-
ne commensurabilis: sed linea $\Lambda\mu$ est longitudine commē-
surabilis lineae rationali $\alpha\gamma$, ergo utraque $\Lambda\iota, \iota\mu$ est ra-
tionalis & longitudine commensurabilis lineae $\alpha\gamma$. ergo
utrumque parallelogrammum $\Lambda\theta, \iota\mu$ est rationale per
20. Describatur parallelogrammo $\alpha\iota$ aequale quadratū
 $\mu\iota$: parallelogrammo uero $\zeta\mu$ aequale sit quadratū $\iota\zeta$,
sicut in precedenti theoremate, quadrata $\mu\iota, \iota\zeta$ erunt
circa eandem diametrum: sit diameter $\omicron\varrho$, & describa-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

tur figura sicut modo dictū est.

Quoniam ergo parallelogramma $\alpha 1, 2 \kappa$ sunt medialia & inter se commensurabilia, & illis aequalia quadrata linearū λo , $o 1$ sunt medialia, ergo lineæ λo , $o 1$ sunt mediales potentia commensurabiles. Constat autem potentia commensurabiles esse lineas λo , $o 1$, quia earum quadrata sunt commensurabilia: commensurabilia sunt porro quadrata illa, scilicet linearum λo , $o 1$, quia sunt aequalia parallelogrammis, $\alpha 1, 2 \kappa$, quæ sunt cōmensurabilia: cōmensurabilia porro esse illa parallelogrāma $\alpha 1, 2 \kappa$ constat eo, quod modo probatum est, lineas $\alpha 2, 2 \nu$ esse longitudine commensurabiles. Ergo per 1.6 & 10 huius parallelogrāma $\alpha 1, 2 \kappa$ sunt commensurabilia. ergo modo probatum est uia resolutionis lineas λo , $o 1$, esse potentia cōmensurabiles. Et quoniam parallelogrammum ex $\alpha 2, 2 \nu$ est æquale quadrato lineæ $\epsilon \nu$. est ergo sicut linea $\alpha 2$ ad lineā $\epsilon \nu$, ita linea $\epsilon \nu$ ad lineam 2ν : sed sicut linea $\alpha 2$ ad lineam $\epsilon \nu$, ita parallelogrammū $\alpha 1$ ad parallelogrammū $\epsilon \kappa$: sicut autem linea $\epsilon \nu$ ad lineam 2ν , ita parallelogrammū $\epsilon \kappa$ ad parallelogrammum 2κ . ergo parallelogrammorum $\alpha 1, 2 \kappa$ medium proportionale est parallelogrammū $\epsilon \kappa$. Est etiam quadratorum $\lambda \mu, 1 \xi$ medium proportionale parallelogrammum $\mu 1$: & est æquale parallelogrammū $\alpha 1$. quadrato $\lambda \mu$: parallelogrammum uero 2κ est æquale quadrato 1ξ . Ergo $\mu 1$ erit æquale parallelogrāmo $\epsilon \kappa$: sed $\epsilon \kappa$ est æquale parallelogrammo $\alpha 1$: parallelogrammum



mum uero $\lambda \xi$ est æquale parallelogrammo $\mu \nu$. Totū ergo parallelogrammum $\lambda \kappa$ est æquale gnomoni $\nu \phi \chi$, & quadrato $\nu \xi$. reliquum ergo, nempe parallelogrammū $\alpha \beta$, est æquale quadrato $\sigma \tau$, hoc est quadrato lineæ $\lambda \nu$. Ergo linea $\lambda \nu$ potest superficiem $\alpha \beta$: dico præterea lineā $\lambda \nu$ esse residuum mediale primum. Cum enim parallelogrammum $\lambda \kappa$ sit rationale, sitq; æquale parallelogrammo $\mu \nu$, hoc est $\lambda \xi$: ergo $\lambda \xi$, hoc est parallelogrammum ex $\lambda \nu, \nu \xi$ erit rationale: sed quadratum $\nu \xi$ est mediale, quia ei æquale parallelogrammum $\gamma \chi$ modo probatū est esse mediale. Ergo parallelogrammum $\lambda \xi$ erit incommensurabile quadrato $\nu \xi$: sed sicut parallelogrammū $\lambda \xi$ ad quadratum $\nu \xi$, ita linea $\lambda \nu$ ad lineam $\nu \xi$, per 16. ergo per 10 huius, lineæ $\lambda \nu, \nu \xi$ sunt longitudine incommensurabiles: sed modo probatum est eas esse mediales potentia commensurabiles. ergo lineæ $\lambda \nu, \nu \xi$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, continentes rationale. Ergo linea $\lambda \nu$ est residuum mediale primum, & potest superficiem $\alpha \beta$ contentam ex linea rationali & residuo secundo.

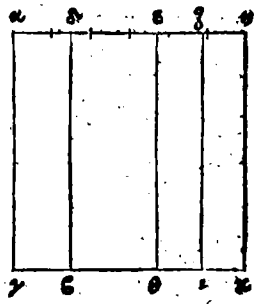
Nonagesimumtertium Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo tertio, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale secundum.

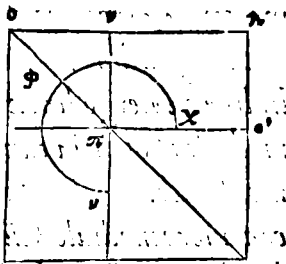
Superficies enim $\alpha \beta$ cõtineatur ex linea rationali $\alpha \gamma$, & residuo tertio $\alpha \delta$. dico lineam quæ possit superficiem $\alpha \beta$ esse residuum mediale secundum. Sit linea coniuncta $\alpha \eta$, ergo lineæ $\alpha \eta, \eta \delta$ sunt rationales potentia tantum com-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

mēsurabiles, & neutra linearum
 $\alpha\beta$ est longitudine commensu-
 rabilis lineæ rationali $\alpha\gamma$. Tota ue-
 ro $\alpha\beta$ plus potest, quàm coniuncta
 $\alpha\delta$ quadrato lineæ sibi longitudine
 commensurabilis. reliqua fiât, ut in
 præcedētibz. ergo lineæ $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ sunt
 longitudine commēsurabiles & parallelogrammū $\alpha\delta$,
 commensurabile parallelogrammō $\delta\epsilon$. Et quoniam $\alpha\delta$,
 $\delta\epsilon$ sunt longitudine cōmensurabiles, ergo tota lineæ $\alpha\epsilon$
 est utrique $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ longitudine commēsurabilis: sed lineæ
 $\alpha\epsilon$ est rationalis & longitudine incommensurabilis li-
 neæ $\alpha\gamma$, ergo utraqz $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ est rationalis & longitudi-
 ne incommēsurabilis lineæ $\alpha\gamma$. ergo utrūque parallelo-
 grammum $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ est mediale per 22. Rursus cum lineæ
 $\alpha\delta$ sit longitudine commensurabilis lineæ $\epsilon\zeta$, ergo & to-
 ta $\alpha\epsilon$ est longitudine cōmensurabilis utrique $\alpha\delta$, $\epsilon\zeta$: sed
 lineæ $\alpha\epsilon$ est rationalis potentia tantum commensurabi-
 lis lineæ $\alpha\gamma$, ergo & utraqz linearum $\alpha\delta$, $\epsilon\zeta$ est ratio-
 nalis potentia tantum commensurabilis lineæ $\alpha\gamma$. ergo
 & utrūque parallelogrammum $\alpha\delta$, $\epsilon\zeta$ est mediale: &
 quoniam lineæ $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ sunt potentia tantum commensu-
 rabiles, ergo sunt longitudine incommensurabiles: sed li-
 neæ $\alpha\delta$ est longitudine commensurabilis lineæ $\alpha\delta$: lineæ
 autem $\delta\epsilon$ est longitudine commensurabilis lineæ $\epsilon\zeta$, er-
 go lineæ $\alpha\delta$ est longitudine incommensurabilis lineæ $\epsilon\zeta$.
 Sicut autem lineæ $\alpha\delta$ ad lineam $\epsilon\zeta$, ita parallelogram-
 mum $\alpha\delta$ ad parallelogrammum $\epsilon\zeta$. ergo $\alpha\delta$ est incom-
 mensurabile ipsi $\epsilon\zeta$. Construatur parallelogrammō $\alpha\delta$
 aequale

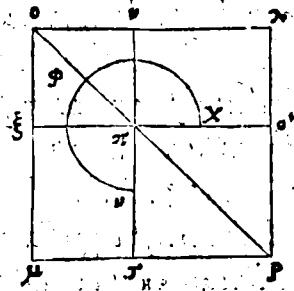


aequale quadratum $\lambda \mu$ ipsi uero
 $\xi \chi$ aequale quadratū $\nu \xi$; & de-
 scribatur figura, ut in præceden-
 tibus. Cum igitur parallelogram-
 mū ex $\alpha \beta$, $\gamma \delta$ sit aequale quadra-
 to linea $\epsilon \nu$, est ergo sicut linea $\alpha \beta$
 ad lineam $\epsilon \nu$, ita $\epsilon \nu$ ad $\gamma \delta$; sed si-
 cut linea $\alpha \beta$ ad lineam $\nu \delta$, ita parallelogrammū $\alpha \iota$ ad
 parallelogrammum $\epsilon \chi$; sicut autem linea $\epsilon \nu$ ad lineam
 $\gamma \delta$, ita parallelogrammum $\epsilon \chi$ ad parallelogrammū $\xi \chi$,
 sicut ergo parallelogrammum $\alpha \iota$ ad parallelogrammū
 $\epsilon \chi$, ita $\epsilon \chi$ ad $\xi \chi$. ergo parallelogrammorum $\alpha \iota$, $\xi \chi$ me-
 dium proportionale est $\epsilon \chi$. Sed quadratorū $\lambda \mu$, $\nu \xi$ me-
 dium proportionale est parallelogrammum $\alpha \iota$; ergo $\epsilon \chi$
 est aequale ipsi $\nu \xi$. ergo totum parallelogrammum $\alpha \chi$ est
 aequale gnomoni $\nu \phi \chi$, & quadrato $\nu \xi$. Est autem ipsum
 $\alpha \chi$ aequale quadrato $\lambda \mu$, $\nu \xi$; reliquum ergo nempe $\alpha \epsilon$ est
 aequale quadrato $\sigma \tau$, hoc est quadrato linea $\lambda \nu$, ergo $\lambda \nu$
 potest superficiem $\alpha \epsilon$: dico præterea lineam $\lambda \nu$ esse resi-
 duum mediale secundum. Cum enim, sicut probatū est,
 parallelogramma $\alpha \iota$, $\xi \chi$ sint medialia, ergo eis equalia
 quadrata linearū $\lambda \nu$, $\nu \delta$ sunt etiā medialia. ergo utraq;
 linea $\lambda \nu$, $\nu \delta$ erit medialis: & quoniam parallelogram-
 mū $\alpha \iota$ est commensurabile parallelogrammo $\xi \chi$, ergo
 & eis equalia quadrata linearum $\lambda \nu$, $\nu \delta$ erunt com-
 mensurabilia. Rursus cum sit probatum parallelogram-
 mū $\alpha \iota$ esse incommensurabile parallelogrammo $\epsilon \chi$, er-
 go incommensurabile erit quadratum $\lambda \mu$, parallelo-
 grammo $\mu \nu$, hoc est, quadratum linea $\lambda \nu$, parallelogrā-



EVCLIDIS ELEMENTOR.

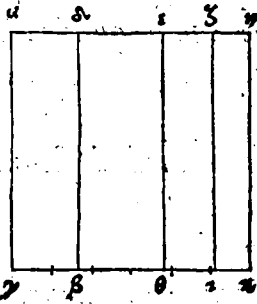
mo ex $\lambda \theta, \sigma$: quare & linea $\lambda \sigma$ erit longitudine incōmensurabilis linea $\sigma \nu$. ergo linea $\lambda \sigma, \sigma \nu$ sunt mediales potentia tantum cōmensurabiles: dico præterea eas continere mediale. Cū enim probatū sit ν esse mediale, ergo & illi æquale parallelogrammū ex $\lambda \theta, \sigma$ erit mediale. ergo linea $\lambda \nu$ est residuum mediale secundum, & potest superficiem $\alpha \beta$. Ergo linea potens superficiem $\alpha \beta$ est residuum mediale secundum.



Nonagesimumquartum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo quarto, linea quę illam superficiē potest, est linea minor.

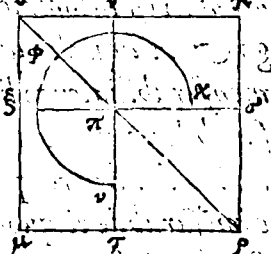
Superficies $\alpha \beta$ contineatur ex linea rationali $\alpha \epsilon$, et residuo quarto $\alpha \delta$. dico lineam quę illam superficiem $\alpha \beta$ potest, esse eā, quę dicitur linea minor: sit enim linea cōiuncta $\alpha \nu$, ergo linea $\alpha \nu, \nu \delta$ sunt rationales potentia tantum cōmēsurabiles:



& linea $\alpha \nu$ plus potest, quā linea $\nu \delta$ quadrato linea sibi longitudine incommēsurabilis, & linea $\alpha \nu$ est longitudine cōmensurabilis linea $\alpha \gamma$. Diuidatur linea $\alpha \nu$ bifariam & æqualiter in puncto ϵ : & quadrato linea $\alpha \epsilon$ æquale secundum lineam $\alpha \nu$ applicetur parallelogrammū, deficiēs figura quadrata, sitq; illud parallelogrammū

mū ex $\alpha\gamma$ u. ergo per 19. linea $\alpha\gamma$ erit longitudine incommensurabilis linea $\gamma\mu$. Ducantur per puncta γ, μ ipsi lineis $\alpha\gamma, \delta\epsilon$, parallelae $\gamma\delta, \mu\epsilon$. Cum igitur linea $\alpha\mu$ sit rationalis, & longitudine commensurabilis linea $\alpha\gamma$, ergo totum parallelogrammum $\alpha\mu$ est rationale per 20. Rursus cum linea $\alpha\mu$ sit longitudine incommensurabilis linea $\alpha\gamma$, (nam si esset linea $\alpha\mu$ longitudine commensurabilis linea $\alpha\gamma$, cum linea $\alpha\mu$ sit eidem $\alpha\gamma$ longitudine commensurabilis, essent etiam linea $\alpha\mu, \delta\epsilon$ longitudine commensurabiles, cum tamen posita sint potētia tantum commensurabiles) sunt autem ambe $\alpha\gamma, \delta\epsilon$ rationales. ergo parallelogrammū $\delta\epsilon$ est mediale. Rursus cum linea $\alpha\gamma$ sit longitudine incommensurabilis linea $\gamma\mu$, ergo incommensurabile est $\alpha\mu$ ipsi parallelogrammo $\gamma\mu$.

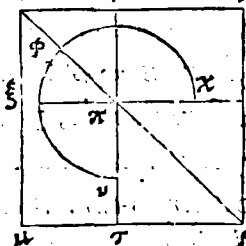
Construatur parallelogrammo $\alpha\mu$ aequale quadratum $\lambda\mu$: ipsi uero $\gamma\mu$ aequale quadratum $\pi\epsilon$, ambo quadrata habentia communem angulū $\lambda\mu\pi$. ergo quadrata $\lambda\mu, \pi\epsilon$ sunt circa eandem diametru: sit diameter $\phi\theta$ & describatur si



gura. Cum igitur parallelogrammū ex $\alpha\gamma$ sit aequale quadrato linea $\gamma\mu$, erit proportionaliter, sicut linea $\alpha\gamma$ ad lineam $\gamma\mu$, ita linea $\alpha\mu$ ad lineā $\gamma\mu$: sed sicut linea $\alpha\gamma$ ad lineam $\gamma\mu$, ita parallelogrammum $\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\gamma\mu$ per 1.6. Sicut autem linea $\alpha\mu$ ad lineā $\gamma\mu$, ita parallelogrammum $\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\gamma\mu$. ergo parallelogrammorū $\alpha\mu, \gamma\mu$ mediū proportionale est $\gamma\mu$. ergo, sicut dictum est in precedentibus, parallelo-

8. EVCLIDIS ELEMENTOR.

grammum μ est æquale paral-
lelogrammo κ : sed $\lambda \theta$ est æquale
ipfi κ , ipsum autem μ ipfi $\lambda \xi$. er-
go parallelogrammum $\lambda \kappa$ est æ-
quale gnomoni $\nu \phi \chi$, & quadra-
to $\nu \xi$, ergo reliquum $\alpha \beta$ est æqua-
le reliquo quadrato $\sigma \tau$, hoc est,



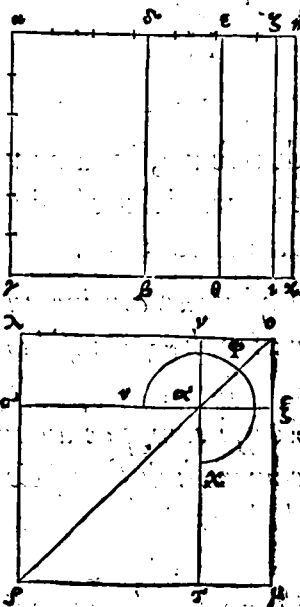
quadrato linea $\lambda \nu$: dico prater ea linea $\lambda \nu$ esse irratio-
nalem eam, quæ linea minor uocatur. Cum enim paral-
lelogrammum $\alpha \kappa$ sit rationale, & sit æquale quadratis
linearum $\lambda \theta, \theta \nu$, ergo compositum ex quadratis linea-
rum $\lambda \theta, \theta \nu$ erit rationale. Rursus cum $\lambda \kappa$ sit mediale, sitq;
æquale ei, quod fit bis ex $\lambda \theta, \theta \nu$, ergo id quod fit bis ex
 $\lambda \theta, \theta \nu$ est etiam mediale: & quoniam parallelogram-
mum $\alpha \kappa$ est incommensurable parallelogrammo $\nu \chi$, er-
go & eis æqualia quadrata linearum $\lambda \theta, \theta \nu$ sunt inco-
mensurable. ergo linea $\lambda \theta, \theta \nu$ sunt potentia incommē-
surabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarū
rationale: id uero quod fit bis ex ipsis mediale, quod est
cōmēsurabile ei, quod fit semel ex ipsis: ergo & quod fit
semel ex ipsis, erit etiā mediale. Ergo linea $\lambda \nu$ est irratio-
nalis, quæ uocatur linea minor & potest superficiē $\alpha \beta$.

Nonagesimumquintum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & resi-
duo quinto, linea quæ illam superficiē potest, est
ea, quæ dicitur cum rationali superficiē faciens to-
ram medialem.

Superficies enim $\alpha \beta$ contineatur ex linea rationali $\alpha \gamma$, &
residuo

residuo quinto $\alpha \lambda$. dico lineam, quæ illam superficiẽ po-
test, eam esse quæ dicitur faciens cum rationali superfi-
cie totam medialem: sit enim lineæ $\alpha \lambda$ iuncta lineæ $\lambda \nu$,
quæ erit longitudine cõmensurabilis lineæ rationali $\alpha \gamma$,
cætera erunt ut in præcedenti. Et quoniam lineæ $\alpha \lambda$ est
longitudine incommensurabi-
lis lineæ $\alpha \gamma$, & sunt ambæ ra-
tionales, ergo parallelogrammũ
 $\alpha \lambda$ erit mediale. Rursus quoniã
lineæ $\lambda \nu$ est rationalis, & lōgi-
tudine cõmẽsurabilis lineæ $\alpha \gamma$,
ergo $\lambda \nu$ erit rationale. Cõstrua-
tur quadratum $\lambda \mu$ æquale pa-
rallelogrammo $\alpha \lambda$, quadratum
uero $\nu \xi$ æquale ipsi $\lambda \nu$, ut in pro-
ximo, similiter demõstrabimus
lineam $\lambda \nu$ posse superficiem $\alpha \beta$:
dico præterea eam esse lineam,
quæ dicitur cum rationali su-
perficie faciens totam mediale:



cum enim $\alpha \lambda$ sit mediale, etiam illis æquale compositum
ex quadratis linearum $\lambda \theta$, $\theta \nu$, erit mediale. Rursus quia
 $\lambda \nu$ est rationale, ergo & illi æquale id, quod fit bis ex
 $\lambda \theta$, $\theta \nu$ erit etiam rationale, & quoniam lineæ $\alpha \lambda$ est lon-
gitudine incommẽsurabilis lineæ $\lambda \nu$, ergo per 1. 6 & 10
huius. parallelogrammum $\alpha \lambda$ erit incõmensurable pa-
rallelogrammo $\lambda \nu$, ergo & quadratũ lineæ $\lambda \theta$ erit in-
cõmensurable quadrato lineæ $\theta \nu$: ergo lineæ $\lambda \theta$, $\theta \nu$
sunt potentia incommensurabiles facientes compositum.

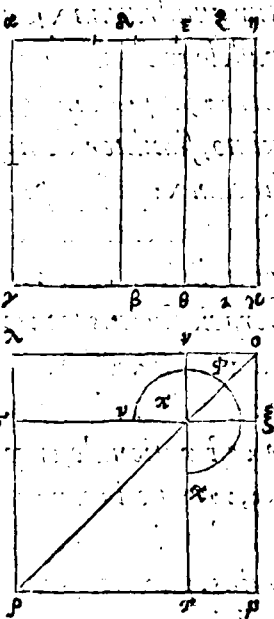
EVCLIDIS ELEMENTOR.

ex quadratis ipsarū mediale, id uero quod sit bis ex i-
pſis rationale. ergo reliqua linea λ , est irrationalis: nē-
pe ea quæ dicitur cum rationali superficie faciens totā
medialem, & potest superficiem $\alpha \beta$. Ergo linea potens
superficiem $\alpha \beta$ est linea, quæ dicitur cum rationali ſu-
perficie faciens totam medialem.

Nonagesimumſextum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & reſi-
duo ſexto, linea quæ illam superficiem potest, eſt
ea quæ dicitur faciens cum mediali superficie to-
tam medialem.

Superficies $\alpha \beta$ contineatur ex linea
rationali $\alpha \gamma$, et reſiduo ſexto $\alpha \delta$.
dico lineam quæ potest superficiē
 $\alpha \beta$ eſſe eam, quæ dicitur faciens
cum mediali superficie totā me-
dialem. Sit enim linea $\alpha \alpha$ linea
coniuncta $\alpha \nu$, & cætera ſiāt, ut
in præcedētibus: cum linea $\alpha \lambda$ ſit
longitudine incōmeſurabilis li-
nea $\lambda \nu$, ergo & parallelogram-
mum $\alpha \nu$ erit incommenſurabile
parallelogrammo $\lambda \nu$. Et quoniā
lineæ $\alpha \nu$, $\alpha \gamma$, ſunt rationales po-
tentia tantum commēſurabiles,
ergo parallelogrammum $\alpha \nu$ erit
mediale: ſimili ratione $\lambda \nu$ erit mediale. Cum igitur li-
neæ $\alpha \nu$, $\alpha \delta$ ſint potentia tantum commēſurabiles, er-
go



go sunt longitudine inter se incommensurabiles: sed sicut linea $\alpha\kappa$ ad $\kappa\lambda$, ita parallelogrammum $\alpha\kappa$ ad $\lambda\kappa$. ergo $\alpha\kappa$ erit incōmensurable ipsi $\lambda\kappa$. Construaturs eadē figura, quā in pracedentibus, similiter probabimus lineam λ , posse superficiē $\alpha\epsilon$: dico praterea eam esse, quā dicitur faciēs cum superficie mediali totam medialem: nam $\alpha\kappa$ est mediale, ergo & illi æquale compositū ex quadratis linearum $\lambda\theta, \theta\iota$ erit mediale. Rursus quoniā $\lambda\kappa$ est mediale, ergo & ei æquale, id quod fit bis ex $\lambda\theta, \theta\iota$ erit mediale. Et quoniam $\alpha\kappa$ est incommensurable ipsi $\lambda\kappa$, ergo & quadrata linearum $\lambda\theta, \theta\iota$ erunt incōmensurabilia ei, quod fit bis ex $\lambda\theta, \theta\iota$: & cum parallelogrammum $\alpha\iota$ fit incommensurable parallelogrammo $\lambda\kappa$, ergo etiam quadratum lineæ $\lambda\theta$ erit incommensurable quadrato lineæ $\theta\iota$. ergo lineæ $\lambda\theta, \theta\iota$ erunt potentia incommensurabiles, faciētes compositū ex quadratis linearum $\lambda\theta, \theta\iota$ mediale, & quod fit bis ex ipsis mediale: praterea compositum ex quadratis ipsarū incommensurable ei, quod fit bis ex ipsis. ergo linea λ , est irrationalis, quā dicitur cum mediali superficie faciēs totam mediale, & potest superficiem $\alpha\epsilon$. Ergo linea potens superficiem $\alpha\beta$ est ea, quā dicitur faciēs cum superficie mediali totam medialem.

Nonagesimumseptimum Theorema.

Quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus residuum primū.

Sit residuum $\alpha\epsilon$, rationalis uero linea $\gamma\lambda$: & quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale secundum lineam $\gamma\lambda$ applicetur paral-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

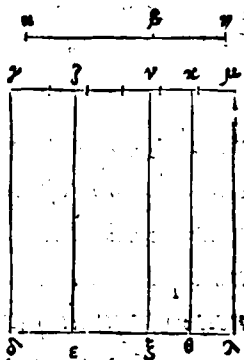
bila ei, quod fit bis ex α, μ . Est autē quadratis linearū
 α, μ ϵ aequale parallelogrammum $\gamma \lambda$: ei uero quod fit
bis ex α, μ ϵ aequale $\lambda \mu$, ergo $\gamma \lambda$ erit incommensurable
ipsi λ . ergo ϵ linea $\gamma \mu$ erit incommensurabilis longi-
tudine lineæ $\lambda \mu$: sunt autem amba rationales. ergo li-
neæ $\gamma \mu, \lambda \mu$ sunt rationales potentia tantum commensu-
rabiles, ϵ linea $\gamma \lambda$ est residuum per 73: disco prætereā
esse primum residuum. Cum enim quadrato linearum
 α, μ sit id quod fit ex α, μ ϵ medium proportio-
nale per lemma positum. post 53: sit autem quadrato li-
neæ α, μ aequale parallelogrammum $\gamma \theta$, ei uero quod fit
ex α, μ ϵ aequale $\gamma \lambda$: quadrato uero lineæ μ, β aequale $\kappa \lambda$.
ergo inter parallelogramma $\gamma \theta, \kappa \lambda$ medium proportio-
nale est $\gamma \lambda$. ergo sicut $\gamma \theta$ ad $\gamma \lambda$, ita $\gamma \lambda$ ad $\kappa \lambda$. Sed sicut $\gamma \theta$
ad $\gamma \lambda$, ita linea $\gamma \kappa$ ad lineam $\gamma \mu$: sicut autem $\gamma \theta$ ad $\kappa \lambda$,
ita linea $\gamma \mu$ ad lineam $\kappa \mu$. sicut ergo linea $\gamma \kappa$ ad lineam
 $\gamma \mu$, ita linea $\gamma \mu$ ad lineam $\kappa \mu$. ergo parallelogrammum
ex $\gamma \kappa, \kappa \mu$ est aequale quadrato $\gamma \mu$, hoc est quarta parti
quadrati lineæ $\gamma \mu$. Et quoniam quadratum lineæ α, μ est
commensurabile quadrato lineæ μ, β , ergo ϵ $\gamma \theta$ erit cō-
mensurable ipsi $\kappa \lambda$. sicut autem $\gamma \theta$ ad $\kappa \lambda$, ita linea $\gamma \kappa$
ad lineam $\kappa \mu$. ergo linea $\gamma \kappa$ erit longitudine commensu-
rabilis lineæ $\kappa \mu$. ergo per 18. linea $\gamma \mu$ plus potest, quā
linea $\lambda \mu$ quadrato lineæ sibi longitudine commensura-
bilis. Est autem linea $\gamma \mu$ longitudine commensurabilis
linea rationali $\gamma \lambda$, ergo linea $\gamma \lambda$ est residuum primum.
Ergo quadratum residui secundum lineam rationalem
applicatam facit alterum latus residuum primum.

Nonagesimumoctauum Theorema.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Quadratum residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum secundum.

Sit residuum mediale primum $\alpha\beta$, rationalis vero $\gamma\delta$: et quadrato linea $\alpha\epsilon$ aequale secundum lineam $\gamma\delta$ applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$, faciens alterum latus $\gamma\zeta$. dico lineam $\gamma\zeta$ esse residuum secundum. Sit enim linea $\alpha\epsilon$ linea convenienter iuncta $\beta\eta$, ergo linea $\alpha\eta$, $\beta\eta$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles



rationalis continentes. Et quadrato linea $\alpha\eta$ aequale secundum lineam $\gamma\delta$ applicetur $\gamma\theta$ faciens alterum latus $\gamma\lambda$: quadrato vero linea $\beta\eta$ aequale applicetur $\kappa\lambda$ faciens alterum latus $\kappa\mu$. totum ergo $\gamma\lambda$ est aequale ambobus quadratis linearum $\alpha\eta$, $\beta\eta$, quae sunt medialia inter se commensurabilia. ergo $\gamma\theta$ parallelogramma $\gamma\theta$, $\kappa\lambda$ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo per 16. totum $\gamma\lambda$ est utrique $\gamma\theta$, $\kappa\lambda$ commensurabile: ergo per corollarium 24. totum $\gamma\lambda$ est etiam mediale. ergo linea $\gamma\mu$ est rationalis longitudine incommensurabilis linea $\gamma\delta$ per 23. Et quoniam $\gamma\lambda$ est aequale quadratis linearum $\alpha\eta$, $\beta\eta$, quadrata vero linearum $\alpha\eta$, $\beta\eta$ sunt aequalia ei, quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\beta\eta$, et quadrato linea $\alpha\epsilon$ per 7. 2. quadrato vero linea $\alpha\beta$ est aequale parallelogrammum $\gamma\epsilon$: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\beta\eta$ est aequale residuo parallelogrammo $\zeta\lambda$: sed id quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\beta\eta$ est rationale, ergo $\zeta\lambda$ erit rationale, ergo linea $\zeta\mu$ est ratio-

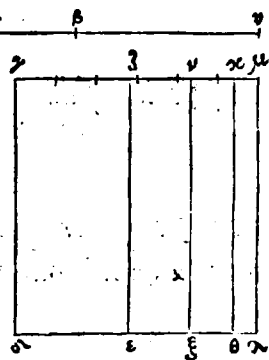
rationalis & longitudine cōmensurabilis linea γa per
21. Cum igitur parallelogrammum $\gamma \lambda$ sit mediale, pa-
rallelogrammum uero $\lambda \mu$ sit rationale, ergo sunt incō-
mēsurabilia: ergo & linea $\gamma \mu$ erit longitudine incom-
mēsurabilis linea $\lambda \mu$: & sunt amba rationales. ergo li-
nea $\gamma \lambda$ erit residuum. dico præterea esse residuū secun-
dum. Secetur enim linea $\lambda \mu$ bifariam & aequaliter in
puncto ν : à quo puncto parallela ad lineam γa ducatur
linea $\nu \xi$. ergo utrūq; ex $\lambda \xi$, $\nu \lambda$ est æquale parallelogrā-
mo ex $\alpha \nu$, $\nu \xi$. Et quoniam quadratorum linearum $\alpha \nu$,
 $\nu \xi$ medium proportionale est id quod sit ex $\alpha \nu$, $\nu \xi$, ergo
& parallelogrammorum $\gamma \theta$, $\lambda \lambda$ medium proportiona-
te est $\nu \lambda$. Sed sicut $\gamma \theta$ est ad $\nu \lambda$, ita linea $\gamma \lambda$ ad lineam $\nu \mu$:
sicut autem $\nu \lambda$ ad $\lambda \lambda$, ita linea $\nu \mu$ ad lineam $\lambda \mu$. sicut er-
go linea $\gamma \lambda$ ad lineam $\nu \mu$, ita linea $\nu \mu$ ad lineam $\lambda \mu$. er-
go parallelogrammum ex $\gamma \lambda$, $\lambda \mu$ est æquale quadrato li-
nearum $\nu \mu$, hoc est, quarta parti quadrati lineæ $\lambda \mu$. Sed pa-
rallelogrammum $\gamma \theta$ est commēsurabile ipsi $\lambda \lambda$, ergo &
linea $\gamma \lambda$ lineæ $\lambda \mu$ erit commensurabilis longitudine. er-
go per 18. linea $\gamma \mu$ plus potest, quàm linea $\lambda \mu$ quadrato
lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem linea
 $\lambda \mu$, quæ dicitur cōuenienter iuncta cōmensurabilis lon-
gitudine lineæ rationali γa , ergo linea $\gamma \lambda$ est residuū se-
cundum. Ergo quadratum residui medialis primi & c.

Nonagesimumnonum Theorema.

Quadratum residui medialis secundi secundum ra-
tionalem applicatum, facit alterum latus resi-
duum tertium.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Sit linea $\alpha\epsilon$ residuum mediale secundum, rationalis uero sit linea $\gamma\delta$: & quadrato linea $\alpha\beta$ aequale secundum lineam $\gamma\delta$ applicetur parallelogrammum $\gamma\lambda$ faciens alterum latus $\gamma\epsilon$: dico lineam $\gamma\epsilon$ esse residuum tertium. Sit enim linea $\alpha\beta$ linea conuenienter iuncta $\beta\eta$, ergo linea $\alpha\eta$, $\eta\beta$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles continentes mediale & cetera, ut in proximo theoremate. ergo linea $\gamma\mu$ est rationalis longitudine incommensurabilis linea rationali $\gamma\delta$: & utrumque ex $\epsilon\zeta$, $\epsilon\lambda$ est aequale ei, quod fit ex $\alpha\eta$, $\eta\epsilon$: sed id quod fit ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$ est mediale, ergo id quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\eta\epsilon$ est etiam mediale: ergo & totum $\epsilon\lambda$ est etiam mediale. Ergo linea $\epsilon\mu$ est rationalis & longitudine incommensurabilis linea $\gamma\delta$. Et quoniam linea $\alpha\eta$, $\eta\beta$ sunt longitudine incommensurabiles, ergo & quadratum linea $\alpha\eta$ erit incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$: sed quadrato linea $\alpha\eta$ sunt commensurabilia quadrata linearum $\alpha\eta$, $\eta\beta$: parallelogrammo uero ex $\alpha\eta$, $\eta\epsilon$ est commensurabile id, quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\eta\epsilon$: ergo quadrata linearum $\alpha\eta$, $\eta\beta$ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\eta\epsilon$. ergo & eis equalia parallelogramma $\gamma\lambda$, $\epsilon\lambda$ sunt incommensurabilia: ergo & linea $\gamma\mu$ erit longitudine incommensurabilis linea $\epsilon\mu$, & sunt amba rationales. ergo linea $\gamma\epsilon$ est residuum: dico praeterea esse residuum tertium. Cum enim sit commensurabile quadratum linea $\alpha\eta$, hoc est $\gamma\delta$, quadrato linea



$\beta\eta$,

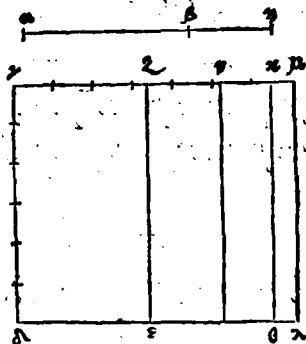
$\epsilon\mu$, hoc est parallelogrammum $\kappa\lambda$. ergo $\epsilon\gamma$ linea $\gamma\kappa$ erit longitudine commensurabilis lineæ $\kappa\mu$. Eadem ratione qua usus sumus in precedenti, probabitur parallelogrammum ex $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ esse æquale quadrato lineæ $\gamma\mu$, hoc est quarta parti quadrati lineæ $\gamma\mu$. Ergo linea $\gamma\mu$ poterit plus, quàm linea $\gamma\mu$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: ϵ neutra ex lineis $\gamma\mu$, $\gamma\mu$ est longitudine commensurabilis lineæ rationali $\gamma\lambda$. ergo linea $\gamma\gamma$ est residuum tertium. Ergo quadratum residui medialis secundi ϵ c.

Centesimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum quartum.

Sit linea minor $\alpha\epsilon$, rationalis ue-

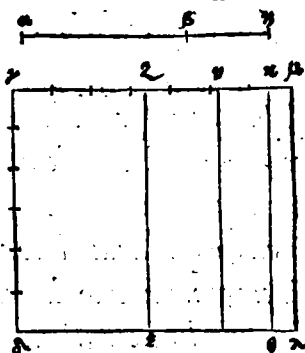
ro $\gamma\lambda$: secundum quam quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$, faciens alterum latus $\gamma\gamma$: dico lineam $\gamma\gamma$ esse residuum quartum. Sit enim lineæ $\alpha\mu$, $\mu\beta$ lineæ



conuenienter iuncta $\epsilon\mu$, ergo lineæ $\alpha\mu$, $\mu\beta$ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale, ϵ cætera sint ut in precedentibus: ergo totum parallelogrammum $\gamma\lambda$ erit rationale. ergo ϵ linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ $\gamma\lambda$. Et quoniam id quod fit bis ex $\alpha\mu$, $\mu\epsilon$ est mediale, ergo ϵ illi æquale parallelogrammum $\gamma\lambda$ erit mediale. ergo linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine incommen-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

surabilis linea $\gamma \delta$: sed linea $\gamma \mu$ est longitudine commensurabilis linea $\gamma \delta$. ergo per 13. uel 14. huius linea $\gamma \mu$ erit longitudine incommensurabilis linea $\gamma \delta$. sed sunt amba rationales, ergo linea $\gamma \mu, \gamma \delta, \delta \mu$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea $\gamma \delta$ erit residuum. dico prater ea esse residuum quartum. Cum enim linea $\alpha \beta, \alpha \epsilon$ sint potentia incommensurabiles, ergo & ipsarum quadrata, hoc est, illis aequalia parallelogramma $\gamma \theta, \alpha \lambda$ sunt incommensurabilia. ergo & linea $\gamma \kappa$ erit longitudine incommensurabilis linea $\alpha \mu$. Similiter ostendemus parallelogrammum ex $\gamma \kappa, \alpha \mu$ esse aequale quadrato linea $\gamma \mu$, hoc est, quartae parti quadrati linea $\gamma \mu$. ergo per 19. linea $\gamma \mu$ poterit plus, quam linea $\gamma \mu$ quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis: & est tota $\gamma \mu$ longitudine commensurabilis linea rationali $\gamma \delta$, ergo linea $\gamma \delta$ erit residuum quartum. Ergo quadratum linea minoris & c.

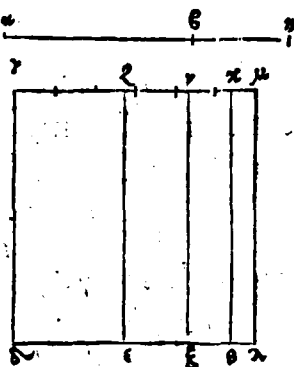


Centesimumprimum Theorema.

Quadratum linea cum rationali superficie facientis totam medialem secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum quintum.

Sit linea cum rationali superficie faciens totam medialem $\alpha \beta$ rationalis uero $\gamma \delta$, secundum quam quadrato linea $\alpha \beta$ aequale applicetur parallelogrammum $\gamma \theta$ faciens alterum latus $\gamma \delta$. dico lineam $\gamma \delta$ esse residuum quintum. Sit enim

enim linea $\alpha\beta$, linea conuenien-
ter iuncta $\epsilon\eta$. ergo linea $\alpha\eta$, $\beta\eta$
sunt potentia incömensurabiles
facientes compositum ex qua-
dratis ipsarum mediale: id ue-
ro quod fit ex ipsis rationale.
fiant enim omnia eo modo quo
in precedētibz, ergo totum $\gamma\lambda$
erit mediale. ergo linea $\gamma\mu$ erit



rationalis longitudine incommensurabilis linea $\gamma\alpha$. Et
utrumque ex parallelogrammis $\xi\zeta$, $\eta\lambda$ erit rationale, ergo
et totum $\lambda\delta$ erit etiam rationale. ergo et linea $\lambda\mu$ erit
rationalis longitudine cömensurabilis linea $\gamma\alpha$. Et quon-
iam $\gamma\lambda$ est mediale, parallelogrammum uero $\lambda\delta$ ratio-
nale, ergo $\gamma\lambda$, $\lambda\delta$ sunt incommensurabilia: et linea $\gamma\mu$
erit longitudine incommensurabilis linea $\lambda\mu$: et sunt
ambæ rationales, ergo linea $\gamma\mu$, $\lambda\mu$ sunt rationales po-
tentia tantum commensurabiles. ergo linea $\gamma\zeta$ est resi-
duum. dico præterea esse residuum quintum: similiter
enim probabimus parallelogrammum ex $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ esse aequa-
le quadrato linea $\gamma\mu$, hoc est, quarta parti quadrati li-
neæ $\lambda\mu$. Et quoniã quadratum linea $\alpha\eta$, hoc est, parallelo-
grammum $\gamma\theta$ est incömensurable quadrato $\epsilon\eta$, hoc est, pa-
rallelogrammo $\kappa\lambda$, ergo linea $\gamma\kappa$ erit longitudine incom-
mensurabilis linea $\kappa\mu$. ergo per 19 linea $\gamma\mu$ plus potest,
quàm linea $\lambda\mu$ quadrato linea sibi longitudine incom-
mensurabilis: et est conuenienter iuncta linea $\lambda\mu$ longi-
tudine cömensurabilis linea $\gamma\alpha$. ergo linea $\gamma\zeta$ est resi-
duum quintum. Ergo quadratum et c.

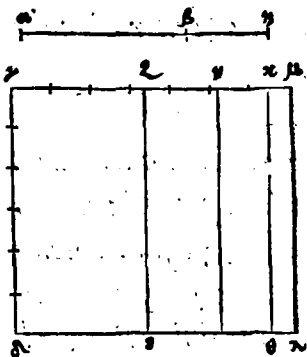
EVCLIDIS ELEMENTOR.

Centesimumsecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali superficie facientis totam medialem, secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum sextum.

Sit linea cum mediali superficie faciēs totam mediale $\alpha\epsilon$, rationalis uero $\gamma\lambda$, secundum quam quadratolinea $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$, faciens alterum latus $\gamma\zeta$. dico lineam $\gamma\zeta$ esse residuum sextum. Sit enim lineæ $\alpha\beta$ linea convenienter iuncta $\beta\epsilon$, ergo lineæ $\alpha\epsilon$, $\beta\epsilon$ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis mediale: præterea incommensurabile compositum ex quadratis ipsarum ei, quod fit ex ipsis, fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum $\gamma\lambda$ erit mediale (quia est æquale composito ex quadratis linearum $\alpha\epsilon$, $\beta\epsilon$, quod est mediale.) ergo linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ $\gamma\lambda$: similiter parallelogrammum $\zeta\lambda$ erit mediale. ergo $\epsilon\gamma$ linea $\zeta\mu$ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ $\gamma\lambda$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum $\alpha\epsilon$, $\beta\epsilon$ est incommensurabile ei, quod fit bis ex $\alpha\epsilon$, $\beta\epsilon$, ergo illis æqualia $\gamma\lambda$, $\zeta\lambda$ erunt incommensurabilia. ergo $\epsilon\gamma$ linea $\gamma\mu$, $\zeta\mu$ erunt longitudine incommensurabiles: sunt autem amba rationales, ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea $\gamma\zeta$ erit residuum: dico præterea esse residuum sextum, fiat cætera ut in superioribus. Et quoniam lineæ $\alpha\epsilon$, $\beta\epsilon$ sunt potentia incommensurabiles, ergo quadrata ipsarum sunt incommensurabilia, hoc est, illis

illis equalia $\gamma\theta, \kappa\lambda$. ergo Θ linea $\gamma\kappa$ linea $\kappa\mu$ erit longitudine incommensurabilis, sicut in superioribus demonstrabatur parallelogrammorum $\gamma\theta, \kappa\lambda$ esse medium proportionale $\gamma\lambda$. ergo per 19. linea $\gamma\mu$ plus poterit, quam linea $\mu\lambda$ quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ex ipsis $\gamma\mu, \lambda\mu$ est longitudine commensurabilis linea rationali $\gamma\lambda$. ergo linea $\gamma\lambda$ est residuum sextum. Ergo quadratum &c.



Centesimumtertium Theorema.

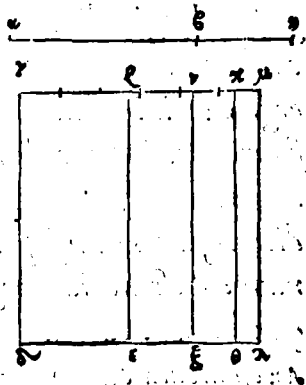
Linea residuo commensurabilis longitudine, est & ipsa residuum eiusdem ordinis.

Sit residuum $\alpha\beta$, cui sit linea commensurabilis longitudine $\gamma\lambda$. dico lineam $\gamma\lambda$ esse & ipsam residuam & ordinis eiusdem, cuius & residuum $\alpha\beta$. Cū enim linea $\alpha\epsilon$ sit residuum, sit linea ei convenienter iuncta $\epsilon\zeta$: ergo linea $\alpha\epsilon, \beta\zeta$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: sitq; sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\lambda$, ita linea $\beta\zeta$ ad lineam $\lambda\zeta$: ergo sicut unum ad unum, ita omnia ad omnia per 12. 5. Erit ergo sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\lambda$, ita tota linea $\alpha\epsilon$ ad totam lineam $\gamma\zeta$, & linea $\beta\zeta$ ad lineam $\lambda\zeta$. ergo per 10 huius, linea $\alpha\epsilon$ erit commensurabilis longitudine linea $\gamma\zeta$, & linea $\beta\zeta$ linea $\lambda\zeta$: sed linea $\alpha\epsilon$ est rationalis, ergo & linea $\gamma\zeta$ erit rationalis. similiter &

KK

EVCLIDIS ELEMENTOR.

lelogrammum $\gamma \nu$ faciēs alterū
 latus $\gamma \xi$, dico lineam $\gamma \lambda$ esse re-
 siduum primum. Sit enim linea
 $\alpha \beta$ linea cōueniēter iuncta $\beta \nu$,
 quae & eadem dicitur linea cō
 iuncta, ut in fine theorematīs
 79. ergo linea $\alpha \nu, \nu \beta$, sunt ra-
 tionales potentia tantum com-
 mensurabiles: & quadrato li-
 neae $\alpha \nu$ secundum lineam $\gamma \alpha$ applicetur parallelogram-
 mum $\gamma \theta$, quadrato uero lineae $\beta \nu$ aequale parallelogra-
 mmum $\kappa \lambda$: totum ergo $\gamma \lambda$ est aequale quadratis linearum
 $\alpha \nu, \nu \beta$: sed parallelogrammum $\gamma \nu$ est aequale quadrato
 lineae $\alpha \beta$, reliquum ergo $\lambda \nu$ est aequale ei, quod fit bis ex
 $\alpha \nu, \nu \beta$: quia quadrata linearum $\alpha \nu, \nu \beta$ sunt equalia ei,
 quod fit bis ex $\alpha \nu, \nu \beta$, & quadrato lineae $\alpha \beta$ per 72. Se-
 cetur linea $\lambda \nu$ bifariam & aequaliter in puncto ν , & à
 pūcto ν ducatur linea $\gamma \mu$ parallela lineae $\nu \xi$, ergo utrū-
 que ex parallelogramis $\gamma \xi, \nu \lambda$ est aequale ei, quod fit se-
 mel ex $\alpha \nu, \nu \beta$. Ex quoniam quadrata linearum $\alpha \nu, \nu \beta$
 sunt rationalia, quibus quadratis aequale est parallelo-
 grammum $\gamma \lambda$, ergo $\gamma \lambda$ est rationale. ergo linea $\gamma \mu$ est ra-
 tionalis longitudine commensurabilis lineae $\gamma \alpha$. Rursus
 quoniam id quod fit bis ex $\alpha \nu, \nu \beta$ est mediale, ergo & il-
 li aequale nempe parallelogrammum $\lambda \nu$, erit mediale.
 ergo linea $\lambda \nu$ est rationalis longitudine incommensu-
 rabilis lineae $\gamma \alpha$. Et quoniam quadrata linearum $\alpha \nu, \nu \beta$
 sunt rationalia, id uero quod fit bis ex $\alpha \nu, \nu \beta$ mediale,
 ergo quadrata linearum $\alpha \nu, \nu \beta$ sunt incommensura-
 bilia



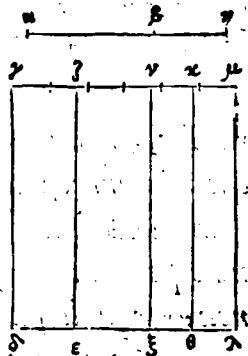
bilia ei, quod fit bis ex α, μ . Est autem quadratis linearum
 α, μ aequale parallelogrammum $\gamma \lambda$: ei vero quod fit
 bis ex α, μ aequale $\lambda \lambda$, ergo $\gamma \lambda$ erit incommensurable
 ipsi λ . ergo & linea $\gamma \mu$ erit incommensurable longi-
 tudine linea $\lambda \mu$: sunt autem amba rationales. ergo li-
 nea $\gamma \mu, \lambda \mu$ sunt rationales potentia tantum commensu-
 rabiles, & linea $\gamma \lambda$ est residuum per 73: dico praeterea
 esse primum residuum. Cum enim quadratorum linea-
 rum α, μ sit id quod fit ex α, μ medium proportio-
 nale per lemma positum. post 33: sit autem quadrato li-
 nea α, μ aequale parallelogrammum $\delta \theta$, ei vero quod fit
 ex α, μ aequale $\lambda \lambda$: quadrato vero linea μ, β aequale $\kappa \lambda$.
 ergo inter parallelogramma $\gamma \theta, \kappa \lambda$ medium proportio-
 nale est $\lambda \lambda$. ergo sicut $\gamma \theta$ ad $\kappa \lambda$, ita $\lambda \lambda$ ad $\kappa \lambda$. Sed sicut $\gamma \theta$
 ad $\lambda \lambda$, ita linea $\gamma \mu$ ad lineam $\lambda \mu$: sicut autem $\kappa \lambda$ ad $\kappa \lambda$,
 ita linea $\lambda \mu$ ad lineam $\kappa \mu$. sicut ergo linea $\gamma \mu$ ad lineam
 $\lambda \mu$, ita linea $\gamma \mu$ ad lineam $\kappa \mu$. ergo parallelogrammum
 ex $\gamma \mu, \kappa \mu$ est aequale quadrato $\lambda \mu$, hoc est quarta parti
 quadrati linea $\lambda \mu$. Et quoniam quadratum linea α, μ est
 commensurable quadrato linea μ, β , ergo & $\gamma \theta$ erit co-
 mensurable ipsi $\kappa \lambda$: sicut autem $\gamma \theta$ ad $\kappa \lambda$, ita linea $\gamma \mu$
 ad lineam $\kappa \mu$. ergo linea $\gamma \mu$ erit longitudine commensu-
 rabilis linea $\kappa \mu$. ergo per 18. linea $\gamma \mu$ plus potest, quam
 linea $\lambda \mu$ quadrato linea sibi longitudine commensura-
 bilis. Est autem linea $\gamma \mu$ longitudine commensurabilis
 linea rationali $\gamma \lambda$, ergo linea $\gamma \lambda$ est residuum primum.
 Ergo quadratum residui secundum lineam rationalem
 applicatum facit alterum latius residuum primum.

Nonagesimooctauum Theorema.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Quadratum residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum secundum.

Sit residuum mediale primum $\alpha\beta$, rationalis uero $\gamma\delta$: et quadrato linea $\alpha\epsilon$ aequale secundum lineam $\gamma\delta$ applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$, faciens alterum latus $\gamma\epsilon$. dico lineam $\gamma\epsilon$ esse residuum secundum. Sit enim linea $\alpha\epsilon$ linea conuenienter iuncta $\beta\eta$, ergo linea $\alpha\eta$, $\beta\eta$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles



rationalis continentes. Et quadrato linea $\alpha\eta$ aequale secundum lineam $\gamma\delta$ applicetur $\gamma\theta$ faciens alterum latus $\gamma\theta$: quadrato uero linea $\beta\eta$ aequale applicetur $\eta\lambda$ faciens alterum latus $\eta\lambda$. totum ergo $\gamma\lambda$ est aequale ambobus quadratis linearum $\alpha\eta$, $\beta\eta$, quae sunt mediale inter se commensurabilia: ergo $\gamma\theta$ parallelogrammum $\gamma\theta$, $\eta\lambda$ sunt mediale inter se commensurabilia: ergo per 16. totum $\gamma\lambda$ est utrique $\gamma\theta$, $\eta\lambda$ commensurabile: ergo per corollarium 24. totum $\gamma\lambda$ est etiam mediale. ergo linea $\gamma\mu$ est rationalis longitudine incommensurabilis linea $\gamma\delta$ per 23. Et quoniam $\gamma\lambda$ est aequale quadratis linearum $\alpha\eta$, $\beta\eta$, quadrata uero linearum $\alpha\eta$, $\beta\eta$ sunt aequalia ei, quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\beta\eta$, et quadrato linea $\alpha\epsilon$ per 7. 2. quadrato uero linea $\alpha\beta$ est aequale parallelogrammum $\gamma\epsilon$: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\beta\eta$ est aequale residuo parallelogrammo $\gamma\lambda$: sed id quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\beta\eta$ est rationale, ergo $\gamma\lambda$ erit rationale, ergo linea $\gamma\mu$ est ratio-

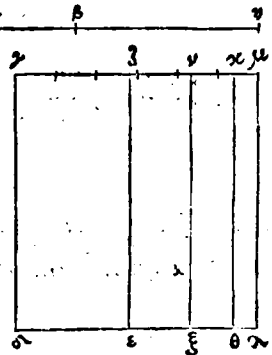
rationalis & longitudine cōmensurabilis linea $\gamma \alpha$ per
21. Cum igitur parallelogrammum $\gamma \lambda$ sit mediale, pa-
rallelogrammum uero $\lambda \kappa$ sit rationale, ergo sunt incō-
mēsurabilia: ergo & linea $\gamma \mu$ erit longitudine incom-
mēsurabilis linea $\lambda \mu$: & sunt ambæ rationales. ergo li-
nea $\gamma \lambda$ erit residuum. dico præterea esse residuū secun-
dum. Secetur enim linea $\lambda \mu$ bifariam & aequaliter in
puncto ν : à quo puncto parallela ad lineam $\gamma \alpha$ ducatur
linea $\nu \xi$. ergo utrūq; ex $\lambda \xi$, $\nu \kappa$ est æquale parallelogrā-
mo ex $\alpha \nu$, $\nu \xi$. Et quoniam quadratorum linearum $\alpha \nu$,
 $\nu \xi$ medium proportionale est id quod sit ex $\alpha \nu$, $\nu \xi$, ergo
& parallelogrammorum $\gamma \theta$, $\kappa \lambda$ medium proportiona-
te est $\nu \lambda$. Sed sicut $\gamma \theta$ est ad $\nu \lambda$, ita linea $\gamma \kappa$ ad lineam $\nu \mu$:
sicut autem $\nu \lambda$ ad $\kappa \lambda$, ita linea $\nu \mu$ ad lineam $\kappa \mu$. sicut er-
go linea $\gamma \kappa$ ad lineam $\nu \mu$, ita linea $\nu \mu$ ad lineam $\kappa \mu$. er-
go parallelogrammum ex $\gamma \kappa$, $\kappa \mu$ est æquale quadrato li-
neæ $\nu \mu$, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ $\lambda \mu$. Sed pa-
rallelogrammum $\gamma \theta$ est cōmēsurabile ipsi $\kappa \lambda$, ergo &
linea $\gamma \kappa$ linea $\kappa \mu$ erit cōmēsurabilis longitudine. er-
go per 18. linea $\gamma \mu$ plus porest, quàm linea $\lambda \mu$ quadrato
lineæ sibi longitudine cōmēsurabilis: est autem linea
 $\lambda \mu$, quæ dicitur cōuenienter iuncta cōmēsurabilis lon-
gitudine lineæ rationali $\gamma \alpha$, ergo linea $\gamma \lambda$ est residuū se-
cundum. Ergo quadratum residui medialis primi & c.

Nonagesimumnonum Theorema.

Quadratum residui medialis secundi secundum ra-
tionalem applicatum, facit alterum latus resi-
duum tertium.

EVCLIDIS ELEMENTOR.

Sit linea $\alpha\epsilon$ residuum mediale secundum, rationalis uero sit linea $\gamma\delta$: & quadrato linea $\alpha\beta$ aequale secundum lineam $\gamma\delta$ applicetur parallelogrammum $\gamma\lambda$ faciens alterum latus $\gamma\zeta$: dico lineam $\gamma\zeta$ esse residuum tertium. Sit enim linea $\alpha\beta$ linea convenienter iuncta $\beta\eta$, ergo linea $\alpha\eta$, $\eta\beta$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles continentes mediale & cetera, ut in proximo theoremate. ergo linea $\gamma\mu$ est rationalis longitudine incommensurabilis linea rationali $\gamma\delta$: & utrumque ex $\zeta\xi$, $\gamma\lambda$ est aequale ei, quod fit ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$: sed id quod fit ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$ est mediale, ergo id quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$ est etiam mediale: ergo & totum $\zeta\lambda$ est etiam mediale. Ergo linea $\zeta\mu$ est rationalis & longitudine incommensurabilis linea $\gamma\delta$. Et quoniam linea $\alpha\eta$, $\eta\beta$ sunt longitudine incommensurabiles, ergo & quadratum linea $\alpha\eta$ erit incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$: sed quadrato linea $\alpha\eta$ sunt commensurabilia quadrata linearum $\alpha\eta$, $\eta\beta$: parallelogrammo uero ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$ est commensurabile id, quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$: ergo quadrata linearum $\alpha\eta$, $\eta\beta$ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$. ergo & eis equalia parallelogramma $\gamma\lambda$, $\zeta\lambda$ sunt incommensurabilia: ergo & linea $\gamma\mu$ erit longitudine incommensurabilis linea $\zeta\mu$, & sunt amba rationales. ergo linea $\gamma\zeta$ est residuum: dico prater ea esse residuum tertium. Cum enim sit commensurabile quadratum linea $\alpha\eta$, hoc est $\gamma\delta$, quadrato linea



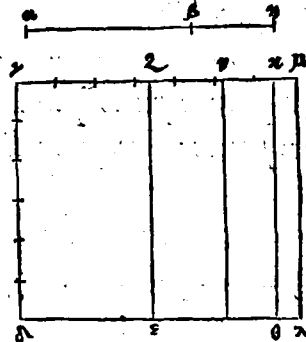
$\epsilon\lambda$, hoc est parallelogrammum $\kappa\lambda$. ergo $\epsilon\gamma$ linea $\gamma\kappa$ erit longitudine commensurabilis lineæ $\kappa\mu$. Eadem ratione qua usi sumus in præcedenti, probabitur parallelogrammum ex $\gamma\kappa, \kappa\mu$ esse æquale quadrato lineæ $\gamma\mu$, hoc est quarta parti quadrati lineæ $\gamma\mu$. Ergo linea $\gamma\mu$ poterit plus, quàm linea $\gamma\mu$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: ϵ neutra ex lineis $\gamma\mu, \gamma\mu$ est longitudine commensurabilis lineæ rationali $\gamma\lambda$. ergo linea $\gamma\gamma$ est residuum tertium. Ergo quadratum residui medialis secundi $\epsilon\gamma$ c.

Centesimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum quartum.

Sit linea minor $\alpha\epsilon$, rationalis ue

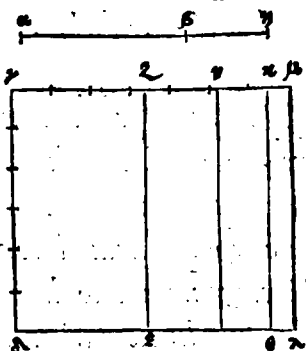
ro $\gamma\lambda$: secundum quam quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$, faciens alterum latus $\gamma\gamma$: dico lineam $\gamma\gamma$ esse residuum quartum. Sit enim lineæ $\alpha\beta$ lineæ



conuenienter iuncta $\epsilon\lambda$, ergo lineæ $\alpha\lambda, \beta\lambda$ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale, ϵ cætera sint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum $\gamma\lambda$ erit rationale. ergo $\epsilon\gamma$ linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ $\gamma\lambda$. Et quoniam id quod fit bis ex $\alpha\lambda, \lambda\epsilon$ est mediale, ergo ϵ illi æquale parallelogrammum $\gamma\lambda$ erit mediale. ergo linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine incommen-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

surabilis linea $\gamma \delta$: sed linea $\gamma \mu$ est longitudine commensurabilis linea $\gamma \delta$. ergo per 13. uel 14. huius linea $\gamma \mu$ erit longitudine incömensurabilis linea $\gamma \delta$. sed sunt amba rationales, ergo linea $\gamma \mu$ & $\gamma \delta$ sunt rationales potentia tantü cömensurabiles. ergo linea $\gamma \delta$ erit residuum. dico prater ea esse residuum quartum. Cü enim linea $\alpha \beta$ & $\gamma \delta$ sint potentia incommensurabiles, ergo & ipsarum quadrata, hoc est, illis aequalia parallelogramma $\gamma \theta$ & $\alpha \lambda$ sunt incömensurabilia. ergo & linea $\gamma \kappa$ erit longitudine incömensurabilis linea $\alpha \mu$. Similiter ostendemus parallelogrammum ex $\gamma \kappa$ & $\alpha \mu$ esse aequale quadrato linea $\gamma \mu$, hoc est, quarta parti quadrati linea $\gamma \mu$. ergo per 19. linea $\gamma \mu$ poterit plus, quàm linea $\gamma \mu$ quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis: & est tota $\gamma \mu$ longitudine commensurabilis linea rationali $\gamma \delta$, ergo linea $\gamma \delta$ erit residuum quartum. Ergo quadratü linea minoris & c.

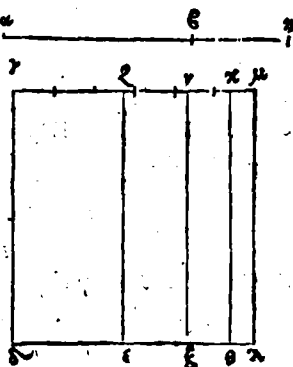


Centesiumprimum Theorema.

Quadratum linea cum rationali superficie facientis totam medialem secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum quintum.

Sit linea cum rationali superficie faciens totam medialem $\alpha \beta$ rationalis uero $\gamma \delta$, secundum quam quadrato linea $\alpha \beta$ aequale applicetur parallelogrammum $\gamma \theta$ faciens alterum latus $\gamma \delta$. dico lineam $\gamma \delta$ esse residuum quintum. Sit enim

enim linea $\alpha\beta$, linea conuenien-
 ter iuncta $\epsilon\mu$. ergo linea $\alpha\mu$, $\beta\mu$
 sunt potentia incömensurabiles
 facientes compositum ex qua-
 dratis ipsarum mediale: id ue-
 ro quod fit ex ipsis rationale.
 fiant enim omnia eo modo quo
 in precedētibz, ergo totum $\gamma\lambda$
 erit mediale. ergo linea $\gamma\mu$ erit
 rationalis longitudine incommensurabilis linea $\gamma\lambda$. Et
 utrūque ex parallelogrammis $\xi\zeta$, $\nu\lambda$ erit rationale, ergo
 et totum $\zeta\lambda$ erit etiam rationale. ergo et linea $\zeta\mu$ erit
 rationalis longitudine cömensurabilis linea $\gamma\lambda$. Et quao-
 niam $\gamma\lambda$ est mediale, parallelogrammum uero $\zeta\lambda$ ratio-
 nale, ergo $\gamma\lambda$, $\zeta\lambda$ sunt incommensurabilia: et linea $\gamma\mu$
 erit longitudine incommensurabilis linea $\zeta\mu$: et sunt
 ambe rationales, ergo linea $\gamma\mu$, $\zeta\mu$ sunt rationales po-
 tentia tantum commensurabiles. ergo linea $\gamma\zeta$ est resi-
 duum. dico præterea esse residuum quintum: similiter
 enim probabimus parallelogrammū ex $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ esse æqua-
 le quadrato linea $\nu\mu$, hoc est, quartæ parti quadrati li-
 neæ $\zeta\mu$. Et quoniā quadratū linea $\alpha\mu$, hoc est, parallelo-
 grammū $\gamma\theta$ est incömensurable quadrato $\epsilon\mu$, hoc est, pa-
 rallelogrammo $\kappa\lambda$, ergo linea $\gamma\kappa$ erit longitudine incom-
 mensurabilis linea $\kappa\mu$. ergo per 19 linea $\gamma\mu$ plus potest,
 quàm linea $\zeta\mu$ quadrato linea sibi longitudine incom-
 mensurabilis: et est conuenienter iuncta linea $\zeta\mu$ longi-
 tudine commensurabilis linea $\gamma\lambda$. ergo linea $\gamma\zeta$ est resi-
 duum quintum. Ergo quadratum $\epsilon\gamma$.



EVCLIDIS ELEMENTOR.

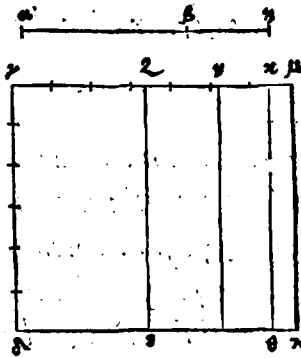
Centesimumsecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali superficie facientis totam medialem, secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum sextum.

Sit linea cum mediali superficie faciēs totum mediale $\alpha \epsilon$, rationalis uero $\gamma \lambda$, secundum quam quadrato linea $\alpha \epsilon$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma \iota$, faciens alterum latus $\gamma \zeta$. dico lineam $\gamma \zeta$ esse residuum sextum. Sit enim linea $\alpha \epsilon$ & linea conuenienter iuncta $\beta \nu$, ergo lineæ $\alpha \nu$, $\beta \nu$ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis mediale: præterea incommensurabile compositum ex quadratis ipsarum ei, quod fit ex ipsis. fiant cætera ut in precedentibus. ergo totum $\gamma \lambda$ erit mediale (quia est æquale composito ex quadratis linearum $\alpha \nu$, $\beta \nu$, quod est mediale.) ergo linea $\gamma \mu$ erit rationalis longitudine incommensurabilis linea $\gamma \lambda$: similiter parallelogrammum $\zeta \lambda$ erit mediale. ergo & linea $\zeta \mu$ erit rationalis longitudine incommensurabilis linea $\gamma \lambda$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum $\alpha \nu$, $\beta \nu$ est incommensurabile ei, quod fit bis ex $\alpha \nu$, $\beta \nu$, ergo illis æqualia $\gamma \lambda$, $\zeta \lambda$ erunt incommensurabilia. ergo & linea $\gamma \mu$, $\zeta \mu$ erunt longitudine incommensurabiles: sunt autem amba rationales, ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea $\gamma \zeta$ erit residuum: dico præterea esse residuum sextum. fiant cætera ut in superioribus. Et quoniam lineæ $\alpha \nu$, $\beta \nu$ sunt potentia incommensurabiles, ergo quadrata ipsarum sunt incommensurabilia, hoc est,

illis

illis equalia $\gamma\theta$, $\kappa\lambda$. ergo Θ linea γ & linea $\kappa\mu$ erit longitudine incommensurabilis, sicut in superioribus demonstrabatur parallelogrammorum $\gamma\theta$, $\kappa\lambda$ esse medium proportionale $\gamma\lambda$. ergo per 19. linea $\gamma\mu$ plus poterit, quam linea $\mu\lambda$ quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ex ipsis $\gamma\mu$, μ est longitudine commensurabilis linea rationali $\gamma\lambda$. ergo linea $\gamma\lambda$ est residuum sextum. Ergo quadratum &c.



Centesimum tertium Theorema.

Linea residuo commensurabilis longitudine, est & ipsa residuum eiusdem ordinis.

Sit residuum $\alpha\beta$, cui sit linea commensurabilis longitudine $\gamma\lambda$. dico lineam $\gamma\lambda$ esse & ipsam residuum & ordinis eiusdem, cuius & residuum $\alpha\beta$. Cū enim linea $\alpha\epsilon$ sit residuum, si linea ei convenienter iuncta ϵ : ergo linea $\alpha\epsilon$, $\beta\epsilon$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: sitq; sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\lambda$, ita linea $\beta\epsilon$ ad lineam $\lambda\zeta$: ergo sicut unum ad unum, ita omnia ad omnia per 12. 5. Erit ergo sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\lambda$, ita tota linea $\alpha\epsilon$ ad totam lineam $\gamma\zeta$, & linea $\beta\epsilon$ ad lineam $\lambda\zeta$. ergo per 10 huius, linea $\alpha\epsilon$ erit commensurabilis longitudine linea $\gamma\zeta$, & linea $\beta\epsilon$ linea $\lambda\zeta$: sed linea $\alpha\epsilon$ est rationalis, ergo & linea $\gamma\zeta$ erit rationalis. similiter &

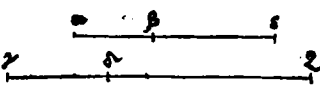
EVCLIDIS ELEMENTOR.

linea $\alpha\zeta$ erit rationalis, quia
 linea $\beta\iota$ cui ipsa est commen
 surabilis est etiam rationalis: sed quoniam est sicut linea
 $\beta\iota$ ad lineam $\alpha\iota$, ita linea $\alpha\zeta$ ad lineam $\gamma\zeta$, & linea $\beta\iota$,
 $\alpha\iota$ sunt potentia tantum commensurabiles, ergo & li-
 nea $\alpha\zeta$, $\gamma\zeta$ sunt potentia tantum commensurabiles. er-
 go linea $\gamma\alpha$ est residuum. dico præterea esse residuum eius-
 dem ordinis cuius & linea $\alpha\beta$. Cum enim sit ut modo
 diximus sicut linea $\alpha\iota$, ad lineam $\gamma\zeta$ ita linea $\beta\iota$ ad li-
 neam $\alpha\zeta$. ergo permutata proportionem sicut $\alpha\iota$ ad $\beta\iota$, ita
 $\gamma\zeta$ ad $\alpha\zeta$: linea autem $\alpha\iota$ potest plus quam linea $\iota\epsilon$, aut
 quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut
 quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si
 quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ergo
 & linea $\gamma\zeta$ potest plus quam linea $\alpha\zeta$ quadrato lineæ
 sibi longitudine commensurabilis per 15. Et quidem si li-
 nea $\alpha\iota$ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ
 rationali, cum linea $\alpha\iota$ sit longitudine commensurabilis
 lineæ $\gamma\zeta$. ergo per 12. etiam linea $\gamma\zeta$ erit longitudine cõ-
 mensurabilis propositæ rationali. ergo utraque linea $\alpha\beta$
 $\gamma\alpha$ erit residuum primũ. Quod si linea $\beta\iota$ est longitudi-
 ne commensurabilis lineæ propositæ rationali, cũ linea
 $\beta\iota$ sit longitudine commensurabilis lineæ $\alpha\zeta$. ergo linea
 $\alpha\zeta$ erit etiam longitudine cõmensurabilis propositæ ra-
 tionali: & tunc utraque linea $\alpha\beta$, $\gamma\alpha$ erit residuum se-
 cundũ. Quod si neutra ex lineis $\alpha\iota$, $\beta\iota$ erit longitudine
 commensurabilis propositæ rationali, neutra etiã ex li-
 neis $\gamma\zeta$, $\alpha\zeta$ erit propositæ rationali longitudine commen-
 surabilis per 13, uel 14 huius: & tunc utraque linea $\alpha\beta$,
 $\gamma\alpha$

γ Δ erit residuum tertium. Quòd si linea α plus potest quàm linea β quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis, similiter $\&$ linea γ plus poterit quàm linea Δ quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis per 15: $\&$ quidem si linea α erit longitudine commensurabilis linea rationali, similiter $\&$ linea γ erit eidem commensurabilis. $\&$ sic erit utraq; α β , γ Δ residuum quartum: si uero linea ϵ erit commensurabilis longitudine rationali, similiter $\&$ linea Δ , $\&$ sic erit utraque α β , γ Δ residuum quintum. si uero neutra ex lineis α , ϵ erit longitudine commensurabilis rationali, similiter neutra ex lineis γ Δ , Δ erit eidem commensurabilis: $\&$ sic erit utraque α β , γ Δ residuum sextum. Ergo linea γ Δ erit residuum eiusdē ordinis cuius $\&$ α β .

Centesimumquartum Theorema.

Linea commensurabilis residuo mediali, est & ipsa residuum mediale & eiusdem ordinis.

Sit residuum mediale α ϵ , cui sit
 commensurabilis longitudi- 
 ne $\&$ potentia, siue potentia tantum linea γ Δ . dico γ Δ
 esse residuum mediale $\&$ eiusdē ordinis. Cum enim α β
 sit residuum mediale, sit ei conuenienter iuncta β , ergo
 linea α , ϵ sunt mediales potentia tantum commensu-
 rabiles. Sit autē sicut α ϵ ad γ Δ , ita β ad Δ . simili ra-
 tione qua in pracedēti usi sumus, linea α erit longitu-
 dine $\&$ potentia, siue potentia tantum commensurabi-
 lis linea γ Δ , $\&$ linea β linea Δ . ergo per 24 linea γ Δ
 erit medialis: $\&$ linea Δ erit medialis, quia est cōmen-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

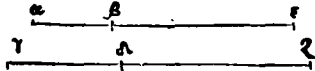
surabilis linea mediāli $\epsilon\iota$. si-
militer linea $\gamma\zeta$, $\Lambda\zeta$ erunt po-
tentia tantum commensurabiles: quia habent eandem
proportionem inter se, quam linea $\alpha\iota$, $\epsilon\iota$, *qua sunt inter*
se commensurabiles potentia tantum. ergo linea $\gamma\Lambda$ *est*
residuum mediale. dico praterea esse eiusdem ordinis cu-
ius $\epsilon\zeta$ $\alpha\epsilon$. Cum enim sit, sicut linea $\alpha\iota$ ad lineam $\beta\iota$, ita
linea $\gamma\zeta$ *ad lineam* $\Lambda\zeta$: sed sicut linea $\alpha\iota$ ad lineam $\beta\iota$,
ita quadratum linea $\alpha\iota$ *ad parallelogrammum ex* $\alpha\iota$,
 $\beta\iota$ *per* 1.6: sicut autem linea $\gamma\zeta$ ad lineam $\Lambda\zeta$, ita qua-
dratum linea $\gamma\zeta$ *ad parallelogrammum ex* $\gamma\zeta$, $\Lambda\zeta$. ergo
sicut quadratum linea $\alpha\iota$ *ad parallelogrammū ex* $\alpha\iota$,
 $\beta\iota$, *ita quadratum linea* $\gamma\zeta$ *ad parallelogrammum ex*
 $\gamma\zeta$, $\Lambda\zeta$. permutata ergo proportionē sicut quadratum li-
nea $\alpha\iota$ *ad quadratum linea* $\gamma\zeta$, *ita parallelogrammum*
ex $\alpha\iota$, $\beta\iota$ *ad parallelogrammū ex* $\gamma\zeta$, $\Lambda\zeta$. Sed quadra-
tum linea $\alpha\iota$ *est cōmēsurabile quadrato linea* $\gamma\zeta$ (quia
linea $\alpha\iota$ *est commensurabilis linea* $\gamma\zeta$). ergo $\epsilon\zeta$ *paralle-*
logrammum ex $\alpha\iota$, $\beta\iota$ *erit commensurabile parallelo-*
grammo ex $\gamma\zeta$, $\Lambda\zeta$. ergo si parallelogrammū ex $\alpha\iota$, $\beta\iota$
est rationale, etiam parallelogrammū ex $\gamma\zeta$, $\Lambda\zeta$ *erit ra-*
tionale: & tunc utraque linea $\alpha\beta$, $\gamma\Lambda$ *erit residuū me-*
diale primum. Si uero parallelogrammum ex $\alpha\iota$, $\epsilon\iota$ *erit*
mediale, etiam parallelogrammū ex $\gamma\zeta$, $\Lambda\zeta$ *erit media-*
le per corollarium 2.4: et tunc utraque linea $\alpha\beta$, $\gamma\Lambda$ *erit*
residuum mediale secundum. ergo linea $\gamma\Lambda$ *erit residuū*
mediale eiusdem ordinis. Hoc theorema cōceptū est uni-
versaliter, siue linea sit commēsurabilis longitudine &
potentia, siue potentia tantum residuo mediāli, esse &
ipsam

ipsam residuum mediale, & eiusdem ordinis. Idem dicendum de tribus proximis theorematibus.

Centesimumquintum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ minori, est & ipsa lineæ minor.

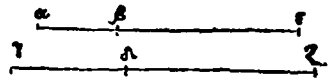
Sit linea minor $\alpha\beta$, cui sit commensurabilis $\gamma\lambda$. dico lineam $\gamma\lambda$ esse lineam minorem: si autem



enim eadem quæ in præcedentibus. quoniam lineæ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sunt potentia incommensurabiles, ergo & lineæ $\gamma\lambda$, $\lambda\zeta$ sunt potentia incommensurabiles per 22. 6. & 10 huius. Rursus per 22. 6 sicut quadratum lineæ $\alpha\beta$ ad quadratum lineæ $\beta\gamma$, ita quadratum lineæ $\gamma\lambda$ ad quadratum lineæ $\lambda\zeta$. cõiuncta ergo proportionem, sicut quadrata linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ad quadratum lineæ $\beta\gamma$, ita quadrata linearum $\gamma\lambda$, $\lambda\zeta$ ad quadratum lineæ $\lambda\zeta$: & permutata proportionem sicut quadrata linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ad quadrata linearum $\gamma\lambda$, $\lambda\zeta$, ita quadratum lineæ $\beta\gamma$ ad quadratum lineæ $\lambda\zeta$. sed quadratum lineæ $\beta\gamma$ est commensurabile quadrato lineæ $\lambda\zeta$ (quia lineæ $\beta\gamma$, $\lambda\zeta$ sunt cõmensurabiles.) ergo & compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ erit commensurabile composito ex quadratis linearum $\gamma\lambda$, $\lambda\zeta$: sed compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est rationale, ergo & compositum ex quadratis linearum $\gamma\lambda$, $\lambda\zeta$ erit rationale. Rursus cū sit sicut quadratum lineæ $\alpha\beta$ ad parallelogrammum ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ita quadratum lineæ $\gamma\lambda$ ad parallelogrammum ex $\gamma\lambda$, $\lambda\zeta$. (sicut diximus in proximo theoremate) permutata er-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

go proportionē sicut quadra-
tū lineæ $\alpha\iota$ ad quadratū li-
neæ $\gamma\zeta$, ita parallelogrammum



ex $\alpha\iota, \beta\iota$ ad parallelogrammū ex $\gamma\zeta, \delta\zeta$, sed quadratū li-
neæ $\alpha\iota$ est cōmensurable quadrato lineæ $\gamma\zeta$, quia lineæ
 $\alpha\iota, \gamma\zeta$ sunt cōmensurabiles, ergo & parallelogrammū ex
 $\alpha\iota, \beta\iota$ erit commensurable parallelogrammo ex $\gamma\zeta, \delta\zeta$.
sed parallelogrammū ex $\alpha\iota, \beta\iota$ est mediale, ergo & pa-
rallelogrammum ex $\gamma\zeta, \delta\zeta$ erit mediale. ergo lineæ $\gamma\zeta$,
 $\delta\zeta$ erunt potentia incommensurabiles facientes compo-
situm ex quadratis ipsarum rationale, parallelogrammū
vero ex ipsis mediale. Ergo lineæ $\gamma\delta$ erit lineæ minor.

Centesimum sextum Theorema.

Linea cōmensurabilis lineæ cum rationali super-
ficie facienti totam medialem, est & ipsa lineæ cū
rationali superficie faciens totam medialem.

Sit lineæ cum rationali superficie faciens totam medialem

$\alpha\epsilon$, cui sit cōmēsurabilis li-



neæ $\gamma\delta$. dico lineā $\gamma\delta$ esse cū



rationali superficie facientē totam medialem. Sit lineæ

$\alpha\beta$ lineæ conuenienter iuncta $\epsilon\iota$, ergo lineæ $\alpha\iota, \beta\iota$ sunt
potentia incommensurabiles facientes compositum ex
quadratis ipsarum mediale, parallelogrammū vero ex
ipsis rationale: fiant omnia quæ in præcedētibz. Simi-
liter quoque demonstrabimus sicut lineæ $\alpha\iota$ ad lineam
 $\epsilon\iota$, ita lineam $\gamma\zeta$ ad lineam $\delta\zeta$: & compositū ex qua-
dratis linearum $\alpha\iota, \beta\iota$ esse commensurable composito
ex quadratis linearum $\gamma\zeta, \delta\zeta$: id uero quod fit ex $\alpha\iota, \epsilon\iota$
esse

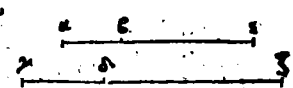
esse similiter commensurabile ei, quod fit ex $\gamma\delta, \alpha\delta$. quare & similiter linea $\gamma\delta, \alpha\delta$ erunt potentia incommensurabiles facientes ea qua linea $\alpha\epsilon, \beta\epsilon$. Ergo linea $\gamma\alpha$ erit etiam linea cū rationali superficie faciens totā mediale.

Centesimumseptimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ cum mediali superficie facienti totam medialem, commensurabilis est & ipsa cum mediali superficie faciens totam medialem.

Sit linea cum mediali superficie faciēs totam mediale $\alpha\beta$, cui sit commensurabilis $\gamma\alpha$. dico lineam $\gamma\alpha$ esse etiam lineam cum mediali superficie facientem totam mediale.

Sit enim linea $\alpha\epsilon$ & linea cōueniē

ter iuncta $\beta\epsilon$, & fiant cetera, 

ut in superioribus. ergo linea $\alpha\epsilon, \beta\epsilon$ sunt potentia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiā mediale: & compositum ex quadratis incommensurabile ei, quod fit ex ipsis. Sunt autē, ut antea demonstratum est linea $\alpha\epsilon, \beta\epsilon$ commensurabiles lineis $\gamma\delta, \alpha\delta$, & compositum ex quadratis ipsorum $\alpha\epsilon, \beta\epsilon$ commensurabile composito ex quadratis linearum $\gamma\delta, \alpha\delta$: id uero quod fit ex $\alpha\epsilon, \beta\epsilon$ cōmensurabile ei, quod fit ex $\gamma\delta, \alpha\delta$. ergo & linea $\gamma\delta, \alpha\delta$ sunt potentia incommensurabiles facientes cetera omnia qua linea $\alpha\epsilon, \beta\epsilon$. Ergo linea $\gamma\alpha$ est cum mediali superficie faciens totam medialem.

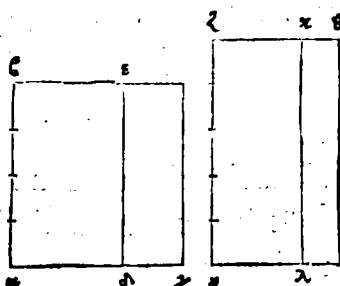
Centesimumoctauum Theorema.

Si de superficie rationali detrahatur superficies me-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

dialis, linea quæ reliquam superficiem potest, est alterutra ex duabus irrationalibus, aut residuum aut linea minor.

De superficie rationali $\beta\gamma$ detrahatur superficies medialis $\beta\alpha$. dico lineam quæ reliquam superficiem $\alpha\gamma$ potest, esse alterutram ex duabus irrationalibus, aut residuum aut lineam minorem. Sit enim



linea rationalis $\zeta\kappa$, secundum quam æqualis superficiem $\beta\gamma$ applicetur superficies rectangula parallelogramma $\alpha\theta$: superficiem uero $\beta\alpha$ æqualis applicetur superficies parallelogrammo $\alpha\kappa$. reliquum ergo parallelogrammum $\alpha\gamma$ est æquale reliquo parallelogrammo $\alpha\theta$. Cum igitur $\beta\gamma$ sit rationale, ipsum uero $\beta\alpha$ sit mediale, ergo $\alpha\theta$ $\alpha\kappa$ erit rationale: ipsum uero $\alpha\kappa$ mediale. ergo $\alpha\theta$ linea $\zeta\theta$ erit rationalis longitudine commensurabilis ipsi $\zeta\kappa$ per 21: linea uero $\zeta\kappa$ erit rationalis longitudine incommensurabilis eidem lineæ $\zeta\kappa$ per 23. ergo linea $\zeta\theta$ erit longitudine incommensurabilis lineæ $\zeta\kappa$ per 13. ergo linea $\zeta\theta$ $\zeta\kappa$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: ergo linea $\kappa\theta$ erit residuum, ipsi uero convenienter iuncta linea $\kappa\zeta$: linea autem $\zeta\theta$ plus potest, quàm linea $\zeta\kappa$, aut quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Possit prius quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cum sit tota $\zeta\theta$ longitudine commensurabilis lineæ rationali $\zeta\kappa$. ergo linea $\kappa\theta$ est residuum primum.

ergo

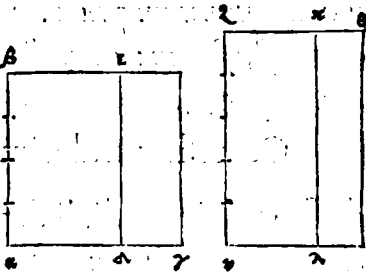
ergo per 91 linea potens parallelogrammum $\lambda \theta$, hoc est γ est residuum. Quod si linea $z \theta$ plus possit quā linea $z \kappa$ quadrato linea sibi longitudine incommensurabilis, cum linea $z \theta$ sit commensurabilis longitudine linea rationali $z \kappa$, ergo linea $\kappa \theta$ erit residuum quartum. Ergo per 94 linea potens superficiem $\lambda \theta$, hoc est γ est linea minor.

Centesimumnonum Theoremā.

Si de superficie mediali detrahatur superficies rationalis, aliæ duæ irrationales fiunt, aut residuum mediale primum, aut cum rationali superficie faciens totam medialem.

De superficie mediali $\beta \gamma$ detrahatur rationalis superficies

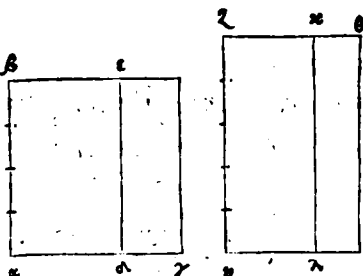
$\beta \delta$, dico lineā quæ potest superficiem reliquā γ esse β alterutram duarum irrationaliū, uel residuum mediale primum, uel cum rationali superficie faciētem totā medialem. Sit ratio



nalī lineæ $z \kappa$, secundū quam applicentur superficies, ut in proximo dictum est: erit similiter linea $z \theta$ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ $z \kappa$: linea uerò $\kappa \theta$ erit rationalis longitudine commensurabilis eidem $z \kappa$: & lineæ $z \theta$, $z \kappa$ rationales. erunt potentia tantum commensurabiles. ergo linea $\kappa \theta$ erit residuum: illi uerò conuenienter iuncta linea $z \kappa$. Linea autem $z \theta$ plus potest quā linea $z \kappa$, uel quadrato linea sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato linea sibi longitudine incō-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

mensurabilis. Et quidem si
linea $z\theta$ plus potest quàm β
linea $z\kappa$ quadrato linea si
bi longitudine commensu-
rabilis, cū linea cōuenien-
ter iuncta $z\kappa$ sit longitudi-
ne commensurabilis linea



rationali $z\kappa$, ergo linea $z\theta$ erit residuum secūdum: qua-
re linea quæ superficiem $\lambda\theta$, hoc est $\epsilon\gamma$ potest, est residuū
mediale primū per 92. Quòd si linea $z\theta$ plus potest quā
linea $z\kappa$ quadrato linea sibi longitudine incommensu-
rabilis, cum linea conuenienter iuncta sit longitudine
commensurabilis linea rationali $z\kappa$, ergo linea $z\theta$ erit re-
siduum quintum: quare linea quæ superficiē $\lambda\theta$, hoc est,
 $\epsilon\gamma$ potest, est cum rationali superficie faciens totam me-
dialem per 95.

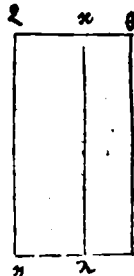
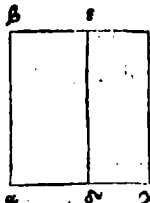
Centesimumdecimum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies me-
dialis, quæ sit incōmensurabilis toti, reliquæ duæ
fiunt irrationales, aut residuum mediale secun-
dum, aut cum mediali superficie faciens totam
medialem.

Sicut in præcedentibus descriptionibus, hīc quoque detra-
hatur de superficie mediali $\beta\gamma$ superficies medialis $\beta\alpha$:
quæ $\epsilon\alpha$ sit incommensurabilis toti $\beta\gamma$. dico lineam quæ
potest superficiem $\epsilon\gamma$, esse alterutram duarū irrationa-
lium, uel residuum mediale secundū, uel cum mediali su-
perficie facientem totam medialem. Cum enim utraque
superficies

superficies $\epsilon\gamma$, $\epsilon\alpha$ sit medialis,
ergo utraque linea $\zeta\theta$, $\zeta\kappa$ est
rationalis, & rationali $\zeta\iota$ lon-
gitudine incommensurabilis.

Est autē superficies $\beta\gamma$, hoc est
 $\iota\theta$ incommensurabilis ipsi $\beta\alpha$,
hoc est $\iota\kappa$. ergo lineæ $\zeta\theta$, $\zeta\kappa$ sūt



incommensurabiles: ergo sunt rationales potentia tan-
tum commensurabiles. ergo linea $\iota\theta$ erit residuum: ipsi
uero conuenienter iuncta, $\zeta\kappa$. linea autem $\zeta\theta$ plus potest
quàm linea $\zeta\kappa$, uel quadrato lineæ sibi longitudine com-
mensurabilis, uel lineæ sibi longitudine incommensura-
bilis. Et quidē si linea $\zeta\theta$ plus potest, quàm $\zeta\kappa$ quadrato
lineæ sibi longitudine commensurabilis. cum neutra ex
 $\zeta\theta$, $\zeta\kappa$ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali $\zeta\iota$,
ergo linea $\iota\theta$ erit residuum tertium. ergo per 93. linea
quæ potest superficiem $\lambda\theta$, hoc est $\iota\gamma$ erit residuum me-
diale secundū. Quod si linea $\zeta\theta$ plus potest quàm linea
 $\zeta\kappa$ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis,
cum neutra ex $\zeta\theta$, $\zeta\kappa$ sit longitudine commensurabilis
ipsi rationali $\zeta\iota$, ergo linea $\iota\theta$ erit residuum sextū. Er-
go per 96 linea quæ superficiem $\lambda\theta$, hoc est $\iota\gamma$ potest, erit
cum mediali superficie faciens totam medialem.

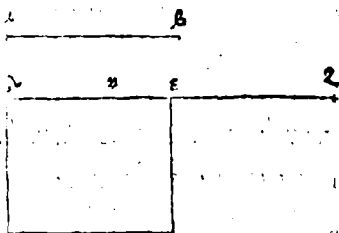
Centesimumundecimum Theorema.

Linea quæ residuum dicitur, non est eadem cum ea
quæ dicitur binomium.

Sit residuum $\alpha\epsilon$, dico $\alpha\beta$ non esse idem cum binomio. Nam
si esse potest, est. Sitq; linea rationalis $\alpha\gamma$, secundum quam

EVCLIDIS ELEMENTOR.

aequale quadrato linea $\alpha \beta$
 applicetur parallelogram-
 mum rectangulū γ faciens
 alterū latus $\alpha \epsilon$. cum linea
 $\alpha \beta$ sit residuum, ergo linea
 $\alpha \epsilon$ erit residuum primū per
 97. Sit ipsi cōuenienter iun-



cta $\epsilon \zeta$, ergo linea $\alpha \zeta, \zeta$ sunt rationales potentia tantū
 commēsurabiles, & linea $\alpha \zeta$ plus potest quā linea $\epsilon \zeta$
 quadrato linea sibi longitudine cōmensurabilis: & $\alpha \zeta$
 est longitudine cōmensurabilis rationali $\gamma \alpha$. Rursus per
 positionem linea $\alpha \beta$ est binomium, ergo linea $\alpha \epsilon$ est bi-
 nomium primum per 60. Diuidatur in sua nomina in
 puncto ν : sitq; maius nomē $\alpha \nu$, ergo linea $\alpha \nu, \nu$ sunt ra-
 tionales potentia tantum commēsurabiles, & linea $\alpha \nu$
 plus potest quā linea ν quadrato linea sibi longitu-
 dine commensurabilis, eademq; linea $\alpha \nu$ est longitudine
 commensurabilis rationali $\gamma \alpha$. Ergo per 12 linea $\alpha \nu, \nu$
 sunt longitudine commensurabiles: ergo & reliqua li-
 nea $\nu \zeta$ erit longitudine commensurabilis toti $\alpha \zeta$ per 16,
 aut per corollarium eiusdem. Cum igitur linea $\alpha \zeta$ sit cō-
 mensurabilis linea $\zeta \nu$, sit autem linea $\alpha \zeta$ rationalis, ra-
 tionalis quoque erit $\zeta \nu$. Cum autem linea $\alpha \zeta$ sit longitu-
 dine commensurabilis linea $\zeta \nu$: sit autem linea $\alpha \zeta$ lon-
 gitudine incommensurabilis linea $\epsilon \zeta$, ergo per 14 linea
 $\zeta \nu, \epsilon \zeta$ sunt longitudine incommensurabiles. Sunt autem
 amba rationales, ergo linea $\zeta \nu, \epsilon \zeta$ sunt rationales poten-
 tia tantum commēsurabiles. ergo linea $\alpha \epsilon$ erit residuū:
 sed est rationalis ut modo conclusum est: hoc autem est
 impossibile

impossibile, eandē scilicet lineam esse rationalem & irrationalem, ergo residuum nō erit idem quod binomiū. Linea quæ residuū dicitur, & ceteræ quinque eam consequentes irrationales, neque lineæ mediali neque sibi ipsæ inter se sunt eadem. Nam quadratū lineæ medialis secundum rationalem applicatum, facit alterum latus rationalem lineam longitudine incommensurabilem ei, secundum quam applicatur per 23. quadratū uerò residui secundum rationalem applicatum, facit alterū latus residuum primum per 97. quadratum uerò residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum secundum per 98. quadratum uerò residui medialis secundi, facit alterum latus residuum tertium per 99. quadratum uerò lineæ minoris, facit alterum latus residuum quartum per 100. quadratum uerò lineæ cum rationali superficie facientis totam medialem, facit alterum latus residuum quintum per 101. quadratum uerò lineæ cum mediali superficie facientis totam medialem secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum sextum per 102. Cum igitur dicta latera quæ sunt latitudines cuiusque parallelogrammi unicuique quadrato equalis & secundum rationalem applicati differāt, & à primo latere & ipsa inter se; (nam à primo differunt, quoniam est rationalis linea: inter se uero differūt, quoniam sunt residua non eiusdem ordinis) constat ipsas quoque lineas irrationales inter se differentes esse. Et quoniam demonstratum est residuum non esse idem quod binomiū: quadrata autem residui & quinque linearum irrationa-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

lium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciunt altera latera ex residuis eiusdem ordinis, cuius sunt & residua, quorū quadrata applicantur rationali: similiter & quadrata binomij & quinque linearum irrationalium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciūt altera latera ex binomij eiusdem ordinis, cuius sunt & binomia, quorū quadrata applicantur rationali. ergo lineæ irrationales quæ consequuntur binomium, & quæ consequuntur residuū, sunt inter se differentes. Quare dictæ lineæ omnes irrationales sunt numero 13.

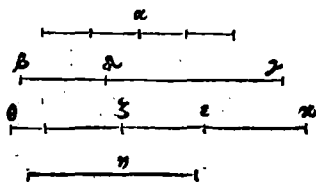
1. Medialis.	10. Residuū mediale secundum.
2. Binomium.	11. Minor.
3. Bimediale primum.	12. Faciens cum rationali superficie totam medialem.
4. Bimediale secundum.	13. Faciens cum mediali superficie totam medialem.
5. Maior.	
6. Potens rationale & mediale	
7. Potens duo medialis.	
8. Residuū.	
9. Residuū mediale primum.	

Centesimunduodecimum Theorema.

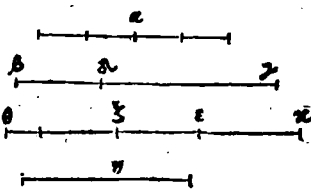
Quadratum, lineæ rationalis secundum binomium applicatum facit alterum latus residuū, cuius nomina sunt commensurabilia binomij nominibus, & in eadem proportionē: præterea id quod fit residuū, eundē ordinem retinet quem binomium.

Sit lineæ rationalis α , binominum $\beta \gamma$, cuius maius nomen sit γ : & quadrato lineæ α sit æquale parallelogrammum
ex

ex $\beta\gamma$, & $\gamma\delta$. dico lineam $\epsilon\zeta$ esse residuū, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius binomij $\beta\gamma$, quæ nomina sunt $\gamma\delta$, & $\delta\epsilon$: & in eadem proportionē præterea lineam $\epsilon\zeta$ eundē ordinem & locū tenet inter residua, quæ binomium $\epsilon\gamma$ retinet inter binomia. Sit rursus quadrato lineæ α æquale parallelogrammum ex $\epsilon\delta$, & $\delta\epsilon$. Cum igitur parallelogrammum ex $\epsilon\gamma$, & $\gamma\delta$ sit æquale parallelogrammo ex $\epsilon\delta$, & $\delta\epsilon$, cum utrunq; sit æquale quadrato lineæ α , est igitur sicut lineæ $\gamma\beta$ ad lineam $\epsilon\delta$, ita lineæ $\delta\epsilon$ ad lineam $\epsilon\zeta$ per 14.6. sed $\gamma\epsilon$ est maior quàm $\beta\delta$, ergo & $\delta\epsilon$ erit maior quàm $\epsilon\zeta$. Sit lineæ $\theta\kappa$ æqualis lineæ α . est ergo sicut $\gamma\beta$ ad $\gamma\delta$, ita $\theta\epsilon$ ad $\epsilon\zeta$ per 7.5. ergo disiuncta proportionē per 17.5. sicut $\gamma\delta$ ad $\beta\delta$, ita $\theta\epsilon$ ad $\zeta\epsilon$. fiat sicut $\theta\zeta$ ad $\zeta\epsilon$, ita $\zeta\kappa$ ad $\epsilon\kappa$, (quod quæadmodum fiat dicemus ad finem demonstrationis.) ergo per 12.5. sicut lineæ $\zeta\kappa$ ad lineam $\epsilon\kappa$, ita tota lineæ $\theta\kappa$ ad totā $\zeta\kappa$. Sed sicut $\zeta\kappa$ ad $\epsilon\kappa$, ita est $\gamma\delta$ ad $\delta\epsilon$: (quia $\zeta\kappa$ est ad $\epsilon\kappa$ sicut $\theta\zeta$ ad $\zeta\epsilon$, & $\theta\zeta$ ad $\zeta\epsilon$ est sicut $\gamma\delta$ ad $\delta\epsilon$.) ergo sicut lineæ $\theta\kappa$ ad $\zeta\kappa$, ita $\gamma\delta$ ad $\delta\epsilon$. sed quadratum lineæ $\gamma\delta$ est commensurabile quadrato lineæ $\delta\epsilon$, ergo & quadratum lineæ $\theta\kappa$ quadrato lineæ $\zeta\kappa$ erit commensurabile per 22.6 & 10 huius. Sed tres lineæ $\theta\kappa$, $\zeta\kappa$, & $\epsilon\kappa$ sunt proportionales in continua proportionē: (ut modo dictum est.) ergo per secundum corollarium 20.6 quadratum lineæ $\theta\kappa$ erit ad quadratū lineæ $\zeta\kappa$, sicut lineæ $\theta\kappa$ ad lineam $\epsilon\kappa$. ergo lineæ $\theta\kappa$ erit longitudine commensurabilis lineæ $\epsilon\kappa$: quare per 16 lineæ $\theta\epsilon$ erit longitudo-



ne commensurabilis linea ϵ κ . Et
 quoniam quadratū linea α est
 aequale parallelogramo ex θ ι ,
 & α , & quadratum linea α est
 rationale, ergo & parallelo-



grammū ex θ ι , & α erit rationale. ergo per. 21 linea θ ι
 erit rationalis & longitudine cōmensurabilis linea ϵ κ .
 quare & linea ϵ κ , quæ est ipsi θ ι longitudine commēsu-
 rabilis, erit etiam rationalis & longitudine commēsu-
 rabilis ipsi β α . Cum igitur sit sicut linea γ α ad α ϵ , ita
 ϵ κ ad ϵ κ : (quia supra dictum est, sicut γ α ad α β , ita θ ι
 ad ϵ κ , & sicut θ ι ad ϵ κ , ita ϵ κ ad ϵ κ), linea uero γ α , α β
 sint potentia tantum commensurabiles, ergo & linea
 ϵ κ , ϵ κ erunt potentia tantum commensurabiles. Et cum
 sit sicut γ α ad α β , ita ϵ κ ad ϵ κ , ergo cōversa propor-
 tione sicut α β ad ϵ κ , ita γ α ad ϵ κ : & permutata propor-
 tione sicut α β ad ϵ κ , ita γ α ad ϵ κ : sed linea α β , ϵ κ sunt
 longitudine commensurabiles, (ut modo probatum est)
 ergo & linea γ α , ϵ κ sunt longitudine commēsurabiles:
 sed linea γ α , est rationalis, ergo & linea ϵ κ erit etiam
 rationalis: ergo linea ϵ κ , ϵ κ sunt rationales potētia tan-
 tam commēsurabiles. ergo linea ϵ κ erit residuum, cuius
 nomina sunt commensurabilia nominibus binomij &
 in eadem proportionē dico præterea illud residuum esse
 eiusdem ordinis cuius & binomij. Nam linea γ α plus
 potest, quàm linea β α aut quadrato linea sibi longitu-
 dine commensurabilis, aut linea incommensurabilis: &
 quidem si linea γ α plus potest, quàm β α quadrato li-
 nea sibi longitudine commēsurabilis, similiter & linea

z x plus poterit quàm linea ϵ x quadrato linea sibi com-
 mensurabilis longitudine per 15. Et quidẽ si linea γ α est
 longitudine commensurabilis linea rationali, cum modo
 probatum sit lineas γ α , z x esse longitudine commensu-
 rabiles, ergo per 12 etiam linea z x erit longitudine com-
 mensurabilis linea rationali: tunc igitur linea β γ erit
 binomium primum, similiter $\&$ linea z ϵ erit residuum
 primũ. Quòd si linea ϵ α fuerit longitudine commensu-
 rabilis linea rationali, similiter $\&$ linea ϵ x erit eidẽ cõ-
 mensurabilis: tunc ergo linea β γ erit binomium secun-
 dum, $\&$ linea z ϵ residuum secundum. Quòd si neutra
 ex γ α , α β fuerit rationali commensurabilis, similiter
 neutra ex z x , ϵ x erit eidem commensurabilis, tunc erit
 linea β γ binomium tertium, $\&$ linea z ϵ residuum ter-
 tium. Quòd si linea γ α plus potest quàm linea β α qua-
 drato linea sibi longitudine incommensurabilis, simi-
 liter $\&$ linea z x plus poterit quàm ϵ x quadrato li-
 nea sibi longitudine incommensurabilis per 15. Et qui-
 dem si linea γ α fuerit longitudine commensurabilis li-
 nea rationali, etiam linea z x erit eidem commensura-
 bilis, tunc erit linea β γ binomium quartum, $\&$ linea
 z ϵ residuum quartum. Quòd si linea β α fuerit ratio-
 nali commensurabilis, similiter $\&$ linea ϵ x erit eidem
 commensurabilis, tunc linea β γ erit binomium quintũ:
 $\&$ linea z ϵ residuũ quintũ. Quòd si neutra ex γ α , β α
 erit rationali commensurabilis, similiter neutra ex z x ,
 ϵ x erit eidem commensurabilis, tunc linea β γ erit bino-
 mium sextum, $\&$ linea z ϵ residuum sextum. Ergo linea
 z ϵ erit residuum, cuius nomina, nempe z x , ϵ x sunt com-

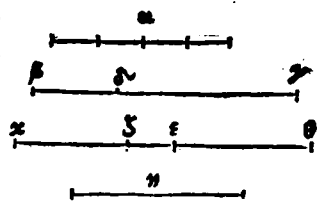
EVCLIDIS ELEMENTOR.

*mensurabilia nominibus binomij $\epsilon \gamma$, nominibus inquā
 $\gamma \lambda, \lambda \beta$: & sunt in eadem proportionē, & habent eun-
 dem ordinem & locum inter residua quem binomium
 inter binomia. Nunc illud dicamus quomodo fiat sicut
 linea $\theta \zeta$ ad lineam $\zeta \iota$, ita li-
 nea $\zeta \kappa$ ad lineam $\iota \kappa$. linea
 $\gamma \lambda$ est maior linea $\beta \lambda$. ergo
 & linea $\theta \zeta$ erit maior linea $\zeta \iota$. Detrahatur de linea $\theta \zeta$
 equalis linea $\zeta \lambda$, quæ sit $\zeta \lambda$ per 3.1. Et reliqua sit $\theta \lambda$. ergo
 linea $\theta \lambda$ erit minor quam linea $\theta \zeta$, quia $\theta \zeta$ est equalis li-
 neis $\theta \lambda, \lambda \zeta$. fiat sicut $\theta \lambda$, ad $\theta \zeta$, ita $\zeta \iota$ ad $\zeta \kappa$ per 12.6: ergo
 per conuersam proportionem sicut $\theta \zeta$ ad $\theta \lambda$, ita $\zeta \kappa$ ad
 $\zeta \iota$. Ergo per euerſam proportionem sicut linea $\theta \zeta$ ad $\lambda \zeta$.
 hoc est ad ei æqualem $\zeta \iota$, ita linea $\zeta \kappa$ ad $\iota \kappa$.*

Centesimum decimum tertium Theorema.

*Quadratum lineæ rationalis secundum residuum
 applicatum, facit alterum latus binomium, cuius
 nomina sunt commensurabilia nominibus resi-
 dui & in eadem proportionē: præterea id quod fit
 binomium est eiusdē ordinis, cuius & residuum.*

*Sit linea rationalis α , residuū ue-
 rò $\beta \lambda$: & quadrato lineæ α sit
 æquale id quod fit ex $\beta \lambda, \lambda \theta$:
 itaque quadratum lineæ ra-
 tionalis α secundū $\epsilon \lambda$ residuū*

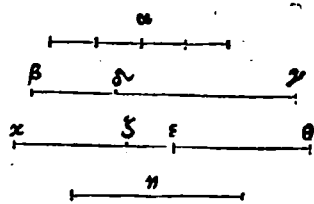


*applicatum, facit alterum latus $\alpha \theta$. dico lineam $\alpha \theta$ esse
 binomium cuius nomina sunt commensurabilia nomi-
 nibus ipsius $\beta \lambda$ & in eadem proportionē: & lineā $\alpha \theta$
 esse*

esse eiusdem ordinis binomium, cuius ϵ δ est residuum.
 Sit linea ϵ δ linea cōueniēter iuncta α γ , ergo linea ϵ γ ,
 α γ sunt rationales potentia tantum commensurabiles.
 ϵ quadrato linea α aequale sit parallelogrammum ex
 β γ , α : sed quadratum linea α est rationale, ergo ϵ pa-
 rallelogrammum ex β γ , α est etiam rationale: ergo ϵ
 linea α erit rationalis longitudine commensurabilis li-
 nea ϵ γ . Cum igitur parallelogrammum ex β γ , α sit a-
 quale ei quod sit ex β α , α θ , ergo sicut ϵ γ ad ϵ α , ita α θ
 ad α : sed ϵ γ est maior quam β α , ergo ϵ linea α θ erit
 maior quā α . Sit linea α aequalis linea α ι , ergo linea α ι
 erit rationalis longitudine commēsurabilis linea β γ si-
 cut ϵ linea α : ϵ cum sit sicut β γ ad ϵ α , ita α θ ad α ι .
 euerſa ergo proportionē sicut ϵ γ ad α γ , ita α θ ad α ι . fiat
 sicut α θ ad α ι , ita linea α θ ad α ι . (quod quemadmodum
 fiat, dicemus ad finē demonstrationis.) ergo erit reliqua
 α ι ad reliquam α θ , sicut tota α θ ad totā α ι per 19.5, hoc
 est sicut ϵ γ ad γ α : sed linea β γ , γ α sunt potentia tantū
 commensurabiles, ergo ϵ linea α ι , α θ erunt potentia
 tantum commēsurabiles. Et quoniam est sicut α θ ad α ι ,
 ita α ι ad α θ , sed ϵ sicut α θ ad α ι , ita α θ ad α ι , ergo sicut
 α ι ad α θ , ita α ι ad α ι : quare sicut prima ad tertiam, ita
 quadratum primæ ad quadratum secundæ. ergo sicut
 α ι ad α ι , ita quadratum linea α ι ad quadratum linea
 α θ : sed hæc quadrata sunt commēsurabilia, quia linea
 α ι , α θ sunt potentia commensurabiles. ergo linea α ι , α θ
 sunt longitudine commensurabiles. Quare per secundā
 partem 16. linea α ι , α θ sunt longitudine commensurabi-
 les: quare per eandem 16. ϵ linea α ι , α θ sunt longitu-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

dine commensurabiles: sed linea α est rationalis & longitudine commensurabilis linea ϵ & γ . ergo & linea α & γ erit rationalis & longitudine com-



mensurabilis eidem ϵ & γ . Et quoniã est sicut linea β & γ ad γ α , ita α & γ ad γ θ , permutata ergo proportionem sicut β & γ ad α & γ , ita γ α ad γ θ : sed linea β & γ est longitudine commensurabilis linea α & γ . ergo & linea γ α erit longitudine commensurabilis linea γ θ : sed linea γ α est rationalis, ergo & linea γ θ erit rationalis: sed & linea β & γ , γ α sunt potentia tantum commensurabiles: ergo & linea α & γ & θ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea α & θ erit binomium, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus residui, & in eadem proportionem. dico præterea illud binomium esse eiusdem ordinis cuius, & residuum ϵ α . Nam si β & γ plus potest quàm γ α quadrato linea sibi longitudine commensurabilis, etiã linea α & γ poterit plus quàm γ θ quadrato linea sibi longitudine commensurabilis per 15. Quòd si linea ϵ & γ fuerit longitudine commensurabilis linea rationali, etiã linea α & γ erit eidem rationali commensurabilis longitudine per 12: quia linea β & γ , α & γ sunt longitudine commensurabiles: & sic erit linea ϵ α residuum primum, & linea α & θ similiter binomium primum. Quòd si γ α fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiã linea γ θ erit eidem longitudine commensurabilis: & sic erit linea β α residuum secundum, & linea α & θ binomium secundum. Quòd si neutra ex β & γ , γ α fuerit rationali commensurabilis longitudine

tudine, neutra etiam ex $\alpha\beta$ erit eidem commensurabilis: & sic erit linea $\beta\gamma$ residuum tertium, & linea $\alpha\theta$ binomium tertium. Si uero linea $\epsilon\gamma$ plus potest quàm linea $\gamma\delta$ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, etiam linea $\alpha\beta$ poterit plus quàm linea $\beta\gamma$ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15. Et quidem si linea $\beta\gamma$ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam $\alpha\beta$ erit eidem commensurabilis longitudine: & tunc linea $\epsilon\delta$ erit residuum quartum, & linea $\alpha\theta$ binomium quartum. Quod si $\gamma\delta$ fuerit rationali commensurabilis longitudine, etiam $\beta\gamma$ erit eidem commensurabilis longitudine: & tunc erit linea $\beta\delta$ residuum quintum, & linea $\alpha\theta$ binomium quintum. Quod si neutra ex $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ fuerit longitudine commensurabilis rationali, similiter neutra ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ erit eidem commensurabilis longitudine: & sic linea $\beta\delta$ erit residuum sextum, & linea $\alpha\theta$ binomium sextum. Ergo $\alpha\theta$ erit binomium, cuius nomina $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sunt commensurabilia residui $\epsilon\delta$ nominibus $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, & in eadem proportionē: & linea $\alpha\theta$ retinet inter binomia eundem ordinem quem $\epsilon\delta$ inter residua. Nunc dicamus quomodo fiat sicut linea $\alpha\theta$ ad lineam $\theta\lambda$, ita linea $\theta\beta$ ad lineam $\beta\gamma$. Lineæ $\alpha\theta$ ad $\theta\lambda$ datur in continuum & directum linea equalis ipsi $\theta\lambda$: & sit tota linea $\alpha\lambda$: & per 10.6 diuidatur linea $\theta\lambda$ sicut tota linea $\alpha\lambda$ diuisa est in puncto θ : sitq; linea $\theta\lambda$ diuisa in puncto β . Erit sicut $\alpha\theta$ ad $\theta\lambda$, hoc est ad $\theta\lambda$, ita $\theta\beta$ ad $\beta\gamma$. &c.

Centesimumdecimumquartum Theorema.

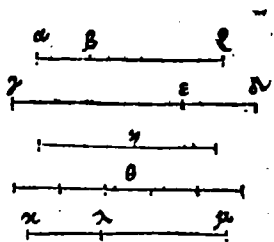
MM iij

E V C L I D I S E L E M E N T O R.

Si parallelogrammum contineatur ex residuo & binomio, cuius nomina sint commensurabilia nominibus residui & in eadem proportionē, linea quæ illam superficiem potest, est rationalis.

Contineatur parallelogrammum ex residuo $\alpha\beta$ & binomio $\gamma\delta$, cuius binomij maius nomē sit γ , minus uero δ : & sint commensurabilia nominibus residui $\alpha\beta$, quæ sint $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, & in eadem proportionē. sitq; potens illud parallelogrammum linea κ . dico lineam illam κ , esse rationalem. Proponatur rationalis θ , cuius quadrato æquale secundum lineam $\gamma\delta$ applicetur parallelogrammum faciens alterum latus $\kappa\lambda$. ergo linea $\kappa\lambda$ est residuum per 112: cuius nomina sint $\kappa\mu$, $\mu\lambda$ quæ sunt commensurabilia binomij nominibus $\gamma\delta$, & in eadem proportionē per 112. Sed per positionem lineæ γ , δ sunt commensurabiles lineis $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, & sunt in eadē proportionē: erit ergo sicut $\alpha\zeta$ ad $\zeta\beta$, ita $\kappa\mu$ ad $\mu\lambda$. ergo permutata proportionē sicut $\alpha\zeta$ ad $\kappa\mu$, ita $\zeta\beta$ ad $\mu\lambda$. ergo & reliqua $\alpha\beta$ ad reliquam $\kappa\lambda$ erit sicut $\alpha\zeta$ ad $\kappa\mu$. sed linea $\alpha\zeta$ est commensurabilis lineæ γ : ergo & linea $\alpha\beta$ erit commensurabilis lineæ $\gamma\delta$. est autem sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\kappa\lambda$, ita parallelogrammum ex $\gamma\delta$, $\alpha\epsilon$ ad parallelogrammum ex $\gamma\delta$, $\kappa\lambda$ per 1.6. ergo parallelogrammum ex $\gamma\delta$, $\alpha\epsilon$ est commensurabile parallelogrammo ex $\gamma\delta$, $\kappa\lambda$: sed parallelogrammum ex $\gamma\delta$, $\kappa\lambda$ est æquale quadrato lineæ θ , ergo parallelogrammū ex $\gamma\delta$, $\alpha\beta$ est

commen-



commensurable quadrato lineæ θ : sed parallelogrammum ex γ A, B est æquale quadrato lineæ α , ergo quadratum lineæ θ erit commensurable quadrato lineæ α . sed quadratum lineæ θ est rationale, ergo & quadratū lineæ α erit rationale. ergo & lineæ α erit rationalis: & potest parallelogrammum ex α B, γ A. Ergo si parallelogrammum contineatur & c.

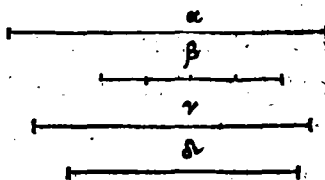
Corollarium.

Ex hoc manifestū est, posse rationale parallelogrammum contineri ex lineis irrationalibus.

Centesimumdecimumquintum Theorema.

Ex linea mediali nascuntur lineæ irrationales innumerabiles, quarū nulla ulli ante dicturū eadē sit.

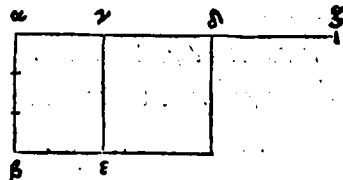
Sit linea medialis $\alpha \gamma$. dico ex linea $\alpha \gamma$ innumerabiles gigni irrationales, quarū nulla ulli ex antedictis irrationalibus eadē sit. Ducatur super



extremitate lineæ $\alpha \gamma$ perpendicularis $\alpha \epsilon$, quæ sit rationalis: & cōpleatur parallelogrammū $\epsilon \gamma$, ergo illud parallelogrammū $\beta \gamma$ erit irrationale per ea quæ dicta sunt in fine demonstracionis 38: lineæ ergo quæ illud potest, erit similiter irrationalis. Sit autē illa lineæ $\gamma \delta$, quæ nulli ex ante dictis irrationalibus erit eadē: quia quadratū huius $\gamma \delta$ secundū lineā rationālē puta $\alpha \epsilon$ applicatū, facit alterum latus lineæ medialem nempe $\alpha \gamma$: nullius uero ex antedictis quadratum secundum rationalem applicatum, facit alterum latus lineam medialem. Rursus

EVCLIDIS ELEMENTOR.

completeatur parallelogram-
mum $\alpha \delta$, erit similiter illud
parallelogrammum $\alpha \delta$ irra-
tionale, & linea quæ illud
potest etiã irrationalis, quæ



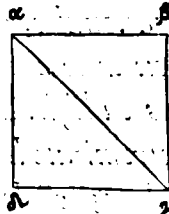
fit $\alpha \gamma$: hæc similiter nulli ex antedictis irrationalibus
eadem esse potest. Nullius enim ex antedictis irrationali-
bus quadratum secundum rationalem applicatum fa-
cit alterum latus lineæ $\gamma \delta$. Ergo ex linea mediali & c.

Centesimumdecimumsextum Theorema.

Propositum nobis esto, demonstrare in figuris qua-
dratis diametrum esse longitudine incommen-
surabilem ipsi lateri.

Sit quadratum, $\alpha \epsilon \gamma \delta$, cuius diameter $\alpha \gamma$. 2 . . . 6 . . . 8

dico lineam $\alpha \gamma$ esse longitudine incom-
mensurabilem lineæ $\alpha \epsilon$. si enim possit
fieri, sit commensurabilis: dico tunc illud
consequi eundem numerum esse parem
& imparem. Manifestum est quadra-
tum lineæ $\alpha \gamma$ esse duplum ad quadratũ



lineæ $\alpha \delta$ per 47.1. Et quoniam lineæ $\alpha \gamma$ est longitudine
commensurabilis lineæ $\alpha \delta$ per hypothesin, ergo habe-
bunt proportionem inter se, quam numerus ad numerũ
per 5 huius. Habeat lineæ $\alpha \gamma$ ad lineam $\alpha \delta$ proportionẽ,
quam numerus 2, ad numerum 1: sintq; illi numeri mi-
nimi omnium habentium eandem proportionẽ: nõ igitur
numerus 1, erit unitas. Nam si 1, esset unitas, cum
habeat proportionem ad 1, sicut lineæ $\alpha \gamma$ ad lineam $\alpha \delta$,

maior

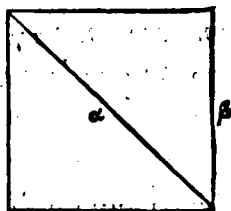
maior autem sit $\alpha\gamma$ quàm $\alpha\beta$: maior ergo esset $\epsilon\zeta$ unitas quàm numerus ν , quod est impossibile. ergo $\epsilon\zeta$ non est unitas, est ergo numerus. Et quoniam est sicut quadratū lineæ $\alpha\gamma$ ad quadratum lineæ $\alpha\beta$, ita quadratus numerus productus ex $\epsilon\zeta$ ad quadratum numerum productum ex ν : nam utrobique est proportio suorum laterū duplicata per corollarium 20.6 et 11.8: proportio autem lineæ $\alpha\gamma$ ad lineam $\alpha\beta$ duplicata, est equalis proportioni numeri $\epsilon\zeta$ ad numerum ν duplicata, quia est sicut $\alpha\gamma$ ad $\alpha\beta$, ita numerus $\epsilon\zeta$ ad numerū ν : quadratum uero lineæ $\alpha\gamma$ est duplum ad quadratum lineæ $\alpha\beta$, ergo et quadratus productus ex numero $\epsilon\zeta$ erit duplus ad numerum quadratum productum ex ν . ergo numerus quadratus ex $\epsilon\zeta$ est par: quare et ipse $\epsilon\zeta$ erit etiam par: nam si $\epsilon\zeta$ esset impar, etiā quadratus ex ipso, $\epsilon\zeta$ esset impar per 23.9, aut per 29.9. Seceditur $\epsilon\zeta$ equaliter et bisariam, ubi est 1: quoniam numeri $\epsilon\zeta$ sunt minimi sue proportionis, sunt inter se primi per 24.7: et est $\epsilon\zeta$ par, ergo numerus ν est impar. Nam si ν esset par, binarius numeraret utrunq; $\epsilon\zeta$, ν : (nam omnis numerus par habet partem dimidiam per definitionem): sed illi numeri $\epsilon\zeta$, ν sunt inter se primi: est ergo impossibile eos binario aut alio numero quàm unitate numerari: ergo numerus ν est impar. Et quoniam numerus $\epsilon\zeta$ est duplus ad 1, ergo numerus quadratus ex $\epsilon\zeta$ est quadruplus ad numerum quadratum ex 1. Est autem numerus quadratus ex $\epsilon\zeta$ duplus ad numerum quadratum ex ν , ergo numerus quadratus ex ν , est duplus ad numerum quadratum ex 1. ergo numerus qua-

EVCLIDIS ELEMENTOR.

dratus ex α est par, ergo ϵ per ea qua modo dicta sunt ipse numerus α est par: sed probatum est eum esse imparem, quod est impossibile, non igitur linea α γ erit longitudine commensurabilis linea α β . ergo erit longitudine incommensurabilis.

Aliter.

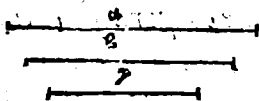
Alia ratione demonstremus diametrum esse longitudine incommensurabilem ipsi lateri: si negetur, sit diameter α , latus uero sit ϵ : fiatq; rursus sicut α β ϵ ad β , ita numerus ϵ γ ad numerum α ϵ γ sint minimi sue proportionis: ergo sunt inter se primi. dico primo numerum α non esse unitatem: nam si possibile est, sit unitas. Et quoniam est quadratum linea α ad quadratum linea β , sicut quadratus numerus ex ϵ γ ad quadratum numerum ex α (ut dictum est in precedenti demonstratione.) sed quadratum linea α est duplum ad quadratum linea ϵ , ergo numerus quadratus ex ϵ γ ad numerum quadratum ex α , est duplus: sed per te numerus α est unitas, ergo numerus quadratus ex ϵ γ est binarius, quod est impossibile: nō ergo α erit unitas, ergo erit numerus. Et quoniam est sicut quadratum linea α ad quadratum linea β , ita quadratus numerus ex ϵ γ ad quadratum numerum ex α , ergo numerus quadratus ex ϵ γ erit duplus ad numerum quadratum ex α : quare numerus quadratus ex α numerabit numerum quadratum ex ϵ γ : ergo per 14, 8 numerus α , numerabit numerum ϵ γ : sed etiā numerat seipsum, ergo numerus α numerabit



merabit numeros, & cū tamē sint inter se primi, quod est impossibile. ergo linea α non erit longitudine commensurabilis linea ϵ : ergo erit eidem incommensurabilis.

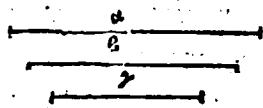
Hinc animaduerti posse puto, neutram harum demonstrationū esse Theonis, sed nec theorema ipsum esse Euclidis: nam & tractatio tota demonstrandi habet quod refelli possit, nec refert eam diligētiā, quā in ceteris usum fuisse Theonē ex ipso uidere possumus. Et theorema ipsum uidetur non suo loco positum esse: debuit enim precedere tractatum linearū irrationaliū. Quauis enim diameter sit longitudine incommensurabilis ipsi lateri, est tamen eidem commensurabilis potentia: ergo si latus ipsum, aut diametrum posueris esse lineam rationalem, necessario sequitur & alterum, nempe latus ipsum aut diametrum esse rationalem, per definitionem linearum rationalium. Huius autem theorematīs multo facillimā & certissimā demonstrationem legere licet in eo libello, quem supra memorauimus Aristotelis *metaphysicorum* 10. Illud quoque quod sequitur addititium esse nemo negauerit, qui intellexerit posteriorem ipsius additionis partem pertinere ad libros consequentes per scriptos de solidis: quia tamē & uerum est quod dicitur & continet rerum ipsarum intelligentiam, pratermittendum nobis uisum non est.

Repertis lineis rectis longitudine inter se incommensurabilibus, ut lineis α & β , reperiri possunt & alie quāplurima magnitudines ex binis dimensionibus constantes, quales sunt plana ipsa siue superficies, quae



sint inter se incommensurabiles.

Nam si inter lineas α , β sumatur
media linea proportionalis γ , per



13. 6, erit sicut linea α ad lineam β , ita similis species figura descripta à linea α ad similem superficiem figura descripta à linea γ , similis inquam species ad similem speciem similiter descriptam, per secundum corollarium 20 theorematum libri sexti, hoc est, siue illæ sint quadratæ, (quæ semper sunt inter se similes) siue fuerint aliæ quæpiam species rectilineæ similes, siue circuli circa diametros α , γ : nam circuli habent eandem proportionem inter se, quam quadratæ suarum diametrorum per 2. 12. ergo per secundam partem decimi theorematum huius libri, similis species figura descripta à linea α , erit incommensurabilis simili speciei similiter descripta à linea γ . Reperiuntur ergo hoc modo superficies inter se incommensurabiles. Simili ratione reperiuntur figura commensurabiles, si posueris lineas α , β esse inter se longitudine commensurabiles. Cum hæc ita sint, nunc demonstramus etiam in ipsis solidis esse quadam inter se commensurabilia, & quadam incommensurabilia. Nam si ex singulis quadratis linearum α , β , vel alijs figuris rectilineis, quæ sint illis quadratis æquales exerimus, solida singula æquali altitudine, siue sint illa solida ex superficiebus æquidistantibus composita, siue pyramides, siue corpora ferratilia, illa solida sic erecta erunt inter se, sicut etiam ipsorum bases inter se, per 32. 11, & per 5 & 6. 12. De corporibus tamen ferratilibus nullum est tale theorema. Ea quidem si bases solidorum fuerint in-

ter

ter se commensurabiles, solida quoque erunt inter se cōmensurabilia: quòd si bases fuerint incommensurabiles, solida quoque erunt incommensurabilia, per 10 huius libri decimi. At si fuerint circuli duo α, β , & super singulos erecti conì siue cylindri, eadē altitudine erunt similiter inter se conì, & cylindri inter se, sicut ipsi circuli, qui sunt eorum bases per 11.12. Et quidem si circuli fuerint inter se commensurabiles, similiter ipsi conì inter se, & cylindri inter se erunt cōmensurabiles: quòd si fuerint circuli incommensurabiles, similiter & conì inter se, & cylindri inter se erunt incommensurabiles, per 10. huius. Vnde constat non in solis lineis & superficiebus esse commensurabilitatem aut incommensurabilitatem, sed in solidis quoque easdem reperiri.

AD EVNDEM ILLVSTRIS-
simum Cardinalem Bellaium.

Hic formas iam uictor ouās, normāq; repono.
Hic ego secessus uoti damnatus adibo
Phœbe tuos, ducē te saltus emensus opacos:
Saxa que peruia nūc multis, prius hospita paucis
Exequata meo, quæ concessere labori.
Mox, tua dum magno cōcussus numine mentem
Thure uaporabit purus delubra sacerdos:
Et sacris operatus erit Belliaus aris,
Ipse tua hoc iubeās monumentum dēdicet arce.
Nam per nos tentare, nefas, sine uate profanos,
Comperto ut spatium quadrata æquale duobus

Redderet ex ternis cuneo, quæ subdita recto
Linea, Pythagoras Samius lectissima centum
Terga bouum imposuit, uictor ceu splendidus, aris
Pieridum, magnis sibi parua rependere uisus.
Tanto illi potior multis sapientia nummis.
Ipse quoque imparibus donis imitatus eosdem,
Sit mihi fas, animos, at non ita dissimili in re,
Parua quidē illa tibi, sed quæ mihi maxima, soluã
Munera. Diis quando putas gratissima merces,
Me uotiuu pium testabitur usque tabella.
Nostra tibi ē multis cantabit pagina paucas
O Phœbi genus, inculto Sapientia laudis
Carmine, quoq; modo geminas res miscuit usus:
Et Sophiæ coniunctus amor noua nomina duxit,
Cuius ut exemplo simul & sermone fruamur.
Nanque homines seclis quondam senioribus usi,
Qui studiis animos & tempora longa dederunt,
Naturæ in rebus, sapientum nomen adepti.
Quæ cum Pythagoræ ratio manasset in æuum,
Non tulit inuidiam senior: nam forte Leonti
Cui regnata Phlinus, quondam cōgressus, & ore
Dum referat magno naturæ arcana parentis,
Admiranda dedit diuini signa uigoris.
Ingenio neque uisa minor facundia summo.
Querentique uiro, qua nam confideret arte,
Ille quidē esse negat quicquã ullius artis in ipso,
Sed studiis æterna tuis Sapientia duci,
Hinc sibi philosophi nomen finxisse nouum se.
Attonitus uocis nouitate, rogat quid in hac re
Poneret,

Poneret, an reliquos ínter discrimen & istos.
 Nec minimum discrimé, ait, quod ut ipse doceri
 Me referente queas, in imagine cuncta notabo.
 Nonne uides quántis celebrentur Olympia ludis?
 Quàm multis cuiusque modi mercatus abúdet,
 Cætibus ille frequēs glomerantibus: huic ego uitā
 Persimilé esse hominū dicam. Nam corporis illic
 Pluribus ut uires, uarióque exercita motu
 Fortia mēbra solēt celebres parere inde coronas,
 Tenuia gloriolę pereuntis pabula, quæstus.
 Excitat hos, aliena ut emant, aut ut sua uendant.
 Quos præter genus illud inest, longe anteferédū
 Nobilitate aliis, laudem captantibus & rem:
 Nec quoquā minus ingenuū, qui nec sibi plaudi
 Fronde coronatis optent, neq; crescere nummos.
 Hoc tantum, rerum quid ab unoquoq; geratur:
 Et quo quidque modo, cura studióque sagaci
 Lustrantes recolunt, & ab omni parte uorantes,
 Intentis iucunda oculis spectacula quærunt.
 Haud aliter quàm qui mercatū aliunde profecti,
 Nos etiam ex aliis alias peruenimus oras:
 Terrarúmque solum exilio sortimur habendum.
 Hic alios quæstus, popularis gloria famę
 Sunt quos uana tenet multi: plerísque uoluptas
 Imperat, in multis morbi non simplicis est uis.
 Sed qđ ago? innumerósne paré enumerare furores?
 Perrarum genus illorum, qui maximus esse
 Debebat numerus, rebus constanter omissis,
 Post habitísque aliis, quos recti cura sequendi

Ceperit, & ueri dederit simulacra tueri.
 Celestes animæ, quas incoluere, beatas
 Suspiciunt sine fine domos, & abesse querentes,
 Quod reliquū est, ihiāt animis, & mēte morātur.
 Nec tetras meminere procul spectare iacentes.
 Hi tales, studio quibus est sapientia, sunt
 Philosophi, & meritum me iudicē nomē habēt.
 Addidit, utque illic hominum liberrima fors est,
 Qui spectant, rerūque aliis cōmercia cedunt,
 Sic studiis cunctis, animos quæ plurima uersant,
 Natura indagare uias atque abdita præstat.
 Sed neq; Pythagoras tanto modò nobilis author
 Nomine, quin rebus multo magis amplificatis
 Floruit: atque animos cultu molliuit agrestes.
 Magna prius per quē ter maxima Græcia creuit.
 Hæc mihi dictabat, uacua dum lentus in umbra
 Rure suburbano instantes leuat arte ruinas
 Labentis patriæ, & curarum Tullius æstum,
 Purus & ipse fluens Graiorum fontibus haustis
 Tullius, in Latium peregrinas doctus Athenas
 Ferre, suosque nouis opibus ditare Quirites.
 Matériē ille quidē, numeros sed Phœbus & artē
 Sufficit, ulla modo nostra si carminis est ars.

FINIS.



FINE

R