Euclidis elementorum

LIBER DECIMVS, PETRO

Montaureo interprete.

Ad Ioannem Bellaïum Cardinalem.

Disp. 1a phis. Item 3o q. pa. Hoc mihi [illegible] dicendum
Quod 4r qualitates q. activae sunt accidentia realia et [illegible] non convenit
constat inter omnes opponi, neq. [illegible] Quartae [illegible] contrariae [illegible]
[illegible] non agunt ad invicem [illegible] contrariae [illegible] Nihil habet contrarium [illegible]

LVTETIAE,
Apud Vascosanum, uia Iacobæa ad insigne Fontis.
M. D. LI.
CVM PRIVILEGIO.

PRIVILEGII SENTENTIA.

Regio diplomate cautū est, ne quis alius præter Vascosanum, hunc Euclidis elementorum librum decimum interprete Petro Montaureo uiro senatorio ante sexennium imprimat, néue uendat. Qui secus fecerit, libris & pœna in sanctione æstimata multabitur. Datum Blesis decimo Calendas Februarij M. D. L.

De moulins.

AD IO. BELLAIVM CARDI-
nalem Petri Montaurei
PRÆFATIO.

CVm ad inſitam mihi magno naturæ erga me beneficio incredibilem diſcēdi cupiditatem, illud quoque iudiciū progrediente ſenſim ętate ſtudióque confirmatum acceſſiſſet, nihil eſſe tam uehemēter homini expetendū, quàm rerum maximarum perceptam habere naturam, feci non inuitus adhuc, ut quò uocaret illa, eò me deduci facile paterer: in ídque uitæ curriculum immitti, quod & dignitati hominis cōuenientiſſimū, & naturæ prætereà meæ accōmodatū eſſet. Huius uerò conſilij tantū abeſſe uideo ut me pœnitere cœperit, ut maiores etiã quotidie uberiorésque fructus mihi non contingere tantum ipſe ſentiam, ſed & deinceps multo prętantiores perceptum iri certo ſperem. Nam quanto in altum longius euehimur, tanto laborē minui magis, qui maximus in cuiuſque rei principiis ſolet eſſe: animi uero uoluptatē nulla alia re tantū, quã diſcendo ali augeríque cognoſcimus. Is autem meus in ſuſcipiendo uitæ genere ſenſus cum uniuerſæ philoſophiæ ſtudiū mihi proponeret amplectēdum, ſimul animo ſubiiciebat illud, nihil in ea re magnopere profici poſſe, niſi quis ueterum philoſophorum ueſtigia ſumma diligentia perſequutus, eandem quam ipsi, uiam instituisset. Itaq; nihil, ut hoc quidem loco dicam, de nostris cæterarũ philosophiæ partium studiis, ad mathematicam cognitionem animum applicans, in eum me locum sensim abductum diuertisse intelligo, unde suscepti primum institutíque illius itineris recordatio propemodum effluxerit: neque id uero repugnante me admodum. Quid enim est, cum ex ea philosophię parte, quæ omnis est in agendi rationibus occupata, tantum præceptorum acceperis, quãtum ad unius hominis réique priuatę cuiusq; suæ rectionem attinet, unde maior animum ueri cupiditate flagrantissimũ permulcere possit oblectatio, quàm quæ ueri cognitionem subsequi solet? Nam illa quidem studia ciuilis disciplinæ, quę publicis rebus consilio administrandis idonea totius hominum uitæ multo præstantissimas actiones ex recto rationis præscripto moderari debuerant, plane refrixerunt: tanta profecto perturbatione rerum omnium, ut cuius scientiæ ratio clauum aliquando in rerumpub. gubernatione magna cum sua laude, hominum uero lõge maxima felicitate, cursúque prospero tenuerit, eidem nũc sit uix aliquid relictũ in sentina loci. Tertia quædam supererat illa philosophãdi exercitatio, quæ naturam rerum persequens, ut est omnium ingeniorum cognitione dignissima, ita propter multiplices ipsius materiæ formas & motus incõstantes, acutum quoddam habet & subtile disputandi di genus, ſed obſcurum tamen, adeóq; repugnantes inter ſe ſummorum philoſophorum ſententias, ut uerisſimilia tantum, non etiam uera docere uideri poſſit. Vna ergo eſt mathematicarũ rerum tractatio, quæ conſtantibus neceſſariíſque ducta principiis, uias quoque conſimiles perſecuta, eò nos progredientes manu ueluti ducit, ubi ueritatis ipſius cubilia, quę quidem mentibus humanis ſua ipſarum ui facultatéq; cerni queant, explicet intuenda. Quid autem eſt, quod hac una re præſtantius magnificentiúſque dici poſſit? An quid erit aliud, quod cuiquam anteuertẽdum uideri queat? Tibi certe non arbitror, Bellaï ampliſſime, cui neque ad acumen ingenij doctrinæ cultum, neque ad doctrinam iudicij uim deeſſe intelligo. Quæ cum ita ſint in te illuſtria, ut fortunæ tuæ, illius quidem per ſe ſplendidæ, luminibus ego unus omnium minime blandus fortunæ admirator offeciſſe putem, tibi homini grauiſſimo, idoneóque uiſo de tota noſtra ratione iudiciíque ſenſu perſcribam paulo liberius: ſi forte plus authoritatis ex perſonæ tuæ dignitate noſtra habitura eſt oratio, ut ſane habitura eſt, ad iuuentutem in eum ſtudiorum curſum, quẽ ualde uolumus, inducẽdam. Verum enim, ut ipſe tecum, hoc eſt, cum homine intelligente loquar, iampridem errabunde de uia deflleximus: ueterémque illam diſcendi conſuetudinem prę ſtudiis quibuſdam nouis amiſimus. Hîc cũ plurima quæ recte dici poſſint,omittenda ducam: unum illud quidem certe nunc maxime mihi dicẽdum eſt, illius perturbationis,de qua paulo ante diximus, eã eſſe cauſam, & potiſſimam quidem,quòd totius inſtitutionis, (quam à pueris παιδείαν ueteres illi ueritatis magiſtri uocare ſoliti ſunt) priſcis quõdam ſeculis tantopere conſeruatæ, ea eſt hac quidem ætate peruerſitas, ut quod primum potiſſimúmq; ſtudiorum eſſe debuerat, perexiguum quidem omnino locum apud nos, plurimorum autem hominum iudiciis nullam etiam dignitatis æſtimationíſque partem mereatur aut obtineat. Quid ergo eſt? dicat aliquis, quid habes quod reprehendas? Ego uero permulta, pene dixi omnia, ut iam indubitãter illud affirmare poſſim,tum demũ optime rebus hominũ conſultum iri, cum illud poëtarum ὕστερον πρότερον ipſi in ſuas actiones tranſtulerint: quódque primum ducunt, poſtremũ habuerint: & quod poſtremo,aut, ut uerius dicam, nullo loco ipſis eſt, ſi primum exiſtimauerint. Nunc unius artis,uixdum etiam artis præſidiis opibúſq; immodicis tam flagitioſe circumuenti tantis clamoribus obtundimur, ut naturæ uox ad ſcientiæ cupiditatem inuitantis, ne exaudiri quidem ulla ratione queat. Quæ ſi loco ſuo cõtẽta non ſe cõmouiſſet, diiudicandíſque hominum litibus occupata munus alienum aut nunquam appetiiſſet, aut certe non impediiſſet, minus profecto haberemus quod dolendum uideretur. eſt enim & iu-

diciis

diciis accommodata: iudicia porro ipsa disceptationibus rerũ controuersarum, quibus carere nullo modo possumus, pernecessaria. Neque sane est in ea re quod reprehẽdi iure possit, si quis morem maiorum in illa consequenda retineat, ut philosophiæ totius institutis abunde suppeditatus, hanc ipsam illius quidem imitatricem quandã & quasi sobolem aggrediatur discere, cum intellexerit id quod in genere sciẽtiarum est perpetuum, ut aliis aliæ subsint, idem ipsum hîc quoque fieri, ut iurisperitia philosophiæ partem illam, quæ est de moribus tum singulorũ tum uniuersorum, tanquam architectam agnoscat & obseruet. Sed hæc tota cõtrouersorum ratio iudiciorum illius partis est iustitiæ, quæ συναλλάγματα tantum continet. Nam de altera illa quæ multo est & dignitate præstantior, & utilitate in omnem uitæ societatem uberior, quæ præmia recte factis, pœnásque sceleribus pro rata cuiúsque rei personæq; portione distribuens, duo uincula rerũpub. firmissima complectitur, aut omnino de iusti ipsius ui atque natura, ne literam quidem. Se tamen ueram philosophiam profiteri rerúmq; maximarum gubernationi unam idoneam prædicans, illam ipsam philosophiam, cum omnium artium parentem, tum uero erga se beneficẽtissimam magistrámque uitæ certissimam lædens, dignitatis inuadit possessionẽ alienæ: neque se animaduertit (ne quid ipse criminosius dicam) alienum appetentem contra ſua ipſius, quid autem dico ſua? imò magis contra rationis uniuerſæ decreta, cuique ſuũ minime tribuere: quámque matris loco uereri debuerat ab ipſa genita & educata, unde ſuum aliquem in repub. locum ut tenere poſſet, habuerat, quod in parentes impij filij ſolent, ipſi quaſi ſenectute deſipienti, ut bonorum ſuorum adminiſtratione interdiceretur, efficere. Nam ſi nihil aliud eſſet, quis quæſo remigem in naui ferat gubernatoris munus arrogãter affectantem? Iam uero ut à primis ordiamur, hæc totas urbes ſuis ſacris initiorúmque pertractationi conſecratas habet: ad quas undique concurſus puerorum iuuenúmq; fiant, non tam diſcendi, quàm à magiſtris diſcedendi cupidorum. ſic ætas maxime imbecilla, ſuíque impotens, effrenis, incuſtodita, ſuo unius impetu ferenda permittitur, quam unam alieno parentem imperio, authoritate bonorum nixam, inſolẽtiæ, leuitati, audaciæ, uoluptati frenum, cęteris etiã animorum motibus modum imponendum eſſe maxime doceri oportuit: híſque uocibus aſſidue aures illius perſonare, ut concurſantes immenſique cupiditatum æſtus, quibus ætas illa plurimum nata eſt cõmoueri, reprimerẽtur. At enim qui recte præcipiãt doceántque, præſto ſunt, ſi modo eos audire in animum induxerint. Credo ſane, quod ad illorum artem attinet, ut eſt captus horum hominum & temporum, non indiligenter exponere teſtamenta, ſubſtitutiones, obligationes, ſtipulationes,

lationes. Sed quid hæc ad mores informādos? Ita fit ut alij ne audiantur quidem, propter abhorrentem ab illis studiis multorum ingeniorum naturam: alij quāuis studiose soleant audiri, tamen uel rei ipsius per se spinosæ traditione perplexa, uel docendi imperitia præpediti, nihilo doctiores amittant auditores, quàm acceperint. Ex quo illud malum interea sequi omnino necesse est in iuuenum animis, cum uoluptates ex doctrina institutionéque liberales ipsi nòn habeant, ut consectandis alienis illiberalibúsq; totos sese dedant: prorsus enim eos aliquid agere, quietémq; contemnere, necesse est. Pauci quidam ex illo sunt genere, qui gloriæ, nescio cuius, utilitatísque expectatione deliniti, è toto studiorum suorum quinquennio fructus tenues illos quidem & austeros, sed quæsitos tamen colligant. Præclara uero res, hominem natura quidē ipsum sua nullius uirtutis, uitiíue præsentia habitúue fretum, uerùm facultatibus nudis in utramuis partem ferentibus, prędítum, magis tamē improbandorū exemplorum multitudine, opinionúmque peruersitate deprauatum, cum opes, honores, diuitias præcipue duxerit expetendas, ad alendum morbum ex contagione contractum, artem etiam per omne uitæ tempus exercendam adhibere: cuius tota ratio disputandi sit de meo & tuo: déque iis rebus & modis, quibus quod meum est, tuum effici possit. Ad quam quidem disciplinā nimis multos dociliores reddi scimus, quàm societati hominum cõducat tranquille constantérque moderandæ. Ita credo priscos illos non tam antiquitate quàm dignitate memorabiles uiros, domi forísq; in sua quẽque ciuitate rerum gestarum gloria præstantes, liberos suos ad maiorum imitationẽ instituisse: ac non potius Athenas, Rhodum, Massiliam, & quò non? ad cultum ingenij capessendum, mercaturámque artium optimarum dimisisse. Vnde philosophiæ præceptis instructi, cum se ipsi regere didicissent, agendísque rebus adhiberentur, non ex artis illius formulis, sed ex iustitiæ scitis immutabilibus hominum cœtus, & quidem uolentiũ, regendos acciperent. Age modo, hunc ipsum hominem ex hac nostra exercitatione, tali cultu educationéque in forum ex umbra tanquam in aciem producamus, ut studij sui rationẽ & usum aliquẽ nobis tandem explicet. Ibi uero quanta prudentia, grauitate, constantia, probitate se gerat, dicere meũ non est. Vos quæso dicite Pierides, & quidem hominibus ignaris: nobis enim nihil attinet, quos plura scire necesse est, quàm referre iuuet. Hoc tantum dicam, cum se existimẽt parum in ea arte profecturos, nisi toti sint in illius cognitione per omnẽ uitæ cursum occupati, tantúmq; sibi periisse temporis, quantum aliis studiis accesserit, homines ignorantes quantum cuique scientiæ temporis sit tribuẽdum, nimis magnam mercedem statuunt, si pręstantissimarum rerum, offi cij dico munerísque sui ignoratione, hæc una fortuitarum rerũ cognitio disceptatrix sibi ipsis cõparanda uideatur: neque uero intelligunt rei per se infinitæ finem nullũ reperiri posse. Verum ipse me longius scribendo prouectum in offensiones multorum incurrisse uideo, quod equidem nollem: sed cum nulla remedia tam faciant dolorem quàm quæ sunt salutaria, si quid est quod sanari possit, plus apud me ualere debere nonnullorum salutem quàm plurimorum indignationẽ ex remediorum acerbitate collectã semper existimaui. Quod cum optimis quibusq; uiris, quales iam bene multos hic noster ordo recipit, probatũ iri certo sciam, de cęteris minus est mihi laborandũ. Atque haud scio an quæ auditu nũc quidem grauia acerbáque uideantur, ipsis in experiundo suauissima futura sint: ut longior oratio comprobandæ rationis huius causa defensióque nulla requiratur alia, nisi quã rei ipsius intellectæ perceptio attulerit. Neque quenquam accepimus aut uidimus, qui, cum utranque scientiam tenuisset, non utranque adamaret: alteram uero nobiscum etiã admirationi maximæ summóque studio non habuisset. Porro alterius expertem & ignarum, de utraque iudicium suum esse uelle iniurium est. Præterea fuit ea profecto semper grauissimorum eruditissimorúmque hominum omnibus seculis de tota uitæ ratione consensio, cum expetendarũ rerum tria summa genera reperirentur, ut bonorum animi prima potissimáq; esset dignatio: cæterorum autem, ut quæque proxime nos attingerent. Ex quo illud efficeretur necessario, scientiarum quoque, quę bonorum adipiscendorum uias persequerentur & traderent, eandem esse debere rationem, ut cuiusque rei præstantissima uis esset, ita scientiæ, cui res ea subiiceretur, illi plurimum & tẽporis & industriæ nostræ deberetur. Ad quã sane normam si studia nostrorum hominum ab ipsis exigerentur, & firmior animorum tranquillitas, & uero maior ex ipsis in repub. esset utilitas: eiúsque mali, cuius mole propemodum obruti leuationem aliquam iampridem exposcimus, medicinam non leuem haberemus: cum non essent qui litigiosorum hominum audaciam, flagitium, furorem inconsultis suis consiliis adiuuantes, aut potius ipsos inter sese miserrimo cõcertationum genere committẽtes, alienis incommodis ad suas utilitates per iustitiæ conseruandæ speciem abuti uellẽt: quódque rerum omnium præcipuum est, illud boni præterea consequerẽtur, ut improbitas uirtuti suo loco dignitatíque restitutæ in rerũ administratione facile cõcederet. Hoc enim munus esse philosophiæ unius maxime proprium, humanarum rerum artem moderãdarum, diuinarúmque scientiam tradere quis non uidet, qui modo rem ullam unquam mẽtis acie perceperit? ne forte homines rerum omnium imperiti criminẽtur eam otij tantum esse, nõ item negotij. Cuius quidem

dem calumniæ perfacilis esset mihi quoque refellendæ ratio, nisi rem huius loci, aut operis nō esse intelligerem: ipsam tamen etiam scriptis grauissimis cuiusque ætatis hominum prudētissimorum agitatā, tum uero unius Iacobi Sadoleti uiri præstantissimi doctissimíque libello perelegāti, ab eo perscripto tanta diligentia & eruditione, ut maiore scribi posse non existimem. Quòd si exēplis agēdum esset, nónne permultos omnibus historiæ monimentis celebratos accepimus, qui studia doctrinæ ad rerumpub. moderationem conferentes, ciuitatum suarum statum ab initio constituerint, conseruauerint, perditúmque restituerint, tanta omnium gētium admiratione, ut summis etiam honoribus deferendis magnitudinem meritorum assequi se nullo modo posse faterentur? Quid enim? (ut uetera omittamus) nunquid unquam grauissimū sanctissimúmque istud uestrum Cardinalium collegium pœnituit, quātum dignitatis ornamentíque ex duorum hominum studiis, uirtute prudentiáque percepisset, Gasparis Contareni, & huius ipsius, de quo modo dixi, Sadoleti? Quorum ille per omnes pene gradus honorum in moderatissima florētissimáque Venetorum repub. peruagatus, suis ciuibus ita se probauit, ut præsentem colerent & admirarētur: absentem etiam propter singularis uirtutis memoriam permanentem requirerent, uobísque ipsis, qui ab se ciuem totius ciuitatis optimum nihil tale ambientem aut omnino cogitantem abduxiſſetis, pene inuiderent. Et ſane fuit ille uir omni laude cumulatus, tum propter excellentẽ doctrinam, tum etiam probitatem & prudentiam multarum gentium imperio digniſſimus: hic uero alter magis eſt otio delectatus, nõ illo quidẽ inani, ſed fructuoſo in omnem poſteritatem & literato. Quid de Petro Bembo & Nicolao Ridolfo uiris certe in omni uirtutum genere maximis dicam? Libentius autem in cõmemoratione mortuorũ noſtra uerſatur oratio, ne quid aſſentationi uiuorum tribuiſſe iudicetur, ſi eorũ qui nunc ſunt, laudationes attingeret. Hi quidẽ in philoſophię ſinu ſtatim à pueris educati tales ad rempub. cum acceſſiſſent, utilitates ex ſe permagnas uniuerſo quidem hominũ generi maxime, ſibi uero ipſis immortalitatem præterea gloriæ cõpararunt. Quorum ſi qui ſtudia imitatione conſequuti erũt, quî fieri poteſt, ut reſpub. non maximam ſuę dignitatis recipiendæ ſpem in illorum prudentia & moderatione ſibi repoſitam arbitretur? Ac profecto fuit tempus illud ſane mihi periucũdum, cũ ſpes eſſet melius fore, propter alacritatem animorũ in id ſtadium ſeſe dedentiũ, quod eſt ad ueram gloriam expeditiſſimum: niſi permultorum ſtudia cogitationeſque in alia traduxiſſet ſua ipſorũ credulitas, neſcio cuius hominis uanitati aſſentientium. Itane uero? quo quæque uox proferetur abſurdior, eo facilius in animis noſtris uiam ad perſuadendum

ſuadendum inueniet? Ergo repertus eſt, ſi diis placet, qui cum bellum nefarium omnibus bonis artibus indixiſſet, & ſapientiæ fructũ iam plane maxima bonorum omnium gratulatione renaſcentis nobis inuideret, Lutetiæ in luce atq; oculis nõ Galliæ modo, ſed totius Europæ caſtra figeret ignorantiæ: & uniuerſæ philoſophiæ uitæq; adeo è philoſophia conſtituendæ authorem Ariſtotelẽ oppugnatum palam etiam accederet, nihil in dialecticis, nihil in phyſicis, nihil uſquam ueri uidiſſe aut tradidiſſe argueret. Audax negotium dicetem & impudens, niſi uerborũ omnium acerbitatem rei ipſius per ſe inauditæ, neque iam audiẽdæ indignitas ipſa ſuperaret. O imperitos maiores noſtros, qui nunquam quiuerunt iſtud animo intelligere! Quid eſt quod profectum eſſe dicam recenti ſophiſtarum clade, atque exilio, ſi ſophiſtas alios aſciſcimus? Quaſi uero non iam miſerrimam rerum omnium ignorationem deprecemur, ſed mutationem tantum in ipſis ignorantiæ magiſtris expetamus. At certe totum illud eiuſmodi eſt, ut cẽſoria magis animaduerſione, quàm cuiuſquam omnino contra diſputantis oratione reprimendum ſit. Neque uero de hac ipſa re uerbum ullum facturus erã, ſi moderatius inſaniendum ſibi putaſſet: ſuáque ipſe cõtentus iuuẽtutis credulæ & rerum imperitæ non augeret ignauiã: nam de ipſo quidem leuior omnino iactura fuerat. Impune eſſe cuique debet periculo ſuo inſanire: ſed cum ad aliorum perniciem morbus animi conuertitur, id uero ferendũ non eſt. Huic certe malo niſi maturis conſiliis obuiam eatur, & audaciſſimos impetus diligentia continuerit magiſtratuum, næ præclara illa ſtudiorum nobis promiſſa compendia permagno conſtiterint iuuentuti: cum grauiſſima mercede totius temporis iactura didicerit nihil è nouis illis, ſed non ſatis eruditis magiſtris, interea niſi arrogantis cuiuſdã & confidentis ignorantiæ ignauiæque præcepta didiciſſe. Sed de hac re tota ſatis hactenus: aliàs fortaſſe pluribus, ſi cõmodum erit. Nũc autem quod eſt huius potiſſimũ loci & inſtituti perſequamur. Cum itaque, ut ante dictum eſt, mathematicã cognitionem uniuerſam iam tum à prima iuuentute uehementer amplexatus eſſem, & ſæpius ipſe per me Euclidis elementa reuoluerem, in cæteris quidem libris modicus ſane labor mihi fuit: ubi uero decimum hunc multorum opinione perobſcurum attigiſſem, ea certe opinio non mediocri mihi quoque fraudi fuit, cum non arbitrarer, qui locus à pleriſque propter ſuſpectã ipſius difficultatem præteriri ſolitus eſſet, mihi non periturum, quicquid in eo laboris impendiſſem. Itaque plurima extrinſecus adiumenta mihi ipſe excogitãs, iterum atque iterum repetita diligenti lectione, cum nihilo minor maneret rei ipſius obſcuritas, cœpi cogitare unum Euclidẽ in primis libris ſibi ipſi ad ipſorum intelligentiam ſufficere: neq; fieri

poſſe

posse,ut suum in docēdo modum atque ordinem repudians,hîc alienum quendam & nouum adhiberet. Itaq; uia simpliciori cum rem aggredi cœpissem,sola librorum pręcedentium ipsius Euclidis ope,& uocum simplicium quę sunt huic libro maxime propriæ, intelligentia, omnia uisa sunt quàm antea illustriora multo atque clariora:Euclidémque sui ubique similem hoc quoque libro, ut olim cogitatione præceperam,nullius omnino rei externæ indigentem,se ipso contentū: rem illam quidem paulominus inuulgatam, sed alia ratione nulla,neq; alia uia,quàm sua & familiari tradere plane uidi.Hæc uero est,ut à rebus cognitis ad ignotas sensim progrediens ex prioribus rerum subsequentium comprobet intelligentiam, & ueritatem. Quæ cum perspicerem,in eáque re sæpenumero uersatus,magnáque animi intētione & studio singulas quásque res inter se conuenire,nihil collidere intelligerem, nullam moram studiis hominum putaui, quantum per me effici posset,diutius afferendam,quin laboribus nostris animíque exercitationibus fruerentur. Cúmque ex maiorum lucubrationibus, quo posteritatem iuuaremus,aliquid uideremur cōsequuti, & quibus omnia deberemus nihil esset quod post mortem hominibus bene meritis gratius per nos referri posse uideretur, quàm si quorū industriam experti uehemēter admiramur & suspicimus,eorum etiam humanitatis exemplum studiúmque posteritatis adiuuandȩ uellemus imitari, cœpi cō silium rei totius illustrandæ. Itaque Græcorum demonstrationes interpretando consequutus, siue fuerint illæ Euclidis singulorúmue geometrarum, quorum symbolis hoc totum est opus absolutum, siue ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν, ubi pressius subtiliúsque compositæ uidebantur, fusiore quodā scribēdi genere ita patefecisse me puto, ut lectori non dormitanti, sed attento nihil deesse possit ad rerū intelligētiam: obitérque uiam & rationem resoluendi in primis theorematibus exemplorū copia notauimus. Sed quo res adhuc multis incognita commendetur uberius, placuit nonnulla ex ueterum libris, Procli in primis, arbitratu quidem nostro sumpta, Latinis literis illustrata proponere, quibus initiis mathematica ducta cognitio, quā altū ediderit rerum maximarū fastigium, ut quā incredibilem ex se utilitatē seculis prioribus attulerit, eandem quoque sibi de ipsa polliceantur homines, si modo penitius ea studia inspexerint: neque, quod adhuc factum est, in primo liminis aditu, uixdum quinque sexue passus (totidem enim libris uulgo contenti sunt) in ea re progressi, restiterint. Illud itaque sciendum est, quod finitum & infinitum dicitur, principia summa esse mathematicarum specierum omnium. Nam ea principia inter se aliter atque aliter copulata, sufficiunt ad generandam eam uarietatē, quæ in rebus ipsis cernitur. Inde fit ut ipsarum proportiones in infinitum

nitum excreſcant: quas tamen ipſas finiri etiam neceſſe eſt, ob eam ſaltē cauſam, quia finiti quoq; naturam in ipſis exiſtentem continent. Primum enim in arithmeticis, ſi ab unitate cœperis progrediēdo, reperies numeros in infinitum augeri: neque unquam excreſcendi finem, ubi quieſcant ipſi, fieri poſſe, ut cum eò perueneris, ceſſandum in illo numerorum auctu tibi prorſus intelligas. Quemcūque porro numerum effeceris, illum omnino finitū eſſe neceſſe eſt. Deinde in ipſis quoque magnitudinibus idē apparet, ut in infinitum diuiſio illarum fieri poſſit. Ipſæ uero res ita diuiſæ, omnino (& quod dicitur) actu ipſo finitæ ſunt: ut cum diuiditur aliquod totū in partes ſuas unde componitur, neceſſe eſt ipſas partes quæ ex diuiſione procedunt, eſſe finitas: nam niſi finitæ eſſent, ne partes quidem ipſæ eſſe poſſent. Præterea ſi nihil eſſet infinitum, illa duo perabſurde conſequerētur, & ut magnitudines omnes eſſent commenſurabiles, neque in ipſis quicquam incōmenſurabile: ideóque ne irrationale quidem. Hoc autem eſt, quo differunt ea, quæ in geometria pertractantur ab arithmeticis: ſiquidem in illis ſunt quædam irrationalia, de quibus hoc libro: in arithmeticis uero nihil irrationale, aut incommenſurabile cognoſcitur: ſunt enim omnes numeri commenſurabiles inter ſe, ea ſaltem mēſura, quæ minima eſt in numeris, nempe unitate. Alterum quod perabſurde ſequeretur, ſi nihil eſſet infinitū, illud eſt, quod ea uis & facultas unitatis, ut ex ſe numerorum ſobolem infinitã procreare queat, non exiſteret: neque uero numeri proportiones omnes intra ſe continerent, quas in rebus ſingulis ineſſe perſpicimus, multiplices dico, ſuperparticulares & reliquas tales. Omnis enim numerus unitati cõparatus ad ipſam unitatem habet proportionẽ aliam, quàm idẽ ipſe numerus ad alium numerum comparatus. Similiter ſi finitum nihil erit, commenſurabilitas & communio proportionum, ſimilitudo & æqualitas ſpecierum, cæteráque huiuſmodi quæ melioris cuiuſdam ſunt generis, in rebus diſtinguendis nulla ſint: quæ tamẽ ipſa in mathematicis eſſe conſpicimus. Ea uero ſi non eſſent, ne mathematica quidem ulla ſcientia supereſſet, cum nihil certo, conſtanter, ſubtilitérue diceretur, quod cogitatione firma cõcipi poſſet. Quantum uero utilitatis ea ſcientia communi hominum uitæ & ſocietati cõferat, id quidem non ad uſus ipſius uitæ neceſſarios reſpicientẽ æſtimare conuenit: ita enim fieret ut cognitionem omnem & contemplationem rerum tãquam inutilem repudiaremus, quippe quæ à rerum humanarum neceſſaria ſuppeditatione ſeſe quàm longiſſime ſoleat abducere, ne earum quidem rerum ullam omnino cognitionem aut curam appetẽs, quibus uſus uitę neceſſarius cõtineri ſolet. Eſt uero mathematicæ ſcientiæ ſua certa, propriáque dignitas & utilitas, illa quidem per ſe æſtimanda,

neque

neque quicquam externum respiciens, quo se referat, nullius omnino rei ministerio suam utilitatem accommodans, neque uitę necessitati subseruiens. Quin & liberales disciplinæ à libertate dictę, sui nominis dignitatem sustinere tueriue nullo modo possint, si ad seruiendum usibus necessariis reuocentur. Quòd si ulla ratione illud admittendum uidebitur, ut aliud quippiam extra se spectare debeat, cuius utilitatem consectandam sibi putet: quid est in omni rerum uniuersitate splendidius & magis excellens, quàm quod mathematica scientia uiam munire solet animis nostris? eámque certissimam ad rerum intelligibilium, omni materia solutarum cognitionē absolutam? Et quidē si qua est utilitas expetenda, illa est profecto, quam ex se præstātissimā & eximiam profert. nam & quasi manu ducit ad res intelligibiles percipiendas, & quod est in Timæo scriptū diuinitus, illius scientię cognitio uia quædam est ad plenam & integram mētis nostræ institutionem: cuius rei ea certe causa est atque ratio, quòd eadē est ipsi proportio ad cognitionem totius & primam philosophiam, quæ est institutioni puerili ad uirtutis ipsius summam & habitū. Hæc enim efficit bonis & rectis moribus assuefaciendo, ut animus puerilis ad uitam ex uera uirtute perfectam adolescat: illa uero animi nostri parte eam, quæ διάνοια dicitur, ita suis commoditatibus instruit & cumulat, ut multo paratior ad res eximias inſpiciẽdas & cognoſcẽdas accedat. Ex quo Socratis uerißimũ illud mihi uideri ſolet, oculũ animæ, quem mentẽ dicimus, ipſum quidem ſtudiis & cupiditatibus obtutúque rerum alienarum excæcatũ, & ueluti defoſſum, ſolius ſciẽtiæ ratione diligentiáque recreatum excitari, & quodam ueluti collyrio perſanatum cõualeſcere ſolere: ita ſane, ut rurſum ad ſpeculationem ipſius entis, ab imaginibúsque perſpectis ad res ipſas, quarum illæ fuerãt imagines, erigi, & tanquam ex caliginoſo ſpecu in locũ illuſtrißimũ eductus, illud ipſum lumen intelligibile acie conſtanti poßit intueri: omninóque carcere quodam egreſſus, & rerum generabilium uinculis inconſtantíſque materiæ nodoſa uarietate tandem exolutus, ad incorpoream & impartibilem ſubſtantiam attolli. Nam & pulchritudo & ordinis illius ratio, qui in mathematicis elucet diſciplinis, ipſáque rerum ibidem perſpectarum certa conſtantia, animum noſtrum propius ſiſtunt ad intelligibilia, ipſa quoq; ſemper eodem modo ſe habẽtia, pulchritudiníq; diuinæ conuenientißima. Quæ cum ita ſint, mathematica ſcientia eſt, & ipſa quidẽ per ſe & ſuapte ui dignißima, quæ ſtudioſe colatur: neque tamen non plurimum momenti ad eam uitam affert, quæ mentis unius maxime propria eſt & accommodata. Illud autem in hac re ſatis eſt argumenti, ſciẽtiam eam per ſe ſua ipſius dignitate & æſtimatione niti, ut eſt quodam loco ſcriptum ab

Ariſtotele,

Ariſtotele, quòd qui res illas exquiſiuerunt, nullo præmio, magna diligentia ſtudióque uehementi illud ſunt aſſequuti, ut paruo temporis interuallo illa permagnum acciperet incrementum, cum ipſi cæteris omnibus poſthabitis huic uni ſtudio ſe totos tradidiſſent: atq; hi maxime, qui diuiniore natura præditi, diuinitatē ſuis factis exprimere, quoad licitum eſſet, elaborauerunt. Itaque uerisſimū illud eſt, ſi qui ſunt, qui conteptui habendum hoc ſtudium exiſtiment, eos ſine guſtu eſſe ſummarum, quæ quidem in homine libero conſtantíque exiſtere poſſunt, uoluptatū. Quid ergo? nunquid habet ea ſcientia quod cōtemni debeat, ea re tantum quod nihil adiuuet cōmunis hominum uitæ neceſſarias utilitates? Nullo certe modo: nam & extremi illius effectus ubi ſe cum materia coniungere incipiunt, eò maxime tendunt, ut paulo poſt dicturi ſumus. Quin eo maiore digna res eſt admiratione, quod citra ullius omnino materiæ contagionem ſuum ipſa finem in cóque fine ſitum bonum perſequatur: & in ſe ipſa conuerſa nihil ſpectet externum. Homines enim rerum ad uſum uitæ neceſſarium cōparandarum occupationibus uacui plane ſolutiq;, ſeſe ad ſciendum ſcientiæque adeptionem contulerunt: neque id tamen non recte, cum prima cura rerum illarum eſſe debeat, quibus natura ipſa ad ſui educationem & tuitionē carere nullo modo poteſt. Huic porro ſi quando ſatisfactū erit, hoc eſt, ſi na turam ducem conſequuti, cupiditatem habendi rerum neceſſariarum modo naturáque metiri uoluerimus, tum uero illa nos cogitatio debet excipere, rerum à neceſſitate generationéque remotarum, & uerum ipſum proxime attingentium: quod cum acciderit, unà quoque id quod in anima noſtra inchoatum & rude fuerat, integrũ abſoluitur & perpolitũ. Scientiæ porro mathematicæ diuiſionem eam attulerunt ueterũ plerique, inter quos & Geminus, ut diceret aliam quidem circa res uerſari ſolo intellectu perceptibiles, aliã uero res ſenſui ſubiectas pertractare. Res autem intelligibiles illas eſſe dixerunt, quarũ intelligentiam ipſe per ſe animus abſque ulla rerum ſenſilium participatione ſeipſum ad contẽplationem excitans perſequitur: cuius generis duæ ſunt præcipuæ potiſſimæq; partes, arithmetica & geometria: alterũ uero genus quod rebus ſenſilibus addictum illa ſex comprehendit, aſtrologiam, muſicam, ſupputatricem, mechanicã, perſpectiuam, menſuratricem. Nam quod ad inſtruendas pertinet acies, (τακτικὸν uocant) in partibus mathematicæ habendum non arbitrãtur, quãuis interdum ipſius auxiliis uti adiuuaríque ſoleat, modo ſupputatricem adhibens, ut in enumerandis copiis, modo & menſuratricem, id eſt, γεωδαισίαν, ubi diuidenda ſunt caſtrorũm metationi campi ſpatia & dimetienda: multo uero minus aut hiſtoriam: aut medendi artem dixeris partem ullam eſſe mathe-

maticæ,

maticæ, licet utraque ipsius ope interdum adiuuetur. Nam & historiæ perscribendæ mathematica theoremata solere scimus appingi, ubi tractus sitúsque regionum, urbium magnitudines, diametros, ambitus colligere uolunt. Ipsi quidẽ medici quàm multa in arte sua, quàm elucidate tractant freti mathematicæ cognitionis subsidio? Nam quod ad astrologiam pertinet, quanta eius in omnem medicinæ partẽ manare possit utilitas, docent de ea re scripti diligenter Hippocratis libri: cæteri quoque omnes, qui modo de tẽpestatum ratione locorúmque situ sibi scribendum putauerunt. Eadem quoque ratio erit eius, qui aciebus instruendis operam accommodat: nam utetur & ipse mathematicis theorematibus: neque tamen continuo mathematici nomine perhibẽdus, licet aliquando q̃ minimos cupiens in speciem uideri suos exercitus ad circuli figurã constituat castrorum ambitum, nonnũquam in quadratum pentagonum aut aliam multorum angulorum formam, ubi quàm maximos apparere cupit. Tales autem primæ species cum sint ipsius mathematicæ, geometria rursus diuiditur in tractatus duos, alterum planorum, alterum solidorum: nam punctorum & linearũ propria nulla omnino ars reperiri potest, cum nulla figura punctis aut lineis constet, quæ non simul plana sit aut solida. Nihil enim aliud agit geometria ulla sui parte, quàm ut plana & solida constituat: constituta inter se com paret aut diuidat. Hoc idem efficitur in arithmetica: nam & numeri diuiduntur in lineares, planos & solidos, quorum omnium singulatim sua est tractatio. Nam & species numerorũ ipsæ per se ab unitate prodeuntes explicantur, & generationes planorum, similium, inquam, & dissimilium, & solidorum etiam, qui tertia quadam multiplicatione confici solent. Illa autem quam mensuratricem dicimus: item alia quam supputatricem superiorum similitudinem nonnullam referentes: ipsæ tamen sunt in eo dissimiles, quòd non de numeris aut figuris intellectu solo comprehensis inuestigant, sed de sensilibus: neque enim munus mensuratricis esse posueris, ut cylindrum aut conum metiatur, sed rerum in materia demersarum aceruos tanquam conos, puteos autem ut cylindros: sed neque lineis quibusdam intelligibilibus id assequitur, uerum sensilibus, & ut exactissime, radiis solaribus: ruditer autẽ, per applicationem amussis lineæ, aut alterius rei non dissimilis opera, quæ materia constet. Quam uero diximus supputatricem, ne ea quidem passiones numerorum ipsas per se cõsiderat, sed numeros rebus materialibus inuolutos: & diuidendo quidem nihil statuit esse minimum, quomodo neque arithmetica: quod tamen spectat ad certum genus unum, ponit aliquid quod sit minimum: unus enim aliquis homo est illi pro mensura totius hominum multitudinis, sicut unitas quoque mensura communis est omnium numerorum. Perspectiua rursus & musica sunt quædam ueluti partes, illa quidem geometriæ, hæc autē arithmeticę. Nam perspectiua uisu nostro ceu linea abutitur, & iis angulis qui ex radiis uisoriis constituuntur: diuiditúrque in eam quæ proprio nomine dicitur perspectiua, causas explicans eorū, quæ aliter quàm sint, apparere solent, ob ipsorum alios atque alios positus & distantias: quales sunt lineæ parallelæ concurrere uisæ: rerum quoque quadratarū figuræ circulari forma conspectæ. item in eam quę in uniuersum specularis dici potest, quæ cuiusq; generis radios fractos siue flexos perscrutatur, uisorum seu imaginum cognitionem adiunctam habēs, simul & illud afferēs, quî fieri possit, uti quod conspicitur, amœnum sit uisu iucundúmq;, nulla partium suarum discrepātia aut deprauatione corruptam imaginem propter interuallū aut eleuationem rei uisæ, oculis spectantium exhibens. Musica uero consonantium numerorum rationes auribus acceptas cū indagasset, canones suos & fides ipsas ita secandas ostendit, ut faciles ad cognitionem nostram illæ sonorum conuenientiæ fierent: cúmque passim ad sensuum delectationē iudiciúmque diuerteret, sermonem Platoni dedit affirmanti eā esse, quæ menti aures ipsas prętulisse uisa sit. Ad illas superiores accedit mechanica, pars & ipsa quædā existens totius tractationis & cognitionis rerum sensilium & materiæ coniunctarum. Huius autẽ generis illa eſt quæ opera & machinas cuiuſque modi efficit ad uſum totius rei bellicę neceſſarium idoneas: qualia multa diuino uir ingenio Syracuſius Archimedes excogitaſſe ſcribitur & conſtruxiſſe, uim permagnam & incredibilem habentia, ipſis quoque Romanis Syracuſas terra maríque obſidentibus formidabilia: quorum tamen ipſorũ nihil apud Archimedem tanti fuerat, ut magno ſtudio dignum arbitraretur: uerum ſicut Plutarchus in Marcello ſcribit elegantiſſime, γεωμετρίας παιζούσης ἐγεγόνει πάρεργα τὰ πλεῖστα: ea tamẽ fuerunt unius hominis ludicra, ut Romanorum uires toti pene terrarum orbi formidabiles diutius eluſerint, nec ante urbis potiũdæ Marcello imperatori clariſſimo ſpes facta fuerit, quàm ex inſidiis noctu, mœnibus per abſentiam Archimedis indefenſis ſcalas admouerit. Fabuloſa hæc profecto uideri poſſint, ſi ad noſtrorũ hominum ingenia, quæ uſpiam ſunt nobiliſſima, conferantur. Verum tamẽ perinique faceremus, ſi primum aliorum induſtriam ex cæterorũ metiri uellemus ignauia: ut quod hi non poſſint, ne illi quidem potuiſſe uideantur. Deinde quî fieri poſſit, quæ præſtantiſſimi quique, iidémque grauiſſimi ſcriptores, non Græci tantum, qui ſuis ambitioſius fauiſſe uideri poſſint, ſed etiã Latini, iíq; Græcis hominibus ſępius iniqui, M. Tullius, T. Liuius in unius hominis laudibus conſentientes ad cælum extulerũt, ut his fidem abrogemus? Quòd

ſine

ſine authoritate quidem ulla ad credendum adducimur, ſunt in oculis manibúsq; noſtris Archimedis ipſius opera, non illa quidem de machinis ipſis aut operibus conſcripta, nihil enim tale ſcriptione dignũ magnopere iudicauit, ſed quæ longe maiora diuinioráque cenſenda ſint, rerum illarum uniuerſalia theoremata, quæ ſi quis uia ordinéque aggreſſus erit, cum iiſdem ueſtigiis inſtiterit, quibus Archimedes & ueteres illi nobiléſq; geometræ, eodem quoque peruenturum ſeſe confidat. Nobis quidem ſi uita ſuppetet, illud in primis curæ futurum eſt, quod adhuc fuit in hoc decimo Euclidis libro, ut difficillimi quique priſcorum geometrarum libri certa ſpe & fiducia intelligendi legi poſſint ab iis, qui modo ſtudiorũ ſuorum rationem ad ueterum normam exigere, ordinémque certiſſimum diſcendi magiſtrum conſeruare uolẽt. Ordinem autem ipſum ſi quis obſeruauerit, nihil præterea putet eſſe, quod ſibi deeſſe poſſit. Sed iam ad inſtitutũ ut reuertamur, ad eas artes quas ante memorauimus accedit & illa, quæ rebus ex ſeſe immobilibus motum attribuit, nunc per quaſdam aſpirationes, quemadmodum perſecuti ſunt Cteſibius & Heron: nunc per librationes ponderúmque momenta, quorum inæqualitas mouendi cauſam affert, æqualitas uero quietis neceſſitatẽ, ut eſt in Timæo: nunc quibuſdã neruis & funiculis attractus & motiones animatorum corporum imitantibus. Eſt & alia gerieris eiusdem, quæ sphæris construendis operam adhibens, circuitus orbium cælestium imitatione consequitur: qualem idem ille nunquam satis laudatus Archimedes effinxit. Astrologia superest disputationem instituens de mundi ipsius cõuersione mirabili, de magnitudine, figura, situ, celeritate, tarditate corporum cælestium: quæ uis sit in illis illuminãdi, qui discessus à terra, qui ad eãdem accessus: & quæ sunt his consequentia, ex sensu quidem & ipsa permultum instructa, nihilo tamen minus cognitioni rerum naturalium familiariter communicãs. Cuius illa pars contemnenda non est, quæ ex normarum & umbilicorum situ, horarum spatia & tempestatum interualla dimetitur: quæq; sublimia uestigando poli cælestis altitudines in quaque terrarum parte, astrorúmque dissitas positiones comprehẽdit, pleraque simul alia persequens, quæ sunt astrologo speculanti proposita. Est & illa quæ dioptrica dicitur per rimulas in sole, luna cæterísq; syderibus celeritates tarditatésque motuũ uenari solita. Eæ quidem sunt partes scientiæ mathematicæ, ita descriptæ à ueteribus mathematicis, quemadmodũ explicuimus. Nunc autem de fine ad quem feratur intendátque, cum hæc tota tractatio elementorum geometricorum, tum ea de lineis rationalibus & irrationalibus, quæ est huius decimi libri propria, pauca quædam afferamus. Qua in re illud sane cum primis est intelligendũ, propositum

duplex

duplex Euclidi fuisse in his quidem libris: aliud quod traditionem rerum perquisitarum respiceret: aliud præterea quod discẽtis animum omnibus modis informaret & erudiret: ut si res ipsæ inuestigationi subiectæ considerandæ sint, dicendũ profecto uideatur toto hoc de geometria sermone nihil aliud quæri, quàm ut nobiles illæ figuræ quinque plane comprehẽsione intelligantur, à quibus mundus hic uniuersus, iudicio quidẽ Platonis, descriptas suas habet partes. Itaq; primum cœpit agi de simplicissimis quibusque rebus: deinde sensim assurgente compositionis structura, eò tandem peruentum est, ut uarietas omnis illarum figurarum aperiretur, & separatim quidem unaquæque prius constituta, tum denique simul omnes eodem globo contentæ inuoluerẽtur, expositis etiam proportionibus, quas lineis lateralibus cuiusque figuræ inter se, quásque superficiebus ipsis, & quas solidis etiam figuris inter ipsas inesse compertum est. Quod autem ad illud propositum attinet, erudiendi eius qui ad hoc studiũ discendum accesserit, huiusmodi est, ut secũdum Elementorũ geometricorum intelligẽtiam perfecte cumuletur animus, absoluatúrq; ipsius habitus & compleatur: quo facile possit ad quamlibet geometriæ tractationẽ comprehendẽdam, ipse sibi sufficere. Ab his enim uelut initiis auspicati, cæterarũ quoq; permultarũ, uel potius omniũ huius sciẽtiæ partium poterimus cognitionem assequi, eiuſdémque multiplicem animo complecti uarie tatem: neque id tantum, quin & illud quoque ueriſſime dici poteſt, ſine iiſdem ipſis reliquorum omnium non obſcuram ſolum, uerum neque omnino poſſibilem eſſe intelligẽtiam. Nam & prima quæque atq; ſimpliciſſima theoremata proxime etiam ad primas hypotheſes accedentia, ſunt his libris ita coagmentata, ut interim nullum ordinem magis cuiq; rei conuenientem afferri potuiſſe cognoſcamus: ex quibus cæterarũ partium ſcriptores ad propoſitũ ſuũ accõmodate, certiſſimis & incõuulſis uſi ſunt ſuarũ demõſtrationum fundamentis. Quo in genere eſt Archimedes, Apollonius Pergæus, & cęteri omnes nõ geometræ tantũ, ſed & aſtrologi, & qui mathematicorũ nomine cenſeri ſolẽt. Hoc autem cum alibi ſemper, tum uero in legendis Conicis Apollonij certiſſimum eſſe nuper ipſi uidimus: ad quæ niſi diligenter inſtructus ab Euclide ueneris, operã plane tibi periiſſe ſenties. Eſt enim Euclidis geometria non ad eorum tantũ cognitionem, quę ſunt de eodem genere ſcripta, neceſſario perdiſcenda, ſed etiam in quauis mathematicarũ ſcientiarũ nihil cuiquã ſatis poterit eſſe notum, qui nõ à geometria profectus peruenerit ad cætera: quam ſi quis ſecundũ Philonẽ eſſe dixerit principiũ & tãquam μητρόπολιν reliquarum omnium mathematicarum, is profecto à rei totius ueritate non aberrauerit. Nam ex illa matrice ueluti quadam urbe populoſa deductæ

ctæ sunt illæ deinceps coloniȩ, quȩ sunt à nobis superius explicatæ. Est ergo finis ille geometricorũ elementorum absolutus discentis habitus, scientiæ uniuersæ capax, traditióque mundanarũ figurarum, quæ sint cuiusq; propriæ fabricationes & inter se conuenientiæ. Id uero de quo conscriptus est hic decimus liber, de commensurabilitate dico & incommensurabilitate, rationalitate & irrationalitate linearum, eò pertinet, ut cum extremum totius operis futurum illud esset exponere, figurarũ, de quibus antea dictũ est, dimensus, ea præfari oportere uisa sunt, sine quibus illud percipi nullo modo posset. In primísque necessarium fuit, quoniã illæ figuræ æqualibus superficiebus, lateribus item & angulis æquis comprehendendæ erant, & eodem globo ita coercendæ, ut quilibet angulus solidus cuiusque figuræ intimam faciem pertingeret, ostendere quanto diameter globi longior esset unoquoque cuiusque figuræ latere. Cúmque uidisset Euclides in pyramide, octaedro & cubo talem esse habitudinem ipsorum laterum ad globi diametrum, quam rationalem esse posuerat, ut essent ipsa inter sese comparata lõgitudine quidem incommensurabilia, sed potentia tamen commensurabilia, ideóque rationalia: in eicosaedro uero & dodecaedro non solum esse inter ipsa latera longitudinis incommensurabilitatem, sed & potentiæ quoque, ob eámque causam illa esse simpliciter irrationalia certæ cuiusdã speciei. Ea ratione priusquã ad illa demonstranda aggrederetur, intellexit omnino sibi faciendũ esse, ut de linearum rationalitate irrationalitatéq; tractatum institueret, quótque & quales essent species irrationalium linearum: ut non appellationibus tãtum discretis notari possent, sed, quod multo certius est ad quãque rem cognoscendam, quid cuique speciei singulatim necessarióque cõueniret, perspicuum fieret. Proinde tractatum illum absolui non posse sine cognitione numerorũ cum facile intelligeret, ideo de ui numerorũ quãtum satis uisum est ad sermonem susceptum, tribus est libris diligentissime commẽtatus. Neque enim ferendus est nescio quorũ hominum error, affirmantium proportiones linearum irrationalium esse non nobis tantum, sed & naturæ ignotas: ob idque potissimum, quòd illæ tales proportiones nõ extent in numeris. Quod si ita esset, primum quàm inanis uideri deberet conatus Euclidis, operam in re per se inexplicabili abutentis? tum autem adeo sunt illustres hoc libro notæ, támque proprij cuiusque ueluti mores expressi, ut quod Euclides conari uisus est, illud abunde perfectéque præstitisse intelligatur. Nobilissimũ itaque totius geometriæ locum à Pythagora philosopho præstantissimo ante patefactum ita perpoliuit excoluítque, ut desiderio nihil reliquerit.

Hæc habui Bellaï amplissime, quæ nõ quidẽ dicere possem, finem enim nullũ habitura esset oratio,

tio, sed quæ cum dixissem, existimaui iuuentutis partem aliquam excitatum iri, ut cuperet imitatione studiorum, ueterum philosophorum nominis gloriam æmulari. Cuius præclarissimæ cōtentionis in animis hominum excitandæ facultatem uiris concessam esse principibus, eámque amplissimam, cum intelligeret Franciscus Rex, huius nostri pater, omnium bonarum artium fidelissimus tutor, patronus atque propugnator acerrimus, iuuit ille quidem mirifice studia literarum: uerum minus profecto quàm uoluit, magis autem multo, quàm licitum illi fuit per quorundam auersas à laudabilissimo studio rationes, atque uolūtates. Illius tu Regis alumnus, illius tu beneficentia ad summos fortunæ dignitatísque gradus, doctrinæ commendatione sublatus, recte constantérque feceris, si quod per te nauiter facis, patrocinium philosophiæ antea quidē à Rege liberalissimo susceptum, ita retinere pergas, ut Margareta Regis filia, iudiciíque paterni, atque animi in bonarū artium studiis, bonorúmque omnium tuitione obseruantissima atque æmula, bene collocatum in te ornando patris beneficium prædicare possit. Permultos autem esse multis in locis cum acceperim, quorum in philosophiæ literis studia, tuis paratissimis opibus alantur & sustententur: hæc autem una mathematica cognitio, cuius tantæ sunt in omni philosophiæ parte commoditates, deserta plane destitutáque reliquorum hominum pre-

Deus de aug[menta]tione.
nullus motus qui ad
habet quantitatem terminum
est aug[mentatio] qz nec motus
localis ibi nec corruptio
ibi nec generatio ulla
nec nutritio aut eiusmodi
motus aug[illegible] [illegible]

sidiis passim iaceat atque ignoretur, tuæ certæ partes illæ sunt, ut huic quoque studio pro tua humanitate per te consultum uelis: ex istóque præclaro tuorum grege, de quo paulò antè dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundissimi atque fructuosissimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi, penitúsque perscrutati, possint cæteros exemplo doctrináque ad sui æmulationem permouere.

Vale. Lutetia Calend. Iulij. 1551.

Errata sic corrigito. Fol.8.uers.9.propositis.fo.15.in fig $\varepsilon\zeta$.eod. fol.uers.18.Quare ε met.fo.20.in fig.$\alpha\zeta$.fo.24.b.uers.22.amplius. uers.26.quam.fol.27.b.uers. 18.secundã.fo.31.uers.ante penul.dele superficiales.fo.34.b.uers.antepen.quàm.fo.43.in fig.lin.α subijce γ.fo.49.ĩ fig.ubi est γ, pone δ.ubi est δ, γ.fo.54.in fig.$\theta\delta$ $\varepsilon\zeta\gamma$.fo. 74.uer.14.binomiũ:alibi.fo.80.uers.19.linea $\delta\beta$.fo.88.uers.21.eo quod.fo.89.in fig.$\varepsilon\theta\lambda$.fol.95.uers.10.uerbis ıj.fol.102.b.uers.13. ideo sic.fol.104.Octogesimũ ubiq;.fol.110.b.uers.21.quàm.fo.114 in fig. sub π scribe v.fol.116.uers.13.per 1.6.fol.127.b.uers.2.quadratum.fol.329.uers.25.linea $\kappa\theta$.fo.132.uers.14.ad $\beta\delta$.fol.134. uers.12.lineæ.fo.135, b.uers.24.lineæ, $\kappa\lambda$.fol.136.uers.13.dictarũ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

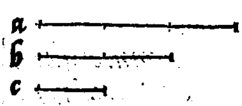
Petro Montaureo interprete.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur illæ, quas eadem mensura metitur.

PROPOSITVM *nobis illud est hunc decimũ elemẽtorum librum (cuius intelligentiam plerique difficillimam suspicantur, neq; uerò possibilem absque auxilio eius partis arithmeticæ, quam multorum scriptis illustratã Algebram uocant) sine omnino ullis numeris irrationalibus dictis ostendere, nõ solùm non difficillimũ, sed etiam facillimum esse, si quis attentum animum & instructum scientia librorum superiorum* Euclidis *afferat: neque porrò cuiusquam externæ scientiæ, nedum algebræ demonstrationibus indigere: sed ex suis ipsius* Euclidis *tãtum demonstrationibus, & familiarissimo ipsi ordine dependere.* Vt *autem clarius intelligatur hæc definitio, prius explanãdum puto, si quid in ea subobscurum contineri uideatur. sic enim præcipiunt dialectici. Cum itaque dicitur aliqua mensura magnitudinẽ aliam metiri: illud intelligitur primùm, ut ea mensura sit minor illa quam metitur, aut ei saltem æqualis. maior enim nullo modo metiri minorem potest. Deinde ut ea mensura semel sumpta si æqualis erit, aut si minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudinem quam metitur, præcise referat. id quod ex numeris* *deprehendi facillime potest. Quãuis enim* Euclides *hac definitione comprænendat magnitudines tantùm quas quantitates continuas appellant, quales sunt lineæ, superficies, & corpora: tamen arbitror non inepte requirendam esse explicationem huius loci à numeris: quum præsertim magnitudines commensurabiles eam habeãt proportionem inter se, quam numerus ad numerum.*

Campanus *uir ex geometriæ studijs laudem nõ immeritò consequutus, illud principium recte inserit cæteris libri septimi principijs, cum græcum exemplar nihil tale habeat.* Numerus *aliũ numerare dicitur, qui secundum aliquem multiplicatus, illum producit. cuius rei hoc sit exemplum.* Ternarius *numerat ternarium per unitatẽ multiplicatus. idem ternarius numerat senarium per binarium multiplicatus: numerat nouenarium per ternarium multiplicatus: numerat* 12 *per* 4: *numerat quoq; cæteros infinitos.* Ille *ipse tamen ternarius alios numeros superioribus interpositos minime numerat.* Nam *neq; unitatem ipsam, aut binarium numerat.* Maior *enim minorem nullo modo numerare potest: sicut in magnitudinibus (ut antè diximus) maior mensura minorem seipsa magnitudinem non metitur.* Neque *uerò ternarius numerat* 4 *aut* 5. *per unitatem enim multiplicatus nihil amplius efficit quàm* 3. *binario uerò multiplicatus, excedit &* 4 *&* 5. *multo magis si alio ternario aut maiore aliquo numero multiplicatus fuerit, eosdem* 4 *&* 5 *excesserit.* Eadẽ *ratio est septenarij, octonarij, denarij & undenarij, si unum ex his quemlibet coneris per ternariũ numerare.* Si *quis autem*

autem erit qui me res nimiū minutas persequi reprehendat: consilium nostrum illud esse sciat, ut librū hūc, non tam natura sua difficilē, quàm ignoratione principiorum, ad intelligendum facillimum reddam his qui amœnißimum hunc geometriæ locū perlustrare uolent. Et certè in maximos errores plerosq; imprudentiæ suæ uitio & principiorum parua siue dicas praua intelligentia turpiter incidisse, neminem dubitaturum arbitror, qui modò nostra legens, ipsarum rerum intelligentiam assequutus erit. De his autem hactenus. nos in uiā redeamus. Dicimus hanc definitionem magnitudinū commensurabilium, siue malis principium nominare, per analogiam quandam ex illo Campani loco plane intelligi. Nam quod dicitur in numeris alios numeros numerantibus: idem aut simile quiddam intelligas in magnitudinibus, quarum alteram dicimus per alterā mensurari. Quod ut planius intelligatur, sumamus exēplum in una specie magnitudinis. Sint duæ lineæ ā & b. quæ si fuerint cōmensurabiles, erit quoque communis utrique aliqua mensura quæ sit c. Nam illa linea c bis repetita, refert præcise lineam b. ter uerò repetita, lineam ā, & ipsa quoque præcise refert.

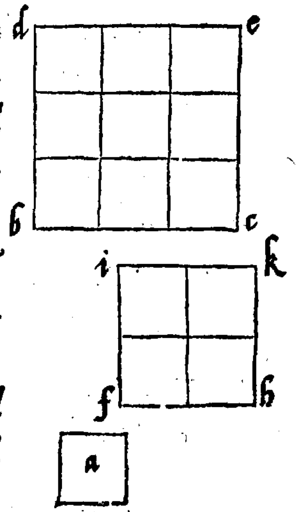


Incommensurabiles verò magnitudines dicuntur hæ, quarum nullam mensuram commūnē contingit reperiri.

Hic locus pluribus uerbis non uidetur indigere, quàm ut *moneamus ex superius dictis intelligendū esse. Contraria enim ex contrarijs intelligi posse receptum est. Porrò accidentia & passiones his congruentes ex ipso Euclide repeti debere sequentium rerum lectio docebit.*

Lineæ rectæ potentiâ commensurabiles sunt: quarum quadrata una eadem superficies siue area metitur.

Quantum ad hunc locum attinet, duo quædam præscribenda puto. Primum, ut intelligamus per hāc uocem, lineæ potentia, quadratū illius. tantum enim dicitur linea posse, quantum quadratum describere potest. Alterum, ut tali distinctione hîc utamur. Linearum hæ quidem sunt longitudine inter se commensurabiles: illæ uerò potentiâ inter se commensurabiles. Alterum membrum linearum longitudine commensurabiliū non explicat Euclides, *quia uisus erat illud comprehēdisse antea uniuersali definitione magnitudinum commensurabiliū.* Nam *lineæ sunt sub genere magnitudinis. Sed quia lineæ habent illud quoque in se propriū & peculiare, præter cæteras magnitudines, ut quædam ex his sint potentiâ cō mensurabiles: hoc uerò sibi nō existimauit prætermittendum.*



Sit linea b c. eius quadratū sit b c d e. sit etiā linea f h. eius quadratū sit f h i k. hæc duo quadrata me-

tiatur

tiatur una quæpiã superficies, uerbi gratia superficies ã, quæ metiatur primò quadratum b c d e, nouies repetita, qui est numerus areolarum in eodẽ quadrato descriptarum. Præterea *metiatur quadratũ f h i* k, *quater repetita, secundum numerum suarum areolarum.* Erit *itaque superficies ã, illa, quæ metitur ea quadrata duo.* Horum *ergo, quadratorũ inquam, b c d e, f h i* k, *latera siue lineæ potentes illa quadrata, quæ sunt lineæ b c, f h, erunt potentiâ commensurabiles.*

Incommensurabiles verò lineæ sunt, quarum quadrata, quę metiatur area communis, reperiri nulla potest.

Hoc loco nihil aliud dico, quàm ut adiuues intelligentiam huius loci additione uocis, potentia, quæ superiori definitioni additur, ut intelligas de lineis illis quæ sunt incommensurabiles potentiâ. quæ cum sint potentiâ incõmensurabiles: illud quoque habent, ut sint præterea longitudine incommensurabiles. hactenus dictũ sit. Quòd si plura hoc quidem loco scire desideres: peruertes ordinem disciplinæ, qui certissimus est ad discẽdũ magister.

Hæc cum ita sint, ostendi potest, quòd quãtacunq; linea recta nobis proponatur: existunt etiam alię lineæ innumerabiles eidem cõmensurabiles: alię item incommensurabiles. hæ quidẽ longitudine & potentia: illæ verò potentia tantùm.

Huius libri præcipuum illud esse uelim scias, quod non, ut cæterorum superiorum, in prima lectione percipi possit eius doctrina, sed iterata & sæpius repetita: eóque fit ut pleraque principia hic scripta, non quidem demonstrentur ex sequentibus: sed melius intelligantur, si cum ad sequentia ueneris, ad principia subinde redeas. Vsus enim harum uocum, qui est in ipsis theorematibus, res illis uocibus expressas faciliores intellectu reddit. Sic itaque faciendum puto hoc quidem loco. Nam sequentes propositiones magnam illi lucem afferent. Tantum enitere ut concipias animo res nudas, quarum significatio his uocibus simplicibus continetur: in quo te iuuabunt ea quæ superius à nobis scripta sunt. Vocetur igitur linea recta, quantacunque proponatur ῥητὴ, id est rationalis. Quam lineam uocari uult ῥητὴν, eam interpretes Latini nominauerunt rationalem. qua ratione ducti, nescio: mihi quidem non ualde probatur. Sit ergo ῥητὴ linea recta quæcunque, de qua sermo institui debeat. Etymologiæ rationem in enuntiatione rerum uocibus simplicibus significandarum, sicut usi sunt ueteres magna diligentia consequuti: ita nobis non contemnendam existimo, ut rerum ipsarum cognitionem adiuuemus. huius uocis ῥητὴ ratio ducta mihi uideri solet ἀπὸ τοῦ εἰρῆσθαι unde τὰ ῥητὰ καὶ ἄρρητα. ῥητὸν illud interpretor quod est effabile, certum, concessum, & determinatum: ac si, uerbi causa, dicas id esse, quod est dicibile, & uoce significari posit. ῥητὴ itaq; erit quæcunque linea, quantacunque magnitudine proponatur. Ideo ῥητὴ nominata, quia datam lineam possumus diuidere in quàm multas partes uoluerimus. Scitum est enim ex nona propositione sexti libri, A data linea iussam partem auferre.

ferre. Quod quum ita ſit, propoſita linea diuiſiones eas admittit, quas animo conceperis: ut dicas, hæc linea quæ proponitur, tot partes habet, tres puta, quatuor aut quinque, quas aut pedes aut paſſus, aut aliud quoduis menſuræ genus eſſe contigerit, ut tres pedes aut paſſus quatuor longa ſit. hæc autem linea, quam ῥητὴν *uoco, omnibus penè propoſitionibus huius libri, & eis maximè quæ à decima incipiunt, fundamenta præſtat: ut niſi hanc primo loco poſueris, & animo conceperis antequam demonſtrationem cuiuſque theorematis attingas, nullum facile intelligas. Eſt enim uelut norma omnium linearum ex qua ipſarum quoque menſura peti debet an ſint rationales necne.* Nam *hæc ipſa* ῥητὴ *quæ hic denominatur, eſt* ῥητὴ *ex ſuppoſitione quod quidem hæc uox* προτεθεῖσα *facile indicat, quaſi dixerit* ὑποτεθεῖσα, *quæ uelut* ῥητὴ *id eſt rationalis primo loco dici poteſt, ut ipſa uoce differat à cæteris lineis rationalibus, de quibus mox agit.* Cuius *rei te perpetuò meminiſſe uelim.*

Lineæ quoque illi ῥητῇ commenſurabiles, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantũ, vocentur & ipſæ ῥηταὶ id eſt rationales.

Hic *locus plane intelligitur ex duabus definitionibus ſupradictis, nempe magnitudinum commenſurabilium, & linearum potentia commenſurabilium.* Obiter *tamen aduertas in his uerbis, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm, quantã cautionem adhibuit* Euclides, *ut uocibus ipſis coniungeret* *res eas quæ natura sua coniunguntur, seiungeretq; contrarias. quod religiosissime mathematici penè omnes uisi sunt obseruare: ut in hoc loco, quia lineæ longitudine commensurabiles, sunt & ipsæ quoque potentia commensurabiles, quum de commensurabilibus longitudine loqueretur, addere uoluit, & potentia. cum uerò de potentia cõmensurabilibus, apposuit, tantùm. Quæ enim lineæ sunt potentià commensurabiles, non cõtinuò sunt & longitudine. Hæ uerò ῥηταὶ id est rationales, quæ hoc loco talem denominationem acceperunt, iam non sunt ῥηταὶ ex suppositione, id quod erat illa prior ῥητὴ: sed sunt tales propter relationem quam habent ad illam. Quia sunt aut longitudine simulq; potentia, aut potentia tantùm, ipsi ῥητῇ quæ primo loco ita dicitur, commensurabiles. Præterea hìc est animaduertendum, uoces illas, longitudine & potentia, aut potentia tantùm, coniungi cum illis uocibus commensurabiles, aut incommensurabiles: illis uerò uocibus, rationales, aut irrationales, nunquam adponi, ut dicantur longitudine siue potentia rationales aut irrationales lineæ. quod Campanus uidetur promiscue usurpasse. Si plura cupis, auidum discendi animũ hìc retineto, ne uestigia authoris, eiusdemq; ducis tui deseras, qui principia quidẽ simplicissime tradenda sibi putauit, ut discentium animos nuda rei notione tantùm informaret. quod & uerius est, & ad docendum magis appositum.*

Quæ verò lineæ sunt incommensurabiles, illi τῇ ῥητῇ id est primo loco rationali, vocentur ἄλογοι id est irrationales.

Illud

Illud intellige de lineis longitudine & potentia incommẽsurabilibus. Nam incommensurabiles potẽtia tantùm, ut eædem non sint longitudine etiam incommensurabiles, esse nullæ possunt. neque hic existimes Euclidem *agere de lineis longitudine tantùm incommensurabilibus, potentia uerò commensurabilibus. has enim nuper posuit inter* ῥητὰς *id est rationales. Vult autem hic lineas omni ratione incõmensurabiles, id est potentia & longitudine uocari* ἀλόγους. *Quòd cum non ita perceptum esset à* Campano*, uidetur homini causam erroris attulisse, quam ipse posteris quoque tradidit, ut mox dicemus. Quid sit* ῥητὴ, & ῥητὸν, *antè dictum est. Quod uerò ad hanc uocem* ἄλογοι *pertinet, ex commẽtarijs* Procli *scire licet,* ῥητὸν καὶ ἄῤῥητον *opponi per priuationem, ut* ἄῤῥητον *sit contrarium* τῷ ῥητῷ: ἄλογον *autem sæpius usurpari pro hac uoce* ἄῤῥητον*, cum tamẽ idem sit* ἄλογον *&* ἄῤῥητον. *hoc* ἀπὸ τοῦ εἰρῆσθαι, *illud* ἀπὸ τοῦ λέγεσθαι, *quæ idẽ significant. Itaque* ἄλογος *linea erit cuius proportio siue longitudo comparata ad longitudinem* τῆς ῥητῆς *id est ipsius lineæ primo loco, & ex suppositione rationalis, nullis numeris referri potest. Neq; putes* ἄλογον *dici per priuationem* τοῦ λόγου *id est proportionis. Est enim sua proportio linearum alogarum inter se non quidem nobis planè incognita, nedum ut naturæ cognitionẽ effugiãt: quod quidã uolunt, alioqui frustrà sumpsisset eam operam* Euclides *hoc quidẽ in libro in quo nihil aliud agit, quàm ut doceat paßiones illarum linearum, & proportiones quas illæ lineæ* ἄλογοι *inter se retinent. Verũ ea ratione dicuntur* ἄλογοι, *quia numeris earum proportio* *reddi non potest. Nam quod isti uocant irrationale, cur ita uocent, non intelligo. Surdas autem lineas dici, quas hic ἀλόγους uocat Euclides, non omnino displicet: quãuis mathematici nõ facile huiusmodi translationes admittant, sed quia propriam huius rei uocẽ deesse agnoscimus, ferri potest hæc translatio. Neque tamen hoc loco prætermittendũ puto, quod Nicolaus Tartalea geometra apud Venetos, & libris eruditis nobis quoq; non incognitus, animaduertit Campanum & reliquos ab eo geometras falso existimauisse radices siue lineas quæ quadrata producunt, illa quidem numero significabilia, sed non quadrato numero, ueluti 10, 11, 12, & similibus, eas inquam lineas ἀλόγους esse id est, ut eorum uerbo utar, surdas: hoc uerò pugnare contra hypotheses Euclidis, qui uoluit eas uocari ῥητὰς id est rationales, quæ sunt ad lineam propositam commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm: ex quo magnas opinionum differentias in plerisque huius libri locis extitisse. hactenus Tartalea. Neque sanè hoc nihil est, neque tamen in eo sunt omnia. Ego uerò illud affirmare non dubitem, hinc cæpisse noctis illius initiũ, quæ tam densas tenebras offuderit ueritati rerum his libris traditarum, quæ docentes & discentes plerosq; omnes diuersos egerint: ut quum ulterius progrederẽtur, nihil amplius intelligerent, quàm se nihil intelligere. nostrum quidem de ea re iudicium cum opus fuerit, afferemus.*

Et quadratum quod à linea proposita describitur, quam ῥητὴν uocari uoluimus, uocetur ῥητόν.

Non uideo quid planius dici possit.

Et

Et quæ sunt huic commensurabilia, uocentur ῥητά.

Hanc uocem commẽsurabilia, intelligas siue sint quadrata, siue aliæ quæcunque figuræ rectilineæ. Scitum est enim cuicunque parallelogrammo, æquale quadratum describere: per ultimum theorema libri secundi, siue per inuentionem lineæ mediæ proportionalis secundum 13 theorema libri 6. quam ubi repereris, colliges statim per 17.6. parallelogrammum rectangulum cõpræhensum ex duabus lineis extremis esse æquale quadrato lineæ mediæ. Simili ratione rursus cuicunq; quadrato parallelogrammum æquale describitur, per inuentionem tertiæ lineæ proportionalis secũdum theorema 11.6. hic uides nihil tale dici de quadratis & cæteris figuris, quale de lineis antea, quarum est & longitudo & potentia commensurabilis. Figurarum enim sola consideratur capacitas, quam longitudo latitudini iuncta determinat.

Quæ uero sunt illi quadrato, ῥητῷ scilicet, incommẽsurabilia uocentur ἄλογα id est surda.

Incommensurabilia hic quoq; accipias, quales quales fuerint figuræ rectilineæ.

Et lineæ quæ illa incommensurabilia describunt, uocentur ἄλογοι. Et quidem si illa incommensurabilia fuerint quadrata, ipsa eorum latera uocabuntur ἄλογοι lineæ. quod si quadrata quidem nõ fuerint, uerùm aliæ quæpiam superficies siue figuræ rectilineæ, tunc uero lineæ illæ quæ describunt quadrata æqualia figuris rectilineis, vocentur ἄλογοι.

Vnum est quod hoc loco animaduertendum putem. Cum dixisset ἄλογα esse quæ sunt incommensurabilia τῷ ῥητῷ, subiungere uoluit de lineis illa incommensurabilia describentibus, & eas uocauit similiter ἀλόγους: cum tamē antea loqueretur de commensurabilibus ipsi ῥητῷ, nihil egit de lineis illa commensurabilia describentibus. hoc autem ea ratione prætermisit, quia satis sibi fecisse uidebatur, & de his innuisse, cum loqueretur de lineis τῇ ῥητῇ cōmensurabilibus, sub illis uerbis, siue potētia tantùm. Nam potentia lineæ est ipsius quadratum, ut antè diximus. Quod si quadratum commensurabile fuerit ipsi ῥητῷ, ipsa quoque linea quæ illud quadratum potest, commensurabilis erit saltem potentia. Itaque per diffinitionem linearum commensurabilium ῥητῇ etiam erit. Extat libellus nomine Aristotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν, quem quidem non esse Aristotelis ex multis locis ipsius facilè intelligitur: eruditio tamen facit, ut attribui debeat alicui ex nobili illa Peripateticorum & docta familia. in eo multa leges intelligentiæ horum principiorum conducentia. Quorum illud unū annotabimus, quod ferè summam totius rei declarationem continere uideri possit. Commensurabilitatem & incommensurabilitatem magnitudinum inter se, natura quidem ipsarum magnitudinum constare. Rationalitatem uerò & irrationalitatem positione fieri, quia quæ primo loco linea sic dicitur, nempe rationalis positione talis efficitur. Aliæ uerò lineæ ad illā relatæ, sunt aut rationa-

les,

les, aut irrationales, quatenus sunt eidem commẽsurabiles aut eidem incommẽsurabiles. Rursus *linea rationalis quæ talis est, quia cõmensurabilis est lineæ illi primo rationali, & ipsa relata siue comparata alteri lineæ, quæ item proponatur primo loco rationalis esse, si eidem fuerit incommensurabilis, dicetur etiam irrationalis.* Itaque *eadem linea alteri atque alteri commensurabilis & incommensurabilis, erit similiter rationalis & irrationalis.* Hoc *autem ideo fit, quia rationalitas, & irrationalitas omnis pendet ex positione, non autem ex natura ipsarum magnitudinum. quod tamen in commensurabilitate & incommensurabilitate aliter est.* Sunt *& communes quædam animi conceptiones, quas hîc omisit* Euclides, *tum quia sunt infinitæ, tum uerò quia sunt eiusmodi, ut eas unusquisque poßit animo modica quadam animaduersione subijcere, ut locus ipse postulare uidebitur: ex quibus tamen illas non prætermittemus, quæ singulis locis conuenientes erunt, quales reperiuntur in demonstrationibus primi & secundi theorematum.*

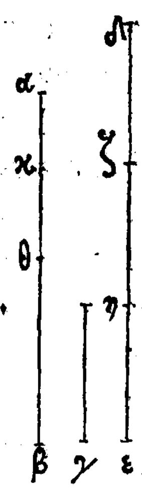
Campanus principijs huius libri illud quoq; inserit, Quamlibet quantitatem toties posse multiplicari, ut quamlibet eiusdem generis quantitatem excedat. quod quidem recte fecit. nam huius principij auxilio statim utitur demonstratio primi theorematis huius libri. De *illa autem magnitudine hic dicit, quam geometræ & cæteri mathematici tractant, ut augeri poßit in infinitum.* Hoc loco *uisum est addere, quod cum alij obscurè,* Proclus *tamen luculentißimè tradit: cuius libros (de ijs* *intelligo quos in Euclidem scripsit) ut omnes qui quidē mathematici fieri cupiunt, studiose legant, uehementer hortor: quibus ego plurimùm debere me, nunquam inficiabor. Quod ad rem attinet, id est huiusmodi, principium illud Campani uniuersaliter quantitatem omnē (siue sit ea quam continuā uocant, siue discreta sit qualis est numerus) comprehendere. Porrò aliud est quod quantitati continuæ soli conueniat, ut in infinitum minui poßit, sicut in linea. Quantacunque enim detur in partes infinitas, minui siue diuidi potest, quarum tamē unaquæque linea erit. Illa porrò itidē in alias quæ eandem naturam retinent: neq; unquam ad minimum ex sectione deuenitur, ne si punctum quidem dicas, quāuis illud per se sit in geometria minimū. Eo fit ut sint lineæ quædam* ἄλογοι, *quarum quidē est inter se quædā proportio, sed numero exprimi nequit, itaque uocatur à Proclo* λόγος ἄῤῥητος. *Nam ubicunque est sectio siue diuisio in infinitum, ibi quoque reperitur illud ineffabile, quod* ἄλογον *dicunt. hoc uerò non ita est in numeris. Nullus enim est numerus quem diuidendo non reducas ad illud minimum quod est unitas, ex quo numeros omnes esse* ῥητοὺς *&* συμμέτρους *necesse est. omnes enim metitur unitas. Nulli igitur sunt numeri* ἄλογοι. *Quod autem ad sequentium theorematum expositionem attinet, hoc habetote, non fuisse consilij nostri initio suscepti operis singulis manum admouere. Actum enim agere hoc quidē esse uidebatur, si quæ à maioribus recte tradita sunt (sunt autem bene multa) hìc describerem. Neque sanè cupiam si maxime poßim, alieno labore partam gloriā*

in

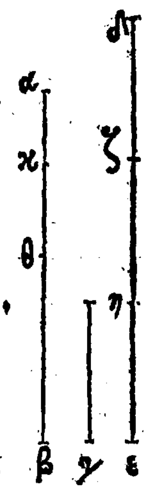
in me trāsferre: sed morem gestum amicis oportuit, qui me ad totius libri cōmentationem impulerunt, ut quam lucem rerum incognitarū obscuritas desyderaret, eam quantum in me esset ingenij, quantúmque diuturnum studiū huius præstantissimæ disciplinæ illud adiuuisset, ipse uobis afferrem, quos ueritatis studio ad rerum acutissimarū & dignissimarū cognitionē rapi intelligo.

Primum Theorema.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositsi, si de maiori detrahatur plus dimidio, & rursus de residuo iterum detrahatur plus dimidio, idq; semper fiat: relinquetur quædā magnitudo minor altera minore ex duabus propositis.



Sint duæ magnitudines inæquales αβ, γ, quarū maior sit αβ: dico si de αβ detrahatur plus dimidio, & de residuo iterū plus dimidio, idq; semper fiat, relinqueturquædā magnitudo minor q̃ magnitudo γ. Nam γ multiplicata erit tādē aliquādo maior magnitudine αβ. multiplicetur & sit δε multiplex quidē ipsius γ: maior uerò ipsa αβ: diuidatúrque δε in partes æquales ipsi γ, quæ sint δζ, ζη, ηε: & detrahatur de αβ plus dimidio, sitq; βθ. rursus detrahatur de αθ plus dimidio, sitq; θκ, idque eò usq; fiat, donec diuisiones magnitudinis αβ tot fuerint quot sunt diuisiones in magnitudine δε. Sint igitur diuisiones ακ, κθ, θβ totidem numero quot sunt diuisiones



δζ, ζκ, κε. hactenus constructio: deinde sequitur demonstratio. Quia maior est δε quàm αβ, & detractum est de δε minus dimidio, scilicet ipsum κε, (quæ quidem detractio intelligitur facta ex superiori diuisione ipsius magnitudinis δε, in partes æquales ipsi γ: diuidendo enim minuitur magnitudo, sicut augetur multiplicando.) de αβ uerò detractum est plus dimidio βθ: residuum ergo κδ est maius residuo θα, quod & uerissimum est, & ad cogitãdum facillimum, si ad principium illud reuocetur (qualia multa sunt in animis hominum penitus insita) residuum maioris magnitudinis post detractum dimidium uel minus dimidio, esse maius residuo minoris post detractum plus dimidio. Cum itaque κδ sit maius quàm θα, detractúmq; sit de κδ dimidiũ, nempe κζ: & de θα sit detractum θκ, quod est plus dimidio totius θα: residuum ergo δζ residuo ακ maius est, ratione principij modo scripti. Atqui δζ est æquale ipsi γ ex consensu & suppositione: ergo etiam magnitudo γ est maior magnitudine ακ. quod idem est ac si dicatur, minorem esse ακ ipsa γ. relinquitur itaque de magnitudine αβ, magnitudo ακ minor ea quæ ex duabus propositis minor erat. Quod erat demonstrandum. Dictio autem illa ἄλλως, in exemplari græco postponẽda est post ea uerba ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡμίσεα ἦ τὰ ἀφαιρούμενα. Hunc ordinem in demonstrationibus perpetuò retinet Theon, quem compositorium uocant.

Nunc

Nunc autem tractemus resolutorium per syllogismos resoluentes theorema in sua principia indemonstrabilia. Sic ergo agamus. Omnis magnitudo minor δζ, *est minor* γ. *Omnis* ακ *est minor* δζ. *Ergo omnis* ακ *est minor* γ. *Quod si cupis propius accedere ad terminos ipsius theorematis: sit maior terminus, esse minorem altera minore ex duabus inæqualibus propositis. minor uerò sit illa pars prior theorematis duabus inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore: iterumq; de residuo, tali continuata detractione perpetuo residuũ ipsum. Medius terminus sit, minorem esse altera magnitudine, quæ æqualis est ipsi minori ex duabus propositis. itaq; dices,*

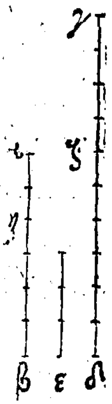
Omnis magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis, est minor minore ex duabus propositis. Duabus inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore, itidémque de residuo continuata tali detractione perpetua, residuum est, magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis. Ergo duabus inæqualibus propositis magnitudinibus detracta &c. residuum est magnitudo minor minore ex duabus propositis. Maior propositio est principium indemonstrabile & per se notum, quod uniuersalius dici solet, quæ æqualia sunt inter se, ad idem eodem modo se habere. Minor uerò probatur ex illis uerbis demonstrationis. Residuum ergo δζ *residuo* ακ *maius est. quod idẽ ualet ac si dicatur* ακ *esse minus, quàm* δζ. *Sit ergo syllogismus per resolutionem: reuocetúrque res ad ele-*

menta, quomodo solet uti geometræ, ut paucioribus uerbis concludatur demonstratio, eoq; promptius ab intellectu nostro comprahendatur. Primò quia composita est propositio minor, qualitas illa adiecta prædicato, quæ æqualis est minori, probatur ex consensu & suppositione præcedentibus. Maiorem uerò terminum inesse minori sic probabis: Residuũ minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detractoq; dimidio de maiore: de minore uerò detracto plus dimidio, est minus residuo maioris. Sed α κ est residuum minoris ex duabus magnitudinibus nempe ex θ α, η λ &c. Ergo α κ est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ ζ, ergo α κ est minus λ ζ. Maior uerò cõtracta est ex principio uniuersali. Si ab inæqualibus inæqualia auferas, residua sunt inæqualia, & minus id quod residuũ est, eius à quo plus ablatum est. Quantum ad minorem propositionem attinet, illud solùm probatione indiget, α κ esse residuum minoris. primò residuum esse patet, ex suppositione. Quod uerò magnitudo θ α (cuius residuum est α κ) sit minor magnitudo η λ, patet ita. Residuum minoris magnitudinis ex duabus inæqualibus, detractoq; minus dimidio de maiore: de minore uerò plus dimidio, est minus residuo maioris. Sed θ α est residuum minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus, detractoq; minus dimidio ex maiore λ ι: de minore uerò α β plus dimidio &c. Ergo θ α est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ η, ergo θ α est minus quàm λ η. Maior patet ex principio indemõstrabili. Minor uerò probatur, primò quòd θ α sit residuum. probatur ex suppositione,

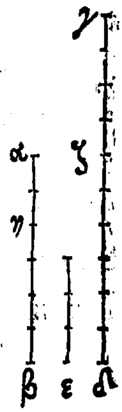
ſitione, propter detractionẽ factam. Quòd uerò α β ſit minor quàm δ ι, patet ſimiliter ex ſuppoſitione & principio: quamlibet quantitatem toties poſſe multiplicari &c. Addit Theon hoc quoq; theorema uerum eſſe, etiã ſi partes detractæ ſint dimidiæ. Quòd uerò dicitur in theoremate, Si detrahatur plus dimidio, eò pertinet ut ſi minus dimidio detrahatur, non ſemper uerum ſit reſiduum eſſe minus minore ex duabus propoſitis.

Secundum Theorema.

Duabus magnitudinibus propoſitis inæqualibus, ſi detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reſiduum unquam metiatur, id quod ante ſe metiebatur, incommenſurabiles ſunt illæ magnitudines.



Sint magnitudines duæ inæquales α β, γ δ: minórq; ſit α β: detractaq; per detractionem alternatim, & ſemper cõtinuatã minore de maiori: id quòd relinquitur ex ea quæ maior fuerat ante detractionẽ, nunquam metiatur hoc ipſum, quod antequã id reliquum fieret, metiebatur maiorem magnitudinem. Dico incommẽſurabiles illas eſſe magnitudines α β, γ δ. Quod ſi neges, illud cõtinuo affirmas, commẽſurabiles eas eſſe. Porro ſi ſint commenſurabiles, metietur eas quædam communis magnitudo per diffinitionem linearum commenſurabilium. Metiatur itaque, ſi fieri poteſt: eáque ſit ι, detrahaturque de maiori *magnitudine γ δ pars quædam, puta δ ζ quæ sit æqualis maiori magnitudini α β: aut si æqualis non erit, sit tamen huiusmodi, ut illa minor magnitudo α β aliquot uicibus repetita, repræsentet ipsam magnitudinem δ ζ. hoc enim est quod dicitur, magnitudinem α β metiri δ ζ: talique detractione facta, minoris inquam de maiore, relinquatur ex maiore portio quædam γ ζ minor magnitudine α β. hoc uerò est quod dicitur in theoremate, neq; residuum unquam metiatur id quod ante se erat. Similiter de α β detrahatur portio quædam β κ æqualis magnitudini γ ζ, relinquatúrque ex ea detractione portio α κ minor quàm γ ζ, idque semper si sit, opus fiat, saltem dum relinquatur quædam magnitudo minor ipsa magnitudine ε. hoc enim tandem euenire necesse est, per primum theorema huius, Si propositis illis duabus magnitudinibus inæqualibus α β, ε, (quarum minor ex consensu & suppositione tua erat ε. hanc enim posuisti esse communem mensuram duarũ magnitudinum α β, γ δ, itaque minorem alterutra) de maiore α β detrahatur plus dimidio, itémque de residuo plus suo dimidio: itaque relicta sit α κ minor quàm ε. hactenus ea quæ ad structuram pertinẽt. nunc ad demonstrationem ueniamus. Cum igitur magnitudo ε metiatur magnitudinẽ α β, ipsa uerò α β metiatur δ ζ: etiam ε metietur similiter magnitudinem δ ζ per commnnem cõceptionem. Si magnitudo quædam metiatur aliam, metietur quoque omnem aliam ab ea mensuratam. cui simile quiddam*



appoſuit

appoſuit Campanus in numeris inter principia ſeptimi. Itaque ι *metietur* $\delta\zeta$. *eadem etiã magnitudo* ι *metitur totam magnitudinem* $\gamma\delta$ *ex tua ſuppoſitione. poſitum enim eſt eam eſſe communem menſuram ambarũ* $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. *Ergo* ι *metietur & ipſum reſiduum, quod eſt* $\gamma\zeta$, *per illam communem conceptionem, Quæ magnitudo metitur aliam totam, & partem ab ea detractã, metitur quoque reliquã. Idem in numeris poſuit Campanus. Cum itaque* ι *metiatur* $\gamma\zeta$: $\gamma\zeta$ *autem metiatur* $\beta\kappa$: *ipſa quoque* ι *metietur* $\beta\kappa$ *per ſuperiorem illam conceptionem. Atqui* ι *metitur totam magnitudinem* $\alpha\beta$: *itaque per alteram conceptionẽ metitur reſiduum* $\alpha\kappa$. *Metietur ergo maior magnitudo aliam ſe ipſa minorẽ. hoc autem fieri nullo modo poteſt, ut antè diximus inter principia. Non igitur illas magnitudines* $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ *metietur ulla magnitudo. Incommenſurabiles igitur erunt* $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. *Duabus itaque magnitudinibus propoſitis inæqualibus et cæt. quod demonſtrandum erat.*

Hæc demonſtratio concluſa eſt per deductionem ad impoſsibile. Poſitum eſt enim contradictorium concluſionis uerum. ex qua propoſitione per plures gradus ſyllogiſmorum deuentum eſt tandem ad id quod falſiſsimum eſt, nempe maiorem magnitudinem eſſe quæ minorem metiatur. Quia ergo ex ueris nunquam colligitur falſum: nunc autem concluſa eſt hæc falſitas, neceſſe eſt poſitionem illam tuam falſam extitiſſe. quod ipſum per deſtructionem conſequentis oſtendi poſſe tradunt dialectici. Falſum autem eſt maiorem metiri minorem. quod conſequens erat ad illud antecedens, *duas magnitudines α β, γ δ esse commẽsurabiles. sequitur ergò ipsum antecedens falsum esse.* Incommensura*biles ergo necesse est esse α β, γ δ.* Verum *ex quibus medijs processerit illa conclusio falsa, maiorem magnitudinem metiri minorem, uideamus per resolutionẽ, sitq́; syllogismus huiusmodi·* Omnis *magnitudo metiens totam magnitudinem α β, & de ea detractam κ β, metitur residuum α κ.* Magnitudo *ι est magnitudo metiens totam α β, & detractam κ β.* Ergo *magnitudo ι metitur residuum α κ. falsa est conclusio, quia positum fuit α κ esse minorem quàm ι.* Maior *est indemonstrabilis, cõtracta ex principio uninersali: quod quale esset, antè retulimus.* Minoris *uerò probatio quia plura continet, hinc petẽda est.* Primò *ex suppositione magnitudo ι metitur totam α β. deinde quòd eadem ι metiatur detractam partem quæ est κ β, ita probatur·* Omnis *magnitudo metiens magnitudinem γ ζ, metitur & κ β, quam γ ζ metitur. ι metitur γ ζ, ergo ι metitur & κ β.* Maior *similiter est per se nota ex principio uniuersali·* Quæcun*que magnitudo metitur aliam, metitur & eam quam ipsa metitur.* Minor *uerò sic probatur·* Omnis *magnitudo metiens totam magnitudinem γ δ, & detractã δ ζ, metitur & residuum γ ζ. ι metitur totam magnitudinem γ δ, & detractã δ ζ, ergo ι metitur γ ζ.* Maior *iterum per se nota est ex principio.* Minor *uerò quia duo membra habet, ita probatur:* Primò *ι metitur totã magnitudinem γ δ ex suppositione: deinde quòd eadem ι metiatur δ ζ, ita probandũ est·* Omnis *magnitudo metiẽs α β, metitur & δ ζ quam metitur α β. ι metitur α β,*

ergo

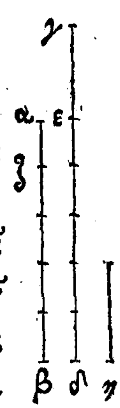
ergo ε metitur & δζ, quam metitur αβ. Maior uerissima est, & per se nota. Minorē uerò falsam esse ideo necesse est, quia causa fuit illius conclusionis falsæ, nempe quòd maior magnitudo minorē metiatur. Non erit itaque ε communis mensura ambarum magnitudinū αβ, γδ. Idem reperies, si quācunque aliam magnitudinē posueris pro communi illarum mensura. Quia igitur nulla reperiri potest, erunt illæ magnitudines incommensurabiles, quod demonstrandum erat. Ex hoc elicitur πόρισμα *siue corollarium à destructione consequentis.*

Si duæ magnitudines inæquales propositæ nō fuerint incommensurabiles, sed fuerint commensurabiles: continuata detractione minoris alternatim facta de maiore, necesse est residuum metiri id quod ante se metiebatur.

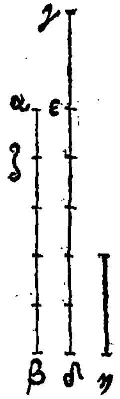
Tertium Theorema.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarū cōmunē mensurā reperire.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles αβ, γδ: quarum minor sit αβ: oportet itaque magnitudinum αβ, γδ maximam communem mensuram reperire. Primum ipsa magnitudo αβ aut metitur γδ, aut nō metitur. Si itaque αβ metitur γδ, seipsam quoque cū metiatur, ipsa ergo αβ est communis mensura magnitudinum αβ, γδ. Manifestum porrò est maximā quoque eam ambarum mensuram communē esse. Nam nulla maior magnitudo quam αβ metietur ipsam αβ. Sed ne metiatur αβ ma-



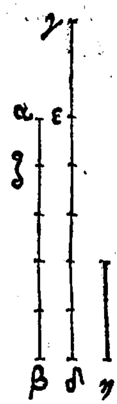
gnitudinem γδ. Detracta igitur per mutuã detractionem minore de maiori, residuũ metietur aliquando id quod ante se est per præcedens corollarium. Nam datæ sunt magnitudines αβ, γδ esse commensurabiles. itaque magnitudo αβ metiendo εδ partem magnitudinis γδ, relinquat magnitudinem εγ se αβ inquam minorem. Ipsa uerò εγ metiendo magnitudinem ζβ partẽ magnitudinis αβ, relinquat similiter αζ se εγ inquam minorem.



Ipsa uerò αζ metiatur magnitudinem γε. Illud autẽ est metiri, id quod ante se est, quãdo nihil relinquitur post mensurationem factam. hactenus constructio. sequitur statim demõstratio. Cum igitur αζ metiatur magnitudinem γε: γε autẽ metiatur ζβ: ergo αζ metitur magnitudinem ζβ. Sed αζ metitur seipsam: ergo αζ metietur αβ. Sed quia αβ metitur δε: ergo αζ metietur δε. Sed eadem αζ metitur γε: totam ergo γδ metietur: ergo αζ metietur ambas magnitudines αβ, γδ, earúmq; cõmunis mẽsura erit. Dico præterea illam esse communẽ utriusque maximam mensuram. Quod si neges illam esse maximam mensuram: erit itaque magnitudo quædam maior quàm αζ, quæ metiatur utramque αβ, γδ. ea uero sit η. Cum igitur per te η metiatur αβ: ipsa autem αβ metiatur εδ: ergo η metietur εδ. ipsa etiam η per te metitur totam γδ: ergo metietur & residuũ γε. Sed cum γε metiatur ζβ, etiam η metietur ζβ. metitur uerò eadem η per te totam αβ: ergo metietur & residuũ αζ. Itaque magnitudo maior metietur minorem: quod sane

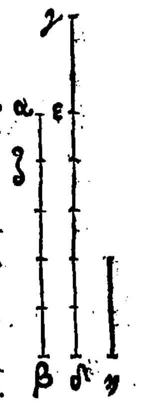
fieri

fieri nullo modo potest. Nulla ergo maior magnitudo quàm αζ metietur utramq; αβ, γδ: ergo αζ est maxima earum communis mensura. Duarum igitur magnitudinum commensurabilium αβ, γδ reperta est communis maxima mẽsura, nempe αζ. quod faciendũ fuit.



Corollarium.

Ex hoc cõcluditur, si magnitudo quæpiam duas alias magnitudines metiatur, metietur quoque & communem utriusq; maximam mẽsuram. Hoc corollarium probatur ex postrema parte demõstrationis. Sint duæ magnitudines αβ, γδ, quarum sit maxima communis mensura αζ: sit porrò alia κ quæ etiam metiatur utramque αβ, γδ. dico magnitudinem κ metiri αζ. Sint eædem suppositiones quas modò posuimus. Cum igitur κ metiatur αβ: αβ autem metiatur εδ: ergo κ metietur εδ. Sed κ metitur etiam totã γδ: metietur ergo & reliquum γε. Sed quia γε metitur ζβ: ergo κ metietur ζβ. sed metitur totam αβ: metietur ergo & reliquum, quod est αζ. ergo κ metiens utrãque αβ, γδ, metietur & maximam utriusque communem mensuram, nempe αζ. Docet Proclus differentiam inter problemata & theoremata geometrica eã esse, ut problemata sint ea quæ proponunt aliquid fieri oportere, qualia sunt omnia quæ uerbo infinito concipiuntur, ut reperire, cõstituere, secare, & similia. Theoremata uerò sunt quæ asserendo ponunt & definiũt de unoquoq; accidente cuiusque subiecti, qualia sunt duo prima huius libri. Hoc autem 3. problema est. Huius ergo pro-



blematis demonstrationem sic resoluere nos oportet. Primùm aggrediamur partẽ eã quæ syllogismo directo & categorico cõcludit ipsam magnitudinẽ αζ esse cõmunem mensurã magnitudinũ αβ, γδ. Omnis magnitudo metiens magnitudines γε & εδ, metitur totam γδ. Sed αζ metitur γε & εδ: ergo αζ metitur totam γδ. Maior patet ex principio indemonstrabili. Quæcũq; magnitudo metitur duas, *metitur etiam compositam ex illis, cuius simile ponit Campanus in numeris inter principia libri septimi.* Minoris pars illa quod αζ metiatur γε, patet per corollarium secundi theorematis. Quòd uerò eadẽ αζ metiatur εδ, probatur. *Omnis magnitudo metiens αβ, metitur δε mensuratam ab αβ. Sed αζ metitur αβ: ergo αζ metitur δε.* Maior patet ex principio. Quæcunq; magnitudo metitur aliam, metitur quamcunque mensuratam ab ea. Minorẽ ita probabis: *Omnis magnitudo metiens magnitudines αζ, ζβ, metitur & totam compositam ex illis αβ. Sed αζ metitur αζ, ζβ: ergo αζ metitur totam αβ.* Maior ex principio eodẽ patet. Minoris pars quod αζ metiatur αζ, patet etiam ex eo, quia omnis magnitudo seipsam metitur per unitatem. Quòd uerò αζ metiatur ζβ, probatur sic. *Omnis magnitudo metiens γε, metitur & ζβ mensuratã ab ea. Sed αζ metitur γε, ergo αζ metitur ζβ.* Maior pendet ex principio. Minor etiam pendet ex antè dictis. Nunc uerò restat persequẽda pars illa demonstrationis, qua ostẽditur magnitudinem αζ communem utriusque αβ, γδ mensuram, esse

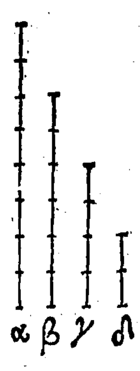
præterea

præterea maximam ambarum cõmunem mensurã: hoc autem fit per deductionem ad impossibile. Nam *si neges illam* α ζ *esse mensuram maximam communem utriusque magnitudinis* α β, γ δ, *sit alia maior quàm* α ζ *maxima communis utriusque mensura quæ sit* κ. T*unc dico te deductum iri ad illud impossibile: magnitudinem maiorem, nempe* κ *metiri minorem, scilicet* α ζ. Manen*tibus enim his quæ superius posita sunt.* Omnis *magnitudo metiens totam* α β, & *de ea partem detractam* ζ β, *metitur & residuũ* α ζ. Sed κ *metitur totam* α β & *detractam* ζ β: *ergo* κ *metitur* α ζ. Maior *est indemõstrabilis.* Minor *sic probatur.* Primum κ *metitur totã* α β *ex tua positione.* Q*uod uerò eadem* κ *metiatur* ζ β, *probo.* Omnis *magnitudo metiens* γ ι *metitur* ζ β *quam* γ ι *metitur.* Sed κ *metitur* γ ι, *ergo* κ *metitur* ζ β. Maior *rursum nõ eget probatione.* Minoris *probatio hinc deducitur.* Omnis *magnitudo metiens totam* γ δ & *eius partẽ* δ ι, *metitur & residuũ* γ ι. Sed κ *metitur totam* γ δ & *eius partem* δ ι, *ergo* κ *metitur* γ ι. Maior *item est indemonstrabilis.* Minoris *probationẽ sic deduces.* Primũ *quod* κ *metiatur totam* γ δ, *patet ex tua positione.* Q*uòd uerò eadem* κ *metiatur* δ ι, *sic agas.* Omnis *magnitudo metiens* α β, *metitur* δ ι *mensuratam ab ea.* Sed κ *metitur* α β: *ergo* κ *metitur* δ ι. Maior *est indemonstrabilis.* Minor *patet ex tua positione quãdo uoluisti* κ *esse communem maximam mensuram utriusque nẽpe* α β, γ δ. *ex qua quia sequitur illa cõclusio falsa, scilicet maiorem* κ *metiri minorẽ* α ζ, *necesse est illã tuam positionem falsam extitisse. nam ex ueris nõ sequi falsum* *compertum est. Ergo κ non erit communis utriusque maxima mensura. idemq́; fiet si quăcunq; aliam posueris. Constat igitur α ζ esse communem maximam utriusque mensuram. Quod autem hoc problemate proponitur inquirendum, id licet in theorema conuertere collecta summa totius demonstrationis, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus & commensurabilibus: si minor metitur maiorem, illa est communis maxima utriusque mensura: sin minus, facta mutua detractione quandocunque residuum metitur id quod ante se metiebatur postremo, illa est communis utriusque mẽsura atque ea maxima. Simili ratione poteris ex quocunque problemate theorema efficere.*

Quartum Theorema.

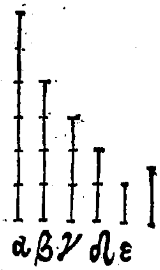
Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram reperire.

Sint datæ tres magnitudines cõmensurabiles α, β, γ, oportet ipsarum communem maximam mensuram reperire. Sumatur maxima communis duarum priorum α, β, mensura per præcedens problema, sitq́; δ: hæc magnitudo δ, aut metitur magnitudinem tertiam quæ est γ, aut eam non metitur. metiatur prius. Hactenus constructio huius partis, nunc ad demonstrationem. Cum itaque δ metiatur γ, metiaturq; magnitudines α, β, Ergo δ metietur α, β, γ: ipsarúmque communis men-



sura

ſura eſt. Præterea hanc eſſe illarum maximam communem menſuram conſtat hac ratione. Nam *nulla magnitudo maior quàm δ metietur illas α, β, γ. Quod ſi fieri poſſe defendis, ſit magnitudo ε maior quàm δ, quam dicis metiri magnitudines illas α, β, γ. Cum itaque ε per te metiatur α, β, γ, metitur duas priores ex illis ſcilicet α, β: & præterea maximam cōmunem utriuſque menſuram, nempe δ per corollarium præcedēs. Ergo ε maior quàm δ, metietur ipſam δ, quod eſt impoſsibile. Sed ne metiatur δ magnitudinem γ, hoc primum dico magnitudines γ, δ eſſe commenſurabiles. quod ita demonſtratur. Cum ſint commenſurabiles datæ magnitudines α, β, γ, metietur eas profectò quædam magnitudo quæ ſimiliter metietur ſeparatas ex illis duas α, β. Quare metietur quoque maximam communem utriuſque menſuram, nempe δ.* Metitur *etiam ipſa eadem magnitudinē γ. Quare metietur utrāque γ, δ. Ergo γ, δ ſunt commenſurabiles ex definitione. Sumatur itaque maxima communis mēſura ambarum γ, δ, ſitq́; ε. Hactenus conſtructio huius partis, nunc eſt demonſtratio. Quoniā ε metitur δ, & δ metitur magnitudines α, β, itaque ε metietur α, β. metitur præterea magnitudinem γ. Ergo ε eſt communis mēſura trium α, β, γ. Dico autem illam etiam eſſe maximam. Nam ſi fieri poteſt ut ε non ſit maxima menſura communis trium α, β, γ, ſit quædam maior quàm ε, magnitudo ζ, metiatúrque tres illas α, β, γ. Cúmq; ζ metiatur α, β, γ, etiam metietur α, β, & ipſarum maximam*



commununem utriusque mensurã, nempe δ. Metitur præterea ipsa ζ magnitudinem γ. ergo ζ metitur γ, δ, & ambarum communem maximã mensuram, nempe ι, maior uidelicet magnitudo minorẽ. hoc uero fieri nullo modo potest. Nulla ergo maior quàm ι magnitudo metietur magnitudines α, β,

γ. Ergo ι est maxima trium dictarum communis mensura, siquidem δ non metitur magnitudinem γ. Quòd si δ metitur γ, ipsamet δ erit communis trium maxima mensura. Datis igitur tribus magnitudinibus commensurabilibus, reperta est ipsarum communis maxima mensura, quod faciendum erat.

Corollarium.

Ex *hoc manifestum relinquitur, si magnitudo tres magnitudines metiatur, metiri quoque maximam communem ipsarum mensuram. Similiter etiam in pluribus magnitudinibus maxima illarum communis mensura reperitur. In illis quoque uerum erit hoc corollarium. Huius corollarij demonstratio continetur in postremis uerbis ipsius* Theonis. *itaque dices: Sint tres magnitudines α, β, γ, quarum communis maxima mensura sit ι. sit porrò alia ueluti ζ, ipsa quoque metiẽs tres illas magnitudines, dico ζ metiri ι. Demonstrationẽ autem requires ab illis uerbis. Cumq; ζ metiatur α, β, γ etiã metietur α, β usque ad ea uerba, Maior uidelicet. Hæc demõstratio quia uarias partes habet, singulæ uerò pluribus syllogismis cõtinẽtur: singillatim omnes resoluemus. Primò si δ communis maxima mensura ambarum* harum α,β metiatur γ, per se clarum est magnitudinem δ esse communem mensuram magnitudinum α,β,γ. Quod uerò eadem δ sit earumdem communis mensura maxima, hinc liquet per deductionem ad illud impossibile, Maiorem magnitudinem metiri eam quæ se ipsa minor est. Nam si negas δ esse maximam mensuram, sit quæuis maior quàm δ, uidelicet ε metiens illas α,β,γ. Ex hoc sequitur ε metiri ipsam δ, quod falsum est & impossibile, cum maior non metiatur minorem.

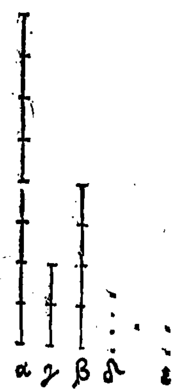
Omnis magnitudo metiens α,β, metitur δ maximam α,β, mensuram. Sed ε metitur α,β: ergo ε metitur δ. Maior patet, quia collecta ex corollario superioris problematis. Minor patet ex tua positione. quam tamen falsam esse constat, quia causa est falsitatis illius ex ea consequentis. Verum est itaque δ esse communem & maximam trium mensuram, si modò δ metitur γ. Sin autẽ δ non metiatur γ, illud imprimis uerum esse dico (quod ueluti lemma quoddã demonstrandũ est antequã eatur ulterius) magnitudines γ,δ, esse cõmẽsurabiles. Omnes magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet ϑ, sunt cõmensurabiles. Sed γ,δ sunt magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet ϑ: ergo γ,δ sunt cõmẽsurabiles. Maior patet ex definitione. Minor patet ex eo, quia α,β,γ, positæ sunt cõmẽsurabiles per cõmunẽ mẽsurã, uidelicet ϑ. sic itaq; probabitur Omnis magnitudo metiẽs tres α,β,γ, metitur duas priores, & maximã mẽsuram duarũ priorũ nempe δ, per corollarium præcedentis theorematis. Sed ϑ metitur tres α,β,γ. ergo ϑ metitur δ. Quod autẽ ϑ metiatur γ, patet ex positione. Cũ *igitur θ metiatur utrãq; γ,δ, sequitur ex definitione ambas γ,δ esse cõmẽsurabiles.* Sit maxima cõmunis mẽsura ipsarũ γ,δ, quæ uocetur ι. Dico primo ipsam ι esse cõmunem mensurã trium α,β,γ sic probari. Omnis magnitudo metiens δ, metitur α,β, mensuratas à δ. Sed ι metitur δ, ergo ι metitur α,β. Maior patet ex principio. Minor uerò ex suppositione quando positum est ipsam ι esse maximam communem mensuram duarum γ,δ, ex eadem etiam suppositione ι metiebatur γ. Ergo ι metitur α,β,γ, estq; earum communis mensura. Dico præterea eandem ι esse communem maximam mensuram earũdem trium. sin minus, esto magnitudo quædã maior quàm ι metiẽs illas, sitq; ζ. Ex hac positione sequi uidebis illud idem impoßibile, maiorem ζ metiri minorẽ ι. Omnis magnitudo metiens γ,δ, metitur ι communem maximam utriusque mensuram. Sed ζ metitur γ,δ, ergo ζ metitur ι. Maior patet ex corollario superiori. Minor uerò ita probatur. Primò quod ζ metitur γ, patet ex suppositione, quia positũ est eam metiri singulas α,β,γ. Quod uerò eadem ζ metiatur δ probatur. Omnis magnitudo metiens α,β, metitur & δ communem utriusque maximam mẽsuram. Sed ζ metitur α,β, ergo ζ metitur δ. Maior patet ex corollario. Minor uerò à te posita est, quæ cum sit unica caussa illius falsæ conclusionis, necesse est ipsam quoq; falsam esse. Nulla ergo alia magnitudo quàm ι erit communis illarum trium maxima mensura. Hoc autem problema potes redigere in formam theorematis hoc modo: Si maxima mẽsura duarum primarum ex tribus commensurabilibus magnitudinibus

tudinibus metitur tertiam, illa eſt communis maxima menſura trium. ſin minus, maxima menſura tertiæ & maximæ menſuræ duarum primarum eſt cõmunis maxima menſura trium.

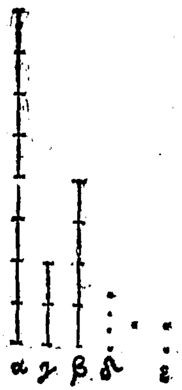
Quintum Theorema.

Cõmẽſurabiles magnitudines inter ſe proportionẽ eam habent, quã habet numerus ad numerũ.

M*agnitudines dicũtur inter ſe proportionem habere, quã habet numerus ad numerum, quãdo quæ proportio eſt inter illas magnitudines, ea reperitur inter aliquos numeros, ut puta ſi magnitudo magnitudini ſit, uel æqualis, ut numerus 2 numero 2: uel dupla, ut numerus 4 ad 2: uel tripla, ut 6 ad 2: uel in alia quauis multiplici proportione. Idem de ſuperparticulari, ſi magnitudo ſit ſeſquialtera ad magnitudinem, ut numerus 3 ad numerum 2. Idem de aliis ſpeciebus ſuperparticularis proportionis. Idem de ſuperpartienti, de multiplici ſuperparticulari, & de multiplici ſuperpartienti, quæ ſunt omnia proportionum genera, quæ in numeris reperiuntur. Sint magnitudines commẽſurabiles α, β. Dico ipſas habere proportionem inter ſe, quã numerus aliquis ad aliquem aliũ numerum. Nam cùm ſint commenſurabiles α, β, ſit γ cõmunis earũ mẽſura, & quoties γ metitur α, (id eſt quot partes reperiũtur in α æquales ipſi γ) tot ſint unitates in numero δ. quoties uerò eadem γ meti-*



tur β, tot ſint unitates in numero ε. Sequitur demonſtratio. Cum itaque γ metiatur α toties quot ſunt unitates in δ numero, ipſáque unitas metiatur numerũ δ toties quot ſunt in ipſo δ unitates. totidem ergo uicibus γ metitur α, quot uicibus unitas metitur numerum δ. Ergo γ eandem proportionem habebit ad α, quam unitas ad numerum δ. per conuerſam etiam proportionalitatem erit ut α ad γ: ſic numerus δ ad unitatem. Rurſum cum γ metiatur β toties quot ſunt unitates in numero ε: metiatúrque unitas numerum ε toties, quot ſunt in eo unitates. tot uicibus itaque γ metietur β, quot uicibus unitas metitur numerum ε. Ergo per æquam proportionalitatem (hanc uerò uocat Euclides δι' ἴσου λόγου) *quam proportionem habet magnitudo α ad magnitudinem β, eandem habet numerus δ ad numerum ε.* Itaque *commenſurabiles magnitudines, puta α, β, inter ſe proportionem eam habent, quam numerus δ ad numerum ε. quod demonſtrandum erat.*



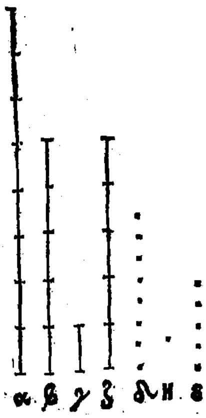
Reſolutio.

Omnia extrema duorum ordinum continentium æqualẽ numerum magnitudinum coniugatarum in eadẽ proportione, ſunt & ipſa in eadem proportione. Sed α, β, & δ, ε ſunt extrema duorum ordinum, &c. Ergo *α, β, & δ, ε ſunt in eadem proportione.* Maior *patet ex* 22.5. Minoris *pars prior ſcilicet α, β & δ, ε eſſe extrema duorum ordinum æqualem numerum continentiũ magnitu-*

magnitudinum patet ex suppositionibus admissis in cōstructione. Quod uerò magnitudines contentæ in illis ordinibus sint in eadem proportione coniugatæ, id est singula paria prioris ordinis cum singulis paribus alterius sint proportionalia, probatur ita· Primò *quòd γ, β habeant eandem inter se proportionem quam unitas & numerus ι, δ. Omnis magnitudo metiens β tot uicibus, quot uicibus unitas metitur ι, habet ad β eandem proportionem, quam unitas ad numerum ι. Sed γ tot uicibus metitur β quot uicibus unitas metitur ι.* Ergo *γ habet ad β eandem proportionem, quam unitas ad numerum ι.* Maior *per se patet contracta ex definitione proportionalium, quæ est in principiis lib. 5. de quibus doctissime disserentem lege* Petrum Nonium Lu*sitanū.* Minor *uerò concessa est per suppositionem. Quod uerò α, γ habeant eam proportionem quam numerus δ ad unitatem, probatur eodem modo· Omnis magnitudo quam metitur γ tot uicibus quot unitas metitur numerum δ, habet ad γ eandem proportionem quam numerus δ ad unitatem. Sed α est magnitudo quam metitur γ tot uicibus, &c.* Ergo *α habet ad γ eandē proportionem quam δ ad unitatem.* Maior *probatur eodem modo quo superior:* Minor *item patet ex suppositione.* Vt *uerò reperias numeros duos, quorum proportionem habeant inter se duæ magnitudines commensurabiles, uide quot uicibus mensura earum communis unamquāque metiatur.* Numeri *enim uicibus illis expressi retinent eam proportionem, quam magnitudines commensurabiles.*

Sextum Theorema.

Si duæ magnitudines proportionem eam habent inter se quam numerus ad numerum, commensurabiles sunt illæ magnitudines.



Duæ enim magnitudines α, β, inter se habeant eam proportionem, quam numerus δ ad numerum ε. Dico cõmensurabiles esse magnitudines α, β. Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales quot sunt unitates in numero δ (hoc uerò idem est ac si uelis quamcunque partem auferre de magnitudine α, quod quomodo fiat, docet 9.6.) sitque magnitudo γ æqualis uni ex illis partibus æqualibus ipsius α. sit etiam alia magnitudo ζ composita ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi γ, quot unitates sunt in numero ε. Hic incipit demonstratio. Cùm igitur tot magnitudines æquales ipsi γ sint in magnitudine α, quot sunt unitates in δ, quota pars ipsius δ est unitas, eadem pars erit magnitudo γ magnitudinis α. Est ergo ut γ ad α, ita unitas ad δ. metitur uerò unitas numerum δ. ergo & γ metietur α. Et quia est ut γ ad α, sic unitas ad numerum δ. conuersa igitur proportione erit ut α ad γ, sic numerus δ ad unitatem. Rursùm quia quot sunt unitates in numero ε, tot sunt in magnitudine ζ magnitudines siue partes æquales ipsi γ. Erit itaque ut γ ad ζ, sic unitas ad ε. Nuper uerò conclusum est sicut α ad γ, ita

numerus

numerus δ ad unitatem. Per *æquam igitur proportionem erit ut α ad ζ, sic δ ad ι. Sed sicut δ ad ι, ita se habet α ad β.* Itaque *etiam ut α ad β, similiter se habebit α ad ζ.* Ipsa *igitur magnitudo α ad utranque β, ζ, eandem proportionem retinebit.* Aequalis *est igitur magnitudo β magnitudini ζ per secundam partem* 9. 5. Sed *γ metitur ζ, ergo metietur β.* Sed *& eadem γ metitur α, igitur γ metitur α, β. commensurabiles igitur sunt magnitudines α, β.* Si *ergo duæ magnitudines &c. quod demonstrandum fuit.*

Resolutio.

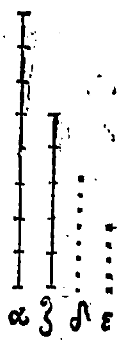
Omnes magnitudines quas eadem mensura metitur, sunt commensurabiles. Sed *magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, metitur eadẽ mensura, puta γ.* Ergo *magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt commensurabiles.* Maior *patet ex definitione commensurabilium magnitudinum.* Minoris *uerò pars illa quòd γ metiatur β, ita probanda est.* Magnitudo *ζ est magnitudo β, quia æquales. γ metitur ζ, ergo γ metitur β.* Minor *patet ex concessione supposita inter construendum, illis uerbis,* Sit *etiam alia magnitudo ζ.* Maior *sic probatur.* Omnes *magnitudines ad quas eadem magnitudo, puta α eandem proportionem habet, sunt æquales.* Sed *ζ, β sunt huiusmodi. ergo ζ β sunt æquales.* Maior *patet ex secunda parte nonæ quinti.* Minor *uerò ita probetur.* Omnes *proportiones æquales eidem proportioni, puta ei quæ est inter δ, ι numeros, sunt inter se æquales.* Sed *proportiones inter α, ζ & α, β sunt æquales eidẽ proportioni, puta quæ est* *inter δ,ι. Ergo proportiones inter α,ζ & α,β sunt inter se æquales. Maior patet ex undecima quinti. Minoris pars illa, quòd proportio inter α,β sit æqualis ei quæ est inter δ,ι numeros, patet ex suppositione. Quòd uerò α,ζ eandem habeant proportionem quam δ,ι, probetur sic. Omnia extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum coniugatarũ in eadem proportione, sunt & ipsa in una & eadẽ proportione. Sed α,ζ, & δ,ι sunt extrema duorũ ordinũ, &c. Ergo α,ζ & δ,ι sunt in una & eadem proportione. Maior patet ex 22.5. Minoris uerò pars prior scilicet α,ζ & δ ι esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum, patet ex suppositionibus admißis in construendo. Nam primus ordo est α,γ,ζ. Secundus uerò est δ,κ,ι. κ enim est loco unitatis. Quòd uerò magnitudines in his ordinibus cõtentæ sint in eadem proportione cõiugatæ, probetur. Et primo loco α,γ habere inter se eandem proportionẽ quam δ ad unitatem κ, patet ex suppositione admissa inter cõstruendũ illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales, &c. Quanuis ea pars syllogismo quoque demonstrari poßit. Omnes quatuor magnitudines inter se proportionales, sunt quoque conuersa proportione proportionales. Sed γ,α,κ unitas & δ sunt magnitudines proportionales. Ergo γ,α,κ & δ sunt conuersa proportione proportionales. Maior patet per corollariũ quarti theorematis libri quinti. Minor uerò patere potest ex suppositione, illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur. Secundum erat in illa minore γ, ζ habere eandem pro-*

portionem

portionem quam unitas & ε. quod quidem etiã patet ex suppositione inter construẽdum admissa illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ. Quantum ad alteram partem minoris assumptæ in primo syllogismo, nempe γ metiri magnitudinem α, ea quoque patet ex illa suppositione, Nam magnitudo α diuidatur, &c. Nihilominus potest & ipsa syllogismo demõstrari: sed quia est ex suppositione nota, nihil est opus syllogismo.

Corollarium.

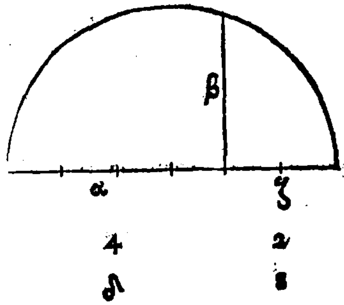
Ex hoc fit manifestũ, si fuerint duo numeri ut δ, ε, & recta linea ut α, dari posse aliam lineam ad quam linea α retineat eandem proportionem quã numerus δ ad numerum ε. Diuidatur linea α in tot partes æquales quot sunt unitates in altero numero δ per nonam sexti, & cõponatur altera linea, puta ζ ex tot partibus, quæ sint æquales partibus lineæ α, quot sunt unitates in altero numero ε. itaque linea α erit ad lineã ζ sicut numerus δ ad numerũ ε. Hac ratione potes cuicunque lineæ propositæ, aliã dare commensurabilem in longitudine. Nam si duæ lineæ habent proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt inter se quoque longitudine commensurabiles, per hoc theorema 6. Quod uerò sequitur in exemplari græco, continet, subobscurè tamen lemma quoddam, ipsum etiam alieno loco positũ. inuenitur enim inter alia lemmata post 29 theorema huius libri, uerbis conceptis in formam problematis.



Lemma.

Duobus numeris datis, & linea recta, oportere efficere ut numerum ad numerum: sic quadratum lineæ datæ ad quadratum alterius.

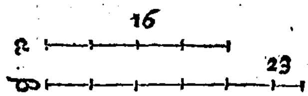
Sint dati numeri δ, ι: recta uerò sit α: propositúmque sit efficere id quod præcipitur hoc problemate. reperiatur igitur per postremum corollarium linea ζ, ad quam linea α sit in ea proportione in qua numerus δ ad numerum ι: sumatúrq; inter duas illas lineas α, ζ media proportionalis per tertiam decimam sexti, sitque β. Cum igitur sit sicut numerus δ ad numerum ι, ita linea α, ad lineam ζ. & quemadmodum se habet linea α ad lineam ζ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, per secundum corollarium uicesimæ sexti. Itaque sicut numerus δ ad numerum ι, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β.



Septimum Theorema.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerũ.

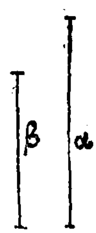
Magnitudinum non habẽtium proportionem inter se quã numerus ad numerum, nullum exemplum efferre possumus in numeris, sicut fecimus in 5 huius. nam impossibile est numerum ad numerum nõ habere proportionem quam numerus ad numerum. Sint magnitudines incommensurabiles α, β. Dico α, β nullam omnino



proportionem inter se talẽ habere, qualis inter ullos numeros reperitur. Quod si contradicatur α, ß habere proportionem inter se quam numerus ad numerum: sequitur illud continuo, commensurabiles quoque esse α, ß per sextum theorema huius libri. Sed hoc theorema ponit illas esse incommensurabiles. Nullo igitur modo α habebit proportionem ad ß, quam numerus ad numerum, quod demonstrandum fuit. Hic *modus argumentationis & certissimus est, & breuissimus: sumiturque ex syllogismis hypotheticis, quem à destructione consequentis uocant. Illúdque in uniuersum uerum esse deprehendes, quotiescunque in disciplinis mathematicis aut aliis quibuscunque, quæ nomine censentur scientiarum, reperiuntur duæ conclusiones ex earum numero, quas conuersas uocant, quales sunt quintum & sextum theorema huius libri: in his potentia contineri præterea alias duas conclusiones & ipsas conuersas, contrario tamen modo quàm superiores, quales sunt hoc theorema & proximum.*

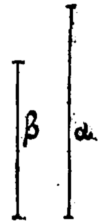
Octauum Theorema.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.



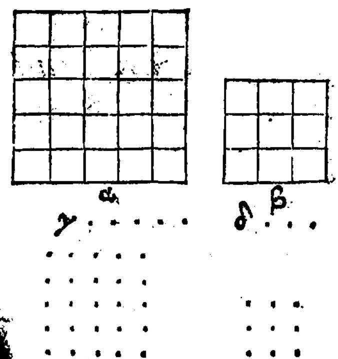
Duæ enim magnitudines α, ß, inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum. Dico incommensurabiles esse magnitu-

dines α,β. Quòd ſi contradicas, uidelicet cõmenſurabiles eſſe, habent ſtatim proportionem quam numerus ad numerum, per quintum theorema huius. ſed hoc theorema ſupponit eas non habere. incommenſurabiles ergo ſunt magnitudines α,β. Si igitur duæ magnitudines, &c. quod demonſtrandum fuit.



Nonum Theorema.

Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine commẽſurabilibus, inter ſe proportionẽ habent, quã numerus quadratus ad alium numerũ quadratum. Et quadrata habentia proportionem inter ſe quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habebunt quoque latera longitudine commenſurabilia. Quadrata verò quæ deſcribuntur à lineis longitudine incommenſurabilibus, proportionem non habent inter ſe quã quadratus numerus ad numerum alium quadratũ. Et quadrata non habentia proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque latera habebunt longitudine cõmenſurabilia.



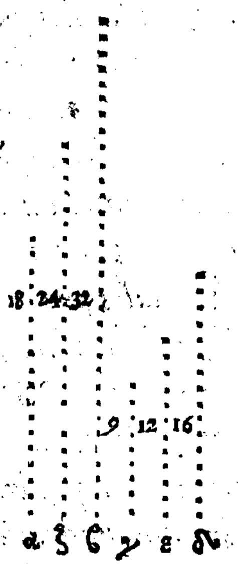
Quia difficile uidetur hoc theorema, dignum quoque uiſum

sum est, quod pluribus modis demonstraretur. Nos uerò *antequam ad demonstrandum accedamus, nonnulla præfabimur de significatione uocum siue terminorum huius theorematis, quæ rem totam illustrabũt.* Hoc sane *theorema & quæ proxime sequuntur, huiusmodi sunt, ut nisi plane percipiantur, res alioqui non difficillimæ inexplicabiles uideri poßint.* Imprimis *illud intelligendum est, lineas esse longitudine commensurabiles, & lineas habere proportionem inter se quam numerus ad numerum, idem esse.* Vt *quæcunque lineæ sunt longitudine commensurabiles, habeant etiam proportionem inter se quam numerus ad numerum. & contrà, quæ lineæ habent proportionem inter se quam numerus ad numerum, sint quoque longitudine commensurabiles, ut patet ex 5. & 6. huius libri.* Similiter *illud conuertitur, lineas esse longitudine incommensurabiles, & non habere proportionem quam numerus ad numerum, ut patet per 7 & 8 huius.* Itaque *intelligi debet quod dicitur in hoc theoremate, de lineis longitudine commensurabilibus, & longitudine incõmensurabilibus.* Sed *dicat aliquis, priusquã* Euclides *docuit modum reperiendi lineas longitudine incommensurabiles, tractat de quadratis ipsarum, cum tamen contrà fieri oportere uideri poßit. prius enim exquiri debet de re aliqua an sit, quàm quid ei accidat, consyderetur.* Nos *uerò dicimus* Euclidem *quidem tradere modum reperiendi lineas longitudine incommensurabiles in theoremate* 11. *quod est in* Græco 10. *neque tamen peruerse quicquam fecisse.* Nam *hoc theoremate sumit has* *lineas longitudine incommensurabiles ex hypothesi, neque amplius quicquam sibi demonstrãdum hoc quidem loco assumit, quàm ex illa hypothesi scilicet linearum longitudine incommensurabilium quadrata non habere proportionem, & cætera. Quod ubi uerum esse demonstrauerit, sat fecisse uidebitur. Ex hoc autem theoremate gradum sibi faciet ad inuestigationem linearum illarum in theoremate undecimo. Illud præterea intelligendum est quid uocibus illis significetur, habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod ut assequi posis, repetenda tibi sunt nõnulla theoremata, eorúmque demonstrationes ex arithmeticis suprà scriptis: atque ea maxime quæ agunt de numeris similibus superficialibus ex quibus est uicesimumsextum octaui. Numeri similes plani inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Similes uerò plani numeri sunt (ut est in principijs libri septimi) qui habent latera proportionalia. Latera uerò cuiusque numeri sunt, ex quibus inter se multiplicatis, singuli numeri producuntur. ex illo theoremate 26 octaui constat non solos numeros quadratos habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratum, sed eandem etiam proportionem habere numeros omnes similes superficiales inter se. Neque uerò idem est numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque hæc inter se conuerti possunt. Quãuis enim numeri quadrati habeant proportionem quã*

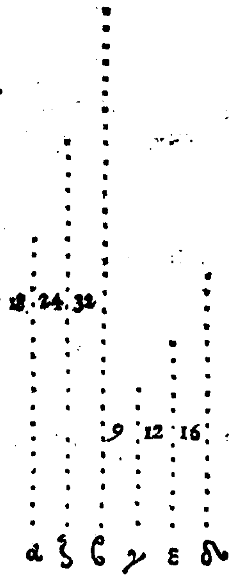
numerus

numerus quadratus ad quadratum; non ideo tamẽ omnes habentes proportionẽ quam quadratus ad quadratum sunt quadrati. Sunt enim similes superficiales & iidem non quadrati, qui tamen proportionẽ habent quam quadratus ad quadratum, quanuis omnes quadrati sint similes superficiales. nam inter duos numeros quadratos incidit unus medius proportionalis, per 11.8. *Si uerò inter duos numeros incidat unus medius proportionalis, illi duo numeri sunt similes superficiales per* 20.8. *Dico præterea illud theorema* 26.8. *conuerti.* D*uo numeri habentes inter se proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum sunt similes superficiales: cuius rei illa demõstratio afferri potest.*

Sint duo numeri α, β habentes proportionem inter se quam quadratus ad quadratum. Illi duo numeri aut ambo simul sunt quadrati, aut ambo simul sunt nõ quadrati. (de illis autẽ non intelligimus hic quicquam dicere, quorum alter est quadratus, alter uerò non quadratus. tales enim non possunt habere proportionem quã numerus quadratus ad numerum quadratum, per 24.8. *à destructione consequẽtis.) Ergo si ambo sunt quadrati, sunt etiam similes superficiales, ut modo conclusum est. Si non sint quadrati, sint illi duo quadrati γ, δ, quorum proportionem habeant α, β. quia ergo α, β habent proportionem inter*

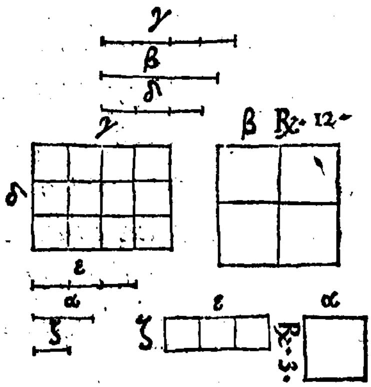


ſe quã γ, δ, & inter γ, δ incidit unus medius proportionalis puta ε, per 11. 8. Ergo inter α, β incidet unus medius proportionalis, puta ζ per 8.8. Sed ſi inter duos numeros nempe α, ϛ unus medius incidat proportionalis, illi duo numeri ſunt ſimiles ſuperficiales, per 20.8. Ergo numeri α, ϐ ſunt ſimiles ſuperficiales. Duo ergo numeri habẽtes proportionẽ quã quadratus ad quadratum, ſunt ſimiles ſuperficiales. Ex his intelligi poteſt numeros habentes proportionem inter ſe quam quadratus ad quadratum eſſe aut quadratos, aut ſimiles planos id eſt ſuperficiales. Similes uerò ſuperficiales qui ſint, intelligitur quidem ex definitione. ſed quibus notis ſtatim agnoſci poſſint numeri propoſiti, an ſimiles ſuperficiales ſint nec ne, ſic habetote. Primùm ſi inter duos numeros propoſitos non incidit medius proportionalis, illi duo numeri non ſunt ſimiles ſuperficiales per 18.8. à deſtructione conſequentis. Quòd ſi incidit medius proportionalis, ſunt illi ſimiles ſuperficiales per 20.8. Deinde duo numeri ſimiles ſuperficiales multiplicatione alterius in alterum facta, producunt numerum quadratum, per primam 9. Ergo ſi non producunt quadratũ, non ſunt ſimiles ſuperficiales. Quòd ſi fecerint quadratũ ex multiplicatione ſui ipſius, ſunt illi ſimiles ſuperficiales per 2.9. Quo uerò facilius apprehendantur conſequentes demonſtrationes, & ſimul



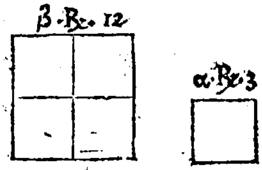
exemplum

exemplum adducamus eorum quæ diximus. Sit linea *γ longa pedes quatuor. sit & alia linea δ longa & ipsa pedes tres, reperiaturque media proportionalis per 13.6. quæ media proportionalis sit linea β. Ergo quadratum lineæ β. erit æquale parallelogrã-mo rectangulo quod fit ex lineis γ, δ, per 17.6.*



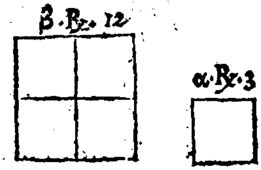
Quod quadratum continebit pedes 12, sicut & parallelogrammum ex lineis γ, δ. Sit etiam linea ι longa pedes 3, & linea ζ longa pedem 1, media proportionalis inter lineas ι, ζ, sit α. Quadratum lineæ α, erit pedum trium, sicut & parallelogrammum ex lineis ι, ζ. Dico *quadratum lineæ β quod est 12. pedum, habere proportionem ad quadratum lineæ α, quod est pedum triũ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ.* Nam *quemadmodũ se habet numerus 12. ad numerum 3, ita se habet quadratũ lineæ β, quod est 12 pedum, ad quadratũ lineæ α quod est 3. Sed numeri 12 & 3 sunt similes superficiales, quia latera numeri 12 quæ sunt 2 & 6, sunt proportionalia lateribus numeri 3, quæ sunt 1. & 3.* Ergo *quadratum lineæ β quod est 12, habebit eam proportionem ad quadratũ lineæ α, quod est 3, quam habet numerus similis superficialis ad similẽ superficialem.* Sed *numeri similes superficiales habent proportionẽ inter se quam numerus quadratus ad nu-*

merum quadratum qui sunt 4 & 1, per 26. octaui. Ergo quadratũ lineæ ϐ quod est duodecim, habebit proportionem ad quadratum lineæ α quod est 3, quam numerus quadratus ad quadratum, eam scilicet quam quaternarius ad unitatem



quæ est quadrupla proportio. Nam quadratum maius quod est duodecim, continet quater quadratum minus quod est 3, quia latus quadrati duodecim quod est linea ϐ, est duplum ad latus quadrati 3 quod est linea α. Habet ergo linea ϐ ad lineã α proportionẽ quã numerus ad numerum. Ergo sunt longitudine commensurabiles per 5 huius, quæ est hypothesis necessaria ad conclusionẽ eius passionis siue prædicati hoc theoremate comprehensi, nempe quadrata talium linearum habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sic & numerus denominãs maiorem extremitatem proportionis lineæ ϐ ad lineã α, qui est 2. si in se ducatur reddet quadratum numerum nempe 4. similiter & numerus denominans minorem extremitatẽ nempe 1, si ducatur in se, nihil amplius efficit quàm 1. quæ unitas est etiam potentia quadratus numerus. Ergo quadratum lineæ ϐ ad quadratum lineæ α habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, nempe quàm 4. ad 1. Ex hoc uides (quod modò dicebamus) non idem significare numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratũ. Nam numeros

meros 12 & 3 quadratos nō esse constat, cum tamē quadrata eos numeros continentia illam proportionem habeāt. Sed & latus quadra-

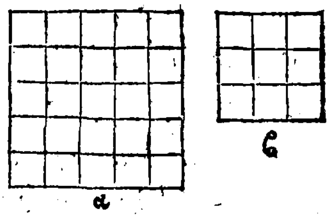


ti 12, quanuis numero per se exprimi nequeat, ut dicas latus illud est longū tot pedibus, qui pedes quadrati numero 12 complent totum illud quadratum: tamen ad aliud relatum siue comparatum, nempe ad latus quadrati 3, quod nec ipsum per se numero possis exprimere, ad latus inquam quadrati 3, proportionem duplam habet. Nam quadratum quadruplum ad aliud quadratum (ut quadratum lineæ β quod est 12, ad quadratum lineæ α quod est 3) habet latus suum duplum ad latus alterius quadrati, per illud uniuersale corollarium 20. 6. Similes figuræ habent proportionem inter se suorum laterum relatiuorum duplicatam. Quòd si dicas latus quadrati 12 numerari posse, quia eius proportio quam habet ad latus quadrati 3 numeratur per binarium, cū sit proportio dupla: illud primùm fac cogites, non esse id quod dicitur per se numerari aliquam magnitudinē, sed illius proportionem. Magnitudo autem illa scilicet latus quadrati 12 per se numeraretur, quādo nulla habita ratione proportionis ipsius ad aliud, dicere possemus, Quadrati continētis pedes quadratos 12, latus est longum tot pedibus, quorum numerus in se ductus efficeret numerum illum 12. sed hoc fieri non potest, quia 12 non est numerus quadratus. Sic itaq; dices: Quatenus quadratum illud 12 per se consyderatur, nulla habita *ratione proportionis ad aliud, sed tantum ut est 12 pedum, non habet quidem latus per se numerabile, sed si conferatur ad aliud, puta ad quadratum 3 pedum, tũc dices, latus quadrati 12 est 2. latus uerò quadrati 3 est 1. sed hæc est denominatio ipsius proportionis quæ dupla dicitur. quæ proportio non potest esse aut consyderari in paucioribus terminis quàm duobus, cum sit relatio ad aliud, hoc est in prædicamento ad aliquid.* Itaque *binarius non est numerus pedum talium quales 12 sunt in ipso quadrato.* Deinde *si binarius esset latus quadrati 12, ut dicas illud latus esse duo, ex multiplicatione duorum in se, non efficeretur illud quadratum 12, sed quadratum aliud quod esset 4 pedum, quemadmodum ex binario numero in se ducto fit quadratus numerus quaternarius.* Sed *nec si dicas illud latus quadrati 12 numerari alio ullo numero, duxerisq́; numerum illum in seipsum, unquam efficitur duodenarius numerus.* Cũ *tamen omnes numeri denominantes latus cuiuscunque quadrati multiplicatione sui ipsius, illum ipsum numerum efficiant denominantem quadratum, cuius latera denominant, puta 2, multiplicatione sui in seipsum reddit 4. ternarius reddit 9. quaternarius reddit 16. & similiter cæteri omnes.* Non *igitur idem est aliquas magnitudines habere inter se proportionem quam numerus ad numerum, & numerari per se singulas ex illis nulla ratione habita proportionis, ut hîc latus quadrati 12 per se quidem numerari nullo modo potest sed comparatum ad aliam magnitudinem, puta ad latus quadrati 3, numeratur illius proportio.* Sic & *latus ipsius*

quadrati

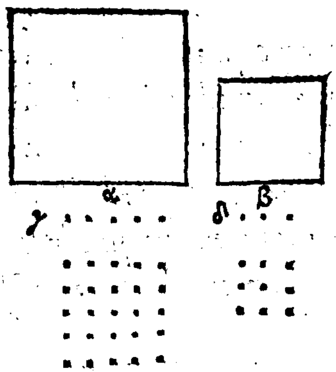
quadrati; & cæterarum omnium figurarũ quas geometræ quadratas uocant, quarum areæ tamen per numeros quadratos non designantur. Quod uerò dicimus, manifestum est ex uerbis ipsius Euclidis in theorematibus 5, 6, 7, & 8 huius libri, cum ubique dicat commensurabiles & incommensurabiles magnitudines non quidem per se numerari, sed habere aut non habere proportionem quam numerus ad numerum. Quæ res non bene animaduersa uidetur plerisq; caussam erroris attulisse, ut ex sequentibus planum fiet. Nunc uerò qui aggreßi sunt demonstrationem huius theorematis magis particularem aliquam demonstrationem nonnullis uideri possent attulisse, quàm uniuersalem. Et sane non deesse arbitror qui illorum dicta secus intelligant, cum existiment ab eis suppositas esse lineas quasdam non tam longitudine commensurabiles, quales in theoremate supponuntur esse, quàm numero certo singillatim numerabiles. Itaque non intelligentes, illud de demonstrationibus illorum dicere potuerunt: cũ ea ratione credidissent à se conclusum illud uniuersale quod est in hoc theoremate Euclidis, Quadrata descripta ex lineis longitudine commensurabilibus habere proportionẽ inter se, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: illud particulare tantum concluserunt, Quadrata descripta ex lineis numero certo per se numerabilibus habere proportionem &c. Quod tamen aliter est, & demonstrationes illorum rectæ sunt, & proposito theorematri conuenientes. Tantum pictura figurarum quas græcus codex habet, posset ambi-

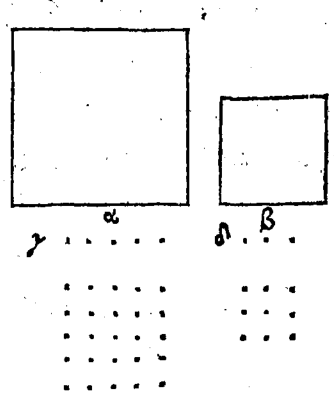
guitatis aliquid afferre. Nam ita pinguntur quadrata, & describuntur certis areolis, ut earũ numerus quadrato numero denominetur. Ex quo uideri posset lineas α, β, quæ describunt ipsa quadrata, oportere esse numero aliquo per se numerabiles, ut



linea α sit pedum 5, & linea β pedum 3, ueluti pictura ipsa refert hîc. Quod tamen non supponit Euclides, *sed unum illud supponit & requirit eas esse longitudine cõmensurabiles, ut in superiori exẽplo de quadratis duobus, quorum alterum spatium totum est 12, alterũ uerò est 3. Nam quanuis latera ipsorum non sint numero aliquo certo per se numerabilia, sunt tamen ipsa eadem longitudine cõmẽsurabilia.* Præterea *hæc pictura quadratorum α, β per areolas distinctorum illum errorem efficere posset, ut quis existimet idem esse numeros duos quadratos esse, & habere proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerũ. nam numerus areolarum in quadrato α, est numerus quadratus, nempe 25 productus ex radice 5, quæ est longitudo ipsius lineæ α.* Similiter *numerus areolarum quadrati β est quadratus, nempe 9, & ipse productus ex suo latere 3, longitudine inquã ipsius lineæ β.* Nos *uerò nuper ostẽdimus aliud esse numeros quadratos dici, & habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Itaque *quantũ ad illas areolas attinet contentas maiore quadrato lineæ α, quæ sunt numero 25, exprimunt numerum illum quadratum 25, qui efficitur*

tur ex numero 5 in se ducto. qui numerus 5 est maior extremitas proportionis inter 5 & 3, quæ est proportio linearum α, β. Hæc autẽ proportio, nempe numeri 5 ad 3 facit ut lineæ ipsæ α, β sint inter se longitudine commensurabiles per 6 huius. Idem *dices de minoris quadrati areolis.* Neque *necesse est intelligere illas areolas quadratas esse, aut pedes aut passus quadratos conficiẽtes ipsa quadrata, quanuis tales esse possunt, si modò latera ipsorum quadratorũ sint tot pedibus longa, nempe 5 aut 3.* Omnino *tamen necesse est numeros ambos exprimentes numerum pedum aut passuum quadratorũ ipsis quadratis comprehensorũ esse simul aut quadratos, ut in his figuris quadratis linearum α, β: aut ambos esse similes superficiales, ut in superioribus quadratis quæ erant 12, et 3. de quibus numeris constat ex antedictis eos esse similes superficiales, itáq; habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Itaq; *potes pingenda tibi proponere ipsa quadrata linearum α, β, ut nullam distinctionem areolarum in se recipiãt, sintq; quadrata singula plane uacua, solisque quatuor lineis æqualibus cõtẽta. quod ut intelligatur, demonstrationes ipsas explicabimus.* Sint *duæ lineæ α, β longitudine commẽsurabiles.* Dico *quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β habere proportionẽ quã quadratus numerus ad quadra-*



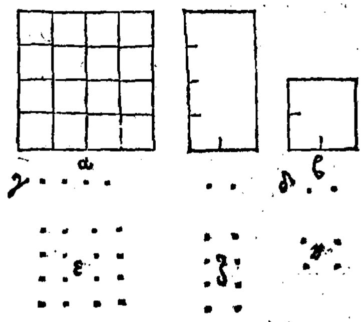


tum numerum. Cum enim commensurabilis sit longitudine linea α lineæ β. Ergo α ad β habet proportionē quā numerus ad numerum, per 5. huius. habeat itaque proportionem quā numerus γ ad δ. Cū igitur sit quemadmodum linea α ad β, ita γ numerus ad δ numerum: cumq; proportio quadrati quidem lineæ α ad quadratum lineæ β sit proportio cōtinens duplicatam proportionem lineæ α ad lineam β, (similes enim figuræ sunt in duplicata proportione suorum laterum relatiuorum, per primum corollariū 20. 6.) itidem cum proportio numeri quadrati, qui producitur à radice γ, ad quadratum numerum productum à radice δ sit proportio duplicata numeri γ, ad numerū δ per secundum partem 11. 8: cúmque unius & eiusdē proportionis, puta quæ est lineæ α ad lineam β, uel numeri γ ad numerum δ, proportiones æque multiplices, nempe quadrati lineæ α ad quadratum lineæ β, & numeri quadrati producti à radice γ ad numerum quadratum productum à radice δ, sint inter se æquales: est igitur sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita numerus quadratus productus à radice γ, ad numerum quadratum productum à radice δ.

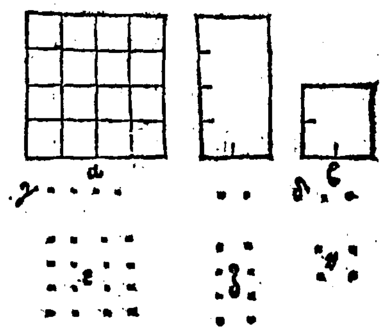
Aliter.

Sint *α, β lineæ rectæ longitudine commensurabiles. Dico quadratum descriptum ab α ad quadratum descriptū*

ad



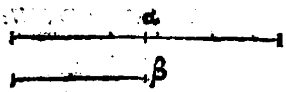
ad β habere proportionē quā numerus quadratus ad alium numerum quadratum. Quia enim linea α est longitudine cōmensurabilis lineæ β, habent inter se proportionē quam numerus ad numerum, per quintū theorema huius libri. Habeant itaque proportionem eam quā numerus γ ad numerum δ, & numerus γ se ipse multiplicans efficiat numerū ϵ, idem porrò numerus γ multiplicans numerum δ reddat numerum ζ. numerus uerò δ ex sui ipsius multiplicatione producat numerum η. Cū igitur γ ex sui ipsius multiplicatione reddiderit numerum ϵ: multiplicatus etiam per δ effecerit numerum ζ: est ergo ut numerus γ ad numerum δ, id est linea α ad lineam β, sic numerus ϵ ad numerum ζ per septimamdecimam septimi. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, sic se habet quadratū lineæ α ad parallelogrammum descriptum ex linea α in lineam β ducta per primam sexti. Quemadmodum igitur quadratū lineæ α ad parallelogrammum ex α, β, sic numerus ϵ ad numerum ζ. Rursus quia numerus δ ex sui ipsius multiplicatione reddidit numerum η, multiplicatus uerò idē δ in γ produxit numerum ζ: est igitur quemadmodum γ ad δ hoc est quemadmodum linea α ad lineam β, sic numerus ζ ad numerum η per eandem septimam decimam septimi. Sed quemadmodum linea α ad lineā β, *ita parallelogrãmũ ex lineis α,β, ad quadratũ lineæ β per primã sexti. Est igitur sicut parallelogrãmũ ex lineis α,β ad quadratum lineæ β, ita numerus ζ ad numerum η.*



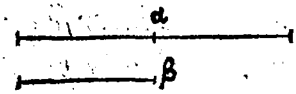
Sed modò cõclusum est sicut se habebat quadratum lineæ α ad parallelogrammum ex α,β, ita se habere numerum ε ad numerum ζ. Per æquam igitur proportionem erit quemadmodum quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sic numerus ε ad numerum η. Vterque uerò illorum numerorũ est quadratus. Nam ε productus est ex multiplicatione γ in seipsum: η uerò ex multiplicatione δ sui etiam ipsius in seipsum. Ergo quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ β habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod primo loco demonstrandũ erat. Priore *demonstrationis modo usi sunt* Theon & Campanus, *posteriore etiam* Theon *aut quis alius.* Ex *his duabus nobis simplicior uidetur illa quam priore loco retulimus. Vacua itaque pingi possunt quadrata quæ describuntur à lineis longitudine commensurabilibus, modò constet tales esse suppositiones, quales accipiuntur in theoremate, lineas scilicet esse longitudine commensurabiles. tunc enim in uniuersum illud uerum erit, quotquot pedes aut passus quadrati fuerint in illis figuris quadratis, semper numerabuntur à numeris habentibus*

proportionem

proportionem inter se quã quadratus numerus ad numerum. Sed quia perobscurus hic locus totus uideri solet, non alienum existimauimus nostram quoque demonstrationẽ apponere, si forte iuuare possimus, quod cupimus quidem, & certe confidimus. Sint lineæ duæ longitudine commensurabiles α, β. dico quadrata earũ &c. Cum enim lineæ α, β sint longitudine commensurabiles, habebunt proportionem inter se quam numerus ad numerum per 5. huius. habeat igitur α ad β proportionẽ duplam, quæ



est quam habet numerus ad numerũ, puta 4 ad 2, & 6 ad 3, & plerique alij: reperianturque minimi numeri tres continuè proportionales in proportione dupla per 2. 8, sintq; illi 4, 2, 1. ergo per corollarium eiusdem 2. 8, numeri 4 & 1 erunt quadrati. Nam sicut 4 est quadratus ex 2 in se multiplicato productus, ita 1 est etiam numerus quadratus. fit enim ex eadem unitate in seipsam multiplicata. Dico præterea hos numeros quadratos illos esse, quorum proportionem habent inter se quadrata linearum α, β. Nam sicut numerus 4 ad numerum 2, ita se habet linea α, ad lineam β. Vtrobiq; enim est dupla proportio per suppositionem. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habet quadratum lineæ α ad parallelogrammum, quod fit ex ductu lineæ α in lineam β, per primam sexti. Ergo sicut se habet numerus 4 ad 2, ita se habebit quadratum lineæ α ad parallelogrammum productum ex α & β. Itidem sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habet linea α ad li-



neam β. utrobiq; enim etiã est dupla proportio per suppositionẽ. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β per eandem primam sexti. Ergo sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β. Ergo per definitionẽ æquæ proportionalitatis, & per 22.5 erit quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut numerus 4 ad 1. qui quadrati sunt. Illud ergo uerum est uniuersaliter, Quadrata descripta ex lineis longitudine commẽsurabilibus, habere proportionẽ inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quęcunque numerum areolarum siue spatiorum intra se capiant illa quadrata: semper tamen necesse erit numeros ab illis contentos esse aut quadratos: aut si quadrati non erũt, (neque enim semper necesse est tales esse) similes saltem superficiales esse omnino necesse est. Porrò secundæ partis huius theorematis quæ est conuersa prioris illa est demonstratio. Sit quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus productus à γ ad quadratum productũ ex δ. Dico lineas α, β esse longitudine commensurabiles. Nam proportio quadrati α ad quadratum β est duplicata proportio lineæ α ad lineam β. per 20.6. Similiter proportio numeri quadrati producti ex γ ad quadratum productum ex δ est duplicata proportio ipsius numeri γ ad numerum δ, per 11.8. Igitur per 15.5, quemadmodum linea α ad lineã β,

sic

sic numerus γ ad numerum λ. Commensurabilis est ergo longitudine linea α lineæ β per 6 huius libri. Tertiam uerò partem theorematis demonstrare non est difficile per secundum syllogismum hypotheticum, quem à destructione consequentis uocant. Sit linea α incommensurabilis longitudine lineæ β: quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β non habebit proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Nam si cõtradicatur, sequitur statim per secũdam partem huius theorematis, illa quadrata habere latera longitudine commensurabilia, quod est contrarium his quæ supposita sunt. Sic enim essent lineæ α, β, & commensurabiles & incommẽsurabiles longitudine, quod est impossibile. Simili ratione postrema pars huius theorematis demonstratur. Nam si quadrata inter se proportionẽ non habent quam quadratus numerus ad quadratum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia. Si contradicatur, continuo sequitur per primam partem huius theorematis, illa quadrata habere proportionem inter se quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quod est contrarium suppositioni.

Corollarium.

Ex quibus ita demonstratis, manifestũ illud est, lineas longitudine commensurabiles, omnino potentia quoq; cõmensurabiles esse. Quæ uerò sunt potentia commensurabiles, non omnino longitudine quoque commensurabiles esse. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino potentia etiam incommensurabiles esse. Quæ uerò potentia incommensurabiles sunt, omnino *longitudine quoque incommensurabiles esse. Cum enim quadrata linearum longitudine commensurabiliũ proportionem eam inter se habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ea uerò quæ proportionem habeant quadrati numeri ad quadratum numerum, simpliciter etiam habeãt proportionem quam numerus ad numerum. & quæ proportionẽ habẽt quã numerus ad numerum, sint commẽsurabilia per 6 huius, sequitur omnino lineas longitudine commensurabiles non tantùm esse longitudine commensurabiles, sed etiã esse potentia.* Huius probatio pendet ex prima parte theorematis. Rursus quia quadrata quædam sunt quæ non habẽt proportionem eam inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, habẽtia tamẽ ipsa proportionem eam simpliciter quam numerus ad numerum, latera quidem eorum sunt potẽtia commensurabilia, quia describunt quadrata habẽtia proportionem quam numerus simpliciter ad numerum, itáque commensurabilia per 6 huius: latera uerò ipsa inter se sunt longitudine incommensurabilia, per postremam partem theorematis. Verum est igitur lineas potentia commensurabiles nõ statim esse longitudine etiã commensurabiles. Hac eadẽ ratione probatur & illud tertium corollarij membrum, lineas longitudine incõmensurabiles non statim etiam esse potentia incommensurabiles. Possunt enim esse longitudine quidem incommensurabiles, potentia tamen commensurabiles, ut in quadratis quæ habent quidem proportionem inter se quam numerus ad numerum, sed non quam numerus quadratus

quadratus ad numerum quadratum. Quartum uero probatur per secundum syllogismum hypotheticum à destructione consequentis, lineas potentia incommensurabiles, longitudine quoque incommensurabiles esse. Nam si dicas eas esse longitudine commensurabiles, sequitur esse ipsas quoque potentia cõmensurabiles, quod est contra suppositionem. Nam positæ sunt incommensurabiles longitudine. Resolutio autẽ eius demonstrationis quam attulimus illa est. Omnia quadrata habentia proportionem inter se quam extremi trium numerorum minimorum suæ proportionis continuæ proportionalium, habẽt proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sed quadrata duarũ linearum longitudine commensurabilium sunt huiusmodi. Ergo quadrata duarum linearũ longitudine commensurabilium habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Maior patet ex corollario 2.8. Minor patet ex 22.5.

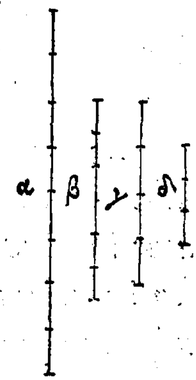
Lemma.

Demonstratum est in arithmeticis theoremate 26.8. similes planos numeros habere proportionem inter se quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Conuersum uerò theorema, numeros habentes proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum esse similes planos, non quidem demonstratur in libris arithmeticis, sed est à nobis in præcedenti theoremate libri huius demonstratum. Vnde manifestum est numeros qui non sunt similes plani, id est non habentes latera inter se proportionalia, non *habere etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Eam enim proportionẽ si inter se haberent, sequeretur simul eos esse similes superficiales: cuius contrarium est positum, eos inquam non esse similes planos. Ergo numeri non similes superficiales non habent inter se proportionem eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Antequam attingamus theorema quod est decimo loco positum in hoc libro, illud omnino faciẽdum est, ut ei præponamus illud quod uulgo proximum locum tenet, scilicet undecimum. Aliter enim si fecerimus, demonstratio illius theorematis quod decimo loco scribi diximus, non procederet à priori, ut patebit in explicatione illius. Itáque Campanus fieri oportere recte indicauit, dum situm utriusque theorematis inuerteret.

Decimum Theorema.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, prima uerò secundæ fuerit commensurabilis, tertia quoque quartæ commensurabilis erit. Quòd si prima secũdæ fuerit incommẽsurabilis, tettia quoq; quartæ incommensurabilis erit.



Sint quatuor magnitudines proportionales α, β, γ, δ. ut α ad β, sic γ ad δ. Sitq; α commensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse commensurabilem magnitudini δ. Cum enim α sit commensurabilis β, Ergo α habebit proportio-

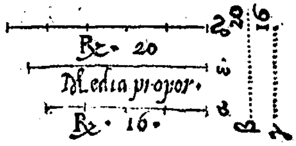
nem ad β quam numerus ad numerum, per 5 huius. Sed ex suppositione est sicut α ad β, sic γ ad δ. Ergo γ ad δ habebit etiam proportionem quam numerus ad numerum. Ergo commensurabilis erit magnitudo γ magnitudini δ per 6 huius. Rursus sit α incommensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse incommensurabilem δ. Cum enim α sit incommensurabile β, igitur α non habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum per 7 huius. Est autem sicut α ad β, ita γ ad δ. Ergo neque γ ad δ proportionem habebit quam numerus ad numerum. Incommensurabilis est igitur γ magnitudini δ per 8 huius. Si itaque quatuor magnitudines & cætera.

Corollarium.

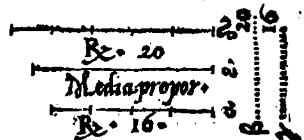
Si fuerint quatuor lineæ proportionales, fuerintque duæ priores, aut duæ posteriores inter se cõmensurabiles potentia tantum; cæteræ quoque duæ erunt potentia tantum cõmensurabiles. hoc probatur per 22.6, & per hoc theorema 10. quo corollario utitur demonstrator in sequentibus theorematibus 28. 29. & aliis.

Vndecimum Theorema.

Propositæ lineæ rectæ (quam ῥητὴν uocari diximus) reperire duas lineas rectas incommensurabiles, hanc quidẽ longitudine tantum, illam uerò non longitudine tantum, sed etiam potentia incommensurabilem.

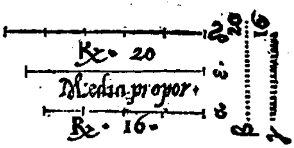


Sit linea recta proposita α, reperiendæ sunt duæ lineæ incommensurabiles lineæ α, alia qui-



dem longitudine tantùm, alia uerò etiam potentia incommẽsurabilis. Afferantur numeri duo β, γ inter se rationem eam non habentes quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est, ne sint illi numeri similes plani: fiatque sicut numerus β ad numerum γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum alterius lineæ quæ sit δ. Quomodo uerò id fiat, didicimus per lemma illud positum in theoremate 6 huius libri. Commensurabile est igitur quadratũ lineæ α, quadrato lineæ δ per 6 huius libri. Et quia numerus β ad numerum γ non habet eam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum: neque etiam quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ δ habebit eam proportionem quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Ergo linea α erit incommensurabilis longitudine tantum lineæ δ per 9 huius libri. Sic itaq; reperta est prior linea, nempe δ incommensurabilis longitudine tantum lineæ propositæ quæ est α. Rursus reperiatur media proportionalis inter α, δ quæ sit ε per 13. 6. Est itaque sicut linea α ad lineam δ, ita quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ ε per secundum corollarium 20. 6. Sed linea α est incommensurabilis longitudine lineæ δ, ut modò conclusum est. Ergo quadratum etiam lineæ α erit incommensurabile quadrato lineæ ε, per secundam partem postremi theorematis. Nec te impediat quod illud theorema 10 loquatur de magnitudinibus cõmensurabilibus & incõmensurabilibus. Lineæ enim quando consyderantur earum lõgitudines, ut sint longitudine

li fulminati



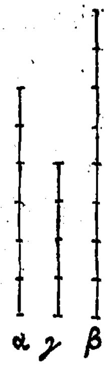
gitudine cõmensurabiles aut incommẽsurabiles lineæ, magnitudinis uoce comprehenduntur, & contrà, si considerantur ut magnitudines, ut sint magnitudines commensurabiles siue incommensurabiles, de longitudinibus ipsarum linearum loqui intelligimus. neque tum quicquam de potentia lineæ intelligimus. Nam *magnitudo lineæ est ipsa longitudo, cum linea nihil aliud sit quàm longitudo sine latitudine.* De *quadratis uerò nihil est necesse ita loqui, quia magnitudo ipsius quadrati est ipsum quadratum. potentia enim quadrati non dicitur.* Cum *ergo quadratũ lineæ α sit incommensurabile quadrato lineæ ε, erit igitur per definitionem linearum incommensurabiliũ linea α incommẽsurabilis potentia lineæ ε.* Ergo *lineæ rectæ propositæ ueluti α quam ῥητὴν diximus, & ex qua mensuras cæterarum linearum accipi oportere dicebamus inter principia huius libri, reperta est linea δ longitudine tantum incommensurabilis.* Est *itaque ea linea δ ῥητὴ siue rationalis, longitudine tantum incommensurabilis, supple lineæ α quæ primò & ex suppositione rationalis est.* Reperta *est item linea ε eidem lineæ α incommensurabilis non longitudine tantum, sed etiam potentia. quæ linea ε per definitionem linearum incommensurabilium lineæ rationali erit irrationalis.* Nam *in uniuersum solet* Euclides *eas uocare ἀλόγους id est irrationales, quæ & longitudine & potentia sint incommensurabiles lineæ propositæ, & ex suppositione ῥητῇ id est rationali.* Hoc *au-*

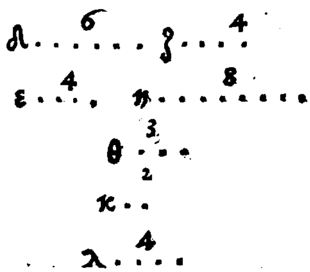
tem problema licet in theorema conuertere, quomodo dixim⁹ cætera conuerti posse.

Duodecimum Theorema.

Magnitudines quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, inter se quoq; sunt cõmẽsurabiles.

Vtraque magnitudo α,β sit commensurabilis magnitudini γ. Dico magnitudines etiam α,β esse inter se commensurabiles. Nam cum α sit commensurabilis magnitudini γ. igitur α ad γ habebit proportionem quam numerus ad numerum habeat proportionem quam numerus δ ad numerum ε. Rursus cum β sit commensurabilis γ, igitur γ ad β habebit proportionẽ quam numerus ad numerum. habeat itaque quam numerus ζ ad numerum η. Sumantur minimi numeri continuati in proportionibus datis secundum 4.8. qui numeri sint θ, κ,λ. ut quæ sit proportio numeri δ ad numerum ε, eadẽ sit numeri θ ad numerum κ: quæ verò proportio sit numeri ζ ad numerum η, eadẽ sit numeri κ ad numerũ λ. Cum igitur sit sicut α ad γ, ita δ ad ε: sitq; δ ad ε sicut θ ad κ: est itaq; ut α ad γ, sic numerus θ ad numerũ κ. Itẽ cũ sit ut γ ad β, sic ζ ad η: sitq; sicut ζ ad η, ita κ ad λ. Ergo sicut γ ad β, ita κ ad λ. sed modò probatũ est, sicut erat α ad γ, ita θ ad κ. Per æquã igitur proportionẽ





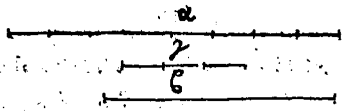
α,γ,β.
θ,κ,λ.

sicut

sicut α ad β, ita numerus θ ad numerum λ. Ergo per 6 huius libri, magnitudo α erit commensurabilis magnitudini β. ergo magnitudines quæ eidem sunt commensurabiles & cætera.

Decimumtertium Theorema.

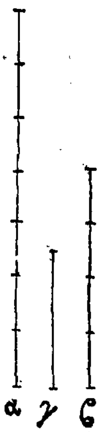
Si ex duabus magnitudinibus hæc quidem commensurabilis sit tertiæ magnitudini, illa uerò eidem incommensurabilis, incõmensurabiles sunt illæ duæ magnitudines.



Sint duæ magnitudines α, β. porrò sit tertia magnitudo γ: sitq; α commensurabilis ipsi γ: sit etiam β incommensurabilis eidem γ. dico magnitudinem α esse incommensurabilem ipsi β. Nam si α esset commensurabilis ipsi β, cum sit α commensurabilis ipsi γ: ipsa quoque magnitudo β esset commensurabilis magnitudini γ, per 12. cuius positum est contrarium.

Decimumquartum Theorema.

Si duarum magnitudinum cõmensurabilium altera fuerit incõmensurabilis magnitudini alteri cuipiam tertiæ, reliqua quoque magnitudo eidem tertiæ incõmensurabilis erit.

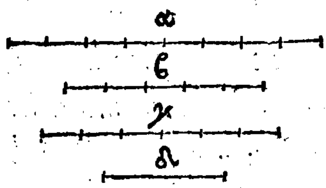


Sint duæ magnitudines commẽsurabiles α, β: altera uero ipsarum, nempe α alteri cuipiã quæ γ sit, incommensurabilis esto. dico reliquam quoque magnitudinem β esse incommen-

ſurabilem ipſi γ. Nam ſi β eſſet commenſurabilis γ, cum etiam α ſit commenſurabilis β: ipſa quoque magnitudo α magnitudini γ erit commenſurabilis, per præcedens theorema. Sed poſitum eſt eas eſſe incommenſurabiles: quod eſt factu impoſsibile. Non ergo erit commenſurabilis β ipſi γ. ergo incommēſurabilis. Si duarum ergo magnitudinum &c.

Corollarium.

Quæ ſunt commenſurabilia incommēſurabilibus, ſunt inter ſe incommenſurabilia. Sint magnitudines, α, β incommēſurabiles: ſit & magnitudo γ cōmenſurabilis ipſi α: ſit item magnitudo δ cōmenſurabilis ipſi β. dico γ, δ eſſe inter ſe incommenſurabiles.

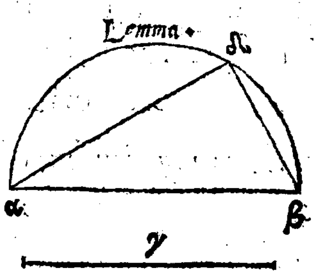


Nam α, γ ſunt commenſurabiles, ex quibus α eſt incommenſurabilis ipſi β. Ergo per hoc theorema 14. γ, β ſunt incommenſurabiles. Sed β, δ ſunt commenſurabiles, ergo per hoc ipſum theorema, aut per 13, γ, δ ſunt inter ſe incommenſurabiles. hoc autē corollario ſæpe utitur Theon, *ut in 23, 27, 38, & alijs.*

Lemma.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quanto plus poteſt maior q̄ minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ α β, & γ, quarum maior ſit α β, inueniēdū eſt quanto plus poſſit linea α β, quàm γ. Deſcribatur ſuper lineā α β ſemicirculus α δ β, & intra eum uſque



ad

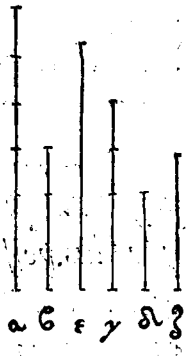
ad ipsius semicirculi circunferentiam collocetur linea recta α δ æqualis ipsi γ per primam quarti, & cõiungatur puncta δ, β linea ducta, quæ sit δ β. Cõstat sane angulum α δ β rectum esse per 31.3. præterea lineam α β posse plus quàm linea α δ, quæ est æqualis ipsi γ: tantóque plus posse quantum est quadratum lineæ δ β, per 47.1. Similiter quoq; duabus datis rectis, linea utrãque potens reperietur hac ratione. Sint duæ datæ rectæ α δ, δ β, inueniendáq; proponatur linea quæ utrãque possit. applicentur inter se eo situ quo angulum rectum conficiãt, qui sit α δ β, & ducatur linea à puncto α in punctum β. constat item lineam α β esse eam quam quærimus potentẽ quantũ illæ ambæ α δ, δ β, per 47.1.

Decimumquintum Theorema.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, posſit autem prima pluſquam ſecunda tanto quãtum eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: tertia quoque poterit pluſquam quarta tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi prima poſſit pluſquam ſecunda quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: tertia quoque poterit pluſquam quarta quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine.

Sint quatuor lineæ rectæ proportionales α, ς, γ, δ: sicut α ad β, ita γ ad δ. poßit autem α plusquam β tanto quãtum est quadratum lineæ ε: poßitq; γ plusquam δ quadrato lineæ ζ. Dico si α fuerit commensurabilis longitudine li-

neæ ι, erit etiam γ commensurabilis longitudine lineæ ζ. si autem α incommensurabilis longitudine fuerit lineæ ι, erit similiter γ incommensurabilis longitudine lineæ ζ. Ex eo enim quod est sicut α ad β, ita γ ad δ: erit etiam ut quadratū lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ



per 22,6. Sed ex suppositione quadrato lineæ α æqualia sunt quadrata linearum β, ι: quadrato uerò lineæ γ æqualia sunt quadrata linearū δ, ζ. Est igitur sicut proportio quadratorum earum linearum β, ι ad quadratū lineæ β: ita proportio quadratorum duarum linearum δ ζ, ad quadratum lineæ δ. Per disiunctā igitur proportionalitatem sicut quadratum lineæ ι ad quadratū lineæ β, ita quadratum lineæ ζ ad quadratum lineæ δ.

Est itaque ueluti ι ad β, sic ζ ad δ, per secundam partē 22.6. Per cōtrariam ergo proportionem, sicut β ad ι, ita δ ad ζ. Erat autem ex suppositione sicut α ad β, ita γ ad δ. Per æquam igitur proportionem est ut α ad ι, ita γ ad ζ. Itaque per decimam huius, si α est commensurabilis longitudine ipsi ι, erit quoque γ commensurabilis longitudine ipsi ζ. Si uerò incommensurabilis fuerit α ipsi ι, erit similiter incommensurabilis γ ipsi ζ. Ergo si quatuor rectæ proportionales &c.

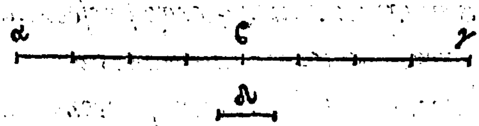
α, β, ι.
γ, δ, ζ.

Decimumsextum Theorema.

Si duæ magnitudines commensurabiles componātur, tota magnitudo composita singulis partibus commensurabilis

commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo composita alterutri parti commensurabilis fuerit, illæ duæ quoque partes commensurabiles erunt.

Componantur duæ magnitudines commensurabiles αβ, βγ. Dico totam magnitudinem αγ singulis partibus αβ, βγ commensurabilem esse.



Cum enim αβ & βγ sint commẽsurabiles, metietur ipsas quædam magnitudo cõmunis ambarum mensura. Metiatur igitur, sitq; δ. Cum itaq; δ metiatur αβ, βγ metietur quoquè totam magnitudinem compositam αγ per communem cõceptionẽ. Quæcunque magnitudo metitur duas alias, metitur quoque compositam ex illis. Sed eadem δ metiebatur αβ, βγ ex suppositione. Ergo δ metitur αβ, βγ, & αγ. Commensurabilis est itaque αγ utriq; magnitudini αβ, & βγ. Sit præterea αγ tota composita commensurabilis alteri ex duabus αβ, βγ: sitq; illa αβ. Dico duas illas αβ, βγ esse commensurabiles. Nam cum αγ & αβ sint commensurabiles, metiatur ipsas communis quædam mensura: sit autem illa magnitudo δ. Cum itaq; δ metiatur αβ & αγ, reliquam quoque magnitudinem βγ metietur magnitudo δ per illam communem conceptionem. Quicquid metitur totũ, & detractum metitur & reliquũ. Sed eadem δ metiebatur magnitudinem αβ ex suppositione. Ergo δ metitur utranque αβ, & βγ. Commensurabiles itaque sunt αβ, βγ. itaq; ambæ partes theore-

matis uera.

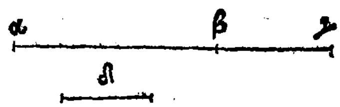
Corollarium.

Si tota magnitudo fuerit commensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus commēsurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti α γ est commensurabilis magnitudini β γ, ergo per secundam partem huius theorematis 16, magnitudines α β, β γ sunt commensurabiles. ergo per priorem partem eiusdem theorematis magnitudo α γ erit cōmensurabilis singulis α β, β γ. Hoc corollario utitur Theon *in demonstratione* 18, *& aliorū theorematum. omissum tamen est* Euclidi, *quia facile uidebatur ut cætera ferè corollaria.*

Decimumseptimum Theorema.

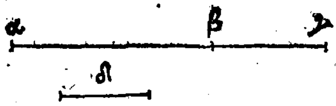
Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, ipsa quoq; tota magnitudo singulis partibus componentibus incommensurabilis erit. Quòd si tota alteri parti incommēsurabilis fuerit, illæ quoque primæ magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles α β, β γ. Dico totā *magnitudinem α γ, utricunq; magnitudini α β, β γ incōmensurabilem fore.*



Quòd si negetur incommensurabiles esse γ α, α β, metietur ipsas quædam magnitudo. metiatur itaque, ea quæ sit δ si fieri potest. Cum igitur δ metiatur per te γ α, α β, metietur similiter reliquā magnitudinem β γ: sed per te eadē δ metiebatur γ α. Ergo

α β,



α β, β γ sunt commensurabiles. Sed ex suppositione erãt incõmensurabiles: fieri ergo nõ potest ut γ α, α β sint cõmensurabiles: sunt itaq; incõmensurabiles. Eadem uia demonstrari potest magnitudines α γ, γ β esse incommensurabiles. Ergo α γ singulis magnitudinibus α β, β γ est incommensurabilis.

Rursus α γ alteri magnitudini, nempe ipsi α β, sit incõmensurabilis. dico etiam α β, β γ esse incommensurabiles. Nam si commẽsurabiles fuerint, metietur ipsas magnitudo quædam. metiatur, sitq; δ. Cum igitur δ metiatur α β, β γ, metietur quoque totam magnitudinem α γ. sed per te δ metiebatur α β: ergo δ metietur γ α, α β. Cõmensurabiles itaq; sunt γ α, α β. Sed ex suppositione erant incommensurabiles. illud autem fieri nullo modo posse certum est, ut simul sint & commensurabiles & incommensurabiles. Nulla ergo magnitudo metietur α β, β γ. Ergo incommensurabiles sunt α β, β γ. Eadem quoque uia demonstrari potest illud idem, si posuerimus magnitudinem α γ esse incommensurabilem ipsi β γ. Ergo si duæ magnitudines incommensurabiles &c.

Corollarium.

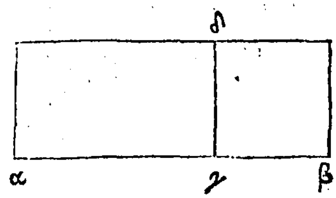
Si tota magnitudo fuerit incõmensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus incommẽsurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti α γ est incommensurabilis magnitudini β γ, ergo per secundam partem huius theorematis 17. magnitudines α β, β γ sunt incom-

mensurabiles: ergo per priorem partem eiusdē theorematis magnitudo α γ *erit incommensurabilis singulis* α β, β γ. *hoc corollario utitur Theon in demonstratione 73 theorematis, & aliorum.*

Lemma.

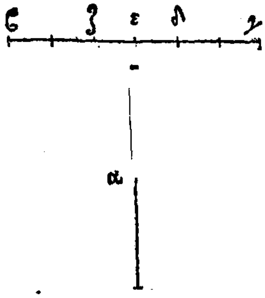
Si *parallelogrammum applicetur secundum lineam rectam, lineáque illa tanto plus excedat parallelogrammi latus, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi: illud parallelogrammū sic applicatum, est æquale alteri parallelogrammo, quod fit ex sectionibus lineæ, quæ factæ sunt per applicationem ipsius parallelogrammi secundum lineam illam.*

H*oc per se manifestum uideri potest, tamen quia reperitur inter cætera, demonstrationem eius afferemus. Secūdum lineam rectam* α β *applicetur parallelogrammum* α δ, *cuius alterū latus sit æquale illi portioni lineæ rectæ, quæ excurrit extra parallelogrammū.* Dico *parallelogrammū* α δ *esse æquale superficiei rectangulæ quæ fit ex* α γ, γ β. *quod per se patet, ut modò diximus.* Nam *quia quadratum est* δ β, *linea* δ γ *est æqualis lineæ* β γ: *estq́; parallelogrammum* α δ, *id quod est superficies rectangula* α γ, γ β. Ergo *si parallelogrammum applicetur &c.*

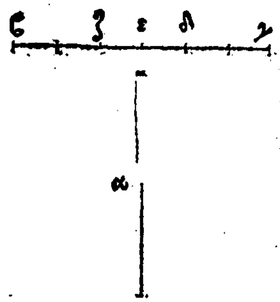


Decimumoctauum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati quod describitur à minore, æquale le parallelogrammum applicetur ſecundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrãmi. Si præterea parallelogrammum ſui applicatione diuidat lineã illam in partes inter ſe cõmenſurabiles longitudine: illa maior linea tanto plus poteſt quàm minor, quantũ eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi maior plus poſsit quàm minor, tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi cõmẽſurabilis longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur ſecundũ maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrammi, parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe longitudine cõmenſurabiles.



Sint duæ rectæ inæquales α, β γ, quarum maior ſit β γ. Quartæ autem parti quadrati lineæ minoris α, hoc eſt ipſi quadrato quod deſcribitur à dimidia linea α, æquale parallelogrammum ſecundum lineã β γ, applicetur, quod relinquat ex linea β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipſius parallelogrãmi: ſitq́; illud parallelogrammũ quod fiat ex β δ, δ γ: (hoc uerò quemadmodũ fiat, docet Campanus in fine demonſtrationis 13.) ſit quoque commen-



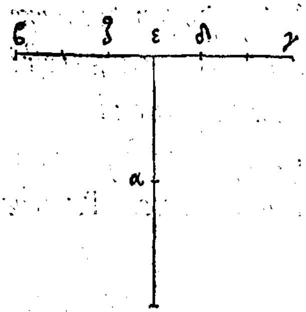
surabilis longitudine linea β δ ipsi lineæ δ γ. Dico lineã β γ plus posse quàm linea α, tanto quantum est quadratum lineæ cuiusdã sibi ipsi lineæ, dico β γ, longitudine cõmensurabilis. Secetur enim linea β γ in duas partes æquales in puncto ε, ponatúrque lineam ε ζ æqualem esse lineæ δ ε: reliqua ergo linea δ γ erit æqualis lineæ β ζ. Cumq́; linea recta β γ diuisa sit in partes æquales in puncto ε, in partes autem inæquales in puncto δ, superficies rectangula contenta ex β δ, δ γ cum quadrato lineæ ε δ, æqualis est quadrato lineæ ε γ, per quintum theorema secundi libri. Itaque *superficies rectangula contenta ex β δ, δ γ quater sumpta cũ quadrato lineæ ε δ item quater sumpto, est æqualis quadrato lineæ ε γ quater sumpto.* Nam *æqualia quæ sunt æqualiter multiplicata, simul æqualia sunt. Sed superficiei rectangulæ contentæ ex β δ, δ γ quater sumptæ æquale est quadratũ lineæ α ex suppositione.* Nam *parallelogrammum ex β δ, δ γ positum est æquale quartæ parti quadrati lineæ α. Quadrato uerò lineæ δ ε quater sumpto æquale est quadratum lineæ δ ζ.* Nam *linea δ ζ est dupla ad lineam δ ε. quadrato autem lineæ ε γ quater sumpto æquale est quadratũ lineæ β γ. Similiter enim linea β γ dupla est ad lineam ε γ.* Ergo *quadrata linearũ α, δ ζ sunt æqualia quadrato lineæ β γ. Quocirca quadratum lineæ β γ maius est quàm quadratum lineæ α tanto quantum est quadratum lineæ δ ζ.* Ergo *maior linea β γ plus potest quàm minor*

minor α quadrato lineæ δζ. Nunc autem demonstrandum est lineam ϐγ esse longitudine commensurabilem ipsi lineæ δζ. Cum enim ex suppositione linea ϐδ sit longitudine commẽsurabilis ipsi δγ: ergo linea tota ϐγ erit longitudine commensurabilis lineæ δγ, per sextum decimum theorema huius libri. Atqui linea δγ est æqualis lineæ ϐζ. Ergo linea tota ϐγ est commensurabilis longitudine lineis ϐζ, γδ. Componantur illæ duæ lineæ ut unam lineam efficiant. Cum itaque linea tota β γ sit cõmensurabilis lõgitudine duabus lineis unius loco sumptis ϐζ, γδ. Ergo lineæ βζ, γδ unius loco sumptæ sunt cõmensurabiles longitudine ipsi lineæ ζδ, per secundam partẽ sextidecimi theorematis huius libri. Quare etiã residuæ lineæ ζδ commensurabilis longitudine erit tota linea ϐϛ, per priorem partem eiusdem sextidecimi theorematis. hoc ipsum tamen probari potest per corollariũ à nobis positum post 16. Ergo linea β γ plus potest quàm linea α quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Rursus linea β γ plus possit quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi longitudine commẽsurabilis: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale secundum lineam β ϛ parallelogrammum applicetur, quod relinquat ex linea β γ portionem æqualem alteri ipsius lateri: sitq; superficies rectangula contẽta ex β δ, δϛ, demonstrandum est lineas ϐδ, δϛ esse inter se longitudine commensurabiles. Manentibus constructionibus & suppositionibus præcedentibus similiter demonstrabimus lineam ϐγ plus posse linea α tanto quantum est quadratum lineæ ζδ. Sed ex suppositione linea β γ plus *potest quàm linea α, tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Commensurabilis est itaque longitudine linea βγ lineæ ζ δ. Ergo linea composita ex duabus βζ, δγ est commensurabilis longitudine lineæ ζ δ, per secundã partem sextidecimi theorematis huius libri. Quocirca per 12 huius, siue per priorem partem sextidecimi theorematis, linea βγ est cõmensurabilis longitudine lineæ compositæ ex βζ, δγ. Sed tota linea composita ex βζ, δγ est commensurabilis longitudine ipsi δγ. nam βζ est æqualis ex antè dictis ipsi δγ. Ergo linea βγ est longitudine commensurabilis ipsi δγ, per 12 huius. Quare & linea βδ est longitudine commensurabilis lineæ δγ, per secundam partem sextidecimi theorematis. Ergo si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales &c. Quod demonstrandum erat.*

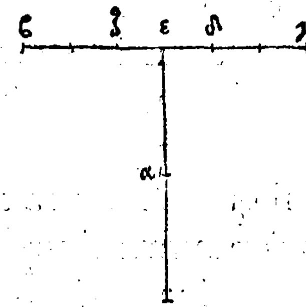
Decimumnonum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati lineę minoris æquale parallelogrammum secundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus eiusdem parallelogrammi: si parallelogrammum præterea sui applicatione diuidat lineam in partes inter se longitudine incommẽsurabiles, maior illa linea tanto plus potest quàm minor, quantũ est quadratum lineæ sibi maiori incõmensurabilis longitudine. Quòd si maior linea tanto plus possit quàm minor, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis

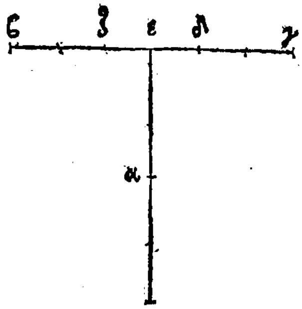
commensurabilis sibi longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur secundum maiorẽ, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrãmi, quantum est alterum latus ipsius, parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se incommensurabiles longitudine.



Sint duæ rectæ inæquales α, βγ, quarũ maior sit βγ: quartæ autẽ parti quadrati minoris nempe α, æquale parallelogrammũ applicetur secundum lineã βγ, quod relinquat ex linea βγ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipsius parallelogrammi: sitq; illud parallelogrammum ex βδ, δγ: incommensurabilis autem longitudine sit βδ ipsi δγ. Dico lineam βγ posse plus quàm linea α tanto, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Sint primum eædem constructiones & ratiocinãdi uiæ, quæ in proximo theoremate. Similiter ostendemus lineã βγ posse plus quàm linea α tanto, quantum est quadratum lineæ δζ. Restat ut demonstremus lineam βγ esse incommensurabilem longitudine ipsi δζ. Cum enim linea βδ sit incommensurabilis longitudine lineæ δγ ex suppositione, incommensurabilis etiam longitudine erit linea βγ ipsi lineæ δγ, per 17 huius: sed δγ est commensurabilis ambabus lineis βζ, δγ simul compositis, quia δγ est



æqualis ipsi ϐ ζ. Ergo ϐ γ est incommensurabilis ambabus β ζ, δ γ simul compositis, per 14 huius. Ergo per secundam partem septimidecimi theorematis huius libri linea composita ex ϐ ζ, δ γ simul & unius loco sumptis est incommẽsurabilis lineæ ζ δ. Ergo per priorem partẽ eiusdẽ septimidecimi theorematis linea β γ est incommensurabilis longitudine lineæ ζ δ. Linea igitur β γ potest plus quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Rursus *linea β γ poßit plus lineæ α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale parallelogrammum applicetur secũdum lineam β γ, quod relinquat excurrentem portionem lineæ β γ æqualem alteri ipsius lateri: sitq; illud parallelogrammum ex lineis β δ, δ γ.* Demonstrandum *nobis est illud lineam β δ, esse incommensurabilem longitudine lineæ δ γ.* Maneant *enim eædem constructiones & ratiocinandi uiæ: similiter etiam ostendemus lineam β γ posse plus quàm linea α quadrato lineæ ζ δ.* Primùm *ex suppositione linea β γ potest plusquam linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi incommensurabilis longitudine.* Ergo *linea β γ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ δ. Itaque linea composita ex ϐ ζ, δ γ & unius loco sumpta erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ δ, per secundam partem septimidecimi theorematis*



matis libri huius. Quare & per primam partẽ eiusdẽ theorematis, linea βγ erit incommẽsurabilis longitudine lineæ composita ex βζ, δγ. Sed linea cõposita ex βζ, δγ est commensurabilis longitudine lineæ δγ, eò quia βζ est æqualis ipsi δγ ex anteprobatis. Itaque linea βγ est incommensurabilis longitudine ipsi δγ per 14 huius. Ergo per secundã partem eiusdem septimidecimi theorematis, linea βδ est incommensurabilis longitudine lineæ δγ. Quamobrem si fuerint duæ rectæ inæquales &c.

Lemma.

Cum sit demonstratum lineas longitudine commensurabiles omnino potentia quoque commensurabiles esse, eas uerò quæ potentia sunt commensurabiles non omnino longitudine quoque commensurabiles esse, sed esse posse & longitudine commensurabiles & incommensurabiles, constat si lineæ propositæ (quam ῥητὴν uocari diximus, eandémque rationalẽ à recentioribus) linea quædam fuerit commensurabilis longitudine, illam uocari debere rationalem, & commensurabilem non longitudine solum, sed etiam potentia. Nam lineæ longitudine commensurabilès, omnino potentia quoque commensurabiles sunt. Quod si propositæ lineæ, quam rationalem uocant, quædam fuerit linea commensurabilis potẽtia: siquidem & longitudine etiam cõmensurabilis ipsi fuerit, uocabitur illa rationalis, & commensurabilis ipsi *longitudine & potẽtia. Si uerò ipsi lineæ propositæ, quã rationalem uocant, linea quædam potentia commensurabilis, longitudine eidem fuerit incommensurabilis: uocabitur & illa rationalis, potentia tantum commensurabilis.*

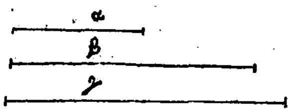
Illæ duæ uoces προσκλῆ σχόλιον quæ sunt in exemplari impresso, non sunt in uetusto: & quod sequitur, continuata serie scribitur, addita particula γὰρ hoc modo, ῥητὰς γὰρ, sic itaque dicemus. Rationales enim uocat Eucli*des (ut est in principijs huius libri) illas lineas quæ sunt lineæ propositæ quam ῥητὴν uocat, siue longitudine & potentia commensurabiles, siue potentia tantum. Sunt tamen & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incommensurabiles lineæ propositæ, id est τῇ ῥητῇ, siue dicas rationali, potentia tantum eidem commensurabiles, eoq; uocantur rationales & cõmensurabiles inter se ea ratione qua sunt rationales. sed & illæ eædem possunt esse cõmensurabiles inter se siue longitudine, & ideo potentia quoque, siue potentia tantum.* Et *quidẽ si fuerint inter se commensurabiles longitudine, uocabuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut tamen simul intelligatur potentia quoque cõmensurabiles esse. Quòd si potentia tantum inter se fuerint commensurabiles, uocabuntur & ipsæ rationales potentia tantum commensurabiles.*

Corollarium.

Quod autem lineæ duæ siue plures rationales & commẽsurabiles longitudine ipsi rationali sint inter se commẽsurabiles longitudine, hinc cõstat. Nam *cum sint rationales & longitudine commensurabiles ipsi primo ra-*

rationali,

tionali, eæ autem magnitudines quæ sunt uni & eidem commensurabiles sint inter se commensurabiles, per 12 huius. Ergo lineæ rationales ipsi primo rationali longitudine commensurabiles; sunt inter se quoque commensurabiles longitudine. Sed quantũ ad eas attinet, quæ sunt rationales potentia tantum commensurabiles ipsi primo rationali, fieri omnino necesse est ut illæ quoque inter se sint potentia saltem cõmensurabiles. Cum enim quadrata earum sint rationalia, erunt commensurabilia quadrato lineæ propositæ quæ dicitur primò rationalis. Itaque per 12 huius ipsa quoque inter se erunt cõmensurabilia. Ergo lineæ eorum sunt inter se potentia saltem commensurabiles. Sed nihil uetat easdẽ esse præterea longitudine inter se commensurabiles. Sit enim linea α rationalis, sitq; linea β eidem lineæ α rationali potentia tantum commensurabilis,

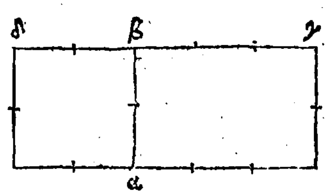


hoc est longitudine incommensurabilis eidẽ. sit præterea alia linea γ lineæ β longitudine commensurabilis (hoc enim esse posse constat ex principijs huius libri) per 14 huius, linea γ est incommensurabilis longitudine ipsi lineæ α: sed quadratum lineæ α est commensurabile quadrato lineæ β ex suppositione: quadratum item lineæ γ est commensurabile eidem quadrato lineæ β, per suppositionem. Ergo per 12 huius, quadratum lineæ γ est commensurabile quadrato lineæ α. Ergo linea γ erit per definitionem rationalis, potentia tantum commensurabilis ipsi lineæ α, sicut & ipsa linea β. Dantur ergo duæ rationales potentia tantum commensurabiles ipsi ra-

tionali, inter se uerò longitudine commensurabiles. Hic obiter repetendũ esse puto, quod antea diximus in diffinitione linearũ rationalium, Campanũ, cæteròsq; deinceps ab eo latinos geometras inuexisse illas uoces siue terminos, ut quasdam lineas uocarent rationales potentia tantum, quasdã uerò longitudine & potentia, quibus nunquam Euclidem *usum esse reperies. hæ enim uoces longitudine & potentia nunquã referuntur ad rationalitatem aut irrationalitatem, sed semper ad commensurabilitatem, aut incommensurabilitatem linearum. Quæ peruersiones solent rerum per se difficilium etiam difficultatem & obscuritatem augere. Itaque te monitum iterum atque iterum uelim, ut principiorum id est simplicium terminorum simplicem uim diligenter intelligas & retineas, neque quicquam externum admiscendum existimes.*

Vigesimum Theorema.

Superficies rectangula contenta ex lineis rectis rationalibus longitudine commensurabilibus secundum unum aliquem modum ex antedictis, rationalis est.

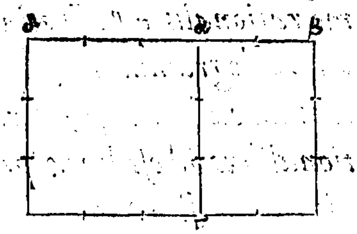


Nam ex lineis αβ, βγ rationalibus longitudine commẽsurabilibus secundum unũ aliquem modum ex antedictis cõtineatur superficies rectãgula quæ sit αγ. dico superficiem αγ esse rationalẽ. Describatur enim à linea αβ quadratum αδ: rationale est

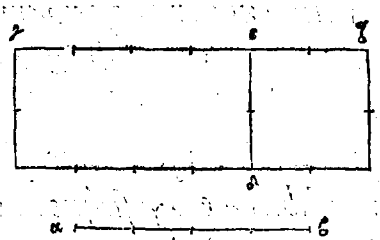
itaque

itaque quadratum illud $\alpha\delta$ ex definitione. Cumque sit commensurabilis longitudine linea $\alpha\beta$ lineæ $\beta\gamma$, æqualisq́; sit linea $\alpha\beta$ lineæ $\beta\delta$, commensurabilis itaque longitudine erit linea $\beta\delta$ lineæ $\beta\gamma$. Est autẽ sicut linea $\beta\delta$ ad lineam $\beta\gamma$, ita quadratum $\delta\alpha$ ad superficiẽ rectangulam $\alpha\gamma$, per primam sexti. Sed modo conclusum est lineam $\beta\delta$ esse commensurabilem lineæ $\beta\gamma$. Ergo per decimam huius libri quadratum $\delta\alpha$ est commensurabile superficiei rectangulæ $\alpha\gamma$. Sed quadratum $\delta\alpha$ est rationale: itaque per definitionem superficies $\alpha\gamma$ erit etiã rationalis. Ergo superficies rectangula cõtenta & cætera.

Sed & alia quadam descriptione placet idem demõstrare. Prior enim demonstratio quadratum minoris lineæ cõscripsit, nunc mutato casu demonstrationis quadratum maioris describamus. Sit superficies rectangula $\beta\gamma$ contenta ex lineis rationalibus inæqualibus longitudine inter se commensurabilibus $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$: sitque maior $\alpha\gamma$. Describatur ex linea $\alpha\gamma$ quadratum $\delta\gamma$. dico parallelogrammum $\gamma\beta$ rationale esse. Nam linea $\alpha\gamma$ est commensurabilis longitudine lineæ $\alpha\beta$ ex suppositione: sed linea $\delta\alpha$ est æqualis lineæ $\alpha\gamma$. Ergo linea $\delta\alpha$ est commensurabilis longitudine lineæ $\alpha\beta$: sed quam proportionem habet $\delta\alpha$ ad $\alpha\beta$, eandem habet quadratum $\delta\gamma$ ad parallelogrammum $\gamma\beta$, per primam sexti. Ergo per 10 huius libri commensurabile est quadratum $\delta\gamma$ parallelogrãmo $\gamma\beta$. Quadratum autem $\delta\gamma$ rationale esse constat, quia est qua-



dratum lineæ rationalis, nempe $\alpha\gamma$. Itaque per definitionem, parallelogrammum etiam $\gamma\beta$ erit rationale. Præterea cum demonstrationes illæ uideantur loqui de eo parallelogrammo quod fit ex duabus lineis, quarum altera sit ea proposita quam primo loco rationalem dicimus, unde diximus mensuras cæterarũ linearum ad illam comparatarum capi oportere, altera uerò sit eidẽ primo rationali commensurabilis longitudine, quæ est prima species linearum rationalium longitudine commensurabilium, alium casum afferendum puto de altera specie, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, ut demonstremus generalem huius theorematis ueritatem, neq; frustra in eo positum illud extitisse secundum unum aliquem modum ex antedictis. Sit itaque linea primo rationalis $\alpha\beta$: sit etiam parallelogrammum $\gamma\delta$ contentum ex lineis $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\delta$ rationalibus id est lineæ primo rationali $\alpha\beta$ commensurabilibus longitudine.

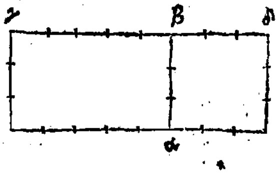


Sint tamen illæ duæ lineæ $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\delta$ diuersæ & inæquales lineæ primo rationali $\alpha\beta$. Dico parallelogrammũ $\gamma\delta$ esse rationale. Describatur quadratum lineæ $\varepsilon\delta$, sitq; $\delta\zeta$. Primum constat lineas $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\delta$ esse inter se commensurabiles longitudine per 12 huius. Nam positum est utrãque esse longitudine commensurabilem ipsi $\alpha\beta$. Sed $\varepsilon\delta$ est æqualis lineæ $\varepsilon\zeta$. Ergo linea $\gamma\varepsilon$ erit commensurabilis longitudine lineæ $\varepsilon\zeta$. Sed quẽadmodum se habet linea $\gamma\varepsilon$ ad lineã $\varepsilon\zeta$, ita se habet parallelogrammum

rallelogrammum γ δ ad quadratū δ ζ, per primā sexti. Ergo per decimam huius parallelogrammum γ δ erit commensurabile quadrato δ ζ. Sed quadratum δ ζ est commensurabile quadrato lineæ α β, quia linea ι δ posita est cōmensurabilis longitudine lineæ α β, quæ est primo rationalis. Ergo per 12 huius, parallelogrammū γ δ est commensurabile quadrato lineæ α β. Sed quadratū lineæ α β est rationale per definitionem. Ergo per definitionem quoque figurarum rationalium parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Nunc restat alius casus tertiæ speciei, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, quæ sunt ipsi quidem lineæ primo rationali α β commensurabiles potentia tantum, itaque rationales tamen. inter se uerò longitudine commensurabiles sint ipsæ lineæ γ ι, ι δ, maneat itaque eadē constructio quæ in proximo casu modo lineæ γ ι, ι δ sint rationales potentia tantum commensurabiles ipsi α β: inter se uerò sint longitudine etiam commensurabiles. Dico sic quoque parallelogrammum γ δ esse rationale. Primo probabitur, sicut modo dictum est parallelogrāmum γ δ esse commēsurabile quadrato δ ζ: sed quadratum lineæ α β est commensurabile quadrato δ ζ. Ergo per 12 huius parallelogrammum γ δ erit commensurabile quadrato lineæ α β. sed quadratū lineæ α β est rationale. Ergo per definitionem parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Hunc autem casum notandum tibi memineris. Quum enim uentum erit ad 26 theorema, ad illius theorematis demonstrationem & intelligentiam illum tibi usui fore intelliges.

Vigesimumprimum Theorema.

SI rationale secundum lineam rationalem applicetur, habebit alterum latus lineam rationalem & commensurabilem longitudine lineæ, cui rationale parallelogrammum applicatur.



Hoc theorema est ueluti ἀντίστροφον præcedentis. Rationale *enim parallelogrammum* $\alpha\gamma$ *applicetur secundum lineam* $\alpha\beta$ *rationalē uno aliquo modo ex antedictis, siue sit illa primo rationalis, siue alia ipsi primo rationali commensurabilis, idq; longitudine & potentia, uel potentia tātum. his enim tribus modis dicitur linea rationalis.* Dico *lineam* $\beta\gamma$ *esse rationalem & longitudine commensurabilem ipsi lineæ* $\alpha\beta$. De*scribatur enim quadratum lineæ* $\alpha\beta$ *quod sit* $\alpha\delta$. Rationale *est igitur quadratum* $\alpha\delta$, *sed & parallelogrammum* $\alpha\gamma$ *est rationale per positionem.* Ergo *per definitionem rationaliū quæ in se conuertitur, siue per* 12 *huius, commensurabile est quadratum* $\alpha\delta$ *parallelogrammo* $\alpha\gamma$. E*st autem sicut quadratum* $\alpha\delta$ *ad parallelogrammū* $\alpha\gamma$, *ita linea* $\delta\beta$ *ad lineam* $\beta\gamma$, *per primam sexti.* Itaq; *per decimam huius, linea* $\delta\beta$ *erit commensurabilis lineæ* $\beta\gamma$. *sed linea* $\beta\delta$, *est æqualis lineæ* $\beta\alpha$, *commensurabilis est ergo linea* $\alpha\beta$, *lineæ* $\beta\gamma$. Rationalis *autem est linea* $\alpha\beta$, Rationalis *ergo erit & linea* $\beta\gamma$, *& commensurabilis longitudine lineæ* $\alpha\beta$. Ergo *si rationale secundum lineā rationalem &c.*

Lemma.

Linea

Lemma.

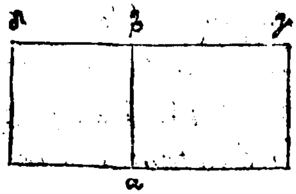
Linea potens superficiem irrationalem, est irrationalis. Posit enim linea α superficiem irrationalem, hoc est quadratum quod ab α describitur, æquale esto areæ irrationali. dico lineam α esse irrationalem. Nam si linea α esset rationalis, rationale quoque esset quadratum ab illa descriptum: (sic enim est positũ inter definitiones) sed ex positione est irrationale, irrationalis est ergo linea α. quod demonstrandum erat.

Hic inseritur quoddam scholium, quod lemmatis inscriptionem habet, sed illud nihil aliud est quàm demõstratio quædam sequentis theorematis.

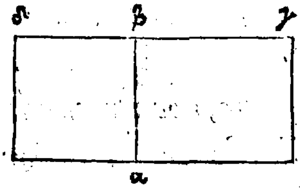
Vigesimumsecundum Theorema.

Superficies rectangula contenta duabus lineis rectis rationalibus potẽtia tantum cõmensurabilibus, irrationalis est. Linea autem quæ illam superficiem potest, irrationalis & ipsa est: uocetur uerò medialis.

Superficies enim rectãgula αγ comprehendatur à duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus, quæ sint αβ, βγ. Dico superficiem illam esse irrationalem, & lineam quæ illam potest, irrationalem etiam esse: uocetur autem medialis. Describatur *enim à linea αβ quadratum αδ. rationale est itaq; quadratum αδ. Et quoniam incommẽsurabilis est longitudine linea αβ*



+
un bove ad in un fuo[illegible]
di legne fulminato
[illegible] fiume [illegible]
lio e che l'amor [illegible]
[illegible]



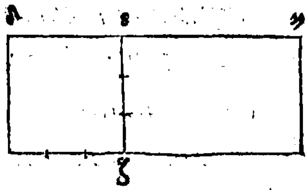
lineæ β γ (nam ex suppositione sunt illæ inter se potentia tantum commensurabiles) æqualisq; est linea α β, lineæ ζ δ. incommensurabilis longitudine ergo erit linea δ ζ lineæ ζ γ. Est autem sicut linea δ ζ ad lineã β γ, ita quadratum α δ ad parallelogrammum α γ, per primam sexti. incommensurabile. est ergo quadratum α δ parallelogrammo α γ per secundã partem decimi theorematis huius libri. Sed quadratũ δ α est rationale: irrationale est ergo parallelogrammum α γ. Quare & linea quæ illud parallelogrammũ α γ, hoc est ea quæ quadratum ipsi parallelogrammo æquale describit, irrationalis erit per lemma postremum. Vocetur autem medialis ea ratione, quia quadratum quod ab ea describitur, æquale est parallelogrammo quod comprehenditur à lineis α ζ, β γ, itaque media ipsa proportionaliter intercidit inter illas lineas α ζ, β γ per 17.6. quod demonstrandum erat. Hæc autem μέση de qua hoc libro agitur, simpliciter μέση dicitur: illa uero cuius inuentionem tradidit lib. 6. theoremate 13. dicitur μέση ἀνάλογον. Neque omnis μέση ἀνάλογον est potens superficiem irrationalẽ, sed ea tantum quæ est media proportionalis inter duas lineas potentia tantum commensurabiles. Campanus in propositione apud eum 19 addidit, diciturque superficies medialis: quod tamẽ non est ita intelligendũ, ut omnis superficies medialis contineatur ex duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus.

hoc

hoc enim refellitur per sequẽtia theoremata 26. & 29. ubi superficies medialis cõtineri dicitur ex duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. Itaque *superficies omnis rectãgula duabus rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehẽsa, medialis dicitur, sed non econuerso, ut omnis medialis superficies rectangula sit comprahensa duabus rectis rationalibus potentia tantum cõmẽsurabilibus. est enim & medialis comprehensa duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. sed tamen in uniuersum superficies quam potest linea medialis est & ipsa medialis.*

Lemma.

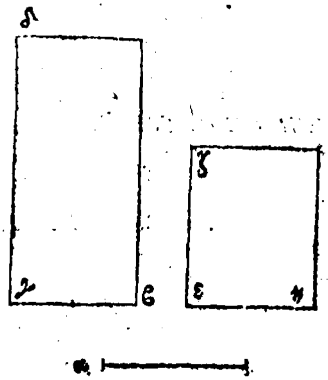
Si sint duæ lineæ rectæ, erit sicut prior ad secundã, ita quadratum quod à priori describitur, ad parallelogrammum quod comprehenditur duabus illis rectis. Hoc Lemma *nihil aliud affert quàm quod theorema primũ libri sexti.* Sint *duæ rectæ ζε, εκ.* Dico *sicut est linea ζε ad lineam εκ, ita quadratũ lineæ ζε ad parallelogrammum comprehensum ex ζε, εκ.* Describatur *enim quadratũ lineæ εζ, sitq́; δζ, & compleatur parallelogrammum κζ.* Cum *igitur linea δε sit æqualis lineæ εζ: sit autem sicut linea δε ad lineam εκ, ita quadratum δζ ad parallelogrammum ζκ per 1.6.* Ergo *sicut linea εζ ad lineam εκ, ita quadratum δζ ad parallelogrammum ζκ.* Est *autem quadratum δζ, quadratum lineæ εζ, parallelogrammum uerò ζκ. id quod comprehenditur dua-*



bus lineis ε ζ, ε η. Est ergo sicut linea ε ζ ad lineam ε η, ita quadratum lineæ ε ζ ad parallelogrammum comprehensum lineis duabus ζ ε, ε η. Et econuerso sicut parallelogrammũ comprehensum duabus lineis η ε, ε ζ ad quadratum lineæ ε ζ, ita linea η ε ad lineam ε ζ.

Vigesimumtertium Theorema.

Quadrati lineæ medialis applicati secundum lineã rationalem, alterum latus est linea rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ secũdum quam a pplicatur.



Sit linea medialis α, rationalis uerò sit γ β: & quadrato lineæ α parallelogrammũ rectangulum æquale β δ applicetur secundum lineam β γ, cuius alterũ latus sit γ δ. Dico lineam γ δ esse rationalem & longitudine incommensurabilem lineæ β γ. Cum enim linea α sit medialis, potest parallelogrammum contentum ex lineis rationalibus potentia tantum commensurabilibus. possit itaque parallelogrammum rectangulum η ζ: sed ex suppositione potest etiam parallelogrummum β δ. æquale est igitur parallelogrammum β δ parallelogrammo η ζ. Sed & ambo parallelogramma sunt æqualium angulorum, quia sunt rectangula. Aequalium uerò & æquiangulorum parallelogrammorũ latera quæ sunt circa æquales angulos

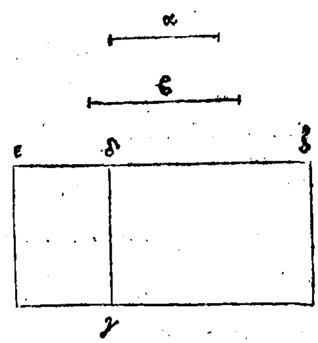
gulos reciprocam inter se proportionem habent per 14 sexti. proportionaliter ergo erit sicut linea $\beta\gamma$ ad lineã $\iota\kappa$, ita linea $\iota\zeta$ ad lineam $\gamma\delta$. Est igitur sicut quadratũ lineæ $\beta\gamma$ ad quadratum lineæ $\iota\kappa$, ita quadratum lineæ $\iota\zeta$ ad quadratum lineæ $\gamma\delta$, per 22 sexti. sed quadratũ lineæ $\beta\gamma$ est commẽsurabile quadrato lineæ $\iota\kappa$: est enim utraque linea rationalis. commẽsurabile ergo erit etiã quadratum lineæ $\iota\zeta$ quadrato lineæ $\gamma\delta$, per 10 huius. sed quadratum lineæ $\iota\zeta$ est rationale. ergo similiter rationale erit quadratum lineæ $\gamma\delta$. linea ergo $\gamma\delta$ erit rationalis. Et quoniam linea $\iota\zeta$ est longitudine incommensurabilis lineæ $\iota\kappa$. nam illæ sunt potentia tantum inter se cõmensurabiles. Sicut autem linea $\iota\zeta$ ad lineã $\iota\kappa$, ita quadratum lineæ $\iota\zeta$ ad parallelogrammum ex ambabus lineis $\iota\zeta$, $\iota\kappa$ contentum per lemma proximum. incommensurabile est ergo quadratum lineæ $\iota\zeta$ parallelogrammo ex lineis $\iota\zeta$, $\iota\kappa$ per secundam partem decimi theorematis huius libri. Sed quadrato lineæ $\iota\zeta$ quadratum lineæ $\gamma\delta$ est commensurabile: modo enim probatum est utrãque lineam esse rationalem. Ergo per 13 huius, quadratum lineæ $\gamma\delta$ est incommensurabile parallelogrammo ex lineis $\iota\zeta$, $\iota\kappa$. Sed parallelogrammum ex lineis $\gamma\delta$, $\gamma\beta$ est æquale parallelogrammo ex lineis $\iota\zeta$, $\iota\kappa$, ut modo probatum est. Ergo quadratum lineæ $\gamma\delta$ est incommensurabile parallelogrãmo ex lineis $\gamma\delta$, $\gamma\beta$. hæc uerò pars breuius concluditur per corollariũ à nobis positũ post 14 theorema. Sed sicut se habet quadratũ lineæ $\gamma\delta$ ad parallelogrammum ex lineis $\delta\gamma$, $\gamma\beta$, ita se habet linea $\delta\gamma$ ad lineam $\gamma\beta$ per lemma proximum:

incommensurabilis longitudine est itaque linea δγ lineæ γβ. Rationalis est ergo linea γδ & longitudine incommensurabilis lineæ γβ. quod demonstrandum erat.

Hoc theorema est ἀντίστροφον proxime præcedentis. Vt uerò fieri poßit quod requirit hoc theorema, scilicet applicari quadratum lineæ medialis secundum lineam rationalem, reperienda est tertia linea proportionalis sicut docet 11. sexti, ita tamen ut linea rationalis sit prima, secunda sit linea medialis quæ potest quadratum applicandum. Nam superficies quæ fit ex prima & tertia est æqualis quadrato mediæ per 17 sexti.

Vigesimumquartum Theorema.

Linea recta mediali commẽsurabilis, est ipsa quoque medialis.



Sit *linea medialis α, sitq; linea illi commensurabilis β siue longitudine & potentia, siue potentia tãtum, ut recte addidit Cãpanus, & in uetusto exemplari græco legitur. dico lineam β esse mediale͂. Exponatur linea rationalis γδ, & quadrato lineæ α æquale parallelogrammum rectangulum applicetur secundum lineam γδ, sitq; parallelogrammũ γε, eiúsque alterum latus sit linea εδ. Rationalis itaq; erit linea εδ, & incommensurabilis longitudine lineæ γδ, per proximum theorema. Rursus quadrato lineæ β æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrã-*

mum

mum rectangulum $\gamma\zeta$, cuius alterum latus sit $\delta\zeta$. Cum igitur commensurabilis sit linea α lineæ β; commẽsurabile quoque erit quadratum lineæ α, quadrato lineæ β. sed quadrato lineæ α æquale est $\epsilon\gamma$, quadrato autem lineæ β æquale est $\gamma\zeta$: commensurabile est ergo parallelogrammum $\epsilon\gamma$ parallelogrammo $\gamma\zeta$. Est autem sicut parallelogrammum $\gamma\epsilon$ ad parallelogrammum $\gamma\zeta$, ita linea $\epsilon\delta$ ad lineam $\delta\zeta$ per primam sexti. commensurabilis est ergo longitudine linea $\epsilon\delta$ lineæ $\delta\zeta$ per 10 huius. Sed linea $\epsilon\delta$ est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ $\gamma\delta$. Rationalis est ergo linea $\delta\zeta$ & incommensurabilis longitudine lineæ $\delta\gamma$ per 13 huius. Ergo lineæ $\gamma\delta$, $\delta\zeta$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Sed linea quæ potest parallelogrammum rectãgulum compræhensum rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, medialis est per 22 huius. Igitur medialis est quæ parallelogrammum ex $\gamma\delta$, $\delta\zeta$ potest. Id uerò potest linea β, ergo linea β medialis est.

Corollarium.

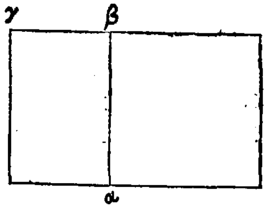
Vnde manifestum est superficiem commẽsurabilem superficiei mediali, medialem esse. Nam lineæ quæ possunt tales superficies, sunt potentia commensurabiles, quarum linearum altera, quæ scilicet potest superficiem medialem, medialis est, quare & reliqua medialis erit per hoc theorema 24. Sane quemadmodum diximus de lineis rationalibus, ita dicendũ est in lineis medialibus, nempe lineam mediali commensurabilem esse etiã medialem, lineam inquam quæ sit commẽsurabilis mediali siue sit longitudine & potentia commensurabilis, siue *potentia tantum. in uniuersum enim uerum est lineas longitudine commensurabiles, esse quoque potentia cõmensurabiles. Quod si lineæ mediali fuerit alia commẽsurabilis potentia, siquidem & longitudine cõmensurabilis fuerit, dicuntur illæ lineæ mediales longitudine & potentia commensurabiles. si uerò potentia tantum fuerint inter se commensurabiles, dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles. Sunt autem & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incõmensurabiles mediali, potentia tantum eidem commensurabiles, hæ uerò dicuntur & ipsæ mediales, eò quia commensurabiles sunt potẽtia lineæ mediali, & ea ratione qua sunt mediales, sunt inter se potẽtia commẽsurabiles, sed & inter se ipsæ comparatæ, possunt esse siue longitudine & ideo etiam potentia commensurabiles, siue potẽtia tantum.* Et *quidem si longitudine, dicũtur & ipsæ mediales longitudine commensurabiles, ut consequenter intelligatur potentia quoque commensurabiles esse. Quòd si potentia tantum sint inter se commensurabiles, nihilominus tamen & ipsæ dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles.* Hoc *loco addit exemplar græcũ, quod autem lineæ mediales sint cõmensurabiles, ita demonstrari potest. Quoniã mediales mediali cuidã sunt commensurabiles: quæ uerò sunt eidem commensurabilia, inter se quoque sunt commẽsurabilia.* Ergo *mediales sunt inter se commensurabiles. hoc totum nõ est* Eu*clidis, neque ullius omnino geometræ. nam quum dicitur, quoniam mediales mediali cuidam sunt commensurabiles, petitur principium.* P*ræterea falsum est simpliciter*

pliciter lineas mediales esse commensurabiles, quod patebit ex theoremate 35 huius libri, ubi propositum est reperire lineas duas potentia incommensurabiles cõficientes compositum ex quadratis ipsarũ mediale, & id parallelogrammum quod fit ex eisdẽ mediale, ipsum etiã incommensurabile composito ex quadratis illarum. Cũ ergo reperiantur duo medialia incõmensurabilia, certum est lineas quæ illa possunt esse mediales potentia incommensurabiles, quas necesse est esse etiam longitudine incommensurabiles.

Vigesimumquintum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum contentũ ex lineis medialibus longitudine commensurabilibus mediale est.

Ex lineis enim medialibus longitudine commẽsurabilibus $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *contineatur parallelogrammum rectãgulũ* $\alpha\gamma$, *dico illud parallelogrãmum esse mediale. Describatur enim ex linea* $\alpha\beta$ *quadratum*



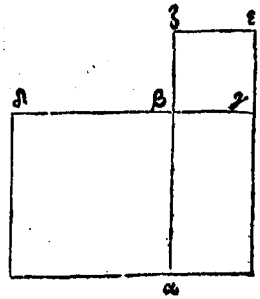
$\alpha\delta$: *mediale est ergo quadratum illud* $\alpha\delta$. *Et quoniã linea* $\alpha\beta$ *est longitudine cõmẽsurabilis lineæ* $\beta\gamma$, *æqualisque est linea* $\alpha\beta$ *lineæ* $\beta\delta$, *commensurabilis est ergo longitudine linea* $\beta\delta$, *lineæ* $\beta\gamma$. *sed quemadmodum se habet linea* $\delta\beta$ *ad lineam* $\beta\gamma$, *ita quadratum* $\delta\alpha$ *ad parallelogrammum* $\alpha\gamma$ *per primam sexti. Ergo per decimum theorema huius libri quadratum* $\delta\alpha$ *est commensurabile parallelogrammo* $\alpha\gamma$. *sed quadratũ* $\delta\alpha$ *est me-*

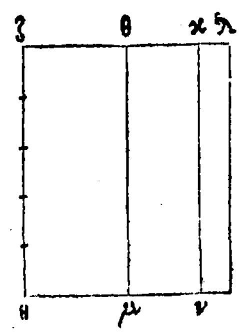
diale quia describitur à linea mediali. Ergo *per corollarium proximi theorematis parallelogrammũ $\alpha\gamma$ erit etiam mediale. quod demonstrandum erat.*

Vigesimumsextum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum comprehensum duabus lineis medialibus potentia tantum commensurabilibus, uel rationale est, uel mediale.

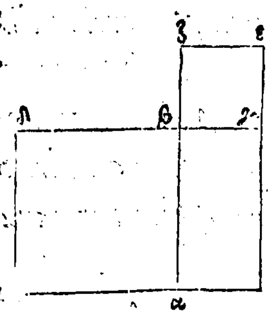
Proposita linea quæ sit medialis, alia reperitur potẽtia tantum commensurabilis eidem per 11 *huius, sicut de rationalibus ibidem dictum est.* Ex *duabus itaque medialibus potentia tantum cõmensurabilibus $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, parallelogrammum rectangulum comprehendatur quod sit $\alpha\gamma$.* Dico *illud parallelogrammum esse aut rationale aut mediale.* De*scribãtur enim quadrata linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ quæ sint $\alpha\delta$, $\beta\iota$, mediale est ergo utrũque per* 22 *huius.* Pro*ponatur linea rationalis $\kappa\zeta$ secundũ quam applicetur æquale quadrato $\alpha\delta$ parallelogrammum rectangulum $\kappa\theta$, cuius alterũ latus sit $\zeta\theta$. (hoc autẽ quomodo fiat diximus in theoromate* 23.*) parallelogrammo uerò $\alpha\gamma$ æquale secundum lineam $\theta\mu$, æqualem lineæ $\zeta\kappa$ applicetur parallelogrammum rectangulum $\mu\chi$, cuius alterũ latus sit $\theta\chi$. (ut autem id fiat, sumẽda est quarta li-*



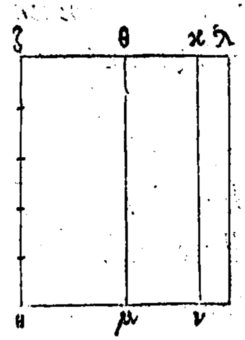


nea

nea proportionalis ad lineas θμ, αε, βγ per 12 sexti, quæ quarta sit θκ: ergo per 16 sexti parallelogrammum ex θμ, θκ erit æquale parallelogrammo ex lineis αβ, βγ.) præterea quadrato βι æquale similiter secundum lineã κν applicetur parallelogrammum rectangulum νλ, cuius alterum latus sit κλ. In *eadem ergo recta linea sunt lineæ ζθ, θκ, κλ. (*Nam *illa parallelogramma sic applicata secũdum lineas ζη, θμ, κν sunt rectangula, & anguli ζθμ, κθμ æquales duobus rectis, quia sunt ipsi recti.* Itaque *lineæ ζθ, θκ sunt in eadem linea recta per 14 primi. idem dices de angulis θκν, λκν.) Cum igitur mediale sit utrũque quadratum αδ, βι parallelogramma illis æqualia ηθ, νλ similiter medialia erunt.* Illa *autem applicantur secundum lineam rationalẽ, nempe ζη: rationalis est ergo utraque linea ζθ, κλ & incommensurabilis longitudine lineæ ζη per 23 huius.* Sed *quia lineæ αβ, βγ positæ sunt potentia commensurabiles: ergo quadratum αδ est commensurabile quadrato βι. similiter igitur illis æqualia parallelogramma ηθ, νλ erunt inter se commensurabilia.* Sed *sicut se habet parallelogrammum ηθ ad parallelogrammum νλ, ita se habet linea ζθ, ad lineam κλ per primum sexti.* Ergo *per decimum huius linea ζθ erit commensurabilis longitudine lineæ κλ.* Lineæ *ergo ζθ, κλ sunt rationales, longitudine inter se commensurabiles. inter se dico longitudine commẽsurabiles.* Nam *ipsi lineæ ζη propter quam sunt rationales, sunt longitudine incommensurabiles, ut modo probatum est.* Ergo *parallelogrammum contentum ex illis lineis ζθ, κλ est rationale per 20 huius. & quoniam*



linea β δ est æqualis lineæ β α, linea uerò ζ β æqualis lineæ β γ: est igitur sicut linea β δ ad lineam β γ, ita linea α β ad lineā β ζ. Sed sicut linea δ β ad lineam β γ, ita quadratū δ α ad parallelogrammum α γ per primum sexti. sicut autem linea α, ad lineam β ζ, ita parallelogrammum α γ ad quadratū β ε. Est igitur sicut quadratū α δ ad parallelogrammū α γ, ita parallelogrāmū α γ ad quadratū β ε. quadrato autē α δ æquale est parallelogrammū η θ. parallelogrammo autē α γ æquale est item parallelogrāmū μ κ. quadrato uerò

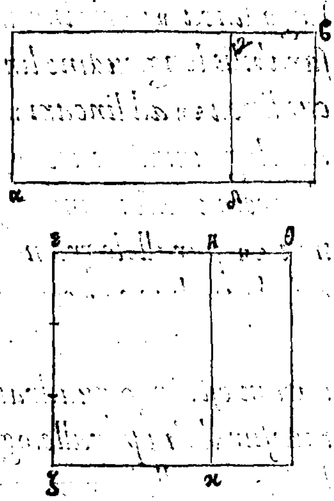


β ε æquale est parallelogrāmū λ. Est igitur sicut parallelogrāmū η θ ad parallelogrāmū μ κ, ita parallelogrāmū μ κ ad parallelogrāmū ν λ. Est ergo per primū sexti sicut linea ζ θ ad lineā θ κ, ita linea θ κ ad lineā κ λ. Ergo parallelogrammū contentum ex lineis ζ θ, κ λ est æquale quadrato lineæ θ κ per 17 sexti. sed parallelogrāmū ex lineis ζ θ, κ λ est rationale, ut modo probatū est, rationale est ergo quadratū lineæ θ κ. ergo linea θ κ erit rationalis. Et quidē si ipsa linea inquā θ κ fuerit longitudine cōmensurabilis lineæ θ μ, id est lineæ ζ η ipsi æquali, rationale tūc erit parallelogrāmū θ ν per 20 huius. Quod si fuerit longitudine incōmensurabilis ipsi lineæ ζ η, tunc lineæ θ μ, θ κ sunt rationales potentia tantū cōmensurabiles: sic igitur parallelogrammū θ ν erit mediale. Ergo paral-

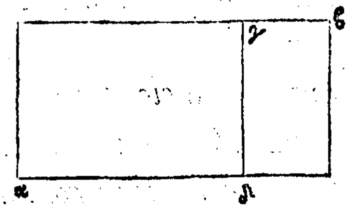
parallelogrammũ θ ι erit uel mediale uel rationale: sed parallelogrammũ θ ι est æquale parallelogrammo α γ. Ergo parallelogrammum α γ erit aut mediale aut rationale. Quomodo autem reperiantur lineæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale parallelogrammum continentes, item aliæ mediale continentes, docebunt theoremata 28. & 29.

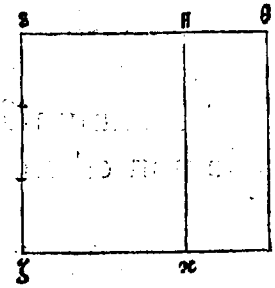
Vigesimumseptimum Theorema.

Mediale non est maius quàm mediale superficie rationali.



Nam si fieri potest mediale α β sit maius quàm mediale α γ superficie rationali quæ sit δ β, & proponatur linea rationalis ε ζ, & mediali α β æquale secundum lineam ε ζ applicetur parallelogrammum ζ θ, cuius alterum latus sit ε θ. ipsi autem mediali α γ æquale itẽ auferatur parallelogrammũ ζ κ. Reliquum ergo ϛ δ reliquo κ θ æquale est. sed per positionem β δ est rationale, ergo rationale etiam erit κ θ. Cum igitur mediale sit utrunque α β, α γ, sitq́; α ϛ æquale ipsi ζ θ: sit etiã α γ æquale ipsi ζ κ, mediale est ergo utrunque etiam ζ θ, ζ κ. & secundum lineam rationalẽ ε ζ applicãtur: rationalis est ergo utraq; linea θ ε, ε κ & incommensurabilis longitudine lineæ ε ζ per 23 huius. Et quoniam rationale est δ ϛ, ipsiq́; æquale κ θ: rationale etiam erit κ θ, & secundum lineam ra-





tionalem εζ uel ei æqualem ηκ applicatur: rationalis est ergo linea ηθ, & commensurabilis longitudine lineæ ηκ per 21 huius. sed linea ηκ est æqualis lineæ εζ: ergo linea ηθ est rationalis, & cõmensurabilis lõgitudine lineæ εζ. sed & linea εη rationalis est & incommensurabilis longitudine lineæ εζ. Ergo linea ηε erit incommensurabilis longitudine lineæ ηθ per 14 huius. Est autẽ sicut linea εη ad lineam ηθ, ita quadratũ lineæ εη ad parallelogrammum ex εη, ηθ per lemma suprapositũ post theorema 22. Incommensurabile est ergo quadratum lineæ εη parallelogrãmo ex lineis εη, ηθ per 10 huius. sed quadrato lineæ εη commensurabilia sunt quadrata linearũ εη, ηθ. ambo enim sunt rationalia, ut modo probatum est. Ergo quadrata linearum εη, ηθ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex lineis εη, ηθ per 14 huius. parallelogrammo uerò ex lineis εη, ηθ commensurabile est id quod fit bis ex lineis εη, ηθ (habent enim proportionem sicut numerus ad numerum, nempe sicut unitas ad binariũ, aut sicut binarius ad quaternariũ: itaque per 6 huius sunt commẽsurabilia) Ergo per eandem 14 huius, id quod fit bis ex lineis εη, ηθ est incommẽsurabile quadratis linearum εη, ηθ. hoc breuius concluditur per corollarium 14 theorematis. Sed quadrata linearum εη, ηθ & id quod fit bis ex lineis εη, ηθ sunt

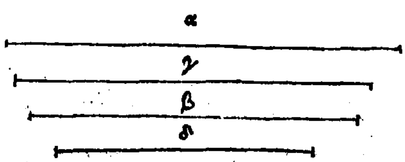
æqualia

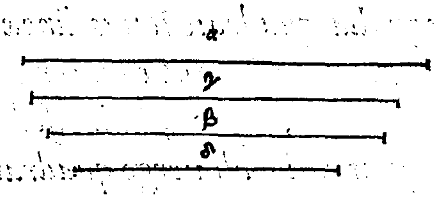
æqualia quadrato totius lineæ ιθ per 4. secundi. Ergo *quadratum lineæ ιθ est incommensurabile quadratis linearum ικ, κθ per 17 huius. sed quadrata linearum ικ, κθ sunt rationalia: ergo quadratum lineæ ιθ est irrationale. irrationalis est ergo linea ιθ. Sed modo demõstratũ est eã esse rationalẽ, quod fieri nullo modo potest. non igitur mediale maius est mediali superficie rationali.*

Vigesimumoctauum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmensurabiles rationale comprehendentes.

Proponantur duæ rationales lineæ potentia tantum commensurabiles α, β: sumaturq; media proportionalis inter eas linea γ, sitq; sicut linea α ad lineã β, ita linea γ ad lineam δ per 13 sexti. Cũ igitur lineæ α, β sint rationales potentia tantum commensurabiles, parallelogrammum comprehensum ex lineis α, β, hoc est quadratum lineæ γ (nam quadratũ lineæ γ est æquale parallelogrãmo ex lineis α, β per 17 sexti) est mediale: medialis est ergo linea γ. Et *quoniam est sicut linea α ad lineã β, ita linea γ ad lineam δ. erit sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ per 22. 6. sed quadrata linearum α, β sunt commensurabilia, quia lineæ α, β positæ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles. ergo & quadrata linearum γ, δ sunt etiam commensurabilia per*

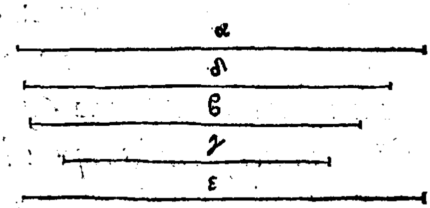




10 huius.ergo & lineæ γ,δ sunt etiā potentia commensurabiles per diffinitionē. Est autē linea γ medialis. Medialis *ergo est etiam linea δ per 24 huius.* Er*go lineæ γ,δ sunt mediales potentia tantum commensurabiles.* Dico *præterea eas continere parallelogrammū rationale.* Cum *enim sit sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ.permutata ergo proportione erit sicut linea α ad lineam γ,ita linea β ad lineam δ.sed sicut est linea α ad lineam γ,ita linea γ ad lineam β.ergo sicut linea γ ad lineā β,ita linea β ad lineam δ. ergo parallelogrammum ex lineis γ,δ est æquale quadrato lineæ β:sed quadratum lineæ β est rationale,quia linea β posita est rationalis.* Rationale *est ergo parallelogrammum ex lineis γ,δ.repertæ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes,quod faciendum erat.*

Vigesimumnonum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cōmensurabiles mediale comprehendentes.



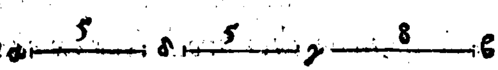
P*roponātur tres rationales potentia tantum cōmensurabiles α,β,γ,sumaturq; inter lineas α,β media proportionalis δ per 13.6.fiatq; sicut li-*

nea

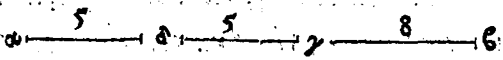
nea β ad lineam γ, ita linea δ ad lineā ι per 12.6. Cum igitur lineæ α, β sint rationales potentia tantum cōmensurabiles, ergo parallelogrammum ex α, β, hoc est quadratum lineæ δ est mediale, medialis est ergo linea δ. Et cum lineæ β, γ sint potentia tantum commensurabiles, sitq́; sicut β ad γ, ita δ ad ι. ergo δ, ι sunt potentia tantū commensurabiles. sed linea δ est medialis. ergo linea ι, erit etiam medialis. ergo lineæ δ, ι sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico præterea eas continere mediale. Cum enim sit sicut linea β ad lineā γ, ita δ ad ι: permutatim ergo sicut β ad δ, ita γ ad ι. sed sicut β ad δ, ita δ ad α per cōuersam siue contrariam proportionem, quæ probatur per corollarium quarti theorematis libri quinti. Itaque sicut δ ad α, ita γ ad ι. itaque parallelogrammum ex α, γ est æquale parallelogrammo ex δ, ι per 16.6. Sed parallelogrammū ex α γ per 22 huius mediale est, ergo mediale quoque erit parallelogrammum ex δ, ι. Repertæ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles mediale comprehendentes, quod demonstrandum erat.

Lemma.

Reperire duos numeros quadratos huiusmodi, ut numerus qui efficitur ex ipsorū additione sit etiā quadratus. Proponātur duo numeri α β, ϛ γ similes superficiales, qui quomodo reperiātur, dictum est in theoremate 9. sint



autem ambo pares uel ambo impares, sit etiam maior α β. Et quia siue à numero pari par auferatur, siue ab impari impar residuus est par, per 24 & 26.9. Dempto itaque β γ de α β residuus α γ par erit. Secetur numerus α γ in duas partes æquales in puncto δ, numerus ergo productus ex multiplicatione numerorũ α β, β γ cum numero quadrato producto ex multiplicatione γ δ in seipsum, est æqualis quadrato producto ex multiplicatione β δ in se ipsum, per eã quæ demõstrat Campanus propositione 16. libri 9. quam demonstrationem sumpsit ex 6 theoremate libri secundi. Est autẽ numerus productus ex multiplicatione α β, β γ, quadratus, per 1.9. Reperti sunt ergo duo numeri quadrati, nẽpe alter productus ex α β, β γ, alter autem ex multiplicatione γ δ in seipsum, qui compositi per additionẽ efficiunt numerũ quadratum, nempe productum ex multiplicatione β δ in seipsum.



Corollarium.

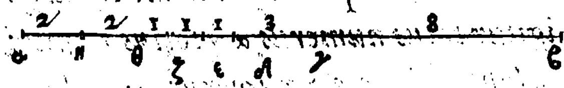
Ex hoc manifestum etiã illud est repertos esse duos numeros quadratos, nempe alterum productum ex multiplicatione β δ in seipsum, item alterum ex multiplicatione γ δ in seipsum tales, ut numerus quo excedit alter alterum, ille inquam numerus qui producitur ex multiplicatione α β, β γ: sit etiam quadratus quando uidelicet numeri α β, β γ fuerint similes superficiales. Quòd si nõ fuerint similes superficiales, reperti sunt duo quadrati, nẽpe alter productus ex radice β δ, & alter productus ex radice γ δ, quorum excessus, id est numerus quo maior excedit minorem, uidelicet productus ex α β, β γ non est quadratus.

Lemma.

Lemma.

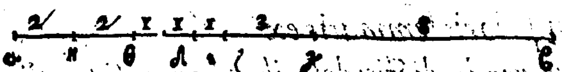
Reperire duos quadratos numeros huiusmodi ut compositus ex ipsorum additione ne sit quadratus.

Sit numerus productus ex multiplicatione numerorum



α γ,β γ, ut diximus in proximo lemmate, quadratus: sitq; numerus γ α par, diuidaturque idem numerus γ α in duas partes æquales in puncto δ. Manifestum *est numerum quadratum qui fit ex multiplicatione α β,β γ, cum quadrato radicis γ δ, æqualem esse quadrato radicis β δ, per ea quæ dicta sunt in proximo lẽmate. auferatur unitas ex δ γ, quæ unitas sit δ ε.* Ergo *quadratus productus ex multiplicatione α β,β γ, cũ quadrato radicis γ ε, minor est quadrato radicis β δ.* Dico *itaque numerũ compositũ ex quadrato producto per multiplicationẽ α β,β γ, & quadrato radicis γ ε, non esse quadratũ.* Q*uòd si dicas esse quadratũ, simul oportet eũ esse maiorẽ aut æqualẽ aut minorẽ quadrato radicis β ε.* Pri*mũ non potest eo maior esse.* Modo *enim probatũ est numerũ productũ ex α β,β γ, unà cũ quadrato radicis γ ε, esse minorem quadrato radicis β δ: sed inter quadratũ radicis β δ & quadratum radicis β ε, nullus medius quadratus interuenit.* Nam *radix β δ excedit radicem β ε, sola unitate quæ unitas in numeros diuidi nullo modo potest.* Aut *si numerus productus ex α β,β γ, unà cũ quadrato radicis γ ε esset maior quadrato radicis β ε,* *oportet eundem numerum productum ex α ϵ, β γ unà cum quadrato radicis γ ι, esse æqualē quadrato radicis β δ, cuius modo probatū est cōtrarium. Sit ergo, siquidē illud fieri posse dicis, numerus productus ex α β, ϵ γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ι, sitq; numerus κ α duplus ad unitatē δ ι, id est binarius. Cum igitur ~~totus numerus~~ α γ totius numeri γ δ sit duplus ex suppositione, & numerus α κ sit duplus ad unitatē δ ι: ergo residuus numerus γ κ ad residuū numerū ι γ, duplus erit per 5.5. siue per 7.7. & 11. eiusdē 7. Ergo in duas partes æquales diuisus est numerus κ γ, in puncto ι. Numerus itaq; productus ex κ β, β γ unà cū quadrato radicis γ ι est æqualis quadrato radicis ι β. sed per positionem tuam numerus productus ex α β, β γ unà cū quadrato γ ι, est æqualis eidē quadrato radicis ϵ ι. Ergo numerus productus ex κ β, β γ unà cū quadrato radicis γ ι est æqualis numero producto ex α β, β γ unà cū quadrato radicis γ ι, quia quæ uni & eidē sunt æqualia, inter se quoq; sunt æqualia. sed si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanēt sunt æqualia. Ergo numerus productus ex κ β, ϵ γ, est æqualis numero producto ex α β, β γ. Ergo per 17. uel 18. 7. numerus κ β est æqualis numero α β minor maiori, quod est impossibile. Non igitur erit numerus productus ex α β, β γ cū quadrato radicis γ ι, æqualis quadrato radicis ϵ ι. Dico similiter eūdem numerum productū ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι non esse minorem quadrato radicis β ι. Si enim fieri posse dicas, erit ergo æqualis cuipiam numero quadrato minori quàm est quadratus radicis β ι. sit ergo*

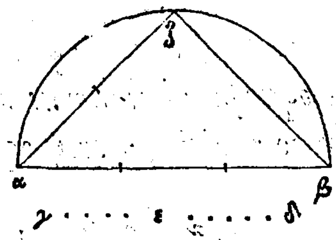
ergo numerus ille productus ex α β, β γ, unà cum quadrato radicis γ ε æqualis quadrato radicis β ζ, ſumatúrque numerus θ α duplus ad numerum δ ζ. efficitur ſimiliter ut numerus θ γ ſit duplus ad numerũ ζ γ, ita ut etiam θ γ ſecetur in partes duas æquales in puncto ζ. ideóque ſimul numerus productus ex θ β, β γ cum quadrato radicis ζ γ erit æqualis quadrato radicis β ζ.



Sed per poſitionẽ tuã numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ε erat æqualis quadrato radicis β ζ. efficitur ergo ut numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ε ſit æqualis numero producto ex θ β, β γ, unà cum quadrato radicis γ ζ, quod eſt impoſsibile. Nam ſi eſſet æqualis, cum quadratus radicis γ ζ ſit minor quadrato radicis γ ε, oporteret numerũ productum ex θ β, β γ eſſe maiorẽ numero producto ex α β, β γ, itaque ſimul neceſſe eſſet numerum θ β eſſe maiorem numero α β, cum tamen ſit eo minor. Non erit ergo numerus productus ex α β, β γ cum quadrato radicis γ ε æqualis numero minori quàm ſit quadratus radicis β ε. Sed demonſtratum eſt neque eſſe poſſe eidem æqualem, neq; maiorem: igitur numerus ex α β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ε, compoſitus quadratus eſſe nullo modo poteſt.

Trigeſimum Theorema.

Reperire duas rationales potentia tantũ commensurabiles huiusmodi, ut maior ex illis possit plusquam minor quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine.

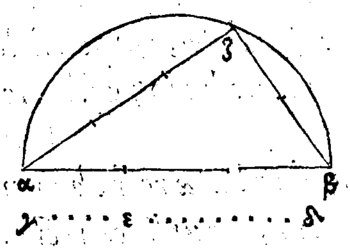


Esto proposita linea rationalis α β, & duo numeri quadrati γ δ, δ ε, huiusmodi, ut excessus illorũ γ ε ne sit quadratus numerus per corollarium prioris lemmatis ex duobus modo dictis: describaturque super linea α β, semicirculus α ζ β, fiatq; sicut numerus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum alterius lineæ quæ sit α ζ per lemma positum post 6. theorema huius libri, & ducatur linea ζ β. Cum igitur sit sicut quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ, ita numerus γ δ ad numerum γ ε, ergo commensurabile est quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ per 6 huius. sed quadratum lineæ α β est rationale. ergo etiam rationale erit quadratum lineæ α ζ. Rationalis est ergo linea α ζ. Cúmq; numerus δ γ, ad numerum γ ε proportionem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum per 24. 8. à destructione consequentis: neque similiter quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo linea α β erit incommensurabilis longitudine lineæ α ζ, per 9 huius. ergo lineæ α β, α ζ, sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Cúmque sit sicut numeus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratũ lineæ α ζ. per euersam

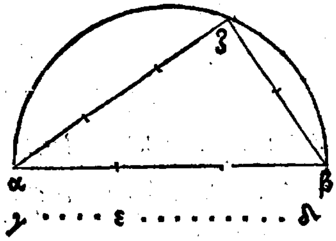
sam ergo porportionem quæ dicitur ἀναστροφὴ λόγου, demonstraturque per corollarium 19 theorematis libri 5. sicut numerus γδ ad numerum δε, ita quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ βζ, qui est excessus quadrati lineæ αβ, supra quadratum lineæ αζ per lemma positum post 14 huius libri. sed numerus γδ ad numerum δε habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ βζ proportionem habet quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea αβ est commensurabilis longitudine lineæ βζ, per 9 huius. Est autem quadratum lineæ αβ æquale duobus quadratis linearum αζ, ζβ. Ergo linea αβ plus potest quàm linea αζ quadrato lineæ βζ sibi commensurabilis longitudine. Repertæ sunt ergo duæ rationales potentia tantum cōmensurabiles huiusmodi &c. quod demonstrandum erat.

Lemma.

Reperire duas rationales potentia tantum commensurabiles huiusmodi, ut maior plus possit quàm minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.



Proponatur linea rationalis αβ, & numeri quadrati duo γε, εδ, tales ut compositus ex ipsis nempe γδ, ne sit quadratus per alterū lemma positum post 29. theorema huius libri: describaturque super linea αβ semicirculus αζβ, fiatq; sicut numerus δγ ad numerum γε, ita quadratum lineæ αβ, ad quadratum lineæ αζ: duca-



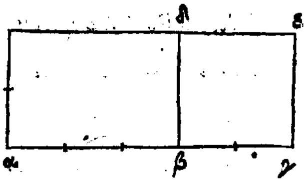
túrque linea à puncto ζ in punctum β quæ sit ζ β, quẽadmodũ in præcedẽti theoremate. similiter hîc demonstrabimus lineas α β, α ζ, esse rationales potentia tantum commensurabiles. Et cum sit sicut numerus δ γ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ. Per euersam ergo proportionem quemadmodũ numerus δ γ ad numerum δ ε, ita quadratũ lineæ α β ad quadratum lineæ ζ β, ut diximus in præcedẽti theoremate. sed numerus γ δ ad numerum δ ε proportionẽ non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum per corollarium illatum à destructione consequentis 24 lib. 8. Neque ergo quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ β ζ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo per 9 huius linea α β erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ β. Potest autem linea α β plus quàm linea α ζ quadrato lineæ β ζ sibi incommensurabilis longitudine. Ergo lineæ α β, α ζ sunt duæ rationales potentia tãtum cõmensurabiles, & potest linea α β plus quàm linea α ζ quadrato lineæ ζ β sibi incommensurabilis longitudine.

Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ habentes inter se aliquam proportionem, erit ut linea recta ad lineam rectam, ita parallelogrammum contentum ex ambabus ad quadratum lineæ minoris ex illis duabus. Hoc lemma nihil amplius *affert quàm primum theorema libri sexti, itaque non reperitur*

reperitur in quibusdam exemplaribus.

Sint duæ rectæ lineæ α β, β γ in aliqua proportione. Dico sicut linea α β ad lineam β γ, ita esse parallelogrammum ex α β, β γ ad quadratũ β γ. Describatur enim quadratũ lineæ β γ, quod sit β δ ε γ, compleaturq; parallelogrammum α δ. manifestum

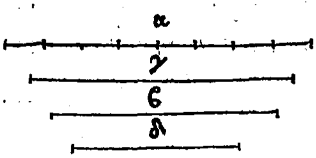


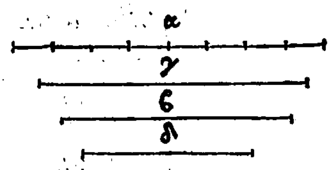
est sicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammũ α δ ad parallelogrammum uel quadratum β ε per primam sexti. Est autem parallelogrammum α δ contentũ ex lineis α β, β γ. est enim æqualis linea β γ lineæ β δ. parallelogrammum autem β ε est quadratum lineæ β γ. Ergo sicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum ex α β, β γ ad quadratum lineæ β γ. quod demonstrandum erat.

Trigesimumprimum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potentia tantum cõmensurabiles rationalem superficiem continentes, tales inquam, ut maior possit plusquã minor quadrato lineę sibi cõmensurabilis longitudine.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α, β, tales ut maior α possit plus quàm minor β quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 30 theorema, sitq; parallelogrammo ex α, β æquale quadratum lineæ γ (quod sit reperta linea me-

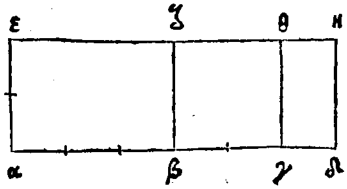


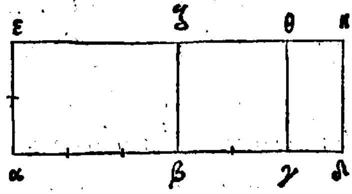


dia proportionali, nempe linea γ inter α, β, ut traditur libro ſexto). Eſt autem mediale parallelogrā mū ex α, β per 22 huius libri. ergo ſimiliter mediale erit quadratū lineæ γ. linea ergo γ erit medialis. Quadrato autē lineæ β æquale ſit parallelogrammū ex γ, δ, reperta tertia proportionali, nēpe linea δ, ad duas lineas γ, β, ut traditur libro 6. Eſt autem quadratum lineæ β rationale. eſt ergo & parallelogrammum ex γ, δ rationale. Et quoniā ſicut linea α ad lineam β, ita eſt parallelogrammum ex α, β ad quadratum lineæ β per lemma modo poſitum. Sed parallelogrammo ex α, β, æquale eſt quadratum lineæ γ. quadrato autē lineæ β æquale eſt parallelogrammum ex lineis γ, δ, ut modo probatū eſt. Eſt ergo ſicut linea α ad lineam β, ita quadratum lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ. Sed ſicut eſt quadratū lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ, ita linea γ ad lineam δ per lemma poſitum ante 23 huius libri. Ergo ſicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineā δ. Sed linea α eſt poſita commenſurabilis potentia tantum lineæ β. Ergo etiam linea γ eſt commenſurabilis potentia tantū lineæ δ per 10 huius. Sed linea γ eſt medialis, ergo etiam linea δ erit medialis per 24 huius. Et quoniam eſt ſicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ. lineáque α poteſt pluſquam linea β quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per ſuppoſitionem. Ergo etiam linea γ poterit pluſquam linea δ quadrato lineæ ſibi cōmēſurabilis longitudine per 15 huius. Repertæ ſunt ergo *go duæ mediales potentia tantum commensurabiles γ, δ, rationalem superficiem continentes, poteſtque linea γ plusquam linea δ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Similiter etiam reperiri possunt duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, tales ut maior poßit plusquã minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, quando uidelicet linea α poterit plusquam linea β quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. quod facere docuit prius lemma positũ post 30 theorema huius libri.* Manente eadem constructione poteſt facilius illa pars huius theorematis demonſtrari ab illis uerbis. Et quoniam sicut linea α usq; ad ea uerba, Sed linea α eſt posita commensurabilis. Nam lineæ γ, β, δ sunt continue proportionales per secũdam partem 17. 6. Sed etiam α, γ, ε sunt tres continue proportionales. Ergo per 11. 5. erit sicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ. Ergo permutata proportione sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ &c.

Lemma.

Si sint tres lineæ rectæ habẽtes proportionem aliquam inter se, erit sicut prima ad tertiam, ita parallelogrammũ ex prima & media ad parallelogrammum ex media & tertia. Sint tres lineæ rectæ in aliqua proportione αβ, βγ, γδ. Dico sicut linea αβ ad lineam γδ, ita eſſe parallelogrammum ex αε, βγ ad parallelogrammum ex βγ, γδ. Erigatur enim ex puncto α supra lineam αβ perpendicularis linea αι,



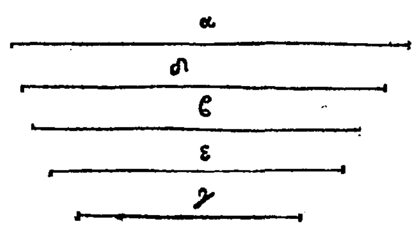


ſitq; illa α ι æqualis lineæ β γ, & à pũcto ι lineæ α δ ducatur parallela linea ι κ, & à ſingulis punctis β, γ, δ, lineæ α ι, parallelæ lineæ ducantur β ζ, γ θ, δ κ. Cúmque ſit ſicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum α ζ ad parallelogrammum β θ, per primam ſexti. ſicut autem linea β γ ad lineã γ δ, ita parallelogrammum β θ ad parallelogrammum γ κ. Per *æquam itaque proportionem erit ſicut linea α β ad lineam γ δ, ita parallelogrammum α ζ, ad parallelogrammum γ κ.* Eſt *autem parallelogrammũ α ζ ex lineis α β, β γ. poſita eſt enim æqualis α ι lineæ β γ, eſtq; parallelogrammum γ κ ex lineis β γ, γ δ.* Nam *β γ eſt æqualis lineæ γ θ, quia γ θ eſt æqualis lineæ α ι per 34.1.* Ergo *ſi ſint tres lineæ rectæ &c. quod demonſtrandum erat.*

Trigeſimumſecundum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potẽtia tantum cõmenſurabiles medialem ſuperficiem continentes, huiuſmodi ut maior plus poſsit quàm minor quadrato lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine.

Proponantur tres rationales α, β, γ, potentia tantum commẽſurabiles, tales ut linea α plus poßit quàm linea γ quadrato lineæ ſibi commẽſurabilis longitudine. Et *parallelogrãmo ex α, β ſit æqua-*

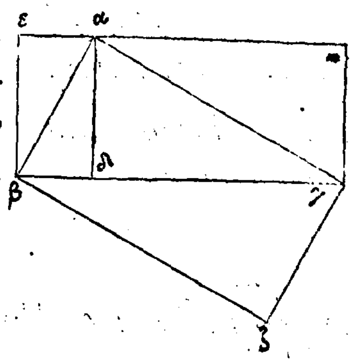


le quadratum lineæ δ. Parallelogrammum *autem ex* α,β *est mediale, mediale ergo erit, & quadratum lineæ* δ. *ergo linea* δ *erit medialis. parallelogrammò uerò ex* β,γ *sit æquale parallelogrammum ex* δ,ι (*quod fit reperta quarta proportionali ad lineas* δ,ϛ,γ *quæ sit linea* ι.) Cum *itaque sit sicut parallelogrammum ex* α,β *ad parallelogrammum ex* ϛ,γ, *ita linea* α *ad lineã* γ *per lemma proximũ*. Sed *parallelogrãmo ex* α,ϛ *est æquale quadratum lineæ* δ: *parallelogrammo uerò ex* β,γ *est æquale parallelogrammum ex* δ,ι. E*st ergo sicut linea* α *ad lineam* γ, *ita quadratũ lineæ* δ, *ad parallelogrammum ex* δ,ι. Sed *sicut quadratum lineæ* δ *ad parallelogrammũ ex* δ,ι, *ita linea* δ *ad lineam* ι *per lemma positum post* 22 *theorema*. Ergo *sicut linea* α *ad lineam* γ, *ita linea* δ *ad lineam* ι. Sed *linea* α *est commensurabilis potentia tantum lineæ* γ. Ergo *linea* δ *erit commensurabilis potentia tantũ lineæ* ι. Sed *linea* δ *est medialis. ergo linea* ι *erit etiã medialis per* 24 *huius*. Cũq; *sit sicut linea* α *ad lineã* γ, *ita linea* δ *ad lineam* ι. *linea autem* α *poßit plus quàm linea* γ *quadrato lineæ sibi cõmensurabilis longitudine*. Ergo *linea* δ *poterit plusquã linea* ι *quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per* 15 *huius*. Dico *præterea parallelogrammum ex* δ,ι *esse mediale*. Nam *est æquale parallelogrammo ex* β,γ *quod est mediale per* 22 *huius*. Mediale *est ergo similiter parallelogrammum ex* δ,ι, Repertæ *sunt ergo duæ mediales potentia tantum commensurabiles, nempe* δ,ι *&c. quod fecisse oportuit*. Rursus *eadem ratione reperientur duæ mediales potentia tantum commensurabi-*

les mediale continentes, huiusmodi, ut maior plus poßit quàm minor quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, quandocunque linea α plus poterit quàm linea γ quadrato lineæ sibi incõmẽsurabilis longitudine.

Lemma.

Sit triangulum rectangulum β α γ, habens rectum angulũ α, ducatúrque perpendicularis α δ. dico primò parallelogrammum ex γ β, β δ esse æquale quadrato lineæ β α. dico secundò parallelogrammum ex β γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ γ α. dico tertiò parallelogrammũ ex β δ, δ γ esse æquale quadrato lineæ δ α. dico quartò parallelogrammum ex β γ, α δ esse

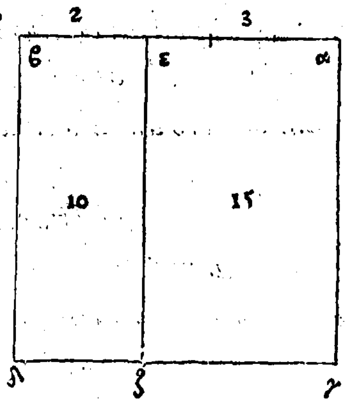


æquale parallelogrammo ex β α, α γ. Quod ad primum attinet, parallelogrãmũ ex γ β, β δ esse æquale quadrato lineæ β α, ita demonstratur. Cũ ab angulo recto triãguli rectanguli ad basim perpẽdicularis ducta sit linea α δ. Ergo triangula α β δ, α δ γ sunt similia toti triangulo α β γ, & ipsa inter se per 8.6. Et cum triangulũ α β γ sit simile triangulo α β δ. sunt igitur ambo triãgula æqualium angulorum per definitionem similium figurarum. Ergo per 4.6. sicut linea γ β ad lineã β α, ita linea β α ad lineam β δ. Ergo parallelogrammum ex γ β, β δ erit æquale quadrato lineæ α β per 17.6. Quod ad secũdum, parallelogrammũ ex β γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ α γ, eadem ratione demonstratur. Nam triangulum

gulum α β γ est simile triangulo α δ γ. Est igitur sicut linea β γ ad lineam α γ, ita linea α γ ad lineam δ γ. Ergo parallelogrammum ex β γ, γ δ est æquale quadrato lineæ α γ. Quod ad tertium, parallelogrammum ex β δ, δ γ esse æquale quadrato lineæ δ α, ita demonstratur. Cum à recto angulo trianguli rectanguli ad basim ducta sit perpēdicularis, illa perpēdicularis est media proportionalis inter sectiones basis per corollariū 8. theorematis libri 6. Est igitur sicut linea β δ ad lineā α δ, ita α δ ad δ γ. Ergo parallelogrammū ex β δ, δ γ est æquale quadrato lineæ δ α. Quod ad quartum, parallelogrammum ex β γ, α δ esse æquale parallelogrammo ex β α, α γ, ita demonstratur. Cum enim, sicut modo dictū est, triāgulum α β γ sit simile triangulo α β δ, & ideo æqualium angulorū. Est igitur sicut linea β γ ad lineam γ α, ita linea β α ad lineam α δ per 4.6. Ergo per 16.6. parallelogrammum ex β γ, α δ esse æquale parallelogrammo ex β α, α γ. Dico præterea si compleatur parallelogrammū rectangulum ex β γ, α δ quod sit ι γ, compleaturq; parallelogrammū ex β α, α γ quod sit α ζ. Alia ratione demonstrabitur, parallelogrammum ι γ esse æquale parallelogrammo α ζ. Nam utrunque ipsorum est duplum trianguli α γ β, per 41.1. Et quæ unius & eiusdem sunt dupla, inter se sunt æqualia. ergo &c.

Lemma.

Si linea recta scindatur in partes duas inæquales, erit ut maior portio ad minorem, ita parallelogrammum ex tota & maiore portione ad parallelogrammum ex tota & minore. Recta linea α β diuidatur in partes *duas inæquales in puncto ι, sitq; α ι maior portio. Dico sicut α ι ad lineã ι β, ita parallelogrammũ ex β α, α ι ad parallelogrammũ ex ϐ α, β ι.*



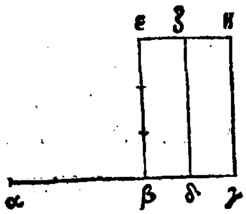
Describatur enim quadratũ lineæ α ϐ quod sit α γ δ ϐ, & à puncto ι utrique α γ, δ β parallela ducatur ι ζ, manifestũ est sicut linea α ι ad lineã ι β, ita parallelogrammũ α ζ ad parallelogrammũ ϐ ζ per primam sexti. Est autem parallelogrammum α ζ contentum ex lineis β α, α ι. est enim linea α γ æqualis lineæ α β, parallelogrammum uerò ϐ ζ est cõtentum ex lineis α β, ϐ ι. Nam δ ϐ est æqualis lineæ α ϐ. sicut ergo linea α ι ad lineam ι ϐ, ita parallelogrammum ex β α, α ι, ad parallelogrammum ex α β, ϐ ι. quod demonstrandum erat.

Hoc lemma nihil aliud affert quàm quod primum theorema sexti.

Lemma.

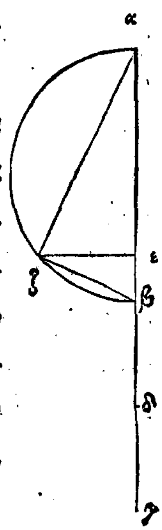
Si sint duæ lineæ rectæ inæquales, diuidatúrque minor in partes duas æquales, parallelogrammum ex ambabus lineis inæqualibus est duplum parallelogrammi ex maiore & media minoris. Quanuis hoc lemma sit in græco exemplari pòst 33. theorema, uisum est tamen hoc loco ponere, quia sequentis theorematis 33. demonstrationem adiuuat. Sint duæ rectæ inæquales α β, quarum maior sit α β, diuidatúrque β γ bifariam in puncto δ. Dico parallelogrammum ex α ϐ, β γ esse duplum parallelogrammi ex α β, ϐ δ. ducatur enim à puncto β super

lineam



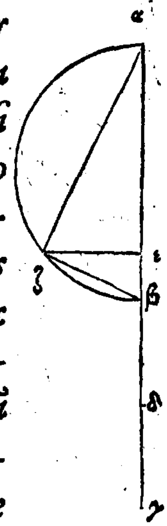
lineam β γ perpendicularis β ι, sitq́; æqualis lineæ β α, describatúrq; figura ut picta est. Cũ igitur sit sicut λ β ad λ γ, ita parallelogrammum ϛ ζ ad parallelogrammum λ κ per 1.6. Composita ergo proportione erit sicut tota linea ϛ γ ad lineã λ γ, ita parallelogrammũ β κ ad parallelogrammũ λ κ per 18.5. Est autem linea β γ dupla lineæ λ γ, ergo parallelogrammum β κ erit duplum parallelogrammi λ κ. Est autem parallelogrammum β κ ex lineis α ϛ, β γ. nam linea α ϛ est æqualis lineæ ϛ ι: parallelogrammũ uero λ κ est ex lineis α β, β λ. nam æqualis est β λ linea, lineæ λ γ: linea uerò α β lineæ λ ζ. quod demonstrandum erat.

Trigesimumtertium Theorema.



Reperire duas rectas potentia incommensurabiles, quarum quadrata simul addita faciant superficiem rationalem, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum sit mediale.

Pr*oponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α β, β γ, huiusmodi, ut maior ex illis, nempe α β, plus possit, quàm minor β γ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine per lemma positũ priore loco post 30 theorema huius libri. Diuidatúrque linea ϛ γ bifariam & æqualiter in pũcto λ: & quadrato lineæ ϛ λ uel λ ϛ æquale secundum lineam α β applicetur paral-*



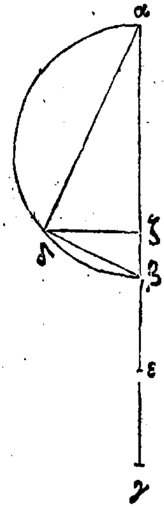
lelogrammũ quadrata figura deficiens per 28.6. (Hæc autem uerba, quadrata figura deficiẽs, idem significant quod ea quibus usi sumus in 18 & 19 theoremate, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrãmi.) sitq; parallelogrammũ ex αι, ιβ. describatur super linea αϐ semicirculus αζϐ, & à linea αβ ad circunferentiã semicirculi ducatur perpendicularis ιζ, ducanturq; lineæ αζ, ζβ. Cum igitur sint duæ rectæ inæquales αϐ, ϐγ, positq; linea αβ plusquam linea βγ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine: quartæ autẽ parti quadrati lineæ minoris βγ, hoc est quadrato illius dimidiæ quod est δβ, æquale parallelogrammum deficiens figura quadrata applicatũ sit secundum lineam αβ, quod parallelogrammum est ex αι, ιβ. Ergo incommensurabilis est longitudine linea αι lineæ ιβ, per secundam partem 19 huius libri. Est autem sicut linea αι ad lineam ιβ, ita parallelogrammũ ex βα, αι ad parallelogrammum ex αβ, βι, per lemma penultimo loco positum ante hoc theorema. Est autẽ parallelogrammum ex αβ, αι æquale quadrato lineæ αζ, per secundam partẽ lemmatis primo positi post 32 theorema: parallelogrammum autem ex αβ, βι est æquale quadrato lineæ βζ per primã partem eiusdem lemmatis. Ergo incõmensurabile est quadratũ lineæ αζ quadrato lineæ βζ per 10 huius, ergo lineæ αζ, ζβ sunt potentia incommensurabiles. Sed quia linea αϐ est rationalis,

nalis, rationale est ergo quadratum ipsius. ergo compositum ex additione amborum quadratorum, nempe descriptorum ex lineis α ζ, ζ ϛ, quæ sunt æqualia quadrato lineæ α β per 47. 1. erit inquam illud compositum rationale. Rursum parallelogrammũ ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ ι ζ per tertiam partem eiusdem lemmatis. Sed per suppositionem idem parallelogrammum ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ β δ. Ergo linea ζ ι est æqualis lineæ ϛ δ. ergò linea β γ est dupla ad lineam ζ ι. Quare & parallelogrammum ex α β, β γ est duplũ ad parallelogrammũ ex α ϛ, ι ζ, per proximũ lemma, quod perperam positũ esse diximus in exemplari græco post huius theorematis demõstrationem. Sed parallelogrammum ex α β, β γ est mediale per suppositionem & 22 theorema. Ergo etiam mediale erit parallelogrammum ex α β, ι ζ per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α β, ι ζ est æquale parallelogrammo ex α ζ, ζ β per quartam partem illius lemmatis positi post 32. theorema. Ergo parallelogrammum ex α ζ, ζ β erit mediale. Sed modo probatũ est compositũ ex quadratis earundem linearum α ζ, ζ β esse rationale. Repertæ sunt ergo duæ lineæ rectæ, nempe α ζ, ζ β potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: parallelogrammum uerò ex eisdem cõtentũ, mediale, quod faciendum erat.

Trigesimumquartum Theorema.

Reperire lineas duas rectas potentia incommensurabiles conficientes compositum ex ipsarũ quadratis mediale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum rationale.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles αβ, βγ rationale continentes parallelogrammum ex ipsis, tales inquã, ut linea αβ possit plus quàm linea βγ quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, per postremam partem demõstrationis theorematis 31. Describatúrque super linea αβ semicirculus αδβ. diuidatur etiam linea βγ bifariam & æqualiter in puncto ε: & secundũ lineã αβ quadrato lineæ βε æquale parallelogrammum applicetur, deficiens figura quadrata quod parallelogrammum sit ex αζ, ζβ, ut dictũ est in proximo theoremate. Incommensurabilis *est ergo longitudine linea αζ lineæ ζβ, ut ibidem dictum est: & à puncto ζ erigatur linea ζδ perpendicularis super linea αβ, ducantúrque lineæ αδ, δβ.* Et *quoniam est sicut linea αζ ad lineam ζβ, ita parallelogrammum ex βα, αζ ad parallelogrammum ex βα, βζ per alterum lemma positum ante theorema 33. uel per primũ sexti.* Er*go per 10 huius, parallelogrammum ex βα, αζ est incõmensurabile parallelogrammo ex αβ, βζ.* Sed *per lemma positum post 32 theorema, parallelogrammum ex βα, αζ est æquale quadrato lineæ αδ: parallelogrammũ uerò ex αβ, βζ est item æquale quadrato lineæ βδ.* Incõ*mensurabile est ergo quadratum lineæ αδ quadrato lineæ βδ.* Ergo *lineæ αδ, δβ sunt potentia incommensurabiles.*



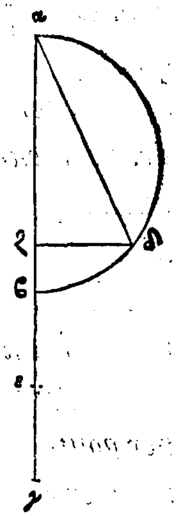
rabiles. Et *quoniam quadratum lineæ* $\alpha\beta$ *est mediale, quod est æquale duobus quadratis duarum linearum* $\alpha\delta,\delta\beta$ *per* 47.1. Ergo *compositum ex illis duobus quadratis linearum* $\alpha\delta,\delta\beta$ *est etiam mediale.* Et *quoniam linea* $\beta\gamma$ *est dupla ad lineam* $\delta\zeta$, *ut probatũ est in proximo theoremate.* Ergo *parallelogrammum ex* $\alpha\beta,\beta\gamma$ *erit duplum ad parallelogrammum ex* $\alpha\beta,\delta\zeta$ *per lemma positum ante* 33 *theorema, uel per primam sexti, quare & eidem erit commensurabile per 6 huius.* Sed *per positionem parallelogrammum ex* $\alpha\beta,\beta\gamma$ *est rationale. ergo parallelogrammum ex* $\alpha\beta,\delta\zeta$ *est etiam rationale. parallelogrammo uerò ex* $\alpha\epsilon,\delta\zeta$ *æquale est parallelogrammum ex* $\alpha\delta,\delta\beta$ *per tertiam partem lemmatis positi post* 32 *theorema. quare parallelogrammũ ex* $\alpha\delta,\delta\beta$ *erit etiam rationale.* Repertæ *sunt ergo duæ lineæ rectæ, nẽpe* $\alpha\delta,\delta\beta$ *potentia incõmẽsurabiles &c.*

Trigesimumquintum Theorema.

Reperire duas lineas rectas potentia incommensurabiles, conficientes id quod ex ipsarum quadratis componitur mediale, simúlque parallelogrammum ex ipsis cõtentũ, mediale, quod præterea parallelogrammum sit incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha\beta,\epsilon\gamma$ *mediale continentes, tales inquam, ut* $\alpha\epsilon$ *plus posit quàm* $\beta\gamma$ *quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, per postremam partem demonstrationis theorematis* 32. *Describatúrque super linea* $\alpha\epsilon$

semicirculus α δ β, cæteráque constructa sunto eo modo quo in præcedentibus. Cum linea α ζ sit incommensurabilis longitudine lineæ ζ β, est etiam incommensurabilis potẽtia linea α δ lineæ δ β, per ea quæ sunt demonstrata in proximo theoremate. Et quoniam quadratum lineæ α β est mediale, ergo compositum ex quadratis linearũ α δ, δ ϵ quod est æquale quadrato lineæ α ϵ per 47.1. erit etiam mediale. Et quoniã parallelogrammum ex α ζ, ζ β est æquale alterutri quadrato ex singulis lineis β ι, δ ζ.



Nam ex suppositione parallelogrammum ex α ζ, ζ ϵ est æquale quadrato lineæ ϵ. idem etiã parallelogrammũ ex lineis α ζ, ζ β est æquale quadrato lineæ δ ζ per tertiam partem lemmatis positi post 32. theorema. Ergo linea δ ζ est æqualis lineæ ϵ ι. dupla est ergo linea β γ ad lineam ζ δ. Quare & parallelogrammũ ex α β, β γ erit duplum ad parallelogrammum ex α β, ζ δ, itaque sunt commensurabilia per sextam huius. Sed parallelogrãmum ex α β, β γ est mediale per positionem. Ergo parallelogrammum ex α ϵ, ζ δ erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α ϵ ζ δ est æquale parallelogrammo ex α δ, δ β per quartã partem eiusdem lemmatis. Ergo parallelogrammum ex α δ, δ ϵ erit etiam mediale. Et quoniam linea α ϵ est incommensurabilis longitudine lineæ β γ: linea uerò ϵ γ est commẽsurabilis longitudine lineæ β ι: est ergo linea α β longitudine incommensurabilis lineæ β ι per 13. uel 14 huius.

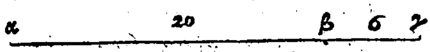
huius. quare & quadratum lineæ α β erit incommensurabile parallelogrammo ex α β, β ε per primum sexti & 10 huius. Sed quadrato lineæ α ε est æquale compositum ex quadratis linearum α δ, δ β. parallelogrammo uerò ex α β, β ε est æquale parallelogrammū ex α β, ζ δ, hoc est parallelogrammum ex α δ, δ β. Nam parallelogrammū ex α β, ζ δ est æquale parallelogrammo ex α δ, δ ε. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearum α δ, δ ε parallelogrammo ex eisdem lineis α δ, δ ε. Repertæ sunt ergo duæ rectæ nempe α δ, δ ε potentia incommensurabiles &c.

Principium senariorum per compositionem.

Trigesimumsextum Theorema.

Si duæ rationales potentia tantum commensurabiles cōponantur, tota linea erit irrationalis. Vocetur autem Binomium.

Componantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α β, ε γ, quales reperire docet 11 huius.



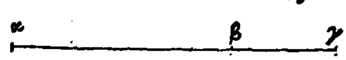
Dico totam lineam α γ esse irrationalem. Cum enim sit incommensurabilis longitudine linea α β, lineæ ε γ, positæ sunt enim potentia tantum commensurabiles: cumque sit sicut linea α ε ad lineā β γ, ita parallelogrāmum ex α ε, ε γ ad quadratum ε γ per 1.6. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ex α ε, ε γ quadrato lineæ β γ per 10 huius. Sed parallelogrammo ex α ε, ε γ commensurabile est id quod fit bis ex α ε, β γ per 6. huius. Ergo id quod fit bis ex α ε, β γ est incommensurabi-

le quadrato lineæ βγ per 14 huius. Quadrato autem lineæ βγ est commensurabile cōpositū ex quadratis linearum αβ, βγ per 16 huius, quia per suppositionem lineæ αβ, βγ sunt potentia tantum commensurabiles. Ergo per 14 compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per 17 id quod fit bis ex αβ, βγ cum quadratis linearum αβ, βγ, quod est æquale quadrato totius lineæ αγ per 4. 2. est incommensurabile cōposito ex quadratis linearum αβ, βγ. Sed compositū ex quadratis linearum αβ, βγ est rationale, quia est commensurabile alterutri quadrato linearum αβ, βγ, quorum utrūque est rationale per positionem. Ergo quadratum lineæ αγ est irrationale, quare & linea αγ erit irrationalis. Vocetur autem linea illa Binomium. *Hic autem & in cæteris deinceps denominationibus linearum irrationalium, nihil innouandum censuimus de uocibus tritis & iamdudum inter latinos geometras receptis, nisi si quādo ratio contrarium suaserit.*

Trigesimumseptimum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes cōponantur, tota linea est irrationalis. Vocetur autem bimediale prius.

Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles αβ, βγ rationale continentes (quales reperire docet 28) dico totam lineam αγ esse irrationalem. sicut enim

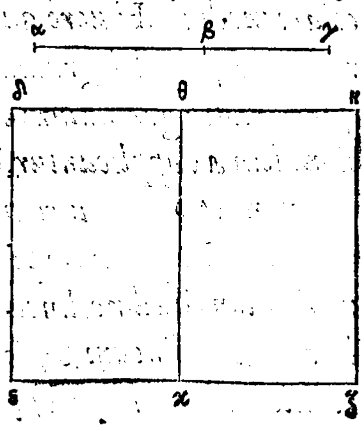


dictum

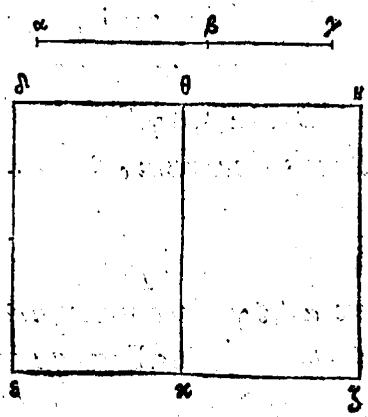
dictum est in proximo theoremate, compositum ex quadratis linearum αβ, ϐγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per 17 huius, compositum ex quadratis linearum αϐ, βγ cum eo quod fit bis ex αϐ, βγ, quod est æquale quadrato totius lineæ αγ, est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, ϐγ. Sed id quod fit bis ex αϐ, ϐγ est commensurabile ei quod fit semel ex αϐ, ϐγ per 6 huius. Ergo quadratum totius lineæ αγ est incommensurabile ei quod fit semel ex αϐ, ϐγ per 14 huius. Sed per positionem id quod fit semel ex αϐ, ϐγ est rationale. Ergo quadratum totius lineæ αγ est irrationale. Irrationalis est ergo tota linea αγ. Vocetur autem Bimediale prius.

Trigesimumoctauum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles, mediale continentes componantur, tota linea est irrationalis, uocetur autem Bimediale secundum.



Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles αϐ, ϐγ mediale continentes (quales docet reperire 29.) Dico totam lineã αγ esse irrationalem. Proponatur enim linea rationalis δε, & quadrato lineæ αγ æquale secundum lineam δε applicetur parallelogrãmum δζ, cuius alterũ latus



sit δη. Cum quadratū lineæ αγ sit æquale quadratis linearum αβ, βγ. & ei quod fit bis ex αβ, βγ per 4.2. applicetur secundum lineā δε quadratis linearum αβ, βγ æquale parallelogrammum εθ. Residuum ergo parallelogrammum ζθ, est æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ. Sed positū est parallelogrammū ex αβ, βγ esse mediale, cui id quod fit bis ex αβ, βγ est commensurabile per 6 huius. Ergo per corollarium 24 theorematis id quod fit bis ex αβ, βγ est etiam mediale. Est autem parallelogrammum εθ æquale quadratis linearum αβ, βγ, quæ quadrata sunt inter se commensurabilia ex suppositione. Ergo per 16 huius, parallelogrammum εθ erit commensurabile utrique quadrato lineæ αβ, & lineæ βγ. Sed illa quadrata sunt medialia, quia ex positione lineæ αβ, βγ sunt mediales. Ergo per corollarium 24 theorematis parallelogrammū εθ erit etiam mediale. Ei uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale est residuum parallelogrammū θζ. Mediale est ergo utrūque parallelogrammum εθ, θζ, & secundum lineam rationalem δε applicantur. Rationalis est ergo utraq; linearum δθ, θη, & incommēsurabilis longitudine lineæ δε, per 23. Et quoniam per positionem est incommensurabilis longitudine linea αβ, lineæ βγ: est autem sicut linea αβ ad lineam βγ, ita quadratum lineæ αβ ad parallelogrammum ex αβ, βγ per 1.6: incommensurabile

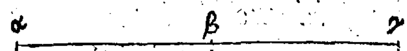
est

est ergo quadratum lineæ α β parallelogrammo ex α β, β γ per 10 huius. Sed quadrato lineæ α β est commensurabile compositũ ex quadratis linearum α β, ϛ γ per 16, quia quadrata linearum α β, ϛ γ sunt commẽsurabilia, cum lineæ α ϛ, ϛ γ positæ sint potentia tantum commensurabiles. Ergo compositum ex quadratis linearum α ϛ, ϛ γ est incommensurabile parallelogrammo ex α ϛ, β γ per 14. Parallelogrammo uero ex α ϛ, ϛ γ commensurabile est id quod fit bis ex α β, β γ. Ergo per idẽ 14 theorema incommensurabile est compositum ex quadratis linearũ α β, β γ ei quod fit bis ex α ϛ, ϛ γ. Ergo eis æqualia parallelogramma ι θ, θ ζ sunt etiam inter se incommensurabilia. quare & linea λ θ lineæ θ κ est incommẽsurabilis lõgitudine per 1.6 & 10 huius. Sed modo probatum est eas esse rationales. lineæ ergo λ θ, θ κ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: quare & linea λ κ est irrationalis per 36 huius. Sed parallelogrammum λ ζ contentum ex linea irrationali λ κ, & rationali λ ι est ipsum etiam irrationale. nam si esset rationale cum applicetur secundum lineam rationalem puta λ ι, esset & altera linea nempe λ κ etiam rationalis per 21. cum tamen probata sit irrationalis. Irrationale est ergo parallelogrammum λ ζ. quare & linea quæ illud parallelogrammum potest, nempe α γ, est etiam irrationalis. Vocetur autem Bimediale secundum. Vocauit autem illam eo nomine, quia mediale est non rationale quod continetur ex illis medialibus lineis α ϛ, β γ, quarum compositione fit linea α γ. Posterius est autem & natura & cognitione mediale rationali.

Trigesimumnonum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur, conficientes compositum ex quadratis ipsarum rationale, parallelogrammum uero ex ipsis contentum mediale, tota linea recta est irrationalis. Vocetur autem linea maior.

Componantur enim duæ rectæ potentia incommensurabiles αβ, βγ conficiētes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 33.) Dico totam lineā αγ esse irrationalem. Nam parallelogrammum ex αβ, βγ est mediale: & quod fit bis ex αβ, βγ est commensurabile ei quod fit semel ex αβ, βγ per 6 huius. Ergo per corollarium 24 huius, quod fit bis ex αβ, βγ erit mediale. Sed per positionem compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est rationale. Ergo id quod fit bis ex αβ, βγ est incommensurabile composito ex quadratis linearū αβ, βγ. Quare per 17 compositum ex quadratis linearum αβ, βγ cum eo quod fit bis ex αβ, βγ est incommēsurabile composito ex quadratis linearum αβ, βγ. Sed compositum ex quadratis linearū αβ, βγ cum eo quod fit bis ex αβ, βγ est æquale quadrato totius lineæ αγ per 4. 2. Compositū uero quod fit ex quadratis linearū αβ, βγ est rationale per positionem. Ergo quadratū totius lineæ αγ est irrationale. ergo tota linea αγ est etiā irrationalis. Vocetur autem linea maior. Vocauit autē ideo maiorem, quia compositum ex quadratis linearū αβ, βγ quæ sunt rationalia, est maius eo quod fit bis ex



αβ,

αβ, βγ ut modo dicemus. Et sane decet fieri denominationem à conuenientia rationalium.

Lemma.

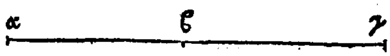
Quod autem compositum ex quadratis linearum αβ, βγ sit maius eo quod fit bis ex αβ, βγ, ita demōstretur. Primò manifestum est lineas αβ, βγ esse inæquales.

Nam si æquales essent, æqualia quoque essent quadrata linearũ αβ, βγ ei quod fieret bis ex αβ, βγ. itaque ambo, compositũ inquam ex quadratis linearum αβ, βγ, & id quod ex illis continetur, essent simul aut medialia aut rationalia, quod est cõtra positionem. Ergo inæquales sunt lineæ αβ, βγ. Sit autem per suppositionem maior linea αβ: sit autẽ æqualis linea βδ lineæ βγ. Ergo per 7. 2. quadrata linearũ αβ, βδ sunt æqualia ei quod fit bis ex αβ, βδ, & quadrato lineæ δα. Est autem æqualis δβ lineæ βγ. Ergo quadrata linearum αβ, βγ sunt æqualia ei quod fit bis ex αβ, βγ, & quadrato lineæ δα. Quare quadrata linearum αβ, βγ sunt maiora quàm id quod fit bis ex αβ, βγ, tanto quantũ est quadratũ lineæ δα.

Quadragesimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur conficientes compositũ ex ipsarum quadratis mediale: id uerò quod fit ex ipsis rationale, tota linea est irrationalis. Vocetur autem potens rationale & mediale.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽsurabiles αβ, βγ conficientes id quod dicitur in theoremate (quales



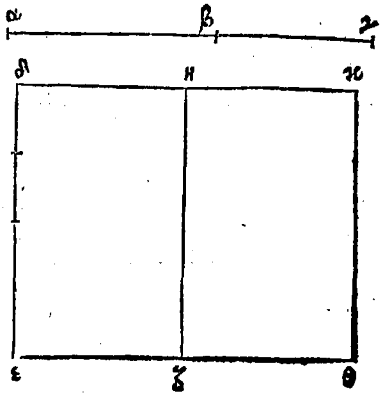
reperire docet 34.) Dico totam lineam αγ esse irrationalem. Cum enim cõpositum ex quadratis linearum αβ, βγ sit mediale: id uerò quod fit bis ex αβ, βγ sit rationale. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearũ αβ, βγ ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per 17 compositum ex quadratis linearũ αβ, βγ unà cum eo quod fit bis ex αβ, βγ, quod est quadratũ totius αγ, est incommẽsurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Sed id quod fit bis ex αβ, βγ est rationale, quia id quod continetur ex αβ, βγ positum est esse rationale. Ergo irrationale est quadratum totius lineæ αγ, quare & ipsa linea αγ erit irrationalis. Vocetur autẽ potens rationale & mediale. Quam ideo sic uocauit, quia potest duas superficies, aliam quidẽ rationalem, aliam uerò medialem. Et quia rationale præcedit ordine naturæ & cognitionis, prius intulit mentionẽ ipsius rationalis. Sciendum est has rationes denominationum quæ sunt in 38. 39. & hoc theoremate, item in 41 esse additiones, quæ tamẽ ut in nonnullis conueniãt hæc certe nõ satisfacit.

Quadragesimumprimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur conficientes compositũ ex quadratis ipsarum, mediale & quod continetur ex ipsis mediale, & præterea incommensurabile composito ex quadratis ipsarum, tota linea est irrationalis. Vocetur autem potens duo medialia.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽsurabiles αβ,

βγ

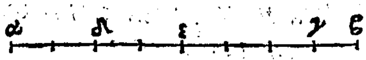


βγ conficiẽtes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 35.) Dico *totam lineam αγ esse irrationalem*. Proponatur *linea rationalis δε, & secũdum illã quadratis linearum αβ, βγ æquale parallelogrammum δζ applicetur*. Item *secundum eandem lineam δε uel ei æqualem ηζ ac æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ parallelogrammum ηθ applicetur: totum ergo parallelogrammum δθ est æquale quadrato lineæ αγ per 4. 2.* Et *quoniam cõpositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale cui est æquale parallelogrammũ δζ*. Ergo *mediale erit etiã δζ per ea quæ scripsimus in demonstratione 38 theorematis. ergo linea δη est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ δε per 23.* Eadẽ *ratione linea ηκ erit rationalis & incommensurabilis longitudine eidẽ lineæ δε.* Et *quoniam compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ: ergo etiam incommensurabile erit parallelogrammum δζ parallelogrammo θη.* Quare *& linea δη lineæ ηκ erit incommensurabilis per 1.6. & 10 huius.* Sed *modo probatum est illas esse rationales: sunt ergo lineæ δη, ηκ rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo tota linea δκ est irrationalis quæ uocatur* Binomiũ *per 36.* Sed *linea δε est rationalis. ergo parallelogrammum δθ est irrationale per id quod probatum est in fine 38.*

Ergo linea potens illud parallelogrammum nempe α γ erit irrationalis. Vocetur autẽ potẽs duo medialia. Hãc *uerò uocauit hoc nomine, quia poteſt duas ſuperficies mediales, & eam quæ componitur ex quadratis linearum α β, β γ, & eam quæ fit ex α β, β γ.* Quod *uerò dictæ irrationales lineæ unico modo, id eſt uno tantum in puncto diuiduntur in rectas lineas ex quibus componũtur, & quæ conſtituunt ſingulas ſpecies illarũ irrationalium, mox demonſtrabimus, ſi prius demonſtrauerimus huiuſmodi lemma.*

Lemma.

Proponatur recta linea α β, diuidatúrque in partes inæquales duas in puncto γ, iterúmq; diuidatur eadem linea α β in partes duas inæquales in alio puncto δ. Sit



autem linea α γ maior quàm linea δ β. Dico *compoſitum ex quadratis duarum linearum α γ, γ β eſſe maius quàm compoſitum ex quadratis α δ, δ β.* Diuidatur *enim biſariam & æqualiter linea α β in puncto ε. & quoniam linea α γ eſt maior linea δ β, auferatur ab utraque ea pars quæ utriuſque eſt communis nempe δ γ.* Reſidua *ergo linea α δ eſt maior reſidua linea γ β.* Quia *de duabus lineis inæqualibus quarum maior erat α γ, idem ablatum eſt nempe δ γ.* Eſt *autem æqualis linea α ε lineæ ε β.* Ergo *linea δ ε eſt minor linea ε γ. ergo puncta γ, δ, non æqualiter diſtant à puncto ε, quod eſt punctum ſectionis in partes duas æquales.* Et *quoniam parallelogrammum contentum ex α γ, γ β cum quadrato lineæ γ ε eſt æquale quadrato lineæ ε β per* 5.2.

&

& eadem ratione parallelogrammum contentum ex $\alpha\delta, \delta\beta$ *unà cum quadrato lineæ* $\delta\iota$ *est æquale eidem quadrato eiusdem lineæ* $\iota\beta$. Ergo *parallelogrammum contentum ex* $\alpha\gamma, \gamma\beta$ *unà cum quadrato lineæ* $\gamma\iota$ *est æquale parallelogrammo ex* $\alpha\delta, \delta\beta$ *unà cum quadrato lineæ* $\delta\iota$, *quia quæ sunt æqualia uni tertio sunt æqualia inter se.* Sed *quadratũ lineæ* $\delta\iota$ *est minus quadrato lineæ* $\iota\gamma$, *quia linea* $\delta\iota$ *est probata minor linea* $\iota\gamma$. Ergo *& residuum nempe parallelogrammum ex* $\alpha\gamma, \gamma\beta$ *est minus parallelogrammo ex* $\alpha\delta, \delta\beta$. *quare & id quod fit bis ex* $\alpha\gamma, \gamma\beta$ *est minus eo quod fit bis ex* $\alpha\delta, \delta\beta$. Sed *per* 4. 2 *quadratum totius lineæ* $\alpha\beta$ *est æquale composito ex quadratis linearum* $\alpha\gamma, \gamma\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\gamma, \gamma\beta$, *& eadem ratione.* Idem *quadratum totius lineæ* $\alpha\beta$ *est æquale composito ex quadratis linearum* $\alpha\delta, \delta\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\delta, \delta\beta$. Ergo *compositum ex quadratis linearum* $\alpha\gamma, \gamma\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\gamma, \gamma\beta$ *est æquale composito ex quadratis linearum* $\alpha\delta, \delta\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\delta, \delta\beta$. Sed *modo probatũ est id quod fit bis ex* $\alpha\gamma, \gamma\beta$ *esse minus eo quod fit bis ex* $\alpha\delta, \delta\beta$. Residuum *ergo nempe compositum ex quadratis linearum* $\alpha\gamma, \gamma\beta$ *est maius residuo nempe composito ex quadratis linearum* $\alpha\delta, \delta\beta$, *quod erat demonstrandum.*

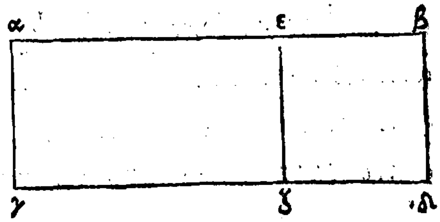
Lemma.

Rationale *excedit rationale superficie rationali.*

Sit *rationale* $\alpha\delta$ *excedẽs aliud rationale* $\alpha\zeta$, *superficie* $\iota\delta$.

Dico *superficiem* $\iota\delta$ *esse etiam rationalem.* Nam *pa-*

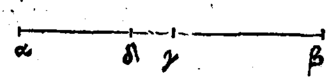
rallelogrammū αδ est commēsurabile parallelogrammo αζ. Ergo per secundam partē 16 huius, parallelogrammū αζ est commēsurabile parallelogrammo εδ. Sed parallelogrammum αζ est rationale. Ergo etiam parallelogrammum εδ est rationale.



Quadragesimumsecundum Theorema.

Binomium in unico tantū puncto diuiditur in sua nomina, id est in lineas ex quibus componitur.

Sit *binomium linea αβ diuisa in puncto γ in sua nomina, hoc est in lineas ex quibus linea tota αβ cōponitur.* Ergo *lineæ αγ, γβ sunt rationales potentia tantum commēsurabiles per 36.* Dico *lineam αβ non posse diuidi in ullo alio puncto quàm γ, in alias lineas duas rationales potentia tantum commensurabiles.* Nam *si contradicatur, diuidatur in pūcto δ, ita ut lineæ αδ, δβ sint duæ rationales potentia tantum commensurabiles.* Primò *constat neutrum illorum punctorum γ, δ diuidere lineā αβ in partes æquales, alioquin essent lineæ αγ, γβ, rationales longitudine cōmensurabiles, similiter & lineæ αδ, δβ. Quælibet enim linea seipsam metitur & quācunque aliam sibi æqualem.* Præterea *linea δβ uel est eadem cū linea αγ, hoc est æqualis lineæ αγ, uel eadem maior, uel minor eadem. Si est æqualis linea δβ lineæ αγ, imposita ergo linea δβ lineæ αγ singulæ extremitates unius tribuunt*



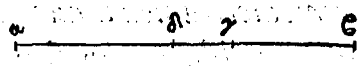
tribuũt cũ ſingulis extremitatibus alterius. Poſito *itaque puncto* β *ſuper puncto* α, *punctum etiam* δ *incidet ſuper punctum* γ, *&* *reſidua linea* $\alpha\delta$ *ex linea* $\alpha\gamma$ *erit etiam æqualis lineæ* $\gamma\beta$ *reſiduæ ex* $\delta\varsigma$. Ergo *linea* $\alpha\beta$ *diuiditur in puncto* γ, *in ſua nomina*. Sic *itaque linea* $\alpha\beta$ *diuiſa per punctum* δ, *diuiſa erit, in eodem puncto quo fuerat prius diuiſa eadem linea* $\alpha\varsigma$ *per punctũ* γ, *quod eſt contra hypotheſin contradicentis. nam ex poſitione erat diuiſa aliter atque aliter in punctis* γ,δ. Quòd *ſi linea* $\delta\varsigma$ *eſt maior quàm linea* $\alpha\gamma$, *diuidatur linea* $\alpha\beta$ *bifariam & æqualiter in puncto* ι. *non itaque puncta* γ,δ *æqualiter diſtabunt à puncto* ι. Sed *per lemma modo poſitum poſt* 41, *compoſitum ex quadratis linearum* $\alpha\delta,\delta\beta$ *eſt maius compoſito ex quadratis linearum* $\alpha\gamma,\gamma\varsigma$: *& compoſitum ex quadratis linearum* $\alpha\delta,\delta\varsigma$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\delta,\delta\beta$ *eſt æquale compoſito ex quadratis linearum* $\alpha\gamma,\gamma\beta$, *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\gamma,\gamma\beta$. *quia utrunque eſt æquale quadrato totius lineæ* $\alpha\beta$ per 4.2. Ergo *quanto compoſitum ex quadratis linearum* $\alpha\delta,\delta\beta$ *eſt maius cõpoſito ex quadratis linearũ* $\alpha\gamma,\gamma\beta$, *tanto id quod fit bis ex* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *eſt maius eo quod fit bis ex* $\alpha\delta,\delta\beta$. Quod *ipſum quãuis ſit indemonſtrabile, modica tamen inductione fit manifeſtius, ſi duabus lineis æqualibus propoſitis, puta quatuor pedes longis, ab altera pedes tres abſtuleris, ab altera pedes duos.* Reſiduum *eius à qua pedes duos abſtuliſti, eſt maius quàm reſiduum eius à qua pedes tres abſtuliſti pede uno. quãto ſcilicet maiores erant pedes tres ablati quã pedes duo ablati.* Sed *compoſitum ex quadratis linearum* $\alpha\delta,\delta\beta$

excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β superficie rationali per lemma positum ante hoc theorema. Sunt enim utraq; composita rationalia, quia lineæ α δ, δ β, sunt positæ rationales potentia tantum cõmensurabiles, similiter & lineæ α γ, γ β. Ergo etiam id quod fit bis ex α γ, γ β excedit id quod fit bis ex α δ, δ β superficie rationali; cum sint tamẽ ambo medialia per 22 huius, quod est impossibile per 27. Quòd si linea δ β est minor linea α γ, eadem uia deducitur ad idem impossibile. Non igitur binomium diuidetur aliter atque aliter in sua nomina, sed unico tantum modo. Qui defendebant unitatem entis ex opinione Parmenidis, existimauerunt esse quasdã lineas insecabiles, de quibus ageretur hoc theoremate & cæteris sequentibus, quam tamen illorum opinionem Aristoteles in libello περὶ ἀτόμων γραμμῶν, seu quis alius author eius opusculi, falsam esse arguit, & peruerse ab illis intellectũ hoc theorema.

Quadragesimumtertium Theorema.

Bimediale prius in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit bimediale prius linea α β, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β sint mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes. Dico lineam α β non posse diuidi in alio puncto quàm γ in sua nomina. Quod si cõtradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut α δ, δ β sint mediales potentia tantum commensurabiles rationale continẽtes. Cum igitur tanto differat id quod fit bis ex

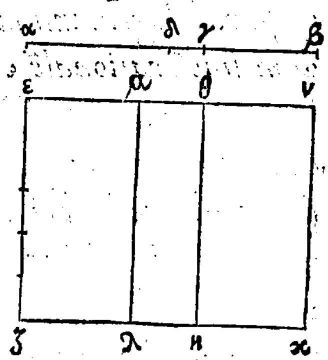


αδ,δβ,ab eo quod fit bis ex αγ,γβ, quanto differt compositum ex quadratis linearum αγ,γβ, à composito ex quadratis linearum αδ,δβ, & quod fit bis ex αδ,βδ differat ab eo quod fit bis ex αγ,γβ, superficie rationali, sunt enim ambo rationalia. Ergo & cōpositū ex quadratis linearum αγ,γβ differt à composito ex quadratis linearum αδ,δβ mediale inquam à mediali superficie rationali quod est impoßibile. Non igitur bimediale prius aliter atque aliter diuiditur in sua nomina, ergo unico tantum modo.

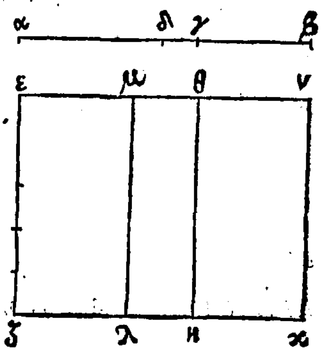
Quadragesimumquartum Theorema.

Bimediale secundum in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit *Bimediale secundum linea αβ diuisa in puncto γ, ita ut lineæ αγ,γβ sint mediales potentia tantum cōmēsurabiles, mediale continentes. Manifestū est igitur punctum γ non secare totam lineam αβ bifariā & æqualiter, quia lineæ αγ,γβ non sunt longitudine inter se commensurabiles. Dico lineam αβ*



non posse diuidi aliter quàm in pūcto γ, in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut linea αγ ne sit eadem, hoc est ne sit æqualis lineæ δβ, sed ea maior. lineæ autē αδ,δβ sint mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes per te. Manifestum est primo quadrata linearū αγ,γβ esse maiora



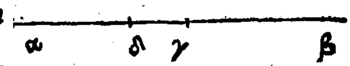
quadratis linearũ αδ, δβ per lemma positum ante 42. Proponatur linea rationalis εζ, & quadrato lineæ αβ æquale secundum lineã εζ applicetur parallelogrammum εκ. Ex quo parallelogrammo detrahatur id quod æquale est quadratis linearum αγ, γβ, puta parallelogrammum εη. Residuum ergo, nempe parallelogrammum θκ est æquale ei quod fit bis ex αγ, γβ. Rursus quadratis linearũ αδ, δβ quæ sunt minora quadratis linearum αγ, γβ æquale detrahatur parallelogrammum ελ. Residuum ergo parallelogrammum μκ, est æquale ei quod fit bis ex αδ, δβ. Et quoniam quadrata linearum αγ, γβ sunt medialia, ergo parallelogrammum εη erit etiam mediale, & secũdum lineã rationalẽ εζ applicatur rationalis. Est ergo linea εθ & incommẽsurabilis longitudine lineæ εζ. Eadem ratione quia parallelogrammum θκ est mediale. (nam id quod est ei æquale, nempe quod fit bis ex αγ, γβ est mediale.) Ergo linea θν est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ εζ. Et quoniam lineæ αγ, γβ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea αγ ad lineã γβ, ita quadratũ lineæ αγ ad parallelogrammum ex αγ, γβ per 1.6. ergo quadratum lineæ αγ est incommensurabile parallelogrammo ex αγ, γβ. Sed quadrato lineæ αγ est commensurabile compositum ex quadratis linearum αγ, γβ per 16. quia lineæ

αγ,

αγ,γβ sunt potentia inter se commensurabiles. parallelogrammo uerò ex αγ,γβ est commensurabile id quod fit bis ex αγ,γς. Ergo compositum ex quadratis linearũ αγ,γς est incommensurabile ei quod fit bis ex αγ,γς, per corollarium à nobis additum theoremati 14. Sed cõposito ex quadratis linearum αγ,γς est æquale parallelogrammũ ικ, ei uerò quod fit bis ex αγ,γβ est æquale parallelogrammum θκ. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ικ parallelogrammo θκ. quare & linea ιθ, erit incommensurabilis longitudine lineæ θν. sunt autem ambæ rationales. Sunt ergo illæ lineæ ιθ,θν rationales potentia tantum commensurabiles, per lemma positũ post 19 theorema. Nam eo ipso quod sunt rationales sunt potentia saltem commẽsurabiles. Ergo tota linea ιν erit binomiũ per 36. quæ diuisa est in puncto θ, in sua nomina. Eadem uia demonstrabitur lineas ιμ,μν esse rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea ιν quæ est binomium, in alio atque alio puncto nempe θ,μ, diuiditur in sua nomina quod est impoßibile per 42. Quòd si quis dicat posse fieri ut linea ιθ sit eadem hoc æqualis lineæ μν, itaque nihil cõsequi impoßibile, neque lineam ιν quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio, atque alio puncto, sed in uno tantum. hoc etiam demonstrabimus, nempe lineam ιθ nõ esse eandẽ, hoc est æqualem lineæ μν. Nam quadrata linearũ αγ, γς, sunt maiora quadratis linearum αδ,δς per lemma positum post 41. Sed quadrata linearũ αδ,δβ sunt maiora eo quod fit bis ex αδ,δβ, per lemma positũ post 39. Ergo multo maiora sunt quadrata linearũ αγ,γς, hoc est illis æquale parallelogrammũ ι κ est maius eo quod fit bis ex α δ, δ β hoc est, quàm parallelogrammum μ κ, quod est æquale ei quod fit bis ex α δ, δ β. Ergo per 1.6. Linea etiam ι θ erit maior quàm linea μ ν. Ergo linea ι θ non erit eadem cum linea μ ν. Quod si posueris ab initio lineam α γ esse minorem linea δ β. Idem etiam tunc impoßibile consequetur, hoc est lineam ι ν quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio atque alio puncto. Non igitur bimediale secundum in alio atque alio puncto diuiditur in sua nomina, ergo in uno tantum.

Quadragesimumquintum Theorema.

Linea maior in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.



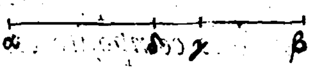
Sit linea maior α β diuisa in puncto γ, ita ut α γ, γ β sint potentia incommensurabiles conficiẽtes compositum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ, rationale, contentũ uero ex ipsis parallelogrammum mediale. Dico lineam α β non posse diuidi in sua nomina alibi quàm in puncto γ. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ in sua nomina. Et quoniam quanto differt compositum ex quadratis linearum α γ, γ β à composito ex quadratis linearũ α δ, δ ϐ, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β ab eo quod fit bis ex α γ, γ β per ea quæ scripsimus in demonstratione 42 theorematis. Sed compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ excedit compositum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ, superficie rationali. Sunt enim ambo rationalia. Ergo & id quod fit bis ex α δ, δ β excedet id quod fit bis

ex

ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ superficie rationali, sed illa sunt medialia. Ergo *mediale excedet mediale superficie rationali, quod est impoßibile per* 27. Non *igitur linea maior diuiditur aliter atq; aliter in sua nomina, ergo in uno tantũ puncto diuidetur.*

Quadragesimumsextum Theorema.

Linea potens rationale & mediale in unico tantum puncto, diuiditur in sua nomina.

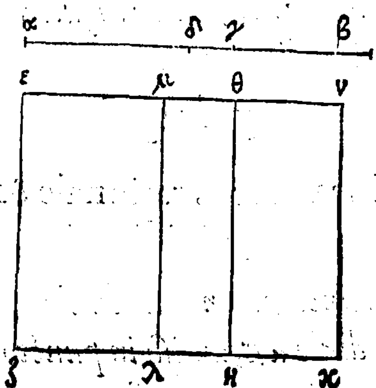


Sit linea potens rationale & mediale $\alpha\beta$, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ $\alpha\gamma,\gamma\beta$ sint potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ mediale: id autem quod cõtinetur ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ rationale. Dico *lineam $\alpha\beta$ in alio puncto quàm γ non posse diuidi in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, in sua nomina. Cũ igitur quanto differt id quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$ ab eo quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$, tanto differat compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ à composito ex quadratis linearum $\alpha\delta,\delta\beta$, id autem quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ excedat id quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$, superficie, rationali quia utrunque est rationale.* Ergo *& compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha\delta,\delta\beta$ superficie rationali; cum tamẽ utrunque illorum sit mediale. Quod est impoßibile.* Non *igitur linea potens rationale & mediale diuiditur aliter atque aliter in sua nomina.* Ergo *diuiditur tantum in puncto uno.*

Quadragesimumseptimum Theorema.

Linea potens duo medialia in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit linea potens duo medialia αβ, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ αγ, γβ sint potẽtia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum αγ, γβ mediale: similiter & quod continetur ex ipsis mediale, item contentum ex ipsis incommẽsurabile composito ex quadratis ipsarum αγ γβ. Dico *lineam αβ non posse diuidi in alio puncto, quàm γ in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut lineæ αδ, δβ conficiant ea quæ lineæ αγ, γβ.* Sit*q́; rursus ex suppositione linea αγ maior linea δβ.* Sit *autem rationalis linea εζ, secundum quam applicetur parallelogrammum εη æquale quadratis linearum αγ, γβ. ei uerò quod fit bis ex αγ, γβ æquale applicetur θκ.* Totum *ergo parallelogrammum εκ est æquale quadrato lineæ αβ.* R*ursus secundum eandem lineam εζ applicetur æquale quadratis linearum αδ, δβ parallelogrammum ελ.* R*esiduum ergo parallelogrammũ μκ est æquale residuo, nempe ei quod fit bis ex αδ, δβ.* Et *quoniam ex suppositione compositum ex quadratis linearũ αγ, γβ est mediale.* E*st ergo parallelogrammũ illi æquale, nempe εη: etiam mediale & secũdum lineam rationalem εζ applicatur.* E*rgo linea εθ est rationalis, & incommensurabilis longitudine lineæ εζ.* Eadem *ratione*



&

& linea θ ι est etiam rationalis & incommensurabilis longitudine eidem lineæ ι ζ. Et *quoniam compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ ϐ (quia positum est esse incommensurabile ei quod fit semel ex α γ, γ ϐ.)* Ergo *parallelogrammum ι κ est incommensurabile parallelogrammo θ κ. quare & linea ι θ est incommensurabilis lineæ θ ι.Sunt autem ι θ, θ ι rationales.* Ergo *sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea ι ι est binomium per 36, & diuisa in puncto θ, in sua nomina. Similiter demonstrabimus eandem lineam ι ι diuidi in puncto μ in sua nomina: nec est linea ι θ lineæ μ ι eadem, hoc est æqualis, ut probatum est in fine demonstrationis* 44. Ergo *binomium a: libi atque alibi diuiditur in sua nomina, quod est impossibile per* 42. Non *igitur linea potens duo medialia diuiditur alibi atque alibi in sua nomina.* Ergo *in puncto uno tantum diuiditur.*

Termini *secundi siue definitiones secundæ.*

P*roposita linea rationali, & binomio diuiso in sua nomina, cuius binomij maius nomen, id est maior portio possit plusquam minus nomen quadrato lineæ sibi, maiori inquam nomini commensurabilis longitudine.*

S*iquidem maius nomen fuerit commensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea* Binomium *primum.*

S*i uerò minus nomen, id est minor portio binomij fuerit cõmensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea* Binomium *secundum.*

S*i uerò neutrum nomen fuerit commensurabile longitu-*

dine propositæ lineæ rationali, uocetur binomiũ tertiũ.

Rursus si maius nomen possit plusquã minus nomen quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, siquidem maius nomen est cõmensurabile lõgitudine propositæ lineæ rationali uocetur tota linea binomiũ quartum.

Si uerò minus nomen fuerit commensurabile longitudine lineæ rationali, uocetur binomium quintum.

Si uerò neutrum nomen fuerit longitudine commensurabile lineæ rationali, uocetur illa binomium sextum.

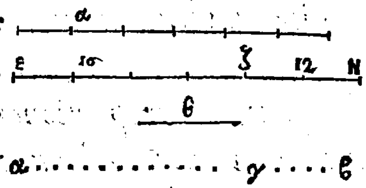
Hic nihil dicitur de lineis illis quarũ ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali, quia lineæ tales non sunt binomia, cum scilicet illa cõponantur ex duabus rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, ut est in 36. Lineæ *uerò quarum ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali non sunt binomia, quia portiones taliũ linearum essent inter se quoque longitudine commensurabiles per 12 huius.* Ergo *non essent quales requirũtur ad compositionem binomij.* Præterea *lineæ tales nõ essent irrationales sed rationales, quia sunt commẽsurabiles singulis partibus se componẽtibus per 16.* Ergo *essent rationales quia componentes essent rationales.*

Quadragesimumoctauum Theorema.

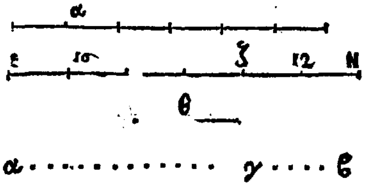
Reperire binomium primum.

Proponantur numeri duo α γ, γ β *tales ut compositus ex ipsis totus* α β *ad alterum ex ijsdẽ nempe* γ β *habeat proportionem quã numerus quadratus ad numerũ quadratum: ad alterum uerò* α γ, *idem* α β *proportionẽ eam*

ne



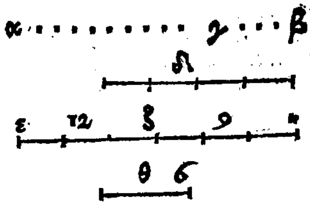
ne retineat quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, qualis est numerus quadratus diuisibilis in quadratum & non quadratũ, inquit Campanus *theoremate* 17. *Sit autem linea rationalis* δ, *eiq; commẽsurabilis longitudine sit linea* ε ζ: *rationalis est ergo linea* ε ζ. Fiat *autẽ sicut numerus* α β *ad numerum* α γ, *ita quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratum alterius lineæ quæ sit* ζ η *per lemma repositum à nobis post* 6 *theorema.* Ergo *quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratũ lineæ* ζ η *proportionẽ habet quam numerus ad numerũ.* Quare *illa quadrata sunt commensurabilia per* 6. Est *autem linea* ε ζ *rationalis, ergo linea* ζ η *erit etiam rationalis.* Et *quoniam numerus* β α *ad numerum* α γ *non habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque etiam quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratum lineæ* ζ η *habebit proportionem quã numerus quadratus ad numerum quadratum. incommensurabilis est ergo longitudine linea* ε ζ *lineæ* ζ η. Ergo *illæ lineæ* ε ζ, ζ η *sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Ergo *tota linea* ε η *est binomium per* 36. Dico *præterea eandem lineam esse binomium primum.* Nam *cum sit sicut numerus* β α *ad numerum* α γ, *ita quadratũ lineæ* ε ζ *ad quadratum lineæ* ζ η. *sitq; numerus* β α *maior numero* α γ: *maius quoq; erit quadratum lineæ* ε ζ *quadrato lineæ* ζ η. Sint *igitur quadrato lineæ* ε ζ *æqualia quadrata linearum* ζ η, θ *(quæ quomodo reperiantur docet lemma positũ post* 14.*)* Et *cum sit sicut numerus* β α *ad numerũ* *α γ, ita quadratum lineæ ε ζ ad quadratũ lineæ ζ η. Per euersam ergo proportionem sicut numerus β α ad numerum β γ, ita quadratum lineæ ε ζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus α β ad numerum α γ habet proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ ε ζ ad quadratum lineæ θ habet etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo linea ε ζ erit longitudine commensurabilis lineæ θ, per 9. ergo linea ε ζ plus potest q̃ linea ζ η quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ ε ζ, ζ η rationales potentia tantum commensurabiles. estq́; linea ε ζ longitudine cõmensurabilis lineæ rationali δ. ergo linea ε η est binomiũ primũ.*



Quadragesimumnonum Theorema.

Reperire binomium secundum.

Proponantur numeri duo α γ, γ β tales ut compositus ex ipsis totus α β ad β γ proportionem habeat quam numerus quadratus ad numerum quadratum: ad γ α uerò proportionem eam ne habeat quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, ut dictum est in proximo theoremate. & proponatur linea rationalis δ, & lineæ δ sit cõmensurabilis longitudine linea ζ η. rationalis est ergo linea ζ η. Fiat autẽ sicut numerus γ α ad numerum α β, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum

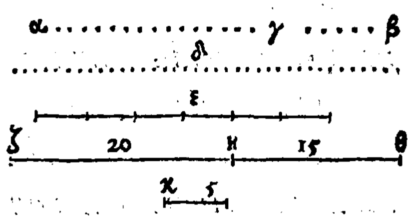


alterius

alterius lineæ quæ sit ζι. Ergo commensurabile est quadratum lineæ ζκ lineæ ζι. est ergo rationalis etiam linea ζι. Et quoniam numerus γα ad numerum αβ non habet proportionem quam quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ζκ ad quadratum ζι habebit proportionẽ quam quadratus numerus ad quadratum. Ergo linea ζκ est incommensurabilis longitudine lineæ ζι per 9. ergo lineæ ζκ, ζι sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea ικ est binomiũ. Dico præterea eandem esse binomium secundum. Cum enim per contrariam siue dicas conuersam proportionem sit sicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζκ. maior autem est numerus αβ, numero αγ. maius etiam erit quadratũ lineæ ιζ quadrato lineæ ζκ. Sint quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearum ζκ, θ, ut dictum est in proximo theoremate. Per euersam ergo proportionẽ sicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus αβ ad numerũ βγ habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratũ lineæ ιζ ad quadratũ lineæ θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ιζ erit commensurabilis longitudine lineæ θ, per 9. Quare linea ιζ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sed linea ζκ quæ est minus nomen, est commensurabilis longitudine propositæ lineæ rationali δ per hypothesin. Ergo linea ικ est binomium secundum.

Quinquagesimum Theorema.

Reperire binomium tertium.



Proponatur numeri duo αγ, γβ, tales ut cõpositus ex ipsis, totus αβ ad numerum βγ proportionem habeat quã numerus quadratus ad quadratum, ad numerũ uerò αγ proportionem ne habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponatur autẽ & alius numerus siue quadratus, siue non quadratus, qui sit δ, qui ad singulos αβ, αγ proportionem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponaturq; linea rationalis ε & fiat sicut numerus δ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ε ad quadratum ζη. Commensurabile est ergo quadratum lineæ ε quadrato lineæ ζη. Sed linea ε est rationalis: rationalis est ergo linea ζη. & quoniam numerus δ ad numerum αβ proportionem non habet quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratum lineæ ζη proportionem eam habet quam quadratus numerus ad quadratum: est ergo linea ε incõmensurabilis longitudine lineæ ζη. Rursus fiat sicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Commensurabile ergo est quadratum lineæ ζη quadrato lineæ ηθ. Sed linea ζη est rationalis. ergo linea ηθ erit etiã rationalis. Et quoniam numerus αβ ad numerum αγ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, neq; etiam quadratum lineæ ζη ad quadratũ lineæ ηθ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum.

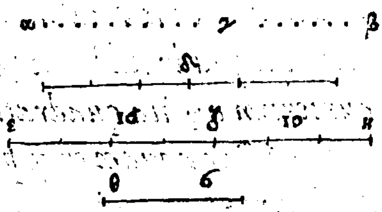
dratum. Eſt ergo linea $\zeta\eta$ longitudine incommenſurabilis lineæ $\eta\theta$. ergo lineæ $\zeta\eta$, $\eta\theta$ ſunt rationales potētia tantum commēſurabiles. tota ergo linea $\zeta\theta$ erit binomiū. Dico prætereà illam eſſe binomium tertium. Cum enim ſit ſicut numerus δ ad numerum $\alpha\beta$, ita quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ $\zeta\eta$. Sicut uerò numerus $\alpha\beta$ ad numerum $\alpha\gamma$, ita quadratum lineæ $\zeta\eta$ ad quadratum lineæ $\eta\theta$. Per æquam ergo proportionem ſicut numerus δ ad numerum $\alpha\gamma$, ita quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ $\eta\theta$. Sed numerus δ ad numerū $\alpha\gamma$ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo quadratum lineæ ε nō habet proportionē ad quadratū lineæ $\eta\theta$ quam quadratus numerus ad quadratum. eſt ergo linea ε longitudine incommenſurabilis lineæ $\eta\theta$ per 9. Et quoniam eſt ſicut numerus $\alpha\beta$ ad numerum $\alpha\gamma$, ita quadratum lineæ $\zeta\eta$ ad quadratum lineæ $\eta\theta$. Ergo quadratum lineæ $\zeta\eta$ eſt maius quadrato lineæ $\eta\theta$. ſint ergo quadrato lineæ $\zeta\eta$ æqualia quadrata linearum $\eta\theta$, κ. Per euerſam ergo proportionē ſicut numerus $\alpha\beta$ ad numerum $\beta\gamma$, ita quadratum lineæ $\zeta\eta$ ad quadratum lineæ κ. Sed numerus $\alpha\beta$ ad numerum $\beta\gamma$ habet proportionem quā quadratus numerus ad quadratum. ergo & quadratum lineæ $\zeta\eta$ ad quadratum lineæ κ habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea $\zeta\eta$ eſt longitudine commenſurabilis lineæ κ. ergo linea $\zeta\eta$ plus poteſt quam linea $\eta\theta$ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Sunt autem lineæ $\zeta\eta$, $\eta\theta$ rationales potentia tantum commenſurabiles: & neutra eſt commenſurabilis lon-

X

gitudine lineæ ι. Ergo linea ζθ est binomium tertium.

Quinquagesimumprimum Theorema.

Reperire binomium quartum.



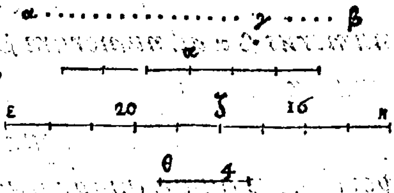
Proponantur *numeri duo αγ, γβ tales ut cõpositus ex ipsis nempe αβ ad neutrũ eorum habeat proportionem quam numerus quadratus ad quadratũ (qualis est omnis numerus quadratus ad duos numeros non quadratos se minores ipsum componentes.) Sit autem linea rationalis δ, & lineæ δ sit commẽsurabilis longitudine linea ιζ: est ergo rationalis ιζ. Sitq; sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ ιζ ad quadratũ lineæ ζη. ergo quadratum lineæ ιζ est commensurabile quadrato lineæ ζη. Est ergo linea ζη rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerũ αγ proportionem nõ habet quam quadratus numerus ad quadratum: neque quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζη habebit proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea ιζ est longitudine incommensurabilis lineæ ζη. Ergo lineæ ιζ, ζη sunt rationales potentia tantum commensurabiles, quare tota linea ιη est binomium. Dico præterea eam esse binomium quartum. Cum enim sit sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζη: est autem numerus βα maior numero αγ. Ergo quadratum lineæ ιζ erit maius quadrato lineæ ζη. Sint ergo quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearũ ζη, θ.*

Per

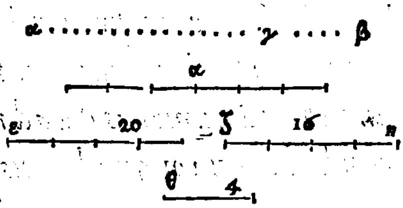
Per euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus βα ad numerum βγ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, igitur neque quadratũ lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Est ergo linea ιζ incommensurabilis longitudine lineæ θ. ergo linea ιζ plus potest quã linea ζκ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ ιζ, ζκ rationales potentia tantũ commensurabiles, estq; linea ιζ lineæ rationali δ cõmẽsurabilis lõgitudine. Ergo linea ικ est binomiũ quartũ.

Quinquagesimumsecundum Theorema.

Reperire binomium quintum.



Proponãtur numeri duo αγ, γβ tales, ut totus αβ ad singulos αγ, γβ proportionẽ eam ne habeat quã quadratus numerus ad quadratum, sicut in proximo theoremate. Et sit linea rationalis δ: lineæ autem δ sit commensurabilis longitudine linea ζκ. Est ergo linea ζκ rationalis: sitq; sicut numerus γα ad numerum αβ, ita quadratũ lineæ ζκ ad quadratum lineæ ζι. ergo quadratum lineæ ζκ est commensurabile quadrato lineæ ζι. Est ergo etiam linea ζι rationalis. Et quoniam numerus αγ ad numerum αβ nõ habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ζκ ad quadra-

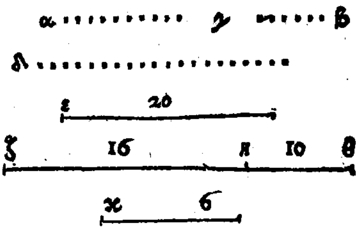


tum lineæ ζι habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ, Ergo lineæ ζη, ζι sunt longitudine incommensurabiles. ergo lineæ ζη, ζι sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo tota linea ιη est binomiũ. Dico præterea eam esse binomium quintum. Cùm enim sit sicut numerus αγ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ιζ. Per conuersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζη. Est ergo quadratum lineæ ιζ maius quadrato lineæ ζη. Sint ergo quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearũ ζη, θ. Per euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo neque quadratum lineæ ιζ ad quadratũ lineæ θ, habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea ζι longitudine incommẽsurabilis lineæ θ. ergo linea ζι plus potest quàm linea ζη quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Sunt autem lineæ ζι, ζη rationales potentia tantum commensurabiles, & linea ζη minus nomen est, commensurabile longitudine lineæ rationali δ. Ergo linea ιη est binomium quintum.

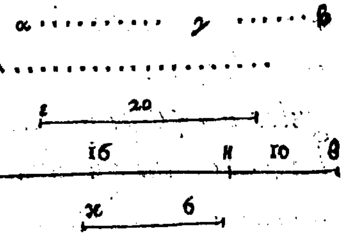
Quinquagesimumtertium Theorema.

Reperire binomium sextum.

Proponantur



Proponantur numeri duo αγ, γβ tales, ut totus αβ ad singulos αγ, γϐ proportionē ne habeat quam quadratus numerus ad quadratū. Sit etiā & alius numerus δ, quique ad singulos αϐ, αγ non habeat proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Sitq; linea rationalis ε: sit etiam sicut numerus δ ad numerum ϐα, ita quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ ζη. Ergo linea ε erit potentia commensurabilis lineæ ζη. est autem rationalis linea ε. ergo & lineæ ζη erit rationalis. Et quoniam numerus δ ad numerū αβ non habet proportionē quam numerus quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ ζη habebit proportionem quā numerus quadratus ad quadratum. Est ergo linea ε longitudine incommensurabilis lineæ ζη. Rursus fiat sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Ergo quadrata illa sunt commensurabilia. Sed quadratum lineæ ζη est rationale: est ergo etiā quadratum lineæ ηθ rationale. Ergo & linea ηθ rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerum αγ proportionē nō habet quam numerus quadratus ad quadratum: neq; quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea ζη longitudine incommensurabilis lineæ ηζ. ergo lineæ ζη, ηθ sunt rationales potentia tantū commensurabiles. ergo tota linea ζθ erit binomium. Dico præterea eam esse binomium sextum. Cum enim sit



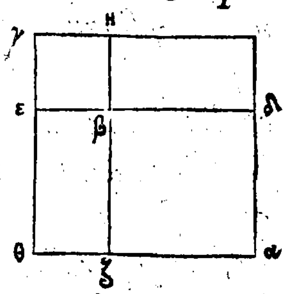
ſicut numerus δ ad numerũ β α, ita quadratũ lineæ ι ad quadratum lineæ ζ η. Eſt autem ſicut numerus β α ad numerum α γ, ita quadratũ lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ. Per æquam ergo proportionem ſicut numerus δ ad numerum α γ, ita quadratũ lineæ ι ad quadratum lineæ η θ. Sed numerus δ ad numerum α γ non habet proportionem quam quadratus numerus ad quadratum: neq; etiam quadratũ lineæ ι ad quadratum lineæ η θ habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ι eſt longitudine incommenſurabiles lineæ η θ. Sed modo probatũ eſt lineam ζ η eſſe etiam longitudine incommẽſurabilem lineæ ι. Ergo ambæ lineæ ζ η, η θ ſunt incommenſurabiles longitudine lineæ ι. Et quoniam eſt ſicut numerus β α ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratũ lineæ η θ. maius eſt ergo quadratũ lineæ ζ η quadrato lineæ η θ. Sint ergo quadrato lineæ ζ η æqualia quadrata linearum η θ, κ. Ergo per euerſam proportionem ſicut numerus β α ad numerum β γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ κ. Sed numerus β α ad numerum β γ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo neq; quadratũ lineæ ζ η ad quadratum lineæ κ habebit proportionẽ quam numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ζ η, eſt longitudine incommenſurabilis lineæ κ. ergo linea ζ η poteſt pluſquam linea η θ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Sunt autem lineæ ζ η, η θ rationales potẽtia tan-

tum

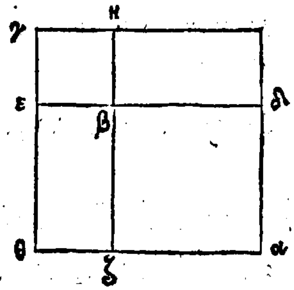
tum commensurabiles, & ambæ lineæ ζκ, κθ incommēsurabiles longitudine lineæ rationali δ. Ergo tota linea ζθ est binomium sextum.

Lemma.

Si linea recta secetur in partes duas quocunque modo parallelogrammum rectangulum contentum ex sectionibus ambabus est medium proportionaliter inter quadrata sectionum. Et *parallelogrammum rectangulum contentum ex tota linea & altera sectione est medium proportionaliter inter quadratū totius lineæ & quadratum dictæ sectionis.* Sint *duo quadrata αβ, βγ, ita collocata ut lineæ δε, εκ sint in eadem recta linea.* Erunt *ergo & lineæ ζβ, βκ in eadem recta linea per* 14.1. Com*pleatur ergo parallelogrāmū αγ.*



Dico *parallelogrammum rectangulum &c. ut in lemmate.* Imprimis *parallelogrammum αγ est quadratum, quia linea αβ est æqualis lineæ ζβ: linea uerò βε lineæ βκ. tota ergo linea δε est æqualis toti lineæ ζκ.* Sed *linea δε est æqualis utrique γκ, θα. linea item ζκ est æqualis utrique ακ, θγ per* 34.1. *ergo utraque linearum αθ, κγ est æqualis utrique ακ, θγ.* Ergo *parallelogrammum αγ est æquilaterum.* Est *etiam rectangulum per* 29.1. *ergo parallelogrammum αγ est quadratum.* Et *quoniam est sicut linea ζβ ad lineam βκ, ita linea δε ad lineam εκ.* Sed *sicut linea ζβ ad lineam εκ, ita parallelogrammum αβ, quod est quadratū lineæ δε, ad parallelogrammū δκ per* 1.6. Sicut *autem linea δβ ad lineam εκ, ita pa-*

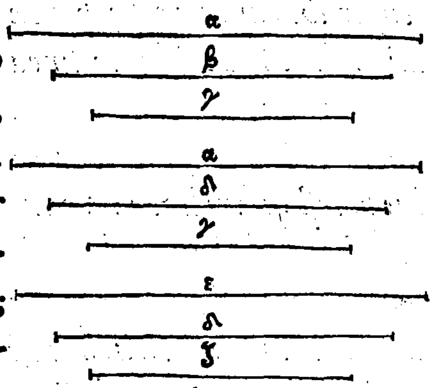


rallelogrammum δκ ad parallelogrammũ βγ, quod est quadratũ lineæ ϛε per 1.6. Ergo sicut quadratum αϛ ad parallelogrammũ δκ, ita parallelogrammum δκ ad quadratũ βγ. Ergo parallelogrammum δκ est medium proportionaliter inter quadrata αϛ, βγ. Dico præterea parallelogrammum δγ esse medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. Cum enim sit sicut linea αδ ad lineam δκ, ita linea κκ ad lineam κγ. singulæ enim sunt singulis æquales. Per compositam ergo proportionem quæ probatur per 18.5. sicut linea ακ ad lineam κδ, ita linea κγ ad lineã κγ. Sed sicut linea ακ ad lineam κδ, ita quadratum lineæ ακ, quod est quadratum αγ, ad parallelogrammum ex ακ, κδ, hoc est parallelogrammum δγ per 1.6. Sicut autem linea κγ ad lineam κγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum lineæ κγ, quod est quadratum βγ. Sicut ergo quadratum αγ ad parallelogrammum δγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum βγ. Ergo parallelogrammum δγ est medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. quod demonstrandum erat.

Lemma.

Quæ sunt media proportionaliter inter eadẽ aut æqualia sunt, ipsa quoque inter se æqualia. Sint tres magnitudines α, ϛ, γ. Sitque sicut α ad ϛ, ita β ad γ. sit similiter sicut eadẽ magnitudo α ad δ, ita δ ad eandẽ magnitudinẽ γ. Dico β, δ esse inter se æqualia. Nam proportio α ad γ est proportio duplicata ipsius α ad ϛ per diffinitionẽ, similiter

liter proportio eadē ipsius α ad γ, est proportio duplicata ipsius α ad δ, per eandē diffinitionē. sed quorum æqualiter multiplicia sunt æqualia, aut eadē ipsa quoq; sunt æqualia. Ergo sicut α ad β, ita α ad δ:

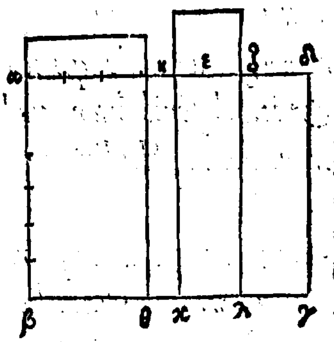


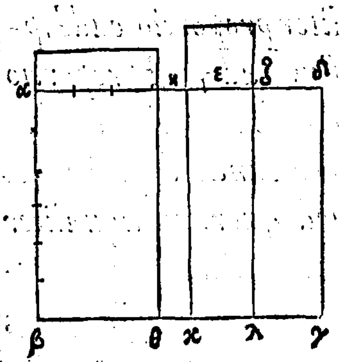
ergo per 9.5. β, δ, sunt inter se æqualia. Idē, si fuerint aliæ magnitudines æquales ipsis α, γ puta ϵ, ζ inter quas sit media proportionalis magnitudo δ.

Quinquagesimumquartum Theorema.

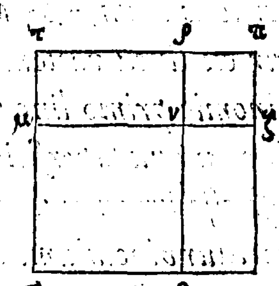
Si superficies contenta fuerit ex rationali & binomio primo, linea quæ illam superficiē potest, est irrationalis quæ binomium uocatur.

Superficies enim, $\alpha\beta\gamma\delta$, cōtineatur ex linea rationali $\alpha\beta$ & binomio primo linea $\alpha\delta$. Dico lineam quæ superficiem $\alpha\gamma$ potest esse irrationalē illam quæ uocatur binomium. Cum enim linea $\alpha\delta$ sit binomium primū, diuidatur in sua nomina in puncto ι, sitq; maius nomen $\alpha\iota$, constat lineas $\alpha\iota$, $\iota\delta$ esse rationales potentia tantum commensurabiles, & lineam $\alpha\iota$ plus posse, quàm linea $\iota\delta$ quadrato lineæ sibi cōmensurabilis longitudine, & lineam $\alpha\iota$ esse longitudine cō-

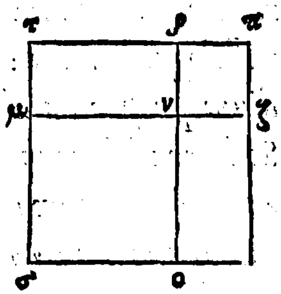




mensurabilem lineæ propositæ rationali α ϐ. Diuidatur linea ε δ bifariam, & æqualiter in puncto ζ. Et quoniam linea α ε plus potest quàm linea ε δ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis, si quartæ parti quadrati lineæ minoris, hoc est quadrato lineæ ε ζ æquale secundum maiorẽ lineã, nempe α ε applicetur, deficiẽs figura quadrata diuidet lineã maiorem, nempe α ε in partes inter se longitudine commensurabiles, per secundam partem 18 *huius. applicetur ergo secũdum lineam α ε æquale quadrato lineæ ε ζ parallelogrammum ex* α κ, κ ε. Ergo *linea α κ est longitudine commensurabilis lineæ ε κ.* Ducantur *per puncta κ, ε, ζ alterutri linearum α β, δ γ parallelæ κ θ, ε χ, λ ζ per* 31.1. *& parallelogrammo α θ æquale quadratum construatur σ ν: parallelogrammo uerò κ χ, sit æquale quadratum ν π, & ita describãtur, ut linea μ ν sit in eadem recta linea cum ν ξ: sunt ergo in eadẽ recta linea lineæ ρ ν, ν ο, & compleatur parallelogrammum σ π.* Ergo *parallelogrammũ σ π est quadratum per ea quæ dicta sunt in demonstratione lemmatis penultimi.* Et *quoniam parallelogrammum ex α κ, κ ε est æquale quadrato lineæ ε ζ.* Est *igitur sicut linea α κ ad lineam ε ζ, ita linea ε ζ ad lineã κ ε per* 17.6. Ergo *per* 1.6. *sicut parallelogrammum α θ ad parallelo-*



rallelogrammum ιλ, ita parallelogrammum ιλ ad parallelogrammum κη. Ergo parallelogrammũ ιλ est medium proportionaliter inter parallelogramma αθ, κη. Sed parallelogrammum αθ est æquale quadrato σν. parallelogrammum uerò ηκ est æquale quadrato νϖ. Ergo quadratorum σν, νϖ mediũ proportionale est ιλ, quorũ quadratorum σν, νϖ medium quoque proportionaliter est parallelogrammum μϱ per lemma penultimũ. ergo μϱ est æquale parallelogrammo ιλ per lemma proximum ante hoc theorema. Sed parallelogrammũ μϱ est æquale parallelogrammo οξ per 43.1. parallelogrammum uerò ιλ est æquale parallelogrammo ζγ. Totũ ergo parallelogrammum ιγ est æquale duobus parallelogrammis μϱ, οξ inter se æqualibus. Sed parallelogramma αθ, ηκ sunt æqualia quadratis σν, νϖ. totum ergo parallelogrammum αγ est æquale toti quadrato σϖ, hoc est quadrato lineæ μξ. Ergo linea μξ potest parallelogrammum αγ. dico lineam μξ esse binomiũ. Cum enim linea αη sit longitudine commensurabilis lineæ ηι, ergo linea tota αι est commensurabilis longitudine utrique αη, ηι per 16. Sed per suppositionem linea αι est longitudine commensurabilis lineæ αβ, ergo & utraque αη, ηι est commensurabilis longitudine lineæ αβ per 12. est autem linea αβ rationalis: rationalis est ergo utraque αη, ηι. Est ergo utrũq; parallelogrammum αθ, ηκ rationale per 20. Ergo & parallelogrammum αθ erit commensurabile parallelogrãmo ηκ. ergo & quæ sunt illis æqualia, nempe quadrata σν, νπ quæ sunt quadrata linearũ μν, νξ sunt rationalia & commensurabilia. Et quoniã

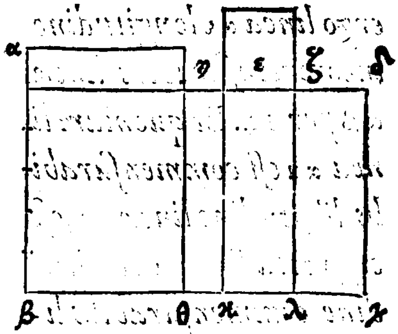


linea ακ est per positionem longitudine incõmensurabilis lineæ ιδ, sed linea ακ lineæ αη est commensurabilis, ut modo probatum est: linea autem ιδ est commensurabilis lineæ ιξ. Ergo per corollariũ à nobis positum post 14. linea αη, est incommensurabilis longitudine lineæ ιζ. Quare & parallelogrammum αθ parallelogrammo ιλ est incõmensurabile. Ergo & quadratũ σν est incommensurabile parallelogrãmo μϱ, quia per positionem parallelogrãmum αθ est æquale quadrato σν: & parallelogrãmum ιλ probatum est æquale parallelogrammo μϱ. Sed sicut quadratum σν, ad parallelogrammum μϱ, ita linea ον ad lineam νϱ per 1.6. ergo per 10 linea ον est incommẽsurabilis lineæ νϱ. est autem linea ον æqualis lineæ μν: linea autem νϱ lineæ νξ. est ergo incommensurabilis linea μν lineæ νξ. Modo autem probatum est quadrata ambarum linearum μν, νξ esse rationalia & commensurabilia. Ergo lineæ μν, νξ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles. ergo linea μξ est binomium, & potest parallelogrammum αγ. quod demonstrandum erat.

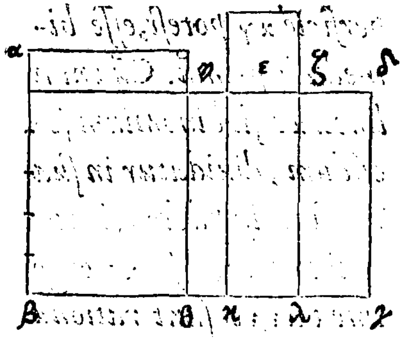
Quinquagesimumquintum Theorema.

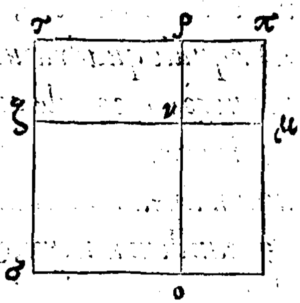
Si superficies contenta fuerit ex linea rationali & binomio secundo, linea potens illam superficiem est irrationalis quæ bimediale primum uocatur.

Superficies enim, αϐγδ, contineatur ex rationali αϐ & binomio secundo, quæ sit linea αδ. Dico lineam quæ superficiem



perficiẽ αγ poteſt, eſſe bimediale primũ. Cũ enim linea αδ ſit binomium ſecũdum, diuidatur in ſua nomina in pũcto ε, ita ut maius nomen ſit αε. ergo lineæ αε, εδ ſunt rationales tantum potentia commenſurabiles, & linea αε poteſt plus quàm linea εδ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen nempe εδ eſt commenſurabile longitudine lineæ αϐ. Secetur linea εδ bifariam & æqualiter in puncto ζ, & quadrato lineæ εζ æquale ſecundum lineam αε applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod parallelogrammum ſit ex lineis αη, ηε. Ergo linea αη, eſt longitudine cõmenſurabilis lineæ ηε: & per puncta η, ε, ζ ducantur parallelæ lineis αϐ, δγ, lineæ ηθ, εκ, ζλ. Et parallelogrãmo αθ æquale quadratum conſtruatur σι. parallelogrammo uerò ηκ, æquale quadratum ſimiliter cõſtruatur ιϖ, & ita componantur ut linea μι, & linea ιξ conficiant unam lineam rectam. ergo & lineæ οι, ιρ cõficiunt unã & eandem lineam, & compleatur quadratũ σϖ. Conſtat ex his quæ demõſtrata ſunt in proximo theoremate parallelogrammum μρ eſſe proportionaliter mediũ inter quadrata σι, ιϖ, & æquale parallelogrãmo ελ & lineam μξ poſſe ſuperficiẽ αγ. Modo ſupereſt ut demonſtremus lineam μξ eſſe bimediale primum: quoniã linea αε eſt longitudine incommenſurabilis lineæ εδ, & linea εδ eſt commenſurabilis longitudine lineæ αϐ. eſt ergo linea $\alpha\iota$ longitudine incommensurabilis lineæ $\alpha\beta$ per 14. Et quoniam linea $\alpha\kappa$ est commensurabilis lõgitudine lineæ $\kappa\iota$, est ergo tota linea $\alpha\iota$ lõgitudine commensurabilis lineæ utrique $\alpha\kappa,\kappa\iota$ per 16. est autẽ linea $\alpha\iota$ rationalis, ergo utraque $\alpha\kappa,\kappa\iota$ rationalis. Et quoniam linea $\alpha\iota$ est longitudine incommẽsurabilis lineæ $\alpha\beta$. est autem linea $\alpha\iota$ commensurabilis longitudine utrique $\alpha\kappa,\kappa\iota$, ergo lineæ $\alpha\kappa,\kappa\iota$ sunt longitudine incõmensurabiles lineæ $\alpha\beta$. ergo lineæ $\alpha\beta,\alpha\kappa,\kappa\iota$ sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. Quare utrunque parallelogrammũ $\alpha\theta,\kappa\lambda$ est mediale per 22. quare utrũque quadratum $\sigma\nu,\nu\varpi$, est etiã mediale, ergo lineæ $\mu\nu,\nu\xi$, sunt mediales. Et quoniã linea $\alpha\kappa$ est longitudine cõmẽsurabilis lineæ $\kappa\iota$, commẽsurabile est parallelogrãmũ $\alpha\theta$ parallelogrammo $\kappa\lambda$ per 1.6. & 10 huius, hoc est quadratum $\sigma\nu$ quadrato $\nu\varpi$, hoc est quadratum lineæ $\mu\nu$, quadrato lineæ $\nu\xi$, quare lineæ $\mu\nu,\nu\xi$ sunt potentia cõmensurabiles. Et quoniã linea $\alpha\iota$ est longitudine incõmẽsurabilis lineæ $\iota\delta$. sed linea $\alpha\iota$ est longitudine cõmẽsurabilis lineæ $\alpha\kappa$, linea verò $\iota\delta$ est lõgitudine commensurabilis lineæ $\iota\zeta$. est ergo linea $\alpha\kappa$ incommensurabilis longitudine lineæ $\iota\zeta$ per corollarium 14 theorematis. Quare & parallelogrammũ $\alpha\theta$ est incommen-





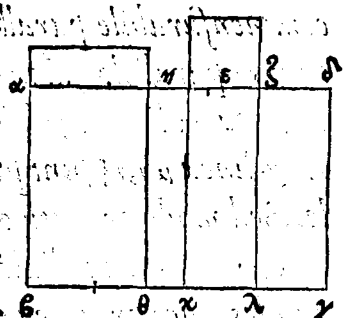
commensurabile parallelogrammo ε λ, hoc est quadratum σ ν parallelogrãmo μ ϱ, hoc est linea ο ν lineæ ν ϱ, hoc est linea μ ν lineæ ν ξ est longitudine incommensurabilis. Ergo *lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia tantum commensurabiles. Sed modo probatũ est easdem esse mediales, ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt mediales potentia tantum commensurabiles.* Dico *præterea eas continere superficiem rationalem.* Cum *enim linea ε κ sit longitudine cõmensurabilis utrique α β, ε ζ.* Est *ergo linea ε ζ longitudine commensurabilis lineæ ε κ quæ est æqualis lineæ α β.* Est *autẽ utraque linea ε ζ, ε κ rationalis. ergo parallelogrammũ ε λ est rationale per* 20 *huius, hoc est ei æquale parallelogrammum μ ϱ. Sed parallelogrammum μ ϱ est contentum ex lineis μ ν, ν ξ.* Ergo *per* 37 *linea μ ξ est bimediale primum quod demonstrandum erat.*

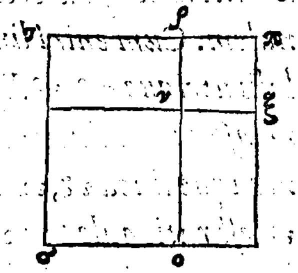
Quinquagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio tertio, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis quæ dicitur bimediale secundum.

S*uperficies enim α β γ δ contineatur ex rationali α β & binomio tertio linea α δ, quæ sit diuisa in sua nomina in puncto ε, quorum maius nomen sit linea α ε. Dico lineã quæ potest superficiem α γ esse irrationalem uocatã bimediale secundum. Sit enim eadem constructio figurarum quæ in proximis theorematibus. Quoniam linea α δ est binomium tertiũ lineæ α ε, ε δ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea α ε plus potest quàm linea ε δ quadrato lineæ sibi longitudine com-*

mēsurabilis, & neutra linearū α ι, ι δ est longitudine commēsurabilis lineæ α β. Sicut in superioribus est demonstratū, ita hîc demonstrari potest lineā μ ξ posse superficiē α γ, & lineas μ ν, ν ξ esse mediales potentia tantū cōmensurabiles, itaque lineam μ ξ esse compositā ex lineis medialibus potentia tantum commensuralibus. Restat demonstrandum eandem lineam μ ξ esse bimediale secundum, quoniam linea ι δ est longitudine incommēsurabilis lineæ α β, hoc est lineæ ι κ. sed linea ι δ est commēsurabilis lōgitudine lineæ ι ζ. Est ergo linea ι ζ lōgitudine incommēsurabilis lineæ ι κ. ergo lineæ ζ ι, ι κ sunt rationales, quia ex hypothesi linea ι δ est rationalis, cui linea ζ ι est commensurabilis. Ergo lineæ ζ ι, ι κ sunt rationales potētia tantum commensurabiles: ergo parallelogrammum ι κ est mediale per 22. hoc est parallelogrammum μ ρ, quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo linea μ ξ est bimediale secundum.



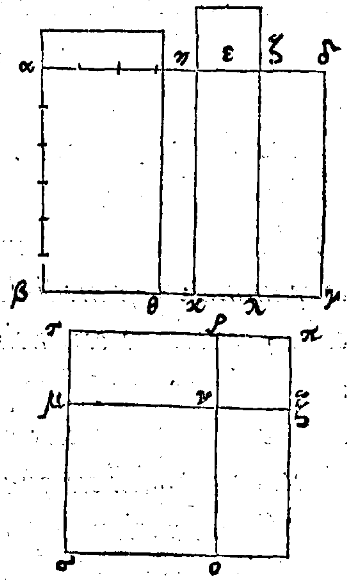


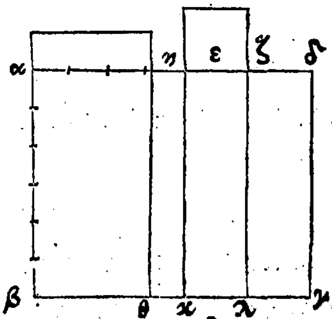
Quinquagesimumseptimum Theorema.

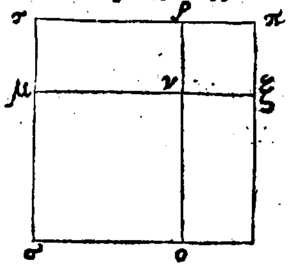
Si superficies contineatur ex rationali & binomio quarto, linea potens superficiem illam est irrationalis, quæ dicitur maior.

Superficies α γ contineatur ex linea rationali α β, & binomio quarto, linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι, sitq́;

sitq; maius nomen α ι. Dico lineam quæ potest superficiem α γ esse irrationalẽ eam, quæ dicitur maior. Cum enim linea α δ sit binomium quartum, ergo lineæ α ι, ι δ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & linea α ι plus potest quàm linea ι δ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine: & linea α ι est longitudine commẽsurabilis rationali α β. Secetur linea ι δ bifariã & æqualiter in puncto ζ, & secũdum lineam α ι quadrato lineæ ι ζ æquale applicetur parallelogrammum ex α κ, κ ι. Ergo linea α κ est incommẽsurabilis longitudine lineæ κ ι per secundam partem 19 theorematis. Ducantur ad lineam α β parallelæ κ θ, ι χ, ζ λ, & fiant cætera ut in superioribus. constat lineam μ ξ posse superficiem α γ. Nunc demõstremus illam lineã μ ξ esse irrationalem, quæ maior dicitur. Cum enim linea α κ sit incommensurabilis longitudine lineæ κ ι. ergo etiam erit parallelogrammũ α θ incommensurabile parallelogrammo κ χ, hoc est quadratum σ ν quadrato ν π. ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia incommensurabiles. Et quoniã linea α ι est longitudine cõmensurabilis rationali α β, id est per positionẽ, parallelogrammũ α χ est rationale per 20. ergo & compositũ ex quadratis illi æqualibus, nempe σ ν, ν π, quæ sunt quadrata linearũ μ ν,



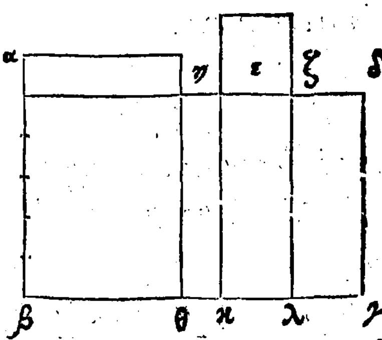




ν ξ, erit similiter rationale. & quoniam linea ι δ est longitudine incommensurabilis lineæ α β, hoc est lineæ ι κ: & linea ι δ est commensurabilis longitudine lineæ ι ζ: Ergo linea ι ζ est longitudine incommensurabilis lineæ ι κ. ergo parallelogrammū ι λ est mediale, hoc est μ ϱ, contētum ex lineis μ ν, ν ξ. ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositū ex quadratis ipsarum rationale: parallelogrammum uero ex ipsis mediale. ergo tota linea μ ξ est irrationalis quæ dicitur linea maior, & potest superficiem α γ quod demonstrandum erat.

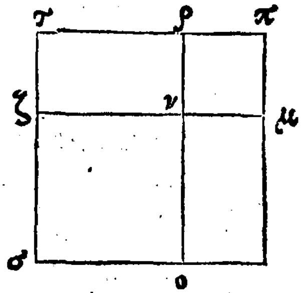
Quinquagesimumoctauum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio quinto, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis, quę dicitur potēs rationale & mediale.



Superficies α γ contineatur ex rationali α β & binomio quinto, linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι, ita ut maius nomen sit α ι. Dico lineā quæ potest superficiem illam α γ, esse

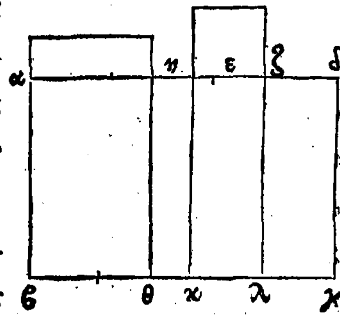
esse irrationalem, quæ dicitur poten s rationale & mediale. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedēti. Constat lineam quæ potest superficiem α γ esse μ ξ. De*monstremus illam lineam μ ξ, esse lineam potentem rationale & mediale. Cum enim linea α κ sit incommensurabilis longitudine lineæ κ ι, est etiam incommensurabile parallelogrammum α θ parallelogrammo θ ι, hoc est quadratū lineæ μ ν, quod est quadratū σ ν quadrato lineæ ν ξ, quod est quadratū ν π.* Ergo *lineæ μ ν ν ξ sunt potentia incommensurabiles.* Et *quoniā linea α δ est binomium quintū, estq; minus eius nomē linea ι δ illa linea ι δ, est lōgitudine cōmensurabilis rationali α β.* Sed *linea α ι est longitudine incommensurabilis lineæ ι δ.* Ergo *linea α ι est longitudine incommēsurabilis rationali α β. ergo lineæ α β, α ι sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum α κ, est mediale hoc est compositum ex quadratis linearum μ ν, ν ξ.* Et *quoniam est commensurabilis longitudine linea ι δ lineæ α β, hoc est lineæ ι κ. sed linea ι δ est commensurabilis longitudine lineæ ι ζ.* Ergo *& linea ι ζ est longitudine commēsurabilis lineæ ι κ, & linea ι κ est rationalis. ergo & parallelogrammū ι λ erit rationale per 20. hoc est parallelogrammum μ ρ quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ.* Ergo *illæ lineæ μ ν, ν ξ sunt potētia incōmensurabiles cōficientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: parallelegrammum uerò ex ipsis rationale.* Ergo *tota linea μ ξ*

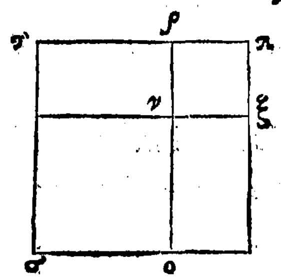


est irrationalis, quæ dicitur potẽs rationale & mediale: & potest superficiem $\alpha\gamma$. quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumnonum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio sexto, linea quæ illam superficiem potest est irrationalis, quæ dicitur potens duo medialia.





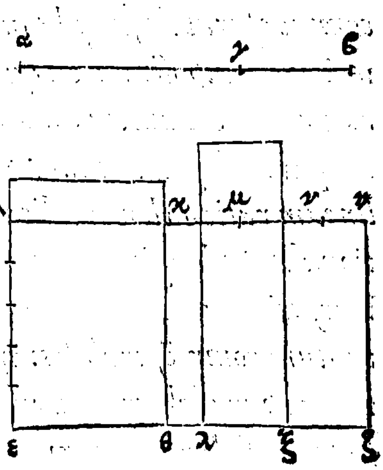
Superficies $\alpha\beta\gamma\delta$, contineatur ex rationali $\alpha\beta$, & binomio sexto linea $\alpha\delta$ diuisa in sua nomina in puncto ι, ita ut maius illius nomẽ sit $\alpha\iota$: dico lineã quæ potest superficiem $\alpha\gamma$ esse irrationalem eam, quæ dicitur potens duo medialia. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedentibus. Manifestum *est lineã quæ potest superficiem $\alpha\gamma$ esse lineã $\mu\xi$, & lineam $\mu\nu$ esse incommensurabilem potentia lineæ $\nu\xi$: & quoniam est incommẽsurabilis longitudine linea $\alpha\iota$ lineæ $\alpha\beta$. ergo lineæ illæ $\alpha\iota$, $\alpha\beta$ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles.* Ergo *parallelogrammum $\alpha\chi$, hoc est compositum ex quadratis linearum $\mu\nu$, $\nu\xi$ est mediale.* Rursus *cum linea $\iota\delta$ sit incommẽsurabilis longitudine lineæ $\alpha\beta$, ergo etiam incommensurabilis longitudine erit linea $\iota\zeta$ lineæ $\iota\chi$.* Ergo *mediale erit parallelogrammum $\iota\lambda$, hoc est $\mu\varrho$, quod cõtinetur ex $\mu\nu$, $\nu\xi$.* Et *quoniam est longitudine incommẽsurabilis linea $\alpha\iota$ lineæ*

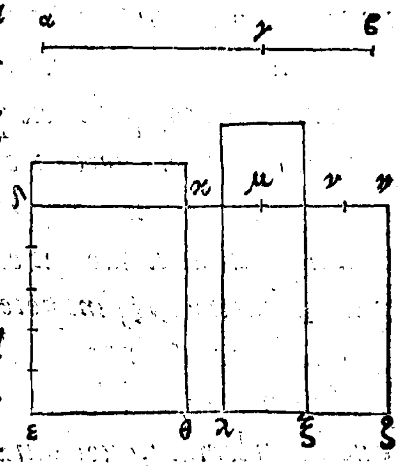
neæ ι ζ. ergo etiam parallelogrammum α κ erit incommensurabile parallelogrãmo ι λ. Sed parallelogrammũ α κ eſt æquale compoſito ex quadratis linearum μ ν, ν ξ: parallelogrammũ uerò ι λ eſt æquale ei quod fit ex μ ν, ν ξ. Ergo compoſitum ex quadratis linearũ μ ν, ν ξ eſt incommẽſurabile ei quod fit ex μ ν, ν ξ, eſtq́; mediale utrũque: & lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia incõmenſurabiles. Ergo tota linea μ ξ eſt potens duo medialia, & poteſt ſuperficiem α γ. quod demonſtrandum fuit. Hic legitur quoddam lemma, quod quia uiſum eſt idem cũ eo quod poſtponitur 39 theoremati, ideo prætermiſimus. præterea quæ hic affertur illius demonſtratio, cum non ſatisfaciat, ſuperiore illa, quæ & certiſsima & facillima eſt, contenti ſimus: hoc ipſum lemma perſecutus eſt Campanus poſt 35.

Sexageſimum Theorema.

Quadratum binomij ſecundum lineam rationalem applicatũ facit alterũ latus binomiũ primũ.

Sit binomium linea α β diuiſa in ſua nomina in pũcto γ, ita ut maius nomẽ ſit α γ: & proponatur linea rationalis linea δ ε: & quadrato lineæ α β æquale ſecundum lineam δ ε applicetur parallelogrammum δ ε, ζ κ latus alterum faciẽs lineam δ κ. Dico lineam δ κ





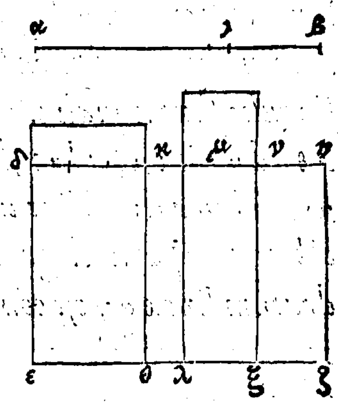
esse binomiũ primum. Nã secundum lineam δ ε quadrato lineæ α γ æquale applicetur parallelogrammũ δ θ. quadrato autem lineæ β γ æquale applicetur parallelogrammum κ λ. Residuum ergo, nempe id quod fit bis ex lineis α γ, γ β est æquale residuo uidelicet parallelogrammo μ ζ. Secetur linea μ κ bifariã & æqualiter in puncto ν. & ducatur linea ν ξ parallela utriq; linearum μ λ, κ ζ. Vtrumuis ergo parallelogrammorũ μ ξ, ν ζ est æquale ei quod fit semel ex lineis α γ, γ β. Et quoniam linea α β est binomium diuisa in sua nomina in puncto γ. ergo lineæ α γ, γ β sunt rationales potẽtia tantum commensurabiles. Ergo quadrata linearum α γ, γ β sunt rationalia, ideoque cõmensurabilia inter se. quare & compositum ex illis quadratis linearum α γ, γ β est commensurabile singulis quadratis linearũ α γ, γ β per 16. Ergo compositum ex quadratis linearum α γ, γ β est rationale. est autem æquale parallelogrammo δ λ. ergo & parallelogrammum δ λ est rationale, & secundum lineam rationalem applicatur δ ε. Ergo linea δ μ est rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ δ ε per 21. Rursus quoniam lineæ α γ, γ β sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: ergo id quod fit bis ex α γ, γ β, nempe parallelogrammum μ ζ est mediale per 22. & illud parallelogrammum μ ζ applicatur secũdum rationalem

nalem μλ. est ergo linea μν rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ μλ, hoc est lineæ δι. Est autem & linea δμ rationalis & longitudine commensurabilis lineæ δι. Est ergo linea δμ, lineæ μν longitudine incõmensurabilis. Sunt autem ambæ rationales. sunt ergo lineæ δμ, μν rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea δν est binomium. Demonstremus præterea illam esse binomium primum. Nam cum quadratorum linearum αγ, γβ sit proportionaliter medium parallelogrammum ex αγ γβ per lemma positum post 53. Ergo etiam parallelogrammorum δθ, κλ, proportionaliter medium erit parallelogrammum μξ, quia singula singulis sunt æqualia. Est ergo sicut parallelogrammum δθ ad μξ, ita μξ ad κλ, hoc est sicut linea δκ ad lineam μν, ita linea μν ad lineam μκ. Ergo quadratum lineæ μν est æquale parallelogrammo ex δκ, μκ. Et quoniã quadratum lineæ αγ est cõmensurabile quadrato lineæ γβ: ergo & parallelogrammum δθ est cõmensurabile parallelogrammo κλ. Quare & linea δκ est longitudine commensurabilis lineæ κμ per 1.6. & 10 huius. Et quoniam quadrata linearũ αγ, γβ sunt maiora eo quòd fit bis ex αγ, γβ per lemma positũ post 39. ergo & parallelogrammũ δλ est maius parallelogrammo μζ. Quare & linea δμ est maior linea μν per. 1.6. Et est æquale parallelogrammũ ex δκ, κμ quadrato lineæ μν hoc est quartæ parti quadrati lineæ μν, quia linea μν diuisa est bifariam & æqualiter in puncto ν, & est linea δκ longitudine commensurabilis lineæ κμ. Ergo per 18. linea δμ plus potest quàm linea μν quadrato lineæ sibi lon-

gitudine commensurabilis. Sunt autem & lineæ δμ, μν rationales potentia tantum commensurabiles, & linea δμ, quæ est maius nomen, est longitudine commensurabilis propositæ lineæ rationali δι. Ergo linea δν est binomium primum. quod demonstrandum erat.

Sexagesimumprimum Theorema.

Quadratum bimedialis primi secundum rationanalem lineam applicatum facit alterum latus binomium secundum.



Sit bimediale primum linea αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, quorum maius nomē sit, αγ: & proponatur linea rationalis δι, secundū quam applicetur æquale quadrato lineæ αβ parallelogrammū δζ faciens alterum latus lineam δν: dico lineā δν esse binomiū secundum. Sint enim eædem constructiones quæ in proximo theoremate, quoniam bimediale primum diuisum est in sua nomina in puncto γ. Quadrata linearum, αγ, γβ sunt medialia. ergo parallelogrammum δλ est etiā mediale. Est ergo rationalis linea δμ, & incommensurabilis longitudine lineæ δι per 23. Rursus quoniam id quod fit bis ex αγ, γβ est rationale, etiam parallelogrāmum μζ erit rationale. Ergo linea μν est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ μλ, hoc est lineæ δι. ergo linea δμ est longitudine incommensurabilis lineæ

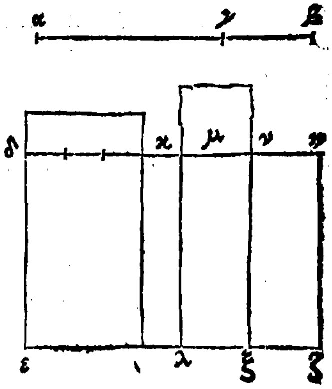
μν

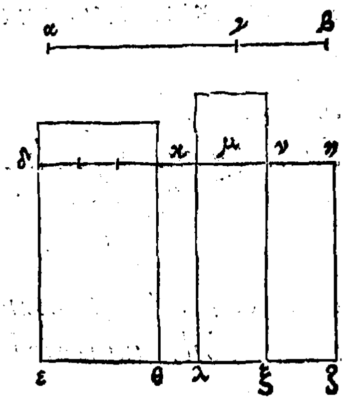
$\mu\nu$, & sunt rationales: ergo lineæ $\delta\mu$, $\mu\nu$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea $\delta\nu$ est binomium. demonstremus illam esse binomium secundum. Quoniam quadrata linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sunt maiora eo quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$. erit ergo parallelogrammũ $\delta\lambda$ maius parallelogrãmo $\mu\zeta$. quare & linea $\delta\mu$ maior linea $\mu\nu$. & quoniam quadratum lineæ $\alpha\gamma$ est commensurabile quadrato lineæ $\gamma\beta$, etiam parallelogrammum $\delta\theta$ erit cõmensurabile parallelogrammo $\kappa\lambda$. quare & linea $\delta\kappa$ erit commensurabilis longitudine lineæ $\kappa\mu$: & est parallelogrammũ ex $\delta\kappa$, $\kappa\mu$ æquale quadrato lineæ $\mu\nu$, hoc est quartæ parti quadrati lineæ $\mu\nu$. Ergo linea $\delta\mu$ plus potest quàm linea $\mu\nu$, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 18. & est linea $\mu\nu$ longitudine commensurabilis lineæ rationali $\delta\varepsilon$. ergo linea $\delta\nu$ est binomium secundum.

Sexagesimumsecundum Theorema.

Quadratum bimedialis secundi secundum rationalem applicatũ, facit alterũ latus binomiũ tertiũ.

Sit bimediale secundum linea $\alpha\beta$ diuisa in sua nomina in puncto γ: ita ut maius nomẽ sit $\alpha\gamma$. Sitq; rationalis $\delta\varepsilon$ secundum quam quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrãmum $\delta\zeta$, faciẽs alterum latus lineam $\delta\nu$. dico lineam $\delta\nu$ esse binomium tertium. Sint enim





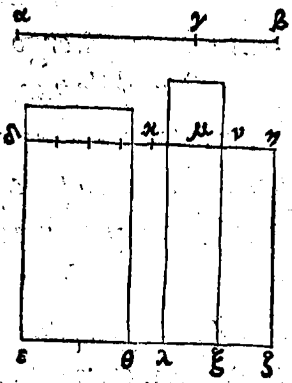
eædem constructiones, quæ in præcedentibus, quoniam linea α β est bimediale secundũ, diuisum in puncto γ in sua nomina. ergo & cõpositũ ex quadratis linearum α γ, γ β est mediale, estque æquale parallelogrammo δ λ. ergo & δ λ erit mediale. ergo linea δ μ erit rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ δ ε per 23. Eadem ratione & linea μ η erit rationalis & longitudine incõmẽsurabilis lineæ μ λ, hoc est lineæ δ ε. ergo utraque linearum δ μ, μ η est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ δ ε. Et quoniam est incommensurabilis longitudine linea α γ lineæ γ β: & sicut linea α γ ad lineam γ β, ita & quadratum lineæ α γ ad parallelogrammũ ex α γ, γ β per 1.6. Ergo & quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. Quare & compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β est incõmensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrammum δ λ, parallelogrammo μ ζ. Quare & linea δ μ erit incommensurabilis longitudine lineæ μ η. Sunt autẽ ambæ rationales. tota ergo linea δ η est binomium. Demonstrandum est præterea illam esse binomium tertium. quemadmodum in superioribus, ita hic cõcludemus lineam δ μ esse maiorem linea μ η, esséque lineam δ κ longitudine commẽsurabilem lineæ κ μ, esse etiam parallelogrammum ex δ κ, μ κ æquale quadrato lineæ μ ν. ergo & lineã δ μ plus posse quàm linea

μ η

$\mu\kappa$ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & neutra ex $\delta\mu$, $\mu\kappa$ eſt longitudine commenſurabilis lineæ $\delta\iota$. ergo linea $\delta\kappa$ eſt binomium tertium.

Sexageſimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ maioris ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum.



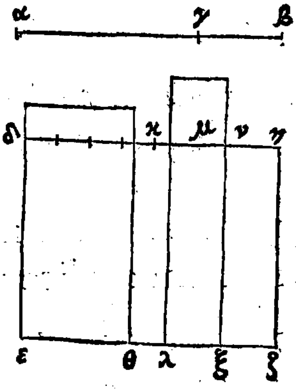
Sit linea maior $\alpha\beta$ diuiſa in ſua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen ſit $\alpha\gamma$, ſitq́; rationalis $\delta\iota$, & ſecundum lineam $\delta\iota$ quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\zeta\delta$ faciens alterũ latus $\delta\kappa$. dico lineam $\delta\kappa$ eſſe binomium quartum. Sint eædem conſtructiones quæ in præcedẽtibus. & quoniam linea $\alpha\beta$ eſt linea maior diuiſa in ſua nomina in puncto γ, lineæ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarũ rationale: id uero quod fit ex ipſis, mediale. Cum igitur compoſitum ex quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ ſit rationale: ergo & parallelogrãmũ $\delta\lambda$ erit rationale. ergo & linea $\delta\mu$ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ $\delta\iota$. Rurſus cum id quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, hoc eſt parallelogrammum $\mu\zeta$ ſit mediale, & ſecũdum lineam rationalem $\mu\lambda$ ſit applicatũ: ergo & linea $\mu\kappa$ erit rationalis, & longitudine incõmenſurabilis lineæ $\delta\iota$. ergo & linea $\delta\mu$ erit longitudine incommenſurabilis li-

[illegible] 13. 3a [illegible]

Celu̅ [illegible] simplici, [illegible] intelligentia [illegible] et hoc sub. [illegible] in ordine ad [illegible] libere [illegible]

[illegible] quod [illegible] ad movere [illegible] depe[illegible] et [illegible] quod [illegible] dicere et [illegible] de aliquo [illegible] abstracte [illegible]

neæ μη. ergo lineæ λμ, μη sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea λη erit binomium. Demonstrandum est illam prætεrea esse binomium quartũ similiter, ut in præcedentibus concludetur lineam λμ esse maiorem linea μη. Cum igitur quadratum lineæ αγ sit incõmẽsurabile quadrato lineæ γϐ. ergo & parallelogrammum λθ erit incommẽsurabile parallelogrammo κλ. Quare & linea λκ erit longitudine incommensurabilis lineæ κμ. Ergo per 19. linea λμ plus potest, quàm linea μη quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis: suntq́; lineæ λμ, μη rationales potentia tantum commensurabiles, & linea λμ longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali λε. ergo tota linea λη erit binomium quartum.

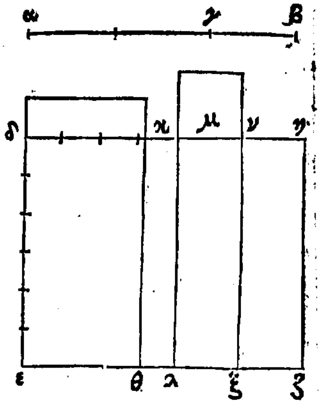


Sexagesimumquartum Theorema.

Quadratum lineæ potẽtis rationale & mediale secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quintum.

Sit linea potens rationale & mediale αϐ diuisa in sua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen sit αγ: sitq́; rationalis λε, & secũdum lineam λε quadrato lineæ αϐ æquale applicetur parallelogrammum λζ, faciens alterũ latus lineã λη. dico lineam λη esse binomium quintum. Sint eædem constructiones quæ in præcedentibus. Cum igitur linea αβ sit potẽs rationale & mediale diuisa in

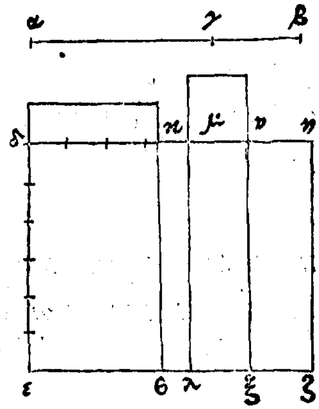
sua



ſua nomina in pũcto γ, lineæ α γ, γ β ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarum, mediale: id uerò quod fit ex ipſis, rationale. Cum igitur compoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β ſit mediale, ergo parallelogrammũ δ λ erit etiam mediale. quare linea δ μ erit rationalis longitudine incommẽſurabilis lineæ δ ε. Rurſus cum id quod fit bis ex α γ, γ β ſit rationale, hoc eſt parallelogrammũ μ ζ, ergo linea μ κ erit rationalis longitudine commẽſurabilis lineæ δ ε. Igitur linea δ μ eſt longitudine incommẽſurabilis lineæ μ κ. Ergo lineæ δ μ, μ κ erunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo tota linea δ κ erit binomiũ. dico prætereà illam eſſe binomium quintũ. Similiter enim demonſtrabitur parallelogrammũ ex δ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ μ ν, & lineam δ κ eſſe longitudine incommenſurabilẽ lineæ κ μ. Ergo per 19. linea δ μ plus poteſt quàm linea μ κ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ſuntq; lineæ δ μ, μ κ rationales potentia tantum cõmẽſurabiles, eſtq; minor linea μ κ longitudine cõmẽſurabilis lineæ δ ε. ergo tota linea δ κ erit binomiũ quintũ.

Sexageſimumquintum Theorema.

Quadratum lineæ potentis duo medialia ſecundũ rationalem applicatum, facit alterum latus binomium ſextum.

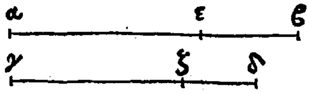


Sit linea potens duo medialia αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, sitq; linea rationalis δι, secundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrãmum δζ faciẽs alterũ latus δη. dico lineã δη esse binomiũ sextum. Sint eædem constructiones quæ in præcedentibus. quoniam linea αβ est potens duo medialia diuisa in sua nomina in puncto γ, sicut in cæteris dictum est, utrũque parallelogrammum δλ, μζ est mediale, & secundum lineã rationalem δι applicantur. ergo utraque linea δμ, μη est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δι. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ αγ, γβ est incõmẽsurabile ei quod fit bis ex αγ, γβ. Ergo & parallelogrammum δλ est incommensurabile parallelogrammo μζ. ergo linea δμ est longitudine incommẽsurabilis lineæ μη. ergo lineæ δμ, μη sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea δη est binomiũ. dico præterea illam esse binomium sextum. Quemadmodum enim in cæteris est demonstratum, ita hic etiam demonstretur parallelogrammum ex δκ, κμ esse æquale quadrato lineæ μν, lineamq; δκ esse longitudine incõmensurabilem lineæ κμ, itaque per 19. lineam δμ plus posse quàm linea μη quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. sed neutra linearum δμ, μη est longitudine commensurabilis lineæ rationali δι. ergo tota linea δη est binomium sextum.

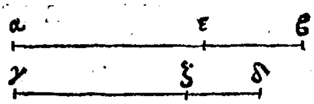
Sexa-

Sexagesimumsextum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis binomio est, & ipsa binomium eiusdem ordinis.



Sit *binomium linea α β, sitq; ei longitudine commensurabilis linea γ δ. dico lineam γ δ esse etiam binomium eiusdem ordinis, cuius est & linea α β. cũ enim linea α β sit binomium, diuidatur in sua nomina in puncto ε, sitq; maius nomẽ α ε.* Ergo *lineæ α ε, ε β sunt rationales potentia tantum commensurabiles, fiatq; sicut linea α β ad lineam γ δ, ita linea α ε ad lineam γ ζ per* 12. 6. Ergo *& residua ε β ad residuam ζ δ erit sicut tota linea α β ad totam lineã γ δ per* 19. 5. *Sed linea α β est longitudine commẽsurabilis lineæ γ δ. ergo etiam erit longitudine commensurabilis linea α ε lineæ γ ζ: & linea ε β lineæ ζ δ per* 10 *huius. Sunt autem lineæ α ε, ε β rationales. sunt ergo etiam rationales lineæ γ ζ, ζ δ.* Et *quoniam est sicut linea α ε ad lineam γ ζ, ita linea ε β ad lineã ζ δ. permutata ergo proportione sicut linea α ε ad lineã ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ, sed lineæ α ε, ε β sunt potentia tantum commensurabiles. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ, sunt potentia tantum commẽsurabiles per* 10 *huius. Sunt autẽ & rationales: ergo linea tota γ δ est binomium.* Dico *præterea esse binomium eiusdem ordinis cuius & linea α β. nam linea α ε plus potest quàm linea ε β quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Si primum plus potest quadrato lineæ sibi longitudine commensurabi-*



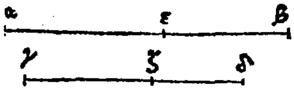
lis, ergo et linea γ ζ plus poterit, quàm linea ζ δ, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15 huius. Et siquidem linea α ε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: ergo linea γ ζ, quæ est longitudine commensurabilis lineæ α ε, erit inquam linea γ ζ etiam longitudine commensurabilis eidem lineæ propositæ rationali per 12 huius, ob eamque causam utraque linea α β, γ δ est binomiũ primum, hoc est utraque erit eiusdem ordinis. Si uerò linea ε β est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ergo linea ζ δ, quæ est longitudine commensurabilis lineæ ε β, erit etiam longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ob eamq; causam erit utraque binomiũ secundum, hoc est utraque eiusdem ordinis. Si uerò neutra linearum α ε, ε β est longitudine cõmensurabilis propositæ rationali, neutra etiam linearum γ ζ, ζ δ erit eidẽ propositæ lineæ rationali commensurabilis longitudine per 14 huius. sic ergo utraque linea erit binomium tertium. Quòd si linea α ε plus potest, quàm linea ε β quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, ergo & linea γ ζ plus poterit quàm linea ζ δ, quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per 15 huius. Et si quidem linea α ε est longitudine commensurabilis propositæ rationali, & linea γ ζ erit eidem rationali longitudine commensurabilis: tunc erit utraque binomium quartũ. Quòd si linea ε β fuerit rationali commensurabilis longitudine, & linea ζ δ erit eidem longitudine commensurabilis: eritque hoc modo utraque binomium quintum.

Quòd

Quòd si neutra linearum α ι, ι β fuerit rationali commensurabilis longitudine, neutra etiam γ ζ, ζ δ erit eidẽ commensurabilis longitudine: eritq; utraque binomium sextum. Quare linea longitudine commensurabilis binomio, est etiam binomium eiusdem ordinis.

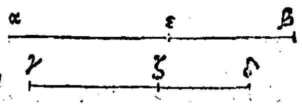
Sexagesimumseptimum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis alteri bimedialium, est & ipsa bimediale etiã eiusdẽ ordinis.



Sit bimediale linea α β: eidem sit alia cõmẽsurabilis lõgitudine γ δ. dico lineam γ δ esse etiã bimediale eiusdem ordinis, cuius & linea α β. Diuidatur linea α β in sua nomina in puncto ι, fiatq; sicut linea α β ad lineam γ δ, ita linea α ι ad lineam γ ζ: residua ergo linea ι β erit ad lineam ζ δ sicut tota linea α β ad totam γ δ: sed linea α β est longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo & linea α ι erit longitudine commensurabilis lineæ γ ζ, & linea ι β lineæ ζ δ. Sunt autẽ lineæ α ι, ι β mediales. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ sunt etiã mediales per 24. Et quoniam est sicut linea α ι ad lineam ι β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: sed lineæ α ι, ι β sunt potentia tantum commẽsurabiles, ergo & lineæ γ ζ, ζ δ sunt potẽtia tantum cõmensurabiles. sed modo probatum est eas etiam esse mediales, ergo tota linea γ δ erit etiã bimediale: dico præterea esse bimediale eiusdẽ ordinis, cuius & linea α β. cum enim sit sicut linea α ι ad lineã ι β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: sitq; sicut linea γ ζ ad lineã ζ δ, ita quadratũ lineæ γ ζ ad ζ δ parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ per 1.6.

Ergo ſicut linea α ε ad lineam ε β, ita quadratũ lineæ γ ζ ad parallelogrammũ ex γ ζ, ζ δ per 11.5. Sed



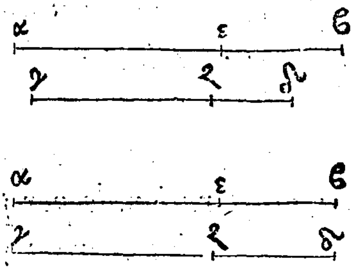
ſicut linea α ε ad lineam ε β, ita quadratum lineæ α ε ad parallelogrammũ ex α ε, ε β, per 1.6. Ergo ſicut quadratum lineæ α ε ad parallelogrammum ex α ε, ε β, ita quadratum lineæ γ ζ, ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ per 11.5. permutata ergo proportione ſicut quadratũ lineæ α ε ad quadratum linæ γ ζ, ita parallelogrammũ ex α ε, ε β ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ: ſed quadratum lineæ α ε eſt commenſurabile quadrato lineæ γ ζ, quia modo probatum eſt lineas α ε, γ ζ eſſe commenſurabiles. Ergo parallelogrammum ex α ε, ε β erit commenſurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. Si ergo parallelogrãmum ex α ε, ε β fuerit rationale, hoc eſt ſi linea α β fuerit bimediale primum, parallelogrammum quoque ex γ ζ, ζ δ erit rationale, ergo linea γ δ erit etiã bimediale primum. Si uerò parallelogrammum ex α ε, ε β fuerit mediale, hoc eſt ſi linea α β fuerit bimediale ſecundum, erit etiam parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ mediale. Ergo etiã linea γ δ erit bimediale ſecundũ, quare & ambæ erunt eiuſdem ordinis, quod demonſtrandum erat: hoc autem theorema 67. poteſt uniuerſaliter concipi. linea commẽſurabilis alteri bimedialium longitudine & ſententia ſiue ſentẽtia tantum, eſt & ipſa bimediale, etiam eiuſdem ordinis, neque eo minus uerum erit. quod ipſum, etiam eadem uia demonſtrabitur.

Sexageſimumoctauum Theorema.

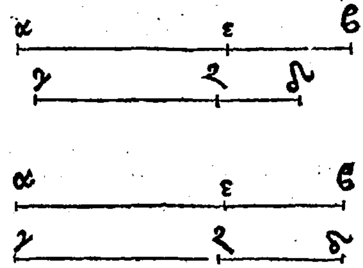
Linea cõmẽſurabilis lineæ maiori eſt & ipſa maior.

Sit

Sit linea maior αβ cui sit commensurabilis linea γδ quocunque modo, hoc est, siue sit longitudine & potentia simul commensurabilis, siue potentia tantum. Dico lineā γδ esse etiam lineā maiorē.



Diuidatur linea αβ in sua nomina in puncto ε, fiantq; cætera quemadmodum in superioribus. Et quoniā est sicut linea αβ ad lineam γδ: ita & linea αε ad lineam γζ, & linea εβ ad lineā ζδ. ergo sicut linea αε ad lineam γζ: ita linea εβ ad lineam ζδ. sed linea αβ est commensurabilis lineæ γδ. ergo & linea αε erit commensurabilis lineæ γζ, & similiter linea εβ lineæ ζδ. Et quoniam est sicut linea αε ad lineā γζ, ita linea εβ ad lineā ζδ. permutata ergo proportione sicut linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ. ergo sicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ εβ, ita quadratum lineæ γζ ad quadratū lineæ ζδ, per 22. 6. Ergo per coniunctam proportionē (quæ probatur per 18. 5.) sicut compositum ex quadratis linearū αε, εβ ad quadratum lineæ εβ, ita compositum ex quadratis linearum γζ, ζδ ad quadratū lineæ ζδ. Ergo per contrariam proportionem sicut quadratum lineæ εβ ad compositum ex quadratis linearum αε, εβ, ita quadratum lineæ ζδ ad compositum ex quadratis linearum γζ, ζδ. Ergo permutata proportione sicut quadratum lineæ εβ ad quadratum lineæ ζδ, ita compositum ex quadratis linearum αε, εβ ad compositū ex quadratis linearum γζ, ζδ. Sed quadratū lineæ εβ est commēsurabile qua-



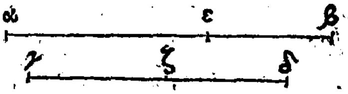
drato lineæ ζδ, quia modo probatũ est lineas εβ, ζδ esse cõmensurabiles: ergo & cõpositum ex quadratis linearum αε, εβ erit commẽsurabile cõposito ex quadratis linearum γζ, ζδ. Sed compositum ex quadratis linearum αε, εβ est rationale per positionem. ergo & compositũ ex quadratis linearum γζ, ζδ erit etiam rationale. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita quadratũ lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, εβ. ergo sicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, εβ. sed sicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, ζδ: ergo sicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, εβ, ita quadratũ lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, ζδ. ergo permutata proportione sicut quadratũ lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammũ ex αε, εβ ad parallelogrammum γζ, ζδ. sed quadratũ lineæ αε est commensurabile quadrato lineæ γζ, quia modo probatum est lineas αε, γζ esse commensurabiles, ergo & parallelogrammum ex αε, εβ erit commensurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. sed parallelogrammũ ex αε, εβ est mediale per positionem. ergo & parallelogrammũ ex γζ, ζδ erit etiam mediale per corollarium 24. Sed (ut modo probatum est) sicut linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ: linea autẽ αε erat per suppositionem potentia incommẽsurabilis lineæ εβ.

ergo

ergo per 10 & linea γ ζ erit potentia incommensurabilis lineæ ζ δ. Ergo lineæ γ ζ, ζ δ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. ergo tota linea γ δ erit linea maior per 39 huius. ergo linea commẽsurabilis lineæ maiori erit & ipsa linea maior. In hoc theoremate 68 ideo persequuti non sumus demonstrationẽ Theonis, *quia difficilior uisa est, & indigere lemmate ad id probandũ, quod pro demonstrato sumit, illis uerbis?* καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν α ε, ε β.

Sexagesimumnonum Theorema.

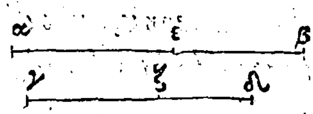
Linea cõmẽsurabilis lineæ potẽti rationale & mediale, est & ipsa linea potẽs rationale & mediale.



Sit linea potẽs rationale & mediale α β, cui sit commensurabilis linea γ δ, siue sit longitudine & potentia siue potentia tantum commensurabilis: dico etiam γ δ esse lineam potentẽ rationale & mediale. Diuidatur *linea α β in sua nomina in pũcto ε: sint quoque eædem construtiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas γ ζ, ζ δ esse potentia incõmensurabiles, sicut sunt lineæ α ε, ε β: & compositũ ex quadratis linearum α ε, ε β esse commensurabile composito ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ: item parallelogrammum ex α ε, ε β esse commensurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ.* Quare *& compositum ex quadratis linearũ γ ζ, ζ δ erit etiam mediale, sicut compositũ ex quadratis linearum α ε, ε β: item parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ* *erit etiam rationale sicut & parallelogrammũ ex α ε, ε β. ergo linea γ δ erit etiam linea potens rationale & mediale per 40.*

Septuagesimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ potenti duo medialia, est & ipsa linea potens duo medialia.



Sit linea potens duo medialia α β, eiq; cõmensurabilis linea γ δ, siue sit longitudine & potẽtia, siue potentia tantum commensurabilis: dico lineam γ δ esse etiam lineam potentem duo medialia. Diuidatur li*nea α β in sua nomina in puncto ε: sint quoque eædem constructiones quæ in præcedentibus.* Similiter demon*strabimus lineas γ ζ, ζ δ esse potentia incommensurabiles, & compositum ex quadratis linearum α ε, ε β esse cõmensurabile composito ex quadratis linearũ γ ζ, ζ δ: parallelogrammum uero ex α ε, ε β esse commẽsurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. quare & compositũ ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ erit etiam mediale: & similiter parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ erit mediale. Quòd autẽ compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ sit incommẽsurabile parallelogrãmo quod fit ex γ ζ, ζ δ, ita probatur. Cum sit enim sicut compositum ex quadratis linearum α ε, ε β ad quadratum lineæ α ε, ita compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad quadratum lineæ γ ζ (ut probatũ est in præcedentibus.) ergo permutata proportione, sicut compositum ex quadratis linearũ α ε, ε β ad compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ, ita quadra-*

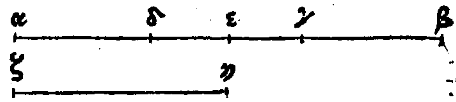
tum

tum lineæ α ι ad quadratũ lineæ γ ζ: sed in superioribus, nempe in 68 theoremate probatum est, sicut quadratũ lineæ α ι ad quadratum lineæ γ ζ, ita parallelogrammũ ex α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. Ergo sicut cõpositum ex quadratis linearum α ι, ι ϐ ad compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ, ita parallelogrammum ex α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. ergo permutata proportione sicut compositum ex quadratis linearum α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex α ι, ι ϐ, ita compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. Sed per suppositionẽ compositũ ex quadratis linearum α ι, ι ϐ est incommensurabile parallelogrammo ex α ι, ι ϐ. ergo & compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ est incommensurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. Ergo linea γ δ est potens duo medialia.

Scholium.

Hactenus dictum est de senarijs sex, quorum primus senarius cõtinet generationem linearum irrationalium per compositionem: secundus diuisionem, nempe quòd hæ diuidantur in unico tantum puncto: tertius inuẽtionem binomiorum, primi inquam, secundi, tertij, quarti, quinti & sexti, post quem incipit quartus senarius continẽs differentiam linearum irrationalium inter se. Nam ex usu singulorum binomiorum demonstrantur differentiæ irrationalium. Quintus autem docet de applicationibus quadratorum cuiusq; lineæ irrationalis, ex qualibus scilicet irrationalibus sint latitudines cuiusque superficiei applicatæ. In sexto uerò senario dicitur singulas lineas singulis irrationalibus commensurabiles, esse

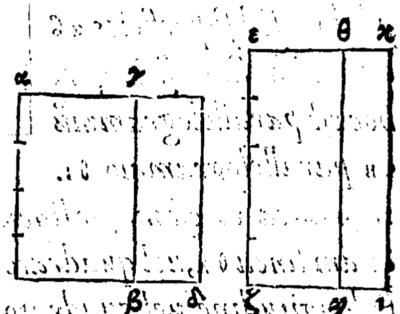
etiam ipſas irrationales eiuſdem ſpeciei. Mox uero dicetur de ſeptimo ſenario, in quo reliquæ ipſarũ rurſus inter ſe differẽtiæ dilucide pertractantur. Exiſtit *etiam in illis ipſis lineis irrationalibus proportionalitas arithmetica. eáque linea quæ ſumitur media proportionaliter ſecundum medietatem arithmeticam inter nomina cuiuſque lineæ irrationalis ſimiliter eſt irrationalis eiuſdẽ ſpeciei.* Prius *autem conſtat proportionalitatẽ arithmeticã inter illa nomina reperiri. Sit enim linea αβ quæcunque ex dictis irrationalibus. uerbi gratia, ſit binomiũ, diuidaturq́; in ſua nomina in puncto γ: ſitq́; maius nomẽ αγ, de quo auferatur linea αδ æqualis minori nomini, nempe γβ: diuidaturq́; linea γδ bifariã & æqualiter in puncto ε: manifeſtum eſt lineam αε eſſe æqualem lineæ εβ. Sit alterutri earũ æqualis linea ζη, manifeſtũ eſt, quanto differt linea αγ à linea ζη, tanto eandem lineam ζη differre à linea γβ. utrobique enim eſt differentia δε uel εγ, quod eſt propriũ arithmeticæ proportionalitatis.* Conſtat *autem lineam ζη eſſe commenſurabilem longitudine lineæ αβ, quia eſt eius dimidia. quare per 66 linea ζη erit etiam binomium, eodémque modo demonſtrabitur de cæteris irrationalibus.* Totum *hoc ſcholium non reperitur in uetuſto.*



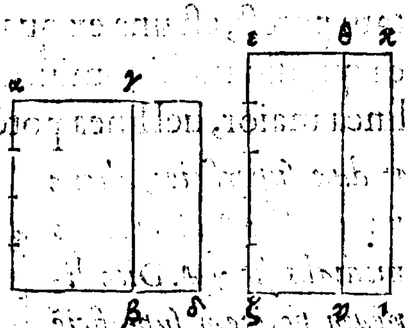
Septuageſimumprimum Theorema.

Si duæ ſuperficies rationalis & medialis ſimul cõponantur, linea quæ totam ſuperficiem compoſitam

tam poteſt, eſt una ex quatuor irrationalibus, uel ea quę dicitur binomiũ, uel bimediale primũ, uel linea maior, uel linea potẽs rationale & mediale.

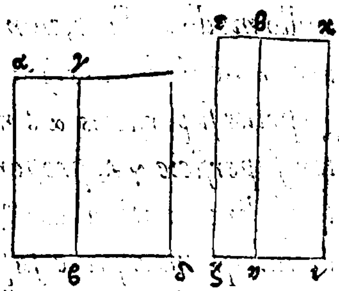


Sint duæ ſuperficies, altera rationalis α ϐ, altera uerò medialis ſit γ δ. Dico lineam potẽtem ſuperficiẽ α δ, eſſe uel binomiũ, uel bimediale primũ, uel lineam maiorem uel lineã potentem rationale & mediale. Nam ſuperficies α β, eſt uel maior uel minor ſuperficie γ δ: nã æquales eſſe nullo modo poſſunt, cũ alia ſit rationalis, alia uerò medialis. Sit prius ea maior proponaturq́; linea rationalis ε ζ, ſecundũ quam æqualis ſuperficiei α β, applicetur ſuperficies parallelogramma rectangula ε η, faciens alterum latus ε θ: ſuperficiei autem γ δ æqualis ſecundum eandẽ lineam ε ζ, hoc eſt ſecũdum lineam θ κ applicetur parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ. Cum ſuperficies α β ſit rationalis, etiã parallelogrammum ε η erit rationale: ergo & linea ε θ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ ε ζ per 21. Rurſus eadem ratione linea θ κ erit rationalis & longitudine incommẽſurabilis lineæ ε ζ per 23. & quoniam ſuperficies α β eſt rationalis, ſuperficies uerò γ δ eſt medialis, ſuperficies α ϐ, hoc eſt parallelogrãmum ε η, eſt incõmenſurabile ſuperficiei γ δ: hoc eſt parallelogrãmo θ ι. Ergo per 1.6 & 10. huius linea ε θ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ θ κ: ergo lineæ ε θ, θ κ ſunt rationales potẽtia tantum



cõmensurabiles. ergo tota linea ι κ est binomiũ diuisum in sua nomina in pũcto θ. sed superficies α β est maior superficie γ δ, hoc est parallelogrammũ ι κ parallelogrammo θ ι. ergo linea ι θ est maior linea θ κ. sed linea ι θ plus potest quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõmẽsurabilis. Prius autem poßit plus ea quadrato lineæ sibi commensurabilis: est autem linea ι θ longitudine cõmẽsurabilis lineæ rationali ι ζ, (ut modo probatum est) ergo linea ι κ est binomiũ primum. Ergo per 54 linea potens superficiem ι ι est binomium, quare & linea potens superficiem α δ est binomium. Sed secundo loco linea ι θ plus poßit quàm linea θ κ, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq; maius nomen linea ι θ commensurabile longitudine lineæ rationali ι ζ, ergo linea ι κ est binomium quartum. sed linea ι ζ est rationalis, ergo per 57 linea potẽs superficiẽ ι ι, est linea maior: quare & linea potens superficiem α δ, est linea maior. Rursus superficies α β, quæ est rationalis, sit minor superficie γ δ, quæ est medialis, hoc est parallelogrammum ι κ parallelogrammo θ ι. Quare & linea ι θ erit minor linea θ κ: linea uero θ κ plus potest quàm linea ι θ, uel quadrato lineæ sibi longitudine cõmẽsurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Prius poßit plus ea quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, est

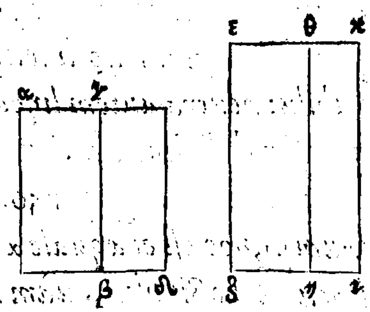
autem



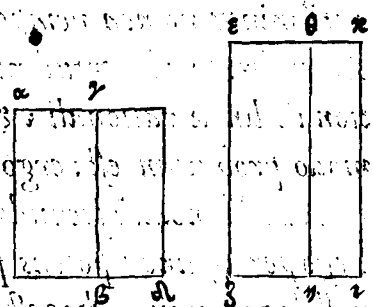
autẽ minus nomen, nempe ι θ cõmensurabile longitudine rationali lineæ rationali ι ζ, ut modo probatum est: ergo linea ι κ est binomiũ secundum. Ergo per 55 linea potens parallelogrammũ ι ι, hoc est parallelogrammum α δ, est bimediale primũ. Sed linea θ κ plus possit quàm linea ι θ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq́ minus nomẽ ι θ commensurabile longitudine lineæ rationali ι ζ, ergo linea ι κ est binomium quintum. ergo per 58 linea potens parallelogrammum ι ι, hoc est ei æquale α δ, erit linea potens rationale & mediale. Ergo si duæ superficies rationalis & medialis &c.

Septuagesimumsecundum Theorema.

Si duæ superficies mediales incommensurabiles simul componantur, fiunt reliquæ duæ lineæ irrationales, uel bimediale secundum, uel linea potẽs duo medialia.



C*omponantur duæ superficies mediales incommensurabiles inter se α β, γ δ. dico lineam potentem superficiem α δ esse uel bimediale secundum, uel lineam potentẽ duo medialia. Nã superficies α β est uel maior uel minor superficie γ δ (æquales enim esse*



nullo modo possunt, cum sint incommensurabiles.) Sit ergo prius superficies α β maior superficie γ δ, proponaturq; linea rationalis ε ζ secundũ quam æquale superficiei α β applicetur parallelogrammum ε κ, faciens alterum latus ε θ: superficiei uerò γ δ applicetur æquale parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ: & quoniam utraque superficies α β, γ δ est medialis: hoc est utrũque parallelogrammum ε κ, θ ι, ergo utraque linea ε θ, θ κ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniam superficies α β, γ δ sunt incommensurabiles, ergo est etiam incommensurabile parallelogrammum ε κ parallelogrammo θ ι. ergo & lineæ ε θ, θ κ, sunt longitudine incommẽsurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. Ergo linea ε κ, est binomium: similiter autem ac in proximo theoremate demonstratur lineam ε θ esse maiorẽ linea θ κ, quæ linea ε θ plus potest, quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis. Possit prius plus quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: neutra autem linearũ ε θ, θ κ est longitudine cõmensurabilis lineæ rationali ε ζ: ergo linea ε κ est binomium tertium. ergo per 56. lineæ potens parallelogrammum ε ι, hoc est ei æquale α δ, est bimediale secundũ. Sed linea ε θ possit plus, quàm linea θ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, est autem utraq; ε θ, θ κ

longitudine

longitudine incommensurabilis lineæ rationali ιζ: ergo linea ικ est binomium sextum. Ergo per 59 linea potens parallelogrammũ ιγ, hoc est κλ est linea potens duo medialia. Eadem ratione si superficies αϐ fuerit minor superficie γδ, demonstrabimus lineam potentem superficiem αδ, esse uel bimediale secundum uel lineam potentem duo medialia. Ergo si duæ superficies mediales &c. binomium & cæteræ consequentes lineæ irrationales neque sunt eædẽ cum linea mediali, neque ipsæ inter se.

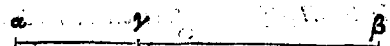
Nam quadratum lineæ medialis applicatum secundũ lineam rationalem, facit alterum latus lineam rationalem, & longitudine incommensurabilem lineæ, secundum quam applicatur, hoc est lineæ rationali per 23. Quadratum uero binomij secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium primum per 60. Quadratum uero bimedialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ secũdum per 61. Quadratum uerò bimedialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium tertium per 62. Quadratum uerò lineæ maioris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum per 63. Quadratum uerò lineæ potentis rationale & mediale secũdum rationalem applicatũ, facit alterum latus binomium quintum per 64. Quadratum uero lineæ potentis duo medialia secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ sextum per 65. Cũ igitur dicta latera, quæ latitudines uocantur, differant, & à prima latitudine quoniam est rationalis, cum inter se quoque differant, eo quia sunt *binomia diuersorum ordinum: manifestum est ipsas lineas irrationales differentes esse inter se.*

Secundus ordo alterius sermonis, qui est de detractione.

Principium senariorum per detractionem.

Septuagesimumtertium Theorema.

Si de linea rationali detrahatur rationalis potentia tantum commensurabilis ipsi toti, residua est irrationalis. Vocetur autem residuum.



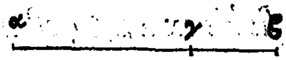
De rationali αβ detrahatur rationalis ϐγ, potētia tātū commensurabilis toti αβ. dico residuam αγ esse irrationalem, quæ uocetur residuum. cum enim linea αβ sit lōgitudine incōmensurabilis lineæ βγ, sitq́; sicut linea αϐ ad lineam βγ, ita quadratū lineæ αβ ad parallelogrāmum ex αϐ, ϐγ: ergo quadratum lineæ αβ erit incōmensurabile parallelogrāmo ex αϐ, βγ. sed quadrato lineæ αϐ sunt commensurabilia quadrata linearū αϐ, βγ per 16. *Ergo quadrata linearū αβ, βγ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex αβ, βγ per* 14. *sed parallelogrammo ex αβ, βγ commēsurabile est ei quod fit bis ex αϐ, ϐγ.* Ergo *quadrata linearum αβ, ϐγ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex αϐ, ϐγ. sed quadrata linearū αβ, βγ sunt æqualia ei quod fit bis ex αϐ, βγ, & quadrato lineæ αγ, per* 7.2. *ergo id quod fit bis ex αϐ, ϐγ, cum quadrato lineæ αγ, est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, ϐγ.* Ergo *per secundam partem* 17 *id quod*

fit

fit bis ex α β, ϛ γ est incõmensurabile quadrato lineæ α γ. ergo per primam partem eiusdem 17 id quod fit bis ex α ϛ, ϛ γ cum quadrato α γ, hoc est illi toti æqualia quadrata linearum α ϛ, β γ sunt incommensurabilia quadrato lineæ α γ. Hoc *breuius cõcluditur per corollarium à nobis demonstratum post 17. sed quadrata linearum α ϛ, ϛ γ sunt rationalia, quia lineæ α β, ϛ γ positæ sunt rationales. ergo linea α γ est irrationalis: uocetur autẽ residuum.* Hoc *uero theorema nihil aliud dicit, quàm portionem eam maioris nominis ipsius binomij, quæ remanet post detractionem minoris nominis de maiori, esse irrationalem: quæ uocatur residuum, hoc est si de maiori nomine ipsius binomij, quod maius nomen est linea rationalis potentia tantum commensurabilis minori nomini, detrahatur minus nomen, quod ipsum est etiã cõmensurabile potentia tantũ maiori nomini (quod maius nomen hoc theorema uocat lineam totam) residuã lineam esse irrationalem, quam uocat residuum.* Itaque *omnes lineæ, de quibus agitur hoc theoremate, & cæteris quinque consequẽtibus, sunt reliquæ portiones maiorum nominum totarum linearum, de quibus actum est 36.37.38.39.40 & 41 post detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuagesimumquartum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum cõmensurabilis toti lineę, quæ uero detracta est cũ tota cõtineat superficiẽ rationalẽ, residua est irrationalis. uocetur autẽ residuũ mediale primũ.

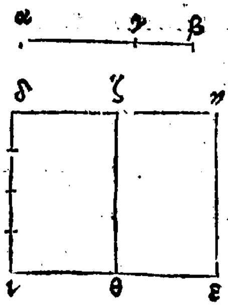


De linea mediali αβ detrahatur medialis βγ potentia tantum commẽsurabilis toti αβ, quæ scilicet βγ cũ αβ contineat rationale, nempe parallelogrammũ ex αβ, βγ. Dico *reliquã αγ esse irrationalem.* Vocetur *autem residuum mediale primum.* Nam *cum lineæ αβ, βγ sint mediales, quadrata illarum erunt medialia. sed quod fit bis ex αβ, βγ est rationale: ergo cõpositum ex quadratis linearũ αβ, βγ hoc est id quod fit bis ex αβ, βγ, cum quadrato lineæ αγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ.* Ergo *per secũdam partem 17. id quod fit bis ex αβ, βγ, est incommẽsurabile quadrato lineæ αγ. sed id quod fit bis ex αβ, βγ est rationale. ergo quadratum lineæ αγ est irrationale. ergo & linea αγ irrationalis.* Vocetur *autẽ residuum mediale primum.* Est *etiam hoc residuum mediale primũ, residua portio maioris nominis bimedialis primi, post detractionem minoris nominis de maiori: unde & denominationem habet residuum mediale primum.*

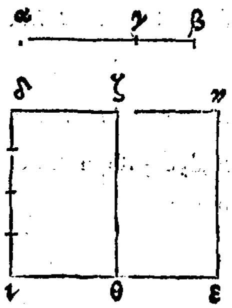
Septuagesimumquintum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum commensurabilis toti, quæ uero detracta est cum tota contineat superficiem medialem, reliqua est irrationalis. Vocetur autem residuum mediale secundum.

De linea mediali αβ, detrahatur medialis βγ potentia tantum commensurabilis toti αβ, cum tota uerò αβ continens superficiem medialem, nempe parallelogrammum ex αβ, βγ: dico reliquã αγ esse irrationalẽ. Vocetur *autem*



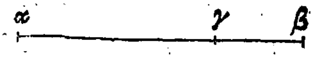
tem residuũ mediale secundũ. proponatur linea rationalis δι, & secundum illam quadratis linearum αβ, ϐγ æquale applicetur parallelogrammum δε, faciẽs alterum latus δη. Ei uerò quod fit bis ex αϐ, ϐγ æquale secũdum eandem lineam δι, applicetur parallelogrammum δθ faciens alterum latus δζ. parallelogrammum δθ est minus parallelogrãmo δε: quia & quadrata linearum αβ, ϐγ sunt maiora eo quod fit bis ex αϐ, βγ tanto, quantũ est quadratum lineæ αγ per 7. 2. Ergo & residuum nempe parallelogrammũ ζε, erit æquale quadrato lineæ αγ. Et quoniam quadrata linearum αϐ, ϐγ sunt commensurabilia & medialia: ergo compositum ex ipsis parallelogrammum δε, erit utrique quadrato commẽsurabile per 16. ergo & parallelogrammum δε, erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. ergo per 23 linea δη erit rationalis longitudine incõmensurabilis lineæ δι. Rursus cum id quod fit ex αϐ, ϐγ sit mediale: etiam id quod fit bis ex iisdem αβ, βγ erit mediale. ergo & illi æquale parallelogrammũ δθ erit mediale. Ergo & linea δζ erit rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ δι. Et cum linea αβ sit longitudine incommensurabilis lineæ βγ, ergo quadratum lineæ αβ erit incommẽsurabile parallelogrammo ex αβ, ϐγ per 1. 6 & 10 huius. Sed quadrato lineæ αϐ sunt commensurabilia quadrata linearũ αβ, βγ, parallelogrammo uero ex αβ, ϐγ est commensurabile id, quod fit bis ex αβ, ϐγ. ergo quadra-



ta linearum αβ, βγ, hoc est parallelogrammum δι est incommẽsurabile ei, quod fit bis ex αβ, βγ, hoc est parallelogrãmo δθ: sed sicut parallelogrammum δι ad parallelogrammum δθ, ita linea δκ ad lineam δζ. Ergo linea δκ, est longitudine incõmẽsurabilis lineæ δζ: sunt autẽ ambæ rationales. Ergo linea ζκ est residuum per 73. sed linea δι est rationalis: parallelogrammum uerò contentum ex linea rationali & irrationali est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demonstrationis 38. Ergo parallelogrammum ζι, est irrationale: ergo & linea αγ, quæ illud parallelogrã mum potest est irrationalis. Vocatur autem residuũ mediale secundum: estq; hoc residuum mediale secundum, reliqua portio maioris nominis ipsius bimedialis secundi, post detractionem minoris nominis de maiori.

Septuagesimumsextum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti, compositum autẽ ex quadratis totius lineæ & lineæ detractæ sit rationale: parallelogrammum uerò ex iisdem contentum sit mediale, reliqua linea erit irrationalis: uocetur autem linea minor.



De linea recta αβ, detrahatur recta βγ potentia incommensurabilis toti αβ, cuius totius inquam αβ quadratum cum quadrato lineæ βγ sit rationale. Contentũ uero ex αβ,

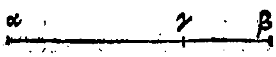
βγ

β γ sit mediale, dico residuam lineam α γ esse irrationalem, quæ uocetur minor. Cum enim compositũ ex quadratis linearum α β, β γ sit rationale, id uerò quod fit bis ex α β, β γ sit mediale: ergo quadrata linearum α β, β γ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex α β, β γ. ergo & reliquo quadrato scilicet lineæ α γ, erunt incommensurabilia quadrata linearum α β, β γ, sicut dictum est in 73. sed quadrata linearum α β, β γ sunt rationalia. ergo quadratum lineæ α γ erit irrationale, & linea α γ irrationalis: uocetur autẽ linea minor, ideo sic dicta, quia est reliqua portio maioris nominis lineæ maioris post detractionem minoris nominis de maiori.

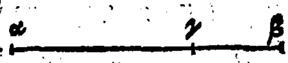
Septuagesimumseptimum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractę sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem contentum sit rationale, reliqua linea est irrationalis: uocetur autẽ linea faciẽs cum superficie rationali totam superficiem medialem totum mediale.

De *linea recta α β, detrahatur recta β γ potentia incommẽsurabilis toti*



lineæ α β, ex quadratis quarum scilicet α γ, β γ compositum sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem sit rationale: dico reliquã lineam α γ esse irrationalẽ, quæ uocetur linea faciens cum superficie rationali totam superficiem medialem. Cum enim compositũ ex quadratis linearũ α β, β γ sit mediale, id uerò quod fit bis ex α β,

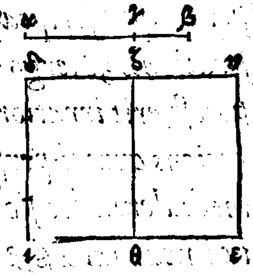


β γ sit rationale. Ergo *compositum ex quadratis linearum α β, β γ erit incommẽsurabile ei quod fit bis ex α β, β γ.* Ergo *& reliquum nempe α γ erit incommensurabile ei, quod fit bis ex α β, β γ per 17. Est autem id quod fit bis ex α β, β γ rationale, ergo quadratum lineæ α γ erit irrationale, & linea α γ irrationalis.* Vocetur *autem faciẽs cum superficie rationali totam medialem: ideo sic dicta, quia compositum ex quadratis linearum α β, β γ est mediale, & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex α β, β γ existens & ipsum rationale.* Nam *quadrata linearũ α β, β γ sunt æqualia ei quod fit bis ex α β, β γ, & quadrato lineæ α γ per 7.2. aut ideo sit dicta est, quia quadratum eius iunctum cum superficie rationali facit totã superficiem medialem, ut intelligetur ex theoremate* 109. *In hac autem linea denominanda recessimus à uoce recepta* Campanò, *qui hãc lineã uocauit, iunctam cum rationali componentem totum mediale: idem faciemus in proximo theoremate, quia denominationes illæ* Campani *non satis conuenientes rebus ipsis esse uisæ sunt.*

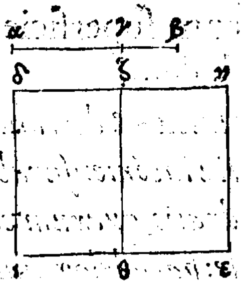
Septuagesimumoctauum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractæ sit mediale, parallelogrammum uerò ex eisdem sit etiam mediale: præterea sint quadrata ipsarum incommẽsurabilia parallelogrammo ex iisdem, reliqua linea est irrationalis: uocetur autem linea faciens cum

cum superficie mediali totam superficiem medialem.



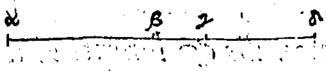
De linea $\alpha\beta$ detrahatur recta $\beta\gamma$ potentia incõmensurabilis toti $\alpha\beta$ ex quadratis, quarum compositũ sit mediale: parallelogrammũ quoque ex eisdem sit mediale. præterea compositũ ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sit incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. dico lineã reliquam $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Vocetur autem faciens cum mediali superficie totam medialẽ. Proponatur linea rationalis $\delta\iota$, secũdum quam quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, æquale applicetur parallelogrammũ $\delta\epsilon$ faciẽs alterum latus $\delta\eta$: ei uerò quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ æquale applicetur $\delta\theta$ faciens alterum latus $\delta\zeta$, residuum ergo $\zeta\epsilon$ erit æquale residuo, nempe quadrato lineæ $\alpha\gamma$. quare linea $\alpha\gamma$ potest parallelogrammum $\zeta\epsilon$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, hoc est $\delta\epsilon$ est mediale, ergo linea $\delta\eta$ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ $\delta\iota$. Rursus cum id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, hoc est $\delta\theta$ sit mediale: ergo & linea $\delta\zeta$ erit rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ $\delta\iota$. Et quoniam quadrata linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$: ergo incommensurabile etiam erit $\delta\epsilon$ ipsi $\delta\theta$. Ergo linea $\delta\eta$ erit incommensurabilis lineæ $\delta\zeta$: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo $\zeta\eta$ erit residuum per 73. Sed linea $\zeta\theta$ est rationalis, quia æqualis rationali $\delta\iota$: parallelogrammum



uero cõtentum ex linea rationali & irrationali, nẽpe ζι, est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demõstrationis 38. ergo linea αγ, quæ illud potest, erit irrationalis: uocetur autẽ faciens cum superficie mediali totam medialem. Ideo sic dicta, quia compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex αβ, βγ, existens & ipsum mediale: huius quoq; denominationis rationem aliam intelliges ex theoremate 110. Hic non est alienum inserere lemma quoddã positum à Campano ante propositi. 74. Illud tantum in eo emẽdandum est, ut excessus linearũ intelligatur secundum Arithmeticam proportionalitatem, nõ autem secundũ geometricã: itaque loco numeri 4. qui adscribitur minime lineæ, reponatur binarius.

Septuagesimumnonum Theorema.

Residuo unica tantũ linea recta coniungitur rationalis, potentia tantũ commensurabilis toti lineę.

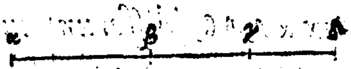


Sit residuum linea αβ, cõiungaturque ipsi linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint rationales potentia tantum commensurabiles. Nego lineæ αβ aliam posse coniungi huiusmodi, ut sit rationalis potentia tantum commẽsurabilis ipsi toti αγ. Si dicas aliam cõiungi posse, huiusmodi sit illa linea βδ: ergo lineæ αδ, δβ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Et quoniam quantò differunt quadrata linearum αδ, δβ ab eo quod fit bis *ex $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, (differunt autem illa ab isto quadrato lineæ $\alpha\beta$ per 7.2.) tantò differunt & quadrata linearũ $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$, ab eo quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ (differunt autẽ illa quoque ab isto similiter eodem quadrato lineæ $\alpha\beta$, per 7,2)* Ergo *& permutate per lemma positũ à* Campano *ante 74. quantò differunt quadrata linearũ $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, à quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, tantò differt id quod fit bis ex $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, ab eo quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$: sed cõpositũ ex quadratis linearum $\alpha\delta$, $\delta\beta$, & compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ cum sint ambo rationalia differũt inter se superficie rationali, per lemma positũ à nobis ante 42.* Ergo *& id quod fit bis ex $\alpha\delta$, $\delta\beta$ differet ab eo quod bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ superficie rationali.* Sed *id quod fit bis ex $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ est mediale, quia est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex $\alpha\delta$, $\delta\beta$, quod ipsum est mediale per 22.* Item *eadem ratione id quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\epsilon$ est mediale: ergo mediale differet à mediali superficie rationali, quod est impossibile per 27.* Ergo *lineæ $\alpha\epsilon$ alia linea coniungi nõ potest, quàm linea $\epsilon\gamma$ potentia tantũ commensurabilis toti: ergo residuo unica tantum linea &c.* Deinceps *per hanc uocem lineæ coniunctæ seu conueniẽter iunctæ intellige eam, quam* Euclides *uocat* προσαρμόζουσαν: *quæ scilicet iuncta cum residuo, restituit totam lineã, unde ea ablata remanent singula residua.*

Octuagesimum Theorema.

Residuo mediali primo unica tantum linea coniungitur medialis, potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens rationale.

Sit residuũ mediale primũ α ϐ,

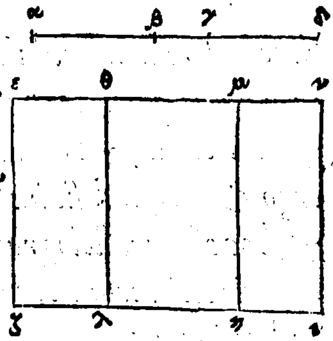


cui coniungatur linea β γ hu iusmodi; at lineæ α γ, β γ sint mediales potentia tantum commensurabiles, quæ scilicet ϐ γ cum tota α γ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex α γ, ϐ γ. Nego *aliam li neã huiusmodi posse cõiungi lineæ α β.* Nam *si fieri posse dicas, sit illa linea β δ. ergo lineæ α δ, δ β sunt mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continen tes id quod fit ex α δ, δ ϐ.* Et *quoniã quanto excedit cõ positum ex quadratis linearũ α δ, δ β id quod fit bis ex α δ, δ ϐ tanto excedit compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β id quod fit bis ex α γ, γ β. (utrobique enim exce dunt quadrato lineæ α β) ergo & permutatę (sicut di ctum est in proximo theoremate) quãto compositum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compositũ ex qua dratis linearum α γ, γ β, tanto excedit id quod fit bis ex α δ, δ β id quod fit bis ex α γ, γ ϐ. sed id quod fit bis ex α δ, δ ϐ est rationale: item id quod fit bis ex α γ, γ β est ratio nale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id quod fit bis ex α γ, γ ϐ superficie rationali per lemma positũ à no bis ante 42.* Ergo *& compositum ex quadratis linearũ α δ, δ β, quod est mediale, sicut dictum est in 75. excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ, quod ipsum est etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ positæ sunt mediales) superficie rationali, quod est impossibile per* 27. Ergo *residuo mediali primo &c.*

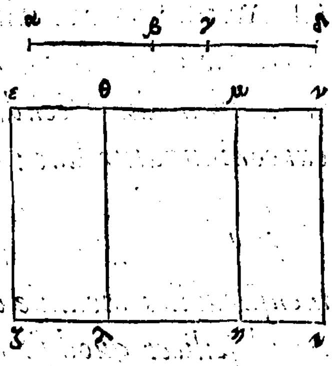
Octuagesimumprimum Theorema.

Residuo mediali secundo unica tantum coniungi-
tur

tur medialis potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens mediale.



Sit residuũ mediale secũdum α β, cui coniungatur linea β γ huiusmodi, ut lineæ α γ, β γ sint mediales potentia tãtum commensurabiles mediale continẽtes, id scilicet quod fit ex α γ, γ β. Nego *aliam lineam huiusmodi posse coniungi lineæ α β: nam si fieri potest, cõiungatur linea β δ, ergo lineæ α δ, δ β sunt mediales potentia tantum cõmensurabiles, mediale continentes id, quod fit ex α δ, β δ.* Proponatur *linea rationalis ε ζ, secundum quam quadratis linearum α γ, γ β æquale applicetur parallelogrammum ε κ, faciẽs alterum latus ε μ: ei uero quod fit bis ex α γ, γ β æquale auferatur parallelogrammum θ κ, faciens alterum latus lineam θ μ. ergo residuũ ε λ est æquale quadrato lineæ α β, per 7.2. quare linea α β potest parallelogrammum ε λ.* R*ursus secundum eandem lineam ε ζ, quadratis linearũ α δ, δ β applicetur æquale parallelogrammũ ε ι, faciens alterũ latus ε ν. Sed quadrata linearum α δ, δ β sunt æqualia ei, quod fit bis ex α δ, δ β & quadrato lineæ α β. ergo parallelogrãmum ε ι est æquale ei, quod fit bis ex α δ, δ β, & quadrato lineæ α β. Est autem ε λ æquale quadrato lineæ α β. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β est æquale parallelogrammo θ ι: & quoniam lineæ α γ, γ β sunt mediales, ergo & quadrata ipsarum sunt medialia, & sunt æqualia parallelogrãmo ε κ. ergo ε κ*



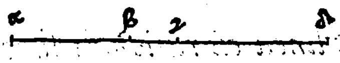
erit etiã mediale per ea quæ dicta sunt in 75. Ergo per 23 linea ι μ erit rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ι ζ. Rursus quoniam parallelogrãmũ ex α γ, γ β est mediale, ergo & id quod fit bis ex α γ, γ ϐ, hoc est parallelogrammum θ κ, erit etiã mediale: ergo linea θ μ est rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ι ζ. Et quoniã lineæ α γ, γ ϐ sunt potentia tantum cõmensurabiles, ergo ipsæ sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea α γ ad lineam γ ϐ, ita quadratum lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β. Ergo quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ ϐ. sed quadrato lineæ α γ sunt commẽsurabilia quadrata linearum α γ, γ β: parallelogrammo uerò ex α γ, γ β est commensurabile id quod fit bis ex α γ, γ ϐ: ergo quadrata linearũ α γ, γ ϐ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α γ, γ β. Est autẽ quadratis linearum α γ, γ β æquale parallelogrãmum ι κ: ei uero quod fit bis ex α γ, γ ϐ est æquale parallelogrammũ θ κ. Ergo parallelogrammum ι κ est incommensurabile parallelogrammo θ κ, ergo & linea ι μ erit longitudine incommensurabilis lineæ θ μ: sunt autẽ ambæ rationales, ergo sunt rationales potẽtia tantum cõmensurabiles. Ergo linea ι θ est residuum, eique coniuncta linea θ μ rationalis, est toti lineæ ι μ rationali commensurabilis potentia tantum. Similiter etiam probabimus cõiungi lineæ ι θ, lineam θ ι existentem & ipsam

rationalem

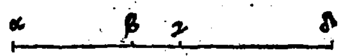
rationalem potentia tantum commensurabilem toti ι γ, repetendo inquã processum demonstrationis ab illis uerbis. Et *quoniam lineæ α γ, γ β sunt mediales: & loco linearum α γ, γ β reponendo lineas α δ, δ ϐ, & cætera similiter. ergo residuo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commensurabilis toti, quod est impoßibile per 79.* Ergo *residuo mediali secundo &c.*

Octuagesimumsecundum Theorema.

Lineæ minori unica tantum recta coniungitur, potentia incommensurabilis toti, faciens cum tota compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uerò parallelogrãmũ, quod ex ipsis fit, mediale.



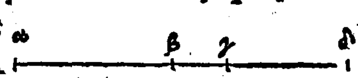
Sit linea minor α ϐ, sitq; illi cõiuncta linea ϐ γ, qualis ponitur in theoremate. ergo lineæ α γ, γ β sunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarũ rationale. Id *uero quod fit ex ipsis mediale, nego lineæ α ϐ aliam lineam posse coniungi, quæ idem efficiat. nam si fieri potest, sit ei coniuncta linea β δ: ergo lineæ α δ, δ ϐ sunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uerò quod fit ex ipsis mediale.* Et *quoniam quãto compositum ex quadratis ipsarum excedit id quod fit bis ex ipsis, tanto excedit compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β, id quod fit bis ex ipsis α γ, γ β.* Et *permutate sicut in 79 theoremate quanto differt compositum ex quadratis linearum α δ, δ β compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ ϐ, id quod fit bis ex α γ, γ ϐ: sed*



compositum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β, superficie rationali; quia utrunque compositum est rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ γ β superficie rationali, cũ tamẽ utrunque sit mediale, quod est impossibile. ergo lineæ minori &c.

Octuagesimumtertium Theorema.

Lineæ facienti cum superficie rationali totã superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incõmensurabilis toti: faciens autem cum tota compositũ ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale.



Sit linea cũ rationali superficie faciens totam superficiem medialem α β, eiq́; coniuncta sit β γ: ergo lineæ α γ, γ β, sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Nego lineæ α β aliam lineam posse coniungi quæ idem efficiat: nam si possibile est, sit illa cõiuncta β δ. ergo lineæ α δ, δ β sunt lineæ potẽtia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum α δ, δ β tanto excedat compositũ ex quadratis linearum α γ, γ β, quanto id quod fit bis ex α δ, δ β excedit, quod fit bis ex α γ, γ β, sicut dictum est in præcedentibus: sed id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ, γ β superficie rationali, cum sit utrũq;

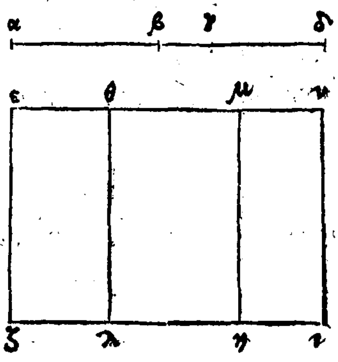
rationale

rationale. ergo & compositum ex quadratis linearum α δ, δ ϵ excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β superficie rationali, cum tamen utrunque sit mediale, quod est impossibile. Non igitur alia linea cõiungi potest lineæ α ϵ, quàm linea β γ, quæ idẽ efficiat. ergo lineæ facienti cum rationali &c.

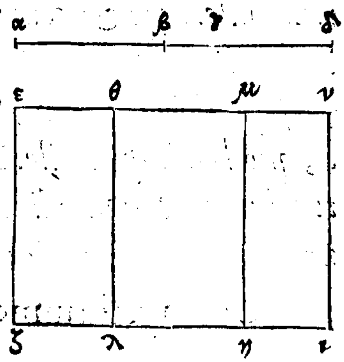
Octuagesimumquartum Theorema.

Lineæ cum mediali superficie facieti totam superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommensurabilis, faciés cum tota compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiam mediale: & pręterea faciens compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei, quod fit ex ipsis.

Sit linea cum mediali superficie faciens totã medialem α β, cui cõiungatur linea ϵ γ potẽtia toti incommẽsurabilis, faciantq; ambæ id quod dicitur in theoremate. Nego lineæ α ϵ aliam lineã cõiungi posse, quæ idem efficiat: nam si possibile est, cõiungatur linea β δ, quæ idẽ efficiat quod linea ϵ γ: proponaturq; linea rationalis ι ζ, secũdum quam quadratis linearum α γ, γ β æquale applicetur parallelogrammum ι κ, faciens alterũ latus ι μ: ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β æquale detrahatur parallelogrammũ θ κ, faciens alterum latus θ μ. residuum ergo nempe quadratum li-



neæ α ϛ est æquale parallelogrammo ε λ. ergo linea α β potest parallelogrammũ ε λ. Rursus secundum eandem lineam ε ζ, quadratis linearum α δ, δ β æquale applicetur parallelogrammum ε ι, faciens alterum latus ε ν: est autem quadratum



lineæ α β æquale parallelogrãmo ε λ: ergo residuũ, nempe id quod fit bis ex α δ, δ β, est æquale parallelogrammo θ ι. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α γ, γ β, hoc est ε κ, est mediale: ergo linea ε μ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Rursus quoniã id quod fit bis ex α γ, γ ϛ, hoc est θ κ, est mediale: ergo & linea θ μ est rationalis longitudine incõmensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϛ, hoc est ε κ, est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrãmo θ κ: ergo & lineæ ε μ, θ μ sunt longitudine inter se incommensurabiles. sunt autẽ ambæ rationales, ergo lineæ ε μ, θ μ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. Ergo linea ε θ est residuum per 73: coniuncta uerò ei erit linea θ μ. Similiter etiam probabimus lineam ε θ esse residuum coniunctã ei uerò esse lineam θ ν, repetendo processum huius demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniã cõpositũ ex quadratis linearũ α γ &c. ut diximus in theoremate 81. Ergo residuo alia atq; alia linea cõiungitur idẽ efficiẽs, quod est impoßibile per 79. Nõ ergo lineæ α ϛ alia linea, quã β γ coniungi potest similis naturæ, & quæ idem efficiat.

Definitiones

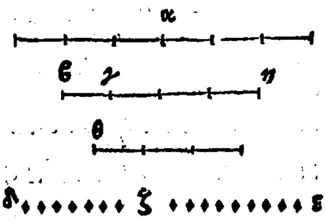
Definitiones tertiæ, siue termini tertij.

Proposita linea rationali & residuo, siquidem tota, nempe composita ex ipso residuo & linea illi cõiuncta, plus potest, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, fueritq; tota longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: residuum ipsum uocetur residuum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, ipsa autem tota plus possit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, residuum uocetur residuum secundũ. Si uerò neutra linearum fuerit longitudine commensurabilis rationali, possit autem ipsa tota plus quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uocetur residuum tertium. Rursus si tota possit plus, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis: & quidem si tota fuerit longitudine commensurabilis ipsi rationali, uocetur residuũ quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, & tota plus possit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum quintum. Si uerò neutra linearum fuerit commensurabilis lõgitudine ipsi rationali, fueritq; tota potentior, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum sextum.

Octuagesimumquintum Theorema.

Reperire primum residuum.

Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commẽsurabilis linea ϐκ: ergo & linea ϐκ erit rationalis. Sint



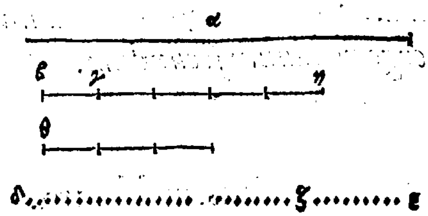
duo numeri quadrati δε, εζ tales, ut excessus maioris δζ, ne sit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis post 29. Neq; *ergo numerus εδ ad numerum δζ habebit proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, per* 24.8. *à destructione consequẽtis.* Sitq; *sicut numerus εδ ad numerum δζ, ita quadratũ lineæ βη, ad quadratũ lineæ ηγ, per lemma positum post* 6. *ergo quadratum lineæ βη est commensurabile quadrato lineæ ηγ: sed quadratũ lineæ βη est rationale, ergo & quadratũ lineæ ηγ erit rationale. ergo linea ηγ erit etiam rationalis.* Et *quoniam numerus εδ ad numerum δζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratũ lineæ βη habebit proportionem ad quadratum lineæ ηγ, quam numerus quadratus ad quadratũ.* ergo *linea βη erit longitudine incommensurabilis lineæ ηγ per* 9. *Sunt autem ambæ rationales, ergo sunt lineæ βη, ηγ rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea βγ est residuum: dico præterea eandem esse residuum primũ.* Quò *enim est maius quadratum lineæ βη quadrato lineæ ηγ (maius autem esse constat, quia quadratum lineæ βη, ad quadratum lineæ ηγ est, sicut numerus εδ, maior, ad numerum δζ ex suppositione:) quò ergo quadratum lineæ βη est maius quadrato lineæ ηγ, sit quadratum lineæ θ.* Et *quoniam est sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ ηγ. per euersam ergo proportionem sicut numerus*

δε

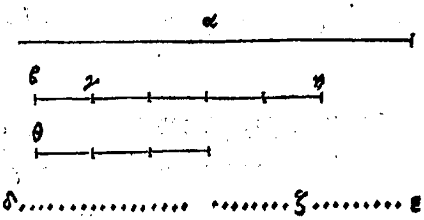
δι ad numerum ιζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: sed numerus δι habet proportionẽ ad numerum ζι, quam numerus quadratus ad quadratũ, quia est uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ κβ habebit proportionem ad quadratum lineæ θ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea κβ est longitudine commensurabilis lineæ θ. Poteſt autẽ *linea κβ plus, quàm linea κγ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem tota βκ longitudine commensurabilis rationali α. ergo linea βγ est residuũ primum.* Repertum *est igitur residuum primum, quod faciendum erat.*

Octuagesimumsextum Theorema.

Reperire secundum residuum.



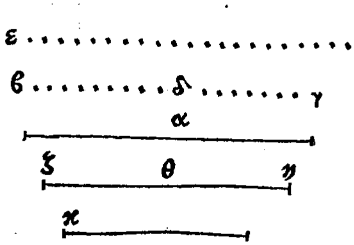
Proponatur linea rationalis α, cui sit cõmẽsurabilis longitudine linea κγ: sintq; numeri quadrati duo δι, ιζ, quorum excessus δζ ne sit quadratus: sit etiã sicut numerus δζ ad numerum δι, ita quadratum lineæ κγ ad quadratum lineæ κβ, ergo ambo quadrata sunt cõmensurabilia: & quia quadratum lineæ κγ est rationale, etiam quadratum lineæ βκ erit rationale. ergo & linea βκ erit rationalis. Et *quia quadrata linearũ βκ, κγ non habent proportionem inter se, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo lineæ βκ, κγ erunt longitudine incõmensurabiles, & sunt ambæ rationales. ergo lineæ βκ, κγ erũt*



rationales potentia tantum cõmẽsurabiles. ergo linea βγ erit residuũ: dico præterea eandẽ esse residuum secundum. quò enim est maius quadratum lineæ βη quadrato lineæ ηγ, sit quadratum lineæ θ. Cum igitur sit sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ ηβ ad quadratum lineæ ηγ: per euersam ergo proportionẽ sicut δε ad numerum εζ, ita quadratũ lineæ βη ad quadratum lineæ θ. Est autem uterque numerus δε, εζ quadratus. ergo linea ηβ erit longitudine commensurabilis lineæ θ: potestq; linea βη plus, quàm linea ηγ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. & est linea coniuncta ηγ longitudine commensurabilis lineæ rationali α. Ergo linea βγ erit secũdum residuum. Repertum est ergo residuum secundum.

Octuagesimumseptimum Theorema.

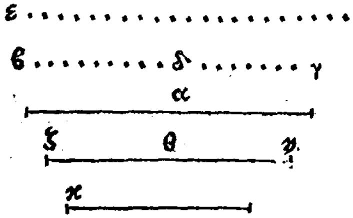
Reperire tertium residuum.



Proponatur linea rationalis α, & proponãtur numeri tres ε, βγ, γδ proportionẽ non habẽtes inter se, quam numerus quadratus ad quadratum: & numerus βγ ad numerum βδ habeat proportionem, quam numerus quadratus ad quadratũ: sitq; numerus βγ maior numero γδ fiatq; sicut numerus ε ad βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζη.

sicut

ſicut autem numerus ε γ *ad numerum* γ δ, *ita quadratum lineæ* ζ η, *ad quadratum lineæ* θ η. *ergo quadratum lineæ* α *eſt commẽſurabile quadrato lineæ* ζ η. Sed *quadratum lineæ* α *eſt rationale, ergo & quadratum lineæ* ζ η *erit rationale. ergo linea* ζ η *erit rationalis: et quoniã numerus* ε *ad numerum* ε γ *non habet proportionẽ, quã numerus quadratus ad quadratũ, neq; ergo quadratum lineæ* α, *ad quadratũ lineæ* ζ η *habebit proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea* α *erit longitudine incommenſurabilis lineæ* ζ η. R*urſus quoniam eſt ſicut numerus* β γ *ad* γ δ, *ita quadratũ lineæ* ζ η *ad quadratum lineæ* θ η, *ergo quadratum lineæ* ζ η *eſt commẽſurabile quadrato lineæ* θ η: *ſed quadratũ lineæ* ζ η *eſt rationale, ergo & quadratum lineæ* θ η *erit rationale. ergo linea* θ η *erit rationalis.* E*t quoniam numerus* β γ *ad numerum* γ δ *non habet proportionẽ, quã numerus quadratus ad quadratũ, neque ergo quadratum lineæ* ζ η *habebit proportionem ad quadratum lineæ* θ η, *quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea* ζ η *erit longitudine incommẽſurabilis lineæ* θ η: *ſunt autem ambæ rationales, ergo lineæ* ζ η, θ η *ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea* ζ θ *erit reſiduum per* 73. *dico præterea eſſe reſiduũ tertium.* C*um enim ſit ſicut numerus* ε *ad numerũ* β γ, *ita quadratum lineæ* α *ad quadratum lineæ* ζ η: *ſicut autẽ numerus* ε γ *ad numerum* γ δ, *ita quadratum lineæ* ζ η, *ad quadratum lineæ* θ η. *ergo per æquam proportionem ſicut numerus* ε *ad numerum* γ δ, *ita quadratũ lineæ* α *ad quadratum lineæ* θ η: *ſed numerus* ε *ad* γ δ *non habet*



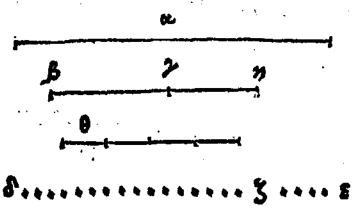
proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum: neq; ergo quadratum lineæ α habebit proportionẽ ad quadratũ lineæ θη, quã quadratus numerus ad quadratum, ergo linea α erit longitudine incommẽsurabilis lineæ θη. Neutra ergo linearum ζη, θη erit longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quo uero maius est quadratũ lineæ ζη quadrato lineæ θη, maius autem esse constat, quia per suppositionem numerus βγ est maior numero γδ, sit quadratum lineæ κ. Cum igitur sit sicut numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ θη: per euersam ergo proportionẽ sicut numerus βγ ad βδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ κ: sed βγ ad βδ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo quadratum lineæ ζη habebit proportionem ad quadratũ lineæ κ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζη erit longitudine commensurabilis lineæ κ. Ergo linea ζη plus potest, quam linea θη quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, & neutra linearum ζη, θη est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, cum tamen utraque linearum ζη, θη sit rationalis: ergo linea ζθ erit residuum tertium. Repertum est ergo tertium residuum.

Octuagesimumoctauum Theorema.

Reperire quartum residuum.

Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commẽ-

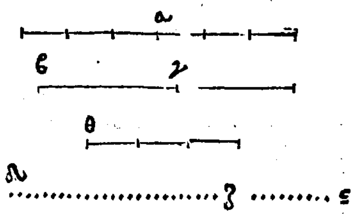
surabilis



ſurabilis linea βη: ergo linea βη erit rationalis. Proponã*tur numeri duo δζ, ζε huiuſmodi, ut totus δε ad neutrũ δζ, ζε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq́; ſicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ ηγ: ergo quadratum lineæ βη erit cõmenſurabile quadrato lineæ ηγ. ergo & quadratum lineæ ηγ erit rationale, & linea ηγ rationalis. Et quoniã numerus δε ad numerum εζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo linea βη erit longitudine incõmenſurabilis lineæ ηγ: ſunt autem ambæ rationales. ergo linea βγ eſt reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum: quò enim quadratum lineæ βη eſt maius quadrato lineæ ηγ, ſit quadratum lineæ θ. Cum igitur ſit ſicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratũ lineæ ηγ: ergo per euerſam proportionem ſicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ θ: ſed numeri δε, δζ non habent proportionem inter ſe, quam quadratus ad quadratum: ergo linea βη erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ. Ergo linea βη plus poteſt, quàm linea ηγ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: eſtq́ue tota βη longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit reſiduum quartũ. Repertum eſt igitur reſiduum quartum.*

Octuageſimumnonum Theorema.

Reperire quintum reſiduum.

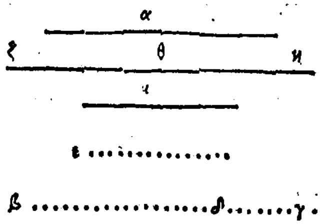


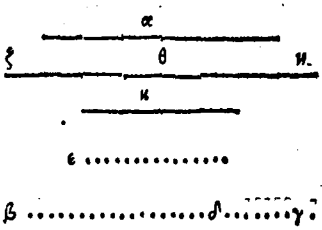
Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commensurabilis linea γ κ, erit ergo linea γ κ rationalis. Proponantur numeri duo δ ζ, ζ ε tales, ut δ ε ad neutrum δ ζ, ζ ε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: sitq; sicut numerus ζ ε ad numerum δ ε, ita quadratum lineæ γ κ ad quadratũ lineæ β κ, ergo quadratum lineæ γ κ erit commensurabile quadrato lineæ β κ. ergo quadratum lineæ β κ erit rationale, & linea β κ rationalis: sed numeri δ ε, ε ζ nõ habent proportionem, quam quadratus ad quadratũ, ergo lineæ β κ, κ γ. sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea β γ erit residuũ, dico præterea esse residuum quintum: quò enim maius est quadratum lineæ β κ quadrato lineæ κ γ, sit quadratũ lineæ θ. Cũ igitur sit sicut numerus δ ε ad numerum ε ζ, ita quadratũ lineæ β κ ad quadratũ lineæ κ γ, ergo per euersam proportionem, sicut numerus δ ε ad numerum δ ζ, ita quadratum lineæ β κ ad quadratum lineæ θ: sed numeri δ ε, ε ζ non habet proportionem inter se, quã numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea β κ erit longitudine incommensurabilis lineæ θ. ergo linea β κ plus potest linea γ κ, quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis: estque coniuncta linea γ κ longitudine commensurabilis lineæ rationali α. ergo linea β γ erit residuum quintum. Repertum est ergo residuum quintum.

Nonagesimum Theorema.

Reperire sextum residuum.

Sit linea rationalis α, & numeri tres ε, βγ, γδ proportionem non habentes inter se, quã numerus quadratus ad quadratum numerum: numerus autem βγ ne habeat proportionem ad numerum βδ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum: sitque numerus βγ maior numero γδ, fiatq; sicut numerus ε ad numerum βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζη: sicut autem numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Cum igitur sit sicut ε ad βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζη, ergo quadratum lineæ α est commẽsurabile quadrato lineæ ζη. ergo quadratũ lineæ ζη erit rationale, & linea ζη rationalis. Et quoniam numerus ε ad βγ non habet proportionem, quã quadratus numerus ad quadratũ, ergo linea α erit longitudine incõmensurabilis lineæ ζη. Rursus quoniam est sicut numerus βγ ad numerũ γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ, ergo quadratum lineæ ζη erit commensurabile quadrato lineæ ηθ: sed quadratum lineæ ζη est rationale, ergo & quadratũ lineæ ηθ erit rationale. ergo linea ηθ erit rationalis. Et quoniam numerus βγ ad numerum γδ nõ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea ζη erit longitudine incommensurabilis lineæ ηθ: sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζη, ηθ sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea ζθ erit residuum: dico præterea esse residuum sextum. Cũ enim sit sicut numerus ε ad βγ, ita quadra-





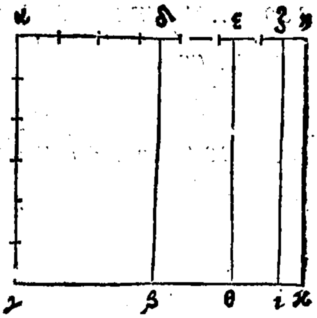
tum lineæ α, ad quadratum lineæ ζη: sicut autem numerus βγ ad numerũ γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratũ lineæ ηθ. Per æquam igitur proportionẽ sicut numerus ε ad numerum γδ, ita quadratum lineæ α, ad quadratum lineæ ηθ: sed numerus ε nõ habet proportionem ad numerũ γδ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommensurabilis lineæ ηθ, & neutra linearum ζη, ηθ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quò igitur maius est quadratum lineæ ζη, quadrato lineæ ηθ, sit quadratum lineæ κ. Cum igitur sit sicut numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. ergo per euersam proportionem sicut numerus βγ ad numerum βδ, ita quadratũ lineæ ζη ad quadratum lineæ κ: sed numerus βγ ad numerum βδ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζη erit longitudine incommensurabilis lineæ κ. Ergo linea ζη plus potest quã linea ηθ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & neutra linearum ζη, ηθ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, ergo linea ζθ est residuum sextum. Repertum est ergo residuum sextum. Est autem & facilior quædam ratio reperiendi cuiusque residui, ex illis sex antè dictis, hoc modo. Propositũ sit reperire residuũ primum. Proponatur binomiũ primum linea αγ, cuius maius nomẽ sit αβ: & lineæ βγ æqualis sit linea βδ. ergo lineæ αβ, βγ, hoc est lineæ αβ, βδ. sunt rationales po-

tentia

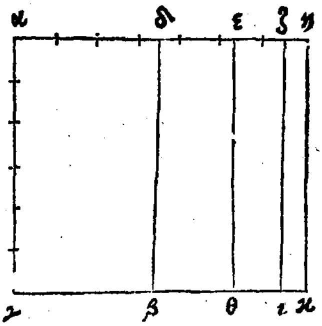
tentia tantum commẽsurabiles. & linea α ϐ plus potest, quàm linea β γ, hoc est quàm linea β δ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & linea α ϐ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, quia positum est lineam α γ esse binomiũ primum. ergo linea α δ est residuum primum. Simili ratione secundum, tertium, quartum, quintum & sextum residuum reperire licet, si proposuerimus singula binomia eiusdẽ ordinis.

Nonagesimumprimum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo primo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

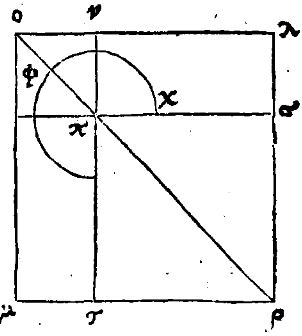


Cõtineatur *superficies rectãgula α β, ex linea rationali α γ, & residuo primo α δ. dico lineã, quæ posit superficiem illam, esse residuum. Cum enim linea α δ sit residuũ primum, sit illi coniuncta linea δ κ, (cõiunctam intellige, qualem dixi in fine theorematis 79.) ergo lineæ α κ, κ δ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & tota α κ est longitudine commensurabilis rationali lineæ α γ, & linea α κ plus potest, quàm linea κ δ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur linea κ δ in partes duas æquales in puncto ε, & quadrato lineæ ε κ, æquale secundum lineam α κ applicetur parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata: sitq; illud parallelogrammum ex α ζ, ζ κ. ergo linea α ζ est*

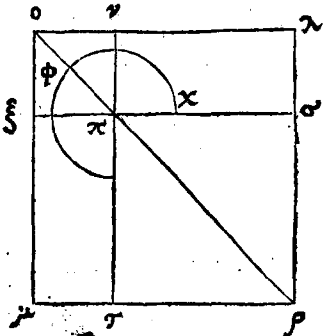


longitudine cõmensurabilis lineæ ζη per 18. & per puncta ε, ζ, η ipsi lineæ αγ parallelæ ducantur εθ, ζι, ηκ. Et quoniam linea αζ est longitudine cõmensurabilis lineæ ζη, ergo & tota linea αη utriq; ex αζ, ζη est longitudine commensurabilis per 16. sed linea αη est longitudine commẽsurabilis lineæ αγ. ergo utraque linearum αζ, ζη est longitudine commẽsurabilis lineæ αγ: sed linea αγ est rationalis, ergo utraque αζ, ζη est etiam rationalis: quare & utrunque parallelogrammum αι, ζκ est rationale per 20. Et quoniam linea δε est longitudine commensurabilis lineæ εη, ergo & linea δη est longitudine commẽsurabilis utrique δε, εη: sed linea δη est rationalis, ergo utraque δε, εη est rationalis: sed eadem linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αγ per definitionem residui primi uel per 13 aut 14 huius. Quia linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αη, quæ linea αη est longitudine commensurabilis eidem lineæ αγ. ergo utraque linea δε, εη est rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ. Ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ est mediale per 22. Sit parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: parallelogrammo uero ζκ sit æquale quadratum νξ, detractum ex quadrato λμ, habens cum illo communem angulum λομ. Quod ut fiat reperiatur media proportionalis inter lineas ζι, ζκ: nam quadratum mediæ proportionalis erit æquale parallelogrammo ex ζι, ζκ: porro de

linea



linea λο sumatur linea æqualis lineæ mediæ proportionali modo repertæ, & describatur ξ eius quadratũ. Sunt ergo ambo quadrata λμ, νξ circa eandem diametrũ per 26.6: sit eorũ diameter linea οϱ, & describatur figura qualis hic uidetur. Cum igitur sit parallelogrammũ ex αζ, ζη æquale quadrato lineæ ιη. est igitur sicut linea αζ ad lineam ιη, ita linea ιη ad lineam ζη per 17.6: sed sicut linea αζ ad lineam ιη, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum ικ: sicut autem linea ιη ad lineam ζη, ita parallelogrammum ικ ad parallelogrammum ζκ Ergo parallelogrammorum αι, ζκ parallelogrammum ικ est mediũ proportionale: sed & quadratorũ λμ, νξ parallelogrammum μν, est medium proportionale per lemma positum post 53. Est autem parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: parallelogrãmo uero ζκ est æquale quadratum νξ. ergo parallelogrãmum μν est æquale parallelogrammo ικ per lemma positum à nobis ante 54. Sed parallelogrammum ικ est æquale parallelogrammo δθ per 1.6: parallelogrammũ uero μν est æquale parallelogrãmo λξ per 43.1. Ergo parallelogrammum δκ est æquale gnomoni υφχ, qui gnomo constat ex illis parallelogrãmis. per quæ uides in figura maiorem semicirculo portionem pertransire, & præterea quadrato νξ. Est autem & parallelogrammũ ακ æquale quadratis λμ, νξ: & modo conclusum est parallelogrammũ δκ esse æquale gnomoni υφχ, & præ-

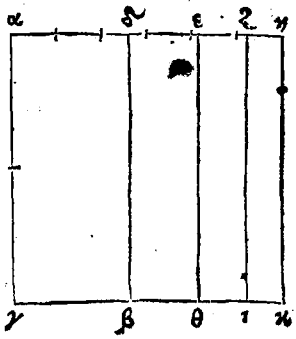


terea quadrato, ν ξ. Reliquum ergo, nempe parallelogrammum α β, erit æquale quadrato σ τ, quod est quadratum lineæ λ ν. ergo quadratũ lineæ λ ν est æquale parallelogrammo α β. ergo linea λ ν potest illud parallelogrammum α β: dico præterea lineam λ ν esse residuum. Cum enim utrunque parallelogrammũ α ι, ζ κ sit rationale, ut supra dictum, ergo & illis æqualia quadrata λ μ, ν ξ, hoc est, quadrata linearum λ ο, ο ν erunt rationalia, & lineæ ipsæ λ ο, ο ν, rationales. Rursus quoniam parallelogrammum δ θ, hoc est, λ ξ est mediale, ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ. ergo per 1.6 & 10. huius, linea λ ο erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ο ν: sunt autem ambæ rationales, sunt ergo rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea λ ν est residuum: potest autẽ parallelogrammum α β. ergo si superficies cõtineatur &c. linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

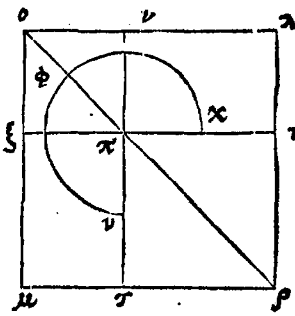
Nonagesimumsecundum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo secundo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale primum.

Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, & residuo secundo α δ. dico lineam quæ potest superficiem α β esse eam, quæ dicitur residuũ mediale primum. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ η. ergo lineæ α η, η δ sunt rationales



tionales potentia tantum cõmensurabiles: & linea coniuncta δ η, est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali α γ: linea uerò α η plus potest quã linea δ η quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur linea δ η bifariã & æqualiter in pũcto ε, & secũdum lineã α η applicetur quartæ parti quadrati lineæ δ η, hoc est, quadrato lineæ ε η æquale parallelogrammũ ex α ζ, ζ η, deficiens specie quadrata. ergo per 18 linea α ζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ζ η: & per puncta ε, ζ, η ipsi lineæ α γ ducantur parallelæ ε θ, ζ ι, η κ: & quoniam linea α ζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ζ η, ergo tota linea α η est utrique α ζ, ζ η longitudine cõmensurabilis. Est autem linea α η rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ α γ. ergo & utraque α ζ, ζ η est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ α γ. ergo utrunque parallelogrammum α ι, ζ κ est mediale per 22. Rursus cum linea δ ε sit commensurabilis longitudine lineæ ε η, ergo & δ η est utrique δ ε, ε η longitudine commensurabilis: sed linea δ η est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali α γ, ergo utraque δ ε, ε η est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ α γ. ergo utrunque parallelogrammum δ θ, ε κ est rationale per 20. Describatur parallelogrammo α ι æquale quadratũ λ μ: parallelogrammo uero ζ κ, æquale sit quadratũ ν ξ, sicut in præcedenti theoremate, quadrata λ μ, ν ξ erunt circa eandem diametrum: sit diameter ο ρ, & describa-



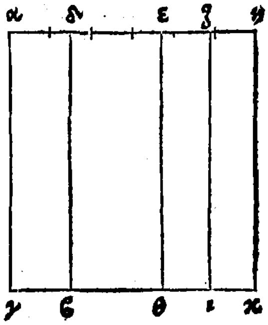
tur figura sicut modo dictū est. Quoniam ergo parallelogramma α ι, ζ κ sunt medialia & inter se commensurabilia, & illis æqualia quadrata linearū λ ο, ο υ sunt medialia, ergo lineæ λ ο, ο υ sunt mediales potentia commensurabiles. Constat autem potentia commensurabiles esse lineas λ ο, ο υ, quia earum quadrata sunt commē surabilia: commēsurabilia sunt porro quadrata illa, scilicet linearum λ ο, ο υ, quia sunt æqualia parallelogrammis, α ι, ζ κ, quæ sunt cōmensurabilia: cōmēsurabilia porro esse illa parallelogrāma α ι, ζ κ constat eo, quod modo probatum est, lineas α ζ, ζ η esse longitudine commensurabiles. Ergo per 1.6 & 10 *huius parallelogrāma α ι, ζ κ sunt commensurabilia. ergo modo probatum est uia resolutionis lineas λ ο, ο υ, esse potentia cōmensurabiles.* Et *quoniam parallelogrammum ex α ζ, ζ η est æquale quadrato lineæ ε η. est ergo sicut linea α ζ ad lineā ε η, ita linea ε η ad lineam ζ η: sed sicut linea α ζ ad lineam ε η, ita parallelogrammū α ι ad parallelogrammū ε κ: sicut autem linea ε η ad lineam ζ η, ita parallelogrammū ε κ ad parallelogrammum ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale est parallelogrammū ε κ.* E*st etiam quadratorum λ μ, ν ξ medium proportionale parallelogrammum μ ν: & est æquale parallelogrammū α ι quadrato λ μ: parallelogrammum uero ζ κ est æquale quadrato ν ξ.* Ergo *μ ν erit æquale parallelogrāmo ε κ: sed ε κ est æquale parallelogrammo δ θ: parallelogrammum*

mum uero λ ξ est æquale parallelogrammo μ ν. Totũ ergo parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. reliquum ergo, nempe parallelogrammũ α β, est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν. Ergo linea λ ν potest superficiem α β: dico præterea lineã λ ν esse residuum mediale primum. Cum enim parallelogrammum ι κ sit rationale, sitq; æquale parallelogrãmo μ ν, hoc est λ ξ: ergo λ ξ, hoc est parallelogrammum ex λ ο, ο ν erit rationale: sed quadratum ν ξ est mediale, quia ei æquale parallelogrammum ζ κ modo probatũ est esse mediale. Ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ: sed sicut parallelogrammũ λ ξ ad quadratum ν ξ, ita linea λ ο, ad lineam ο ν, per 16. ergo per 10 huius, lineæ λ ο, ο ν sunt longitudine incommensurabiles: sed modo probatum est eas esse mediales potentia commensurabiles. ergo lineæ λ ο, ο ν sunt mediales potentia tantum commensurabiles, continentes rationale. Ergo linea λ ν est residuum mediale primum, & potest superficiem α β contentam ex linea rationali & residuo secundo.

Nonagesimumtertium Theorema.

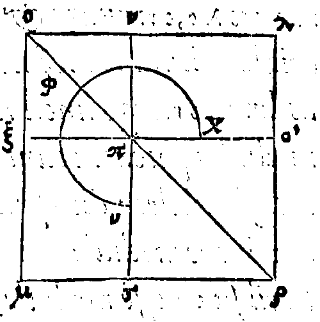
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo tertio, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale secundum.

Superficies enim α β cõtineatur ex linea rationali α γ, & residuo tertio α δ. dico lineam quæ possit superficiem α β esse residuum mediale secũdum. Sit linea coniuncta δ η, ergo lineæ α η, η δ sunt rationales potentia tantum com-

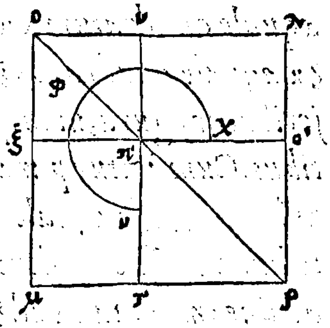


mẽsurabiles, & neutra linearum αη, ηδ est longitudine commensurabilis lineæ rationali αγ. Tota uero αβ plus potest, quàm coniuncta ηδ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. reliqua fiãt, ut in præcedẽtibus. ergo lineæ αζ, ζη sunt longitudine commẽsurabiles & parallelogrammũ αι, commensurabile parallelogrammo ζκ. Et quoniam αζ, ζη sunt longitudine cõmensurabiles, ergo tota linea αη est utrique αζ, ζη longitudine commẽsurabilis: sed linea αη est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ, ergo utraque αζ, ζη. est rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ. ergo utrũque parallelogrammum αι, ζκ est mediale per 22. Rursus cum linea δε sit longitudine commensurabilis lineæ εη, ergo & tota δη est longitudine cõmensurabilis utrique δε, εη: sed linea δη est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ αγ, ergo & utraque linearum δε, εη est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ αγ. ergo & utrũque parallelogrammum δθ, εκ est mediale: & quoniam lineæ αη, δη sunt potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommensurabiles: sed linea αη est longitudine commensurabilis lineæ αζ: linea autem δη est longitudine commensurabilis lineæ ηε, ergo linea αζ est longitudine incommensurabilis lineæ εη. Sicut autem linea αζ ad lineam εη, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum εκ. ergo αι est incommensurabile ipsi εκ. Construatur parallelogrammo αι

æquale



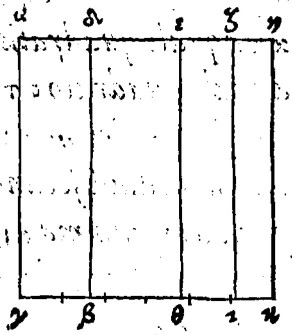
æquale quadratum λ μ: ipsi uero ζ κ æquale quadratũ ν ξ, & describatur figura, ut in præcedentibus. Cum igitur parallelogrãmũ ex α ζ, ζ κ sit æquale quadrato lineæ ι κ. est ergo sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita ι κ ad ζ κ: sed sicut linea α ζ ad lineam κ ι, ita parallelogrammũ α ι ad parallelogrammum ι κ: sicut autem linea ι κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammũ ζ κ. sicut ergo parallelogrammum α ι ad parallelogrammũ ι κ, ita ι κ ad ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale est ι κ. Sed quadratorũ λ μ, ν ξ medium proportionale est parallelogrammum μ ν, ergo ι κ est æquale ipsi μ ν. ergo totum parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. Est autem ipsum α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ; reliquum ergo nempe α ϛ est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν, ergo λ ν potest superficiem α ϛ: dico præterea lineam λ ν esse residuum mediale secundum. Cum enim, sicut probatũ est, parallelogramma α ι, ζ κ sint medialia, ergo eis æqualia quadrata linearũ λ ο, ο ν sunt etiã medialia. ergo utraq; linea λ ο, ο ν erit medialis: & quoniam parallelogrammum α ι est commensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λ ο, ο ν erunt commensurabilia. Rursus cum sit probatum parallelogrammum α ι esse incommẽsurabile parallelogrammo ι κ, ergo incommensurabile erit quadratum λ μ, parallelogrammo μ ν, hoc est, quadratum lineæ λ ο, parallelogrã-



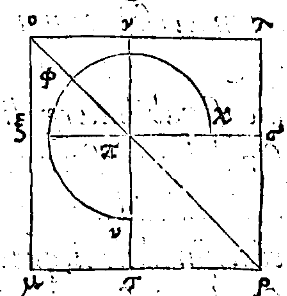
mo ex λο,ον: quare & linea λο erit longitudine incõmensurabilis lineæ ον. ergo lineæ λο,ον sunt mediales potentia tantum commensurabiles: dico præterea eas continere mediale. Cũ enim probatũ sit ικ esse mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ex λο,ον erit mediale. ergo linea λν est residuum mediale secundum, & potest superficiem αβ. Ergo linea potens superficiem αϐ est residuum mediale secundum.

Nonagesimumquartum Theorema.

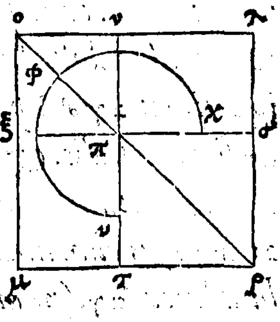
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo quarto, linea quę illam superficiẽ potest, est linea minor.



Superficies αβ contineatur ex linea rationali αγ, et residuo quarto αδ. dico lineam quæ illam superficiem αϐ potest, esse eã, quæ dicitur linea minor: sit enim linea cõiuncta δη, ergo lineæ αη, δη sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: & linea αη plus potest, quàm linea δη quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, & linea αη est longitudine commensurabilis lineæ αγ. Diuidatur linea δη bifariam & æqualiter in puncto ε: & quadrato lineæ εη æquale secũdum lineam αη applicetur parallelogrãmum, deficiẽs figura quadrata, sitq; illud parallelogrãmum *mũ ex αζ, ζκ. ergo per 19. linea αζ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζκ. Ducantur per puncta ε, ζ, κ ipsis lineis αγ, δϐ, parallelæ εθ, ζι, κλ. Cum igitur linea ακ sit rationalis, & longitudine commensurabilis lineæ αγ, ergo totum parallelogrammum αλ est rationale per 20. Rursus cum linea δκ sit longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ, (nam si esset linea δκ longitudine commensurabilis lineæ αγ, cum linea ακ sit eidem αγ longitudine commẽsurabilis, essent etiam lineæ ακ, δκ longitudine commensurabiles, cum tamen positæ sint potẽtia tantum commensurabiles) sunt autem ambæ αγ, δκ rationales. ergo parallelogrammũ δλ est mediale. Rursus cum linea αζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζκ, ergo incommensurabile est αι ipsi parallelogrammo ζλ. Cõstruatur parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: ipsi uero ζλ æquale quadratum νξ, ambo quadrata habentia communem angulũ λον. ergo quadrata λμ, νξ sunt circa eandem diametrũ: sit diameter ορ, & describatur figura.*



Cum igitur parallelogrammũ ex αζ, ζκ sit æquale quadrato lineæ εκ, erit proportionaliter, sicut linea αζ ad lineam εκ, ita linea εκ ad lineã ζκ: sed sicut linea αζ ad lineam εκ, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum εκ per 1.6. Sicut autem linea εκ ad lineã ζκ, ita parallelogrammum εκ ad parallelogrammum ζκ. ergo parallelogrammorũ αι, ζκ medium proportionale est εκ. ergo, sicut dictum est in præcedentibus, parallelo-



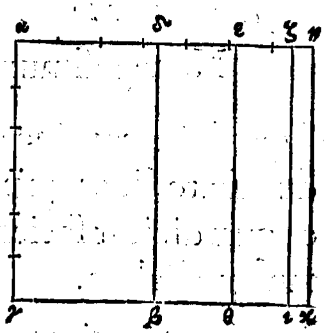
grammum μν est æquale parallelogrammo ικ: sed λθ est æquale ipsi ικ, ipsum autem μν ipsi λξ. ergo parallelogrammum λκ est æquale gnomoni υφχ, & quadrato νξ. ergo reliquum αβ est æquale reliquo quadrato ον, hoc est, quadrato lineæ λν: dico præterea lineā λν esse irrationalem eam, quæ linea minor uocatur. Cum enim parallelogrammum ακ sit rationale, & sit æquale quadratis linearum λο, ον, ergo compositum ex quadratis linearũ λο, ον erit rationale. Rursus cum λκ sit mediale, sitq; æquale ei, quod fit bis ex λο, ον, ergo id quod fit bis ex λο, ον est etiam mediale: & quoniam parallelogrammum αι est incommensurabile parallelogrammo ζκ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λο, ον sunt incõmensurabilia. ergo lineæ λο, ον sunt potentia incommẽsurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit bis ex ipsis mediale, quod est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex ipsis: ergo & quod fit semel ex ipsis, erit etiã mediale. Ergo linea λν est irrationalis, quæ uocatur linea minor & potest superficiẽ αβ.

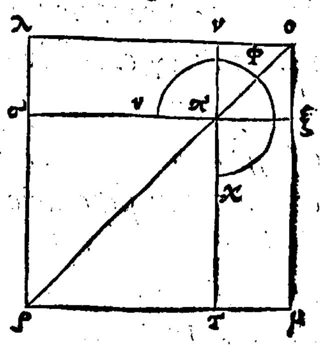
Nonagesimumquintum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo quinto, linea quæ illam superficiẽ potest, est ea, quę dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.

Superficies enim αβ contineatur ex linea rationali αγ, & residuo

residuo quinto α δ. *dico lineam, quæ illam superficiẽ potest, eam esse quæ dicitur faciens cum rationali superficie totam medialem: sit enim lineæ* α δ *iuncta linea* δ κ, *quæ erit longitudine cõmensurabilis lineæ rationali* α γ, *cætera erunt ut in præcedenti. Et quoniam linea* α κ *est longitudine incommensurabilis lineæ* α γ, *& sunt ambæ rationales, ergo parallelogrãmũ* α κ *erit mediale. Rursus quoniã linea* δ κ *est rationalis, & lõgitudine cõmẽsurabilis lineæ* α γ, *ergo* δ κ *erit rationale. Cõstruatur quadratum* λ μ *æquale parallelogrammo* α ι, *quadratum uero* ν ξ *æquale ipsi* ζ κ, *ut in proximo, similiter demõstrabimus lineam* λ ν *posse superficiem* α β: *dico præterea eam esse lineam, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialẽ:*

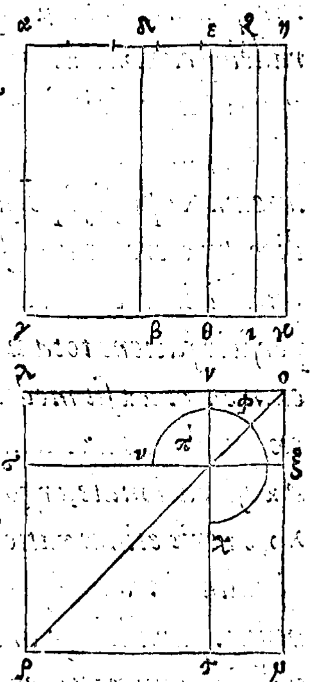




cum enim α κ *sit mediale, etiam illis æquale compositum ex quadratis linearum* λ ο, ο ν, *erit mediale. Rursus quia* δ κ *est rationale, ergo & illi æquale id, quod fit bis ex* λ ο, ο ν *erit etiam rationale, & quoniam linea* α ζ *est longitudine incommẽsurabilis lineæ* ζ κ, *ergo per* 1. 6 *&* 10 *huius. parallelogrammum* α ι *erit incõmensurabile parallelogrammo* ζ κ, *ergo & quadratũ lineæ* λ ο *erit incommensurabile quadrato lineæ* ο ν: *ergo lineæ* λ ο, ο ν *sunt potentia incommensurabiles facientes compositum* *ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit bis ex ipsis rationale. ergo reliqua linea λ ν est irrationalis: nẽpe ea quæ dicitur cum rationali superficie faciens totã medialem, & potest superficiem α β. Ergo linea potens superficiem α β est linea, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.*

Nonagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo sexto, linea quæ illam superficiem potest, est ea quæ dicitur faciens cum mediali superficie totam medialem.

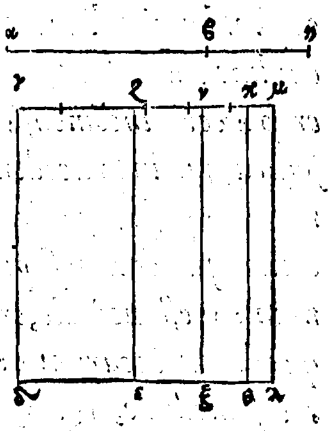


Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, et residuo sexto α δ. dico lineam quæ potest superficiẽ α β esse eam, quæ dicitur faciens cum mediali superficie totã medialem. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ η, & cætera fiãt, ut in præcedẽtibus: cum linea α ζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζ η, ergo & parallelogrammum α ι erit incommensurabile parallelogrammo ζ κ. Et quoniã lineæ α η, α γ, sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, ergo parallelogrammum α κ erit mediale: simili ratione δ κ erit mediale. Cum igitur lineæ α η, η δ sint potentia tantum commensurabiles, ergo *go sunt longitudine inter se incommensurabiles: sed sicut linea ακ ad κδ, ita parallelogrammum ακ ad δκ. ergo ακ erit incõmensurabile ipsi δκ.* Construatur eadẽ figura, quæ in præcedentibus, similiter probabimus lineam λν posse superficiẽ αϲ: dico præterea eam esse, quæ dicitur faciẽs cum superficie mediali totam medialem: nam ακ est mediale, ergo & illi æquale compositũ ex quadratis linearum λο, ον erit mediale. Rursus quoniã δκ est mediale, ergo & ei æquale, id quod fit bis ex λο, ον erit mediale. Et quoniam ακ est incommensurabile ipsi δκ, ergo & quadrata linearum λο, ον erunt incõmensurabilia ei, quod fit bis ex λο, ον: & cum parallelogrammum αι sit incommensurabile parallelogrammo ζκ, ergo etiam quadratum lineæ λο erit incommensurabile quadrato lineæ ον. ergo lineæ λο, ον erunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositũ ex quadratis linearum λο, ον mediale, & quod fit bis ex ipsis mediale: præterea compositum ex quadratis ipsarũ incommensurabile ei, quod fit bis ex ipsis. ergo linea λν est irrationalis, quæ dicitur cum mediali superficie faciens totam medialẽ, & potest superficiem αϲ. Ergo linea potens superficiem αβ est ea, quæ dicitur faciens cum superficie mediali totam medialem.

Nonagesimumseptimum Theorema.

Quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus residuum primũ.

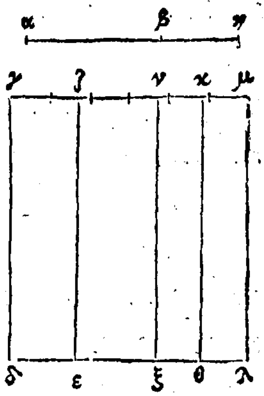
Sit residuum αϲ, rationalis uero linea γδ: & quadrato lineæ αβ æquale secundum lineam γδ applicetur paral-



lelogrammum γι faciēs alterū latus γζ, dico lineam γζ esse residuum primum. Sit enim lineæ αβ linea cōuenienter iuncta βη, quæ & eadem dicitur linea cō iuncta, ut in fine theorematis 79. ergo lineæ αη, ηβ, sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & quadrato lineæ αη secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γθ, quadrato uero lineæ βη æquale parallelogrāmum κλ: totum ergo γλ est æquale quadratis linearum αη, ηβ: sed parallelogrammum γι est æquale quadrato lineæ αβ, reliquum ergo ζλ est æquale ei, quod fit bis ex αη, ηβ: quia quadrata linearum αη, ηβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex αη, ηβ, & quadrato lineæ αβ per 72. Secetur linea ζμ bifariam & æqualiter in puncto ν, & à pūcto ν ducatur lineæ γδ parallela linea νξ, ergo utrūque ex parallelogrāmis ζξ, νλ est æquale ei. quod fit semel ex αη, ηβ. Et quoniam quadrata linearum αη, ηβ sunt rationalia, quibus quadratis æquale est parallelogrammū γλ, ergo γλ est rationale. ergo linea γμ est rationalis longitudine commensurabilis lineæ γδ. Rursus quoniam id quod fit bis ex αη, ηβ est mediale, ergo & illi æquale nempe parallelogrammum ζλ, erit mediale. ergo linea ζμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ. Et quoniam quadrata linearum αη, ηβ sunt rationalia, id uero quod fit bis ex αη, ηβ mediale, ergo quadrata linearum αη, ηβ sunt incommensurabilia *biliæ ei, quod fit bis ex* α κ, κ ϛ. *Est autẽ quadratis linearũ* α κ, κ ϛ *æquale parallelogrammum* γ λ: *ei uero quod fit bis ex* α κ, κ ϛ *æquale* ζ λ, *ergo* γ λ *erit incommensurabile ipsi* ζ λ. *ergo & linea* γ μ *erit incommensurabilis longitudine lineæ* ζ μ: *sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ* γ μ, ζ μ *sunt rationales potentia tantum commensurabiles, & linea* γ ζ *est residuum per 73: dico præterea esse primum residuum. Cum enim quadratorum linearum* α κ, κ β *sit id quod fit ex* α κ, κ β *medium proportionale per lemma positum post 53: sit autem quadrato lineæ* α κ, *æquale parallelogrammum* γ θ, *ei uero quod fit ex* α κ, κ ϛ *æquale* ν λ: *quadrato uero lineæ* κ β *æquale* κ λ. *ergo inter parallelogramma* γ θ, κ λ *medium proportionale est* ν λ. *ergo sicut* γ θ *ad* ν λ, *ita* ν λ *ad* κ λ. *Sed sicut* γ θ *ad* ν λ, *ita linea* γ κ *ad lineam* ν μ: *sicut autem* ν λ *ad* κ λ, *ita linea* ν μ *ad lineam* κ μ. *sicut ergo linea* γ κ *ad lineam* ν μ, *ita linea* ν μ *ad lineam* κ μ. *ergo parallelogrammum ex* γ κ, κ μ *est æquale quadrato* ν μ, *hoc est quartæ parti quadrati lineæ* ζ μ. *Et quoniam quadratum lineæ* α κ *est commensurabile quadrato lineæ* κ β, *ergo &* γ θ *erit cõmensurabile ipsi* κ λ: *sicut autem* γ θ *ad* κ λ, *ita linea* γ κ *ad lineam* κ μ. *ergo linea* γ κ *erit longitudine commensurabilis lineæ* κ μ. *ergo per 18. linea* γ μ *plus potest, quàm linea* ζ μ *quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Est autem linea* γ μ *longitudine commensurabilis lineæ rationali* γ δ, *ergo linea* γ ζ *est residuum primum. Ergo quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum facit alterum latus residuum primum.*

Nonagesimumoctauum Theorema.

Quadratum residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuū secundum.



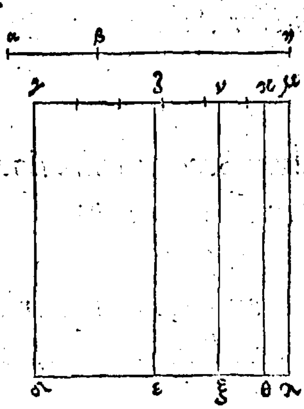
Sit residuum mediale primum αβ, rationalis uero γδ: et quadrato lineæ αβ æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γε, faciens alterum latus γζ. dico lineam γζ esse residuum secūdum. Sit enim lineæ αβ linea conuenienter iuncta βη, ergo lineæ αη, βη sunt mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes. Et quadrato lineæ αη æquale secundum lineam γδ applicetur γθ faciens alterum latus γκ: quadrato uero lineæ ηβ æquale applicetur κλ faciens alterum latus κμ. totū ergo γλ est æquale ambobus quadratis linearum αη, ηβ, quæ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo & parallelogramma γθ, κλ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo per 16. totum γλ est utrique γθ, κλ commensurabile: ergo per corollarium 24 totum γλ est etiam mediale. ergo linea γμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ per 23. Et quoniam γλ est æquale quadratis linearū αη, ηβ, quadrata uero linearum αη, ηβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex αη, ηβ, et quadrato lineæ αβ per 7.2. quadrato uero lineæ αβ est æquale parallelogrammum γε: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex αη, ηβ est æquale residuo parallelogrāmo ζλ: sed id quod fit bis ex αη, ηβ est rationale, ergo ζλ erit rationale, ergo linea ζμ est ratio-

rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ γ δ per 21. Cum igitur parallelogrammum γ λ sit mediale, parallelogrammum uero ζ λ sit rationale, ergo sunt incõmẽsurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ erit residuum. dico præterea esse residuũ secundum. Secetur enim linea ζ μ bifariam & æqualiter in puncto ν: à quo puncto parallela ad lineam γ δ ducatur linea ν ξ. ergo utrũq; ex ζ ξ, ν λ est æquale parallelogrãmo ex α η, η ϐ. Et quoniam quadratorum linearum α η, η ϐ medium proportionale est id quod fit ex α η, η ϐ, ergo & parallelogrammorum γ θ, κ λ medium proportionale est ν λ. Sed sicut γ θ est ad ν λ, ita linea γ κ ad lineam ν μ: sicut autem ν λ ad κ λ, ita linea ν μ ad lineã κ μ. sicut ergo linea γ κ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ est æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Sed parallelogrammum γ θ est commẽsurabile ipsi κ λ, ergo & linea γ κ lineæ κ μ erit commensurabilis longitudine. ergo per 18. linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem linea ζ μ, quæ dicitur cõuenienter iuncta cõmensurabilis longitudine lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ est residuũ secundum. Ergo quadratum residui medialis primi &c.

Nonagesimumnonum Theorema.

Quadratum residui medialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum tertium.

Sit linea α ϐ residuum mediale secūdum, rationalis uero sit linea γ δ: & quadrato lineæ α β æquale secundum lineā γ δ applicetur parallelogrammum γ ε faciens alterum latus γ ζ: dico lineam γ ζ esse residuum tertium. Sit enim lineæ α β linea conuenienter iuncta β η, ergo lineæ α η, η β sunt mediales potentia tantum commensurabiles continentes mediale & cætera, ut in proximo theoremate. ergo linea γ μ est rationalis lōgitudine incommensurabilis lineæ rationali γ δ: & utrūque ex ζ ξ, ν λ est æquale ei, quod fit ex α η, η ϐ: sed id quod fit ex α η, η β est mediale, ergo id quod fit bis ex α η, η ϐ est etiam mediale: ergo & totum ζ λ est etiam mediale. Ergo linea ζ μ est rationalis & lōgitudine incommensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam lineæ α η, η β sunt longitudine incommensurabiles, ergo & quadratum lineæ α η erit incommensurabile parallelogrammo ex α η, η β: sed quadrato lineæ α η sunt commensurabilia quadrata linearum α η, η β: parallelogrammo uero ex α η, η ϐ est commensurabile id, quod fit bis ex α η, η ϐ: ergo quadrata linearum α η, η β sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex α η, η ϐ. ergo & eis æqualia parallelogramma γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommēsurabilis lineæ ζ μ, & sunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ est residuum: dico præterea esse residuum tertium. Cum enim sit commensurabile quadratū lineæ α η, hoc est γ θ, quadrato lineæ

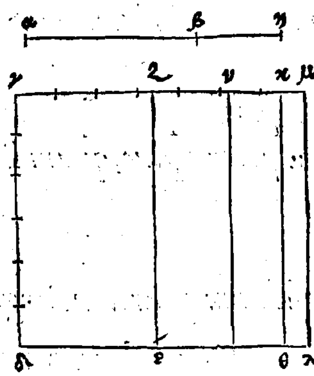


β η,

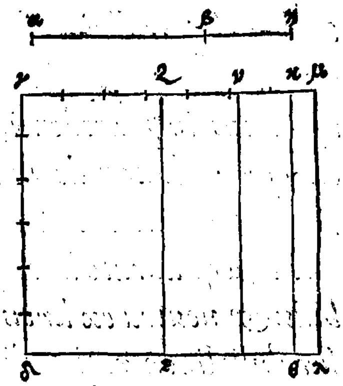
$\beta\eta$, hoc est parallelogrãmo $\kappa\lambda$. ergo & linea $\gamma\kappa$ erit longitudine commẽsurabilis lineæ $\kappa\mu$. Eadem ratione qua usi sumus in præcedenti, probabitur parallelogrammũ ex $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ esse æquale quadrato lineæ $\nu\mu$, hoc est quartæ parti quadrati lineæ $\zeta\mu$. Ergo linea $\gamma\mu$ poterit plus, quã linea $\zeta\mu$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & neutra ex lineis $\gamma\mu$, $\zeta\mu$ est longitudine commensurabilis lineæ rationali $\gamma\delta$. ergo linea $\gamma\zeta$ est residuum tertium. Ergo quadratũ residui medialis secundi &c.

Centesimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuũ quartum.



Sit linea minor $\alpha\beta$, rationalis uero $\gamma\delta$: secundum quam quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma\iota$, faciens alterum latus $\gamma\zeta$: dico lineam $\gamma\zeta$ esse residuum quartum. Sit enim lineæ $\alpha\beta$ linea conuenienter iuncta $\beta\eta$, ergo lineæ $\alpha\eta$, $\beta\eta$ sunt potentia incommẽsurabiles, facientes compositũ ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale, & cætera sint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum $\gamma\lambda$ erit rationale. ergo & linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ $\gamma\delta$. Et quoniam id quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$ est mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ $\zeta\lambda$ erit mediale. ergo linea $\zeta\mu$ erit rationalis lõgitudine incõmen-



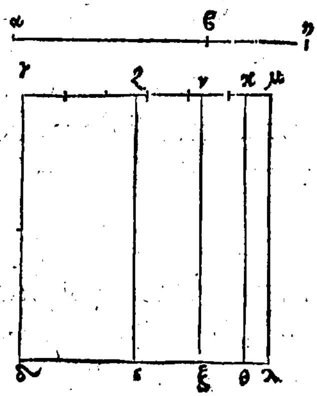
ſurabilis lineæ $\gamma\delta$: ſed linea $\gamma\mu$ eſt longitudine commenſurabilis lineæ $\gamma\delta$. ergo per 13. uel 14. huius linea $\gamma\mu$ erit longitudine incōmenſurabilis lineæ $\zeta\mu$. ſed ſunt ambæ rationales, ergo lineæ $\gamma\mu$, $\zeta\mu$ ſunt rationales potentia tantū cōmenſurabiles. ergo linea $\gamma\zeta$ erit reſiduum. dico prætereа eſſe reſiduum quartum. Cū *enim lineæ $\alpha\kappa$, $\kappa\beta$. ſint potentia incommenſurabiles, ergo & ipſarum quadrata, hoc eſt, illis æqualia parallelogramma $\gamma\theta$, $\kappa\lambda$ ſunt incōmenſurabilia. ergo & linea $\gamma\kappa$ erit longitudine incommenſurabilis lineæ $\kappa\mu$. Similiter oſtendemus parallelogrammum ex $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ eſſe æquale quadrato lineæ $\nu\mu$, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ $\zeta\mu$. ergo per 19. linea $\gamma\mu$ poterit plus, quàm linea $\zeta\mu$ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt tota $\gamma\mu$ longitudine commenſurabilis lineæ rationali $\gamma\delta$, ergo linea $\gamma\zeta$ erit reſiduum quartum.* Ergo *quadratū lineæ minoris &c.*

Centeſimumprimum Theorema.

Quadratum lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quintum.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem $\alpha\beta$: rationalis uero $\gamma\delta$, ſecundum quam quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$ faciēs alterum latus $\gamma\zeta$. dico lineam $\gamma\zeta$ eſſe reſiduum quintū. Sit

enim



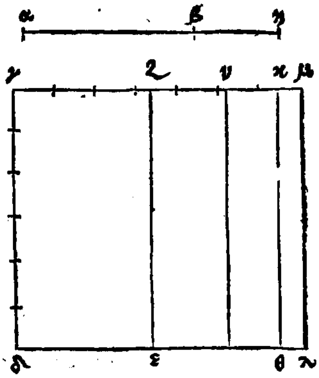
enim lineæ α β, linea conuenienter iuncta ε κ. ergo lineæ α κ, β κ sunt potentia incõmensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: id uero quod fit ex ipsis rationale. fiant enim omnia eo modo quo in præcedẽtibus, ergo totum γ λ erit mediale. ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: & utrũque ex parallelogrammis ζ ξ, ν λ erit rationale, ergo & totum ζ λ erit etiam rationale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine cõmensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam γ λ est mediale, parallelogrammum uero ζ λ rationale, ergo γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: & linea γ μ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea γ ζ est residuum. dico præterea esse residuum quintum: similiter enim probabimus parallelogrãmũ ex γ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniã quadratũ lineæ α κ, hoc est, parallelogrammũ γ θ est incõmensurabile quadrato ε κ, hoc est, parallelogrãmo κ λ, ergo linea γ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ κ μ. ergo per 19 linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & est conuenienter iuncta linea ζ μ longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo linea γ ζ est residuum quintum. Ergo quadratum &c.

Centesimumsecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali superficie facientis totam medialem, secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum sextum.

Sit linea cum mediali superficie facies totum mediale $\alpha\beta$, *rationalis uero* $\gamma\delta$, *secundum quam quadrato lineæ* $\alpha\beta$ *æquale applicetur parallelogrammum* $\gamma\epsilon$, *faciens alterum latus* $\gamma\zeta$. *dico lineam* $\gamma\zeta$ *esse residuum sextum. Sit enim lineæ* $\alpha\beta$ *linea conuenienter iuncta* $\beta\eta$, *ergo lineæ* $\alpha\eta$, $\beta\eta$ *sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis mediale: præterea incommensurabile compositũ ex quadratis ipsarum ei, quod fit ex ipsis. fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum* $\gamma\lambda$ *erit mediale (quia est æquale composito ex quadratis linearũ* $\alpha\eta$, $\eta\beta$, *quod est mediale.) ergo linea* $\gamma\mu$ *erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ* $\gamma\delta$: *similiter parallelogrammum* $\zeta\lambda$ *erit mediale. ergo & linea* $\zeta\mu$ *erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ* $\gamma\delta$. *Et quoniam compositum ex quadratis linearum* $\alpha\eta$, $\beta\eta$ *est incommẽsurabile ei, quod fit bis ex* $\alpha\eta$, $\eta\beta$, *ergo illis æqualia* $\gamma\lambda$, $\zeta\lambda$ *erunt incõmensurabilia. ergo & lineæ* $\gamma\mu$, $\zeta\mu$ *erũt longitudine incommensurabiles: sunt autem ambæ rationales, ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea* $\gamma\zeta$ *erit residuũ: dico præterea esse residuum sextũ. fiãt cætera ut in superioribus. Et quoniam lineæ* $\alpha\eta$, $\beta\eta$ *sunt potentia incommensurabiles, ergo quadrata ipsarum sunt incommensurabilia, hoc est,*

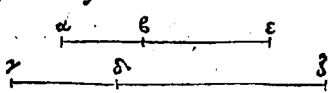
illis



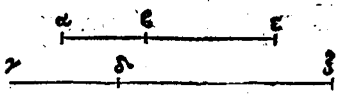
illis æqualia γθ, κλ. ergo & linea γκ lineæ κμ erit longitudine incommensurabilis, sicut in superioribus demonstrabatur parallelogrammorum γθ, κλ esse medium proportionale νλ. ergo per 19. linea γμ plus poterit, quàm linea μζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ex ipsis γμ, ζμ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali γδ. ergo linea γζ est residuum sextum. Ergo *quadratum &c.*

Centesimumtertium Theorema.

Linea residuo commensurabilis longitudine, est & ipsa residuum eiusdem ordinis.



Sit residuum αβ, cui sit linea commensurabilis longitudine γδ. dico lineam γδ esse & ipsam residuum & ordinis eiusdem, cuius & residuum αβ. Cũ enim linea αβ sit residuũ, sit linea ei conuenienter iuncta βε: ergo lineæ αε, βε sunt rationales potentia tantum commensurabiles: sitq; sicut linea αβ ad lineam γδ, ita linea βε ad lineã δζ: ergo sicut unum ad unum, ita omnia ad omnia per 12.5. Erit ergo sicut linea αβ ad lineam γδ, ita tota linea αε ad totam lineam γζ, & linea βε ad lineam δζ. ergo per 10 huius, linea αε erit commensurabilis longitudine lineæ γζ, & linea βε lineæ δζ: sed linea αε est rationalis, ergo & linea γζ erit rationalis. similiter &



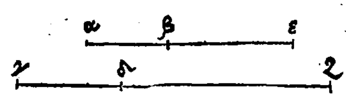
linea δζ erit rationalis, quia linea βε cui ipsa est commensurabilis est etiam rationalis: sed quoniam est sicut linea βε ad lineam αε, ita linea δζ ad lineā γζ, & lineæ βε, αε sunt potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ δζ, γζ sunt potentia tantum commensurabiles. ergo linea γδ est residuū. dico præterea esse residuū eiusdem ordinis cuius & linea αβ. Cum enim sit ut modo diximus sicut linea αε, ad lineam γζ ita linea βε ad lineā δζ. ergo permutata proportione sicut αε ad βε, ita γζ ad δζ: linea autem αε potest plus quàm linea εβ, aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ergo & linea γζ potest plus quàm linea δζ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15. Et quidem si linea αε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cum linea αε sit longitudine commensurabilis lineæ γζ. ergo per 12. etiam linea γζ erit longitudine cōmensurabilis propositæ rationali. ergo utraque linea αβ γδ erit residuum primū. Quòd si linea βε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cū linea βε sit longitudine commensurabilis lineæ δζ, ergo linea δζ erit etiam longitudine cōmensurabilis propositæ rationali: & tunc utraque linea αβ, γδ erit residuum secundū. Quòd si neutra ex lineis αε, βε erit longitudine commensurabilis propositæ rationali, neutra etiā ex lineis γζ, δζ erit propositæ rationali longitudine commensurabilis per 13, uel 14 huius: & tunc utraque linea αβ,

γδ

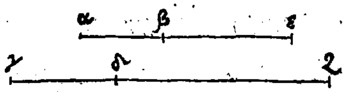
γ δ erit residuum tertium. Quòd si linea α ε plus potest quàm linea β ε quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis, similiter & linea γ ζ plus poterit quàm linea δ ζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15: & quidem si linea α ε erit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea γ ζ erit eidem commensurabilis. & sic erit utraq; α β, γ δ residuum quartū: si uero linea β ε erit commensurabilis longitudine rationali, similiter & linea δ ζ, & sic erit utraque α β, γ δ residuum quintum. si uero neutra ex lineis α ε, β ε erit longitudine commensurabilis rationali, similiter neutra ex lineis γ ζ, δ ζ erit eidem commensurabilis: & sic erit utraque a β, γ δ residuum sextum. Ergo linea γ δ erit residuū eiusdē ordinis cuius & α β.

Centesimumquartum Theorema.

Linea commensurabilis residuo mediali, est & ipsa residuum mediale & eiusdem ordinis.



Sit residuum mediale α β, cui sit commensurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum linea γ δ. dico γ δ esse residuum mediale & eiusdē ordinis. Cum enim α β sit residuum mediale, sit ei conuenienter iuncta β ε, ergo lineæ α ε, β ε sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Sit autē sicut α β ad γ δ, ita β ε ad δ ζ. simili ratione qua in præcedēti usi sumus, linea α ε erit longitudine & potentia, siue potentia tantum commensurabilis lineæ γ ζ, & linea β ε lineæ δ ζ. ergo per 24 linea γ ζ erit medialis: & linea δ ζ erit medialis, quia est cōmen-

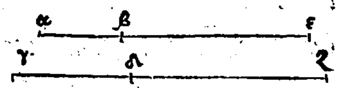


ſurabilis lineæ mediali βε. ſimiliter lineæ γζ, δζ erunt potentia tantum commenſurabiles: quia habent eandem proportionem inter ſe, quam lineæ αε, βε, quæ ſunt inter ſe commenſurabiles potentia tantum. ergo linea γδ eſt reſiduum mediale. dico præterea eſſe eiuſdem ordinis cuius & αβ. Cum enim ſit, ſicut linea αε ad lineam βε, ita linea γζ ad lineam δζ: ſed ſicut linea αε ad lineam βε, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, βε per 1.6: ſicut autem linea γζ ad lineam δζ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. ergo ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, βε, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. permutata ergo proportione ſicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammum ex αε, βε ad parallelogrammũ ex γζ, δζ. Sed quadratum lineæ αε eſt cõmẽſurabile quadrato lineæ γζ (quia linea αε eſt commenſurabilis lineæ γζ.) ergo & parallelogrammum ex αε, βε erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ergo ſi parallelogrammũ ex αε, βε eſt rationale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit rationale: & tunc utraque linea αβ, γδ erit reſiduũ mediale primum. Si uero parallelogrammum ex αε, βε erit mediale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit mediale per corollarium 24: et tunc utraque linea αβ, γδ erit reſiduum mediale ſecundum. ergo linea γδ erit reſiduũ mediale eiuſdem ordinis. Hoc theorema cõceptũ eſt uniuerſaliter, ſiue linea ſit commẽſurabilis longitudine & potentia, ſiue potentia tantum reſiduo mediali, eſſe & ipſam

ipsam residuum mediale, & eiusdem ordinis. Idem dicendum de tribus proximis theorematibus.

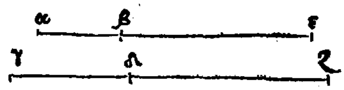
Centesimumquintum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ minori, est & ipsa linea minor.



Sit linea minor α β, cui sit commensurabilis γ δ. dico lineā γ δ esse lineam minorem: fiāt enim eadem quæ in præcedentibus. quoniam lineæ α ε, β ε sunt potentia incommensurabiles, ergo & lineæ γ ζ, δ ζ sunt potentia incommēsurabiles per 22. 6. & 10 huius. R*ursus per 22. 6 sicut quadratum lineæ α ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad quadratū lineæ δ ζ. cōiuncta ergo proportione, sicut quadrata linearum α ε, β ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadrata linearum γ ζ, δ ζ ad quadratum lineæ δ ζ: & permutata proportione sicut quadrata linearū α ε, β ε ad quadrata linearum γ ζ, δ ζ, ita quadratum lineæ β ε ad quadratum lineæ δ ζ. sed quadratum lineæ β ε est commensurabile quadrato lineæ δ ζ (quia lineæ β ε, δ ζ sunt cōmensurabiles.) ergo & compositū ex quadratis linearum α ε, β ε erit commensurabile composito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: sed compositū ex quadratis linearū α ε, β ε est rationale, ergo & compositum ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ erit rationale.* R*ursus cū sit sicut quadratum lineæ α ε ad parallelogrammum ex α ε, β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex γ ζ, δ ζ. (sicut diximus in proximo theoremate) permutata er-*

go proportione ſicut quadratũ lineæ α ε ad quadracũ lineæ γ ζ, ita parallelogrãmum

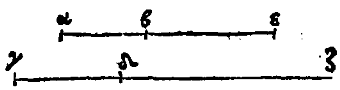


ex α ε, β ε ad parallelogrãmũ ex γ ζ, δ ζ. ſed quadratũ lineæ α ε eſt cõmenſurabile quadrato lineæ γ ζ, quia lineæ α ε, γ ζ ſunt cõmenſurabiles, ergo & parallelogrãmũ ex α ε, β ε erit commenſurabile parallelogrammo ex γ ζ, δ ζ. ſed parallelogrammũ ex α ε, β ε eſt mediale, ergo & parallelogrammum ex γ ζ, δ ζ erit mediale. ergo lineæ γ ζ, δ ζ erunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, parallelogrãmũ uero ex ipſis mediale. Ergo linea γ δ erit linea minor.

Centeſimumſextum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ cum rationali ſuperficie facienti totam medialem, eſt & ipſa linea cũ rationali ſuperficie faciens totam medialem.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β, cui ſit commẽſurabilis linea γ δ. dico lineã γ δ eſſe cũ



rationali ſuperficie facientẽ totam medialem. Sit lineæ α β linea conuenienter iuncta β ε, ergo lineæ α ε, β ε ſunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, parallelogrammũ uero ex ipſis rationale: fiant omnia quæ in præcedẽtibus. Similiter quoque demonſtrabimus ſicut linea α ε ad lineam β ε, ita lineam γ ζ ad lineam δ ζ: & compoſitũ ex quadratis linearum α ε, β ε eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: id uero quod ſit ex α ε, β ε

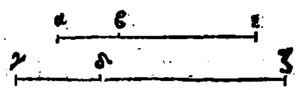
eſſe

esse similiter commensurabile ei, quod fit ex γζ, δζ. quare & similiter lineæ γζ, δζ erunt potentia incommensurabiles facientes ea quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ erit etiam linea cũ rationali superficie faciens totã medialẽ.

Centesimumseptimum Theorema.

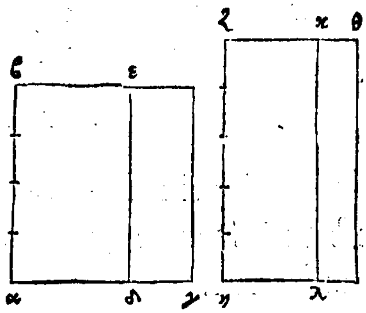
Linea commensurabilis lineæ cum mediali superficie facienti totam medialem, commensurabilis est & ipsa cum mediali superficie faciens totam medialem.

Sit linea cum mediali superficie faciẽs totam medialẽ αβ, cui sit commensurabilis γδ. dico lineam γδ esse etiam lineam cum mediali superficie facientem totam medialẽ. Sit enim lineæ αβ linea cõueniẽter iuncta βι, & fiant cætera, ut in superioribus. ergo lineæ αι, βι sunt potẽtia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiã mediale: & compositum ex quadratis incommensurabile ei, quod fit ex ipsis. Sunt autẽ, ut antea demonstratum est lineæ αι, βι commensurabiles lineis γζ, δζ, & compositum ex quadratis ipsorum αι, βι commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod fit ex αι, βι cõmensurabile ei, quod fit ex γζ, δζ. ergo & lineæ γζ, δζ, sunt potentia incommensurabiles facientes cætera omnia quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ est cum mediali superficie faciens totam medialem.



Centesimumoctauum Theorema.

Si de superficie rationali detrahatur superficies medialis, linea quæ reliquam superficiem potest, est alterutra ex duabus irrationalibus, aut residuum aut linea minor.



De *superficie rationali ϐ γ detrahatur superficies medialis ϐ δ. dico lineam quæ reliquam superficiẽ ε γ potest, esse alterutram ex duabus irrationalibus, aut residuũ aut lineã minorem. Sit enim linea rationalis ζ η, secundum quam æqualis superficiei ϐ γ applicetur superficies rectangula parallelogramma η θ: superficiei uero ϐ δ æqualis applicetur superficies parallelogrammo η κ. reliquum ergo parallelogrammũ ε γ est æquale reliquo parallelogrammo λ θ. Cum igitur ϐ γ sit rationale, ipsum uero ϐ δ sit mediale, ergo & η θ erit rationale: ipsum uerò η κ mediale. ergo & linea ζ θ erit rationalis longitudine commensurabilis ipsi ζ η per 21: linea uero ζ κ erit rationalis longitudine incommensurabilis eidem lineæ ζ η per 23. ergo linea ζ θ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζ κ per 13. ergo lineæ ζ θ ζ κ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: ergo linea κ θ erit residuũ, ipsi uero conuenienter iuncta linea κ ζ: linea autem ζ θ plus potest, quàm linea ζ κ, aut quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Possit prius quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cum sit tota ζ θ longitudine commensurabilis lineæ rationali ζ η. ergo linea κ θ est residuum primum.*

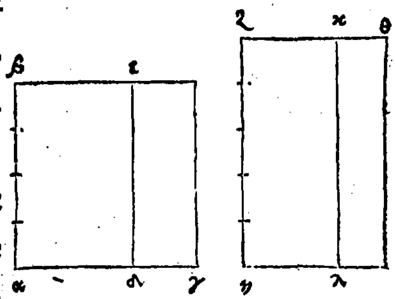
ergo

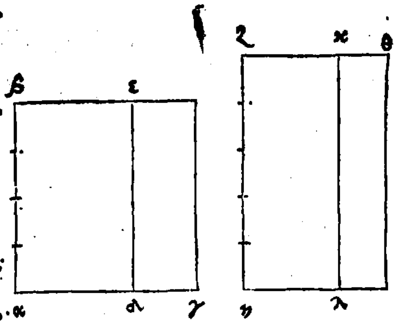
ergo per 91 linea potens parallelogrammum λθ, hoc est ιγ est residuũ. Quòd si linea ζθ plus poßit quã linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, cum linea ζθ sit commensurabilis longitudine lineæ rationali ζη, ergo linea κθ erit residuum quartum. Ergo per 94 *linea potens superficiem λθ, hoc est γι est linea minor.*

Centesimumnonum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies rationalis, aliæ duæ irrationales fiunt, aut residuum mediale primum, aut cum rationali superficie faciens totam medialem.

De *superficie mediali βγ detrahatur rationalis superficies βδ, dico lineã quæ potest superficiem reliquã ιγ esse alterutram duarum irrationaliũ, uel residuũ mediale primum, uel cum rationali superficie faciẽtem totã medialem.* Sit *rationalis linea ζη, secundũ quam applicentur superficies, ut in proximo dictum est: erit similiter linea ζθ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ζη: linea uerò ζκ erit rationalis longitudine commensurabilis eidem ζη: & lineæ ζθ, ζκ rationales erunt potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea κθ erit residuum: illi uerò conuenienter iuncta linea ζκ.* Linea *autem ζθ plus potest quàm linea ζκ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõ-*



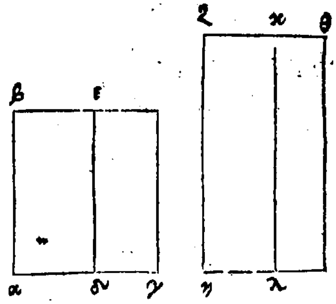


mensurabilis. Et quidem si linea ζθ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cũ linea cõuenienter iuncta ζκ sit longitudine commensurabilis lineæ rationali ζη, ergo linea κθ erit residuum secũdum: quare linea quæ superficiem λθ, hoc est ε γ potest, est residuũ mediale primũ per 92. Quòd si linea ζθ plus potest quã linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum linea conuenienter iuncta sit longitudine commẽsurabilis lineæ rationali ζη, ergo linea κθ erit residuum quintum: quare linea quæ superficiẽ λθ, hoc est, εγ potest, est cum rationali superficie faciens totam medialem per 95.

Centesimumdecimum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies medialis, quæ sit incõmensurabilis toti, reliquæ duæ fiunt irrationales, aut residuum mediale secundum, aut cum mediali superficie faciens totam medialem.

Sicut in præcedentibus descriptionibus, hìc quoque detrahatur de superficie mediali βγ superficies medialis βδ: quæ βδ sit incommensurabilis toti βγ. dico lineam quæ potest superficiem εγ, esse alterutram duarũ irrationalium, uel residuum mediale secundũ, uel cum mediali superficie facientem totam medialem. Cum enim utraque superficies

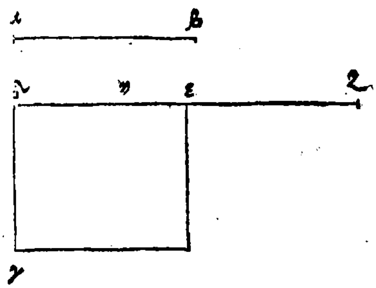


superficies ε γ, ε δ sit medialis, ergo utraque linea ζ θ, ζ κ est rationalis, & rationali ζ η lõgitudine incommensurabilis. Est autẽ superficies β γ, hoc est κ θ incommẽsurabilis ipsi β δ, hoc est η κ. ergo lineæ ζ θ, ζ κ sũt incommensurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea κ θ erit residuum: ipsi uero conuenienter iuncta, ζ κ. linea autem ζ θ plus potest quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine com mensurabilis, uel lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et quidẽ si linea ζ θ plus potest, quàm ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. cum neutra ex ζ θ, ζ κ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζ η, ergo linea κ θ erit residuum tertium. ergo per 93. linea quæ potest superficiem λ θ, hoc est ε γ erit residuum mediale secundũ. Quòd si linea ζ θ plus potest quàm linea ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ex ζ θ, ζ κ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζ η, ergo linea κ θ erit residuum sextũ. Ergo per 96 linea quæ superficiem λ θ, hoc est ε γ potest, erit cum mediali superficie faciens totam medialem.

Centesimumundecimum Theorema.

Linea quæ residuum dicitur, non est eadem cum ea quæ dicitur binomium.

Sit residuum α β, dico α β non esse idem cum binomio. Nam si esse potest, est. Sitq; linea rationalis δ γ, secũdum quam



æquale quadrato lineæ α β applicetur parallelogrammum rectangulũ γ ε faciens alterũ latus δ ε. cum linea α β sit residuum, ergo linea δ ε erit residuum primũ per 97. Sit ipsi cõuenienter iuncta ε ζ, ergo lineæ δ ζ, ζ ε sunt rationales potentia tantũ commẽsurabiles, & linea δ ζ plus potest quàm linea ε ζ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis: & δ ζ, est longitudine cõmensurabilis rationali γ δ. Rursus *per positionem linea α β est binomium, ergo linea δ ε est binomium primum per* 60. *Diuidatur in sua nomina in puncto η: sitq; maius nomẽ δ η, ergo lineæ δ η, η ε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea δ η plus potest quàm linea η ε quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, eademq; linea δ η est longitudine commensurabilis rationali γ δ.* Ergo *per* 12 *lineæ δ η, δ ζ sunt longitudine commensurabiles: ergo & reliqua linea η ζ erit longitudine commensurabilis toti δ ζ per* 16, *aut per corollarium eiusdem.* Cum *igitur linea δ ζ sit cõmensurabilis lineæ ζ η, sit autem linea δ ζ rationalis, rationalis quoque erit ζ η.* Cum *autem linea δ ζ sit longitudine commensurabilis lineæ ζ η: sit autem linea δ ζ longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ, ergo per* 14 *lineæ ζ η, ζ ε sunt longitudine incommensurabiles. Sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζ η, ζ ε sunt rationales potentia tantum cõmmẽsurabiles. ergo linea ε η erit residuũ: sed est rationalis ut modo conclusum est: hoc autem est*

impoßibile

impoßibile, eandē ſcilicet lineam eſſe rationalem & irrationalem, ergo reſiduum nō erit idem quod binomiū. Linea *quæ reſiduū dicitur, & cæteræ quinq; eam conſequentes irrationales, neque lineæ mediali neque ſibi ipſæ inter ſe ſunt eædem.* Nam *quadratū lineæ medialis ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus rationalem lineam longitudine incommēſurabilem ei, ſecundum quam applicatur per* 23. *quadratū uerò reſidui ſecundum rationalem applicatum, facit alterū latus reſiduum primum per* 97. *quadratum uerò reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſecūdum per* 98. *quadratum uerò reſidui medialis ſecundi, facit alterum latus reſiduum tertium per* 99. *quadratum uerò lineæ minoris, facit alterum latus reſiduum quartum per* 100. *quadratum uero lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem, facit alterum latus reſiduum quintum per* 101. *quadratum uero lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum per* 102. Cum *igitur dicta latera quæ ſunt latitudines cuiuſque parallelogrammi unicuique quadrato æqualis & ſecundum rationalem applicati differāt, & à primo latere & ipſa inter ſe, (nam à primo differunt, quoniam eſt rationalis linea: inter ſe uero differūt, quoniam ſunt reſidua non eiuſdem ordinis) conſtat ipſas quoq; lineas irrationales inter ſe differentes eſſe.* Et *quoniam demonſtratum eſt reſiduum non eſſe idem quod binomiū: quadrata autem reſidui & quinque linearum irrationa-*

lium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciunt altera latera ex residuis eiusdem ordinis, cuius sunt & residua, quorũ quadrata applicantur rationali: similiter & quadrata binomij & quinque linearum irrationalium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciũt altera latera ex binomijs eiusdem ordinis, cuius sunt & binomia, quorũ quadrata applicantur rationali. ergo lineæ irrationales quæ consequuntur binomium, & quæ consequũtur residuũ, sunt inter se differentes. Quare dictæ lineæ omnes irrationales sunt numero 13.

1. *Medialis.*
2. *Binomium.*
3. *Bimediale primum.*
4. *Bimediale secundum.*
5. *Maior.*
6. *Potens rationale & mediale*
7. *Potens duo medialia.*
8. *Residuum.*
9. *Residuum mediale primum.*
10. *Residuũ mediale secundum.*
11. *Minor.*
12. *Faciens cum rationali superficie totam medialem.*
13. *Faciens cum mediali superficie totam medialem.*

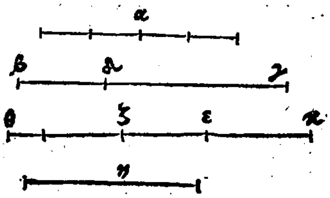
Centesimumduodecimum Theorema.

Quadratum, lineę rationalis secundum binomium applicatum facit alterum latus residuũ, cuius nomina sunt commẽsurabilia binomij nominibus, & in eadem proportione: præterea id quod fit residuũ, eundẽ ordinem retinet quem binomium.

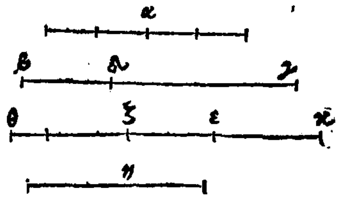
Sit linea rationalis α, binominm βγ, cuius maius nomen sit γδ: & quadrato lineæ α sit æquale parallelogrammum

ex

ex β γ, ε ζ. dico lineam ε ζ esse residuũ, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius binomij β γ, quæ nomina sunt γ δ, δ β: & in eadem proportione præterea linea ε ζ eundẽ ordinem & locũ tenet inter residua, quẽ binomium β γ retinet inter binomia. Sit rursus quadrato lineæ α æquale parallelogrammum ex β δ, κ. Cum igitur parallelogrammum ex β γ, ε ζ sit



æquale parallelogrãmo ex β δ, κ, cum utrunq; sit æquale quadrato lineæ α, est igitur sicut linea γ β ad lineam β δ, ita linea κ ad lineam ε ζ per 14.6. sed γ β est maior quàm β δ, ergo & κ erit maior quàm ε ζ. Sit linea ε θ æqualis lineæ κ. est ergo sicut γ β ad γ δ, ita θ ε ad ε ζ per 7.5. ergo disiuncta proportione per 17.5. sicut γ δ ad β δ, ita θ ζ ad ζ ε. fiat sicut θ ζ ad ζ ε, ita ζ κ ad ε κ, (quod quẽadmodum fiat dicemus ad finem demonstrationis.) ergo per 12.5. sicut linea ζ κ ad lineam ε κ, ita tota linea θ κ ad totã ζ κ. Sed sicut ζ κ ad ε κ, ita est γ δ ad δ β: (quia ζ κ est ad ε κ sicut θ ζ ad ζ ε, & θ ζ ad ζ ε est sicut γ δ ad δ β.) ergo sicut linea θ κ ad ζ κ, ita γ δ ad δ β. sed quadratum lineæ γ δ est commensurabile quadrato lineæ δ β, ergo & quadratum lineæ θ κ quadrato lineæ ζ κ erit commẽsurabile per 22.6 & 10 huius. Sed tres lineæ θ κ, ζ κ, ε κ sunt proportionales in continua proportione: (ut modo dictum est.) ergo per secundum corollarium 20. 6 quadratum lineæ θ κ erit ad quadratũ lineæ ζ κ, sicut linea θ κ ad lineam ε κ. ergo linea θ κ erit longitudine commensurabilis lineæ ε κ: quare per 16 linea θ ε erit longitudi-

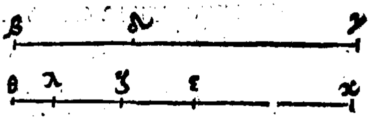


ne commẽſurabilis lineæ ε κ. Et quoniam quadratũ lineæ α eſt æquale parallelogrãmo ex θ ε, ζ δ, & quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & parallelogrammũ ex θ ε, ζ δ erit rationale. ergo per 21 linea θ ε erit rationalis & longitudine cõmenſurabilis lineæ ζ δ: quare & linea ε κ, quæ eſt ipſi θ ε longitudine commẽſurabilis, erit etiam rationalis & longitudine commẽſurabilis ipſi β δ. Cum igitur ſit ſicut linea γ δ ad δ ζ, ita ζ κ ad ε κ: (quia ſupra dictum eſt, ſicut γ δ ad δ β, ita θ ζ ad ζ ε, & ſicut θ ζ ad ζ ε, ita ζ κ, ad ε κ,) lineæ uero γ δ, δ β ſint potentia tantum commenſurabiles, ergo & lineæ ζ κ, ε κ erunt potentia tantum commenſurabiles. Et cum ſit ſicut γ δ ad δ β, ita ζ κ ad ε κ, ergo cõuerſa proportione ſicut δ ζ ad γ δ, ita ε κ ad ζ κ: & permutata proportione ſicut δ β ad ε κ, ita γ δ ad ζ κ: ſed lineæ δ β, ε κ ſunt longitudine commenſurabiles, (ut modo probatum eſt) ergo & lineæ γ δ, ζ κ ſunt longitudine commẽſurabiles: ſed linea γ δ, eſt rationalis, ergo & linea ζ κ erit etiam rationalis: ergo lineæ ζ κ, ε κ ſunt rationales potẽtia tantam commẽſurabiles. ergo linea ζ ε erit reſiduum, cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus binomij & in eadem proportione. dico præterea illud reſiduum eſſe eiuſdem ordinis cuius & binomiũ. Nam linea γ δ plus poteſt, quàm linea β δ aut quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut lineæ incommenſurabilis: & quidem ſi linea γ δ plus poteſt, quàm β δ quadrato lineæ ſibi longitudine commẽſurabilis, ſimiliter & linea

ζ κ

ζκ plus poterit quàm linea ικ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15. Et quidē si linea γδ est longitudine commēsurabilis lineæ rationali, cum modo probatum sit lineas γδ, ζκ esse longitudine commensurabiles, ergo per 12 etiam linea ζκ erit longitudine commensurabilis lineæ rationali: tunc igitur linea βγ erit binomium primum, similiter & linea ζι erit residuum primū. Quòd si linea βδ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea ικ erit eidē cōmensurabilis: tunc ergo linea βγ erit binomium secundum, & linea ζι residuum secundum. Quòd si neutra ex γδ, δβ fuerit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζκ, ικ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea βγ binomium tertium, & linea ζι residuum tertium. Quòd si linea γδ plus potest quàm linea βδ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, similiter & linea ζκ plus poterit quàm ικ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15. Et quidem si linea γδ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea ζκ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea βγ binomium quartum, & linea ζι residuum quartum. Quòd si linea βδ fuerit rationali commensurabilis, similiter & linea ικ erit eidem commensurabilis, tunc linea βγ erit binomium quintū: & linea ζι residuū quintū. Quòd si neutra ex γδ, βδ erit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζκ, ικ erit eidem commensurabilis, tunc linea βγ erit binomium sextum, & linea ζι residuum sextum. Ergo linea ζι erit residuum, cuius nomina, nempe ζκ, ικ sunt com-

mensurabilia nominibus binomij β γ, nominibus inquã γ δ, δ β: & sunt in eadem proportione, & habent eundem ordinem & locum inter residua quem binomium inter binomia. Nunc illud dicamus quomodo fiat sicut linea θ ζ ad lineam ζ ε, ita linea ζ κ ad lineam ε κ. linea γ δ est maior linea β δ. ergo

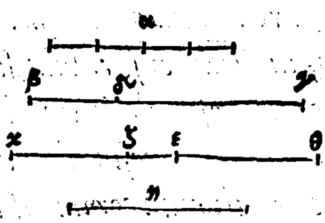


& linea θ ζ erit maior linea ζ ε. Detrahatur de linea θ ζ æqualis lineæ ζ ε, quæ sit ζ λ per 3.1. Et reliqua sit θ λ. ergo linea θ λ erit minor quam linea θ ζ, quia θ ζ est æqualis lineis θ λ, λ ζ. fiat sicut θ λ, ad θ ζ, ita ζ ε ad ζ κ per 12.6: ergo per conuersam proportionem sicut θ ζ ad θ λ, ita ζ κ ad ζ ε. Ergo per euersam proportionem sicut linea θ ζ ad λ ζ, hoc est ad ei æqualem ζ ε, ita linea ζ κ ad ε κ.

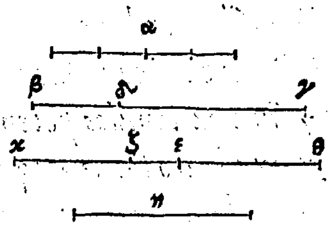
Centesimum decimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ rationalis secundum residuum applicatum, facit alterum latus binomium, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione: præterea id quod fit binomium est eiusdẽ ordinis, cuius & residuum.

Sit linea rationalis α, residuũ uerò β δ: & quadrato lineæ α sit æquale id quod fit ex β δ, κ θ: itaque quadratum lineæ rationalis α secundũ β δ residuũ applicatum, facit alterum latus κ θ: dico lineam κ θ esse binomium cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius β δ & in eadem proportione: & lineã κ θ esse

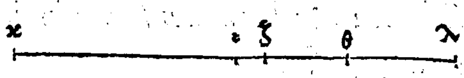


esse eiusdem ordinis binomium, cuius & $\varsigma\delta$ est residuũ. Sit lineæ $\varsigma\delta$ linea cõueniẽter iuncta $\delta\gamma$, ergo lineæ $\varsigma\gamma$, $\delta\gamma$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. & quadrato lineæ α æquale sit parallelogrammum ex $\beta\gamma$, κ: sed quadratum lineæ α est rationale, ergo & parallelogrammum ex $\beta\gamma$, κ est etiam rationale: ergo & linea κ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ $\varsigma\gamma$. Cum igitur parallelogrammum ex $\beta\gamma$, κ sit æquale ei quod fit ex $\beta\delta$, $\chi\theta$, ergo sicut $\varsigma\gamma$ ad $\varsigma\delta$, ita $\chi\theta$ ad κ: sed $\varsigma\gamma$ est maior quam $\beta\delta$, ergo & linea $\chi\theta$ erit maior quam κ. Sit lineæ κ æqualis linea $\chi\iota$, ergo linea $\chi\iota$ erit rationalis longitudine commẽsurabilis linea $\beta\gamma$ sicut & linea κ: & cum sit sicut $\beta\gamma$ ad $\varsigma\delta$, ita $\chi\theta$ ad $\chi\iota$. euersa ergo proportione sicut $\varsigma\gamma$ ad $\delta\gamma$, ita $\chi\theta$ ad $\iota\theta$. fiat sicut $\chi\theta$ ad $\iota\theta$, ita linea $\zeta\theta$ ad $\iota\zeta$, (quod quemadmodum fiat, dicemus ad finẽ demonstrationis.) ergo erit reliqua $\chi\zeta$ ad reliquam $\zeta\theta$, sicut tota $\chi\theta$ ad totã $\theta\iota$ per 19.5, hoc est sicut $\varsigma\gamma$ ad $\gamma\delta$: sed linea $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ sunt potentia tantũ commensurabiles, ergo & lineæ $\chi\zeta$, $\zeta\theta$ erunt potentia tantum commẽsurabiles. Et quoniam est sicut $\chi\theta$ ad $\theta\iota$, ita $\chi\zeta$ ad $\zeta\theta$, sed & sicut $\chi\theta$ ad $\theta\iota$, ita $\theta\zeta$ ad $\zeta\iota$, ergo sicut $\chi\zeta$ ad $\zeta\theta$, ita $\zeta\theta$ ad $\zeta\iota$: quare sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. ergo sicut $\chi\zeta$ ad $\zeta\iota$, ita quadratum lineæ $\chi\zeta$ ad quadratum lineæ $\zeta\theta$: sed hæc quadrata sunt commẽsurabilia, quia lineæ $\chi\zeta$, $\zeta\theta$ sunt potentia commensurabiles. ergo lineæ $\chi\zeta$, $\zeta\iota$ sunt longitudine commensurabiles. Quare per secundã partem 16. lineæ $\chi\iota$, $\iota\zeta$ sunt longitudine commensurabiles: quare per eandem 16. & lineæ $\chi\zeta$, $\chi\iota$ sunt longitu-



dine commensurabiles: sed linea κ ε est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ β γ*.ergo & linea* κ ζ *erit rationalis & longitudine commensurabilis eidem* β γ*.*Et *quoniã est sicut linea* β γ *ad* γ δ*,ita* κ ζ *ad* ζ θ*,permutata ergo proportione sicut* β γ *ad* κ ζ*,ita* γ δ *ad* ζ θ*:sed linea* β γ *est longitudine commẽsurabilis lineæ* κ ζ*.ergo & linea* γ δ *erit longitudine cõmẽsurabilis lineæ* ζ θ*:sed linea* γ δ *est rationalis,ergo & linea* ζ θ *erit rationalis:sed & lineæ* β γ*,*γ δ *sunt potentia tantum commensurabiles:ergo & lineæ* κ ζ*,*ζ θ *sunt rationales potentia tantum commensurabiles.*Ergo *linea* κ θ *erit binomium, cuius nomina sunt commẽsurabilia nominibus residui, & in eadem proportione.dico præterea illud binomium esse eiusdem ordinis cuius, & residuum* β δ*.*Nam *si* β γ *plus potest quàm* γ δ *quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis,etiã linea* κ ζ *poterit plus quàm* ζ θ *quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis per* 15*.*Quòd *si linea* β γ *fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali,etiam linea* κ ζ *erit eidem rationali commẽsurabilis longitudine per* 12*:quia lineæ* β γ*,*κ ζ *sunt longitudine commensurabiles:& sic erit linea* β δ *residuum primum, & linea* κ θ *similiter binomium primum.*Quòd *si* γ δ *fuerit longitudine commensurabilis rationali,etiam linea* ζ θ *erit eidem longitudine commensurabilis:& sic erit linea* β δ *residuum secundum, & linea* κ θ *binomiũ secundũ.* Quòd *si neutra ex* β γ*,*γ δ *fuerit rationali commensurabilis longitudine*

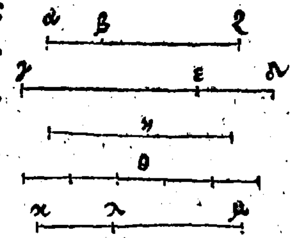
tudine, neutra etiam ex $\kappa\zeta$, $\zeta\theta$ erit eidem commensurabilis: & sic erit linea $\beta\delta$ residuum tertium, & linea $\kappa\theta$ binomium tertium. Si *uero linea $\epsilon\gamma$ plus potest quàm linea $\gamma\delta$ quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis, etiam linea $\kappa\zeta$ poterit plus quàm linea $\zeta\theta$ quadrato lineæ sibi longitudine incōmensurabilis per* 15. E*t quidem si linea $\beta\gamma$ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam $\kappa\zeta$ erit eidem commēsurabilis longitudine: & tunc linea $\epsilon\delta$ erit residuum quartū, & linea $\kappa\theta$ binomium quartū. Quòd si $\gamma\delta$ fuerit rationali commēsurabilis longitudine, etiam $\zeta\theta$ erit eidem commensurabilis longitudine: & tunc erit linea $\beta\delta$ residuum quintum, & linea $\kappa\theta$ binomiū quintum. Quòd si neutra ex $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ fuerit longitudine commēsurabilis rationali, similiter neutra ex $\kappa\zeta$, $\zeta\theta$ erit eidem cōmensurabilis longitudine: & sic linea $\beta\delta$ erit residuū sextum, & linea $\kappa\theta$ binomium sextum.* Ergo *$\kappa\theta$ erit binomium, cuius nomina $\kappa\zeta$, $\zeta\theta$ sunt commēsurabilia residui $\epsilon\delta$ nominibus $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, & in eadem proportione: & linea $\kappa\theta$ retinet inter binomia eundem ordinem quem $\epsilon\delta$ inter residua.* N*unc dicamus quomodo fiat sicut linea $\kappa\theta$ ad lineam $\theta\iota$, ita linea $\theta\zeta$ ad lineā $\zeta\iota$.* Line*æ $\kappa\theta$ ad*



datur in continuum & directum linea æqualis ipsi $\theta\iota$: & sit tota linea $\kappa\lambda$: & per 10.6 *diuidatur linea $\theta\iota$ sicut tota linea $\kappa\lambda$ diuisa est in puncto θ: sitq; linea $\theta\iota$ diuisa in puncto ζ.* Erit *sicut $\kappa\theta$ ad $\theta\lambda$, hoc est ad $\theta\iota$, ita $\theta\zeta$ ad $\zeta\iota$ &c.*

Centesimumdecimumquartum Theorema.

Si parallelogrammum contineatur ex residuo & binomio, cuius nomina sint commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione, linea quæ illam superficiem poteſt, eſt rationalis.



Contineatur parallelogrammum ex residuo αβ & binomio γδ, cuius binomij maius nomẽ sit γε, minus uero εδ: & sint commensurabilia nominibus residui αβ, quæ sint αζ, ζβ, & in eadem proportione. sitq; potens illud parallelogrammum linea, κ. dico lineam illam κ, esse rationalem. Proponatur rationalis θ, cuius quadrato æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum faciens alterum latus κλ. ergo linea κλ est residuum per 112: cuius nomina sint κμ, μλ quæ sunt commensurabilia binomij nominibus γε, εδ, & in eadem proportione per 112. Sed per positionem lineæ γε, εδ sunt commensurabiles lineis αζ, ζβ, & sunt in eadẽ proportione: erit ergo sicut αζ ad ζβ, ita κμ ad μλ. ergo permutata proportione sicut αζ ad κμ, ita ζβ ad μλ. ergo & reliqua αβ ad reliquam κλ erit sicut αζ ad κμ. sed linea αζ est commensurabilis lineæ κμ, quia utraque ex αζ, κμ est cõmensurabilis lineæ γε: ergo & linea αβ erit commensurabilis lineæ γλ. est autem sicut linea αβ ad lineam κλ, ita parallelogrammum ex γδ, αβ ad parallelogrammum ex γδ, κλ per 1.6. ergo parallelogrammum ex γδ, αβ est commẽsurabile parallelogrammo ex γδ, κλ: sed parallelogrammum ex γδ, κλ est æquale quadrato lineæ θ, ergo parallelogrammũ ex γδ, αβ est

commen-

commensurabile quadrato lineæ θ: sed parallelogrammum ex γ δ, α β est æquale quadrato lineæ κ, ergo quadratum lineæ θ erit commensurabile quadrato lineæ κ. sed quadratum lineæ θ est rationale, ergo & quadratũ lineæ κ erit rationale. ergo & linea κ erit rationalis: & potest parallelogrammum ex α β, γ δ. Ergo *si parallelogrammum contineatur &c.*

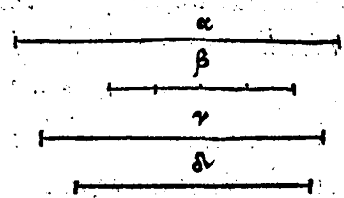
Corollarium.

Ex hoc manifestũ est, posse rationale parallelogrammum contineri ex lineis irrationalibus.

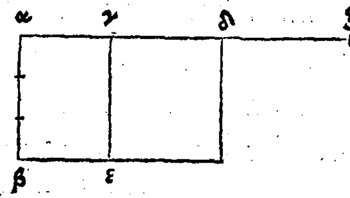
Centesimumdecimumquintum Theorema.

Ex linea mediali nascuntur lineæ irrationales innumerabiles, quarũ nulla ulli ante dictorũ eadẽ sit.

Sit linea medialis α γ. dico ex linea α γ innumerabiles gigni irrationales, quarũ nulla ulli ex antedictis irrationalibus eadẽ sit. Ducatur *super*



extremitate lineæ α γ perpendicularis α ϛ, quæ sit rationalis: & cõpleatur parallelogrammũ ϛ γ, ergo illud parallelogrãmũ β γ erit irrationale per ea quæ dicta sunt in fine demõstrationis 38: linea ergo quæ illud potest, erit similiter irrationalis. Sit *autẽ illa linea γ δ, quæ nulli ex ante dictis irrationalibus erit eadẽ: quia quadratũ huius γ δ secundũ lineã rationalẽ puta α ϛ applicatũ, facit alterum latus lineã medialem nempe α γ: nullius uero ex antedictis quadratum secundum rationalem applicatum, facit alterum latus lineam medialem.* Rursus *compleatur parallelogrammum ι δ, erit similiter illud parallelogrammum ι δ irrationale, & linea quæ illud potest etiã irrationalis, quæ*

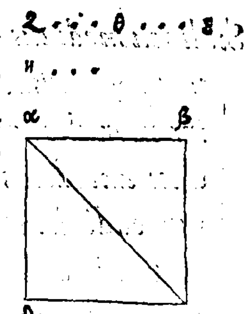


sit δ ζ: hæc similiter nulli ex antedictis irrationalibus eadem esse potest. Nullius *enim ex antedictis irrationalibus quadratum secundum rationalem applicatum facit alterum latus lineã γ δ.* Ergo *ex linea mediali &c.*

Centesimumdecimumsextum Theorema.

Propositum nobis esto, demonstrare in figuris quadratis diametrum esse longitudine incommensurabilem ipsi lateri.

Sit *quadratum, α β γ δ, cuius diameter α γ. dico lineam α γ esse longitudine incommensurabilem lineæ α β. si enim possit fieri, sit commẽsurabilis: dico tunc illud consequi eundem numerum esse parem & imparem.* Manifestum *est quadratum lineæ α γ esse duplum ad quadratũ*



lineæ α β per 47.1. Et *quoniam linea α γ est longitudine commensurabilis lineæ α β per hypothesin, ergo habebunt proportionem inter se, quam numerus ad numerũ per 5 huius.* Habeat *linea α γ ad lineã α β proportionẽ, quam numerus ι ζ, ad numerum η: sintq; illi numeri minimi omnium habentium eandem proportionẽ: nõ igitur numerus ι ζ erit unitas.* Nam *si ι ζ esset unitas, cum habeat proportionem ad η, sicut linea α γ ad lineam α β,*

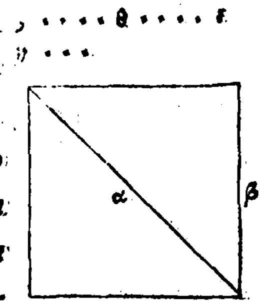
maior

maior autem ſit α γ quàm α β: maior ergo ι ζ unitas quàm numerus κ, quod eſt impoßibile. ergo ι ζ non eſt unitas, eſt ergo numerus. Et *quoniam eſt ſicut quadratũ lineæ α γ ad quadratum lineæ α β, ita quadratus numerus productus ex ι ζ ad quadratum numerum productum ex κ: nam utrobique eſt proportio ſuorum laterum duplicata per corollarium* 20. 6. & 11. 8: *proportio autem lineæ α γ ad lineam α β duplicata, eſt æqualis proportioni numeri ι ζ, ad numerum κ duplicatæ, quia eſt ſicut α γ ad α β, ita numerus ι ζ ad numerum κ: quadratum uero lineæ α γ eſt duplum ad quadratũ lineæ α β, ergo & quadratus productus ex numero ι ζ erit duplus ad numerum quadratum productum ex κ. ergo numerus quadratus ex ι ζ eſt par: quare & ipſe ι ζ erit etiam par: nam ſi ι ζ eſſet impar, etiã quadratus ex ipſo ι ζ eſſet impar per* 23. 9, *aut per* 29. 9. *Secetur ι ζ æqualiter & bifariam ubi eſt θ: quoniam numeri ι ζ, κ ſunt minimi ſuæ proportionis, ſunt inter ſe primi per* 24. 7: & *eſt ι ζ par, ergo numerus κ eſt impar.* Nam *ſi κ eſſet par, binarius numeraret utrunq; ι ζ, κ: (nam omnis numerus par habet partem dimidiam per definitionem) ſed illi numeri ι ζ, κ ſunt inter ſe primi: eſt ergo impoßibile eos binario aut alio numero quàm unitate numerari. ergo numerus κ eſt impar.* Et *quoniam numerus ι ζ eſt duplus ad ι θ, ergo numerus quadratus ex ι ζ eſt quadruplus ad numerum quadratum ex ι θ.* E*ſt autem numerus quadratus ex ι ζ duplus ad numerum quadratum ex κ, ergo numerus quadratus ex κ, eſt duplus ad numerum quadratum ex ι θ. ergo numerus qua-*

dratus ex η est par, ergo & per ea quæ modo dicta sunt, ipse numerus η est par: sed probatum est eum esse imparem, quod est impossibile, non igitur linea α γ erit longitudine commensurabilis lineæ α β. ergo erit longitudine incommensurabilis.

Aliter.

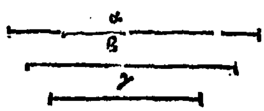
Alia ratione demonstremus diametrum esse longitudine incommẽsurabilem ipsi lateri: si negetur, sit diameter α, latus uero sit β: fiátq; rursus sicut α ad β, ita numerus ι ζ ad numerum η, & sint minimi suæ proportionis: ergo sunt inter se primi. dico primo numerum η non esse unitatem: nam si possibile est, sit unitas. Et quoniam est quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus ex ι ζ ad quadratum numerum ex η (ut dictum est in præcedẽti demonstratione.) sed quadratum lineæ α est duplum ad quadratum lineæ β, ergo numerus quadratus ex ι ζ ad numerum quadratum ex η, est duplus: sed per te numerus η est unitas, ergo numerus quadratus ex ι ζ est binarius, quod est impossibile: nõ ergo η erit unitas, ergo erit numerus. Et quoniam est sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratus numerus ex ι ζ ad quadratum numerũ ex η, ergo numerus quadratus ex ι ζ erit duplus ad numerum quadratum ex η: quare numerus quadratus ex η numerabit numerum quadratum ex ι ζ: ergo per 14, 8 numerus η, numerabit numerum ι ζ: sed etiã numerat seipsum, ergo numerus η numerabit



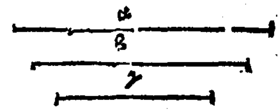
merabit numeros κ, ι, ζ: cũ tamen ſint inter ſe primi, quod eſt impoßibile. ergo linea α non erit longitudine cõmenſurabilis lineæ β: ergo erit eidem incommenſurabilis.

H*inc animaduerti poſſe puto, neutram harum demõſtrationũ eſſe* Theonis, *ſed nec theorema ipſum eſſe* Euclidis: *nam & tractatio tota demonſtrandi habet quod refelli poßit: nec refert eam diligẽtiam, qua in cæteris uſum fuiſſe* Theonẽ *ex ipſo uidere poſſumus.* Et *theorema ipſum uidetur non ſuo loco poſitum eſſe: debuit enim præcedere tractatũ linearum irrationaliũ.* Q*uanuis enim diameter ſit longitudine incommenſurabilis ipſi lateri, eſt tamen eidem commẽſurabilis potentia. ergo ſi latus ipſum aut diametrum poſueris eſſe lineam rationalem, neceſſario ſequitur & alterum, nempe latus ipſum aut diametrum eſſe rationalem, per definitionem linearum rationalium.* Huius *autem theorematis multo facillimã & certißimam demonſtrationem legere licet in eo libello, quem ſupra memorauimus* Ariſtotelis *περὶ ἀτόμων γραμμῶν.* Illud *quoque quod ſequitur, addititiũ eſſe nemo negauerit, qui intellexerit poſteriorem ipſius additionis partem pertinere ad libros conſequentes, perſcriptos de ſolidis: quia tamen & uerũ eſt quod dicitur, & continet rerum ipſarum intelligentiam, prætermittendum nobis uiſum non eſt.*

R*epertis lineis rectis longitudine inter ſe incommenſurabilibus, ut lineis α, β, reperiri poſſunt & aliæ quamplurimæ magnitudines ex binis dimẽſionibus*



conſtantes, quales ſunt plana ipſa ſiue ſuperficies, quæ *sint inter se incommensurabiles. Nam si inter lineas α, β sumatur media linea proportionalis γ, per*



13.6, erit sicut linea α ad lineam β, ita similis species figuræ descriptæ à linea α ad similem superficiem figuræ descriptæ à linea γ: similis, inquā, species ad similem speciem similiter descriptam, per secūdum corollarium 20 theorematis libri sexti, hoc est, siue illæ sint quadratæ, (quæ semper sunt inter se similes) siue fuerint aliæ quæpiam species rectilineæ similes, siue circuli circa diametros α, γ. Nam circuli habent eandem proportionem inter se, quam quadrata suarum diametrorum per 2. 12. ergo per secundam partem decimi theorematis huius libri, similis species figuræ descriptæ à linea α, erit incommensurabilis simili speciei similiter descriptæ à linea γ. Reperiuntur ergo hoc modo superficies inter se incommensurabiles. Simili ratione reperiuntur figuræ commensurabiles, si posueris lineas α, β esse inter se longitudine commensurabiles. Cum hæc ita sint, nunc demonstremus etiam in ipsis solidis esse quædam inter se commensurabilia, & quædam incommensurabilia. Nam si ex singulis quadratis linearum α, β, uel aliis figuris rectilineis, quæ sint illis quadratis æquales, erexerimus solida singula æquali altitudine, siue sint illa solida ex superficiebus æquidistantibus composita, siue pyramides, siue corpora serratilia, illa solida sic erecta, erunt inter se, sicut etiam ipsorum bases inter se, per 32.11, & per 5 & 6.12. De corporibus tamen serratilibus nullum est tale theorema. Et quidem si bases solidorum fuerint inter

ter

ter se commensurabiles, solida quoque erunt inter se cõmensurabilia: quòd si bases fuerint incommensurabiles, solida quoque erunt incommẽsurabilia, per 10 *huius libri decimi. At si fuerint circuli duo α, ϐ, & super singulos erecti coni siue cylindri, eadem altitudine erunt similiter inter se coni, & cylindri inter se, sicut ipsi circuli, qui sunt eorum bases per* 11. 12. *Et quidem si circuli fuerint inter se commẽsurabiles, similiter ipsi coni inter se, & cylindri inter se erunt cõmensurabiles. Quòd si fuerint circuli incommensurabiles, similiter & coni inter se, & cylindri inter se erunt incõmensurabiles, per* 10. *huius. Vnde constat, non in solis lineis & superficiebus esse commensurabilitatem aut incommẽsurabilitatem, sed in solidis quoque easdem reperiri.*

P. MONTAVREI CARMEN.

Hîc formas iam uictor ouans, normámq; repono.
Hîc ego secessus uoti damnatus adibo
Phœbe tuos, duce te saltus emensus opacos:
Saxáque peruia nũc multis, prius hospita paucis
Exæquata meo quæ concessere labori.
Mox, tua dũ magno concussus numine mentem
Thure uaporabit purus delubra sacerdos,
Et sacris operatus erit Bellaïus aris,
Ipse tua hoc iubeas monimentum dedicet arce.
Nam per nos tentare, nefas, sine uate profanos.
Comperto ut spatium quadrata æquale duobus
Redderet ex ternis, cuneo quæ subdita recto

Linea, Pythagoras Samius lectissima centum
Terga boum imposuit, uictor ceu splẽdidus, aris
Pieridum, magnis sibi parua rependere uisus.
Tanto illi potior multis sapientia nummis.
Ipse quoque imparibus donis imitatus eosdem,
Sit mihi fas, animos, at non ita dissimili in re,
Parua quidẽ illa tibi, sed quę mihi maxima, soluã
Munera. Diis quando pietas gratissima merces,
Me uotiua pium testabitur usque tabella.
Nostra tibi è multis cantabit pagina paucas
O Phœbi genus, inculto Sapientia laudes
Carmine, quóq; modo geminas res miscuit usus,
Et Sophiæ cõiunctus amor noua nomina duxit,
Cuius ut exemplo simul & sermone fruamur.
Nanque homines seclis quondam senioribus usi,
Qui studiis animos & tempora longa dederunt,
Naturæ in rebus, sapientum nomen adepti.
Quæ cum Pythagoræ ratio manasset in æuum,
Non tulit inuidiam senior. Nam forte Leonti
Cui regnata Phliuns, quondam cõgressus, & ore
Dum referat magno naturæ arcana parentis,
Admiranda dedit diuini signa uigoris,
Ingenio neque uisa minor facundia summo.
Quærentíque uiro, quánam confideret arte,
Ille quidem negat esse sibi quicquam ullius artis.
Sed studiis æterna tuis Sapientia duci,
Hinc sibi philosophi nomen finxisse nouum se.
Attonitus uocis nouitate, rogat quid in hac re
Poneret, an reliquos inter discrimen & istos.

Nec minimum discrimẽ, ait, quod ut ipse doceri
Me referente queas, in imagine cuncta notabo.
Nónne uides quãtis celebrentur Olympia ludis?
Quàm multis cuiusque modi mercatus abundet
Cœtibus ille frequẽs glomerãtibus? huic ego uitam
Persimilẽ esse hominũ dicam. Nam corporis illic
Pluribus ut uires, uarióque exercita motu
Fortia mẽbra solẽt celebres parere inde coronas,
Tenuia gloriolæ pereuntis pabula: quæstus
Excitat hos, aliena ut emant, aut ut sua uendant.
Quos præter genus illud inest, lõge anteferẽdum
Nobilitate aliis, laudem captantibus & rem:
Nec quoquã minus ingenuũ, qui nec sibi plaudi
Fronde coronatis optent, neq; crescere nummos.
Hoc tantum rerum quid ab unoquoq; geratur,
Et quo quidque modo, cura studióque sagaci
Lustrantes recolunt, & ab omni parte uorantes,
Intentis iucunda oculis spectacula quærunt.
Haud aliter quàm qui mercatum aliunde profecti,
Nos etiam ex aliis alias peruenimus oras:
Terrarúmque solum exilio sortimur habendum.
Hic alios quæstus, popularis gloria famæ
Sunt quos uana tenet multi: plerisque uoluptas
Imperat, in multis morbi non simplicis est uis.
Sed quid ago? innumerósne parem enumerare furores?
Perrarum genus illorum, qui maximus esse
Debebat numerus, rebus constanter omissis,
Posthabitísque aliis, quos recti cura sequendi
Ceperit, & ueri dederit simulacra tueri.

Andreas [illegible]

Cælestes animæ, quas incoluere beatas
Suspiciunt sine fine domos, & abesse querentes,
Quod reliquũ est, ĩhiãt animis, & mẽte morãtur.
Nec terras meminere procul spectare iacentes,
Hi tales, studio quibus est sapientia, sunto
Philosophi, & meritũ me iudice nomen habẽto.
Addidit, utque illic hominum liberrima sors est,
Qui spectant, rerúmque aliis cõmercia cedunt,
Sic studiis cunctis, animos quæ plurima uersant,
Naturæ indagare uias atque abdita præstat.
Sed neq; Pythagoras tanto modò nobilis author
Nomine, quin rebus multo magis amplificatis
Floruit: atque animos cultu molliuit agrestes,
Magna prius per quẽ ter maxima Græcia creuit.
Hæc mihi dictabat, uacua dum fessus in umbra
Rure suburbano instantes leuat arte ruinas
Labentis patriæ, & curarum Tullius æstum,
Purus & ipse fluens Graiorum fontibus haustis
Tullius, in Latium peregrinas doctus Athenas
Ferre, suósque nouis opibus ditare Quirites.
Materiẽ ille quidẽ, numeros sed Phœbus & artẽ
Sufficit, ulla modo nostri si carminis est ars.

FINIS.