Euclidis elemētorum

LIBER DECIMVS, PETRO Montaureo interprete.

Ad Ioannem Bellaium Cardinalem.

LVTETIAE

Apud Vascosanum, uia Iacobaa ad insigne Fontis.

M. D. LI.

CVM PRIVILEGIO.

PRIVILEGII SENTENTIA.

REgio *diplomate cautum eſt, ne quis alius præter* Vaſcoſanum *hunc* Euclidis *elementorum librum decimum, interprete* Petro Montaureo *uiro ſenatorio ante ſexennium imprimat, néue uendat.* Qui *ſecus fecerit, libris & pœna in ſanctione æſtimata multabitur.* Datum Bleſis *decimo* Calendas Februarij M. D. L.

De Moulins.

AD IO. BELLAIVM CARDI-
nalem Petri Montaurei
PRÆFATIO.

CVm ad inſitam mihi magno naturę erga me beneficio incredibilem diſ-ſcendi cupiditatem, illud quoq; iudicium progrediente ſenſim ætate ſtudióque confirmatum acceſſiſſet, nihil eſſe tam uehementer homini expetendum, quàm rerum maximarum perceptam habere naturam, feci nō inuitus adhuc, ut quò uocaret illa, eò me deduci facile paterer: in idq́; uitæ curriculum immitti, quod & dignitati hominis conuenientiſſimū, & naturæ præterea meæ accommodatum eſſet. huius uerò conſilij tantum abeſſe uideo ut me pœnitere cœperit, ut maiores etiam quotidie uberioréſque fructus mihi non contingere tantum ipſe ſentiam, ſed & deinceps multo præſtātiores perceptum iri certo ſperem. Nam quanto in altum longius euehimur, tanto laborē minui magis, qui maximus in cuiuſque rei principiis ſolet eſſe, animi uero uoluptatē nulla alia re tantū, quā diſcēdo ali augeríque cognoſcimus. Is autem meus in ſuſcipiēdo uitæ genere ſenſus cum uniuerſę philoſophię ſtudium mihi proponeret amplectēdum, ſimul animo ſubiiciebat illud, nihil in ea re magnopere profici poſſe, niſi quis ueterum philoſophorum ueſtigia ſumma diligentia perſequutus, eandem quam ipsi, uiam instituisset. Itaq; nihil, ut hoc quidem loco dicam de nostris cæterarũ philosophiæ partium studiis, ad mathematicam cognitionem animum applicans, in eum me locum sensim abductum diuertisse intelligo, unde suscepti primum institutíque illius itineris recordatio propemodum effluxerit: neque id uero repugnante me admodum. Quid enim est, cum ex ea philosophię parte, quæ omnis est in agendi rationibus occupata, tantum præceptorum acceperis, quãtum ad unius hominis reíque priuatę cuiusq; suę actionem attinet, unde maior animum ueri cupiditate flagrantissimũ permulcere possit oblectatio, quàm quæ ueri cognitionem subsequi solet. Nam illa quidem studia ciuilis disciplinę, quę publicis rebus consilio administrandis idonea totius hominum uitę multo pręstantissimas actiones ex recto rationis præscripto moderari debuerant, plane refrixerunt: tanta profecto perturbatione rerum omnium, ut cuius scientię ratio clauum aliquando in rerumpub. gubernatione magna cum sua laude, hominũ uero longe maxima felicitate, cursúque prospero tenuerit, eidem nũc sit uix aliquid relictũ in sentina loci. Tertia quædam supererat illa philosophãdi exercitatio, quæ naturam rerum persequens, ut est omnium ingeniorum cognitione dignissima, ita propter multiplices ipsius materiæ formas & motus incõstantes, acutum quoddam habet & subtile disputan-

di

di genus,sed obscurum tamē, adeóque repugnantes inter se summorum philosophorum sententias,ut uerisimilia tantum,non etiam uera docere uideri possit. Vna ergo est mathematicarū rerum tractatio, quæ constantibus necessariísque ducta principiis, uias quoque consimiles persecuta, eò nos progredientes manu ueluti ducit, ubi ueritatis ipsius cubilia,quæ quidem mētibus humanis sua ipsarum ui facultatéq; cerni queāt, explicet intuenda. Quid autem est,quod hac una re præstantius magnificentiúsque dici possit? An quid erit aliud, quod cuiquam anteuertendū uideri queat? Tibi certe non arbitror,Bellai amplissime,cui neque ad acumen ingenij doctrinę cultum, neque ad doctrinam iudicij uim deesse intelligo. Quæ cum ita sint in te illustria,ut fortunæ tuę, illius quidem per se splendidę, luminibus ego unus omnium minime blandus fortunę admirator offecisse putem,tibi homini grauissimo, idoneóque uiso de tota nostra ratione iudiciíque sensu perscribam paulo liberius: si forte plus authoritatis ex personę tuę dignitate nostra habitura est oratio,ut sane habitura est,ad iuuentutem in eum studiorū cursum,quem ualde uolumus, inducendam. Verum enim,ut ipse tecum,hoc est cum homine intelligente loquar, iampridem errabunde de uia deflexímus: ueterémque illam discendi consuetudinem prę studiis quibusdam nouis amisimus. Hîc cū plurima quę recte dici pos-

ſint,omittenda ducam,unum illud quidem certe
nunc maxime mihi dicẽdum eſt,illius perturba-
tionis,de qua paulo ante diximus,eã eſſe cauſam,
& potiſſimã quidem, quòd totius inſtitutionis,
quã à pueris παιδείαν ueteres illi ueritatis magi-
ſtri uocare ſoliti ſunt,priſcis quondam ſeculis
tantopere conſeruatę,ea eſt , hac quidem ætate,
peruerſitas,ut quod primum potiſſimúmque ſtu
diorum eſſe debuerat, perexiguũ quidem omni-
no locum apud nos,plurimorum autem homi-
num iudiciis nullam etiam dignitatis æſtimatio-
níſque partem mereatur aut obtineat.Quid ergo
eſt?dicat aliquis, quid habes quod reprehendas?
Ego uero permulta, penę dixi omnia, ut iam in-
dubitãter illud affirmare poſſim,tum demũ opti-
me rebus hominum conſultũ iri,cum illud poë-
tarum ὕστερον πρότερον ipſi in ſuas actiones tranſtule
rint: quódque primum ducunt,poſtremũ habue-
runt,& quod poſtremo,aut,ut uerius dicam,nul-
lo loco ipſis eſt,ſi primum exiſtimauerunt. Nunc
unius artis , uixdum etiã artis præſidiis opibúſq;
immodicis tam flagitioſe circũuenti tãtis clamo-
ribus obtundimur,ut naturæ uox ad ſcientiæ cu-
piditatem inuitantis, ne exaudiri quidem ulla
ratione queat. Quæ ſi loco ſuo cõtenta non ſe cõ-
mouiſſet,diiudicandíſque hominum litibus oc-
cupata munus alienum aut nũquam appetiiſſet,
aut certe non impediiſſet,minus profecto habe-
remus quod dolẽdum uideretur: eſt enim & iu-
diciis

diciis accommodata: iudicia porro ipsa disceptationibus rerum controuersarũ, quibus carere nullo modo possumus, pernecessaria. Neque sane est in ea re quod reprehẽdi iure possit, si quis morem maiorum in illa consequẽda retineat, ut philosophiæ totius institutis abunde suppeditatis, hanc ipsam illius quidem imitationẽ quandã & quasi sobolem aggrediatur discere, cum intellexerit id quod in genere sciẽtiarum est perpetuum, ut aliis aliæ subsint, idem ipsum hîc quoque fieri, ut iurisperitia philosophię partẽ illam, quę est de moribus tum singulorum tum uniuersorũ, tãquam architectam agnoscat & obseruet. Sed hæc tota cõtrouersorum ratio iudiciorum illius partis est iustitię, quæ συναλλάγματα tantum continet. Nam de altera illa quæ multo est & dignitate præstantior & utilitate in omnem uitę societatem uberior, quæ præmia recte factis, pœnásque sceleribus pro rata cuiúsque rei personęq; portione distribuens, duo uincula rerumpub. firmissima cõplectitur, aut omnino de iusti ipsius ui atque natura, ne literam quidem: se tamen ueram philosophiam profiteri rerúmq; maximam gubernationi unam idoneam prædicans, illam ipsam philosophiam, cum omnium artium parentem, tum uero erga se beneficentissimã magistrámque uitę certissimam lędens, dignitatis inuadit possessionẽ alienę: neque se animaduertit (ne quid ipse criminosius dicam) alienum appetentem contra ſua ipſius, quid autem dico ſua? imò magis cõtra rationis uniuerſę decreta, cuique ſuũ minime tribuere: quámque matris loco uereri debuerat ab ipſa genita & educata, unde ſuum aliquem in repub. locum ut tenere poſſet, habuerat, quod in parentes impij filij ſolent, ipſi quaſi ſenectute deſipienti, ut bonorum ſuorum adminiſtrationi interdiceretur, efficere. Nã ſi nihil aliud eſſet, quis quæſo remigem in naui ferat gubernatoris munus arrogãter affectantem? Iam uero ut à primis ordiamur, hæc totas urbes ſuis ſacris initiorúmque pertractationi cõſecratas habet: ad quas undique concurſus puerorum iuuenúmq; fiant, nõ tam diſcendi, quàm à magiſtris diſcedendi cupidorum: ſic ætas maxime imbecilla, ſuíque impotens, effrenis, incuſtodita, ſuo unius impetu ferenda permittitur, quam unam alieno parẽtem imperio, authoritate bonorum nixam, inſolẽtiæ, leuitati, audacię, uoluptati frenum cęteris etiã animorum motibus modum imponendum eſſe maxime doceri oportuit: híſque uocibus aſſiduè aures illius perſonare, ut concurſantes immenſíque cupiditatum æſtus, quibus ætas illa plurimũ nata eſt commoueri, reprimerẽtur. At enim qui recte præcipiãt, doceántq; pręſto ſunt, ſi modo eos audire in animum induxerint. Credo ſane, quod ad illorum artem attinet, ut eſt captus horum hominum & temporum, non indiligenter exponere teſtamẽta, ſubſtitutiones, obligationes, ſtipulationes,

lationes. Sed quid hæc ad mores informãdos? Ita fit ut alij ne audiantur quidem, propter abhorrentem ab illis studiis multorum ingeniorum naturam: alij quãuis studiose soleant audiri, tamẽ uel rei ipsius per se æstuosę traditione perplexa, uel docendi imperitia præpediti, nihilo doctiores amittant auditores, quã acceperint. Ex quo illud malum interea sequi omnino necesse est in iuuenum animis, cum uoluptates ex doctrina institutionéque liberales ipsi non habeant, ut consectandis alienis illiberalibúsq; totos sese dedant: prorsus enim eos aliquid agere quietémque contemnere, necesse est. Pauci quidã ex illo sunt genere, qui glorię, nescio cuius, utilitatísque expectatione deliniti, è toto studiorum suorum quinquennio fructus tenues illos quidem & austeros, sed quęsitos tamen colligant. Præclara uero res, hominem natura quidẽ ipsum sua nullius uirtutis, uitiíue pręsentia habitúue fretum, uerum facultatibus nudis in utrãuis partem ferentibus, præditum, magis tamen improbãdorũ exemplorum multitudine, opinionúmque peruersitate deprauatum: cum opes, honores, diuitias præcipue duxerit expetendas, ad alendum morbum ex contagione contractum. artem etiam per omne uitę tempus exercẽdam adhibere: cuius tota ratio disputandi sit de meo & tuo: déque iis rebus & modis, quibus quod meum est, tuum effici possit. Ad quam quidem disciplinã nimis multos dociliores reddi ſcimus, quàm ſocietati hominũ conducat tranquille conſtantérque moderandę. Ita credo priſcos illos non tam antiquitate quàm dignitate memorabiles uiros, domi foríſq; in ſua quęque ciuitate rerum geſtarum gloria pręſtantes, liberos ſuos ad maiorum imitationẽ inſtituiſſe: ac non potius Athenas, Rhodum, Maſſiliam, & quò non? ad cultum ingenij capeſſendum, mercaturámque artium optimarum dimiſiſſe. Vnde philoſophię pręceptis inſtructi, cum ſe ipſi regere didiciſſent, agendíſque rebus adhiberentur, non ex artis illius formulis, ſed ex iuſtitię ſcitis immutabilibus hominum cœtus, & quidem uolentiũ, regendos acciperent. Age modo, hunc ipſum hominem ex hac noſtra exercitatione, tali cultu educationéque in forum ex umbra tanquã in aciem producamus: ut ſtudij ſui rationẽ & uſum aliquẽ nobis tandem explicet. Ibi uero quanta prudentia, grauitate, conſtantia, probitate ſe gerat, dicere meũ non eſt. Vos quæſo dicite Pierides, & quidem hominibus ignaris: nobis enim nihil attinet, quos plura ſcire neceſſe eſt, quàm referre iuuet. hoc tãtum dicam, cum ſe exiſtiment parum in ea arte profecturos, niſi toti ſint in illius cognitione per omnem uitę curſum occupati, tantúmque ſibi periiſſe temporis, quantũ aliis ſtudiis acceſſant, homines ignorantes quantũ cuique ſciẽtię temporis ſit tribuẽdum, nimis magnam mercedem ſtatuũt, ſi pręſtantiſſimarum rerum, officij dico munerísq; sui ignoratione, hæc una fortuitarum rerũ cognitio disceptatrix sibi ipsis cõparanda uideatur: neque uero intelligunt rei per se infinitę finem nullũ reperiri posse. Verùm ipse me longius scribendo prouectum in offensiones multorum incurrisse uideo, quod equidem nollem: sed cum nulla remedia tam faciãt dolorem quàm quę sunt salutaria, si quid est quod sanari possit, plus apud me ualere debere nonnullorum salutem quàm plurimorum indignationẽ ex remediorum acerbitate collectã semper existimaui. Quod cũ optimis quibusque uiris, quales iam bene multos hic noster ordo recipit, probatũ iri certo sciam, de cęteris minus est mihi laborandũ. Atque haud scio an quę auditu nunc quidẽ grauia acerbáque uideãtur, ipsis in experiundo suauissima futura sint: ut longior oratio comprobãdę rationis huius causa defensióque nulla requiratur alia, nisi quã rei ipsius intellectę perceptio attulerit. Neque quenquam accepimus aut uidimus, qui, cum utrãque scientiam tenuisset, non utrãque adamaret: alteram uero nobiscum etiã admirationi maximę summóque studio non habuisset. Porro alterius expertem & ignarum, de utraque iudicium suum esse uelle iniurium est. Pręterea fuit ea profecto semper grauissimorum eruditissimorúmque hominum omnibus seculis de tota uitę ratione consensio, cum expetendarũ rerum tria summa genera reperirẽtur, ut bonorum animi prima potiſſimáq; eſſet dignatio: cæterorum autem, ut quęque proxime nos attingerent. Ex quo illud efficeretur neceſſario, ſcientiarum quoque quæ bonorum adipiſcẽdorum uias perſequerentur & traderent, eandem eſſe debere rationem: ut cuiuſque rei pręſtantiſſima uis eſſet, ita ſcientię, cui res ea ſubiiceretur, illi plurimum & tẽporis & induſtrię noſtrę deberetur. Ad quã ſane normam ſi ſtudia noſtrorum hominum ab ipſis exigerentur, & firmior animorum tranquillitas, & uero maior ex ipſis in repub. eſſet utilitas: eiúſque mali, cuius mole propemodum obruti leuationem aliquam iampridem expoſcimus, medicinam non leuem haberemus: cum non eſſent qui litigioſorum hominum audaciam, flagitium, furorem inconſultis ſuis conſiliis adiuuantes, aut potius ipſos inter ſeſe miſerrimo concertationũ genere committentes, alienis incõmodis ad ſuas utilitates per iuſtitię conſeruandę ſpeciem abuti uellẽt: quódque rerum omnium pręcipuum eſt, illud boni pręterea conſequerẽtur, ut improbitas uirtuti ſuo loco dignitatíque reſtitutę in rerũ adminiſtratione facile cõcederet. hoc enim munus eſſe philoſophię unius maxime proprium, humánarum rerum artem moderandarũ diuinarúmque ſcientiam tradere quis non uidet? qui modo rem ullam unquã mentis acie perceperit? Ne forte homines rerum omnium imperiti criminẽtur eam otij tantum eſſe, nõ item negotij. Cuius quidem

dem calumnię perfacilis esset mihi quoque refellendę ratio, nisi rem huius loci, aut operis nõ esse intelligerem: ipsam tamen etiam scriptis grauissimis cuiusque ætatis hominũ prudentissimorum agitatã; tum uero unius Iacobi Sadoleti uiri præstantissimi doctissimíque libello pereleganti, ab eo perscripto tanta diligentia & eruditione, ut maiore scribi posse non existimem. Quòd si exẽplis agẽdum esset, nonne permultos omnibus historię monimentis celebratos accepimus, qui studia doctrinę ad rerumpub. moderationem conferentes, ciuitatum suarum statum ab initio constituerint, cõseruauerint, perditúmque restituerint, *tanta* omniũ gentium admiratione, ut summis etiam honoribus deferendis magnitudinem meritorum assequi se nullo modo posse faterentur? Quid enim? (ut uetera omittamus) nũquid unquam grauissimum sanctissimúmq; istud uestrum cardinalium collegium pœnituit, quantũ dignitatis ornamentíque ex duorum hominum studiis, uirtute prudentiáque percepisset, Gasparis Contareni, & huius ipsius, de quo modo dixi, Sadoleti? Quorũ ille per omnes pene gradus honorum in moderatissima florẽtissimáque Venetorum repub. peruagatus, suis ciuibus ita se probauit, ut pręsentem colerent & admirarẽtur: absentem etiam propter singularis uirtutis memoriam permanentem requirerent, uobísque ipsis, qui abs se ciuem totius ciuitatis optimũm nihil tále ambientem aut omnino cogitantem abduxiſſetis, pene inuiderent. Et ſane fuit ille uir omni laude cumulatus, tum propter excellentẽ doctrinam, tum etiam probitatem & prudentiam multarum gentium imperio digniſſimus: hic uero alter magis eſt otio delectatus, nõ illo quidẽ inani, ſed fructuoſo in omnem poſteritatẽ & literato. Quid de Petro Bembo & Nicolao Ridolfo uiris certe in omni uirtutum genere maximis dicam? Libẽtius autem in commemoratione mortuorũ noſtra uerſatur oratio, ne quid aſſentationi uiuorum tribuiſſe iudicetur, ſi eorũ qui nunc ſunt, laudationes attingeret. Hi quidẽ in philoſophię ſinu ſtatim à pueris educati tales ad rempub. cum acceſſiſſent, utilitates ex ſe permagnas uniuerſo quidem hominũ generi maxime, ſibi uero ipſis immortalitatem præterea glorię cõpararunt. Quorum ſi qui ſtudia imitatione cõſequuti erunt, quî fieri poteſt, ut reſpub. non maximam ſuę dignitatis recipiendę ſpem in illorum prudentia & moderatione ſibi repoſitam arbitretur? Ac profecto fuit tempus illud ſane mihi periucũdum, cũ ſpes eſſet melius fore, propter alacritatẽ animorũ in id ſtadium ſeſe dedentiũ, quod eſt ad ueram gloriam expeditiſſimum: niſi permultorum ſtudia cogitationéſque in alia traduxiſſet ſua ipſorũ credulitas, neſcio cuius hominis uanitati aſſentientium. Itáne uero? quo quęque uox proferetur abſurdior eo facilius in animis noſtris uiam ad perſuadendum

ſuadendum inueniet? Ergo repertus eſt, ſi diis placet, qui cum bellum nefarium omnibus bonis artibus indixiſſet, & ſapientię fructũ iam plane maxima bonorum omnium gratulatione renaſcentis nobis inuideret, Lutetię in luce atque oculis nõ Gallię modo, ſed totius Europę caſtra figeret ignorantię: & uniuerſę philoſophię uitęq́; adeo è philoſophia conſtituendę authorẽ Ariſtotelẽ oppugnatum palam etiam accederet, nihil in dialecticis, nihil in phyſicis, nihil uſquam ueri uidiſſe aut tradidiſſe argueret. Audax negotium dicerem & impudens, niſi uerborum omniũ acerbitatem rei ipſius per ſe inauditę neque tam audiendę indignitas ipſa ſuperaret. O imperitos maiores noſtros, qui nunquam quiuerũt iſtud animo intelligere! Quid eſt quod profectum eſſe dicam recenti ſophiſtarum clade, atque exilio, ſi ſophiſtas alios aſciſcimus? Quaſi uero non iam miſerrimam rerum omnium ignorationem deprecemur, ſed mutationem tantum in ipſis ignorantię magiſtris expetamus. At certe totum illud eiuſmodi eſt, ut cenſoria magis animaduerſione, quã cuiuſquam omnino contra diſputantes oratione reprimendum ſit. Neque uero de hac ipſa re uerbum ullũ facturus eram, ſi moderatius inſaniendum ſibi putaſſet: ſuáque ipſe contentus iuuentutis credulę & rerũ imperitę non augeret ignauiã: nam de ipſo quidem leuior omnino iactura fuerat. Impune eſſe cuique debet periculo ſuo inſanire: ſed cum ad aliorum perniciem morbus animi conuertitur, id uero ferendũ nõ eſt. Huic certe malo niſi maturis conſiliis obuiam eatur, & audaciſſimos impetus diligentia continuerit magiſtratuum, ne pręclara illa ſtudiorum nobis promiſſa compendia permagno conſtiterint iuuentuti: cum grauiſſima mercede totius temporis iactura didicerit nihil è nouis illis, ſed non ſatis eruditis magiſtris, interea niſi arrogantis cuiuſdã & confidentis ignorantiæ ignauięque pręcepta didiciſſe. Sed de hac re tota ſatis hactenus: aliàs fortaſſe pluribus, ſi commodum erit. Nũc autẽ quod eſt huius potiſſimũ loci & inſtituti perſequamur. Cum itaque, ut ante dictum eſt, mathematicã cognitionem uniuerſam iam tum à prima iuuentute uehementer amplexatus eſſem, & ſępius ipſe per me Euclidis elementa reuoluerem, in cęteris quidem libris modicus ſane labor mihi fuit: ubi uero decimum hũc multorum opinione perobſcurum attigiſſem, ea certe opinio non mediocri mihi quoque fraudi fuit, cum nõ arbitrarer, qui locus à pleriſque propter ſuſpectam ipſius difficultatem pręteriri ſolitus eſſet, mihi nõ periturũ, quicquid in eo laboris impendiſſem. Itaque plurima extrinſecus adiumenta mihi ipſe excogitãs, iterum atque iterum repetita diligenti lectione, cum nihilo minor maneret rei ipſius obſcuritas, cœpi cogitare unũ Euclidem in primis libris ſibi ipſi ad ipſorum intelligẽtiam ſufficere: neq; fieri

poſſe

posse, ut suum in docendo modũ atque ordinem repudians, hîc alienum quendam & nouum adhiberet. Vtq; uia simpliciori cum rem aggredi cœpissem, sola librorum pręcedentium ipsius Euclidis ope, & uocum simpliciũ quæ sunt huic libro maxime proprię, intelligentia, omnia uisa sunt quàm antea illustriora multo atque clariora: Euclidémque sui ubique similem hoc quoque libro ut olim cogitatione præceperam, nullius omnino rei externę indigentem, se ipso contentũ: rem illam quidem paulominus inuulgatam, sed alia ratione nulla, neq; alia uia, quàm sua & familiari tradere plane uidi: hæc uero est, ut à rebus cognitis ad ignotas sensim progrediẽs ex prioribus rerum subsequentium comprobet intelligentiam, & ueritatem. Quæ cum perspicerem, in eáque re sæpenumero uersatus, magnáque animi intẽtione & studio singulas quásque res inter se conuenire, nihil collidere intelligerem, nullam moram studiis hominum putaui, quantum per me effici posset, diutius afferendã, quin laboribus nostris animíque exercitationibus fruerentur. Cúmque ex maiorum lucubrationibus, quo posteritatem iuuaremus, aliquid uideremur cõsequuti, & quibus omnia deberemus nihil esset quod post mortem hominibus bene meritis gratius per nos referri posse uideretur, quàm si quorum industriã experti uehemẽter admiramur & suspicimus, eorum etiam humanitatis exemplum studiúmque

poſteritatis adiuuandȩ uellemus imitari, cœpi cõ
ſilium rei totius illuſtrandæ. Itaque Græcorum
demonſtrationes interpretãdo conſequutus, ſi-
ue fuerint illȩ Euclidis ſingulorúmue geometra-
rum, quorum ſymbolis hoc totum eſt opus abſo-
lutum, ſiue ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν, ubi preſſius ſubti-
liúſque compoſitȩ uidebãtur, fuſiore quodã ſcri-
bẽdi genere ita patefeciſſe me puto, ut lectori nõ
dormitanti, ſed attento nihil deeſſe poſſit ad rerũ
intelligẽtiam: obitérque uiam & rationem reſol-
uendi in primis theorema exemplorum copia no
tauimus. Sed quo res adhuc multis incognita cõ-
mendetur uberius, placuit nonnulla ex ueterum
libris, Procli in primis, arbitratu quidem noſtro
ſumpta, Latinis literis illuſtrata proponere. qui-
bus initiis mathematica ducta cognitio, quam al
tum ediderit rerum maximarũ faſtigium: ut quã
incredibilem ex ſe utilitatẽ ſeculis prioribus attu
lerit, eandem quoque ſibi de ipſa polliceantur ho
mines, ſi modo penitius ea ſtudia inſpexerint: ne-
que, quod adhuc factum eſt, in primo liminis adi
tu, uixdum quinque ſéxue paſſus (totidem enim
libris uulgo contenti ſunt) in ea re progreſſi, reſti-
terint. Illud itaque ſciendum eſt, quod finitum &
infinitum dicitur, principia ſumma eſſe mathe-
maticarum ſpecierum omnium. Nam ea princi-
pia inter ſe aliter atque aliter copulata, ſufficiunt
ad generandam eam uarietatẽ, quæ in rebus ipſis
cernitur. Inde fit ut ipſarum proportiones in infi-

nitum

nitum excrescant: quas tamen ipsas finiri etiam necesse est, ob eam saltē causam, quia finiti quoq; naturam in ipsis existentem continent. Primum enim in arithmeticis, si ab unitate cœperis progrediendo, reperies mundos in infinitum augeri: neque unquam excrescendi finem, ubi quiescant ipsi, fieri posse, ut cum eò perueneris, cessandum in illo numerorum auctu tibi prorsus intelligas. Quęcunque porro numerum effeceris, illum omnino finitū esse necesse est. Deinde in ipsis quoque magnitudinibus idem apparet, ut in infinitū diuisio illarum fieri possit. Ipsę uero res ita diuisę, omnino (& quod dicitur) actu ipso finitę sunt: ut cum diuiditur aliquod totū in partes suas unde componitur, necesse est ipsas partes quæ ex diuisione procedunt, esse finitas: nam nisi finitę essent, ne partes quidem ipsę esse possent. Præterea si nihil esset infinitum, illa duo perabsurde cōsequerentur, & ut magnitudines omnes essent cōmensurabiles, neque in ipsis quicquam incōmensurabile: ideóque ne irrationale quidem. Hoc autem est, quo differunt ea, quæ in geometria pertractantur ab arithmeticis: siquidem in illis sunt quædam irrationalia, de quibus hoc libro: in arithmeticis uero nihil irrationale, aut incommensurabile cognoscitur: sunt enim omnes numeri commensurabiles inter se, ea saltem mēsura, quę minima est in numeris, nempe unitate. Alterum quod perabsurde sequeretur, si nihil esset infinitū illud est, quod ea uis & facultas unitatis, ut ex se numerorum sobolem infinitã procreare queat, non existeret: neque uero numeri proportiones omnes intra se continerent, quas in rebus singulis inesse perspicimus, multiplices dico, superparticulares & reliquas tales. Omnis enim numerus unitati comparatus ad ipsam unitatẽ habet proportionem aliam, quã idem ipse numerus ad aliũ numerum comparatus. Similiter si finitum nihil erit, commensurabilitas & communio proportionum, similitudo & æqualitas specierũ, cęteráque huiusmodi quæ melioris cuiusdam sunt generis, in rebus distinguendis nulla sint: quæ tamẽ ipsa in mathematicis esse conspicimus. Ea uero si non essent, ne mathematica quidem ulla scientia superesset, cum nihil certo, constanter subtilitér ue diceretur, quod cogitatione firma concipi posset. Quantum uero utilitatis ea scientia communi hominum uitę & societati conferat, id quidẽ non ad usus ipsius uitę necessarios respicientẽ æstimare conuenit: ita enim fieret ut cognitionem omnem & cõtemplationem rerum tanquã inutilem repudiaremus, quippe quæ à rerum humanarum necessaria suppeditatione sese quàm longissime soleat abducere, ne earum quidem rerũ ullam omnino cognitionem aut curam appetẽs, quibus usus uitę necessarius cõtineri solet. Est uero mathematicę scientię sua certa, propriáque dignitas & utilitas, illa quidem per se æstimanda,

neque

neque quicquam externum reſpiciens, quò ſe re-
ferat, nullius omnino rei miniſterio ſuam utilita
tem accommodãs, neque uitę neceſsitati ſubſer-
uiens. Quin & liberales diſciplinę à libertate di-
ctę, ſui nominis dignitatem ſuſtinere tueríue nul
lo modo poſsint, ſi ad ſeruiendum uſibus neceſſa-
riis reuocentur. Quòd ſi ulla ratione illud admit-
tendum uidebitur, ut aliud quippiam extra ſe ſpe
ctare debeat, cuius utilitatem conſectandam ſibi
putet, quid eſt in omni rerum uniuerſitate ſplen-
didius & magis excellens, quàm quod mathema
tica ſcientia uiam munire ſolet animis noſtris?
eámque certiſsimam ad rerum intelligibilium,
omni materia ſolutarum cognitionem abſolutã?
Et quidem ſi qua eſt utilitas expetẽda, illa eſt pro-
fecto, quam ex ſe pręſtantiſsimam & eximiã pro-
fert: nam & quaſi manu ducit ad res intelligibi-
les percipiendas: & quod eſt in Timęo ſcriptũ di-
uinitus, illius ſciẽtię cognitio uia quædam eſt ad
plenam & integram mentis noſtrę inſtitutionẽ:
cuius rei ea certe cauſa eſt atque ratio, quòd eadẽ
eſt ipſi proportio ad cognitionem totius & pri-
mam philoſophiam, quæ eſt inſtitutioni puerili
ad uirtutis ipſius ſummam & habitũ. Hæc enim
efficit bonis & rectis moribus aſſuefaciendos, ut
animus puerilis ad uitam ex uera uirtute perfe-
ctam adoleſcat: illa uero animi noſtri partẽ eam
quæ διάνοια dicitur ita ſuis commoditatibus in-
ſtruit & cumulat, ut multo paratior ad res exi-

mias inſpiciēdas & cognoſcēdas accedat. Ex quo Socratis uerißimū illud mihi uideri ſolet, oculū animę, quem mentē dicimus, ipſum quidē ſtudiis & cupiditatibus obtutúque rerum alienarū excęcatum, & ueluti defoſſum, ſolę ſciētiæ ratione diligentiáque recreatum excitari, & quodam ueluti collyrio perſanatum cōualeſcere ſolere: ita ſane, ut rurſum ad ſpeculationem ipſius entis, ab imaginibúſque perſpectis ad res ipſas, quarum illę fuerāt imagines, erigi: & tanquam ex caliginoſo ſpecu in locū illuſtrißimū eductus, illud ipſum lumen intelligibile acie conſtanti poßit intueri: omninóque carcere quodam egreſſus, & rerum generabilium uinculis inconſtantíſque materiæ nodoſa uarietate tandem exolutus, ad incorpoream & impartibilem ſubſtantiam attolli. Nam & pulchritudo & ordinis illius ratio, qui in mathematicis elucet diſciplinis, ipſáque rerum ibidem perſpectarum certa conſtantia, animum noſtrum propius ſiſtunt ad intelligibilia, ipſa quoq; ſemper eodem modo ſe habētia, pulchritudiníq; diuinę conuenientißima. Quæ cum ita ſint, mathematica ſcientia eſt & ipſa quidē per ſe & ſuapte ui dignißima, quæ ſtudioſe colatur: neque tamen non plurimum momenti ad eam uitam affert, quæ mentis unius maxime propria eſt & accommodata. Illud autem in hac re ſatis eſt argumenti ſciētiam eam per ſe ſua ipſius dignitate & æſtimatione niti, ut eſt quodam loco ſcriptum ab

Aristotele,quòd qui res illas exquisiuerunt,nullo prҿmio,magna diligentia studióque uehementi illud sunt assequuti,ut paruo temporis interuallo illa permagnum acciperet incremẽtum,cum ipsi cæteris omnibus posthabitis huic uni studio se toto tradidissent:atq; hi maxime, qui diuiniore natura præditi,diuinitatẽ suis factis exprimere,quoad licitum esset, elaborauerunt.Itaque uerissimũ illud est,si qui sunt,qui contẽptui habendum hoc studium existiment,eos sine gustu esse summarum,quæ quidem in homine libero constantiq; existere possunt, uoluptatũ.Quid ergo? nunquid habet ea sciẽtia quod contemni debeat, ea re tantum quod nihil adiuuet cõmunis hominum uitҿ necessarias utilitates? Nullo certe modo:nam & extremi illius effectus ubi se cum materia coniungere incipiunt,eò maxime tendunt, ut paulo post dicturi sumus. Quin eo maiore digna res est admiratione,quòd citra ullius omnino materiҿ contagionem suum ipsa finem in eóque fine situm bonum persequatur: & in se ipsa conuersa nihil spectet externum: homines enim rerum ad usum uitҿ necessarium comparandarũ occupationibus uacui plane solutíq;,sese ad sciendum scientiæque adoptionem contulerunt: neque id tamen non recte,cum prima cura rerum illarum esse debeat,quibus natura ipsa ad sui educationem & tuitionẽ carere nullo modo potest. Huic porro si quãdo satisfactũ erit,hoc est, si na-

naturam ducem conſequuti, cupiditatem haben di rerum neceſſariarum modo naturáque metiri uoluerimus, tũ uero illa nos cogitatio debet excipere, rerum à neceſſitate generationéque remotarum, & uerum ipſum proxime attingentium: quod cum acciderit, unà quoque id quod in anima noſtra inchoatum & rude fuerat, integrũ abſoluitur & perpolitum. Scientię porro mathematicę diuiſioné eam attulerũt ueterum plęriq;, inter quos & Geminus, ut dicerét aliam quidem circa res uerſari ſolo intellectu perceptiles, aliam uero res ſenſui ſubiectas pertractare. Res autem intelligibiles illas eſſe dixerunt, quarũ intelligentiam ipſe per ſe animus abſque ulla rerum ſenſilium participatione ſeipſum ad contemplationé excitans perſequitur: cuius generis duę ſunt pręcipuę potiſſimęq; partes, arithmetica, & geometria: alterũ uero genus quod rebus ſenſilibus addictum illa ſex comprehendit, aſtrologiam, muſicam, ſupputatricem, mechanicã, perſpectiuam, menſuratricem. Nam quod ad inſtruendas pertinet acies, (τακτικὴν uocant) in partibus mathematicę habendum non arbitrãtur, quãuis interdum ipſius auxiliis uti adiuuaríque ſoleat, modo ſupputatricem adhibeas, ut in enumerandis copiis, modo & menſuratricem, id eſt, γεωδαισίαν, ubi diuidenda ſunt caſtrorum metatione campi ſpatia & dimetiẽda: multo uero minus aut hiſtoriam aut medendi artem dixeris parté ullam eſſe mathe-

maticę,

maticę, licet utraque ipsius ope interdum adiuuetur. Nam & historię perscribendę mathematica theoremata solere scimus appingi, ubi tractus sitúsque regionũ, urbium magnitudines, diametros, ambitus colligere uolunt. Ipsi quidem medici quã multa in arte sua, quàm elucidate tractant fidei mathematicæ cognitionis subsidio? Nam quod ad astrologiam pertinet, quanta eius in omnem medicinę partẽ manare possit utilitas, docent de ea re scripti diligenter Hippocratis libri: cęteri quoque omnes, qui modò de tempestatum ratione locorúmque situ sibi scribendum putauerũt. Eadem quoque ratio erit eius, qui aciebus instruẽdis operam accommodat: nam utetur & ipse mathematicis theorematibus: neq; tamẽ cõtinuo mathematici nomine perhibẽdus, licet aliquando quàm minimos cupiens in speciẽ uideri suos exercitus ad circuli figurã constituat, castrorum ambitum nonnunquam in quadratum pentagonum aut aliam multorum angulorum formam, ubi quàm maximos apparere cupit. Tales autem primę species cum sint ipsius mathematicę, geometria rursus diuiditur in tractatus duos, alterum planorum, alterũ solidorum: nam punctorum & linearum propria nulla omnino ars reperiri potest, cum nulla figura punctis aut lineis constet, quæ non simul plana sit aut solida. Nihil enim aliud agit geometria ulla sui parte, quàm ut plana & solida cõstituat: constitutã inter se comparet aut diuidat. Hoc idem efficitur in arithmetica: nam & numeri diuiduntur in lineares, planos & solidos, quorum omnium singulatim sua est tractatio. Nam & species numerorũ ipsę per se ab unitate prodeuntes explicantur, & generationes planorum, similium, inquam, & dissimilium, & solidorum etiam, qui tertia quadã multiplicatione confici solent. Illa autem quam mensuratricem dicimus, item alia quam supputatricem superiorum similitudinem nonnullam referentes, ipsę tamen sunt in eo dissimiles, quòd non de numeris aut figuris intellectu solo comprehensis inuestigant, sed de sensilibus: neque enim munus mensuratricis esse posueris, ut cylindrum aut conum metiatur, sed rerum in materia demersarum aceruos tanquam conos, puteos autem ut cylindros: sed neque lineis quibusdam intelligibilibus id assequitur, uerum sensilibus, & ut exactissime, radiis solaribus: ruditer autẽ, per applicationem amussis lineæ, aut alterius rei non dissimilis opera, quæ materia constet. Quam uero diximus supputatricem, ne ea quidem passiones numerorum ipsas per se cõsiderat, sed numeros rebus materialibus inuolutos: & diuidendo quidem nihil statuit esse minimum, quomodo neque arithmetica: quod tamẽ spectat ad certum genus unum, ponit aliquid quod sit minimum: unus enim aliquis homo est illi pro mensura totius hominum multitudinis, sicut unitas quoque mensura com-

munis

munis est omnium numerorum. Perspectiua rursus & musica sunt quędam ueluti partes, illa quidem geometrię, hęc autē arithmeticę. Nam perspectiua uisu nostro ceu linea abutitur, & iis angulis qui ex radiis uisoriis constituuntur: diuiditúrque in eam quę proprio nomine dicitur perspectiua, causas explicās eorum, quæ aliter quàm sint, apparere solent, ob ipsorum alios atque alios positus & distantias: quales sunt lineæ parallelæ concurrere uisę: rerū quoque quadratarum figurę circulari forma conspectę. item in eam quæ in uniuersum specularis dici potest, quæ cuiusq; generis radios fractos siue flexos perscrutatur, uisorum seu imaginum cognitionem adiunctam habēs, simul & illud afferēs quî fieri possit, uti quod conspicitur, amœnum sit uisu iucundúmq;, nulla partium suarum discrepantia aut deprauatione corruptam imaginem propter interuallū aut eleuationem rei uisę, oculis spectātium exhibēs. Musica uero consonantium numerorum rationes auribus acceptas cū indagasset, canones suos & fides ipsas ita secandas ostendit, ut faciles ad cognitionem nostram illę sonorum conuenientiæ fierent: cúmque passim ad sensuum delectationē iudiciúmq; diuerteret sermonem, Platoni dedit affirmanti eam esse, quæ menti aures ipsas prętulisse uisa sit. Ad illas superiores accedit mechanica, pars & ipsa quędam existēs totius tractationis & cognitionis rerum sensilium & materię coniunctarum. Huius autem generis illa est quæ opera & machinas cuiusque modi efficit ad usum totius rei bellicę necessarium idoneas: qualia multa diuino uir ingenio Syracusius Archimedes excogitasse scribitur & construxisse, uim permagnam & incredibilem habentia, ipsis quoque Romanis Syracusas terra maríque obsidẽtibus formidabilia: quorum tamen ipsorũ nihil apud Archimedem tanti fuerat, ut magno studio dignum arbitraretur. uerum sicut Plutarchus in Marcello scribit elegantissime, γεωμετρίας παιζούσης ἐγεγόνει πάρεργα τὰ πλεῖστα: ea tamen fuerũt unius hominis ludicra, ut Romanorum uires toti pene terrarum orbi formidabiles diutius eluserint, nec antè urbis potiũdę Marcello imperatori clarissimo spes facta fuerit, quàm ex insidiis noctu, mœnibus per absentiam Archimedis indefensis scalas admouerit. Fabulosa hæc profecto uideri possint, si ad nostrorũ hominum ingenia, quæ uspiam sunt nobilissima, conferantur. Verum tamẽ perinique faceremus, si primum aliorum industriam ex cæterorũ metiri uellemus ignauia: ut quod hi non possint, ne illi quidem potuisse uideantur. Deinde qui fieri possit, quæ pręstantissimi quique, iidémque grauissimi scriptores, nõ Græci tantum, qui suis ambitiosius fauisse uideri possint, sed etiã Latini, iíq; Græcis hominibus sępius iniqui, M. Tullius, T. Liuius in unius hominis laudibus consentientes ad cęlum extulerũt, ut his fidem abrogemus? Quòd

si ne

ſine authoritate quidem ulla ad credendum adducimur, ſunt in oculis manibúſq; noſtris Archimedis ipſius opera, non illa quidem de machinis ipſis aut operibus conſcripta, nihil enim tale ſcriptione dignũ magnopere indicauit, ſed quæ longe maiora diuinioráque cenſenda ſint, rerum illarum uniuerſalia theoremata, quę ſi quis uia ordinéque aggreſſus erit, cum iiſdem ueſtigiis inſtiterit, quibus Archimedes & ueteres illi nobiléſq; geometrę, eodem quoque peruenturum ſeſe confidat. Nobis quidem ſi uita ſuppetet, illud in primis curę futurum eſt, quod adhuc fuit in hoc decimo Euclidis libro, ut difficillimi quique priſcorum geometrarum libri certa ſpe & fiducia intelligẽdi legi poſſint ab iis, qui modo ſtudiorũ ſuorum rationem ad ueterum normam exigere, ordinémque certiſſimum diſcendi magiſtrum conſeruare uolẽt. Ordinem autem ipſum ſi quis obſeruauerit, nihil pręterea putet eſſe, quod ſibi deeſſe poſſit. Sed iam ad inſtitutũ ut reuertamur, ad eas artes quas ante memorauimus accedit & illa, quę rebus ex ſeſe immobilibus motum attribuit, nũc per quaſdam aſperationes, quemadmodum perſecuti ſunt Cteſibius & Heron: nũc per librationes ponderúmque momenta, quorum inæqualitas mouendi cauſam affert, æqualitas uero quietis neceſſitatẽ, ut eſt in Timęo, nunc quibuſdã neruis & funiculis attractus & motiones animatorum corporum imitantibus. Eſt & alia generis eiusdem, quæ sphæris construendis operam adhibẽs, circuitus orbium cælestium imitatione consequitur: qualem idem ille nunquã satis laudatus Archimedes effinxit. Astrologia superest disputationem instituens de mundi ipsius cõuersione mirabili, de magnitudine, figura, situ, celeritate, tarditate corporum cęlestium: quæ uis sit in illis illuminãdi, qui discessus à terra, qui ad eandem accessus: & quæ sunt his cõsequentia, ex sensu quidem & ipsa permultum instructa, nihilo tamen minus cognitioni rerum naturalium familiariter communicans. Cuius illa pars contemnẽda non est, quę ex normarum & umbilicorum situ, horarum spatia & tempestatum interualla dimetitur: quęq; sublimia uestigando poli cęlestis altitudines in quaque terrarum parte, astrorúmque dissitas positiones comprehendit, plęraq; simul alia persequens, quæ sunt astrologo speculanti proposita. Est & illa quæ dioptrica dicitur per rimulas in sole, luna cęterísq; syderibus celeritates tarditatésque motuũ uenari solita. Eę quidem sunt partes scientię mathematicę, ita descriptę à ueteribus mathematicis, quemadmodũ explicuimus. Nunc autem de fine ad quem feratur intendátque, cum hæc tota tractatio elementorum geometricorum, tum ea de lineis rationalibus & irrationalibus, quæ est huius decimi libri propria, pauca quædam afferamus. Qua in re illud sane cum primis est intelligendum, propositũ

duplex

duplex Euclidi fuisse in his quidem libris, aliud quod traditionem rerum perquisitarum respiceret, aliud pręterea quod discētis animum omnibus modis informaret & erudiret: ut si res ipsę inuestigationi subiectę considerandę sint, dicēdū profecto uideatur toto hoc de geometria sermone nihil aliud quęri, quàm ut nobiles illę figuræ quinque plane comprehensione intelligantur, à quibus mundus hic uniuersus, iudicio quidē Platonis, descriptas suas habet partes. Itaq; primum cœpit agi de simplicissimis quibúsque rebus: deinde sensim assurgente compositionis structura, eò tandem peruentum est, ut uarietas omnis illarum figurarum aperiretur, & separatim quidem unaquęque prius constituta, tum denique simul omnes eodem globo contentę inuoluerētur, expositis etiam proportionibus, quas lineis lateralibus cuiusque figurę inter se, quásque superficiebus ipsis, & quas solidis etiam figuris inter ipsas inesse compertum est. Quod autem ad illud propositum attinet, erudiendi eius qui ad hoc studiū discendum accesserit, huiusmodi est, ut secundū Elementorum geometricorū intelligētiam perfecte cumuletur animus, absoluatúrq; ipsius habitus & compleatur: quo facile possit ad quālibet geometrię tractationē comprehendēdam ipse sibi sufficere. Ab his enim uelut initiis auspicati, cęterarū quoq; permultarū uel potius omniū huius scientiæ partiū poterimus cognitionem assequi, eiusdémq; multiplicem animo complecti uarietatem: neque id tantum, quin & illud quoq; uerissime dici potest, sine iisdem ipsis reliquorum omnium non obscuram solum, uerum neque omnino possibilem esse intelligentiã. Nam & prima queque atq; simplicissima theoremata proxime etiam ad primas hypotheses accedentia, sunt his libris ita coagmentata, ut interim nullum ordinem magis cuiq; rei conuenientem afferri potuisse cognoscamus: ex quibus cæterarũ partium scriptores ad propositũ suũ accõmodate, certissimis & incõuulsis usi sunt suarũ demonstrationũ fundamentis. Quo in genere est Archimedes, Apollonius Pergęus, & cęteri omnes nõ geometræ tantũ, sed & astrologi, & qui mathematicorũ nomine censeri solent. hoc autem cũ alibi semper, tum uero in legendis Comicis Apollonij certissimũ esse nuper ipsi uidimus: ad quæ nisi diligenter instructus ab Euclide ueneris, operã plane tibi periisse senties. Est enim Euclidis geometria non ad eorum tantũ cognitionem, quę sunt de eodem genere scripta, necessario perdiscenda, sed etiam in quauis mathematicarũ scientiarũ nihil cuiquã satis poterit esse notum, qui nõ à geometria profectus peruenerit ad cętera: quam si quis secundũ Philonẽ esse dixerit principiũ & tanquã μητρόπολιν reliquarum omnium mathematicarum, is profecto à rei totius ueritate non aberrauerit. Nam ex illa matrice ueluti quadam urbe populosa deductæ ctę sunt illę deinceps colonię, quę sunt à nobis superius explicatę. Est ergo finis ille geometricorũ elementorum absolutus discentis habitus, scientię uniuersę capax, traditióque mundanarum figurarum, quæ sint cuiúsq; proprię fabricationes & inter se cõuenientię. Id uero de quo cõscriptus est hic decimus liber, de commensurabilitate dico & incommensurabilitate, rationalitate & irrationalitate linearum, eò pertinet, ut cum extremum totius operis futurum illud esset exponere, figurarum de quibus antea dictum est, dimensus, ea præfari oportere uisa sunt, sine quibus illud percipi nullo modo posset. In primis necessarium fuit, quoniã illę figuræ æqualibus superficiebus, lateribus item & angulis æquis comprehendendæ erant, & eodem globo ita coercendę, ut quilibet angulus solidus cuiusque figuræ intimam faciem pertingeret, ostendere quãto diameter globi longior esset unoquoque cuiusque figuræ latere. Cúmque uidisset Euclides in pyramide, octaedro & cubo talem esse habitudinem ipsorũ laterum ad globi diametrũ, quam rationalem esse posuerat, ut essent ipsa inter sese comparata longitudine quidem incommensurabilia, sed potentia tamen commensurabilia, ideóque rationalia: in eicosaedro uero & dodecaedro nõ solum esse inter ipsa latera longitudinis incommensurabilitatem, sed & potentię quoque, ob eámque caussam illa esse simpliciter irrationalia certę cuiusdã ſpeciei. Ea ratione priuſquã ad illa demonſtranda aggrederetur, intellexit omnino ſibi faciendũ eſſe, ut de linearum rationalitate irrationalitatéque tractatũ inſtitueret, quótque & quales eſſent ſpecies irrationalium linearum: ut non appellationibus tantũ diſcretis notari poſſent, ſed quod multo certius eſt, ad quãque rem cognoſcẽdam, quid cuique ſpeciei ſingulatim neceſſarióque cõueniret, perſpicuum fieret. Proinde tractatum illum abſolui non poſſe ſine cognitione numerorũ cum facile intelligeret, ideo de ui numerorũ quãtum ſatis uiſum eſt ad ſermonem ſuſceptum tribus eſt libris diligentiſſime commẽtatus. Neque enim ferendus eſt neſcio quorum hominũ error, affirmantium proportiones linearum irrationalium eſſe non nobis tantum, ſed & naturæ ignotas: ob ídque potiſſimum, quòd illę tales proportiones nõ extent in numeris. Quod ſi ita eſſet, primum quàm inanis uideri deberet conatus Euclidis, operam in re per ſe inexplicabili abutentis? tum autem adeo ſunt illuſtres hoc libro notæ, támque proprij cuiuſq; ueluti mores expreſſi, ut quod Euclides conari uiſus eſt, illud abunde perfectéque prçſtitiſſe intelligatur. Nobiliſſimũ itaque totius geometrię locum à Pythagora philoſopho prçſtantiſsimo ante patefactum ita perpoliuit excoluítque, ut deſiderio nihil reliquerit. Hæc habui Bellai ampliſsime, quę nõ quidem dicere poſſem, finem enim nullũ habitura eſſet oratio,

tio, ſed quæ cum dixiſſem, exiſtimaui iuuentutis partem aliquam excitatum iri, ut cuperet imitatione ſtudiorum, ueterum philoſophorum nominis gloriam æmulari: cuius prę clariſsimę contentionis in animis hominum excitãdę facultatem uiris conceſſam eſſe principibus, eámque ampliſſimam cum intelligeret Franciſcus Rex huius noſtri pater omnium bonarum artium fideliſsimus tutor, patronus atq; propugnator acerrimus, iuuit ille quidem mirifice ſtudia literarum: uerum minus profecto quàm uoluit, magis autem multo, quàm licitum illi fuit per quorundam auerſas à laudabiliſsimo ſtudio rationes atque uolũtates. Illius tu Regis alumnus, illius tu beneficentia ad ſummos fortunę dignitatíſque gradus, doctrinæ commendatione ſublatus, recte conſtantérque feceris, ſi quod per te nauiter facis, patrociniũ philoſophię ãtea quidem à Rege liberaliſsimo ſuſceptum, ita retinere pergas, ut Margareta Regis filia, iudiciíque paterni, atque animi in bonarũ artium ſtudiis, bonorúmque omnium tuitione obſeruantiſsima atque æmula, bene collocatum in te ornando patris beneficium prædicare poſsit. Permultos autem eſſe multis in locis cum acceperim, quorum in philoſophię literis ſtudia, tuis paratiſsimis opibus alantur & ſuſtententur: hæc autem una mathematica cognitio, cuius tantæ ſunt in omni philoſophię parte commoditates, deſerta plane deſtitutáq; reliquorum hominum præſidiis paſsim iaceat atq; ignoretur, tuę certę partes illę ſunt, ut huic quoq; ſtudio pro tua humanitate per te conſultum uelis: ex iſtóque præclaro tuorum grege, de quo paulò ante dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundiſſimi atque fructuoſiſſimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi penitúſque perſcrutati, poſſint cæteros exemplo doctrináque ad ſui æmulationem permouere.

Vale. Lutetia Calend. Iulij. 1551.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

Petro Montaureo interprete.

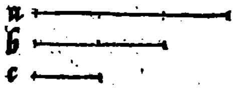
COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur illæ, quas eadem mensura metitur.

PROPOSITVM *nobis illud est hunc decimũ elemẽtorum librum (cuius intelligentiam plerique difficillimam suspicantur, neq; uerò possibilem absque auxilio eius partis arithmeticæ, quam multorum scriptis illustratã Algebram uocant) sine omnino ullis numeris irrationalibus dictis ostendere, nõ solùm non difficillimũ, sed etiam facillimum esse, si quis attentum animum & instructum scientia librorum superiorum* Euclidis *afferat: neque porrò cuiusquam externæ scientiæ, nedum algebræ demonstrationibus indigere: sed ex suis ipsius* Euclidis *tãtum demonstrationibus, & familiarissimo ipsi ordine dependere.* Vt *autem clarius intelligatur hæc definitio, prius explanãdum puto, si quid in ea subobscurum contineri uideatur. sic enim præcipiunt dialectici.* Cum *itaque dicitur aliqua mensura magnitudinẽ aliam metiri: illud intelligitur primùm, ut ea mensura sit minor illa quam metitur, aut ei saltem æqualis. maior enim nullo modo metiri minorem potest.* De*inde ut ea mensura semel sumpta si æqualis erit, aut si minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudinem quam metitur, præcise referat. id quod ex numeris* *deprehendi facillime poteſt. Quãuis enim Euclides hac definitione compræhendat magnitudines tantùm quas quantitates continuas appellant, quales ſunt lineæ, ſuperficies, & corpora: tamen arbitror non inepte requirendam eſſe explicationem huius loci à numeris: quum præſertim magnitudines commenſurabiles eam habeãt proportionem inter ſe, quam numerus ad numerum.*

Campanus uir ex geometriæ ſtudijs laudem nõ immeritò conſequutus, illud principium recte inſerit cæteris libri ſeptimi principijs, cum græcum exemplar nihil tale habeat. Numerus aliũ numerare dicitur, qui ſecundum aliquem multiplicatus, illum producit. cuius rei hoc ſit exemplum. Ternarius numerat ternarium per unitatẽ multiplicatus. idem ternarius numerat ſenarium per binarium multiplicatus: numerat nouenarium per ternarium multiplicatus: numerat 12 per 4: numerat quoq; cæteros infinitos. Ille ipſe tamen ternarius alios numeros ſuperioribus interpoſitos minime numerat. Nam neq; unitatem ipſam, aut binarium numerat. Maior enim minorem nullo modo numerare poteſt: ſicut in magnitudinibus (ut antè diximus) maior menſura minorem ſeipſa magnitudinem non metitur. Neque uerò ternarius numerat 4 aut 5. per unitatem enim multiplicatus nihil amplius efficit quàm 3. binario uerò multiplicatus, excedit & 4 & 5. multo magis ſi alio ternario aut maiore aliquo numero multiplicatus fuerit, eoſdem 4 & 5 exceſſerit. Eadẽ ratio eſt ſeptenarij, octonarij, denarij & undenarij, ſi unum ex his quemlibet coneris per ternariũ numerare. Si quis

autem

autem erit qui me res nimiũ minutas persequi repræhendat: consilium nostrum illud esse sciat, ut librũ hũc, non tam natura sua difficilẽ, quàm ignoratione principiorum, ad intelligendum facillimum reddam his qui amœnissimum hunc geometriæ locũ perlustrare uolent. Et certè in maximos errores plerosq; imprudentiæ suæ uitio & principiorum parua siue dicas praua intelligentia turpiter incidisse, neminem dubitaturum arbitror, qui modò nostra legens, ipsarum rerum intelligentiam assequutus erit. De his autem hactenus. nos in uiã redeamus. Dicimus hanc definitionem magnitudinũ commensurabilium, siue malis principium nominare, per analogiam quandam ex illo Campani loco plane intelligi. Nam quod dicitur in numeris alios numeros numerantibus: idem aut simile quiddam intelligas in magnitudinibus, quarum alteram dicimus per alterã mensurari. Quod ut planius intelligatur, sumamus exẽplum in una specie magnitudinis. Sint duæ lineæ ã & b. quæ si fuerint cõmensurabiles, erit quoque communis utrique aliqua mensura quæ sit c. Nam illa linea c bis repetita, refert præcise lineam b. ter uerò repetita, lineam ã, & ipsa quoque præcise refert.

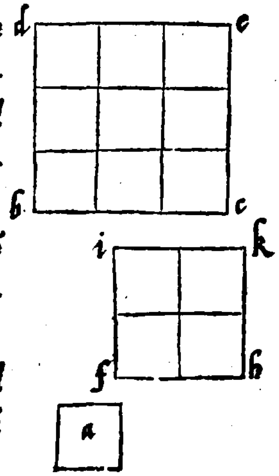


Incommensurabiles verò magnitudines dicuntur hæ, quarum nullam mensuram communẽ contingit reperiri.

Hic locus pluribus uerbis non uidetur indigere, quàm ut *moneamus ex ſuperius dictis intelligendũ eſſe. Contraria enim ex contrarijs intelligi poſſe receptum eſt. Porrò accidentia & paſsiones his congruentes ex ipſo Euclide repeti debere ſequentium rerum lectio docebit.*

Lineæ rectæ potentiâ commenſurabiles ſunt: quarum quadrata una eadem ſuperficies ſiue area metitur.

Quantum ad hunc locum attinet, duo quædam præſcribenda puto. Primum, ut intelligamus per hãc uocem, lineæ potentia, quadratũ illius. tantum enim dicitur linea poſſe, quantum quadratum deſcribere poteſt. Alterum, ut tali diſtinctione hîc utamur. Linearum hæ quidem ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles: illæ uerò potentiâ inter ſe commenſurabiles. Alterum membrum linearum longitudine commenſurabiliũ non explicat Euclides, quia uiſus erat illud comprehẽdiſſe antea uniuerſali definitione magnitudinum commenſurabiliũ. Nam lineæ ſunt ſub genere magnitudinis. Sed quia lineæ habent illud quoque in ſe propriũ & peculiare, præter cæteras magnitudines, ut quædam ex his ſint potentiâ cõmenſurabiles: hoc uerò ſibi nõ exiſtimauit prætermittendum.



Sit linea b c. eius quadratũ ſit b c d e. ſit etiã linea f h. eius quadratũ ſit f h i k. hæc duo quadrata me-

tiatur

tiatur una quæpiã superficies, uerbi gratia superficies ã, quæ metiatur primò quadratum b c d e, nouies repetita, qui est numerus areolarum in eodẽ quadrato descriptarum. Præterea *metiatur quadratũ f h i* k, *quater repetita, secundum numerum suarum areolarum. Erit itaque superficies ã, illa, quæ metitur ea quadrata duo.* Horum *ergo, quadratorũ inquam, b c d e, f h i* k, *latera siue lineæ potentes illa quadrata, quæ sunt lineæ b c, f h, erunt potentiâ commensurabiles.*

Incommensurabiles verò lineæ sunt, quarum quadrata, quę metiatur area communis, reperiri nulla potest.

H*oc loco nihil aliud dico, quàm ut adiuues intelligentiam huius loci additione uocis, potentia, quæ superiori definitioni additur, ut intelligas de lineis illis quæ sunt incommensurabiles potentiâ. quæ cum sint potentiâ incõmensurabiles: illud quoque habent, ut sint præterea longitudine incommensurabiles. hactenus dictũ sit. Quòd si plura hoc quidem loco scire desideres: peruertes ordinem disciplinæ, qui certissimus est ad discẽdũ magister.*

Hæc cum ita sint, ostendi potest, quòd quãtacunq; linea recta nobis proponatur: existunt etiam alię lineæ innumerabiles eidem cõmensurabiles: alię item incommensurabiles. hæ quidẽ longitudine & potentia: illæ verò potentia tantùm.

H*uius libri præcipuum illud esse uelim scias, quod non, ut cæterorum superiorum, in prima lectione percipi possit* *eius doctrina, ſed iterata & ſæpius repetita: eòque ſit ut plæraque principia hic ſcripta, non quidem demonſtrentur ex ſequentibus: ſed melius intelligantur, ſi cum ad ſequentia ueneris, ad principia ſubinde redeas. Vſus enim harum uocum, qui eſt in ipſis theorematibus, res illis uocibus expreſſas faciliores intellectu reddit. Sic itaque faciendum puto hoc quidem loco. Nam ſequentes propoſitiones magnam illi lucem afferent. Tantum enitere ut concipias animo res nudas, quarum ſignificatio his uocibus ſimplicibus continetur: in quo te iuuabunt ea quæ ſuperius à nobis ſcripta ſunt. Vocetur igitur linea recta, quantacũque proponatur* ῥητὴ, *id eſt rationalis. Quam lineam uocari uult* ῥητὴν, *eam interpretes Latini nominauerunt rationalẽ. qua ratione ducti, neſcio: mihi quidẽ non ualde probatur. Sit ergo* ῥητὴ *linea recta quæcunque, de qua ſermo inſtitui debeat. Etymologiæ rationem in enuntiatione rerũ uocibus ſimplicibus ſignificandarum, ſicut uiſi ſunt ueteres magna diligentia conſequuti: ita nobis non contemnendã exiſtimo, ut rerum ipſarum cognitionem adiuuemus. huius uocis* ῥητὴ *ratio ducta mihi uideri ſolet* ἀπὸ τοῦ εἰρῆσθαι *unde* τὰ ῥητὰ καὶ ἄρρητα. ῥητὸν *illud interpretor quod eſt effabile, certum, conceſſum, & determinatum: ac ſi, uerbi cauſa, dicas id eſſe, quod eſt dicibile, & uoce ſignificari poſſit.* ῥητὴ *itaq; erit quæcunque linea, quantacunque magnitudine proponatur. Ideo* ῥητὴ *nominata, quia datam lineã poſſumus diuidere in quàm multas partes uoluerimus. Scitum eſt enim ex nona propoſitione ſexti libri, A data linea iuſſam partẽ auferre.*

ferre. Quod quum ita sit, proposita linea diuisiones eas admittit, quas animo conceperis: ut dicas, hæc linea quæ proponitur, tot partes habet, tres puta, quatuor aut quinque, quas aut pedes aut passus, aut aliud quoduis mensuræ genus esse contigerit, ut tres pedes aut passus quatuor longa sit. hæc autem linea, quam ῥητὴν *uoco, omnibus penè propositionibus huius libri, & eis maximè quæ à decima incipiunt, fundamenta præstat: ut nisi hanc primo loco posueris, & animo conceperis antequam demonstrationem cuiusque theorematis attingas, nullum facile intelligas. Est enim uelut norma omnium linearum ex qua ipsarum quoque mensura peti debet an sint rationales necne. Nam hæc ipsa* ῥητὴ *quæ hic denominatur, est* ῥητὴ *ex suppositione quod quidem hæc uox* προτεθεῖσα *facile indicat, quasi dixerit* ὑποτεθεῖσα, *quæ uelut* ῥητὴ *id est rationalis primo loco dici potest, ut ipsa uoce differat à cæteris lineis rationalibus, de quibus mox agit. Cuius rei te perpetuò meminisse uelim.*

Lineæ quoque illi ῥητῇ commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantũ, vocentur & ipsæ ῥηταὶ id est rationales.

Hic *locus plane intelligitur ex duabus definitionibus supradictis, nempe magnitudinum commensurabilium, & linearum potentia commensurabilium. Obiter tamen aduertas in his uerbis, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, quantã cautionem adhibuit* Euclides, *ut uocibus ipsis coniungeret* *res eas quæ natura ſua coniunguntur, ſeiungeretq́; contrarias. quod religioſiſſime mathematici penè omnes uiſi ſunt obſeruare: ut in hoc loco, quia lineæ longitudine commenſurabiles, ſunt & ipſæ quoque potentia commenſurabiles, quum de commenſurabilibus longitudine loqueretur, addere uoluit, & potentia. cum uerò de potentia cõmenſurabilibus, appoſuit, tantùm. Quæ enim lineæ ſunt potentià commenſurabiles, non cõtinuò ſunt & longitudine.* Hæ *uerò ῥηταὶ id eſt rationales, quæ hoc loco talem denominationem acceperunt, iam non ſunt ῥηταὶ ex ſuppoſitione, id quod erat illa prior ῥητὴ: ſed ſunt tales propter relationem quam habent ad illam. Quia ſunt aut longitudine ſimulq́; potentia, aut potentia tantùm, ipſi ῥητῇ quæ primo loco ita dicitur, commenſurabiles.* Pr*æterea hîc eſt animaduertendum, uoces illas, longitudine & potentia, aut potentia tantùm, coniungi cum illis uocibus commenſurabiles, aut incommenſurabiles: illis uerò uocibus, rationales, aut irrationales, nunquam adponi, ut dicantur longitudine ſiue potentia rationales aut irrationales lineæ. quod Campanus uidetur promiſcue uſurpaſſe. Si plura cupis, auidum diſcendi animũ hîc retineto, ne ueſtigia authoris, eiuſdemq́; ducis tui deſeras, qui principia quidẽ ſimpliciſſime tradenda ſibi putauit, ut diſcentium animos nuda rei notione tantùm informaret. quod & uerius eſt, & ad docendum magis appoſitum.*

Quæ verò lineæ ſunt incommenſurabiles, illi τῇ ῥητῇ id eſt primo loco rationali, vocentur ἄλογοι id eſt irrationales.

Illud

Illud intellige de lineis longitudine & potentia incommēsurabilibus. Nam incommensurabiles potētia tantùm, ut eædem non sint longitudine etiam incommensurabiles, esse nullæ possunt. neque hic existimes Euclidem agere de lineis longitudine tantùm incommensurabilibus, potentia uerò commensurabilibus. has enim nuper posuit inter ῥητὰς id est rationales. Vult autem hic lineas omni ratione incōmensurabiles, id est potentia & longitudine uocari ἀλόγους. Quod cum non ita perceptum esset à Campano, uidetur homini causam erroris attulisse, quam ipse posteris quoque tradidit, ut mox dicemus. Quid sit ῥητὴ, & ῥητὸν, antè dictum est. Quod uerò ad hanc uocem ἄλογον pertinet, ex commētarijs Procli scire licet, ῥητὸν καὶ ἄῤῥητον opponi per priuationem, ut ἄῤῥητον sit contrarium τῷ ῥητῷ: ἄλογον autem sæpius usurpari pro hac uoce ἄῤῥητον, cum tamē idem sit ἄλογον & ἄῤῥητον. hoc ἀπὸ τοῦ ῥηθῆναι, illud ἀπὸ τοῦ λέγεσθαι, quæ idē significant. Itaque ἄλογος linea erit cuius proportio siue longitudo comparata ad longitudinem τῆς ῥητῆς id est ipsius lineæ primo loco, & ex suppositione rationalis, nullis numeris referri potest. Neq; putes ἄλογον dici per priuationem τοῦ λόγου id est proportionis. Est enim sua proportio linearum alogarum inter se non quidem nobis planè incognita, nedum ut naturæ cognitionē effugiāt: quod quidā uolunt, alioqui frustrà sumpsisset eam operam Euclides hoc quidē in libro in quo nihil aliud agit, quàm ut doceat paßiones illarum linearum, & proportiones quas illæ lineæ ἄλογοι inter se retinent. Verū ea ratione dicuntur ἄλογοι, quia numeris earum proportio *reddi non potest. Nam quod isti uocant irrationale, cur ita uocent, non intelligo. Surdas autem lineas dici, quas hîc* ἀλόγους *uocat* Euclides, *non omnino displicet: quãuis mathematici nõ facile huiusmodi translationes admittant, sed quia propriam huius rei uocẽ deesse agnoscimus, ferri potest hæc translatio.* Ne*que tamen hoc loco prætermittendũ puto, quod* Nicolaus Tartalea *geometra apud* Venetos, *&* *libris eruditis nobis quoq; non incognitus, animaduertit* Campanum *&* *reliquos ab eo geometras falso existimauisse radices siue lineas quæ quadrata producunt, illa quidem numero significabilia, sed non quadrato numero, ueluti* 10, 11, 12, *&* *similibus, eas inquam lineas* ἀλόγους *esse id est, ut eorum uerbo utar, surdas: hoc uerò pugnare contra hypotheses* Euclidis, *qui uoluit eas uocari* ῥητὰς *id est rationales, quæ sunt ad lineam propositam commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm: ex quo magnas opinionum differentias in plerisque huius libri locis extitisse. hactenus* Tartalea. Ne*que sanè hoc nihil est, neque tamen in eo sunt omnia.* E*go uerò illud affirmare non dubitem, hinc cæpisse noctis illius initiũ, quæ tam densas tenebras offuderit ueritati rerum his libris traditarum, quæ docentes & discentes plerosq; omnes diuersos egerint: ut quum ulterius progrederẽtur, nihil amplius intelligerent, quàm se nihil intelligere. nostrum quidem de ea re iudicium cum opus fuerit, afferemus.*

Et quadratum quod à linea proposita describitur, quam ῥητὴν uocari uoluimus, uocetur ῥητόν.

N*on uideo quid planius dici posit.*

Et

Et quæ ſunt huic commenſurabilia, uocentur ῥητά.

Hanc uocem commēſurabilia, intelligas ſiue ſint quadrata, ſiue aliæ quæcunque figuræ rectilineæ. Scitum eſt enim cuicunque parallelogrammo, æquale quadratum deſcribere: per ultimum theorema libri ſecundi, ſiue per inuentionem lineæ mediæ proportionalis ſecundum 13 theorema libri 6. quam ubi repereris, colliges ſtatim per 17.6. parallelogrammum rectangulum cōpræhenſum ex duabus lineis extremis eſſe æquale quadrato lineæ mediæ. Simili ratione rurſus cuicunq; quadrato parallelogrammum æquale deſcribitur, per inuentionem tertiæ lineæ proportionalis ſecūdum theorema 11.6. hic uides nihil tale dici de quadratis & cæteris figuris, quale de lineis antea, quarum eſt & longitudo & potentia commenſurabilis. Figurarum enim ſola conſideratur capacitas, quam longitudo latitudini iuncta determinat.

Quæ uerò ſunt illi quadrato, ῥητῷ ſcilicet, incommēſurabilia uocentur ἄλογα id eſt ſurda.

Incommenſurabilia hic quoq; accipias, quales quales fuerint figuræ rectilineæ.

Et lineæ quæ illa incommenſurabilia deſcribunt, uocentur ἄλογοι. Et quidem ſi illa incommenſurabilia fuerint quadrata, ipſa eorum latera uocabuntur ἄλογοι lineæ. quod ſi quadrata quidem nō fuerint, uerùm aliæ quæpiam ſuperficies ſiue figuræ rectilineæ, tunc uerò lineæ illæ quæ deſcribunt quadrata æqualia figuris rectilineis, vocentur ἄλογοι.

Vnum est quod hoc loco animaduertendum putem. Cum dixisset ἄλογα esse quæ sunt incommensurabilia τῇ ῥητῷ, subiungere uoluit de lineis illa incommensurabilia describentibus, & eas uocauit similiter ἀλόγους: cum tamē antea loqueretur de commensurabilibus ipsi ῥητῷ, nihil egit de lineis illa commensurabilia describentibus. hoc autem ea rationė prætermisit, quia satis sibi fecisse uidebatur, & de his innuisse, cum loqueretur de lineis τῇ ῥητῇ cōmensurabilibus, sub illis uerbis, siue potētia tantùm. Nam *potentia lineæ est ipsius quadratum, ut ante diximus. Quod si quadratum commensurabile fuerit ipsi ῥητῷ, ipsa quoque linea quæ illud quadratum potest, commensurabilis erit saltem potentia.* Itaque *per diffinitionem linearum commensurabilium ῥητῇ etiam erit.* Extat *libellus nomine* Aristotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν, *quem quidem non esse* Aristotelis *ex multis locis ipsius facilè intelligitur: eruditio tamen facit, ut attribui debeat alicui ex nobili illa* Peripateticorum *& docta familia. in eo multa leges intelligentiæ horum principiorum conducentia. Quorum illud unū annotabimus, quod ferè summam totius rei declarationem continere uideri possit.* Commensurabilitatem *& incommensurabilitatem magnitudinum inter se, natura quidem ipsarum magnitudinum constare.* Rationalitatem *uerò & irrationalitatem positione fieri, quia quæ primo loco linea sic dicitur, nempe rationalis positione talis efficitur.* Aliæ *uerò linea ad illā relata, sunt aut rationa-*

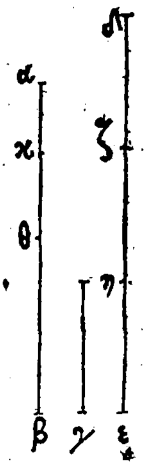
les,

les, aut irrationales, quatenus sunt eidem commẽsurabiles aut eidem incommẽsurabiles. R*ursus linea rationalis quæ talis est, quia cõmensurabilis est lineæ illi primo rationali, & ipsa relata siue comparata alteri lineæ, quæ item proponatur primo loco rationalis esse, si eidem fuerit incommensurabilis, dicetur etiam irrationalis.* It*aque eadem linea alteri atque alteri commensurabilis & incommensurabilis, erit similiter rationalis & irrationalis.* Hoc *autem ideo fit, quia rationalitas, & irrationalitas omnis pendet ex positione, non autem ex natura ipsarum magnitudinum. quod tamen in commensurabilitate & incommensurabilitate aliter est.* Sunt *& communes quædam animi conceptiones, quas hîc omisit* Euclides, *tum quia sunt infinitæ, tum uerò quia sunt eiusmodi, ut eas unusquisque posit animo modica quadam animaduersione subijcere, ut locus ipse postulare uidebitur: ex quibus tamen illas non prætermittemus, quæ singulis locis conuenientes erunt, quales reperiuntur in demonstrationibus primi & secundi theorematum.*

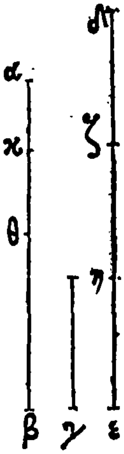
C*ampanus principijs huius libri illud quoq; inserit;* Q*uamlibet quantitatem toties posse multiplicari, ut quamlibet eiusdem generis quantitatem excedat. quod quidem recte fecit. nam huius principij auxilio statim utitur demonstratio primi theorematis huius libri.* De *illa autem magnitudine hic dicit, quam geometræ & cæteri mathematici tractant, ut augeri posit in infinitum.* Hoc *loco uisum est addere, quod cum alij obscurè,* Proclus *tamen luculentissimè tradit: cuius libros (de ijs* intelligo quos in Euclidem scripsit) ut omnes qui quidẽ mathematici fieri cupiunt, studiose legant, uehementer hortor: quibus ego plurimùm debere me, nunquam inficiabor. Quod ad rem attinet, id est huiusmodi, principium illud Campani uniuersaliter quantitatem omnẽ (siue sit ea quam continuã uocant, siue discreta sit qualis est numerus) compræhendere. Porrò aliud est quod quantitati continuæ soli conueniat, ut in infinitum minui possit, sicut in linea. Quantacunque enim detur in partes infinitas, minui siue diuidi potest, quarum tamẽ unaquæque linea erit. Illa porrò itidẽ in alias quæ eandem naturam retinent: neq; unquam ad minimum ex sectione deuenitur, ne si punctum quidem dicas, quãuis illud per se sit in geometria minimũ. Eo fit ut sint lineæ quædam ἄλογοι, quarum quidẽ est inter se quædã proportio, sed numero exprimi nequit, itaque uocatur à Proclo λόγος ἄῤῥητος. Nam ubicunque est sectio siue diuisio in infinitum; ibi quoque reperitur illud ineffabile, quod ἄλογον dicunt. hoc uerò non ita est in numeris. Nullus enim est numerus quem diuidendo non reducas ad illud minimum quod est unitas, ex quo numeros omnes esse ῥητοὺς & συμμέτρους necesse est. omnes enim metitur unitas. Nulli igitur sunt numeri ἄλογοι. Quod autem ad sequentium theorematum expositionem attinet, hoc habetote, non fuisse consilij nostri initio suscepti operis singulis manum admouere. Actum enim agere hoc quidẽ esse uidebatur, si quæ à maioribus recte tradita sunt (sunt autem bene multa) hic describerem. Neque sanè cupiam si maxime possim, alieno labore partam gloriã *in me trāsferre: sed morem gestum amicis oportuit, qui me ad totius libri cōmentationem impulerunt, ut quam lucem rerum incognitarū obscuritas desyderaret, eam quantum in me esset ingenij, quantúmque diuturnum studiū huius præstantissimæ disciplinæ illud adiuuisset, ipse uobis afferrem, quos ueritatis studio ad rerum acutissimarū & dignissimarū cognitionē rapi intelligo.*

Primum Theorema.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si de maiori detrahatur plus dimidio, & rursus de residuo iterum detrahatur plus dimidio, idq; semper fiat: relinquetur quædā magnitudo minor altera minore ex duabus propositis.



Sint duæ magnitudines inæquales αβ, γ, quarū maior sit αβ: dico si de αβ detrahatur plus dimidio, & de residuo iterū plus dimidio, idq; semper fiat, relinqueturquædā magnitudo minor q̄ magnitudo γ. Nam γ multiplicata erit tādē aliquādo maior magnitudine αβ. multiplicetur & sit δε multiplex quidē ipsius γ: maior uerò ipsa αβ: diuidatúrque δε in partes æquales ipsi γ, quæ sint δζ, ζη, ηε: & detrahatur de αβ plus dimidio, sitq; βθ. rursus detrahatur de αθ plus dimidio, sitq; θκ, idque eò usq; fiat, donec diuisiones magnitudinis αβ tot fuerint quot sunt diuisiones in magnitudine δε. Sint igitur diuisiones ακ, κθ, θβ totidem numero quot sunt diuisiones *δζ, ζκ, κε. hactenus constructio: deinde sequitur demonstratio. Quia maior est δε quàm αβ, & detractum est de δε minus dimidio, scilicet ipsum κε, (quæ quidem detractio intelligitur facta ex superiori diuisione ipsius magnitudinis δε, in partes æquales ipsi γ. diuidendo enim minuitur magnitudo, sicut augetur multiplicando.) de αβ uerò detractum est plus dimidio βθ: residuum ergo κδ est maius residuo θα, quod & uerissimum est, & ad cogitãdum facillimum, si ad principium illud*



reuocetur (qualia multa sunt in animis hominum penitus insita) residuum maioris magnitudinis post detractum dimidium uel minus dimidio, esse maius residuo minoris post detractum plus dimidio. Cum itaque κδ sit maius quàm θα, detractúmq; sit de κδ dimidiũ, nempe κζ: & de θα sit detractum θκ, quod est plus dimidio totius θα: residuum ergo δζ residuo ακ maius est, ratione principij modo scripti. Atqui δζ est æquale ipsi γ ex consensu & suppositione: ergo etiam magnitudo γ est maior magnitudine ακ. quod idem est ac si dicatur, minorem esse ακ ipsa γ. relinquitur itaque de magnitudine αβ, magnitudo ακ minor ea quæ ex duabus propositis minor erat. Quod erat demonstrandum. Dictio autem illa ἄλλως, in exemplari græco postponẽda est post ea uerba ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἥμισυ ἢ τὰ ἀφαιρούμενα. Hunc ordinem in demonstrationibus perpetuò retinet Theon, quem compositorium uocant.

Nunc

Nunc autem tractemus resolutorium per syllogismos resoluentes theorema in sua principia indemonstrabilia. Sic *ergo agamus*· *Omnis magnitudo minor* λζ, *est minor* γ. *Omnis* ακ *est minor* λζ. *Ergo omnis* ακ *est minor* γ. *Quod si cupis propius accedere ad terminos ipsius theorematis: sit maior terminus, esse minorem altera minore ex duabus inæqualibus propositis. minor uerò sit illa pars prior theorematis duabus inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore: iterumq; de residuo, tali continuata detractione perpetuo residuũ ipsum.* Medius *terminus sit, minorem esse altera magnitudine, quæ æqualis est ipsi minori ex duabus propositis. itaq; dices,*

Omnis magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis, est minor minore ex duabus propositis. Duabus *inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore, itidémque de residuo continuata tali detractione perpetua, residuum est, magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis.* Ergo *duabus inæqualibus propositis magnitudinibus detracta &c. residuum est magnitudo minor minore ex duabus propositis.* Maior *propositio est principium indemonstrabile & per se notum, quod uniuersalius dici solet, quæ æqualia sunt inter se, ad idem eodem modo se habere.* Minor *uerò probatur ex illis uerbis demonstrationis.* Re*siduum ergo* λζ *residuo* ακ *maius est. quod idẽ ualet ac si dicatur* ακ *esse minus, quàm* λζ. *Sit ergo syllogismus per resolutionem: reuoceturque res ad ele-*

menta, quomodo solẽt uti geometræ, ut paucioribus uerbis concludatur demonstratio, eoq́; promptius ab intellectu nostro comprahendatur. Primò *quia composita est propositio minor, qualitas illa adiecta prædicato, quæ æqualis est minori, probatur ex consensu & suppositione præcedentibus.* Maiorem *uerò terminum inesse minori sic probabis:* Residuũ *minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detractoq́; dimidio de maiore: de minore uerò detracto plus dimidio, est minus residuo maioris.* Sed *α κ est residuum minoris ex duabus magnitudinibus nempe ex θ α, κ λ &c.* Ergo *α κ est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ ζ, ergo α κ est minus λ ζ.* Maior *uerò cõtracta est ex principio uniuersali.* Si *ab inæqualibus inæqualia auferas, residua sunt inæqualia, & minus id quod residuũ est, eius à quo plus ablatum est.* Quantum *ad minorem propositionem attinet, illud solùm probatione indiget, α κ esse residuum minoris. primò residuum esse patet, ex suppositione.* Quod *uerò magnitudo θ α (cuius residuum est α κ) sit minor magnitudo κ λ, patet ita.* Residuum *minoris magnitudinis ex duabus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio de maiore: de minore uerò plus dimidio, est minus residuo maioris.* Sed *θ α est residuum minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio ex maiore λ ι: de minore uerò α β plus dimidio &c.* Ergo *θ α est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ κ, ergo θ α est minus quàm λ κ.* Ma*ior patet ex principio indemõstrabili.* Minor *uerò probatur, primò quòd θ α sit residuum. probatur ex suppo-*

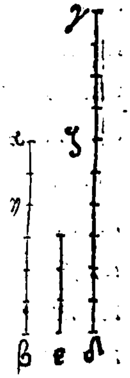
sitione,

ſitione, propter detractionẽ factam. Quòd uerò $\alpha\beta$ ſit minor quàm $\delta\iota$, patet ſimiliter ex ſuppoſitione & principio: quamlibet quantitatem toties poſſe multiplicari &c. Addit Theon hoc quoq; theorema uerum eſſe, etiã ſi partes detractæ ſint dimidiæ. Quòd uerò dicitur in theoremate, Si detrahatur plus dimidio, eò pertinet ut ſi minus dimidio detrahatur, non ſemper uerum ſit reſiduum eſſe minus minore ex duabus propoſitis.

Secundum Theorema.

Duabus magnitudinibus propoſitis inæqualibus, ſi detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reſiduum unquam metiatur, id quod ante ſe metiebatur, incommenſurabiles ſunt illæ magnitudines.

Sint magnitudines duæ inæquales $\alpha\beta$, $\gamma\delta$: minórq; ſit $\alpha\beta$: detractáq; per detractionem alternatim, & ſemper cõtinuatã minore de maiori: id quod relinquitur ex ea quæ maior fuerat ante detractionẽ, nunquam metiatur hoc ipſum, quod antequã id reliquum fieret, metiebatur maiorem magnitudinem. Dico incommẽſurabiles illas eſſe magnitudines $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. Quod ſi neges, illud cõtinuo affirmas, commẽſurabiles eas eſſe. Porro ſi ſint commenſurabiles, metietur eas quædam communis magnitudo per diffinitionem linearum commenſurabilium. Metiatur itaque, ſi fieri poteſt: eáque ſit ε, detrahatúrque de maiori



magnitudine γ δ pars quædam, puta δ ζ quæ sit æqualis maiori magnitudini α β: aut si æqualis non erit, sit tamen huiusmodi, ut illa minor magnitudo α β aliquot uicibus repetita, repræsentet ipsam magnitudinem δ ζ. hoc enim est quod dicitur, magnitudinem α β metiri δ ζ: talique detractione facta, minoris inquam de maiore, relinquatur ex maiore portio quædam γ ζ minor magnitudine α β. hoc uerò est quod dicitur in theoremate, neq; residuum unquam metiatur id quod ante se erat.

Similiter de α β detrahatur portio quædam β η æqualis magnitudini γ ζ, relinquatúrque ex ea detractione portio α η minor quàm γ ζ, idque semper si sit, opus fiat, saltem dum relinquatur quædam magnitudo minor ipsa magnitudine ε. hoc enim tandem euenire necesse est, per primum theorema huius, Si propositis illis duabus magnitudinibus inæqualibus α β, ε, (quarum minor ex consensu & suppositione tua erat ε. hanc enim posuisti esse communem mensuram duarũ magnitudinum α β, γ δ, itaque minorem alterutra) de maiore α β detrahatur plus dimidio, itémque de residuo plus suo dimidio: itaque relicta sit α η minor quàm ε. hactenus ea quæ ad structuram pertinẽt. nunc ad demonstrationem ueniamus. Cum igitur magnitudo ε metiatur magnitudinẽ α β, ipsa uerò α β metiatur δ ζ: etiam ε metietur similiter magnitudinem δ ζ per communem cõceptionem. Si magnitudo quædam metiatur aliam, metietur quoque omnem aliam ab ea mensuratam. tui simile quiddam

apposuit

appoſuit Campanus in numeris inter principia ſeptimi. Itaque ι metietur δ ζ. eadem etiā magnitudo ι metitur totam magnitudinem γ δ ex tua ſuppoſitione. poſitum enim eſt eam eſſe communem menſuram ambarū α β, γ δ. Ergo ι metietur & ipſum reſiduum, quod eſt γ ζ, per illam communem conceptionem, Quæ magnitudo metitur aliam totam, & partem ab ea detractā, metitur quoque reliquā. Idem in numeris poſuit Campanus. Cum itaque ι metiatur γ ζ: γ ζ autem metiatur β κ: ipſa quoque ι metietur β κ per ſuperiorem illam conceptionem. Atqui ι metitur totam magnitudinem α β: itaque per alteram conceptionē metitur reſiduum α κ. Metietur ergo maior magnitudo aliam ſe ipſa minorē: hoc autem fieri nullo modo poteſt, ut antè diximus inter principia. Non igitur illas magnitudines α β, γ δ metietur ulla magnitudo. Incommenſurabiles igitur erunt α β, γ δ. Duabus itaque magnitudinibus propoſitis inæqualibus et cæt. quod demonſtrandum erat.

Hæc demonſtratio concluſa eſt per deductionem ad impoſsibile. Poſitum eſt enim contradictorium concluſionis uerum. ex qua propoſitione per plures gradus ſyllogiſmorum deuentum eſt tandem ad id quod falſiſsimum eſt, nempe maiorem magnitudinem eſſe quæ minorem metiatur. Quia ergo ex ueris nunquam colligitur falſum: nunc autem concluſa eſt hæc falſitas, neceſſe eſt poſitionem illam tuam falſam extitiſſe. quod ipſum per deſtructionem conſequentis oſtendi poſſe tradunt dialectici. Falſum autem eſt maiorem metiri minorem. quod conſequens erat ad illud antecedens.

duas magnitudines α β, γ δ esse commēsurabiles. sequitur ergò ipsum antecedens falsum esse. Incommensurabiles ergo necesse est esse α β, γ δ. *Verum ex quibus medijs processerit illa conclusio falsa, maiorem magnitudinem metiri minorem, uideamus per resolutionē, sitq; syllogismus huiusmodi·* Omnis magnitudo metiens totam magnitudinem α β, & de ea detractam κ β, metitur residuum α κ. Magnitudo ε est magnitudo metiens totam α β, & detractam κ β. Ergo magnitudo ε metitur residuum α κ. falsa est conclusio, quia positum fuit α κ esse minorem quàm ε. Maior est indemonstrabilis, cō tracta ex principio uninersali: quod quale esset, antè retulimus. Minoris uerò probatio quia plura continet, hinc petēda est. Primò ex suppositione magnitudo ε metitur totam α β: deinde quòd eadem ε metiatur detractam partem quæ est κ β, ita probatur· Omnis magnitudo metiens magnitudinem γ ζ, metitur & κ β, quam γ ζ metitur. ε metitur γ ζ, ergo ε metitur & κ β. Maior similiter est per se nota ex principio uniuersali· Quæcunque magnitudo metitur aliam, metitur & eam quam ipsa metitur. Minor uerò sic probatur· Omnis magnitudo metiens totam magnitudinem γ δ, & detractā δ ζ, metitur & residuum γ ζ. ε metitur totam magnitudinem γ δ, & detractā δ ζ, ergo ε metitur γ ζ. Maior iterum per se nota est ex principio. Minor uerò quia duo membra habet, ita probatur· Primò ε metitur totā magnitudinem γ δ ex suppositione. deinde quòd eadem ε metiatur δ ζ, ita probandū est· Omnis magnitudo metiēs α β, metitur & δ ζ quam metitur α β. ε metitur α β,

ergo

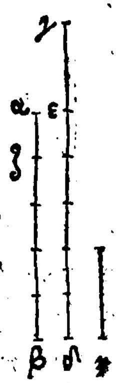
ergo ι metitur & δζ, quam metitur α β. Maior *uerissima est, & per se nota.* Minorē *uerò falsam esse ideo necesse est, quia causa fuit illius conclusionis falsæ, nempe quòd maior magnitudo minorē metiatur.* Non *erit itaque ι communis mensura ambarum magnitudinū α β, γ δ.* I*dem reperies, si quācunque aliam magnitudinē posueris pro communi illarum mensura.* Q*uia igitur nulla reperiri potest, erunt illæ magnitudines incommensurabiles, quod demonstrandum erat.* Ex *hoc elicitur πόρισμα siue corollarium à destructione consequentis.*

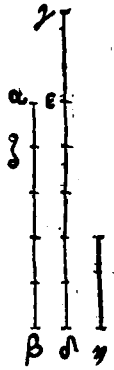
Si duæ magnitudines inæquales propositæ nō fuerint incommensurabiles, sed fuerint commensurabiles: continuata detractione minoris alternatim facta de maiore, necesse est residuum metiri id quod ante se metiebatur.

Tertium Theorema.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarū cōmunē mensurā reperire.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles α β, γ δ, quarum minor sit α β: oportet itaque magnitudinum α β, γ δ maximam communem mensuram reperire. P*rimum ipsa magnitudo α β aut metitur γ δ, aut nō metitur. Si itaque α β metitur γ δ, seipsam quoque cū metiatur, ipsa ergo α β est communis mensura magnitudinum α β, γ δ.* Manifestum *porrò est maximā quoque eam ambarum mensuram communē esse.* N*am nulla maior magnitudo quam α β metietur ipsam α β.* Sed *ne metiatur α β ma-*

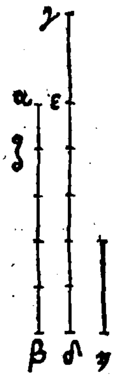




gnitudinem $\gamma\delta$. Detracta igitur per mutuã detractionem minore de maiori, residuũ metietur aliquando id quod ante se est per præcedens corollarium. Nam datæ sunt magnitudines $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ esse commensurabiles. itaque magnitudo $\alpha\beta$ metiendo $\varepsilon\delta$ partem magnitudinis $\gamma\delta$, relinquat magnitudinem $\varepsilon\gamma$ se $\alpha\beta$ inquam minorem. Ipsa uerò $\varepsilon\gamma$ metiendo magnitudinem $\zeta\beta$ partẽ magnitudinis $\alpha\beta$, relinquat similiter $\alpha\zeta$ se $\varepsilon\gamma$ inquam minorem. Ipsa uerò $\alpha\zeta$ metiatur magnitudinem $\gamma\varepsilon$. Illud autẽ est metiri, id quod ante se est, quãdo nihil relinquitur post mensurationem factam. hactenus constructio. sequitur statim demõstratio. Cum igitur $\alpha\zeta$ metiatur magnitudinem $\gamma\varepsilon$; $\gamma\varepsilon$ autẽ metiatur $\zeta\beta$: ergo $\alpha\zeta$ metitur magnitudinem $\zeta\beta$. Sed $\alpha\zeta$ metitur seipsam: ergo $\alpha\zeta$ metietur $\alpha\beta$. Sed quia $\alpha\beta$ metitur $\delta\varepsilon$: ergo $\alpha\zeta$ metietur $\delta\varepsilon$. Sed eadem $\alpha\zeta$ metitur $\gamma\varepsilon$: totam ergo $\gamma\delta$ metietur: ergo $\alpha\zeta$ metietur ambas magnitudines $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, earúmq; cõmunis mẽsura erit. Dico præterea illam esse communẽ utriusque maximam mensuram. Quod si neges illam esse maximam mensuram: erit itaque magnitudo quædam maior quàm $\alpha\zeta$, quæ metiatur utramque $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. ea uero sit η. Cum igitur per te η metiatur $\alpha\beta$: ipsa autem $\alpha\beta$ metiatur $\varepsilon\delta$: ergo η metietur $\varepsilon\delta$. ipsa etiam η per te metitur totam $\gamma\delta$: ergo metietur & residuũ $\gamma\varepsilon$. Sed cum $\gamma\varepsilon$ metiatur $\zeta\beta$, etiam η metietur $\zeta\beta$. metitur uerò eadem η per te totam $\alpha\beta$: ergo metietur & residuũ $\alpha\zeta$. Itaque magnitudo maior metietur minorem: quod sane

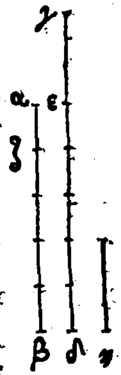
fieri

fieri nullo modo poteſt. Nulla ergo maior magnitudo quàm α ζ metietur utramq; α β, γ δ: ergo α ζ eſt maxima earum communis menſura. Duarum igitur magnitudinum commenſurabilum α β, γ δ reperta eſt communis maxima mẽſura, nempe α ζ. quod faciendũ fuit.



Corollarium.

Ex *hoc cõcluditur, ſi magnitudo quæpiam duas alias magnitudines metiatur, metietur quoque & communem utriuſq; maximam mẽſuram.* Hoc *corollarium probatur ex poſtrema parte demõſtrationis. Sint duæ magnitudines α β, γ δ, quarum ſit maxima communis menſura α ζ: ſit porrò alia η quæ etiam metiatur utramque α β, γ δ. dico magnitudinem η metiri α ζ. Sint eædem ſuppoſitiones quas modò poſuimus. Cum igitur η metiatur α β: α β autem metiatur ε δ: ergo η metietur ε δ. Sed η metitur etiam totã γ δ: metietur ergo & reliquum γ ε. Sed quia γ ε metitur ζ β: ergo η metietur ζ β. ſed metitur totam α β: metietur ergo & reliquum, quod eſt α ζ. ergo η metiens utrãque α β, γ δ, metietur & maximam utriuſque communem menſuram, nempe α ζ.* Docet Proclus *differentiam inter problemata & theoremata geometrica eã eſſe, ut problemata ſint ea quæ proponunt aliquid fieri oportere, qualia ſunt omnia quæ uerbo infinito concipiuntur, ut reperire, cõſtituere, ſecare, & ſimilia.* Theoremata *uerò ſunt quæ aſſerendo ponunt & definiũt de unoquoq; accidente cuiuſque ſubiecti, qualia ſunt duo prima huius libri.* Hoc *autem* 3. *problema eſt.* Huius *ergo pro-*



blematis demonstrationem sic resoluere nos oportet. Primùm aggrediamur partẽ eã quæ syllogismo directo & categorico cõcludit ipsam magnitudinẽ α ζ esse cõmunem mensurã magnitudinũ α β, γ δ. Omnis magnitudo metiens magnitudines γ ε & ε δ, metitur totam γ δ. Sed α ζ metitur γ ε & ε δ: ergo α ζ metitur totam γ δ. Maior patet ex principio indemonstrabili. Quæcũq; magnitudo metitur duas, metitur etiam compositam ex illis. cuius simile ponit Campanus in numeris inter principia libri septimi. Minoris pars illa quod α ζ metiatur γ ε, patet per corollarium secundi theorematis. Quòd uerò eadẽ α ζ metiatur ε δ, probatur. Omnis magnitudo metiens α β, metitur δ ε mensuratam ab α β. Sed α ζ metitur α β: ergo α ζ metitur δ ε. Maior patet ex principio. Quæcunq; magnitudo metitur aliam, metitur quamcunque mensuratam ab ea. Minorẽ ita probabis: Omnis magnitudo metiens magnitudines α ζ, ζ β, metitur & totam compositam ex illis α β. Sed α ζ metitur α ζ, ζ β: ergo α ζ metitur totam α β. Maior ex principio eodẽ patet. Minoris pars quod α ζ metiatur α ζ, patet etiam ex eo, quia omnis magnitudo seipsam metitur per unitatem. Quòd uerò α ζ metiatur ζ β, probatur sic. Omnis magnitudo metiens γ ε, metitur & ζ β mensuratã ab ea. Sed α ζ metitur γ ε, ergo α ζ metitur ζ β. Maior pendet ex principio. Minor etiam pendet ex antè dictis. Nunc uerò restat persequẽda pars illa demonstrationis, qua ostẽditur magnitudinem α ζ communem utriusque α β, γ δ mensuram: esse

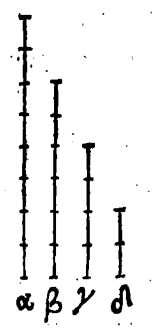
præterea

præterea maximam ambarum cõmunem mensurã. hoc autem fit per deductionem ad impoßibile. Nam si neges illam α ζ esse mensuram maximam communem utriusque magnitudinis α β, γ δ. sit alia maior quàm α ζ maxima communis utriusque mensura quæ sit κ. Tunc di*co te deductum iri ad illud impoßibile magnitudinem maiorem, nempe κ metiri minorem, scilicet α ζ.* Manen*tibus enim his quæ superius posita sunt* Omnis magni*tudo metiens totam α β, & de ea partem detractam ζ β, metitur & residuũ α ζ. Sed κ metitur totam α β & detractam ζ β: ergo κ metitur α ζ.* Maior *est indemõstrabilis.* Minor *sic probatur.* Primum *κ metitur totã α β ex tua positione.* Quod *uerò eadem κ metiatur ζ β, probo.* Omnis *magnitudo metiens γ ι metitur ζ β quam γ ι metitur. Sed κ metitur γ ι, ergo κ metitur ζ β.* Maior *rursum nõ eget probatione.* Minoris *probatio hinc deducitur.* Omnis *magnitudo metiens totam γ δ & eius partẽ δ ι, metitur & residuũ γ ι. Sed κ metitur totam γ δ & eius partem δ ι, ergo ita metitur γ ι.* Maior *item est indemonstrabilis.* Minoris *probationẽ sic deduces*· Primũ *quod ita metiatur totã γ δ, patet ex tua positione.* Quòd *uerò eadem κ metiatur δ ι, sic agas*· Omnis *magnitudo metiens α β, metitur δ ι mensuratam ab ea. Sed κ metitur α β: ergo κ metitur δ ι.* Maior *est indemonstrabilis.* Minor *patet ex tua positione quãdo uoluisti κ esse communem maximam mensuram utriusque nẽpe α β, γ δ. ex qua quia sequitur illa cõclusio falsa, scilicet maiorem κ metiri minorẽ α ζ, necesse est illã tuam positionem falsam extitisse. nam ex ueris nõ sequi falsum* *compertum est. Ergo* ι *non erit communis utriusque maxima mensura. idemq; fiet si quãcunq; aliam posueris. Constat igitur* α ζ *esse communem maximam utriusque mensuram. Quod autem hoc problemate proponitur inquirendum, id licet in theorema conuertere collecta summa totius demonstrationis, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus & commensurabilibus: si minor metitur maiorem, illa est communis maxima utriusque mensura: sin minus, facta mutua detractione quandocunque residuum metitur id quod ante se metiebatur postremo, illa est communis utriusque mẽsura atque ea maxima. Simili ratione poteris ex quocunque problemate theorema efficere.*

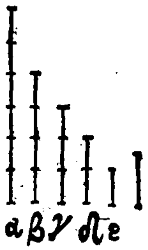
Quartum Theorema.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram reperire.

Sint datæ tres magnitudines cõmensurabiles α, β, γ, *oportet ipsarum communem maximam mensuram reperire. Sumatur maxima communis duarum priorum* α, β, *mensura per præcedens problema, sitq;* δ: *hæc magnitudo* δ, *aut metitur magnitudinem tertiam quæ est* γ, *aut eam non metitur. metiatur prius. Hactenus constructio huius partis, nunc ad demonstrationem. Cum itaque* δ *metiatur* γ, *metiaturq; magnitudines* α, β, *Ergo* δ *metietur* α, β, γ: *ipsarumque communis mensura*



sura est.Praterea hanc esse illarum maximam communem mensuram constat hac ratione. Nam nulla magnitudo maior quàm δ metietur illas α,β,γ. Quod si fieri posse defendis, sit magnitudo ε maior quàm δ, quam dicis metiri magnitudines illas α,β,γ. Cum itaque ε per te metiatur α,β,γ, metitur duas priores ex illis scilicet α,β: & praterea maximam cōmunem utriusque mensuram, nempe δ per corollarium pracedēs. Ergo ε maior quàm δ, metietur ipsam δ, quod est impoßibile. Sed ne metiatur δ magnitudinem γ, hoc primum dico magnitudines γ,δ esse commensurabiles. quod ita demonstratur. Cum sint commensurabiles datæ magnitudines α,β,γ, metietur eas profecto quædam magnitudo quæ similiter metietur separatas ex illis duas α,β. Quare metietur quoque maximam communem utriusque mensuram, nempe δ. Metitur *etiam ipsa eadem magnitudinē γ. Quare metietur utrāque γ,δ.* Ergo *γ,δ sunt commensurabiles ex definitione. Sumatur itaque maxima communis mē sura ambarum γ,δ, sitq; ε.* Ha*ctenus constructio huius partis, nunc est demonstratio. Quoniā ε metitur δ, & δ metitur magnitudines α,β, itaque ε metietur α,β. metitur praterea magnitudinem γ.* Ergo *ε est communis mē sura trium α,β,γ.* Dico *autem illam etiam esse maximam.* Nam *si fieri potest ut ε non sit maxima mensura communis trium α,β,γ, sit quædam maior quàm ε, magnitudo ζ, metiaturque tres illas α,β,γ.* Cumq; *ζ metiatur α,β,γ, etiam metietur α, β, & ipsarum maximam*



communem utriusque mensurā, nempe δ. Metitur præterea ipsa ζ magnitudinem γ. ergo ζ metitur γ, δ, & ambarum communem maximā mensuram, nempe ε. Maior uidelicet magnitudo minorē hoc uero fieri nullo modo potest. Nulla ergo maior quàm ε magnitudo metietur magnitudines α, β, γ. Ergo ε est maxima trium dictarum communis mensura, siquidem δ non metitur magnitudinem γ. Quod si δ metitur γ, ipsamet δ erit communis trium maxima mensura. Datis igitur tribus magnitudinibus com mensurabilibus, reperta est ipsarum communis maxima mensura, quod faciendum erat.

Corollarium.

Ex hoc manifestum relinquitur, si magnitudo tres magnitudines metiatur, metiri quoque maximam communem ipsarum mensuram. Similiter etiam in pluribus magnitudinibus maxima illarum communis mensura reperitur. In illis quoque uerum erit hoc corollarium. Huius corollarij demonstratio continetur in postremis uerbis ipsius Theonis. *itaque dices* · *Sint tres magnitudines α, β, γ, quarum communis maxima mensura sit ε. sit porrò alia ueluti ζ, ipsa quoque metiēs tres illas magnitudines, dico ζ metiri ε. Demonstrationē autem requires ab illis uerbis. Cumq; ζ metiatur α, β, γ etiā metietur α, β usque ad ea uerba* Maior uidelicet. Hæc *demōstratio quia uarias partes habet, singulæ uerò pluribus syllogismis cōtinētur: singillatim omnes resoluemus. Primò si δ communis maxima mensurā ambarum* *tarum α,β metiatur γ per se, clarum est magnitudinem Δ esse communem mensuram magnitudinum α, β, γ. Quod uerò eadem Δ sit earumdem communis mensura maxima, hinc liquet per deductionem ad illud impossibile,* Maiorem *magnitudinem metiri eam quæ se ipsa minor est.* Nam *si negas Δ esse maximam mensuram, sit quæuis maior quàm Δ uidelicet ι metiens illas α,β,γ.* Ex *hoc sequitur ι metiri ipsam Δ, quod falsum est & impossibile, cum maior non metiatur minorem.*

Omnis magnitudo metiens α,β, metitur Δ maximam α,β, mensuram. Sed *ι metitur α,β: ergo ι metitur Δ.* Ma*ior patet, quia collecta ex corollario superioris problematis.* Minor *patet ex tua positione. quam tamen falsam esse constat, quia causa est falsitatis illius ex ea consequentis. Verum est itaque Δ esse communem & maximam trium mensuram, si modo Δ metitur γ. Sin autẽ Δ non metiatur γ, illud imprimis uerum esse dico (quod ueluti lemma quoddã demonstrandũ est antequã eatur ulterius) magnitudines γ, Δ, esse cõmẽsurabiles. Omnes magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet θ, sunt cõmensurabiles.* Sed *γ, Δ sunt magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur uidelicet θ. ergo γ, Δ sunt cõmẽsurabiles.* Maior *patet ex definitione.* Minor *patet ex eo, quia α,β,γ, positæ sunt cõmẽsurabiles per cõmunẽ mẽsurã, uidelicet θ. sic itaq; probabitur Omnis magnitudo metiẽs tres α,β,γ, metitur duas priores, & maximã mẽsuram duarũ priorũ nempe Δ, per corollarium præcedentis theorematis.* Sed *θ metitur tres α,β,γ. ergo θ metitur Δ.* Quod *autẽ θ metiatur γ, patet ex positione. Cũ* igitur θ metiatur utrãq; γ,δ, sequitur ex definitione ambas γ,δ esse cõmẽsurabiles. Sit maxima cõmunis mẽsura ipsarũ γ,δ, quæ uocetur ε. Dico primo ipsam ε esse cõmunem mensurã trium α,β,γ sic probari. Omnis magnitudo metiens δ, metitur α,β, mensuratas à δ. Sed ε metitur δ, ergo ε metitur α,β. Maior patet ex principio. Minor uerò ex suppositione quando positum est ipsam ε esse maximam communem mensuram duarum γ,δ, ex eadem etiam suppositione ε metiebatur γ. Ergo ε metitur α,β,γ, estq; earum communis mensura. Dico præterea eandem ε esse communem maximam mensuram earũdem trium. sin minus, esto magnitudo quædã maior quàm ε metiẽs illas, sitq; ζ. Ex hac positione sequi uidebis illud idem impoßibile, maiorem ζ metiri minorẽ ε. Omnis magnitudo metiens γ, δ, metitur ε communem maximam utriusque mensuram. Sed ζ metitur γ,δ, ergo ζ metitur ε. Maior patet ex corollario superiori. Minor uerò ita probatur. Primò quod ζ metitur γ, patet ex suppositione, quia positũ est eam metiri singulas α,β,γ. Quod uerò eadem ζ metiatur δ probatur. Omnis magnitudo metiens α,β, metitur & δ communem utriusque maximam mẽsuram. Sed ζ metitur α,β, ergo ζ metitur δ. Maior patet ex corollario. Minor uerò à te posita est, quæ cum sit unica caussa illius falsæ conclusionis, necesse est ipsam quoq; falsam esse. Nulla ergo alia magnitudo quàm ε erit communis illarum trium maxima mensura. Hoc autem problema potes redigere in formam theorematis hoc modo· Si maxima mẽsura duarum primarum ex tribus commensurabilibus magni-

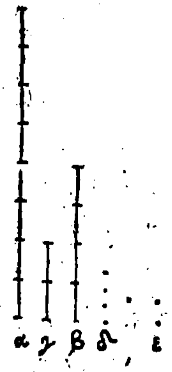
tudinibus

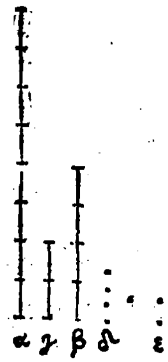
tudinibus metitur tertiam, illa est communis maxima mensura trium. sin minus, maxima mensura tertiæ & maximæ mensuræ duarum primarum est cõmunis maxima mensura trium.

Quintum Theorema.

Cõmẽsurabiles magnitudines inter se proportionẽ eam habent, quã habet numerus ad numerũ.

Magnitudines dicũtur inter se proportionem habere, quã habet numerus ad numerum, quãdo quæ proportio est inter illas magnitudines, ea reperitur inter aliquos numeros, ut puta si magnitudo magnitudini sit, uel æqualis, ut numerus 2 numero 2: uel dupla, ut numerus 4 ad 2: uel tripla, ut 6 ad 2: uel in alia quauis multiplici proportione. Idem de superparticulari, si magnitudo sit sesquialtera ad magnitudinem, ut numerus 3 ad numerum 2. Idem de aliis speciebus superparticularis proportionis. Idem de superpartienti, de multiplici superparticulari, & de multiplici superpartienti, quæ sunt omnia proportionum genera, quæ in numeris repe riuntur. Sint magnitudines commẽsurabiles α, β. Dico ipsas habere proportionem inter se, quã numerus aliquis ad aliquem aliũ numerum. Nam cùm sint commensurabiles α, β, sit γ cõmunis earũ mẽsura, & quoties γ metitur α, (id est quot partes reperiũtur in α æquales ipsi γ) tot sint unitates in numero δ. quoties uerò eadem γ meti-





tur β, tot sint unitates in numero ε. Sequitur demonstratio. Cum itaque γ metiatur α toties quot sunt unitates in δ numero, ipsáque unitas metiatur numerũ δ toties quot sunt in ipso δ unitates. totidem ergo uicibus γ metitur α, quot uicibus unitas metitur numerum δ. Ergo *γ eandem proportionem habebit ad α, quam unitas ad numerum δ. per conuersam etiam proportionalitatem erit ut α ad γ: sic numerus δ ad unitatem. Rursum cum γ metiatur β toties quot sunt unitates in numero ε: metiatúrque unitas numerum ε toties, quot sunt in eo unitates. tot uicibus itaque γ metietur β, quot uicibus unitas metitur numerum ε.* Ergo *per æquam proportionalitatem (hanc uerò uocat* Euclides *δι' ἴσου λόγου) quam proportionem habet magnitudo α ad magnitudinem β, eandem habet numerus δ ad numerum ε.* Itaque *commensurabiles magnitudines, puta α, β, inter se proportionem eam habent, quam numerus δ ad numerum ε. quod demonstrandum erat.*

Resolutio.

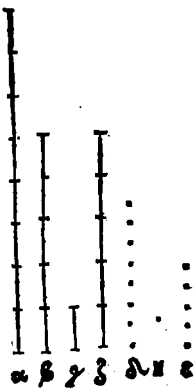
Omnia extrema duorum ordinum continentium æqualẽ numerum magnitudinum coniugatarum in eadẽ proportione, sunt & ipsa in eadem proportione. Sed α, β, & δ, ε sunt extrema duorum ordinum, &c. Ergo *α, β, & δ, ε sunt in eadem proportione.* Maior *patet ex*
2 2.5. *Minoris pars prior scilicet α, β & δ, ε esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentiũ*

magnitu-

magnitudinum patet ex suppositionibus admissis in cõstructione. Quod uerò magnitudines contentæ in illis ordinibus sint in eadem proportione coniugata, id est singula paria prioris ordinis cum singulis paribus alterius sint proportionalia, probatur ita Primò *quòd* γ, β *habeant eandem inter se proportionem quam unitas & numerus* ι, λ. *Omnis magnitudo metiens* β *tot uicibus, quot uicibus unitas metitur* ι, *habet ad* β *eandem proportionem, quam unitas ad numerum* ι. *Sed* γ *tot uicibus metitur* β *quot uicibus unitas metitur* ι. Ergo γ *habet ad* β *eandem proportionem, quam unitas ad numerum* ι. Maior *per se patet contracta ex definitione proportionalium, quæ est in principiis lib.5. de quibus doctissime differentem lege* Petrum Nonium Lusitanũ. Minor *uerò concessa est per suppositionem. Quod uerò* α, γ *habeant eam proportionem quam numerus* λ *ad unitatem, probatur eodem modo. Omnis magnitudo quam metitur* γ *tot uicibus quot unitas metitur numerum* λ, *habet ad* γ *eandem proportionem quam numerus* λ *ad unitatem. Sed* α *est magnitudo quam metitur* γ *tot uicibus, &c.* Ergo α *habet ad* γ *eandẽ proportionem quam* λ *ad unitatem.* Maior *probatur eodem modo quo superior.* Minor *item patet ex suppositione.* Vt *uerò reperias numeros duos, quorum proportionem habeant inter se duæ magnitudines commensurabiles, uide quot uicibus mensura earum communis unamquãque metiatur.* Numeri *enim uicibus illis expressi retinent eam proportionem, quam magnitudines commensurabiles.*

Sextum Theorema.

Si duæ magnitudines proportionem eam habent inter se quam numerus ad numerum, commensurabiles sunt illæ magnitudines.



Duæ enim magnitudines α, β, inter se habeant eam proportionem, quam numerus δ ad numerum ι. Dico commensurabiles esse magnitudines α, β. Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales quot sunt unitates in numero δ (hoc uerò idem est ac si uelis quamcunque partem auferre de magnitudine α, quod quomodo fiat, docet 9.6.) sitque magnitudo γ æqualis uni ex illis partibus æqualibus ipsius α. sit etiam alia magnitudo ζ composita ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi γ, quot unitates sunt in numero ι. Hîc incipit demonstratio. Cùm igitur tot magnitudines æquales ipsi γ sint in magnitudine α, quot sunt unitates in δ, quota pars ipsius δ est unitas, eadem pars erit magnitudo γ magnitudinis α. Est ergo ut γ ad α, ita unitas ad δ. metitur uerò unitas numerum δ. ergo & γ metietur α. Et quia est ut γ ad α, sic unitas ad numerum δ. conuersa igitur proportione erit ut α ad γ, sic numerus δ ad unitatem. Rursum quia quot sunt unitates in numero ι, tot sunt in magnitudine ζ magnitudines siue partes æquales ipsi γ. Erit itaque ut γ ad ζ, sic unitas ad ι. Nuper uerò conclusum est sicut α ad γ, ita

numerus

numerus δ ad unitatem. Per *æquam igitur proportionem erit ut α ad ζ, sic δ ad ε. Sed sicut δ ad ε, ita se habet α ad β.* Itaque *etiam ut α ad β, similiter se habebit α ad ζ.* Ipsa *igitur magnitudo α ad utranque β, ζ, eandem proportionem retinebit.* Aequalis *est igitur magnitudo β magnitudini ζ per secundam partem 9, 5.* Sed *γ metitur ζ, ergo metietur β. Sed & eadem γ metitur α, igitur γ metitur α, β. commensurabiles igitur sunt magnitudines α, β.* Si *ergo duæ magnitudines &c. quod demonstrandum fuit.*

Resolutio.

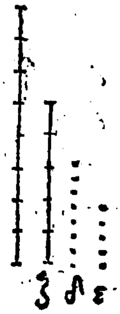
Omnes *magnitudines quas eadem mensura metitur, sunt commensurabiles.* Sed *magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, metitur eadē mensura, puta γ.* Ergo *magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt commensurabiles.* Maior *patet ex definitione commensurabilium magnitudinum.* Minoris *uerò pars illa quòd γ metiatur β, ita probanda est.* Magnitudo *ζ est magnitudo β, quia æquales. γ metitur ζ, ergo γ metitur β.* Minor *patet ex concessione supposita inter construendum, illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ.* Maior *sic probatur.* Omnes *magnitudines ad quas eadem magnitudo, puta α eandem proportionem habet, sunt æquales.* Sed *ζ, β sunt huiusmodi. ergo ζ β sunt æquales.* Maior *patet ex secunda parte nonæ quinti.* Minor *uerò ita probetur.* Omnes *proportiones æquales eidem proportioni, puta ei quæ est inter δ, ε numeros, sunt inter se æquales.* Sed *proportiones inter α, ζ & α, β sunt æquales eidē proportioni, puta quæ est* *inter δ, ι. Ergo proportiones inter α, ζ & α, β sunt inter se æquales. Maior patet ex undecima quinti. Minoris pars illa, quòd proportio inter α, β sit æqualis ei quæ est inter δ, ι numeros, patet ex suppositione. Quòd uerò α, ζ eandem habeant proportionem quam δ, ι, probetur sic: Omnia extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum coniugatarũ in eadem proportione, sunt & ipsa in una & eadẽ proportione. Sed α, ζ, & δ, ι sunt extrema duorũ ordinũ, &c. Ergo α, ζ & δ, ι sunt in una & eadem proportione. Maior patet ex 22.5. Minoris uerò pars prior scilicet α, ζ & δ ι esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum, patet ex suppositionibus admissis in construendo. Nam primus ordo est α, γ, ζ. Secundus uerò est δ, κ, ι. κ enim est loco unitatis. Quòd uerò magnitudines in his ordinibus cõtentæ sint in eadem proportione cõiugatæ, probetur. Et primo loco α, γ habere inter se eandem proportionẽ quam δ ad unitatem κ, patet ex suppositione admissa inter cõstruendũ illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales, &c. Quanuis ea pars syllogismo quoque demonstrari posit. Omnes quatuor magnitudines inter se proportionales, sunt quoque conuersa proportione proportionales. Sed γ, α, κ unitas & δ sunt magnitudines proportionales. Ergo γ, α, κ & δ sunt conuersa proportione proportionales. Maior patet per corollariũ quarti theorematis libri quinti. Minor uerò patere potest ex suppositione, illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur. Secundum erat in illa minore γ, ζ habere eandem proportionem*

portionem

portionem quam unitas & ε. quod quidem etiã patet ex suppositione inter construẽdum admissa illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ. Quantum ad alteram partem minoris assumptæ in primo syllogismo, nempe γ metiri magnitudinem α, ea quoque patet ex illa suppositione, Nam magnitudo α diuidatur, &c. Nihilominus potest & ipsa syllogismo demõstrari: sed quia est ex suppositione nota, nihil est opus syllogismo.

Corollarium.

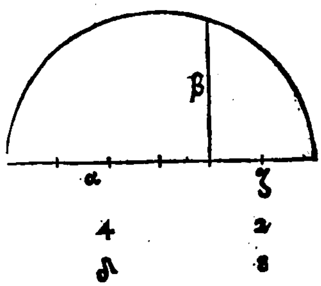
Ex hoc fit manifestũ, si fuerint duo numeri ut δ, ε, & recta linea ut α, dari posse aliam lineam ad quam linea α retineat eandem proportionem quã numerus δ ad numerum ε. Diuidatur linea α in tot partes æquales quot sunt unitates in altero numero δ per nonam sexti, & cõponatur altera linea, puta ζ ex tot partibus, quæ sint æquales partibus lineæ α, quot sunt unitates in altero numero ε. itaque linea α erit ad lineã ζ sicut numerus δ ad numerũ ε. Hac ratione potes cuicunque lineæ propositæ, aliã dare commensurabilem in longitudine. Nam si duæ lineæ habent proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt inter se quoque longitudine commensurabiles, per hoc theorema 6. Quod uerò sequitur in exemplari græco, continet, subobscurè tamen lemma quoddam, ipsum etiam alieno loco positũ. inuenitur enim inter alia lemmata post 29 theorema huius libri, uerbis conceptis in formam problematis.



Lemma.

Duobus numeris datis, & linea recta, oportere efficere ut numerum ad numerum: sic quadratum lineæ datæ ad quadratum alterius.

Sint dati numeri δ, ε: recta uerò sit α: propositúmque sit efficere id quod præcipitur hoc problemate. reperiatur igitur per postremum corollarium linea ζ, ad quam linea α sit in ea proportione in qua numerus δ ad numerum ε: sumatúrq; inter duas illas lineas α, ζ media proportionalis per tertiam decimam sexti, sitque β.



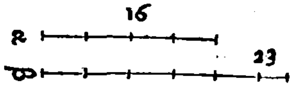
Cum igitur sit sicut numerus δ ad numerum ε, ita linea α, ad lineam ζ. & quemadmodum se habet linea α ad lineam ζ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, per secundum corollarium uicesimæ sexti. Itaque sicut numerus δ ad numerum ε, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β.

Septimum Theorema.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerũ.

Magnitudinum non habẽtium proportionem inter se quã numerus ad numerum, nullum exemplum efferre possumus in numeris, sicut fecimus in 5 huius. nam impossibile est numerum ad numerum nõ habere proportionem quam numerus ad numerum. Sint magnitudines incommensurabiles α, β. Dico α, β nullam omnino

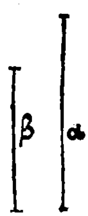
proportionem



proportionem inter se talẽ habere, qualis inter ullos numeros reperitur. Quod si contradicatur α, ß habere proportionem inter se quam numerus ad numerum: sequitur illud continuo, commensurabiles quoque esse α, ß per sextum theorema huius libri. Sed hoc theorema ponit illas esse incommensurabiles. Nullo igitur modo α habebit proportionem ad ß, quam numerus ad numerum, quod demonstrandum fuit. Hic modus argumentationis & certissimus est, & breuissimus: sumitúrque ex syllogismis hypotheticis, quem à destructione consequentis uocant. Illúdque in uniuersum uerum esse deprehendes, quotiescunque in disciplinis mathematicis aut aliis quibuscunque, quæ nomine censentur scientiarum, reperiuntur duæ conclusiones ex earum numero, quas conuersas uocant, quales sunt quintum & sextum theorema huius libri: in his potentia contineri præterea alias duas conclusiones & ipsas conuersas, contrario tamen modo quàm superiores, quales sunt hoc theorema & proximum.

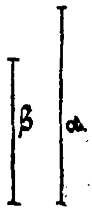
Octauum Theorema.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.

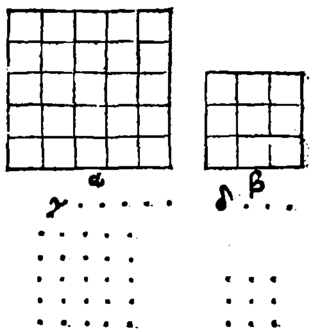


Duæ enim magnitudines α, ß, inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum. Dico incommensurabiles esse magnitu-

dines α,β. Quòd ſi contradicas, uidelicet cõmenſurabiles eſſe, habent ſtatim proportionem quam numerus ad numerum, per quintum theorema huius. ſed hoc theorema ſupponit eas non habere. incommenſurabiles ergo ſunt magnitudines α,β. Si igitur duæ magnitudines, &c. quod demonſtrandum fuit.



Nonum Theorema.



Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine commẽſurabilibus, inter ſe proportionẽ habent, quã numerus quadratus ad alium numerũ quadratum. Et quadrata habentia proportionem inter ſe quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habebunt quoque latera longitudine commenſurabilia. Quadrata verò quæ deſcribuntur à lineis longitudine incommenſurabilibus, proportionem non habent inter ſe quã quadratus numerus ad numerum alium quadratũ. Et quadrata non habentia proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque latera habebunt longitudine cõmenſurabilia.

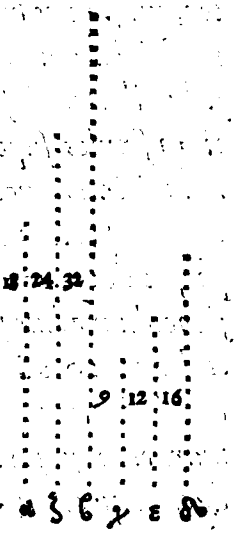
Quia difficile uidetur hoc theorema, dignum quoque uiſum

ſum eſt, quod pluribus modis demonſtraretur. Nos uerò antequam ad demonſtrandum accedamus, nonnulla præfabimur de ſignificatione uocum ſiue terminorum huius theorematis, quæ rem totam illuſtrabũt. Hoc ſane theorema & quæ proxime ſequuntur, huiuſmodi ſunt, ut niſi plane percipiantur, res alioqui non difficillimæ inexplicabiles uideri poßint. Imprimis illud intelligendum eſt, lineas eſſe longitudine commenſurabiles, & lineas habere proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, idem eſſe. Vt quæcunque lineæ ſunt longitudine commenſurabiles, habeant etiam proportionem inter ſe quam numerus ad numerum. & contrà, quæ lineæ habent proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſint quoque longitudine commenſurabiles, ut patet ex 5. & 6. huius libri. Similiter illud conuertitur, lineas eſſe longitudine incommenſurabiles, & non habere proportionem quam numerus ad numerum, ut patet per 7 & 8 huius. Itaque intelligi debet quod dicitur in hoc theoremate, de lineis longitudine commenſurabilibus, & longitudine incõmenſurabilibus. Sed dicat aliquis, priuſquã Euclides docuit modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles, tractat de quadratis ipſarum, cum tamen contrà fieri oportere uideri poßit. prius enim exquiri debet de re aliqua an ſit, quàm quid ei accidat, conſyderetur. Nos uerò dicimus Euclidem quidem tradere modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles in theoremate 11. quod eſt in Græco 10. neque tamen perverſe quicquam feciſſe. Nam hoc theoremate ſumit has *lineas longitudine incommensurabiles ex hypothesi, neque amplius quicquam sibi demonstrãdum hoc quidem loco assumit, quàm ex illa hypothesi scilicet linearum longitudine incommensurabilium quadrata non habere proportionem, & cætera. Quod ubi uerum esse demonstrauerit, sat fecisse uidebitur. Ex hoc autem theoremate gradum sibi faciet ad inuestigationem linearum illarum in theoremate undecimo. Illud præterea intelligendum est quid uocibus illis significetur, habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod ut assequi posis, repetenda tibi sunt nõnulla theoremata, eorúmque demonstrationes ex arithmeticis suprà scriptis: atque ea maxime quæ agunt de numeris similibus superficialibus ex quibus est uicesimumsextum octaui. Numeri similes plani inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Similes uerò plani numeri sunt (ut est in principijs libri septimi) qui habent latera proportionalia. Latera uerò cuiusque numeri sunt, ex quibus inter se multiplicatis, singuli numeri producuntur. ex illo theoremate 26 octaui constat non solos numeros quadratos habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratum, sed eandem etiam proportionem habere numeros omnes similes superficiales inter se. Neque uerò idem est numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque hæc inter se conuerti possunt. Quãuis enim numeri quadrati habeant proportionem quã*

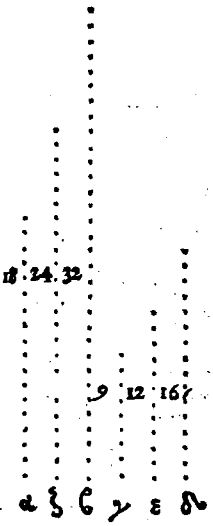
numerus

numerus quadratus ad quadratum, non ideo tamē omnes habentes proportionē quam quadratus ad quadratum sunt quadrati. Sunt enim similes superficiales & ijdem non quadrati, qui tamen proportionē habent quam quadratus ad quadratum, quanuis omnes quadrati sint similes superficiales. nam inter duos numeros quadratos incidit unus medius proportionalis, per. 11.8. Si uerò inter duos numeros incidat unus medius proportionalis, illi duo numeri sunt similes superficiales per 20.8. Dico præterea illud theorema 26. 8. conuerti. Duo numeri habentes inter se proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum sunt similes superficiales: cuius rei illa demōstratio afferri potest.

Sint duo numeri α, β habentes proportionem inter se quam quadratus ad quadratum. Illi duo numeri aut ambo simul sunt quadrati, aut ambo simul sunt nō quadrati. (de illis autē non intelligimus hîc quicquam dicere, quorum alter est quadratus, alter uerò non quadratus. tales enim non possunt habere proportionem quā numerus quadratus ad numerum quadratum, per 24.8. à destructione consequētis.) Ergo si ambo sunt quadrati, sunt etiam similes superficiales, ut modo conclusum est. Si non sint quadrati, sint illi duo quadrati γ, δ, quorum proportionem habeant α, β. quia ergo α, β habent proportionem inter

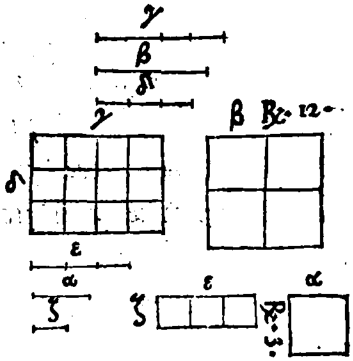


se quã γ, δ, & inter γ, δ incidit unus medius proportionalis puta ε, per 11.8. Ergo inter α, β incidet unus medius proportionalis, puta ζ per 8.8. Sed si inter duos numeros nempe α, β unus medius incidat proportionalis, illi duo numeri sunt similes superficiales, per 20.8. Ergo numeri α, β sunt similes superficiales. Duo ergo numeri habẽtes proportionẽ quã quadratus ad quadratum, sunt similes superficiales. Ex his intelligi potest numeros habentes proportionem inter se quam quadratus ad quadratum esse aut quadratos, aut similes planos id est superficiales. Similes uerò superficiales qui sint, intelligitur quidem ex definitione. sed quibus notis statim agnosci possint numeri propositi, an similes superficiales sint nec ne, sic habetote. Primùm si inter duos numeros propositos non incidit medius proportionalis, illi duo numeri non sunt similes superficiales per 18.8. à destructione consequentis. Quòd si incidit medius proportionalis, sunt illi similes superficiales per 20.8. Deinde duo numeri similes superficiales multiplicatione alterius in alterum facta, producunt numerum quadratum, per primam 9. Ergo si non producunt quadratũ, non sunt similes superficiales. Quòd si fecerint quadratũ ex multiplicatione sui ipsius, sunt illi similes superficiales per 2.9. Quo uerò facilius apprehendantur consequentes demonstrationes, & simul



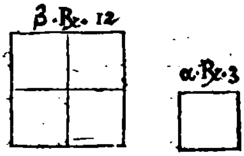
exemplum

exemplum adducamus eorum quæ diximus. Sit *linea γ longa pedes quatuor. sit & alia linea δ longa & ipsa pedes tres, reperiaturque media proportionalis per* 13.6. *quæ media proportionalis sit linea β.* Ergo *quadratum lineæ β erit æquale parallelogrāmo rectangulo quod fit ex lineis γ, δ, per* 17.6.



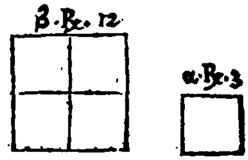
Quod quadratum continebit pedes 12, *sicut & parallelogrammum ex lineis γ, δ.* Sit *etiam linea ε longa pedes* 3, *& linea ζ longa pedem* 1, *media proportionalis inter lineas ε, ζ, sit α. Quadratum lineæ α, erit pedum trium, sicut & parallelogrammum ex lineis ε, ζ.* Dico *quadratum lineæ β quod est* 12. *pedum, habere proportionem ad quadratum lineæ α, quod est pedum triū, quā numerus quadratus ad numerū quadratū.* Nam *quemadmodū se habet numerus* 12. *ad numerum* 3, *ita se habet quadratū lineæ β, quod est* 12 *pedum, ad quadratū lineæ α quod est* 3. Sed *numeri* 12 *&* 3 *sunt similes superficiales, quia latera numeri* 12 *quæ sunt* 2 *&* 6, *sunt proportionalia lateribus numeri* 3, *quæ sunt* 1. *&* 3. Ergo *quadratum lineæ β quod est* 12, *habebit eam proportionem ad quadratū lineæ α, quod est* 3, *quam habet numerus similis superficialis ad similē superficialem.* Sed *numeri similes superficiales habent proportionē inter se quam numerus quadratus ad nu-*

merum quadratum qui sunt 4 & 1, per 26. octaui. Ergo quadratũ lineæ ϐ quod est duodecim, habebit proportionem ad quadratum lineæ α quod est 3, quam numerus quadratus ad quadratum, eam scilicet quam quaternarius ad unitatem



quæ est quadrupla proportio. Nam quadratum maius quod est duodecim, continet quater quadratum minus quod est 3, quia latus quadrati duodecim quod est linea ϐ, est duplum ad latus quadrati 3 quod est linea α. Habet ergo linea ϐ ad lineã α proportionẽ quã numerus ad numerum. Ergo sunt longitudine commensurabiles per 5. huius, quæ est hypothesis necessaria ad conclusionẽ eius passionis siue prædicati hoc theoremate comprehensi, nempe quadrata talium linearum habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sic & numerus denominãs maiorem extremitatem proportionis lineæ ϐ ad lineã α, qui est 2. si in se ducatur reddet quadratum numerum nempe 4. similiter & numerus denominans minorem extremitatẽ nempe 1, si ducatur in se, nihil amplius efficit quàm 1. quæ unitas est etiam potentia quadratus numerus. Ergo quadratum lineæ ϐ ad quadratum lineæ α habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, nempe quàm 4. ad 1. Ex hoc uides (quod modò dicebamus) non idem significare numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratũ. Nam numeros

meros 12 & 3 quadratos nō esse constat, cum tamē quadrata eos numeros continentia illam proportionem habeāt. Sed & latus quadrati 12, quanuis numero per se exprimi nequeat, ut dicas latus illud est longū tot pedibus, qui pedes quadrati numero 12 complent totum illud quadratum: tamen ad aliud relatum siue comparatum, nempe ad latus quadrati 3, quod nec ipsum per se numero possis exprimere, ad latus inquam quadrati 3, proportionem duplam habet. Nam quadratum quadruplum ad aliud quadratum (ut quadratum lineæ β quod est 12, ad quadratum lineæ α quod est 3) habet latus suum duplum ad latus alterius quadrati, per illud uniuersale corollarium 20. 6. Similes figuræ habent proportionem inter se suorum laterum relatiuorum duplicatam. Quòd si dicas latus quadrati 12 numerari posse, quia eius proportio quam habet ad latus quadrati 3 numeratur per binarium, cū sit proportio dupla: illud primùm fac cogites, non esse id quod dicitur per se numerari aliquam magnitudinē, sed illius proportionem. Magnitudo autem illa scilicet latus quadrati 12 per se numeraretur, quādo nulla habita ratione proportionis ipsius ad aliud, dicere possemus, Quadrati continētis pedes quadratos 12, latus est longum tot pedibus, quorum numerus in se ductus efficeret numerum illum 12. sed hoc fieri non potest, quia 12 non est numerus quadratus. Sic itaq; dices: Quatenus quadratum illud 12 per se consyderatur, nulla habita

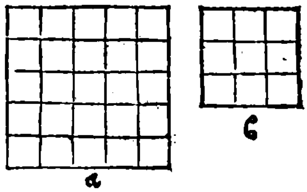


ratione proportionis ad aliud, sed tantum ut est 12 pedum, non habet quidem latus per se numerabile, sed si conferatur ad aliud, puta ad quadratum 3 pedum, tũc dices, latus quadrati 12 est 2. latus uerò quadrati 3 est 1. sed hæc est denominatio ipsius proportionis quæ dupla dicitur. quæ proportio non potest esse aut consyderari in paucioribus terminis quàm duobus, cum sit relatio ad aliud, hoc est in prædicamento ad aliquid. Itaque *binarius non est numerus pedum talium quales 12 sunt in ipso quadrato.* Deinde *si binarius esset latus quadrati 12, ut dicas illud latus esse duo, ex multiplicatione duorum in se, non efficeretur illud quadratum 12, sed quadratum aliud quod esset 4 pedum, quemadmodum ex binario numero in se ducto fit quadratus numerus quaternarius.* Sed *nec si dicas illud latus quadrati 12 numerari alio ullo numero, duxerisq; numerum illum in seipsum, unquam efficitur duodenarius numerus.* Cũ *tamen omnes numeri denominantes latus cuiuscunque quadrati multiplicatione sui ipsius, illum ipsum numerum efficiant denominantem quadratum, cuius latera denominant, puta 2, multiplicatione sui in seipsum reddit 4. ternarius reddit 9. quaternarius reddit 16. & similiter cæteri omnes.* Non *igitur idem est aliquas magnitudines habere inter se proportionem quam numerus ad numerum, & numerari per se singulas ex illis nulla ratione habita proportionis, ut hîc latus quadrati 12 per se quidem numerari nullo modo potest sed comparatum ad aliam magnitudinem, puta ad latus quadrati 3, numeratur illius proportio.* Sic *& latus ipsius*

quadrati

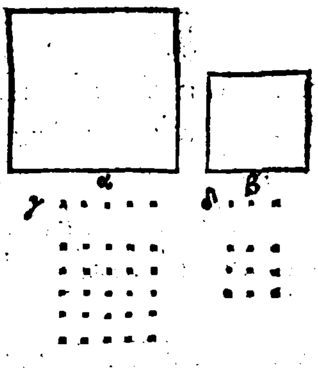
quadrati 3 & cæterarum omnium figurarũ quas geometræ quadratas uocant, quarum areæ tamen per numeros quadratos non designantur. Quod uerò dicimus, manifestum est ex uerbis ipsius Euclidis *in theorematibus 5, 6, 7, & 8 huius libri, cum ubique dicat commensurabiles & incommensurabiles magnitudines non quidem per se numerari, sed habere aut non habere proportionem quam numerus ad numerum. Quæ res non bene animaduersa uidetur plerisq; caussam erroris attulisse, ut ex sequentibus planum fiet.* Nunc *uerò qui aggressi sunt demonstrationem huius theorematis magis particularem aliquam demonstrationem nonnullis uideri possent attulisse, quàm uniuersalem.* Et *sane non deesse arbitror qui illorum dicta secus intelligant, cum existiment ab eis suppositas esse lineas quasdam non tam longitudine commensurabiles, quales in theoremate supponuntur esse, quàm numero certo singillatim numerabiles.* Itaque *non intelligentes, illud de demonstrationibus illorum dicere potuerunt: cũ ea ratione credidissent à se conclusum illud uniuersale quod est in hoc theoremate* Euclidis, *Quadrata descripta ex lineis longitudine commensurabilibus habere proportionẽ inter se, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: illud particulare tantum concluserunt, Quadrata descripta ex lineis numero certo per se numerabilibus habere proportionem &c. Quod tamen aliter est, & demonstrationes illorum rectæ sunt, & proposito theoremati conuenientes. Tantum pictura figurarum quas græcus codex habet, posset ambi-*

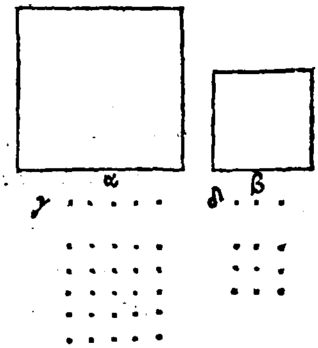
guitatis aliquid afferre. Nam ita pinguntur quadrata, & describuntur certis areolis, ut earũ numerus quadrato numero denominetur.



Ex quo uideri posset lineas α, β, quæ describunt ipsa quadrata, oportere esse numero aliquo per se numerabiles, ut linea α sit pedum 5, & linea β pedum 3, ueluti pictura ipsa refert hic. Quod tamen non supponit Euclides, sed unum illud supponit & requirit eas esse longitudine cõmensurabiles, ut in superiori exẽplo de quadratis duobus, quorum alterum spatium totum est 12, alterũ uerò est 3. Nam quanuis latera ipsorum non sint numero aliquo certo per se numerabilia, sunt tamen ipsa eadem longitudine cõmẽsurabilia. Præterea hæc pictura quadratorum α, β per areolas distinctorum illum errorem efficere posset, ut quis existimet idem esse numeros duos quadratos esse, & habere proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerũ. nam numerus areolarum in quadrato α, est numerus quadratus, nempe 25 productus ex radice 5, quæ est longitudo ipsius lineæ α. Similiter numerus areolarum quadrati β est quadratus, nempe 9, & ipse productus ex suo latere 3, longitudine inquã ipsius lineæ β. Nos uerò nuper ostẽdimus aliud esse numeros quadratos dici, & habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaque quantũ ad illas areolas attinet contentas maiore quadrato lineæ α, quæ sunt numero 25, exprimunt numerum illum quadratum 25, qui efficitur

tur ex numero 5 in se ducto. qui numerus 5 est maior extremitas proportionis inter 5 & 3, quæ est proportio linearum α, β. Hæc autẽ proportio, nempe numeri 5 ad 3 facit ut lineæ ipsæ α, β sint inter se longitudine commensurabiles per 6 huius. Idem dices de minoris quadrati areolis. Neque necesse est intelligere illas areolas quadratas esse, aut pedes aut passus quadratos conficiẽtes ipsa quadrata, quanuis tales esse possunt, si modò latera ipsorum quadratorũ sint tot pedibus longa, nempe 5 aut 3. Omnino tamen necesse est numeros ambos exprimentes numerum pedum aut passuum quadratorũ ipsis quadratis comprehensorũ esse simul aut quadratos, ut in his figuris quadratis linearum α, ϵ: aut ambos esse similes superficiales, ut in superioribus quadratis quæ erant 12, et 3. de quibus numeris constat ex antedictis eos esse similes superficiales, itaq; habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaq; potes pingenda tibi proponere ipsa quadrata linearum α, β, ut nullam distinctionem areolarum in se recipiãt, sintq; quadrata singula plane uacua, solisque quatuor lineis æqualibus cõtẽta. quod ut intelligatur, demonstrationes ipsas explicabimus. Sint duæ lineæ α, β longitudine commẽsurabiles. Dico quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β habere proportionẽ quã quadratus numerus ad quadra-



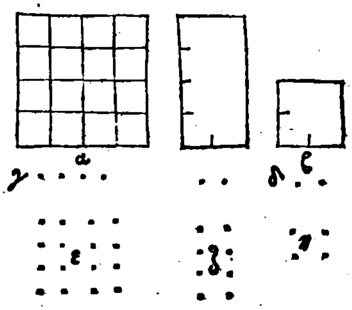


tum numerum. Cum enim commensurabilis sit longitudine linea α lineæ β. Ergo α ad β habet proportionē quā numerus ad numerum, per 5. huius. habeat itaque proportionem quā numerus γ ad δ. Cū igitur sit quemadmodum linea α ad β, ita γ numerus ad δ numerum: cumq; proportio quadrati quidem lineæ α ad quadratum lineæ β sit proportio cōtinens duplicatam proportionem lineæ α ad lineam β, (similes enim figuræ sunt in duplicata proportione suorum laterum relatiuorum, per primum corollariū 20. 6.) itidem cum proportio numeri quadrati, qui producitur à radice γ, ad quadratum numerum productum à radice δ sit proportio duplicata numeri γ, ad numerū δ per secundum partem 11. 8: cumque unius & eiusdē proportionis, puta quæ est lineæ α ad lineam β, uel numeri γ ad numerum δ, proportiones æque multiplices, nempe quadrati lineæ α ad quadratum lineæ β, & numeri quadrati producti à radice γ ad numerum quadratum productum à radice δ, sint inter se æquales: est igitur sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita numerus quadratus productus à radice γ, ad numerum quadratum productum à radice δ.

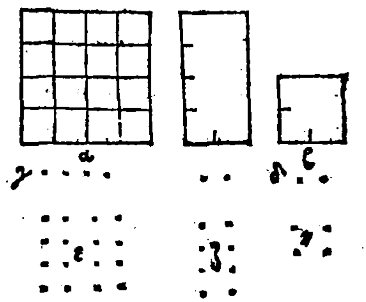
Aliter.

Sint α, β lineæ rectæ longitudine commensurabiles. Dico quadratum descriptum ab α ad quadratum descriptū

ad



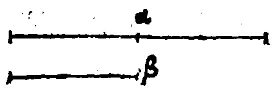
ad β habere proportionẽ quã numerus quadratus ad alium numerum quadratum. Quia enim linea α est longitudine cõmensurabilis lineæ β, habent inter se proportionẽ quam numerus ad numerum, per quintũ theorema huius libri. Habeant itaque proportionem eam quã numerus γ ad numerum δ, & numerus γ se ipse multiplicans efficiat numerũ ε. idem porrò numerus γ multiplicans numerum δ reddat numerum ζ. numerus uerò δ ex sui ipsius multiplicatione producat numerum η. Cũ igitur γ ex sui ipsius multiplicatione reddiderit numerum ε: multiplicatus etiam per δ effecerit numerum ζ: est ergo ut numerus γ ad numerum δ, id est linea α ad lineam β, sic numerus ε ad numerum ζ per septimamdecimam septimi. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, sic se habet quadratũ lineæ α ad parallelogrammum descriptum ex linea α in lineam β ducta per primam sexti. Quemadmodum igitur quadratũ lineæ α ad parallelogrammum ex α, β, sic numerus ε ad numerum ζ. Rursus quia numerus δ ex sui ipsius multiplicatione reddidit numerum η, multiplicatus uerò idẽ δ in γ produxit numerum ζ: est igitur quemadmodum γ ad δ hoc est quemadmodum linea α ad lineam β, sic numerus ζ ad numerum η per eandem septimam decimam septimi. Sed quemadmodum linea α ad lineã β, *ita parallelogrãmũ ex lineis α,β, ad quadratũ lineæ β per primã sexti. Est igitur sicut parallelogrãmũ ex lineis α,β ad quadratum lineæ β, ita numerus ζ ad numerum ε.*



Sed modò cõclusum est sicut se habebat quadratum lineæ α ad parallelogrammum ex α,β, ita se habere numerum ι ad numerum ζ. Per æquam igitur proportionem erit quemadmodum quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sic numerus ι ad numerum ε. Vterque uerò illorum numerorũ est quadratus. Nam ι productus est ex multiplicatione γ in seipsum: ε uerò ex multiplicatione δ sui etiam ipsius in seipsum. Ergo quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ β habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod primo loco demonstrandũ erat. Priore *demonstrationis modo usi sunt* Theon & Campanus, *posteriore etiam* Theon *aut quis alius. Ex his duabus nobis simplicior uidetur illa quam priore loco retulimus.* Vacua *itaque pingi possunt quadrata quæ describuntur à lineis longitudine commensurabilibus, modò constet tales esse suppositiones, quales accipiuntur in theoremate, lineas scilicet esse longitudine commensurabiles. tunc enim in uniuersum illud uerum erit, quotquot pedes aut passus quadrati fuerint in illis figuris quadratis, semper numerabuntur à numeris habentibus*

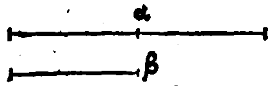
proportionem

proportionem inter se quã quadratus numerus ad numerum. Sed quia perobscurus hic locus totus uideri solet, non alienum existimauimus nostram quoque demonstrationẽ apponere, si forte iuuare poßimus, quod cupimus quidem, & certe confidimus. Sint lineæ duæ longitudine commensurabiles α, β. dico quadrata earũ &c. Cum enim lineæ α, β sint longitudine commensurabiles, habebunt proportionem inter se quam numerus ad numerum per 5. huius. habeat igitur α ad β proportionẽ duplam, quæ



est quam habet numerus ad numerũ, puta 4 ad 2, & 6 ad 3, & plerique alij: reperianturque minimi numeri tres continuè proportionales in proportione duplæ per 2.8, sintq; illi 4, 2, 1. ergo per corollarium eiusdem 2.8, numeri 4 & 1 erunt quadrati. Nam sicut 4 est quadratus ex 2 in se multiplicato productus, ita 1 est etiam numerus quadratus. fit enim ex eadem unitate in seipsam multiplicata. Dico præterea hos numeros quadratos illos esse, quorum proportionem habent inter se quadrata linearum α, β. Nam sicut numerus 4 ad numerum 2, ita se habet linea α, ad lineam β. Vtrobiq; enim est dupla proportio per suppositionem. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habet quadratum lineæ α ad parallelogrammum, quod fit ex ductu lineæ α in lineam β, per primam sexti. Ergo sicut se habet numerus 4 ad 2, ita se habebit quadratum lineæ α ad parallelogrammum productum ex α & β. Itidem sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habet linea α ad li-

neam β. utrobiq; enim etiã est dupla proportio per suppositionẽ. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β per eandem primam sexti. Ergo sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β. Ergo per definitionẽ æquæ proportionalitatis, & per 22.5 erit quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut numerus 4 ad 1. qui quadrati sunt. Illud ergo uerum est uniuersaliter, Quadrata descripta ex lineis longitudine commẽsurabilibus, habere proportionẽ inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quęcunque numerum areolarum siue spatiorum intra se capiant illa quadrata: semper tamen necesse erit numeros ab illis contentos esse aut quadratos: aut si quadrati non erũt, (neque enim semper necesse est tales esse) similes saltem superficiales esse omnino necesse est. Porrò secundæ partis huius theorematis quæ est conuersa prioris illa est demonstratio. Sit quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus productus à γ ad quadratum productũ ex δ. Dico lineas α, β esse longitudine commensurabiles. Nam proportio quadrati α ad quadratum β est duplicata proportio lineæ α ad lineam β. per 20.6. Similiter proportio numeri quadrati producti ex γ ad quadratum productum ex δ est duplicata proportio ipsius numeri γ ad numerum δ, per 11.8. Igitur per 15.5, quemadmodum linea α ad lineã β,



sic

ſic numerus γ ad numerum δ. Commenſurabilis eſt ergo longitudine linea α lineæ β per 6 huius libri. Tertiam uerò partem theorematis demonſtrare non eſt difficile per ſecundum ſyllogiſmum hypotheticum, quem à deſtructione conſequentis uocant. Sit linea α incommẽſurabilis longitudine lineæ β: quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β non habebit proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Nam ſi cõtradicatur, ſequitur ſtatim per ſecũdam partem huius theorematis, illa quadrata habere latera longitudine commenſurabilia, quod eſt contrarium his quæ ſuppoſita ſunt. Sic enim eſſent lineæ α, β, & commenſurabiles & incommẽſurabiles longitudine, quod eſt impoßibile. Simili ratione poſtrema pars huius theorematis demonſtratur. Nam ſi quadrata inter ſe proportionẽ non habent quam quadratus numerus ad quadratum, neque latera habebunt longitudine commenſurabilia. Si contradicatur, continuo ſequitur per primam partem huius theorematis, illa quadrata habere proportionem inter ſe quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quod eſt contrarium ſuppoſitioni.

Corollarium.

Ex quibus ita demonſtratis, manifeſtũ illud eſt, lineas longitudine commenſurabiles, omnino potentia quoq; cõmenſurabiles eſſe. Quæ uerò ſunt potentia commenſurabiles, non omnino longitudine quoque commenſurabiles eſſe. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino potentia etiam incommenſurabiles eſſe. Quæ uerò potentia incommenſurabiles ſunt, omnino *longitudine quoque incommensurabiles esse. Cum enim quadrata linearum longitudine commensurabiliũ proportionem eam inter se habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ea uerò quæ proportionem habeant quadrati numeri ad quadratum numerum, simpliciter etiam habeãt proportionem quam numerus ad numerum. & quæ proportionẽ habẽt quã numerus ad numerum, sint commẽsurabilia per 6 huius, sequitur omnino lineas longitudine commensurabiles non tantùm esse longitudine commensurabiles, sed etiã esse potentia.* Huius *probatio pendet ex prima parte theorematis.* Rursus *quia quadrata quædam sunt quæ non habẽt proportionem eam inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, habẽtia tamẽ ipsa proportionem eam simpliciter quam numerus ad numerum, latera quidem eorum sunt potẽtia commensurabilia, quia describunt quadrata habẽtia proportionem quam numerus simpliciter ad numerum, itáque commensurabilia per 6 huius: latera uerò ipsa inter se sunt longitudine incommensurabilia, per postremam partem theorematis.* Verum *est igitur lineas potentia commensurabiles nõ statim esse longitudine etiã commensurabiles.* Hac *eadẽ ratione probatur & illud tertium corollarij membrum, lineas longitudine incõmensurabiles non statim etiam esse potentia incommensurabiles.* Possunt *enim esse longitudine quidem incommensurabiles, potentia tamen commensurabiles, ut in quadratis quæ habent quidem proportionem inter se quam numerus ad numerum, sed non quam numerus*

quadratus

quadratus ad numerum quadratum. Quartum uero probatur per secundum syllogismum hypotheticum à destructione consequentis, lineas potentia incommensurabiles, longitudine quoque incommensurabiles esse. Nam si dicas eas esse longitudine commensurabiles, sequitur esse ipsas quoque potentia cõmensurabiles, quod est contra suppositionem. Nam positæ sunt incommensurabiles longitudine. Resolutio autẽ eius demonstrationis quam attulimus illa est. Omnia quadrata habentia proportionem inter se quam extremi trium numerorum minimorum suæ proportionis continuæ proportionalium, habẽt proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sed quadrata duarũ linearum longitudine commensurabilium sunt huiusmodi. Ergo quadrata duarum linearũ longitudine commensurabilium habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Maior patet ex corollario 2.8. Minor patet ex 22.5.

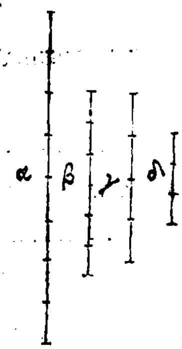
Lemma.

Demonstratum est in arithmeticis theoremate 26.8 similes planos numeros habere proportionem inter se quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Conuersum uerò theorema, numeros habentes proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum esse similes planos, non quidem demonstratur in libris arithmeticis, sed est à nobis in præcedenti theoremate libri huius demonstratum. Vnde manifestum est numeros qui non sunt similes plani, id est non habentes latera inter se proportionalia, non *habere etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Eam enim proportionẽ si inter se haberent, sequeretur simul eos esse similes superficiales. cuius contrarium est positum, eos inquam non esse similes planos. Ergo numeri non similes superficiales non habent inter se proportionem eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Antequam attingamus theorema quod est decimo loco positum in hoc libro, illud omnino faciẽdum est, ut ei præponamus illud quod uulgo proximum locum tenet, scilicet undecimum. Aliter enim si fecerimus, demonstratio illius theorematis quod decimo loco scribi diximus, non procederet à priori, ut patebit in explicatione illius. Itáque Campanus fieri oportere recte indicauit, dum situm utriusque theorematis inuerteret.

Decimum Theorema.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, prima uerò secundæ fuerit commensurabilis, tertia quoque quartæ commensurabilis erit. Quòd si prima secũdæ fuerit incommẽsurabilis, tertia quoq; quartæ incommensurabilis erit.



Sint quatuor magnitudines proportionales α, β, γ, δ. ut α ad β, sic γ ad δ. Sitq; α commensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse commensurabilem magnitudini δ. Cum enim α sit commensurabilis β, Ergo α habebit proportio-

nem

nem ad β quam numerus ad numerum, per 5 huius. *Sed ex suppositione est sicut α ad ϵ, sic γ ad δ. Ergo γ ad δ habebit etiam proportionem quam numerus ad numerum. Ergo commensurabilis erit magnitudo γ magnitudini δ per 6 huius. Rursus sit α incommensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse incommensurabilem δ. Cum enim α sit incommensurabile β, igitur α non habebit proportionem ad ϵ, quam numerus ad numerum per 7 huius. Est autem sicut α ad β, ita γ ad δ. Ergo neque γ ad δ proportionem habebit quam numerus ad numerum. Incommensurabilis est igitur γ magnitudini δ per 8 huius. Si itaque quatuor magnitudines & cætera.*

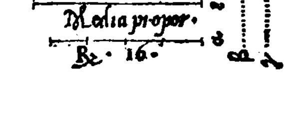
Corollarium.

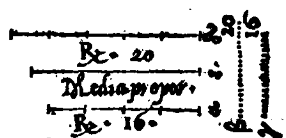
Si fuerint quatuor lineæ proportionales, fuerintque duæ priores, aut duæ posteriores inter se cōmensurabiles potentia tantum, cæteræ quoque duæ erunt potentia tantum cōmensurabiles. hoc probatur per 22.6, & per hoc theorema 10. quo corollario utitur demonstrator in sequentibus theorematibus 28.29. & alijs.

Vndecimum Theorema.

Propositæ lineæ rectæ (quam ῥητὴν uocari diximus) reperire duas lineas rectas incommensurabiles, hanc quidē longitudine tantum, illam uerò non longitudine tantum, sed etiam potentia incommensurabilem.

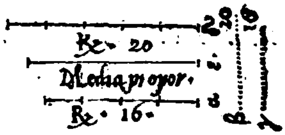
Sit linea recta proposita α, reperiendæ sunt duæ lineæ incommensurabiles lineæ α, alia qui-





dem longitudine tantùm, alia uerò etiam potentia incommẽsurabilis. Afferantur numeri duo β, γ inter se rationem eam non habentes quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est, ne sint illi numeri similes plani: fiatque sicut numerus β ad numerum γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum alterius lineæ quæ sit λ. Quomodo uerò id fiat, didicimus per lemma illud positum in theoremate 6 huius libri. Commensurabile est igitur quadratũ lineæ α, quadrato lineæ λ per 6 huius libri. Et quia numerus β ad numerum γ non habet eam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum: neque etiam quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ λ habebit eam proportionem quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Ergo linea α erit incommensurabilis longitudine tantum lineæ λ per 9 huius libri. Sic itaq; reperta est prior linea, nempe λ incommensurabilis longitudine tantum lineæ propositæ quæ est α. Rursus reperiatur media proportionalis inter α, λ quæ sit ι per 13. 6. Est itaque sicut linea α ad lineam λ, ita quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ ι per secundum corollarium 20. 6. Sed linea α est incommensurabilis longitudine lineæ λ, ut modò conclusum est. Ergo quadratum etiam lineæ α erit incommensurabile quadrato lineæ ι, per secundam partem postremi theorematis. Nec te impediat quod illud theorema 10 loquatur de magnitudinibus cõmensurabilibus & incõmensurabilibus. Lineæ enim quando consyderantur earum lõgitudines, ut sint longitudine

gitudine cõmensurabiles aut incommẽsurabiles lineæ, magnitudinis uoce comprehenduntur, & contrà, si consyderantur ut magnitudines, ut sint magnitudines commensurabiles siue incommensurabiles, de longitudinibus ipsarum linearum loqui intelligimus. neque tum quicquam de potentia lineæ intelligimus. Nam *magnitudo lineæ est ipsa longitudo, cum linea nihil aliud sit quàm longitudo sine latitudine.* De *quadratis uerò nihil est necesse ita loqui, quia magnitudo ipsius quadrati est ipsum quadratum. potentia enim quadrati non dicitur.* Cum *ergo quadratũ lineæ α sit incommensurabile quadrato lineæ ε, erit igitur per definitionem linearum incommensurabiliũ linea α incommẽsurabilis potentia lineæ ε.* Ergo *lineæ rectæ propositæ ueluti α quam ῥητὴν diximus, & ex qua mensuras cæterarum linearum accipi oportere dicebamus inter principia huius libri, reperta est linea δ longitudine tantum incommensurabilis.* Est *itaque ea linea δ ῥητὰ siue rationalis, longitudine tantum incommensurabilis, supple lineæ α quæ primò & ex suppositione rationalis est.* Reperta *est item linea ε eidem lineæ α incommensurabilis non longitudine tantum, sed etiam potentia. quæ linea ε per definitionem linearum incommensurabilium lineæ rationali erit irrationalis.* Nam *in uniuersum solet* Euclides *eas uocare ἀλόγους id est irrationales, quæ & longitudine & potentia sint incommensurabiles lineæ propositæ, & ex suppositione ῥητῇ id est rationali.* Hoc *au-*



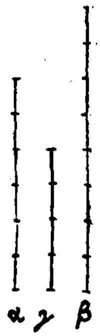
K

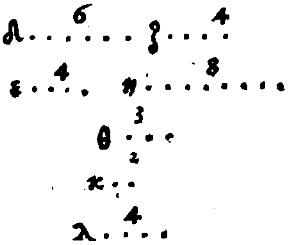
tem problema licet in theorema conuertere, quomodo diximus cætera conuerti posse.

Duodecimum Theorema.

Magnitudines quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, inter se quoq; sunt cōmēsurabiles.

Vtraque magnitudo α,β sit commensurabilis magnitudini γ. Dico magnitudines etiam α,β esse inter se commensurabiles. Nam cum α sit commensurabilis magnitudini γ. igitur α ad γ habebit proportionem quam numerus ad numerum habeat proportionem quam numerus δ ad numerum ε. Rursus cum β sit commensurabilis γ, igitur γ ad β habebit proportionē quam numerus ad numerum. habeat itaque quam numerus ζ ad numerum η. Sumantur minimi numeri continuati in proportionibus datis secundum 4.8. qui numeri sint θ, κ,λ. ut quæ sit proportio numeri δ ad numerum ε, eadē sit numeri θ ad numerum κ: quæ uerò proportio sit numeri ζ ad numerum η, eadē sit numeri κ ad numerū λ. Cum igitur sit sicut α ad γ, ita δ ad ε: sitq; δ ad ε sicut θ ad κ: est itaq; ut α ad γ, sic numerus θ ad numerū κ. Itē cū sit ut γ ad β, sic ζ ad η: sitq; sicut ζ ad η, ita κ ad λ. Ergo sicut γ ad β, ita κ ad λ. sed modò probatū est, sicut erat α ad γ, ita θ ad κ. Per æquā igitur proportionē





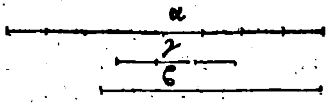
α,γ,β.
θ,κ,λ.

sicut

ſicut α ad β, ita numerus θ ad numerum λ. Ergo per 6 huius libri, magnitudo α erit commenſurabilis magnitudini β. ergo magnitudines quæ eidem ſunt commenſurabiles & cætera.

Decimumtertium Theorema.

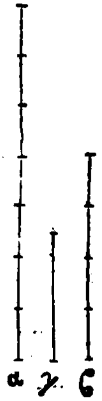
Si ex duabus magnitudinibus hæc quidem commenſurabilis ſit tertiæ magnitudini, illa uerò eidem incommenſurabilis, incõmenſurabiles ſunt illæ duæ magnitudines,



Sint duæ magnitudines α, β. porrò ſit tertia magnitudo γ: ſitq́; α commenſurabilis ipſi γ: ſit etiam β incommenſurabilis eidem γ. dico magnitudinem α eſſe incommenſurabilem ipſi β. Nam ſi α eſſet commenſurabilis ipſi β, cum ſit α commenſurabilis ipſi γ: ipſa quoque magnitudo β eſſet commenſurabilis magnitudini γ, per 12. cuius poſitum eſt contrarium.

Decimumquartum Theorema.

Si duarum magnitudinum cõmenſurabilium altera fuerit incõmenſurabilis magnitudini alteri cuipiam tertiæ, reliqua quoque magnitudo eidem tertiæ incõmenſurabilis erit.

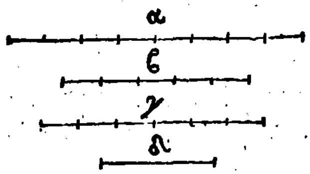


Sint duæ magnitudines commẽſurabiles α, β: altera uero ipſarum, nempe α alteri cuipiã quæ γ ſit, incommenſurabilis eſto. dico reliquam quoque magnitudinem β eſſe incommen-

ſurabilem ipſi γ. Nam ſi β eſſet commenſurabilis γ, cum etiam α ſit commenſurabilis β: ipſa quoque magnitudo α magnitudini γ erit commenſurabilis, per præcedens theorema. Sed poſitum eſt eas eſſe incommenſurabiles: quod eſt factu impoßibile. Non ergo erit commenſurabilis β ipſi γ. ergo incommẽſurabilis. Si duarum ergo magnitudinum &c.

Corollarium.

Quæ ſunt commenſurabilia incommẽſurabilibus, ſunt inter ſe incommenſurabilia. Sint magnitudines, α, β incommẽſurabiles: ſit & magnitudo γ cõmenſurabilis ipſi α: ſit item magnitudo δ cõmenſurabilis ipſi β. dico γ, δ eſſe inter ſe incommenſurabiles.

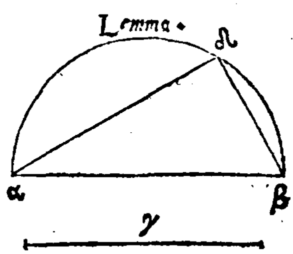


Nam α, γ ſunt commenſurabiles, ex quibus α eſt incommenſurabilis ipſi β. Ergo per hoc theorema 14. γ, β ſunt incommenſurabiles. Sed β, δ ſunt commenſurabiles. ergo per hoc ipſum theorema, aut per 13, γ, δ ſunt inter ſe incommenſurabiles. hoc autẽ corollario ſæpe utitur Theon, ut in 23, 27, 38, & alijs.

Lemma.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quanto plus poteſt maior q̃ minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ α β, & γ, quarum maior ſit α β, inueniẽdũ eſt quanto plus poſſit linea α β, quàm γ. Deſcribatur ſuper lineã α β ſemicirculus α δ β, & intra eum uſque



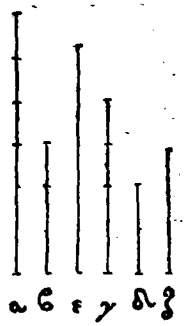
ad

ad ipsius semicirculi circunferentiam collocetur linea recta α δ æqualis ipsi γ per primam quarti, & cõiungã tur puncta δ, β linea ducta, quæ sit δ β. Cõstat sane angulum α δ β rectum esse per 31.3. præterea lineam α β posse plus quàm linea α δ, quæ est æqualis ipsi γ: tantóque plus posse quantum est quadratum lineæ δ β, per 47.1. Similiter quoq; duabus datis rectis, linea utrãque potens reperietur hac ratione. Sint duæ datæ recta α δ, δ β, inueniendáq; proponatur linea quæ utrãque poßit. applicentur inter se eo situ quo angulum rectum conficiãt, qui sit α δ β, & ducatur linea à puncto α in punctum β. constat item lineam α β esse eam quam quærimus potentẽ quantũ illæ ambæ α δ, δ β, per 47.1.

Decimumquintum Theorema.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, posſit autem prima pluſquam ſecunda tanto quãtum eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: tertia quoque poterit pluſquam quarta tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi prima poſsit pluſquam ſecunda quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: tertia quoque poterit pluſquam quarta quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine.

Sint quatuor lineæ rectæ proportionales α, β, γ, δ: sicut α ad β, ita γ ad δ. poßit autem α plusquam β tanto quãtum est quadratum lineæ ε: poßitq; γ plusquam δ quadrato lineæ ζ. Dico si α fuerit commensurabilis longitudine li-



neæ ε, erit etiam γ commensurabilis longitudine lineæ ζ. si autem α incommensurabilis longitudine fuerit lineæ ε, erit similiter γ incommensurabilis longitudine lineæ ζ. Ex eo enim quod est sicut α ad β, ita γ ad δ: erit etiam ut quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ per 22,6. Sed ex suppositione quadrato lineæ α æqualia sunt quadrata linearum β, ε: quadrato uerò lineæ γ æqualia sunt quadrata linearũ δ, ζ. Est igitur sicut proportio quadratorum earum linearum β, ε ad quadratũ lineæ β: ita proportio quadratorum duarum linearum δ ζ, ad quadratum lineæ δ. Per disiunctã igitur proportionalitatem sicut quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ β, ita quadratum lineæ ζ ad quadratum lineæ δ.

Est itaque ueluti ε ad β, sic ζ ad δ, per secundam partẽ 22.6. Per cõtrariam ergo proportionem, sicut β ad ε, ita δ ad ζ. Erat autem ex suppositione sicut α ad β, ita γ ad δ. Per æquam igitur proportionem est ut α ad ε, ita γ ad ζ. Itaque per decimam huius, si α est commensurabilis longitudine ipsi ε, erit quoque γ commensurabilis longitudine ipsi ζ. Si uerò incommensurabilis fuerit α ipsi ε, erit similiter incommensurabilis γ ipsi ζ. Ergo si quatuor rectæ proportionales &c.

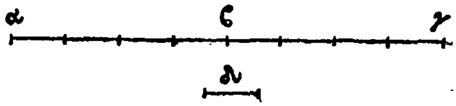
α, β, ε.
γ, δ, ζ.

Decimumsextum Theorema.

Si duæ magnitudines commensurabiles componãtur, tota magnitudo composita singulis partibus commensurabilis

commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo composita alterutri parti commensurabilis fuerit, illæ duæ quoque partes commensurabiles erunt.

Componantur duæ magnitudines commensurabiles α β, β γ. Dico totam magnitudinem α γ singulis partibus α β, β γ cõmensurabilem esse.



Cum enim α β & β γ sint commẽsurabiles, metietur ipsas quædam magnitudo cõmunis ambarum mensura. Metiatur igitur, sitq́; δ. Cum itaq; δ metiatur α β: β γ metietur quoque totam magnitudinem compositam α γ per communem cõceptionẽ. Quæcunque magnitudo metitur duas alias, metitur quoque compositam ex illis. Sed eadem δ metiebatur α β, β γ ex suppositione. Ergo δ metitur α β, β γ, & α γ. Commensurabilis est itaque α γ utriq; magnitudini α β, & β γ. Sit præterea α γ tota composita commensurabilis alteri ex duabus α β, β γ: sitq́; illa α β. Dico duas illas α β, β γ esse commensurabiles. Nam cum α γ & α β sint commensurabiles, metiatur ipsas communis quædam mensura: sit autem illa magnitudo δ. Cum itaq; δ metiatur α β & α γ, reliquam quoque magnitudinem β γ metietur magnitudo δ per illam communem conceptionem. Quicquid metitur totũ, & detractum metitur & reliquũ. Sed eadem δ metiebatur magnitudinem α β ex suppositione. Ergo δ metitur utranque α β, & β γ. Commensurabiles itaque sunt α β, β γ. itaq; ambæ partes theore-

matis ueræ.

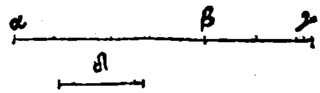
Corollarium.

Si tota magnitudo fuerit commensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus commẽsurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti α γ est commensurabilis magnitudini β γ, ergo per secundam partem huius theorematis 16, magnitudines α β, β γ sunt commensurabiles. ergo per priorem partem eiusdem theorematis magnitudo α γ erit cõmensurabilis singulis α β, β γ. Hoc corollario utitur Theon *in demonstratione* 18, *& aliorũ theorematum. omissum tamen est* Euclidi, *quia facile uidebatur ut cætera ferè corollaria.*

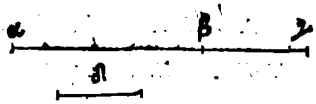
Decimumseptimum Theorema.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, ipsa quoq; tota magnitudo singulis partibus componentibus incommensurabilis erit. Quòd si tota alteri parti incommẽsurabilis fuerit, illæ quoque primæ magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles α β, β γ. Dico totã *magnitudinem α γ, utricunq; magnitudini α β, β γ incõmensurabilem fore.* Quòd *si negetur incommensurabiles esse γ α, α β, metietur ipsas quædam magnitudo. metiatur itaque, ea quæ sit δ si fieri potest. Cum igitur δ metiatur per te γ α, α β, metietur similiter reliquã magnitudinem β γ: sed per te eadẽ δ metiebatur γ α.* Ergo



α β, β γ sunt commensurabiles. Sed ex suppositione erāt incōmensurabiles: fieri



ergo nō potest ut γ α, α β sint cōmensurabiles: sunt itaq; incōmensurabiles. Eadem *uia demonstrari potest magnitudines α γ, γ β esse incommensurabiles.* Ergo *α γ singulis magnitudinibus α β, β γ est incommensurabilis.*

R*ursus α γ alteri magnitudini, nempe ipsi α β, sit incō mensurabilis. dico etiam α β, β γ esse incommensurabiles.* Nam *si commēsurabiles fuerint, metietur ipsas magnitudo quædam. metiatur, sitq; δ.* Cum *igitur δ metiatur α β, β γ, metietur quoque totam magnitudinem α γ. sed per te δ metiebatur α β: ergo δ metietur γ α, α β.* C*ōmensurabiles itaq; sunt γ α, α β. Sed ex suppositione erant incommensurabiles. illud autem fieri nullo modo posse certum est, ut simul sint & commensurabiles & incommensurabiles.* Nulla *ergo magnitudo metietur α β, β γ.* Ergo *incommensurabiles sunt α β, β γ.* Eadem *quoque uia demonstrari potest illud idem, si posuerimus magnitudinem α γ esse incommensurabilem ipsi β γ.* Ergo *si duæ magnitudines incommensurabiles &c.*

Corollarium.

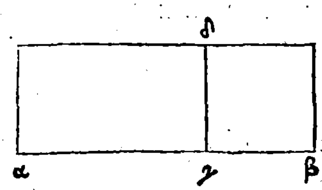
Si *tota magnitudo fuerit incōmensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus incommēsurabilis.* Nam *si tota magnitudo ueluti α γ est incommensurabilis magnitudini β γ, ergo per secundam partem huius theorematis 17. magnitudines α β, β γ sunt incom-*

mensurabiles. ergo per priorem partem eiusdē theorematis magnitudo α γ erit incommensurabilis singulis α β, β ς. hoc corollario utitur Theon in demonstratione 73 theorematis, & aliorum.

Lemma.

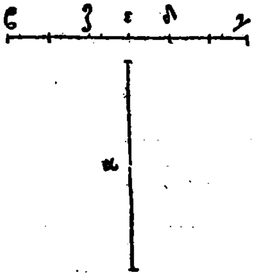
Si *parallelogrammum applicetur secundum lineam rectam, lineáque illa tanto plus excedat parallelogrammi latus, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi: illud parallelogrammū sic applicatum, est æquale alteri parallelogrammo, quod fit ex sectionibus lineæ, quæ factæ sunt per applicationem ipsius parallelogrammi secundum lineam illam.*

Hoc *per se manifestum uideri potest, tamen quia reperitur inter cætera, demonstrationem eius afferemus. Secūdum lineam rectam α β applicetur parallelogrammum α δ, cuius alterū latus sit æquale illi portioni lineæ rectæ, quæ excurrit extra parallelogrammū.* Dico *parallelogrammū α δ esse æquale superficiei rectangulæ quæ fit ex α γ, γ β. quod per se patet, ut modò diximus.* Nam *quia quadratum est δ β, linea δ γ est æqualis lineæ β γ: estq; parallelogrammum α δ, id quod est superficies rectangula α γ, γ β.* Ergo *si parallelogrammum applicetur &c.*

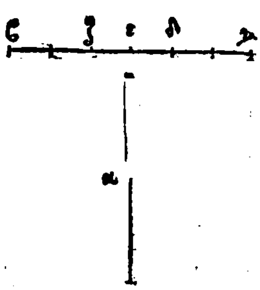


Decimumoctauum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati quod describitur à minore, æquale le parallelogrammum applicetur ſecundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrãmi. Si præterea parallelogrammum ſui applicatione diuidat lineã illam in partes inter ſe cõmenſurabiles longitudine: illa maior linea tanto plus poteſt quàm minor, quantũ eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi maior plus poſsit quàm minor, tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi cõmẽſurabilis longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur ſecundũ maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrammi, parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe longitudine cõmenſurabiles.



Sint duæ rectæ inæquales α, β γ, quarum maior ſit β γ. Quartæ autem parti quadrati lineæ minoris α, hoc eſt ipſi quadrato quod deſcribitur à dimidia linea α, æquale parallelogrammum ſecundum lineã β γ, applicetur, quod relinquat ex linea β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipſius parallelogrãmi: ſitq́; illud parallelogrammũ quod fiat ex β δ, δ γ: (hoc uerò quemadmodũ fiat, docet Campanus in fine demonſtrationis 13.) ſit quoque commen-



surabilis longitudine linea β δ ipsi lineæ δ γ. Dico lineã β γ plus posse quàm linea α, tanto quantum est quadratum lineæ cuiusdã sibi ipsi lineæ, dico β γ, longitudine cõmensurabilis. Secetur enim linea β γ in duas partes æquales in puncto ε, ponaturque lineam ε ζ æqualem esse lineæ δ ε: reliqua ergo linea δ γ erit æqualis lineæ β ζ. Cumq; linea recta β γ diuisa sit in partes æquales in puncto ε, in partes autem inæquales in puncto δ, superficies rectangula contenta ex β δ, δ γ cum quadrato lineæ ε δ, æqualis est quadrato lineæ ε γ, per quintum theorema secundi libri. Itaque superficies rectangula contenta ex β δ, δ γ quater sumpta cũ quadrato lineæ ε δ item quater sumpto, est æqualis quadrato lineæ ε γ quater sumpto. Nam æqualia quæ sunt æqualiter multiplicata, simul æqualia sunt. Sed superficiei rectangulæ contentæ ex β δ, δ γ quater sumptæ æquale est quadratũ lineæ α ex suppositione. Nam parallelogrammum ex β δ, δ γ positum est æquale quartæ parti quadrati lineæ α. Quadrato uerò lineæ δ ε quater sumpto æquale est quadratum lineæ δ ζ. Nam linea δ ζ est dupla ad lineam δ ε. quadrato autem lineæ ε γ quater sumpto æquale est quadratũ lineæ β γ. Similiter enim linea β γ dupla est ad lineam ε γ. Ergo quadrata linearũ α, δ ζ sunt æqualia quadrato lineæ β γ. Quocirca quadratum lineæ β γ maius est quàm quadratum lineæ α tanto quantum est quadratum lineæ δ ζ. Ergo maior linea β γ plus potest quàm

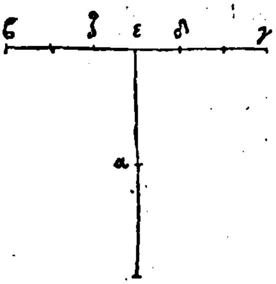
minor

minor ū quadrato lineæ δζ. Nunc autem demonstrandum est lineam εγ esse longitudine commensurabilem ipsi lineæ δζ. Cum enim ex suppositione linea εδ sit longitudine commẽsurabilis ipsi δγ: ergo linea tota εγ erit longitudine commensurabilis lineæ δγ, per sextum decimum theorema huius libri. Atqui linea δγ est æqualis lineæ εζ. Ergo linea tota εγ est commensurabilis longitudine lineis εζ, γδ. Componantur illæ duæ lineæ ut unam lineam efficiant. Cum itaque linea tota βγ sit cõmensurabilis lõgitudine duabus lineis unius loco sumptis εζ, γδ. Ergo lineæ βζ, γδ unius loco sumptæ sunt cõmensurabiles longitudine ipsi lineæ ζδ, per secundam partẽ sextidecimi theorematis huius libri. Quare etiã residuæ lineæ ζδ commensurabilis longitudine erit tota linea εγ, per priorem partem eiusdem sextidecimi theorematis. hoc ipsum tamen probari potest per corollariũ à nobis positum post 16. Ergo linea βγ plus potest quàm linea α quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Rursus linea βγ plus possit quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi longitudine commẽsurabilis: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale secundum lineam βγ parallelogrammum applicetur, quod relinquat ex linea βγ portionem æqualem alteri ipsius lateri: sitq; superficies rectangula contẽta ex βδ, δγ, demonstrandum est lineas εδ, δγ esse inter se longitudine commensurabiles. Manentibus constructionibus & suppositionibus præcedentibus similiter demonstrabimus lineam εγ plus posse linea α tanto quantum est quadratum lineæ ζδ. Sed ex suppositione linea βγ plus *potest quàm linea α, tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Commensurabilis est itaque longitudine linea βγ lineæ ζδ. Ergo linea composita ex duabus βζ, δγ est commensurabilis longitudine lineæ ζδ, per secundã partem sextidecimi theorematis huius libri. Quocirca per 12 huius, siue per priorem partem sextidecimi theorematis, linea βγ est cõmensurabilis longitudine lineæ compositæ ex βζ, δγ. Sed tota linea composita ex βζ, δγ est commensurabilis longitudine ipsi δγ. nam βζ est æqualis ex antè dictis ipsi δγ. Ergo linea βγ est longitudine commensurabilis ipsi δγ, per 12 huius. Quare & linea βδ est longitudine commensurabilis lineæ δγ, per secundam partem sextidecimi theorematis. Ergo si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales &c. Quod demonstrandum erat.*

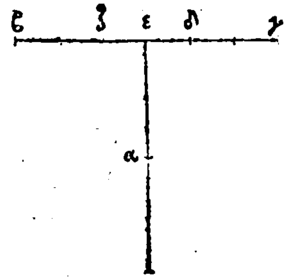
Decimumnonum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati lineę minoris æquale parallelogrammum secundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus eiusdem parallelogrammi: si parallelogrammum præterea sui applicatione diuidat lineam in partes inter se longitudine incommẽsurabiles, maior illa linea tanto plus potest quàm minor, quantũ est quadratum lineæ sibi maiori incõmensurabilis longitudine. Quòd si maior linea tanto plus possit quàm minor, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis

commensurabilis sibi longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur secundum maiorẽ, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrãmi, quantum est alterum latus ipsius, parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se incommensurabiles longitudine.

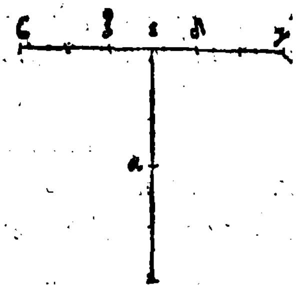


Sint duæ rectæ inæquales α, ϐ γ, quarũ maior sit ϐ γ: quartæ autẽ parti quadrati minoris nempe α, æquale parallelogrammũ applicetur secundum lineã ϐ γ, quod relinquat ex linea ϐ γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipsius parallelogrammi: sitq; illud parallelogrammum ex ϐ δ, δ γ: incommensurabilis autem longitudine sit ϐ δ ipsi δ γ. Dico lineam *ϐ γ posse plus quàm linea α tanto, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Sint primum eædem constructiones & ratiocinãdi uiæ, quæ in proximo theoremate.* Similiter *ostendemus lineã ϐ γ posse plus quàm linea α tanto, quantum est quadratum lineæ δ ζ.* Restat *ut demonstremus lineam ϐ γ esse incommensurabilem longitudine ipsi δ ζ.* Cum *enim linea ϐ δ sit incommensurabilis longitudine lineæ δ γ ex suppositione, incommensurabilis etiam longitudine erit linea ϐ γ ipsi lineæ δ γ, per 17 huius: sed δ γ est commensurabilis ambabus lineis ϐ ζ, δ γ simul compositis, quia δ γ est*



æqualis ipsi ϵζ. Ergo ϵγ est incommensurabilis ambabus βζ, δγ simul compositis, per 14 huius. Ergo per secundam partem septimidecimi theorematis huius libri linea composita ex ϵζ, δγ simul & unius loco sumptis est incommẽsurabilis lineæ ζδ. Ergo per priorem partẽ eiusdẽ septimidecimi theorematis linea βγ est incommensurabilis longitudine lineæ ζδ. Linea igitur βγ potest plus quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Rursus linea βγ possit plus linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale parallelogrammum applicetur secũdum lineam βγ, quod relinquat excurrentem portionem lineæ βγ æqualem alteri ipsius lateri: sitq; illud parallelogrammum ex lineis βδ, δγ. Demonstrandum nobis est illud lineam βδ, esse incommensurabilem longitudine lineæ δγ. Maneant enim eædem constructiones & ratiocinandi uiæ: similiter etiam ostendemus lineam βγ posse plus quàm linea α quadrato lineæ ζδ. Primùm ex suppositione linea βγ potest plusquam linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Ergo linea βγ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζδ. Itaque linea composita ex ϵζ, δγ & unius loco sumpta erit incommensurabilis longitudine lineæ ζδ, per secundam partem septimidecimi theore-

matis



matis libri huius. Quare & per primam partē eiusdē theorematis, linea β γ erit incommēsurabilis longitudine lineæ composita ex ε ζ, δ γ. Sed linea cōposita ex β ζ, δ γ est commensurabilis longitudine lineæ δ γ, eò quia β ζ est æqualis ipsi δ γ ex anteprobatis. Itaque linea β γ est incommensurabilis longitudine ipsi δ γ per 14 huius. Ergo per secundā partem eiusdem septimidecimi theorematis, linea β δ est incommensurabilis longitudine lineæ δ γ. Quamobrem si fuerint duæ rectæ inæquales &c.

Lemma.

Cum sit demonstratum lineas longitudine commensurabiles omnino potentia quoque commensurabiles esse, eas uerò quæ potentia sunt commensurabiles non omnino longitudine quoque commensurabiles esse, sed esse posse & longitudine commensurabiles & incommensurabiles, constat si lineæ propositæ (quam ῥητὴν uocari diximus, eandémque rationalē à recentioribus) linea quædam fuerit commensurabilis longitudine, illam uocari debere rationalem, & commensurabilem non longitudine solum, sed etiam potentia. Nam lineæ longitudine commensurabiles, omnino potentia quoque commensurabiles sunt. Quod si propositæ lineæ, quam rationalem uocant, quædam fuerit linea commensurabilis potētia: siquidem & longitudine etiam cōmensurabilis ipsi fuerit, uocabitur illa rationalis, & commensurabilis ipsi *longitudine & potẽtia. Si uerò ipsi lineæ propositæ, quã rationalem uocant, linea quædam potentia commensurabilis, longitudine eidem fuerit incommensurabilis: uocabitur & illa rationalis, potentia tantum commensurabilis.*

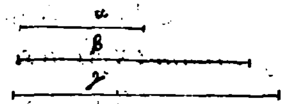
Illæ duæ uoces πρόκλου σχόλιον quæ sunt in exemplari impresso, non sunt in uetusto: & quod sequitur, continuata serie scribitur, addita particula γὰρ hoc modo, ἐν ταῖς γὰρ, sic itaque dicemus: Rationales enim uocat Eucli*des (ut est in principijs huius libri) illas lineas quæ sunt lineæ propositæ quam ῥητὴν uocat, siue longitudine & potentia commensurabiles, siue potentia tantum. Sunt tamen & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incommensurabiles lineæ propositæ, id est τῇ ῥητῇ, siue dicas rationali, potentia tantum eidem commensurabiles, eoq; uocantur rationales & cõmensurabiles inter se ea ratione qua sunt rationales. sed & illæ eadem possunt esse cõmensurabiles inter se siue longitudine, & ideo potentia quoque, siue potentia tantum. Et quidẽ si fuerint inter se commensurabiles longitudine, uocabuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut tamen simul intelligatur potentia quoque cõmensurabiles esse. Quòd si potentia tantum inter se fuerint commensurabiles, uocabuntur & ipsæ rationales potentia tantum commensurabiles.*

Corollarium.

Quod autem lineæ duæ siue plures rationales & commẽsurabiles longitudine ipsi rationali sint inter se commẽsurabiles longitudine, hinc cõstat. Nam *cum sint rationales & longitudine commensurabiles ipsi primo ra-*

rationali,

rionali, ea autem magnitudines quæ sunt uni & eidem commensurabiles sint inter se commensurabiles, per 12 huius. Ergo *lineæ rationales ipsi primo rationali longitudine commensurabiles, sunt inter se quoque commensurabiles longitudine. Sed quantũ ad eas attinet, quæ sunt rationales potentia tantum commensurabiles ipsi primo rationali, fieri omnino necesse est ut illæ quoque inter se sint potentia saltem cõmensurabiles. Cum enim quadrata earum sint rationalia, erunt commensurabilia quadrato lineæ propositæ quæ dicitur primò rationalis.* Itaque *per 12 huius ipsa quoque inter se erunt cõmensurabilia.* Ergo *lineæ eorum sunt inter se potentia saltem commensurabiles.* Sed *nihil uetat easdẽ esse præterea longitudine inter se commensurabiles. Sit enim linea α rationalis, sitq; linea β eidem lineæ α rationali potentia tantum commensurabilis,*

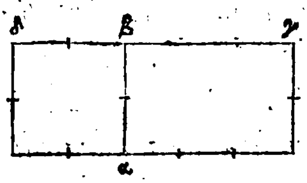


hoc est longitudine incommensurabilis eidẽ. sit præterea alia linea γ lineæ β longitudine commensurabilis (hoc enim esse posse constat ex principijs huius libri) per 14 huius, linea γ est incommensurabilis longitudine ipsi lineæ α: sed quadratum lineæ α est commensurabile quadrato lineæ β ex suppositione: quadratum item lineæ γ est commensurabile eidem quadrato lineæ β, per suppositionem. Ergo *per 12 huius, quadratum lineæ γ est commensurabile quadrato lineæ α.* Ergo *linea γ erit per definitionem rationalis, potentia tantum commensurabilis ipsi lineæ α, sicut & ipsa linea β.* Dantur *ergo duæ rationales potentia tantum commensurabiles ipsi ra-*

tionali, inter se uerò longitudine commensurabiles. Hic *obiter repetendū esse puto, quod antea diximus in diffinitione linearū rationalium, Campanū, cæteròsq; deinceps ab eo latinos geometras inuexisse illas uoces sine terminos, ut quasdam lineas uocarent rationales potentia tantum, quasdā uerò longitudine & potentia, quibus nunquam* Euclidem *usum esse reperies. hæ enim uoces longitudine & potentia nunquā referuntur ad rationalitatem aut irrationalitatem, sed semper ad commensurabilitatem, aut incommensurabilitatem linearum. Quæ peruersiones solent rerum per se difficilium etiam difficultatem & obscuritatem augere. Itaque te monitum iterum atque iterum uelim, ut principiorum id est simplicium terminorum simplicem uim diligenter intelligas & retineas, neque quicquam externum admiscendum existimes.*

Vigesimum Theorema.

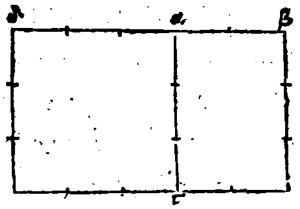
Superficies rectangula contenta ex lineis rectis rationalibus longitudine commensurabilibus secundum unum aliquem modum ex antedictis, rationalis est.



Nam ex lineis α β, β γ *rationalibus longitudine commēsurabilibus secundum unū aliquem modum ex antedictis cōtineatur superficies rectāgula quæ sit* α γ. *dico superficiem* α γ *esse rationalē. Describatur enim à linea* α β *quadratum* α δ: *rationale est itaque*

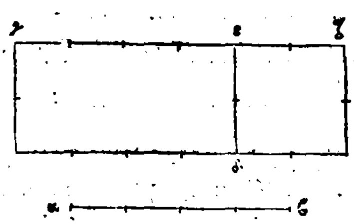
itaque quadratum illud $\alpha\,\delta$ ex definitione. Cúmque sit commensurabilis longitudine linea $\alpha\,\beta$ lineæ $\beta\,\gamma$, æqualisq́; sit linea $\alpha\,\beta$ lineæ $\beta\,\delta$, commensurabilis itaque longitudine erit linea $\beta\,\delta$ lineæ $\beta\,\gamma$. Est autẽ sicut linea $\varepsilon\,\delta$ ad lineam $\varepsilon\,\gamma$, ita quadratum $\delta\,\alpha$ ad superficiẽ rectangulam $\alpha\,\gamma$, per primam sexti. Sed modo conclusum est lineam $\beta\,\delta$ esse commensurabilem lineæ $\beta\,\gamma$. Ergo per decimam huius libri quadratum $\delta\,\alpha$ est commensurabile superficiei rectangulæ $\alpha\,\gamma$. Sed quadratum $\delta\,\alpha$ est rationale: itaque per definitionem superficies $\alpha\,\gamma$ erit etiã rationalis. Ergo superficies rectangula cõtenta & cætera.

Sed & alia quadam descriptione placet idem demõstrare. Prior enim demonstratio quadratum minoris lineæ cõscripsit, nunc mutato casu demonstrationis quadratum maioris describamus. Sit superficies rectangula $\beta\,\gamma$ contenta ex lineis rationalibus inæqualibus longitudine inter se commensurabilibus $\alpha\,\beta$, $\alpha\,\gamma$: sítque maior $\alpha\,\gamma$. Describatur ex linea



$\alpha\,\gamma$ quadratum $\delta\,\gamma$. dico parallelogrammum $\gamma\,\varepsilon$ rationale esse. Nam linea $\alpha\,\gamma$ est commensurabilis longitudine lineæ $\alpha\,\beta$ ex suppositione: sed linea $\delta\,\alpha$ est æqualis lineæ $\alpha\,\gamma$. Ergo linea $\delta\,\alpha$ est commensurabilis longitudine lineæ $\alpha\,\beta$: sed quam proportionem habet $\delta\,\alpha$ ad $\alpha\,\beta$, eandem habet quadratum $\delta\,\gamma$ ad parallelogrammum $\gamma\,\beta$, per primam sexti. Ergo per 10 huius libri commensurabile est quadratum $\delta\,\gamma$ parallelogrãmo $\gamma\,\beta$. Quadratum autem $\delta\,\gamma$ rationale esse constat, quia est qua-

dratum lineæ rationalis, nempe α γ. Itaque per definitionem, parallelogrammum etiam γ ϐ erit rationale. Præterea cum demonstrationes illæ uideantur loqui de eo parallelogrammo quod fit ex duabus lineis, quarum altera sit ea proposita quam primo loco rationalem dicimus, unde diximus mensuras cæterarũ linearum ad illam comparatarum capi oportere, altera uerò sit eidẽ primo rationali commensurabilis longitudine, quæ est prima species linearum rationalium longitudine commensurabilium, alium casum afferendum puto de altera specie, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, ut demonstremus generalem huius theorematis ueritatem, neq; frustra in eo positum illud extitisse secundum unum aliquem modum ex antedictis. Sit itaque linea primo rationalis α ϐ: sit etiam parallelogrammum γ δ contentum ex lineis γ ε, ε δ rationalibus id est lineæ primo rationali α ϐ commensurabilibus longitudine. Sint tamen illæ duæ lineæ γ ε, ε δ diuersæ & inæquales lineæ primo rationali α ϐ. Dico parallelogrammũ γ δ esse rationale. Describatur quadratum lineæ ε δ, sitq; δ ζ. Primum constat lineas γ ε, ε δ esse inter se commensurabiles longitudine per 12 huius. Nam positum est utrãque esse longitudine commensurabilem ipsi α ϐ. Sed ε δ est æqualis lineæ ε ζ. Ergo linea γ ε erit commensurabilis longitudine lineæ ε ζ. Sed quẽadmodum se habet linea γ ε ad lineã ε ζ, ita se habet parallelogrammum

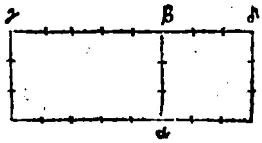


rallelogrammum

rallelogrammum γ δ ad quadratũ δ ζ, per primã sexti. Ergo per decimam huius parallelogrammum γ δ erit commensurabile quadrato δ ζ. Sed quadratum δ ζ est commensurabile quadrato lineæ α β, quia linea ι δ posita est cõmensurabilis longitudine lineæ α β, quæ est primo rationalis. Ergo per 12 huius, parallelogrammũ γ δ est commensurabile quadrato lineæ α β. Sed quadratũ lineæ α β est rationale per definitionem. Ergo per definitionem quoque figurarum rationalium parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Nunc restat alius casus tertiæ speciei, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, quæ sunt ipsi quidem lineæ primo rationali α β commensurabiles potentia tantum, itaque rationales tamen. inter se uerò longitudine commensurabiles sint ipsæ lineæ γ ι, ι δ, maneat itaque eadẽ constructio quæ in proximo casu modo lineæ γ ι, ι δ sint rationales potentia tantum commensurabiles ipsi α β: inter se uerò sint longitudine etiam commensurabiles. Dico sic quoque parallelogrammum γ δ esse rationale. Primo probabitur, sicut modo dictum est parallelogrãmum γ δ esse commẽsurabile quadrato δ ζ: sed quadratum lineæ α β est commensurabile quadrato δ ζ. Ergo per 12 huius parallelogrammum γ δ erit commensurabile quadrato lineæ α β. sed quadratũ lineæ α β est rationale. Ergo per definitionem parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Hunc autem casum notandum tibi memineris. Quum enim uentum erit ad 26 theorema, ad illius theorematis demonstrationem & intelligentiam illum tibi usui fore intelliges.

Vigesimumprimum Theorema.

Si rationale secundum lineam rationalem applicetur, habebit alterum latus lineam rationalem & commensurabilem longitudine lineæ, cui rationale parallelogrammum applicatur.



Hoc theorema est ueluti ἀντίςροφον præcedentis. Rationale enim parallelogrammum α γ applicetur secundum lineam α β rationalẽ uno aliquo modo ex antedictis, siue sit illa primo rationalis, siue alia ipsi primo rationali commensurabilis, idq; longitudine & potentia, uel potentia tãtum. his enim tribus modis dicitur linea rationalis. Dico *lineam β γ esse rationalem & longitudine commensurabilem ipsi lineæ α β. Describatur enim quadratum lineæ α β quod sit α δ.* Rationale *est igitur quadratum α δ, sed & parallelogrammum α γ est rationale per positionem.* Ergo *per definitionem rationaliũ quæ in se conuertitur, siue per 12 huius, commensurabile est quadratum α δ parallelogrammo α γ. Est autem sicut quadratum α δ ad parallelogrammũ α γ, ita linea δ ς ad lineam ς γ, per primam sexti.* Itaq; *per decimam huius, linea δ β erit commensurabilis lineæ β γ. sed linea ς δ, est æqualis lineæ β α, commensurabilis est ergo linea α β, lineæ β γ.* Rationalis *autem est linea α β, Rationalis ergo erit & linea β γ, & commensurabilis longitudine lineæ α β.* Ergo *si rationale secundum lineã rationalem &c.*

Lemma.

Linea

Linea potens superficiem irrationalem, est irrationalis. Posit enim linea α superficiem irrationalem, hoc est quadratum quod ab α describitur, æquale esto areæ irrationali. dico lineam α esse irrationalem. Nam si linea α esset rationalis, rationale quoque esset quadratum ab illa descriptum: (sic enim est positũ inter definitiones) sed ex positione est irrationale, irrationalis est ergo linea α. quod demonstrandum erat.

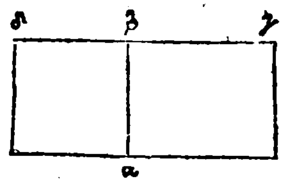
Lemma.

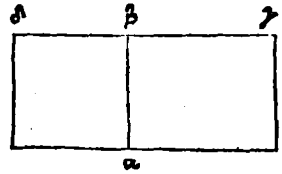
Hîc inseritur quoddam scholium, quod lemmatis inscriptionem habet, sed illud nihil aliud est quàm demõstratio quædam sequentis theorematis.

Vigesimumsecundum Theorema.

Superficies rectangula contenta duabus lineis rectis rationalibus potẽtia tantum cõmensurabilibus, irrationalis est. Linea autem quæ illam superficiem potest, irrationalis & ipsa est: uocetur uerò medialis.

Superficies enim rectãgula αγ comprehendatur à duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus, quæ sint αβ, βγ. Dico superficiem illam esse irrationalem, & lineam quæ illam potest, irrationalem etiam esse: uocetur autem medialis. Describatur enim à linea αβ quadratum αδ. rationale est itaq; quadratum αδ. Et quoniam incommẽsurabilis est longitudine linea αβ





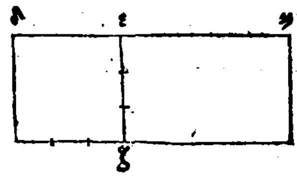
lineæ β γ (nam ex ſuppoſitione ſunt illæ inter ſe potentia tantum commenſurabiles) æqualisq́; eſt linea α β, lineæ ε δ. incommenſurabilis longitudine ergo erit linea δ ε lineæ ε γ. Eſt autem ſicut linea δ ε ad lineã β γ, ita quadratum α δ ad parallelogrammum α γ, per primam ſexti. incommenſurabile. eſt ergo quadratum α δ parallelogrammo α γ per ſecundã partem decimi theorematis huius libri. Sed quadratũ δ α eſt rationale: irrationale eſt ergo parallelogrammum α γ. Quare & linea quæ illud parallelogrammũ α γ, hoc eſt ea quæ quadratum ipſi parallelogrammo æquale deſcribit, irrationalis erit per lemma poſtremum. Vocetur autem medialis ea ratione, quia quadratum quod ab ea deſcribitur, æquale eſt parallelogrammo quod comprehenditur à lineis α ε, β γ, itaque media ipſa proportionaliter intercidit inter illas lineas α ε, β γ per 17.6. quod demonſtrandum erat. Hæc autem μέση de qua hoc libro agitur, ſimpliciter μέση dicitur: illa uero cuius inuentionem tradidit lib. 6. theoremate 13. dicitur μέση ἀνάλογον. Neque omnis μέση ἀνάλογον eſt potens ſuperficiem irrationalẽ, ſed ea tantum quæ eſt media proportionalis inter duas lineas potentia tantum commenſurabiles. Campanus in propoſitione apud eum 19 addidit, diciturque ſuperficies medialis: quod tamẽ non eſt ita intelligendũ, ut omnis ſuperficies medialis contineatur ex duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽſurabilibus.

hoc

hoc enim refellitur per sequẽtia theoremata 26. & 29. ubi superficies medialis cõtineri dicitur ex duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. Itaque *superficies omnis rectãgula duabus rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehẽsa, medialis dicitur, sed non econuerso, ut omnis medialis superficies rectangula sit comprahensa duabus rectis rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus. est enim & medialis comprehensa duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. sed tamen in uniuersum superficies quam potest linea medialis est & ipsa medialis.*

Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ, erit sicut prior ad secundã, ita quadratum quod à priori describitur, ad parallelogrammum quod comprehenditur duabus illis rectis. Hoc Lemma *nihil aliud affert quàm quod theorema primũ libri sexti. Sint duæ rectæ ζι, ικ.* Dico *sicut est linea ζι ad lineam ικ, ita quadratũ lineæ ζι ad parallelogrammum comprehensum ex ζι, ικ.* Describatur *enim quadratũ lineæ ιζ, sitq; δζ, & compleatur parallelogrammum κζ.* Cum *igitur linea δι sit æqualis lineæ ιζ: sit autem sicut linea δι ad lineam ικ, ita quadratum δζ ad parallelogrammum ζκ per* 1.6. Ergo *sicut linea ιζ ad lineam ικ, ita quadratum δζ ad parallelogrammum ζκ.* Est *autem quadratum δζ, quadratum lineæ ιζ, parallelogrammum verò ζκ. id quod comprehenditur dua-*

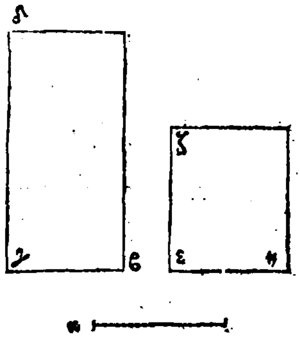


bus lineis ε ζ, ε κ. Est ergo sicut linea ε ζ ad lineam ε κ, ita quadratum lineæ ε ζ ad parallelogrammum comprehensum lineis duabus ζ ε, ε κ. Et econuerso sicut parallelogrammū comprehensum duabus lineis κ ε, ε ζ ad quadratum lineæ ε ζ, ita linea κ ε ad lineam ε ζ.

Vigesimumtertium Theorema.

Quadrati lineæ medialis applicati secundum lineā rationalem, alterum latus est linea rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ secūdum quam a pplicatur.

Sit linea medialis α, rationalis uerò sit γ β: & quadrato lineæ α parallelogrammū rectangulum æquale β δ applicetur secundum lineam β γ, cuius alterū latus sit γ δ. Dico lineam γ δ esse rationalem & longitudine incommensurabilem lineæ β γ. Cum enim linea α sit medialis, potest parallelogrammum contentum ex lineis rationalibus potentia tantum commensurabilibus. possit itaque parallelogrammum rectangulum κ ζ: sed ex suppositione potest etiam parallelogrummum β δ. æquale est igitur parallelogrammum β δ parallelogrammo κ ζ. Sed & ambo parallelogramma sunt æqualium angulorum, quia sunt rectangula. Aequalium uerò & æquiangulorum parallelogrammorū latera quæ sunt circa æquales angulos

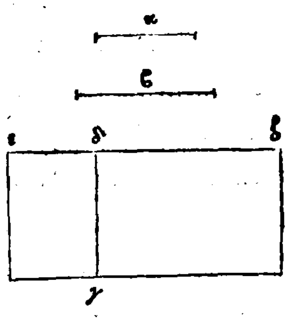


gulos reciprocam inter se proportionem habent per 14 sexti. proportionaliter ergo erit sicut linea ϐγ ad lineã ικ, ita linea ιζ ad lineam γδ. Est igitur sicut quadratũ lineæ ϐγ ad quadratum lineæ ικ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ γδ, per 22 sexti. sed quadratũ lineæ ϐγ est commẽsurabile quadrato lineæ ικ: est enim utraque linea rationalis. commẽsurabile ergo erit etiã quadratum lineæ ιζ quadrato lineæ γδ, per 10 huius. sed quadratum lineæ ιζ est rationale. ergo similiter rationale erit quadratum lineæ γδ. linea ergo γδ erit rationalis. Et quoniam linea ιζ est longitudine incommensurabilis lineæ ικ. nam illæ sunt potentia tantum inter se cõmensurabiles. Sicut autem linea ιζ ad lineã ικ, ita quadratum lineæ ιζ ad parallelogrammum ex ambabus lineis ιζ, ικ contentum per lemma proximum. incommensurabile est ergo quadratum lineæ ιζ parallelogrammo ex lineis ιζ, ικ per secundam partem decimi theorematis huius libri. Sed quadrato lineæ ιζ quadratum lineæ γδ est commensurabile: modo enim probatum est utrãque lineam esse rationalem. Ergo per 13 huius, quadratum lineæ γδ est incommensurabile parallelogrammo ex lineis ιζ, ικ. Sed parallelogrammum ex lineis γδ, γϐ est æquale parallelogrammo ex lineis ιζ, ικ, ut modo probatum est. Ergo quadratum lineæ γδ est incommensurabile parallelogrãmo ex lineis γδ, γϐ: hæc uerò pars breuius concluditur per corollariũ à nobis positũ post 14 theorema. Sed sicut se habet quadratũ lineæ γδ ad parallelogrammum ex lineis δγ, γϐ, ita se habet linea δγ ad lineam γϐ per lemma proximum *incommensurabilis longitudine est itaque linea δγ lineæ γβ. Rationalis est ergo linea γδ & longitudine incommensurabilis lineæ γβ. quod demonstrandum erat.*

Hoc theorema est ἀντίστροφον proxime præcedentis. Vt uerò fieri posſit quod requirit hoc theorema, ſcilicet applicari quadratum lineæ medialis ſecundum lineam rationalem, reperienda est tertia linea proportionalis ſicut docet 11. ſexti, ita tamen ut linea rationalis ſit prima, ſecunda ſit linea medialis quæ poteſt quadratum applicandum. Nam ſuperficies quæ fit ex prima & tertia eſt æqualis quadrato mediæ per 17 ſexti.

Vigeſimumquartum Theorema.

Linea recta mediali commẽſurabilis, eſt ipſa quoque medialis.



Sit linea medialis α, ſitq́; linea illi commenſurabilis β ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tãtum, ut recte addidit Cãpanus, & in uetuſto exemplari græco legitur. dico lineam β eſſe medialẽ. Exponatur linea rationalis γδ, & quadrato lineæ α æquale parallelogrammum rectangulum applicetur ſecundum lineam γδ, ſitq́; parallelogrammũ γε, eiúſque alterum latus ſit linea εδ. Rationalis itaq́; erit linea εδ, & incommenſurabilis longitudine lineæ γδ, per proximum theorema. Rurſus quadrato lineæ β æquale ſecundum lineam γδ applicetur parallelogrã-

mum

mum rectangulum γζ, cuius alterum latus sit δζ. Cum *igitur commensurabilis sit linea α lineæ β, commẽsurabile quoque erit quadratum lineæ α, quadrato lineæ c. sed quadrato lineæ α æquale est εγ, quadrato autem lineæ β æquale est γζ: commensurabile est ergo parallelogrammum εγ parallelogrammo γζ.* Est *autem sicut parallelogrammum γε ad parallelogrammum γζ, ita linea εδ ad lineam δζ per primam sexti. commensurabilis est ergo longitudine linea εδ lineæ δζ per* 10 *huius.* Sed *linea εδ est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ γδ.* Rational*is est ergo linea δζ & incommensurabilis longitudine lineæ δγ per* 13 *huius.* Ergo *lineæ γδ, δζ sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Sed *linea quæ potest parallelogrammum rectãgulum compræhensum rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, medialis est per* 22 *huius.* Igitur *medialis est quæ parallelogrammum ex γδ, δζ potest.* Id *uerò potest linea β, ergo linea c medialis est.*

Corollarium.

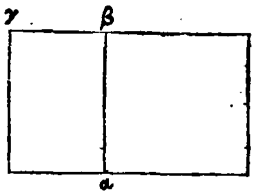
Vnde *manifestum est superficiem commẽsurabilem superficiei mediali, medialem esse.* Nam *lineæ quæ possunt tales superficies, sunt potentia commensurabiles, quarum linearum altera, quæ scilicet potest superficiem medialem, medialis est, quare & reliqua medialis erit per hoc theorema* 24. Sane *quemadmodum diximus de lineis rationalibus, ita dicendũ est in lineis medialibus, nempe lineam mediali commensurabilem esse etiã medialem, lineam inquam quæ sit commẽsurabilis mediali siue sit longitudine & potentia commensurabilis, siue* *potentia tantum. in uniuersum enim uerum est lineas longitudine commensurabiles, esse quoque potentia cõmensurabiles. Quod si lineæ mediali fuerit alia commẽsurabilis potentia, siquidem & longitudine cõmensurabilis fuerit, dicuntur illæ lineæ mediales longitudine & potentia commensurabiles. si uerò potentia tantum fuerint inter se commensurabiles, dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles. Sunt autem & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incõmensurabiles mediali, potentia tantum eidem commensurabiles, hæ uerò dicuntur & ipsæ mediales, eò quia commensurabiles sunt potẽtia lineæ mediali, & ea ratione qua sunt mediales, sunt inter se potẽtia commẽsurabiles, sed & inter se ipsæ comparatæ, possunt esse siue longitudine & ideo etiam potentia commensurabiles, siue potẽtia tantum. Et quidem si longitudine, dicũtur & ipsæ mediales longitudine commensurabiles, ut consequenter intelligatur potentia quoque commensurabiles esse. Quòd si potentia tantum sint inter se commensurabiles, nihilominus tamen & ipsæ dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles. Hoc loco addit exemplar græcũ, quod autem lineæ mediales sint cõmensurabiles, ita demonstrari potest. Quoniã mediales mediali cuidã sunt commensurabiles: quæ uerò sunt eidem commensurabilia, inter se quoque sunt commẽsurabilia. Ergo mediales sunt inter se commensurabiles. hoc totum nõ est Euclidis, neque ullius omnino geometræ. nam quum dicitur, quoniam mediales mediali cuidam sunt commensurabiles, petitur principium. Præterea falsum est simpliciter*

pliciter lineas mediales esse commensurabiles, quod patebit ex theoremate 35 huius libri, ubi propositum est reperire lineas duas potentia incommensurabiles cōficientes compositum ex quadratis ipsarū mediale, & id parallelogrammum quod fit ex eisdē mediale, ipsum etiā incommensurabile composito ex quadratis illarum. Cū ergo reperiantur duo medialia incōmensurabilia, certum est lineas quæ illa possunt esse mediales potentia incommensurabiles, quas necesse est esse etiam longitudine incommensurabiles.

Vigesimumquintum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum contentū ex lineis medialibus longitudine commensurabilibus mediale est.

Ex *lineis enim medialibus longitudine commēsurabilibus α β, β γ contineatur parallelogrammum rectāgulū α γ, dico illud parallelogrāmum esse mediale. Describatur enim ex linea α β quadratum*



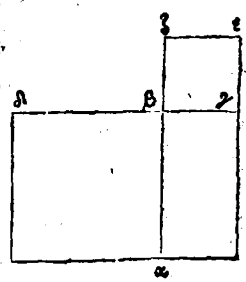
α δ: mediale est ergo quadratum illud α δ. Et *quoniā linea α β est longitudine cōmēsurabilis lineæ ϐ γ, æqualisque est linea α β lineæ β δ, commensurabilis est ergo longitudine linea β δ, lineæ β γ. sed quemadmodum se habet linea δ β ad lineam β γ, ita quadratum δ α ad parallelogrammum α γ per primam sexti. Ergo per decimum theorema huius libri quadratum δ α est commensurabile parallelogrammo α γ. sed quadratū δ α est me-*

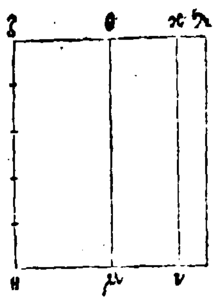
diale quia describitur à linea mediali. Ergo *per corollarium proximi theorematis parallelogrammũ α γ erit etiam mediale. quod demonstrandum erat.*

Vigesimumsextum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum comprehensum duabus lineis medialibus potentia tantum commensurabilibus, uel rationale est, uel mediale.

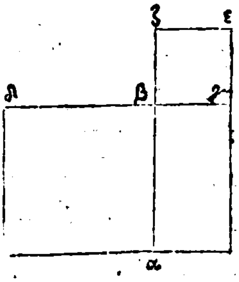
Proposita linea quæ sit medialis, alia reperitur potẽtia tantum commensurabilis eidem per 11 huius, sicut de rationalibus ibidem dictum est. Ex *duabus itaque medialibus potentia tantum cõmensurabilibus α β, β γ, parallelogrammum rectangulum comprehendatur quod sit α γ.* Dico *illud parallelogrammum esse aut rationale aut mediale.* De*scribãtur enim quadrata linearũ α β, β γ quæ sint α δ, β ι, mediale est ergo utrũque per 22 huius.* Pro*ponatur linea rationalis κ ζ secundũ quam applicetur æquale quadrato α δ parallelogrammum rectangulum κ θ, cuius alterũ latus sit ζ θ. (hoc autẽ quomodo fiat diximus in theoromate 23.) parallelogrammo uerò α γ æquale secundum lineam θ μ, æqualem lineæ ζ κ applicetur parallelogrammum rectangulum μ λ, cuius alterũ latus sit θ λ. (ut autem id fiat, sumẽda est quarta li-*



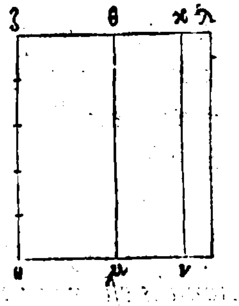


nea

nea proportionalis ad lineas θ μ, α ϛ, β γ per 12 ſexti, quæ quarta ſit θ κ: ergo per 16 ſexti parallelogrammum ex θ μ, θ κ erit æquale parallelogrammo ex lineis α β, β γ.) præterea quadrato β ι æquale ſimiliter ſecundum lineā κ ν applicetur parallelogrammum rectangulum ν λ, cuius alterum latus ſit κ λ. In eadem ergo recta linea ſunt lineæ ζ θ, θ κ, κ λ. (Nam illa parallelogramma ſic applicata ſecūdum lineas ζ κ, θ μ, κ ν ſunt rectangula, & anguli ζ θ μ, κ θ μ æquales duobus rectis, quia ſunt ipſi recti. Itaque lineæ ζ θ, θ κ ſunt in eadem linea recta per 14 primi. idem dices de angulis θ κ ν, λ κ ν.) Cum igitur mediale ſit utrūque quadratum α δ, β ι parallelogramma illis æqualia κ θ, ν λ ſimiliter medialia erunt. Illa autem applicantur ſecundum lineam rationalē, nempe ζ κ: rationalis eſt ergo utraque linea ζ θ, κ λ & incommenſurabilis longitudine lineæ ζ κ per 23 huius. Sed quia lineæ α β, β γ poſitæ ſunt potentia commenſurabiles: ergo quadratum α δ eſt commenſurabile quadrato β ι. ſimiliter igitur illis æqualia parallelogramma κ θ, ν λ erunt inter ſe commenſurabilia. Sed ſicut ſe habet parallelogrammum κ θ ad parallelogrammum ν λ, ita ſe habet linea ζ θ, ad lineam κ λ per primum ſexti. Ergo per decimum huius linea ζ θ erit commenſurabilis longitudine lineæ κ λ. Lineæ ergo ζ θ, κ λ ſunt rationales, longitudine inter ſe commenſurabiles. inter ſe dico longitudine com mēſurabiles. Nam ipſi lineæ ζ κ propter quam ſunt rationales, ſunt longitudine incommenſurabiles, ut modo probatum eſt. Ergo parallelogrammum contentum ex illis lineis ζ θ, κ λ eſt rationale per 20 huius. & quoniam



linea βδ est æqualis lineæ βα, linea uerò ζβ æqualis lineæ βγ: est igitur sicut linea βδ ad lineam βγ, ita linea αε ad lineã βζ. Sed sicut linea δβ ad lineam βγ, ita quadratũ δα ad parallelogrammum αγ per primum sexti. sicut autem linea α, ad lineam βζ, ita parallelogrammum αγ ad quadratũ ει. Est igitur sicut quadratũ αδ ad parallelogrammũ αγ, ita parallelogrãmũ αγ ad quadratũ βι. quadrato autẽ αδ æquale est parallelogrammũ ηθ. parallelogrammo autẽ αγ æquale est item parallelogrãmũ μκ. quadrato uerò βι æquale est parallelogrãmũ λ. Est igitur sicut parallelogrãmũ ηθ ad parallelogrãmũ μκ, ita parallelogrãmũ μκ ad parallelogrãmũ νλ. Est ergo per primũ sexti sicut linea ζθ ad lineã θκ, ita linea θκ ad lineã κλ. Ergo parallelogrammũ contentum ex lineis ζθ, κλ est æquale quadrato lineæ θκ per 17 sexti. sed parallelogrãmũ ex lineis ζθ, κλ est rationale, ut modo probatũ est, rationale est ergo quadratũ lineæ θκ. ergo linea θκ erit rationalis. Et quidẽ si ipsa linea inquã θκ fuerit longitudine cõmensurabilis lineæ θμ, id est lineæ ζη ipsi æquali, rationale tũc erit parallelogrãmũ θν per 20 huius. Quod si fuerit longitudine incõmensurabilis ipsi lineæ ζη, tunc lineæ θμ, θκ sunt rationales potentia tantũ cõmensurabiles: sic igitur parallelogrammũ θν erit mediale. Ergo

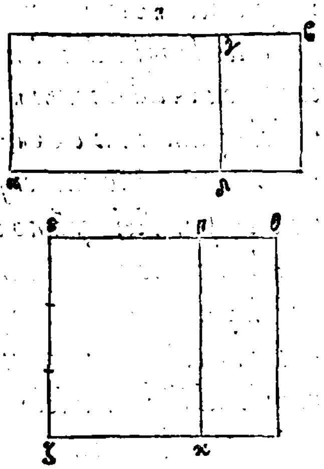


paral-

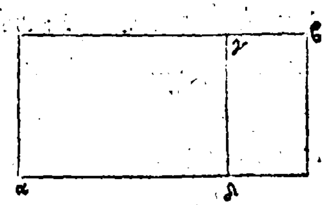
parallelogrammũ θ ι erit uel mediale uel rationale: sed parallelogrammũ θ ι est æquale parallelogrammo α γ. Ergo parallelogrammum α γ erit aut mediale aut rationale. Quomodo autem reperiantur lineæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale parallelogrammum continentes, item aliæ mediale continentes, docebunt theoremata 28. & 29.

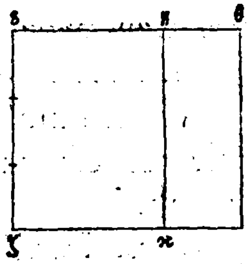
Vigesimumseptimum Theorema.

Mediale non est maius quàm mediale superficie rationali.



Nam si fieri potest mediale α β sit maius quàm mediale α γ superficie rationali quæ sit δ β, & proponatur linea rationalis ε ζ, & mediali α β æquale secundum lineam ε ζ applicetur parallelogrammum ζ θ, cuius alterum latus sit ε θ. ipsi autem mediali α γ æquale itẽ auferatur parallelogrammũ ζ κ. Reliquum ergo δ ε reliquo κ θ æquale est. sed per positionem β δ est rationale, ergo rationale etiam erit κ θ. Cum igitur mediale sit utrunque α β, α γ, sitq́; α ε æquale ipsi ζ θ: sit etiã α γ æquale ipsi ζ κ, mediale est ergo utrunque etiam ζ θ, ζ κ. & secundum lineam rationalẽ ε ζ applicãtur. rationalis est ergo utraq; linea θ ε, ε κ & incommensurabilis longitudine lineæ ε ζ per 23 huius. Et quoniam rationale est δ ε, ipsiq́; æquale κ θ: rationale etiam erit κ θ, & secundum lineam ra-





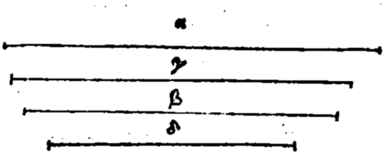
tionalem ιζ uel ei æqualem ηκ applicatur: rationalis eſt ergo linea ηθ, & commenſurabilis longitudine lineæ ηκ per 21 huius. ſed linea ηκ eſt æqualis lineæ ιζ: ergo linea ηθ eſt rationalis, & cõmenſurabilis lõgitudine lineæ ιζ. ſed & linea ιη rationalis eſt & incommenſurabilis longitudine lineæ ιζ. Ergo linea ηι erit incommenſurabilis longitudine lineæ ηθ per 14 huius. Eſt autẽ ſicut linea ιη ad lineam ηθ, ita quadratũ lineæ ιη ad parallelogrammum ex ιη, ηθ per lemma ſuprapoſitũ poſt theorema 22. Incommenſurabile eſt ergo quadratum lineæ ιη parallelogrãmo ex lineis ιη, ηθ per 10 huius. ſed quadrato lineæ ιη commenſurabilia ſunt quadrata linearũ ιη, ηθ. ambo enim ſunt rationalia, ut modo probatum eſt. Ergo quadrata linearum ιη, ηθ ſunt incommenſurabilia parallelogrammo ex lineis ιη, ηθ per 14 huius. parallelogrammo uerò ex lineis ιη, ηθ commenſurabile eſt id quod fit bis ex lineis ιη, ηθ (habent enim proportionem ſicut numerus ad numerum, nempe ſicut unitas ad binariũ, aut ſicut binarius ad quaternariũ: itaque per 6 huius ſunt commẽſurabilia) Ergo per eandem 14 huius, id quod fit bis ex lineis ιη, ηθ eſt incommẽſurabile quadratis linearum ιη, ηθ. hoc breuius concluditur per corollarium 14 theorematis. Sed quadrata linearum ιη, ηθ & id quod fit bis ex lineis ιη, ηθ ſunt æqualia

æqualia quadrato totius lineæ ιθ per 4. secundi. Ergo *quadratum lineæ ιθ est incommensurabile quadratis linearum ικ, κθ per 17 huius. sed quadrata linearum ικ, κθ sunt rationalia: ergo quadratum lineæ ιθ est irrationale. irrationalis est ergo linea ιθ. Sed modo demõstratũ est eã esse rationalẽ, quod fieri nullo modo potest. non igitur mediale maius est mediali superficie rationali.*

Vigesimumoctauum Theorema.

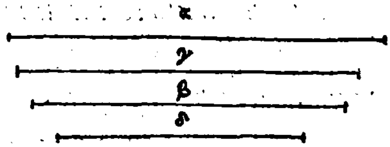
Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmensurabiles rationale comprehendentes.

Prop*onantur duæ rationales lineæ potentia tantum commensurabiles α, β: sumaturq; media proportionalis inter eas linea γ, sitq; sicut linea α ad lineã β, ita*



linea γ ad lineam δ per 13 sexti. Cũ igitur lineæ α, β sint rationales potentia tantum commensurabiles, parallelogrammum comprehensum ex lineis α, β, hoc est quadratum lineæ γ (nam quadratũ lineæ γ est æquale parallelogrãmo ex lineis α, β per 17 sexti) est mediale: medialis est ergo linea γ. Et *quoniam est sicut linea α ad lineã β, ita linea γ ad lineam δ. erit sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ per 22.6. sed quadrata linearum α, β sunt commensurabilia, quia lineæ α, β positæ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles. ergo & quadrata linearum γ, δ sunt etiam commensurabilia per*

10 huius, ergo & lineæ γ, δ sunt etiā potentia commensurabiles per diffinitionē. Est autē linea γ medialis.

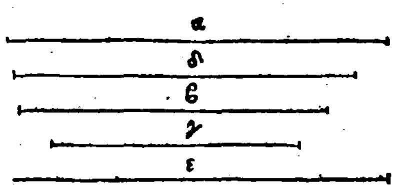


Medialis ergo est etiam linea δ per 24 huius. Ergo lineæ γ, δ sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico præterea eas continere parallelogrammū rationale. Cum enim sit sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ. permutata ergo proportione erit sicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ. sed sicut est linea α ad lineam γ, ita linea γ ad lineam β. ergo sicut linea γ ad lineā β, ita linea β ad lineam δ. ergo parallelogrammum ex lineis γ, δ est æquale quadrato lineæ β: sed quadratum lineæ β est rationale, quia linea β posita est rationalis. Rationale est ergo parallelogrammum ex lineis γ, δ. repertæ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, quod faciendum erat.

Vigesimumnonum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cōmensurabiles mediale comprehendentes.

Proponātur tres rationales potentia tantum cōmensurabiles α, β, γ, sumaturq; inter lineas α, β media proportionalis δ per 13.6. fiatq; sicut linea



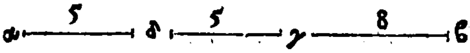
nea

nea β ad lineam γ, ita linea δ ad lineā ε per 12.6. Cum igitur lineæ α, β ſint rationales potentia tantum cōmenſurabiles, ergo parallelogrammum ex α, β, hoc eſt quadratum lineæ δ eſt mediale, medialis eſt ergo linea δ. Et cum lineæ β, γ ſint potentia tantum commenſurabiles, ſitq́; ſicut β ad γ, ita δ ad ε. ergo δ, ε ſunt potentia tantū commenſurabiles. ſed linea δ eſt medialis. ergo linea ε, erit etiam medialis. ergo lineæ δ, ε ſunt mediales potentia tantum commenſurabiles. Dico *præterea eas continere mediale.* Cum *enim ſit ſicut linea β ad lineā γ, ita δ ad ε: permutatim ergò ſicut β ad δ, ita γ ad ε. ſed ſicut β ad δ, ita δ ad α per cōuerſam ſiue contrariam proportionem, quæ probatur per corollarium quarti theorematis libri quinti.* Itaque *ſicut δ ad α, ita γ ad ε. itaque parallelogrammum ex α, γ eſt æquale parallelogrammo ex δ, ε per 16.6.* Sed *parallelogrammū ex α γ per 22 huius mediale eſt, ergo mediale quoque erit parallelogrammum ex δ, ε.* Repert*æ ſunt ergo mediales potentia tantum commenſurabiles mediale comprehendentes, quod demonſtrandum erat.*

Lemma.

Re*perire duos numeros quadratos huiuſmodi, ut numerus qui efficitur ex ipſorū additione ſit etiā quadratus.* Propo*nātur duo numeri α β, ε γ ſimiles ſuperficiales, qui quomodo reperiātur, dictum eſt in theoremate 9. ſint autem ambo pares uel ambo impares, ſit etiam maior α β. Et quia ſiue à numero pari par auferatur, ſiue ab*

impari impar residuus est par, per 24 & 26.9. Dempto itaque βγ de αβ residuus αγ par erit. Secetur numerus αγ in duas partes æquales in puncto δ, numerus ergo productus ex multiplicatione numerorũ αβ, βγ cum numero quadrato producto ex multiplicatione γδ in seipsum, est æqualis quadrato producto ex multiplicatione βδ in se ipsum, per ea quæ demõstrat Campanus *propositione* 16. *libri* 9. *quam demonstrationem sumpsit ex 6 theoremate libri secundi. Est autẽ numerus productus ex multiplicatione αβ, βγ, quadratus, per* 1.9. *Reperti sunt ergo duo numeri quadrati, nẽpe alter productus ex αβ, βγ, alter autem ex multiplicatione γδ in seipsum, qui compositi per additionẽ efficiunt numerũ quadratum, nempe productum ex multiplicatione βδ in seipsum.*



Corollarium.

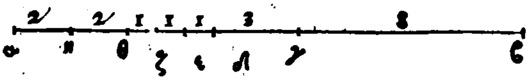
Ex hoc manifestum etiã illud est repertos esse duos numeros quadratos, nempe alterum productum ex multiplicatione βδ in seipsum, item alterum ex multiplicatione γδ in seipsum tales, ut numerus quo excedit alter alterum, ille inquam numerus qui producitur ex multiplicatione αβ, βγ: sit etiam quadratus quando uidelicet numeri αβ, βγ fuerint similes superficiales. Quòd si nõ fuerint similes superficiales, reperti sunt duo quadrati, nẽpe alter productus ex radice βδ, & alter productus ex radice γδ, quorum excessus, id est numerus quo maior excedit minorem, uidelicet productus ex αβ, βγ non est quadratus.

Lemma.

Lemma.

Reperire duos quadratos numeros huiusmodi ut compositus ex ipsorum additione ne sit quadratus.

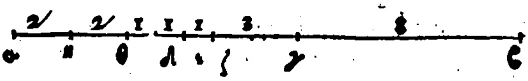
Sit numerus productus ex multiplicatione numerorum



α γ, β γ, ut diximus in proximo lemmate, quadratus: sitq; numerus γ α par, diuidatúrque idem numerus γ α in duas partes æquales in puncto δ. Manifestum *est numerum quadratum qui fit ex multiplicatione α β, β γ, cum quadrato radicis γ δ, æqualem esse quadrato radicis β δ, per ea quæ dicta sunt in proximo lẽmate. auferatur unitas ex δ γ, quæ unitas sit δ ι.* Ergo *quadratus productus ex multiplicatione α β, β γ, cũ quadrato radicis γ ι, minor est quadrato radicis β δ.* Dico *itaque numerũ compositũ ex quadrato producto per multiplicationẽ α β, β γ, & quadrato radicis γ ι, non esse quadratũ.* Quòd *si dicas esse quadratũ, simul oportet eũ esse maiorẽ aut æqualẽ aut minorẽ quadrato radicis β ι.* Pri*mũ non potest eo maior esse.* Modo *enim probatũ est numerũ productũ ex α β, β γ, unà cũ quadrato radicis γ ι, esse minorem quadrato radicis β δ: sed inter quadratũ radicis β δ & quadratum radicis β ι, nullus medius quadratus interuenit.* Nam *radix β δ excedit radicem β ι, sola unitate quæ unitas in numeros diuidi nullo modo potest.* Aut *si numerus productus ex α β, β γ, unà cũ quadrato radicis γ ι esset maior quadrato radicis β ι,* *oporteret eundem numerum productum ex α ϛ, β γ unà cum quadrato radicis γ ι, esse æqualẽ quadrato radicis β δ, cuius modo probatũ est cõtrarium. Sit ergo, siquidẽ illud fieri posse dicis, numerus productus ex α β, ϛ γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ι, sitq; numerus κ α duplus ad unitatẽ δ ι, id est binarius. Cum igitur totus numerus α γ totius numeri γ δ sit duplus ex suppositione, & numerus α κ sit duplus ad unitatẽ δ ι: ergo residuus numerus γ κ ad residuũ numerũ ι γ, duplus erit per 5.5. siue per 7.7. & 11. eiusdẽ 7. Ergo in duas partes æquales diuisus est numerus κ γ, in puncto ι. Numerus itaq; productus ex κ β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι est æqualis quadrato radicis ι β. sed per positionem tuam numerus productus ex α β, β γ unà cũ quadrato γ ι, est æqualis eidẽ quadrato radicis ϛ ι. Ergo numerus productus ex κ β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι est æqualis numero producto ex α β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι, quia quæ uni & eidẽ sunt æqualia, inter se quoq; sunt æqualia. sed si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanẽt sunt æqualia. Ergo numerus productus ex κ β, ϛ γ, est æqualis numero producto ex α β, β γ. Ergo per 17. uel 18.7. numerus κ β est æqualis numero α β minor maiori, quod est impoßibile. Non igitur erit numerus productus ex α β, β γ cũ quadrato radicis γ ι, æqualis quadrato radicis ϛ ι. Dico similiter eũdem numerum productũ ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι non esse minorem quadrato radicis β ι. Si enim fieri posse dicas, erit ergo æqualis cuipiam numero quadrato minori quàm est quadratus radicis β ι. sit*

ergo

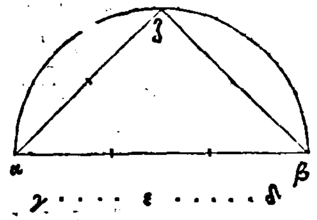
ergo numerus ille productus ex α β, β γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ζ, sumatúrque numerus θ α duplus ad numerum δ ζ. efficitur similiter ut numerus θ γ sit duplus ad numerũ ζ γ, ita ut etiam θ γ secetur in partes duas æquales in puncto ζ. ideóque simul numerus productus ex θ β, β γ cum quadrato radicis ζ γ erit æqualis quadrato radicis β ζ.



Sed per positionẽ tuã numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι erat æqualis quadrato radicis β ζ. efficitur ergo ut numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι sit æqualis numero producto ex θ ε, β γ, unà cum quadrato radicis γ ζ, quod est impoßibile. Nam *si esset æqualis, cum quadratus radicis γ ζ sit minor quadrato radicis ε ι, oporteret numerũ productum ex θ ε, ε γ esse maiorẽ numero producto ex α β, β γ, itaque simul necesse esset numerum θ ε esse maiorem numero α ε, cum tamen sit eo minor.* Non *erit ergo numerus productus ex α ε, ε γ cum quadrato radicis γ ι æqualis numero minori quàm sit quadratus radicis ε ι.* Sed *demonstratum est neque esse posse eidem æqualem, neq; maiorem: igitur numerus ex α ε, ε γ unà cũ quadrato radicis γ ι, compositus quadratus esse nullo modo potest.*

Trigesimum Theorema.

Reperire duas rationales potentia tantũ commenſurabiles huiuſmodi, ut maior ex illis poſsit pluſquam minor quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine.

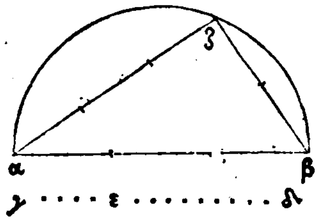


Eſto propoſita linea rationalis α ϐ, & duo numeri quadrati γ δ, δ ι, huiuſmodi, ut exceſſus illorū γ ι ne ſit quadratus numerus per corollarium prioris lemmatis ex duobus modo dictis: deſcribatúrque ſuper linea α ϐ, ſemicirculus α ζ ϐ, fiatq; ſicut numerus γ δ ad numerum γ ι, ita quadratum lineæ α ϐ ad quadratum alterius lineæ quæ ſit α ζ per lemma poſitum poſt 6. theorema huius libri, & ducatur linea ζ ϐ. Cum igitur ſit ſicut quadratum lineæ α ϐ ad quadratum lineæ α ζ, ita numerus γ δ ad numerum γ ι, ergo commenſurabile eſt quadratum lineæ α ϐ, ad quadratum lineæ α ζ per 6 huius. ſed quadratum lineæ α ϐ eſt rationale. ergo etiam rationale erit quadratum lineæ α ζ. Rationalis *eſt ergo linea α ζ.* Cúmq; *numerus δ γ, ad numerum γ ι proportionem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum per 24. 8. à deſtructione conſequentis: neque ſimiliter quadratum lineæ α ϐ ad quadratum lineæ α ζ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ergo *linea α ϐ erit incommenſurabilis longitudine lineæ α ζ, per 9 huius. ergo lineæ α ϐ, α ζ, ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles.* Cúmque *ſit ſicut numeus γ δ ad numerum γ ι, ita quadratum lineæ α ϐ, ad quadratū lineæ α ζ. per euerſam*

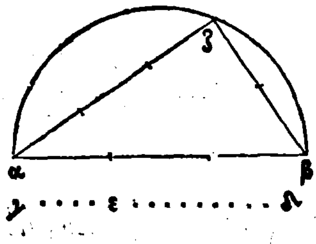
ſam ergo porportionem quæ dicitur ἀναστροφὴ λόγου, demonſtraturque per corollarium 19 theorematis libri 5. ſicut numerus γ δ ad numerum δ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ β ζ, qui eſt exceſſus quadrati lineæ α ϐ, ſupra quadratum lineæ α ζ per lemma poſitum poſt 14 huius libri. ſed numerus γ δ ad numerum δ ε habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ ϐ ζ proportionem habet quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea α ϐ eſt commenſurabilis longitudine lineæ ϐ ζ, per 9 huius. Eſt autem quadratum lineæ α ϐ æquale duobus quadratis linearum α ζ, ζ ϐ. Ergo linea α β plus poteſt quàm linea α ζ quadrato lineæ ϐ ζ ſibi commenſurabilis longitudine. Repertæ ſunt ergo duæ rationales potentia tantum cõmenſurabiles huiuſmodi &c. quod demonſtrandum erat.

Lemma.

Reperire duas rationales potentia tantum commenſurabiles huiuſmodi, ut maior plus poſsit quàm minor quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine.



Proponatur linea rationalis α ϐ, & numeri quadrati duo γ ε, ε δ, tales ut compoſitus ex ipſis nempe γ δ, ne ſit quadratus per alterũ lemma poſitum poſt 29 theorema huius libri: deſcribatùrque ſuper linea α ϐ ſemicirculus α ζ ϐ, fiatq; ſicut numerus δ γ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ: duca-



turque linea à puncto ζ in punctum β qua sit ζβ, quẽadmodũ in præcedẽti theoremate. similiter hic demonstrabimus lineas αβ, αζ, esse rationales potentia tantum commensurabiles. Et cum sit sicut numerus δγ ad numerum γε, ita quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ αζ. Per euersam ergo proportionem quemadmodũ numerus δγ ad numerum δε, ita quadratũ lineæ αβ ad quadratum lineæ ζβ, ut diximus in præcedẽti theoremate. sed numerus γδ ad numerum δε proportionẽ non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum per corollarium illatum à destructione consequentis 24 lib. 8. Neque ergo quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ βζ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo per 9 huius linea αβ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζβ. Potest autem linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ βζ sibi incommensurabilis longitudine. Ergo lineæ αβ, αζ sunt duæ rationales potentia tãtum cõmensurabiles, & potest linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ ζβ sibi incommensurabilis longitudine.

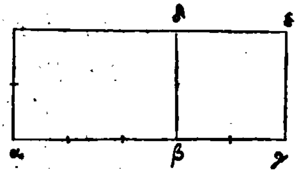
Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ habentes inter se aliquam proportionem, erit ut linea recta ad lineam rectam, ita parallelogrammum contentum ex ambabus ad quadratum lineæ minoris ex illis duabus. Hoc lemma nihil amplius affert quàm primum theorema libri sexti, itaque non

reperitur

reperitur in quibusdam exemplaribus.

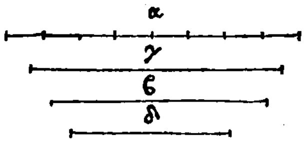
Sint duæ rectæ lineæ α β, β γ in aliqua proportione. Di*co sicut linea α β ad lineam β γ, ita esse parallelogrammum ex α β, β γ ad quadratũ β γ.* Describatur enim quadratũ lineæ β γ, quod sit β δ ε γ, compleatúrq; parallelogrammum α δ. manifestum est sicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammũ α δ ad parallelogrammum uel quadratum β ε per primam sexti. Est autem parallelogrammum α δ contentũ ex lineis α β, β γ. est enim æqualis linea β γ lineæ β δ. parallelogrammum autem β ε est quadratum lineæ β γ. Ergo sicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum ex α β, β γ ad quadratum lineæ β γ. quod demonstrandum erat.*

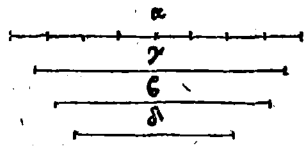


Trigesimumprimum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potentia tantum cõmensurabiles rationalem superficiem continentes, tales inquam, ut maior possit plusquã minor quadrato lineę sibi cõmensurabilis longitudine.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α, β, tales ut maior α possit plus quàm minor β quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 30 theorema, sitq; parallelogrammo ex α, β æquale quadratum lineæ γ (quod sit reperta linea me-





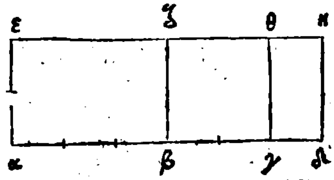
dia proportionali, nempe linea γ inter α, β, ut traditur libro ſexto). Eſt autem mediale parallelogrā mū ex α, β per 22 huius libri. ergo ſimiliter mediale erit quadratū lineæ γ. linea ergo γ erit medialis. Quadrato autē lineæ β æquale ſit parallelogrammū ex γ, δ, reperta tertia proportionali, nēpe linea δ, ad duas lineas γ, β, ut traditur libro 6. Eſt autem quadratum lineæ β rationale. eſt ergo & parallelogrammum ex γ, δ rationale. Et quoniā ſicut linea α ad lineam β, ita eſt parallelogrammum ex α, β ad quadratum lineæ β per lemma modo poſitum. Sed parallelogrammo ex α, β, æquale eſt quadratum lineæ γ. quadrato autē lineæ β æquale eſt parallelogrammum ex lineis γ, δ, ut modo probatū eſt. Eſt ergo ſicut linea α ad lineam β, ita quadratum lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ. Sed ſicut eſt quadratū lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ, ita linea γ ad lineam δ per lemma poſitum ante 23 huius libri. Ergo ſicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineā δ. Sed linea α eſt poſita commenſurabilis potentia tantum lineæ β. Ergo etiam linea γ eſt commenſurabilis potentia tantū lineæ δ per 10 huius. Sed linea γ eſt medialis, ergo etiam linea δ erit medialis per 24 huius. Et quoniam eſt ſicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ. lineáque α poteſt pluſquam linea β quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per ſuppoſitionem. Ergo etiam linea γ poterit pluſquam linea δ quadrato lineæ ſibi cōmēſurabilis longitudine per 15 huius. Repertæ ſunt er-

go

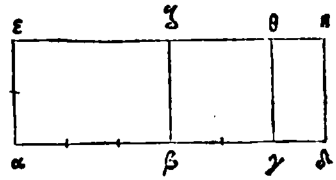
go duæ mediales potentia tantum commensurabiles γ, δ, rationalem superficiem continentes, potestque linea γ plusquam linea δ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Similiter etiam reperiri possunt duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, tales ut maior poßit plusquã minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, quando uidelicet linea α poterit plusquam linea β quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. quod facere docuit prius lemma positũ post 30 theorema huius libri. Manente eadem constructione potest facilius illa pars huius theorematis demonstrari ab illis uerbis. Et quoniam sicut linea α usq; ad ea uerba, Sed linea α est posita commensurabilis. Nam lineæ γ, β, δ sunt continue proportionales per secũdam partem 17. 6. Sed etiam α, γ, β sunt tres continue proportionales. Ergo per 11. 5. erit sicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ. Ergo permutata proportione sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ &c.

Lemma.

Si sint tres lineæ rectæ habẽtes proportionem aliquam inter se, erit sicut prima ad tertiam, ita parallelogrammũ ex prima & media ad parallelogrammum ex media & tertia. Sint tres lineæ rectæ in aliqua proportione αβ, βγ, γδ. Dico sicut linea



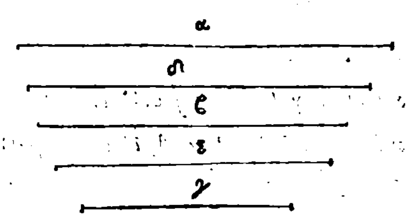
αβ ad lineam γδ, ita esse parallelogrammum ex αβ, βγ ad parallelogrammum ex βγ, γδ. Erigatur enim ex puncto α supra lineam αβ perpendicularis linea αε,



ſitq́; illa α ι æqualis lineæ ϐ γ, & à pũcto ι lineæ α δ ducatur parallela linea ι κ, & à ſingulis punctis β, γ, δ, lineæ α ι, parallelæ lineæ ducantur β ζ, γ θ, δ κ. Cúmque ſit ſicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum α ζ ad parallelogrammum ϐ θ, per primam ſexti. ſicut autem linea β γ ad lineã γ δ, ita parallelogrammum β θ ad parallelogrammum γ κ. Per *æquam itaque proportionem erit ſicut linea α β ad lineam γ δ, ita parallelogrammum α ζ, ad parallelogrammum γ κ.* E*ſt autem parallelogrammũ α ζ ex lineis α β, β γ. poſita eſt enim æqualis α ι lineæ β γ, eſtq́; parallelogrammum γ κ ex lineis ϐ γ, γ δ.* Nam *β γ eſt æqualis lineæ γ θ, quia γ θ eſt æqualis lineæ α ι per* 34.1. *Ergo ſi ſint tres lineæ rectæ &c. quod demonſtrandum erat.*

Trigeſimumſecundum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potẽtia tantum cõmenſurabiles medialem ſuperficiem continentes, huiuſmodi ut maior plus poſsit quàm minor quadrato lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine.



P*roponantur tres rationales α, β, γ, potentia tantum commẽſurabiles, tales ut linea α plus poſsit quàm linea γ quadrato lineæ ſibi commẽſurabilis longitudine. Et parallelogrãmo ex α, β ſit æqua-*

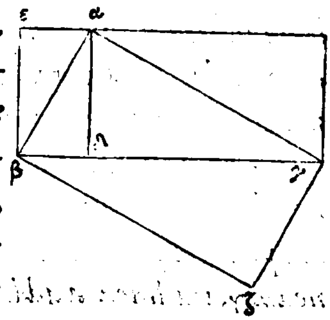
le

le quadratum lineæ δ. Parallelogrammum autem ex α,β est mediale, mediale ergo erit, & quadratum lineæ δ. ergo linea δ erit medialis. parallelogrammo uerò ex β,γ sit æquale parallelogrammum ex δ,ε (quod fit reperta quarta proportionali ad lineas δ,β,γ quæ sit linea ε.) Cum itaque sit sicut parallelogrammum ex α,β ad parallelogrammum ex β,γ, ita linea α ad lineā γ per lemma proximū. Sed parallelogrāmo ex α,β est æquale quadratum lineæ δ: parallelogrammo uerò ex β,γ est æquale parallelogrammum ex δ,ε. Est ergo sicut linea α ad lineam γ, ita quadratū lineæ δ, ad parallelogrammum ex δ,ε. Sed sicut quadratum lineæ δ ad parallelogrammū ex δ,ε, ita linea δ ad lineam ε per lemma positum post 22 theorema. Ergo sicut linea α ad lineam γ, ita linea δ ad lineam ε. Sed linea α est commensurabilis potentia tantum lineæ γ. Ergo linea δ erit commensurabilis potentia tantū lineæ ε. Sed linea δ est medialis. ergo linea ε erit etiā medialis per 24 huius. Cūq; sit sicut linea α ad lineā γ, ita linea δ ad lineam ε. linea autem α possit plus quàm linea γ quadrato lineæ sibi cō mensurabilis longitudine. Ergo linea δ poterit plusquā linea ε quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15 huius. Dico præterea parallelogrammum ex δ,ε esse mediale. Nam est æquale parallelogrammo ex β,γ quod est mediale per 22 huius. Mediale est ergo similiter parallelogrammum ex δ,ε, Repertæ sunt ergo duæ mediales potentia tantum commensurabiles, nempe δ,ε &c. quod fecisse oportuit. Rursus eadem ratione reperientur duæ mediales potentia tantum commensurabi-

les mediale continentes, huiusmodi, ut maior plus poßit quàm minor quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, quandocunque linea α plus poterit quàm linea γ quadrato lineæ sibi incõmẽsurabilis longitudine.

Lemma.

Sit triangulum rectangulum ϐ α γ, habens rectum angulũ α, ducatúrque perpendicularis α δ. dico primò parallelogrammum ex γ ϐ, ϐ δ esse æquale quadrato lineæ ϐ α. dico secundò parallelogrammum ex ϐ γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ γ α. dico tertiò parallelogrammũ ex ϐ δ, δ γ esse æquale quadrato lineæ δ α. dico quartò parallelogrammum ex ϐ γ, α δ esse

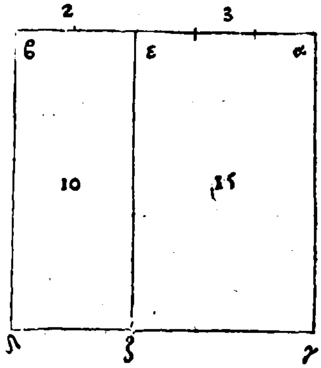


æquale parallelogrammo ex ϐ α, α γ. Quod ad primum attinet, parallelogrãmũ ex γ ϐ, ϐ δ esse æquale quadrato lineæ ϐ α, ita demonstratur. Cũ ab angulo recto triãguli rectanguli ad basim perpẽdicularis ducta sit linea α δ. Ergo triangula α ϐ δ, α δ γ sunt similia toti triangulo α ϐ γ, & ipsa inter se per 8.6. Et cum triangulũ α ϐ γ sit simile triangulo α ϐ δ. sunt igitur ambo triãgula æqualium angulorum per definitionem similium figurarum. Ergo per 4.6. sicut linea γ ϐ ad lineã ϐ α, ita linea ϐ α ad lineam ϐ δ. Ergo parallelogrammum ex γ ϐ, ϐ δ erit æquale quadrato lineæ α ϐ per 17.6. Quod ad secũdum, parallelogrammũ ex ϐ γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ α γ, eadem ratione demonstratur. Nam triangulum

gulum α β γ est simile triangulo α δ γ. Est igitur sicut linea β γ ad lineam α γ, ita linea α γ ad lineam δ γ. Ergo parallelogrammum ex β γ, γ δ est æquale quadrato lineæ α γ. Quod ad tertium, parallelogrammum ex β δ, δ γ esse æquale quadrato lineæ δ α, ita demonstratur. Cum à recto angulo trianguli rectanguli ad basim ducta sit perpẽdicularis, illa perpẽdicularis est media proportionalis inter sectiones basis per corollariũ 8. theorematis libri 6. Est igitur sicut linea β δ ad lineã α δ, ita α δ ad δ γ. Ergo parallelogrammũ ex β δ, δ γ est æquale quadrato lineæ δ α. Quod ad quartum, parallelogrammum ex β γ, α δ esse æquale parallelogrammo ex β α, α γ, ita demonstratur. Cum enim, sicut modo dictũ est, triãgulum α β γ sit simile triangulo α β δ, & ideo æqualium angulorũ. Est igitur sicut linea β γ ad lineam γ α, ita linea β α ad lineam α δ per 4.6. Ergo per 16.6. parallelogrammum ex β γ, α δ esse æquale parallelogrammo ex β α, α γ. Dico præterea si compleatur parallelogrammũ rectangulum ex β γ, α δ quod sit ε γ, compleaturq; parallelogrammũ ex β α, α γ quod sit α ζ. Alia ratione demonstrabitur, parallelogrammum ε γ esse æquale parallelogrammo α ζ. Nam utrunque ipsorum est duplum trianguli α γ β, per 41.1. Et quæ unius & eiusdem sunt dupla, inter se sunt æqualia. ergo &c.

Lemma.

Si *linea recta scindatur in partes duas inæquales, erit ut maior portio ad minorem, ita parallelogrammum ex tota & maiore portione ad parallelogrammum ex tota & minore. Recta linea α β diuidatur in partes* *duas inæquales in puncto ι, sitq; α ι maior portio. Dico sicut α ι ad lineã ι β, ita parallelogrammũ ex β α, α ι ad parallelogrammũ ex ϛ α, β ι.*



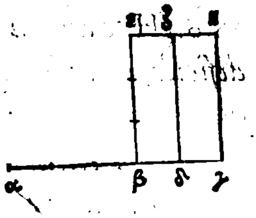
Describatur enim quadratũ lineæ α ϛ quod sit α γ δ ϛ, & à puncto ι utrique α γ, δ β parallela ducatur ι ζ, manifestũ est sicut linea α ι ad lineã ι β, ita parallelogrammũ α ζ ad parallelogrammũ ϛ ζ per primam sexti. Est autem parallelogrammum α ζ contentum ex lineis β α, α ι. est enim linea α γ æqualis lineæ α β, parallelogrammum uerò ϛ ζ est cõtentum ex lineis α β, ϛ ι. Nam δ ϛ est æqualis lineæ α ϛ. sicut ergo linea α ι ad lineam ι ϛ, ita parallelogrammum ex β α, α ι, ad parallelogrammum ex α β, ϛ ι. quod demonstrandum erat.

Hoc lemma nihil aliud affert quàm quod primum theorema sexti.

Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ inæquales, diuidatúrque minor in partes duas æquales, parallelogrammum ex ambabus lineis inæqualibus est duplum parallelogrammi ex maiore & media minoris. Quanuis hoc lemma sit in græco exemplari post 33. theorema, uisum est tamen hoc loco ponere, quia sequentis theorematis 33. demonstrationem adiuuat. Sint duæ rectæ inæquales α β, quarum maior sit α β, diuidatúrque β γ bifariam in puncto δ. Dico parallelogrammum ex α ϛ, β γ esse duplum parallelogrammi ex α β, ϛ δ. ducatur enim à puncto β super lineam

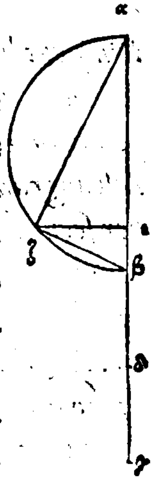
lineam βγ perpendicularis βι, sitq; æqualis lineæ βα, describaturq; figura ut picta est. Cũ igitur sit sicut δβ ad δγ, ita parallelogrammum βζ ad parallelogrammum δκ per 1.6. Composita ergo proportione erit sicut tota linea βγ ad lineã δγ, ita parallelogrammũ βκ ad parallelogrammũ δκ per 18.5. Est autem linea βγ dupla lineæ δγ, ergo parallelogrammum βκ erit duplum parallelogrammi δκ. Est autem parallelogrammum βκ ex lineis αβ, βγ. nam linea αβ est æqualis lineæ βι; parallelogrammũ uero δκ est ex lineis αβ, βδ. nam æqualis est βδ linea, lineæ δγ: linea uerò αβ lineæ δζ. quod demonstrandum erat.

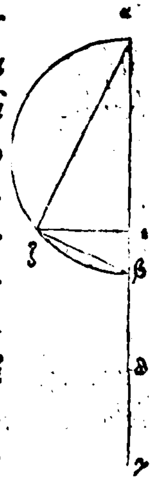


Trigesimumtertium Theorema.

Reperire duas rectas potentia incommensurabiles, quarum quadrata simul addita faciant superficiem rationalem, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum sit mediale.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles αβ, βγ, huiusmodi, ut maior ex illis, nempe αβ, pluspossit, quàm minor βγ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine per lemma positũ priore loco post 30 theorema huius libri. Diuidaturque linea βγ bifariam & æqualiter in pũcto δ: & quadrato lineæ βδ uel δγ æquale secundum lineam αβ applicetur paral-





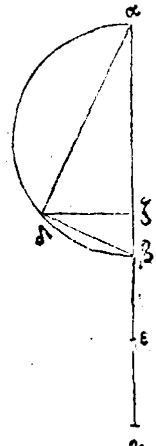
lelogrammũ quadrata figura deficiens per 28.6.(Hæc autem uerba, quadrata figura deficiẽs, idem significant quod ea quibus usi sumus in 18 & 19 theoremate, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrãmi.) sitq; parallelogrammũ ex α ι, ι β. describatur super linea α ε semicirculus α ζ ε, & à linea α β ad circunferentiã semicirculi ducatur perpendicularis ι ζ, ducanturq; lineæ α ζ, ζ β. Cum igitur sint duæ rectæ inæquales α ε, ε γ, positq; linea α β plusquam linea β γ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine: quartæ autẽ parti quadrati lineæ minoris β γ, hoc est quadrato illius dimidiæ quod est δ β, æquale parallelogrammum deficiens figura quadrata applicatũ sit secundum lineam α β, quod parallelogrammum est ex α ι, ι β. Ergo incommensurabilis est longitudine linea α ι lineæ ι β, per secundam partem 19 huius libri. Est autem sicut linea α ι ad lineam ι β, ita parallelogrammũ ex β α, α ι ad parallelogrammum ex α β, β ι, per lemma penultimo loco positum ante hoc theorema. Est autẽ parallelogrammum ex α β, α ι æquale quadrato lineæ α ζ, per secundam partẽ lemmatis primo positi post 32 theorema: parallelogrammum autem ex α β, β ι est æquale quadrato lineæ β ζ per primã partem eiusdem lemmatis. Ergo incõmensurabile est quadratũ lineæ α ζ quadrato lineæ β ζ per 10 huius, ergo lineæ α ζ, ζ β sunt potentia incommensurabiles. Sed quia linea α ε est rationalis,

nalis, rationale est ergo quadratum ipsius. ergo composi tum ex additione amborum quadratorum, nempe descriptorum ex lineis α ζ, ζ ϛ, quæ sunt æqualia quadrato lineæ α β per 47. 1. erit inquam illud compositum rationale. Rursum *parallelogrammū ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ ι ζ per tertiam partem eiusdem lemmatis. Sed per suppositionem idem parallelogrammum ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ β δ.* Ergo *linea ζ ι est æqualis lineæ ϛ δ. ergo linea β γ est dupla ad lineam ζ ι.* Quare *& parallelogrammum ex α β, β γ est duplū ad parallelogrammū ex α ϛ, ι ζ, per proximū lemma, quod perperam positū esse diximus in exemplari græco post huius theorematis demōstrationem.* Sed *parallelogrammum ex α β, β γ est mediale per suppositionem & 22 theorema.* Ergo *etiam mediale erit parallelogrammum ex α β, ι ζ per corollarium 24 theorematis.* Sed *parallelogrammum ex α β, ι ζ est æquale parallelogrammo ex α ζ, ζ β per quartam partem illius lemmatis positi post 32. theorema.* Ergo *parallelogrammum ex α ζ, ζ β erit mediale.* Sed *modo probatū est compositū ex quadratis earundem linearum α ζ, ζ β esse rationale.* Repertæ *sunt ergo duæ lineæ rectæ, nempe α ζ, ζ β potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarū rationale: parallelogrammum uerò ex eisdem cōtentū, mediale, quod faciendum erat.*

Trigesimumquartum Theorema.

Reperire lineas duas rectas potentia incommensurabiles conficientes compositum ex ipsarū quadratis mediale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum rationale.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha\beta$, $\zeta\gamma$ rationale continentes parallelogrammum ex ipsis, tales inquã, ut linea $\alpha\beta$ possit plus quàm linea $\beta\gamma$ quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, per postremam partem demõstrationis theorematis 31. Describatúrque super linea $\alpha\zeta$ semicirculus $\alpha\delta\beta$. diuidatur etiam linea $\zeta\gamma$ bifariam & æqualiter in puncto ϵ: & secundũ lineã $\alpha\beta$ quadrato lineæ $\beta\epsilon$ æquale parallelogrammum applicetur, deficiens figura quadrata quod parallelogrammum sit ex $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, ut dictũ est in proximo theoremate.



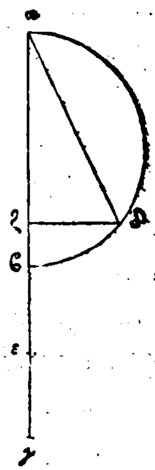
Incommensurabilis est ergo longitudine linea $\alpha\zeta$ lineæ $\zeta\beta$, ut ibidem dictum est: & à puncto ζ erigatur linea $\zeta\delta$ perpendicularis super linea $\alpha\beta$, ducantúrque lineæ $\alpha\delta$, $\delta\beta$. Et quoniam est sicut linea $\alpha\zeta$ ad lineam $\zeta\beta$, ita parallelogrammum ex $\beta\alpha$, $\alpha\zeta$ ad parallelogrammum ex $\beta\alpha$, $\beta\zeta$ per alterum lemma positum ante theorema 33. uel per primũ sexti. Ergo per 10 huius, parallelogrammum ex $\beta\alpha$, $\alpha\zeta$ est incõmensurabile parallelogrammo ex $\alpha\zeta$, $\beta\zeta$. Sed per lemma positum post 32 theorema, parallelogrammum ex $\zeta\alpha$, $\alpha\zeta$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\delta$: parallelogrammũ uerò ex $\alpha\beta$, $\zeta\zeta$ est item æquale quadrato lineæ $\beta\delta$. Incõmensurabile est ergo quadratum lineæ $\alpha\delta$ quadrato lineæ $\beta\delta$. Ergo lineæ $\alpha\delta$, $\delta\zeta$ sunt potentia incommensurabiles.

rabiles.Et *quoniam quadratum lineæ* $\alpha\beta$ *est mediale, quod est æquale duobus quadratis duarum linearum* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *per* 47.1.Ergo *compositum ex illis duobus quadratis linearum* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *est etiam mediale*.Et *quoniam linea* $\beta\gamma$ *est dupla ad lineam* $\delta\zeta$,*ut probatũ est in proximo theoremate*.Ergo *parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *erit duplum ad parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\delta\zeta$ *per lemma positum ante* 33 *theorema*,*uel per primam sexti, quare & eidem erit commensurabile per 6 huius*.Sed *per positionem parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est rationale. ergo parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\delta\zeta$ *est etiam rationale.parallelogrammo uerò ex* $\alpha\epsilon$, $\delta\zeta$ *æquale est parallelogrammum ex* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *per tertiam partem lemmatis positi post* 32 *theorema. quare parallelogrammũ ex* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *erit etiam rationale*.Repertæ *sunt ergo duæ lineæ rectæ,nẽpe* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *potentia incõmẽsurabiles &c.*

Trigesimumquintum Theorema.

Reperire duas lineas rectas potentia incommensurabiles, conficientes id quod ex ipsarum quadratis componitur mediale, simúlque parallelogrammum ex ipsis cõtentũ, mediale, quod præterea parallelogrammum sit incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha\beta$, $\epsilon\gamma$ *mediale continentes,tales inquam,ut* $\alpha\epsilon$ *plus possit quàm* $\beta\gamma$ *quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine,per postremam partem demonstrationis theorematis* 32. *Describatúrque super linea* $\alpha\epsilon$



ſemicirculus α δ β, cæteráque conſtructa ſunto eo modo quo in præcedentibus. Cùm linea α ζ ſit incommenſurabilis longitudine lineæ ζ β, eſt etiam incommenſurabilis potẽtia linea α δ lineæ δ β, per ea quæ ſunt demonſtrata in proximo theoremate. Et quoniam quadratum lineæ α β eſt mediale, ergo compoſitum ex quadratis linearũ α δ, δ ε quod eſt æquale quadrato lineæ α ε per 47.1. erit etiam mediale. Et quoniã parallelogrammum ex α ζ, ζ β eſt æquale alterutri quadrato ex ſingulis lineis β ι, δ ζ. Nam ex ſuppoſitione parallelogrammum ex α ζ, ζ ε eſt æquale quadrato lineæ ε ι: idem etiã parallelogrammũ ex lineis α ζ, ζ β eſt æquale quadrato lineæ δ ζ per tertiam partem lemmatis poſiti poſt 32. theorema. Ergo linea δ ζ eſt æqualis lineæ ε ι: dupla eſt ergo linea β γ ad lineam ζ δ. Quare & parallelogrammũ ex α β, β γ erit duplum ad parallelogrammum ex α β, ζ δ. Itaque ſunt commenſurabilia per ſextam huius. Sed parallelogrãmum ex α β, β γ eſt mediale per poſitionem. Ergo parallelogrammum ex α ε, ζ δ erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α ε ζ δ eſt æquale parallelogrammo ex α δ, δ β per quartã partem eiuſdem lemmatis. Ergo parallelogrammum ex α δ, δ ε erit etiam mediale. Et quoniam linea α ε eſt incommenſurabilis longitudine lineæ β γ: linea uerò ε γ eſt commẽſurabilis longitudine lineæ β ι, eſt ergo linea α β longitudine incommenſurabilis lineæ β ι per 13. uel 14 huius.

huius. quare & quadratum lineæ α β erit incommensurabile parallelogrammo ex α β, β ι per primum sexti & 10 huius. Sed quadrato lineæ α ε est æquale compositum ex quadratis linearum α δ, δ β. parallelogrammo uerò ex α β, β ι est æquale parallelogrammū ex α β, ζ δ, hoc est parallelogrammum ex α δ, δ β. Nam parallelogrammū ex α β, ζ δ est æquale parallelogrammo ex α δ, δ ε. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearum α δ, δ ε parallelogrammo ex eisdem lineis α δ, δ ε. Repertæ sunt ergo duæ rectæ nempe α δ, δ ε potentia incommensurabiles &c.

Principium senariorum per compositionem.

Trigesimumsextum Theorema.

Si duæ rationales potentia tantum commensurabiles cōponantur, tota linea erit irrationalis. Vocetur autem Binomium.

Componantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α ε, ε γ, quales reperire docet 11 huius.

Dico totam lineam α γ esse irrationalem. Cum enim sit incommensurabilis longitudine linea α ε, lineæ ε γ, positæ sunt enim potentia tantum commensurabiles: cumque sit sicut linea α ε ad lineā β γ, ita parallelogrāmum ex α ε, ε γ ad quadratum ε γ per 1.6. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ex α ε, ε γ quadrato lineæ β γ per 10 huius. Sed parallelogrammo ex α ε, ε γ commensurabile est id quod fit bis ex α ε, β γ per 6. huius. Ergo id quod fit bis ex α ε, β γ est incommensurabi-

le quadrato lineæ β γ per 14 huius. Quadrato autem lineæ β γ est commensurabile compositũ ex quadratis linearum α β, β γ per 16 huius, quia per suppositionem lineæ α β, β γ sunt potentia tantum commensurabiles. Ergo *per 14 compositum ex quadratis linearum α β, β γ est incommensurabile ei quod fit bis ex α β, β γ.* Ergo *per 17 id quod fit bis ex α β, β γ cum quadratis linearum α β, β γ, quod est æquale quadrato totius lineæ α γ per 4.2. est incommensurabile cõposito ex quadratis linearum α β, β γ. Sed compositũ ex quadratis linearum α β, β γ est rationale, quia est commensurabile alterutri quadrato linearum α β, β γ, quorum utrũque est rationale per positionem.* Ergo *quadratum lineæ α γ est irrationale, quare & linea α γ erit irrationalis. Vocetur autem linea illa* Binomium. Hic *autem & in cæteris deinceps denominationibus linearum irrationalium, nihil innouandum censuimus de uocibus tritis & iamdudum inter latinos geometras receptis, nisi si quãdo ratio contrarium suaserit.*

Trigesimumseptimum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes cõponantur, tota linea est irrationalis. Vocetur autem bimediale prius.

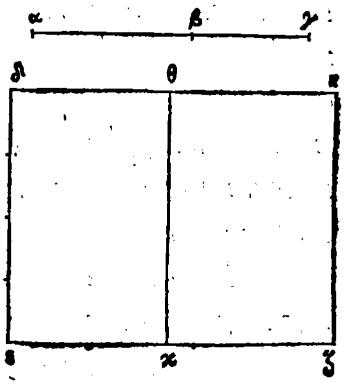
C*omponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles α β, β γ rationale continentes (quales reperire docet 28) dico totam lineam α γ esse irrationalem. sicut enim dictum*

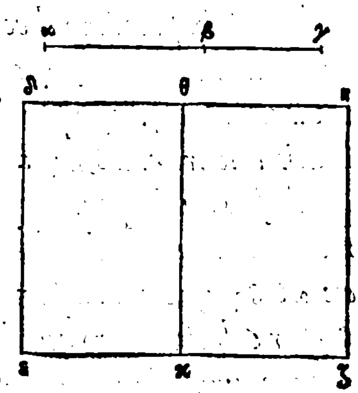
dictum est in proximo theoremate, compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per 17 huius, compositum ex quadratis linearum αβ, βγ cum eo quod fit bis ex αβ, βγ, quod est æquale quadrato totius lineæ αγ, est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Sed id quod fit bis ex αβ, βγ est commensurabile ei quod fit semel ex αβ, βγ per 6 huius. Ergo quadratum totius lineæ αγ est incommensurabile ei quod fit semel ex αβ, βγ per 14 huius. Sed per positionem id quod fit semel ex αβ, βγ est rationale. Ergo quadratum totius lineæ αγ est irrationale. Irrationalis est ergo tota linea αγ. Vocetur autem Bimediale prius.

Trigesimumoctauum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes componantur, tota linea est irrationalis, uocetur autem Bimediale secundum.

Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles αβ, βγ mediale continentes (quales docet reperire 29.) Dico totam lineã αγ esse irrationalem. Proponatur enim linea rationalis δι, & quadrato lineæ αγ æquale secundum lineam δι applicetur parallelogrãmum δζ, cuius alterũ latus





fit δη. Cum quadratū lineæ αγ fit æquale quadratis linearum αβ, βγ. & ei quod fit bis ex αβ, βγ per 4.2. applicetur secundum lineā δε quadratis linearum αβ, βγ æquale parallelogrammum εθ. Residuum *ergo parallelogrammum ζθ, est æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ.* Sed *positū est parallelogrammū ex αβ, βγ esse mediale, cui id quod fit bis ex αβ, βγ est commensurabile per 6 huius.* Ergo *per corollarium 24 theorematis id quod fit bis ex αβ, βγ. est etiam mediale.* Est *autem parallelogrammum εθ æquale quadratis linearum αβ, βγ, quæ quadrata sunt inter se commensurabilia ex suppositione.* Ergo *per 16 huius, parallelogrammum εθ erit commensurabile utrique quadrato lineæ αβ, & lineæ βγ.* Sed *illa quadrata sunt medialia, quia ex positione lineæ αβ, βγ sunt mediales.* Ergo *per corollarium 24 theorematis parallelogrammū εθ erit etiam mediale.* Ei *uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale est residuum parallelogrammū θζ.* Mediale *est ergo utrūque parallelogrammum εθ, θζ, & secundum lineam rationalem δε applicantur.* Rationalis *est ergo utraq; linearum δθ, θη, & incommēsurabilis longitudine lineæ δε, per 23.* Et *quoniam per positionem est incommensurabilis longitudine linea αβ, lineæ βγ: est autem sicut linea αβ ad lineam βγ, ita quadratum lineæ αβ ad parallelogrammum ex αβ, βγ per 1.6: incommensurabile*

est

est ergo quadratum lineæ $\alpha\beta$ parallelogrammo ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ per 10 *huius*. Sed *quadrato lineæ $\alpha\beta$ est commensurabile compositũ ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\varsigma\gamma$ per* 16, *quia quadrata linearum $\alpha\beta$, $\varsigma\gamma$ sunt commẽsurabilia, cum lineæ $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$ positæ sint potentia tantum commensurabiles*. Ergo *compositum ex quadratis linearum $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$ est incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\varsigma$, $\beta\gamma$ per* 14. P*arallelogrammo uero ex $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$ commensurabile est id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$*. Ergo *per idẽ* 14 *theorema incommensurabile est compositum ex quadratis linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ei quod fit bis ex $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$*. Ergo *eis æqualia parallelogramma $\iota\theta$, $\theta\zeta$ sunt etiam inter se incommensurabilia. quare & linea $\lambda\theta$ lineæ $\theta\kappa$ est incommẽsurabilis lõgitudine per* 1.6 & 10 *huius*. Sed *modo probatum est eas esse rationales. lineæ ergo $\lambda\theta$, $\theta\kappa$ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: quare & linea $\lambda\kappa$ est irrationalis per* 36 *huius*. Sed *parallelogrammum $\lambda\zeta$ contentum ex linea irrationali $\lambda\kappa$, & rationali $\lambda\iota$ est ipsum etiam irrationale. nam si esset rationale cum applicetur secundum lineam rationalem puta $\lambda\iota$, esset & altera linea nempe $\lambda\kappa$ etiam rationalis per* 21. *cum tamen probata sit irrationalis*. Irrationale *est ergo parallelogrammum $\lambda\zeta$. quare & linea quæ illud parallelogrammum potest, nempe $\alpha\gamma$, est etiam irrationalis*. V*ocetur autem* Bimediale *secundum*. Vo*cauit autem illam eo nomine, quia mediale est non rationale quod continetur ex illis medialibus lineis $\alpha\varsigma$, $\beta\gamma$, quarum compositione fit linea $\alpha\gamma$*. P*osterius est autem & natura & cognitione mediale rationali*.

Trigesimumnonum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur, conficientes compositum ex quadratis ipsarum rationale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum mediale, tota linea recta est irrationalis. Vocetur autem linea maior.

Componantur enim duæ rectæ potentia incommensurabiles αβ, βγ conficiẽtes

id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 33.) Dico totam lineã αγ esse irrationalem. Nam parallelogrammum ex αβ, βγ est mediale: & quod fit bis ex αβ, βγ est commensurabile ei quod fit semel ex αβ, βγ per 6 huius. Ergo per corollarium 24 huius, quod fit bis ex αβ, βγ erit mediale. Sed per positionem compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est rationale. Ergo id quod fit bis ex αβ, βγ est incommensurabile composito ex quadratis linearũ αβ, βγ. Quare per 17 compositum ex quadratis linearum αβ, βγ cum eo quod fit bis ex αβ, βγ est incommẽsurabile composito ex quadratis linearum αβ, βγ. Sed compositum ex quadratis linearũ αβ, βγ cum eo quod fit bis ex αβ, βγ est æquale quadrato totius lineæ αγ per 4.2. Compositũ uerò quod fit ex quadratis linearũ αβ, βγ est rationale per positionem. Ergo quadratũ totius lineæ αγ est irrationale. ergo tota linea αγ est etiã irrationalis. Vocetur autem linea maior. Vocauit autẽ ideo maiorem, quia compositum ex quadratis linearũ αβ, βγ quæ sunt rationalia, est maius eo quod fit bis ex

αβ,

αϐ,ϐγ ut modo dicemus. Et ſane decet fieri denominationem à conuenientia rationalium.

Lemma.

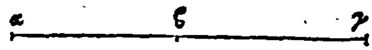
Quod autem compoſitum ex quadratis linearum αϐ,βγ ſit maius eo quod fit bis ex αϐ, ϐγ, ita demõſtretur. Primò *ma*

nifeſtum eſt lineas αϐ,ϐγ eſſe inæquales. Nam *ſi æquales eſſent, æqualia quoque eſſent quadrata linearũ αβ, βγ ei quod fieret bis ex αϐ,ϐγ. itaque ambo, compoſitũ inquam ex quadratis linearum αϐ,βγ, & id quod ex illis continetur, eſſent ſimul aut medialia aut rationalia, quod eſt cõtra poſitionem.* Ergo *inæquales ſunt lineæ αϐ,ϐγ. Sit autem per ſuppoſitionem maior linea αϐ: ſit autẽ æqualis linea βδ lineæ ϐγ.* Ergo *per 7.2. quadrata linearũ αϐ,ϐδ ſunt æqualia ei quod fit bis ex αϐ, ϐδ, & quadrato lineæ δα.* Eſt *autem æqualis δϐ lineæ βγ.* Ergo *quadrata linearum αϐ, ϐγ ſunt æqualia ei quod fit bis ex αβ,βγ, & quadrato lineæ δα. Quare quadrata linearum αβ,βγ ſunt maiora quàm id quod fit bis ex αβ,βγ, tanto quantũ eſt quadratũ lineæ δα.*

Quadrageſimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur conficientes compoſitũ ex ipſarum quadratis mediale: id uerò quod fit ex ipſis rationale, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens rationale & mediale.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽſurabiles αβ, βγ conficientes id quod dicitur in theoremate (quales *reperire docet 34.) Dico totam lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalem.*

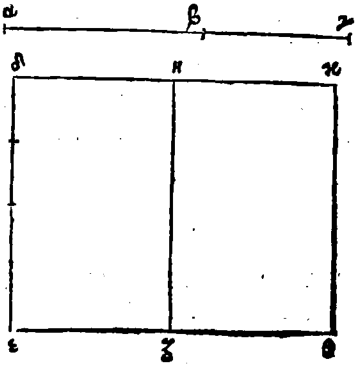


Cum enim cõpositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sit mediale: id uerò quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sit rationale. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Ergo per 17 compositum ex quadratis linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, quod est quadratũ totius $\alpha\gamma$, est incommẽsurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Sed id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est rationale, quia id quod continetur ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ positum est esse rationale. Ergo irrationale est quadratum totius lineæ $\alpha\gamma$, quare & ipsa linea $\alpha\gamma$ erit irrationalis. Vocetur autẽ potens rationale & mediale. Quam ideo sic uocauit, quia potest duas superficies, aliam quidẽ rationalem, aliam uerò medialem. Et quia rationale præcedit ordine naturæ & cognitionis, prius intulit mentionẽ ipsius rationalis. Sciendum est has rationes denominationum quæ sunt in 38. 39. & hoc theoremate, item in 41 esse additiones, quæ tamẽ ut in nonnullis conueniãt hæc certe nõ satisfacit.

Quadragesimumprimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur conficientes compositũ ex quadratis ipsarum, mediale & quod continetur ex ipsis mediale, & prætere a incommensurabile composito ex quadratis ipsarum, tota linea est irrationalis. Vocetur autem potens duo medialia.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽsurabiles $\alpha\beta$,



βγ conficiētes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 35.) Dico totam lineam αγ esse irrationalem. Proponatur linea rationalis δε, & secūdum illā quadratis linearum αβ, βγ æquale parallelogrammum δζ applicetur. Item secundum eandem lineam δε uel ei æqualem ηζ ac æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ parallelogrammum ηθ applicetur: totum ergo parallelogrammum δθ est æquale quadrato lineæ αγ per 4. 2. Et quoniam cōpositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale cui est æquale parallelogrammū δζ. Ergo mediale erit etiā δζ per ea quæ scripsimus in demonstratione 38 theorematis. ergo linea δη est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ δε per 23. Eadē ratione linea ηκ erit rationalis & incommensurabilis longitudine eidē lineæ δε. Et quoniam compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ: ergo etiam incommensurabile erit parallelogrammum δζ parallelogrammo θη. Quare & linea δη lineæ ηκ erit incommensurabilis per 1.6. & 10 huius. Sed modo probatum est illas esse rationales: sunt ergo lineæ δη, ηκ rationales potentia tantum cōmensurabiles. ergo tota linea δκ est irrationalis quæ uocatur Binomiū per 36. Sed linea δε est rationalis. ergo parallelogrammum δθ est irrationale per id quod probatum est in fine 38.

Ergo linea potens illud parallelogrammum nempe α γ erit irrationalis. Vocetur autẽ potẽs duo medialia. Hãc uerò uocauit hoc nomine, quia potest duas superficies mediales, & eam quæ componitur ex quadratis linearum α β, β γ, & eam quæ fit ex α β, β γ. Quod uerò dictæ irrationales lineæ unico modo, id est uno tantum in puncto diuiduntur in rectas lineas ex quibus componũtur, & quæ constituunt singulas species illarũ irrationalium, mox demonstrabimus, si prius demonstrauerimus huiusmodi lemma.

Lemma.

Proponatur recta linea α β, diuidatúrque in partes inæquales duas in puncto γ, iterúmq; diuidatur eadem linea α β in partes duas inæquales in alio puncto δ. Sit

autem linea α γ maior quàm linea δ β. Dico compositum ex quadratis duarum linearum α γ, γ β esse maius quàm compositum ex quadratis α δ, δ β. Diuidatur enim bifariam & æqualiter linea α β in puncto ε. & quoniam linea α γ est maior linea δ β, auferatur ab utraque ea pars quæ utriusque est communis nempe δ γ. Residua ergo linea α δ est maior residua linea γ β. Quia de duabus lineis inæqualibus quarum maior erat α γ, idem ablatum est nempe δ γ. Est autem æqualis linea α ε lineæ ε β. Ergo linea δ ε est minor linea ε γ. ergo puncta γ, δ, non æqualiter distant à puncto ε, quod est punctum sectionis in partes duas æquales. Et quoniam parallelogrammum contentum ex α γ, γ β cum quadrato lineæ γ ε est æquale quadrato lineæ ε β per 5.2.

&

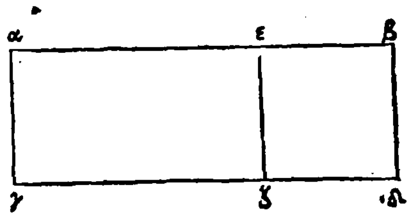
& eadem ratione parallelogrammum contentum ex $\alpha\delta,\delta\beta$ *unà cum quadrato lineæ* $\delta\iota$ *est æquale eidem quadrato eiusdem lineæ* $\iota\beta$. Ergo *parallelogrammum contentum ex* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *unà cum quadrato lineæ* $\gamma\iota$ *est æquale parallelogrammo ex* $\alpha\delta,\delta\beta$ *unà cum quadrato lineæ* $\delta\iota$*, quia quæ sunt æqualia uni tertio sunt æqualia inter se.* Sed *quadratũ lineæ* $\delta\iota$ *est minus quadrato lineæ* $\iota\gamma$*, quia linea* $\delta\iota$ *est probata minor linea* $\iota\gamma$. Ergo *& residuum nempe parallelogrammum ex* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *est minus parallelogrammo ex* $\alpha\delta,\delta\beta$*. quare & id quod fit bis ex* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *est minus eo quod fit bis ex* $\alpha\delta,\delta\beta$. Sed *per* 4. 2 *quadratum totius lineæ* $\alpha\beta$ *est æquale composito ex quadratis linearum* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\gamma,\gamma\beta$*, & eadem ratione.* Idem *quadratum totius lineæ* $\alpha\beta$ *est æquale composito ex quadratis linearum* $\alpha\delta,\delta\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\delta,\delta\beta$. Ergo *compositum ex quadratis linearum* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *est æquale composito ex quadratis linearum* $\alpha\delta,\delta\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\delta,\delta\beta$. Sed *modo probatũ est id quod fit bis ex* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *esse minus eo quod fit bis ex* $\alpha\delta,\delta\beta$. Re*siduum ergo nempe compositum ex quadratis linearum* $\alpha\gamma,\gamma\beta$ *est maius residuo nempe composito ex quadratis linearum* $\alpha\delta,\delta\beta$*, quod erat demonstrandum.*

Lemma.

R*ationale excedit rationale superficie rationali.*

S*it rationale* $\alpha\delta$ *excedẽs aliud rationale* $\alpha\zeta$*, superficie* $\iota\delta$. Dico *superficiem* $\iota\delta$ *esse etiam rationalem.* Nam *pa-*

rallelogrammũ α δ est commẽsurabile parallelogrammo α ζ. Ergo per secundam partẽ 16 huius, parallelogrammũ

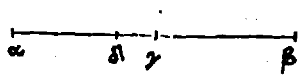


α ζ est commẽsurabile parallelogrammo ε δ. Sed parallelogrammum α ζ est rationale. Ergo etiam parallelogrammum ε δ est rationale.

Quadragesimumsecundum Theorema.

Binomium in unico tantũ puncto diuiditur in sua nomina, id est in lineas ex quibus componitur.

Sit binomium linea α β diuisa in puncto γ in sua nomina, hoc est in lineas ex quibus linea tota α β cõponitur. Ergo lineæ α γ, γ β sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles per 36. Dico lineam α β non posse diuidi in ullo alio



puncto quàm γ, in alias lineas duas rationales potentia tantum commensurabiles. Nam si contradicatur, diuidatur in pũcto δ, ita ut lineæ α δ, δ β sint duæ rationales potentia tantum commensurabiles. Primò constat neutrum illorum punctorum γ, δ diuidere lineã α β in partes æquales, alioquin essent lineæ α γ, γ β, rationales longitudine cõmensurabiles, similiter & lineæ α δ, δ β. Quælibet enim linea seipsam metitur & quãcunque aliam sibi æqualem. Præterea linea δ β uel est eadem cũ linea α γ, hoc est æqualis lineæ α γ, uel eadem maior, uel minor eadem. Si est æqualis linea δ β lineæ α γ, imposita ergo linea δ β lineæ α γ singulæ extremitates unius

tribuunt

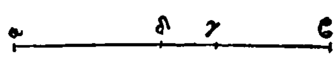
tribuũt cũ ſingulis extremitatibus alterius. Poſito *itaque puncto* β *ſuper puncto* α*, punctum etiam* δ *incidet ſuper punctum* γ*, & reſidua linea* $\alpha\delta$ *ex linea* $\alpha\gamma$ *erit etiam æqualis lineæ* $\gamma\beta$ *reſiduæ ex* $\delta\beta$. Ergo *linea* $\alpha\beta$ *diuiditur in puncto* γ*, in ſua nomina.* Sic *itaque linea* $\alpha\beta$ *diuiſa per punctum* δ*, diuiſa erit, in eodem puncto quo fuerat prius diuiſa eadem linea* $\alpha\beta$ *per punctũ* γ*, quod eſt contra hypotheſin contradicentis. nam ex poſitione erat diuiſa aliter atque aliter in punctis* γ*,* δ*. Quòd ſi linea* $\delta\beta$ *eſt maior quàm linea* $\alpha\gamma$*, diuidatur linea* $\alpha\beta$ *bifariam & æqualiter in puncto* ι*. non itaque puncta* γ*,* δ *æqualiter diſtabunt à puncto* ι. Sed *per lemma modo poſitum poſt* 41*, compoſitum ex quadratis linearum* $\alpha\delta$*,* $\delta\beta$ *eſt maius compoſito ex quadratis linearum* $\alpha\gamma$*,* $\gamma\beta$*: & compoſitum ex quadratis linearum* $\alpha\delta$*,* $\delta\beta$ *unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\delta$*,* $\delta\beta$ *eſt æquale compoſito ex quadratis linearum* $\alpha\gamma$*,* $\gamma\beta$*, unà cum eo quod fit bis ex* $\alpha\gamma$*,* $\gamma\beta$*. quia utrunque eſt æquale quadrato totius lineæ* $\alpha\beta$ *per* 4.2. Ergo *quanto compoſitum ex quadratis linearum* $\alpha\delta$*,* $\delta\beta$ *eſt maius cõpoſito ex quadratis linearũ* $\alpha\gamma$*,* $\gamma\beta$*, tanto id quod fit bis ex* $\alpha\gamma$*,* $\gamma\beta$ *eſt maius eo quod fit bis ex* $\alpha\delta$*,* $\delta\beta$*. Quod ipſum quãuis ſit indemonſtrabile, modica tamen inductione fit manifeſtius, ſi duabus lineis æqualibus propoſitis, puta quatuor pedes longis, ab altera pedes tres abſtuleris, ab altera pedes duos.* Re*ſiduum eius à qua pedes duos abſtuliſti, eſt maius quàm reſiduum eius à qua pedes tres abſtuliſti pede uno. quãto ſcilicet maiores erant pedes tres ablati quã pedes duo ablati.* Sed *compoſitum ex quadratis linearum* $\alpha\delta$*,* $\delta\beta$

excedit compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β ſuperficie rationali per lemma poſitum ante hoc theorema. Sunt enim utraq; compoſita rationalia, quia lineæ α δ, δ β, ſunt poſitæ rationales potentia tantum cõmenſurabiles, ſimiliter & lineæ α γ, γ β. Ergo etiam id quod fit bis ex α γ, γ β excedit id quod fit bis ex α δ, δ β ſuperficie rationali, cum ſint tamẽ ambo medialia per 22 huius, quod eſt impoſsibile per 27. Quòd ſi linea δ β eſt minor linea α γ, eadem uia deducitur ad idem impoſsibile. Non *igitur binomium diuidetur aliter atque aliter in ſua nomina, ſed unico tantum modo. Qui defendebant unitatem entis ex opinione* Parmenidis, *exiſtimauerunt eſſe quaſdã lineas inſecabiles, de quibus ageretur hoc theoremate & cæteris ſequentibus, quam tamen illorum opinionem* Ariſtoteles *in libello* περὶ ἀτόμων γραμμῶν, *ſeu quis alius author eius opuſculi, falſam eſſe arguit, & peruerſe ab illis intellectũ hoc theorema.*

Quadrageſimumtertium Theorema.

Bimediale prius in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.

Sit bimediale prius linea α β, diuiſa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β ſint mediales potentia tantum commenſurabiles, rationale continentes.



Dico lineam α β non poſſe diuidi in alio puncto quàm γ in ſua nomina. Quod ſi cõtradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut α δ, δ β ſint mediales potentia tantum commenſurabiles rationale continẽtes. Cum igitur tanto differat id quod fit bis ex

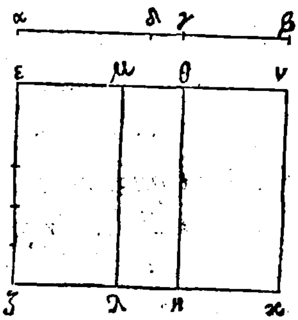
α δ,

α δ, δ β, ab eo quod fit bis ex α γ, γ ϛ, quanto differt compositum ex quadratis linearum α γ, γ ϛ, à composito ex quadratis linearum α δ, δ ϛ, & quod fit bis ex α δ, β δ differat ab eo quod fit bis ex α γ, γ ϛ, superficie rationali, sunt enim ambo rationalia. Ergo & cõpositũ ex quadratis linearum α γ, γ β differt à composito ex quadratis linearum α δ, δ β mediale inquam à mediali superficie rationali quod est impoßibile. Non igitur bimediale prius aliter atque aliter diuiditur in sua nomina, ergo unico tantum modo.

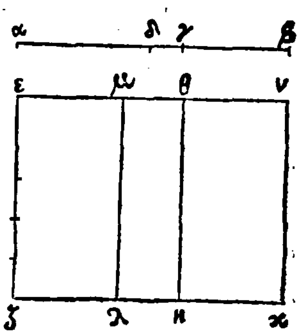
Quadragesimumquartum Theorema.

Bimediale secundum in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit Bimediale secundum linea α ϛ diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ ϛ sint mediales potentia tantum cõmẽsurabiles, mediale continentes. Manifestũ est igitur punctum γ non secare totam lineam α β bifariã & æqualiter, quia lineæ α γ, γ β non sunt longitudine inter se commensurabiles. Dico lineam α β



non posse diuidi aliter quàm in pũcto γ, in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut linea α γ ne sit eadem, hoc est ne sit æqualis lineæ δ β, sed ea maior. lineæ autẽ α δ, δ β sint mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes per te. Manifestum est primo quadrata linearũ α γ, γ ϛ esse maiora



quadratis linearū αδ, δβ per lemma positum ante 42. Pro*ponatur linea rationalis εζ, & quadrato lineæ αβ æquale secundum lineā εζ applicetur parallelogrammum εκ.* Ex *quo parallelogrammo detrahatur id quod æquale est quadratis linearum αγ, γβ, puta parallelogrammum εη.* Re*siduum ergo, nempe parallelogrammum θκ est æquale ei quod fit bis ex αγ, γβ.* R*ursus quadratis linearū αδ, δβ quæ sunt minora quadratis linearum αγ, γβ æquale detrahatur parallelogrammum ελ.* Re*siduum ergo parallelogrammum μκ, est æquale ei quod fit bis ex αδ, δβ.* Et *quoniam quadrata linearum αγ, γβ sunt medialia, ergo parallelogrammum εη erit etiam mediale, & secūdum lineā rationalē εζ applicatur rationalis.* E*st ergo linea εθ & incommēsurabilis longitudine lineæ εζ.* E*adem ratione quia parallelogrammum θκ est mediale. (nam id quod est ei æquale, nempe quod fit bis ex αγ, γβ est mediale.)* Ergo *linea θν est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ εζ.* Et *quoniam lineæ αγ, γβ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommēsurabiles.* Sed *sicut linea αγ ad lineā γβ, ita quadratū lineæ αγ ad parallelogrammum ex αγ, γβ per.1.6. ergo quadratum lineæ αγ est incommensurabile parallelogrammo ex αγ, γβ. Sed quadrato lineæ αγ est commensurabile compositum ex quadratis linearum αγ, γβ per 16. quia lineæ*

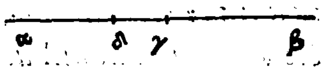
αγ,

αγ, γβ sunt potentia inter se commensurabiles. parallelogrammo uerò ex αγ, γβ est commensurabile id quod fit bis ex αγ, γϛ. Ergo compositum ex quadratis linearũ αγ, γϛ est incommensurabile ei quod fit bis ex αγ, γϛ, per corollarium à nobis additum theorematι 14. Sed cõposito ex quadratis linearum αγ, γϛ est æquale parallelogrammũ ικ, ei uerò quod fit bis ex αγ, γβ est æquale parallelogrammum θκ. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ικ parallelogrammo θκ. quare & linea ιθ, erit incommensurabilis longitudine lineæ θν. sunt autem ambæ rationales. Sunt ergo illæ lineæ ιθ, θν rationales potentia tantum commensurabiles, per lemma positũ post 19 theorema. Nam eo ipso quod sunt rationales sunt potentia saltem commẽsurabiles. Ergo tota linea ιν erit binomiũ per 36. quæ diuisa est in puncto θ, in sua nomina. Eadem uia demonstrabitur lineas ιμ, μν esse rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea ιν quæ est binomium, in alio atque alio puncto nempe θ, μ, diuiditur in sua nomina quod est impoßibile per 42. Quòd si quis dicat posse fieri ut linea ιθ sit eadem hoc æqualis lineæ μν, itaque nihil cõsequi impoßibile, neque lineam ιν quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio, atque alio puncto, sed in uno tantum. hoc etiam demonstrabimus, nempe lineam ιθ nõ esse eandẽ, hoc est æqualem lineæ μν. Nam quadrata linearũ αγ, γϛ, sunt maiora quadratis linearum αδ, δϛ per lemma positum post 41. Sed quadrata linearũ αδ, δβ sunt maiora eo quod fit bis ex αδ, δβ, per lemma positũ post 39. Ergo multo maiora sunt quadrata linearũ αγ, γϛ, hoc *est illis æquale parallelogrammũ ι κ est maius eo quod fit bis ex α δ, δ β hoc est, quàm parallelogrammum μ κ, quod est æquale ei quod fit bis ex α δ, δ β.* Ergo per 1.6. *Linea etiam ι θ erit maior quàm linea μ ν. Ergo linea ι θ non erit eadem cum linea μ ν. Quod si posueris ab initio lineam α γ esse minorem linea δ β. Idem etiam tunc impoßibile consequetur, hoc est lineam ι ν quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio atque alio puncto. Non igitur bimediale secundum in alio atque alio puncto diuiditur in sua nomina, ergo in uno tantum.*

Quadragesimumquintum Theorema.

Linea maior in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit linea maior α β diuisa in puncto γ, ita ut α γ, γ β sint potentia incommensurabiles conficiẽtes compositum ex quadratis linearum α γ, γ β, rationale, contentũ uero ex ipsis parallelogrammum mediale.



Dico lineam α β non posse diuidi in sua nomina alibi quàm in puncto γ. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ in sua nomina. Et quoniam quanto differt compositum ex quadratis linearum α γ, γ β à composito ex quadratis linearũ α δ, δ β, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β ab eo quod fit bis ex α γ, γ β per ea quæ scripsimus in demonstratione 42 theorematis. Sed compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β excedit compositum ex quadratis linearum α δ, δ β, superficie rationali. Sunt enim ambo rationalia. Ergo & id quod fit bis ex α δ, δ β excedet id quod fit bis

ex

ex α γ, γ β superficie rationali, sed illa sunt medialia. Er*go mediale excedet mediale superficie rationali, quod est impossibile per 27. Non igitur linea maior diuiditur aliter atq; aliter in sua nomina, ergo in uno tantũ puncto diuidetur.*

Quadragesimumsextum Theorema.

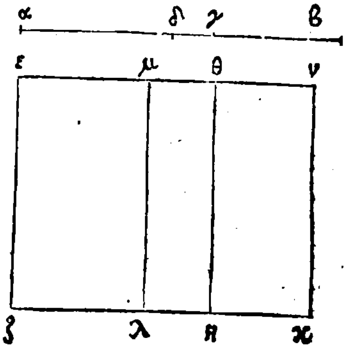
Linea potens rationale & mediale in unico tantum puncto, diuiditur in sua nomina.

Sit linea potens rationale & mediale α β, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β sint potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum α γ, γ β mediale: id autem quod cõtinetur ex α γ, γ β rationale. Di*co lineam α β in alio puncto quàm γ non posse diuidi in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, in sua nomina. Cũ igitur quanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β ab eo quod fit bis ex α γ, γ β, tanto differat compositum ex quadratis linearum α γ, γ β à composito ex quadratis linearum α δ, δ β, id autem quod fit bis ex α γ, γ β excedat id quod fit bis ex α δ, δ β, superficie, rationali quia utrunque est rationale.* Ergo *& compositum ex quadratis linearum α γ, γ β excedit compositum ex quadratis linearum α δ, δ β superficie rationali, cum tamẽ utrunque illorum sit mediale. Quod est impossibile.* Non *igitur linea potens rationale & mediale diuiditur aliter atque aliter in sua nomina.* Ergo *diuiditur tantum in puncto uno.*

Quadragesimumseptimum Theorema.

Linea potens duo medialia in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit linea potens duo medialia α ϐ, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ ϐ sint potẽtia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ mediale: similiter & quod continetur ex ipsis mediale, item contentum ex ipsis incommẽsurabile composito ex quadratis ipsarum α γ γ ϐ. Dico



lineam α ϐ non posse diuidi in alio puncto, quàm γ in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut lineæ α δ, δ ϐ conficiant ea quæ lineæ α γ, γ ϐ. Sitq; rursus ex suppositione linea α γ maior linea δ ϐ. Sit autem rationalis linea ε ζ, secundum quam applicetur parallelogrammum ε κ æquale quadratis linearum α γ, γ ϐ. ei uerò quod fit bis ex α γ, γ ϐ æquale applicetur θ κ. Totum ergo parallelogrammum ε κ est æquale quadrato lineæ α ϐ. Rursus secundum eandem lineam ε ζ applicetur æquale quadratis linearum α δ, δ ϐ parallelogrammum ε λ. Residuum ergo parallelogrammũ μ κ est æquale residuo, nempe ei quod fit bis ex α δ, δ ϐ. Et quoniam ex suppositione compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ est mediale. Est ergo parallelogrammũ illi æquale, nempe ε κ: etiam mediale & secũdum lineam rationalem ε ζ applicatur. Ergo linea ε θ est rationalis, & incommensurabilis longitudine lineæ ε ζ. Eadem ratione

&

& linea θι est etiam rationalis & incommensurabilis longitudine eidem lineæ ιζ. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ αγ, γϐ est incommensurabile ei quod fit bis ex αγ, γϐ (quia positum est esse incommensurabile ei quod fit semel ex αγ, γϐ.) Ergo parallelogrammum ικ est incommensurabile parallelogrammo θκ. quare & linea ιθ est incommensurabilis lineæ θι. Sunt autem ιθ, θι rationales. Ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea ιι est binomium per 36, & diuisa in puncto θ, in sua nomina. Similiter demonstrabimus eandem lineam ιι diuidi in puncto μ in sua nomina: nec est linea ιθ lineæ μι eadem, hoc est æqualis, ut probatum est in fine demonstrationis 44. Ergo binomium alibi atque alibi diuiditur in sua nomina, quod est impossibile per 42. Non igitur linea potens duo medialia diuiditur alibi atque alibi in sua nomina. Ergo in puncto uno tantum diuiditur.

Termini secundi siue definitiones secundæ.

Proposita linea rationali, & binomio diuiso in sua nomina, cuius binomij maius nomen, id est maior portio possit plusquam minus nomen quadrato lineæ sibi, maiori inquam nomini commensurabilis longitudine.

Siquidem maius nomen fuerit commensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea Binomium primum.

Si uerò minus nomen, id est minor portio binomij fuerit cõmensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea Binomium secundum.

Si uerò neutrum nomen fuerit commensurabile longitu-

dine propositæ lineæ rationali, uocetur binomiũ tertiũ.

Rursus si maius nomen poßit plusquã minus nomen quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, siquidem maius nomen est cõmensurabile lõgitudine propositæ lineæ rationali uocetur tota linea binomiũ quartum.

Si uerò minus nomen fuerit commensurabile longitudine lineæ rationali, uocetur binomium quintum.

Si uerò neutrum nomen fuerit longitudine commensurabile lineæ rationali, uocetur illa binomium sextum.

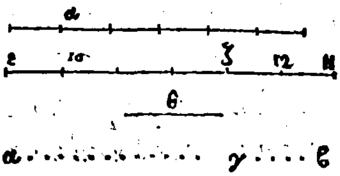
Hìc nihil dicitur de lineis illis quarũ ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali, quia lineæ tales non sunt binomia, cum scilicet illa cõponantur ex duabus rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, ut est in 36. Lineæ *uerò quarum ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali non sunt binomia, quia portiones taliũ linearum essent inter se quoque longitudine commensurabiles per 12 huius.* Ergo *non essent quales requirũtur ad compositionem binomij.* Præterea *lineæ tales nõ essent irrationales sed rationales, quia sunt commẽsurabiles singulis partibus se componẽtibus per 16.* Ergo *essent rationales quia componentes essent rationales.*

Quadragesimumoctauum Theorema.

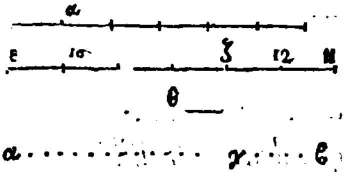
Reperire binomium primum.

Proponantur numeri duo α γ, γ ϛ tales ut compositus ex ipsis totus α ϐ ad alterum ex ijsdẽ nempe γ ϐ habeat proportionem quã numerus quadratus ad numerũ quadratum: ad alterum uerò α γ, idem α ϛ proportionẽ eam

ne



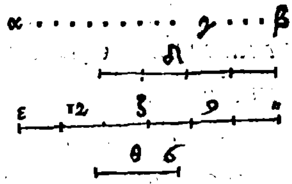
ne retineat quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, qualis est numerus quadratus diuisibilis in quadratum & non quadratũ, inquit Campanus theoremate 17. Sit autem linea rationalis α, *eiq; commẽsurabilis longitudine sit linea* ι ζ: *rationalis est ergo linea* ι ζ. *Fiat autẽ sicut numerus* α β *ad numerum* α γ, *ita quadratum lineæ* ι ζ *ad quadratum alterius lineæ quæ sit* ζ κ *per lemma repositum à nobis post 6 theorema.* Ergo *quadratum lineæ* ι ζ *ad quadratũ lineæ* ζ κ *proportionẽ habet quam numerus ad numerũ.* Quare *illa quadrata sunt commensurabilia per 6.* Est *autem linea* ι ζ *rationalis, ergo linea* ζ κ *erit etiam rationalis.* Et *quoniam numerus* β α *ad numerum* α γ *non habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque etiam quadratum lineæ* ι ζ *ad quadratum lineæ* ζ κ *habebit proportionem quã numerus quadratus ad numerum quadratum. incommensurabilis est ergo longitudine linea* ι ζ *lineæ* ζ κ. Ergo *illæ lineæ* ι ζ, ζ κ *sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Ergo *tota linea* ι κ *est binomium per 36.* Dico *præterea eandem lineam esse binomium primum.* Nam *cum sit sicut numerus* β α *ad numerum* α γ, *ita quadratũ lineæ* ι ζ *ad quadratum lineæ* ζ κ. *sitq; numerus* β α *maior numero* α γ: *maius quoq; erit quadratum lineæ* ι ζ *quadrato lineæ* ζ κ. *Sint igitur quadrato lineæ* ι ζ *æqualia quadrata linearum* ζ κ, θ *(quæ quomodo reperiantur docet lemma positũ post 14.)* Et *cum sit sicut numerus* β α *ad numerũ*



αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratū lineæ ζη. Per euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus αβ ad numerum αγ habet proportionē quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ habet etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo linea εζ erit longitudine commensurabilis lineæ θ, per 9. ergo linea εζ plus potest q̄ linea ζη quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ εζ, ζη rationales potentia tantum commensurabiles. estq; linea εζ longitudine cōmensurabilis lineæ rationali δ. ergo linea εη est binomiū primū.

Quadragesimumnonum Theorema.

Reperire binomium secundum.



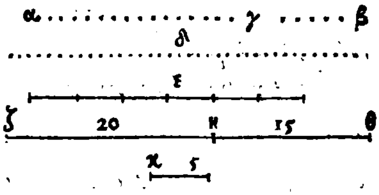
Proponantur numeri duo αγ, γβ tales ut compositus ex ipsis totus αβ ad βγ proportionem habeat quam numerus quadratus ad numerum quadratum: ad γα uerò proportionem eam ne habeat quam numerus quadratus ad numerū quadratum, ut dictum est in proximo theoremate. & proponatur linea rationalis δ, & lineæ δ sit cōmensurabilis longitudine linea ζη. rationalis est ergo linea ζη. Fiat autē sicut numerus γα ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum

alterius

alterius lineæ quæ sit ζ ι. Ergo commensurabile est quadratum lineæ ζ κ lineæ ζ ι. est ergo rationalis etiam linea ζ ι. Et quoniam numerus γ α ad numerum α β non habet proportionem quam quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ζ κ ad quadratum ζ ι habebit proportionẽ quam quadratus numerus ad quadratum. Ergo linea ζ κ est incommensurabilis longitudine lineæ ζ ι per 9. ergo lineæ ζ κ, ζ ι sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea ι κ est binomiũ. Dico præterea eandem esse binomium secundum. Cum enim per contrariam siue dicas conuersam proportionem sit sicut numerus α β ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ι ζ ad quadratum lineæ ζ κ. maior autem est numerus α β, numero α γ. maius etiam erit quadratũ lineæ ι ζ quadrato lineæ ζ κ. Sint quadrato lineæ ι ζ æqualia quadrata linearum ζ κ, θ, ut dictum est in proximo theoremate. Per euersam ergo proportionẽ sicut numerus α β ad numerum β γ, ita quadratum lineæ ι ζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus α β ad numerũ β γ habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratũ lineæ ι ζ ad quadratũ lineæ θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ι ζ erit commensurabilis longitudine lineæ θ, per 9. Quare linea ι ζ plus potest quàm linea ζ κ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sed linea ζ κ quæ est minus nomen, est commensurabilis longitudine propositæ lineæ rationali α per hypothesin. Ergo linea ι κ est binomium secundum.

Quinquagesimum Theorema.

Reperire binomium tertium.



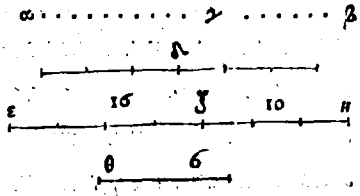
Proponatur numeri duo α β, γ β, tales ut cōpositus ex ipsis, totus α β ad numerum β γ proportionem habeat quā numerus quadratus ad quadratum, ad numerū uerò α γ proportionem ne habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponatur autē & alius numerus siue quadratus, siue non quadratus, qui sit δ, qui ad singulos α β, α γ proportionem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponaturq; linea rationalis ε & fiat sicut numerus δ ad numerum α β, ita quadratum lineæ ε ad quadratum ζ η. Commensurabile est ergo quadratum lineæ ε quadrato lineæ ζ η. Sed linea ε est rationalis: rationalis est ergo linea ζ η. & quoniam numerus δ ad numerum α β proportionem non habet quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratum lineæ ζ η proportionem eam habet quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo linea ε incōmensurabilis longitudine lineæ ζ η. Rursus fiat sicut numerus α β ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ. Commensurabile ergo est quadratum lineæ ζ η quadrato lineæ η θ. Sed linea ζ η est rationalis. ergo linea η θ erit etiā rationalis. Et quoniam numerus α β ad numerum α γ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, neq; etiam quadratum lineæ ζ η ad quadratū lineæ η θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum.

dratum. Est ergo linea ζκ longitudine incommensurabilis lineæ κθ. ergo lineæ ζκ, κθ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. tota ergo linea ζθ erit binomiũ. Dico prætereà illam esse binomium tertium. Cum enim sit sicut numerus δ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ι ad quadratũ lineæ ζκ. Sicut uerò numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ. Per æquam ergo proportionem sicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ι ad quadratũ lineæ κθ. Sed numerus δ ad numerũ αγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo quadratum lineæ ι nõ habet proportionẽ ad quadratũ lineæ κθ quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo linea ι longitudine incommensurabilis lineæ κθ per 9. Et quoniam est sicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ. Ergo quadratum lineæ ζκ est maius quadrato lineæ κθ. sint ergo quadrato lineæ ζκ æqualia quadrata linearum κθ, χ. Per euersam ergo proportionẽ sicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ χ. Sed numerus αβ ad numerum βγ habet proportionem quã quadratus numerus ad quadratum. ergo & quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ χ habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζκ est longitudine commensurabilis lineæ χ. ergo linea ζκ plus potest quam linea κθ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sunt autem lineæ ζκ, κθ rationales potentia tantum commensurabiles: & neutra est commensurabilis lon-

gitudine lineæ ι. Ergo linea ζθ est binomium tertium.

Quinquagesimumprimum Theorema.

Reperire binomium quartum.



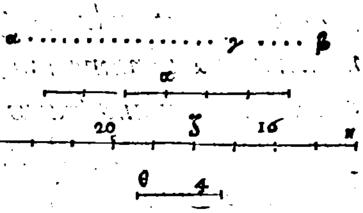
Proponantur numeri duo αγ, γβ tales ut cõpositus ex ipsis nempe αβ ad neutrũ eorum habeat proportionem quam numerus quadratus ad quadratũ (qualis est omnis numerus quadratus ad duos numeros non quadratos se minores ipsum componentes.) Sit autem linea rationalis δ, & lineæ δ sit commẽsurabilis longitudine linea εζ. est ergo rationalis εζ. Sitq; sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ εζ ad quadratũ lineæ ζη. ergo quadratum lineæ εζ est commensurabile quadrato lineæ ζη. Est ergo linea ζη rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerũ αγ proportionem nõ habet quam quadratus numerus ad quadratum: neque quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη habebit proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea εζ est longitudine incommensurabilis lineæ ζη. Ergo lineæ εζ, ζη sunt rationales potentia tantum commensurabiles, quare tota linea εη est binomium. Dico præterea eam esse binomium quartum. Cum enim sit sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη: est autem numerus βα maior numero αγ. Ergo quadratum lineæ εζ erit maius quadrato lineæ ζη. Sint ergo quadrato lineæ εζ æqualia quadrata linearũ ζη, θ.

Per

Per euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus βα ad numerum βγ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, igitur neque quadratũ lineæ εζ ad quadratum lineæ θ habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Est ergo linea εζ incommensurabilis longitudine lineæ θ. ergo linea εζ plus potest quã linea ζκ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ εζ, ζκ rationales potentia tantũ commensurabiles, estq́; linea εζ lineæ rationali λ cõmẽsurabilis lõgitudine. Ergo linea εκ est binomiũ quartũ.

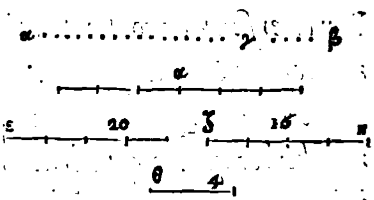
Quinquagesimumsecundum Theorema.

Reperire binomium quintum.



Proponãtur numeri duo αγ, γβ tales, ut totus αβ ad singulos αγ, γβ proportionẽ eam ne habeat quã quadratus numerus ad quadratum, sicut in proximo theoremate. Et sit linea rationalis λ: lineæ autem λ sit commensurabilis longitudine linea ζκ. Est ergo linea ζκ rationalis: sitq́; sicut numerus γα ad numerum αβ, ita quadratũ lineæ ζκ ad quadratum lineæ ζε. ergo quadratum lineæ ζκ est commensurabile quadrato lineæ ζε. Est ergo etiam linea ζε rationalis. Et quoniam numerus αγ ad numerum αβ nõ habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ζκ ad quadra-

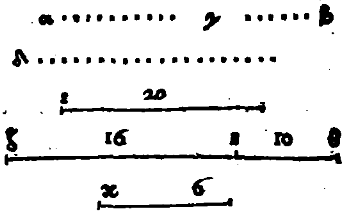
tum lineæ ζε habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ, Ergo lineæ ζκ, ζε sunt longitudine incommensurabiles. ergo lineæ ζκ, ζε sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles: ergo tota linea εκ est binomiũ. Dico *præterea eam esse binomium quintum. Cum enim sit sicut numerus αγ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ εζ.* Per *conuersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζκ.* Est *ergo quadratum lineæ εζ maius quadrato lineæ ζκ.* Sint *ergo quadrato lineæ εζ æqualia quadrata linearũ ζκ, θ.* Per *euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo neque quadratum lineæ εζ ad quadratũ lineæ θ, habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea ζε longitudine incommẽsurabilis lineæ θ. ergo linea ζε plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Sunt autem lineæ ζε, ζκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea ζκ minus nomen est, commensurabile longitudine lineæ rationali α. Ergo linea εκ est binomium quintum.*



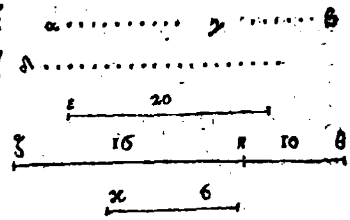
Quinquagesimumtertium Theorema.

Reperire binomium sextum.

Proponantur



Proponantur numeri duo αγ, γβ tales, ut totus αβ ad singulos αγ, γβ proportionẽ nõ habeat quam quadratus numerus ad quadratũ. Sit etiã & alius numerus δ, quique ad singulos αβ, αγ non habeat proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Sitq; linea rationalis ε: sit etiam sicut numerus δ ad numerum βα, ita quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ ζη. Ergo linea ε erit potentia commensurabilis lineæ ζη. est autem rationalis linea ε. ergo & lineæ ζη erit rationalis. Et quoniam numerus δ ad numerũ αβ non habet proportionẽ quam numerus quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ ζη habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratum. Est ergo linea ε longitudine incommensurabilis lineæ ζη. Rursus fiat sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Ergo quadrata illa sunt commensurabilia. Sed quadratum lineæ ζη est rationale: est ergo etiã quadratum lineæ ηθ rationale. Ergo & linea ηθ rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerum αγ proportionẽ nõ habet quam numerus quadratus ad quadratum: neq; quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea ζη longitudine incommensurabilis lineæ ηζ. ergo lineæ ζη, ηθ sunt rationales potentia tantũ commensurabiles. ergo tota linea ζθ erit binomium. Dico præterea eam esse binomium sextum. Cum enim sit



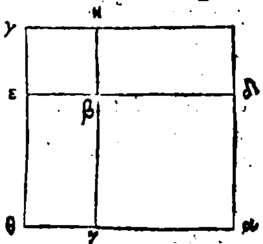
ſicut numerus δ ad numerũ βα, ita quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ ζκ. Eſt autem ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ. Per æquam ergo proportionem ſicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ κθ. Sed numerus δ ad numerum αγ non habet proportionem quam quadratus numerus ad quadratum: neq; etiam quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ κθ habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ε eſt longitudine incommenſurabiles lineæ κθ. Sed modo probatũ eſt lineam ζκ eſſe etiam longitudine incommẽſurabilem lineæ ε. Ergo ambæ lineæ ζκ, κθ ſunt incommenſurabiles longitudine lineæ ε. Et quoniam eſt ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratũ lineæ κθ. maius eſt ergo quadratũ lineæ ζκ quadrato lineæ κθ. Sint ergo quadrato lineæ ζκ æqualia quadrata linearum κθ, χ. Ergo per euerſam proportionem ſicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ χ. Sed numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo neq; quadratũ lineæ ζκ ad quadratum lineæ χ habebit proportionẽ quam numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ζκ, eſt longitudine incommenſurabilis lineæ χ. ergo linea ζκ poteſt pluſquam linea κθ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Sunt autem lineæ ζκ, κθ rationales potẽtia tantum

tum

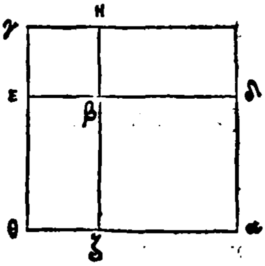
tum commensurabiles, & ambæ lineæ ζκ, κθ incommensurabiles longitudine lineæ rationali δ. Ergo *tota linea ζθ est binomium sextum.*

Lemma.

Si linea recta secetur in partes duas quocunque modo parallelogrammum rectangulum contentum ex sectionibus ambabus est medium proportionaliter inter quadrata sectionum. Et *parallelogrammum rectangulum contentum ex tota linea & altera sectione est medium proportionaliter inter quadratũ totius lineæ & quadratum dictæ sectionis.* Sint *duo quadrata αβ, βγ, ita collocata ut lineæ δβ, βε sint in eadem recta linea.* Erunt *ergo & lineæ ζβ, βκ in eadem recta linea per* 14.1. *Compleatur ergo parallelogrãmũ αγ.*



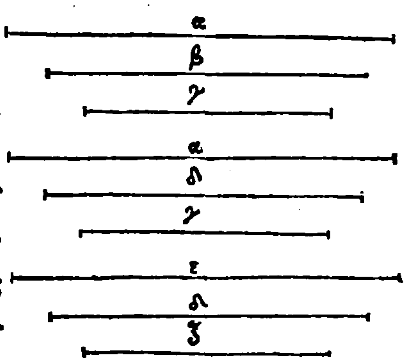
Dico *parallelogrammum rectangulum &c. ut in lemmate.* Imprimis *parallelogrammum αγ est quadratum, quia linea αβ est æqualis lineæ ζβ: linea uerò βε lineæ βκ. tota ergo linea δε est æqualis toti lineæ ζκ.* Sed *linea δε est æqualis utrique γκ, θα: linea item ζκ est æqualis utrique ακ, θγ per* 34.1. *ergo utraque linearum αθ, κγ est æqualis utrique ακ, θγ.* Ergo *parallelogrammum αγ est æquilaterum.* Est *etiam rectangulum per* 29.1. *ergo parallelogrammum αγ est quadratum.* Et *quoniam est sicut linea ζβ ad lineam βκ, ita linea δβ ad lineam βε.* Sed *sicut linea ζβ ad lineam βκ, ita parallelogrammum αβ, quod est quadratũ lineæ δβ, ad parallelogrammũ δκ per* 1.6. Sicut *autem linea δβ ad lineam βε, ita pa-*



rallelogrammum δκ ad parallelogrammũ βγ, quod est quadratũ lineæ ζκ per 1.6. Ergo sicut quadratum αζ ad parallelogrammũ δκ, ita parallelogrammum δκ ad quadratũ βγ. Ergo parallelogrammum δκ est medium proportionaliter inter quadrata αζ, βγ. Dico præterea parallelogrammum δγ esse medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. Cum enim sit sicut linea αδ ad lineam δκ, ita linea κη ad lineam ηγ. singulæ enim sunt singulis æquales. Per compositam ergo proportionem quæ probatur per 18.5, sicut linea ακ ad lineam κδ, ita linea κγ ad lineã ηγ. Sed sicut linea ακ ad lineam κδ, ita quadratum lineæ ακ, quod est quadratum αγ, ad parallelogrammum ex ακ, κδ, hoc est parallelogrammum δγ per 1.6. Sicut autem linea κγ ad lineam ηγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum lineæ ηγ, quod est quadratum βγ. Sicut ergo quadratum αγ ad parallelogrammum δγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum βγ. Ergo parallelogrammum δγ est medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. quod demonstrandum erat.

Lemma.

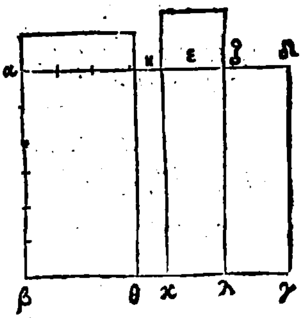
Quæ sunt media proportionaliter inter eadẽ aut æqualia sunt, ipsa quoque inter se æqualia. Sint tres magnitudines α, ζ, γ. Sitque sicut α ad ζ, ita β ad γ. sit similiter sicut eadẽ magnitudo α ad δ, ita δ ad eandẽ magnitudinẽ γ. Dico β, δ esse inter se æqualia. Nam proportio α ad γ est proportio duplicata ipsius α ad ζ per diffinitionẽ, similiter



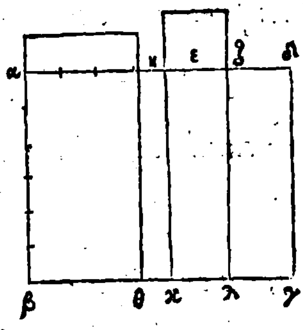
liter proportio eadē ipſius α ad γ, eſt proportio duplicata ipſius α ad δ, per eandē diffinitionē. ſed quorum æqualiter multiplicia ſunt æqualia, aut eadē ipſa quoq; ſunt æqualia. Ergo ſicut α ad β, ita α ad δ: ergo per 9.5. β, δ, ſunt inter ſe æqualia. Idē, ſi fuerint aliæ magnitudines æquales ipſis α, γ puta ε, ζ inter quas ſit media proportionalis magnitudo δ.

Quinquageſimumquartum Theorema.

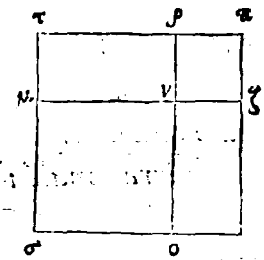
Si ſuperficies contenta fuerit ex rationali & binomio primo, linea quæ illam ſuperficiē poteſt, eſt irrationalis quæ binomium uocatur.



S*uperficies enim, αβγδ, cōtineatur ex linea rationali αβ & binomio primo linea αδ.* Dico *lineam quæ ſuperficiem αγ poteſt eſſe irrationalē illam quæ uocatur binomium. Cum enim linea αδ ſit binomium primū, diuidatur in ſua nomina in pūcto ε, ſitq; maius nomen αε, conſtat lineas αε, εδ eſſe rationales potentia tantum commenſurabiles, & lineam αε plus poſſe, quàm linea εδ quadrato lineæ ſibi cōmenſurabilis longitudine, & lineam αε eſſe longitudine cō-*

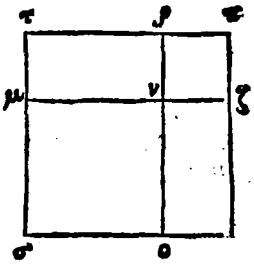


mensurabilem lineæ propositæ rationali αϐ. Diuidatur linea ιδ bifariam, & æqualiter in puncto ζ. Et quoniam linea αι plus potest quàm linea ιδ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis, si quartæ parti quadrati lineæ minoris, hoc est quadrato lineæ ιζ æquale secundum maiorẽ lineã, nempe αι applicetur, deficiẽs figura quadrata diuidet lineã maiorem, nempe αι in partes inter se longitudine commensurabiles, per secundam partem 18 huius. applicetur ergo secũdum lineam αι æquale quadrato lineæ ιζ parallelogrammum ex ακ, κι. Ergo linea ακ est longitudine commensurabilis lineæ ικ. Ducantur per puncta κ, ι, ζ alterutri linearum αϐ, δγ parallelæ κθ, ιχ, λζ per 31.1. & parallelogrammo αθ æquale quadratum construatur σν: parallelogrammo uerò κχ, sit æquale quadratum νπ, & ita describãtur, ut linea μν sit in eadem recta linea cum νξ. sunt ergo in eadẽ recta linea lineæ ρν, νο, & compleatur parallelogrammum σπ. Ergo parallelogrammũ σπ est quadratum per ea quæ dicta sunt in demonstratione lemmatis penultimi. Et quoniam parallelogrammum ex ακ, κι est æquale quadrato lineæ ιζ: Est igitur sicut linea ακ ad lineam ιζ, ita linea ιζ ad lineã κι per 17.6. Ergo per 1.6. sicut parallelogrammum αθ ad parallelo-



rallelo-

rallelogrammum ι λ, ita parallelogrammum ι λ ad parallelogrammum κ κ. Ergo parallelogrammũ ι λ est medium proportionaliter inter parallelogramma α θ, κ κ. Sed parallelogrammum α θ est æquale quadrato σ υ. parallelogrammum uerò κ κ est æquale quadrato υ π. Ergo quadratorum σ υ, υ π mediũ proportionale est ι λ, quorũ quadratorum σ υ, υ π medium quoque proportionaliter est parallelogrammum μ ϱ per lemma penultimũ. ergo μ ϱ est æquale parallelogrammo ι λ per lemma proximum ante hoc theorema. Sed parallelogrammũ μ ϱ est æquale parallelogrammo ο ξ per 43.1. parallelogrammum uerò ι λ est æquale parallelogrammo ζ γ. Totũ ergo parallelogrammum ι γ est æquale duobus parallelogrammis μ ϱ, ο ξ inter se æqualibus. Sed parallelogramma α θ, κ κ sunt æqualia quadratis σ υ, υ π. Totum ergo parallelogrammum α γ est æquale toti quadrato σ π, hoc est quadrato lineæ μ ξ. Ergo linea μ ξ potest parallelogrammum α γ. dico lineam μ ξ esse binomiũ. Cum enim linea α κ sit longitudine commensurabilis lineæ κ ι, ergo linea tota α ι est commensurabilis longitudine utrique α κ, κ ι per 16. Sed per suppositionem linea α ι est longitudine commensurabilis lineæ α β, ergo & utraque α κ, κ ι est commensurabilis longitudine lineæ α β per 12. est autem linea α β rationalis: rationalis est ergo utraque α κ, κ ι. Est ergo utrũq; parallelogrammum α θ, κ κ rationale per 20. Ergo & parallelogrammum α θ erit commensurabile parallelogrãmo κ κ. ergo & quæ sunt illis æqualia, nempe quadrata σ υ, υ π quæ sunt quadrata linearũ μ υ, υ ξ sunt rationalia & commensurabilia. Et quoniã



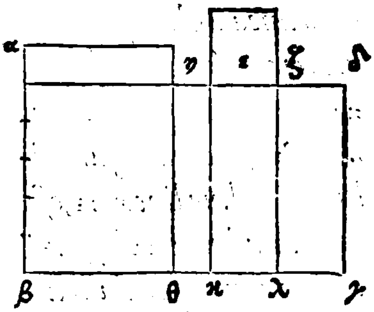
linea αι est per positionem longitudine incōmensurabilis lineæ ιλ, sed linea αι lineæ αχ est commensurabilis, ut modo probatum est: linea autem ιλ est commensurabilis lineæ ιξ. Ergo per corollariū à nobis positum post 14. linea αχ, est incommensurabilis longitudine lineæ ιζ. Quare & parallelogrammum αθ parallelogrammo ιλ est incōmensurabile. Ergo & quadratū σν est incommensurabile parallelogrāmo μρ, quia per positionem parallelogrāmum αθ est æquale quadrato σν: & parallelogrāmum ιλ probatum est æquale parallelogrammo μρ. Sed sicut quadratum σν, ad parallelogrammum μρ, ita linea ον ad lineam νρ per 1.6. ergo per 10 linea ον est incommēsurabilis lineæ νρ. est autem linea ον æqualis lineæ μν: linea autem νρ lineæ νξ. est ergo incommensurabilis linea μν lineæ νξ. Modo autem probatum est quadrata ambarum linearum μν, νξ esse rationalia & commensurabilia. Ergo lineæ μν, νξ sunt rationales potētia tantū commensurabiles. ergo linea μξ est binomium, & potest parallelogrammum αγ. quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumquintum Theorema.

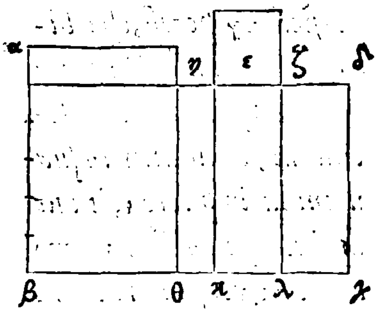
Si superficies contenta fuerit ex linea rationali & binomio secundo, linea potens illam superficiem est irrationalis quæ bimediale primum uocatur.

Superficies enim, αϐγλ, contineatur ex rationali αβ & binomio secundo, quæ sit linea αλ. Dico lineam quæ superficiem

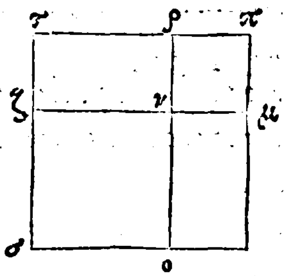
perficiem



perficiē αγ poteſt, eſſe bimediale primū. Cū enim linea αδ ſit binomium ſecūdum, diuidatur in ſua nomina in pūcto ι, ita ut maius nomen ſit αι. ergo lineæ αι, ιδ ſunt rationales tantum potentia commenſurabiles, & linea αι poteſt plus quàm linea ιδ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen nempe ιδ eſt commenſurabile longitudine lineæ αβ. Secetur linea ιδ bifariam & æqualiter in puncto ζ, & quadrato lineæ ιζ æquale ſecundum lineam αι applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod parallelogrammum ſit ex lineis αη, ηι. Ergo linea αη, eſt longitudine cōmenſurabilis lineæ ηι: & per puncta η, ι, ζ ducantur parallelæ lineis αβ, δγ, lineæ ηθ, ικ, ζλ. Et parallelogrāmo αθ æquale quadratum conſtruatur σν. parallelogrammo uerò ηκ, æquale quadratum ſimiliter cōſtruatur νπ, & ita componantur ut linea μν, & linea νξ conficiant unam lineam rectam. ergo & lineæ σν, νρ cōficiunt unā & eandem lineam, & compleatur quadratū σπ. Conſtat ex his quæ demōſtrata ſunt in proximo theoremate parallelogrammum μρ eſſe proportionaliter mediū inter quadrata σν, νπ, & æquale parallelogrāmo ιλ & lineam μξ poſſe ſuperficiē αγ. Modo ſupereſt ut demonſtremus lineam μξ eſſe bimediale primum: quoniā linea αι eſt longitudine incommenſurabilis lineæ ιδ, & linea ιδ eſt commenſurabilis longitudine lineæ αβ. eſt



ergo linea αι longitudine incommensurabilis lineæ αβ per 14. Et quoniam linea ακ est commensurabilis lõgitudine lineæ κι, est ergo tota linea αι lõgitudine commensurabilis lineæ utrique ακ, κι per 16. est autẽ linea αι rationalis, ergo utraque ακ, κι rationalis. Et quoniam linea αι est longitudine incommẽsurabilis lineæ αβ. est autem linea αι commensurabilis longitudine utrique ακ, κι, ergo lineæ ακ, κι sunt longitudine incõmensurabiles lineæ αβ. ergo lineæ αβ, ακ, κι sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. Quare utrunque parallelogrammũ αθ, κλ est mediale per 22. quare utrũque quadratum σν, νπ, est etiã mediale, ergo lineæ μν, νξ, sunt mediales. Et quoniã linea ακ est longitudine cõmẽsurabilis lineæ κι, commẽsurabile est parallelogrãmũ αθ parallelogrammo κλ per 1.6. & 10 huius, hoc est quadratum σν quadrato νπ, hoc est quadratum lineæ μν, quadrato lineæ νξ, quare lineæ μν, νξ sunt potentia cõmensurabiles. Et quoniã linea αι est longitudine incõmẽsurabilis lineæ ιδ. sed linea αι est longitudine cõmẽsurabilis lineæ ακ, linea uerò ιδ est lõgitudine commensurabilis lineæ ιζ. est ergo linea ακ incommensurabilis longitudine lineæ ιζ per corollarium 14 theorematis. Quare & parallelogrammũ αθ est incommen-



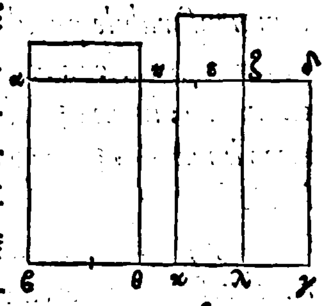
commen-

commensurabile parallelogrammo ι λ, hoc est quadratum σ ν parallelogrãmo μ ϱ, hoc est linea ο ν lineæ ν ϱ, hoc est linea μ ν lineæ ν ξ est longitudine incommensurabilis. Ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia tantum commensurabiles. Sed modo probatũ est easdem esse mediales, ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico præterea eas continere superficiem rationalem. Cum enim linea ι δ sit longitudine cõmensurabilis utrique α β, ι ζ. Est ergo linea ι ζ longitudine commensurabilis lineæ ι κ quæ est æqualis lineæ α ϛ. Est autẽ utraque linea ι ζ, ι κ rationalis. ergo parallelogrammũ ι λ est rationale per 20 huius, hoc est ei æquale parallelogrammum μ ϱ. Sed parallelogrammum μ ϱ est contentum ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo per 37 linea μ ξ est bimediale primum quod demonstrandum erat.

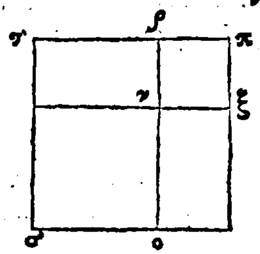
Quinquagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio tertio, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis quæ dicitur bimediale secundum.

Superficies enim α β γ δ contineatur ex rationali α β & binomio tertio linea α δ, quæ sit diuisa in sua nomina in puncto ι, quorum maius nomen sit linea α ι. Dico lineã quæ potest superficiem α γ esse irrationalem uocatã bimediale secundum. Sit enim eadem constructio figurarum quæ in proximis theorematibus. Quoniam linea α δ est binomium tertiũ lineæ α ι, ι δ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea α ι plus potest quàm linea ι δ quadrato lineæ sibi longitudine com-



mēſurabilis, & neutra linearū α ι, ι δ eſt longitudine commēſurabilis lineæ α β. Sicut in ſuperioribus eſt demonſtratū, ita hic demonſtrari poteſt lineā μ ξ poſſe ſuperficiē α γ, & lineas μ ν, ν ξ eſſe mediales potentia tantū cōmenſurabiles, itaque lineam μ ξ eſſe compoſitā ex lineis medialibus potentia tantum commenſuralibus. Reſtat *demonſtrandum eandem lineam μ ξ eſſe bimediale ſecundum, quoniam linea ι δ eſt longitudine incommēſurabilis lineæ α β, hoc eſt lineæ ι κ. ſed linea ι δ eſt commēſurabilis lōgitudine lineæ ι ζ.* Eſt ergo linea ι ζ lōgitudine incommēſurabilis lineæ ι κ. ergo lineæ ζ ι, ι κ ſunt rationales, quia ex hypotheſi lineæ ι δ eſt rationalis, cui linea ζ ι eſt commenſurabilis. Ergo lineæ ζ ι, ι κ ſunt rationales potētia tantum commenſurabiles. ergo parallelogrammum ι λ eſt mediale per 22. hoc eſt parallelogrammum μ ρ, quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo linea μ ξ eſt bimediale ſecundum.

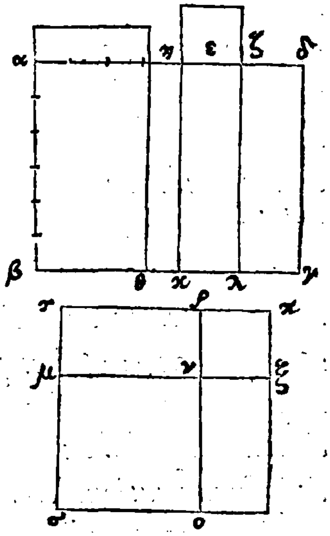


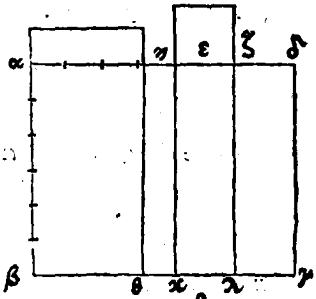
Quinquageſimumſeptimum Theorema.

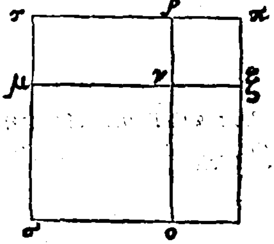
Si ſuperficies contineatur ex rationali & binomio quarto, linea potens ſuperficiem illam eſt irrationalis, quæ dicitur maior.

Superficies α γ contineatur ex linea rationali α β, & binomio quarto, linea α δ diuiſa in ſua nomina in puncto ι, ſitq;

sitq; maius nomen α ι. Dico *lineam quæ potest superficiem* α γ *esse irrationalẽ eam, quæ dicitur maior.* Cum *enim linea* α δ *sit binomium quartum, ergo lineæ* α ι, ι δ *sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & linea* α ι *plus potest quàm linea* ι δ *quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine: & linea* α ι *est longitudine cõmẽsurabilis rationali* α β. *Secetur linea* ι δ *bifariã & æqualiter in puncto* ζ, *& secũdum lineam* α ι *quadrato lineæ* ι ζ *æquale applicetur parallelogrammum ex* α η, η ι. *Ergo linea* α η *est incommẽsurabilis longitudine lineæ* η ι *per secundam partem* 19 *theorematis. Ducantur ad lineam* α β *parallelæ* η θ, ι κ, ζ λ, *& fiant cætera ut in superioribus. constat lineam* μ ξ *posse superficiem* α γ. *Nunc demõstremus illam lineã* μ ξ *esse irrationalem, quæ maior dicitur. Cum enim linea* α η *sit incommensurabilis longitudine lineæ* η ι. *ergo etiam erit parallelogrammũ* α θ *incommensurabile parallelogrammo* η κ, *hoc est quadratum* σ ν *quadrato* ν π. *ergo lineæ* μ ν, ν ξ *sunt potentia incommensurabiles. Et quoniã linea* α ι *est longitudine cõmensurabilis rationali* α β, *id est per positionẽ, parallelogrammũ* α κ *est rationale per* 20. *ergo & compositũ ex quadratis illi æqualibus, nempe* σ ν, ν π, *quæ sunt quadrata linearũ* μ ν,



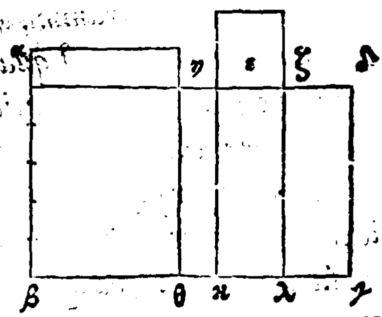




ν ξ, erit similiter rationale. & quoniam linea ι δ est longitudine incommensurabilis lineæ α β, hoc est lineæ ι κ: & linea ι δ est commensurabilis longitudine lineæ ι ζ: Ergo linea ι ζ est longitudine incommensurabilis lineæ ι κ. ergo parallelogrammũ ι λ est mediale, hoc est μ ρ, contẽtum ex lineis μ ν, ν ξ. ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositũ ex quadratis ipsarum rationale: parallelogrammum uero ex ipsis mediale. ergo tota linea μ ξ est irrationalis quæ dicitur linea maior, & potest superficiem α γ quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumoctauum Theorema.

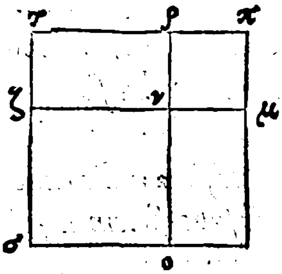
Si superficies contineatur ex rationali & binomio quinto, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis, quę dicitur potẽs rationale & mediale.



Superficies α γ contineatur ex rationali α β & binomio quinto, linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι, ita ut maius nomen sit α ι. Dico lineã quæ potest superficiem illam α γ,

esse

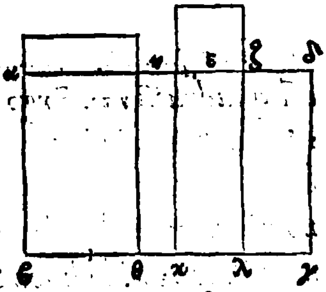
esse irrationalem, quæ dicitur potens rationale & mediale. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedẽti. Constat lineam quæ potest superficiem α γ esse μ ξ. Demonstremus illam lineam μ ξ, esse lineam potentem rationale & mediale. Cum enim linea α κ sit incommensurabilis longitudine lineæ κ ι, est etiam incommensurabile parallelogrammum α θ parallelogrammo θ ι, hoc est quadratũ lineæ μ ν, quod est quadratũ σ ν quadrato lineæ ν ξ, quod est quadratũ ν π. Ergo lineæ μ ν ν ξ sunt potentia incommensurabiles. Et quoniã linea α λ est binomium quintũ, estq; minus eius nomẽ linea ι λ illa linea ι λ, est lõgitudine cõmensurabilis rationali α β. Sed linea α ι est longitudine incommensurabilis lineæ ι λ. Ergo linea α ι est longitudine incommẽsurabilis rationali α β. ergo lineæ α β, α ι sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum α κ, est mediale hoc est compositum ex quadratis linearum μ ν, ν ξ. Et quoniam est commensurabilis longitudine linea ι λ lineæ α β, hoc est lineæ ι κ. sed linea ι λ est commensurabilis longitudine lineæ ι ζ. Ergo & linea ι ζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ι κ, & linea ι κ est rationalis. ergo & parallelogrammũ ι λ erit rationale per 20. hoc est parallelogrammum μ ρ quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo illæ lineæ μ ν, ν ξ sunt potẽtia incõmensurabiles cõficientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: parallelegrammum uerò ex ipsis rationale. Ergo tota linea μ ξ

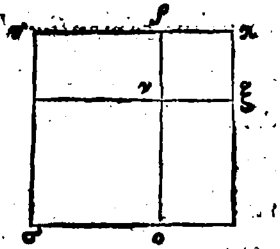


eſt irrationalis, quæ dicitur potẽs rationale & mediale: & poteſt ſuperficiem α γ. quod demonſtrandum erat.

Quinquageſimumnonum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex rationali & binomio ſexto, linea quæ illam ſuperficiem poteſt eſt irrationalis, quæ dicitur potens duo medialia.



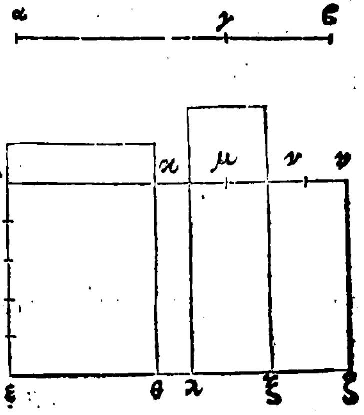


Superficies α β γ δ, contineatur ex rationali α ε, & binomio ſexto linea α δ diuiſa in ſua nomina in puncto ι, ita ut maius illius nomẽ ſit α ι: dico lineã quæ poteſt ſuperficiem α γ eſſe irrationalem eam, quæ dicitur potens duo medialia. Sint [illegible] conſtructiones quæ in præcedentibus. Manifeſtum *eſt lineã quæ poteſt ſuperficiem α γ eſſe lineã μ ξ, & lineam μ ν eſſe incommenſurabilem potentia lineæ ν ξ: & quoniam eſt incommẽſurabilis longitudine linea α ι lineæ α ε. ergo lineæ illæ α ι, α ε ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles.* Ergo *parallelogrammum α κ, hoc eſt compoſitum ex quadratis linearum μ ν, ν ξ eſt mediale.* R*urſus cum linea ι δ ſit incommẽſurabilis longitudine lineæ α ε, ergo etiam incommenſurabilis longitudine erit linea ι ζ lineæ ι κ.* Ergo *mediale erit parallelogrammum ι λ, hoc eſt μ ρ, quod cõtinetur ex μ ν, ν ξ.* Et *quoniam eſt longitudine incommẽſurabilis linea α ι lineæ*

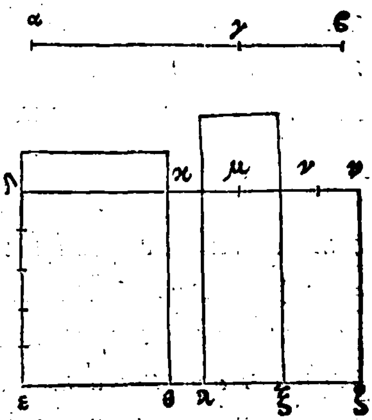
neæ ι ζ. ergo etiam parallelogrammum α κ erit incommensurabile parallelogrãmo ι λ. Sed parallelogrammũ α κ eſt æquale compoſito ex quadratis linearum μ ν, ν ξ: parallelogrammũ uerò ι λ eſt æquale ei quod fit ex μ ν, ν ξ. Ergo compoſitum ex quadratis linearũ μ ν, ν ξ eſt incommẽſurabile ei quod fit ex μ ν, ν ξ, eſtq́; mediale utrũque: & lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia incõmenſurabiles. Ergo tota linea μ ξ eſt potens duo medialia, & poteſt ſuperficiem α γ. quod demonſtrandum fuit. Hîc legitur quoddam lemma, quod quia uiſum eſt idem cũ eo quod poſtponitur 39 theoremati, ideo prætermiſimus. præterea quæ hîc affertur illius demonſtratio, cum non ſatisfaciat, ſuperiore illa, quæ & certiſsima & facillima eſt, contenti ſimus: hoc ipſum lemma perſecutus eſt Campanus poſt 35.

Sexageſimum Theorema.

Quadratum binomij ſecundum lineam rationalem applicatũ facit alterũ latus binomiũ primũ.



Sit binomium linea α β diuiſa in ſua nomina in pũcto γ, ita ut maius nomẽ ſit α γ: & proponatur linea rationalis lineæ δ ι: & quadrato lineæ α β æquale ſecundum lineam δ ι applicetur parallelogrammum δ ι, ζ κ latus alterum faciẽs lineam δ κ. Dico lineam δ κ



esse binomiũ primum. Nã *secundum lineam* δ ι *quadrato lineæ* α γ *æquale applicetur parallelogrammũ* δ θ. *quadrato autem lineæ* β γ *æquale applicetur parallelogrammum* κ λ. *Residuum ergo, nempe id quod fit bis ex lineis* α γ, γ β *est æquale residuo uidelicet parallelogrammo* μ ζ. *Secetur linea* μ κ *bifariã & æqualiter in puncto* ν. *& ducatur linea* ν ξ *parallela utriq; linearum* μ λ, κ ζ. *Vtrumuis ergo parallelogrammorũ* μ ξ, ν ζ *est æquale ei quod fit semel ex lineis* α γ, γ β. *Et quoniam linea* α β *est binomium diuisa in sua nomina in puncto* γ. *ergo lineæ* α γ, γ β *sunt rationales potẽtia tantum commensurabiles. Ergo quadrata linearum* α γ, γ β *sunt rationalia, ideóque cõmensurabilia inter se. quare & compositum ex illis quadratis linearum* α γ, γ β *est commensurabile singulis quadratis linearũ* α γ, γ β *per 16. Ergo compositum ex quadratis linearum* α γ, γ β *est rationale. est autem æquale parallelogrammo* δ λ. *ergo & parallelogrammum* δ λ *est rationale, & secundum lineam rationalem applicatur* δ ι. *Ergo linea* δ μ *est rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ* δ ι *per 21. Rursus quoniam lineæ* α γ, γ β *sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: ergo id quod fit bis ex* α γ, γ β, *nempe parallelogrammum* μ ζ *est mediale per 22. & illud parallelogrammum* μ ζ *applicatur secũdum rationalem*

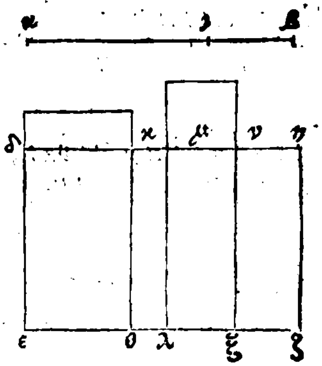
nalem

nalem μλ. est ergo linea μκ rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ μλ, hoc est lineæ δι. Est autem & linea δμ rationalis & longitudine commensurabilis lineæ δι. Est ergo linea δμ, lineæ μκ longitudine incõmensurabilis. Sunt autem ambæ rationales. sunt ergo lineæ δμ, μκ rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea δκ est binomium. Demonstremus præterea illam esse binomium primum. Nam cum quadratorum linearum αγ, γϐ sit proportionaliter medium parallelogrammum ex αγγβ per lemma positum post 53. Ergo etiam parallelogrammorum δθ, κλ, proportionaliter medium erit parallelogrammum μξ, quia singula singulis sunt æqualia. Est ergo sicut parallelogrammum δθ ad μξ, ita μξ ad κλ, hoc est sicut linea δκ ad lineam μν, ita linea μν ad lineam μκ. Ergo quadratum lineæ μν est æquale parallelogrammo ex δκ, μκ. Et quoniã quadratum lineæ αγ est cõmensurabile quadrato lineæ γϐ: ergo & parallelogrammum δθ est cõmensurabile parallelogrammo κλ. Quare & linea δκ est longitudine commensurabilis lineæ κμ per 1.6. & 10 huius. Et quoniam quadrata linearũ αγ, γβ sunt maiora eo quòd sit bis ex αγ, γβ per lemma positũ post 39. ergo & parallelogrammũ δλ est maius parallelogrammo μζ. Quare & linea δμ est maior linea μκ per. 1.6. Et est æquale parallelogrammũ ex δκ, κμ quadrato lineæ μν hoc est quartæ parti quadrati lineæ μκ, quia linea μκ diuisa est bifariam & æqualiter in puncto ν, & est linea δκ longitudine commensurabilis lineæ κμ. Ergo per 18. linea δμ plus potest quàm linea μκ quadrato lineæ sibi lon-

gitudine commensurabilis. Sunt autem & lineæ δμ, μκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea δμ, quæ est maius nomen, est longitudine commensurabilis propositæ lineæ rationali δι. Ergo linea δκ est binomium primum. quod demonstrandum erat.

Sexagesimumprimum Theorema.

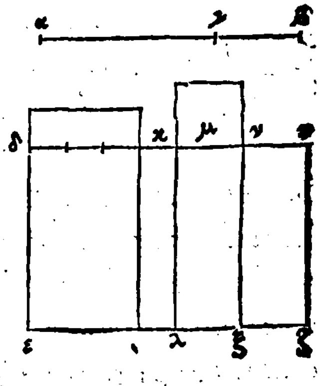
Quadratum bimedialis primi secundum rationalem lineam applicatum facit alterum latus binomium secundum.



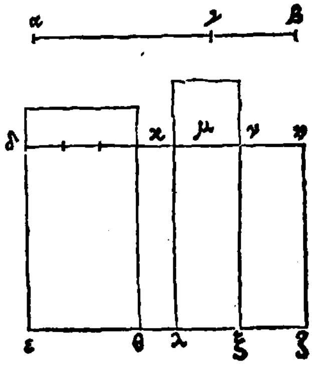
Sit bimediale primum linea αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, quorum maius nomẽ sit, αγ: & proponatur linea rationalis δι, secundũ quam applicetur æquale quadrato lineæ αβ parallelogrammũ δζ faciens alterum latus lineam δκ: dico lineã δκ esse binomiũ secundum. Sint enim eædem constructiones quæ in proximo theoremate, quoniam bimediale primum diuisum est in sua nomina in puncto γ. Quadrata linearum, αγ, γβ sunt medialia. ergo parallelogrammum δλ est etiã mediale. Est ergo rationalis linea δμ, & incommensurabilis longitudine lineæ δι per 23. Rursus quoniam id quod fit bis ex αγ, γβ est rationale, etiam parallelogrãmum μζ erit rationale. Ergo linea μκ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ μλ, hoc est lineæ δι. ergo linea δμ est longitudine incommensurabilis lineæ *μ κ, & sunt rationales: ergo lineæ δ μ, μ κ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea δ κ est binomium. demonstremus illam esse binomium secundum. Quoniam quadrata linearum α γ, γ β sunt maiora eo quod sit bis ex α γ, γ β. erit ergo parallelogrammũ δ λ maius parallelogrãmo μ ζ. quare & linea δ μ maior linea μ κ. & quoniam quadratum lineæ α ϛ est commensurabile quadrato lineæ γ ϐ, etiam parallelogrammum δ θ erit cõmensurabile parallelogrammo κ λ. quare & linea δ κ erit commensurabilis longitudine lineæ κ μ: & est parallelogrammũ ex δ κ, κ μ æquale quadrato lineæ μ ν, hoc est quartæ parti quadrati lineæ μ κ. Ergo linea δ μ plus potest quàm linea μ κ, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 18. & est linea μ κ longitudine commensurabilis lineæ rationali δ ε. ergo linea δ κ est binomium secundum.*

Sexagesimumsecundum Theorema.

Quadratum bimedialis secundi secundum rationalem applicatũ, facit alterũ latus binomiũ tertiũ.



Sit bimediale secundum linea α ϐ diuisa in sua nomina in puncto γ: ita ut maius nomẽ sit α ϛ. Sitq́; rationalis δ ε secundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrãmum δ ζ, faciẽs alterum latus lineam δ κ. dico lineam δ κ esse binomium tertium. Sint enim



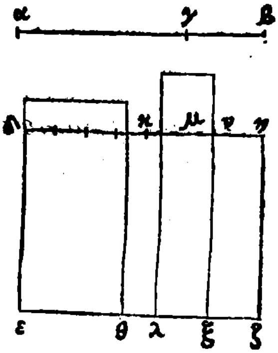
eadem constructiones, quæ in præcedentibus, quoniam linea α β est bimediale secundũ, diuisum in puncto γ in sua nomina. ergo & cõpositũ ex quadratis linearum α γ, γ β est mediale, estq́ue æquale parallelogrammo δ λ. ergo & δ λ erit mediale. ergo linea δ μ erit rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ δ ε per 23. Eadem ratione & linea μ ν erit rationalis & longitudine incõmẽsurabilis lineæ μ λ, hoc est lineæ δ ε. ergo utraque linearum δ μ, μ ν est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ δ ε. Et quoniam est incommensurabilis longitudine linea α γ lineæ γ β: & sicut linea α γ ad lineam γ β, ita & quadratum lineæ α γ ad parallelogrammũ ex α γ, γ β per 1.6. Ergo & quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. Quare & compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β est incõmensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrammum δ λ, parallelogrammo μ ζ. Quare & linea δ μ erit incommensurabilis longitudine lineæ μ ν. Sunt autẽ ambæ rationales. tota ergo linea δ ν est binomium. Demonstrandum est præterea illam esse binomium tertium. quemadmodum in superioribus, ita hic cõcludemus lineam δ μ esse maiorem linea μ ν, esséque lineam δ κ longitudine commẽsurabilem lineæ κ μ, esse etiam parallelogrammum ex δ κ, μ κ æquale quadrato lineæ μ ν. ergo & lineã δ μ plus posse quàm linea

μ ν

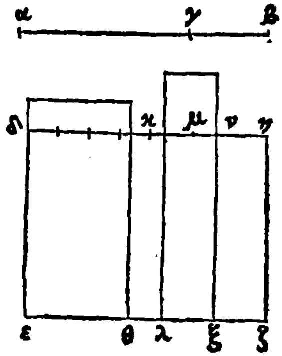
μ κ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & neutra ex λ μ, μ κ eſt longitudine commenſurabilis lineæ λ ι. ergo linea λ κ eſt binomium tertium.

Sexageſimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ maioris ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum.



Sit linea maior α β diuiſa in ſua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen ſit α γ, ſitq; rationalis λ ι, & ſecundum lineam λ ι quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum ζ λ faciens alterũ latus λ κ. dico lineam λ κ eſſe binomium quartum. Sint eædem conſtructiones quæ in præcedẽtibus. & quoniam linea α β eſt linea maior diuiſa in ſua nomina in puncto γ, lineæ α γ, γ β ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarũ rationale: id uero quod fit ex ipſis, mediale. Cum igitur compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β ſit rationale: ergo & parallelogrãmũ λ λ erit rationale. ergo & linea λ μ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ λ ι. Rurſus cum id quod fit bis ex α γ, γ β, hoc eſt parallelogrammum μ ζ ſit mediale, & ſecũdum lineam rationalem μ λ ſit applicatũ: ergo & linea μ κ erit rationalis, & longitudine incõmenſurabilis lineæ λ ι. ergo & linea λ μ erit longitudine incommenſurabilis li-



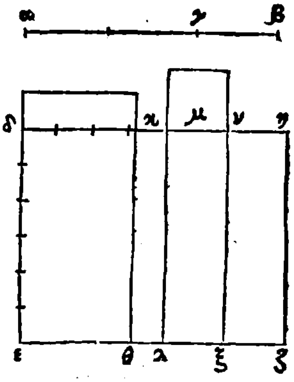
neæ μκ. ergo lineæ δμ, μκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea δκ erit binomium. Demonstrandum est illam præterea esse binomium quartũ similiter, ut in præcedentibus concludetur lineam δμ esse maiorem linea μκ. Cum igitur quadratum lineæ αγ sit incõmẽsurabile quadrato lineæ γβ. ergo & parallelogrammum δθ erit incommẽsurabile parallelogrammo κλ. Quare & linea δκ erit longitudine incommensurabilis lineæ κμ. Ergo per 19. linea δμ plus potest, quàm linea μκ quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis: suntq; lineæ δμ, μκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea δμ longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali δε. ergo tota linea δκ erit binomium quartum.

Sexagesimumquartum Theorema.

Quadratum lineæ potẽtis rationale & mediale secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quintum.

Sit linea potens rationale & mediale αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen sit αγ: sitq; rationalis δε, & secũdum lineam δε quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum δζ, faciens alterũ latus lineã δκ. dico lineam δκ esse binomium quintum. Sint eædem constructiones quæ in præcedentibus. Cum igitur linea αβ sit potẽs rationale & mediale diuisa in

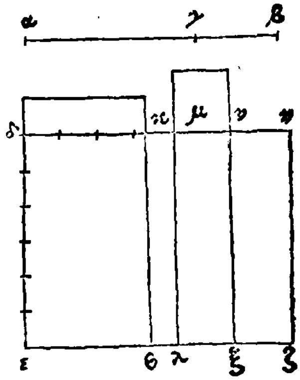
sua



sua nomina in pũcto γ, lineæ α γ, γ β sunt potentia incommensurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarum, mediale: id uerò quod fit ex ipsis, rationale. Cum igitur compositũ ex quadratis linearum α γ, γ β sit mediale, ergo parallelogrammũ δ λ erit etiam mediale. quare linea δ μ erit rationalis longitudine incommẽsurabilis lineæ δ ε. Rursus cum id quod fit bis ex α γ, γ β sit rationale, hoc est parallelogrammũ μ ζ, ergo linea μ η erit rationalis longitudine commẽsurabilis lineæ δ ε. Igitur linea δ μ est longitudine incommẽsurabilis lineæ μ η. Ergo lineæ δ μ, μ η erunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo tota linea δ η erit binomiũ. dico præterea illam esse binomium quintũ. Similiter enim demonstrabitur parallelogrammũ ex δ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ μ ν, & lineam δ κ esse longitudine incommensurabilẽ lineæ κ μ. Ergo per 19. linea δ μ plus potest quàm linea μ η quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: suntq; lineæ δ μ, μ η rationales potentia tantum cõmẽsurabiles, estq; minor linea μ η longitudine cõmẽsurabilis lineæ δ ε. ergo tota linea δ η erit binomiũ quintũ.

Sexagesimumquintum Theorema.

Quadratum lineæ potentis duo medialia secundũ rationalem applicatum, facit alterum latus binomium sextum.

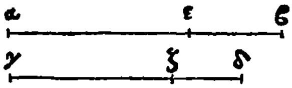


Sit linea potens duo medialia αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, sitq; linea rationalis δι, secundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrāmum δζ faciēs alterū latus δκ. dico lineā δκ esse binomiū sextum. Sint *eædem constructiones quæ in præcedentibus. quoniam linea αβ est potens duo medialia diuisa in sua nomina in puncto γ, sicut in cæteris dictum est, utrūque parallelogrammum δλ, μζ est mediale, & secundum lineā rationalem δι applicantur. ergo utraque linea δμ, μκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δι.* Et *quoniam compositum ex quadratis linearū αγ, γβ est incōmēsurabile ei quod fit bis ex αγ, γβ.* Ergo *& parallelogrammum δλ est incommensurabile parallelogrammo μζ. ergo linea δμ est longitudine incommēsurabilis lineæ μκ. ergo lineæ δμ, μκ sunt rationales potētia tantum commēsurabiles. ergo linea δκ est binomiū. dico præterea illam esse binomium sextum.* Q*uemadmodum enim in cæteris est demonstratum, ita hic etiam demonstretur parallelogrammum ex δξ, ξμ esse æquale quadrato lineæ μν, lineamq; δξ esse longitudine incō mensurabilem lineæ ξμ, itaque per* 19. *lineam δμ plus posse quàm linea μκ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. sed neutra linearum δμ, μκ est longitudine commensurabilis lineæ rationali δι. ergo tota linea δκ est binomium sextum.*

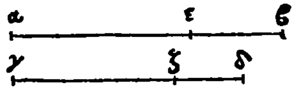
Sexa-

Sexagesimumsextum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis binomio est, & ipsa binomium eiusdem ordinis.



Sit binomium linea α β, sitq; ei longitudine commensurabilis linea γ δ. dico lineam γ δ esse etiam binomium eiusdem ordinis, cuius est & linea α β. cũ enim linea α β sit binomium, diuidatur in sua nomina in puncto ε, sitq; maius nomẽ α ε. Ergo *lineæ α ε, ε β sunt rationales potentia tantum commensurabiles, fiatq; sicut linea α β ad lineam γ δ, ita linea α ε ad lineam γ ζ per* 12. 6. Ergo *& residua ε β ad residuam ζ δ erit sicut tota linea α β ad totam lineã γ δ per* 19. 5. *Sed linea α β est longitudine commẽsurabilis lineæ γ δ. ergo etiam erit longitudine commensurabilis linea α ε lineæ γ ζ: & linea ε β lineæ ζ δ per* 10 *huius. Sunt autem lineæ α ε, ε β rationales. sunt ergo etiam rationales lineæ γ ζ, ζ δ.* Et *quoniam est sicut linea α ε ad lineam γ ζ, ita linea ε β ad lineã ζ δ. permutata ergo proportione sicut linea α ε ad lineã ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ, sed lineæ α ε, ε β sunt potentia tantum commensurabiles. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ, sunt potentia tantum commẽsurabiles per* 10 *huius. Sunt autẽ & rationales: ergo linea tota γ δ est binomium.* Dico *præterea esse binomium eiusdem ordinis cuius & linea α β. nam linea α ε plus potest quàm linea ε β quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Si primum plus potest quadrato lineæ sibi longitudine commensurabi-*



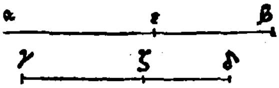
lis, ergo et linea γζ plus poterit, quàm linea ζδ, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15 huius. Et siquidem linea αε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: ergo linea γζ, quæ est longitudine commensurabilis lineæ αε, erit inquam linea γζ etiam longitudine commensurabilis eidem lineæ propositæ rationali per 12 huius, ob eamque causam utraque linea αβ, γδ est binomiū primum, hoc est utraque erit eiusdem ordinis. Si uerò linea εβ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ergo linea ζδ, quæ est longitudine commensurabilis lineæ εβ, erit etiam longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ob eamq; causam erit utraque binomiū secundum, hoc est utraque eiusdem ordinis. Si uerò neutra linearum αε, εβ est longitudine cõmensurabilis propositæ rationali, neutra etiam linearum γζ, ζδ erit eidē propositæ lineæ rationali commensurabilis longitudine per 14 huius: sic ergo utraque linea erit binomium tertium. Quòd si linea αε plus potest, quàm linea εβ quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis, ergo & linea γζ plus poterit quàm linea ζδ, quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per 15 huius. Et si quidem linea αε est longitudine commensurabilis propositæ rationali, & linea γζ erit eidem rationali longitudine commensurabilis: tunc erit utraque binomium quartū. Quòd si linea εβ fuerit rationali commensurabilis longitudine, & linea ζδ erit eidem longitudine commensurabilis: eritque hoc modo utraque binomium quintum.

Quòd

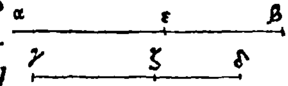
Quòd si neutra linearum α ι, ι β fuerit rationali commensurabilis longitudine, neutra etiam γ ζ, ζ δ erit eidē commensurabilis longitudine: eritq; utraque binomium sextum. Quare linea longitudine commensurabilis binomio, est etiam binomium eiusdem ordinis.

Sexagesimumseptimum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis alteri bimedialium, est & ipsa bimediale etiā eiusdē ordinis.



Sit bimediale linea α β: eidem sit alia cōmēsurabilis lōgitudine γ δ. dico lineam γ δ esse etiā bimediale eiusdem ordinis, cuius & linea α β. Diuidatur linea α β in sua nomina in puncto ι, fiatq; sicut linea α β ad lineam γ δ, ita linea α ι ad lineam γ ζ: residua ergo linea ι β erit ad lineam ζ δ sicut tota linea α β ad totam γ δ: sed linea α β est longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo & linea α ι erit longitudine commensurabilis lineæ γ ζ, & linea ι β lineæ ζ δ. Sunt autē lineæ α ι, ι β mediales. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ sunt etiā mediales per 24. Et quoniam est sicut linea α ι ad lineam ι β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: sed lineæ α ι, ι β sunt potentia tantum commēsurabiles, ergo & lineæ γ ζ, ζ δ sunt potētia tantum cōmensurabiles. sed modo probatum est eas etiam esse mediales, ergo tota linea γ δ erit etiā bimediale: dico præterea esse bimediale eiusdē ordinis, cuius & linea α β. cum enim sit sicut linea α ι ad lineā ι β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: sitq; sicut linea γ ζ ad lineā ζ δ, ita quadratū lineæ γ ζ ad ζ δ parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ per 1.6.



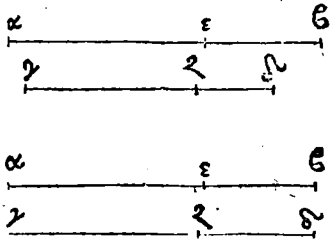
Ergo ſicut linea αε ad lineam εβ, ita quadratũ lineæ γζ ad parallelogrammũ ex γζ, ζδ per 11.5. Sed ſicut linea αε ad lineam εβ, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, εβ, per 1.6. Ergo ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, εβ, ita quadratum lineæ γζ, ad parallelogrammum ex γζ, ζδ per 11.5. permutata ergo proportione ſicut quadratũ lineæ αε ad quadratum linæ γζ, ita parallelogrammũ ex αε, εβ ad parallelogrammum ex γζ, ζδ: ſed quadratum lineæ αε eſt commenſurabile quadrato lineæ γζ, quia modo probatum eſt lineas αε, γζ eſſe commenſurabiles. Ergo parallelogrammum ex αε, εβ erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. Si ergo parallelogrãmum ex αε, εβ fuerit rationale, hoc eſt ſi linea αβ fuerit bimediale primum, parallelogrammum quoque ex γζ, ζδ erit rationale, ergo linea γδ erit etiã bimediale primum. Si uerò parallelogrammum ex αε, εβ fuerit mediale, hoc eſt ſi linea αβ fuerit bimediale ſecundum, erit etiam parallelogrammum ex γζ, ζδ mediale. Ergo etiã linea γδ erit bimediale ſecundũ, quare & ambæ erunt eiuſdem ordinis, quod demonſtrandum erat: hoc autem theorema 67. poteſt uniuerſaliter concipi. linea commẽſurabilis alteri bimedialium longitudine & ſententia ſiue ſentẽtia tantum, eſt & ipſa bimediale, etiam eiuſdem ordinis, neque eo minus uerum erit. quod ipſum, etiam eadem uia demonſtrabitur.

Sexageſimumoctauum Theorema.

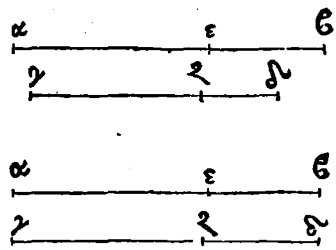
Linea cõmẽſurabilis lineæ maiori eſt & ipſa maior.

Sit

Sit linea maior α β cui ſit commenſurabilis linea γ δ quocunque modo, hoc eſt, ſiue ſit longitudine & potentia ſimul commenſurabilis, ſiue potentia tantum. Dico lineā γ δ eſſe etiam lineā maiorē.



Diuidatur linea α β in ſua nomina in puncto ε, fiantq́; cætera quemadmodum in ſuperioribus. Et quoniā eſt ſicut linea α β ad lineam γ δ: ita & linea α ε ad lineam γ ζ, & linea ε β ad lineā ζ δ. ergo ſicut linea α ε ad lineam γ ζ: ita linea ε β ad lineam ζ δ. ſed linea α β eſt commenſurabilis lineæ γ δ. ergo & linea α ε erit commenſurabilis lineæ γ ζ, & ſimiliter linea ε β lineæ ζ δ. Et quoniam eſt ſicut linea α ε ad lineā γ ζ, ita linea ε β ad lineā ζ δ. permutata ergo proportione ſicut linea α ε ad lineam ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ. ergo ſicut quadratum lineæ α ε ad quadratum lineæ ε β, ita quadratum lineæ γ ζ ad quadratū lineæ ζ δ, per 22. 6. Ergo per coniunctam proportionē (quæ probatur per 18. 5.) ſicut compoſitum ex quadratis linearū α ε, ε β ad quadratum lineæ ε β, ita compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad quadratū lineæ ζ δ. Ergo per contrariam proportionem ſicut quadratum lineæ ε β ad compoſitum ex quadratis linearum α ε, ε β, ita quadratum lineæ ζ δ ad compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ. Ergo permutata proportione ſicut quadratum lineæ ε β ad quadratum lineæ ζ δ, ita compoſitum ex quadratis linearum α ε, ε β; ad compoſitū ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ. Sed quadratū lineæ ε β eſt commēſurabile qua-



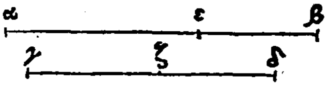
drato lineæ ζδ, quia modo probatũ eſt lineas εβ,ζδ eſſe cõmenſurabiles: ergo & cõpoſitum ex quadratis linearum αε,εβ erit commẽſurabile cõpoſito ex quadratis linearum γζ,ζδ. Sed compoſitum ex quadratis linearum αε,εβ eſt rationale per poſitionem. ergo & compoſitũ ex quadratis linearum γζ,ζδ erit etiam rationale. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita quadratũ lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε,εβ. ergo ſicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε,εβ. ſed ſicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ,ζδ: ergo ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε,εβ, ita quadratũ lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ,ζδ. ergo permutata proportione ſicut quadratũ lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammũ ex αε,εβ ad parallelogrammum γζ,ζδ. ſed quadratũ lineæ αε eſt commenſurabile quadrato lineæ γζ, quia modo probatum eſt lineas αε,γζ eſſe commenſurabiles. ergo & parallelogrammum ex αε,εβ erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ,ζδ. ſed parallelogrammũ ex αε,εβ eſt mediale per poſitionem. ergo & parallelogrammũ ex γζ,ζδ erit etiam mediale per corollarium 24. Sed (ut modo probatum eſt) ſicut linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ: linea autẽ αε erat per ſuppoſitionem potentia incommẽſurabilis lineæ εβ.

ergo

ergo per 10 & linea γζ erit potentia incommensurabilis lineæ ζδ. Ergo lineæ γζ, ζδ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. ergo tota linea γδ erit linea maior per 39 huius. ergo linea commẽsurabilis lineæ maiori erit & ipsa linea maior. In hoc theoremate 68 ideo persequuti non sumus demonstrationẽ Theonis, quia difficilior uisa est, & indigere lemmate ad id probandũ, quod pro demonstrato sumit, illis uerbis? καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αι, ιβ.

Sexagesimumnonum Theorema.

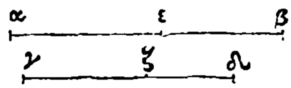
Linea cõmẽsurabilis lineæ potẽti rationale & mediale, est & ipsa linea potẽs rationale & mediale.



Sit linea potẽs rationale & mediale αβ, cui sit commensurabilis linea γδ, siue sit longitudine & potentia siue potentia tantum commensurabilis: dico etiam γδ esse lineam potentẽ rationale & mediale. Diuidatur linea αβ in sua nomina in pũcto ι: sint quoque eædem construtiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas γζ, ζδ esse potentia incõmensurabiles, sicut sunt lineæ αι, ιβ: & compositũ ex quadratis linearum αι, ιβ esse commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, ζδ: item parallelogrammum ex αι, ιβ esse commensurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. Quare & compositum ex quadratis linearũ γζ, ζδ erit etiam mediale, sicut compositũ ex quadratis linearum αι, ιβ: item parallelogrammum ex γζ, ζδ *erit etiam rationale sicut & parallelogrammũ ex* $\alpha\iota$, $\iota\beta$. *ergo linea* $\gamma\delta$ *erit etiam linea potens rationale & mediale per 40.*

Septuagesimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ potenti duo medialia, est & ipsa linea potens duo medialia.

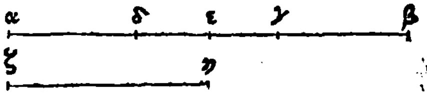


Sit linea potens duo medialia $\alpha\beta$, *eiq́; cõmensurabilis linea* $\gamma\delta$, *siue sit longitudine & potẽtia, siue potentia tantum commensurabilis: dico lineam* $\gamma\delta$ *esse etiam lineam potentem duo medialia. Diuidatur linea* $\alpha\beta$ *in sua nomina in puncto* ι*: sint quoque eædem constructiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ *esse potentia incommensurabiles, & compositum ex quadratis linearum* $\alpha\iota$, $\iota\beta$ *esse cõmensurabile composito ex quadratis linearũ* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$*: parallelogrammum uero ex* $\alpha\iota$, $\iota\beta$ *esse commẽsurabile parallelogrammo ex* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$. *quare & compositũ ex quadratis linearum* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ *erit etiam mediale: & similiter parallelogrammum ex* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ *erit mediale. Quòd autẽ compositum ex quadratis linearum* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ *sit incommẽsurabile parallelogrãmo quod fit ex* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$, *ita probatur. Cum sit enim sicut compositum ex quadratis linearum* $\alpha\iota$, $\iota\beta$ *ad quadratum lineæ* $\alpha\iota$, *ita compositum ex quadratis linearum* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ *ad quadratum lineæ* $\gamma\zeta$ *(ut probatũ est in præcedentibus.) ergo permutata proportione, sicut compositum ex quadratis linearũ* $\alpha\iota$, $\iota\beta$ *ad compositum ex quadratis linearum* $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$, *ita quadratum*

tum lineæ α ι ad quadratũ lineæ γ ζ: ſed in ſuperioribus, nempe in 68 theoremate probatum eſt, ſicut quadratũ lineæ α ι ad quadratum lineæ γ ζ, ita parallelogrammũ ex α ι, ι β ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. Ergo *ſicut cõpoſitum ex quadratis linearum α ι, ι β ad compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ, ita parallelogrammum ex α ι, ι β ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. ergo permutata proportione ſicut compoſitum ex quadratis linearum α ι, ι β ad parallelogrammum ex α ι, ι β, ita compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ.* Sed *per ſuppoſitionẽ compoſitũ ex quadratis linearum α ι, ι β eſt incommenſurabile parallelogrammo ex α ι, ι β. ergo & compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ eſt incommenſurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ.* Ergo *linea γ δ eſt potens duo medialia.*

Scholium.

Ha*ctenus dictum eſt de ſenarijs ſex, quorum primus ſenarius cõtinet generationem linearum irrationalium per compoſitionem: ſecundus diuiſionem, nempe quòd hæ diuidantur in unico tantum puncto: tertius inuẽtionem binomiorum, primi inquam, ſecundi, tertij, quarti, quinti & ſexti, poſt quem incipit quartus ſenarius continẽs differentiam linearum irrationalium inter ſe.* N*am ex uſu ſingulorum binomiorum demonſtrantur differentiæ irrationalium.* Q*uintus autem docet de applicationibus quadratorum cuiuſq; lineæ irrationalis, ex qualibus ſcilicet irrationalibus ſint latitudines cuiuſque ſuperficiei applicatæ.* In *ſexto uerò ſenario dicitur ſingulas lineas ſingulis irrationalibus commenſurabiles, eſſe* *etiam ipſas irrationales eiuſdem ſpeciei. Mox uero dicetur de ſeptimo ſenario, in quo reliquæ ipſarũ rurſus inter ſe differẽtiæ dilucide pertractantur. Exiſtit etiam in illis ipſis lineis irrationalibus proportionalitas arithmetica. eáque linea quæ ſumitur media proportionaliter ſecundum medietatem arithmeticam inter nomina cuiuſque lineæ irrationalis ſimiliter eſt irrationalis eiuſdẽ ſpeciei. Prius autem conſtat proportionalitatẽ arithmeticã inter illa nomina reperiri. Sit enim linea* $\alpha\beta$ *quæcunque ex dictis irrationalibus. uerbi gratia, ſit binomiũ, diuidaturq́; in ſua nomina in puncto* γ: *ſitq́; maius nomẽ* $\alpha\gamma$, *de quo auferatur linea* $\alpha\delta$ *æqualis minori nomini, nempe* $\gamma\beta$: *diuidaturq́; linea* $\gamma\delta$ *bifariã & æqualiter in puncto* ε: *manifeſtum eſt lineam* $\alpha\varepsilon$ *eſſe æqualem lineæ* $\varepsilon\beta$. *Sit alterutri earũ æqualis linea* $\zeta\eta$, *manifeſtũ eſt, quanto differt linea* $\alpha\gamma$ *à linea* $\zeta\eta$, *tanto eandem lineam* $\zeta\eta$ *differre à linea* $\gamma\beta$. *utrobique enim eſt differentia* $\delta\varepsilon$ *uel* $\varepsilon\gamma$, *quod eſt propriũ arithmeticæ proportionalitatis. Conſtat autem lineam* $\zeta\eta$ *eſſe commenſurabilem longitudine lineæ* $\alpha\beta$, *quia eſt eius dimidia quare per 66 linea* $\zeta\eta$ *erit etiam binomium, eodémque modo demonſtrabitur de cæteris irrationalibus. Totum hoc ſcholium non reperitur in uetuſto.*

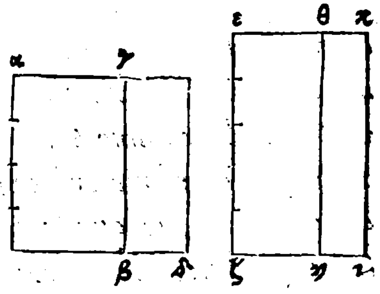


Septuageſimumprimum Theorema.

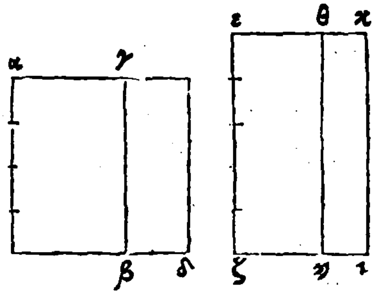
Si duæ ſuperficies rationalis & medialis ſimul cõponantur, linea quæ totam ſuperficiem compoſitam

tam poteſt, eſt una ex quatuor irrationalibus, uel ea quę dicitur binomiũ, uel bimediale primũ, uel linea maior, uel linea potẽs rationale & mediale.

Sint duæ ſuperficies, altera rationalis α β, altera uerò medialis ſit γ δ. Dico lineam potẽtem ſuperficiẽ α δ, eſſe uel binomiũ, uel bimediale primũ, uel lineam maiorem uel lineã

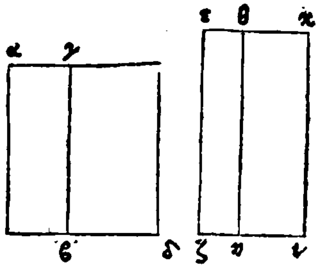


potentem rationale & mediale. Nam *ſuperficies α β, eſt uel maior uel minor ſuperficiè γ δ: nã æquales eſſe nullo modo poſſunt, cũ alia ſit rationalis, alia uerò medialis. Sit prius ea maior proponaturq; linea rationalis ε ζ, ſecundũ quam æqualis ſuperficiei α β, applicetur ſuperficies parallelogramma rectangula ε η, faciens alterum latus ε θ: ſuperficiei autem γ δ æqualis ſecundum eandẽ lineam ε ζ, hoc eſt ſecũdum lineam θ η applicetur parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ. Cum ſuperficies α β ſit rationalis, etiã parallelogrammum ε η erit rationale: ergo & linea ε θ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ ε ζ per* 21. R*urſus eadem ratione linea θ κ erit rationalis & longitudine incommẽſurabilis lineæ ε ζ per* 23. *& quoniam ſuperficies α β eſt rationalis, ſuperficies uerò γ δ eſt medialis, ſuperficies α β, hoc eſt parallelogrãmum ε η, eſt incõmenſurabile ſuperficiei γ δ: hoc eſt parallelogrãmo θ ι.* Ergo per 1.6 *&* 10. *huius linea ε θ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ θ κ: ergo lineæ ε θ, θ κ ſunt rationales potẽtia tantum*



cõmensurabiles. ergo tota linea ε κ est binomiũ diuisum in sua nomina in pũcto θ. sed superficies α ϐ est maior superficie γ δ, hoc est parallelogrammũ ε κ parallelogrammo θ ι. ergo linea ε θ est maior linea θ κ. sed linea ε θ plus potest quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõmẽsurabilis. Prius *autem possit plus ea quadrato lineæ sibi commensurabilis: est autem linea ε θ longitudine cõmẽsurabilis lineæ rationali ε ζ, (ut modo probatum est) ergo linea ε κ est binomiũ primum.* Ergo *per* 54 *linea potens superficiem ε ι est binomium, quare & linea potens superficiem α δ est binomium.* Sed *secundo loco linea ε θ plus possit quàm linea θ κ, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq́; maius nomen linea ε θ commensurabile longitudine lineæ rationali ε ζ, ergo linea ε κ est binomium quartum. sed linea ε ζ est rationalis, ergo per* 57 *linea potẽs superficiẽ ε ι, est linea maior: quare & linea potens superficiem α δ, est linea maior.* Rur*sus superficies α β, quæ est rationalis, sit minor superficie γ δ, quæ est medialis, hoc est parallelogrammum ε κ parallelogrammo θ ι.* Q*uare & linea ε θ erit minor linea θ κ: linea uero θ κ plus potest quàm linea ε θ, uel quadrato lineæ sibi longitudine cõmẽsurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis.* Prius *possit plus ea quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, est*

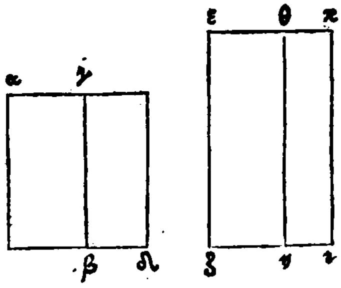
autem



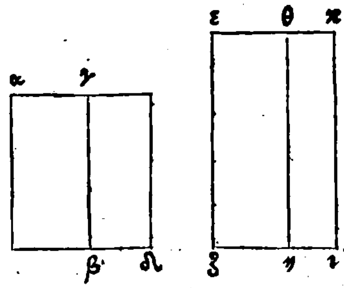
autẽ minus nomen, nempe ε θ cõmensurabile longitudine rationali lineæ rationali ε ζ, ut modo probatum est: ergo linea ε κ est binomiũ secundum. Ergo per 55 linea potens parallelogrammũ ε ι, hoc est parallelogrammum α δ, est bimediale primũ. Sed linea θ κ plus possit quàm linea ε θ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq́; minus nomẽ ε θ commensurabile longitudine lineæ rationali ε ζ, ergo linea ε κ est binomium quintum. ergo per 58 linea potens parallelogrammum ε ι, hoc est ei æquale α δ, erit linea potens rationale & mediale. Ergo si duæ superficies rationalis & medialis &c.

Septuagesimumsecundum Theorema.

Si duæ superficies mediales incommensurabiles simul componantur, fiunt reliquæ duæ lineæ irrationales, uel bimediale secundum, uel linea potẽs duo medialia.



Componantur duæ superficies mediales incommensurabiles inter se α β, γ δ. dico lineam potentem superficiem α δ esse uel bimediale secundum, uel lineam potentẽ duo medialia. Nã superficies α β est uel maior uel minor superficie γ δ (æquales enim esse



nullo modo possunt, cum sint incommensurabiles.) Sit ergo prius superficies αβ maior superficie γδ, proponaturq; linea rationalis εζ secundũ quam æquale superficiei αβ applicetur parallelogrammum εη, faciens alterum latus εθ: superficiei uerò γδ applicetur æquale parallelogrammum θι, faciens alterum latus θκ: & quoniam utraque superficies αβ, γδ est medialis: hoc est utrũque parallelogrammum εη, θι, ergo utraque linea εθ, θκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ εζ. Et quoniam superficies αβ, γδ sunt incommensurabiles, ergo est etiam incommensurabile parallelogrammum εη parallelogrammo θι. ergo & lineæ εθ, θκ, sunt longitudine incommẽsurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. Ergo linea, εκ, est binomium: similiter autem ac in proximo theoremate demonstratur lineam εθ esse maiorẽ linea θκ, quæ linea εθ plus potest, quàm linea θκ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis. Poßit prius plus quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: neutra autem linearũ εθ, θκ est longitudine cõmensurabilis lineæ rationali εζ: ergo linea εκ est binomium tertium. ergo per 56. linea potens parallelogrammum ει, hoc est ei æquale αδ est bimediale secundũ. Sed linea εθ poßit plus, quàm linea θκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, est autem utraq; εθ, θκ

longitudine

longitudine incommensurabilis lineæ rationali ιζ: ergo linea ικ est binomium sextum. Ergo *per 59 linea potens parallelogrammũ ιλ, hoc est αδ est linea potens duo medialia.* Eadem *ratione si superficies αϛ fuerit minor superficie γδ, demonstrabimus lineam potentem superficiem αδ, esse uel bimediale secundum uel lineam potentem duo medialia.* Ergo *si duæ superficies mediales &c. binomium & cæteræ consequentes lineæ irrationales neque sunt eadẽ cum linea mediali, neque ipsæ inter se.*

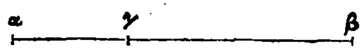
Nam *quadratum lineæ medialis applicatum secundũ lineam rationalem, facit alterum latus lineam rationalem, & longitudine incommensurabilem lineæ, secũdum quam applicatur, hoc est lineæ rationali per 23. Quadratum uero binomij secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium primum per 60. Quadratum uero bimedialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ secũdum per 61. Quadratum uerò bimedialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium tertium per 62. Quadratum uerò lineæ maioris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum per 63. Quadratum uerò lineæ potentis rationale & mediale secũdum rationalem applicatũ, facit alterum latus binomium quintum per 64. Quadratum uero lineæ potentis duo medialia secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ sextum per 65. Cũ igitur dicta latera, quæ latitudines uocantur, differant, & à prima latitudine quoniam est rationalis, cum inter se quoque differant, eo quia sunt* *binomia diuersorum ordinum: manifestum est ipsas lineas irrationales differentes esse inter se.*

Secundus ordo alterius sermonis, qui est de detractione.

Principium senariorum per detractionem.

Septuagesimumtertium Theorema.

Si de linea rationali detrahatur rationalis potentia tantum commensurabilis ipsi toti, residua est irrationalis. Vocetur autem residuum.



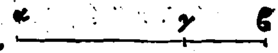
De *rationali αβ detrahatur rationalis ϛγ, potẽtia tãtũ commensurabilis toti αβ. dico residuam αγ esse irrationalem, quæ uocetur residuum. cum enim linea αβ sit lõgitudine incõmensurabilis lineæ βγ, sitq; sicut linea αϛ ad lineam βγ, ita quadratũ lineæ αβ ad parallelogrãmum ex αϛ, ϛγ: ergo quadratum lineæ αβ erit incõmensurabile parallelogrãmo ex αϛ, βγ. sed quadrato lineæ αϛ sunt commensurabilia quadrata linearũ αϛ, βγ per* 16. E*rgo quadrata linearũ αβ, βγ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex αβ, βγ per* 14. *sed parallelogrammo ex αβ, βγ commẽsurabile est ei quod fit bis ex αϛ, ϛγ.* E*rgo quadrata linearum αβ, ϛγ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex αϛ, ϛγ. sed quadrata linearũ αβ, βγ sunt æqualia ei quod fit bis ex αϛ, βγ, & quadrato lineæ αγ, per* 7.2. *ergo id quod fit bis ex αϛ, ϛγ, cum quadrato lineæ αγ, est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, ϛγ.* E*rgo per secundam partem* 17 *id quod*

fit

fit bis ex α β, ϛ γ est incõmensurabile quadrato lineæ α γ. ergo per primam partem eiusdem 17 id quod fit bis ex α ϛ, ϛ γ cum quadrato α γ, hoc est illi toti æqualia quadrata linearum α ϛ, β γ sunt incommensurabilia quadrato lineæ α γ. Hoc *breuius cõcluditur per corollarium à nobis demonstratum post 17. sed quadrata linearum α ϛ, ϛ γ sunt rationalia, quia lineæ α β, ϛ γ positæ sunt rationales. ergo linea α γ est irrationalis: uocetur autẽ residuum.* Hoc *uero theorema nihil aliud dicit, quàm portionem eam maioris nominis ipsius binomij, quæ remanet post detractionem minoris nominis de maiori, esse irrationalem: quæ uocatur residuum, hoc est si de maiori nomine ipsius binomij, quod maius nomen est linea rationalis potentia tantum commensurabilis minori nomini, detrahatur minus nomen, quod ipsum est etiã cõmensurabile potentia tantũ maiori nomini (quod maius nomen hoc theorema uocat lineam totam) residuã lineam esse irrationalem, quam uocat residuum.* Itaque *omnes lineæ, de quibus agitur hoc theoremate, & cæteris quinque consequẽtibus, sunt reliquæ portiones maiorum nominum totarum linearum, de quibus actum est 36. 37. 38. 39. 40 & 41 post detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuagesimumquartum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum cõmensurabilis toti lineę, quæ uero detracta est cũ tota cõtineat superficiẽ rationalẽ, residua est irrationalis. uocetur autẽ residuũ mediale primũ.

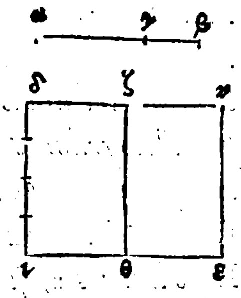


De linea mediali α β detrahatur medialis β γ potentia tantum commẽsurabilis toti α β, quæ scilicet β γ cũ α β contineat rationale, nempe parallelogrammũ ex α β, β γ. Dico reliquã α γ esse irrationalem. Vocetur autem residuum mediale primum. Nam cum lineæ α β, β γ sint mediales, quadrata illarum erunt medialia. sed quod fit bis ex α β, β γ est rationale: ergo cõpositum ex quadratis linearũ α β, β γ hoc est id quod fit bis ex α β, β γ, cum quadrato lineæ α γ est incommensurabile ei quod fit bis ex α β, β γ. Ergo per secũdam partem 17. id quod fit bis ex α β, β γ, est incommẽsurabile quadrato lineæ α γ. sed id quod fit bis ex α β, β γ est rationale. ergo quadratum lineæ α γ est irrationale. ergo & linea α γ irrationalis. Vocetur autẽ residuum mediale primum. Est etiam hoc residuum mediale primũ, residua portio maioris nominis bimedialis primi, post detractionem minoris nominis de maiori: unde & denominationem habet residuum mediale primum.

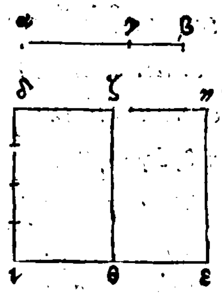
Septuagesimumquintum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum commensurabilis toti, quæ uero detracta est cum tota contineat superficiem medialem, reliqua est irrationalis. Vocetur autem residuum mediale secundum.

De linea mediali α β, detrahatur medialis β γ potentia tantum commensurabilis toti α β, cum tota uerò α β continens superficiem medialem, nempe parallelogrammum ex α β, β γ: dico reliquã α γ esse irrationalẽ. Vocetur autem



tem residuũ mediale secundũ. proponatur linea rationalis δι, & secundum illam quadratis linearum αβ, βγ æquale applicetur parallelogrammum δε, faciẽs alterum latus δκ. Ei *uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale secũdum eandem lineam δι, applicetur parallelogrammum δθ faciens alterum latus δζ. parallelogrammum δθ est minus parallelogrãmo δε: quia & quadrata linearum αβ, βγ sunt maiora eo quod fit bis ex αβ, βγ tanto, quantũ est quadratum lineæ αγ per 7. 2.* Ergo *& residuum nempe parallelogrammũ ζε, erit æquale quadrato lineæ αγ.* Et *quoniam quadrata linearum αβ, βγ sunt commensurabilia & medialia: ergo compositum ex ipsis parallelogrammum δε, erit utrique quadrato commẽsurabile per* 16. *ergo & parallelogrammum δε, erit etiam mediale per corollarium* 24 *theorematis. ergo per* 23 *linea δκ erit rationalis longitudine incõmensurabilis lineæ δι.* Rur*sus cum id quod fit ex αβ, βγ sit mediale: etiam id quod fit bis ex iisdem αβ, βγ erit mediale. ergo & illi æquale parallelogrammũ δθ erit mediale.* Ergo *& linea δζ erit rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ δι.* Et *cum linea αβ sit longitudine incommensurabilis lineæ βγ, ergo quadratum lineæ αβ erit incommẽsurabile parallelogrammo ex αβ, βγ per* 1. 6 *&* 10 *huius.* Sed *quadrato lineæ αβ sunt commensurabilia quadrata linearũ αβ, βγ, parallelogrammo uero ex αβ, βγ est commensurabile id, quod fit bis ex αβ, βγ. ergo quadra-*



ta linearum αβ, βγ, hoc est parallelogrammum δι est incommẽsurabile ei, quod fit bis ex αβ, βγ, hoc est parallelogrãmo δθ: sed sicut parallelogrammum δι ad parallelogrammum δθ, ita linea δκ ad lineam δζ. Ergo linea δκ, est longitudine incõmẽsurabilis lineæ δζ: sunt autẽ ambæ rationales. Ergo linea ζκ est residuum per 73. sed linea δι est rationalis: parallelogrammum uerò contentum ex linea rationali & irrationali est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demonstrationis 38. Ergo parallelogrammum ζι, est irrationale: ergo & linea αγ, quæ illud parallelogrã mum potest est irrationalis. Vocatur autem residuũ mediale secundum: estq; hoc residuum mediale secundum, reliqua portio maioris nominis ipsius bimedialis secundi post detractionem minoris nominis de maiori.

Septuagesimumsextum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti, compositum autẽ ex quadratis totius lineæ & lineæ detractæ sit rationale: parallelogrammum uerò ex iisdem contentum sit mediale, reliqua linea erit irrationalis: uocetur autem linea minor.

De linea recta αβ, detrahatur recta βγ potentia incommensurabilis toti αβ, cuius totius inquam αβ quadratum cum quadrato lineæ βγ sit rationale. Contentũ uero ex αβ,

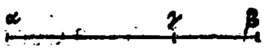
βγ

β γ sit mediale, dico residuam lineam α γ esse irrationalem, quæ uocetur minor. Cum enim compositũ ex quadratis linearum α β, β γ sit rationale, id uerò quod fit bis ex α β, β γ sit mediale: ergo quadrata linearum α β, β γ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex α β, β γ. ergo & reliquo quadrato scilicet lineæ α γ, erunt incommensurabilia quadrata linearum α ζ, ζ γ, sicut dictum est in 73. sed quadrata linearum α β, ζ γ sunt rationalia. ergo quadratum lineæ α γ erit irrationale, & linea α γ irrationalis: uocetur autẽ linea minor, ideo sic dicta, quia est reliqua portio maioris nominis lineæ maioris post detractionem minoris nominis de maiori.

Septuagesimumseptimum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractę sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem contentum sit rationale, reliqua linea est irrationalis: uocetur autẽ linea facies cum superficie rationali totam superficiem medialem totum mediale.

De linea recta α β, detrahatur recta β γ potentia incommẽsurabilis toti



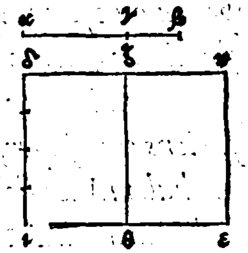
lineæ α β, ex quadratis quarum scilicet α γ, ζ γ compositum sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem sit rationale. dico reliquã lineam α γ esse irrationalẽ, quæ uocetur linea faciens cum superficie rationali totam superficiem medialem. Cum enim compositũ ex quadratis linearũ α ζ, β γ sit mediale, id uerò quod fit bis ex α ζ,

βγ sit rationale. Ergo compositum ex quadratis linearum αβ, βγ erit incommẽsurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo & reliquum nempe αγ erit incommensurabile ei, quod fit bis ex αβ, βγ per 17. Est autem id quod fit bis ex αβ, βγ rationale, ergo quadratum lineæ αγ erit irrationale, & linea αγ irrationalis. Vocetur autem faciẽs cum superficie rationali totam medialem: ideo sic dicta, quia compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale, & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex αβ, βγ existens & ipsum rationale. Nam quadrata linearũ αβ, βγ sunt æqualia ei quod fit bis ex αβ, βγ, & quadrato lineæ αγ per 7.2. aut ideo sit dicta est, quia quadratum eius iunctum cum superficie rationali facit totã superficiem medialem, ut intelligetur ex theoremate 109. In hac autem linea denominanda recessimus à uoce recepta Campano, qui hãc lineã uocauit, iunctam cum rationali componentem totum mediale: idem faciemus in proximo theoremate, quia denominationes illæ Campani non satis conuenientes rebus ipsis esse uisæ sunt.

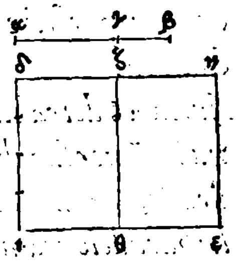
Septuagesimumoctauum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractæ sit mediale, parallelogrammum uerò ex eisdem sit etiam mediale: præterea sint quadrata ipsarum incommẽsurabilia parallelogrammo ex iisdem, reliqua linea est irrationalis: uocetur autem linea faciens cum

cum superficie mediali totam superficiem medialem.



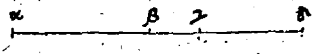
De linea αϐ detrahatur recta ϐγ potentia incõmensurabilis toti αϐ ex quadratis, quarum compositũ sit mediale: parallelogrammũ quoque exeisdem sit mediale. præterea compositũ ex quadratis linearum αϐ, ϐγ sit incommensurabile parallelogrammo ex αϐ, ϐγ, dico lineã reliquam αγ esse irrationalem. Vocetur autem faciens cum mediali superficie totam medialẽ. Proponatur linea rationalis δι, secũdum quam quadratis linearum αϐ, ϐγ, æquale applicetur parallelogrammũ δκ faciẽs alterum latus δκ: ei uerò quod fit bis ex αϐ, ϐγ æquale applicetur δθ faciens alterum latus δζ, residuum ergo ζκ erit æquale residuo, nempe quadrato lineæ αγ. quare linea αγ potest parallelogrammum ζκ. Et quoniam compositum ex quadratis linearum αϐ, ϐγ, hoc est δκ est mediale, ergo linea δκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δι. Rursus cum id quod fit bis ex αϐ, ϐγ, hoc est δθ sit mediale: ergo & linea δζ erit rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δι. Et quoniam quadrata linearum αϐ, ϐγ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex αϐ, ϐγ: ergo incommensurabile etiam erit δκ ipsi δθ. Ergo linea δκ erit incommensurabilis lineæ δζ: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ δκ, δζ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo ζκ erit residuum per 73. Sed linea ζθ est rationalis, quia æqualis rationali δι: parallelogrammum



uerò cõtentum ex linea rationali & irrationali, nẽpe ζι, est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demõstrationis 38. ergo linea αγ, quæ illud potest, erit irrationalis: uocetur autẽ faciens cum superficie mediali totam medialem. Ideo *sic dicta quia compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale. & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex αβ, βγ, existens & ipsum mediale: huius quoq; denominationis rationem aliam intelliges ex theoremate* 110. *Hîc non est alienum inserere lemma quoddã positum à* Campano *ante propositi. 74. Illud tantum in eo emẽdandum est, ut excessus linearũ intelligatur secundum* Arithmeticam *proportionalitatem, nõ autem secundũ geometricã: itaque loco numeri 4. qui adscribitur minime lineæ, reponatur binarius.*

Septuagesimumnonum Theorema.

Residuo unica tantũ linea recta coniungitur rationalis, potentia tantũ commensurabilis toti lineę.



Sit residuum linea αβ, cõiungaturque ipsi linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint rationales potentia tantum commensurabiles. Nego *lineæ αβ aliam posse coniungi huiusmodi, ut sit rationalis potentia tantum commẽsurabilis ipsi toti αγ. Si dicas aliam cõiungi posse, huiusmodi sit illa linea βδ: ergo lineæ αδ, δβ sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Et *quoniam quantò differunt quadrata linearum αδ, δβ ab eo quod fit bis*

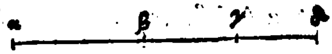
ex

ex α δ, δ ϛ, (differunt autem illa ab isto quadrato lineæ α β per 7. 2.) tantò differunt & quadrata linearũ α γ, γ ϛ, ab eo quod fit bis ex α γ, γ β (differunt autẽ illa quoque ab isto similiter eodem quadrato lineæ α β, per 7, 2.) Ergò & permutatè per lemma positũ à Campano ante 74. quantò differunt quadrata linearũ α δ, δ ϛ, à quadratis linearum α γ, γ β, tantò differt id quod fit bis ex α δ, δ ϛ, ab eo quod fit bis ex α γ, γ β: sed cõpositũ ex quadratis linearum α δ, δ β, & compositum ex quadratis linearum α γ, β γ cum sint ambo rationalia differũt inter se superficie rationali, per lemma positũ à nobis ante 42. Ergo & id quod fit bis ex α δ, δ β differet ab eo quod bis ex α γ, γ β superficie rationali. Sed id quod fit bis ex α δ, δ ϛ est mediale, quia est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex α δ, δ β, quod ipsum est mediale per 22. Item eadem ratione id quod fit bis ex α γ, γ ϛ est mediale: ergo mediale differet à mediali superficie rationali, quod est impossibile per 27. Ergo lineæ α ϛ alia linea coniungi nõ potest, quàm linea ϛ γ potentia tantũ commensurabilis toti: ergo residuo unica tantum linea &c. Deinceps per hanc uocem lineæ coniunctæ seu conueniẽter iunctæ intellige eam, quam Euclides uocat προσαρμόζουσαν: quæ scilicet iuncta cum residuo, restituit totam lineã, unde ea ablata remanent singula residua.

Octuagesimum Theorema.

Residuo mediali primo unica tantum linea coniungitur medialis, potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens rationale.

Sit residuũ mediale primũ αβ, cui coniungatur linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint mediales potentia tantum commensurabiles: quæ scilicet βγ cum tota αγ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex αγ, βγ. Nego *aliam lineã huiusmodi posse cõiungi lineæ αβ.* Nam *si fieri posse dicas, sit illa linea βδ. ergo lineæ αδ, δβ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes id quod fit ex αδ, δβ. Et quoniã quanto excedit cõpositum ex quadratis linearũ αδ, δβ id quod fit bis ex αδ, δβ tanto excedit compositum ex quadratis linearũ αγ, γβ id quod fit bis ex αγ, γβ. (utrobique enim excedunt quadrato lineæ αβ) ergo & permutate (sicut dictum est in proximo theoremate) quãto compositum ex quadratis linearum αδ, δβ excedit compositũ ex quadratis linearum αγ, γβ, tanto excedit id quod fit bis ex αδ, δβ id quod fit bis ex αγ, γβ. sed id quod fit bis ex αδ, δβ est rationale: item id quod fit bis ex αγ, γβ est rationale. ergo id quod fit bis ex αδ, δβ excedit id quod fit bis ex αγ, γβ superficie rationali per lemma positũ à nobis ante 42.* Ergo *& compositum ex quadratis linearũ αδ, δβ, quod est mediale, sicut dictum est in 75. excedit compositum ex quadratis linearum αγ, γβ, quod ipsum est etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ positæ sunt mediales) superficie rationali, quod est impossibile per 27.* Ergo *residuo mediali primo &c.*

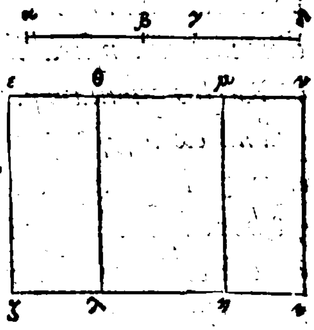


Octuagesimumprimum Theorema.

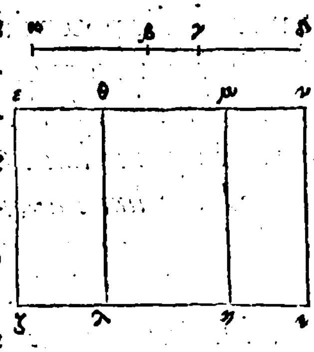
Residuo mediali secundo unica tantum coniungitur

tur medialis potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens mediale.

Sit residuũ mediale secũdum αϐ, cui coniungatur linea ϐγ huiusmodi, ut lineæ αγ, ϐγ sint mediales potentia tãtum commensurabiles mediale continẽtes, id scilicet quod fit ex αγ, γϐ. Nego aliam lineam huiusmodi posse coniungi lineæ αϐ:



nam si fieri potest, cõiungatur linea ϐδ, ergo lineæ αδ, δϐ sunt mediales potentia tantum cõmensurabiles, mediale continentes id, quod fit ex αδ, ϐδ. Proponatur linea rationalis εζ, secundum quam quadratis linearum αγ, γϐ æquale applicetur parallelogrammum εκ, faciẽs alterum latus εμ: ei uero quod fit bis ex αγ, γϐ æquale auferatur parallelogrammum θκ, faciens alterum latus lineam θμ. ergo residuũ ελ est æquale quadrato lineæ αϐ, per 7.2. quare linea αϐ potest parallelogrammum ελ. Rursus secundum eandem lineam εζ, quadratis linearũ αδ, δϐ applicetur æquale parallelogrammũ ει, faciens alterũ latus εν. Sed quadrata linearum αδ, δϐ sunt æqualia ei, quod fit bis ex αδ, δϐ & quadrato lineæ αϐ. ergo parallelogrãmum ει est æquale ei, quod fit bis ex αδ, δϐ, & quadrato lineæ αϐ. Est autem ελ æquale quadrato lineæ αϐ. ergo id quod fit bis ex αδ, δϐ est æquale parallelogrammo θι: & quoniam lineæ αγ, γϐ sunt mediales, ergo & quadrata ipsarum sunt medialia, & sunt æqualia parallelogrãmo εκ. ergo εκ



erit etiã mediale per ea quæ dicta sunt in 75. Ergo per 23 linea ι μ erit rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ι ζ. Rursus quoniam parallelogrãmũ ex α γ, γ β est mediale, ergo & id quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrammum θ κ, erit etiã mediale: ergo linea θ μ est rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ι ζ. Et quoniã lineæ α γ, γ β sunt potentia tantum cõmensurabiles, ergo ipsæ sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea α γ ad lineam γ β, ita quadratum lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β. Ergo quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. sed quadrato lineæ α γ sunt commẽsurabilia quadrata linearum α γ, γ β: parallelogrammo uerò ex α γ, γ β est commensurabile id quod fit bis ex α γ, γ β: ergo quadrata linearũ α γ, γ β sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α γ, γ β. Est autẽ quadratis linearum α γ, γ β æquale parallelogrãmum ι κ: ei uero quod fit bis ex α γ, γ β est æquale parallelogrammũ θ κ. Ergo parallelogrammum ι κ est incommensurabile parallelogrammo θ κ, ergo & linea ι μ erit longitudine incommensurabilis lineæ θ μ: sunt autẽ ambæ rationales, ergo sunt rationales potẽtia tantum cõmensurabiles. Ergo linea ι θ est residuum, eique coniuncta linea θ μ rationalis, est toti lineæ ι μ rationali commensurabilis potentia tantum. Similiter etiam probabimus cõiungi lineæ ι θ, lineam θ ν existentem & ipsam

rationalem

rationalem potentia tantum commensurabilem toti ι γ, repetendo inquā processum demonstrationis ab illis uerbis. Et *quoniam lineæ α γ, γ β sunt mediales: & loco linearum α γ, γ β reponendo lineas α δ, δ β, & cætera similiter. ergo residuo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commensurabilis toti, quod est impossibile per 79.* Ergo *residuo mediali secundo &c.*

Octuagesimumsecundum Theorema.

Lineæ minori unica tantum recta coniungitur, potentia incommensurabilis toti, faciens cum tota compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uerò parallelogrāmū, quod ex ipsis fit, mediale.

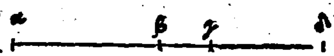
Sit linea minor α β, sitq; illi cōiuncta linea β γ, qualis ponitur in

theoremate. ergo lineæ α γ, γ β sunt potentia incommensurabiles, faciētes compositum ex quadratis ipsarū rationale. Id *uero quod fit ex ipsis mediale, nego lineæ α β aliam lineam posse coniungi, quæ idem efficiat. nam si fieri potest, sit ei coniuncta linea β δ: ergo lineæ α δ, δ β sunt potentia incommensurabiles, faciētes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale.* Et *quoniam quāto compositum ex quadratis ipsarum excedit id quod fit bis ex ipsis, tanto excedit compositum ex quadratis linearū α γ, γ β, id quod fit bis ex ipsis α γ, γ β.* Et *permutate sicut in 79 theoremate quanto differt compositum ex quadratis linearum α δ, δ β compositum ex quadratis linearū α γ, γ β, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β, id quod fit bis ex α γ, γ β: sed* *compositum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ, superficie rationali, quia utrunque compositum est rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ γ β superficie rationali, cũ tamẽ utrunque sit mediale, quod est impoßibile. ergo lineæ minori &c.*

Octuagesimumtertium Theorema.

Lineæ facienti cum superficie rationali totã superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incõmensurabilis toti: faciens autem cum tota compositũ ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale.

Sit linea cũ rationali superficie faciens totam superficiem medialem α β, eiq; coniuncta sit β γ: ergo lineæ α γ, γ ϐ, sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Nego lineæ α ϐ aliam lineam posse coniungi quæ idem efficiat: nam si poßibile est, sit illa cõiuncta β δ. ergo lineæ α δ, δ β sunt lineæ potẽtia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum α δ, δ β tanto excedat compositũ ex quadratis linearum α γ, γ β, quanto id quod fit bis ex α δ, δ β excedit, quod fit bis ex α γ, γ ϐ, sicut dictum est in præcedentibus: sed id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ, γ ϐ superficie rationali, cum sit utrũq; rationale

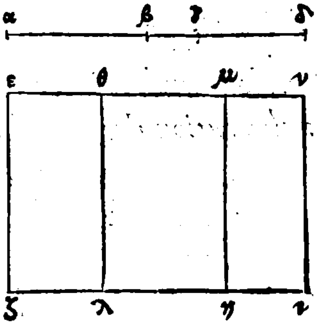


rationale. ergo & compositum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β superficie rationali, cum tamen utrunque sit mediale, quod est impossibile. Non igitur alia linea cõiungi potest lineæ α β, quàm linea β γ, quæ idẽ efficiat. ergo lineæ facienti cum rationali &c.

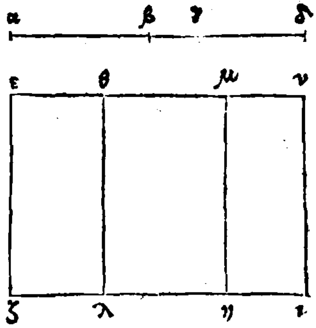
Octuagesimumquartum Theorema.

Lineæ cum mediali superficie faciẽti totam superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommensurabilis, faciẽs cum tota compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiam mediale: & præterea faciens compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei, quod fit ex ipsis.

Sit linea cum mediali superficie faciens totã medialem α β, cui cõiungatur linea β γ potẽtia toti incommẽsurabilis, faciantq; ambæ id quod dicitur in theoremate. Nego *lineæ α β aliam lineã cõiungi posse, quæ idem efficiat: nam si possibile est, cõiungatur linea β δ, quæ idẽ efficiat quod linea β γ:*



proponaturq; linea rationalis ε ζ, secũdum quam quadratis linearum α γ, γ β æquale applicetur parallelogrammum ε κ, faciens alterũ latus ε μ: ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β æquale detrahatur parallelogrammũ θ κ, faciens alterum latus θ μ. residuum ergo nempe quadratum li-



neæ α ϐ est æquale parallelogrammo ε λ. ergo linea α β potest parallelogrammũ ε λ. Rursus secundum eandem lineam ε ζ, quadratis linearum α δ, δ β æquale applicetur parallelogrammum ε ι, faciens alterum latus ε ν: est autem quadratum lineæ α β æquale parallelogrãmo ε λ: ergo residuũ, nempe id quod fit bis ex α δ, δ β, est æquale parallelogrammo θ ι. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α γ, γ β, hoc est ε η, est mediale: ergo linea ε μ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Rursus quoniã id quod fit bis ex α γ, γ ϐ, hoc est θ η, est mediale: ergo & linea θ μ est rationalis longitudine incõmensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ, hoc est ε η, est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrãmo θ η: ergo & lineæ ε μ, θ μ sunt longitudine inter se incommensurabiles. sunt autẽ ambæ rationales, ergo lineæ ε μ, θ μ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles: Ergo linea ε θ est residuum per 73: coniuncta uerò ei erit linea θ μ. Similiter etiam probabimus lineam ε θ esse residuum coniunctã ei uerò esse lineam θ ν, repetendo processum huius demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniã cõpositũ ex quadratis linearũ α γ &c. ut diximus in theoremate 81. Ergo residuo alia atq; alia linea cõiungitur idẽ efficiẽs, quod est impossibile per 79. Nõ ergo lineæ α ϐ alia linea, quã β γ coniungi potest similis naturæ, & quæ idem efficiat.

Definitiones

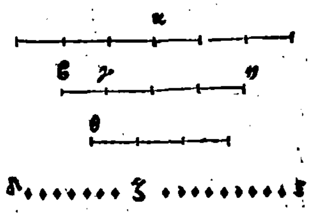
Definitiones tertiæ, siue termini tertij.

Proposita linea rationali & residuo, siquidem tota, nempe composita ex ipso residuo & linea illi cõiuncta, plus potest, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, fueritq; tota longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: residuum ipsum uocetur residuum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, ipsa autem tota plus posit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, residuum uocetur residuum secundũ. Si uero neutra linearum fuerit longitudine commensurabilis rationali, posit autem ipsa tota plus quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uocetur residuum tertium. Rursus si tota posit plus, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis: & quidem si tota fuerit longitudine commensurabilis ipsi rationali, uocetur residuũ quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, & tota plus posit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum quintum. Si uerò neutra linearum fuerit commensurabilis lõgitudine ipsi rationali, fueritq; tota potentior, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum sextum.

Octuagesimumquintum Theorema.

Reperire primum residuum.

Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commẽsurabilis linea ϐκ: ergo & linea ϐκ erit rationalis. Sint *duo numeri quadrati δι, ιζ tales, ut excessus maioris δζ, ne sit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis post 29. Neq; ergo numerus ιδ ad*



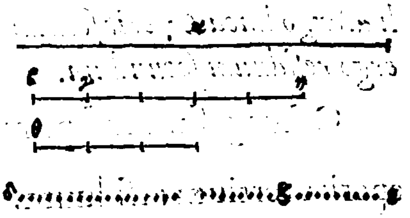
numerum δζ habebit proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, per 24.8. à destructione consequẽtis. Sitq; sicut numerus ιδ ad numerum δζ, ita quadratũ lineæ βκ, ad quadratũ lineæ κγ, per lemma positum post 6. ergo quadratum lineæ βκ est commensurabile quadrato lineæ κγ: sed quadratũ lineæ βκ est rationale, ergo & quadratũ lineæ κγ erit rationale. ergo linea κγ erit etiam rationalis. Et quoniam numerus ιδ ad numerum δζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratũ lineæ βκ habebit proportionem ad quadratum lineæ κγ, quam numerus quadratus ad quadratũ. ergo linea βκ erit longitudine incommensurabilis lineæ κγ per 9. Sunt autem ambæ rationales, ergo sunt lineæ βκ, κγ rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea βγ est residuum: dico præterea eandem esse residuum primũ. Quò enim est maius quadratum lineæ βκ quadrato lineæ κγ (maius autem esse constat, quia quadratum lineæ βκ, ad quadratum lineæ κγ est, sicut numerus ιδ, maior, ad numerum δζ ex suppositione:) quò ergo quadratum lineæ βκ est maius quadrato lineæ κγ, sit quadratum lineæ θ. Et quoniam est sicut numerus δι ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ κγ. per euersam ergo proportionem sicut numerus

δι

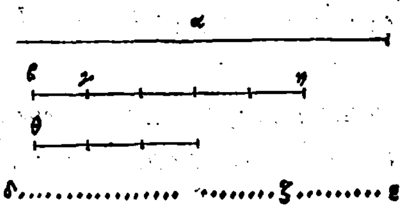
δε ad numerum ε ζ, ita quadratum lineæ β η ad quadratum lineæ θ: sed numerus δε habet proportionẽ ad numerum ζ ε, quam numerus quadratus ad quadratũ, quia est uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ η β habebit proportionem ad quadratum lineæ θ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea η β est longitudine commensurabilis lineæ θ. Potest autẽ linea η β plus, quàm linea η γ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem tota β η longitudine commensurabilis rationali α. ergo linea β γ est residuũ primum. Repertum *est igitur residuum primum, quod faciendum erat.*

Octuagesimumsextum Theorema.

Reperire secundum residuum.



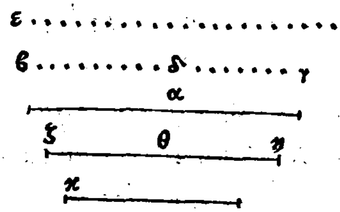
Proponatur linea rationalis α, cui sit cõmẽsurabilis longitudine linea η γ: sintq́; numeri quadrati duo δ ε, ε ζ, quorum excessus δ ζ ne sit quadratus: sit etiã sicut numerus δ ζ ad numerum δ ε, ita quadratum lineæ η γ ad quadratum lineæ η β, ergo ambo quadrata sunt cõmensurabilia: & quia quadratum lineæ η γ est rationale, etiam quadratum lineæ β η erit rationale. ergo & linea β η erit rationalis. Et *quia quadrata linearũ β η, η γ non habent proportionem inter se, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo lineæ β η, η γ erunt longitudine incõmensurabiles, & sunt ambæ rationales. ergo lineæ β η, η γ erũt*



rationales potentia tantum cōmēsurabiles. ergo linea βγ erit residuū: dico præterea eandē esse residuum secundum. quò enim est maius quadratum lineæ βη quadrato lineæ ηγ, sit quadratum lineæ θ. Cum igitur sit sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ ηβ ad quadratum lineæ ηγ: per euersam ergo proportionē sicut δε ad numerum εζ, ita quadratū lineæ βη ad quadratum lineæ θ. Est autem uterque numerus δε, εζ quadratus. ergo linea ηβ erit longitudine commensurabilis lineæ θ: potestq; linea βη plus, quàm linea ηγ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. & est linea coniuncta ηγ longitudine commensurabilis lineæ rationali α. Ergo linea βγ erit secūdum residuum. Repertum est ergo residuum secundum.

Octuagesimumseptimum Theorema.

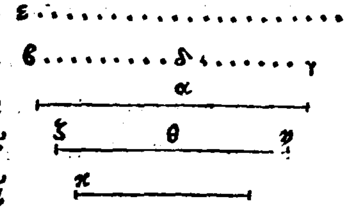
Reperire tertium residuum.



Proponatur linea rationalis α, & proponātur numeri tres ε, βγ, γδ proportionē non habētes inter se, quam numerus quadratus ad quadratum: & numerus βγ ad numerum βδ habeat proportionem, quam numerus quadratus ad quadratū: sitq; numerus βγ maior numero γδ. fiatq; sicut numerus ε ad βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζη.

sicut

ſicut autem numerus ϛγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ, ad quadratum lineæ θκ. ergo quadratum lineæ α eſt commẽſurabile quadrato lineæ ζκ. Sed quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & quadratum lineæ ζκ erit rationale. ergo linea ζκ erit rationalis: et quoniã numerus ε ad numerum ϛγ non habet proportionẽ, quã numerus quadratus ad quadratũ, neq; ergo quadratum lineæ α, ad quadratũ lineæ ζκ habebit proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζκ. Rurſus *quoniam eſt ſicut numerus βγ ad γδ, ita quadratũ lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ, ergo quadratum lineæ ζκ eſt commẽſurabile quadrato lineæ θκ: ſed quadratũ lineæ ζκ eſt rationale, ergo & quadratum lineæ θκ erit rationale. ergo linea θκ erit rationalis.* Et *quoniam numerus βγ ad numerum γδ non habet proportionẽ, quã numerus quadratus ad quadratũ, neque ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratum lineæ θκ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine incommẽſurabilis lineæ θκ: ſunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζκ, θκ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea ζθ erit reſiduum per 73. dico præterea eſſe reſiduũ tertium.* Cum *enim ſit ſicut numerus ε ad numerũ βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζκ: ſicut autẽ numerus ϛγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ, ad quadratum lineæ θκ. ergo per æquam proportionem ſicut numerus ε ad numerum γδ, ita quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ θκ: ſed numerus ε ad γδ non habet*

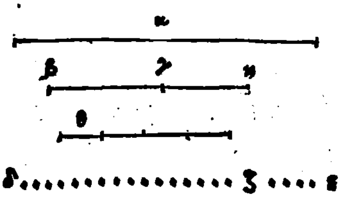


proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum: neq; ergo quadratum lineæ α habebit proportionē ad quadratū lineæ θκ, quā quadratus numerus ad quadratum, ergo linea α erit longitudine incommēſurabilis lineæ θκ. Neutra ergo linearum ζκ, θκ erit longitudine commenſurabilis lineæ rationali α: quo uero maius eſt quadratū lineæ ζκ quadrato lineæ θκ, maius autem eſſe conſtat, quia per ſuppoſitionem numerus βγ eſt maior numero γδ, ſit quadratum lineæ κ. Cum igitur ſit ſicut numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ: per euerſam ergo proportionē ſicut numerus βγ ad βδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κ: ſed βγ ad βδ habet proportionē, quam numerus quadratus ad quadratum: ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratū lineæ κ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine commenſurabilis lineæ κ. Ergo linea ζκ plus poteſt, quam linea θκ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & neutra linearum ζκ, θκ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali α, cum tamen utraque linearum ζκ, θκ ſit rationalis: ergo linea ζθ erit reſiduum tertium. Repertum eſt ergo tertium reſiduum.

Octuageſimumoctauum Theorema.

Reperire quartum reſiduum.

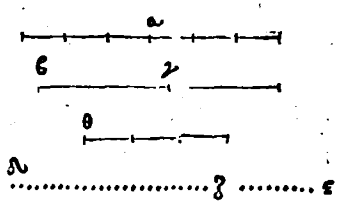
Proponatur linea rationalis α, cui ſit longitudine commēſurabilis



ſurabilis linea β κ: ergo linea β κ erit rationalis. Proponãtur numeri duo δ ζ, ζ ε huiuſmodi, ut totus δ ε ad neutrũ δ ζ, ζ ε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq́; ſicut numerus δ ε ad numerum ε ζ, ita quadratum lineæ β κ ad quadratum lineæ κ γ: ergo quadratum lineæ β κ erit cõmenſurabile quadrato lineæ κ γ. ergo & quadratum lineæ κ γ erit rationale, & linea κ γ rationalis. Et quoniã numerus δ ε ad numerum ε ζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo linea β κ erit longitudine incõmenſurabilis lineæ κ γ: ſunt autem ambæ rationales. ergo linea β γ eſt reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum: quò enim quadratum lineæ β κ eſt maius quadrato lineæ κ γ, ſit quadratum lineæ θ. Cum igitur ſit ſicut numerus δ ε ad numerum ε ζ, ita quadratum lineæ β κ ad quadratũ lineæ κ γ: ergo per euerſam proportionem ſicut numerus δ ε ad numerum δ ζ, ita quadratum lineæ β κ ad quadratum lineæ θ: ſed numeri δ ε, δ ζ non habent proportionem inter ſe, quam quadratus ad quadratum: ergo linea β κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ. Ergo linea β κ plus poteſt, quàm linea κ γ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: eſtq́ue tota β κ longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. ergo linea β γ erit reſiduum quartũ. Repertum eſt igitur reſiduum quartum.

Octuageſimumnonum Theorema.

Reperire quintum reſiduum.



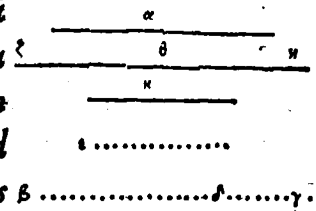
Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commensurabilis linea γκ, erit ergo linea γκ rationalis. Proponantur numeri duo δζ, ζε tales, ut δε ad neutrum δζ, ζε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: sitq; sicut numerus ζε ad numerum δε, ita quadratum lineæ γκ ad quadratũ lineæ βκ, ergo quadratum lineæ γκ erit commensurabile quadrato lineæ βκ. ergo quadratum lineæ βκ erit rationale, & linea βκ rationalis: sed numeri δε, εζ nõ habent proportionem, quam quadratus ad quadratũ, ergo lineæ βκ, κγ. sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea βγ erit residuũ, dico præterea esse residuum quintum: quò enim maius est quadratum lineæ βκ quadrato lineæ κγ, sit quadratũ lineæ θ. Cũ igitur sit sicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratũ lineæ βκ ad quadratũ lineæ κγ, ergo per euersam proportionem, sicut numerus δε ad numerum δζ ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: sed numeri δε, εζ non habet proportionem inter se, quã numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea βκ erit longitudine incommensurabilis lineæ θ. ergo linea βκ plus potest linea γκ, quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis: estque coniuncta linea γκ longitudine commensurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit residuum quintum. Repertum est ergo residuum quintum.

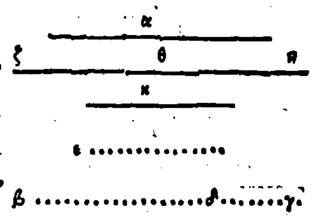
Nonagesimum Theorema.

Reperire sextum residuum.

Sit

Sit linea rationalis α, & numeri tres ι, β γ, γ δ proportionem non habentes inter se, quã numerus quadratus ad quadratum numerum: numerus autem β γ ne habeat proportionem ad numerum β δ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum: sitque numerus β γ maior numero γ δ, fiatq; sicut numerus ι ad numerum β γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζ κ: sicut autem numerus β γ ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ κ θ. Cum igitur sit sicut ι ad β γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζ κ, ergo quadratum lineæ α est commẽsurabile quadrato lineæ ζ κ. ergo quadratũ lineæ ζ κ erit rationale, & linea ζ κ rationalis. Et quoniam numerus ι ad β γ non habet proportionem, quã quadratus numerus ad quadratũ, ergo linea α erit longitudine incõmensurabilis lineæ ζ κ. Rursus quoniam est sicut numerus β γ ad numerũ γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ κ θ, ergo quadratum lineæ ζ κ erit commensurabile quadrato lineæ κ θ: sed quadratum lineæ ζ κ est rationale, ergo & quadratũ lineæ κ θ erit rationale. ergo linea κ θ erit rationalis. Et quoniam numerus β γ ad numerum γ δ nõ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea ζ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ κ θ: sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζ κ, κ θ sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea ζ θ erit residuum: dico præterea esse residuum sextum. Cũ enim sit sicut numerus ι ad β γ, ita quadra-



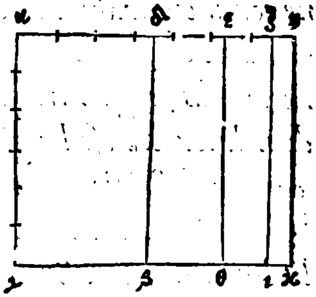


tum lineæ α, ad quadratum lineæ ζη: sicut autem numerus βγ ad numerū γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratū lineæ ηθ. Per æquam igitur proportionē sicut numerus ε ad numerum γδ, ita quadratum lineæ α, ad quadratum lineæ ηθ: sed numerus ε nō habet proportionem ad numerū γδ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommensurabilis lineæ ηθ, & neutra linearum ζη, ηθ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quò igitur maius est quadratum lineæ ζη, quadrato lineæ ηθ, sit quadratum lineæ κ. Cum igitur sit sicut numerus εγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. ergo per euersam proportionem sicut numerus εγ ad numerum εδ, ita quadratū lineæ ζη ad quadratum lineæ κ: sed numerus εγ ad numerum βδ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζη erit longitudine incommensurabilis lineæ κ. Ergo linea ζη plus potest quā linea ηθ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & neutra linearum ζη, ηθ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, ergo linea ζθ est residuum sextum. Repertum est ergo residuum sextum. Est autem & facilior quædam ratio reperiendi cuiusque residui, ex illis sex antè dictis, hoc modo. Propositū sit reperire residuū primum. Proponatur binomiū primum linea αγ, cuius maius nomē sit αε: & lineæ εγ æqualis sit linea βδ. ergo lineæ αβ, βγ, hoc est lineæ αε, βδ sunt rationales potentia

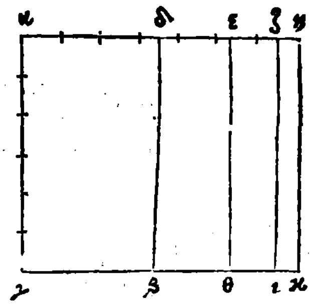
tentia tantum commẽsurabiles. & linea α ϛ plus potest, quàm linea β γ, hoc est quàm linea β δ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & linea α ϛ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, quia positum est lineam α γ esse binomiũ primum. ergo linea α δ est residuum primum. Simili ratione secundum, tertium, quartum, quintum & sextum residuum reperire licet, si proposuerimus singula binomia eiusdẽ ordinis.

Nonagesimumprimum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo primo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

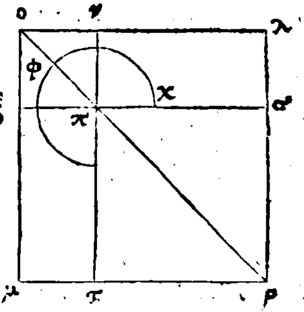


Cõtineatur superficies rectãgula α β, ex linea rationali α γ, & residuo primo α δ. dico lineã, quæ poßit superficiem illam, esse residuum. Cum enim linea α δ sit residuũ primum, sit illi coniuncta linea δ κ, (cõiunctam intellige, qualem dixi in fine theorematis 79.) ergo lineæ α κ, κ δ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & tota α κ est longitudine commensurabilis rationali lineæ α γ, & linea α κ plus potest, quàm linea κ δ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur linea κ δ in partes duas æquales in puncto ε, & quadrato lineæ ε κ, æquale secundum lineam α κ applicetur parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata: sitq; illud parallelogrammum ex α ζ, ζ κ. ergo linea α ζ est

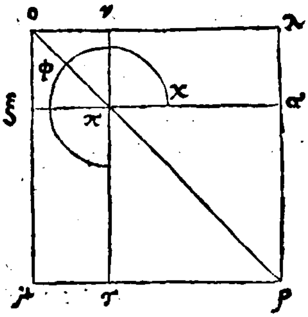


longitudine cõmensurabilis lineæ ζη per 18. & per puncta ε, ζ, η ipsi lineæ αγ parallelæ ducantur εθ, ζι, ηκ. Et quoniam linea αζ est longitudine cõmensurabilis lineæ ζη, ergo & tota linea αη utriq; ex αζ, ζη est longitudine commensurabilis per 16. sed linea αη est longitudine commẽsurabilis lineæ αγ. ergo utraque linearum αζ, ζη est longitudine commẽsurabilis lineæ αγ: sed linea αγ est rationalis, ergo utraque αζ, ζη est etiam rationalis: quare & utrunque parallelogrammum αι, ζκ est rationale per 20. Et quoniam linea δε est longitudine commensurabilis lineæ εη, ergo & linea δη est longitudine commẽsurabilis utrique δε, εη: sed linea δη est rationalis, ergo utraque δε, εη est rationalis: sed eadem linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αγ per definitionem residui primi uel per 13 aut 14 huius. Quia linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αη, quæ linea αη est longitudine commensurabilis eidem lineæ αγ. ergo utraque linea δε, εη est rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ. Ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ est mediale per 22. Sit parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: parallelogrammo uero ζκ sit æquale quadratum νξ, detractum ex quadrato λμ, habens cum illo communem angulum λομ. Quod ut fiat reperiatur media proportionalis inter lineas ζι, ζκ: nam quadratum mediæ proportionalis erit æquale parallelogrammo ex ζι, ζκ: porro de

linea



linea λ ο sumatur linea æqualis lineæ mediæ proportionali modo repertæ, & describatur ξ eius quadratũ. Sunt ergo ambo quadrata λ μ, ν ξ circa eandem diametrũ per 26.6: sit eorũ diameter linea ο ρ, & describatur figura qualis hic uidetur. Cum igitur sit parallelogrammũ ex α ζ, ζ κ æquale quadrato lineæ ι κ. est igitur sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita linea ι κ ad lineam ζ κ per 17.6: sed sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita parallelogrammum α ι ad parallelogrammum ι κ: sicut autem linea ι κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammum ζ κ. Ergo *parallelogrammorum α ι, ζ κ parallelogrammum ι κ est mediũ proportionale: sed & quadratorũ λ μ, ν ξ parallelogrammum μ ν, est medium proportionale per lemma positum post* 53. *Est autem parallelogrammo α ι æquale quadratum λ μ: parallelogrãmo uero ζ κ est æquale quadratum ν ξ. ergo parallelogrãmum μ ν est æquale parallelogrammo ι κ per lemma positum à nobis ante* 54. *Sed parallelogrammum ι κ est æquale parallelogrammo δ θ per* 1.6: *parallelogrammũ uero μ ν est æquale parallelogrãmo λ ξ per* 43.1. Ergo *parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, qui gnomo constat ex illis parallelogrãmis. per quæ uides in figura maiorem semicirculo portionem pertransire, & præterea quadrato ν ξ. Est autem & parallelogrammũ α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ: & modo conclusum est parallelogrammũ δ κ esse æquale gnomoni υ φ χ, & præ-*



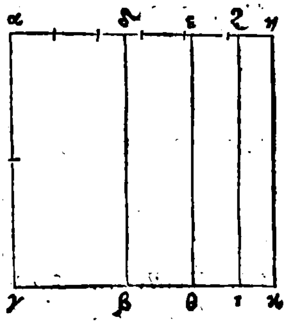
terea quadrato, ν ξ. Reliquum ergo, nempe parallelogrammum α ϛ, erit æquale quadrato σ τ, quod est quadratum lineæ λ ν. ergo quadratũ lineæ λ ν est æquale parallelogrammo α β. ergo linea λ ν potest illud parallelogrammum α β: dico præterea lineam λ ν esse residuum. Cum enim utrunque parallelogrammũ α ι, ζ κ sit rationale, ut supra dictum, ergo & illis æqualia quadrata λ μ, ν ξ, hoc est, quadrata linearum λ ο, ο ν erunt rationalia, & lineæ ipsæ λ ο, ο ν, rationales. Rursus quoniam parallelogrammum δ θ, hoc est, λ ξ est mediale, ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ. ergo per 1.6 & 10. huius, linea λ ο erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ο ν: sunt autem ambæ rationales, sunt ergo rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea λ ν est residuum: potest autẽ parallelogrammum α ϛ. ergo si superficies cõtineatur &c. linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

Nonagesimumsecundum Theorema.

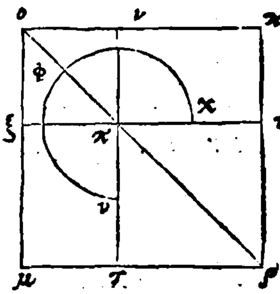
Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo secundo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale primum.

Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, & residuo secundo α δ. dico lineam quæ potest superficiem α β esse eam, quæ dicitur residuũ mediale primum. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ κ. ergo lineæ α κ, κ δ sunt rationales

tionales



tionales potentia tantum cōmensurabiles: & linea coniuncta δκ, est longitudine commēsurabilis lineæ rationali αγ: linea uerò ακ plus potest quā linea δκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur linea δκ bifariā & æqualiter in pūcto ε, & secūdum lineā ακ applicetur quartæ parti quadrati lineæ δκ, hoc est, quadrato lineæ εκ æquale parallelogrammū ex αζ, ζκ, deficiens specie quadrata. ergo per 18 linea αζ est longitudine commēsurabilis lineæ ζκ: & per puncta ε, ζ, κ ipsi lineæ αγ ducantur parallelæ εθ, ζι, κκ: & quoniam linea αζ est longitudine commēsurabilis lineæ ζκ, ergo tota linea ακ est utrique αζ, ζκ longitudine cōmensurabilis. Est autem linea ακ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ. ergo & utraque αζ, ζκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum αι, ζκ est mediale per 22. Rursus cum linea δε sit commensurabilis longitudine lineæ εκ, ergo & δκ est utrique δε, εκ longitudine commensurabilis: sed linea δκ est longitudine commēsurabilis lineæ rationali αγ, ergo utraque δε, εκ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ est rationale per 20. Describatur parallelogrammo αι æquale quadratū λμ: parallelogrammo uero ζκ, æquale sit quadratū νξ, sicut in præcedenti theoremate, quadrata λμ, νξ erunt circa eandem diametrum: sit diameter ορ, & describa-



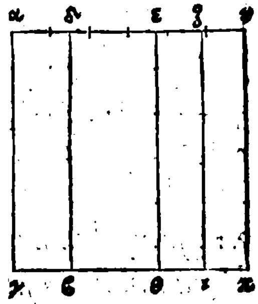
tur figura sicut modo dictũ est. Quoniam ergo parallelogramma α ι, ζ κ sunt medialia & inter se commensurabilia, & illis æqualia quadrata linearũ λ ο, ο ν sunt medialia, ergo lineæ λ ο, ο ν sunt mediales potentia commensurabiles. Constat autem potentia commensurabiles esse lineas λ ο, ο ν, quia earum quadrata sunt commẽsurabilia: commẽsurabilia sunt porro quadrata illa, scilicet linearum λ ο, ο ν, quia sunt æqualia parallelogrammis, α ι, ζ κ, quæ sunt cõmensurabilia: cõmẽsurabilia porro esse illa parallelogrãma α ι, ζ κ constat eo, quod modo probatum est, lineas α ζ, ζ κ esse longitudine commensurabiles. Ergo per 1.6 & 10 huius parallelogrãma α ι, ζ κ sunt commensurabilia. ergo modo probatum est uia resolutionis lineas λ ο, ο ν, esse potentia cõmensurabiles. Et quoniam parallelogrammum ex α ζ, ζ κ est æquale quadrato lineæ ε κ. est ergo sicut linea α ζ ad lineã ε κ, ita linea ε κ ad lineam ζ κ: sed sicut linea α ζ ad lineam ε κ, ita parallelogrammũ α ι ad parallelogrammũ ε κ: sicut autem linea ε κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammũ ε κ ad parallelogrammum ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale est parallelogrammũ ε κ. Est etiam quadratorum λ μ, ν ξ medium proportionale parallelogrammum μ ν: & est æquale parallelogrammũ α ι quadrato λ μ: parallelogrammum uero ζ κ est æquale quadrato ν ξ. Ergo μ ν erit æquale parallelogrãmo ε κ: sed ε κ est æquale parallelogrammo δ θ: parallelogrammum

mum uero λ ξ est æquale parallelogrammo μ ν. Totũ ergo parallelogrammum λ κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. reliquum ergo, nempe parallelogrammũ α β, est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν. Ergo linea λ ν potest superficiem α ϐ: dico præterea lineã λ ν esse residuum mediale primum. Cum enim parallelogrammum ι κ sit rationale, sitq; æquale parallelogrã-mo μ ν, hoc est λ ξ: ergo λ ξ, hoc est parallelogrammum ex λ ο, ο ν erit rationale: sed quadratum ν ξ est mediale, quia ei æquale parallelogrammum ζ κ modo probatũ est esse mediale. Ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ: sed sicut parallelogrammũ λ ξ ad quadratum ν ξ, ita linea λ ο, ad lineam ο ν, per 16. ergo per 10 huius, lineæ λ ο, ο ν sunt longitudine incommensurabiles: sed modo probatum est eas esse mediales potentia commensurabiles. ergo lineæ λ ο, ο ν sunt mediales potentia tantum commensurabiles, continentes rationale. Ergo linea λ ν est residuum mediale primum, & potest superficiem α β contentam ex linea rationali & residuo secundo.

Nonagesimumtertium Theorema.

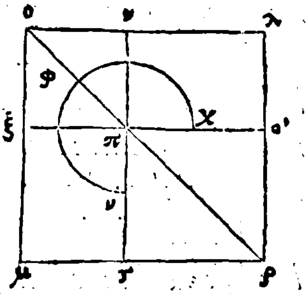
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo tertio, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale secundum.

Superficies enim α β cõtineatur ex linea rationali α γ, & residuo tertio α δ. dico lineam quæ possit superficiem α β esse residuum mediale secũdum. Sit linea coniuncta δ η, ergo lineæ α η, η δ sunt rationales potentia tantum com-

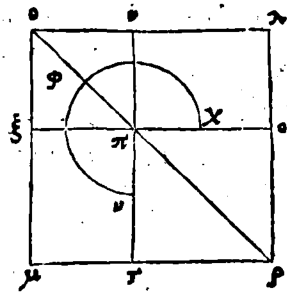


mēsurabiles, & neutra linearum α η, η δ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α γ. Tota uero α β plus potest, quàm coniuncta η δ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. reliqua fiāt, ut in præcedētibus. ergo lineæ α ζ, ζ η sunt longitudine commēsurabiles & parallelogrammū α ι, commensurabile parallelogrammo ζ κ. Et quoniam α ζ, ζ η sunt longitudine cōmensurabiles, ergo tota linea α η est utrique α ζ, ζ η longitudine commēsurabilis: sed linea α η est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ α γ, ergo utraque α ζ, ζ η. est rationalis & longitudine incommēsurabilis lineæ α γ. ergo utrūque parallelogrammum α ι, ζ κ est mediale per 22. Rursus cum linea δ ι sit longitudine commensurabilis lineæ ι η, ergo & tota δ η est longitudine cōmensurabilis utrique δ ι, ι η: sed linea δ η est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ α γ, ergo & utraque linearum δ ι, ι η est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ α γ. ergo & utrūque parallelogrammum δ θ, ι κ est mediale: & quoniam lineæ α η, δ η sunt potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommensurabiles: sed linea α η est longitudine commensurabilis lineæ α ζ: linea autem δ η est longitudine commensurabilis lineæ η ι, ergo linea α ζ est longitudine incommensurabilis lineæ ι η. Sicut autem linea α ζ ad lineam ι η, ita parallelogrammum α ι ad parallelogrammum ι κ. ergo α ι est incommensurabile ipsi ι κ. Construatur parallelogrammo α ι

æquale



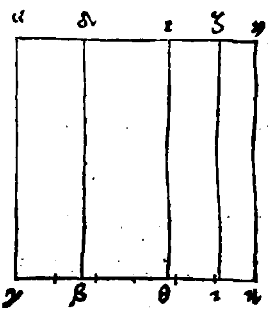
æquale quadratum λμ: ipsi uero ζκ æquale quadratũ νξ, & describatur figura, ut in præcedentibus. Cum igitur parallelogrãmũ ex αζ,ζκ sit æquale quadrato lineæ εκ. est ergo sicut linea αζ ad lineam εκ, ita εκ ad ζκ: sed sicut linea αζ ad lineam κε, ita parallelogrammũ αι ad parallelogrammum εκ: sicut autem linea εκ ad lineam ζκ, ita parallelogrammum εκ ad parallelogrammũ ζκ. sicut ergo parallelogrammum αι ad parallelogrammũ εκ, ita εκ ad ζκ. ergo parallelogrammorum αι, ζκ medium proportionale est εκ. Sed quadratorũ λμ, νξ medium proportionale est parallelogrammum μν, ergo εκ est æquale ipsi μν. ergo totum parallelogrammum δκ est æquale gnomoni υφχ, & quadrato νξ. Est autem ipsum ακ æquale quadratis λμ, νξ, reliquum ergo nempe αϐ est æquale quadrato στ, hoc est quadrato lineæ λν, ergo λν potest superficiem αϐ: dico præterea lineam λν esse residuum mediale secundum. Cum enim, sicut probatũ est, parallelogramma αι, ζκ sint medialia, ergo eis æqualia quadrata linearũ λο, ον sunt etiã medialia. ergo utraq; linea λο, ον erit medialis: & quoniam parallelogrammum αι est commensurabile parallelogrammo ζκ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λο, ον erunt commensurabilia. Rursus cum sit probatum parallelogrammum αι esse incommẽsurabile parallelogrammo εκ, ergo incommensurabile erit quadratum λμ, parallelogrammo μν, hoc est, quadratum lineæ λο, parallelogrã-



mo ex λο, ον: quare & linea λο erit longitudine incõmensurabilis lineæ ον. ergo lineæ λο, ον sunt mediales potentia tantum commensurabiles: dico prætereà eas continere mediale. Cũ enim probatũ sit ικ esse mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ex λο, ον erit mediale. ergo linea λν est residuum mediale secundum, & potest superficiem αβ. Ergo linea potens superficiem αϐ est residuum mediale secundum.

Nonagesimumquartum Theorema.

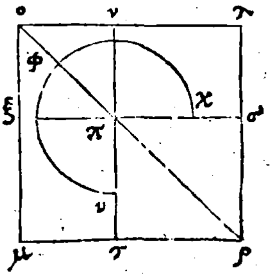
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo quarto, linea quę illam superficiẽ potest, est linea minor.



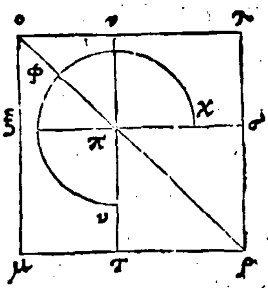
S*uperficies αβ contineatur ex linea rationali αγ, et residuo quarto αδ. dico lineam quæ illam superficiem αϐ potest, esse eã, quæ dicitur linea minor: sit enim linea cõiuncta δκ, ergo lineæ ακ, δκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: & linea ακ plus potest, quàm linea δκ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, & linea ακ est longitudine commensurabilis lineæ αγ. Diuidatur linea δκ bifariam & æqualiter in puncto ι: & quadrato lineæ ικ æquale secũdum lineam ακ applicetur parallelogrãmum, deficiẽs figura quadrata, sitq; illud parallelogrã-*

mum

mũ ex αζ,ζκ. ergo per 19. linea αζ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζκ. Ducantur per puncta ι,ζ,κ ipsis lineis αγ,δϐ, parallelæ ιθ,ζι,κχ. Cum igitur linea ακ sit rationalis, & longitudine commensurabilis lineæ αγ, ergo totum parallelogrammum αχ est rationale per 20. Rursus cum linea δκ sit longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ, (nam si esset linea δκ longitudine commensurabilis lineæ αγ, cum linea ακ sit eidem αγ longitudine commẽsurabilis, essent etiam lineæ ακ, δκ longitudine commensurabiles, cum tamen positæ sint potẽtia tantum commensurabiles) sunt autem ambæ αγ, δκ rationales. ergo parallelogrammũ δχ est mediale. Rursus cum linea αζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζκ, ergo incommensurabile est αι ipsi parallelogrammo ζκ. Cõstruatur parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: ipsi uero ζκ æquale quadratum νξ, ambo quadrata habentia communem angulũ λον. ergo quadrata λμ, νξ sunt circa eandem diametrũ: sit diameter ορ & describatur figura.



Cum igitur parallelogrammũ ex αζ,ζκ sit æquale quadrato lineæ ικ, erit proportionaliter, sicut linea αζ ad lineam ικ, ita linea ικ ad lineã ζκ: sed sicut linea αζ ad lineam ικ, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum ιχ per 1.6. Sicut autem linea ικ ad lineã ζκ, ita parallelogrammum ιχ ad parallelogrammum ζχ. ergo parallelogrammorũ αι,ζχ medium proportionale est ιχ. ergo, sicut dictum est in præcedentibus, parallelo-



grammum μν est æquale parallelogrammo ιχ: sed λι est æquale ipsi ιχ, ipsum autem μν ipsi λξ. ergo parallelogrammum λχ est æquale gnomoni υφχ, & quadrato νξ. ergo reliquum αβ est æquale reliquo quadrato στ, hoc est, quadrato lineæ λν: dico præterea lineã λν esse irrationalem eam, quæ linea minor uocatur. Cum enim parallelogrammum αχ sit rationale, & sit æquale quadratis linearum λο, ον, ergo compositum ex quadratis linearũ λο, ον erit rationale. Rursus cum *λχ sit mediale, sitq; æquale ei, quod fit bis ex λο, ον, ergo id quod fit bis ex λο, ον est etiam mediale: & quoniam parallelogrammum αι est incommensurabile parallelogrammo ζχ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λο, ον sunt incõmensurabilia. ergo lineæ λο, ον sunt potentia incommẽsurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit bis ex ipsis mediale, quod est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex ipsis: ergo & quod fit semel ex ipsis, erit etiã mediale.* Ergo *linea λν est irrationalis, quæ uocatur linea minor & potest superficiẽ αβ.*

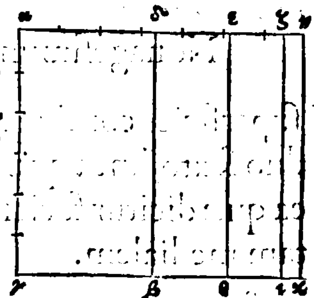
Nonagesimumquintum Theorema.

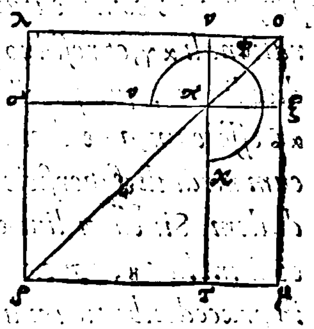
Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo quinto, linea quæ illam superficiẽ potest, est ea, quę dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.

Superficies enim αβ contineatur ex linea rationali αγ, &

residuo

residuo quinto α λ. dico lineam, quæ illam superficiẽ potest, eam esse quæ dicitur faciens cum rationali superficie totam medialem: sit enim lineæ α λ iuncta linea λ κ, quæ erit longitudine cõmensurabilis lineæ rationali α γ, cætera erunt ut in præcedenti. Et quoniam linea α κ est longitudine incommensurabilis lineæ α γ, & sunt ambæ rationales, ergo parallelogrãmũ α κ erit mediale. Rursus quoniã linea λ κ est rationalis, & lõgitudine cõmẽsurabilis lineæ α γ, ergo λ κ erit rationale. Cõstruatur quadratum λ μ æquale parallelogrammo α ι, quadratum uero ν ξ æquale ipsi ζ κ, ut in proximo, similiter demõstrabimus lineam λ ν posse superficiem α β: dico præterea eam esse lineam, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialẽ: cum enim α κ sit mediale, etiam illis æquale compositum ex quadratis linearum λ ο, ο ν, erit mediale. Rursus quia λ κ est rationale, ergo & illi æquale id, quod fit bis ex λ ο, ο ν erit etiam rationale, & quoniam linea α ζ est longitudine incommẽsurabilis lineæ ζ κ, ergo per 1. 6 & 10 huius. parallelogrammum α ι erit incõmensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & quadratũ lineæ λ ο erit incommensurabile quadrato lineæ ο ν: ergo lineæ λ ο, ο ν sunt potentia incommensurabiles facientes compositum

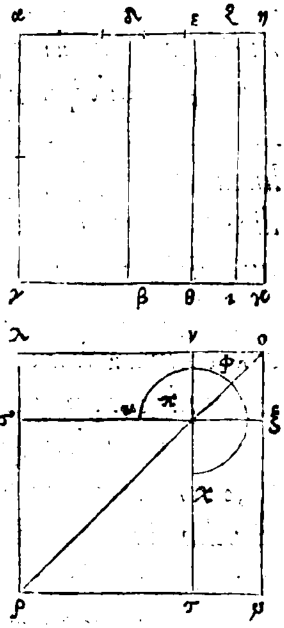




ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit bis ex ipsis rationale. ergo reliqua linea λ ι est irrationalis: nẽpe ea quæ dicitur cum rationali superficie faciens totã medialem, & potest superficiem α β. Ergo linea potens superficiem α β est linea, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.

Nonagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo sexto, linea quæ illam superficiem potest, est ea quæ dicitur faciens cum mediali superficie totam medialem.

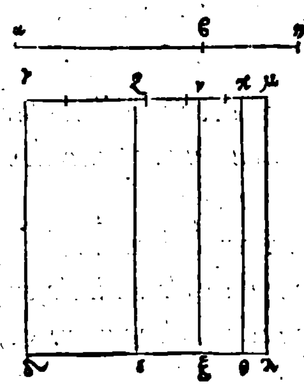


Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, et residuo sexto α δ. dico lineam quæ potest superficiẽ α β esse eam, quæ dicitur faciens cum mediali superficie totã medialem. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ η, & cætera fiãt, ut in præcedẽtibus: cum linea α ζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζ η, ergo & parallelogrammum α ι erit incommensurabile parallelogrammo ζ κ. Et quoniã lineæ α η, α γ, sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, ergo parallelogrammum α κ erit mediale: simili ratione δ κ erit mediale. Cum igitur lineæ α η, η δ sint potentia tantum commensurabiles, ergo *go sunt longitudine inter se incommensurabiles: sed sicut linea ακ ad κλ, ita parallelogrammum αx ad λx. ergo αx erit incõmensurabile ipsi λx. Construatur eadẽ figura, quæ in præcedentibus, similiter probabimus lineam λν posse superficiẽ αϲ: dico præterea eam esse, quæ dicitur faciẽs cum superficie mediali totam medialem: nam αx est mediale, ergo & illi æquale compositũ ex quadratis linearum λο, ον erit mediale. Rursus quoniã λx est mediale, ergo & ei æquale, id quod fit bis ex λο, ον erit mediale. Et quoniam αx est incommensurabile ipsi λx, ergo & quadrata linearum λο, ον erunt incõmensurabilia ei, quod fit bis ex λο, ον: & cum parallelogrammum αι sit incommensurabile parallelogrammo ζx, ergo etiam quadratum lineæ λο erit incommensurabile quadrato lineæ ον. ergo lineæ λο, ον erunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositũ ex quadratis linearum λο, ον mediale, & quod fit bis ex ipsis mediale: præterea compositum ex quadratis ipsarũ incommensurabile ei, quod fit bis ex ipsis. ergo linea λν est irrationalis, quæ dicitur cum mediali superficie faciens totam medialẽ, & potest superficiem αϲ. Ergo linea potens superficiem αβ est ea, quæ dicitur faciens cum superficie mediali totam medialem.*

Nonagesimumseptimum Theorema.

Quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus residuum primũ.

Sit residuum αϲ, rationalis uero linea γλ: & quadrato lineæ αβ æquale secundum lineam γλ applicetur paral-



lelogrammum γι faciēs alterū latus γζ, dico lineam γζ esse residuum primum. Sit enim lineæ αβ linea cōueniēter iuncta βκ, quæ & eadem dicitur linea cō iuncta, ut in fine theorematis 79. ergo lineæ ακ, κβ, sunt rationales potentiâ tantum commensurabiles: & quadrato lineæ ακ secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γθ, quadrato uero lineæ βκ æquale parallelogrāmum κλ: totum ergo γλ est æquale quadratis linearum ακ, κβ: sed parallelogrammum γι est æquale quadrato lineæ αβ, reliquum ergo ζλ est æquale ei, quod fit bis ex ακ, κβ: quia quadrata linearum ακ, κβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex ακ, κβ, & quadrato lineæ αβ per 72. Secetur linea ζμ bifariam & æqualiter in puncto ν, & à pūcto ν ducatur lineæ γδ parallela linea νξ, ergo utrūque ex parallelogrāmis ζξ, νλ est æquale ei. quod fit semel ex ακ, κβ. Et quoniam quadrata linearum ακ, κβ sunt rationalia, quibus quadratis æquale est parallelogrammū γλ, ergo γλ est rationale. ergo linea γμ est rationalis longitudine commensurabilis lineæ γδ. Rursus quoniam id quod fit bis ex ακ, κβ est mediale, ergo & illi æquale nempe parallelogrammum ζλ, erit mediale. ergo linea ζμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ. Et quoniam quadrata linearum ακ, κβ sunt rationalia, id uero quod fit bis ex ακ, κβ mediale, ergo quadrata linearum ακ, κβ sunt incommensurabilia

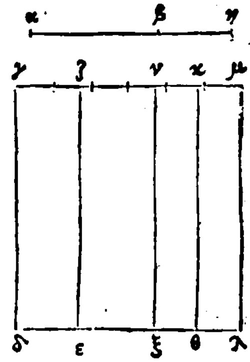
bilia

bilia ei, quod fit bis ex α κ, κ ϛ. Est autẽ quadratis linearũ α κ, κ ϛ æquale parallelogrammum γ λ: ei uero quod fit bis ex α κ, κ ϛ æquale ζ λ, ergo γ λ erit incommensurabile ipsi ζ λ. ergo & linea γ μ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ μ: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles, & linea γ ζ est residuum per 73: dico præterea esse primum residuum. Cum enim quadratorum linearum α κ, κ β sit id quod fit ex α κ, κ β medium proportionale per lemma positum post 53: sit autem quadrato lineæ α κ, æquale parallelogrammum γ θ, ei uero quod fit ex α κ, κ ϛ æquale ν λ: quadrato uero lineæ κ β æquale ξ λ. ergo inter parallelogramma γ θ, ξ λ medium proportionale est ν λ. ergo sicut γ θ ad ν λ, ita ν λ ad ξ λ. Sed sicut γ θ ad ν λ, ita linea γ ξ ad lineam ν μ: sicut autem ν λ ad ξ λ, ita linea ν μ ad lineam ξ μ. sicut ergo linea γ ξ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam ξ μ. ergo parallelogrammum ex γ ξ, ξ μ est æquale quadrato ν μ, hoc est quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniam quadratum lineæ α κ est commensurabile quadrato lineæ κ β, ergo & γ θ erit cõmensurabile ipsi ξ λ: sicut autem γ θ ad ξ λ, ita linea γ ξ ad lineam ξ μ. ergo linea γ ξ erit longitudine commensurabilis lineæ ξ μ. ergo per 18. linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Est autem linea γ μ longitudine commensurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ est residuum primum. Ergo quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum facit alterum latus residuum primum.

Nonagesimumoctauum Theorema.

II

Quadratum residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuũ secundum.



Sit residuum mediale primum αβ, rationalis uero γδ: et quadrato lineæ αβ æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γε, faciens alterum latus γζ. dico lineam γζ esse residuum secũdum. Sit enim lineæ αβ linea conuenienter iuncta βκ, ergo lineæ ακ, βκ sunt mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes. Et quadrato lineæ ακ æquale secundum lineam γδ applicetur γθ faciens alterum latus γκ: quadrato uero lineæ κβ æquale applicetur κλ faciens alterum latus κμ. totũ ergo γλ est æquale ambobus quadratis linearum ακ, κβ, quæ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo & parallelogramma γθ, κλ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo per 16. totum γλ est utrique γθ, κλ commensurabile: ergo per corollarium 24 totum γλ est etiam mediale. ergo linea γμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ per 23. Et quoniam γλ est æquale quadratis linearũ ακ, κβ, quadrata uero linearum ακ, κβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex ακ, κβ, et quadrato lineæ αβ per 7.2. quadrato uero lineæ αβ est æquale parallelogrammum γε: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex ακ, κβ est æquale residuo parallelogrãmo ζλ: sed id quod fit bis ex ακ, κβ est rationale, ergo ζλ erit rationale, ergo linea ζμ est

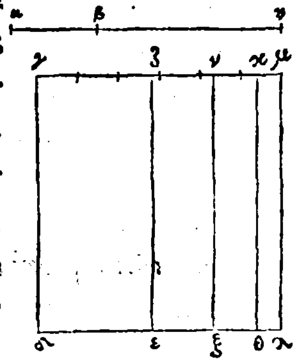
ratio-

rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ γ ʌ per 21. Cum igitur parallelogrammum γ λ sit mediale, parallelogrammum uero ζ λ sit rationale, ergo sunt incõmẽsurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ erit residuum. dico præterea esse residuũ secundum. Secetur enim linea ζ μ bifariam & æqualiter in puncto ν: à quo puncto parallela ad lineam γ ʌ ducatur linea ν ξ. ergo utrũq; ex ζ ξ, ν λ est æquale parallelogrãmo ex α κ, κ ϛ. Et quoniam quadratorum linearum α κ, κ ϛ medium proportionale est id quod fit ex α κ, κ ϛ, ergo & parallelogrammorum γ θ, χ λ medium proportionale est ν λ. Sed sicut γ θ est ad ν λ, ita linea γ χ ad lineam ν μ: sicut autem ν λ ad χ λ, ita linea ν μ ad lineã χ μ. sicut ergo linea γ χ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam χ μ. ergo parallelogrammum ex γ χ, χ μ est æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Sed parallelogrammum γ θ est commẽsurabile ipsi χ λ, ergo & linea γ χ lineæ χ μ erit commensurabilis longitudine. ergo per 18. linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem linea ζ μ, quæ dicitur cõuenienter iuncta cõmensurabilis longitudine lineæ rationali γ ʌ, ergo linea γ ζ est residuũ secundum. Ergo quadratum residui medialis primi &c.

Nonagesimumnonum Theorema.

Quadratum residui medialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum tertium.

Sit linea αβ residuum mediale secũdum, rationalis uero sit linea γδ: & quadrato lineæ αβ æquale secundum lineã γδ applicetur parallelogrammum γε faciens alterum latus γζ: dico lineam γζ esse residuum tertium. Sit enim lineæ αβ linea conuenienter iuncta βκ, ergo lineæ ακ, κβ sunt mediales potentia tantum commensurabiles continentes mediale & cætera, ut in proximo theoremate. ergo linea γμ est rationalis lõgitudine incommensurabilis lineæ rationali γδ: & utrũque ex ζξ, νλ est æquale ei, quod fit ex ακ, κβ: sed id quod fit ex ακ, κβ est mediale, ergo id quod fit bis ex ακ, κβ est etiam mediale: ergo & totum ζλ est etiam mediale. Ergo linea ζμ est rationalis & lõgitudine incommensurabilis lineæ γδ. Et quoniam lineæ ακ, κβ sunt longitudine incommensurabiles, ergo & quadratum lineæ ακ erit incommensurabile parallelogrammo ex ακ, κβ: sed quadrato lineæ ακ sunt commensurabilia quadrata linearum ακ, κβ: parallelogrammo uero ex ακ, κβ est commensurabile id, quod fit bis ex ακ, κβ: ergo quadrata linearum ακ, κβ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex ακ, κβ. ergo & eis æqualia parallelogramma γλ, ζλ sunt incommensurabilia: ergo & linea γμ erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ζμ, & sunt ambæ rationales. ergo linea γζ est residuum: dico præterea esse residuum tertium. Cum enim sit commensurabile quadratũ lineæ ακ, hoc est γθ, quadrato lineæ

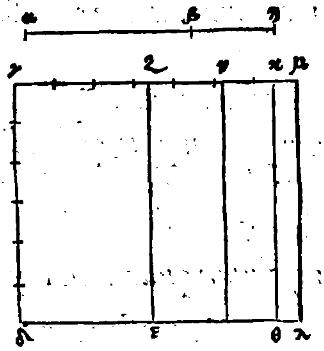


βκ,

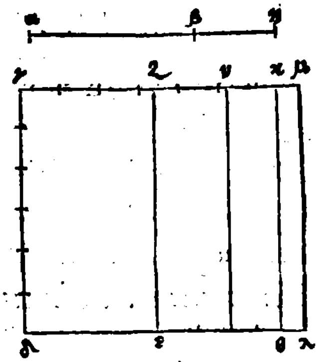
ϐκ, hoc est parallelogrãmo κλ. ergo & linea γκ erit longitudine commẽsurabilis lineæ κμ. Eadem ratione qua usi sumus in præcedenti, probabitur parallelogrammũ ex γκ, κμ esse æquale quadrato lineæ νμ, hoc est quartæ parti quadrati lineæ ζμ. Ergo linea γμ poterit plus, quã linea ζμ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & neutra ex lineis γμ, ζμ est longitudine commensurabilis lineæ rationali γδ. ergo linea γζ est residuum tertium. Ergo quadratũ residui medialis secundi &c.

Centesimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuũ quartum.



Sit linea minor αϐ, rationalis uero γδ: secundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum γε, faciens alterum latus γζ: dico lineam γζ esse residuum quartum. Sit enim lineæ αβ linea conuenienter iuncta ϐκ, ergo lineæ ακ, βκ sunt potentia incommẽsurabiles, facientes compositũ ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale, & cætera sint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum γλ erit rationale. ergo & linea γμ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ γδ. Et quoniam id quod fit bis ex ακ, κϐ est mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ζλ erit mediale. ergo linea ζμ erit rationalis lõgitudine incõmen-



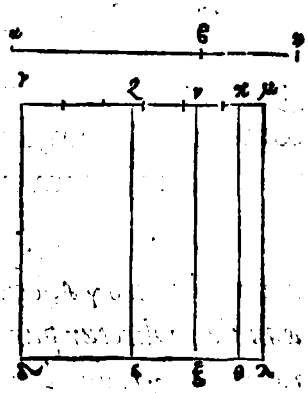
ſurabilis lineæ γ δ: ſed linea γ μ eſt longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo per 13. uel 14. huius linea γ μ erit longitudine incõmenſurabilis lineæ ζ μ. ſed ſunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantũ cõmenſurabiles. ergo linea γ ζ erit reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum. Cũ enim lineæ α κ, κ β. ſint potentia incommenſurabiles, ergo & ipſarum quadrata, hoc eſt, illis æqualia parallelogramma γ θ, κ λ ſunt incõmenſurabilia. ergo & linea γ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ μ. Similiter oſtendemus parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. ergo per 19. linea γ μ poterit plus, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt tota γ μ longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ erit reſiduum quartum. Ergo *quadratũ lineæ minoris &c.*

Centeſimumprimum Theorema.

Quadratum lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quintum.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β: rationalis uero γ δ, ſecundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ε faciẽs alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum quintũ. Sit

enim



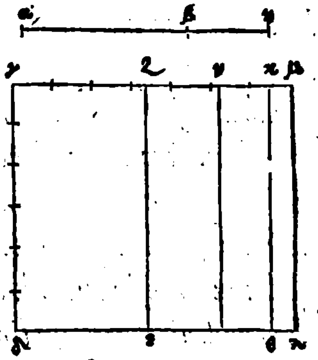
enim lineæ α β, linea conuenienter iuncta ε κ. ergo lineæ α κ, β κ sunt potentia incõmensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: id uero quod fit ex ipsis rationale. fiant enim omnia eo modo quo in præcedẽtibus, ergo totum γ λ erit mediale. ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: & utrũque ex parallelogrammis ζ ξ, ν λ erit rationale, ergo & totum ζ λ erit etiam rationale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine cõmensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam γ λ est mediale, parallelogrammum uero ζ λ rationale, ergo γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: & linea γ μ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea γ ζ est residuum. dico præterea esse residuum quintum: similiter enim probabimus parallelogrãmũ ex γ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniã quadratũ lineæ α κ, hoc est, parallelogrammũ γ θ est incõmensurabile quadrato ε κ, hoc est, parallelogrãmo κ λ, ergo linea γ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ κ μ. ergo per 19 linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & est conuenienter iuncta linea ζ μ longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo linea γ ζ est residuum quintum. Ergo quadratum &c.

Centesimumsecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali superficie facientis totam medialem, secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum sextum.

Sit linea cum mediali superficie faciēs totum mediale α ϛ, rationalis uero γ δ, secundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ι, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ esse residuum sextum. Sit enim lineæ α β linea conuenienter iuncta β κ, ergo lineæ α κ, β κ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis mediale: præterea incommensurabile compositū ex quadratis ipsarum ei, quod fit ex ipsis. fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum γ λ erit mediale (quia est æquale composito ex quadratis linearū α κ, κ ϛ, quod est mediale.) ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: similiter parallelogrammum ζ λ erit mediale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α κ, β κ est incommēsurabile ei, quod fit bis ex α κ, κ ϛ, ergo illis æqualia γ λ, ζ λ erunt incōmensurabilia. ergo & lineæ γ μ, ζ μ erūt longitudine incommensurabiles: sunt autem ambæ rationales, ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea γ ζ erit residuū: dico præterea esse residuum sextū. fiāt cætera ut in superioribus. Et quoniam lineæ α κ, ϛ κ sunt potentia incommensurabiles, ergo quadrata ipsarum sunt incommensurabilia, hoc est, illis

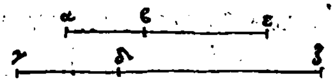
illis



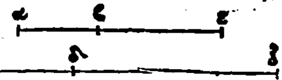
*illis æqualia γθ,κλ.ergo & linea γκ lineæ κμ erit longitudine incommensurabilis,sicut in superioribus demonstrabatur parallelogrammorum γθ,κλ esse medium proportionale ιλ.ergo per 19.linea γμ plus poterit,quàm linea μζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ex ipsis γμ,ζμ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali γδ.ergo linea γζ est residuum sextum.*Ergo *quadratum &c.*

Centesimumtertium Theorema.

Linea residuo commensurabilis longitudine,est & ipsa residuum eiusdem ordinis.



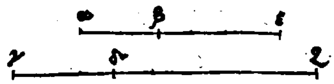
*Sit residuum αβ,cui sit linea commensurabilis longitudine γδ.dico lineam γδ esse & ipsam residuum & ordinis eiusdem,cuius & residuum αβ.*Cũ *enim linea αε sit residuũ,sit linea ei conuenienter iuncta ε.ergo linea αε, βε sunt rationales potentia tantum commensurabiles: sitq; sicut linea αβ ad lineam γδ,ita linea βε ad lineã δζ:ergo sicut unum ad unum,ita omnia ad omnia per* 12.5.Erit *ergo sicut linea αβ ad lineam γδ,ita tota linea αε,ad totam lineam γζ,& linea βε ad lineam δζ. ergo per* 10 *huius,linea αε erit commensurabilis longitudine lineæ γζ,& linea βε lineæ δζ:sed linea αε est rationalis,ergo & linea γζ erit rationalis.similiter &*



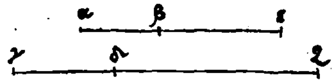
linea δζ erit rationalis, quia linea βε cui ipsa est commensurabilis est etiam rationalis: sed quoniam est sicut linea βε ad lineam αε, ita linea δζ ad lineā γζ, & lineæ βε, αε sunt potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ δζ, γζ sunt potentia tantum commensurabiles. ergo linea γδ est residuū. dico præterea esse residuū eiusdem ordinis cuius & linea αβ. Cum enim sit ut modo diximus sicut linea αε, ad lineam γζ ita linea βε ad lineā δζ. ergo permutata proportione sicut αε ad βε, ita γζ ad δζ: linea autem αε potest plus quàm linea εβ, aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ergo & linea γζ potest plus quàm linea δζ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15. Et quidem si linea αε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cum linea αε sit longitudine commensurabilis lineæ γζ. ergo per 12. etiam linea γζ erit longitudine cōmensurabilis propositæ rationali. ergo utraque linea αβ γδ erit residuum primū. Quòd si linea βε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cū linea βε sit longitudine commensurabilis lineæ δζ, ergo linea δζ erit etiam longitudine cōmensurabilis propositæ rationali: & tunc utraque linea αβ, γδ erit residuum secundū. Quòd si neutra ex lineis αε, βε erit longitudine commensurabilis propositæ rationali, neutra etiā ex lineis γζ, δζ erit propositæ rationali longitudine commensurabilis per 13. uel 14. huius: & tunc utraque linea αβ, γ δ erit residuum tertium. Quòd si linea α ε plus potest quàm linea β ε quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, similiter & linea γ ζ plus poterit quàm linea δ ζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15: & quidem si linea α ε erit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea γ ζ erit eidem commensurabilis. & sic erit utraq; α β, γ δ residuum quartũ: si uero linea β ε erit commensurabilis longitudine rationali, similiter & linea δ ζ, & sic erit utraque α β, γ δ residuum quintum. si uero neutra ex lineis α ε, β ε erit longitudine commensurabilis rationali, similiter neutra ex lineis γ ζ, δ ζ erit eidem commensurabilis: & sic erit utraque α β, γ δ residuum sextum. Ergo linea γ δ erit residuũ eiusdẽ ordinis cuius & α β.

Centesimumquartum Theorema.

Linea commensurabilis residuo mediali, est & ipsa residuum mediale & eiusdem ordinis.



Sit residuum mediale α β, cui sit commensurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum linea γ δ. dico γ δ esse residuum mediale & eiusdẽ ordinis. Cum enim α β sit residuum mediale, sit ei conuenienter iuncta β ε, ergo lineæ α ε, β ε sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Sit autẽ sicut α β ad γ δ, ita β ε ad δ ζ. simili ratione qua in præcedẽti usi sumus, linea α ε erit longitudine & potentia, siue potentia tantum commensurabilis lineæ γ ζ, & linea β ε lineæ δ ζ. ergo per 24 linea γ ζ erit medialis: & linea δ ζ erit medialis, quia est cõmen-



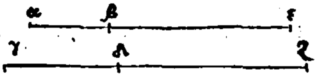
ſurabilis lineæ mediali βε. ſimiliter lineæ γζ, δζ erunt potentia tantum commenſurabiles: quia habent eandem proportionem inter ſe, quam lineæ αε, βε, quæ ſunt inter ſe commenſurabiles potentia tantum. ergo linea γδ eſt reſiduum mediale. dico præterea eſſe eiuſdem ordinis cuius & αβ. Cum enim ſit, ſicut linea αε ad lineam βε, ita linea γζ ad lineam δζ: ſed ſicut linea αε ad lineam βε, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, βε per 1.6: ſicut autem linea γζ ad lineam δζ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. ergo ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, βε, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. permutata ergo proportione ſicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammum ex αε, βε ad parallelogrammũ ex γζ, δζ. Sed quadratum lineæ αε eſt cõmẽſurabile quadrato lineæ γζ (quia linea αε eſt commenſurabilis lineæ γζ.) ergo & parallelogrammum ex αε, βε erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ergo ſi parallelogrammũ ex αε, βε eſt rationale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit rationale: & tunc utraque linea αβ, γδ erit reſiduũ mediale primum. Si uero parallelogrammum ex αε, βε erit mediale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit mediale per corollarium 24: et tunc utraque linea αβ, γδ erit reſiduum mediale ſecundum. ergo linea γδ erit reſiduũ mediale eiuſdem ordinis. Hoc theorema cõceptũ eſt uniuerſaliter, ſiue linea ſit commẽſurabilis longitudine & potentia, ſiue potentia tantum reſiduo mediali, eſſe &

ipſam

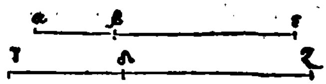
ipsam residuum mediale, & eiusdem ordinis. Idem *dicendum de tribus proximis theorematibus.*

Centesimumquintum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ minori, est & ipsa linea minor.



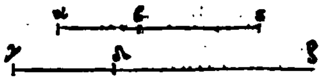
Sit linea minor αβ, cui sit commensurabilis γδ. dico lineã γδ esse lineam minorem: fiãt enim eadem quæ in præcedentibus. quoniam lineæ αε, βε sunt potentia incommensurabiles, ergo & lineæ γζ, δζ sunt potentia incommẽsurabiles per 22.6. & 10 huius. Rursus *per 22.6 sicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ βε, ita quadratum lineæ γζ ad quadratũ lineæ δζ. cõiuncta ergo proportione, sicut quadrata linearum αε, βε ad quadratum lineæ βε, ita quadrata linearum γζ, δζ ad quadratum lineæ δζ: & permutata proportione sicut quadrata linearũ αε, βε ad quadrata linearum γζ, δζ, ita quadratum lineæ βε ad quadratum lineæ δζ. sed quadratum lineæ βε est commensurabile quadrato lineæ δζ (quia lineæ βε, δζ sunt cõmensurabiles.) ergo & compositũ ex quadratis linearum αε, βε erit commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, δζ: sed compositũ ex quadratis linearũ αε, βε est rationale, ergo & compositum ex quadratis linearum γζ, δζ erit rationale.* Rursus *cũ sit sicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, βε, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. (sicut diximus in proximo theoremate) permutata er-*



go proportione ſicut quadratũ lineæ αε ad quadracũ lineæ γζ, ita parallelogrãmum ex αε, βε ad parallelogrãmũ ex γζ, δζ. ſed quadratũ lineæ αε eſt cõmenſurabile quadrato lineæ γζ, quia lineæ αε, γζ ſunt cõmenſurabiles, ergo & parallelogrãmũ ex αε, βε erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ſed parallelogrammũ ex αε, βε eſt mediale, ergo & parallelogrammum ex γζ, δζ erit mediale. ergo lineæ γζ, δζ erunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, parallelogrãmũ uero ex ipſis mediale. Ergo *linea γδ erit linea minor.*

Centeſimumſextum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ cum rationali ſuperficie facienti totam medialem, eſt & ipſa linea cũ rationali ſuperficie faciens totam medialem.



Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem αβ, cui ſit commẽſurabilis linea γδ. dico lineã γδ eſſe cũ rationali ſuperficie facientẽ totam medialem. Sit lineæ αβ linea conuenienter iuncta βε, ergo lineæ αε, βε ſunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, parallelogrammũ uero ex ipſis rationale: fiant omnia quæ in præcedẽtibus. Similiter quoque demonſtrabimus ſicut linea αε ad lineam βε, ita lineam γζ ad lineam δζ: & compoſitũ ex quadratis linearum αε, βε eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod ſit ex αε, βε

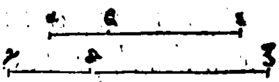
eſſe

esse similiter commensurabile ei, quod fit ex γζ, δζ. quare & similiter lineæ γζ, δζ erunt potentia incommensurabiles facientes ea quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ erit etiam linea cũ rationali superficie faciens totã medialẽ.

Centesimumseptimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ cum mediali superficie facienti totam medialem, commensurabilis est & ipsa cum mediali superficie faciens totam medialem.

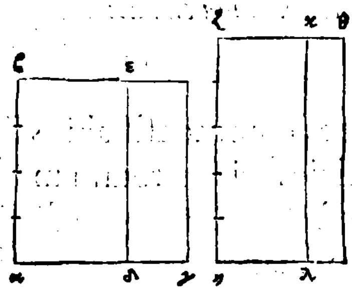
Sit linea cum mediali superficie faciẽs totam medialẽ αβ, cui sit commensurabilis γδ. dico lineam γδ esse etiam lineam cum mediali superficie facientem totam medialẽ. Sit enim lineæ αβ linea cõueniẽter iuncta βι, & fiant cætera, ut in superioribus.



ergo lineæ αι, βι sunt potẽtia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiã mediale: & compositum ex quadratis incommensurabile ei, quod fit ex ipsis. Sunt autẽ, ut antea demonstratum est lineæ αι, βι commensurabiles lineis γζ, δζ, & compositum ex quadratis ipsorum αι, βι commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod fit ex αι, βι cõmensurabile ei, quod fit ex γζ, δζ. ergo & lineæ γζ, δζ, sunt potentia incommensurabiles facientes cætera omnia quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ est cum mediali superficie faciens totam medialem.

Centesimumoctauum Theorema.

Si de superficie rationali detrahatur superficies medialis, linea quæ reliquam superficiem potest, est alterutra ex duabus irrationalibus, aut residuum aut linea minor.



De *superficie rationali βγ detrahatur superficies medialis βδ. dico lineam quæ reliquam superficiē δγ potest, esse alterutram ex duabus irrationalibus, aut residuū aut lineā minorem. Sit enim linea rationalis ζκ, secundum quam æqualis superficiei βγ applicetur superficies rectangula parallelogramma ηθ: superficiei uero εδ æqualis applicetur superficies parallelogrammo ηκ. reliquum ergo parallelogrammū δγ est æquale reliquo parallelogrammo λθ. Cum igitur εγ sit rationale, ipsum uero εδ sit mediale, ergo & ηθ erit rationale: ipsum uerò ηκ mediale. ergo & linea ζθ erit rationalis longitudine commensurabilis ipsi ζη per 21: linea uero ζκ erit rationalis longitudine incommensurabilis eidem lineæ ζη per 23. ergo linea ζθ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζκ per 13. ergo lineæ ζθ ζκ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: ergo linea κθ erit residuū, ipsi uero conuenienter iuncta linea κζ: linea autem ζθ plus potest, quàm linea ζκ, aut quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis. Possit prius quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cum sit tota ζθ longitudine commensurabilis lineæ rationali ζη. ergo linea κθ est residuum primum.*

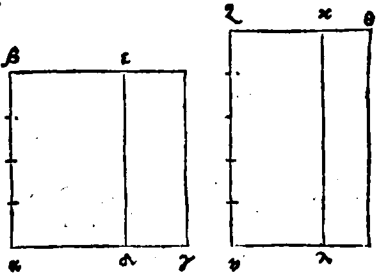
ergo

ergo per 91 linea potens parallelogrammum λ θ, hoc est ι γ est residuũ. Quòd si linea ζ θ plus possit quã linea ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, cum linea ζ θ sit commensurabilis longitudine lineæ rationali ζ κ, ergo linea κ θ erit residuum quartum. Ergo per 94 linea potens superficiem λ θ, hoc est γ ι est linea minor.

Centesimumnonum Theorema.

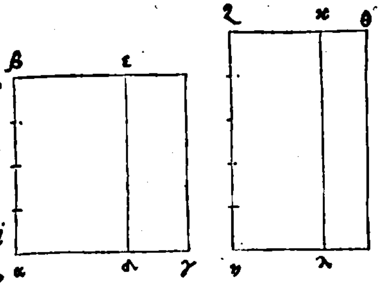
Si de superficie mediali detrahatur superficies rationalis, aliæ duæ irrationales fiunt, aut residuum mediale primum, aut cum rationali superficie faciens totam medialem.

De superficie mediali β γ detrahatur rationalis superficies β δ, dico lineã quæ potest superficiem reliquã ι γ esse alterutram duarum irrationaliũ, uel residuũ mediale primum, uel cum rationali superficie faciẽtem totã medialem.



Sit rationalis linea ζ κ, secundũ quam applicentur superficies, ut in proximo dictum est: erit similiter linea ζ θ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ζ κ: linea uerò ζ κ erit rationalis longitudine commensurabilis eidem ζ κ: & lineæ ζ θ, ζ κ rationales erunt potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea κ θ erit residuum: illi uerò conuenienter iuncta linea ζ κ. Linea autem ζ θ plus potest quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõ-

mensurabilis. Et *quidem si linea ζθ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cũ linea cõuenienter iuncta ζκ sit longitudine commensurabilis lineæ*



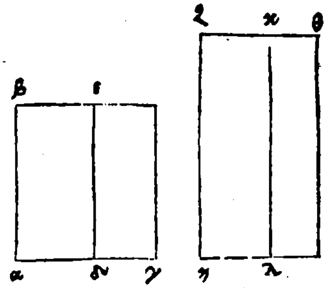
rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum secũdum: quare linea quæ superficiem λθ, hoc est εγ potest, est residuũ mediale primũ per 92. Quòd si linea ζθ plus potest quã linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum linea conuenienter iuncta sit longitudine commẽsurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum quintum: quare linea quæ superficiẽ λθ, hoc est, εγ potest, est cum rationali superficie faciens totam medialem per 95.

Centesimumdecimum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies medialis, quæ sit incõmensurabilis toti, reliquæ duæ fiunt irrationales, aut residuum mediale secundum, aut cum mediali superficie faciens totam medialem.

Sicut in præcedentibus descriptionibus, hìc quoque detrahatur de superficie mediali βγ superficies medialis βδ: quæ βδ sit incommensurabilis toti βγ. dico lineam quæ potest superficiem εγ, esse alterutram duarũ irrationalium, uel residuum mediale secundũ, uel cum mediali superficie facientem totam medialem. Cum enim utraque

superficies

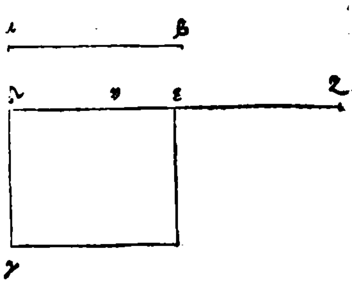


superficies ε γ, ε δ sit medialis, ergo utraque linea ζ θ, ζ κ est rationalis, & rationali ζ κ lõgitudine incommensurabilis. Est autẽ superficies β γ, hoc est κ θ incommẽsurabilis ipsi β δ, hoc est κ λ. ergo lineæ ζ θ, ζ κ sũt incommensurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea κ θ erit residuum: ipsi uero conuenienter iuncta, ζ κ. linea autem ζ θ plus potest quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et *quidẽ si linea ζ θ plus potest, quàm ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. cum neutra ex ζ θ, ζ κ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζ κ, ergo linea κ θ erit residuum tertium. ergo per 93. linea quæ potest superficiem λ θ, hoc est ι γ erit residuum mediale secundũ.* Q*uòd si linea ζ θ plus potest quàm linea ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ex ζ θ, ζ κ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζ κ, ergo linea κ θ erit residuum sextũ.* E*r-go per 96 linea quæ superficiem λ θ, hoc est ι γ potest, erit cum mediali superficie faciens totam medialem.*

Centesimumundecimum Theorema.

Linea quæ residuum dicitur, non est eadem cum ea quæ dicitur binomium.

Sit residuum α β, dico α β non esse idem cum binomio. N*am si esse potest, est. Sitq; linea rationalis δ γ, secũdum quam*



æquale quadrato lineæ α β applicetur parallelogrammum rectangulũ γ ε faciens alterũ latus δ ε. cum linea α β sit residuum, ergo linea δ ε erit residuum primũ per 97. Sit ipsi cõuenienter iuncta ε ζ, ergo lineæ δ ζ, ζ ε sunt rationales potentia tantũ commẽsurabiles, & linea δ ζ plus potest quàm linea ε ζ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis: & δ ζ, est longitudine cõmensurabilis rationali γ δ. R*ursus per positionem linea α β est binomium, ergo linea δ ε est binomium primum per* 60. D*iuidatur in sua nomina in puncto η: sitq; maius nomẽ δ η, ergo lineæ δ η, η ε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea δ η plus potest quàm linea η ε quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, eademq; linea δ η est longitudine commensurabilis rationali γ δ.* Ergo *per* 12 *lineæ δ η, δ ζ sunt longitudine commensurabiles: ergo & reliqua linea η ζ erit longitudine commensurabilis toti δ ζ per* 16, *aut per corollarium eiusdem.* C*um igitur linea δ ζ sit cõmensurabilis lineæ ζ η, sit autem linea δ ζ rationalis, rationalis quoque erit ζ η.* C*um autem linea δ ζ sit longitudine commensurabilis lineæ ζ η: sit autem linea δ ζ longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ, ergo per* 14 *lineæ ζ η, ζ ε sunt longitudine incommensurabiles.* S*unt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζ η, ζ ε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea ε η erit residuũ: sed est rationalis ut modo conclusum est: hoc autem est*

impoßibile

impoſsibile, eandẽ ſcilicet lineam eſſe rationalem & irrationalem, ergo reſiduum nõ erit idem quod binomiũ. Linea quæ reſiduũ dicitur, & cæteræ quinq; eam conſequentes irrationales, neque lineæ mediali neque ſibi ipſæ inter ſe ſunt eædem. Nam quadratũ lineæ medialis ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus rationalem lineam longitudine incommẽſurabilem ei, ſecundum quam applicatur per 23. quadratũ uerò reſidui ſecundum rationalem applicatum, facit alterũ latus reſiduum primum per 97. quadratum uerò reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſecũdum per 98. quadratum uerò reſidui medialis ſecundi, facit alterum latus reſiduum tertium per 99. quadratum uerò lineæ minoris, facit alterum latus reſiduum quartum per 100. quadratum uero lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem, facit alterum latus reſiduum quintum per 101. quadratum uero lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum per 102. Cum igitur dicta latera quæ ſunt latitudines cuiuſque parallelogrammi unicuique quadrato æqualis & ſecundum rationalem applicati differãt, & à primo latere & ipſa inter ſe, (nam à primo differunt, quoniam eſt rationalis linea: inter ſe uero differũt, quoniam ſunt reſidua non eiuſdem ordinis) conſtat ipſas quoq; lineas irrationales inter ſe differentes eſſe. Et quoniam demonſtratum eſt reſiduum non eſſe idem quod binomiũ: quadrata autem reſidui & quinque linearum irrationa-

lium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciunt altera latera ex residuis eiusdem ordinis, cuius sunt & residua, quorũ quadrata applicantur rationali: similiter & quadrata binomij & quinque linearum irrationalium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciũt altera latera ex binomijs eiusdem ordinis, cuius sunt & binomia, quorũ quadrata applicantur rationali. ergo lineæ irrationales quæ consequuntur binomium, & quæ consequũtur residuũ, sunt inter se differentes. Quare dictæ lineæ omnes irrationales sunt numero 13.

1. Medialis.
2. Binomium.
3. Bimediale primum.
4. Bimediale secundum.
5. Maior.
6. Potens rationale & mediale
7. Potens duo medialia.
8. Residuum.
9. Residuum mediale primum.
10. Residuũ mediale secundum.
11. Minor.
12. Faciens cum rationali superficie totam medialem.
13. Faciens cum mediali superficie totam medialem.

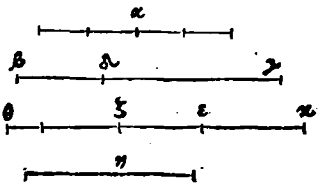
Centesimumduodecimum Theorema.

Quadratum, lineę rationalis secundum binomium applicatum facit alterum latus residuũ, cuius nomina sunt commẽsurabilia binomij nominibus, & in eadem proportione: præterea id quod fit residuũ, eundẽ ordinem retinet quem binomium.

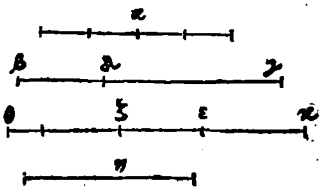
Sit linea rationalis α, *binominm* β γ, *cuius maius nomen sit* γ δ: *& quadrato lineæ* α *sit æquale parallelogrammum*

ex

ex β γ, ι ζ. dico lineam ι ζ esse residuũ, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius binomij β γ, quæ nomina sunt γ δ, δ ϛ: & in eadem proportione præterea linea ι ζ eundẽ ordinem & locũ tenet inter residua, quẽ binomium ϛ γ retinet inter binomia. Sit rursus quadrato lineæ α æquale parallelogrammum ex ϛ δ, κ. Cum igitur parallelogrammum ex ϛ γ, ι ζ sit



æquale parallelogrãmo ex ϛ δ, κ, cum utrunq; sit æquale quadrato lineæ α, est igitur sicut linea γ β ad lineam ϛ δ, ita linea κ ad lineam ι ζ per 14.6. sed γ ϛ est maior quàm β δ, ergo & κ erit maior quàm ι ζ. Sit linea ι θ æqualis lineæ κ. est ergo sicut γ β ad γ δ, ita θ ι ad ι ζ per 7.5. ergo disiuncta proportione per 17.5. sicut γ δ ad β δ, ita θ ζ ad ζ ι. fiat sicut θ ζ ad ζ ι, ita ζ κ ad ι κ, (quod quẽadmodum fiat dicemus ad finem demonstrationis.) ergo per 12.5. sicut linea ζ κ ad lineam ι κ, ita tota linea θ κ ad totã ζ κ. Sed sicut ζ κ ad ι κ, ita est γ δ ad δ β: (quia ζ κ est ad ι κ sicut θ ζ ad ζ ι, & θ ζ ad ζ ι est sicut γ δ ad δ β.) ergo sicut linea θ κ ad ζ κ, ita γ δ ad δ β. sed quadratum lineæ γ δ est commensurabile quadrato lineæ δ β, ergo & quadratum lineæ θ κ quadrato lineæ ζ κ erit commẽsurabile per 22.6 & 10 huius. Sed tres lineæ θ κ, ζ κ, ι κ sunt proportionales in continua proportione: (ut modo dictum est.) ergo per secundum corollarium 20.6 quadratum lineæ θ κ erit ad quadratũ lineæ ζ κ, sicut linea θ κ ad lineam ι κ. ergo linea θ κ erit longitudine commensurabilis lineæ ι κ: quare per 16 linea θ ι erit longitudi-

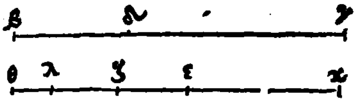


ne commẽsurabilis lineæ ι κ. Et quoniam quadratũ lineæ α est æquale parallelogrãmo ex θ ι, ε δ, & quadratum lineæ α est rationale, ergo & parallelogrammũ ex θ ι, ε δ erit rationale. ergo per 21 linea θ ι erit rationalis & longitudine cõmensarabilis lineæ ε δ: quare & linea ι κ, quæ est ipsi θ ι longitudine commẽsurabilis, erit etiam rationalis & longitudine commẽsurabilis ipsi β δ. Cum igitur sit sicut linea γ δ ad δ ε, ita ζ κ ad ι κ: (quia supra dictum est, sicut γ δ ad δ β, ita θ ζ ad ζ ι, & sicut θ ζ ad ζ ι, ita ζ κ, ad ι κ,) lineæ uero γ δ, δ β sint potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ ζ κ, ι κ erunt potentia tantum commensurabiles. Et cum sit sicut γ δ ad δ β, ita ζ κ ad ι κ, ergo cõuersa proportione sicut δ ε ad γ δ, ita ι κ ad ζ κ: & permutata proportione sicut δ β ad ι κ, ita γ δ ad ζ κ: sed lineæ δ β, ι κ sunt longitudine commensurabiles, (ut modo probatum est) ergo & lineæ γ δ, ζ κ sunt longitudine commẽsurabiles: sed linea γ δ, est rationalis, ergo & linea ζ κ erit etiam rationalis: ergo lineæ ζ κ, ι κ sunt rationales potẽtia tantam commẽsurabiles. ergo linea ζ ι erit residuum, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus binomij & in eadem proportione. dico præterea illud residuum esse eiusdem ordinis cuius & binomiũ. Nam linea γ δ plus potest, quàm linea β δ aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut lineæ incommensurabilis: & quidem si linea γ δ plus potest, quàm β δ quadrato lineæ sibi longitudine commẽsurabilis, similiter & linea

ζ κ

ζκ plus poterit quàm linea ικ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15. Et quidẽ si linea γδ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali, cum modo probatum sit lineas γδ, ζκ esse longitudine commensurabiles, ergo per 12 etiam linea ζκ erit longitudine commensurabilis lineæ rationali: tunc igitur linea βγ erit binomium primum, similiter & linea ζι erit residuum primũ. Quòd si linea βδ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea ικ erit eidẽ cõmensurabilis: tunc ergo linea βγ erit binomium secundum, & linea ζι residuum secundum. Quòd si neutra ex γδ, δβ fuerit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζκ, ικ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea βγ binomium tertium, & linea ζι residuum tertium. Quòd si linea γδ plus potest quàm linea βδ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, similiter & linea ζκ plus poterit quàm ικ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15. Et quidem si linea γδ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea ζκ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea βγ binomium quartum, & linea ζι residuum quartum. Quòd si linea βδ fuerit rationali commensurabilis, similiter & linea ικ erit eidem commensurabilis, tunc linea βγ erit binomium quintũ: & linea ζι residuũ quintũ. Quòd si neutra ex γδ, βδ erit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζκ, ικ erit eidem commensurabilis, tunc linea βγ erit binomium sextum, & linea ζι residuum sextum. Ergo *linea ζι erit residuum, cuius nomina, nempe ζκ, ικ sunt com-*

mensurabilia nominibus binomij ς γ, nominibus inquã γ δ, δ β: & sunt in eadem proportione, & habent eundem ordinem & locum inter residua quem binomium inter binomia. Nunc illud dicamus quomodo fiat sicut linea θ ζ ad lineam ζ ι, ita linea ζ κ ad lineam ι κ. linea γ δ est maior linea β δ. ergo

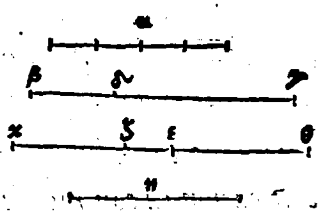


& linea θ ζ erit maior linea ζ ι. Detrahatur de linea θ ζ æqualis lineæ ζ ι, quæ sit ζ λ per 3.1. Et reliqua sit θ λ. ergo linea θ λ erit minor quam linea θ ζ, quia θ ζ est æqualis lineis θ λ, λ ζ. fiat sicut θ λ, ad θ ζ, ita ζ ι ad ζ κ per 12.6: ergo per conuersam proportionem sicut θ ζ ad θ λ, ita ζ κ ad ζ ι. Ergo per euersam proportionem sicut linea θ ζ ad λ ζ, hoc est ad ei æqualem ζ ι, ita linea ζ κ ad ι κ.

Centesimum decimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ rationalis secundum residuum applicatum, facit alterum latus binomium, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione: præterea id quod fit binomium est eiusdẽ ordinis, cuius & residuum.

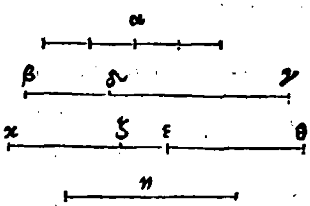
Sit linea rationalis α, residuũ uero β δ: & quadrato lineæ α sit æquale id quod fit ex β δ, κ θ: itaque quadratum lineæ rationalis α secundũ ς δ residuũ



applicatum, facit alterum latus κ θ. dico lineam κ θ esse binomium cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius β δ & in eadem proportione: & lineã κ θ

esse

esse eiusdem ordinis binomium, cuius & ε δ est residuū. Sit lineæ ε δ linea cōueniēter iuncta δ γ, ergo lineæ ε γ, δ γ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. & quadrato lineæ α æquale sit parallelogrammum ex β γ, κ: sed quadratum lineæ α est rationale, ergo & parallelogrammum ex β γ, κ est etiam rationale: ergo & linea κ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ ε γ. Cum igitur parallelogrammum ex β γ, κ sit æquale ei quod fit ex β δ, κ θ, ergo sicut ε γ ad ε δ, ita κ θ ad κ: sed ε γ est maior quam β δ, ergo & linea κ θ erit maior quàm κ. Sit lineæ κ æqualis linea κ ι, ergo linea κ ι erit rationalis longitudine commēsurabilis lineæ β γ sicut & linea κ: & cum sit sicut β γ ad ε δ, ita κ θ ad κ ι. euersa ergo proportione sicut ε γ ad δ γ, ita κ θ ad ι θ. fiat sicut κ θ ad ι θ, ita linea ζ θ ad ι ζ, (quod quemadmodum fiat, dicemus ad finē demonstrationis.) ergo erit reliqua κ ζ ad reliquam ζ θ, sicut tota κ θ ad totā θ ι per 19.5, hoc est sicut ε γ ad γ δ: sed lineæ β γ, γ δ sunt potentia tantū commensurabiles, ergo & lineæ κ ζ, ζ θ erunt potentia tantum commēsurabiles. Et quoniam est sicut κ θ ad θ ι, ita κ ζ ad ζ θ, sed & sicut κ θ ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι, ergo sicut κ ζ ad ζ θ, ita ζ θ ad ζ ι: quare sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. ergo sicut κ ζ ad ζ ι, ita quadratum lineæ κ ζ ad quadratum lineæ ζ θ: sed hæc quadrata sunt commēsurabilia, quia lineæ κ ζ, ζ θ sunt potentia commensurabiles. ergo lineæ κ ζ, ζ ι sunt longitudine commensurabiles. Quare per secundā partem 16. lineæ κ ι, ι ζ sunt longitudine commensurabiles: quare per eandem 16. & lineæ κ ζ, κ ι sunt longitudine commensurabiles: sed linea κ ζ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ ϛ γ. ergo & linea κ ζ erit rationalis & longitudine commensurabilis eidem ϛ γ.



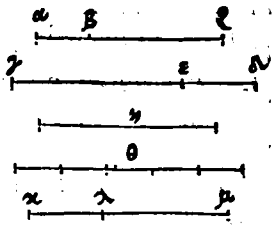
Et quoniã est sicut linea β γ ad γ δ, ita κ ζ ad ζ θ, permutata ergo proportione sicut β γ ad κ ζ, ita γ δ ad ζ θ: sed linea β γ est longitudine commẽsurabilis lineæ κ ζ. ergo & linea γ δ erit longitudine cõmẽsurabilis lineæ ζ θ: sed linea γ δ est rationalis, ergo & linea ζ θ erit rationalis: sed & lineæ β γ, γ δ sunt potentia tantum commensurabiles: ergo & lineæ κ ζ, ζ θ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea κ θ erit binomium, cuius nomina sunt commẽsurabilia nominibus residui, & in eadem proportione. dico præterea illud binomium esse eiusdem ordinis cuius, & residuum ϛ δ. Nam si β γ plus potest quàm γ δ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, etiã linea κ ζ poterit plus quàm ζ θ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis per 15. Quòd si linea ϛ γ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea κ ζ erit eidem rationali commẽsurabilis longitudine per 12: quia lineæ β γ, κ ζ sunt longitudine commensurabiles: & sic erit linea ϛ δ residuum primum, & linea κ θ similiter binomium primum. Quòd si γ δ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam linea ζ θ erit eidem longitudine commensurabilis: & sic erit linea β δ residuum secundum, & linea κ θ binomiũ secundũ. Quòd si neutra ex β γ, γ δ fuerit rationali commensurabilis longitudine

tudine, neutra etiam ex κ ζ, ζ θ *erit eidem commensurabilis: & sic erit linea* β δ *residuum tertium, & linea* κ θ *binomium tertium.* Si *uero linea* ϐ γ *plus potest quàm linea* γ δ *quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, etiam linea* κ ζ *poterit plus quàm linea* ζ θ *quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per* 15. Et *quidem si linea* β γ *fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam* κ ζ *erit eidem commẽsurabilis longitudine: & tunc linea* ϐ δ *erit residuum quartũ, & linea* κ θ *binomium quartũ.* Q*uòd si* γ δ *fuerit rationali commẽsurabilis longitudine, etiam* ζ θ *erit eidem commensurabilis longitudine: & tunc erit linea* β δ *residuum quintum, & linea* κ θ *binomiũ quintum.* Q*uòd si neutra ex* β γ, γ δ *fuerit longitudine commẽsurabilis rationali, similiter neutra ex* κ ζ, ζ θ *erit eidem cõmensurabilis longitudine: & sic linea* β δ *erit residuũ sextum, & linea* κ θ *binomium sextum.* Ergo κ θ *erit binomium, cuius nomina* κ ζ, ζ θ *sunt commẽsurabilia residui* ϐ δ *nominibus* β γ, γ δ, & *in eadem proportione: & linea* κ θ *retinet inter binomia eundem ordinem quem* ϐ δ *inter residua.* N*unc dicamus quomodo fiat sicut linea* κ θ *ad lineam* θ ι, *ita linea* θ ζ *ad lineã* ζ ι. Line*æ* κ θ *ad*

datur in continuum & directum linea æqualis ipsi θ ι: *& sit tota linea* κ λ: *& per* 10.6 *diuidatur linea* θ ι *sicut tota linea* κ λ *diuisa est in puncto* θ: *sitq; linea* θ ι *diuisa in puncto* ζ. Erit *sicut* κ θ *ad* θ λ, *hoc est ad* θ ι, *ita* θ ζ *ad* ζ ι *&c.*

Centesimumdecimumquartum Theorema.

Si parallelogrammum contineatur ex residuo & binomio, cuius nomina sint commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione, linea quæ illam superficiem potest, est rationalis.



Contineatur parallelogrammum ex residuo αβ & binomio γδ, cuius binomij maius nomē sit γε, minus uero εδ: & sint commensurabilia nominibus residui αβ, quæ sint αζ, ζβ, & in eadem proportione. sitq́; potens illud parallelogrammum linea, η. dico lineam illam η, esse rationalem. Proponatur rationalis θ, cuius quadrato æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum faciens alterum latus κλ. ergo linea κλ est residuum per 112: *cuius nomina sint κμ, μλ quæ sunt commensurabilia binomij nominibus γε, εδ, & in eadem proportione per* 112. *Sed per positionem lineæ γε, εδ sunt commensurabiles lineis αζ, ζβ, & sunt in eadē proportione: erit ergo sicut αζ ad ζβ, ita κμ ad μλ. ergo permutata proportione sicut αζ ad κμ, ita ζβ ad μλ. ergo & reliqua αβ ad reliquam κλ erit sicut αζ ad κμ. sed linea αζ est commensurabilis lineæ κμ, quia utraque ex αζ, κμ est cōmensurabilis lineæ γε: ergo & linea αβ erit commensurabilis lineæ κλ. est autem sicut linea αβ ad lineam κλ, ita parallelogrammum ex γδ, αβ ad parallelogrammum ex γδ, κλ per* 1.6. *ergo parallelogrammum ex γδ, αβ est commēsurabile parallelogrammo ex γδ, κλ: sed parallelogrammum ex γδ, κλ est æquale quadrato lineæ θ, ergo parallelogrammū ex γδ, αβ est*

commen-

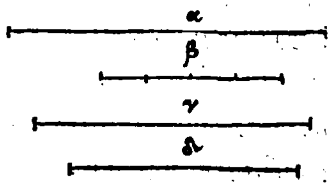
commensurabile quadrato lineæ θ: sed parallelogrammum ex γ δ, α β est æquale quadrato lineæ κ, ergo quadratum lineæ θ erit commensurabile quadrato lineæ κ. sed quadratum lineæ θ est rationale, ergo & quadratū lineæ κ erit rationale. ergo & linea κ erit rationalis: & potest parallelogrammum ex α β, γ δ. Ergo *si parallelogrammum contineatur &c.*

Corollarium.

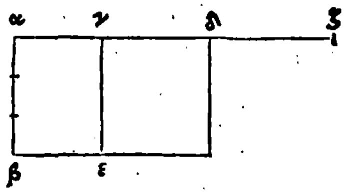
Ex *hoc manifestū est, posse rationale parallelogrammum contineri ex lineis irrationalibus.*

Centesimumdecimumquintum Theorema.

Ex linea mediali nascuntur lineæ irrationales innumerabiles, quarū nulla ulli ante dicturū eadē sit.



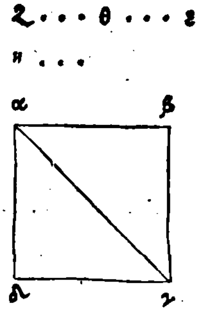
Sit linea medialis α γ. dico ex linea α γ innumerabiles gigni irrationales, quarū nulla ulli ex antedictis irrationalibus eadē sit. D*ucatur super extremitate lineæ α γ perpendicularis α ζ, quæ sit rationalis: & cōpleatur parallelogrammū ζ γ, ergo illud parallelogrãmū β γ erit irrationale per ea quæ dicta sunt in fine demōstrationis 38: linea ergo quæ illud potest, erit similiter irrationalis.* S*it autē illa linea γ δ, quæ nulli ex ante dictis irrationalibus erit eadē: quia quadratū huius γ δ secundū lineā rationalē puta α ζ applicatū, facit alterum latus lineā medialem nempe α γ: nullius uero ex antedictis quadratum secundum rationalem applicatum, facit alterum latus lineam medialem.* R*ursus*



compleatur parallelogrammum ι δ, erit similiter illud parallelogrammum ι δ irrationale, & linea quæ illud potest etiã irrationalis, quæ sit δ ζ: hæc similiter nulli ex antedictis irrationalibus eadem esse potest. Nullius *enim ex antedictis irrationalibus quadratum secundum rationalem applicatum facit alterum latus lineã γ δ.* Ergo *ex linea mediali &c.*

Centesimumdecimumsextum Theorema.

Propositum nobis esto, demonstrare in figuris quadratis diametrum esse longitudine incommensurabilem ipsi lateri.



Sit quadratum, α β γ δ, cuius diameter α γ. dico lineam α γ esse longitudine incommensurabilem lineæ α β. si enim poßit fieri, sit commẽsurabilis: dico tunc illud consequi eundem numerum esse parem & imparem. Manifestum *est quadratum lineæ α γ esse duplum ad quadratũ lineæ α β per* 47.1. Et *quoniam linea α γ est longitudine commensurabilis lineæ α β per hypothesin, ergo habebunt proportionem inter se, quam numerus ad numerũ per 5 huius.* Habeat *linea α γ ad lineã α β proportionẽ, quam numerus ι ζ, ad numerum η: sintq; illi numeri minimi omnium habentium eandem proportionẽ: nõ igitur numerus ι ζ erit unitas.* Nam *si ι ζ esset unitas, cum habeat proportionem ad η, sicut linea α γ ad lineam α β,*

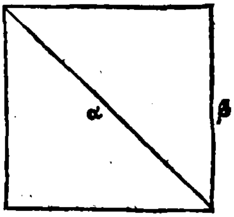
maior

maior autem sit $\alpha\gamma$ quàm $\alpha\beta$: maior ergo esset $\iota\zeta$ unitas quàm numerus κ, quod est impossibile. ergo $\iota\zeta$ non est unitas, est ergo numerus. Et *quoniam est sicut quadratũ lineæ $\alpha\gamma$ ad quadratum lineæ $\alpha\beta$, ita quadratus numerus productus ex $\iota\zeta$ ad quadratum numerum productum ex κ: nam utrobique est proportio suorum laterũ duplicata per corollarium 20.6 & 11.8: proportio autem lineæ $\alpha\gamma$ ad lineam $\alpha\beta$ duplicata, est æqualis proportioni numeri $\iota\zeta$, ad numerum κ duplicatæ, quia est sicut $\alpha\gamma$ ad $\alpha\beta$, ita numerus $\iota\zeta$ ad numerũ κ: quadratum uero lineæ $\alpha\gamma$ est duplum ad quadratum lineæ $\alpha\beta$, ergo & quadratus productus ex numero $\iota\zeta$ erit duplus ad numerum quadratum productum ex κ. ergo numerus quadratus ex $\iota\zeta$ est par: quare & ipse $\iota\zeta$ erit etiam par: nam si $\iota\zeta$ esset impar, etiã quadratus ex ipso $\iota\zeta$ esset impar per 23.9, aut per 29.9.* Secetur *$\iota\zeta$ æqualiter & bifariam ubi est θ: quoniam numeri $\iota\zeta, \kappa$ sunt minimi suæ proportionis, sunt inter se primi per 24.7: & est $\iota\zeta$ par, ergo numerus κ est impar.* Nam *si κ esset par, binarius numeraret utrunq; $\iota\zeta, \kappa$: (nam omnis numerus par habet partem dimidiam per definitionem) sed illi numeri $\iota\zeta, \kappa$ sunt inter se primi: est ergo impossibile eos binario aut alio numero quàm unitate numerari. ergo numerus κ est impar.* Et *quoniam numerus $\iota\zeta$ est duplus ad $\iota\theta$, ergo numerus quadratus ex $\iota\zeta$ est quadruplus ad numerum quadratum ex $\iota\theta$.* Est *autem numerus quadratus ex $\iota\zeta$ duplus ad numerum quadratum ex κ, ergo numerus quadratus ex κ, est duplus ad numerum quadratum ex $\iota\theta$. ergo numerus qua-*

dratus ex η est par, ergo & per ea quæ modo dicta sunt ipse numerus η est par: sed probatum est eum esse imparem, quod est impossibile, non igitur linea α γ erit longitudine commensurabilis lineæ α β. ergo erit longitudine incommensurabilis.

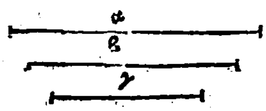
Aliter.

Alia ratione demonstremus diametrum esse longitudine incommẽsurabilem ipsi lateri: si negetur, sit diameter α, latus uero sit β: fiatq; rursus sicut α ad β, ita numerus ε ζ ad numerum η, & sint minimi suæ proportionis: ergo sunt inter se primi. dico primo numerum η non esse unitatem: nam si possibile est, sit unitas. Et *quoniam est quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus ex ε ζ ad quadratum numerum ex η (ut dictum est in præcedẽti demonstratione.) sed quadratum lineæ α est duplum ad quadratum lineæ β, ergo numerus quadratus ex ε ζ ad numerum quadratum ex η, est duplus: sed per te numerus η est unitas, ergo numerus quadratus ex ε ζ est binarius, quod est impossibile: nõ ergo η erit unitas, ergo erit numerus.* Et *quoniam est sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratus numerus ex ε ζ ad quadratum numerũ ex η, ergo numerus quadratus ex ε ζ erit duplus ad numerum quadratum ex η: quare numerus quadratus ex η numerabit numerum quadratum ex ε ζ: ergo per 14, 8 numerus η, numerabit numerum ε ζ: sed etiã numerat seipsum, ergo numerus η numerabit*

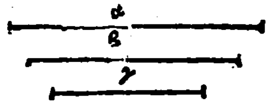


merabit numeros κ, ε, ζ: cũ tamẽ sint inter se primi, quod est impoßibile. ergo linea α non erit longitudine commẽsurabilis lineæ β: ergo erit eidem incommensurabilis.

Hinc animaduerti posse puto, neutram harum demõstrationũ esse Theonis, sed nec theorema ipsum esse Euclidis: nam & tractatio tota demonstrandi habet quod refelli poßit, nec refert eam diligẽtiam, qua in cæteris usum fuisse Theonẽ ex ipso uidere poßumus. Et theorema ipsum uidetur non suo loco positum esse: debuit enim præcedere tractatum linearũ irrationaliũ. Quanuis enim diameter sit longitudine incommensurabilis ipsi lateri, est tamen eidem commensurabilis potentia: ergo si latus ipsum, aut diametrum posueris esse lineam rationalem, necessario sequitur & alterum, nempe latus ipsum aut diametrum esse rationalem, per definitionem linearum rationalium. Huius autem theorematis multo facillimã & certißimam demonstrationem legere licet in eo libello, quem supra memorauimus Aristotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν. Illud quoq; quod sequitur additicium esse nemo negauerit, qui intellexerit posteriorem ipsius additionis partem pertinere ad libros consequentes perscriptos de solidis: quia tamẽ & uerum est quod dicitur & continet rerum ipsarum intelligentiam, prætermittendum nobis uisum non est.



Repertis lineis rectis longituditudine inter se incommensurabilibus, ut lineis α β, reperiri possunt & aliæ quãplurimæ magnitudines ex binis dimẽsionibus constantes, quales sunt plana ipsa siue superficies, quæ *sint inter se incommensurabiles. Nam si inter lineas α,β sumatur media linea proportionalis γ, per*



13.6, erit sicut linea α ad lineam β, ita similis species figuræ descriptæ à linea α ad similem superficiem figuræ descriptæ à linea γ, similis inquam species ad similem speciem similiter descriptam, per secūdum corollarium 20 theorematis libri sexti, hoc est, siue illæ sint quadrata, (quæ semper sunt inter se similes) siue fuerint alia quæpiam species rectilineæ similes, siue circuli circa diametros α, γ: nam circuli habent eandem proportionem inter se, quam quadrata suarum diametrorum per 2.12. ergo per secundam partem decimi theorematis huius libri, similis species figuræ descriptæ à linea α, erit incommensurabilis simili speciei similiter descriptæ à linea γ. Reperiuntur ergo hoc modo superficies inter se incommensurabiles. Simili ratione reperiuntur figuræ commensurabiles, si posueris lineas α,β esse inter se longitudine commensurabiles. Cum hæc ita sint, nunc demonstremus etiam in ipsis solidis esse quædam inter se commensurabilia, & quædam incommensurabilia. Nam si ex singulis quadratis linearum α,β, uel alijs figuris rectilineis, quæ sint illis quadratis æquales erexerimus, solida singula æquali altitudine, siue sint illa solida ex superficiebus æquidistantibus composita, siue pyramides, siue corpora serratilia, illa solida sic erecta erunt inter se, sicut etiam ipsorum bases inter se, per 32.11, & per 5 & 6.12. De corporibus tamen serratilibus nullum est tale theorema. Et quidem si bases solidorum fuerint inter

ter

ter ſe commenſurabiles, ſolida quoque erunt inter ſe cõmenſurabilia: quòd ſi baſes fuerint incommẽſurabiles, ſolida quoque erunt incommenſurabilia, per 10 huius libri decimi. At ſi fuerint circuli duo α, β, & ſuper ſingulos erecti coni ſiue cylindri, eadẽ altitudine erunt ſimiliter inter ſe coni, & cylindri inter ſe, ſicut ipſi circuli, qui ſunt eorum baſes per 11. 12. Et quidem ſi circuli fuerint inter ſe commẽſurabiles, ſimiliter ipſi coni inter ſe, & cylindri inter ſe erunt cõmenſurabiles: quòd ſi fuerint circuli incommenſurabiles, ſimiliter & coni inter ſe, & cylindri inter ſe erunt incommẽſurabiles, per 10. huius. Vnde conſtat non in ſolis lineis & ſuperficiebus eſſe commenſurabilitatem aut incommẽſurabilitatem, ſed in ſolidis quoque eaſdem reperiri.

AD EVNDEM ILLVSTRISſimum Cardinalem Bellaium.

Hîc formas iam uictor ouãs, normámq; repono.
Hîc ego ſeceſſus uoti damnatus adibo
Phœbe tuos, duce te ſaltus emenſus opacos:
Saxáque peruia nũc multis, prius hoſpita paucis
Exequata meo, quæ conceſſere labori.
Mox, tua dum magno cõcuſſus numine mentem
Thure uaporabit purus delubra ſacerdos:
Et ſacris operatus erit Belliaus aris,
Ipſe tua hoc iubeas monimentum dedicet arce.
Nam per nos tentare, nefas, ſine uate profanos,
Comperto ut ſpatium quadrata æquale duobus

Redderet externis cuneo, quæ ſubdita recto
Linea, Pythagoras Samius lectiſſima centum
Terga boum impoſuit, uictor ceu ſplendidus, aris
Pieridum, magnis ſibi parua rependere uiſus.
Tanto illi potior multis ſapientia nummis.
Ipſe quoque imparibus donis imitatus eoſdem,
Sit mihi fas, animos, at non ita diſſimili in re,
Parua quidē illa tibi, ſed quæ mihi maxima, ſoluā
Munera. Diis quando putas gratiſſima merces,
Me uotiua pium teſtabitur uſque tabella.
Noſtra tibi è multis cantabit pagina paucas
O Phœbi genus, inculto Sapientia laudis
Carmine, quoq; modo geminas res miſcuit uſus:
Et Sophiæ coniunctus amor noua nomina duxit,
Cuius ut exemplo ſimul & ſermone fruamur.
Nanque homines ſeclis quondam ſenioribus uſi,
Qui ſtudiis animos & tempora longa dederunt,
Naturæ in rebus, ſapientum nomen adepti.
Quæ cum Pythagorę ratio manaſſet in æuum,
Non tulit inuidiam ſenior: nam forte Leonti
Cui regnata Phlinus, quondam cōgreſſus, & ore
Dum reſerat magno naturę arcana parentis,
Admiranda dedit diuini ſigna uigoris.
Ingenio neque uiſa minor facundia ſummo.
Quęrentíque uiro, quā nam confideret arte,
Ille quidē eſſe negat quicquā ullius artis in ipſo,
Sed ſtudiis æterna tuis Sapientia duci,
Hinc ſibi philoſophi nomen finxiſſe nouum ſe.
Attonitus uocis nouitate, rogat quid in hac re
Poneret,

Poneret,an reliquos inter discrimen & istos.
Nec minimum discrimẽ,ait,quod ut ipse doceri
Me referente queas,in imagine cuncta notabo.
Nonne uides quãtis celebrentur Olympia ludis?
Quàm multis cuiusque modi mercatus abũdet,
Cętibus ille frequẽs glomerantibus?huic ego uitã
Persimilẽ esse hominũ dicam. Nam corporis illic
Pluribus ut uires,urióque exercita motu
Fortia mẽbra solẽt celebres parere inde coronas,
Tenuia gloriolę pereuntis pabula,quæstus.
Excitat hos,aliena ut emant,aut ut sua uendant.
Quos præter genus illud inest, longe anteferẽdũ
Nobilitate aliis,laudem captantibus & rem:
Nec quoquã minus ingenuũ,qui nec sibi plaudi
Fronde coronatis optent,neq; crescere nummos.
Hoc tantum,rerum quid ab unoquoq; geratur:
Et quo quidque modo,cura studióque sagaci
Lustrantes recolunt, & ab omni parte uorantes,
Intentis iucunda oculis spectacula quærunt.
Haud aliter quàm qui mercatũ aliunde profecti,
Nos etiam ex aliis alias peruenimus oras:
Terrarúmque solum exilio sortimur habendum.
Hic alios quæstus,popularis gloria famę
Sunt quos uana tenet multi:plerísque uoluptas
Imperat,in multis morbi non simplicis est uis.
Sed qd ago?ĩnumerósne parẽ enumerare furores?
Perrarum genus illorum,qui maximus esse
Debebat numerus,rebus constanter omissis,
Post habitísque aliis,quos recti cura sequendi

Ceperit, & ueri dederit simulacra tueri.
Cęlestes animæ, quas incoluere, beatas
Suspiciunt sine fine domos, & abesse querentes,
Quod reliquũ est, ihiát animis, & mẽte morãtur.
Nec terras meminere procul spectare iacentes.
Hi tales, studio quibus est sapientia, sunto
Philosophi, & meritum me iudice nomẽ habẽto.
Addidit, útque illic hominum liberrima sors est,
Qui spectant, rerúmque aliis cõmercia cedunt,
Sic studiis cunctis, animos quæ plurima uersant,
Natura indagare uias atque abdita pręstat.
Sed neq; Pythagoras tanto modò nobilis author
Nomine, quin rebus multo magis amplificatis
Floruit: atque animos cultu molliuit agrestes.
Magna prius per quẽ ter maxima Græcia creuit.
Hæc mihi dictabat, uacua dum lentus in umbra
Rure suburbano instantes leuat arte ruinas
Labentis patriæ, & curarum Tullius æstum,
Purus & ipse fluens Graiorum fontibus haustis
Tullius, in Latium peregrinas doctus Athenas
Ferre, suósque nouis opibus ditare Quirites.
Materiẽ ille quidẽ, numeros sed Phœbus & artẽ
Sufficit, ulla modo nostri si carminis est ars.

FINIS.