Euclidis elementorum

LIBER DECIMVS, PETRO

Montaureo interprete.

Ad Ioannem Bellaïum Cardinalem.

LVTETIAE,

Apud Vascosanum, uia Iacobaea ad insigne Fontis.

M. D. LI.

CVM PRIVILEGIO.

PRIVILEGII SENTENTIA.

R*Egio diplomate cautũ eſt, ne quis alius præter* Va*ſcoſanum, hunc* Euclidis *elementorum librum decimum interprete* Petro Montaureo *uiro ſenatorio ante ſexennium imprimat, néue uendat.* Q*ui ſecus fecerit, libris & pœna in ſanctione æſtimata multabitur.* Datum Bleſis *decimo* Calendas *Februarij* M. D. L.

De moulins.

AD IO. BELLAIVM CARDI-
nalem Petri Montaurei
PRÆFATIO.

CVm ad insitam mihi magno naturæ erga me beneficio incredibilem discẽdi cupiditatem, illud quoque iudiciũ progrediente sensim ætate studióque confirmatum accessisset, nihil esse tam uehemẽter homini expetendũ, quàm rerum maximarum perceptam habere naturam, feci non inuitus adhuc, ut quò uocaret illa, eò me deduci facile paterer: in ídque uitæ curriculum immitti, quod & dignitati hominis cõuenientissimũ, & naturæ præterea meæ accõmodatũ esset. Huius uerò consilij tantũ abesse uideo ut me pœnitere cœperit, ut maiores etiã quotidie uberiorésque fructus mihi non contingere tantum ipse sentiam, sed & deinceps multo prestantiores perceptum iri certo sperem. Nam quanto in altum longius euehimur, tanto laborẽ minui magis, qui maximus in cuiusque rei principiis solet esse: animi uero uoluptatẽ nulla alia re tantũ, quã discendo ali augeríque cognoscimus. Is autem meus in suscipiendo uitæ genere sensus cum uniuersæ philosophiæ studiũ mihi proponeret amplectẽdum, simul animo subiiciebat illud, nihil in ea re magnopere profici posse, nisi quis ueterum philosophorum uestigia summa diligentia persequutus, eandem quam ipsi, uiam institisset. Itaq; nihil, ut hoc quidem loco dicam, de nostris cæterarũ philosophiæ partium studiis, ad mathematicam cognitionem animum applicans, in eum me locum sensim abductum diuertisse intelligo, unde suscepti primum institutíque illius itineris recordatio propemodum effluxerit: neque id uero repugnante me admodum. Quid enim est, cum ex ea philosophię parte, quæ omnis est in agendi rationibus occupata, tantum præceptorum acceperis, quãtum ad unius hominis résque priuatę cuiusq; suæ rectionem attinet, unde maior animum ueri cupiditate flagrantissimũ permulcere possit oblectatio, quàm quæ ueri cognitionem subsequi solet? Nam illa quidem studia ciuilis disciplinæ, quę publicis rebus consilio administrandis idonea totius hominum uitæ multo præstantissimas actiones ex recto rationis præscripto moderari debuerant, plane refrixerunt: tanta profecto perturbatione rerum omnium, ut cuius scientiæ ratio clauum aliquando in rerumpub. gubernatione magna cum sua laude, hominum uero lõge maxima felicitate, cursúque prospero tenuerit, eidem nũc sit uix aliquid relictũ in sentina loci. Tertia quædam supererat illa philosophãdi exercitatio, quæ naturam rerum persequens, ut est omnium ingeniorum cognitione dignissima, ita propter multiplices ipsius materiæ formas & motus incõstantes, acutum quoddam habet & subtile disputandi genus, ſed obſcurum tamen, adeóq; repugnantes inter ſe ſummorum philoſophorum ſententias, ut uériſimilia tantum, non etiam uera docere uideri poſſit. Vna ergo eſt mathematicarũ rerum tractatio, quæ conſtantibus neceſſariíſque ducta principiis, uias quoque conſimiles perſecuta, eò nos progredientes manu ueluti ducit, ubi ueritatis ipſius cubilia, quę quidem mentibus humanis ſua ipſarum ui facultatéq; cerni queant, explicet intuenda. Quid autem eſt, quod hac una re præſtantius magnificentiúſque dici poſſit? An quid erit aliud, quod cuiquam anteuertẽdum uideri queat? Tibi certe non arbitror, Bellaï ampliſſime, cui neque ad acumen ingenij doctrinæ cultum, neque ad doctrinam iudicij uim deeſſe intelligo. Quæ cum ita ſint in te illuſtria, ut fortunæ tuæ, illius quidem per ſe ſplendidæ, luminibus ego unus omnium minime blandus fortunæ admirator offeciſſe putem, tibi homini grauiſſimoq; idoneóque uiſo de tota noſtra ratione iudiciíque ſenſu perſcribam paulo liberius: ſi forte plus authoritatis ex perſonæ tuæ dignitate noſtra habitura eſt oratio, ut ſane habitura eſt, ad iuuentutem in eum ſtudiorum curſum, quẽ ualde uolumus, inducẽdam. Verum enim, ut ipſe tecum, hoc eſt, cum homine intelligente loquar, iampridem errabunde de uia deflexímus: ueterémque illam diſcendi conſuetudinem pręſtudiis quibuſdam nouis amiſimus. Hîc cũ plurima quæ recte dici poſſint,omittenda ducam: unum illud quidem certe nunc maxime mihi dicẽdum eſt, illius perturbationis,de qua paulo ante diximus, eã eſſe cauſam, & potiſſimam quidem,quòd totius inſtitutionis, (quam à pueris παιδείαν ueteres illi ueritatis magiſtri uocare ſoliti ſunt) priſcis quõdam ſeculis tantopere conſeruatæ, eã eſt hac quidem ætate peruerſitas, ut quod primum potiſſimúmq; ſtudiorum eſſe debuerat, perexiguum quidem omnino locum apud nos, plurimorum autem hominum iudiciis nullam etiam dignitatis æſtimationíſque partem mereatur aut obtineat. Quid ergo eſt? dicat aliquis, quid habes quod reprehendas? Ego uero permulta, pene dixi omnia, ut iam indubitáter illud affirmare poſſim,tum demũ optime rebus hominũ conſultum iri, cum illud poëtarum ὕστερον πρότερον ipſi in ſuas actiones tranſtulerint: quódque primum ducunt, poſtremũ habuerint: & quod poſtremo,aut, ut uerius dicam, nullo loco ipſis eſt, ſi primum exiſtimauerint. Nunc unius artis,uixdum etiam artis pręſidiis opibúſq; immodicis tam flagitioſe circumuenti tantis clamoribus obtundimur, ut naturæ uox ad ſcientiæ cupiditatem inuitantis, ne exaudiri quidem ulla ratione queat. Quæ ſi loco ſuo contẽta non ſe cõmouiſſet, diiudicandíſque hominum litibus occupata munus alienum aut nunquam appetiiſſet, aut certe non impediiſſet, minus profecto haberemus quod dolendum uideretur. eſt enim & iu-

diciis

diciis accommodata: iudicia porro ipsa disceptationibus rerũ controuersarum, quibus carere nullo modo possumus, pernecessaria. Neque sane est in ea re quod reprehẽdi iure possit, si quis morem maiorum in illa consequenda retineat, ut philosophiæ totius institutis abunde suppeditatus, hanc ipsam illius quidem imitatricem quandã & quasi sobolem aggrediatur discere, cum intellexerit id quod in genere sciẽtiarum est perpetuum, ut aliis aliæ subsint, idem ipsum hîc quoque fieri, ut iurisperitia philosophiæ partem illam, quæ est de moribus tum singulorũ tum uniuersorum, tanquam architectam agnoscat & obseruet. Sed hæc tota cõtrouersorum ratio iudiciorum illius partis est iustitiæ, quæ συναλλάγματα tantum continet. Nam de altera illa quæ multo est & dignitate præstantior, & utilitate in omnem uitæ societatem uberior, quæ præmia recte factis, pœnásque sceleribus pro rata cuiúsque rei personæq; portione distribuens, duo uincula rerũpub. firmissima complectitur, aut omnino de iusti ipsius ui atque natura, ne literam quidem. Se tamen ueram philosophiam profiteri rerúmq; maximarum gubernationi unam idoneam prædicans, illam ipsam philosophiam, cum omnium artium parentem, tum uero erga se beneficẽtissimam magistrámque uitæ certissimam lædens, dignitatis inuadit possessioné alienæ: neque se animaduertit (ne quid ipse criminosius dicam) alienum appetentem contra ſua ipſius, quid autem dico ſua? imò magis contra rationis uniuerſæ decreta, cuique ſuũ minime tribuere: quámque matris loco uereri debuerat ab ipſa genita & educata, unde ſuum aliquem in repub. locum ut tenere poſſet, habuerat, quod in parentes impij filij ſolent, ipſi quaſi ſenectute deſipienti, ut bonorum ſuorum adminiſtratione interdiceretur, efficere. Nam ſi nihil aliud eſſet, quis quæſo remigem in naui ferat gubernatoris munus arrogãter affectantem? Iam uero ut à primis ordiamur, hæc totas urbes ſuis ſacris initiorúmque pertractationi conſecratas habet: ad quas undique concurſus puerorum iuuenúmq; fiant, non tam diſcendi, quàm à magiſtris diſcedendi cupidorum. ſic ætas maxime imbecilla, ſuíque impotens, effrenis, incuſtodita, ſuo unius impetu ferenda permittitur, quam unam alieno parentem imperio, authoritate bonorum nixam, inſolẽtiæ, leuitati, audaciæ, uoluptati frenum, cęteris etiã animorum motibus modum imponendum eſſe maxime doceri oportuit: híſque uocibus aſſidue aures illius perſonare, ut concurſantes immenſique cupiditatum æſtus, quibus ætas illa plurimum nata eſt cõmoueri, reprimerẽtur. At enim qui recte præcipiãt doceántque, præſto ſunt, ſi modo eos audire in animum induxerint. Credo ſane, quod ad illorum artem attinet, ut eſt captus horum hominum & temporum, non indiligenter exponere teſtamenta, ſubſtitutiones, obligationes, ſtipulationes,

lationes. Sed quid hæc ad mores informãdos? Ita fit ut alij ne audiantur quidem, propter abhorrentem ab illis ſtudiis multorum ingeniorum naturam: alij quãuis ſtudioſe ſoleant audiri, tamen uel rei ipſius per ſe ſpinoſæ traditione perplexa, uel docendi imperitia præpediti, nihilo doctiores amittant auditores, quàm acceperint. Ex quo illud malum interea ſequi omnino neceſſe eſt in iuuenum animis, cum uoluptates ex doctrina inſtitutionéque liberales ipſi non habeant, ut conſectandis alienis illiberalibúſq; totos ſeſe dedant: prorſus enim eos aliquid agere, quietémq; contemnere, neceſſe eſt. Pauci quidam ex illo ſunt genere, qui gloriæ, neſcio cuius, utilitatíſque expectatione deliniti, è toto ſtudiorum ſuorum quinquennio fructus tenues illos quidem & auſteros, ſed quæſitos tamen colligant. Præclara uero res, hominem natura quidẽ ipſum ſua nullius uirtutis, uitiíue præſentia habitúue fretum, uerùm facultatibus nudis in utramuis partem ferentibus, pręditum, magis tamẽ improbandorũ exemplorum multitudine, opinionúmque peruerſitate deprauatum, cum opes, honores, diuitias præcipue duxerit expetendas, ad alendum morbum ex contagione contractum, artem etiam per omne uitæ tempus exercendam adhibere: cuius tota ratio diſputandi ſit de meo & tuo: déque iis rebus & modis, quibus quod meum eſt, tuum effici poſſit. Ad quam quidem diſciplinã nimis multos dociliores reddi ſcimus, quàm ſocietati hominum cōducat tranquille conſtantérque moderandæ. Ita credo priſcos illos non tam antiquitate quàm dignitate memorabiles uiros, domi foríſq; in ſua quęque ciuitate rerum geſtarum gloria præſtantes, liberos ſuos ad maiorum imitationē inſtituiſſe: ac non potius Athenas, Rhodum, Maſſiliam, & quò non? ad cultum ingenij capeſſendum, mercaturámque artium optimarum dimiſiſſe. Vnde philoſophiæ præceptis inſtructi, cum ſe ipſi regere didiciſſent, agendíſque rebus adhiberentur, non ex artis illius formulis, ſed ex iuſtitiæ ſcitis immutabilibus hominum cœtus, & quidem uolentiū, regendos acciperent. Age modo, hunc ipſum hominem ex hac noſtra exercitatione, tali cultu educationéque in forum ex umbra tanquam in aciem producamus, ut ſtudij ſui rationē & uſum aliquē nobis tandem explicet. Ibi uero quanta prudentia, grauitate, conſtantia, probitate ſe gerat, dicere meū non eſt. Vos quæſo dicite Pierides, & quidem hominibus ignaris: nobis enim nihil attinet, quos plura ſcire neceſſe eſt, quàm referre iuuet. Hoc tantum dicam, cum ſe exiſtimēt parum in ea arte profecturos, niſi toti ſint in illius cognitione per omnē uitæ curſum occupati, tantúmq; ſibi periiſſe temporis, quantum aliis ſtudiis acceſſerit, homines ignorantes quantum cuique ſcientiæ temporis ſit tribuēdum, nimis magnam mercedem ſtatuunt, ſi prȩſtantiſſimarum rerum, offi cij dico munerísque sui ignoratione, hæc una fortuitarum rerũ cognitio disceptatrix sibi ipsis cõparanda uideatur: neque uero intelligunt rei per se infinitæ finem nullũ reperiri posse. Verum ipse me longius scribendo prouectum in offensiones multorum incurrisse uideo, quod equidem nollem: sed cum nulla remedia tam faciant dolorem quàm quæ sunt salutaria, si quid est quod sanari possit, plus apud me ualere debere nonnullorum salutem quàm plurimorum indignationẽ ex remediorum acerbitate collectã semper existimaui. Quod cum optimis quibusq; uiris, quales iam bene multos hic noster ordo recipit, probatũ iri certo sciam, de cęteris minus est mihi laborandũ. Atque haud scio an quæ auditu nũc quidem grauia acerbáque uideantur, ipsis in experiundo suauissima futura sint: ut longior oratio comprobandæ rationis huius causa defensióque nulla requiratur alia, nisi quã rei ipsius intellectæ perceptio attulerit. Neque quenquam accepimus aut uidimus, qui, cum utranque scientiam tenuisset, non utranque adamaret: alteram uero nobiscum etiã admirationi maximæ summóque studio non habuisset. Porro alterius expertem & ignarum, de utraque iudicium suum esse uelle iniurium est. Præterea fuit ea profecto semper grauissimorum eruditissimorúmque hominum omnibus seculis de tota uitæ ratione consensio, cum expetendarũ rerum tria summa genera reperirentur, ut bonorum animi prima potiſſimáq; eſſet dignatio: cæterorum autem, ut quæque proxime nos attingerent. Ex quo illud efficeretur neceſſario, ſcientiarum quoque, quę bonorum adipiſcendorum uias perſequerentur & traderent, eandem eſſe debere rationem, ut cuiuſque rei præſtantiſſima uis eſſet, ita ſcientiæ, cui res ea ſubiiceretur, illi plurimum & tēporis & induſtriæ noſtræ deberetur. Ad quā ſane normam ſi ſtudia noſtrorum hominum ab ipſis exigerentur, & firmior animorum tranquillitas, & uero maior ex ipſis in repub. eſſet utilitas: eiúſque mali, cuius mole propemodum obruti leuationem aliquam iampridem expoſcimus, medicinam non leuem haberemus: cum non eſſent qui litigioſorum hominum audaciam, flagitium, furorem inconſultis ſuis conſiliis adiuuantes, aut potius ipſos inter ſeſe miſerrimo cōcertationum genere committētes, alienis incommodis ad ſuas utilitates per iuſtitiæ conſeruandæ ſpeciem abuti uellēt: quódque rerum omnium præcipuum eſt, illud boni præterea conſequerētur, ut improbitas uirtuti ſuo loco dignitatíque reſtitutæ in rerū adminiſtratione facile cōcederet. Hoc enim munus eſſe philoſophiæ unius maxime proprium, humanarum rerum artem moderādarum, diuinarúmque ſcientiam tradere quis non uidet, qui modo rem ullam unquam mētis acie perceperit? ne forte homines rerum omnium imperiti criminētur eam otij tantum eſſe, nō item negotij. Cuius quidem

dem calumniæ perfacilis esset mihi quoque refellendæ ratio, nisi rem huius loci, aut operis nō esse intelligerem: ipsam tamen etiam scriptis grauissimis cuiusque ætatis hominum prudētissimorum agitatā, tum uero unius Iacobi Sadoleti uiri præstantissimi doctissimíque libello pereleganti, ab eo perscripto tanta diligentia & eruditione, ut maiore scribi posse non existimem. Quòd si exēplis agēdum esset, nónne permultos omnibus historiæ monimentis celebratos accepimus, qui studia doctrinæ ad rerumpub. moderationem conferentes, ciuitatum suarum statum ab initio constituerint, conseruauerint, perditúmque restituerint, tanta omnium gētium admiratione, ut summis etiam honoribus deferendis magnitudinem meritorum assequi se nullo modo posse faterentur? Quid enim? (ut uetera omittamus) nunquid unquam grauissimū sanctissimúmque istud uestrum Cardinalium collegium pœnituit; quātum dignitatis ornamentíque ex duorum hominum studiis, uirtute prudentiáque percepisset, Gasparis Contareni, & huius ipsius, de quo modo dixi, Sadoleti? Quorum ille per omnes pene gradus honorum in moderatissima florētissimáque Venetorum repub. peruagatus, suis ciuibus ita se probauit, ut præsentem colerent & admirarētur: absentem etiam propter singularis uirtutis memoriam permanentem requirerent, uobísque ipsis, qui ab se ciuem totius ciuitatis optimum nihil tale ambientem aut omnino cogitantem abduxiſſetis, pene inuiderent. Et ſane fuit ille uir omni laude cumulatus, tum propter excellentē doctrinam, tum etiam probitatem & prudentiam multarum gentium imperio digniſſimus: hic uero alter magis eſt otio delectatus, nō illo quidē inani, ſed fructuoſo in omnem poſteritatem & literato. Quid de Petro Bembo & Nicolao Ridolfo uiris certe in omni uirtutum genere maximis dicam? Libentius autem in cōmemoratione mortuorū noſtra uerſatur oratio, ne quid aſſentationi uiuorum tribuiſſe iudicetur, ſi eorū qui nunc ſunt, laudationes attingeret. Hi quidē in philoſophię ſinu ſtatim à pueris educati tales ad rempub. cum acceſſiſſent, utilitates ex ſe permagnas uniuerſo quidem hominū generi maxime, ſibi uero ipſis immortalitatem præterea gloriæ cōpararunt. Quorum ſi qui ſtudia imitatione conſequuti erūt, quî fieri poteſt, ut reſpub. non maximam ſuę dignitatis recipiendæ ſpem in illorum prudentia & moderatione ſibi repoſitam arbitretur? Ac profecto fuit tempus illud ſane mihi periucūdum, cū ſpes eſſet melius fore, propter alacritatem animorū in id ſtadium ſeſe dedentiū, quod eſt ad ueram gloriam expeditiſſimum: niſi permultorum ſtudia cogitationéſque in alia traduxiſſet ſua ipſorū credulitas, neſcio cuius hominis uanitati aſſentientium. Itáne uero? quo quæque uox proferetur abſurdior, eo facilius in animis noſtris uiam ad perſuadendum

ſuadendum inueniet? Ergo repertus eſt, ſi diis placet, qui cum bellum nefarium omnibus bonis artibus indixiſſet, & ſapientiæ fructũ iam plane maxima bonorum omnium gratulatione renaſcentis nobis inuideret, Lutetiæ in luce atq; oculis nõ Galliæ modo, ſed totius Europæ caſtra figeret ignorantiæ; & uniuerſæ philoſophiæ uitæq; adeo è philoſophia conſtituendæ authorem Ariſtotelẽ oppugnatum palam etiam accederet, nihil in dialecticis, nihil in phyſicis, nihil uſquam ueri uidiſſe aut tradidiſſe argueret. Audax negotium dicerem & impudens, niſi uerborũ omnium acerbitatem rei ipſius per ſe inauditæ, neque iam audiẽdæ indignitas ipſa ſuperaret. O imperitos maiores noſtros, qui nunquam quiuerunt iſtud animo intelligere! Quid eſt quod profectum eſſe dicam recenti ſophiſtarum clade, atque exilio, ſi ſophiſtas alios aſciſcimus? Quaſi uero non iam miſerrimam rerum omnium ignorationem deprecemur, ſed mutationem tantum in ipſis ignorantiæ magiſtris expetamus. At certe totum illud eiuſmodi eſt, ut cẽſoria magis animaduerſione, quàm cuiuſquam omnino contra diſputantis oratione reprimendum ſit. Neque uero de hac ipſa re uerbum ullum facturus erã, ſi moderatius inſaniendum ſibi putaſſet: ſuáque ipſe cõtentus iuuẽtutis credulæ & rerum imperitæ non augeret ignauiã: nam de ipſo quidem leuior omnino iactura fuerat. Impune eſſe cuique debet periculo ſuo inſanire:ſed cum ad aliorum perniciem morbus animi conuertitur, id uero ferendũ non eſt. Huic certe malo niſi maturis conſiliis obuiam eatur, & audaciſſimos impetus diligentia continuerit magiſtratuum, næ præclara illa ſtudiorum nobis promiſſa compendia permagno conſtiterint iuuentuti: cum grauiſſima mercede totius temporis iactura didicerit nihil è nouis illis, ſed non ſatis eruditis magiſtris, interea niſi arrogantis cuiuſdã & confidentis ignorantiæ ignauiæque præcepta didiciſſe. Sed de hac re tota ſatis hactenus: aliàs fortaſſe pluribus, ſi cõmodum erit. Nũc autem quod eſt huius potiſſimũ loci & inſtituti perſequamur. Cum itaque, ut ante dictum eſt, mathematicã cognitionem uniuerſam iam tum à prima iuuentute uehementer amplexatus eſſem, & ſæpius ipſe per me Euclidis elementa reuoluerem, in cæteris quidem libris modicus ſane labor mihi fuit: ubi uero decimum hunc multorum opinione perobſcurum attigiſſem, ea certe opinio non mediocri mihi quoque fraudi fuit, cum non arbitrarer, qui locus à pleriſque propter ſuſpectã ipſius difficultatem præteriri ſolitus eſſet, mihi non periturum, quicquid in eo laboris impendiſſem. Itaque plurima extrinſecus adiumenta mihi ipſe excogitãs, iterum atque iterum repetita diligenti lectione, cum nihilo minor maneret rei ipſius obſcuritas, cœpi cogitare unum Euclidẽ in primis libris ſibi ipſi ad ipſorum intelligentiam ſufficere: neq; fieri

poſſe

posse,ut suum in docẽdo modum atque ordinem repudians,hîc alienum quendam & nouum adhiberet. Itaq; uia simpliciori cum rem aggredi cœpissem,sola librorum pręcedentium ipsius Euclidis ope,& uocum simplicium quę sunt huic libro maxime propriæ, intelligentia , omnia uisa sunt quàm antea illustriora multo atque clariora:Euclidémque sui ubique similem hoc quoque libro, ut olim cogitatione præceperam,nullius omnino rei externæ indigentem,se ipso contentũ : rem illam quidem paulominus inuulgatam , sed alia ratione nulla,neq; alia uia,quàm sua & familiari tradere plane uidi.Hæc uero est,ut à rebus cognitis ad ignotas sensim progrediens ex prioribus rerum subsequentium comprobet intelligentiam, & ueritatem. Quæ cum perspicerem,in eáque re sæpenumero uersatus,magnáque animi intẽtione & studio singulas quásque res inter se conuenire,nihil collidere intelligerem, nullam moram studiis hominum putaui, quantum per me effici posset,diutius afferendam,quin laboribus nostris animíque exercitationibus fruerentur. Cúmque ex maiorum lucubrationibus , quo posteritatem iuuaremus,aliquid uideremur cõsequuti, & quibus omnia deberemus nihil esset quod post mortem hominibus bene meritis gratius per nos referri posse uideretur, quàm si quorũ industriam experti uehemẽter admiramur & suspicimus,eorum etiam humanitatis exemplum studiúmque poſteritatis adiuuandę uellemus imitari, cœpi cõſilium rei totius illuſtrandæ. Itaque Græcorum demonſtrationes interpretando conſequutus, ſiue fuerint illæ Euclidis ſingulorúmue geometrarum, quorum ſymbolis hoc totum eſt opus abſolutum, ſiue ἐκ τῶν οἰωνος σωνταῶν, ubi preſſius ſubtiliúſque compoſitæ uidebantur, fuſiore quodã ſcribẽdi genere ita patefeciſſe me puto, ut lectori non dormitanti, ſed attento nihil deeſſe poſſit ad rerũ intelligẽtiam: obitérque uiam & rationem reſoluendi in primis theorematibus exemplorũ copia notauimus. Sed quo res adhuc multis incognita commendetur uberius, placuit nonnulla ex ueterum libris, Procli in primis, arbitratu quidem noſtro ſumpta, Latinis literis illuſtrata proponere, quibus initiis mathematica ducta cognitio, quã altũ ediderit rerum maximarũ faſtigium, ut quã incredibilem ex ſe utilitatẽ ſeculis prioribus attulerit, eandem quoque ſibi de ipſa polliceantur homines, ſi modo penitius ea ſtudia inſpexerint: neque, quod adhuc factum eſt, in primo liminis aditu, uixdum quinque ſexue paſſus (totidem enim libris uulgo contenti ſunt) in ea re progreſſi, reſtiterint. Illud itaque ſciendum eſt, quod finitum & infinitum dicitur, principia ſumma eſſe mathematicarum ſpecierum omnium. Nam ea principia inter ſe aliter atque aliter copulata, ſufficiunt ad generandam eam uarietatẽ, quæ in rebus ipſis cernitur. Inde fit ut ipſarum proportiones in infinitum excreſcant: quas tamen ipſas finiri etiam neceſſe eſt, ob eam ſaltē cauſam, quia finiti quoq; naturam in ipſis exiſtentem continent. Primum enim in arithmeticis, ſi ab unitate cœperis progrediēdo, reperies numeros in infinitum augeri: neque unquam excreſcendi finem, ubi quieſcant ipſi, fieri poſſe, ut cum eò perueneris, ceſſandum in illo numerorum auctu tibi prorſus intelligas. Quemcūque porro numerum effeceris, illum omnino finitū eſſe neceſſe eſt. Deinde in ipſis quoque magnitudinibus idē apparet, ut in infinitum diuiſio illarum fieri poſſit. Ipſæ uero res ita diuiſæ, omnino (& quod dicitur) actu ipſo finitæ ſunt: ut cum diuiditur aliquod totū in partes ſuas unde componitur, neceſſe eſt ipſas partes quæ ex diuiſione procedunt, eſſe finitas: nam niſi finitæ eſſent, ne partes quidem ipſæ eſſe poſſent. Præterea ſi nihil eſſet infinitum, illa duo perabſurde conſequerētur, & ut magnitudines omnes eſſent commenſurabiles, neque in ipſis quicquam incōmenſurabile: ideóque ne irrationale quidem. Hoc autem eſt, quo differunt ea, quæ in geometria pertractantur ab arithmeticis: ſiquidem in illis ſunt quædam irrationalia, de quibus hoc libro: in arithmeticis uero nihil irrationale, aut incommenſurabile cognoſcitur: ſunt enim omnes numeri commenſurabiles inter ſe, ea ſaltem mēſura, quæ minima eſt in numeris, nempe unitate. Alterum quod perabſurde ſequeretur, ſi nihil eſſet infinitū, illud eſt, quod ea uis & facultas unitatis, ut ex ſe numerorum ſobolem infinitã procreare queat, non exiſteret: neque uero numeri proportiones omnes intra ſe continerent, quas in rebus ſingulis ineſſe perſpicimus, multiplices dico, ſuperparticulares & reliquas tales. Omnis enim numerus unitati cõparatus ad ipſam unitatem habet proportioné aliam, quàm idé ipſe numerus ad alium numerum comparatus. Similiter ſi finitum nihil erit, commenſurabilitas & communio proportionum, ſimilitudo & æqualitas ſpecierum, cæteráque huiuſmodi quæ melioris cuiuſdam ſunt generis, in rebus diſtinguendis nulla ſint: quæ tamé ipſa in mathematicis eſſe conſpicimus. Ea uero ſi non eſſent, ne mathematica quidem ulla ſcientia ſupereſſet, cum nihil certo, conſtanter, ſubtilitérue diceretur, quod cogitatione firma cõcipi poſſet. Quantum uero utilitatis ea ſcientia communi hominum uitæ & ſocietati cõferat, id quidem non ad uſus ipſius uitæ neceſſarios reſpicienté æſtimare conuenit: ita enim fieret ut cognitionem omnem & contemplationem rerum tãquam inutilem repudiaremus, quippe quæ à rerum humanarum neceſſaria ſuppeditatione ſeſe quàm longiſſime ſoleat abducere, ne earum quidem rerum ullam omnino cognitionem aut curam appetés, quibus uſus uitę neceſſarius cõtineri ſolet. Eſt uero mathematicæ ſcientiæ ſua certa, propriáque dignitas & utilitas, illa quidem per ſe æſtimanda,

neque

neque quicquam externum respiciens, quo se referat, nullius omnino rei ministerio suam utilitatem accommodans, neque uitę necessitati subseruiens. Quin & liberales disciplinæ à libertate dictę, sui nominis dignitatem sustinere tueríue nullo modo possint, si ad seruiendum usibus necessariis reuocentur. Quòd si ulla ratione illud admittendum uidebitur, ut aliud quippiam extra se spectare debeat, cuius utilitatem consectandam sibi putet: quid est in omni rerum uniuersitate splendidius & magis excellens, quàm quod mathematica scientia uiam munire solet animis nostris? eámque certissimam ad rerum intelligibilium, omni materia solutarum cognitionẽ absolutam? Et quidẽ si qua est utilitas expetenda, illa est profecto, quam ex se præstãtissimã & eximiam profert. nam & quasi manu ducit ad res intelligibiles percipiendas, & quod est in Timæo scriptũ diuinitus, illius scientię cognitio uia quædam est ad plenam & integram mẽtis nostræ institutionem; cuius rei ea certe causa est atque ratio, quòd eadẽ est ipsi proportio ad cognitionem totius & primam philosophiam, quæ est institutioni puerili ad uirtutis ipsius summam & habitũ. Hæc enim efficit bonis & rectis moribus assuefaciendo, ut animus puerilis ad uitam ex uera uirtute perfectam adolescat: illa uero animi nostri partẽ eam, quæ διάνοια dicitur, ita suis commoditatibus instruit & cumulat, ut multo paratior ad res eximias inſpiciẽdas & cognoſcẽdas accedat. Ex quo Socratis uerißimũ illud mihi uideri ſolet, oculũ animæ, quem mentẽ dicimus, ipſum quidem ſtudiis & cupiditatibus obtutúque rerum alienarum excæcatũ, & ueluti defoſſum, ſolius ſciẽtiæ ratione diligentiáque recreatum excitari, & quodam ueluti collyrio perſanatum cõualeſcere ſolere: ita ſane, ut rurſum ad ſpeculationem ipſius entis, ab imaginibúsque perſpectis ad res ipſas, quarum illæ fuerãt imagines, erigi, & tanquam ex caliginoſo ſpecu in locũ illuſtrißimũ eductus, illud ipſum lumen intelligibile acie conſtanti poßit intueri: omninóque carcere quodam egreſſus, & rerum generabilium uinculis inconſtantíſque materiæ nodoſa uarietate tandem exolutus, ad incorpoream & impartibilem ſubſtantiam attolli. Nam & pulchritudo & ordinis illius ratio, qui in mathematicis elucet diſciplinis, ipſáque rerum ibidem perſpectarum certa conſtantia, animum noſtrum propius ſiſtunt ad intelligibilia, ipſa quoq; ſemper eodem modo ſe habẽtia, pulchritudiníq; diuinæ conuenientißima. Quæ cum ita ſint, mathematica ſcientia eſt, & ipſa quidẽ per ſe & ſuapte ui dignißima, quæ ſtudioſe colatur: neque tamen non plurimum momenti ad eam uitam affert, quæ mentis unius maxime propria eſt & accommodata. Illud autem in hac re ſatis eſt argumenti, ſciẽtiam eam per ſe ſua ipſius dignitate & æſtimatione niti, ut eſt quodam loco ſcriptum ab

Ariſtotele,

Ariſtotele, quòd qui res illas exquiſiuerunt, nullo præmio, magna diligentia ſtudióque uehementi illud ſunt aſſequuti, ut paruo temporis interuallo illa permagnum acciperet incrementum, cum ipſi cæteris omnibus poſthabitis huic uni ſtudio ſe totos tradidiſſent: atq; hi maxime, qui diuinio re natura præditi, diuinitatẽ ſuis factis exprimere, quoad licitum eſſet, elaborauerunt. Itaque ueriſſimũ illud eſt, ſi qui ſunt, qui contẽptui habendum hoc ſtudium exiſtiment, eos ſine guſtu eſſe ſummarum, quæ quidem in homine libero conſtantíque exiſtere poſſunt, uoluptatũ. Quid ergo? nunquid habet ea ſcientia quod cõtemni debeat, ea re tantum quod nihil adiuuet cõmunis hominum uitæ neceſſarias utilitates? Nullo certe modo: nam & extremi illius effectus ubi ſe cum materia coniungere incipiunt, eò maxime tendunt, ut paulo poſt dicturi ſumus. Quin eo maiore digna res eſt admiratione, quod citra ullius omnino materiæ contagionem ſuum ipſa finem in cóque fine ſitum bonum perſequatur: & in ſe ipſa conuerſa nihil ſpectet externum. Homines enim rerum ad uſum uitæ neceſſarium cõparandarum occupationibus uacui plane ſolutíq;, ſeſe ad ſciendum ſcientiæque adeptionem contulerunt: neque id tamen non recte, cum prima cura rerum illarum eſſe debeat, quibus natura ipſa ad ſui educationem & tuitionẽ carere nullo modo poteſt. Huic porro ſi quando ſatisfactũ erit, hoc eſt, ſi na turam ducem conſequuti, cupiditatem habendi rerum neceſſariarum modo naturáque metiri uoluerimus, tum uero illa nos cogitatio debet excipere, rerum à neceſſitate generationéque remotarum, & uerum ipſum proxime attingentium: quod cum acciderit, unà quoque id quod in anima noſtra inchoatum & rude fuerat, integrũ abſoluitur & perpolitũ. Scientiæ porro mathematicæ diuiſionem eam attulerunt ueterũ plerique, inter quos & Geminus, ut dicerét aliam quidem circa res uerſari ſolo intellectu perceptibiles, aliã uero res ſenſui ſubiectas pertractare. Res autem intelligibiles illas eſſe dixerunt, quarũ intelligentiam ipſe per ſe animus abſque ulla rerum ſenſilium participatione ſeipſum ad contẽplationem excitans perſequitur: cuius generis duæ ſunt præcipuæ potiſſimæq́; partes, arithmetica & geometria: alterũ uero genus quod rebus ſenſilibus addictum illa ſex comprehendit, aſtrologiam, muſicam, ſupputatricem, mechanicã, perſpectiuam, menſuratricem. Nam quod ad inſtruendas pertinet acies, (τακτικὸν uocant) in partibus mathematicæ habendum non arbitrãtur, quãuis interdum ipſius auxiliis uti adiuuaríque ſoleat, modo ſupputatricem adhibens, ut in enumerandis copiis, modo & menſuratricem, id eſt, γεωδαισίαν, ubi diuidenda ſunt caſtrorum metationi campi ſpatia & dimetienda: multo uero minus aut hiſtoriam: aut medendi artem dixeris partem ullam eſſe mathe-

maticæ,

maticæ,licet utraque ipſius ope interdum adiuue tur. Nam & hiſtoriæ perſcribendæ mathematica theoremata ſolere ſcimus appingi, ubi tractus ſitúſque regionum,urbium magnitudines, diametros, ambitus colligere uolunt. Ipſi quidē medici quàm multa in arte ſua, quàm elucidate tractant freti mathematicæ cognitionis ſubſidio? Nam quod ad aſtrologiam pertinet, quanta eius in omnem medicinæ partē manare poſſit utilitas, docent de ea re ſcripti diligenter Hippocratis libri: cæteri quoque omnes, qui modo de tēpeſtatum ratione locorúmque ſitu ſibi ſcribendum putaue runt. Eadem quoque ratio erit eius, qui aciebus inſtruendis operam accommodat: nam utetur & ipſe mathematicis theorematibus: neque tamen continuo mathematici nomine perhibēdus, licet aliquando q̄ minimos cupiens in ſpeciem uideri ſuos exercitus ad circuli figurā conſtituat caſtrorum ambitum, nonnūquam in quadratum pentagonum aut aliam multorum angulorum formam, ubi quàm maximos apparere cupit. Tales autem primæ ſpecies cum ſint ipſius mathematicæ, geometria rurſus diuiditur in tractatus duos, alterum planorum, alterum ſolidorum: nam punctorum & linearū propria nulla omnino ars reperiri poteſt, cum nulla figura punctis aut lineis conſtet, quæ non ſimul plana ſit aut ſolida. Nihil enim aliud agit geometria ulla ſui parte, quàm ut plana & ſolida conſtituat: conſtituta inter ſe com paret aut diuidat. Hoc idem efficitur in arithmetica: nam & numeri diuiduntur in lineares, planos & ſolidos, quorum omnium ſingulatim ſua eſt tractatio. Nam & ſpecies numerorũ ipſæ per ſe ab unitate prodeuntes explicantur, & generationes planorum, ſimilium, inquam, & diſſimilium, & ſolidorum etiam, qui tertia quadam multiplicatione confici ſolent. Illa autem quam menſuratricem dicimus: item alia quam ſupputatricem ſuperiorum ſimilitudinem nonnullam referentes: ipſæ tamen ſunt in eo diſſimiles, quòd non de numeris aut figuris intellectu ſolo comprehenſis inueſtigant, ſed de ſenſilibus: neque enim munus menſuratricis eſſe poſueris, ut cylindrum aut conum metiatur, ſed rerum in materia demerſarum aceruos tanquam conos, puteos autem ut cylindros: ſed neque lineis quibuſdam intelligibilibus id aſſequitur, uerum ſenſilibus, & ut exactiſſime, radiis ſolaribus: ruditer autẽ, per applicationem amuſſis lineæ, aut alterius rei non diſſimilis opera, quæ materia conſtet. Quam uero diximus ſupputatricem, ne ea quidem paſſiones numerorum ipſas per ſe cõſiderat, ſed numeros rebus materialibus inuolutos: & diuidendo quidem nihil ſtatuit eſſe minimum, quomodo neque arithmetica: quod tamen ſpectat ad certum genus unum, ponit aliquid quod ſit minimum: unus enim aliquis homo eſt illi pro menſura totius hominum multitudinis, ſicut unitas quoque menſura communis est omnium numerorum. Perspectiua rursus & musica sunt quædam ueluti partes, illa quidem geometriæ, hæc autẽ arithmeticę. Nam perspectiua uisu nostro ceu linea abutitur, & iis angulis qui ex radiis uisoriis constituuntur: diuiditúrque in eam quæ proprio nomine dicitur perspectiua, causas explicans eorũ, quæ aliter quàm sint, apparere solent, ob ipsorum alios atque alios positus & distantias: quales sunt lineæ parallelæ concurrere uisæ: rerum quoque quadratarũ figuræ circulari forma conspectæ. item in eam quę in uniuersum specularis dici potest, quæ cuiusq; generis radios fractos siue flexos perscrutatur, uisorum seu imaginum cognitionem adiunctam habẽs, simul & illud afferẽs, quî fieri possit, uti quod conspicitur, amœnum fit uisu iucundúmq;, nulla partium suarum discrepãtia aut deprauatione corruptam imaginem propter interuallũ aut eleuationem rei uisæ, oculis spectantium exhibens. Musica uero consonantium numerorum rationes auribus acceptas cũ indagasset, canones suos & fides ipsas ita secandas ostendit, ut faciles ad cognitionem nostram illæ sonorum conuenientiæ fierent: cúmque passim ad sensuum delectationẽ iudiciúmque diuerteret, sermonem Platoni dedit affirmanti eã esse, quæ menti aures ipsas prętulisse uisa sit. Ad illas superiores accedit mechanica, pars & ipsa quædã existens totius tractationis & cognitionis rerum sensilium & materiæ coniunctarum. Huius autẽ generis illa eſt quæ opera & machinas cuiuſque modi efficit ad uſum totius rei bellicę neceſſarium idoneas: qualia multa diuino uir ingenio Syracuſius Archimedes excogitaſſe ſcribitur & conſtruxiſſe, uim permagnam & incredibilem habentia, ipſis quoque Romanis Syracuſas terra maríque obſidentibus formidabilia: quorum tamen ipſorũ nihil apud Archimedem tanti fuerat, ut magno ſtudio dignum arbitraretur: uerum ſicut Plutarchus in Marcello ſcribit elegantiſſime, γεωμετρίας παιζούσης ἐγεγόνει πάρεργα τὰ πλεῖστα: ea tamẽ fuerunt unius hominis ludicra, ut Romanorum uires toti pene terrarum orbi formidabiles diutius eluſerint, nec ante urbis potiũdæ Marcello imperatori clariſſimo ſpes facta fuerit, quàm ex inſidiis noctu, mœnibus per abſentiam Archimedis indefenſis ſcalas admouerit. Fabuloſa hæc profecto uideri poſſint, ſi ad noſtrorũ hominum ingenia, quæ uſpiam ſunt nobiliſſima, conferantur. Verum tamẽ perinique faceremus, ſi primum aliorum induſtriam ex cæterorũ metiri uellemus ignauia: ut quod hi non poſſint, ne illi quidem potuiſſe uideantur. Deinde quî fieri poſſit, quæ præſtantiſſimi quique, iidémque grauiſſimi ſcriptores, non Græci tantum, qui ſuis ambitioſius fauiſſe uideri poſſint, ſed etiã Latini, iíq; Græcis hominibus ſępius iniqui, M. Tullius, T. Liuius in unius hominis laudibus conſentientes ad cælum extulerũt, ut his fidem abrogemus? Quòd

ſine

ſine authoritate quidem ulla ad credendum adducimur, ſunt in oculis manibúsq; noſtris Archimedis ipſius opera, non illa quidem de machinis ipſis aut operibus conſcripta, nihil enim tale ſcriptione dignũ magnopere iudicauit, ſed quæ longe maiora diuinioráque cenſenda ſint, rerum illarum uniuerſalia theoremata, quæ ſi quis uia ordinéque aggreſſus erit, cum iiſdem ueſtigiis inſtiterit, quibus Archimedes & ueteres illi nobileſq; geometræ, eodem quoque peruenturum ſeſe confidat. Nobis quidem ſi uita ſuppetet, illud in primis curæ futurum eſt, quod adhuc fuit in hoc decimo Euclidis libro, ut difficillimi quique priſcorum geometrarum libri certa ſpe & fiducia intelligendi legi poſſint ab iis, qui modo ſtudiorũ ſuorum rationem ad ueterum normam exigere, ordinémque certiſſimum diſcendi magiſtrum conſeruare uolét. Ordinem autem ipſum ſi quis obſeruauerit, nihil præterea putet eſſe, quod ſibi deeſſe poſſit. Sed iam ad inſtitutũ ut reuertamur, ad eas artes quas ante memorauimus accedit & illa, quæ rebus ex ſeſe immobilibus motum attribuit, nunc per quaſdam aſpirationes, quemadmodum perſecuti ſunt Cteſibius & Heron: nunc per librationes ponderúmque momenta, quorum inæqualitas mouendi cauſam affert, æqualitas uero quietis neceſſitaté, ut eſt in Timæo: nunc quibuſdã neruis & funiculis attractus & motiones animatorum corporum imitantibus. Eſt & alia ge-

neris eiusdem, quæ sphæris construendis operam adhibens, circuitus orbium cælestium imitatione consequitur: qualem idem ille nunquam satis laudatus Archimedes effinxit. Astrologia superest disputationem instituens de mundi ipsius cõuersione mirabili, de magnitudine, figura, situ, celeritate, tarditate corporum cælestium: quæ uis sit in illis illuminãdi, qui discessus à terra, qui ad eãdem accessus: & quæ sunt his consequentia, ex sensu quidem & ipsa permultum instructa, nihilo tamen minus cognitioni rerum naturalium familiariter communicãs. Cuius illa pars contemnenda non est, quæ ex normarum & umbilicorum situ, horarum spatia & tempestatum interualla dimetitur: quæq; sublimia uestigando poli cælestis altitudines in quaque terrarum parte, astrorúmque dissitas positiones comprehẽdit, pleraque simul alia persequens, quæ sunt astrologo speculanti proposita. Est & illa quæ dioptrica dicitur per rimulas in sole, luna cæterísq; syderibus celeritates tarditatésque motuũ uenari solita. Eæ quidem sunt partes scientiæ mathematicæ, ita descriptæ à ueteribus mathematicis, quemadmodũ explicuimus. Nunc autem de fine ad quem feratur intendátque, cum hæc tota tractatio elementorum geometricorum, tum ea de lineis rationalibus & irrationalibus, quæ est huius decimi libri propria, pauca quædam afferamus. Qua in re illud sane cum primis est intelligendũ, propositum
duplex

duplex Euclidi fuisse in his quidem libris: aliud quod traditionem rerum perquisitarum respiceret: aliud præterea quod discẽtis animum omnibus modis informaret & erudiret: ut si res ipsæ inuestigationi subiectæ considerandæ sint, dicendũ profecto uideatur toto hoc de geometria sermone nihil aliud quæri, quàm ut nobiles illæ figuræ quinque plane comprehẽsione intelligantur, à quibus mundus hic uniuersus, iudicio quidẽ Platonis, descriptas suas habet partes. Itaq; primum cœpit agi de simplicissimis quibusque rebus: deinde sensim assurgente compositionis structura, eò tandem peruentum est, ut uarietas omnis illarum figurarum aperiretur, & separatim quidem unaquæque prius constituta, tum denique simul omnes eodem globo contentæ inuoluerẽtur, expositis etiam proportionibus, quas lineis lateralibus cuiusque figuræ inter se, quásque superficiebus ipsis, & quas solidis etiam figuris inter ipsas inesse compertum est. Quod autem ad illud propositum attinet, erudiendi eius qui ad hoc studiũ discendum accesserit, huiusmodi est, ut secũdum Elementorũ geometricorum intelligẽtiam perfecte cumuletur animus, absoluatúrq; ipsius habitus & compleatur: quo facile possit ad quamlibet geometriæ tractationẽ comprehendẽdam ipse sibi sufficere. Ab his enim uelut initiis auspicati, cæterarũ quoq; permultarũ, uel potius omniũ huius sciẽtiæ partium poterimus cognitionem assequi, eiuſdémque multiplicem animo complecti uarietatem: neque id tantum, quin & illud quoque uerissime dici poteſt, ſine iiſdem ipſis reliquorum omnium non obſcuram ſolum, uerum neque omnino poſſibilem eſſe intelligẽtiam. Nam & prima quæque atq; ſimpliciſſima theoremata proxime etiam ad primas hypotheſes accedentia, ſunt his libris ita coagmentata, ut interim nullum ordinem magis cuiq; rei conuenientem afferri potuiſſe cognoſcamus: ex quibus cæterarũ partium ſcriptores ad propoſitũ ſuũ accõmodate, certiſſimis & incõuulſis uſi ſunt ſuarũ demõſtrationum fundamentis. Quo in genere eſt Archimedes, Apollonius Pergæus, & cęteri omnes nõ geometræ tantũ, ſed & aſtrologi, & qui mathematicorũ nomine cenſeri ſolẽt. Hoc autem cum alibi ſemper, tum uero in legendis Conicis Apollonij certiſſimum eſſe nuper ipſi uidimus: ad quæ niſi diligenter inſtructus ab Euclide ueneris, operã plane tibi periiſſe ſenties. Eſt enim Euclidis geometria non ad eorum tantũ cognitionem, quę ſunt de eodem genere ſcripta, neceſſario perdiſcenda, ſed etiam in quauis mathematicarũ ſcientiarũ nihil cuiquã ſatis poterit eſſe notum, qui nõ à geometria profectus peruenerit ad cætera: quam ſi quis ſecundũ Philonẽ eſſe dixerit principiũ & tãquam μητρόπολιν reliquarum omnium mathematicarum, is profecto à rei totius ueritate non aberrauerit. Nam ex illa matrice ueluti quadam urbe populoſa deductæ

ctæ sunt illæ deinceps colonię, quę sunt à nobis superius explicatæ. Est ergo finis ille geometricorũ elementorum absolutus discentis habitus, scientiæ uniuersæ capax, traditióque mundanarũ figurarum, quæ sint cuiusq; propriæ fabricationes & inter se conuenientiæ. Id uero de quo conscriptus est hic decimus liber, de commensurabilitate dico & incommensurabilitate, rationalitate & irrationalitate linearum, eò pertinet, ut cum extremum totius operis futurum illud esset exponere, figurarũ, de quibus antea dictũ est, dimensus, ea præfari oportere uisa sunt, sine quibus illud percipi nullo modo posset. In primísque necessarium fuit, quoniã illæ figuræ æqualibus superficiebus, lateribus item & angulis æquis comprehendendæ erant, & eodem globo ita coercendæ, ut quilibet angulus solidus cuiusque figuræ intimam faciem pertingeret, ostendere quanto diameter globi longior esset unoquoque cuiusque figuræ latere. Cúmque uidisset Euclides in pyramide, octaedro & cubo talem esse habitudinem ipsorum laterum ad globi diametrum, quam rationalem esse posuerat, ut essent ipsa inter sese comparata lõgitudine quidem incommensurabilia, sed potentia tamen commensurabilia, ideóque rationalia: in eicosaedro uero & dodecaedro non solum esse inter ipsa latera longitudinis incommensurabilitatem, sed & potentiæ quoque, ob eámque causam illa esse simpliciter irrationalia certæ cuiusdã ſpeciei. Ea ratione priuſquã ad illa demonſtranda aggrederetur, intellexit omnino ſibi faciendũ eſſe, ut de linearum rationalitate irrationalitatéq; tractatum inſtitueret, quótque & quales eſſent ſpecies irrationalium linearum: ut non appellationibus tãtum diſcretis notari poſſent, ſed, quod multo certius eſt ad quãque rem cognoſcendam, quid cuique ſpeciei ſingulatim neceſſarióque cõueniret, perſpicuum fieret. Proinde tractatum illum abſolui non poſſe ſine cognitione numerorũ cum facile intelligeret, ideo de ui numerorũ quãtum ſatis uiſum eſt ad ſermonem ſuſceptum, tribus eſt libris diligentiſſime commẽtatus. Neque enim ferendus eſt neſcio quorũ hominum error, affirmantium proportiones linearum irrationalium eſſe non nobis tantum, ſed & naturæ ignotas: ob idque potiſſimum, quòd illæ tales proportiones nõ extent in numeris. Quod ſi ita eſſet, primum quàm inanis uideri deberet conatus Euclidis, operam in re per ſe inexplicabili abutentis? tum autem adeo ſunt illuſtres hoc libro notæ, támque proprij cuiuſque ueluti mores expreſſi, ut quod Euclides conari uiſus eſt, illud abunde perfectéque præſtitiſſe intelligatur. Nobiliſſimũ itaque totius geometriæ locum à Pythagora philoſopho præſtantiſſimo ante patefactum ita perpoliuit excoluítque, ut deſiderio nihil reliquerit.

Hæc habui Bellaï ampliſſime, quæ nõ quidẽ dicere poſſem, finem enim nullũ habitura eſſet oratio,

tio, sed quæ cum dixissem, existimaui iuuentutis partem aliquam excitatum iri, ut cuperet imitatione studiorum, ueterum philosophorum nominis gloriam æmulari. Cuius præclarissimæ cōtentionis in animis hominum excitandæ facultatem uiris concessam esse principibus, eámque amplissimam, cum intelligeret Franciscus Rex, huius nostri pater, omnium bonarum artium fidelissimus tutor, patronus atque propugnator acerrimus, iuuit ille quidem mirifice studia literarum: uerum minus profecto quàm uoluit, magis autem multo, quàm licitum illi fuit per quorundam auersas à laudabilissimo studio rationes, atque uolūtates. Illius tu Regis alumnus, illius tu beneficentia ad summos fortunæ dignitatísque gradus, doctrinæ commendatione sublatus, recte constantérque feceris, si quod per te nauiter facis, patrocinium philosophiæ antea quidē à Rege liberalissimo susceptum, ita retinere pergas, ut Margareta Regis filia, iudiciíque paterni, atque animi in bonarū artium studiis, bonorúmque omnium tuitione obseruantissima atque æmula, bene collocatum in te ornando patris beneficium prædicare possit. Permultos autem esse multis in locis cum acceperim, quorum in philosophiæ literis studia, tuis paratissimis opibus alantur & sustententur: hæc autem una mathematica cognitio, cuius tantæ sunt in omni philosophiæ parte commoditates, deserta plane destitutáque reliquorum hominum preſidiis paſſim iaceat atque ignoretur, tuæ certæ partes illæ ſunt, ut huic quoque ſtudio pro tua humanitate per te conſultum uelis: ex iſtóque præclaro tuorum grege, de quo paulò antè dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundiſſimi atque fructuoſiſſimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi, penitúſque perſcrutati, poſſint cæteros exemplo doctrináque ad ſui æmulationem permouere.

Vale. Lutetia Calend. Iulij. 1551.

Errata ſic corrigito. Fol.8.uerſ.9.propoſitis.fo.15.in fig ι ζ.eod. fol.uerſ.18.Quare ι met.fo.20.in fig.α ζ.fo.24.b.uerſ.22.amplius. uerſ.26.quam.fol.27.b.uerſ. 18.ſecundā.fo.31.uerſ.ante penul.dele ſuperficiales.fo.34.b.uerſ.antepen.quàm.fo.43.in fig.lin.α ſubijce γ.fo.49.ī fig.ubi eſt γ, pone Λ.ubi eſt Λ, γ.fo.54.in fig.θ δ υ ζ γ.fo. 74.uer.14.binomiū:alibi.fo.80.uerſ.19.linea Λ β.fo.88.uerſ.21.eo quod.fo.89.in fig.ι θ λ.fol.95.uerſ.10.uerbis ıj.fol.102.b.uerſ.13. ideo ſic.fol.104.Octogeſimū ubiq;.fol.110 b.uerſ.21.quàm.fo 114 in figu.ſub π ſcribe υ fol.116.uerſ.13.per 1.6.fol 127.uerſ 2.quadratum.fol.329.uerſ.25.linea κ θ.fo.132.uerſ.14.ad β δ.fol.134. uerſ.12.lineæ.fo.135, b.uerſ.24.lineæ, κ λ.fol.136.uerſ.13.dictarū.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

Petro Montaureo interprete.

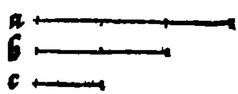
COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur illæ, quas eadem mensura metitur.

PROPOSITVM *nobis illud est hunc decimũ elemẽtorum librum (cuius intelligentiam plerique difficillimam suspicantur, neq; uerò possibilem absque auxilio eius partis arithmeticæ, quam multorum scriptis illustratã* Algebram *uocant) sine omnino ullis numeris irrationalibus dictis ostendere, nõ solùm non difficillimũ, sed etiam facillimum esse, si quis attentum animum & instructum scientia librorum superiorum* Euclidis *afferat: neque porrò cuiusquam externæ scientiæ, nedum algebræ demonstrationibus indigere: sed ex suis ipsius* Euclidis *tãtum demonstrationibus, & familiarissimo ipsi ordine dependere.* Vt *autem clarius intelligatur hæc definitio, prius explanãdum puto, si quid in ea subobscurum contineri uideatur. sic enim præcipiunt dialectici.* Cum *itaque dicitur aliqua mensura magnitudinẽ aliam metiri: illud intelligitur primùm, ut ea mensura sit minor illa quam metitur, aut ei saltem æqualis. maior enim nullo modo metiri minorem potest.* De*inde ut ea mensura semel sumpta si æqualis erit, aut si minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudinem quam metitur, præcise referat. id quod ex numeris* *deprehendi facillime potest. Quãuis enim Euclides hac definitione comprehendat magnitudines tantùm quas quantitates continuas appellant, quales sunt lineæ, superficies, & corpora: tamen arbitror non inepte requirendam esse explicationem huius loci à numeris: quum præsertim magnitudines commensurabiles eam habeãt proportionem inter se, quam numerus ad numerum.*

Campanus uir ex geometriæ studijs laudem nõ immeritò consequutus, illud principium recte inserit cæteris libri septimi principijs, cum græcum exemplar nihil tale habeat. Numerus aliũ numerare dicitur, qui secundum aliquem multiplicatus, illum producit. cuius rei hoc sit exemplum. Ternarius numerat ternarium per unitatẽ multiplicatus. idem ternarius numerat senarium per binarium multiplicatus: numerat nouenarium per ternarium multiplicatus: numerat 12 per 4: numerat quoq; cæteros infinitos. Ille ipse tamen ternarius alios numeros superioribus interpositos minime numerat. Nam neq; unitatem ipsam, aut binarium numerat. Maior enim minorem nullo modo numerare potest: sicut in magnitudinibus (ut antè diximus) maior mensura minorem seipsa magnitudinem non metitur. Neque uerò ternarius numerat 4 aut 5. per unitatem enim multiplicatus nihil amplius efficit quàm 3. binario uerò multiplicatus, excedit & 4 & 5. multo magis si alio ternario aut maiore aliquo numero multiplicatus fuerit, eosdem 4 & 5 excesserit. Eadẽ ratio est septenarij, octonarij, denarij & undenarij, si unum ex his quemlibet coneris per ternariũ numerare. Si quis

autem

autem erit qui me res nimiū minutas persequi reprę-hendat: consilium nostrum illud esse sciat, ut librū hūc, non tam natura sua difficilē, quàm ignoratione principiorum, ad intelligendum facillimum reddam his qui amœnißimum hunc geometriæ locū perlustrare uolent. Et certè in maximos errores plerosq; imprudentiæ suæ uitio & principiorum parua siue dicas praua intelligentia turpiter incidisse, neminem dubitaturum arbitror, qui modò nostra legens, ipsarum rerum intelligentiam assequutus erit. De his autem hactenus. nos in uiā redeamus. Dicimus hanc definitionem magnitudinū commensurabilium, siue malis principium nominare, per analogiam quandam ex illo Campani loco plane intelligi. Nam quod dicitur in numeris alios numeros numerantibus: idem aut simile quiddam intelligas in magnitudinibus, quarum alteram dicimus per alterā mensurari. Quod ut planius intelligatur, sumamus exēplum in una specie magnitudinis. Sint duæ lineæ ā & b. quæ si fuerint cōmen



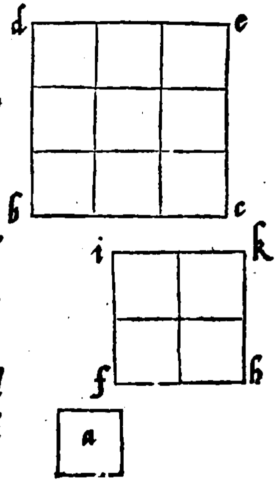
surabiles, erit quoque communis utrique aliqua mensura quæ sit c. Nam illa linea c bis repetita, refert præcise lineam b. ter uerò repetita, lineam ā, & ipsa quoque præcise refert.

Incommensurabiles verò magnitudines dicuntur hæ, quarum nullam mensuram communē contingit reperiri.

Hic locus pluribus uerbis non uidetur indigere, quàm ut *moneamus ex superius dictis intelligendũ esse. Contraria enim ex contrarijs intelligi posse receptum est. Porrò accidentia & passiones his congruentes ex ipso Euclide repeti debere sequentium rerum lectio docebit.*

Lineæ rectæ potentiâ commensurabiles sunt: quarum quadrata una eadem superficies siue area metitur.

Quantum ad hunc locum attinet, duo quædam præscribenda puto. Primum, ut intelligamus per hãc uocem, lineæ potentia, quadratũ illius. tantum enim dicitur linea posse, quantum quadratum describere potest. Alterum, ut tali distinctione hîc utamur. Linearum hæ quidem sunt longitudine inter se commensurabiles: illæ uerò potentiâ inter se commensurabiles. Alterum membrum linearum longitudine commensurabiliũ non explicat Euclides, *quia uisus erat illud comprehẽdisse antea uniuersali definitione magnitudinum commensurabiliũ.* Nam *lineæ sunt sub genere magnitudinis. Sed quia lineæ habent illud quoque in se propriũ & peculiare, præter cæteras magnitudines, ut quædam ex his sint potentiâ cõmensurabiles: hoc uerò sibi nõ existimauit prætermittendum.*



Sit linea b c. eius quadratũ sit b c d e. sit etiã linea f h. eius quadratũ sit f h i k. *hæc duo quadrata me-*

tiatur

tiatur una quæpiã superficies, uerbi gratia superficies ã, quæ metiatur primò quadratum b c d e, nouies repetita, qui est numerus areolarum in eodẽ quadrato descriptarum. Præterea metiatur quadratũ f h i k, quater repetita, secundum numerum suarum areolarum. Erit itaque superficies ã, illa, quæ metitur ea quadrata duo. Horum ergo, quadratorũ inquam, b c d e, f h i k, latera siue lineæ potentes illa quadrata, quæ sunt lineæ b c, f h, erunt potentiâ commensurabiles.

Incommensurabiles verò lineæ sunt, quarum quadrata, quę metiatur area communis, reperiri nulla potest.

Hoc loco nihil aliud dico, quàm ut adiuues intelligentiam huius loci additione uocis, potentia, quæ superiori definitioni additur, ut intelligas de lineis illis quæ sunt incommensurabiles potentiâ. quæ cum sint potentiâ incõmensurabiles: illud quoque habent, ut sint præterea longitudine incommensurabiles. hactenus dictũ sit. Quòd si plura hoc quidem loco scire desideres: peruertes ordinem disciplinæ, qui certißimus est ad discẽdũ magister.

Hæc cum ita sint, ostendi potest, quòd quãtacunq; linea recta nobis proponatur: existunt etiam alię lineæ innumerabiles eidem cõmensurabiles: alię item incommensurabiles. hæ quidẽ longitudine & potentia: illæ verò potentia tantùm.

Huius libri præcipuum illud esse uelim scias, quod non, ut cæterorum superiorum, in prima lectione percipi poßit eius doctrina, sed iterata & sæpius repetita: eóque fit ut pleraque principia hic scripta, non quidem demonstrentur ex sequentibus: sed melius intelligantur, si cum ad sequentia ueneris, ad principia subinde redeas. Vsus enim harum uocum, qui est in ipsis theorematibus, res illis uocibus expressas faciliores intellectu reddit. Sic itaque faciendum puto hoc quidem loco. Nam sequentes propositiones magnam illi lucem afferent. Tantum enitere ut concipias animo res nudas, quarum significatio his uocibus simplicibus continetur: in quo te iuuabunt ea quæ superius à nobis scripta sunt. Vocetur igitur linea recta, quantacũque proponatur ῥητὴ, id est rationalis. Quam lineam uocari uult ῥητὴν, eam interpretes Latini nominauerunt rationalẽ. qua ratione ducti, nescio: mihi quidẽ non ualde probatur. Sit ergo ῥητὴ linea recta quæcunque, de qua sermo institui debeat. Etymologiæ rationem in enuntiatione rerũ uocibus simplicibus significandarum, sicut uisi sunt ueteres magna diligentia consequuti: ita nobis non contemnendã existimo, ut rerum ipsarum cognitionem adiuuemus. huius uocis ῥητὴ ratio ducta mihi uideri solet ἀπὸ τοῦ ῥηθῆναι unde τὰ ῥητὰ καὶ ἄρρητα. ῥητὸν illud interprætor quod est effabile, certum, concessum, & determinatum: ac si, uerbi causa, dicas id esse, quod est dicibile, & uoce significari poßit. ῥητὴ itaq; erit quæcunque linea, quantacunque magnitudine proponatur. Ideo ῥητὴ nominata, quia datam lineã poßumus diuidere in quàm multas partes uoluerimus. Scitum est enim ex nona propositione sexti libri, A data linea iussam partẽ auferre.

ferre. Quod quum ita sit, proposita linea diuisiones eas admittit, quas animo conceperis: ut dicas, hæc linea quæ proponitur, tot partes habet, tres puta, quatuor aut quinque, quas aut pedes aut passus, aut aliud quoduis mensuræ genus esse contigerit, ut tres pedes aut passus quatuor longa sit. hæc autem linea, quam ῥητὴν *uoco, omnibus penè propositionibus huius libri, & eis maximè quæ à decima incipiunt, fundamenta præstat: ut nisi hanc primo loco posueris, & animo conceperis antequam demonstrationem cuiusque theorematis attingas, nullum facile intelligas.* Est *enim uelut norma omnium linearum ex qua ipsarum quoque mensura peti debet an sint rationales necne.* Nam *hæc ipsa* ῥητὴ *quæ hic denominatur, est* ῥητὴ *ex suppositione quod quidem hæc uox* προτεθεῖσα *facile indicat, quasi dixerit* ὑποτεθεῖσα, *quæ uelut* ῥητὴ *id est rationalis primo loco dici potest, ut ipsa uoce differat à cæteris lineis rationalibus, de quibus mox agit. Cuius rei te perpetuò meminisse uelim.*

Lineæ quoque illi ῥητῇ commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantũ, vocentur & ipsæ ῥηταὶ id est rationales.

Hic locus plane intelligitur ex duabus definitionibus supradictis, nempe magnitudinum commensurabilium, & linearum potentia commensurabilium. Obiter tamen aduertas in his uerbis, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, quantã cautionem adhibuit Euclides, *ut uocibus ipsis coniungeret* *res eas quæ natura sua coniunguntur, seiungeretq; contrarias. quod religiosissime mathematici penè omnes uisi sunt obseruare: ut in hoc loco, quia lineæ longitudine commensurabiles, sunt & ipsæ quoque potentia commensurabiles, quum de commensurabilibus longitudine loqueretur, addere uoluit, & potentia. cum uerò de potentia cõmensurabilibus, apposuit, tantùm. Quæ enim lineæ sunt potentiâ commensurabiles, non cõtinuò sunt & longitudine.* Hæ *uerò* ῥηταὶ *id est rationales, quæ hoc loco talem denominationem acceperunt, iam non sunt* ῥηταὶ *ex suppositione, id quod erat illa prior* ῥητὴ*: sed sunt tales propter relationem quam habent ad illam. Quia sunt aut longitudine simulq; potentia, aut potentia tantùm, ipsi* ῥητῇ *quæ primo loco ita dicitur, commensurabiles.* Præterea *hìc est animaduertendum, uoces illas, longitudine & potentia, aut potentia tantùm, coniungi cum illis uocibus commensurabiles, aut incommensurabiles: illis uerò uocibus, rationales, aut irrationales, nunquam adponi, ut dicantur longitudine siue potentia rationales aut irrationales lineæ. quod Campanus uidetur promiscue usurpasse. Si plura cupis, auidum discendi animũ hìc retineto, ne uestigia authoris, eiusdemq; ducis tui deseras, qui principia quidẽ simplicissime tradenda sibi putauit, ut discentium animos nuda rei notione tantùm informaret. quod & uerius est, & ad docendum magis appositum.*

Quæ verò lineæ sunt incommensurabiles, illi τῇ ῥητῇ id est primo loco rationali, vocentur ἄλογοι id est irrationales.

Illud

Illud intellige de lineis longitudine & potentia incommẽsurabilibus. Nam incommensurabiles potẽtia tantùm, ut eædem non sint longitudine etiam incommensurabiles, esse nullæ possunt. neque hic existimes Euclidem agere de lineis longitudine tantùm incommensurabilibus, potentia uerò commensurabilibus. has enim nuper posuit inter ῥητὰς id est rationales. Vult autem hic lineas omni ratione incõmensurabiles, id est potentia & longitudine uocari ἀλόγους. Quod cum non ita perceptum esset à Campano, uidetur homini causam erroris attulisse, quam ipse posteris quoque tradidit, ut mox dicemus. Quid sit ῥητὴ, & ῥητὸν, antè dictum est. Quod uerò ad hanc uocem ἄλογοι pertinet, ex commẽtarijs Procli scire licet, ῥητὸν καὶ ἄῤῥητον opponi per priuationem, ut ἄῤῥητον sit contrarium τῷ ῥητῷ: ἄλογον autem sæpius usurpari pro hac uoce ἄῤῥητον, cum tamẽ idem sit ἄλογον & ἄῤῥητον. hoc ἀπὸ τοῦ ἐρῆσθαι, illud ἀπὸ τοῦ λέγεσθαι, quæ idẽ significant. Itaque ἄλογος linea erit cuius proportio siue longitudo comparata ad longitudinem τῆς ῥητῆς id est ipsius lineæ primo loco, & ex suppositione rationalis, nullis numeris referri potest. Neq; putes ἄλογοι dici per priuationem τοῦ λόγου id est proportionis. Est enim sua proportio linearum alogarum inter se non quidem nobis planè incognita, nedum ut naturæ cognitionẽ effugiãt: quod quidã uolunt, alioqui frustrà sumpsisset eam operam Euclides hoc quidẽ in libro in quo nihil aliud agit, quàm ut doceat passiones illarum linearum, & proportiones quas illæ lineæ ἄλογοι inter se retinent. Verũ ea ratione dicuntur ἄλογοι, quia numeris earum proportio *reddi non potest. Nam quod isti uocant irrationale, cur ita uocent, non intelligo. Surdas autem lineas dici, quas hîc ἀλόγους uocat* Euclides, *non omnino displicet: quãuis mathematici nõ facile huiusmodi translationes admittant, sed quia propriam huius rei uocẽ deesse agnoscimus, ferri potest hæc translatio. Neque tamen hoc loco prætermittendũ puto, quod* Nicolaus Tartalea *geometra apud* Venetos, *& libris eruditis nobis quoq; non incognitus, animaduertit* Campanum *& reliquos ab eo geometras falso existimauisse radices siue lineas quæ quadrata producunt, illa quidem numero significabilia, sed non quadrato numero, ueluti* 10, 11, 12, *& similibus, eas inquam lineas ἀλόγους esse id est, ut eorum uerbo utar, surdas: hoc uerò pugnare contra hypotheses* Eucli*dis, qui uoluit eas uocari ῥητὰς id est rationales, quæ sunt ad lineam propositam commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm: ex quo magnas opinionum differentias in plerisque huius libri locis extitisse. hactenus* Tartalea. *Neque sanè hoc nihil est, neque tamen in eo sunt omnia. Ego uerò illud affirmare non dubitem, hinc cæpisse noctis illius initiũ, quæ tam densas tenebras offuderit ueritati rerum his libris traditarum, quæ docentes & discentes plerosq; omnes diuersos egerint: ut quum ulterius progrederẽtur, nihil amplius intelligerent, quàm se nihil intelligere. nostrum quidem de ea re iudicium cum opus fuerit, afferemus.*

Et quadratum quod à linea proposita describitur, quam ῥητὴν uocari uoluimus, uocetur ῥητόν.

Non uideo quid planius dici poßit.

Et

Et quæ ſunt huic commenſurabilia, uocentur ῥητά.

Hanc uocem commēſurabilia, intelligas ſiue ſint quadrata, ſiue aliæ quæcunque figuræ rectilineæ. Scitum eſt enim cuicunque parallelogrammo, æquale quadratum deſcribere: per ultimum theorema libri ſecundi, ſiue per inuentionem lineæ mediæ proportionalis ſecundum 13 theorema libri 6. quam ubi repereris, colliges ſtatim per 17.6. parallelogrammum rectangulum cōpræhenſum ex duabus lineis extremis eſſe æquale quadrato lineæ mediæ. Simili ratione rurſus cuicunq; quadrato parallelogrammum æquale deſcribitur, per inuentionem tertiæ lineæ proportionalis ſecūdum theorema 11.6. hîc uides nihil tale dici de quadratis & cæteris figuris, quale de lineis antea, quarum eſt & longitudo & potentia commenſurabilis. Figurarum enim ſola conſideratur capacitas, quam longitudo latitudini iuncta determinat.

capacitas [illegible]
[illegible] in f. [illegible]
longitud. [illegible]
deter[illegible]

Quæ uerò ſunt illi quadrato, ῥητῷ ſcilicet, incommēſurabilia uocentur ἄλογα id eſt ſurda.

Incommenſurabilia hîc quoq; accipias, quales quales fuerint figuræ rectilineæ.

Et lineæ quæ illa incommenſurabilia deſcribunt, uocentur ἄλογοι. Et quidem ſi illa incommenſurabilia fuerint quadrata, ipſa eorum latera uocabuntur ἄλογοι lineæ. quod ſi quadrata quidem nō fuerint, uerùm aliæ quæpiam ſuperficies ſiue figuræ rectilineæ, tunc uerò lineæ illæ quæ deſcribunt quadrata æqualia figuris rectilineis, vocentur ἄλογοι.

Vnum est quod hoc loco animaduertendum putem. Cum dixisset ἄλογα esse quæ sunt incommensurabilia τῷ ῥητῷ, subiungere uoluit de lineis illa incommensurabilia describentibus, & eas uocauit similiter ἀλόγους: cum tamẽ antea loqueretur de commensurabilibus ipsi ῥητῷ, nihil egit de lineis illa commensurabilia describentibus. hoc autem ea ratione prætermisit, quia satis sibi fecisse uidebatur, & de his innuisse, cum loqueretur de lineis τῇ ῥητῇ cõmensurabilibus, sub illis uerbis, siue potẽtia tantùm. Nam potentia lineæ est ipsius quadratum, ut antè diximus. Quod si quadratum commensurabile fuerit ipsi ῥητῷ, ipsa quoque linea quæ illud quadratum potest, commensurabilis erit saltem potentia. Itaque per diffinitionem linearum commensurabilium ῥητῇ etiam erit. Extat libellus nomine Aristotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν, quem quidem ~~non esse Aristotelis ex multis~~ locis ipsius facilè intelligitur: eruditio tamen facit, ut attribui debeat alicui ex nobili illa Peripateticorum & docta familia. in eo multa leges intelligentiæ horum principiorum conducentia. Quorum illud unũ annotabimus; quod ferè summam totius rei declarationem continere uideri posit. Commensurabilitatem & incommensurabilitatem magnitudinum inter se, natura quidem ipsarum magnitudinum constare. Rationalitatem uerò & irrationalitatem positione fieri, quia quæ primo loco linea sic dicitur, nempe rationalis positione talis efficitur. Aliæ uerò lineæ ad illã relatæ, sunt aut rationa-

les,

les, aut irrationales, quatenus ſunt eidem commẽſurabiles aut eidem incommẽſurabiles. Rurſus *linea rationalis quæ talis eſt, quia cõmenſurabilis eſt lineæ illi primo rationali, & ipſa relata ſiue comparata alteri lineæ, quæ item proponatur primo loco rationalis eſſe, ſi eidem fuerit incommenſurabilis, dicetur etiam irrationalis.* Itaque *eadem linea alteri atque alteri commenſurabilis & incommenſurabilis, erit ſimiliter rationalis & irrationalis.* Hoc *autem ideo fit, quia rationalitas, & irrationalitas omnis pendet ex poſitione, non autem ex natura ipſarum magnitudinum. quod tamen in commenſurabilitate & incommenſurabilitate aliter eſt. Sunt & communes quædam animi conceptiones, quas hîc omiſit* Euclides*, tum quia ſunt infinitæ, tum uerò quia ſunt eiuſmodi, ut eas unuſquiſque poßit animo modica quadam animaduerſione ſubijcere, ut locus ipſe poſtulare uidebitur: ex quibus tamen illas non prætermittemus, quæ ſingulis locis conuenientes erunt, quales reperiuntur in demonſtrationibus primi & ſecundi theorematum.*

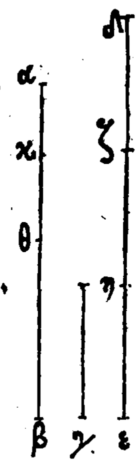
C*ampanus principijs huius libri illud quoq; inſerit,* Q*uamlibet quantitatem toties poſſe multiplicari, ut quamlibet eiuſdem generis quantitatem excedat. quod quidem recte fecit. nam huius principij auxilio ſtatim utitur demonſtratio primi theorematis huius libri.* De *illa autem magnitudine hic dicit, quam geometræ & cæteri mathematici tractant, ut augeri poßit in infinitum.* Hoc *loco uiſum eſt addere, quod cum alij obſcurè,* Proclus *tamen luculentißimè tradit: cuius libros (de ijs* *intelligo quos in* Euclidem *scripsit) ut omnes qui quidē mathematici fieri cupiunt, studiose legant, uehementer hortor: quibus ego plurimùm debere me, nunquam inficiabor. Quod ad rem attinet, id est huiusmodi, principium illud* Campani *uniuersaliter quantitatem omnē (siue sit ea quam continuā uocant, siue discreta sit qualis est numerus) compræhendere.* Porrò *aliud est quod quantitati continuæ soli conueniat, ut in infinitum minui poßit, sicut in linea. Quantacunque enim detur in partes infinitas, minui siue diuidi potest, quarum tamē unaquæque linea erit.* Illa *porrò itidē in alias quæ eandem naturam retinent: neq; unquam ad minimum ex sectione deuenitur, ne si punctum quidem dicas, quāuis illud per se sit in geometria minimū.* Eo *fit ut sint lineæ quædam* ἄλογοι, *quarum quidē est inter se quædā proportio, sed numero exprimi nequit, itaque uocatur à* Proclo λόγος ἄῤῥητος. *Nam ubicunque est sectio siue diuisio in infinitum, ibi quoque reperitur illud ineffabile, quod* ἄλογον *dicunt. hoc uerò non ita est in numeris.* Nul*lus enim est numerus quem diuidendo non reducas ad illud minimum quod est unitas, ex quo numeros omnes esse* ῥητοὺς & συμμέτρους *necesse est. omnes enim metitur unitas.* Nulli *igitur sunt numeri* ἄλογοι. Quod *autem ad sequentium theorematum expositionem attinet, hoc habetote, non fuisse consilij nostri initio suscepti operis singulis manum admouere.* A*ctum enim agere hoc quidē esse uidebatur, si quæ à maioribus recte tradita sunt (sunt autem bene multa) hìc describerem.* Neque *sanè cupiam si maxime poßim, alieno labore partam gloriā*

in

in me trāsferre: sed morem gestum amicis oportuit, qui me ad totius libri cōmentationem impulerunt, ut quam lucem rerum incognitarū obscuritas desyderaret, eam quantum in me esset ingenij, quantúmque diuturnum studiū huius præstantißimæ disciplinæ illud adiuuisset, ipse uobis afferrem, quos ueritatis studio ad rerum acutißimarū & dignißimarū cognitionē rapi intelligo.

Primum Theorema.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositsi, si de maiori detrahatur plus dimidio, & rursus de residuo iterum detrahatur plus dimidio, idq; semper fiat: relinquetur quædā magnitudo minor altera minore ex duabus propositis.



Sint duæ magnitudines inæquales α β, γ, quarū maior sit α β: dico si de α β detrahatur plus dimidio, & de residuo iterū plus dimidio, idq; semper fiat, relinquetur quædā magnitudo minor q̄ magnitudo γ. Nam γ multiplicata erit tādē aliquādo maior magnitudine α β. multiplicetur & sit δ ι multiplex quidē ipsius γ: maior uerò ipsa α β: diuidatúrque δ ι in partes æquales ipsi γ, quæ sint δ ζ, ζ η, η ι: & detrahatur de α β plus dimidio, sitq; β θ. rursus detrahatur de α θ plus dimidio, sitq; θ κ, idque eò usq; fiat, donec diuisiones magnitudinis α β tot fuerint quot sunt diuisiones in magnitudine δ ι. Sint igitur diuisiones α κ, κ θ, θ β totidem numero quot sunt diuisiones

δζ, ζκ, κι. hactenus constructio: deinde sequitur demonstratio. Quia maior est δι quàm αβ, & detractum est de δι minus dimidio, scilicet ipsum κι, (quæ quidem detractio intelligitur facta ex superiori diuisione ipsius magnitudinis δι, in partes æquales ipsi γ. diuidendo enim minuitur magnitudo, sicut augetur multiplicando.) de αβ uerò detractum est plus dimidio βθ: residuum ergo κδ est maius residuo θα, quod & uerissimum est, & ad cogitãdum facillimum, si ad principium illud reuocetur (qualia multa sunt in animis hominum penitus insita) residuum maioris magnitudinis post detractum dimidium uel minus dimidio, esse maius residuo minoris post detractum plus dimidio. Cum itaque κδ sit maius quàm θα, detractúmq; sit de κδ dimidiũ, nempe κζ: & de θα sit detractum θκ, quod est plus dimidio totius θα: residuum ergo δζ residuo ακ maius est, ratione principij modo scripti. Atqui δζ est æquale ipsi γ ex consensu & suppositione: ergo etiam magnitudo γ est maior magnitudine ακ. quod idem est ac si dicatur, minorem esse ακ ipsa γ. relinquitur itaque de magnitudine αβ, magnitudo ακ minor ea quæ ex duabus propositis minor erat. Quod erat demonstrandum. Dictio autem illa ἄλλως, in exemplari græco postponẽda est post ea uerba ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡμίσεα ἦ τὰ ἀφαιρούμενα. Hunc ordinem in demonstrationibus perpetuò retinet Theon, quem compositorium uocant.

Nunc

Nunc autem tractemus resolutorium per syllogismos resoluentes theorema in sua principia indemonstrabilia. Sic ergo agamus. Omnis magnitudo minor λζ, *est minor* γ. *Omnis* κκ *est minor* λζ. *Ergo omnis* κκ *est minor* γ. *Quod si cupis propius accedere ad terminos ipsius theorematis: sit maior terminus, esse minorem altera minore ex duabus inæqualibus propositis. minor uerò sit illa pars prior theorematis duabus inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore: iterumq; de residuo, tali continuata detractione perpetuo residuũ ipsum. Medius terminus sit, minorem esse altera magnitudine, quæ æqualis est ipsi minori ex duabus propositis. itaq; dices,*

Omnis magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis, est minor minore ex duabus propositis. Duabus inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore, itidémque de residuo continuata tali detractione perpetua, residuum est, magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis. Ergo duabus inæqualibus propositis magnitudinibus detracta &c. residuum est magnitudo minor minore ex duabus propositis. Maior propositio est principium indemonstrabile & per se notum, quod uniuersalius dici solet, quæ æqualia sunt inter se, ad idem eodem modo se habere. Minor uerò probatur ex illis uerbis demonstrationis. Residuum ergo λζ *residuo* κκ *maius est. quod idẽ ualet ac si dicatur* κκ *esse minus, quàm* λζ. *Sit ergo syllogismus per resolutionem: reuocetúrque res ad ele-*

menta, quomodo solet uti geometræ, ut paucioribus uerbis concludatur demonstratio, eoq́; promptius ab intellectu nostro comprahendatur. Primò *quia composita est propositio minor, qualitas illa adiecta prædicato, quæ æqualis est minori, probatur ex consensu & suppositione præcedentibus.* Maiorem *uerò terminum inesse minori sic probabis:* Residuū *minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detractoq́; dimidio de maiore: de minore uerò detracto plus dimidio, est minus residuo maioris.* Sed *α κ est residuum minoris ex duabus magnitudinibus nempe ex θ α, κ λ & c.* Ergo *α κ est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ ζ, ergo α κ est minus λ ζ.* Maior *uerò cōtracta est ex principio uniuersali.* Si *ab inæqualibus inæqualia auferas, residua sunt inæqualia, & minus id quod residuū est, eius à quo plus ablatum est.* Quantum *ad minorem propositionem attinet, illud solùm probatione indiget, α κ esse residuum minoris. primò residuum esse patet, ex suppositione.* Quod *uerò magnitudo θ α (cuius residuum est α κ) sit minor magnitudo κ λ, patet ita.* Residuum *minoris magnitudinis ex duabus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio de maiore: de minore uerò plus dimidio, est minus residuo maioris.* Sed *θ α est residuum minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio ex maiore λ ι: de minore uerò α β plus dimidio & c.* Ergo *θ α est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ κ, ergo θ α est minus quàm λ κ.* Maior *patet ex principio indemōstrabili.* Minor *uerò probatur, primò quòd θ α sit residuum. probatur ex suppositione,*

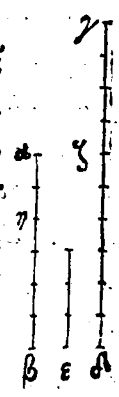
sitione,

sitione, propter detractionẽ factam. Quòd uerò αβ sit minor quàm δι, patet similiter ex suppositione & principio: quamlibet quantitatem toties posse multiplicari &c. Addit Theon hoc quoq; theorema uerum esse, etiã si partes detractæ sint dimidiæ. Quòd uerò dicitur in theoremate, Si detrahatur plus dimidio, eò pertinet ut si minus dimidio detrahatur, non semper uerum sit residuum esse minus minore ex duabus propositis.

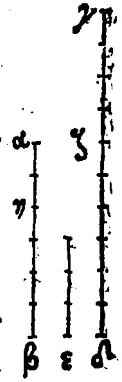
Secundum Theorema.

Duabus magnitudinibus propositis inæqualibus, si detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque residuum unquam metiatur, id quod ante se metiebatur, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.

Sint magnitudines duæ inæquales αβ, γδ: minórq; sit αβ: detractaq; per detractionem alternatim, & semper cõtinuatã minore de maiori: id quod relinquitur ex ea quæ maior fuerat ante detractionẽ, nunquam metiatur hoc ipsum, quod antequã id reliquum fieret, metiebatur maiorem magnitudinem. Dico incommẽsurabiles illas esse magnitudines αβ, γδ. Quòd si neges, illud cõtinuo affirmas, commẽsurabiles eas esse. Porro si sint commensurabiles, metietur eas quædam communis magnitudo per diffinitionem linearum commensurabilium. Metiatur itaque, si fieri potest: eáque sit ι, detrahatúrque de maiori



magnitudine γδ pars quædam, puta δζ quæ sit æqualis maiori magnitudini αβ: aut si æqualis non erit, sit tamen huiusmodi, ut illa minor magnitudo αβ aliquot uicibus repetita, repræsentet ipsam magnitudinem δζ. hoc enim est quod dicitur, magnitudinem αβ metiri δζ: talique detractione facta, minoris inquam de maiore, relinquatur ex maiore portio quædam γζ minor magnitudine αβ. hoc uerò est quod dicitur in theoremate, neq; residuum unquam metiatur id quod ante se erat.



Similiter de αβ detrahatur portio quædam βη æqualis magnitudini γζ, relinquatúrque ex ea detractione portio αη minor quàm γζ, ídque semper si sit, opus fiat, saltem dum relinquatur quædam magnitudo minor ipsa magnitudine ε. hoc enim tandem euenire necesse est, per primum theorema huius. Si propositis illis duabus magnitudinibus inæqualibus αβ, ε, (quarum minor ex consensu & suppositione tua erat ε. hanc enim posuisti esse communem mensuram duarũ magnitudinum αβ, γδ, itaque minorem alterutra) de maiore αβ detrahatur plus dimidio, itémque de residuo plus suo dimidio: itaque relicta sit αη minor quàm ε. hactenus ea quæ ad structuram pertinẽt. nunc ad demonstrationem ueniamus. Cum igitur magnitudo ε metiatur magnitudinẽ αβ, ipsa uerò αβ metiatur δζ: etiam ε metietur similiter magnitudinem δζ per commnnem cõceptionem. Si magnitudo quædam metiatur aliam, metietur quoque omnem aliam ab ea mensuratam. cui simile quiddam

apposuit

appoſuit Campanus in numeris inter principia ſeptimi. Itaque ι metietur $\delta\zeta$. eadem etiã magnitudo ι metitur totam magnitudinem $\gamma\delta$ ex tua ſuppoſitione. poſitum enim eſt eam eſſe communem menſuram ambarũ $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. Ergo ι metietur & ipſum reſiduum, quod eſt $\gamma\zeta$, per illam communem conceptionem, Quæ magnitudo metitur aliam totam, & partem ab ea detractã, metitur quoque reliquã. Idem in numeris poſuit Campanus. Cum itaque ι metiatur $\gamma\zeta$: $\gamma\zeta$ autem metiatur $\beta\kappa$: ipſa quoque ι metietur $\beta\kappa$ per ſuperiorem illam conceptionem. Atqui ι metitur totam magnitudinem $\alpha\beta$: itaque per alteram conceptionẽ metitur reſiduum $\alpha\kappa$. Metietur ergo maior magnitudo aliam ſe ipſa minorẽ. hoc autem fieri nullo modo poteſt, ut antè diximus inter principia. Non igitur illas magnitudines $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ metietur ulla magnitudo. Incommenſurabiles igitur erunt $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. Duabus itaque magnitudinibus propoſitis inæqualibus et cæt. quod demonſtrandum erat.

Hæc demonſtratio concluſa eſt per deductionem ad impoſsibile. Poſitum eſt enim contradictorium concluſionis uerum. ex qua propoſitione per plures gradus ſyllogiſmorum deuentum eſt tandem ad id quod falſiſsimum eſt, nempe maiorem magnitudinem eſſe quæ minorem metiatur. Quia ergo ex ueris nunquam colligitur falſum: nunc autem concluſa eſt hæc falſitas, neceſſe eſt poſitionem illam tuam falſam extitiſſe. quod ipſum per deſtructionem conſequentis oſtendi poſſe tradunt dialectici. Falſum autem eſt maiorem metiri minorem, quod conſequens erat ad illud antecedens, *duas magnitudines* α β, γ δ *esse commẽsurabiles. sequitur ergò ipsum antecedens falsum esse.* Incommensura-*biles ergo necesse est esse* α β, γ δ. *Verum ex quibus medijs processerit illa conclusio falsa, maiorem magnitudinem metiri minorem, uideamus per resolutionẽ, sitq; syllogismus huiusmodi·* Omnis magnitudo metiens to*tam magnitudinem* α β, & *de ea detractam* κ β, *metitur residuum* α κ. Magnitudo ι *est magnitudo metiens totam* α β, & *detractam* κ β. Ergo *magnitudo* ι *metitur residuum* α κ. *falsa est conclusio, quia positum fuit* α κ *esse minorem quàm* ι. Maior *est indemonstrabilis, cõtracta ex principio uniuersali: quod quale esset, antè retulimus.* Minoris *uerò probatio quia plura continet, hinc petẽda est.* Primò *ex suppositione magnitudo* ι *metitur totam* α β. *deinde quòd eadem* ι *metiatur detractam partem quæ est* κ β, *ita probatur·* Omnis *magnitudo metiens magnitudinem* γ ζ, *metitur &* κ β, *quam* γ ζ *metitur.* ι *metitur* γ ζ, *ergo* ι *metitur &* κ β. Maior *similiter est per se nota ex principio uniuersali·* Quæcun*que magnitudo metitur aliam, metitur & eam quam ipsa metitur.* Minor *uerò sic probatur·* Omnis *magnitudo metiens totam magnitudinem* γ δ, & *detractã* δ ζ, *metitur & residuum* γ ζ. ι *metitur totam magnitudinem* γ δ, & *detractã* δ ζ, *ergo* ι *metitur* γ ζ. Maior *iterum per se nota est ex principio.* Minor *uerò quia duo membra habet, ita probatur·* Primò ι *metitur totã magnitudinem* γ δ *ex suppositione. deinde quòd eadem* ι *metiatur* δ ζ, *ita probandũ est·* Omnis *magnitudo metiẽs* α β, *metitur &* δ ζ *quam metitur* α β. ι *metitur* α β,

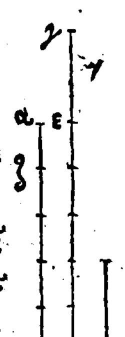
ergo

ergo ι metitur & δ ζ, quam metitur α β. Maior *uerissima est, & per se nota.* Minorẽ *uerò falsam esse ideo necesse est, quia causa fuit illius conclusionis falsæ, nempe quòd maior magnitudo minorẽ metiatur.* Non *erit itaque ι communis mensura ambarum magnitudinũ α β, γ δ.* Idem *reperies, si quãcunque aliam magnitudinẽ posueris pro communi illarum mensura.* Quia *igitur nulla reperiri potest, erunt illæ magnitudines incommensurabiles, quod demonstrandum erat.* Ex *hoc elicitur πόρισμα siue corollarium à destructione consequentis.*

Si duæ magnitudines inæquales propositæ nõ fuerint incommensurabiles, sed fuerint commensurabiles: continuata detractione minoris alternatim facta de maiore, necesse est residuum metiri id quod ante se metiebatur.

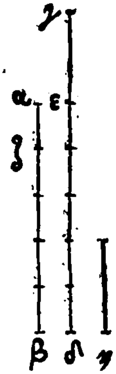
Tertium Theorema.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarũ cõmunẽ mensurã reperire.



Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles α β, γ δ: quarum minor sit α β: oportet itaque magnitudinum α β, γ δ maximam communem mensuram reperire. Primum *ipsa magnitudo α β aut metitur γ δ, aut nõ metitur.* Si *itaque α β metitur γ δ, seipsam quoque cũ metiatur, ipsa ergo α β est communis mensura magnitudinum α β, γ δ.* Manifestum *porrò est maximã quoque eam ambarum mensuram communẽ esse.* Nam *nulla maior magnitudo quam α β metietur ipsam α β.* Sed *ne metiatur α β ma-*

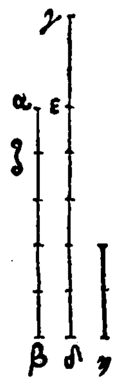
gnitudinem γ δ. Detracta igitur per mutuā detractionem minore de maiori, residuū metietur aliquando id quod ante se est per præcedens corollarium. Nam datæ sunt magnitudines α β, γ δ esse commensurabiles. itaque magnitudo α β metiendo ε δ partem magnitudinis γ δ, relinquat magnitudinem ε γ se α β inquam minorem. Ipsa uerò ε γ metiendo magnitudinem ζ β partē magnitudinis α β, relinquat similiter α ζ se ε γ inquam minorem.



Ipsa uerò α ζ metiatur magnitudinem γ ε. Illud autē est metiri, id quod ante se est, quādo nihil relinquitur post mensurationem factam. hactenus constructio. sequitur statim demōstratio. Cum igitur α ζ metiatur magnitudinem γ ε: γ ε autē metiatur ζ β: ergo α ζ metitur magnitudinem ζ β. Sed α ζ metitur seipsam: ergo α ζ metietur α β. Sed quia α ζ metitur δ ε: ergo α ζ metietur δ ε. Sed eadem α ζ metitur γ ε: totam ergo γ δ metietur: ergo α ζ metietur ambas magnitudines α β, γ δ, earúmq; cōmunis mēsura erit. Dico præterea illam esse communē utriusque maximam mensuram. Quod si neges illam esse maximam mensuram: erit itaque magnitudo quædam maior quàm α ζ, quæ metiatur utramque α β, γ δ. ea uero sit κ. Cum igitur per te κ metiatur α β: ipsa autem α ζ metiatur ε δ: ergo κ metietur ε δ. ipsa etiam κ per te metitur totam γ δ: ergo metietur & residuū γ ε. Sed cum γ ε metiatur ζ β, etiam κ metietur ζ β. metitur uerò eadem κ per te totam α ζ: ergo metietur & residuū α ζ. Itaque magnitudo maior metietur minorem: quod sane

fieri

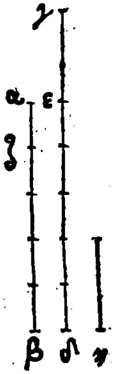
fieri nullo modo potest. Nulla *ergo maior magnitudo quàm* αζ *metietur utramq;* αβ, γδ: *ergo* αζ *est maxima earum communis mensura.* Duarum *igitur magnitudinum commensurabilium* αβ, γδ *reperta est communis maxima mẽsura, nempe* αζ. *quod faciendũ fuit.*



Corollarium.

Ex *hoc cõcluditur, si magnitudo quæpiam duas alias magnitudines metiatur, metietur quoque & communem utriusq; maximam mẽsuram.* Hoc *corollarium probatur ex postrema parte demõstrationis.* Sint *duæ magnitudines* αβ, γδ, *quarum sit maxima communis mensura* αζ: *sit porrò alia* κ *quæ etiam metiatur utramque* αβ, γδ. *dico magnitudinem* κ *metiri* αζ. *Sint eædem suppositiones quas modò posuimus.* Cum *igitur* κ *metiatur* αβ: αβ *autem metiatur* ιδ: *ergo* κ *metietur* ιδ. Sed κ *metitur etiam totã* γδ: *metietur ergo & reliquum* γι. Sed *quia* γι *metitur* ζβ: *ergo* κ *metietur* ζβ. *sed metitur totam* αβ: *metietur ergo & reliquum, quod est* αζ. *ergo* κ *metiens utrãque* αβ, γδ, *metietur & maximam utriusque communem mensuram, nempe* αζ. Docet Proclus *differentiam inter problemata & theoremata geometrica eã esse, ut problemata sint ea quæ proponunt aliquid fieri oportere, qualia sunt omnia quæ uerbo infinito concipiuntur, ut reperire, cõstituere, secare, & similia.* Theoremata *uerò sunt quæ asserendo ponunt & definiũt de unoquoq; accidente cuiusque subiecti, qualia sunt duo prima huius libri.* Hoc *autem 3. problema est.* Huius *ergo pro-*

blematis demonstrationem sic resoluere nos oportet. Primùm aggrediamur partẽ eã quæ syllogismo directo & categorico cõcludit ipsam magnitudinẽ αζ esse cõmunem mensurã magnitudinũ αβ, γδ. Omnis magnitudo metiens magnitudines γε & εδ, metitur totam γδ. Sed αζ metitur γε & εδ: ergo αζ metitur totam γδ. Maior patet ex principio indemonstrabili. Quæcũq; magnitudo metitur duas, metitur etiam compositam ex illis. cuius simile ponit Campanus in numeris inter principia libri septimi. Minoris pars illa quod αζ metiatur γε, patet per corollarium secundi theorematis. Quòd uerò eadẽ αζ metiatur εδ, probatur. Omnis magnitudo metiens αβ, metitur δε mensuratam ab αβ. Sed αζ metitur αβ: ergo αζ metitur δε. Maior patet ex principio. Quæcunq; magnitudo metitur aliam, metitur quamcunque mensuratam ab ea. Minorẽ ita probabis: Omnis magnitudo metiens magnitudines αζ, ζβ, metitur & totam compositam ex illis αβ. Sed αζ metitur αζ, ζβ: ergo αζ metitur totam αβ. Maior ex principio eodẽ patet. Minoris pars quod αζ metiatur αζ, patet etiam ex eo, quia omnis magnitudo seipsam metitur per unitatem. Quòd uerò αζ metiatur ζβ, probatur sic. Omnis magnitudo metiens γε, metitur & ζβ mensuratã ab ea. Sed αζ metitur γε, ergo αζ metitur ζβ. Maior pendet ex principio. Minor etiam pendet ex antè dictis. Nunc uerò restat persequẽda pars illa demonstrationis, qua ostẽditur magnitudinem αζ communem utriusque αβ, γδ mensuram, esse



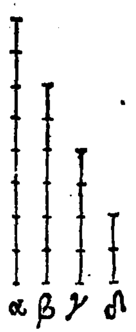
præterea

præterea maximam ambarum cõmunem mensurã.hoc autem fit per deductionem ad impoßibile.Nam si neges illam α ζ esse mensuram maximam communem utriusque magnitudinis α β, γ δ, sit alia maior quàm α ζ maxima communis utriusque mensura quæ sit η. Tunc dico te deductum iri ad illud impoßibile.magnitudinem maiorem, nempe η metiri minorem, scilicet α ζ. Manentibus enim his quæ superius posita sunt. Omnis magnitudo metiens totam α β, & de ea partem detractam ζ β, metitur & residuũ α ζ. Sed η metitur totam α β & detractam ζ β: ergo η metitur α ζ. Maior est indemõstrabilis. Minor sic probatur. Primum η metitur totã α β ex tua positione. Quod uerò eadem η metiatur ζ β, probo. Omnis magnitudo metiens γ ι metitur ζ β quam γ ι metitur. Sed η metitur γ ι, ergo η metitur ζ β. Maior rursum nõ eget probatione. Minoris probatio hinc deducitur. Omnis magnitudo metiens totam γ δ & eius partẽ δ ι, metitur & residuũ γ ι. Sed η metitur totam γ δ & eius partem δ ι, ergo η metitur γ ι. Maior item est indemonstrabilis. Minoris probationẽ sic deduces. Primũ quod η metiatur totam γ δ, patet ex tua positione. Quòd uerò eadem η metiatur δ ι, sic agas. Omnis magnitudo metiens α β, metitur δ ι mensuratam ab ea. Sed η metitur α β: ergo η metitur δ ι. Maior est indemonstrabilis. Minor patet ex tua positione quãdo uoluisti η esse communem maximam mensuram utriusque nẽpe α β, γ δ. ex qua quia sequitur illa cõclusio falsa, scilicet maiorem η metiri minorẽ α ζ, necesse est illã tuam positionem falsam extitisse. nam ex ueris nõ sequi falsum *compertum est. Ergo* κ *non erit communis utriusque maxima mensura. idemq; fiet si quăcunq; aliam posueris. Constat igitur* $\alpha\,\zeta$ *esse communem maximam utriusque mensuram. Quod autem hoc problemate proponitur inquirendum, id licet in theorema conuertere collecta summa totius demonstrationis, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus & commensurabilibus: si minor metitur maiorem, illa est communis maxima utriusque mensura: sin minus, facta mutua detractione quandocunque residuum metitur id quod ante se metiebatur postremo, illa est communis utriusque mẽsura atque ea maxima. Simili ratione poteris ex quocunque problemate theorema efficere.*

Quartum Theorema.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram reperire.

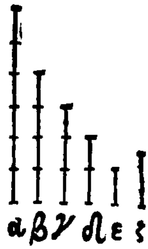
Sint datæ tres magnitudines cõmensurabiles α,β,γ, *oportet ipsarum communem maximam mensuram reperire. Sumatur maxima communis duarum priorum* α,β, *mensura per præcedens problema, sitq;* δ: *hæc magnitudo* δ, *aut metitur magnitudinem tertiam quæ est* γ, *aut eam non metitur. metiatur prius. Hactenus constructio huius partis, nunc ad demonstrationem. Cum itaque* δ *metiatur* γ, *metiaturq; magnitudines* α,β, *Ergo* δ *metietur* α,β,γ: *ipsarúmque communis men-*



sura

sura est. Præterea hanc esse illarum maximam communem mensuram constat hac ratione. Nam nulla magnitudo maior quàm δ metietur illas α,β, γ. Quod si fieri posse defendis, sit magnitudo ε maior quàm δ, quam dicis metiri magnitudines illas α,β,γ. Cum itaque ε per te metiatur α,β,γ, metitur duas priores ex illis scilicet α,β: & præterea maximam cõmunem utriusque mensuram, nempe δ per corollarium præcedẽs. Ergo ε maior quàm δ, metietur ipsam δ, quod est impossibile. Sed ne metiatur δ magnitudinem γ, hoc primum dico magnitudines γ, δ esse commensurabiles. quod ita demonstratur. Cum sint commensurabiles datæ magnitudines α,β,γ, metietur eas profecto quædam magnitudo quæ similiter metietur separatas ex illis duas α,β. Quare metietur quoque maximam communem utriusque mensuram, nempe δ. Metitur etiam ipsa eadem magnitudinẽ γ. Quare metietur utrãque γ,δ. Ergo γ,δ sunt commensurabiles ex definitione. Sumatur itaque maxima communis mẽsura ambarum γ,δ, sitq; ε. Hactenus constructio huius partis, nunc est demonstratio. Quoniã ε metitur δ, & δ metitur magnitudines α,β, itaque ε metietur α,β. metitur præterea magnitudinem γ. Ergo ε est communis mẽsura trium α,β,γ. Dico autem illam etiam esse maximam. Nam si fieri potest ut ε non sit maxima mensura communis trium α,β,γ, sit quædam maior quàm ε, magnitudo ζ, metiaturque tres illas α,β,γ. Cumq; ζ metiatur α,β,γ, etiam metietur α, β, & ipsarum maximam

communem utriusque mensurã, nempe δ. Metitur præterea ipsa ζ magnitudinem γ. ergo ζ metitur γ, δ, & ambarum communem maximã mensuram, nempe ι, maior uidelicet magnitudo minorẽ. hoc uero fieri nullo modo potest. Nulla *ergo maior quàm ι magnitudo metietur magnitudines α, β, γ.* Ergo *ι est maxima trium dictarum communis mensura, siquidem δ non metitur magnitudinem γ.* Quòd *si δ metitur γ, ipsamet δ erit communis trium maxima mensura.* Datis *igitur tribus magnitudinibus commensurabilibus, reperta est ipsarum communis maxima mensura, quod faciendum erat.*



Corollarium.

Ex *hoc manifestum relinquitur, si magnitudo tres magnitudines metiatur, metiri quoque maximam communem ipsarum mensuram.* Similiter etiam *in pluribus magnitudinibus maxima illarum communis mensura reperitur.* In *illis quoque uerum erit hoc corollarium.* Huius *corollarij demonstratio continetur in postremis uerbis ipsius* Theonis*. itaque dices:* Sint *tres magnitudines α, β, γ, quarum communis maxima mensura sit ι. sit porrò alia ueluti ζ, ipsa quoque metiẽs tres illas magnitudines, dico ζ metiri ι.* Demonstratiõnẽ *autem requires ab illis uerbis. Cumq; ζ metiatur α, β, γ etiã metietur α, β usque ad ea uerba,* Maior *uidelicet.* Hæc *demõstratio quia uarias partes habet, singulæ uerò pluribus syllogismis cõtinẽtur: singillatim omnes resoluemus.* Primò *si δ communis maxima mensura ambarum* *harum* α,β *metiatur* γ, *per se clarum est magnitudinem* δ *esse communem mensuram magnitudinum* α,β,γ. Quod uerò eadem δ *sit earumdem communis mensura maxima, hinc liquet per deductionem ad illud impossibile, Maiorem magnitudinem metiri eam quæ se ipsa minor est*. Nam *si negas* δ *esse maximam mensuram, sit quæuis maior quàm* δ, *uidelicet* ϵ *metiens illas* α,β,γ. Ex *hoc sequitur* ϵ *metiri ipsam* δ, *quod falsum est & impossibile, cum maior non metiatur minorem.*

Omnis *magnitudo metiens* α,β, *metitur* δ *maximam* α,β, *mensuram*. Sed ϵ *metitur* α,β: *ergo* ϵ *metitur* δ. Maior *patet, quia collecta ex corollario superioris problematis*. Minor *patet ex tua positione. quam tamen falsam esse constat, quia causa est falsitatis illius ex ea consequentis*. Verum *est itaque* δ *esse communem & maximam trium mensuram, si modò* δ *metitur* γ. Sin *autẽ* δ *non metiatur* γ, *illud imprimis uerum esse dico (quod ueluti lemma quoddã demonstrandũ est antequã eatur ulterius) magnitudines* γ,δ, *esse cõmẽsurabiles*. Omnes *magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet* θ, *sunt cõmensurabiles*. Sed γ,δ *sunt magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet* θ. *ergo* γ,δ *sunt cõmẽsurabiles*. Maior *patet ex definitione*. Minor *patet ex eo, quia* α,β,γ, *positæ sunt cõmẽsurabiles per cõmunẽ mẽsurã, uidelicet* θ. *sic itaq; probabitur* Omnis *magnitudo metiẽs tres* α,β,γ, *metitur duas priores, & maximã mẽsuram duarũ priorũ nempe* δ, *per corollarium præcedentis theorematis*. Sed θ *metitur tres* α,β,γ. *ergo* θ *metitur* δ. Quod *autẽ* θ *metiatur* γ, *patet ex positione*. Cũ.

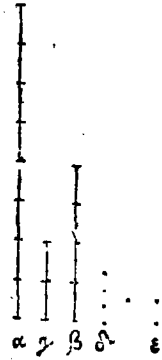
igitur ε metiatur utrãq; γ,δ, sequitur ex definitione ambas γ,δ esse cõmẽsurabiles. Sit maxima cõmunis mẽsura ipsarũ γ,δ, quæ uocetur ι. Dico primo ipsam ι esse cõmunem mensurã trium α,β,γ sic probari. Omnis *magnitudo metiens δ, metitur α,β, mensuratas à δ.* Sed ι *metitur δ, ergo ι metitur α,β.* Maior *patet ex principio.* Minor *uerò ex suppositione quando positum est ipsam ι esse maximam communem mensuram duarum γ,δ, ex eadem etiam suppositione ι metiebatur γ.* Ergo *ι metitur α,β,γ, estq; earum communis mensura.* Dico *præterea eandem ι esse communem maximam mensuram earũdem trium. sin minus, esto magnitudo quædã maior quàm ι metiẽs illas, sitq; ζ.* Ex *hac positione sequi uidebis illud idem impoßibile, maiorem ζ metiri minorẽ ι.* Omnis *magnitudo metiens γ, δ, metitur ι communem maximam utriusque mensuram.* Sed *ζ metitur γ,δ, ergo ζ metitur ι.* Maior *patet ex corollario superiori.* Minor *uerò ita probatur.* Primò *quod ζ metitur γ, patet ex suppositione, quia positũ est eam metiri singulas α,β,γ. Quod uerò eadem ζ metiatur δ probatur. Omnis magnitudo metiens α,β, metitur & δ communem utriusque maximam mẽsuram.* Sed *ζ metitur α,β, ergo ζ metitur δ.* Maior *patet ex corollario.* Minor *uerò à te posita est, quæ cum sit unica caussa illius falsæ conclusionis, necesse est ipsam quoq; falsam esse.* Nulla *ergo alia magnitudo quàm ι erit communis illarum trium maxima mensura.* Hoc *autem problema potes redigere in formam theorematis hoc modo.* Si *maxima mẽsura duarum primarum ex tribus commensurabilibus magnitudinibus*

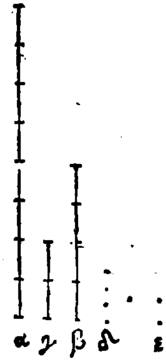
tudinibus metitur tertiam, illa est communis maxima mensura trium. sin minus, maxima mensura tertiæ & maximæ mensuræ duarum primarum est cõmunis maxima mensura trium.

Quintum Theorema.

Cõmẽsurabiles magnitudines inter se proportionẽ eam habent, quã habet numerus ad numerũ.

M*agnitudines dicũtur inter se proportionem habere, quã habet numerus ad numerum, quãdo quæ proportio est inter illas magnitudines, ea reperitur inter aliquos numeros, ut puta si magnitudo magnitudini sit, uel æqualis, ut numerus 2 numero 2: uel dupla, ut numerus 4 ad 2: uel tripla, ut 6 ad 2: uel in alia quauis multiplici proportione.* Idem *de superparticulari, si magnitudo sit sesquialtera ad magnitudinem, ut numerus 3 ad numerum 2.* Idem *de aliis speciebus superparticularis proportionis.* Idem *de superpartienti, de multiplici superparticulari, & de multiplici superpartienti, quæ sunt omnia proportionum genera, quæ in numeris repe riuntur. Sint magnitudines commẽsurabiles α, β.* Dico *ipsas habere proportionem inter se, quã numerus aliquis ad aliquem aliũ numerum.* Nam *cùm sint commensurabiles α, β, sit γ cõmunis earũ mẽsura, & quoties γ metitur α, (id est quot partes reperiũtur in α æquales ipsi γ) tot sint unitates in numero δ. quoties uerò eadem γ meti-*





tur β, tot sint unitates in numero ε. Sequitur demonstratio. Cum *itaque γ metiatur α toties quot sunt unitates in δ numero, ipsáque unitas metiatur numerũ δ toties quot sunt in ipso δ unitates. totidem ergo uicibus γ metitur α, quot uicibus unitas metitur numerum δ.* Ergo *γ eandem proportionem habebit ad α, quam unitas ad numerum δ. per conuersam etiam proportionalitatem erit ut α ad γ: sic numerus δ ad unitatem.* R*ursum cum γ metiatur β toties quot sunt unitates in numero ε: metiatúrque unitas numerum ε toties, quot sunt in eo unitates. tot uicibus itaque γ metietur β, quot uicibus unitas metitur numerum ε.* Ergo *per æquam proportionalitatem (hanc uerò uocat* Euclides δι' ἴσου λόγου*) quam proportionem habet magnitudo α ad magnitudinem β, eandem habet numerus δ ad numerum ε.* It*aque commensurabiles magnitudines, puta α, β, inter se proportionem eam habent, quam numerus δ ad numerum ε. quod demonstrandum erat.*

R*esolutio.*

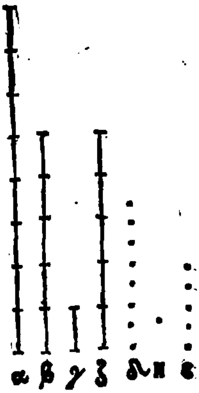
O*mnia extrema duorum ordinum continentium æqualẽ numerum magnitudinum coniugatarum in eadẽ proportione, sunt & ipsa in eadem proportione.* Sed *α, β, & δ, ε sunt extrema duorum ordinum, &c.* Ergo *α, β, & δ, ε sunt in eadem proportione.* Maior *patet ex* 22.5. M*inoris pars prior scilicet α, β & δ, ε esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentiũ*

magnitu-

magnitudinum patet ex ſuppoſitionibus admiſsis in cō-ſtructione. Quod uerò magnitudines contentæ in illis ordinibus ſint in eadem proportione coniugatæ, id eſt ſingula paria prioris ordinis cum ſingulis paribus alterius ſint proportionalia, probatur ita· Primò quòd γ, β habeant eandem inter ſe proportionem quam unitas & numerus ι, Λ. Omnis magnitudo metiens β tot uicibus, quot uicibus unitas metitur ι, habet ad β eandem proportionem, quam unitas ad numerum ι. Sed γ tot uicibus metitur β quot uicibus unitas metitur ι. Ergo γ habet ad β eandem proportionem, quam unitas ad numerum ι. Maior per ſe patet contracta ex definitione proportionalium, quæ eſt in principiis lib. 5. de quibus doctiſsime diſſerentem lege Petrum Nouium Luſitanū. Minor uerò conceſſa eſt per ſuppoſitionem. Quod uerò α, γ habeant eam proportionem quam numerus Λ ad unitatem, probatur eodem modo· Omnis magnitudo quam metitur γ tot uicibus quot unitas metitur numerum Λ, habet ad γ eandem proportionem quam numerus Λ ad unitatem. Sed α eſt magnitudo quam metitur γ tot uicibus, &c. Ergo α habet ad γ eandē proportionem quam Λ ad unitatem. Maior probatur eodem modo quo ſuperior. Minor item patet ex ſuppoſitione. Vt uerò reperias numeros duos, quorum proportionem habeant inter ſe duæ magnitudines commenſurabiles, uide quot uicibus menſura earum communis unamquāque metiatur. Numeri enim uicibus illis expreſsi retinent eam proportionem, quam magnitudines commenſurabiles.

Sextum Theorema.

Si duæ magnitudines proportionem eam habent inter ſe quam numerus ad numerum, commenſurabiles ſunt illæ magnitudines.



Duæ enim magnitudines α, β, inter ſe habeant eam proportionem, quam numerus δ ad numerum ε. Dico *cō-menſurabiles eſſe magnitudines α, β.* Nam *magnitudo α diuidatur in tot partes æquales quot ſunt unitates in numero δ (hoc uerò idem eſt ac ſi uelis quamcunque partem auferre de magnitudine α, quod quomodo fiat, docet 9.6.) ſitque magnitudo γ æqualis uni ex illis partibus æqualibus ipſius α. ſit etiam alia magnitudo ζ compoſita ex tot magnitudinibus æqualibus ipſi γ, quot unitates ſunt in numero ε.* Hîc *incipit demonſtratio.* Cùm *igitur tot magnitudines æquales ipſi γ ſint in magnitudine α, quot ſunt unitates in δ, quota pars ipſius δ eſt unitas, eadem pars erit magnitudo γ magnitudinis α.* Eſt *ergo ut γ ad α, ita unitas ad δ. metitur uerò unitas numerum δ. ergo & γ metietur α.* Et *quia eſt ut γ ad α, ſic unitas ad numerum δ. conuerſa igitur proportione erit ut α ad γ, ſic numerus δ ad unitatem.* Rurſum *quia quot ſunt unitates in numero ε, tot ſunt in magnitudine ζ magnitudines ſiue partes æquales ipſi γ.* Erit *itaque ut γ ad ζ, ſic unitas ad ε.* Nuper *uerò concluſum eſt ſicut α ad γ, ita numerus*

numerus δ ad unitatem. Per æquam igitur proportionem erit ut α ad ζ, sic δ ad ι. Sed sicut δ ad ι, ita se habet α ad β. Itaque etiam ut α ad β, similiter se habebit α ad ζ. Ipsa igitur magnitudo α ad utranque β, ζ, eandem proportionem retinebit. Aequalis est igitur magnitudo β magnitudini ζ per secundam partem 9. 5. Sed γ metitur ζ, ergo metietur β. Sed & eadem γ metitur α, igitur γ metitur α, β. commensurabiles igitur sunt magnitudines α, β. Si ergo duæ magnitudines &c. quod demonstrandum fuit.

Resolutio.

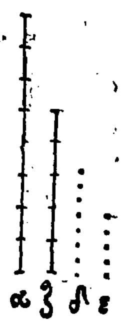
Omnes magnitudines quas eadem mensura metitur, sunt commensurabiles. Sed magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, metitur eadē mensura, puta γ. Ergo magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt commensurabiles. Maior patet ex definitione commensurabilium magnitudinum. Minoris uerò pars illa quòd γ metiatur β, ita probanda est. Magnitudo ζ est magnitudo β, quia æquales. γ metitur ζ, ergo γ metitur β. Minor patet ex concessione supposita inter construendum, illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ. Maior sic probatur. Omnes magnitudines ad quas eadem magnitudo, puta α eandem proportionem habet, sunt æquales. Sed ζ, β sunt huiusmodi. ergo ζ β sunt æquales. Maior patet ex secunda parte nonæ quinti. Minor uerò ita probetur. Omnes proportiones æquales eidem proportioni, puta ei quæ est inter δ, ι numeros, sunt inter se æquales. Sed proportiones inter α, ζ & α, β sunt æquales eidē proportioni, puta quæ est *inter δ,ι. Ergo proportiones inter α,ζ & κ,β sunt inter se æquales. Maior patet ex undecima quinti. Minoris pars illa, quòd proportio inter α,β sit æqualis ei quæ est inter δ,ι numeros, patet ex suppositione. Quòd uerò α,ζ eandem habeant proportionem quam δ,ι, probetur sic. Omnia extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum coniugatarũ in eadem proportione, sunt & ipsa in una & eadẽ proportione. Sed α,ζ, & δ,ι sunt extrema duorũ ordinũ, &c. Ergo α,ζ & δ,ι sunt in una & eadem proportione. Maior patet ex 22.5. Minoris uerò pars prior scilicet α,ζ & δ,ι esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum, patet ex suppositionibus admißis in construendo. Nam primus ordo est α,γ,ζ. Secundus uerò est δ,κ,ι. κ enim est loco unitatis. Quòd uerò magnitudines in his ordinibus cõtentæ sint in eadem proportione cõiugatæ, probetur. Et primo loco α,γ habere inter se eandem proportionẽ quam δ ad unitatem κ, patet ex suppositione admissa inter cõstruendũ illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales, &c. Quanuis ea pars syllogismo quoque demonstrari poßit. Omnes quatuor magnitudines inter se proportionales, sunt quoque conuersa proportione proportionales. Sed γ,α,κ unitas & δ sunt magnitudines proportionales. Ergo γ,α,κ & δ sunt conuersa proportione proportionales. Maior patet per corollariũ quarti theorematis libri quinti. Minor uerò patere potest ex suppositione, illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur. Secundum erat in illa minore γ,ζ habere eandem pro-*

portionem

portionem quam unitas & ε. quod quidem etiã patet ex ſuppoſitione inter conſtruẽdum admiſſa illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ. Quantum ad alteram partem minoris aſſumptæ in primo ſyllogiſmo, nempe γ metiri magnitudinem α, ea quoque patet ex illa ſuppoſitione, Nam magnitudo α diuidatur, &c. Nihilominus poteſt & ipſa ſyllogiſmo demõſtrari: ſed quia eſt ex ſuppoſitione nota, nihil eſt opus ſyllogiſmo.

Corollarium.

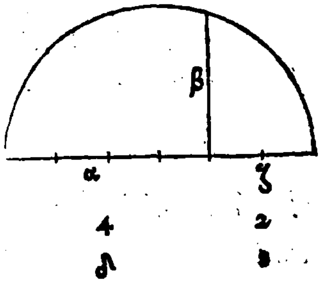
Ex hoc fit manifeſtũ, ſi fuerint duo numeri ut δ, ε, & recta linea ut α, dari poſſe aliam lineam ad quam linea α retineat eandem proportionem quã numerus δ ad numerum ε. Diuidatur linea α in tot partes æquales quot ſunt unitates in altero numero δ per nonam ſexti, & cõponatur altera linea, puta ζ ex tot partibus, quæ ſint æquales partibus lineæ α, quot ſunt unitates in altero numero ε. itaque linea α erit ad lineã ζ ſicut numerus δ ad numerũ ε. Hac ratione potes cuicunque lineæ propoſitæ, aliã dare commenſurabilem in longitudine: Nam ſi duæ lineæ habent proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſunt inter ſe quoque longitudine commenſurabiles, per hoc theorema 6. Quod uerò ſequitur in exemplari græco, continet, ſubobſcurè tamen lemma quoddam ipſum etiam alieno loco poſitũ. inuenitur enim inter alia lemmata poſt 29 theorema huius libri, uerbis conceptis in formam problematis.



Lemma.

Duobus numeris datis, & linea recta, oportere efficere ut numerum ad numerum: sic quadratum lineæ datæ ad quadratum alterius.

Sint dati numeri δ, ε: recta uerò sit α: propositúmque sit efficere id quod præcipitur hoc problemate. reperiatur igitur per postremum corollarium lineа ζ, ad quam linea α sit in ea proportione in qua numerus δ ad numerum ε: sumatúrq; inter duas illas lineas α, ζ media proportionalis per tertiam decimam sexti, sitque β. Cum igitur sit sicut numerus δ ad numerum ε, ita linea α, ad lineam ζ. & quemadmodum se habet linea α ad lineam ζ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, per secundum corollarium uicesimæ sexti. Itaque sicut numerus δ ad numerum ε, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β.

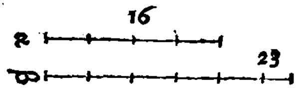


Septimum Theorema.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerũ.

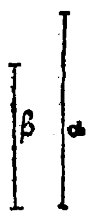
Magnitudinum non habẽtium proportionem inter se quã numerus ad numerum, nullum exemplum efferre possumus in numeris, sicut fecimus in 5 huius. nam impossibile est numerum ad numerum nõ habere proportionem quam numerus ad numerum. Sint magnitudines incommensurabiles α, β. Dico α, β nullam omnino proportionem

proportionem inter se talẽ habere, qualis inter ullos numeros reperitur. Quod si contradicatur α,β habere proportionem inter se quam numerus ad numerum: sequitur illud continuo, commensurabiles quoque esse α,β per sextum theorema huius libri. Sed hoc theorema ponit illas esse incommensurabiles. Nullo igitur modo α habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum, quod demonstrandum fuit. Hic modus argumentationis & certissimus est, & breuissimus: sumiturque ex syllogismis hypotheticis, quem à destructione consequentis uocant. Illúdque in uniuersum uerum esse deprehendes, quotiescunque in disciplinis mathematicis aut aliis quibuscunque, quæ nomine censentur scientiarum, reperiuntur duæ conclusiones ex earum numero, quas conuersas uocant, quales sunt quintum & sextum theorema huius libri: in his potentia contineri præterea alias duas conclusiones & ipsas conuersas, contrario tamen modo quàm superiores, quales sunt hoc theorema & proximum.



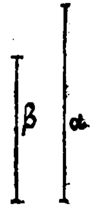
Octauum Theorema.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.



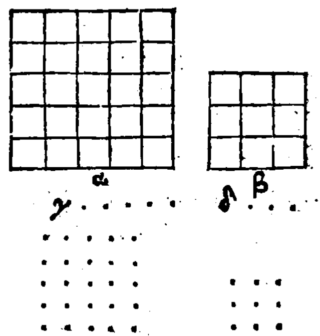
Duæ enim magnitudines α,β, inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum. Dico incommensurabiles esse magnitu-

dines α,β. Quòd ſi contradicas, uidelicet cō menſurabiles eſſe, habent ſtatim proportionem quam numerus ad numerum, per quintum theorema huius. ſed hoc theorema ſupponit eas non habere. incommenſurabiles ergo ſunt magnitudines α,β. Si igitur duæ magnitudines, &c. quod demonſtrandum fuit.



Nonum Theorema.

Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine commēſurabilibus, inter ſe proportionē habent, quā numerus quadratus ad alium numerū quadratum. Et quadrata habentia proportionem inter ſe quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habebunt quoque latera longitudine commenſurabilia. Quadrata verò quæ deſcribuntur à lineis longitudine incommenſurabilibus, proportionem non habent inter ſe quā quadratus numerus ad numerum alium quadratū. Et quadrata non habentia proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque latera habebunt longitudine cōmenſurabilia.



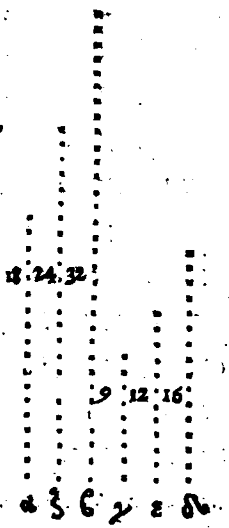
Quia difficile uidetur hoc theorema, dignum quoque uiſum

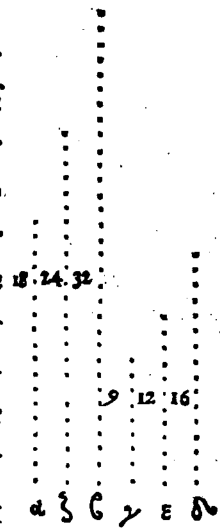
ſum eſt, quod pluribus modis demonſtraretur. Nos uerò *antequam ad demonſtrandum accedamus, nonnulla præfabimur de ſignificatione uocum ſiue terminorum huius theorematis, quæ rem totam illuſtrabũt.* Hoc ſa*ne theorema & quæ proxime ſequuntur, huiuſmodi ſunt, ut niſi plane percipiantur, res alioqui non difficillimæ inexplicabiles uideri poßint. Imprimis illud intelligendum eſt, lineas eſſe longitudine commenſurabiles, & lineas habere proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, idem eſſe.* Vt *quæcunque lineæ ſunt longitudine commenſurabiles, habeant etiam proportionem inter ſe quam numerus ad numerum. & contrà, quæ lineæ habent proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſint quoque longitudine commenſurabiles, ut patet ex 5. & 6. huius libri. Similiter illud conuertitur, lineas eſſe longitudine incommenſurabiles, & non habere proportionem quam numerus ad numerum, ut patet per 7 & 8 huius.* Itáque *intelligi debet quod dicitur in hoc theoremate, de lineis longitudine commenſurabilibus, & longitudine incõmenſurabilibus.* Sed *dicat aliquis, priuſquã* Euclides *docuit modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles, tractat de quadratis ipſarum, cum tamen contrà fieri oportere uideri poßit. prius enim exquiri debet de re aliqua an ſit, quàm quid ei accidat, conſyderetur.* Nos *uerò dicimus* Euclidem *quidem tradere modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles in theoremate* 11. *quod eſt in* Græco 10. *neque tamen peruerſe quicquam feciſſe.* Nam *hoc theoremate ſumit has* *lineas longitudine incommensurabiles ex hypothesi, neque amplius quicquam sibi demonstrãdum hoc quidem loco assumit, quàm ex illa hypothesi scilicet linearum longitudine incommensurabilium quadrata non habere proportionem, & cætera. Quod ubi uerum esse demonstrauerit, sat fecisse uidebitur. Ex hoc autem theoremate gradum sibi faciet ad inuestigationem linearum illarum in theoremate undecimo. Illud præterea intelligendum est quid uocibus illis significetur, habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod ut assequi poßis, repetenda tibi sunt nõnulla theoremata, eorúmque demonstrationes ex arithmeticis suprà scriptis: atque ea maxime quæ agunt de numeris similibus superficialibus ex quibus est uicesimumsextum octaui. Numeri similes plani inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Similes uerò plani numeri sunt (ut est in principijs libri septimi) qui habent latera proportionalia. Latera uerò cuiusque numeri sunt, ex quibus inter se multiplicatis, singuli numeri producuntur: ex illo theoremate 26 octaui constat non solos numeros quadratos habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratum, sed eandem etiam proportionem habere numeros omnes similes superficiales inter se. Neque uerò idem est numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque hæc inter se conuerti possunt. Quãuis enim numeri quadrati habeant proportionem quã*

numerus

numerus quadratus ad quadratum, non ideo tamẽ omnes habentes proportionẽ quam quadratus ad quadratum ſunt quadrati. Sunt enim ſimiles ſuperficiales & ijdem non quadrati; qui tamen proportionẽ habent quam quadratus ad quadratum, quanuis omnes quadrati ſint ſimiles ſuperficiales. nam inter duos numeros quadratos incidit unus medius proportionalis, per. 11.8. *Si uerò inter duos numeros incidat unus medius proportionalis, illi duo numeri ſunt ſimiles ſuperficiales per* 20.8. *Dico prætere a illud theorema* 26.8. *conuerti. Duo numeri habentes inter ſe proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum ſunt ſimiles ſuperficiales: cuius rei illa demõſtratio afferri poteſt.*

Sint duo numeri α, β *habentes proportionem inter ſe quam quadratus ad quadratum. Illi duo numeri aut ambo ſimul ſunt quadrati, aut ambo ſimul ſunt nõ quadrati. (de illis autẽ non intelligimus hìc quicquam dicere, quorum alter eſt quadratus, alter uerò non quadratus. tales enim non poſſunt habere proportionem quã numerus quadratus ad numerum quadratum, per* 24.8. *à deſtructione conſequẽtis.) Ergo ſi ambo ſunt quadrati, ſunt etiam ſimiles ſuperficiales, ut modo concluſum eſt. Si non ſint quadrati, ſint illi duo quadrati* γ, δ, *quorum proportionem habeant* α, β. *quia ergo* α, β *habent proportionem inter*

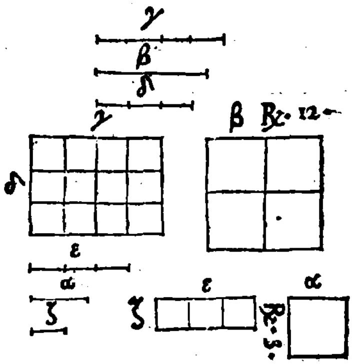




se quã γ, δ, & inter γ, δ incidit unus medius proportionalis puta ε, per 11. 8. Ergo *inter α, β incidet unus medius proportionalis, puta ζ per* 8.8. Sed *si inter duos numeros nempe α, β unus medius incidat proportionalis, illi duo numeri sunt similes superficiales, per* 20.8. Ergo *numeri α, β sunt similes superficiales.* Duo *ergo numeri habẽtes proportionẽ quã quadratus ad quadratum, sunt similes superficiales.* Ex *his intelligi potest numeros habentes proportionem inter se quam quadratus ad quadratum esse aut quadratos, aut similes planos id est superficiales. Similes uerò superficiales qui sint, intelligitur quidem ex definitione. sed quibus notis statim agnosci possint numeri propositi, an similes superficiales sint nec ne, sic habetote.* Pri*mùm si inter duos numeros propositos non incidit medius proportionalis, illi duo numeri non sunt similes superficiales per* 18.8. *à destructione consequentis.* Q*uòd si incidit medius proportionalis, sunt illi similes superficiales per* 20.8. D*einde duo numeri similes superficiales multiplicatione alterius in alterum facta, producunt numerum quadratum, per primam* 9. Ergo *si non producunt quadratũ, non sunt similes superficiales.* Q*uòd si fecerint quadratũ ex multiplicatione sui ipsius, sunt illi similes superficiales per* 2.9. Q*uo uerò facilius apprehendantur consequentes demonstrationes, & simul*

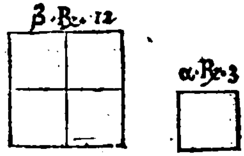
exemplum

exemplum adducamus eorum quæ diximus. Sit linea γ longa pedes quatuor. sit & alia linea δ longa & ipsa pedes tres, reperiatúrque media proportionalis per 13.6. quæ media proportionalis sit linea β. Ergo quadratum lineæ β erit æquale parallelogrãmo rectangulo quod sit ex lineis γ, δ, per 17. 6.

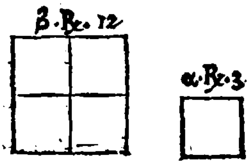


Quod quadratum continebit pedes 12, sicut & parallelogrammum ex lineis γ, δ. Sit etiam linea ε longa pedes 3, & linea ζ longa pedem 1, media proportionalis inter lineas ε, ζ, sit α. Quadratum lineæ α, erit pedum trium, sicut & parallelogrammum ex lineis ε, ζ. Dico quadratum lineæ β quod est 12. pedum, habere proportionem ad quadratum lineæ α, quod est pedum triũ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Nam quemadmodũ se habet numerus 12. ad numerum 3, ita se habet quadratũ lineæ β, quod est 12 pedum, ad quadratũ lineæ α quod est 3. Sed numeri 12 & 3 sunt similes superficiales, quia latera numeri 12 quæ sunt 2 & 6, sunt proportionalia lateribus numeri 3, quæ sunt 1. & 3. Ergo quadratum lineæ β quod est 12, habebit eam proportionem ad quadratũ lineæ α, quod est 3, quam habet numerus similis superficialis ad similẽ superficialem. Sed numeri similes superficiales habent proportionẽ inter se quam numerus quadratus ad nu-

merum quadratum qui sunt 4 & 1, per 26. octaui. Ergo quadratũ lineæ ϐ quod est duodecim, habebit proportionem ad quadratum lineæ α quod est 3, quam numerus quadratus ad quadratum, eam scilicet quam quaternarius ad unitatem



quæ est quadrupla proportio. Nam *quadratum maius quod est duodecim, continet quater quadratum minus quod est 3, quia latus quadrati duodecim quod est linea ϐ, est duplum ad latus quadrati 3 quod est linea α.* Habet *ergo linea ϐ ad lineã α proportionẽ quã numerus ad numerum.* Ergo *sunt longitudine commensurabiles per 5. huius, quæ est hypothesis necessaria ad conclusionẽ eius passionis siue prædicati hoc theoremate comprehensi, nempe quadrata talium linearum habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Sic *& numerus denominãs maiorem extremitatem proportionis lineæ ϐ ad lineã α, qui est 2. si in se ducatur reddet quadratum numerum nempe 4. similiter & numerus denominans minorem extremitatẽ nempe 1, si ducatur in se, nihil amplius efficit quàm 1. quæ unitas est etiam potentia quadratus numerus.* Ergo *quadratum lineæ ϐ ad quadratum lineæ α habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, nempe quàm 4. ad 1.* Ex *hoc uides (quod modò dicebamus) non idem significare numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratũ.* Nam *numeros*

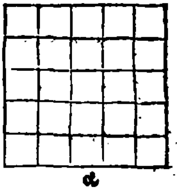


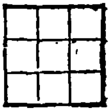
meros 12 & 3 quadratos nõ esse constat, cum tamẽ quadrata eos numeros continentia illam proportionem habeãt. Sed & latus quadrati 12, quamuis numero per se exprimi nequeat, ut dicas latus illud est longũ tot pedibus, qui pedes quadrati numero 12 complent totum illud quadratum: tamen ad aliud relatum siue comparatum, nempe ad latus quadrati 3, quod nec ipsum per se numero poßis exprimere, ad latus inquam quadrati 3, proportionem duplam habet. Nam *quadratum quadruplum ad aliud quadratum (ut quadratum lineæ β quod est 12, ad quadratum lineæ α quod est 3) habet latus suum duplum ad latus alterius quadrati, per illud uniuersale corollarium 20. 6. Similes figuræ habent proportionem inter se suorum laterum relatiuorum duplicatam. Quòd si dicas latus quadrati 12 numerari posse, quia eius proportio quam habet ad latus quadrati 3 numeratur per binarium, cũ sit proportio dupla: illud primùm fac cogites, non esse id quod dicitur per se numerari aliquam magnitudinẽ, sed illius proportionem.* Magnitudo *autem illa scilicet latus quadrati 12 per se numeraretur, quãdo nulla habita ratione proportionis ipsius ad aliud, dicere possemus, Quadrati continẽtis pedes quadratos 12, latus est longum tot pedibus, quorum numerus in se ductus efficeret numerum illum 12: sed hoc fieri non potest, quia 12 non est numerus quadratus.* Sic *itaq; dices: Quatenus quadratum illud 12 per se consyderatur, nulla habita* *ratione proportionis ad aliud, sed tantum ut est 12 pedum, non habet quidem latus per se numerabile, sed si conferatur ad aliud, puta ad quadratum 3 pedum, tũc dices, latus quadrati 12 est 2. latus uerò quadrati 3 est 1. sed hæc est denominatio ipsius proportionis quæ dupla dicitur. quæ proportio non potest esse aut consyderari in paucioribus terminis quàm duobus, cum sit relatio ad aliud, hoc est in prædicamento ad aliquid.* Itaque *binarius non est numerus pedum talium quales 12 sunt in ipso quadrato.* Deinde *si binarius esset latus quadrati 12, ut dicas illud latus esse duo, ex multiplicatione duorum in se, non efficeretur illud quadratum 12, sed quadratum aliud quod esset 4 pedum, quemadmodum ex binario numero in se ducto fit quadratus numerus quaternarius.* Sed *nec si dicas illud latus quadrati 12 numerari alio ullo numero, duxerisq; numerum illum in seipsum, unquam efficitur duodenarius numerus.* Cũ *tamen omnes numeri denominantes latus cuiuscunque quadrati multiplicatione sui ipsius, illum ipsum numerum efficiant denominantem quadratum, cuius latera denominant, puta 2, multiplicatione sui in seipsum reddit 4. ternarius reddit 9. quaternarius reddit 16. & similiter cæteri omnes.* Non *igitur idem est aliquas magnitudines habere inter se proportionem quam numerus ad numerum, & numerari per se singulas ex illis nulla ratione habita proportionis, ut hìc latus quadrati 12 per se quidem numerari nullo modo potest sed comparatum ad aliam magnitudinem, puta ad latus quadrati 3, numeratur illius proportio.* Sic *& latus ipsius*

quadrati

quadrati; & cæterarum omnium figurarũ quas geometræ quadratas uocant, quarum areæ tamen per numeros quadratos non designantur. Quod uerò dicimus, manifestum est ex uerbis ipsius Euclidis *in theorematibus 5, 6, 7, &* 8 *huius libri, cum ubique dicat commensurabiles & incommensurabiles magnitudines non quidem per se numerari, sed habere aut non habere proportionem quam numerus ad numerum. Quæ res non bene animaduersa uidetur plerisq; caussam erroris attulisse, ut ex sequentibus planum fiet.* Nunc *uerò qui aggressi sunt demonstrationem huius theorematis magis particularem aliquam demonstrationem nonnullis uideri possent attulisse, quàm uniuersalem.* Et *sane non deesse arbitror qui illorum dicta secus intelligant, cum existiment ab eis suppositas esse lineas quasdam non tam longitudine commensurabiles, quales in theoremate supponuntur esse, quàm numero certo singillatim numerabiles.* Itaque *non intelligentes, illud de demonstrationibus illorum dicere potuerunt: cũ ea ratione credidissent à se conclusum illud uniuersale quod est in hoc theoremate* Euclidis, *Quadrata descripta ex lineis longitudine commensurabilibus habere proportionẽ inter se, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: illud particulare tantum concluserunt, Quadrata descripta ex lineis numero certo per se numerabilibus habere proportionem &c. Quod tamen aliter est, & demonstrationes illorum recta sunt, & proposito theoremati conuenientes. Tantum pictura figurarum quas græcus codex habet, posset ambi-*

guitatis aliquid afferre. Nam *ita pinguntur quadrata, & describuntur certis areolis, ut earũ numerus quadrato numero denominetur.*

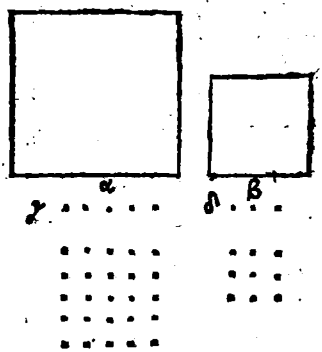


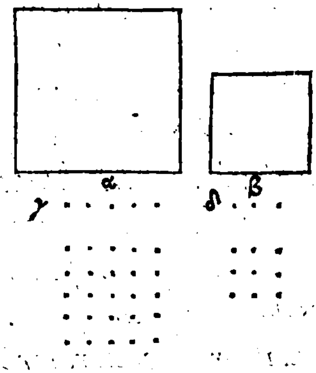


Ex *quo uideri posset lineas α, β, quæ describunt ipsa quadrata, oportere esse numero aliquo per se numerabiles, ut linea α sit pedum 5, & linea β pedum 3, ueluti pictura ipsa refert hic.* Quod *tamen non supponit* Euclides, *sed unum illud supponit & requirit eas esse longitudine cõmensurabiles, ut in superiori exẽplo de quadratis duobus, quorum alterum spatium totum est 12, alterũ uerò est 3.* Nam *quanuis latera ipsorum non sint numero aliquo certo per se numerabilia, sunt tamen ipsa eadem longitudine cõmẽsurabilia.* Præterea *hæc pictura quadratorum α, β per areolas distinctorum illum errorem efficere posset, ut quis existimet idem esse numeros duos quadratos esse, & habere proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerũ. nam numerus areolarum in quadrato α, est numerus quadratus, nempe 25 productus ex radice 5, quæ est longitudo ipsius lineæ α.* Similiter *numerus areolarum quadrati β est quadratus, nempe 9, & ipse productus ex suo latere 3, longitudine inquã ipsius lineæ β.* Nos *uerò nuper ostẽdimus aliud esse numeros quadratos dici, & habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Itaque *quantũ ad illas areolas attinet contentas maiore quadrato lineæ α, quæ sunt numero 25, exprimunt numerum illum quadratum 25, qui effici-*

tur

tur ex numero 5 in se ducto. qui numerus 5 est maior extremitas proportionis inter 5 & 3, quae est proportio linearum α, β. Haec autē proportio, nempe numeri 5 ad 3 facit ut lineae ipsae α, β sint inter se longitudine commensurabiles per 6 huius. Idem dices de minoris quadrati areolis. Neque necesse est intelligere illas areolas quadratas esse, aut pedes aut passus quadratos conficiētes ipsa quadrata, quanuis tales esse possunt, si modò latera ipsorum quadratorū sint tot pedibus longa, nempe 5 aut 3. Omnino tamen necesse est numeros ambos exprimentes numerum pedum aut passuum quadratorū ipsis quadratis comprehensorū esse simul aut quadratos, ut in his figuris quadratis linearum α, ϛ: aut ambos esse similes superficiales, ut in superioribus quadratis quae erant 12, et 3. de quibus numeris constat ex antedictis eos esse similes superficiales, itáq; habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaq; potes pingenda tibi proponere ipsa quadrata linearum α, β, ut nullam distinctionem areolarum in se recipiāt, sintq; quadrata singula plane uacua, solisque quatuor lineis aequalibus cōtēta. quod ut intelligatur, demonstrationes ipsas explicabimus. Sint duae lineae α, β longitudine commēsurabiles. Dico quadratū lineae α ad quadratum lineae β habere proportionē quā quadratus numerus ad quadra-



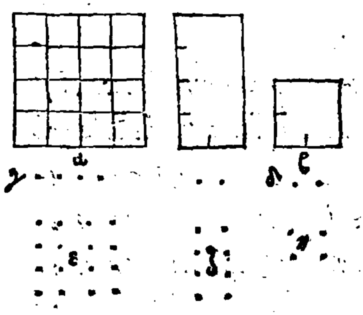


tum numerum. Cum enim commensurabilis sit longitudine linea α lineæ β. Ergo α ad β habet proportionē quā numerus ad numerum, per 5. huius. habeat itaque proportionem quā numerus γ ad δ. Cū igitur sit quemadmodum linea α ad β, ita γ numerus ad δ numerum: cumq; proportio quadrati quidem lineæ α ad quadratum lineæ β sit proportio cōtinens duplicatam proportionem lineæ α ad lineam β, (similes enim figuræ sunt in duplicata proportione suorum laterum relatiuorum, per primum corollariū 20. 6.) itidem cum proportio numeri quadrati, qui producitur à radice γ, ad quadratum numerum productum à radice δ sit proportio duplicata numeri γ, ad numerū δ per secundum partem 11. 8: cùmque unius & eiusdē proportionis, puta quæ est lineæ α ad lineam β, uel numeri γ ad numerum δ, proportiones æque multiplices, nempe quadrati lineæ α ad quadratum lineæ β, & numeri quadrati producti à radice γ ad numerum quadratum productum à radice δ, sint inter se æquales: est igitur sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita numerus quadratus productus à radice γ, ad numerum quadratum productum à radice δ.

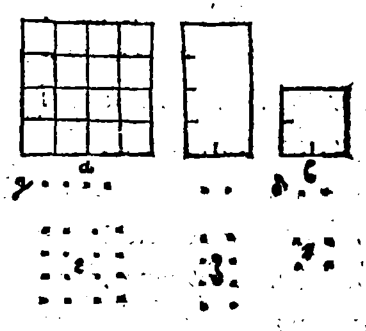
Aliter.

Sint α, β lineæ rectæ longitudine commensurabiles. Dico quadratum descriptum ab α ad quadratum descriptū

ad



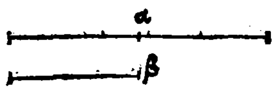
ad β habere proportionẽ quã numerus quadratus ad alium numerum quadratum. Quia enim linea α est longitudine cõmensurabilis lineæ β; habent inter se proportionẽ quam numerus ad numerum, per quintũ theorema huius libri. Habeant itaque proportionem eam quã numerus γ ad numerum δ, & numerus γ se ipse multiplicans efficiat numerũ ε. idem porrò numerus γ multiplicans numerum δ reddat numerum ζ. numerus uerò δ ex sui ipsius multiplicatione producat numerum η. Cũ igitur γ ex sui ipsius multiplicatione reddiderit numerum ε: multiplicatus etiam per δ effecerit numerum ζ: est ergo ut numerus γ ad numerum δ, id est linea α ad lineam β, sic numerus ε ad numerum ζ per septimamdecimam septimi. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, sic se habet quadratũ lineæ α ad parallelogrammum descriptum ex linea α in lineam β ducta per primam sexti. Quemadmodum igitur quadratũ lineæ α ad parallelogrammum ex α, β, sic numerus ε ad numerum ζ. Rursus quia numerus δ ex sui ipsius multiplicatione reddidit numerum η, multiplicatus uerò idẽ δ in γ produxit numerum ζ: est igitur quemadmodum γ ad δ hoc est quemadmodum linea α ad lineam β, sic numerus ζ ad numerum η per eandem septimam decimam septimi. Sed quemadmodum linea α ad lineã β, ita parallelogrãmũ ex lineis α, β, ad quadratũ lineæ β per primã sexti. Est igitur sicut parallelogrãmũ ex lineis α, β ad quadratum lineæ β, ita numerus ζ ad numerum κ.



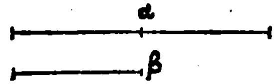
Sed modò cõclusum est sicut se habebat quadratum lineæ α ad parallelogrammum ex α, β, ita se habere numerum ι ad numerum ζ. Per æquam igitur proportionem erit quemadmodum quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sic numerus ι ad numerum κ. Vterque uerò illorum numerorũ est quadratus. Nam ι productus est ex multiplicatione γ in seipsum: κ uerò ex multiplicatione δ sui etiam ipsius in seipsum. Ergo quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ β habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod primo loco demonstrandũ erat. Priore demonstrationis modo usi sunt Theon & Campanus, posteriore etiam Theon aut quis alius. Ex his duabus nobis simplicior uidetur illa quam priore loco retulimus. Vacua itaque pingi possunt quadrata quæ describuntur à lineis longitudine commensurabilibus, modò constet tales esse suppositiones, quales accipiuntur in theoremate, lineas scilicet esse longitudine commensurabiles: tunc enim in uniuersum illud uerum erit, quotquot pedes aut passus quadrati fuerint in illis figuris quadratis, semper numerabuntur à numeris habentibus

proportionem

proportionem inter se quã quadratus numerus ad numerum. Sed quia perobscurus hic locus totus uideri solet, non alienum existimauimus nostram quoque demonstrationẽ apponere, si forte iuuare poßimus, quod cupimus quidem, & certe confidimus. Sint lineæ duæ longitudine commensurabiles α, β. dico quadrata earũ &c. Cum *enim lineæ α, β sint longitudine commensurabiles, habebunt proportionem inter se quam numerus ad numerum per 5. huius. habeat igitur α ad β proportionẽ duplam, quæ*



est quam habet numerus ad numerũ, puta 4 ad 2, & 6 ad 3, & plerique alij: reperianturque minimi numeri tres continuè proportionales in proportione dupla per 2.8, sintq; illi 4, 2, 1: ergo per corollarium eiusdem 2.8, numeri 4 & 1 erunt quadrati. Nam *sicut 4 est quadratus ex 2 in se multiplicato productus, ita 1 est etiam numerus quadratus. fit enim ex eadem unitate in seipsam multiplicata.* Dico *præterea hos numeros quadratos illos esse, quorum proportionem habent inter se quadrata linearum α, β.* Nam *sicut numerus 4 ad numerum 2, ita se habet linea α, ad lineam β.* Vtrobiq; *enim est dupla proportio per suppositionem. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habet quadratum lineæ α ad parallelogrammum, quod fit ex ductu lineæ α in lineam β, per primam sexti.* Ergo *sicut se habet numerus 4 ad 2, ita se habebit quadratum lineæ α ad parallelogrammum productum ex α & β.* Itidem *sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habet linea α ad li-*



neam β. utrobiq; enim etiã est dupla proportio per suppositionẽ. Sed *quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β per eandem primam sexti.* Ergo *sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β.* Ergo *per definitionẽ æquæ proportionalitatis, & per 22.5 erit quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut numerus 4 ad 1. qui quadrati sunt.* Illud *ergo uerum est uniuersaliter,* Q*uadrata descripta ex lineis longitudine commẽsurabilibus, habere proportionẽ inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quẽcunque numerum areolarum siue spatiorum intra se capiant illa quadrata: semper tamen necesse erit numeros ab illis contentos esse aut quadratos: aut si quadrati non erũt, (neque enim semper necesse est tales esse) similes saltem superficiales esse omnino necesse est.* Porrò *secundæ partis huius theorematis quæ est conuersa prioris illa est demonstratio.* Sit *quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus productus à γ ad quadratum productũ ex δ.* Dico *lineas α, β esse longitudine commensurabiles.* Nam *proportio quadrati α ad quadratum β est duplicata proportio lineæ α ad lineam β. per 20.6.* Similiter *proportio numeri quadrati producti ex γ ad quadratum productum ex δ est duplicata proportio ipsius numeri γ ad numerum δ, per 11.8.* Igitur *per 15.5, quemadmodum linea α ad lineã β, sic*

sic numerus γ ad numerum δ. Commensurabilis est ergo longitudine linea α lineæ β per 6 huius libri. Tertiam uerò partem theorematis demonstrare non est difficile per secundum syllogismum hypotheticum, quem à destructione consequentis uocant. Sit linea α incommẽsurabilis longitudine lineæ β: quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β non habebit proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Nam si cõtradicatur, sequitur statim per secũdam partem huius theorematis, illa quadrata habere latera longitudine commensurabilia, quod est contrarium his quæ supposita sunt. Sic enim essent lineæ α, β, & commensurabiles & incommẽsurabiles longitudine, quod est impoßibile. Simili ratione postrema pars huius theorematis demonstratur. Nam si quadrata inter se proportionẽ non habent quam quadratus numerus ad quadratum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia. Si contradicatur, continuo sequitur per primam partem huius theorematis, illa quadrata habere proportionem inter se quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quod est contrarium suppositioni.

Corollarium.

Ex *quibus ita demonstratis, manifestũ illud est, lineas longitudine commensurabiles, omnino potentia quoq; cõmensurabiles esse. Quæ uerò sunt potentia commensurabiles, non omnino longitudine quoque commensurabiles esse. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino potentia etiam incommensurabiles esse. Quæ uerò potentia incommensurabiles sunt, omnino* *longitudine quoque incommensurabiles esse. Cum enim quadrata linearum longitudine commensurabiliũ proportionem eam inter se habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ea uerò quæ proportionem habeant quadrati numeri ad quadratum numerum, simpliciter etiam habeāt proportionem quam numerus ad numerum. & quæ proportionē habēt quā numerus ad numerum, sint commēsurabilia per 6 huius, sequitur omnino lineas longitudine commensurabiles non tantùm esse longitudine commensurabiles, sed etiā esse potentia.* Huius *probatio pendet ex prima parte theorematis.* R*ursus quia quadrata quædam sunt quæ non habēt proportionem eam inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, habētia tamē ipsa proportionem eam simpliciter quam numerus ad numerum, latera quidem eorum sunt potētia commensurabilia, quia describunt quadrata habētia proportionem quam numerus simpliciter ad numerum, itáque commensurabilia per 6 huius: latera uerò ipsa inter se sunt longitudine incommensurabilia, per postremam partem theorematis.* V*erum est igitur lineas potentia commensurabiles nō statim esse longitudine etiā commensurabiles.* Hac *eadē ratione probatur & illud tertium corollarij membrum, lineas longitudine incōmensurabiles non statim etiam esse potentia incommensurabiles.* Po*ssunt enim esse longitudine quidem incommensurabiles, potentia tamen commensurabiles, ut in quadratis quæ habent quidem proportionem inter se quam numerus ad numerum, sed non quam numerus*

quadratus

quadratus ad numerum quadratum. Quartum uero probatur per ſecundum ſyllogiſmum hypotheticum à deſtructione conſequentis, lineas potentia incommenſurabiles, longitudine quoque incommenſurabiles eſſe. Nam ſi dicas eas eſſe longitudine commenſurabiles, ſequitur eſſe ipſas quoque potentia cõmenſurabiles, quod eſt contra ſuppoſitionem. Nam poſitæ ſunt incommenſurabiles longitudine. Reſolutio autẽ eius demonſtrationis quam attulimus illa eſt· Omnia quadrata habentia proportionem inter ſe quam extremi trium numerorum minimorum ſuæ proportionis continuæ proportionalium, habẽt proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sed quadrata duarũ linearum longitudine commenſurabilium ſunt huiuſmodi. Ergo quadrata duarum linearũ longitudine commenſurabilium habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Maior patet ex corollario 2.8. Minor patet ex 22.5.

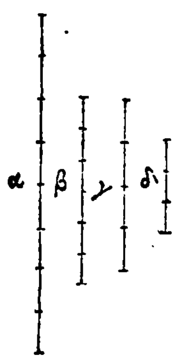
Lemma.

Demonſtratum eſt in arithmeticis theoremate 26.8. ſimiles planos numeros habere proportionem inter ſe quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Conuerſum uerò theorema, numeros habentes proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum eſſe ſimiles planos, non quidem demonſtratur in libris arithmeticis, ſed eſt à nobis in præcedenti theoremate libri huius demonſtratum. Vnde manifeſtum eſt numeros qui non ſunt ſimiles plani, id eſt non habentes latera inter ſe proportionalia, non *habere etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Eam enim proportionẽ si inter se haberent, sequeretur simul eos esse similes superficiales. cuius contrarium est positum, eos inquam non esse similes planos. Ergo numeri non similes superficiales non habent inter se proportionem eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Antequam attingamus theorema quod est decimo loco positum in hoc libro, illud omnino faciẽdum est, ut ei præponamus illud quod uulgo proximum locum tenet, scilicet undecimum. Aliter enim si fecerimus, demonstratio illius theorematis quod decimo loco scribi diximus, non procederet à priori, ut patebit in explicatione illius. Itáque Campanus fieri oportere recte indicauit, dum situm utriusque theorematis inuerteret.

Decimum Theorema.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, prima uerò secundæ fuerit commensurabilis, tertia quoque quartæ commensurabilis erit. Quòd si prima secũdæ fuerit incommẽsurabilis, tettia quoq; quartæ incommensurabilis erit.



Sint quatuor magnitudines proportionales α, β, γ, δ. ut α ad β, sic γ ad δ. Sitq; α commensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse commensurabilem magnitudini δ. Cum enim α sit commensurabilis β, Ergo α habebit proportio-

nem

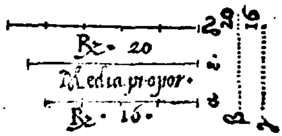
nem ad β quam numerus ad numerum, per 5 huius. Sed ex *suppositione est sicut α ad β, sic γ ad δ.* Ergo γ *ad δ habebit etiam proportionem quam numerus ad numerum.* Ergo *commensurabilis erit magnitudo γ magnitudini δ per 6 huius.* Rursus *sit α incommensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse incommensurabilem δ.* Cum *enim α sit incommensurabile β, igitur α non habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum per 7 huius.* Est *autem sicut α ad β, ita γ ad δ.* Ergo *neque γ ad δ proportionem habebit quam numerus ad numerum.* Incommensurabilis *est igitur γ magnitudini δ per* 8 *huius.* Si *itaque quatuor magnitudines & cætera.*

Corollarium.

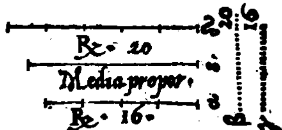
Si fuerint quatuor lineæ proportionales, fuerintque duæ priores, aut duæ posteriores inter se cõmensurabiles potentia tantum, cæteræ quoque duæ erunt potentia tantum cõmensurabiles. hoc probatur per 22.6, & per hoc theorema 10. *quo corollario utitur demonstrator in sequentibus theorematibus 28.29. & alijs.*

Vndecimum Theorema.

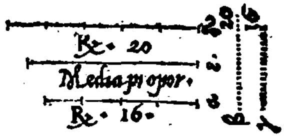
Propositæ lineæ rectæ (quam ῥητὴν uocari diximus) reperire duas lineas rectas incommensurabiles, hanc quidẽ longitudine tantum, illam uerò non longitudine tantum, sed etiam potentia incommensurabilem.



Sit linea recta proposita α, reperiendæ sunt duæ lineæ incommensurabiles lineæ α, alia qui-



dem longitudine tantùm, alia uerò etiam potentia incommẽsurabilis. Afferantur numeri duo β, γ inter se rationem eam non habentes quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est, ne sint illi numeri similes plani: fiatque sicut numerus β ad numerum γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum alterius lineæ quæ sit δ. Quomodo uerò id fiat, didicimus per lemma illud positum in theoremate 6 huius libri. Commensurabile est igitur quadratũ lineæ α, quadrato lineæ δ per 6 huius libri. Et quia numerus β ad numerum γ non habet eam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum: neque etiam quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ δ habebit eam proportionem quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Ergo linea α erit incommensurabilis longitudine tantum lineæ δ per 9 huius libri. Sic itaq; reperta est prior linea, nempe δ incommensurabilis longitudine tantum lineæ propositæ quæ est α. Rursus reperiatur media proportionalis inter α, δ quæ sit ι per 13. 6. Est itaque sicut linea α ad lineam δ, ita quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ ι per secundum corollarium 20. 6. Sed linea α est incommensurabilis longitudine lineæ δ, ut modò conclusum est. Ergo quadratum etiam lineæ α erit incommensurabile quadrato lineæ ι, per secundam partem postremi theorematis. Nec te impediat quod illud theorema 10 loquatur de magnitudinibus cõmensurabilibus & incõmensurabilibus. Lineæ enim quando consyderantur earum lõgitudines, ut sint longitudine



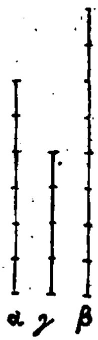
gitudine cōmenſurabiles aut incommēſurabiles lineæ, magnitudinis uoce comprehenduntur, & contrà, ſi conſyderantur ut magnitudines, ut ſint magnitudines commenſurabiles ſiue incommenſurabiles, de longitudinibus ipſarum linearum loqui intelligimus. neque tum quicquam de potentia lineæ intelligimus. Nam magnitudo lineæ eſt ipſa longitudo, cum linea nihil aliud ſit quàm longitudo ſine latitudine. De quadratis uerò nihil eſt neceſſe ita loqui, quia magnitudo ipſius quadrati eſt ipſum quadratum. potentia enim quadrati non dicitur. Cum ergo quadratū lineæ α ſit incommenſurabile quadrato lineæ ι, erit igitur per definitionem linearum incommenſurabiliū linea α incommēſurabilis potentia lineæ ι. Ergo lineæ rectæ propoſitæ ueluti α quam ῥητὴν diximus, & ex qua menſuras cæterarum linearum accipi oportere dicebamus inter principia huius libri, reperta eſt linea δ longitudine tantum incommenſurabilis. Eſt itaque ea linea δ ῥητὴ ſiue rationalis, longitudine tantum incommenſurabilis, ſupple lineæ α quæ primò & ex ſuppoſitione rationalis eſt. Reperta eſt item linea ι eidem lineæ α incommenſurabilis non longitudine tantum, ſed etiam potentia. quæ linea ι per definitionem linearum incommenſurabilium lineæ rationali erit irrationalis. Nam in uniuerſum ſolet Euclides eas uocare ἀλόγους id eſt irrationales, quæ & longitudine & potentia ſint incommenſurabiles lineæ propoſitæ, & ex ſuppoſitione ῥητῇ id eſt rationali. Hoc au-

tem problema licet in theorema conuertere, quomodo diximus cætera conuerti posse.

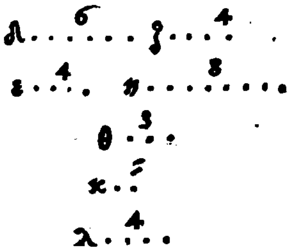
Duodecimum Theorema.

Magnitudines quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, inter se quoq; sunt cõmẽsurabiles.

Vtraque magnitudo α, β sit commensurabilis magnitudini γ. Dico magnitudines etiam α, β esse inter se commensurabiles. Nam cum α sit commensurabilis magnitudini γ. igitur α ad γ habebit proportionem quam numerus ad numerum habeat proportionem quam numerus δ ad numerum ι. Rursus cum β sit commensurabilis γ, igitur γ ad β habebit proportionẽ quam numerus ad numerum. habeat itaque quam numerus ζ ad numerum η. Sumantur



minimi numeri continuati in proportionibus datis secundum 4.8. qui numeri sint θ, κ, λ. ut quæ sit proportio numeri δ ad numerum ι, eadẽ sit numeri θ ad numerum κ: quæ uerò proportio sit numeri ζ ad numerum η, eadẽ sit numeri κ ad numerũ λ. Cum igitur sit sicut α ad γ, ita δ ad ι: sitq; δ ad ι sicut θ ad κ: est itaq; ut α ad γ, sic numerus θ ad numerũ κ. Itẽ cũ sit ut γ ad β, sic ζ ad η: sitq; sicut ζ ad η, ita κ ad λ. Ergo sicut γ ad β, ita κ ad λ. sed modò probatũ est, sicut erat α ad γ, ita θ ad κ. Per æquã igitur proportionẽ



α, γ, β.
θ, κ, λ.

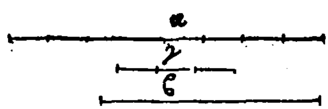
sicut

ſicut α *ad* β, *ita numerus* θ *ad numerum* λ. Ergo *per* 6 *huius libri, magnitudo* α *erit commenſurabilis magnitudini* β. *ergo magnitudines quæ eidem ſunt commenſurabiles & cætera.*

Decimumtertium Theorema.

Si ex duabus magnitudinibus hæc quidem commenſurabilis ſit tertiæ magnitudini, illa uerò eidem incommenſurabilis, incõmenſurabiles ſunt illæ duæ magnitudines.

Sint duæ magnitudines α, β. *porrò ſit tertia magnitudo* γ: *ſitq́;* α *commenſurabilis*

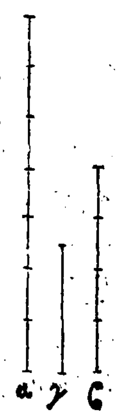


ipſi γ: *ſit etiam* β *incommenſurabilis eidem* γ. *dico magnitudinem* α *eſſe incommenſurabilem ipſi* β. *Nam ſi* α *eſſet commenſurabilis ipſi* β, *cum ſit* α *commenſurabilis ipſi* γ: *ipſa quoque magnitudo* β *eſſet commenſurabilis magnitudini* γ, *per* 12. *cuius poſitum eſt contrarium.*

Decimumquartum Theorema.

Si duarum magnitudinum cõmenſurabilium altera fuerit incõmenſurabilis magnitudini alteri cuipiam tertiæ, reliqua quoque magnitudo eidem tertiæ incõmenſurabilis erit.

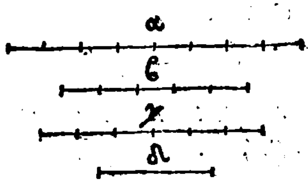
Sint duæ magnitudines commẽſurabiles α, β: *altera uero ipſarum, nempe* α *alteri cuipiã quæ* γ *ſit, incommenſurabilis eſto. dico reliquam quoque magnitudinem* β *eſſe incommen-*



ſurabilem ipſi γ. Nam ſi β eſſet commenſurabilis γ, cum etiam α ſit commenſurabilis β: ipſa quoque magnitudo α magnitudini γ erit commenſurabilis, per præcedens theorema. Sed poſitum eſt eas eſſe incommenſurabiles: quod eſt factu impoſsibile. Non ergo erit commenſurabilis β ipſi γ. ergo inconmēſurabilis. Si duarum ergo magnitudinum &c.

Corollarium.

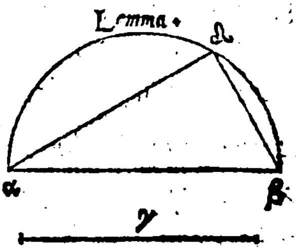
Quæ ſunt commenſurabilia incommēſurabilibus, ſunt inter ſe incommenſurabilia. Sint magnitudines, α, β incommēſurabiles: ſit & magnitudo γ cōmenſurabilis ipſi α: ſit item magnitudo δ cōmenſurabilis ipſi β. dico γ, δ eſſe inter ſe incommenſurabiles.



Nam α, γ ſunt commenſurabiles, ex quibus α eſt incommenſurabilis ipſi β. Ergo per hoc theorema 14. γ, β ſunt incommenſurabiles. Sed β, δ ſunt commenſurabiles. ergo per hoc ipſum theorema, aut per 13, γ, δ ſunt inter ſe incommenſurabiles. hoc autē corollario ſæpe utitur Theon, ut in 23, 27, 38, & alijs.

Lemma.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quanto plus poteſt maior q̄ minor.



Sint data duæ inæquales rectæ α β, & γ, quarum maior ſit α β, inueniēdū eſt quanto plus poſſit linea α β, quàm γ. Deſcribatur ſuper lineā α β ſemicirculus α δ β, & intra eum uſque

ad

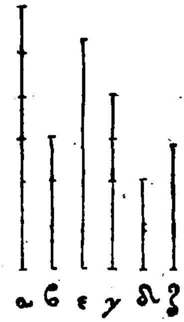
ad ipsius semicirculi circunferentiam collocetur linea recta α δ æqualis ipsi γ per primam quarti, & cõiungãtur puncta δ, β linea ducta, quæ sit δ β. Cõstat sane angulum α δ β rectum esse per 31.3. præterea lineam α β posse plus quàm linea α δ, quæ est æqualis ipsi γ: tantòque plus posse quantum est quadratum lineæ δ β, per 47.1. Similiter quoq; duabus datis rectis, linea utrãque potens reperietur hac ratione. Sint duæ datæ rectæ α δ, δ β, inueniendáq; proponatur linea quæ utrãque possit: applicentur inter se eo situ quo angulum rectum conficiãt, qui sit α δ β, & ducatur linea à puncto α in punctum β. constat item lineam α β esse eam quam quærimus potentẽ quantũ illæ ambæ α δ, δ β, per 47.1.

Decimumquintum Theorema.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, posit autem prima plusquam secunda tanto quãtum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine: tertia quoque poterit plusquam quarta tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quòd si prima posit plusquam secunda quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: tertia quoque poterit plusquam quarta quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.

Sint quatuor lineæ rectæ proportionales α, β, γ, δ, sicut α ad β, ita γ ad δ. posit autem α plusquam β tanto quãtum est quadratum lineæ ε: posítq; γ plusquam δ quadrato lineæ ζ. Dico si α fuerit commensurabilis longitudine li-

neæ ε, erit etiam γ commenſurabilis longitudine lineæ ζ. ſin autem α incommenſurabilis longitudine fuerit lineæ ε, erit ſimiliter γ incommenſurabilis longitudine lineæ ζ. Ex eo enim quod eſt ſicut α ad β, ita γ ad δ: erit etiam ut quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ



per 22,6. Sed ex ſuppoſitione quadrato lineæ α æqualia ſunt quadrata linearum β, ε: quadrato uerò lineæ γ æqualia ſunt quadrata linearũ δ, ζ. Eſt igitur ſicut proportio quadratorum earum linearum β, ε ad quadratũ lineæ β: ita proportio quadratorum duarum linearum δ ζ, ad quadratum lineæ δ. Per diſiunctã igitur proportionalitatem ſicut quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ β, ita quadratum lineæ ζ ad quadratum lineæ δ.

Eſt itaque ueluti ε ad β, ſic ζ ad δ, per ſecundam partẽ 22.6. Per cõtrariam ergo proportionem, ſicut β ad ε, ita δ ad ζ. Erat autem ex ſuppoſitione ſicut α ad β, ita γ ad δ. Per æquam igitur proportionem eſt ut α ad ε, ita γ ad ζ. Itaque per decimam huius, ſi α eſt commenſurabilis longitudine ipſi ε, erit quoque γ commenſurabilis longitudine ipſi ζ. Si uerò incommenſurabilis fuerit α ipſi ε, erit ſimiliter incommenſurabilis γ ipſi ζ. Ergo ſi quatuor rectæ proportionales &c.

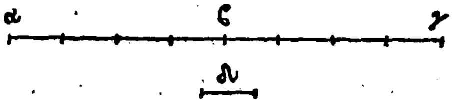
α, β, ε.
γ, δ, ζ.

Decimumſextum Theorema.

Si duæ magnitudines commenſurabiles componãtur, tota magnitudo compoſita ſingulis partibus commenſurabilis

commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo composita alterutri parti commensurabilis fuerit, illæ duæ quoque partes commensurabiles erunt.

Componantur duæ magnitudines commensurabiles α β, β γ. Dico totam magnitudinem α γ singulis partibus α β, β γ commensurabilem esse.



Cum enim α β & β γ sint commẽsurabiles, metietur ipsas quædam magnitudo cõmunis ambarum mensura. Metiatur *igitur, sitq; δ. Cum itaq; δ metiatur α β: β γ metietur quoque totam magnitudinem compositam α γ per communem cõceptionẽ. Quæcunque magnitudo metitur duas alias, metitur quoque compositam ex illis.* Sed *eadem δ metiebatur α β, β γ ex suppositione.* Ergo *δ metitur α β, β γ, & α γ.* Commensu*rabilis est itaque α γ utriq; magnitudini α β, & β γ.* Sit *præterea α γ tota composita commensurabilis alteri ex duabus α β, β γ: sitq; illa α β.* Dico *duas illas α β, β γ esse commensurabiles.* Nam *cum α γ & α β sint commensurabiles, metiatur ipsas communis quædam mensura: sit autem illa magnitudo δ.* Cum *itaq; δ metiatur α β & α γ, reliquam quoque magnitudinem β γ metietur magnitudo δ per illam communem conceptionem. Quicquid metitur totũ, & detractum metitur & reliquũ. sed eadem δ metiebatur magnitudinem α β ex suppositione.* Ergo *δ metitur utranque α β, & β γ.* Commensu*rabiles itaque sunt α β, β γ. itaq; ambæ partes theore-*

matis uerae.

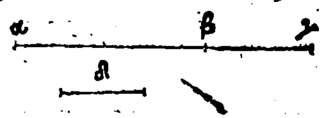
Corollarium.

Si tota magnitudo fuerit commensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquae ex duabus commēsurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti α γ est commensurabilis magnitudini β γ, ergo per secundam partem huius theorematis 16, magnitudines α β, β γ sunt commensurabiles. ergo per priorem partem eiusdem theorematis magnitudo α γ erit cōmensurabilis singulis α β, β γ. Hoc corollario utitur Theon *in demonstratione* 18, *& aliorū theorematum. omissum tamen est* Euclidi, *quia facile uidebatur ut caetera ferè corollaria.*

Decimumseptimum Theorema.

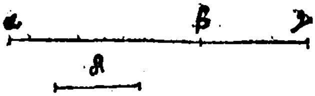
Si duae magnitudines incommensurabiles componantur, ipsa quoq; tota magnitudo singulis partibus componentibus incommensurabilis erit. Quòd si tota alteri parti incommēsurabilis fuerit, illae quoque primae magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Componantur enim duae magnitudines incommensurabiles α β, β γ. Dico *totā magnitudinem α γ, utricunq; magnitudini α β, β γ incōmensurabilem fore.*



Quòd si negetur incommensurabiles esse γ α, α β, metietur ipsas quaedam magnitudo. metiatur itaque, ea quae sit δ si fieri potest. Cum igitur δ metiatur per te γ α, α β, metietur similiter reliquā magnitudinem β γ: sed per te eadē δ metiebatur β α. Ergo

α β,



α β, β γ sunt commensurabiles. Sed ex suppositione erāt incōmensurabiles: fieri ergo nō potest ut γ α, α β sint cōmensurabiles: sunt itaq; incōmensurabiles. Eadem uia demonstrari potest magnitudines α γ, γ β esse incommensurabiles. Ergo α γ singulis magnitudinibus α β, β γ est incommensurabilis.

Rursus α γ alteri magnitudini, nempe ipsi α β, sit incōmensurabilis. dico etiam α β, β γ esse incommensurabiles. Nam si commēsurabiles fuerint, metietur ipsas magnitudo quædam. metiatur, sitq; δ. Cum igitur δ metiatur α β, β γ, metietur quoque totam magnitudinem α γ. sed per te δ metiebatur α β: ergo δ metietur γ α, α β. Cōmensurabiles itaq; sunt γ α, α β. Sed ex suppositione erant incommensurabiles. illud autem fieri nullo modo posse certum est, ut simul sint & commensurabiles & incommensurabiles. Nulla ergo magnitudo metietur α β, β γ. Ergo incommensurabiles sunt α β, β γ. Eadem quoque uia demonstrari potest illud idem, si posuerimus magnitudinem α γ esse incommensurabilem ipsi β γ. Ergo si duæ magnitudines incommensurabiles &c.

Corollarium.

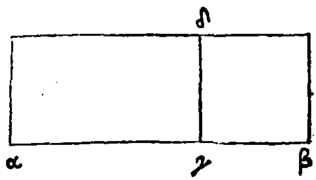
Si tota magnitudo fuerit incōmensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus incommēsurabilis. Nam si tota magnitudo uelut α γ est incommensurabilis magnitudini β γ, ergo per secundam partem huius theorematis 17. magnitudines α β, β γ sunt incom-

mensurabiles.ergo per priorem partem eiusdē theorematis magnitudo $\alpha\gamma$ erit incommensurabilis singulis $\alpha\beta$,$\beta\varsigma$.hoc corollario utitur Theon *in demonstratione 73 theorematis,& aliorum.*

Lemma.

Si parallelogrammum applicetur secundum lineam rectam,lineáque illa tanto plus excedat parallelogrammi latus,quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi:illud parallelogrammū sic applicatum, est æquale alteri parallelogrammo,quod fit ex sectionibus lineæ,quæ factæ sunt per applicationem ipsius parallelogrammi secundum lineam illam.

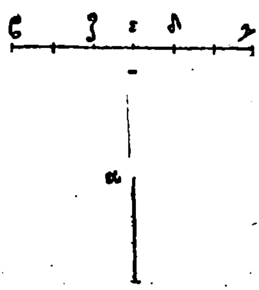
Hoc per se manifestum uideri potest,tamen quia reperitur inter cætera,demonstrationem eius afferemus. Secūdum lineam rectam $\alpha\beta$ applicetur parallelogrammum $\alpha\delta$,cuius alterū latus sit æquale illi portioni lineæ rectæ,quæ excurrit extra parallelogrammū.



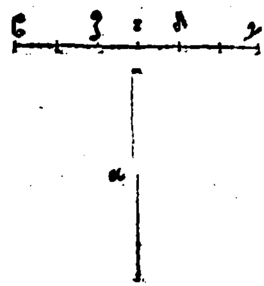
Dico parallelogrammū $\alpha\delta$ esse æquale superficiei rectangulæ quæ fit ex $\alpha\gamma$,$\gamma\beta$.quod per se patet,ut modò diximus.Nam quia quadratum est $\delta\beta$,linea $\delta\gamma$ est æqualis lineæ $\beta\gamma$: estq; parallelogrammum $\alpha\delta$,id quod est superficies rectangula $\alpha\gamma$,$\gamma\beta$. Ergo *si parallelogrammum applicetur &c.*

Decimumoctauum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati quod describitur à minore,æquale le parallelogrammum applicetur secundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrãmi. Si præterea parallelogrammum sui applicatione diuidat lineã illam in partes inter se cõmensurabiles longitudine: illa maior linea tanto plus potest quàm minor, quantũ est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quòd si maior plus posit quàm minor, tanto quantum est quadratum lineæ sibi cõmẽsurabilis longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur secundũ maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi, parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se longitudine cõmensurabiles.



Sint duæ rectæ inæquales α, β γ, quarum maior sit β γ. Quartæ autem parti quadrati lineæ minoris α, hoc est ipsi quadrato quod describitur à dimidia linea α, æquale parallelogrammum secundum lineã β γ, applicetur, quod relinquat ex linea β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipsius parallelogrãmi: sitq; illud parallelogrammũ quod fiat ex β δ, δ γ: (hoc uerò quemadmodũ fiat, docet Campanus in fine demonstrationis 13.) sit quoque commen-



surabilis longitudine linea βδ ipsi lineæ δγ. Dico lineã βγ plus posse quàm linea α, tanto quantum est quadratum lineæ cuiusdã sibi ipsi lineæ, dico βγ, longitudine cõmensurabilis. Secetur enim linea βγ in duas partes æquales in puncto ε, ponatúrque lineam εζ æqualem esse lineæ δε: reliqua ergo linea δγ erit æqualis lineæ βζ. Cumq; linea recta βγ diuisa sit in partes æquales in puncto ε, in partes autem inæquales in puncto δ, superficies rectangula contenta ex βδ, δγ cum quadrato lineæ εδ, æqualis est quadrato lineæ εγ, per quintum theorema secundi libri. Itaque superficies rectangula contenta ex βδ, δγ quater sumpta cũ quadrato lineæ εδ item quater sumpto, est æqualis quadrato lineæ εγ quater sumpto. Nam æqualia quæ sunt æqualiter multiplicata, simul æqualia sunt. Sed superficiei rectangulæ contentæ ex βδ, δγ quater sumptæ æquale est quadratũ lineæ α ex suppositione. Nam parallelogrammum ex βδ, δγ positum est æquale quartæ parti quadrati lineæ α. Quadrato uerò lineæ δε quater sumpto æquale est quadratum lineæ δζ. Nam linea δζ est dupla ad lineam δε. quadrato autem lineæ εγ quater sumpto æquale est quadratũ lineæ βγ. Similiter enim linea βγ dupla est ad lineam εγ. Ergo quadrata linearũ α, δζ sunt æqualia quadrato lineæ βγ. Quocirca quadratum lineæ βγ maius est quàm quadratum lineæ α tanto quantum est quadratum lineæ δζ. Ergo maior linea βγ plus potest quàm

minor

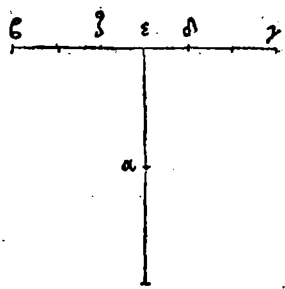
minor α quadrato lineæ δζ. Nunc autem demonstrandum est lineam βγ esse longitudine commensurabilem ipsi lineæ δζ. Cum enim ex suppositione linea βδ sit longitudine commẽsurabilis ipsi δγ: ergo linea tota βγ erit longitudine commensurabilis lineæ δγ, per sextum decimum theorema huius libri. Atqui linea δγ est æqualis lineæ βζ. Ergo linea tota βγ est commensurabilis longitudine lineis βζ, γδ. Componantur illæ duæ lineæ ut unam lineam efficiant. Cum itaque linea tota βγ sit cõmensurabilis lõgitudine duabus lineis unius loco sumptis βζ, γδ. Ergo lineæ βζ, γδ unius loco sumptæ sunt cõmensurabiles longitudine ipsi lineæ ζδ, per secundam partẽ sextidecimi theorematis huius libri. Quare etiã residuæ lineæ ζδ commensurabilis longitudine erit tota linea βγ, per priorem partem eiusdem sextidecimi theorematis. hoc ipsum tamen probari potest per corollariũ à nobis positum post 16. Ergo linea βγ plus potest quàm linea α quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Rursus linea βγ plus posit quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi longitudine commẽsurabilis: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale secundum lineam βγ parallelogrammum applicetur, quod relinquat ex linea βγ portionem æqualem alteri ipsius lateri: sitq́; superficies rectangula contẽta ex βδ, δγ, demonstrandum est lineas βδ, δγ esse inter se longitudine commensurabiles. Manentibus constructionibus & suppositionibus præcedentibus similiter demonstrabimus lineam βγ plus posse linea α tanto quantum est quadratum lineæ ζδ. Sed ex suppositione linea βγ plus *potest quàm linea α, tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Commensurabilis est itaque longitudine linea β γ lineæ ζ δ. Ergo linea composita ex duabus β ζ, δ γ est commensurabilis longitudine lineæ ζ δ, per secundã partem sextidecimi theorematis huius libri. Quocirca per 12 huius, siue per priorem partem sextidecimi theorematis, linea β γ est cõmensurabilis longitudine lineæ compositæ ex β ζ, δ γ. Sed tota linea composita ex β ζ, δ γ est commensurabilis longitudine ipsi δ γ. nam β ζ est æqualis ex antè dictis ipsi δ γ. Ergo linea β γ est longitudine commensurabilis ipsi δ γ, per 12 huius. Quare & linea β δ est longitudine commensurabilis lineæ δ γ, per secundam partem sextidecimi theorematis. Ergo si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales &c. Quod demonstrandum erat.*

Decimumnonum Theorema.

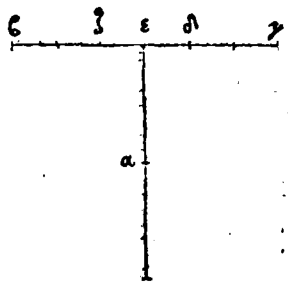
Si fuerint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati lineę minoris æquale parallelogrammum secundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus eiusdem parallelogrammi: si parallelogrammum præterea sui applicatione diuidat lineam in partes inter se longitudine incommẽsurabiles, maior illa linea tanto plus potest quàm minor, quantũ est quadratum lineæ sibi maiori incõmensurabilis longitudine. Quòd si maior linea tanto plus posſit quàm minor, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis

commensurabilis

commensurabilis sibi longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur secundum maiorẽ, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrã-mi, quantum est alterum latus ipsius, parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se incommensurabiles longitudine.

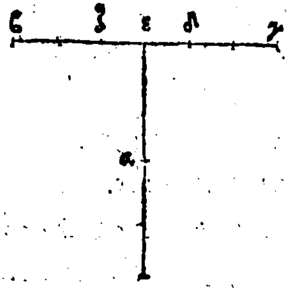


Sint duæ rectæ inæquales α, βγ, quarũ maior sit βγ: quartæ autẽ parti quadrati minoris nempe α, æquale parallelogrammũ applicetur secundum lineã βγ, quod relinquat ex linea βγ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipsius parallelogrammi: sitq; illud parallelogrammum ex βδ, δγ: incommensurabilis autem longitudine sit βδ ipsi δγ. Dico lineam βγ posse plus quàm linea α tanto, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Sint primum eædem constructiones & ratiocinãdi uiæ, quæ in proximo theoremate. Similiter ostendemus lineã βγ posse plus quàm linea α tanto, quantum est quadratum lineæ δζ. Restat ut demonstremus lineam βγ esse incommensurabilem longitudine ipsi δζ. Cum enim linea βδ sit incommensurabilis longitudine lineæ δγ ex suppositione, incommensurabilis etiam longitudine erit linea βγ ipsi lineæ δγ, per 17 huius: sed δγ est commensurabilis ambabus lineis βζ, δγ simul compositis, quia δγ est *æqualis ipsi ϛζ. Ergo ϛγ est incommensurabilis ambabus ϐζ, δγ simul compositis, per 14 huius. Ergo per secundam partem septimidecimi theorematis huius libri linea composita ex ϛζ, δγ simul & unius loco sumptis est incommẽsurabilis lineæ*



ζδ. Ergo per priorem partẽ eiusdẽ septimidecimi theorematis linea ϐγ est incommensurabilis longitudine lineæ ζδ. Linea igitur ϐγ potest plus quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Rursus *linea ϐγ possit plus linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale parallelogrammum applicetur secũdum lineam ϐγ, quod relinquat excurrentem portionem lineæ ϐγ æqualem alteri ipsius lateri: sitq́; illud parallelogrammum ex lineis ϐδ, δγ.* Demonstrandum *nobis est illud lineam ϐδ, esse incommensurabilem longitudine lineæ δγ.* Maneant *enim eædem constructiones & ratiocinandi uiæ: similiter etiam ostendemus lineam ϐγ posse plus quàm linea α quadrato lineæ ζδ.* Primùm *ex suppositione linea ϐγ potest plusquam linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi incommensurabilis longitudine.* Ergo *linea ϐγ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζδ.* Itaque *linea composita ex ϛζ, δγ & unius loco sumpta erit incommensurabilis longitudine lineæ ζδ, per secundam partem septimidecimi theorematis*

matis libri huius. Quare & per primam partẽ eiusdẽ theorematis, linea $\beta\gamma$ erit incommẽsurabilis longitudine lineæ composita ex $\epsilon\zeta$, $\delta\gamma$. Sed linea cõposita ex $\beta\zeta$, $\delta\gamma$ est commensurabilis longitudine lineæ $\delta\gamma$, eò quia $\beta\zeta$ est æqualis ipsi $\delta\gamma$ ex anteprobatis. Itaque linea $\beta\gamma$ est incommensurabilis longitudine ipsi $\delta\gamma$ per 14 huius. Ergo per secundã partem eiusdem septimidecimi theorematis, linea $\beta\delta$ est incommensurabilis longitudine lineæ $\delta\gamma$. Quamobrem si fuerint duæ rectæ inæquales &c.



Lemma.

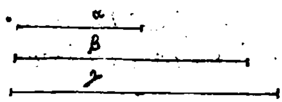
Cum sit demonstratum lineas longitudine commensurabiles omnino potentia quoque commensurabiles esse, eas uerò quæ potentia sunt commensurabiles non omnino longitudine quoque commensurabiles esse, sed esse posse & longitudine commensurabiles & incommensurabiles, constat si lineæ propositæ (quam ῥητὴν uocari diximus, eandémque rationalẽ à recentioribus) linea quædam fuerit commensurabilis longitudine, illam uocari debere rationalem, & commensurabilem non longitudine solum, sed etiam potentia. Nam lineæ longitudine commensurabiles, omnino potentia quoque commensurabiles sunt. Quod si propositæ lineæ, quam rationalem uocant, quædam fuerit linea commensurabilis potẽtia: siquidem & longitudine etiam cõmensurabilis ipsi fuerit, uocabitur illa rationalis, & commensurabilis ipsi *longitudine & potẽtia. Si uerò ipsi lineæ propositæ, quã rationalem uocant, linea quædam potentia commensurabilis, longitudine eidem fuerit incommensurabilis: uocabitur & illa rationalis, potentia tantum commensurabilis.*

Illæ duæ uoces πρόκλου σχόλιον *quæ sunt in exemplari impresso, non sunt in uetusto: & quod sequitur, continuata serie scribitur, addita particula* γὰρ *hoc modo,* ῥητὰς γὰρ, *sic itaque dicemus:* Rationales *enim uocat* Euclides *(ut est in principijs huius libri) illas lineas quæ sunt lineæ propositæ quam* ῥητὴν *uocat, siue longitudine & potentia commensurabiles, siue potentia tantum. Sunt tamen & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incommensurabiles lineæ propositæ, id est* τῇ ῥητῇ, *siue dicas rationali, potentia tantum eidem commensurabiles, eoq́; uocantur rationales & cõmensurabiles inter se ea ratione qua sunt rationales. sed & illæ eædem possunt esse cõmensurabiles inter se siue longitudine, & ideo potentia quoque, siue potentia tantum.* Et *quidẽ si fuerint inter se commensurabiles longitudine, uocabuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut tamen simul intelligatur potentia quoque cõmensurabiles esse.* Q*uòd si potentia tantum inter se fuerint commensurabiles, uocabuntur & ipsæ rationales potentia tantum commensurabiles.*

Corollarium.

Q*uod autem lineæ duæ siue plures rationales & commẽsurabiles longitudine ipsi rationali sint inter se commẽsurabiles longitudine, hinc cõstat.* N*am cum sint rationales & longitudine commensurabiles ipsi primo rationali,*

tionali, eæ autem magnitudines quæ ſunt uni & eidem commenſurabiles ſint inter ſe commenſurabiles, per 12 huius. Ergo *lineæ rationales ipſi primo rationali longitudine commenſurabiles, ſunt inter ſe quoque commenſurabiles longitudine.* Sed *quantũ ad eas attinet, quæ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles ipſi primo rationali, fieri omnino neceſſe eſt ut illæ quoque inter ſe ſint potentia ſaltem cõmenſurabiles.* Cum *enim quadrata earum ſint rationalia, erunt commenſurabilia quadrato lineæ propoſitæ quæ dicitur primò rationalis.* Itaque *per* 12 *huius ipſa quoque inter ſe erunt cõmenſurabilia.* Ergo *lineæ eorum ſunt inter ſe potentia ſaltem commenſurabiles.* Sed *nihil uetat eaſdẽ eſſe præterea longitudine inter ſe commenſurabiles.* Sit *enim linea α rationalis, ſitq; linea β eidem lineæ α rationali potentia tantum commenſurabilis,*

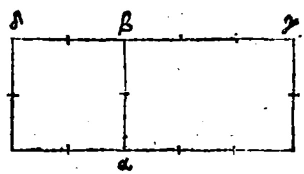


hoc eſt longitudine incommenſurabilis eidẽ. ſit præterea alia linea γ lineæ β longitudine commenſurabilis (hoc enim eſſe poſſe conſtat ex principijs huius libri) per 14 *huius, linea γ eſt incommenſurabilis longitudine ipſi lineæ α: ſed quadratum lineæ α eſt commenſurabile quadrato lineæ β ex ſuppoſitione: quadratum item lineæ γ eſt commenſurabile eidem quadrato lineæ β, per ſuppoſitionem.* Ergo *per* 12 *huius, quadratum lineæ γ eſt commenſurabile quadrato lineæ α.* Ergo *linea γ erit per definitionem rationalis, potentia tantum commenſurabilis ipſi lineæ α, ſicut & ipſa linea β.* Dantur *ergo duæ rationales potentia tantum commenſurabiles ipſi ra-*

tionali, inter se uerò longitudine commensurabiles. Hìc *obiter repetendū esse puto, quod antea diximus in diffinitione linearū rationalium,* Campanū, *caterósq; deinceps ab eo latinos geometras inuexisse illas uoces siue terminos, ut quasdam lineas uocarent rationales potentia tantum, quasdā uerò longitudine & potentia, quibus nunquam* Euclidem *usum esse reperies. hæ enim uoces longitudine & potentia nunquā referuntur ad rationalitatem aut irrationalitatem, sed semper ad commensurabilitatem, aut incommensurabilitatem linearum. Quæ peruersiones solent rerum per se difficilium etiam difficultatem & obscuritatem augere. Itaque te monitum iterum atque iterum uelim, ut principiorum id est simplicium terminorum simplicem uim diligenter intelligas & retineas, neque quicquam externum admiscendum existimes.*

Vigesimum Theorema.

Superficies rectangula contenta ex lineis rectis rationalibus longitudine commensurabilibus secundum unum aliquem modum ex antedictis, rationalis est.

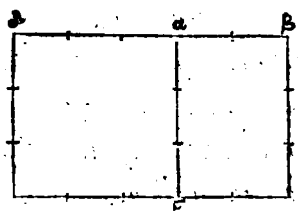


Nam ex lineis α β, β γ rationalibus longitudine commēsurabilibus secundum unū aliquem modum ex antedictis cōtineatur superficies rectāgula quæ sit α γ. dico superficiem α γ esse rationalē. Describatur enim à linea α β quadratum α δ: rationale est

itaque

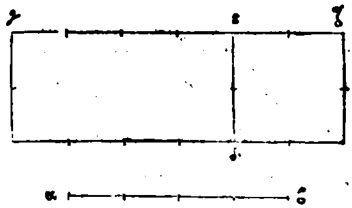
itaque quadratum illud α δ ex definitione. Cúnque sit commensurabilis longitudine linea α β lineæ β γ, æqualisq́; sit linea α β lineæ β δ, commensurabilis itaque longitudine erit linea β δ lineæ β γ. Est autẽ sicut linea ε δ ad lineam ε γ, ita quadratum δ α ad superficiẽ rectangulam α γ, per primam sexti. Sed modo conclusum est lineam β δ esse commensurabilem lineæ β γ. Ergo per decimam huius libri quadratum δ α est commensurabile superficiei rectangulæ α γ. Sed quadratum δ α est rationale: itaque per definitionem superficies α γ erit etiã rationalis. Ergo superficies rectangula cõtenta & cætera.

Sed & alia quadam descriptione placet idem demõstrare. Prior enim demonstratio quadratum minoris lineæ cõscripsit, nunc mutato casu demonstrationis quadratum maioris describamus. Sit superficies rectangula β γ contenta ex lineis rationalibus inæqualibus longitudine inter se commensurabilibus α β, α γ: sitque maior α γ. Describatur ex linea



α γ quadratum δ γ. dico parallelogrammum γ ε rationale esse. Nam linea α γ est commensurabilis longitudine lineæ α β ex suppositione: sed linea δ α est æqualis lineæ α γ. Ergo linea δ α est commensurabilis longitudine lineæ α β: sed quam proportionem habet δ α ad α β, eandem habet quadratum δ γ ad parallelogrammum γ β, per primam sexti. Ergo per 10 huius libri commensurabile est quadratum δ γ parallelogrãmo γ β. Quadratum autem δ γ rationale esse constat, quia est qua-

dratum lineæ rationalis, nempe α γ. Itaque per *definitionem, parallelogrammum etiam* γ β *erit rationale. Præterea cum demonstrationes illæ uideantur loqui de eo parallelogrammo quod fit ex duabus lineis, quarum altera sit ea proposita quam primo loco rationalem dicimus, unde diximus mensuras cæterarũ linearum ad illam comparatarum capi oportere, altera uerò sit eidẽ primo rationali commensurabilis longitudine, quæ est prima species linearum rationalium longitudine commensurabilium, alium casum afferendum puto de altera specie, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, ut demonstremus generalem huius theorematis ueritatem, neq; frustra in eo positum illud extitisse secundum unum aliquem modum ex antedictis.* Sit itaque linea primo rationalis α β: *sit etiam parallelogrammum* γ δ *contentum ex lineis* γ ε, ε δ *rationalibus id est lineæ primo rationali* α β *commensurabilibus longitudine. Sint tamen illæ duæ lineæ* γ ε, ε δ *diuersæ & inæquales lineæ primo rationali* α β. Dico *parallelogrammũ* γ δ *esse rationale. Describatur quadratum lineæ* ε δ, *sitq;* δ ζ. Primum *constat lineas* γ ε, ε δ *esse inter se commensurabiles longitudine per* 12 *huius. Nam positum est utrãque esse longitudine commensurabilem ipsi* α β. *Sed* ε δ *est æqualis lineæ* ε ζ. *Ergo linea* γ ε *erit commensurabilis longitudine lineæ* ε ζ. *Sed quẽadmodum se habet linea* γ ε *ad lineã* ε ζ, *ita se habet pa-*

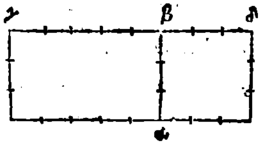


rallelogrammum

rallelogrammum γ δ ad quadratũ δ ζ, per primã ſexti. Ergo per decimam huius parallelogrammum γ δ erit commenſurabile quadrato δ ζ. Sed quadratum δ ζ eſt commenſurabile quadrato lineæ α β, quia linea ι δ poſita eſt cõmenſurabilis longitudine lineæ α β, quæ eſt primo rationalis. Ergo per 12 huius, parallelogrammũ γ δ eſt commenſurabile quadrato lineæ α β. Sed quadratũ lineæ α β eſt rationale per definitionem. Ergo per definitionem quoque figurarum rationalium parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Nunc reſtat alius caſus tertiæ ſpeciei, linearum inquam rationalium longitudine commenſurabilium, quæ ſunt ipſi quidem lineæ primo rationali α β commenſurabiles potentia tantum, itaque rationales tamen. inter ſe uerò longitudine commenſurabiles ſint ipſæ lineæ γ ι, ι δ, maneat itaque eadẽ conſtructio quæ in proximo caſu modo lineæ γ ι, ι δ ſint rationales potentia tantum commenſurabiles ipſi α β: inter ſe uerò ſint longitudine etiam commenſurabiles. Dico ſic quoque parallelogrammum γ δ eſſe rationale. Primo probabitur, ſicut modo dictum eſt parallelogrãmum γ δ eſſe commẽſurabile quadrato δ ζ: ſed quadratum lineæ α β eſt commenſurabile quadrato δ ζ. Ergo per 12 huius parallelogrammum γ δ erit commenſurabile quadrato lineæ α β. ſed quadratũ lineæ α β eſt rationale. Ergo per definitionem parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Hunc autem caſum notandum tibi memineris. Quum enim uentum erit ad 26 theorema, ad illius theorematis demonſtrationem & intelligentiam illum tibi uſui fore intelliges.

Vigeſimumprimum Theorema.

Si rationale ſecundum lineam rationalem applicetur, habebit alterum latus lineam rationalem & commenſurabilem longitudine lineæ, cui rationale parallelogrammum applicatur.



Hoc theorema eſt ueluti ἀντίστροφον præcedentis. Rationale enim parallelogrammum α γ applicetur ſecundum lineam α β rationalẽ uno aliquo modo ex antedictis, ſiue ſit illa primo rationalis, ſiue alia ipſi primo rationali commenſurabilis, idq́; longitudine & potentia, uel potentia tãtum. his enim tribus modis dicitur linea rationalis. Dico lineam β γ eſſe rationalem & longitudine commenſurabilem ipſi lineæ α β. Deſcribatur enim quadratum lineæ α β quod ſit α δ. Rationale eſt igitur quadratum α δ, ſed & parallelogrammum α γ eſt rationale per poſitionem. Ergo per definitionem rationaliũ quæ in ſe conuertitur, ſiue per 12 huius, commenſurabile eſt quadratum α δ parallelogrammo α γ. Eſt autem ſicut quadratum α δ ad parallelogrammũ α γ, ita linea δ β ad lineam β γ, per primam ſexti. Itaq; per decimam huius, linea δ β erit commenſurabilis lineæ β γ. ſed linea β δ, eſt æqualis lineæ β α, commenſurabilis eſt ergo linea α β, lineæ β γ. Rationalis autem eſt linea α β, Rationalis ergo erit & linea β γ, & commenſurabilis longitudine lineæ α β. Ergo ſi rationale ſecundum lineã rationalem &c.

Lemma.

Linea

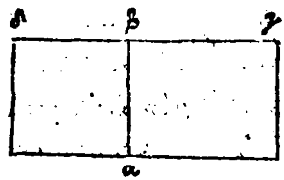
Lemma.

Linea potens superficiem irrationalem, est irrationalis. Posit enim linea α superficiem irrationalem, hoc est quadratum quod ab α describitur, æquale esto areæ irrationali. dico lineam α esse irrationalem. Nam si linea α esset rationalis, rationale quoque esset quadratum ab illa descriptum: (sic enim est positũ inter definitiones.) sed ex positione est irrationale, irrationalis est ergo linea α, quod demonstrandum erat.

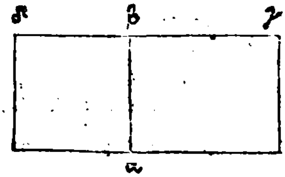
Hîc inseritur quoddam scholium, quod lemmatis inscriptionem habet, sed illud nihil aliud est quàm demõstratio quædam sequentis theorematis.

Vigesimumsecundum Theorema.

Superficies rectangula contenta duabus lineis rectis rationalibus potẽtia tantum cõmensurabilibus, irrationalis est. Linea autem quæ illam superficiem potest, irrationalis & ipsa est: uocetur uerò medialis.



Superficies enim rectãgula α γ comprehendatur à duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus, quæ sint α β, β γ. Dico superficiem illam esse irrationalem, & lineam quæ illam potest, irrationalem etiam esse: uocetur autem medialis. Describatur enim à linea α β quadratum α δ. rationale est itaq; quadratum α δ. Et quoniam incommẽsurabilis est longitudine linea α β *lineæ β γ (nam ex ſuppoſitione ſunt illæ inter ſe potentia tantum commenſurabiles) æqualisq́; eſt linea α β, lineæ β δ incommenſurabilis longitudine ergo erit linea δ β lineæ β γ. Eſt autem ſicut linea δ β ad lineā β γ, ita quadratum α δ ad parallelogrammum α γ, per primam ſexti incommenſurabile. eſt ergo quadratum α δ parallelogrammo α γ per ſecundā partem decimi theorematis huius libri. Sed quadratū δ α eſt rationale: irrationale eſt ergo parallelogrammum α γ. Quare & linea quæ illud parallelogrammū α γ, hoc eſt ea quæ quadratum ipſi parallelogrammo æquale deſcribit, irrationalis erit per lemma poſtremum. Vocetur autem medialis ea ratione, quia quadratum quod ab ea deſcribitur, æquale eſt parallelogrammo quod comprehenditur à lineis α β, β γ, itaque media ipſa proportionaliter intercidit inter illas lineas α β, β γ per 17.6. quod demonſtrandum erat.* Hæc *autem* μέση *de qua hoc libro agitur, ſimpliciter* μέση *dicitur: illa uero cuius inuentionem tradidit lib. 6. theoremate 13. dicitur* μέση ἀνάλογον. *Neque omnis* μέση ἀνάλογον *eſt potens ſuperficiem irrationalē, ſed ea tantum quæ eſt media proportionalis inter duas lineas potentia tantum commenſurabiles. Campanus in propoſitione apud eum 19 addidit, diciturque ſuperficies medialis: quod tamē non eſt ita intelligendū, ut omnis ſuperficies medialis contineatur ex duabus lineis rationalibus potentia tantum commēſurabilibus.*

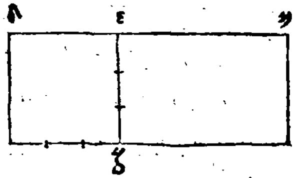


hoc

hoc enim refellitur per ſequẽtia theoremata 26. & 29. ubi ſuperficies medialis cõtineri dicitur ex duabus medialibus potentia tantum commenſurabilibus. Itaque *ſuperficies omnis rectãgula duabus rectis rationalibus potentia tantum commenſurabilibus compreheſa, medialis dicitur, ſed non econuerſo, ut omnis medialis ſuperficies rectangula ſit comprahenſa duabus rectis rationalibus potentia tantum commẽſurabilibus. eſt enim & medialis comprehenſa duabus medialibus potentia tantum commenſurabilibus. ſed tamen in uniuerſum ſuperficies quam poteſt linea medialis eſt & ipſa medialis.*

Lemma.

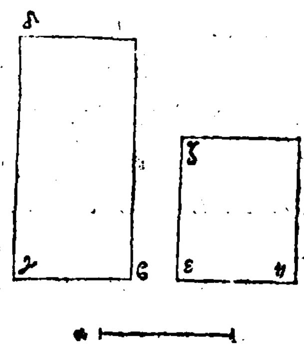
Si *ſint duæ lineæ rectæ, erit ſicut prior ad ſecundã, ita quadratum quod à priori deſcribitur, ad parallelogrammum quod comprehenditur duabus illis rectis.* Hoc Lemma *nihil aliud affert quàm quod theorema primũ libri ſexti.* Sint *duæ rectæ ζε, εθ.* Dico *ſicut eſt linea ζε ad lineam εθ, ita quadratũ lineæ ζε ad parallelogrammum comprehenſum ex ζε, εθ.* De*ſcribatur enim quadratũ lineæ εζ, ſitq́; δζ, & compleatur parallelogrammum θζ.* Cu*m igitur linea δε ſit æqualis lineæ εζ: ſit autem ſicut linea δε ad lineam εθ, ita quadratum δζ ad parallelogrammum ζθ per* 1.6. Ergo *ſicut linea εζ ad lineam εθ, ita quadratum δζ ad parallelogrammum ζθ.* Eſt *autem quadratum δζ, quadratum lineæ εζ, parallelogrammum uerò ζθ. id quod comprehenditur dua-*



bus lineis ι ζ, ι κ. Est ergo sicut linea ι ζ ad lineam ι κ, ita quadratum lineæ ι ζ ad parallelogrammum comprehensum lineis duabus ζ ι, ι κ. Et econuerso sicut parallelogrammũ comprehensum duabus lineis κ ι, ι ζ ad quadratum lineæ ι ζ, ita linea κ ι ad lineam ι ζ.

Vigesimumtertium Theorema.

Quadrati lineæ medialis applicati secundum lineã rationalem, alterum latus est linea rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ secũdum quam applicatur.



Sit linea medialis α, rationalis uerò sit γ β: & quadrato lineæ α parallelogrammũ rectangulum æquale β δ applicetur secundum lineam β γ, cuius alterũ latus sit γ δ. Dico lineam γ δ esse rationalem & longitudine incommensurabilem lineæ β γ. Cum enim linea α sit medialis, potest parallelogrammum contentum ex lineis rationalibus potentia tantum commensurabilibus. possit itaque parallelogrammum rectangulum η ζ: sed ex suppositione potest etiam parallelogrummum β δ. æquale est igitur parallelogrammum β δ parallelogrammo η ζ. Sed & ambo parallelogramma sunt æqualium angulorum, quia sunt rectangula. Aequalium uerò & æquiangulorum parallelogrammorũ latera quæ sunt circa æquales angulos.

gulos reciprocam inter se proportionem habent per 14 sexti. proportionaliter ergo erit sicut linea $\beta\gamma$ *ad lineã* $\iota\kappa$*, ita linea* $\iota\zeta$ *ad lineam* $\gamma\delta$. *Est igitur sicut quadratũ lineæ* $\beta\gamma$ *ad quadratum lineæ* $\iota\kappa$*, ita quadratum lineæ* $\iota\zeta$ *ad quadratum lineæ* $\gamma\delta$*, per 22 sexti. sed quadratũ lineæ* $\beta\gamma$ *est commẽsurabile quadrato lineæ* $\iota\kappa$*: est enim utraque linea rationalis. commẽsurabile ergo erit etiã quadratum lineæ* $\iota\zeta$ *quadrato lineæ* $\gamma\delta$*, per 10 huius. sed quadratum lineæ* $\iota\zeta$ *est rationale. ergo similiter rationale erit quadratum lineæ* $\gamma\delta$*. linea ergo* $\gamma\delta$ *erit rationalis.* Et *quoniam linea* $\iota\zeta$ *est longitudine incommensurabilis lineæ* $\iota\kappa$*. nam illæ sunt potentia tantum inter se cõmensurabiles. Sicut autem linea* $\iota\zeta$ *ad lineã* $\iota\kappa$*, ita quadratum lineæ* $\iota\zeta$ *ad parallelogrammum ex ambabus lineis* $\iota\zeta, \iota\kappa$ *contentum per lemma proximum. incommensurabile est ergo quadratum lineæ* $\iota\zeta$ *parallelogrammo ex lineis* $\iota\zeta, \iota\kappa$ *per secundam partem decimi theorematis huius libri. Sed quadrato lineæ* $\iota\zeta$ *quadratum lineæ* $\gamma\delta$ *est commensurabile: modo enim probatum est utrãque lineam esse rationalem.* Ergo *per 13 huius, quadratum lineæ* $\gamma\delta$ *est incommensurabile parallelogrammo ex lineis* $\iota\zeta, \iota\kappa$. Sed *parallelogrammum ex lineis* $\gamma\delta, \gamma\beta$ *est æquale parallelogrammo ex lineis* $\iota\zeta, \iota\kappa$*, ut modo probatum est.* Ergo *quadratum lineæ* $\gamma\delta$ *est incommensurabile parallelogrãmo ex lineis* $\gamma\delta, \gamma\beta$. *hæc uerò pars breuius concluditur per corollariũ à nobis positũ post 14 theorema. Sed sicut se habet quadratũ lineæ* $\gamma\delta$ *ad parallelogrammum ex lineis* $\delta\gamma, \gamma\beta$*, ita se habet linea* $\delta\gamma$ *ad lineam* $\gamma\beta$ *per lemma proximum:*

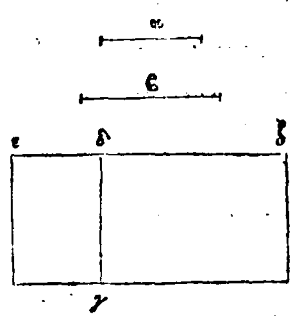
incommensurabilis longitudine est itaque linea δγ lineæ γβ. Rationalis est ergo linea γδ & longitudine incommensurabilis lineæ γβ. quod demonstrandum erat.

Hoc theorema est ἀντίστροφον proxime præcedentis. Vt uerò fieri poßit quod requirit hoc theorema, scilicet applicari quadratum lineæ medialis secundum lineam rationalem, reperienda est tertia linea proportionalis sicut docet 11. *sexti, ita tamen ut linea rationalis sit prima, secunda sit linea medialis quæ potest quadratum applicandum.* Nam *superficies quæ fit ex prima & tertia est æqualis quadrato mediæ per* 17 *sexti.*

Vigesimumquartum Theorema.

Linea recta mediali commẽsurabilis, est ipsa quoque medialis.

Sit linea medialis α, sitq; linea illi commensurabilis β siue longitudine & potentia, siue potentia tãtum, ut recte addidit Cãpanus, & in uetusto exemplari græco legitur. dico lineam β esse medialẽ. Exponatur *linea rationalis γδ, & quadrato lineæ α æquale parallelogrammum rectangulum applicetur secundum lineam γδ, sitq; parallelogrammũ γε, eiúsque alterum latus sit linea εδ.* Rationalis *itaq; erit linea εδ, & incommensurabilis longitudine lineæ γδ, per proximum theorema.* Rursus *quadrato lineæ β æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrãmum*



mum rectangulum γζ, cuius alterum latus sit δζ. Cum igitur commensurabilis sit linea α lineæ β, commẽsurabile quoque erit quadratum lineæ α, quadrato lineæ β. sed quadrato lineæ α æquale est ε γ, quadrato autem lineæ β æquale est γ ζ: commensurabile est ergo parallelogrammum ε γ parallelogrammo γ ζ. Est autem sicut parallelogrammum γ ε ad parallelogrammum γ ζ, ita linea ε δ ad lineam δ ζ per primam sexti. commensurabilis est ergo longitudine linea ε δ lineæ δ ζ per 10 *huius. Sed linea ε δ est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ γ δ. Rationalis est ergo linea δ ζ & incommensurabilis longitudine lineæ δ γ per* 13 *huius.* Ergo *lineæ γ δ, δ ζ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Sed linea quæ potest parallelogrammum rectãgulum comprehensum rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, medialis est per* 22 *huius.* I*gitur medialis est quæ parallelogrammum ex γ δ, δ ζ potest.* Id *verò potest linea β, ergo linea β medialis est.*

Corollarium.

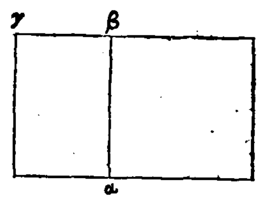
V*nde manifestum est superficiem commẽsurabilem superficiei mediali, medialem esse.* Nam *lineæ quæ possunt tales superficies, sunt potentia commensurabiles, quarum linearum altera, quæ scilicet potest superficiem medialem, medialis est, quare & reliqua medialis erit per hoc theorema* 24. S*ane quemadmodum diximus de lineis rationalibus, ita dicendũ est in lineis medialibus, nempe lineam mediali commensurabilem esse etiã medialem, lineam inquam quæ sit commẽsurabilis mediali siue sit longitudine & potentia commensurabilis, siue* *potentia tantum.in uniuersum enim uerum est lineas longitudine commensurabiles, esse quoque potentia cõmensurabiles. Quod si lineæ mediali fuerit alia commẽsurabilis potentia, siquidem & longitudine cõmensurabilis fuerit, dicuntur illæ lineæ mediales longitudine & potentia commensurabiles. si uerò potentia tantum fuerint inter se commensurabiles, dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles. Sunt autem & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incõmensurabiles mediali, potentia tantum eidem commensurabiles, hæ uerò dicuntur & ipsæ mediales, eò quia commensurabiles sunt potẽtia lineæ mediali, & ea ratione qua sunt mediales, sunt inter se potẽtia commẽsurabiles, sed & inter se ipsæ comparatæ, possunt esse siue longitudine & ideo etiam potentia commensurabiles, siue potẽtia tantum. Et quidem si longitudine, dicũtur & ipsæ mediales longitudine commensurabiles, ut consequenter intelligatur potentia quoque commensurabiles esse. Quòd si potentia tantum sint inter se commensurabiles, nihilominus tamen & ipsæ dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles. Hoc loco addit exemplar græcũ, quod autem lineæ mediales sint cõmensurabiles, ita demonstrari potest. Quoniã mediales mediali cuidã sunt commensurabiles: quæ uerò sunt eidem commensurabilia, inter se quoque sunt commẽsurabilia. Ergo mediales sunt inter se commensurabiles. hoc totum nõ est Euclidis, neque ullius omnino geometræ. nam quum dicitur, quoniam mediales mediali cuidam sunt commensurabiles, petitur principium. Præterea falsum est simpliciter*

pliciter lineas mediales esse commensurabiles, quod patebit ex theoremate 35 huius libri, ubi propositum est reperire lineas duas potentia incommensurabiles cõficientes compositum ex quadratis ipsarũ mediale, & id parallelogrammum quod fit ex eisdẽ mediale, ipsum etiã incommensurabile composito ex quadratis illarum. Cũ ergo reperiantur duo medialia incõmensurabilia, certum est lineas quæ illa possunt esse mediales potentia incommensurabiles, quas necesse est esse etiam longitudine incommensurabiles.

Vigesimumquintum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum contentũ ex lineis medialibus longitudine commensurabilibus mediale est.

Ex lineis enim medialibus longitudine commẽsurabilibus $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ contineatur parallelogrammum rectãgulũ $\alpha\gamma$, dico illud parallelogrãmum esse mediale. Describatur enim ex linea $\alpha\beta$ quadratum



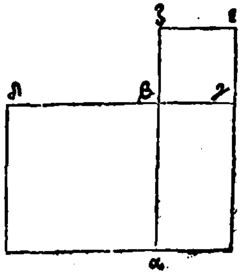
$\alpha\delta$: mediale est ergo quadratum illud $\alpha\delta$. Et quoniã linea $\alpha\beta$ est longitudine cõmẽsurabilis lineæ $\beta\gamma$, æqualisque est linea $\alpha\beta$ lineæ $\beta\delta$, commensurabilis est ergo longitudine linea $\beta\delta$, lineæ $\beta\gamma$. sed quemadmodum se habet linea $\delta\beta$ ad lineam $\beta\gamma$, ita quadratum $\delta\alpha$ ad parallelogrammum $\alpha\gamma$ per primam sexti. Ergo per decimum theorema huius libri quadratum $\delta\alpha$ est commensurabile parallelogrammo $\alpha\gamma$. sed quadratũ $\delta\alpha$ est me-

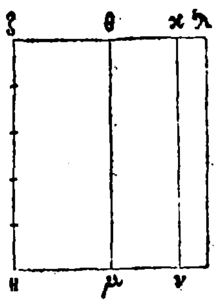
diale quia describitur à linea mediali. Ergo *per corollarium proximi theorematis parallelogrammũ* α γ *erit etiam mediale. quod demonstrandum erat.*

Vigesimumsextum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum comprehensum duabus lineis medialibus potentia tantum commensurabilibus, uel rationale est, uel mediale.

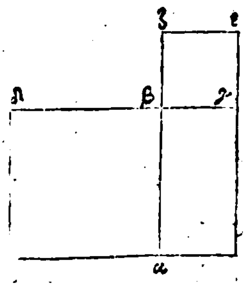
Proposita linea quæ sit medialis, alia reperitur potẽtia tantum commensurabilis eidem per 11 *huius, sicut de rationalibus ibidem dictum est.* Ex *duabus itaque medialibus potentia tantum cõmensurabilibus* α β, β γ, *parallelogrammum rectangulum comprehendatur quod sit* α γ. Dico *illud parallelogrammum esse aut rationale aut mediale.* De*scribãtur enim quadrata linearũ* α β, β γ *quæ sint* α δ, β ε, *mediale est ergo utrũque per* 22 *huius.* Pro*ponatur linea rationalis* κ ζ *secundũ quam applicetur æquale quadrato* α δ *parallelogrammum rectangulum* κ θ, *cuius alterũ latus sit* ζ θ. (*hoc autẽ quomodo fiat diximus in theoromate* 23.) *parallelogrammo uerò* α γ *æquale secundum lineam* θ μ, *æqualem lineæ* ζ κ *applicetur parallelogrammum rectangulum* μ λ, *cuius alterũ latus sit* θ λ. (*ut autem id fiat, sumẽda est quarta li-*



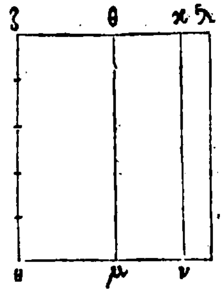


nea

nea proportionalis ad lineas θ μ, α ϐ, ϐ γ per 12 sexti, quæ quarta sit θ κ: ergo per 16 sexti parallelogrammum ex θ μ, θ κ erit æquale parallelogrammo ex lineis α ϐ, ϐ γ.) præterea quadrato ϐ ι æquale similiter secundum lineã κ ν applicetur parallelogrammum rectangulum ν λ, cuius alterum latus sit κ λ. In *eadem ergo recta linea sunt lineæ ζ θ, θ κ, κ λ.* (Nam *illa parallelogramma sic applicata secũdum lineas ζ η, θ μ, κ ν sunt rectangula, & anguli ζ θ μ, κ θ μ æquales duobus rectis, quia sunt ipsi recti.* Itaque *lineæ ζ θ, θ κ sunt in eadem linea recta per 14 primi. idem dices de angulis θ κ ν, λ κ ν.)* Cum *igitur mediale sit utrũque quadratum α δ, ϐ ι parallelogramma illis æqualia η θ, ν λ similiter medialia erunt.* Illa *autem applicantur secundum lineam rationalẽ, nempe ζ η: rationalis est ergo utraque linea ζ θ, κ λ & incommensurabilis longitudine lineæ ζ η per 23 huius.* Sed *quia lineæ α ϐ, ϐ γ positæ sunt potentia commensurabiles: ergo quadratum α δ est commensurabile quadrato ϐ ι. similiter igitur illis æqualia parallelogramma η θ, ν λ erunt inter se commensurabilia.* Sed *sicut se habet parallelogrammum η θ ad parallelogrammum ν λ, ita se habet linea ζ θ, ad lineam κ λ per primum sexti.* Ergo *per decimum huius linea ζ θ erit commensurabilis longitudine lineæ κ λ.* Lineæ *ergo ζ θ, κ λ sunt rationales, longitudine inter se commensurabiles. inter se dico longitudine cõmẽsurabiles.* Nam *ipsi lineæ ζ η propter quam sunt rationales, sunt longitudine incommensurabiles, ut modo probatum est.* Ergo *parallelogrammum contentum ex illis lineis ζ θ, κ λ est rationale per 20 huius. & quoniam*



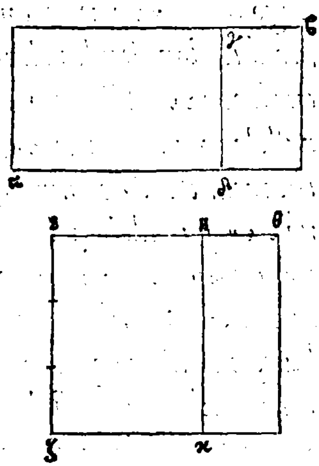
linea β δ est æqualis lineæ β α, linea uerò ζ β æqualis lineæ β γ: est igitur sicut linea β δ ad lineam β γ, ita linea α ε ad lineã β ζ. Sed sicut linea δ β ad lineam β γ, ita quadratũ δ α ad parallelogrammum α γ per primum sexti. sicut autem linea α, ad lineam β ζ, ita parallelogrammum α γ ad quadratũ ε ι. Est igitur sicut quadratũ α δ ad parallelogrammũ α γ, ita parallelogrãmũ α γ ad quadratũ β ι. quadrato autẽ α δ æquale est parallelogrammũ η θ. parallelogrammo autẽ α γ æquale est item parallelogrãmũ μ κ. quadrato uerò β ι æquale est parallelogrãmũ λ. Est igitur sicut parallelogrãmũ η θ ad parallelogrãmũ μ κ, ita parallelogrãmũ μ κ ad parallelogrãmũ ν λ. Est ergo per primũ sexti sicut linea ζ θ ad lineã θ κ, ita linea θ κ ad lineã κ λ. Ergo parallelogrammũ contentum ex lineis ζ θ, κ λ est æquale quadrato lineæ θ κ per 17 sexti. sed parallelogrãmũ ex lineis ζ θ, κ λ est rationale, ut modo probatũ est, rationale est ergo quadratũ lineæ θ κ. ergo linea θ κ erit rationalis. Et quidẽ si ipsa linea inquã θ κ fuerit longitudine cõmensurabilis lineæ θ μ, id est lineæ ζ η ipsi æquali, rationale tũc erit parallelogrãmũ θ ν per 20 huius. Quod si fuerit longitudine incõmensurabilis ipsi lineæ ζ η, tunc lineæ θ μ, θ κ sunt rationales potentia tantũ cõmensurabiles: sic igitur parallelogrammũ θ ν erit mediale. Ergo paral-



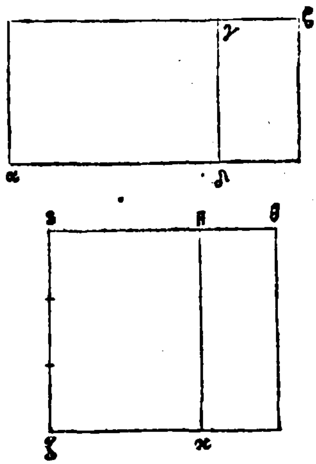
parallelogrammũ θ ι erit uel mediale uel rationale: sed parallelogrammũ θ ι est æquale parallelogrammo α γ. Ergo parallelogrammum α γ erit aut mediale aut rationale. Quomodo autem reperiantur lineæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale parallelogrammum continentes, item aliæ mediale continentes, docebunt theoremata 28. & 29.

Vigesimumseptimum Theorema.

Mediale non est maius quàm mediale superficie rationali.



Nam si fieri potest mediale α β sit maius quàm mediale α γ superficie rationali quæ sit δ β, & proponatur linea rationalis ε ζ, & mediali α β æquale secundum lineam ε ζ applicetur parallelogrammum ζ θ, cuius alterum latus sit ε θ. ipsi autem mediali α γ æquale itẽ auferatur parallelogrammũ ζ κ. Reliquum ergo β δ reliquo κ θ æquale est. sed per positionem β δ est rationale, ergo rationale etiam erit κ θ. Cum igitur mediale sit utrunque α β, α γ, sitq; α β æquale ipsi ζ θ: sit etiã α γ æquale ipsi ζ κ, mediale est ergo utrunque etiam ζ θ, ζ κ. & secundum lineam rationalẽ ε ζ applicãtur. rationalis est ergo utraq; linea θ ε, ε κ & incommensurabilis longitudine lineæ ε ζ per 23 huius. Et quoniam rationale est δ β, ipsiq; æquale κ θ: rationale etiam erit κ θ, & secundum lineam ra-



tionalem ι ζ uel ei æqualem κ κ applicatur: rationalis est ergo linea κ θ, & commensurabilis longitudine lineæ κ κ per 21 huius. sed linea κ κ est æqualis lineæ ι ζ: ergo linea κ θ est rationalis, & cõmensurabilis lõgitudine lineæ ι ζ. sed & linea ι κ rationalis est & incommensurabilis longitudine lineæ ι ζ. Ergo linea κ ι erit incommensurabilis longitudine lineæ κ θ per 14 huius. Est autẽ sicut linea ι κ ad lineam κ θ, ita quadratũ lineæ ι κ ad parallelogrammum ex ι κ, κ θ per lemma suprapositũ post theorema 22. Incommensurabile est ergo quadratum lineæ ι κ parallelogrãmo ex lineis ι κ, κ θ per 10 huius. sed quadrato lineæ ι κ commensurabilia sunt quadrata linearũ ι κ, κ θ. ambo enim sunt rationalia, ut modo probatum est. Ergo quadrata linearum ι κ, κ θ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex lineis ι κ, κ θ per 14 huius. parallelogrammo uerò ex lineis ι κ, κ θ commensurabile est id quod fit bis ex lineis ι κ, κ θ (habent enim proportionem sicut numerus ad numerum, nempe sicut unitas ad binariũ, aut sicut binarius ad quaternariũ: itaque per 6 huius sunt commẽsurabilia) Ergo per eandem 14 huius, id quod fit bis ex lineis ι κ, κ θ est incommẽsurabile quadratis linearum ι κ, κ θ. hoc breuius concluditur per corollarium 14 theorematis. Sed quadrata linearum ι κ, κ θ & id quod fit bis ex lineis ι κ, κ θ sunt

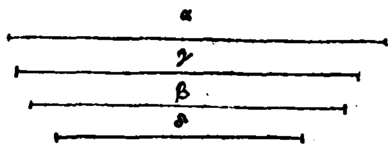
æqualia

æqualia quadrato totius lineæ ι θ per 4.secundi.Ergo quadratum lineæ ι θ est incommensurabile quadratis linearum ι κ, κ θ per 17 huius.sed quadrata linearum ι κ, κ θ sunt rationalia:ergo quadratum lineæ ι θ est irrationale.irrationalis est ergo linea ι θ.Sed modo demõstratũ est eã esse rationalẽ,quod fieri nullo modo potest. non igitur mediale maius est mediali superficie rationali.

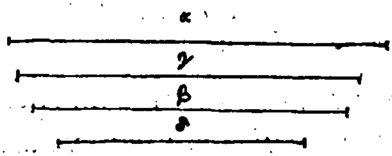
Vigesimumoctauum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmensurabiles rationale comprehendentes.

Proponantur duæ rationales lineæ potentia tantum commensurabiles α,ϐ: sumatúrq; media proportionalis inter eas linea γ,sitq; sicut linea α ad lineã ϐ, ita



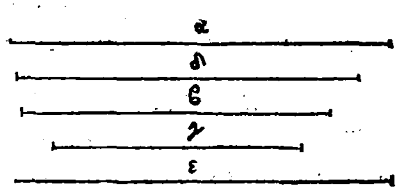
linea γ ad lineam δ per 13 sexti. Cũ igitur lineæ α,ϐ sint rationales potentia tantum commensurabiles,parallelogrammum comprehensum ex lineis α,ϐ,hoc est quadratum lineæ γ (nam quadratũ lineæ γ est æquale parallelogrãmo ex lineis α,ϐ per 17 sexti) est mediale:medialis est ergo linea γ.Et quoniam est sicut linea α ad lineã ϐ, ita linea γ ad lineam δ. erit sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ϐ,ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ per 22.6.sed quadrata linearum α, ϐ sunt commensurabilia,quia lineæ α,ϐ positæ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles.ergo & quadrata linearum γ,δ sunt etiam commensurabilia per



10 *huius. ergo & lineæ γ, δ sunt etiã potentia commensurabiles per diffinitionẽ. Est autẽ linea γ medialis.* Medialis ergo est etiam linea δ per 24 huius. Ergo lineæ γ, δ sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico præterea eas continere parallelogrammũ rationale. Cum enim sit sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ. permutata ergo proportione erit sicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ. sed sicut est linea α ad lineam γ, ita linea γ ad lineam β. ergo sicut linea γ ad lineã β, ita linea β ad lineam δ. ergo parallelogrammum ex lineis γ, δ est æquale quadrato lineæ β: sed quadratum lineæ β est rationale, quia linea β posita est rationalis. Rationale est ergo parallelogrammum ex lineis γ, δ. repertæ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, quod faciendum erat.

Vigesimumnonum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmensurabiles mediale comprehendentes.



Proponãtur tres rationales potentia tantum cõmensurabiles α, β, γ, sumaturq; inter lineas α, β media proportionalis δ per 13.6. fiatq; sicut li-

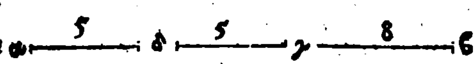
nea

nea β ad lineam γ, ita linea δ ad lineā ε per 12.6. Cum igitur lineæ α, β sint rationales potentia tantum cōmensurabiles, ergo parallelogrammum ex α, β, hoc est quadratum lineæ δ est mediale, medialis est ergo linea δ. Et *cum lineæ β, γ sint potentia tantum commensurabiles, sitq́; sicut β ad γ, ita δ ad ε. ergo δ, ε sunt potentia tantū commensurabiles. sed linea δ est medialis. ergo linea ε, erit etiam medialis. ergo lineæ δ, ε sunt mediales potentia tantum commensurabiles.* Dico *præterea eas continere mediale.* Cum *enim sit sicut linea β ad lineā γ, ita δ ad ε: permutatim ergo sicut β ad δ, ita γ ad ε. sed sicut β ad δ, ita δ ad α per cōuersam siue contrariam proportionem, quæ probatur per corollarium quarti theorematis libri quinti.* Itaque *sicut δ ad α, ita γ ad ε. itaque parallelogrammum ex α, γ est æquale parallelogrammo ex δ, ε per 16.6. Sed parallelogrammū ex α γ per 22. huius mediale est, ergo mediale quoque erit parallelogrammum ex δ, ε.* Repert*æ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles mediale comprehendentes, quod demonstrandum erat.*

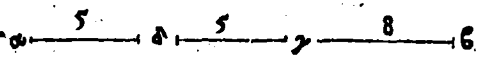
Lemma.

R*eperire duos numeros quadratos huiusmodi, ut numerus qui efficitur ex ipsorū additione sit etiā quadratus.*

P*roponātur duo numeri α β, ϛ γ similes superficiales, qui quomodo reperiātur, dictum est in theoremate 9. sint*



autem ambo pares uel ambo impares, sit etiam maior α β. Et *quia siue à numero pari par auferatur, siue ab* impari impar residuus est par, per



24 & 26.9. Dempto itaque βγ de αβ residuus αγ par erit. Secetur numerus αγ in duas partes æquales in puncto δ, numerus ergo productus ex multiplicatione numerorũ αβ, βγ cum numero quadrato producto ex multiplicatione γδ in seipsum, est æqualis quadrato producto ex multiplicatione βδ in se ipsum, per ea quæ demõstrat Campanus propositione 16. libri 9. quam demonstrationem sumpsit ex 6 theoremate libri secundi. Est autẽ numerus productus ex multiplicatione αβ, βγ, quadratus, per 1.9. Reperti sunt ergo duo numeri quadrati, nẽpe alter productus ex αβ, βγ, alter autem ex multiplicatione γδ in seipsum, qui compositi per additionẽ efficiunt numerũ quadratum, nempe productum ex multiplicatione βδ in seipsum.

Corollarium.

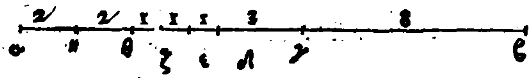
Ex hoc manifestum etiã illud est repertos esse duos numeros quadratos, nempe alterum productum ex multiplicatione βδ in seipsum, item alterum ex multiplicatione γδ in seipsum tales, ut numerus quo excedit alter alterum, ille inquam numerus qui producitur ex multiplicatione αβ, βγ: sit etiam quadratus quando uidelicet numeri αβ, βγ fuerint similes superficiales. Quòd si nõ fuerint similes superficiales, reperti sunt duo quadrati, nẽpe alter productus ex radice βδ, & alter productus ex radice γδ, quorum excessus, id est numerus quo maior excedit minorem, uidelicet productus ex αβ, βγ non est quadratus.

Lemma.

Lemma.

Reperire duos quadratos numeros huiusmodi ut compositus ex ipsorum additione ne sit quadratus.

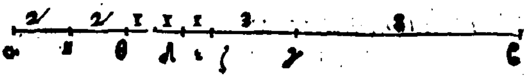
Sit numerus productus ex multiplicatione numerorum



α γ, β γ, ut diximus in proximo lemmate, quadratus: sitq; numerus γ α par, diuidatúrque idem numerus γ α in duas partes æquales in puncto δ. Manifestum est numerum quadratum qui fit ex multiplicatione α β, ε γ, cum quadrato radicis γ δ, æqualem esse quadrato radicis β δ, per ea quæ dicta sunt in proximo lẽmate. auferatur unitas ex δ γ, quæ unitas sit δ ι. Ergo quadratus productus ex multiplicatione α β, ε γ, cũ quadrato radicis γ ι, minor est quadrato radicis β δ. Dico itaque numerũ compositũ ex quadrato producto per multiplicationẽ α ε, β γ, & quadrato radicis γ ι, non esse quadratũ. Quòd si dicas esse quadratũ, simul oportet eũ esse maiorẽ aut æqualẽ aut minorẽ quadrato radicis ε ι. Primũ non potest eo maior esse. Modo enim probatũ est numerũ productũ ex α ε, β γ, unà cũ quadrato radicis γ ι, esse minorem quadrato radicis ε δ: sed inter quadratũ radicis β δ & quadratum radicis ε ι, nullus medius quadratus interuenit. Nam radix β δ excedit radicem β ι, sola unitate quæ unitas in numeros diuidi nullo modo potest. Aut si numerus productus ex α ε, β γ, unà cũ quadrato radicis γ ι esset maior quadrato radicis β ι, *oporteret eundem numerum productum ex α ϛ, β γ unà cum quadrato radicis γ ι, esse æqualẽ quadrato radicis β δ, cuius modo probatũ est cõtrarium.* Sit ergo, *siquidẽ illud fieri posse dicis, numerus productus ex α β, ϛ γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ι, sitq; numerus κ α duplus ad unitatẽ δ ι, id est binarius.* Cum *igitur totus numerus α γ totius numeri γ δ sit duplus ex suppositione, & numerus α κ sit duplus ad unitatẽ δ ι: ergo residuus numerus γ κ ad residuũ numerũ ι γ, duplus erit per* 5.5. *siue per* 7.7. & 11. *eiusdẽ* 7. Ergo *in duas partes æquales diuisus est numerus κ γ, in puncto ι.* Numerus *itaq; productus ex κ β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι est æqualis quadrato radicis ι β. sed per positionem tuam numerus productus ex α β, β γ unà cũ quadrato γ ι, est æqualis eidẽ quadrato radicis ϛ ι.* Ergo *numerus productus ex κ β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι est æqualis numero producto ex α β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι, quia quæ uni & eidẽ sunt æqualia, inter se quoq; sunt æqualia. sed si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanẽt sunt æqualia.* Ergo *numerus productus ex κ β, ϛ γ, est æqualis numero producto ex α β, β γ.* Ergo *per* 17. *uel* 18.7. *numerus κ β est æqualis numero α β minor maiori, quod est impossibile.* Non *igitur erit numerus productus ex α β, β γ cũ quadrato radicis γ ι, æqualis quadrato radicis ϛ ι.* Dico *similiter eũdem numerum productũ ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι non esse minorem quadrato radicis β ι.* Si *enim fieri posse dicas, erit ergo æqualis cuipiam numero quadrato minori quàm est quadratus radicis β ι. sit*

ergo

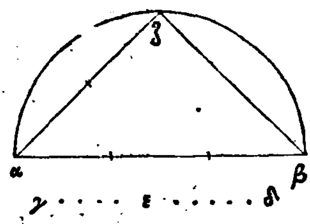
ergo numerus ille productus ex α β, β γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ζ, sumatúrque numerus θ α duplus ad numerum δ ζ. efficitur similiter ut numerus θ γ sit duplus ad numerũ ζ γ, ita ut etiam θ γ secetur in partes duas æquales in puncto ζ: ideóque simul numerus productus ex θ β, β γ cum quadrato radicis ζ γ erit æqualis quadrato radicis β ζ.



Sed per positionẽ tuã numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι, erat æqualis quadrato radicis β ζ. efficitur ergo ut numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι sit æqualis numero producto ex θ ς, β γ, unà cum quadrato radicis γ ζ, quod est impossibile. Nam *si esset æqualis, cum quadratus radicis γ ζ sit minor quadrato radicis ς ι, oporteret numerũ productum ex θ ς, ς γ esse maiorẽ numero producto ex α β, β γ, itaque simul necesse esset numerum θ ς esse maiorem numero α ς, cum tamen sit eo minor.* Non *erit ergo numerus productus ex α ς, ς γ cum quadrato radicis γ ι æqualis numero minori quàm sit quadratus radicis ς ι. Sed demonstratum est neque esse posse eidem æqualem, neq; maiorem: igitur numerus ex α ς, ς γ unà cũ quadrato radicis γ ι, compositus quadratus esse nullo modo potest.*

Trigesimum Theorema.

Reperire duas rationales potentia tantũ commenſurabiles huiuſmodi, ut maior ex illis poſsit pluſquam minor quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine.



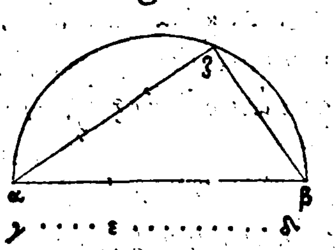
Eſto propoſita linea rationalis α β, & duo numeri quadrati γ δ, δ ε, huiuſmodi, ut exceſſus illorũ γ ε ne ſit quadratus numerus per corollarium prioris lemmatis ex duobus modo dictis: deſcribatúrque ſuper linea α β, ſemicirculus α ζ β, fiatq; ſicut numerus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum alterius lineæ quæ ſit α ζ per lemma poſitum poſt 6. theorema huius libri, & ducatur linea ζ β. Cum igitur ſit ſicut quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ, ita numerus γ δ ad numerum γ ε, ergo commenſurabile eſt quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ per 6 huius. ſed quadratum lineæ α β eſt rationale. ergo etiam rationale erit quadratum lineæ α ζ. Rationalis *eſt ergo linea α ζ.* Cúmq; *numerus δ γ, ad numerum γ ε proportionem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum per 24. 8. à deſtructione conſequentis: neque ſimiliter quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ergo *linea α β erit incommenſurabilis longitudine lineæ α ζ, per 9 huius. ergo lineæ α β, α ζ, ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles.* Cúmque *ſit ſicut numeus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratũ lineæ α ζ. per euerſam*

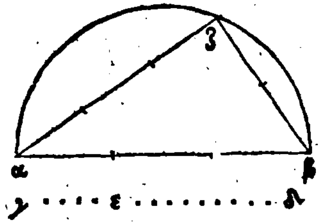
ſam ergo porportionem quæ dicitur ἀναστροφὴ λόγου, *demonſtraturque per corollarium 19 theorematis libri 5. ſicut numerus γ δ ad numerum δ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ β ζ, qui eſt exceſſus quadrati lineæ α ϛ, ſupra quadratum lineæ α ζ per lemma poſitum poſt 14 huius libri. ſed numerus γ δ ad numerum δ ε habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Ergo *quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ ϛ ζ proportionem habet quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea α ϛ eſt commenſurabilis longitudine lineæ ϛ ζ, per 9 huius.* Eſt *autem quadratum lineæ α ϛ æquale duobus quadratis linearum α ζ, ζ ϛ.* Ergo *linea α β plus poteſt quàm linea α ζ quadrato lineæ ϛ ζ ſibi commenſurabilis longitudine.* Repertæ *ſunt ergo duæ rationales potentia tantum cõmenſurabiles huiuſmodi &c. quod demonſtrandum erat.*

Lemma.

Reperire duas rationales potentia tantum commenſurabiles huiuſmodi, ut maior plus poßit quàm minor quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine.

Proponatur *linea rationalis α ϛ, & numeri quadrati duo γ ε, ε δ, tales ut compoſitus ex ipſis nempe γ δ, ne ſit quadratus per alterũ lemma poſitum poſt 29 theorema huius libri: deſcribaturque ſuper linea α ϛ ſemicirculus α ζ ϛ, fiatq; ſicut numerus δ γ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ: duca-*





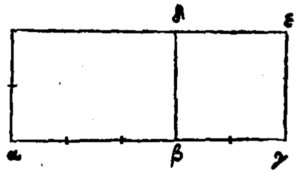
tamque linea à puncto ζ in punctum ς quæ sit ζβ, quémadmodũ in præcedẽti theoremate. similiter hîc demonstrabimus lineas ας, αζ, esse rationales potentia tantum commensurabiles. Et cum sit sicut numerus δγ ad numerum γε, ita quadratum lineæ ας ad quadratum lineæ αζ. Per euersam ergo proportionem quemadmodũ numerus δγ ad numerum δε, ita quadratũ lineæ αβ ad quadratum lineæ ζς, ut diximus in præcedẽti theoremate. sed numerus γδ ad numerum δε proportionẽ non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum per corollarium illatum à destructione consequentis 24 lib. 8. Neque ergo quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ βζ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo per 9 huius linea ας erit incommensurabilis longitudine lineæ ζς. Potest autem linea ας plus quàm linea αζ quadrato lineæ ςζ sibi incommensurabilis longitudine. Ergo lineæ αβ, αζ sunt duæ rationales potentia tãtum cõmensurabiles, & potest linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ ζβ sibi incommensurabilis longitudine.

Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ habentes inter se aliquam proportionem, erit ut linea recta ad lineam rectam, ita parallelogrammum contentum ex ambabus ad quadratum lineæ minoris ex illis duabus. Hoc lemma nihil amplius affert quàm primum theorema libri sexti, itaque non reperitur

reperitur in quibusdam exemplaribus.

Sint duæ rectæ lineæ α ϐ, ϐ γ in aliqua proportione. Dico sicut linea α ϐ ad lineam ϐ γ, ita esse parallelogrammum ex α ϐ, ϐ γ ad quadratū ϐ γ. Describatur enim quadratū lineæ ϐ γ, quod sit ϐ δ ε γ, compleaturq; parallelogrammum α δ. manifestum

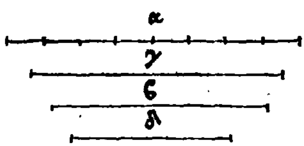


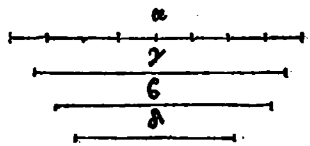
est sicut linea α ϐ ad lineam ϐ γ, ita parallelogrammū α δ ad parallelogrammum uel quadratum ϐ ε per primam sexti. Est autem parallelogrammum α δ contentū ex lineis α ϐ, ϐ γ. est enim æqualis linea ϐ γ lineæ ϐ δ. parallelogrammum autem ϐ ε est quadratum lineæ ϐ γ. Ergo sicut linea α ϐ ad lineam ϐ γ, ita parallelogrammum ex α ϐ, ϐ γ ad quadratum lineæ ϐ γ. quod demonstrandum erat.

Trigesimumprimum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potentia tantum cōmensurabiles rationalem superficiem continentes, tales inquam, ut maior possit plusquā minor quadrato lineę sibi cōmensurabilis longitudine.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α, ϐ, tales ut maior α posit plus quàm minor ϐ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 30 theorema, sitq; parallelogrammo ex α, ϐ æquale quadratum lineæ γ (quod sit reperta linea me-





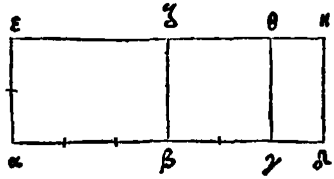
dia proportionali, nempe linea γ inter α, ϐ, ut traditur libro sexto). Est autem mediale parallelogrã mũ ex α, ϐ per 22 huius libri. ergo similiter mediale erit quadratũ lineæ γ. linea ergo γ erit medialis. Quadrato autẽ lineæ ϐ æquale sit parallelogrammũ ex γ, δ, reperta tertia proportionali, nẽpe linea δ, ad duas lineas γ, ϐ, ut traditur libro 6. Est autem quadratum lineæ ϐ rationale. est ergo & parallelogrammum ex γ, δ rationale. Et quoniã sicut linea α ad lineam ϐ, ita est parallelogrammum ex α, ϐ ad quadratum lineæ ϐ per lemma modo positum. Sed parallelogrammo ex α, ϐ, æquale est quadratum lineæ γ. quadrato autẽ lineæ ϐ æquale est parallelogrammum ex lineis γ, δ, ut modo probatũ est. Est ergo sicut linea α ad lineam ϐ, ita quadratum lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ. Sed sicut est quadratũ lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ, ita linea γ ad lineam δ per lemma positum ante 23 huius libri. Ergo sicut linea α ad lineam ϐ, ita linea γ ad lineã δ. Sed linea α est posita commensurabilis potentia tantum lineæ ϐ. Ergo etiam linea γ est commensurabilis potentia tantũ lineæ δ per 10 huius. Sed linea γ est medialis, ergo etiam linea δ erit medialis per 24 huius. Et quoniam est sicut linea α ad lineam ϐ, ita linea γ ad lineam δ. lineáque α potest plusquam linea ϐ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per suppositionem. Ergo etiam linea γ poterit plusquam linea δ quadrato lineæ sibi cõmẽsurabilis longitudine per 15 huius. Repertæ sunt ergo

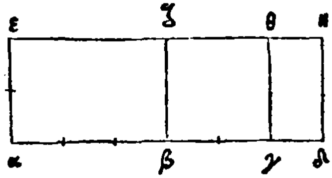
go

go duæ mediales potentia tantum commensurabiles γ, δ, rationalem superficiem continentes, poteſtque linea γ plusquam linea δ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Similiter etiam reperiri poſſunt duæ mediales potentia tantum commenſurabiles rationale continentes, tales ut maior poßit plusquã minor quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, quando uidelicet linea α poterit plusquam linea β quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. quod facere docuit prius lemma poſitũ poſt 30 *theorema huius libri.* Manente *eadem conſtructione poteſt facilius illa pars huius theorematis demonſtrari ab illis uerbis.* Et *quoniam ſicut linea α uſq; ad ea uerba,* Sed *linea α eſt poſita commenſurabilis.* Nam *lineæ γ, β, δ ſunt continuæ proportionales per ſecũdam partem* 17. 6. Sed *etiam α, γ, β ſunt tres continuæ proportionales.* Ergo *per* II. 5. *erit ſicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ.* Ergo *permutata proportione ſicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ &c.*

Lemma.

Si *ſint tres lineæ rectæ habẽtes proportionem aliquam inter ſe, erit ſicut prima ad tertiam, ita parallelogrammũ ex prima & media ad parallelogrammum ex media & tertia.* Sint *tres lineæ rectæ in aliqua proportione αβ, βγ, γδ.* Dico *ſicut linea αβ ad lineam γδ, ita eſſe parallelogrammum ex αβ, βγ ad parallelogrammum ex βγ, γδ.* Erigatur *enim ex puncto α ſupra lineam αβ perpendicularis linea αε,*



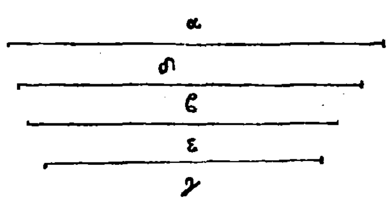


sitq; illa α ι æqualis lineæ β γ, & à pũcto ι lineæ α δ ducatur parallela linea ι κ, & à singulis punctis β, γ, δ, lineæ α ι, parallelæ lineæ ducantur β ζ, γ θ, δ κ. Cúmque sit sicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum α ζ ad parallelogrammum β θ, per primam sexti. sicut autem linea β γ ad lineã γ δ, ita parallelogrammum β θ ad parallelogrammum γ κ. Per æquam itaque proportionem erit sicut linea α β ad lineam γ δ, ita parallelogrammum α ζ, ad parallelogrammum γ κ. Est autem parallelogrammũ α ζ ex lineis α β, β γ. posita est enim æqualis α ι lineæ β γ, estq; parallelogrammum γ κ ex lineis β γ, γ δ. Nam β γ est æqualis lineæ γ θ, quia γ θ est æqualis lineæ α ι per 34.1. Ergo si sint tres lineæ rectæ &c. quod demonstrandum erat.

Trigesimumsecundum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potẽtia tantum cõmensurabiles medialem superficiem continentes, huiusmodi ut maior plus posſit quàm minor quadrato lineæ sibi cõmensurabilis longitudine.

Proponantur tres rationales α, β, γ, potentia tantum commẽsurabiles, tales ut linea α plus posſit quàm linea γ quadrato lineæ sibi commẽsurabilis longitudine. Et parallelogrãmo ex α, β sit æqua-

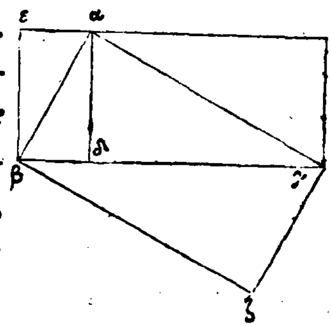


le quadratum lineæ δ. Parallelogrammum autem ex α,β est mediale, mediale ergo erit, & quadratum lineæ δ. ergo linea δ erit medialis. parallelogrammo uerò ex β,γ sit æquale parallelogrammum ex δ,ι (quod fit reperta quarta proportionali ad lineas δ,β,γ quæ sit linea ι.) Cum itaque sit sicut parallelogrammum ex α,β ad parallelogrammum ex β,γ, ita linea α ad lineā γ per lemma proximū. Sed parallelogrāmo ex α,β est æquale quadratum lineæ δ: parallelogrammo uerò ex β,γ est æquale parallelogrammum ex δ,ι. Est ergo sicut linea α ad lineam γ, ita quadratū lineæ δ, ad parallelogrammum ex δ,ι. Sed sicut quadratum lineæ δ ad parallelogrammū ex δ,ι, ita linea δ ad lineam ι per lemma positum post 22 theorema. Ergo sicut linea α ad lineam γ, ita linea δ ad lineam ι. Sed linea α est commensurabilis potentia tantum lineæ γ. Ergo linea δ erit commensurabilis potentia tantū lineæ ι. Sed linea δ est medialis. ergo linea ι erit etiā medialis per 24 huius. Cūq; sit sicut linea α ad lineā γ, ita linea δ ad lineam ι. linea autem α possit plus quàm linea γ quadrato lineæ sibi cō mensurabilis longitudine. Ergo linea δ poterit plusquā linea ι quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15 huius. Dico præterea parallelogrammum ex δ,ι esse mediale. Nam est æquale parallelogrammo ex β,γ quod est mediale per 22 huius. Mediale est ergo similiter parallelogrammum ex δ,ι, Repertæ sunt ergo duæ mediales potentia tantum commensurabiles, nempe δ,ι &c. quod fecisse oportuit. Rursus eadem ratione reperientur duæ mediales potentia tantum commensurabi-

les mediale continentes, huiusmodi, ut maior plus possit quàm minor quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, quandocunque linea α plus poterit quàm linea γ quadrato lineæ sibi incõmẽsurabilis longitudine.

Lemma.

Sit triangulum rectangulum ϐ α γ, habens rectum angulũ α, ducatúrque perpendicularis α δ. dico primò parallelogrammum ex γ β, β δ esse æquale quadrato lineæ β α. dico secundò parallelogrammum ex β γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ γ α. dico tertiò parallelogrammũ ex β δ, δ γ esse æquale quadrato lineæ δ α. dico quartò parallelogrammum ex β γ, α δ esse

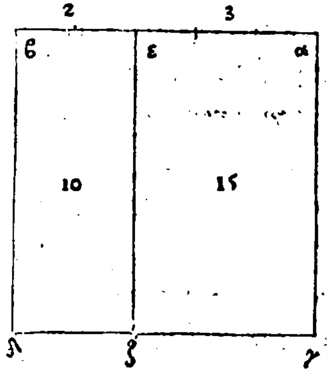


æquale parallelogrammo ex ϐ α, α γ. Quod ad primum attinet, parallelogrãmũ ex γ β, ϐ δ esse æquale quadrato lineæ ϐ α, ita demonstratur. Cũ ab angulo recto triãguli rectanguli ad basim perpẽdicularis ducta sit linea α δ. Ergo triangula α β δ, α δ γ sunt similia toti triangulo α β γ, & ipsa inter se per 8.6. *Et cum triangulũ α β γ sit simile triangulo α β δ. sunt igitur ambo triãgula æqualium angulorum per definitionem similium figurarum.* Ergo *per* 4.6. *sicut linea γ β ad lineã β α, ita linea β α ad lineam β δ.* Ergo *parallelogrammum ex γ β, β δ erit æquale quadrato lineæ α ϐ per* 17.6. *Quod ad secũdum, parallelogrammũ ex β γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ α γ, eadem ratione demonstratur.* Nam *triangulum*

gulum α β γ est simile triangulo α δ γ. Est igitur sicut linea β γ ad lineam α γ, ita linea α γ ad lineam δ γ. Ergo *parallelogrammum ex β γ, γ δ est æquale quadrato lineæ α γ. Quod ad tertium, parallelogrammum ex β δ, δ γ esse æquale quadrato lineæ δ α, ita demonstratur. Cum à recto angulo trianguli rectanguli ad basim ducta sit perpẽdicularis, illa perpẽdicularis est media proportionalis inter sectiones basis per corollariũ 8. theorematis libri 6. Est igitur sicut linea β δ ad lineã α δ, ita α δ ad δ γ.* Ergo *parallelogrammũ ex β δ, δ γ est æquale quadrato lineæ δ α. Quod ad quartum, parallelogrammum ex β γ, α δ esse æquale parallelogrammo ex β α, α γ, ita demonstratur. Cum enim, sicut modo dictũ est, triãgulum α β γ sit simile triangulo α β δ, & ideo æqualium angulorũ. Est igitur sicut linea β γ ad lineam γ α, ita linea β α ad lineam α δ per 4.6.* Ergo *per 16.6. parallelogrammum ex β γ, α δ esse æquale parallelogrammo ex β α, α γ.* Dico *præterea si compleatur parallelogrammũ rectangulum ex β γ, α δ quod sit ε γ, compleaturq́; parallelogrammũ ex β α, α γ quod sit α ζ. Alia ratione demonstrabitur, parallelogrammum ε γ esse æquale parallelogrammo α ζ.* Nam *utrunque ipsorum est duplum trianguli α γ β, per 41.1.* Et *quæ unius & eiusdem sunt dupla, inter se sunt æqualia. ergo &c.*

Lemma.

Si linea recta scindatur in partes duas inæquales, erit ut maior portio ad minorem, ita parallelogrammum ex tota & maiore portione ad parallelogrammum ex tota & minore. *Recta linea α β diuidatur in partes* *duas inæquales in puncto ι, sitq; α ι maior portio. Dico sicut α ι ad lineã ι β, ita parallelogrammũ ex β α, α ι ad parallelogrammũ ex ϐ α, β ι.*



Describatur enim quadratũ lineæ α ϐ quod sit α γ δ ϐ, & à puncto ι utrique α γ, δ β parallela ducatur ι ζ, manifestũ est sicut linea α ι ad lineã ι β, ita parallelogrammũ α ζ ad parallelogrammũ ϐ ζ per primam sexti. Est autem parallelogrammum α ζ contentum ex lineis β α, α ι. est enim linea α γ æqualis lineæ α β, parallelogrammum uerò ϐ ζ est cõtentum ex lineis α β, ϐ ι. Nam δ ϐ est æqualis lineæ α ϐ. sicut ergo linea α ι ad lineam ι ϐ, ita parallelogrammum ex β α, α ι, ad parallelogrammum ex α β, ϐ ι. quod demonstrandum erat.

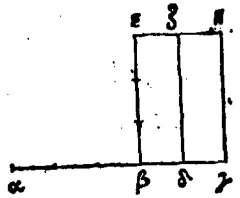
Hoc lemma nihil aliud affert quàm quod primum theorema sexti.

Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ inæquales, diuidatúrque minor in partes duas æquales, parallelogrammum ex ambabus lineis inæqualibus est duplum parallelogrammi ex maiore & media minoris. Quanuis hoc lemma sit in græco exemplari post 33. theorema, uisum est tamen hoc loco ponere, quia sequentis theorematis 33. demonstrationem adiuuat. Sint duæ rectæ inæquales α β, quarum maior sit α ϐ, diuidatúrque β γ bifariàm in puncto δ. Dico parallelogrammum ex α ϐ, β γ esse duplum parallelogrammi ex α β, ϐ δ. ducatur enim à puncto β super

lineam

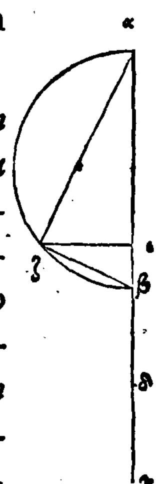
lineam β γ perpendicularis β ι, sitq; æqualis lineæ β α, describatúrq; figura ut picta est. Cũ igitur sit sicut δ β ad δ γ, ita parallelogrammum ε ζ ad parallelogrammum δ κ per 1.6. Composita ergo proportione erit sicut tota linea ε γ ad lineã δ γ, ita parallelogrammũ β κ ad parallelogrammũ δ κ per 18.5. Est autem linea β γ dupla lineæ δ γ, ergo parallelogrammum β κ erit duplum parallelogrammi δ κ. Est autem parallelogrammum β κ ex lineis α ε, β γ. nam linea α ε est æqualis lineæ ε ι: parallelogrammũ uero δ κ est ex lineis α β, β δ. nam æqualis est β δ linea, lineæ δ γ: linea uerò α β lineæ δ ζ. quod demonstrandum erat.

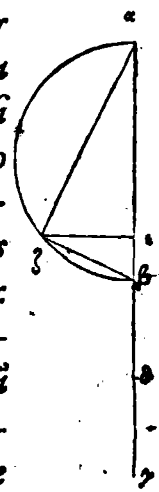


Trigesimumtertium Theorema.

Reperire duas rectas potentia incommensurabiles, quarum quadrata simul addita faciant superficiem rationalem, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum sit mediale.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α β, β γ, huiusmodi, ut maior ex illis, nempe α β, plus possit, quàm minor β γ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine per lemma positũ priore loco post 30 theorema huius libri. Diuidatúrque linea ε γ bifariam & æqualiter in pũcto δ: & quadrato lineæ ε δ uel δ γ æquale secundum lineam α β applicetur paral-





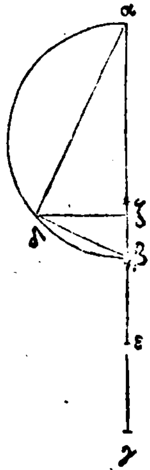
lelogrammũ quadrata figura deficiens per 28.6. (Hæc autem uerba; quadrata figura deficiẽs, idem significant quod ea quibus usi sumus in 18 & 19 theoremate, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrãmi.) sitq; parallelogrammũ ex α ε, ε β. describatur super linea α ϐ semicirculus α ζ ϐ, & à linea α β ad circunferentiã semicirculi ducatur perpendicularis ε ζ, ducanturq; lineæ α ζ, ζ β. Cum igitur sint duæ rectæ inæquales α ϐ, ϐ γ, possitq; linea α β plusquam linea β γ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine: quartæ autẽ parti quadrati lineæ minoris β γ, hoc est quadrato illius dimidiæ quod est δ β, æquale parallelogrammum deficiens figura quadrata applicatũ sit secundum lineam α β, quod parallelogrammum est ex α ε, ε β. Ergo incommensurabilis est longitudine linea α ε lineæ ε β, per secundam partem 19 huius libri. Est autem sicut linea α ε ad lineam ε β, ita parallelogrammũ ex β α, α ε ad parallelogrammum ex α β, β ε, per lemma penultimo loco positum ante hoc theorema. Est autẽ parallelogrammum ex α β, α ε æquale quadrato lineæ α ζ, per secundam partẽ lemmatis primo positi post 32 theorema: parallelogrammum autem ex α β, β ε est æquale quadrato lineæ β ζ per primã partem eiusdem lemmatis. Ergo incõmensurabile est quadratũ lineæ α ζ quadrato lineæ β ζ per 10 huius, ergo lineæ α ζ, ζ β sunt potentia incommensurabiles. Sed quia linea α ϐ est rationalis,

nalis, rationale est ergo quadratum ipsius. ergo compositum ex additione amborum quadratorum, nempe descriptorum ex lineis α ζ, ζ β, quæ sunt æqualia quadrato lineæ α β per 47 1. erit inquam illud compositum rationale. Rursum *parallelogrammū ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ ι ζ per tertiam partem eiusdem lemmatis. Sed per suppositionem idem parallelogrammum ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ β δ.* Ergo *linea ζ ι est æqualis lineæ β δ. ergo linea β γ est dupla ad lineam ζ ι.* Quare *& parallelogrammum ex α β, β γ est duplū ad parallelogrammū ex α β, ι ζ, per proximū lemma, quod perperam positū esse diximus in exemplari græco post huius theorematis demōstrationem. Sed parallelogrammum ex α β, β γ est mediale per suppositionem & 22 theorema.* Ergo *etiam mediale erit parallelogrammum ex α β, ι ζ per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α β, ι ζ est æquale parallelogrammo ex α ζ, ζ β per quartam partem illius lemmatis positi post 32. theorema.* Ergo *parallelogrammum ex α ζ, ζ β erit mediale. Sed modo probatū est compositū ex quadratis earundem linearum α ζ, ζ β esse rationale.* Repertæ *sunt ergo duæ lineæ rectæ, nempe α ζ, ζ β potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarū rationale: parallelogrammum uerò ex eisdem cōtentū, mediale, quod faciendum erat.*

Trigesimumquartum Theorema.

Reperire lineas duas rectas potentia incommensurabiles conficientes compositum ex ipsarū quadratis mediale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum rationale.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles αβ, βγ rationale continentes parallelogrammum ex ipsis, tales inquã, ut linea αβ poßit plus quàm linea βγ quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, per postremam partem demõstrationis theorematis 31. Describatúrque super linea αβ semicirculus αδβ. diuidatur etiam linea βγ bifariam & æqualiter in puncto ε: & secundũ lineã αβ quadrato lineæ βε æquale parallelogrammum applicetur, deficiens figura quadrata quod parallelogrammum sit ex αζ, ζβ, ut dictũ est in proximo theoremate. Incommensurabilis est ergo longitudine linea αζ lineæ ζβ, ut ibidem dictum est: & à puncto ζ erigatur linea ζδ perpendicularis super linea αβ, ducantúrque lineæ αδ, δβ. Et quoniam est sicut linea αζ ad lineam ζβ, ita parallelogrammum ex βα, αζ ad parallelogrammum ex βα, βζ per alterum lemma positum ante theorema 33. uel per primũ sexti. Ergo per 10 huius, parallelogrammum ex βα, αζ est incõmensurabile parallelogrammo ex αβ, βζ. Sed per lemma positum post 32 theorema, parallelogrammum ex βα, αζ est æquale quadrato lineæ αδ: parallelogrammũ uerò ex αβ, βζ est item æquale quadrato lineæ βδ. Incõmensurabile est ergo quadratum lineæ αδ quadrato lineæ βδ. Ergo lineæ αδ, δβ sunt potentia incommensurabiles.

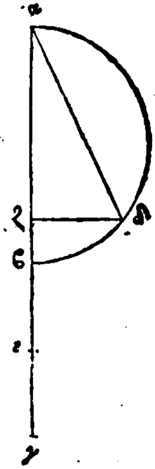


rabiles.Et quoniam quadratum lineæ α β est mediale, quod est æquale duobus quadratis duarum linearum α δ, δ β per 47.1.Ergo compositum ex illis duobus quadratis linearum α δ, δ β est etiam mediale.Et quoniam linea β γ est dupla ad lineam δ ζ,ut probatũ est in proximo theoremate.Ergo parallelogrammum ex α β,β γ erit duplum ad parallelogrammum ex α β,δ ζ per lemma positum ante 33 theorema,uel per primam sexti, quare & eidem erit commensurabile per 6 huius.Sed per positionem parallelogrammum ex α β,β γ est rationale. ergo parallelogrammum ex α β,δ ζ est etiam rationale.parallelogrammo uerò ex α ϐ,δ ζ æquale est parallelogrammum ex α δ,δ β per tertiam partem lemmatis positi post 32. theorema. quare parallelogrammũ ex α δ,δ β erit etiam rationale.Repertæ sunt ergo duæ lineæ rectæ,nẽpe α δ,δ β potentia incõmẽsurabiles &c.

Trigesimumquintum Theorema.

Reperire duas lineas rectas potentia incommensurabiles,conficientes id quod ex ipsarum quadratis componitur mediale,simúlque parallelogrammum ex ipsis cõtentũ,mediale, quod præterea parallelogrammum sit incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles α β, ϐ γ mediale continentes,tales inquam,ut α ϐ plus posit quàm β γ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine,per postremam partem demonstrationis theorematis 32. Describatúrque super lineā α ϐ



semicirculus α δ β, cateráque constructa sunto eo modo quo in præcedentibus. Cum linea α ζ sit incommensurabilis longitudine lineæ ζ β, est etiam incommensurabilis potētia linea α δ lineæ δ β, per ea quæ sunt demonstrata in proximo theoremate. Et quoniam quadratum lineæ α β est mediale, ergo compositum ex quadratis linearū α δ, δ ϵ quod est æquale quadrato lineæ α ϵ per 47.1. erit etiam mediale. Et quoniā parallelogrammum ex α ζ, ζ β est æquale alterutri quadrato ex singulis lineis β ε, δ ζ. Nam ex suppositione parallelogrammum ex α ζ, ζ ϵ est æquale quadrato lineæ ϵ. idem etiā parallelogrammū ex lineis α ζ, ζ β est æquale quadrato lineæ δ ζ per tertiam partem lemmatis positi post 32. theorema. Ergo linea δ ζ est æqualis lineæ ϵ ε. dupla est ergo linea β γ ad lineam ζ δ. Quare & parallelogrammū ex α β, β γ erit duplum ad parallelogrammum ex α β, ζ δ, itaque sunt commensurabilia per sextam huius. Sed parallelogrāmum ex α β, β γ est mediale per positionem. Ergo parallelogrammum ex α ϵ, ζ δ erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α ϵ ζ δ est æquale parallelogrammo ex α δ, δ β per quartā partem eiusdem lemmatis. Ergo parallelogrammum ex α δ, δ ϵ erit etiam mediale. Et quoniam linea α ϵ est incommensurabilis longitudine lineæ β γ: linea uerò ϵ γ est commēsurabilis longitudine lineæ β ε: est ergo linea α β longitudine incommensurabilis lineæ β ε per 13. uel 14 huius.

huius. quare & quadratum lineæ α β erit incommensurabile parallelogrammo ex α β, β ε per primum sexti & 10 huius. Sed quadrato lineæ α ϐ est æquale compositum ex quadratis linearum α δ, δ β. parallelogrammo uerò ex α β, β ε est æquale parallelogrammũ ex α β, ζ δ; hoc est parallelogrammum ex α δ, δ β. Nam parallelogrammũ ex α β, ζ δ est æquale parallelogrammo ex α δ, δ ϐ. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ parallelogrammo ex eisdem lineis α δ, δ ϐ. Repertæ sunt ergo duæ rectæ nempe α δ, δ ϐ potentia incommensurabiles &c.

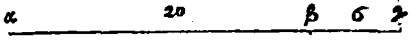
Principium senariorum per compositionem.

Trigesimumsextum Theorema.

Si duæ rationales potentia tantum commensurabiles cõponantur, tota linea erit irrationalis. Vocetur autem Binomium.

Componantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α β, ϐ γ, quales reperire docet 11 huius.

Dico totam lineam α γ esse irrationalem. Cum enim sit incommensurabilis longitudine linea α β, lineæ ϐ γ, positæ sunt enim potentia tantum commensurabiles: cumque sit sicut linea α ϐ ad lineã β γ, ita parallelogrã mum ex α ϐ, ϐ γ ad quadratum ϐ γ per 1.6. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ex α ϐ, ϐ γ quadrato lineæ β γ per 10 huius. Sed parallelogrammo ex α ϐ, ϐ γ commensurabile est id quod fit bis ex α ϐ, β γ per 6. huius. Ergo id quod fit bis ex α ϐ, β γ est incommensurabi-



le quadrato lineæ β γ per 14 huius. Quadrato autem lineæ ς γ est commensurabile compositũ ex quadratis linearum α β, ς γ per 16 huius, quia per suppositionem lineæ α β, ς γ sunt potentia tantum commensurabiles. Ergo *per 14 compositum ex quadratis linearum α β, ς γ est incommensurabile ei quod fit bis ex α β, ς γ.* Ergo *per 17 id quod fit bis ex α ς, ς γ cum quadratis linearum α ς, ς γ, quod est æquale quadrato totius lineæ α γ per 4.2. est incommensurabile cõposito ex quadratis linearum α ς, ς γ.* Sed *compositũ ex quadratis linearum α ς, β γ est rationale, quia est commensurabile alterutri quadrato linearum α β, ς γ, quorum utrũque est rationale per positionem.* Ergo *quadratum lineæ α γ est irrationale, quare & linea α γ erit irrationalis. Vocetur autem linea illa* Binomium. Hic *autem & in cæteris deinceps denominationibus linearum irrationalium, nihil innouandum censuimus de uocibus tritis & iamdudum inter latinos geometras receptis, nisi si quãdo ratio contrarium suaserit.*

Trigesimumseptimum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes cõponantur, tota linea est irrationalis. Vocetur autem bimediale prius.

Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles α ς, ς γ rationale continentes (quales reperire docet 28) dico totam lineam α γ esse irrationalem. sicut enim

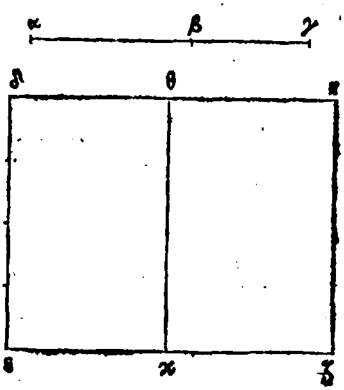
dictum

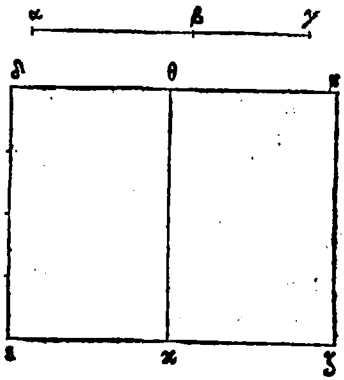
dictum est in proximo theoremate, compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per 17 huius, compositum ex quadratis linearum αβ, βγ cum eo quod fit bis ex αβ, βγ, quod est æquale quadrato totius lineæ αγ, est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Sed id quod fit bis ex αβ, βγ est commensurabile ei quod fit semel ex αβ, βγ per 6 huius. Ergo quadratum totius lineæ αγ est incommensurabile ei quod fit semel ex αβ, βγ per 14 huius. Sed per positionem id quod fit semel ex αβ, βγ est rationale. Ergo quadratum totius lineæ αγ est irrationale. Irrationalis est ergo tota linea αγ. Vocetur autem Bimediale prius.

Trigesimumoctauum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes componantur, tota linea est irrationalis, uocetur autem Bimediale secundum.

Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles αβ, βγ mediale continentes (quales docet reperire 29.) Dico totam lineã αγ esse irrationalem. Proponatur enim linea rationalis δι, & quadrato lineæ αγ æquale secundum lineam δι applicetur parallelogrãmum δζ, cuius alterũ latus





sit δκ. Cum quadratū lineæ αγ sit æquale quadratis linearum αβ, βγ. & ei quod fit bis ex αβ, βγ per 4.2. applicetur secundum lineā δε quadratis linearum αβ, βγ æquale parallelogrammum εθ. Residuum *ergo parallelogrammum ζθ, est æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ.* Sed *positū est parallelogrammū ex αβ, βγ esse mediale, cui id quod fit bis ex αβ, βγ est commensurabile per 6 huius.* Ergo *per corollarium 24 theorematis id quod fit bis ex αβ, βγ est etiam mediale.* E*st autem parallelogrammum εθ æquale quadratis linearum αβ, βγ, quæ quadrata sunt inter se commensurabilia ex suppositione.* Ergo *per 16 huius, parallelogrammum εθ erit commensurabile utrique quadrato lineæ αβ, & lineæ βγ.* Sed *illa quadrata sunt medialia, quia ex positione lineæ αβ, βγ sunt mediales.* Ergo *per corollarium 24 theorematis parallelogrammū εθ erit etiam mediale.* Ei *uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale est residuum parallelogrammū θζ.* Mediale *est ergo utrūque parallelogrammum εθ, θζ, & secundum lineam rationalem δε applicantur.* R*ationalis est ergo utraq; linearum δθ, θκ, & incommēsurabilis longitudine lineæ δε, per 23.* Et *quoniam per positionem est incommensurabilis longitudine linea αβ, lineæ βγ: est autem sicut linea αβ ad lineam βγ, ita quadratum lineæ αβ ad parallelogrammum ex αβ, βγ per 1.6: incommensurabile*

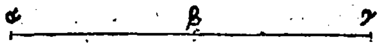
est

est ergo quadratum lineæ α β *parallelogrammo ex* α β, β γ *per* 10 *huius.* Sed *quadrato lineæ* α β *est commensurabile compositũ ex quadratis linearum* α β, ϛ γ *per* 16, *quia quadrata linearum* α β, ϛ γ *sunt commẽsurabilia, cum lineæ* α ϛ, ϛ γ *positæ sint potentia tantum commensurabiles.* Ergo *compositum ex quadratis linearum* α ϛ, ϛ γ *est incommensurabile parallelogrammo ex* α ϛ, β γ *per* 14. P*arallelogrammo uero ex* α ϛ, ϛ γ *commensurabile est id quod fit bis ex* α β, β γ. Ergo *per idẽ* 14 *theorema incommensurabile est compositum ex quadratis linearũ* α β, β γ *ei quod fit bis ex* α ϛ, ϛ γ. Ergo *eis æqualia parallelogramma* ι θ, θ ζ *sunt etiam inter se incommensurabilia. quare & linea* λ θ *lineæ* θ κ *est incommẽsurabilis lõgitudine per* 1. 6 *&* 10 *huius.* Sed *modo probatum est eas esse rationales. lineæ ergo* λ θ, θ κ *sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: quare & linea* λ κ *est irrationalis per* 36 *huius.* Sed *parallelogrammum* λ ζ *contentum ex linea irrationali* λ κ, *& rationali* λ ι *est ipsum etiam irrationale. nam si esset rationale cum applicetur secundum lineam rationalem puta* λ ι, *esset & altera linea nempe* λ κ *etiam rationalis per* 21. *cum tamen probata sit irrationalis.* Irrationale *est ergo parallelogrammum* λ ζ. *quare & linea quæ illud parallelogrammum potest, nempe* α γ, *est etiam irrationalis.* V*ocetur autem* Bimediale *secundum.* V*ocauit autem illam eo nomine, quia mediale est non rationale quod continetur ex illis medialibus lineis* α ϛ, β γ, *quarum compositione fit linea* α γ. P*osterius est autem & natura & cognitione mediale rationali.*

Trigeſimumnonum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, parallelogrammum uerò ex ipſis contentum mediale, tota linea recta eſt irrationalis. Vocetur autem linea maior.

Componantur enim duæ rectæ potentia incommenſurabiles α β, β γ conficiẽtes id quod dicitur in theo



remate (quales docet reperire 33.) Dico totam lineã α γ eſſe irrationalem. Nam parallelogrammum ex α β, β γ eſt mediale: & quod fit bis ex α β, β γ eſt commenſurabile ei quod fit ſemel ex α β, β γ per 6 huius. Ergo per corollarium 24 huius, quod fit bis ex α β, β γ erit mediale. Sed per poſitionem compoſitum ex quadratis linearum α β, β γ eſt rationale. Ergo id quod fit bis ex α β, β γ eſt incommenſurabile compoſito ex quadratis linearũ α β, β γ. Quare per 17 compoſitum ex quadratis linearum α β, β γ cum eo quod fit bis ex α β, β γ eſt incommẽſurabile compoſito ex quadratis linearum α β, β γ. Sed compoſitum ex quadratis linearũ α β, β γ cum eo quod fit bis ex α β, β γ eſt æquale quadrato totius lineæ α γ per 4.2. Compoſitũ uerò quod fit ex quadratis linearũ α β, β γ eſt rationale per poſitionem. Ergo quadratũ totius lineæ α γ eſt irrationale. ergo tota linea α γ eſt etiã irrationalis. Vocetur autem linea maior. Vocauit autẽ ideo maiorem, quia compoſitum ex quadratis linearũ α β, β γ quæ ſunt rationalia, eſt maius eo quod fit bis ex

α β,

α ϐ, ϐ γ ut modo dicemus. Et *ſane decet fieri denominationem à conuenientia rationalium.*

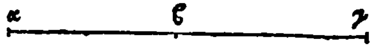
Lemma.

Quod autem compoſitum ex quadratis linearum α ϐ, β γ ſit maius eo quod fit bis ex α ϐ, ϐ γ, ita demõſtretur. Primò *manifeſtum eſt lineas α ϐ, ϐ γ eſſe inæquales.* Nam *ſi æquales eſſent, æqualia quoque eſſent quadrata linearũ α β, β γ ei quod fieret bis ex α ϐ, ϐ γ. itaque ambo, compoſitũ inquam ex quadratis linearum α ϐ, β γ, & id quod ex illis continetur, eſſent ſimul aut medialia aut rationalia, quod eſt cõtra poſitionem.* Ergo *inæquales ſunt lineæ α ϐ, ϐ γ. Sit autem per ſuppoſitionem maior linea α ϐ: ſit autẽ æqualis linea β δ lineæ ϐ γ.* Ergo *per 7. 2. quadrata linearũ α ϐ, ϐ δ ſunt æqualia ei quod fit bis ex α ϐ, ϐ δ, & quadrato lineæ δ α.* Eſt *autem æqualis δ ϐ lineæ β γ.* Ergo *quadrata linearum α ϐ, ϐ γ ſunt æqualia ei quod fit bis ex α β, β γ, & quadrato lineæ δ α.* Quare *quadrata linearum α β, β γ ſunt maiora quàm id quod fit bis ex α β, β γ, tanto quantũ eſt quadratũ lineæ δ α.*

Quadrageſimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur conficientes compoſitũ ex ipſarum quadratis mediale: id uerò quod fit ex ipſis rationale, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens rationale & mediale.

Componantur *duæ rectæ potentia incommẽſurabiles α β, β γ conficientes id quod dicitur in theoremate (quales* *reperire docet 34.) Dico totam lineam $\alpha\gamma$ eſſe irrationalem.*

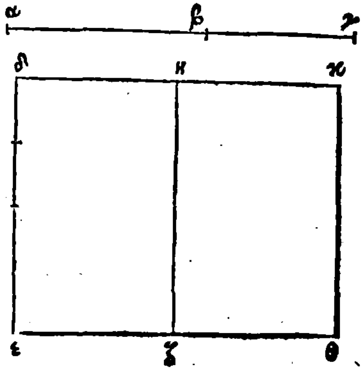


Cum enim cõpoſitum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ſit mediale: id uerò quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ſit rationale. Incommenſurabile eſt ergo compoſitum ex quadratis linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Ergo per 17 compoſitum ex quadratis linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, quod eſt quadratũ totius $\alpha\gamma$, eſt incommẽſurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Sed id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ eſt rationale, quia id quod continetur ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ poſitum eſt eſſe rationale. Ergo irrationale eſt quadratum totius lineæ $\alpha\gamma$, quare & ipſa linea $\alpha\gamma$ erit irrationalis. Vocetur autẽ potens rationale & mediale. Quam ideo ſic uocauit, quia poteſt duas ſuperficies, aliam quidẽ rationalem, aliam uerò medialem. Et quia rationale præcedit ordine naturæ & cognitionis, prius intulit mentionẽ ipſius rationalis. Sciendum eſt has rationes denominationum quæ ſunt in 38. 39. & hoc theoremate, item in 41 eſſe additiones, quæ tamẽ ut in nonnullis conueniãt hæc certe nõ ſatisfacit.

Quadrageſimumprimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur conficientes compoſitũ ex quadratis ipſarum, mediale & quod continetur ex ipſis mediale, & præterea incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens duo medialia.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽſurabiles $\alpha\beta$, $\beta\gamma$

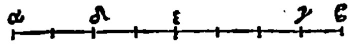


ϛγ conficiẽtes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 35.) Dico *totam lineam αγ esse irrationalem*. Proponatur *linea rationalis δε, & secũdum illã quadratis linearum αϛ, βγ æquale parallelogrammum δζ applicetur.* Item *secundum eandem lineam δε uel ei æqualem ηζ ac æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ parallelogrammum ηθ applicetur: totum ergo parallelogrammum δθ est æquale quadrato lineæ αγ per* 4. 2. Et *quoniam cõpositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale cui est æquale parallelogrammũ δζ.* Ergo *mediale erit etiã δζ per ea quæ scripsimus in demonstratione* 38 *theorematis. ergo linea δη est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ δε per* 23. Eadẽ *ratione linea ηκ erit rationalis & incommensurabilis longitudine eidẽ lineæ δε.* Et *quoniam compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ: ergo etiam incommensurabile erit parallelogrammum δζ parallelogrammo θη.* Quare *& linea δη lineæ ηκ erit incommensurabilis per* 1. 6. & 10 *huius.* Sed *modo probatum est illas esse rationales: sunt ergo lineæ δη, ηκ rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo tota linea δκ est irrationalis quæ uocatur* Binomiũ *per* 36. Sed *linea δε est rationalis. ergo parallelogrammum δθ est irrationale per id quod probatum est in fine* 38.

Ergo linea potens illud parallelogrammum nempe α γ erit irrationalis. Vocetur autẽ potẽs duo medialia. Hãc uerò uocauit hoc nomine, quia poteſt duas ſuperficies mediales, & eam quæ componitur ex quadratis linearum α β, β γ, & eam quæ fit ex α β, β γ. Quod uerò dictæ irrationales lineæ unico modo, id eſt uno tantum in puncto diuiduntur in rectas lineas ex quibus componũtur, & quæ conſtituunt ſingulas ſpecies illarũ irrationalium, mox demonſtrabimus, ſi prius demonſtrauerimus huiuſmodi lemma.

Lemma.

Proponatur recta linea α β, diuidatúrque in partes inæquales duas in puncto γ, iterúmq; diuidatur eadem linea α β in partes duas inæquales in alio puncto δ. Sit



autem linea α γ maior quàm linea δ β. Dico compoſitum ex quadratis duarum linearum α γ, γ β eſſe maius quàm compoſitum ex quadratis α δ, δ β. Diuidatur enim biſariam & æqualiter linea α β in puncto ε. & quoniam linea α γ eſt maior linea δ β, auferatur ab utraque ea pars quæ utriuſque eſt communis nempe δ γ. Reſidua ergo linea α δ eſt maior reſidua linea γ β. Quia de duabus lineis inæqualibus quarum maior erat α γ, idem ablatum eſt nempe δ γ. Eſt autem æqualis linea α ε lineæ ε β. Ergo linea δ ε eſt minor linea ε γ. ergo puncta γ, δ, non æqualiter diſtant à puncto ε, quod eſt punctum ſectionis in partes duas æquales. Et quoniam parallelogrammum contentum ex α γ, γ β cum quadrato lineæ γ ε eſt æquale quadrato lineæ ε β per 5.2.

&

& eadem ratione parallelogrammum contentum ex $\alpha\delta,\delta\beta$ unà cum quadrato lineæ $\delta\epsilon$ eſt æquale eidem quadrato eiuſdem lineæ $\epsilon\beta$. Ergo *parallelogrammum contentum ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ unà cum quadrato lineæ $\gamma\epsilon$ eſt æquale parallelogrammo ex $\alpha\delta,\delta\beta$ unà cum quadrato lineæ $\delta\epsilon$, quia quæ ſunt æqualia uni tertio ſunt æqualia inter ſe.* Sed *quadratũ lineæ $\delta\epsilon$ eſt minus quadrato lineæ $\epsilon\gamma$, quia linea $\delta\epsilon$ eſt probata minor linea $\epsilon\gamma$.* Ergo *& reſiduum nempe parallelogrammum ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ eſt minus parallelogrammo ex $\alpha\delta,\delta\beta$. quare & id quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ eſt minus eo quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$.* Sed *per* 4. 2 *quadratum totius lineæ $\alpha\beta$ eſt æquale compoſito ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$, & eadem ratione.* I*dem quadratum totius lineæ $\alpha\beta$ eſt æquale compoſito ex quadratis linearum $\alpha\delta,\delta\beta$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$.* Ergo *compoſitum ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ eſt æquale compoſito ex quadratis linearum $\alpha\delta,\delta\beta$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$.* Sed *modo probatũ eſt id quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ eſſe minus eo quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$.* Re*ſiduum ergo nempe compoſitum ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ eſt maius reſiduo nempe compoſito ex quadratis linearum $\alpha\delta,\delta\beta$, quod erat demonſtrandum.*

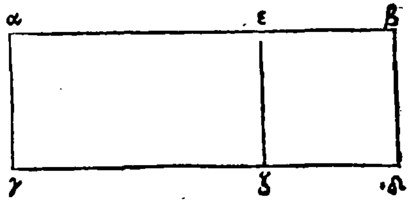
Lemma.

R*ationale excedit rationale ſuperficie rationali.*

S*it rationale $\alpha\delta$ excedẽs aliud rationale $\alpha\zeta$, ſuperficie $\epsilon\delta$.*

D*ico ſuperficiem $\epsilon\delta$ eſſe etiam rationalem.* N*am pa-*

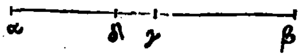
T



rallelogrammũ αδ eſt commẽſurabile parallelogrammo αζ. Ergo per ſecundam partẽ 16 huius, parallelogrammũ αζ eſt commẽſurabile parallelogrammo εδ. Sed parallelogrammum αζ eſt rationale. Ergo etiam parallelogrammum εδ eſt rationale.

Quadrageſimumſecundum Theorema.

Binomium in unico tantũ puncto diuiditur in ſua nomina, id eſt in lineas ex quibus componitur.



Sit binomium linea αβ diuiſa in puncto γ in ſua nomina, hoc eſt in lineas ex quibus linea tota αβ cõponitur. Ergo *lineæ αγ, γβ ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles per 36.* Dico *lineam αβ non poſſe diuidi in ullo alio puncto quàm γ, in alias lineas duas rationales potentia tantum commenſurabiles.* Nam *ſi contradicatur, diuidatur in pũcto δ, ita ut lineæ αδ, δβ ſint duæ rationales potentia tantum commenſurabiles.* Primò *conſtat neutrum illorum punctorum γ, δ diuidere lineã αβ in partes æquales, alioquin eſſent lineæ αγ, γβ, rationales longitudine cõmenſurabiles, ſimiliter & lineæ αδ, δβ. Qualibet enim linea ſeipſam metitur & quãcunque aliam ſibi æqualem.* Præterea *linea δβ uel eſt eadem cũ linea αγ, hoc eſt æqualis lineæ αγ, uel eadem maior, uel minor eadem. Si eſt æqualis linea δβ lineæ αγ, impoſita ergo linea δβ lineæ αγ ſingulæ extremitates unius*

tribuunt

tribuũt cũ singulis extremitatibus alterius. Posito itaque puncto β super puncto α, punctum etiam δ incidet super punctum γ, & residua linea αδ ex linea αγ erit etiam æqualis lineæ γβ residuæ ex δ ϛ. Ergo linea αβ diuiditur in puncto γ, in sua nomina. Sic itaque linea αβ diuisa per punctum δ, diuisa erit, in eodem puncto quo fuerat prius diuisa eadem linea α ϛ per punctũ γ, quod est contra hypothesin contradicentis. nam ex positione erat diuisa aliter atque aliter in punctis γ, δ. Quòd si linea δ ϛ est maior quàm linea αγ, diuidatur linea αβ bifariam & æqualiter in puncto ι. non itaque puncta γ, δ æqualiter distabunt à puncto ι. Sed per lemma modo positum post 41, compositum ex quadratis linearum αδ, δβ est maius composito ex quadratis linearum αγ, γϛ: & compositum ex quadratis linearum αδ, δϛ unà cum eo quod fit bis ex αδ, δβ est æquale composito ex quadratis linearum αγ, γβ, unà cum eo quod fit bis ex αγ, γβ. quia utrunque est æquale quadrato totius lineæ αβ per 4.2. Ergo quanto compositum ex quadratis linearum αδ, δβ est maius cõposito ex quadratis linearũ αγ, γβ, tanto id quod fit bis ex αγ, γβ est maius eo quod fit bis ex αδ, δβ. Quod ipsum quãuis sit indemonstrabile, modica tamen inductione fit manifestius, si duabus lineis æqualibus propositis, puta quatuor pedes longis, ab altera pedes tres abstuleris, ab altera pedes duos. Residuum eius à qua pedes duos abstulisti, est maius quàm residuum eius à qua pedes tres abstulisti pede uno. quãto scilicet maiores erant pedes tres ablati quã pedes duo ablati. Sed compositum ex quadratis linearum αδ, δβ *excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β superficie rationali per lemma positum ante hoc theorema. Sunt enim utraq; composita rationalia, quia lineæ α δ, δ β, sunt positæ rationales potentia tantum cõmensurabiles, similiter & lineæ α γ, γ β. Ergo etiam id quod fit bis ex α γ, γ β excedit id quod fit bis ex α δ, δ β superficie rationali, cum sint tamẽ ambo medialia per 22 huius, quod est impossibile per 27. Quòd si linea δ β est minor linea α γ, eadem uia deducitur ad idem impossibile.* Non *igitur binomium diuidetur aliter atque aliter in sua nomina, sed unico tantum modo. Qui defendebant unitatem entis ex opinione* Parmenidis, *existimauerunt esse quasdã lineas insecabiles, de quibus ageretur hoc theoremate & cæteris sequentibus, quam tamen illorum opinionem* Aristoteles *in libello* περὶ ἀτόμων γραμμῶν, *seu quis alius author eius opusculi, falsam esse arguit, & peruerse ab illis intellectũ hoc theorema.*

Quadragesimumtertium Theorema.

Bimediale prius in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit *bimediale prius linea α β, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β sint mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes.*

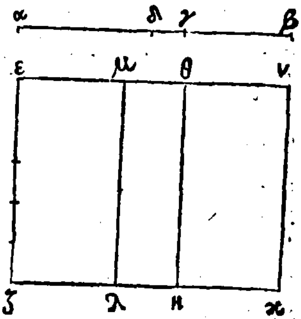
Dico lineam α β non posse diuidi in alio puncto quàm γ in sua nomina. Quod si cõtradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut α δ, δ β sint mediales potentia tantum commensurabiles rationale continẽtes. Cum igitur tanto differat id quod fit bis ex

α δ,

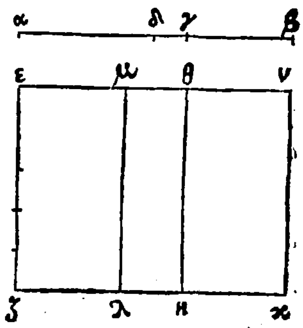
αδ,δβ,ab eo quod ſit bis ex αγ,γβ,quanto differt compoſitum ex quadratis linearum αγ,γβ,à compoſito ex quadratis linearum αδ,δβ,& quod ſit bis ex αδ,βδ differat ab eo quod ſit bis ex ας,γβ,ſuperficie rationali, ſunt enim ambo rationalia. Ergo & cōpoſitū ex quadratis linearum αγ,γβ differt à compoſito ex quadratis linearum αδ,δβ mediale inquam à mediali ſuperficie rationali quod eſt impoſsibile. Non igitur bimediale prius aliter atque aliter diuiditur in ſua nomina,ergo unico tantum modo.

Quadrageſimumquartum Theorema.

Bimediale ſecundum in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.



Sit Bimediale ſecundum linea αβ diuiſa in puncto γ,ita ut lineæ αγ,γβ ſint mediales potentia tantum cōmēſurabiles,mediale continentes. Manifeſtū eſt igitur punctum γ non ſecare totam lineam αβ bifariā & æqualiter,quia lineæ αγ,γβ non ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles. Dico lineam αβ non poſſe diuidi aliter quàm in pūcto γ,in ſua nomina. Quòd ſi contradicatur,diuidatur in puncto δ,ita ut linea αγ ne ſit eadem,hoc eſt ne ſit æqualis lineæ δβ,ſed ea maior. lineæ autē αδ,δβ ſint mediales potentia tantum commenſurabiles mediale continentes per te. Manifeſtum eſt primo quadrata linearū αγ,γβ eſſe maiora



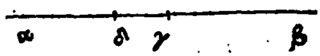
quadratis linearũ α δ, δ β per lemma positum ante 42. Proponatur linea rationalis ε ζ, & quadrato lineæ α β æquale secundum lineã ε ζ applicetur parallelogrammum ε κ. Ex quo parallelogrammo detrahatur id quod æquale est quadratis linearum α γ, γ β, puta parallelogrammum ε η. Residuum ergo, nempe parallelogrammum θ κ est æquale ei quod fit bis ex α γ, γ β. Rursus quadratis linearũ α δ, δ β quæ sunt minora quadratis linearum α γ, γ β æquale detrahatur parallelogrammum ε λ. Residuum ergo parallelogrammum μ κ, est æquale ei quod fit bis ex α δ, δ β. Et quoniam quadrata linearum α γ, γ β sunt medialia, ergo parallelogrammum ε η erit etiam mediale, & secũdum lineã rationalẽ ε ζ applicatur rationalis. Est ergo linea ε θ & incommẽsurabilis longitudine lineæ ε ζ. Eadem ratione quia parallelogrammum θ κ est mediale. (nam id quod est ei æquale, nempe quod fit bis ex α γ, γ β est mediale.) Ergo linea θ ν est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ ε ζ. Et quoniam lineæ α γ, γ β sunt mediales potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea α γ ad lineã γ β, ita quadratũ lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β per 1.6. ergo quadratum lineæ α γ est incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. Sed quadrato lineæ α γ est commensurabile compositum ex quadratis linearum α γ, γ β per 16. quia lineæ

α γ,

α γ,γ β sunt potentia inter se commensurabiles. parallelogrammo uerò ex α γ,γ β est commensurabile id quod fit bis ex α γ,γ ϛ. Ergo compositum ex quadratis linearũ α γ,γ ϛ est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ,γ ϛ, per corollarium à nobis additum theoremati 14. Sed cõ posito ex quadratis linearum α γ,γ ϛ est æquale parallelogrammũ ι κ, ei uerò quod fit bis ex α γ,γ β est æquale parallelogrammum θ κ. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ι κ parallelogrammo θ κ. quare & linea ι θ, erit incommensurabilis longitudine lineæ θ ν. sunt autem ambæ rationales. Sunt ergo illæ lineæ ι θ,θ ν rationales potentia tantum commensurabiles, per lemma positũ post 19 theorema. Nam eo ipso quod sunt rationales sunt potentia saltem commẽsurabiles. Ergo tota linea ι ν erit binomiũ per 36. quæ diuisa est in puncto θ, in sua nomina. Eadem uia demonstrabitur lineas ι μ,μ ν esse rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea ι ν quæ est binomium, in alio atque alio puncto nempe θ,μ, diuiditur in sua nomina quod est impossibile per 42. Quòd si quis dicat posse fieri ut linea ι θ sit eadem hoc æqualis lineæ μ ν, itaque nihil cõsequi impossibile, neque lineam ι ν quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio, atque alio puncto, sed in uno tantum. hoc etiam demonstrabimus, nempe lineam ι θ nõ esse eandẽ, hoc est æqualem lineæ μ ν. Nam quadrata linearũ α γ, γ ϛ, sunt maiora quadratis linearum α δ,δ ϛ per lemma positum post 41. Sed quadrata linearũ α δ,δ β sunt maiora eo quod fit bis ex α δ,δ β, per lemma positũ post 39. Ergo multo maiora sunt quadrata linearũ α γ,γ ϛ, hoc *eſt illis æquale parallelogrammũ ι κ eſt maius eo quod ſit bis ex α δ, δ β hoc eſt, quàm parallelogrammum μ κ, quod eſt æquale ei quod ſit bis ex α δ, δ β.* Ergo per 1.6. *Linea etiam ι θ erit maior quàm linea μ ν.* Ergo *linea ι θ non erit eadem cum linea μ ν.* Quod *ſi poſueris ab initio lineam α γ eſſe minorem linea δ β.* Idem *etiam tunc impoßibile conſequetur, hoc eſt lineam ι ν quæ eſt binomiũ diuidi in ſua nomina alio atque alio puncto.* Non *igitur bimediale ſecundum in alio atque alio puncto diuiditur in ſua nomina, ergo in uno tantum.*

Quadrageſimumquintum Theorema.

Linea maior in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.



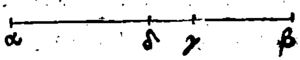
Sit linea maior α β diuiſa in puncto γ, ita ut α γ, γ β ſint potentia incommenſurabiles conficiẽtes compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ, rationale, contentũ uero ex ipſis parallelogrammum mediale. Dico *lineam α β non poſſe diuidi in ſua nomina alibi quàm in puncto γ.* Quòd *ſi contradicatur, diuidatur in puncto δ in ſua nomina.* Et *quoniam quanto differt compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β à compoſito ex quadratis linearũ α δ, δ ϐ, tanto differt id quod ſit bis ex α δ, δ β ab eo quod ſit bis ex α γ, γ β per ea quæ ſcripſimus in demonſtratione* 42 *theorematis.* Sed *compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ excedit compoſitum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ, ſuperficie rationali.* Sunt *enim ambo rationalia.* Er*go & id quod ſit bis ex α δ, δ β excedet id quod ſit bis*

ex

ex α γ, γ β superficie rationali, sed illa sunt medialia. Er*go mediale excedet mediale superficie rationali, quod est impoßibile per 27. Non igitur linea maior diuiditur aliter atq; aliter in sua nomina, ergo in uno tantũ puncto diuidetur.*

Quadragesimumsextum Theorema.

Linea potens rationale & mediale in unico tantum puncto, diuiditur in sua nomina.

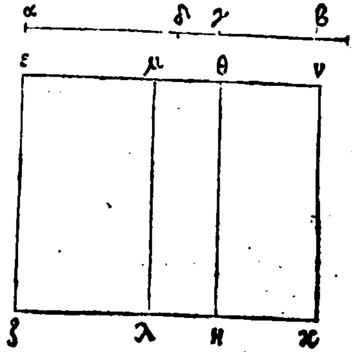


Sit linea potens rationale & mediale α β, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β sint potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum α γ, γ β mediale: id autem quod cõtinetur ex α γ, γ β rationale. Di*co lineam α β in alio puncto quàm γ non posse diuidi in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, in sua nomina. Cũ igitur quanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β ab eo quod fit bis ex α γ, γ β, tanto differat compositum ex quadratis linearum α γ, γ β à composito ex quadratis linearum α δ, δ β, id autem quod fit bis ex α γ, γ β excedat id quod fit bis ex α δ, δ β, superficie, rationali quia utrunque est rationale.* Ergo *& compositum ex quadratis linearum α γ, γ β excedit compositum ex quadratis linearum α δ, δ β superficie rationali, cum tamẽ utrunque illorum sit mediale. Quod est impoßibile.* Non *igitur linea potens rationale & mediale diuiditur aliter atque aliter in sua nomina.* Ergo *diuiditur tantum in puncto uno.*

Quadragesimumseptimum Theorema.

Linea potens duo medialia in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit linea potens duo medialia α β, *diuisa in puncto* γ, *ita ut lineæ* α γ, γ β *sint potẽtia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum* α γ, γ β *mediale: similiter & quod continetur ex ipsis mediale, item contentum ex ipsis incommẽsurabile composito ex quadratis ipsarum* α γ γ β. Dico



lineam α β *non posse diuidi in alio puncto, quàm* γ *in sua nomina.* Quòd *si contradicatur, diuidatur in puncto* δ, *ita ut lineæ* α δ, δ β *conficiant ea quæ lineæ* α γ, γ β. *Sitq; rursus ex suppositione linea* α γ *maior linea* δ β. *Sit autem rationalis linea* ε ζ, *secundum quam applicetur parallelogrammum* ε κ *æquale quadratis linearum* α γ, γ β. *ei uerò quod fit bis ex* α γ, γ β *æquale applicetur* θ χ. T*otum ergo parallelogrammum* ε χ *est æquale quadrato lineæ* α β. R*ursus secundum eandem lineam* ε ζ *applicetur æquale quadratis linearum* α δ, δ β *parallelogrammum* ε λ. R*esiduum ergo parallelogrammũ* μ χ *est æquale residuo, nempe ei quod fit bis ex* α δ, δ β. Et *quoniam ex suppositione compositum ex quadratis linearũ* α γ, γ β *est mediale.* E*st ergo parallelogrammũ illi æquale, nempe* ε κ: *etiam mediale & secũdum lineam rationalem* ε ζ *applicatur.* E*rgo linea* ε θ *est rationalis, & incommensurabilis longitudine lineæ* ε ζ. Eadem *ratione*

&

& linea θι est etiam rationalis & incommensurabilis longitudine eidem lineæ ιξ. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ αγ, γϛ est incommensurabile ei quod fit bis ex αγ, γβ (quia positum est esse incommensurabile ei quod fit semel ex αγ, γϛ.) Ergo parallelogrammum ικ est incommensurabile parallelogrammo θκ. quare & linea ιθ est incommensurabilis lineæ θι. Sunt autem ιθ, θι rationales. Ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea ιι est binomium per 36, & diuisa in puncto θ, in sua nomina. Similiter demonstrabimus eandem lineam ιι diuidi in puncto μ in sua nomina: nec est linea ιθ lineæ μι eadem, hoc est æqualis, ut probatum est in fine demonstrationis 44. Ergo binomium alibi atque alibi diuiditur in sua nomina, quod est impossibile per 42. Non igitur linea potens duo medialia diuiditur alibi atque alibi in sua nomina. Ergo in puncto uno tantum diuiditur.

Termini secundi siue definitiones secundæ.

Proposita linea rationali, & binomio diuiso in sua nomina, cuius binomij maius nomen, id est maior portio possit plusquam minus nomen quadrato lineæ sibi, maiori inquam nomini commensurabilis longitudine.

Siquidem maius nomen fuerit commensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea Binomium primum.

Si uerò minus nomen, id est minor portio binomij fuerit cõmensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea Binomium secundum.

Si uerò neutrum nomen fuerit commensurabile longitu-

dine propositæ lineæ rationali, uocetur binomiũ tertiũ.

Rursus si maius nomen poßit plusquã minus nomen quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, siquidem maius nomen est cõmensurabile lõgitudine propositæ lineæ rationali uocetur tota linea binomiũ quartum.

Si uerò minus nomen fuerit commensurabile longitudine lineæ rationali, uocetur binomium quintum.

Si uerò neutrum nomen fuerit longitudine commensurabile lineæ rationali, uocetur illa binomium sextum.

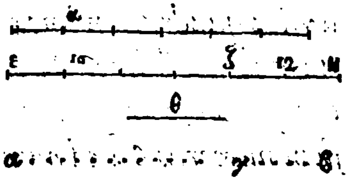
Hìc nihil dicitur de lineis illis quarũ ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali, quia lineæ tales non sunt binomia, cum scilicet illa cõponantur ex duabus rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, ut est in 36. *Lineæ uerò quarum ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali non sunt binomia, quia portiones taliũ linearum essent inter se quoque longitudine commensurabiles per* 12 *huius.* Ergo *non essent quales requirũtur ad compositionem binomij.* Præterea *lineæ tales nõ essent irrationales sed rationales, quia sunt commẽsurabiles singulis partibus se componẽtibus per* 16. Ergo *essent rationales quia componentes essent rationales.*

Quadragesimumoctauum Theorema.

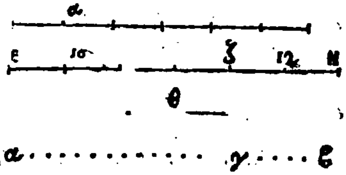
Reperire binomium primum.

Proponantur numeri duo α γ, γ β *tales ut compositus ex ipsis totus* α β *ad alterum ex ijsdẽ nempe* γ β *habeat proportionem quã numerus quadratus ad numerũ quadratum: ad alterum uerò* α γ, *idem* α β *proportionẽ eam*

ne



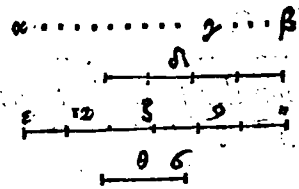
ne retineat quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, qualis est numerus quadratus diuisibilis in quadratum & non quadratũ, inquit Campanus theoremate 17. Sit autem linea rationalis δ, eiq; commẽsurabilis longitudine sit linea εζ: rationalis est ergo linea εζ. Fiat autẽ sicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum alterius lineæ quæ sit ζη per lemma repositum à nobis post 6 theorema. Ergo quadratum lineæ εζ ad quadratũ lineæ ζη proportionẽ habet quam numerus ad numerũ. Quare illa quadrata sunt commensurabilia per 6. Est autem linea εζ rationalis, ergo linea ζη erit etiam rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerum αγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque etiam quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη habebit proportionem quã numerus quadratus ad numerum quadratum. incommensurabilis est ergo longitudine linea εζ lineæ ζη. Ergo illæ lineæ εζ, ζη sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo tota linea εη est binomium per 36. Dico præterea eandem lineam esse binomium primum. Nam cum sit sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη. sitq; numerus βα maior numero αγ: maius quoq; erit quadratum lineæ εζ quadrato lineæ ζη. Sint igitur quadrato lineæ εζ æqualia quadrata linearum ζη, θ (quæ quomodo reperiantur docet lemma positũ post 14.) Et cum sit sicut numerus βα ad numerũ



α γ, ita quadratum lineæ ε ζ ad quadratū lineæ ζ η. Per euersam ergo proportionem sicut numerus β α ad numerum β γ, ita quadratum lineæ ε ζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus α β ad numerum α γ habet proportionē quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ ε ζ ad quadratum lineæ θ habet etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo linea ε ζ erit longitudine commensurabilis lineæ θ, per 9. ergo linea ε ζ plus potest q̃ linea ζ η quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ ε ζ, ζ η rationales potentia tantum commensurabiles, estq; linea ε ζ longitudine cōmensurabilis lineæ rationali δ. ergo linea ε η est binomiū primū.

Quadragesimumnonum Theorema.

Reperire binomium secundum.



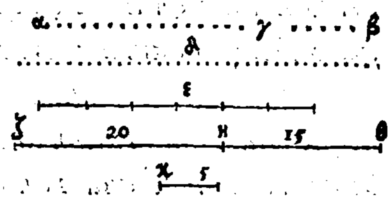
Proponantur numeri duo α γ, γ β tales ut compositus ex ipsis totus α β ad β γ proportionem habeat quam numerus quadratus ad numerum quadratum: ad γ α uerò proportionem eam ne habeat quam numerus quadratus ad numerū quadratum, ut dictum est in proximo theoremate. & proponatur linea rationalis δ, & lineæ δ sit cōmensurabilis longitudine linea ζ η. rationalis est ergo linea ζ η. Fiat autē sicut numerus γ α ad numerum α β, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum

alterius

alterius lineæ quæ sit ζι. Ergo commensurabile est quadratum lineæ ζκ lineæ ζι. est ergo rationalis etiam linea ζι. Et quoniam numerus γα ad numerum αβ non habet proportionem quam quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ζκ ad quadratum ζι habebit proportionẽ quam quadratus numerus ad quadratum. Ergo linea ζκ est incommensurabilis longitudine lineæ ζι per 9. ergo lineæ ζκ, ζι sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea ικ est binomiũ. Dico præterea eandem esse binomium secundum. Cum enim per contrariam siue dicas conuersam proportionem sit sicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζκ. maior autem est numerus αβ, numero αγ. maius etiam erit quadratũ lineæ ιζ quadrato lineæ ζκ. Sint quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearum ζκ, θ, ut dictum est in proximo theoremate. Per euersam ergo proportionẽ sicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus αβ ad numerũ βγ habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratũ lineæ ιζ ad quadratũ lineæ θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ιζ erit commensurabilis longitudine lineæ θ, per 9. Quare linea ιζ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sed linea ζκ quæ est minus nomen, est commensurabilis longitudine propositæ lineæ rationali α per hypothesin. Ergo linea ικ est binomium secundum.

Quinquagesimum Theorema.

Reperire binomium tertium.



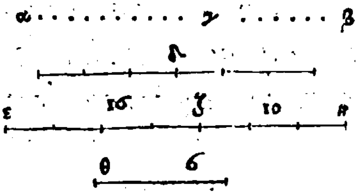
Proponãtur numeri duo α γ, γ β, tales ut cõpositus ex ipsis, totus α β ad numerum β γ proportionem habeat quã numerus quadratus ad quadratum, ad numerũ uerò α γ proportionem ne habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponatur autẽ *& alius numerus siue quadratus, siue non quadratus, qui sit δ, qui ad singulos α β, α γ proportionem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum.* Proponaturq; *linea rationalis ε & fiat sicut numerus δ ad numerum α β, ita quadratum lineæ ε ad quadratum ζ η.* Commensurabile *est ergo quadratum lineæ ε quadrato lineæ ζ η.* Sed *linea ε est rationalis: rationalis est ergo linea ζ η. & quoniam numerus δ ad numerum α β proportionem non habet quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratum lineæ ζ η proportionem eam habet quam quadratus numerus ad quadratum: est ergo linea ε incõmensurabilis longitudine lineæ ζ η.* Rursus *fiat sicut numerus α β ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ.* Commensurabile *ergo est quadratum lineæ ζ η quadrato lineæ η θ.* Sed *linea ζ η est rationalis. ergo linea η θ erit etiã rationalis.* Et *quoniam numerus α β ad numerum α γ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, neq; etiam quadratum lineæ ζ η ad quadratũ lineæ η θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum.*

dratum.Est ergo linea ζκ longitudine incommensurabilis lineæ κθ.ergo lineæ ζκ,κθ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. tota ergo linea ζθ erit binomiũ. Dico *præterea illam esse binomium tertium. Cum enim sit sicut numerus δ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ι ad quadratũ lineæ ζκ. Sicut uerò numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ.* Per *æquam ergo proportionem sicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ι ad quadratũ lineæ κθ. Sed numerus δ ad numerũ αγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum.* Ergo *quadratum lineæ ι nõ habet proportionẽ ad quadratũ lineæ κθ quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo linea ι longitudine incommensurabilis lineæ κθ per 9. Et quoniam est sicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ. Ergo quadratum lineæ ζκ est maius quadrato lineæ κθ. sint ergo quadrato lineæ ζκ æqualia quadrata linearum κθ,χ.* Per *euersam ergo proportionẽ sicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ χ. Sed numerus αβ ad numerum βγ habet proportionem quã quadratus numerus ad quadratum. ergo & quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ χ habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζκ est longitudine commensurabilis lineæ χ. ergo linea ζκ plus potest quam linea κθ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis.* Sunt *autem lineæ ζκ,κθ rationales potentia tantum commensurabiles: & neutra est commensurabilis lon-*

gitudine lineæ ε. Ergo linea ζθ est binomium tertium.

Quinquagesimumprimum Theorema.

Reperire binomium quartum.



Proponantur *numeri duo αγ, γβ tales ut cõpositus ex ipsis nempe αβ ad neutrũ eorum habeat proportionem quam numerus quadratus ad quadratũ (qualis est omnis numerus quadratus ad duos numeros non quadratos se minores ipsum componentes.) Sit autem linea rationalis δ, & lineæ δ sit com mẽsurabilis longitudine linea εζ. est ergo rationalis εζ. Sitq; sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ εζ ad quadratũ lineæ ζη. ergo quadratum lineæ εζ est commensurabile quadrato lineæ ζη. Est ergo linea ζη rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerũ αγ proportionem nõ habet quam quadratus numerus ad quadratum: neque quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη habebit proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea εζ est longitudine incommensurabilis lineæ ζη. Ergo lineæ εζ, ζη sunt rationales potentia tantum commensurabiles, quare tota linea εη est binomium* Dico *præterea eam esse binomium quartum.* Cum *enim sit sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη: est autem numerus βα maior numero αγ.* Ergo *quadratum lineæ εζ erit maius quadrato lineæ ζη.* Sint *ergo quadrato lineæ εζ æqualia quadrata linearũ ζη, θ.*

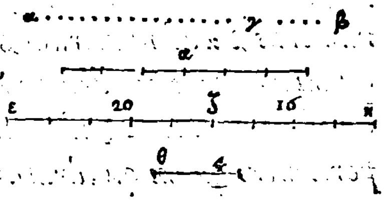
Per

Per euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum ϐγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus ϐα ad numerum ϐγ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, igitur neque quadratū lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Est ergo linea ιζ incommensurabilis longitudine lineæ θ. ergo linea ιζ plus potest quā linea ζκ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ ιζ, ζκ rationales potentia tantū commensurabiles, estq; linea ιζ lineæ rationali δ cōmēsurabilis lōgitudine. Ergo linea ικ est binomiū quartū.

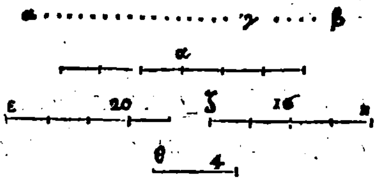
Quinquagesimumsecundum Theorema.

Reperire binomium quintum.

Proponātur numeri duo αγ, γβ tales, ut totus αβ ad singulos αγ, γβ proportionē eam ne habeat quā quadratus numerus ad quadratum, sicut in proximo theoremate.



Et sit linea rationalis δ: lineæ autem δ sit commensurabilis longitudine linea ζκ. Est ergo linea ζκ rationalis: sitq; sicut numerus γα ad numerum αϐ, ita quadratū lineæ ζκ ad quadratum lineæ ζι. ergo quadratum lineæ ζκ est commensurabile quadrato lineæ ζι. Est ergo etiam linea ζι rationalis. Et quoniam numerus αγ ad numerum αβ nō habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ζκ ad quadra-

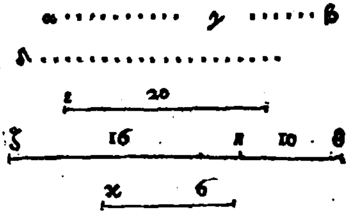


tum lineæ ζι habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ. Ergo lineæ ζη, ζι sunt longitudine incommensurabiles. ergo lineæ ζη, ζι sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo tota linea ιη est binomiũ. Dico *præterea eam esse binomium quintum.* Cum *enim sit sicut numerus αγ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ιζ.* Per *conuersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζη.* Est *ergo quadratum lineæ ιζ maius quadrato lineæ ζη.* Sint *ergo quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearũ ζη, θ.* Per *euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ.* Sed *numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum.* Ergo *neque quadratum lineæ ιζ ad quadratũ lineæ θ, habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum.* Est *ergo linea ζι longitudine incommẽsurabilis lineæ θ. ergo linea ζι plus potest quàm linea ζη quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis.* Sunt *autem lineæ ζι, ζη rationales potentia tantum commensurabiles, & linea ζη minus nomen est, commensurabile longitudine lineæ rationali α.* Ergo *linea ιη est binomium quintum.*

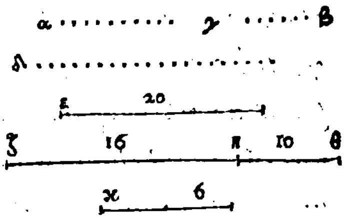
Quinquagesimumtertium Theorema.

Reperire binomium sextum.

Proponantur



Proponantur numeri duo α γ, γ β tales, ut totus α β ad singulos α γ, γ β proportionē ne habeat quam quadratus numerus ad quadratū. Sit etiā & alius numerus δ, quique ad singulos α β, α γ non habeat proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Sitq; linea rationalis ε: sit etiam sicut numerus δ ad numerum β α, ita quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ ζ η. Ergo linea ε erit potentia commensurabilis lineæ ζ η. est autem rationalis linea ε. ergo & lineæ ζ η erit rationalis. Et quoniam numerus δ ad numerū α β non habet proportionē quam numerus quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ ζ η habebit proportionem quā numerus quadratus ad quadratum. Est ergo linea ε longitudine incommensurabilis lineæ ζ η. Rursus fiat sicut numerus β α ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ. Ergo quadrata illa sunt commensurabilia. Sed quadratum lineæ ζ η est rationale: est ergo etiā quadratum lineæ η θ rationale. Ergo & linea η θ rationalis. Et quoniam numerus β α ad numerum α γ proportionē nō habet quam numerus quadratus ad quadratum: neq; quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea ζ η longitudine incommensurabilis lineæ η ζ. ergo lineæ ζ η, η θ sunt rationales potentia tantū commensurabiles. ergo tota linea ζ θ erit binomium. Dico præterea eam esse binomium sextum. Cum enim sit



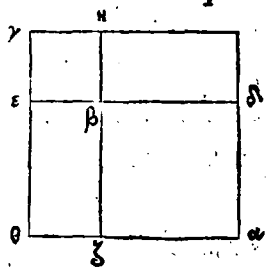
ſicut numerus δ ad numerũ βα, ita quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ ζη. Eſt autem ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Per æquam ergo proportionem ſicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ ηθ. Sed numerus δ ad numerum αγ non habet proportionem quam quadratus numerus ad quadratum: neq; etiam quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ ηθ habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ε eſt longitudine incommenſurabiles lineæ ηθ. Sed modo probatũ eſt lineam ζη eſſe etiam longitudine incommẽſurabilem lineæ ε. Ergo ambæ lineæ ζη, ηθ ſunt incommenſurabiles longitudine lineæ ε. Et quoniam eſt ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratũ lineæ ηθ. maius eſt ergo quadratũ lineæ ζη quadrato lineæ ηθ. Sint ergo quadrato lineæ ζη æqualia quadrata linearum ηθ, κ. Ergo per euerſam proportionem ſicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ κ. Sed numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo neq; quadratũ lineæ ζη ad quadratum lineæ κ habebit proportionẽ quam numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ζη, eſt longitudine incommenſurabilis lineæ κ. ergo linea ζη poteſt pluſquam linea ηθ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Sunt autem lineæ ζη, ηθ rationales potẽtia tantum

tum

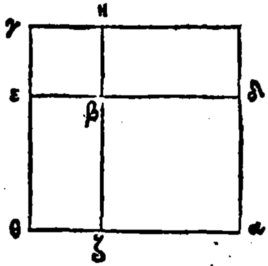
tum commensurabiles, & ambæ lineæ ζη, ηθ incommē-surabiles longitudine lineæ rationali δ. Ergo tota linea ζθ est binomium sextum.

Lemma.

Si linea recta secetur in partes duas quocunque modo parallelogrammum rectangulum contentum ex sectionibus ambabus est medium proportionaliter inter quadrata sectionum. Et parallelogrammum rectangulum contentum ex tota linea & altera sectione est medium proportionaliter inter quadratū totius lineæ & quadratum dictæ sectionis. Sint duo quadrata αβ, βγ, ita collocata ut lineæ δβ, βε sint in eadem recta linea. Erunt ergo & lineæ ζβ, βη in eadem recta linea per 14.1. Compleatur ergo parallelogrāmū αγ.



Dico parallelogrammum rectangulum &c. ut in lemmate. Imprimis parallelogrammum αγ est quadratum, quia linea αβ est æqualis lineæ ζβ: linea uerò βε lineæ βη. tota ergo linea δε est æqualis toti lineæ ζη. Sed linea δε est æqualis utrique γκ, θα. linea item ζη est æqualis utrique ακ, θγ per 34.1. ergo utraque linearum αθ, κγ est æqualis utrique ακ, θγ. Ergo parallelogrammum αγ est æquilaterum. Est etiam rectangulum per 29.1. ergo parallelogrammum αγ est quadratum. Et quoniam est sicut linea ζβ ad lineam βη, ita linea δβ ad lineam βε. Sed sicut linea ζβ ad lineam βη, ita parallelogrammum αβ, quod est quadratū lineæ δβ, ad parallelogrammū δη per 1.6. Sicut autem linea δβ ad lineam βε, ita pa-

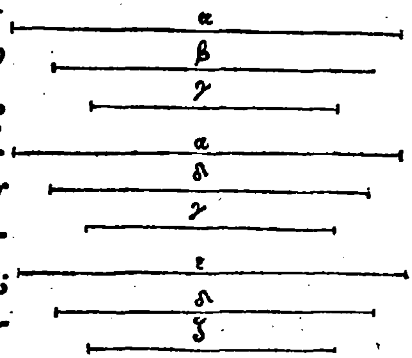


rallelogrammum δκ ad parallelogrammū βγ, quod est quadratū lineæ ϐι per 1.6. Ergo *ſicut quadratum* α ϐ *ad parallelogrammū* δκ, *ita parallelogrammum* δκ *ad quadratū* βγ. Ergo *parallelogrammum* δκ *eſt medium proportionaliter inter quadrata* αϐ, βγ. Dico *prætereaparallelogrammum* δγ *eſſe medium proportionaliter inter quadrata* αγ, βγ. Cum *enim ſit ſicut linea* αδ *ad lineam* δκ, *ita linea* κκ *ad lineam* κγ. *ſingulæ enim ſunt ſingulis æquales*. Per *compoſitam ergo proportionem quæ probatur per* 18.5, *ſicut linea* ακ *ad lineam* κδ, *ita linea* κγ *ad lineã* κγ. Sed *ſicut linea* ακ *ad lineam* κδ, *ita quadratum lineæ* ακ, *quod eſt quadratum* αγ, *ad parallelogrammum ex* ακ, κδ, *hoc eſt parallelogrammum* δγ *per* 1.6. *Sicut autem linea* κγ *ad lineam* κγ, *ita parallelogrammum* δγ *ad quadratum lineæ* κγ, *quod eſt quadratum* βγ. *Sicut ergo quadratum* αγ *ad parallelogrammum* δγ, *ita parallelogrammum* δγ *ad quadratum* βγ. Ergo *parallelogrammum* δγ *eſt medium proportionaliter inter quadrata* αγ, βγ. *quod demonſtrandum erat.*

Lemma.

Quæ ſunt media proportionaliter inter eadē aut æqualia ſunt, ipſa quoque inter ſe æqualia. Sint tres magnitudines α, ϐ, γ. *Sitque ſicut* α *ad* ϐ, *ita* β *ad* γ. *ſit ſimiliter ſicut eadē magnitudo* α *ad* δ, *ita* δ *ad eandē magnitudinē* γ. Dico β, δ *eſſe inter ſe æqualia*. Nam *proportio* α *ad* γ *eſt proportio duplicata ipſius* α *ad* ϐ *per diffinitionē, ſimiliter*

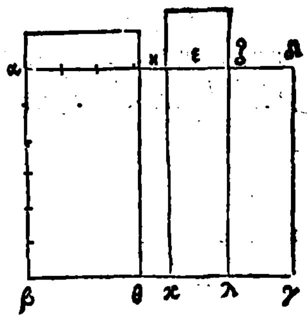
liter proportio eadē ipsius α ad γ, est proportio duplicata ipsius α ad δ, per eandē diffinitionē. sed quorum æqualiter multiplicia sunt æqualia, aut eadē ipsa quoq; sunt æqualia. Ergo sicut α ad β, ita α ad δ: ergo per 9.5. β, δ, sunt inter se æqualia. Idē, si fuerint aliæ magnitudines æquales ipsis α, γ puta ε, ζ inter quas sit media proportionalis magnitudo δ.

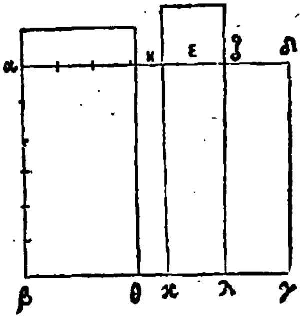


Quinquagesimumquartum Theorema.

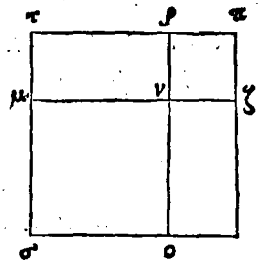
Si superficies contenta fuerit ex rationali & binomio primo, linea quæ illam superficiē potest, est irrationalis quæ binomium uocatur.

Superficies enim, αβγδ, cōtineatur ex linea rationali αβ & binomio primo linea αδ. Dico lineam quæ superficiem αγ potest esse irrationalē illam quæ uocatur binomium. Cum enim linea αδ sit binomium primū, diuidatur in sua nomina in pūcto ε, sitq; maius nomen αε, constat lineas αε, εδ esse rationales potentia tantum commensurabiles, & lineam αε plus posse, quàm linea εδ quadrato lineæ sibi cōmensurabilis longitudine, & lineam αε esse longitudine cō-

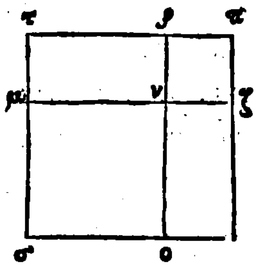




mensurabilem lineæ propositæ rationali α ϐ. *Diuidatur linea* ι δ *bifariam, & æqualiter in puncto* ζ. *Et quoniam linea* α ι *plus potest quàm linea* ι δ *quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis, si quartæ parti quadrati lineæ minoris, hoc est quadrato lineæ* ι ζ *æquale secundum maiorẽ lineã, nempe* α ι *applicetur, deficiẽs figura quadrata diuidet lineã maiorem, nempe* α ι *in partes inter se longitudine commensurabiles, per secundam partem 18 huius. applicetur ergo secũdum lineam* α ι *æquale quadrato lineæ* ι ζ *parallelogrammum ex* α κ, κ ι. *Ergo linea* α κ *est longitudine commensurabilis lineæ* ι κ. *Ducantur per puncta* κ, ι, ζ *alterutri linearum* α β, δ γ *parallelæ* κ θ, ι χ, λ ζ *per 31.1. & parallelogrammo* α θ *æquale quadratum construatur* σ ν: *parallelogrammo uerò* κ χ, *sit æquale quadratum* ν π, *& ita describãtur, ut linea* μ ν *sit in eadem recta linea cum* ν ξ. *sunt ergo in eadẽ recta linea lineæ* ρ ν, ν ο, *& compleatur parallelogrammum* σ π. *Ergo parallelogrammũ* σ π *est quadratum per ea quæ dicta sunt in demonstratione lemmatis penultimi. Et quoniam parallelogrammum ex* α κ, κ ι *est æquale quadrato lineæ* ι ζ: *Est igitur sicut linea* α κ *ad lineam* ι ζ, *ita linea* ι ζ *ad lineã* κ ι *per 17.6. Ergo per 1.6. sicut parallelogrammum* α θ *ad parallelo-*



rallelogrammum ι λ, ita parallelogrammum ι λ ad parallelogrammum κ κ. Ergo parallelogrammũ ι λ est medium proportionaliter inter parallelogramma α θ, κ κ. Sed parallelogrammum α θ est æquale quadrato σ υ. parallelogrammum uerò κ κ est æquale quadrato υ ϖ. Ergo quadratorum σ υ, υ ϖ mediũ proportionale est ι λ, quorũ quadratorum σ υ, υ ϖ medium quoque proportionaliter est parallelogrammum μ ρ per lemma penultimũ. ergo μ ρ est æquale parallelogrammo ι λ per lemma proximum ante hoc theorema. Sed parallelogrammũ μ ρ est æquale parallelogrammo ο ξ per 43.1. parallelogrammum uerò ι λ est æquale parallelogrammo ζ γ. Totũ ergo parallelogrammum ι γ est æquale duobus parallelogrammis μ ρ, ο ξ inter se æqualibus. Sed parallelogramma α θ, κ κ sunt æqualia quadratis σ υ, υ ϖ. totum ergo parallelogrammum α γ est æquale toti quadrato σ ϖ, hoc est quadrato lineæ μ ξ. Ergo linea μ ξ potest parallelogrammum α γ. dico lineam μ ξ esse binomiũ. Cum enim linea α κ sit longitudine commensurabilis lineæ κ ι, ergo linea tota α ι est commensurabilis longitudine utrique α κ, κ ι per 16. Sed per suppositionem linea α ι est longitudine commensurabilis lineæ α β, ergo & utraque α κ, κ ι est commensurabilis longitudine lineæ α β per 12. est autem linea α β rationalis: rationalis est ergo utraque α κ, κ ι. Est ergo utrũq; parallelogrammum α θ, κ κ rationale per 20. Ergo & parallelogrammum α θ erit commensurabile parallelogrãmo κ κ. ergo & quæ sunt illis æqualia, nempe quadrata σ υ, υ π quæ sunt quadrata linearũ μ υ, υ ξ sunt rationalia & commensurabilia. Et quoniã

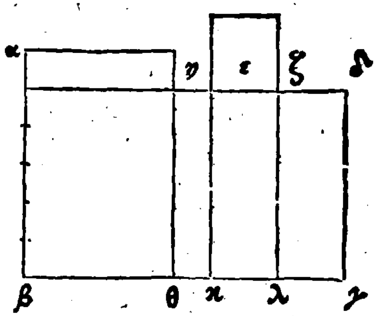


linea αι est per positionem longitudine incõmensurabilis lineæ ιδ, sed linea αι lineæ ακ est commensurabilis, ut modo probatum est: linea autem ιδ est commensurabilis lineæ ιξ. Ergo per corollariũ à nobis positum post 14. linea ακ, est incommensurabilis longitudine lineæ ιζ. Quare & parallelogrammum αθ parallelogrammo ιλ est incõmensurabile. Ergo *& quadratũ σν est incommensurabile parallelogrãmo μϱ, quia per positionem parallelogrãmum αθ est æquale quadrato σν: & parallelogrãmum ιλ probatum est æquale parallelogrammo μϱ. Sed sicut quadratum σν, ad parallelogrammum μϱ, ita linea ον ad lineam νϱ per 1.6. ergo per 10 linea ον est incommẽsurabilis lineæ νϱ. est autem linea ον æqualis lineæ μν: linea autem νϱ lineæ νξ. est ergo incommensurabilis linea μν lineæ νξ.* Modo *autem probatum est quadrata ambarum linearum μν, νξ esse rationalia & commensurabilia.* Ergo *lineæ μν, νξ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles. ergo linea μξ est binomium, & potest parallelogrammum αγ. quod demonstrandum erat.*

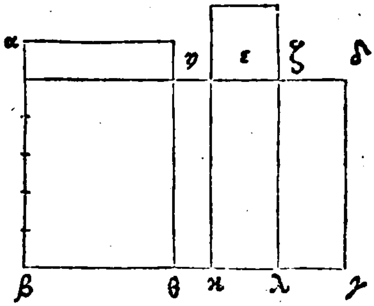
Quinquagesimumquintum Theorema.

Si superficies contenta fuerit ex linea rationali & binomio secundo, linea potens illam superficiem est irrationalis quæ bimediale primum uocatur.

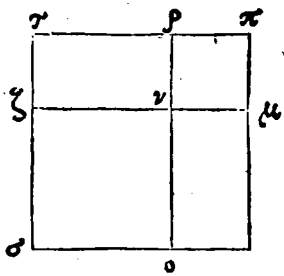
Superficies enim, αϐγδ, contineatur ex rationali αϐ & binomio secundo, quæ sit linea αδ. Dico *lineam quæ superficiem*



perficiẽ α γ poteſt, eſſe bimediale primũ. Cũ enim linea α δ ſit binomium ſecũdum, diuidatur in ſua nomina in pũcto ε, ita ut maius nomen ſit α ε. ergo lineæ α ε, ε δ ſunt rationales tantum potentia commenſurabiles, & linea α ε poteſt plus quàm linea ε δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen nempe ε δ eſt commenſurabile longitudine lineæ α β. Secetur linea ε δ bifariam & æqualiter in puncto ζ, & quadrato lineæ ε ζ æquale ſecundum lineam α ε applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod parallelogrammum ſit ex lineis α κ, κ ε. Ergo linea α κ, eſt longitudine cõmenſurabilis lineæ κ ε: & per puncta κ, ε, ζ ducantur parallelæ lineis α β, δ γ, lineæ κ θ, ε κ, ζ λ. Et parallelogrãmo α θ æquale quadratum conſtruatur σ ν. parallelogrammo uerò κ κ, æquale quadratum ſimiliter cõſtruatur ν ϖ, & ita componantur ut linea μ ν, & linea ν ξ conficiant unam lineam rectam. ergo & lineæ σ ν, ν ϱ cõficiunt unã & eandem lineam, & compleatur quadratũ σ ϖ. Conſtat ex his quæ demõſtrata ſunt in proximo theoremate parallelogrammum μ ϱ eſſe proportionaliter mediũ inter quadrata σ ν, ν ϖ, & æquale parallelogrãmo ε λ & lineam μ ξ poſse ſuperficiẽ α γ. Modo ſupereſt ut demonſtremus lineam μ ξ eſſe bimediale primum: quoniã linea α ε eſt longitudine incommenſurabilis lineæ ε δ, & linea ε δ eſt commenſurabilis longitudine lineæ α β. eſt



ergo linea αι longitudine incommensurabilis lineæ αβ per 14. Et quoniam linea ακ est commensurabilis lõgitudine lineæ κι, est ergo tota linea αι lõgitudine commensurabilis lineæ utrique ακ, κι per 16. est autẽ linea αι rationalis, ergo utraque ακ, κι rationalis. Et quoniam linea αι est longitudine incommẽsurabilis lineæ αβ. est autem linea αι commensurabilis longitudine utrique ακ, κι, ergo lineæ ακ, κι sunt longitudine incõmensurabiles lineæ αϐ. ergo lineæ αϐ, ακ, κι sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. Quare utrunque parallelogrammũ αθ, κκ est mediale per 22. quare utrũque quadratum σν, νϖ, est etiã mediale, ergo lineæ μν, νξ, sunt mediales. Et quoniã linea ακ est longitudine cõmẽsurabilis lineæ κι, commẽsurabile est parallelogrãmũ αθ parallelogrammo κκ per 1.6. & 10 huius, hoc est quadratum σν quadrato νϖ, hoc est quadratum lineæ μν, quadrato lineæ, νξ, quare lineæ μν, νξ sunt potentia cõmensurabiles. Et quoniã linea αι est longitudine incõmẽsurabilis lineæ ιδ. sed linea αι est longitudine cõmẽsurabilis lineæ ακ, linea uerò ιδ est lõgitudine commensurabilis lineæ ιζ. est ergo linea ακ incommensurabilis longitudine lineæ ιζ per corollarium 14 theorematis. Quare & parallelogrammũ αθ est incommen-

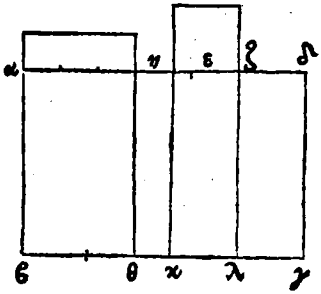


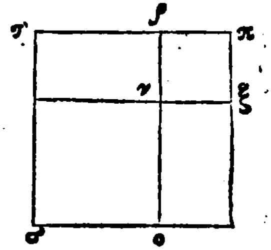
commensurabile parallelogrammo ι λ, hoc est quadratum σ υ parallelogrãmo μ ρ, hoc est linea ο υ lineæ υ ρ, hoc est linea μ υ lineæ υ ξ est longitudine incommensurabilis. Ergo lineæ μ υ, υ ξ sunt potentia tantum commensurabiles. Sed modo probatũ est easdem esse mediales, ergo lineæ μ υ, υ ξ sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico præterea eas continere superficiem rationalem. Cum enim linea ι δ sit longitudine cõmensurabilis utrique α β, ι ζ. Est ergo linea ι ζ longitudine commensurabilis lineæ ι κ quæ est æqualis lineæ α β. Est autẽ utraque linea ι ζ, ι κ rationalis. ergo parallelogrammũ ι λ est rationale per 20 huius, hoc est ei æquale parallelogrammum μ ρ. Sed parallelogrammum μ ρ est contentum ex lineis μ υ, υ ξ. Ergo per 37 linea μ ξ est bimediale primum quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio tertio, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis quæ dicitur bimediale secundum.

Superficies enim α β γ δ contineatur ex rationali α β & binomio tertio linea α δ, quæ sit diuisa in sua nomina in puncto ι, quorum maius nomen sit linea α ι. Dico lineã quæ potest superficiem α γ esse irrationalem uocatã bimediale secundum. Sit enim eadem constructio figurarum quæ in proximis theorematibus. Quoniam linea α δ est binomium tertiũ lineæ α ι, ι δ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea α ι plus potest quàm linea ι δ quadrato lineæ sibi longitudine com-





mẽsurabilis, & neutra linearũ α ι, ι δ est longitudine commẽsurabilis lineæ α ϐ. Sicut in superioribus est demonstratũ, ita hìc demonstrari potest lineã μ ξ posse superficiẽ α γ, & lineas μ ν, ν ξ esse mediales potentia tantũ cõmensurabiles, itaque lineam μ ξ esse compositã ex lineis medialibus potentia tantum commensuralibus. Restat demonstrandum *eandem lineam μ ξ esse bimediale secundum, quoniam linea ι δ est longitudine incommẽsurabilis lineæ α ϐ, hoc est lineæ ι κ. sed linea ι δ est commẽsurabilis lõgitudine lineæ ι ζ.* E*st ergo linea ι ζ lõgitudine incommẽsurabilis lineæ ι κ. ergo lineæ ζ ι, ι κ sunt rationales, quia ex hypothesi linea ι δ est rationalis, cui linea ζ ι est commensurabilis.* E*rgo lineæ ζ ι, ι κ sunt rationales potẽtia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum ι λ est mediale per 22. hoc est parallelogrammum μ ϱ, quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ.* E*rgo linea μ ξ est bimediale secundum.*

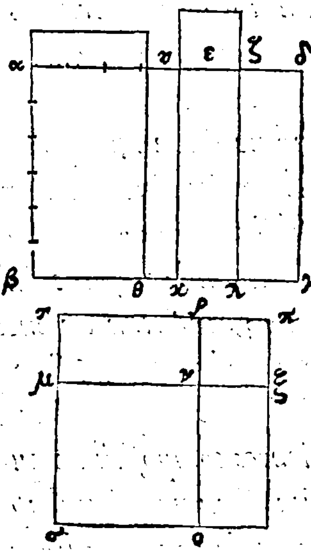
Quinquagesimumseptimum Theorema.

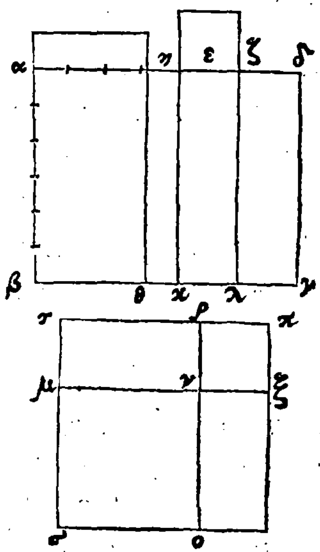
Si superficies contineatur ex rationali & binomio quarto, linea potens superficiem illam est irrationalis, quæ dicitur maior.

Superficies α γ contineatur ex linea rationali α ϐ, & binomio quarto, linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι,

sitq;

ſitq́; maius nomen α ι. Dico *lineam quæ poteſt ſuperficiem* α γ *eſſe irrationalẽ eam, quæ dicitur maior. Cum enim linea* α δ *ſit binomium quartum, ergo lineæ* α ι, ι δ *ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: & linea* α ι *plus poteſt quàm linea* ι δ *quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: & linea* α ι *eſt longitudine cõmẽſurabilis rationali* α β. *Secetur linea* ι δ *bifariã & æqualiter in puncto* ζ, *& ſecũdum lineam* α ι *quadrato lineæ* ι ζ *æquale applicetur parallelogrammum ex* α κ, κ ι. *Ergo linea* α κ *eſt incommẽſurabilis longitudine lineæ* κ ι *per ſecundam partem* 19 *theorematis. Ducantur ad lineam* α β *parallelæ* κ θ, ι κ, ζ λ, *& fiant cætera ut in ſuperioribus. conſtat lineam* μ ξ *poſſe ſuperficiem* α γ. Nunc *demõſtremus illam lineã* μ ξ *eſſe irrationalem, quæ maior dicitur.* Cum *enim linea* α κ *ſit incommenſurabilis longitudine lineæ* κ ι. *ergo etiam erit parallelogrammũ* α θ *incommenſurabile parallelogrammo* κ χ, *hoc eſt quadratum* σ ν *quadrato* ν π. *ergo lineæ* μ ν, ν ξ *ſunt potentia incommenſurabiles.* Et *quoniã linea* α ι *eſt longitudine cõmenſurabilis rationali* α β, *id eſt per poſitionẽ, parallelogrammũ* α χ *eſt rationale per* 20. *ergo & compoſitũ ex quadratis illi æqualibus, nempe* σ ν, ν π, *quæ ſunt quadrata linearũ* μ ν,

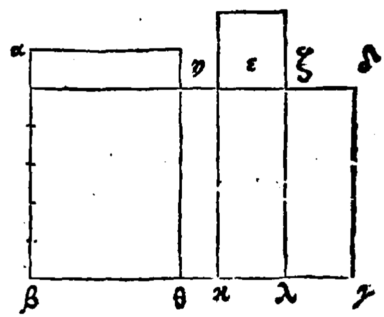




ν ξ, erit similiter rationale. & quoniam linea ι δ est longitudine incommensurabilis lineæ α β, hoc est lineæ ι κ: & linea ι δ est commensurabilis longitudine lineæ ι ζ: Ergo linea ι ζ est longitudine incommensurabilis lineæ ι κ. ergo parallelogrammũ ι λ est mediale, hoc est μ ρ, contētum ex lineis μ ν, ν ξ. ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositũ ex quadratis ipsarum rationale: parallelogrammum uero ex ipsis mediale. ergo tota linea μ ξ est irrationalis quæ dicitur linea maior, & potest superficiem α γ quod demonstrandum erat.

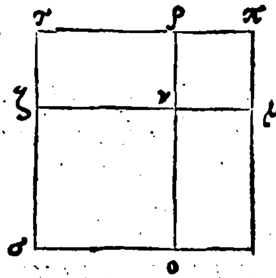
Quinquagesimumoctauum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio quinto, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis, quę dicitur potēs rationale & mediale.



Superficies α γ contineatur ex rationali α β & binomio quinto, linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι, ita ut maius nomen sit α ι. Dico lineã quæ potest superficiem illam α γ, esse

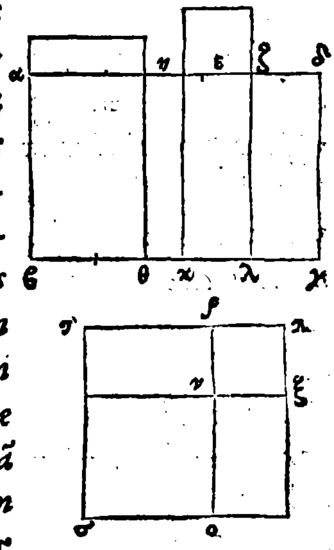
esse irrationalem, quæ dicitur poten s rationale & mediale. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedēti. Constat *lineam quæ potest superficiem* α γ *esse* μ ξ. Demonstremus *illam lineam* μ ξ, *esse lineam potentem rationale & mediale.* Cum enim *linea* α κ *sit incommensurabilis longitudine lineæ* κ ι, *est etiam incommensurabile parallelogrammum* α θ *parallelogrammo* θ ι, *hoc est quadratū lineæ* μ ν, *quod est quadratū* σ ν *quadrato lineæ* ν ξ, *quod est quadratū* ν π. Ergo *lineæ* μ ν ν ξ *sunt potentia incommensurabiles.* Et *quoniā linea* α δ *est binomium quintū, estq; minus eius nomē linea* ι δ *illa linea* ι δ, *est lōgitudine cōmensurabilis rationali* α β. Sed *linea* α ι *est longitudine incommensurabilis lineæ* ι δ. Ergo *linea* α ι *est longitudine incommēsurabilis rationali* α β. *ergo lineæ* α β, α ι *sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum* α κ, *est mediale hoc est compositum ex quadratis linearum* μ ν, ν ξ. Et *quoniam est commensurabilis longitudine linea* ι δ *lineæ* α β, *hoc est lineæ* ι κ. *sed linea* ι δ *est commensurabilis longitudine lineæ* ι ζ. Ergo *& linea* ι ζ *est longitudine commēsurabilis lineæ* ι κ, *& linea* ι κ *est rationalis. ergo & parallelogrammū* ι λ *erit rationale per* 20. *hoc est parallelogrammum* μ ρ *quod continetur ex lineis* μ ν, ν ξ. Ergo *illæ lineæ* μ ν, ν ξ *sunt potētia incōmensurabiles cōficientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: parallelogrammum uerò ex ipsis rationale.* Ergo *tota linea* μ ξ



est irrationalis, quæ dicitur potēs rationale & mediale: & potest superficiem α γ. quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumnonum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio sexto, linea quæ illam superficiem potest est irrationalis, quæ dicitur potens duo medialia.

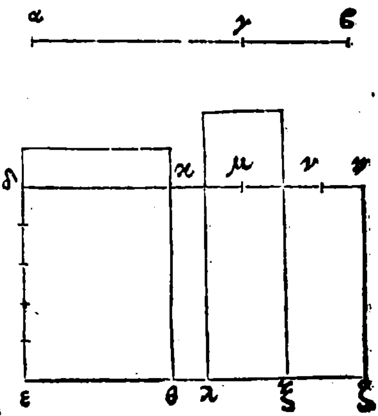


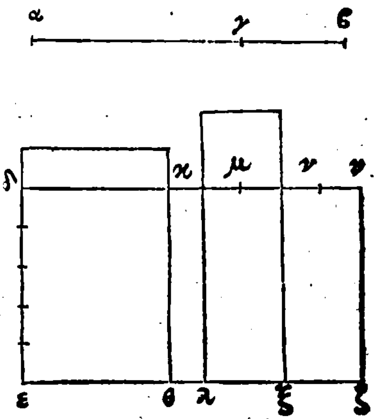
Superficies α β γ δ, contineatur ex rationali α ϛ, & binomio sexto linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι, ita ut maius illius nomē sit α ι: dico lineā quæ potest superficiem α γ esse irrationalem eam, quæ dicitur potens duo medialia. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedentibus. Manifestum *est lineā quæ potest superficiem α γ esse lineā μ ξ, & lineam μ ν esse incommensurabilem potentia lineæ ν ξ: & quoniam est incommēsurabilis longitudine linea α ι lineæ α ϛ. ergo lineæ illæ α ι, α ϛ sunt rationales potentia tantum commēsurabiles.* Ergo *parallelogrammum α κ, hoc est compositum ex quadratis linearum μ ν, ν ξ est mediale.* Rursus *cum linea ι δ sit incommēsurabilis longitudine lineæ α ϛ, ergo etiam incommensurabilis longitudine erit linea ι ζ lineæ ι κ.* Ergo *mediale erit parallelogrammum ι λ, hoc est μ ρ, quod cōtinetur ex μ ν, ν ξ.* Et *quoniam est longitudine incommēsurabilis linea α ι linea* *neæ ι ζ. ergo etiam parallelogrammum α κ erit incommensurabile parallelogrãmo ι λ. Sed parallelogrammũ α κ eſt æquale compoſito ex quadratis linearum μ ν, ν ξ: parallelogrammũ uerò ι λ eſt æquale ei quod fit ex μ ν, ν ξ.* Ergo *compoſitum ex quadratis linearũ μ ν, ν ξ eſt incommẽſurabile ei quod fit ex μ ν, ν ξ, eſtq́; mediale utrũque: & lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia incõmenſurabiles.* Ergo *tota linea μ ξ eſt potens duo medialia, & poteſt ſuperficiem α γ. quod demonſtrandum fuit. Hîc legitur quoddam lemma, quod quia uiſum eſt idem cũ eo quod poſtponitur 39 theoremati, ideo prætermiſimus. præterea quæ hîc affertur illius demonſtratio, cum non ſatisfaciat, ſuperiore illa, quæ & certiſsima & facillima eſt, contenti ſimus: hoc ipſum lemma perſecutus eſt Campanus poſt 35.*

Sexageſimum Theorema.

Quadratum binomij ſecundum lineam rationalem applicatũ facit alterũ latus binomiũ primũ.

Sit binomium linea α β diuiſa in ſua nomina in pũcto γ, ita ut maius nomẽ ſit α γ: & proponatur linea rationalis lineæ δ ε: & quadrato lineæ α β æquale ſecundum lineam δ ε applicetur parallelogrammum δ ε, ζ κ latus alterum faciẽs lineam δ κ. Dico *lineam δ κ*





esse binomiũ primum. Nã secundum lineam δι quadrato lineæ αγ æquale applicetur parallelogrammũ δθ. quadrato autem lineæ βγ æquale applicetur parallelogrammum κλ. Residuum ergo, nempe id quod fit bis ex lineis αγ, γβ est æquale residuo uidelicet parallelogrammo μζ. Secetur linea μκ bifariã & æqualiter in puncto ν. & ducatur linea νξ parallela utriq; linearum μλ, κζ. Vtrumuis ergo parallelogrammorũ μξ, νζ est æquale ei quod fit semel ex lineis αγ, γβ. Et quoniam linea αβ est binomium diuisa in sua nomina in puncto γ. ergo lineæ αγ, γβ sunt rationales potẽtia tantum commensurabiles. Ergo quadrata linearum αγ, γβ sunt rationalia, ideóque cõmensurabilia inter se. quare & compositum ex illis quadratis linearum αγ, γβ est commensurabile singulis quadratis linearũ αγ, γβ per 16. Ergo compositum ex quadratis linearum αγ, γβ est rationale. est autem æquale parallelogrammo δλ. ergo & parallelogrammum δλ est rationale, & secundum lineam rationalem applicatur δι. Ergo linea δμ est rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ δι per 21. Rursus quoniam lineæ αγ, γβ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: ergo id quod fit bis ex αγ, γβ, nempe parallelogrammum μζ est mediale per 22. & illud parallelogrammum μζ applicatur secũdum rationalem

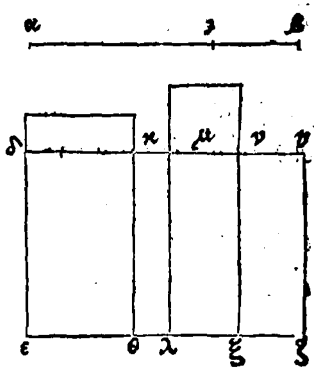
nalem

nalem μ λ. est ergo linea μ ν rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ μ λ, hoc est lineæ δ ι. Est autem & linea δ μ rationalis & longitudine commensurabilis lineæ δ ι. Est ergo linea δ μ, lineæ μ ν longitudine incõmensurabilis. Sunt autem ambæ rationales. sunt ergo lineæ δ μ, μ ν rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo *linea δ ν est binomium.* Demon*stremus præterea illam esse binomium primum.* Nam *cum quadratorum linearum α γ, γ ϛ sit proportionaliter medium parallelogrammum ex α γ γ β per lemma positum post* 53. Ergo *etiam parallelogrammorum δ θ, κ λ, proportionaliter medium erit parallelogrammum μ ξ, quia singula singulis sunt æqualia.* Est *ergo sicut parallelogrammum δ θ ad μ ξ, ita μ ξ ad κ λ, hoc est sicut linea δ κ ad lineam μ ν, ita linea μ ν ad lineam μ κ.* Ergo *quadratum lineæ μ ν est æquale parallelogrammo ex δ κ, μ κ.* Et *quoniã quadratum lineæ α γ est cõmensurabile quadrato lineæ γ ϛ: ergo & parallelogrammum δ θ est cõmensurabile parallelogrammo κ λ.* Q*uare & linea δ κ est longitudine commensurabilis lineæ κ μ per* 1.6. & 10 *huius.* Et *quoniam quadrata linearũ α γ, γ β sunt maiora eo quòd fit bis ex α γ, γ β per lemma positũ post* 39. *ergo & parallelogrammũ δ λ est maius parallelogrammo μ ζ.* Q*uare & linea δ μ est maior linea μ ν per.* 1.6. Et *est æquale parallelogrammũ ex δ κ, κ μ quadrato lineæ μ ν hoc est quartæ parti quadrati lineæ μ ν, quia linea μ ν diuisa est bifariam & æqualiter in puncto ν, & est linea δ κ longitudine commensurabilis lineæ κ μ.* Ergo *per* 18. *linea δ μ plus potest quàm linea μ ν quadrato lineæ sibi lon-*

gitudine commensurabilis. Sunt autem & lineæ δμ, μκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea δμ, quæ est maius nomen, est longitudine commensurabilis propositæ lineæ rationali δι. Ergo linea δκ est binomium primum. quod demonstrandum erat.

Sexagesimumprimum Theorema.

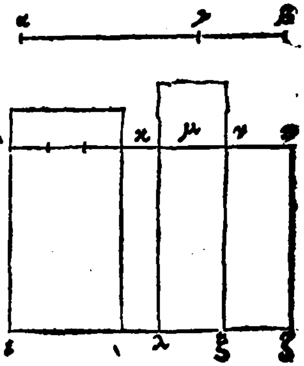
Quadratum bimedialis primi secundum rationalem lineam applicatum facit alterum latus binomium secundum.



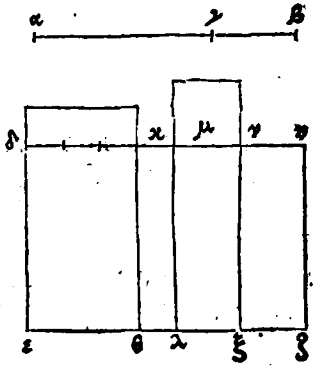
Sit bimediale primum linea αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, quorum maius nomē sit, αγ: & proponatur linea rationalis δι, secundū quam applicetur æquale quadrato lineæ αβ parallelogrammū δζ faciens alterum latus lineam δκ: dico lineā δκ esse binomiū secundum. Sint enim eædem constructiones quæ in proximo theoremate, quoniam bimediale primum diuisum est in sua nomina in puncto γ. Quadrata linearum, αγ, γβ sunt medialia. ergo parallelogrammum δλ est etiā mediale. Est ergo rationalis linea δμ, & incommensurabilis longitudine lineæ δι per 23. Rursus quoniam id quod fit bis ex αγ, γβ est rationale, etiam parallelogrāmum μζ erit rationale. Ergo linea μκ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ μλ, hoc est lineæ δι. ergo linea δμ est longitudine incommensurabilis lineæ *μν, & sunt rationales: ergo lineæ δμ, μν sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea δν est binomium. demonstremus illam esse binomium secundum. Quoniam quadrata linearum αγ, γβ sunt maiora eo quod fit bis ex αγ, γβ. erit ergo parallelogrammũ δλ maius parallelogrãmo μζ. quare & linea δμ maior linea μν. & quoniam quadratum lineæ αϛ est commensurabile quadrato lineæ γϐ, etiam parallelogrammum δθ erit cõmensurabile parallelogrammo κλ. quare & linea δκ erit commensurabilis longitudine lineæ κμ: & est parallelogrammũ ex δκ, κμ æquale quadrato lineæ μν, hoc est quartæ parti quadrati lineæ μν. Ergo linea δμ plus potest quàm linea μν, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 18. & est linea μν longitudine commensurabilis lineæ rationali δι. ergo linea δν est binomium secundum.*

Sexagesimumsecundum Theorema.

Quadratum bimedialis secundi secundum rationalem applicatũ, facit alterũ latus binomiũ tertiũ.



Sit bimediale secundum linea αϐ diuisa in sua nomina in puncto γ: ita ut maius nomẽ sit αϛ. Sitq; rationalis δι secundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum δζ; faciẽs alterum latus lineam δν. dico lineam δν esse binomium tertium. Sint enim



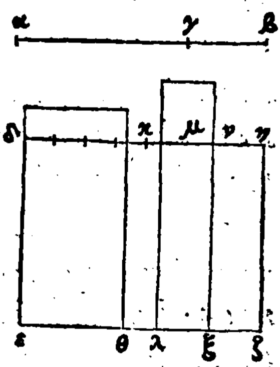
eadem constructiones, quæ in præcedentibus, quoniam linea α β est bimediale secundū, diuisum in puncto γ in sua nomina. ergo & cōpositū ex quadratis linearum α γ, γ β est mediale, estque æquale parallelogrammo δ λ. ergo & δ λ erit mediale. ergo linea δ μ erit rationalis & longitudine incommēsurabilis lineæ δ ε per 23. Eadem ratione & linea μ ν erit rationalis & longitudine incōmēsurabilis lineæ μ λ, hoc est lineæ δ ε. ergo utraque linearum δ μ, μ ν est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ δ ε. Et quoniam est incommensurabilis longitudine linea α γ lineæ γ β: & sicut linea α γ ad lineam γ β, ita & quadratum lineæ α γ ad parallelogrammū ex α γ, γ β per 1.6. Ergo & quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. Quare & compositum ex quadratis linearū α γ, γ β est incōmensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrammum δ λ, parallelogrammo μ ζ. Quare & linea δ μ erit incommensurabilis longitudine lineæ μ ν. Sunt autē ambæ rationales. tota ergo linea δ ν est binomium. Demonstrandum est præterea illam esse binomium tertium. quemadmodum in superioribus, ita hic cōcludemus lineam δ μ esse maiorem linea μ ν, esséque lineam δ κ longitudine commēsurabilem lineæ κ μ, esse etiam parallelogrammum ex δ κ, μ κ æquale quadrato lineæ μ ν. ergo & lineā δ μ plus posse quàm linea

μ ν

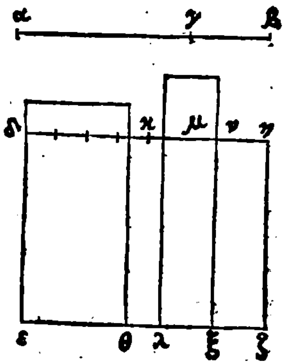
μν quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & neutra ex δμ, μν eſt longitudine commenſurabilis lineæ δι. ergo linea δν eſt binomium tertium.

Sexageſimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ maioris ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum.



Sit linea maior αβ diuiſa in ſua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen ſit αγ, ſitq; rationalis δι, & ſecundum lineam δι quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum ζδ faciens alterũ latus δν. dico lineam δν eſſe binomium quartum. Sint eædem conſtructiones quæ in præcedẽtibus. & quoniam linea αβ eſt linea maior diuiſa in ſua nomina in puncto γ, lineæ αγ, γβ ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarũ rationale: id uero quod fit ex ipſis, mediale. Cum igitur compoſitum ex quadratis linearum αγ, γβ ſit rationale: ergo & parallelogrãmũ δλ erit rationale. ergo & linea δμ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ δι. Rurſus cum id quod fit bis ex αγ, γβ, hoc eſt parallelogrammum μζ ſit mediale, & ſecũdum lineam rationalem μλ ſit applicatũ: ergo & linea μν erit rationalis, & longitudine incõmenſurabilis lineæ δι. ergo & linea δμ erit longitudine incommenſurabilis li-

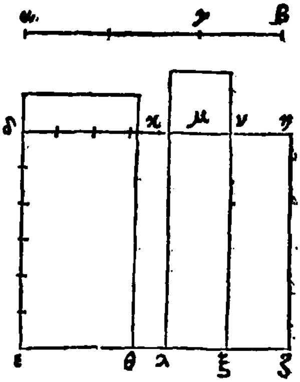


neæ μκ. ergo lineæ δμ, μκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea δκ erit binomium. Demonstrandum est illam *præterea esse binomium quartũ similiter, ut in præcedentibus concludetur lineam δμ esse maiorem linea μκ. Cum igitur quadratum lineæ αγ sit incõmẽsurabile quadrato lineæ γβ. ergo & parallelogrammum δθ erit incommẽsurabile parallelogrammo κλ. Quare & linea δκ erit longitudine incommensurabilis lineæ κμ.* Ergo *per 19. linea δμ plus potest, quàm linea μκ quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis: suntq́; lineæ δμ, μκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea δμ longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali δε. ergo tota linea δκ erit binomium quartum.*

Sexagesimumquartum Theorema.

Quadratum lineæ potẽtis rationale & mediale secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quintum.

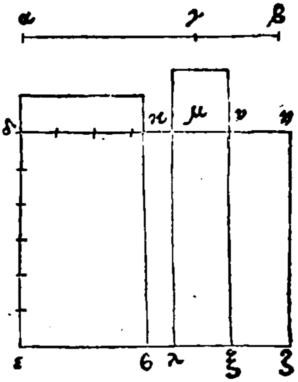
Sit linea potens rationale & mediale αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen sit αγ: sitq́; rationalis δε, & secũdum lineam δε quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum δζ, faciens alterũ latus lineã δη. dico lineam δη esse binomium quintum. Sint eædem constructiones quæ in præcedentibus. Cum igitur linea αβ sit potẽs rationale & mediale diuisa in sua



ſua nomina in pũcto γ, lineæ α γ, γ β ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarum, mediale: id uerò quod fit ex ipſis, rationale. Cum igitur compoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β ſit mediale, ergo parallelogrammũ δ λ erit etiam mediale. quare linea δ μ erit rationalis longitudine incommẽſurabilis lineæ δ ε. Rurſus cum id quod fit bis ex α γ, γ β ſit rationale, hoc eſt parallelogrammũ μ ζ, ergo linea μ η erit rationalis longitudine commẽſurabilis lineæ δ ε. Igitur linea δ μ eſt longitudine incommẽſurabilis lineæ μ η. Ergo lineæ δ μ, μ η erunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo tota linea δ η erit binomiũ. dico prætereà illam eſſe binomium quintũ. Similiter enim demonſtrabitur parallelogrammũ ex δ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ μ ν, & lineam δ κ eſſe longitudine incommenſurabilẽ lineæ κ μ. Ergo per 19. linea δ μ plus poteſt quàm linea μ η quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ſuntq́; lineæ δ μ, μ η rationales potentia tantum cõmẽſurabiles, eſtq́; minor linea μ η longitudine cõmẽſurabilis lineæ δ ε. ergo tota linea δ η erit binomiũ quintũ.

Sexageſimumquintum Theorema.

Quadratum lineæ potentis duo medialia ſecundũ rationalem applicatum, facit alterum latus binomium ſextum.

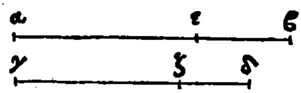


Sit linea potens duo medialia αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, sitq; linea rationalis δε, secundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrãmum δζ faciẽs alterũ latus δη. dico lineã δη esse binomiũ sextum. Sint eædem constructiones quæ in præcedentibus. quoniam linea αϐ est potens duo medialia diuisa in sua nomina in puncto γ, sicut in cæteris dictum est, utrũque parallelogrammum δλ, μζ est mediale, & secundum lineã rationalem δε applicantur. ergo utraque linea δμ, μη est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δε. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ αγ, γβ est incõmẽsurabile ei quod fit bis ex αγ, γϐ. Ergo & parallelogrammum δλ est incommensurabile parallelogrammo μζ. ergo linea δμ est longitudine incommẽsurabilis lineæ μη. ergo lineæ δμ, μη sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea δη est binomiũ. dico præterea illam esse binomium sextum. Quemadmodum enim in cæteris est demonstratum, ita hic etiam demonstretur parallelogrammum ex δκ, κμ esse æquale quadrato lineæ μν, lineamq; δκ esse longitudine incõmensurabilem lineæ κμ, itaque per 19. lineam δμ plus posse quàm linea μη quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. sed neutra linearum δμ, μη est longitudine commensurabilis lineæ rationali δε. ergo tota linea δη est binomium sextum.

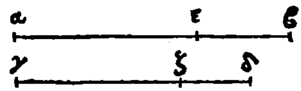
Sexa-

Sexagesimumsextum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis binomio est, & ipsa binomium eiusdem ordinis.



Sit binomium linea α β, sitq; ei longitudine commensurabilis linea γ δ. dico lineam γ δ esse etiam binomium eiusdem ordinis, cuius est & linea α β. cũ enim linea α β sit binomium, diuidatur in sua nomina in puncto ε, sitq; maius nomẽ α ε. Ergo *lineæ α ε, ε β sunt rationales potentia tantum commensurabiles, fiatq; sicut linea α β ad lineam γ δ, ita linea α ε ad lineam γ ζ per* 12. 6. Ergo *& residua ε β ad residuam ζ δ erit sicut tota linea α β ad totam lineã γ δ per* 19. 5. *Sed linea α β est longitudine commẽsurabilis lineæ γ δ. ergo etiam erit longitudine commensurabilis linea α ε lineæ γ ζ: & linea ε β lineæ ζ δ per* 10 *huius. Sunt autem lineæ α ε, ε β rationales. sunt ergo etiam rationales lineæ γ ζ, ζ δ.* Et *quoniam est sicut linea α ε ad lineam γ ζ, ita linea ε β ad lineã ζ δ. permutata ergo proportione sicut linea α ε ad lineã ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ, sed lineæ α ε, ε β sunt potentia tantum commensurabiles. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ, sunt potentia tantum commẽsurabiles per* 10 *huius. Sunt autẽ & rationales: ergo linea tota γ δ est binomium.* Dico *præterea esse binomium eiusdem ordinis cuius & linea α β. nam linea α ε plus potest quàm linea ε β quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Si primum plus potest quadrato lineæ sibi longitudine commensurabi-*



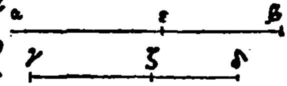
lis, ergo et linea γζ plus poterit, quàm linea ζδ, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15 huius. Et siquidem linea αε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: ergo linea γζ, quæ est longitudine commensurabilis lineæ αε, erit inquam linea γζ etiam longitudine commensurabilis eidem lineæ propositæ rationali per 12 huius, ob eamque causam utraque linea αβ, γδ est binomiũ primum, hoc est utraque erit eiusdem ordinis. Si uerò linea εβ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ergo linea ζδ, quæ est longitudine commensurabilis lineæ εβ, erit etiam longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ob eamq; causam erit utraque binomiũ secundum, hoc est utraque eiusdem ordinis. Si uerò neutra linearum αε, εβ est longitudine cõmensurabilis propositæ rationali, neutra etiam linearum γζ, ζδ erit eidẽ propositæ lineæ rationali commensurabilis longitudine per 14 huius. sic ergo utraque linea erit binomium tertium. Quòd si linea αε plus potest, quàm linea εβ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, ergo & linea γζ plus poterit quàm linea ζδ, quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per 15 huius. Et si quidem linea αε est longitudine commensurabilis propositæ rationali, & linea γζ erit eidem rationali longitudine commensurabilis: tunc erit utraque binomium quartũ. Quòd si linea εβ fuerit rationali commensurabilis longitudine, & linea ζδ erit eidem longitudine commensurabilis: eritque hoc modo utraque binomium quintum.

Quòd

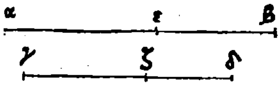
Quòd si neutra linearum αε, εβ fuerit rationali commensurabilis longitudine, neutra etiam γζ, ζδ erit eidẽ commensurabilis longitudine: eritq́; utraque binomium sextum. Quare linea longitudine commensurabilis binomio, est etiam binomium eiusdem ordinis.

Sexagesimumseptimum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis alteri bimedialium, est & ipsa bimediale etiã eiusdẽ ordinis.



Sit bimediale linea αβ: eidem sit alia cõmẽsurabilis lõgitudine γδ. dico lineam γδ esse etiã bimediale eiusdem ordinis, cuius & linea αβ. Diuidatur linea αβ in sua nomina in puncto ε, fiatq́; sicut linea αβ ad lineam γδ, ita linea αε ad lineam γζ: residua ergo linea εβ erit ad lineam ζδ sicut tota linea αβ ad totam γδ: sed linea αβ est longitudine commensurabilis lineæ γδ. ergo & linea αε erit longitudine commensurabilis lineæ γζ, & linea εβ lineæ ζδ. Sunt autẽ lineæ αε, εβ mediales. ergo & lineæ γζ, ζδ sunt etiã mediales per 24. Et quoniam est sicut linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ: sed lineæ αε, εβ sunt potentia tantum commẽsurabiles, ergo & lineæ γζ, ζδ sunt potẽtia tantum cõmensurabiles. sed modo probatum est eas etiam esse mediales, ergo tota linea γδ erit etiã bimediale: dico præterea esse bimediale eiusdẽ ordinis, cuius & linea αβ. cum enim sit sicut linea αε ad lineã εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ: sitq́; sicut linea γζ ad lineã ζδ, ita quadratũ lineæ γζ ad ζδ parallelogrammum ex γζ, ζδ per 1.6.



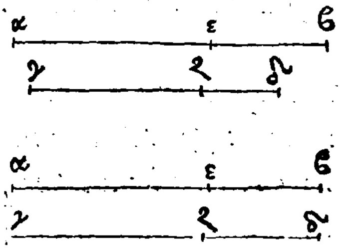
Ergo ſicut linea αι ad lineam ιβ, ita quadratū lineæ γζ ad parallelogrammū ex γζ,ζδ per 11.5. Sed *ſicut linea αι ad lineam ιβ,ita quadratum lineæ αι ad parallelogrammū ex αι,ιβ,per* 1.6.Ergo *ſicut quadratum lineæ αι ad parallelogrammum ex αι,ιβ,ita quadratum lineæ γζ,ad parallelogrammum ex γζ,ζδ per* 11.5.*permutata ergo proportione ſicut quadratū lineæ αι ad quadratum linæ γζ, ita parallelogrammū ex αι, ιβ ad parallelogrammum ex γζ,ζδ: ſed quadratum lineæ αι eſt commenſurabile quadrato lineæ γζ, quia modo probatum eſt lineas αι, γζ eſſe commenſurabiles.* Ergo *parallelogrammum ex αι,ιβ erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ,ζδ.* Si *ergo parallelogrāmum ex αι,ιβ fuerit rationale,hoc eſt ſi linea αβ fuerit bimediale primum,parallelogrammum quoque ex γζ, ζδ erit rationale, ergo linea γδ erit etiā bimediale primum.*Si *uerò parallelogrammum ex αι,ιβ fuerit mediale,hoc eſt ſi linea αβ fuerit bimediale ſecundum,erit etiam parallelogrammum ex γζ,ζδ mediale.* Ergo *etiā linea γδ erit bimediale ſecundū,quare & ambæ erunt eiuſdem ordinis,quod demonſtrandum erat:hoc autem theorema 67.poteſt uniuerſaliter concipi.linea commēſurabilis alteri bimedialium longitudine & ſententia ſiue ſentētia tantum,eſt & ipſa bimediale, etiam eiuſdem ordinis, neque eo minus uerum erit. quod ipſum, etiam eadem uia demonſtrabitur.*

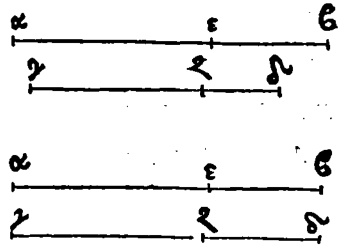
Sexageſimumoctauum Theorema.

Linea cōmēſurabilis lineæ maiori eſt & ipſa maior.

Sit

Sit linea maior αβ cui ſit commenſurabilis linea γδ quocunque modo, hoc eſt, ſiue ſit longitudine & potentia ſimul commenſurabilis, ſiue potentia tantum. Dico lineã γδ eſſe etiam lineã maiorẽ. Diuidatur linea αβ in ſua nomina in puncto ε, fiantq́; cætera quemadmodum in ſuperioribus. Et quoniã eſt ſicut linea αβ ad lineam γδ: ita & linea αε ad lineam γζ, & linea εβ ad lineã ζδ. ergo ſicut linea αε ad lineam γζ: ita linea εβ ad lineam ζδ. ſed linea αβ eſt commenſurabilis lineæ γδ. ergo & linea αε erit commenſurabilis lineæ γζ, & ſimiliter linea εβ lineæ ζδ. Et quoniam eſt ſicut linea αε ad lineã γζ, ita linea εβ ad lineã ζδ. permutata ergo proportione ſicut linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ. ergo ſicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ εβ, ita quadratum lineæ γζ ad quadratũ lineæ ζδ, per 22. 6. Ergo per coniunctam proportionẽ (quæ probatur per 18. 5.) ſicut compoſitum ex quadratis linearũ αε, εβ ad quadratum lineæ εβ, ita compoſitum ex quadratis linearum γζ, ζδ ad quadratũ lineæ ζδ. Ergo per contrariam proportionem ſicut quadratum lineæ εβ ad compoſitum ex quadratis linearum αε, εβ, ita quadratum lineæ ζδ ad compoſitum ex quadratis linearum γζ, ζδ. Ergo permutata proportione ſicut quadratum lineæ εβ ad quadratum lineæ ζδ, ita compoſitum ex quadratis linearum αε, εβ, ad compoſitũ ex quadratis linearum γζ, ζδ. Sed quadratũ lineæ εβ eſt commẽſurabile qua-





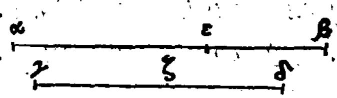
drato lineæ ζδ, quia modo probatũ eſt lineas εβ, ζδ eſſe cõmenſurabiles: ergo & cõpoſitum ex quadratis linearum αε, εβ erit commẽſurabile cõpoſito ex quadratis linearum γζ, ζδ. Sed compoſitum ex quadratis linearum αε, εβ eſt rationale per poſitionem. ergo & compoſitũ ex quadratis linearum γζ, ζδ erit etiam rationale. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita quadratũ lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, εβ. ergo ſicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, εβ. ſed ſicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, ζδ: ergo ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, εβ, ita quadratũ lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, ζδ. ergo permutata proportione ſicut quadratũ lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammũ ex αε, εβ ad parallelogrammum γζ, ζδ. ſed quadratũ lineæ αε eſt commenſurabile quadrato lineæ γζ, quia modo probatum eſt lineas αε, γζ eſſe commenſurabiles, ergo & parallelogrammum ex αε, εβ erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. ſed parallelogrammũ ex αε, εβ eſt mediale per poſitionem. ergo & parallelogrammũ ex γζ, ζδ erit etiam mediale per corollarium 24. Sed (ut modo probatum eſt) ſicut linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ: linea autẽ αε erat per ſuppoſitionem potentia incommẽſurabilis lineæ εβ.

ergo

ergo per 10 & linea γ ζ erit potentia incommensurabilis lineæ ζ δ. Ergo lineæ γ ζ, ζ δ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. ergo tota linea γ δ erit linea maior per 39 huius. ergo linea commẽsurabilis lineæ maiori erit & ipsa linea maior. In hoc *theoremate 68 ideo persequuti non sumus demonstrationẽ* Theonis, *quia difficilior uisa est, & indigere lemmate ad id probandũ, quod pro demonstrato sumit, illis uerbis:* καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν α ε, ε β.

Sexagesimumnonum Theorema.

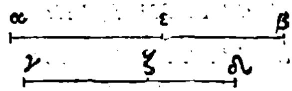
Linea cõmẽsurabilis lineæ potẽti rationale & mediale, est & ipsa linea potẽs rationale & mediale.



Sit linea potẽs rationale & mediale α β, cui sit commensurabilis linea γ δ, siue sit longitudine & potentia siue potentia tantum commensurabilis: dico etiam γ δ esse lineam potentẽ rationale & mediale. Diuidatur *linea α β in sua nomina in pũcto ε: sint quoque eædem construtiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas γ ζ, ζ δ esse potentia incõmensurabiles, sicut sunt lineæ α ε, ε β: & compositũ ex quadratis linearum α ε, ε β esse commensurabile composito ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ: item parallelogrammum ex α ε, ε β esse commensurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. Quare & compositum ex quadratis linearũ γ ζ, ζ δ erit etiam mediale, sicut compositũ ex quadratis linearum α ε, ε β: item parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ* *erit etiam rationale sicut & parallelogrammũ ex αε, εβ. ergo linea γδ erit etiam linea potens rationale & mediale per 40.*

Septuagesimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ potenti duo medialia, est & ipsa linea potens duo medialia.

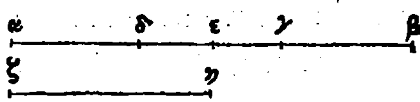


Sit linea potens duo medialia αβ, eiq; cõmensurabilis linea γδ, siue sit longitudine & potẽtia, siue potentia tantum commensurabilis: dico lineam γδ esse etiam lineam potentem duo medialia. Diuidatur linea αβ in sua nomina in puncto ε: sint quoque eædem constructiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas γζ, ζδ esse potentia incommensurabiles, & compositum ex quadratis linearum αε, εβ esse cõmensurabile composito ex quadratis linearũ γζ, ζδ: parallelogrammum uero ex αε, εβ esse commẽsurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. quare & compositũ ex quadratis linearum γζ, ζδ erit etiam mediale: & similiter parallelogrammum ex γζ, ζδ erit mediale. Quòd autẽ compositum ex quadratis linearum γζ, ζδ sit incommẽsurabile parallelogrãmo quod fit ex γζ, ζδ, ita probatur. Cum sit enim sicut compositum ex quadratis linearum αε, εβ ad quadratum lineæ αε, ita compositum ex quadratis linearum γζ, ζδ ad quadratum lineæ γζ (ut probatũ est in præcedentibus.) ergo permutata proportione, sicut compositum ex quadratis linearũ αε, εβ ad compositum ex quadratis linearum γζ, ζδ, ita quadratum

tum lineæ αι ad quadratũ lineæ γζ: sed in superioribus, nempe in 68 theoremate probatum est, sicut quadratũ lineæ αι ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammũ ex αι, ιϐ ad parallelogrammum ex γζ, ζ δ. Ergo sicut cõ positum ex quadratis linearum αι, ιβ ad compositum ex quadratis linearum γζ, ζ δ, ita parallelogrammum ex αι, ι β ad parallelogrammum ex γζ, ζ δ: ergo permutata proportione sicut compositum ex quadratis linearum αι, ι β ad parallelogrammum ex αι, ι ϐ, ita compositum ex quadratis linearum γζ, ζ δ ad parallelogrammum ex γζ, ζ δ. Sed per suppositionẽ compositũ ex quadratis linearum αι, ι ϐ est incommensurabile parallelogrammo ex αι, ι β. ergo & compositum ex quadratis linearum γζ, ζ δ est incommensurabile parallelogrammo ex γζ, ζ δ. Ergo linea γ δ est potens duo medialia.

Scholium.

H*actenus dictum est de senarijs sex, quorum primus senarius cõtinet generationem linearum irrationalium per compositionem: secundus diuisionem, nempe quòd hæ diuidantur in unico tantum puncto: tertius inuẽtionem binomiorum, primi inquam, secundi, tertij, quarti, quinti & sexti, post quem incipit quartus senarius continẽs differentiam linearum irrationalium inter se. Nam ex usu singulorum binomiorum demonstrantur differentiæ irrationalium. Quintus autem docet de applicationibus quadratorum cuiusq; lineæ irrationalis, ex qualibus scilicet irrationalibus sint latitudines cuiusque superficiei applicatæ. In sexto uerò senario dicitur singulas lineas singulis irrationalibus commensurabiles, esse* *etiam ipsas irrationales eiusdem speciei. Mox uero dicetur de septimo senario, in quo reliquæ ipsarũ rursus inter se differẽtiæ dilucide pertractantur. Existit etiam in illis ipsis lineis irrationalibus proportionalitas arithmetica. eáque linea quæ sumitur media proportionaliter secundum medietatem arithmeticam inter nomina cuiusque lineæ irrationalis similiter est irrationalis eiusdẽ speciei. Prius autem constat proportionalitatẽ arithmeticã inter illa nomina reperiri. Sit enim linea αβ quæcunque ex dictis irrationalibus. uerbi gratia, sit binomiũ, diuidaturq́; in sua nomina in puncto γ: sitq́; maius nomẽ αγ, de quo auferatur linea αδ æqualis minori nomini, nempe γβ: diuidaturq́; linea γδ bifariã & æqualiter in puncto ε: manifestum est lineam αε esse æqualem lineæ εβ. Sit alterutri earũ æqualis linea ζη, manifestũ est, quanto differt linea αγ à linea ζη, tanto eandem lineam ζη differre à linea γβ. utrobique enim est differentia δε uel εγ, quod est propriũ arithmeticæ proportionalitatis. Constat autem lineam ζη esse commensurabilem longitudine lineæ αβ, quia est eius dimidia. quare per 66 linea ζη erit etiam binomium, eodémque modo demonstrabitur de cæteris irrationalibus. Totum hoc scholium non reperitur in uetusto.*

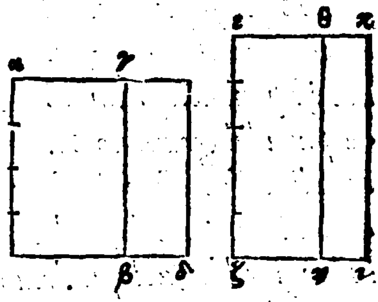


Septuagesimumprimum Theorema.

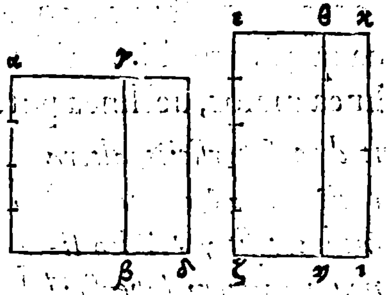
Si duæ superficies rationalis & medialis simul cõponantur, linea quæ totam superficiem compositam

tam poteſt, eſt una ex quatuor irrationalibus, uel ea quę dicitur binomiũ, uel bimediale primũ, uel linea maior, uel linea potẽs rationale & mediale.

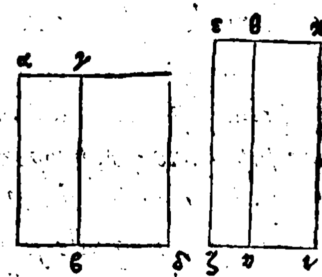
Sint duæ ſuperficies, altera rationalis α ϐ, altera uerò medialis ſit γ δ. Dico lineam potẽtem ſuperficiẽ α δ, eſſe uel binomiũ, uel bimediale primũ, uel lineam maiorem uel lineã



potentem rationale & mediale. Nam ſuperficies α ϐ, eſt uel maior uel minor ſuperficie γ δ: nã æquales eſſe nullo modo poſſunt, cũ alia ſit rationalis, alia uerò medialis. Sit prius ea maior proponaturq; linea rationalis ε ζ, ſecundũ quam æqualis ſuperficiei α ϐ, applicetur ſuperficies parallelogramma rectangula ε η, faciens alterum latus ε θ: ſuperficiei autem γ δ æqualis ſecundum eandẽ lineam ε ζ, hoc eſt ſecũdum lineam θ η applicetur parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ. Cum ſuperficies α ϐ ſit rationalis; etiã parallelogrammum ε η erit rationale: ergo & linea ε θ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ ε ζ per 21. *Rurſus eadem ratione linea θ κ erit rationalis & longitudine incommẽſurabilis lineæ ε ζ per* 23. *& quoniam ſuperficies α ϐ eſt rationalis, ſuperficies uerò γ δ eſt medialis, ſuperficies α ϐ, hoc eſt parallelogrãmum ε η, eſt incõmenſurabile ſuperficiei γ δ: hoc eſt parallelogrãmo θ ι. Ergo per* 1.6 *&* 10. *huius linea ε θ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ θ κ: ergo lineæ ε θ, θ κ ſunt rationales potẽtia tantum*



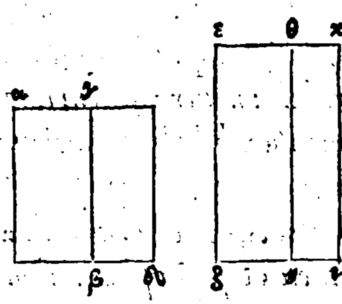
cõmensurabiles. ergo tota linea ι κ est binomiũ diuisum in sua nomina in pũcto θ. sed superficies α β est maior superficie γ δ, hoc est parallelogrammũ ι κ parallelogrammo θ λ. ergo linea ι θ est maior linea θ κ. sed linea ι θ plus potest quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõmẽsurabilis. Prius autem possit plus ea quadrato lineæ sibi commensurabilis: est autem linea ι θ longitudine cõmẽsurabilis lineæ rationali ι ζ, (ut modo probatum est) ergo linea ι κ est binomiũ primum. Ergo per 54 linea potens superficiem ι λ est binomium, quare & linea potens superficiem α δ est binomium. Sed secundo loco linea ι θ plus possit quàm linea θ κ, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq; maius nomen linea ι θ commensurabile longitudine lineæ rationali ι ζ, ergo linea ι κ est binomium quartum. sed linea ι ζ est rationalis, ergo per 57 linea potẽs superficiẽ ι λ, est linea maior: quare & linea potens superficiem α δ, est linea maior. Rursus superficies α β, quæ est rationalis, sit minor superficie γ δ, quæ est medialis, hoc est parallelogrammum ι κ parallelogrammo θ λ. Quare & linea ι θ erit minor linea θ κ: linea uero θ κ plus potest quàm linea ι θ, uel quadrato lineæ sibi longitudine cõmẽsurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Prius possit plus ea quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, est *autē minus nomen, nempe ε θ cōmensurabile longitudine rationali lineæ rationali ε ζ, ut modo probatum est: ergo linea ε κ est binomiū secundum. Ergo per 55 linea potens parallelogrammū ε ι, hoc est parallelogrammum α δ, est bimediale primū. Sed linea θ κ plus posſit quàm linea ε θ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq; minus nomē ε θ commensurabile longitudine lineæ rationali ε ζ, ergo linea ε κ est binomium quintum. ergo per 58 linea potens parallelogrammum ε ι, hoc est ei æquale α δ, erit linea potens rationale & mediale. Ergo si duæ superficies rationalis & medialis &c.*

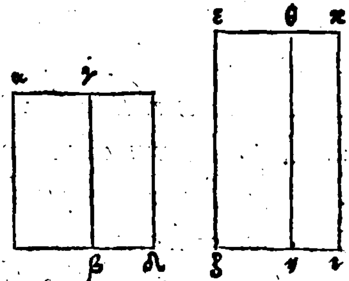


Septuagesimumsecundum Theorema.

Si duæ superficies mediales incommensurabiles simul componantur, fiunt reliquæ duæ lineæ irrationales, uel bimediale secundum, uel linea potēs duo medialia.

Componantur duæ superficies mediales incommensurabiles inter se α β, γ δ: dico lineam potentem superficiem α δ esse uel bimediale secundum, uel lineam potentē duo medialia. Nā superficies α β est uel maior uel minor superficie γ δ (æquales enim esse





nullo modo possunt, cum sint incommensurabiles.) Sit ergo prius superficies αβ maior superficie γδ, proponaturq; linea rationalis εζ secundũ quam æquale superficiei αβ applicetur parallelogrammum εκ, faciens alterum latus εθ: superficiei uerò γδ applicetur æquale parallelogrammum θι, faciens alterum latus θκ: & quoniam utraque superficies αβ, γδ est medialis: hoc est utrũque parallelogrammum εκ, θι, ergo utraque linea εθ, θκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ εζ. Et quoniam superficies αβ, γδ sunt incommensurabiles, ergo est etiam incommensurabile parallelogrammum εκ parallelogrammo θι. ergo & lineæ εθ, θκ, sunt longitudine incommẽsurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. Ergo linea, εκ, est binomium: similiter autem ac in proximo theoremate demonstratur lineam εθ esse maiorẽ linea θκ, quæ linea εθ plus potest, quàm linea θκ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis. Possit prius plus quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: neutra autem linearũ εθ, θκ est longitudine cõmensurabilis lineæ rationali εζ: ergo linea εκ est binomium tertium. ergo per 56. linea potens parallelogrammum ει, hoc est ei æquale αδ est bimediale secundũ. Sed linea εθ possit plus, quàm linea θκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, est autem utraq; εθ, θκ

longitudine

longitudine incommensurabilis lineæ rationali ι ζ: ergo linea ι κ est binomium sextum. Ergo *per 59 linea potens parallelogrammũ ι ι, hoc est α λ est linea potens duo medialia.* Eadem *ratione si superficies α ϛ fuerit minor superficie γ λ, demonstrabimus lineam potentem superficiem α λ, esse uel bimediale secundum uel lineam potentem duo medialia.* Ergo *si duæ superficies mediales &c. binomium & cætera consequentes lineæ irrationales neque sunt eadẽ cum linea mediali, neque ipsæ inter se.*

Nam *quadratum lineæ medialis applicatum secundũ lineam rationalem, facit alterum latus lineam rationalem, & longitudine incommensurabilem lineæ, secũdum quam applicatur, hoc est lineæ rationali per 23.* Quadratum *uero binomij secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium primum per 60.* Quadratum *uero bimedialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ secũdum per 61.* Quadratum *uerò bimedialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium tertium per 62.* Quadratum *uerò lineæ maioris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum per 63.* Quadratum *uerò lineæ potentis rationale & mediale secũdum rationalem applicatũ, facit alterum latus binomium quintum per 64.* Quadratum *uero lineæ potentis duo medialia secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ sextum per 65.* Cũ *igitur dicta latera, quæ latitudines uocantur, differant, & à prima latitudine quoniam est rationalis, cum inter se quoque differant, eo quia sunt* *binomia diuersorum ordinum: manifestum est ipsas lineas irrationales differentes esse inter se.*

Secundus ordo alterius sermonis, qui est de detractione.

Principium senariorum per detractionem.

Septuagesimumtertium Theorema.

Si de linea rationali detrahatur rationalis potentia tantum commensurabilis ipsi toti, residua est irrationalis. Vocetur autem residuum.

De rationali αβ detrahatur rationalis βγ, potētia tātū commensurabilis toti αβ. dico residuam αγ esse irrationalem, quæ uocetur residuum. cum enim linea αβ sit lõgitudine incõmensurabilis lineæ βγ, sitq; sicut linea αβ ad lineam βγ, ita quadratū lineæ αβ ad parallelogrāmum ex αβ, βγ: ergo quadratum lineæ αβ erit incõmensurabile parallelogrāmo ex αβ, βγ. sed quadrato lineæ αβ sunt commensurabilia quadrata linearū αβ, βγ per 16. *Ergo quadrata linearū αβ, βγ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex αβ, βγ per* 14. *sed parallelogrammo ex αβ, βγ commēsurabile est ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo quadrata linearum αβ, βγ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex αβ, βγ. sed quadrata linearū αβ, βγ sunt æqualia ei quod fit bis ex αβ, βγ, & quadrato lineæ αγ, per* 7.2. *ergo id quod fit bis ex αβ, βγ, cum quadrato lineæ αγ, est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per secundam partem* 17 *id quod*

fit

fit bis ex α β, ς γ est incõmensurabile quadrato lineæ α γ. ergo per primam partem eiusdem 17 id quod fit bis ex α ς, ς γ cum quadrato α γ, hoc est illi toti æqualia quadrata linearum α ς, β γ sunt incommensurabilia quadrato lineæ α γ. Hoc *breuius cõcluditur per corollarium à nobis demonstratum post 17. sed quadrata linearum α ς, ς γ sunt rationalia, quia lineæ α β, ς γ positæ sunt rationales. ergo linea α γ est irrationalis: uocetur autẽ residuum.* Hoc *uero theorema nihil aliud dicit, quàm portionem eam maioris nominis ipsius binomij, quæ remanet post detractionem minoris nominis de maiori, esse irrationalem: quæ uocatur residuum, hoc est si de maiori nomine ipsius binomij, quod maius nomen est linea rationalis potentia tantum commensurabilis minori nomini, detrahatur minus nomen, quod ipsum est etiã cõmensurabile potentia tantũ maiori nomini (quod maius nomen hoc theorema uocat lineam totam) residuã lineam esse irrationalem, quam uocat residuum.* Itaque *omnes lineæ, de quibus agitur hoc theoremate, & cæteris quinque consequẽtibus, sunt reliquæ portiones maiorum nominum totarum linearum, de quibus actum est 36. 37. 38. 39. 40 & 41 post detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuagesimumquartum Theorema.

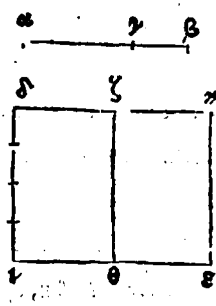
Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum cõmensurabilis toti lineę, quæ uero detracta est cũ tota cõtineat superficiẽ rationalẽ, residua est irrationalis. uocetur autẽ residuũ mediale primũ.

De linea mediali αβ detrahatur medialis βγ potentia tantum commẽsurabilis toti αβ, quæ scilicet βγ cũ αβ contineat rationale, nempe parallelogrammũ ex αβ,βγ. Dico *reliquã αγ esse irrationalem. Vocetur autem residuum mediale primum.* Nam *cum lineæ αβ,βγ sint mediales, quadrata illarum erunt medialia. sed quod fit bis ex αβ,βγ est rationale: ergo cõpositum ex quadratis linearũ αβ, βγ hoc est id quod fit bis ex αβ,βγ, cum quadrato lineæ αγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ,βγ.* Ergo *per secũdam partem 17. id quod fit bis ex αβ,βγ, est incommẽsurabile quadrato lineæ αγ. sed id quod fit bis ex αβ,βγ est rationale. ergo quadratum lineæ αγ est irrationale. ergo & linea αγ irrationalis. Vocetur autẽ residuum mediale primum.* E*st etiam hoc residuum mediale primũ, residua portio maioris nominis bimedialis primi, post detractionem minoris nominis de maiori: unde & denominationem habet residuum mediale primum.*

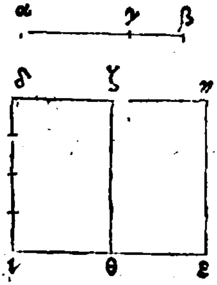
Septuagesimumquintum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum commensurabilis toti, quæ uero detracta est cum tota contineat superficiem medialem, reliqua est irrationalis. Vocetur autem residuum mediale secundum.

De linea mediali αβ, detrahatur medialis βγ potentia tantum commensurabilis toti αβ, cum tota uerò αβ continens superficiem medialem, nempe parallelogrammum ex αβ, βγ: dico reliquã αγ esse irrationalẽ. Vocetur autem



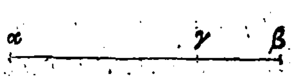
tem residuū mediale secundū. proponatur linea rationalis δι, & secundum illam quadratis linearum αβ, βγ æquale applicetur parallelogrammum δε, faciēs alterum latus δη. Ei uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale secūdum eandem lineam δι, applicetur parallelogrammum δθ faciens alterum latus δζ. parallelogrammum δθ est minus parallelogrā-mo δε: quia & quadrata linearum αβ, βγ sunt maiora eo quod fit bis ex αβ, βγ tanto, quantū est quadratum lineæ αγ per 7.2. Ergo & residuum nempe parallelogrammū ζε, erit æquale quadrato lineæ αγ. Et quoniam quadrata linearum αβ, βγ sunt commensurabilia & medialia: ergo compositum ex ipsis parallelogrammum δε, erit utrique quadrato commēsurabile per 16. ergo & parallelogrammum δε, erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. ergo per 23 linea δη erit rationalis longitudine incōmensurabilis lineæ δι. Rursus cum id quod fit ex αβ, βγ sit mediale: etiam id quod fit bis ex iisdem αβ, βγ erit mediale. ergo & illi æquale parallelogrammū δθ erit mediale. Ergo & linea δζ erit rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ δι. Et cum linea αβ sit longitudine incommensurabilis lineæ βγ, ergo quadratum lineæ αβ erit incommēsurabile parallelogrammo ex αβ, βγ per 1.6 & 10 huius. Sed quadrato lineæ αβ sunt commensurabilia quadrata linearū αβ, βγ, parallelogrammo uero ex αβ, βγ est commensurabile id, quod fit bis ex αβ, βγ. ergo quadra-



ta linearum α β, β γ, hoc est parallelogrammum δ ι est incommẽsurabile ei, quod fit bis ex α β, β γ, hoc est parallelogrãmo δ θ: sed sicut parallelogrammum δ ι ad parallelogrammum δ θ, ita linea δ κ ad lineam δ ζ. Ergo linea δ κ, est longitudine incõmẽsurabilis lineæ δ ζ: sunt autẽ ambæ rationales. Ergo linea ζ κ est residuum per 73. sed linea δ ι est rationalis: parallelogrammum uerò contentum ex linea rationali & irrationali est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demonstrationis 38. Ergo parallelogrammum ζ ι, est irrationale: ergo & linea α γ, quæ illud parallelogrãmum potest est irrationalis. Vocatur autem residuũ mediale secundum: estq; hoc residuum mediale secundum, reliqua portio maioris nominis ipsius bimedialis secundi post detractionem minoris nominis de maiori.

Septuagesimumsextum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti, compositum autẽ ex quadratis totius lineæ & lineæ detractæ sit rationale: parallelogrammum uerò ex iisdem contentum sit mediale, reliqua linea erit irrationalis: uocetur autem linea minor.



De linea recta α β, detrahatur recta β γ potentia incommensurabilis toti α β, cuius totius inquam α β quadratum cum quadrato lineæ β γ sit rationale. Contentũ uero ex α β,

β γ

β γ sit mediale, dico residuam lineam α γ esse irrationalem, quæ uocetur minor. Cum enim compositũ ex quadratis linearum α β, β γ sit rationale, id uerò quod fit bis ex α β, β γ sit mediale: ergo quadrata linearum α β, β γ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex α β, β γ. ergo & reliquo quadrato scilicet lineæ α γ, erunt incommensurabilia quadrata linearum α β, β γ, sicut dictum est in 73. sed quadrata linearum α β, β γ sunt rationalia. ergo quadratum lineæ α γ erit irrationale, & linea α γ irrationalis: uocetur autẽ linea minor, ideo sic dicta, quia est reliqua portio maioris nominis lineæ maioris post detractionem minoris nominis de maiori.

Septuagesimumseptimum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractę sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem contentum sit rationale, reliqua linea est irrationalis: uocetur autẽ linea faciẽs cum superficie rationali totam superficiem medialem totum mediale.

De linea recta α β, detrahatur recta β γ potentia incommẽsurabilis toti

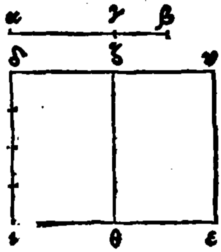
lineæ α β, ex quadratis quarum scilicet α γ, β γ compositum sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem sit rationale. dico reliquã lineam α γ esse irrationalẽ, quæ uocetur linea faciens cum superficie rationali totam superficiem medialem. Cum enim compositũ ex quadratis linearũ α β, β γ sit mediale, id uerò quod fit bis ex α β, *βγ ſit rationale. Ergo compoſitum ex quadratis linearum αβ, βγ erit incommẽſurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo & reliquum nempe αγ erit incommenſurabile ei, quod fit bis ex αβ, βγ per 17. Eſt autem id quod fit bis ex αβ, βγ rationale, ergo quadratum lineæ αγ erit irrationale, & linea αγ irrationalis. Vocetur autem faciẽs cum ſuperficie rationali totam medialem: ideo ſic dicta, quia compoſitum ex quadratis linearum αβ, βγ eſt mediale, & totum quiddam, cuius pars eſt id quod fit ex αβ, βγ exiſtens & ipſum rationale. Nam quadrata linearũ αβ, βγ ſunt æqualia ei quod fit bis ex αβ, βγ, & quadrato lineæ αγ per 7.2. aut ideo ſit dicta eſt, quia quadratum eius iunctum cum ſuperficie rationali facit totã ſuperficiem medialem, ut intelligetur ex theoremate* 109. *In hac autem linea denominanda receſſimus à uoce recepta* Campano, *qui hãc lineã uocauit, iunctam cum rationali componentem totum mediale: idem faciemus in proximo theoremate, quia denominationes illæ* Campani *non ſatis conuenientes rebus ipſis eſſe uiſæ ſunt.*

Septuageſimumoctauum Theorema.

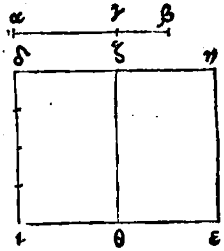
Si de linea recta detrahatur recta potentia incommenſurabilis toti lineæ, compoſitum autem ex quadratis totius & lineæ detractæ ſit medialẽ, parallelogrammum uerò ex eiſdem ſit etiam mediale: præterea ſint quadrata ipſarum incommẽſurabilia parallelogrammo ex iiſdem, reliqua linea eſt irrationalis: uocetur autem linea faciens

cum

cum superficie mediali totam superficiem medialem.



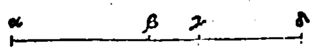
De linea αβ detrahatur recta βγ potentia incōmensurabilis toti αβ ex quadratis, quarum compositū sit mediale: parallelogrammū quoque exeisdem sit mediale. præterea compositū ex quadratis linearum αβ, βγ sit incommensurabile parallelogrammo ex αβ, βγ. dico lineā reliquam αγ esse irrationalem. Vocetur autem faciens cum mediali superficie totam medialē. Proponatur linea rationalis δι, secūdum quam quadratis linearum αβ, βγ, æquale applicetur parallelogrammū δε faciēs alterum latus δκ: ei verò quod sit bis ex αβ, βγ æquale applicetur δθ faciens alterum latus δζ, residuum ergo ζε erit æquale residuo, nempe quadrato lineæ αγ. quare linea αγ potest parallelogrammum ζε. Et quoniam compositum ex quadratis linearum αβ, βγ, hoc est δε est mediale, ergo linea δκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δι. Rursus cum id quod sit bis ex αβ, βγ, hoc est δθ sit mediale: ergo & linea δζ erit rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δι. Et quoniam quadrata linearum αβ, βγ sunt incommensurabilia ei quod sit bis ex αβ, βγ: ergo incommensurabile etiam erit δε ipsi δθ. Ergo linea δκ erit incommensurabilis lineæ δζ: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ δκ, δζ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo ζκ erit residuum per 73. Sed linea ζθ est rationalis, quia æqualis rationali δι: parallelogrammum



uerò cōtentum ex linea rationali & irrationali, nēpe ζι, est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demō-strationis 38. ergo linea α γ, quæ illud potest, erit irrationalis: uocetur autē faciens cum superficie mediali totam medialem. Ideo *sic dicta quia compositum ex quadratis linearum α β, β γ est mediale & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex α β, β γ, existens & ipsum mediale: huius quoq; denominationis rationem aliam intelliges ex theoremate* 110. *Hîc non est alienum inserere lemma quoddā positum à* Campano *ante propositi. 74. Illud tantum in eo emēdandum est, ut excessus linearū intelligatur secundum* Arithmeticam *proportionalitatem, nō autem secundū geometricā: itaque loco numeri 4. qui adscribitur minime lineæ, reponatur binarius.*

Septuagesimumnonum Theorema.

Residuo unica tantū linea rectá coniungitur rationalis, potentia tantū commensurabilis toti lineę.



Sit residuum linea α β, cōiungaturque ipsi linea β γ huiusmodi, ut lineæ α γ, β γ sint rationales potentia tantum commensurabiles. Nego *lineæ α β aliam posse coniungi huiusmodi, ut sit rationalis potentia tantum commēsurabilis ipsi toti α γ.* Si *dicas aliam cōiungi posse, huiusmodi sit illa linea β δ: ergo lineæ α δ, δ β sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Et *quoniam quantò differunt quadrata linearum α δ, δ β ab eo quod fit bis*

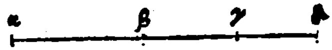
ex

ex αδ,δϛ,(differunt autem illa ab isto quadrato lineæ αβ per 7.2.) tantò differunt & quadrata linearũ αγ, γϛ, ab eo quod fit bis ex αγ,γβ (differunt autẽ illa quoque ab isto similiter eodem quadrato lineæ αβ, per 7,2) Ergo *& permutate per lemma positũ à* Campano *ante 74. quantò differunt quadrata linearũ αδ,δϛ, à quadratis linearum αγ,γβ, tantò differt id quod fit bis ex αδ,δϛ, ab eo quod fit bis ex αγ,γβ: sed cõpositũ ex quadratis linearum αδ,δβ, & compositum ex quadratis linearum αγ,βγ cum sint ambo rationalia differũt inter se superficie rationali, per lemma positũ à nobis ante 42.* Ergo *& id quod fit bis ex αδ,δβ differet ab eo quod bis ex αγ,γβ superficie rationali.* Sed *id quod fit bis ex αδ,δϛ est mediale, quia est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex αδ,δβ, quod ipsum est mediale per 22.* Item *eadem ratione id quod fit bis ex αγ,γϛ est mediale: ergo mediale differet à mediali superficie rationali, quod est impossibile per 27.* Ergo *lineæ αϛ alia linea coniungi nõ potest, quàm linea ϛγ potentia tantũ commensurabilis toti: ergo residuo unica tantum linea &c.* Deinceps *per hanc uocem lineæ coniunctæ seu conueniẽter iunctæ intellige eam, quam* Euclides *uocat* προσαρμόζουσαν: *quæ scilicet iuncta cum residuo, restituit totam lineã, unde ea ablata remanent singula residua.*

Octuagesimum Theorema.

Residuo mediali primo unica tantum linea coniungitur medialis, potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens rationale.

Sit residuū mediale primū α ε,



cui coniungatur linea β γ huiusmodi, ut lineæ α γ, β γ sint mediales potentia tantum commensurabiles: quæ scilicet ε γ cum tota α γ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex α γ, ε γ. Nego *aliam lineā huiusmodi posse cōiungi lineæ α β.* Nam *si fieri posse dicas, sit illa linea β δ. ergo lineæ α δ, δ β sunt mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes id quod fit ex α δ, δ ε.* Et *quoniā quanto excedit cōpositum ex quadratis linearū α δ, δ β id quod fit bis ex α δ, δ ε tanto excedit compositum ex quadratis linearū α γ, γ β id quod fit bis ex α γ, γ β. (utrobique enim excedunt quadrato lineæ α β) ergo & permutate (sicut dictum est in proximo theoremate) quāto compositum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compositū ex quadratis linearum α γ, γ β, tanto excedit id quod fit bis ex α δ, δ β id quod fit bis ex α γ, γ ε. sed id quod fit bis ex α δ, δ ε est rationale: item id quod fit bis ex α γ, γ β est rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id quod fit bis ex α γ, γ ε superficie rationali per lemma positū à nobis ante 42.* Ergo *& compositum ex quadratis linearū α δ, δ β, quod est mediale, sicut dictum est in 75. excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ ε, quod ipsum est etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ positæ sunt mediales) superficie rationali, quod est impossibile per 27.* Ergo *residuo mediali primo &c.*

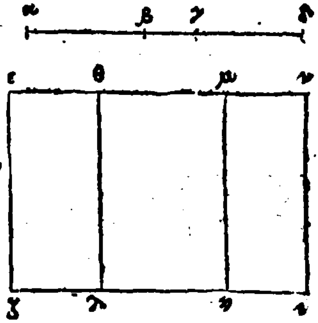
Octuagesimumprimum Theorema.

Residuo mediali secundo unica tantum coniungi-

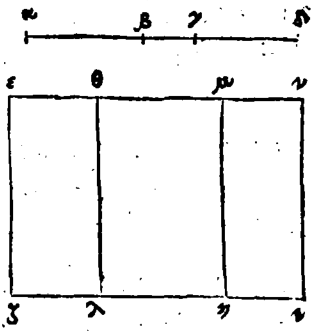
tur

tur medialis potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens mediale.

Sit residuũ mediale secũdum αβ, cui coniungatur linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint mediales potentia tãtum commensurabiles mediale continẽtes, id scilicet quod fit ex αγ, γβ. Nego *aliam lineam huiusmodi posse coniungi lineæ αβ:*



nam si fieri potest, cõiungatur linea βδ, ergo lineæ αδ, δβ sunt mediales potentia tantum cõmensurabiles, mediale continentes id, quod fit ex αδ, βδ. Proponatur *linea rationalis εζ, secundum quam quadratis linearum αγ, γβ æquale applicetur parallelogrammum εκ, faciẽs alterum latus εμ: ei uero quod fit bis ex αγ, γβ æquale auferatur parallelogrammum θκ, faciens alterum latus lineam θμ. ergo residuũ ελ est æquale quadrato lineæ αβ, per* 7.2. *quare linea αβ potest parallelogrammum ελ.* R*ursus secundum eandem lineam εζ, quadratis linearũ αδ, δβ applicetur æquale parallelogrammũ ει, faciens alterũ latus εν.* Sed *quadrata linearum αδ, δβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex αδ, δβ & quadrato lineæ αβ. ergo parallelogrãmum ει est æquale ei, quod fit bis ex αδ, δβ, & quadrato lineæ αβ.* E*st autem ελ æquale quadrato lineæ αβ. ergo id quod fit bis ex αδ, δβ est æquale parallelogrammo θι: & quoniam lineæ αγ, γβ sunt mediales, ergo & quadrata ipsarum sunt medialia, & sunt æqualia parallelogrãmo εκ. ergo εκ*



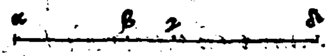
erit etiã mediale per ea quæ dicta sunt in 75. Ergo per 23 linea ε μ erit rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Rursus quoniam parallelogrãmũ ex α γ, γ β est mediale, ergo & id quod fit bis ex α γ, γ δ, hoc est parallelogrammum θ κ, erit etiã mediale: ergo linea θ μ est rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniã lineæ α γ, γ δ sunt potentia tantum cõmensurabiles, ergo ipsæ sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea α γ ad lineam γ δ, ita quadratum lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β. Ergo quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ δ. sed quadrato lineæ α γ sunt commẽsurabilia quadrata linearum α γ, γ β: parallelogrammo uerò ex α γ, γ β est commensurabile id quod fit bis ex α γ, γ δ: ergo quadrata linearũ α γ, γ δ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α γ, γ β. Est autẽ quadratis linearum α γ, γ β æquale parallelogrãmum ε κ: ei uero quod fit bis ex α γ, γ δ est æquale parallelogrammũ θ κ. Ergo parallelogrammum ε κ est incommensurabile parallelogrammo θ κ, ergo & linea ε μ erit longitudine incommensurabilis lineæ θ μ: sunt autẽ ambæ rationales, ergo sunt rationales potẽtia tantum cõmensurabiles. Ergo linea ε θ est residuum, eique coniuncta linea θ μ rationalis, est toti lineæ ε μ rationali commensurabilis potentia tantum. Similiter etiam probabimus cõiungi lineæ ε θ, lineam θ ν existentem & ipsam

rationalem

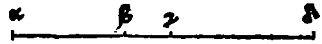
rationalem potentia tantum commensurabilem toti α γ, repetendo inquã processum demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniam lineæ α γ, γ β sunt mediales: & loco linearum α γ, γ β reponendo lineas α δ, δ ϐ, & cætera similiter. ergo residuo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commensurabilis toti, quod est impossibile per 79. Ergo residuo mediali secundo &c.

Octuagesimumsecundum Theorema.

Lineæ minori unica tantum recta coniungitur, potentia incommensurabilis toti, faciens cum tota compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uerò parallelogrãmũ, quod ex ipsis fit, mediale.



Sit linea minor α ϐ, sitq; illi cõiuncta linea ϐ γ, qualis ponitur in theoremate. ergo lineæ α γ, γ β sunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarũ rationale. Id uero quod fit ex ipsis mediale, nego lineæ α ϐ aliam lineam posse coniungi, quæ idem efficiat. nam si fieri potest, sit ei coniuncta linea β δ: ergo lineæ α δ, δ ϐ sunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uerò quod fit ex ipsis mediale. Et quoniam quãto compositum ex quadratis ipsarum excedit id quod fit bis ex ipsis, tanto excedit compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β, id quod fit bis ex ipsis α γ, γ β. Et permutate sicut in 79 theoremate quanto differt compositum ex quadratis linearum α δ, δ β compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ ϐ, id quod fit bis ex α γ, γ ϐ: sed *compositum ex quadratis linearum α δ, δ ς excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ ς, superficie rationali, quia utrunque compositum est rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ γ β superficie rationali, cũ tamẽ utrunque sit mediale, quod est impoßibile. ergo linea minori &c.*



Octuagesimumtertium Theorema.

Lineæ facienti cum superficie rationali totã superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incõmensurabilis toti: faciens autem cum tota compositũ ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale.

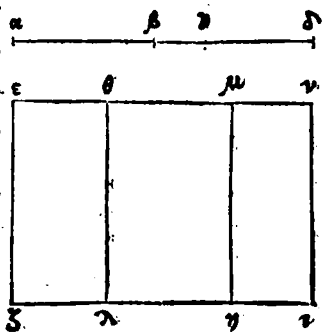
Sit linea cũ rationali superficie faciens totam superficiem medialem α β, eiq; coniuncta sit β γ: ergo lineæ α γ, γ ς, sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Nego *lineæ α ς aliam lineam posse coniungi quæ idem efficiat: nam si poßibile est, sit illa cõiuncta β δ. ergo lineæ α δ, δ β sunt lineæ potẽtia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum α δ, δ β tanto excedat compositũ ex quadratis linearum α γ, γ β, quanto id quod fit bis ex α δ, δ β excedit, quod fit bis ex α γ, γ ς, sicut dictum est in præcedentibus: sed id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ, γ ς superficie rationali, cum sit utrũq; rationale*

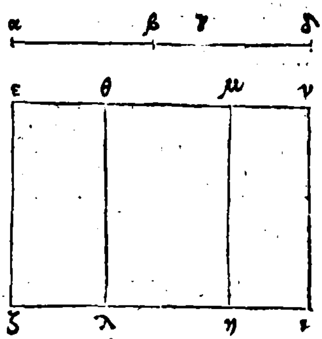
rationale. ergo & compositum ex quadratis linearum α δ, δ ϐ excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ superficie rationali, cum tamen utrunque sit mediale, quod est impossibile. Non *igitur alia linea cõiungi potest lineæ α ϐ, quàm linea ϐ γ, quæ idẽ efficiat. ergo lineæ facienti cum rationali &c.*

Octuagesimumquartum Theorema.

Lineæ cum mediali superficie faciẽti totam superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommensurabilis, faciẽs cum tota compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiam mediale: & prȩterea faciens compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei, quod fit ex ipsis.

Sit linea cum mediali superficie faciens totã medialem α ϐ, cui cõiungatur linea ϐ γ potẽtia toti incommẽsurabilis, faciantq; ambæ id quod dicitur in theoremate. Nego *lineæ α ϐ aliam lineã cõiungi posse, quæ idem efficiat: nam si possibile est, cõiungatur linea ϐ δ, quæ idẽ efficiat quod linea ϐ γ: proponaturq; linea rationalis ε ζ, secũdum quam quadratis linearum α γ, γ ϐ æquale applicetur parallelogrammum ε κ, faciens alterũ latus ε μ: ei uerò quod fit bis ex α γ, γ ϐ æquale detrahatur parallelogrammũ θ κ, faciens alterum latus θ μ. residuum ergo nempe quadratum li-*





neæ α ϐ est æquale parallelogrammo ε λ. ergo linea α β potest parallelogrammũ ε λ. Rursus secundum eandem lineam ε ζ, quadratis linearum α δ, δ β æquale applicetur parallelogrammum ε ι, faciens alterum latus ε ν: est autem quadratum lineæ α β æquale parallelogrāmo ε λ: ergo residuũ, nempe id quod fit bis ex α δ, δ β, est æquale parallelogrammo θ ι. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α γ, γ β, hoc est ε η, est mediale: ergo linea ε μ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Rursus quoniā id quod fit bis ex α γ, γ ϐ, hoc est θ η, est mediale: ergo & linea θ μ est rationalis longitudine incōmensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ, hoc est ε η, est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrāmo θ η: ergo & lineæ ε μ, θ μ sunt longitudine inter se incommensurabiles. sunt autẽ ambæ rationales, ergo lineæ ε μ, θ μ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. Ergo linea ε θ est residuum per 73: coniuncta uerò ei erit linea θ μ. Similiter etiam probabimus lineam ε θ esse residuum coniunctā ei uerò esse lineam θ ν, repetendo processum huius demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniā cōpositũ ex quadratis linearũ α γ &c. ut diximus in theoremate 81. Ergo residuo alia atq; alia linea cōiungitur idẽ efficiẽs, quod est impoßibile per 79. Nō ergo lineæ α ϐ alia linea, quā β γ coniungi potest similis naturæ, & quæ idem efficiat.

Definitiones

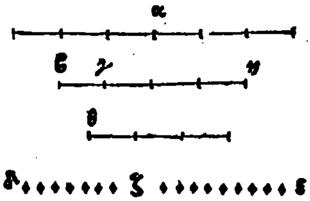
Definitiones tertiæ, siue termini tertij.

Propoſita linea rationali & reſiduo, ſiquidem tota, nempe compoſita ex ipſo reſiduo & linea illi cõiuncta, plus poteſt, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, fueritq́; tota longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali: reſiduum ipſum uocetur reſiduum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commenſurabilis rationali, ipſa autem tota plus poſsit quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, reſiduum uocetur reſiduum ſecundũ. Si uero neutra linearum fuerit longitudine commenſurabilis rationali, poſsit autem ipſa tota plus quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, uocetur reſiduum tertium. Rurſus *ſi tota poſsit plus, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis: & quidem ſi tota fuerit longitudine commenſurabilis ipſi rationali, uocetur reſiduũ quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commenſurabilis rationali, & tota plus poſsit quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, uocetur reſiduum quintum.* Si *uerò neutra linearum fuerit commenſurabilis lõgitudine ipſi rationali, fueritq́; tota potentior, quàm coniuncta quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, uocetur reſiduum ſextum.*

Octuageſimumquintum Theorema.

Reperire primum reſiduum.

Proponatur linea rationalis α, cui ſit longitudine commẽſurabilis linea ϛη: *ergo & linea* ϛη *erit rationalis. Sint*



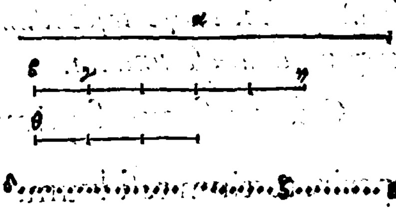
duo numeri quadrati δε, εζ tales, ut excessus maioris δζ, ne sit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis post 29. Neq; ergo numerus εδ ad numerum δζ habebit proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, per 24.8. à destructione consequẽtis. Sitq; sicut numerus εδ ad numerum δζ, ita quadratũ lineæ βη, ad quadratũ lineæ ηγ, per lemma positum post 9. ergo quadratum lineæ βη est commensurabile quadrato lineæ ηγ: sed quadratũ lineæ βη est rationale, ergo & quadratũ lineæ ηγ erit rationale. ergo linea ηγ erit etiam rationalis. Et quoniam numerus εδ ad numerum δζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratũ lineæ βη habebit proportionem ad quadratum lineæ ηγ, quam numerus quadratus ad quadratũ. ergo linea βη erit longitudine incommensurabilis lineæ ηγ per 9. Sunt autem ambæ rationales, ergo sunt lineæ βη, ηγ rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea βγ est residuum: dico præterea eandem esse residuum primũ. Quò enim est maius quadratum lineæ βη quadrato lineæ ηγ (maius autem esse constat, quia quadratum lineæ βη, ad quadratum lineæ ηγ est, sicut numerus εδ, maior, ad numerum δζ ex suppositione:) quò ergo quadratum lineæ βη est maius quadrato lineæ ηγ, sit quadratum lineæ θ. Et quoniam est sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ ηγ. per euersam ergo proportionem sicut numerus

δε

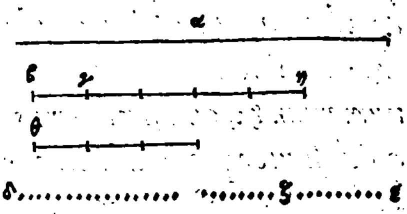
δι ad numerum ιζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: sed numerus δι habet proportionē ad numerum ζι, quam numerus quadratus ad quadratū, quia est uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ κβ habebit proportionem ad quadratum lineæ θ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea κβ est longitudine commensurabilis lineæ θ. Potest autē linea κβ plus, quàm linea κγ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem tota βκ longitudine commensurabilis rationali α. ergo linea βγ est residuū primum. Repertum est igitur residuum primum, quod faciendum erat.

Octuagesimumsextum Theorema.

Reperire secundum residuum.



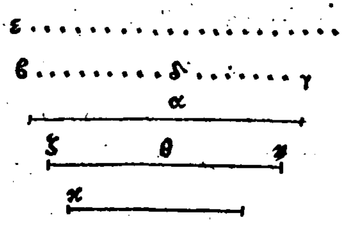
Proponatur linea rationalis α, cui sit cōmēsurabilis longitudine linea κγ: sintq; numeri quadrati duo δι, ιζ, quorum excessus δζ ne sit quadratus: sit etiā sicut numerus δζ ad numerum δι, ita quadratum lineæ κγ ad quadratum lineæ κβ, ergo ambo quadrata sunt cōmensurabilia: & quia quadratum lineæ κγ est rationale, etiam quadratum lineæ βκ erit rationale. ergo & linea βκ erit rationalis. Et quia quadrata linearū βκ, κγ non habent proportionem inter se, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo lineæ βκ, κγ erunt longitudine incōmensurabiles, & sunt ambæ rationales: ergo lineæ βκ, κγ erūt



rationales potentia tantum cōmēsurabiles. ergo linea βγ erit residuū: dico præterea eandē esse residuum secundum. quò enim est maius quadratum lineæ βη quadrato lineæ ηγ, sit quadratum lineæ θ. Cum igitur sit sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ ηβ ad quadratum lineæ ηγ: per euersam ergo proportionē sicut δε ad numerum εζ, ita quadratū lineæ βη ad quadratum lineæ θ: Est autem uterque numerus δε, εζ quadratus. ergo linea ηβ erit longitudine commensurabilis lineæ θ: potestq́; linea βη plus, quàm linea ηγ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, & est linea coniuncta ηγ longitudine commensurabilis lineæ rationali α. Ergo *linea βγ erit secūdum residuum.* Repertum *est ergo residuum secundum.*

Octuagesimumseptimum Theorema.

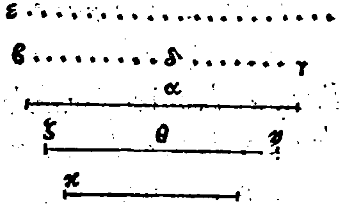
Reperire tertium residuum.



Proponatur linea rationalis α, & proponātur numeri tres ε, βγ, γδ proportionē non habētes inter se, quam numerus quadratus ad quadratum: & numerus βγ ad numerum βδ habeat proportionem, quam numerus quadratus ad quadratū: sitq́; numerus βγ maior numero γδ. fiatq́; sicut numerus ε ad βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζη.

sicut

ſicut autem numerus ϛγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ, ad quadratum lineæ θκ. ergo quadratum lineæ α eſt commẽſurabile quadrato lineæ ζκ. Sed quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & quadratum lineæ ζκ erit rationale. ergo linea ζκ erit rationalis: et quoniã numerus ι ad numerum ϛγ non habet proportionẽ, quã numerus quadratus ad quadratũ, neq; ergo quadratum lineæ α, ad quadratũ lineæ ζκ habebit proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζκ. Rurſus quoniam eſt ſicut numerus βγ ad γδ, ita quadratũ lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ, ergo quadratum lineæ ζκ eſt commẽſurabile quadrato lineæ θκ: ſed quadratũ lineæ ζκ eſt rationale, ergo & quadratum lineæ θκ erit rationale. ergo linea θκ erit rationalis. Et quoniam numerus βγ ad numerum γδ non habet proportionẽ, quã numerus quadratus ad quadratũ, neque ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratum lineæ θκ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine incommẽſurabilis lineæ θκ: ſunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζκ, θκ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea ζθ erit reſiduum per 73. dico præterea eſſe reſiduũ tertium. Cum enim ſit ſicut numerus ι ad numerũ βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζκ: ſicut autẽ numerus ϛγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ, ad quadratum lineæ θκ. ergo per æquam proportionem ſicut numerus ι ad numerum γδ, ita quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ θκ: ſed numerus ι ad γδ non habet

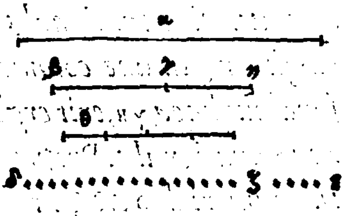


proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum: neq; ergo quadratum lineæ κ habebit proportionẽ ad quadratũ lineæ θκ, quã quadratus numerus ad quadratum, ergo linea κ erit longitudine incommẽsurabilis lineæ θκ. Neutra ergo linearum ζκ, θκ erit longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quo uero maius est quadratũ lineæ ζκ quadrato lineæ θκ, maius autem esse constat, quia per suppositionem numerus βγ est maior numero γδ, sit quadratum lineæ κ. Cum igitur sit sicut numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ: per euersam ergo proportionẽ sicut numerus βγ ad βδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κ: sed βγ ad βδ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratũ lineæ κ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine commensurabilis lineæ κ. Ergo linea ζκ plus potest, quam linea θκ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, & neutra linearum ζκ, θκ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, cum tamen utraque linearum ζκ, θκ sit rationalis: ergo linea ζθ erit residuum tertium. Repertum est ergo tertium residuum.

Octuagesimumoctauum Theorema.

Reperire quartum residuum.

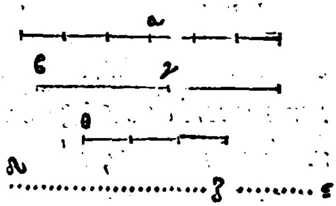
Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commẽsurabilis



ſurabilis linea βκ: ergo linea βκ erit rationalis. Proponã- *tur numeri duo δε, ζε huiuſmodi, ut totus δε ad neutrũ δζ, ζε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq́; ſicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ κγ: ergo quadratum lineæ βκ erit cõmenſurabile quadrato lineæ κγ. ergo & quadratum lineæ κγ erit rationale, & linea κγ rationalis. Et quoniã numerus δε ad numerum εζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo linea βκ erit longitudine incõmenſurabilis lineæ κγ: ſunt autem ambæ rationales. ergo linea βγ eſt reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum: quò enim quadratum lineæ βκ eſt maius quadrato lineæ κγ, ſit quadratum lineæ θ. Cum igitur ſit ſicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratũ lineæ κγ: ergo per euerſam proportionem ſicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: ſed numeri δε, δζ non habent proportionem inter ſe, quam quadratus ad quadratum: ergo linea βκ erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ. Ergo linea βκ plus poteſt, quàm linea κγ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: eſtque tota βκ longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit reſiduum quartũ.* Repertum eſt igitur reſiduum quartum.

Octuageſimumnonum Theorema.

Reperire quintum reſiduum.

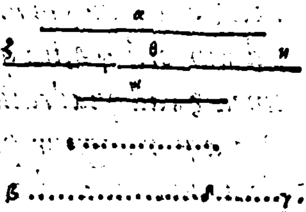


Proponatur linea rationalis α, cui ſit longitudine commenſurabilis linea γκ, erit ergo linea γκ rationalis. Proponantur numeri duo δζ, ζι tales, ut δι ad neutrum δζ, ζι habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq; ſicut numerus ζι ad numerum δι, ita quadratum lineæ γκ ad quadratũ lineæ βκ, ergo quadratum lineæ γκ erit commenſurabile quadrato lineæ βκ. ergo quadratum lineæ βκ erit rationale, & linea βκ rationalis: ſed numeri δι, ιζ nõ habent proportionem, quam quadratus ad quadratũ, ergo lineæ βκ, κγ ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles. ergo linea βγ erit reſiduũ, dico præterea eſſe reſiduum quintum: quò enim maius eſt quadratum lineæ βκ quadrato lineæ κγ, ſit quadratũ lineæ θ. Cũ igitur ſit ſicut numerus δι ad numerum ιζ, ita quadratũ lineæ βκ ad quadratũ lineæ κγ, ergo per euerſam proportionem, ſicut numerus δι ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: ſed numeri δι, ιζ non habet proportionem inter ſe, quã numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea βκ erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ. ergo linea βκ plus poteſt linea γκ, quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis: eſtque coniuncta linea γκ longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit reſiduum quintum.

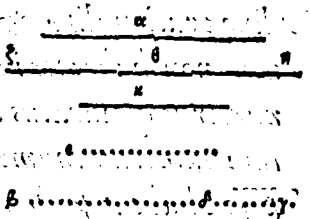
Repertum eſt ergo reſiduum quintum.

Nonageſimum Theorema.

Reperire ſextum reſiduum.



Sit linea rationalis α, & numeri tres ε, βγ, γδ proportionem non habentes inter se, quã numerus quadratus ad quadratum numerum: numerus autem βγ ne habeat proportionem ad numerum βδ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum: sitque numerus βγ maior numero γδ, fiatq; sicut numerus ε ad numerum βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζη: sicut autem numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Cum igitur sit sicut ε ad βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζη, ergo quadratum lineæ α est commẽsurabile quadrato lineæ ζη. ergo quadratũ lineæ ζη erit rationale, & linea ζη rationalis. Et quoniam numerus ε ad βγ non habet proportionem, quã quadratus numerus ad quadratũ, ergo linea α erit longitudine incõmensurabilis lineæ ζη. Rursus quoniam est sicut numerus βγ ad numerũ γδ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ, ergo quadratum lineæ ζη erit commensurabile quadrato lineæ ηθ: sed quadratum lineæ ζη est rationale, ergo & quadratũ lineæ ηθ erit rationale. ergo linea ηθ erit rationalis. Et quoniam numerus βγ ad numerum γδ nõ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea ζη erit longitudine incommensurabilis lineæ ηθ: sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζη, ηθ sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea ζθ erit residuum: dico præterea esse residuum sextum. Cũ enim sit sicut numerus ε ad βγ, ita quadra-

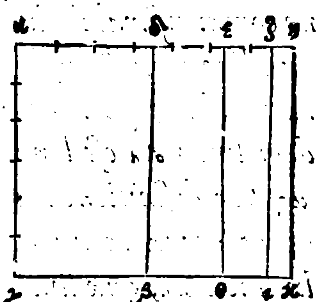


tum lineæ α, ad quadratum lineæ ζ κ: sicut autem numerus β γ ad numerũ γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratũ lineæ κ θ. Per æquam igitur proportionẽ sicut numerus ε ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ α, ad quadratum lineæ κ θ: sed numerus ε nõ habet proportionem ad numerũ γ δ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommensurabilis lineæ κ θ, & neutra linearum ζ κ, κ θ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quo igitur maius est quadratum lineæ ζ κ, quadrato lineæ κ θ, sit quadratum lineæ χ. Cum igitur sit sicut numerus ϛ γ ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ κ θ. ergo per euersam proportionem sicut numerus ϛ γ ad numerum ϛ δ, ita quadratũ lineæ ζ κ ad quadratum lineæ χ: sed numerus ϛ γ ad numerum β δ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ χ. Ergo linea ζ κ plus potest quã linea κ θ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & neutra linearum ζ κ, κ θ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, ergo linea ζ θ est residuum sextum. Repertum est ergo residuum sextum. Est autem & facilior quædam ratio reperiendi cuiusque residui, ex illis sex antè dictis, hoc modo. Propositũ sit reperire residuũ primum. Proponatur binomiũ primum linea α γ, cuius maius nomẽ sit α ϛ: & lineæ ϛ γ æqualis sit linea β δ: ergo lineæ α β, β γ, hoc est lineæ α ϛ, β δ sunt rationales potentia

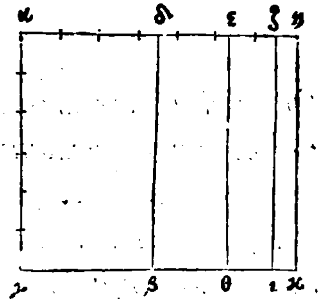
tentia tantùm commẽsurabiles. & linea $\alpha\epsilon$ plus potest, quàm linea $\beta\gamma$, hoc est quàm linea $\beta\delta$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & linea $\alpha\epsilon$ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, quia positum est lineam $\alpha\gamma$ esse binomiũ primum. ergo linea $\alpha\delta$ est residuum primum. Simili ratione secundum, tertium, quartum, quintum & sextum residuum reperire licet, si proposuerimus singula binomia eiusdẽ ordinis.

Nonagesimumprimum Theorema.

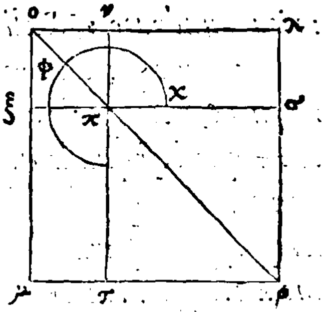
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo primo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum.



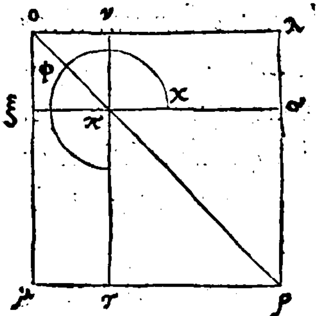
Cõtineatur superficies rectãgula $\alpha\beta$, ex linea rationali $\alpha\gamma$, & residuo primo $\alpha\delta$. dico lineã, quæ poßit superficiem illam, esse residuum. Cum enim linea $\alpha\delta$ sit residuũ primum, sit illi coniuncta linea $\delta\eta$, (cõiunctam intellige, qualem dixi in fine theorematis 79.) ergo lineæ $\alpha\eta$, $\eta\delta$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & tota $\alpha\eta$ est longitudine commensurabilis rationali lineæ $\alpha\gamma$, & linea $\alpha\eta$ plus potest, quàm linea $\eta\delta$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur linea $\eta\delta$ in partes duas æquales in puncto ϵ, & quadrato lineæ $\epsilon\eta$, æquale secundum lineam $\alpha\eta$ applicetur parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata: sitq; illud parallelogrammum ex $\alpha\zeta$, $\zeta\eta$. ergo linea $\alpha\zeta$ est



longitudine cōmensurabilis lineæ ζη per 18. & per puncta ε, ζ, η ipsi lineæ αγ parallelæ ducantur εθ, ζι, ηκ. Et quoniam linea αζ est longitudine cōmensurabilis lineæ ζη, ergo & tota linea αη utriq; ex αζ, ζη est longitudine commensurabilis per 16. sed linea αη est longitudine commēsurabilis lineæ αγ. ergo utraque linearum αζ, ζη est longitudine commēsurabilis lineæ αγ: sed linea αγ est rationalis, ergo utraque αζ, ζη est etiam rationalis: quare & utrunque parallelogrammum αι, ζκ est rationale per 20. Et quoniam linea δε est longitudine commensurabilis lineæ εη, ergo & linea δη est longitudine commēsurabilis utrique δε, εη: sed linea δη est rationalis, ergo utraque δε, εη est rationalis: sed eadem linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αγ per definitionem residui primi uel per 13 aut 14 huius. Quia linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αη, quæ linea αη est longitudine commensurabilis eidem lineæ αγ. ergo utraque linea δε, εη est rationalis & longitudine incommēsurabilis lineæ αγ. Ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ est mediale per 22. Sit parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: parallelogrammo uero ζκ sit æquale quadratum νξ, detractum ex quadrato λμ, habens cum illo communem angulum λομ. Quod ut fiat reperiatur media proportionalis inter lineas ζι, ζκ: nam quadratum mediæ proportionalis erit æquale parallelogrammo ex ζι, ζκ: porro de linea



linea λο sumatur linea æqualis lineæ mediæ proportionali modo repertæ, & describatur ξ eius quadratũ. Sunt ergo ambo quadrata λμ, νξ circa eandem diametrũ per 26.6: sit eorũ diameter linea ορ, & describatur figura qualis hic uidetur. Cum igitur sit parallelogrammũ ex αζ, ζκ æquale quadrato lineæ ικ. est igitur sicut linea αζ ad lineam ικ, ita linea ικ ad lineam ζκ per 17.6: sed sicut linea αζ ad lineam ικ, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum ικ: sicut autem linea ικ ad lineam ζκ, ita parallelogrammum ικ ad parallelogrammum ζκ. Ergo parallelogrammorum αι, ζκ parallelogrammum ικ est mediũ proportionale: sed & quadratorũ λμ, νξ parallelogrammum μν, est medium proportionale per lemma positum post 53. Est autem parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: parallelogrãmo uero ζκ est æquale quadratum νξ. ergo parallelogrãmum μν est æquale parallelogrammo ικ per lemma positum à nobis ante 54. Sed parallelogrammum ικ est æquale parallelogrammo δθ per 1.6: parallelogrammũ uero μν est æquale parallelogrãmo λξ per 43.1. Ergo parallelogrammum δκ est æquale gnomoni υφχ, qui gnomo constat ex illis parallelogrãmis. per quæ uides in figura maiorem semicirculo portionem pertransire, & præterea quadrato νξ. Est autem & parallelogrammũ ακ æquale quadratis λμ, νξ: & modo conclusum est parallelogrammũ δκ esse æquale gnomoni υφχ, & præ-

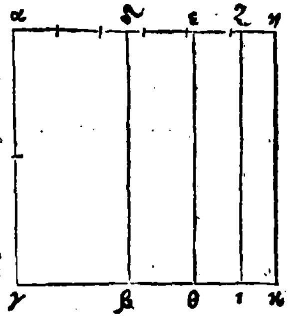


terea quadrato, ν ξ. Reliquum ergo, nempe parallelogrammum α ϛ, erit æquale quadrato σ τ, quod est quadratum lineæ λ ν. ergo quadratũ lineæ λ ν est æquale parallelogrammo α β. ergo linea λ ν potest illud parallelogrammum α β: dico præterea lineam λ ν esse residuum. Cum enim utrunque parallelogrammũ κ ι, ξ κ sit rationale; ut supra dictum, ergo & illis æqualia quadrata λ μ, ν ξ, hoc est, quadrata linearum λ ο, ο ν erunt rationalia, & lineæ ipsæ λ ο, ο ν, rationales. Rursus quoniam parallelogrammum δ θ, hoc est, λ ξ est mediale, ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ. ergo per 1.6 & 10. huius, linea λ ο erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ο ν: sunt autem ambæ rationales, sunt ergo rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea λ ν est residuum: potest autẽ parallelogrammum α ϛ. ergo si superficies cõtineatur &c. linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

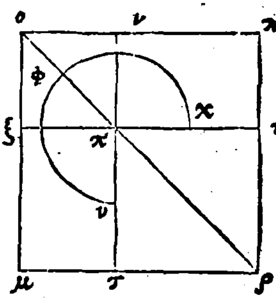
Nonagesimum secundum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo secundo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale primum.

Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, & residuo secundo α δ. dico lineam quæ potest superficiem α β esse eam, quæ dicitur residuũ mediale primum. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ κ. ergo lineæ α κ, κ δ sunt rationales



tionales potentia tantum cõmensurabiles: & linea coniuncta δκ, est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali αγ: linea uerò ακ plus potest quã linea δκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur linea δκ bifariã & æqualiter in pũcto ε, & secũdum lineã ακ applicetur quartæ parti quadrati lineæ δκ, hoc est, quadrato lineæ εκ æquale parallelogrammũ ex αζ, ζκ, deficiens specie quadrata. ergo per 18 linea αζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ζκ: & per puncta ε, ζ, κ ipsi lineæ αγ ducantur parallelæ εθ, ζι, κx: & quoniam linea αζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ζκ, ergo tota linea ακ est utrique αζ, ζκ longitudine cõmensurabilis. Est autem linea ακ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ. ergo & utraque αζ, ζκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum αι, ζκ est mediale per 22. Rursus cum linea δε sit commensurabilis longitudine lineæ εκ, ergo & δκ est utrique δε, εκ longitudine commensurabilis: sed linea δκ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali αγ, ergo utraque δε, εκ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ αγ: ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ est rationale per 20. Describatur parallelogrammo αι æquale quadratũ λμ: parallelogrammo uero ζκ, æquale sit quadratũ νξ, sicut in præcedenti theoremate, quadrata λμ, νξ erunt circa eandem diametrum: sit diameter ορ, & describa-



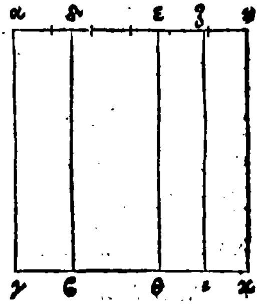
tur figura sicut modo dictū est. Quoniam ergo parallelogramma α ι, ζ κ sunt medialia & inter se commensurabilia, & illis æqualia quadrata linearū λ ο, ο ν sunt medialia, ergo lineæ λ ο, ο ν sunt mediales potentia commensurabiles. Constat autem potentia commensurabiles esse lineas λ ο, ο ν, quia earum quadrata sunt commēsurabilia: commēsurabilia sunt porro quadrata illa, scilicet linearum λ ο, ο ν, quia sunt æqualia parallelogrammis, α ι, ζ κ, quæ sunt cōmensurabilia: cōmēsurabilia porro esse illa parallelogrāma α ι, ζ κ constat eo, quod modo probatum est, lineas α ζ, ζ κ esse longitudine commensurabiles. Ergo per 1.6 & 10 huius parallelogrāma α ι, ζ κ sunt commensurabilia. ergo modo probatum est uia resolutionis lineas λ ο, ο ν, esse potentia cōmensurabiles. Et quoniam parallelogrammum ex α ζ, ζ κ est æquale quadrato lineæ ε κ. est ergo sicut linea α ζ ad lineā ε κ, ita linea ε κ ad lineam ζ κ: sed sicut linea α ζ ad lineam ε κ, ita parallelogrammū α ι ad parallelogrammū ε κ: sicut autem linea ε κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammū ε κ ad parallelogrammum ζ κ: ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale est parallelogrammū ε κ. Est etiam quadratorum λ μ, ν ξ medium proportionale parallelogrammum μ ν: & est æquale parallelogrammū α ι quadrato λ μ: parallelogrammum uero ζ κ est æquale quadrato ν ξ. Ergo μ ν erit æquale parallelogrāmo ε κ: sed ε κ est æquale parallelogrammo δ θ: parallelogrammum

mum uero $\lambda\xi$ est æquale parallelogrammo $\mu\nu$. Totũ *ergo parallelogrammum $\delta\kappa$ est æquale gnomoni $\upsilon\phi\chi$, & quadrato $\nu\xi$. reliquum ergo, nempe parallelogrammũ $\alpha\beta$, est æquale quadrato $\sigma\tau$, hoc est quadrato lineæ $\lambda\nu$.* Ergo *linea $\lambda\nu$ potest superficiem $\alpha\beta$: dico præterea lineã $\lambda\nu$ esse residuum mediale primum.* Cum *enim parallelogrammum $\iota\kappa$ sit rationale, sitq́; æquale parallelogrãmo $\mu\nu$, hoc est $\lambda\xi$: ergo $\lambda\xi$, hoc est parallelogrammum ex λo, $o\nu$ erit rationale: sed quadratum $\nu\xi$ est mediale, quia ei æquale parallelogrammum $\zeta\kappa$ modo probatũ est esse mediale.* Ergo *parallelogrammum $\lambda\xi$ erit incommensurabile quadrato $\nu\xi$: sed sicut parallelogrammũ $\lambda\xi$ ad quadratum $\nu\xi$, ita linea λo, ad lineam $o\nu$, per 16. ergo per 10 huius, lineæ λo, $o\nu$ sunt longitudine incommensurabiles: sed modo probatum est eas esse mediales potentia commensurabiles. ergo lineæ λo, $o\nu$ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, continentes rationale.* Ergo *linea $\lambda\nu$ est residuum mediale primum, & potest superficiem $\alpha\beta$ contentam ex linea rationali & residuo secundo.*

Nonagesimumtertium Theorema.

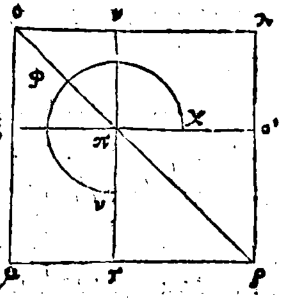
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo tertio, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale secundum.

Superficies enim $\alpha\beta$ cõtineatur ex linea rationali $\alpha\gamma$, & residuo tertio $\alpha\delta$. dico lineam quæ possit superficiem $\alpha\beta$ esse residuum mediale secũdum. Sit *linea coniuncta $\delta\eta$, ergo lineæ $\alpha\eta$, $\eta\delta$ sunt rationales potentia tantum com-*



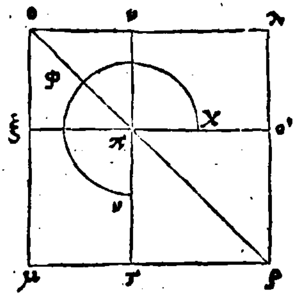
mẽsurabiles, & neutra linearum αη, ηδ est longitudine commensurabilis lineæ rationali αγ. Tota *uero αβ plus potest, quàm coniuncta ηδ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. reliqua fiãt, ut in præcedẽtibus. ergo lineæ αζ, ζη sunt longitudine commẽsurabiles & parallelogrammũ αι, commensurabile parallelogrammo ζκ.* Et *quoniam αζ, ζη sunt longitudine cõmensurabiles, ergo tota linea αη est utrique αζ, ζη longitudine commẽsurabilis: sed linea αη est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ, ergo utraque αζ, ζη. est rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ. ergo utrũque parallelogrammum αι, ζκ est mediale per 22.* R*ursus cum linea δι sit longitudine commensurabilis lineæ ιη, ergo & tota δη est longitudine cõmensurabilis utrique δι, ιη: sed linea δη est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ αγ, ergo & utraque linearum δι, ιη est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ αγ. ergo & utrũque parallelogrammum δθ, ικ est mediale: & quoniam lineæ αη, δη sunt potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommensurabiles: sed linea αη est longitudine commensurabilis lineæ αζ: linea autem δη est longitudine commensurabilis lineæ ηι, ergo linea αζ est longitudine incommensurabilis lineæ ιη.* Sicut *autem linea αζ ad lineam ιη, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum ικ. ergo αι est incommensurabile ipsi ικ.* Con*struatur parallelogrammo αι*

æquale



æquale quadratum λ μ: ipsi uero ζ κ æquale quadratũ ν ξ, & describatur figura, ut in præcedentibus. Cum igitur parallelogrãmũ ex α ζ, ζ κ sit æquale quadrato lineæ ι κ. est ergo sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita ι κ ad ζ κ: sed sicut linea α ζ ad lineam κ ι, ita parallelogrammũ α ι ad parallelogrammum ι κ: sicut autem linea ι κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammũ ζ κ. sicut ergo parallelogrammum α ι ad parallelogrammũ ι κ, ita ι κ ad ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale est ι κ. Sed quadratorũ λ μ, ν ξ medium proportionale est parallelogrammum μ ν, ergo ι κ est æquale ipsi μ ν. ergo totum parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. Est autem ipsum α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ, reliquum ergo nempe α β est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν, ergo λ ν potest superficiem α β: dico præterea lineam λ ν esse residuum mediale secundum. Cum enim, sicut probatũ est, parallelogramma α ι, ζ κ sint medialia, ergo eis æqualia quadrata linearũ λ ο, ο ν sunt etiã medialia. ergo utraq; linea λ ο, ο ν erit medialis: & quoniam parallelogrammum α ι est commensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λ ο, ο ν erunt commensurabilia. Rursus cum sit probatum parallelogrammum α ι esse incommẽsurabile parallelogrammo ι κ, ergo incommensurabile erit quadratum λ μ, parallelogrammo μ ν, hoc est, quadratum lineæ λ ο, parallelogrã-

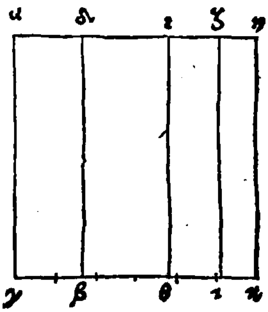
mo ex λο,ον: quare & linea λο erit longitudine incõmensurabilis lineæ ον. ergo lineæ λο,ον sunt mediales potentia tantum commensurabiles: dico præterea eas continere mediale. Cũ enim probatũ sit ιχ esse mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ex λο,ον erit mediale. ergo linea λν est residuum mediale secundum, & potest superficiem αβ. Ergo linea potens superficiem αϛ est residuum mediale secundum.



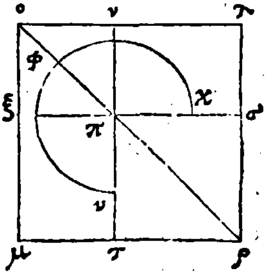
Nonagesimumquartum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo quarto, linea quę illam superficiẽ potest, est linea minor.

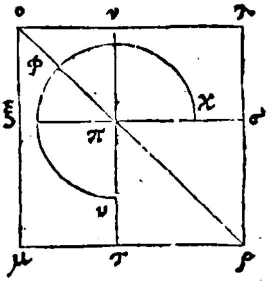
Superficies αβ contineatur ex linea rationali αγ, et residuo quarto αδ. dico lineam quæ illam superficiem αϛ potest, esse eã, quæ dicitur linea minor: sit enim linea cõiuncta δκ, ergo lineæ ακ, δκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: & linea αν plus potest, quàm linea δκ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, & linea ακ est longitudine commensurabilis lineæ αγ. Diuidatur linea δκ bifariam & æqualiter in puncto ι: & quadrato lineæ ικ æquale secũdum lineam ακ applicetur parallelogrãmum, deficiẽs figura quadrata, sitq; illud parallelogrãmum



mũ ex α ζ, ζ κ. ergo per 19. linea α ζ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζ κ. Ducantur per puncta ι, ζ, κ ipsis lineis α γ, δ ϐ, parallelæ ι θ, ζ ι, κ χ. Cum igitur linea α κ sit rationalis, & longitudine commensurabilis lineæ α γ, ergo totum parallelogrammum α χ est rationale per 20. Rursus cum linea δ κ sit longitudine incommẽsurabilis lineæ α γ, (nam si esset linea δ κ longitudine commensurabilis lineæ α γ, cum linea α κ sit eidem α γ longitudine commẽsurabilis, essent etiam lineæ α κ, δ κ longitudine commensurabiles, cum tamen positæ sint potẽtia tantum commensurabiles) sunt autem ambæ α γ, δ κ rationales. ergo parallelogrammũ δ χ est mediale. Rursus cum linea α ζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζ κ, ergo incommensurabile est α ι ipsi parallelogrammo ζ χ. Cõstruatur parallelogrammo α ι æquale quadratum λ μ: ipsi uero ζ χ æquale quadratum ν ξ, ambo quadrata habentia communem angulũ λ ο ν. ergo quadrata λ μ, ν ξ sunt circa eandem diametrũ: sit diameter ο ϱ & describatur figura.



Cum igitur parallelogrammũ ex α ζ, ζ κ sit æquale quadrato lineæ ι κ, erit proportionaliter, sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita linea ι κ ad lineã ζ κ: sed sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita parallelogrammum α ι ad parallelogrammum ι χ per 1.6. Sicut autem linea ι κ ad lineã ζ κ, ita parallelogrammum ι χ ad parallelogrammum ζ χ. ergo parallelogrammorũ α ι, ζ χ medium proportionale est ι χ. ergo, sicut dictum est in præcedentibus, parallelo-



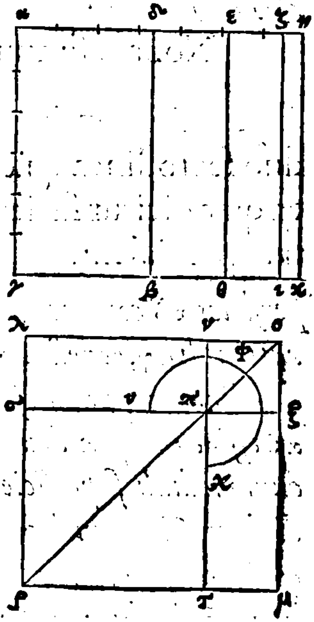
grammum μν est æquale parallelogrammo ιχ: sed λθ est æquale ipsi ιχ, ipsum autem μν ipsi λξ. ergo parallelogrammum λχ est æquale gnomoni υφχ, & quadrato νξ. ergo reliquum αβ est æquale reliquo quadrato στ, hoc est, quadrato lineæ λν: dico præterea lineã λν esse irrationalem eam, quæ linea minor uocatur. Cum enim parallelogrammum αχ sit rationale, & sit æquale quadratis linearum λο, ον, ergo compositum ex quadratis linearũ λο, ον erit rationale. Rursus cum λχ sit mediale, sitq; æquale ei, quod fit bis ex λο, ον, ergo id quod fit bis ex λο, ον est etiam mediale: & quoniam parallelogrammum αι est incommensurabile parallelogrammo ζχ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λο, ον sunt incõmensurabilia. ergo lineæ λο, ον sunt potentia incommẽsurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit bis ex ipsis mediale, quod est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex ipsis: ergo & quod fit semel ex ipsis, erit etiã mediale. Ergo linea λν est irrationalis, quæ uocatur linea minor & potest superficiẽ αβ.

Nonagesimumquintum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo quinto, linea quæ illam superficiẽ potest, est ea, quę dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.

Superficies enim αβ contineatur ex linea rationali αγ, & residuo

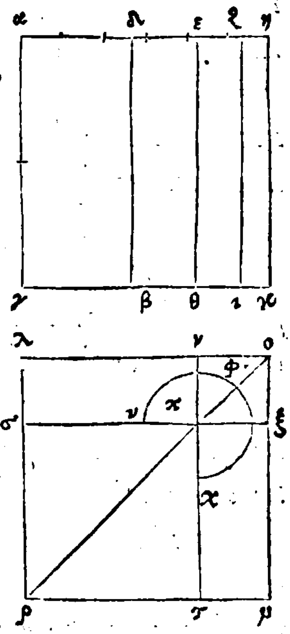
residuo quinto α δ. dico lineam, quæ illam superficiē potest, eam esse quæ dicitur faciens cum rationali superficie totam medialem: sit enim lineæ α δ iuncta linea δ κ, quæ erit longitudine cōmensurabilis lineæ rationali α γ, cætera erunt ut in præcedenti. Et *quoniam linea α κ est*



longitudine incommensurabilis lineæ α γ, & sunt ambæ rationales, ergo parallelogrāmū α κ erit mediale. R*ursus quoniā linea δ κ est rationalis, & lōgitudine cōmēsurabilis lineæ α γ, ergo δ κ erit rationale. Cōstruatur quadratum λ μ æquale parallelogrammo α ι, quadratum uero υ ξ æquale ipsi ζ κ, ut in proximo, similiter demōstrabimus lineam λ υ posse superficiem α β: dico præterea eam esse lineam, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialē: cum enim α κ sit mediale, etiam illis æquale compositum ex quadratis linearum λ ο, ο υ, erit mediale.* R*ursus quia δ κ est rationale, ergo & illi æquale id, quod fit bis ex λ ο, ο υ erit etiam rationale, & quoniam linea α ζ est longitudine incommēsurabilis lineæ ζ κ, ergo per* 1. 6 & 10 *huius. parallelogrammum α ι erit incōmensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & quadratū lineæ λ ο erit incommensurabile quadrato lineæ ο υ: ergo lineæ λ ο, ο υ sunt potentia incommensurabiles facientes compositum* *ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit bis ex ipsis rationale. ergo reliqua linea λ ν est irrationalis: nẽpe ea quæ dicitur cum rationali superficie faciens totã medialem, & potest superficiem α β. Ergo linea potens superficiem α β est linea, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.*

Nonagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo sexto, linea quæ illam superficiem potest, est ea quæ dicitur faciens cum mediali superficie totam medialem.

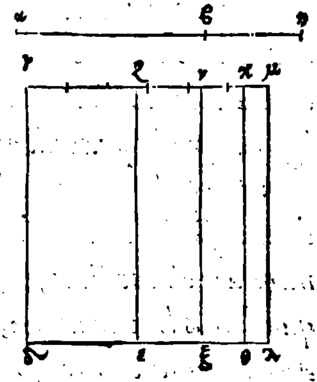


Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, et residuo sexto α δ. dico lineam quæ potest superficiẽ α β esse eam, quæ dicitur faciens cum mediali superficie totã medialem. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ κ, & cætera fiãt, ut in præcedẽtibus: cum linea α ζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζ κ, ergo & parallelogrammum α ι erit incommensurabile parallelogrammo ζ κ. Et quoniã lineæ α κ, α γ, sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, ergo parallelogrammum α κ erit mediale: simili ratione δ κ erit mediale. Cum igitur lineæ α κ, κ δ sint potentia tantum commensurabiles, ergo *go sunt longitudine inter se incommensurabiles: sed sicut linea α κ ad κ δ, ita parallelogrammum α κ ad δ κ. ergo α κ erit incõmensurabile ipsi δ κ. Construatur eadẽ figura, quæ in præcedentibus, similiter probabimus lineam λ ν posse superficiẽ α β: dico præterea eam esse, quæ dicitur faciẽs cum superficie mediali totam medialem: nam α κ est mediale, ergo & illi æquale compositũ ex quadratis linearum λ ο, ο ν erit mediale. Rursus quoniã δ κ est mediale, ergo & ei æquale, id quod fit bis ex λ ο, ο ν erit mediale. Et quoniam α κ est incommensurabile ipsi δ κ, ergo & quadrata linearum λ ο, ο ν erunt incõmensurabilia ei, quod fit bis ex λ ο, ο ν: & cum parallelogrammum α ι sit incommensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo etiam quadratum lineæ λ ο erit incommensurabile quadrato lineæ ο ν. ergo lineæ λ ο, ο ν erunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositũ ex quadratis linearum λ ο, ο ν mediale, & quod fit bis ex ipsis mediale: præterea compositum ex quadratis ipsarũ incommensurabile ei, quod fit bis ex ipsis. ergo linea λ ν est irrationalis, quæ dicitur cum mediali superficie faciens totam medialẽ, & potest superficiem α β. Ergo linea potens superficiem α β est ea, quæ dicitur faciens cum superficie mediali totam medialem.*

Nonagesimumseptimum Theorema.

Quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus residuum primũ.

Sit residuum α β, rationalis uero linea γ δ: & quadrato lineæ α β æquale secundum lineam γ δ applicetur paral-



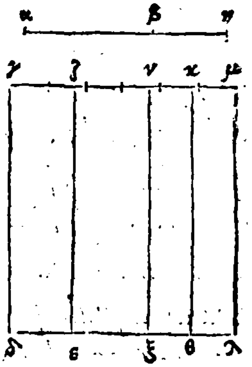
lelogrammum γι faciẽs alterũ latus γζ, dico lineam γζ esse residuum primum. Sit enim lineæ αβ linea cõuenieter iuncta βκ, quæ & eadem dicitur linea cõiuncta, ut in fine theorematis 79. ergo lineæ ακ, κβ, sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & quadrato lineæ ακ secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γθ, quadrato uero lineæ βκ æquale parallelogrãmum κλ: totum ergo γλ est æquale quadratis linearum ακ, κβ: sed parallelogrammum γι est æquale quadrato lineæ κβ, reliquum ergo ζλ est æquale ei, quod fit bis ex ακ, κβ: quia quadrata linearum ακ, κβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex ακ, κβ, & quadrato lineæ κβ per 72. Secetur linea ζμ bifariam & æqualiter in puncto ν, & à pũcto ν ducatur lineæ γδ parallela linea νξ, ergo utrũque ex parallelogrãmis ζξ, νλ est æquale ei. quod fit semel ex ακ, κβ. Et quoniam quadrata linearum ακ, κβ sunt rationalia, quibus quadratis æquale est parallelogrammũ γλ, ergo γλ est rationale. ergo linea γμ est rationalis longitudine commensurabilis lineæ γδ. Rursus quoniam id quod fit bis ex ακ, κβ est mediale, ergo & illi æquale nempe parallelogrammum ζλ, erit mediale. ergo linea ζμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ. Et quoniam quadrata linearum ακ, κβ sunt rationalia, id uero quod fit bis ex ακ, κβ mediale, ergo quadrata linearum ακ, κβ sunt incommensurabilia

bilia

bilia ei, quod fit bis ex α κ, κ ϛ. Est autē quadratis linearū α κ, κ ϛ æquale parallelogrammum γ λ: ei uero quod fit bis ex α κ, κ ϛ æquale ζ λ, ergo γ λ erit incommensurabile ipsi ζ λ. ergo & linea γ μ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ μ: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles, & linea γ ζ est residuum per 73: dico præterea esse primum residuum. Cum enim quadratorum linearum α κ, κ β sit id quod fit ex α κ, κ β medium proportionale per lemma positum post 53: sit autem quadrato lineæ α κ, æquale parallelogrammum γ θ, ei uero quod fit ex α κ, κ ϛ æquale ν λ: quadrato uero lineæ κ β æquale ξ λ. ergo inter parallelogramma γ θ, ξ λ medium proportionale est ν λ. ergo sicut γ θ ad ν λ, ita ν λ ad ξ λ. Sed sicut γ θ ad ν λ, ita linea γ ξ ad lineam ν μ: sicut autem ν λ ad ξ λ, ita linea ν μ ad lineam ξ μ. sicut ergo linea γ ξ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam ξ μ. ergo parallelogrammum ex γ ξ, ξ μ est æquale quadrato ν μ, hoc est quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniam quadratum lineæ α κ est commensurabile quadrato lineæ κ β, ergo & γ θ erit cōmensurabile ipsi ξ λ: sicut autem γ θ ad ξ λ, ita linea γ ξ ad lineam ξ μ. ergo linea γ ξ erit longitudine commensurabilis lineæ ξ μ. ergo per 18. linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Est autem linea γ μ longitudine commensurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ est residuum primum. Ergo quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum facit alterum latus residuum primum.

Nonagesimumoctauum Theorema.

Quadratum residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuũ secundum.



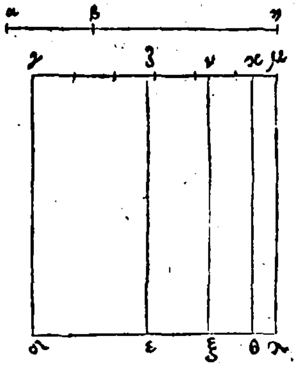
Sit residuum mediale primum α β, rationalis uero γ δ: et quadrato lineæ α ϐ æquale secundum lineam γ δ applicetur parallelogrammum γ ε, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ esse residuum secũdum. Sit enim lineæ α ϐ linea conuenienter iuncta β η, ergo lineæ α η, β η sunt mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes. Et quadrato lineæ α η æquale secundum lineam γ δ applicetur γ θ faciens alterum latus γ κ: quadrato uero lineæ η β æquale applicetur κ λ faciens alterum latus κ μ. totũ ergo γ λ est æquale ambobus quadratis linearum α η, η ϐ, quæ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo & parallelogramma γ θ, κ λ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo per 16. totum γ λ est utrique γ θ, κ λ commensurabile: ergo per corollarium 24 totum γ λ est etiam mediale. ergo linea γ μ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ per 23. Et quoniam γ λ est æquale quadratis linearũ α η, η ϐ, quadrata uero linearum α η, η β sunt æqualia ei, quod fit bis ex α η, η ϐ, et quadrato lineæ α ϐ per 7. 2. quadrato uero lineæ α β est æquale parallelogrammum γ ε: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex α η, η ϐ est æquale residuo parallelogrãmo ζ λ: sed id quod fit bis ex α η, η β est rationale, ergo ζ λ erit rationale, ergo linea ζ μ est ratio-

rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ γ λ per 21. Cum igitur parallelogrammum γ λ sit mediale, parallelogrammum uero ζ λ sit rationale, ergo sunt incõmẽsurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ erit residuum. dico præterea esse residuũ secundum. Secetur enim linea ζ μ bifariam & æqualiter in puncto ν: à quo puncto parallela ad lineam γ λ ducatur linea ν ξ. ergo utrũq; ex ζ ξ, ν λ est æquale parallelogrãmo ex α η, η ϛ. Et quoniam quadratorum linearum α η, η ϛ medium proportionale est id quod fit ex α η, η ϛ, ergo & parallelogrammorum γ θ, κ λ medium proportionale est ν λ. Sed sicut γ θ est ad ν λ, ita linea γ κ ad lineam ν μ: sicut autem ν λ ad κ λ, ita linea ν μ ad lineã κ μ. sicut ergo linea γ κ ad lineam κ μ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ est æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Sed parallelogrammum γ θ est commẽsurabile ipsi κ λ, ergo & linea γ κ lineæ κ μ erit commensurabilis longitudine. ergo per 18. linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem linea ζ μ, quæ dicitur cõuenienter iuncta cõmensurabilis longitudine lineæ rationali γ λ, ergo linea γ ζ est residuũ secundum. Ergo *quadratum residui medialis primi &c.*

Nonagesimumnonum Theorema.

Quadratum residui medialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum tertium.

Sit linea αβ residuum mediale secũdum, rationalis uero sit linea γδ: & quadrato lineæ αβ æquale secundum lineã γδ applicetur parallelogrammum γε faciens alterum latus γζ: dico lineam γζ esse residuum tertium. Sit enim lineæ αβ linea conuenienter iuncta βη, ergo lineæ αη, ηβ sunt mediales potentia tantum commensurabiles continentes mediale & cætera, ut in proximo theoremate. ergo linea γμ est rationalis lõgitudine incommensurabilis lineæ rationali γδ: & utrũque ex ζξ, νλ est æquale ei, quod fit ex αη, ηβ: sed id quod fit ex αη, ηβ est mediale, ergo id quod fit bis ex αη, ηβ est etiam mediale: ergo & totum ζλ est etiam mediale. Ergo linea ζμ est rationalis & lõgitudine incommensurabilis lineæ γδ. Et quoniam lineæ αη, ηβ sunt longitudine incommensurabiles, ergo & quadratum lineæ αη erit incommensurabile parallelogrammo ex αη, ηβ: sed quadrato lineæ αη sunt commensurabilia quadrata linearum αη, ηβ: parallelogrammo uero ex αη, ηβ est commensurabile id, quod fit bis ex αη, ηβ: ergo quadrata linearum αη, ηβ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex αη, ηβ. ergo & eis æqualia parallelogramma γλ, ζλ sunt incommensurabilia: ergo & linea γμ erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ζμ, & sunt ambæ rationales. ergo linea γζ est residuum: dico præterea esse residuum tertium. Cum enim sit commensurabile quadratũ lineæ αη, hoc est γθ, quadrato lineæ

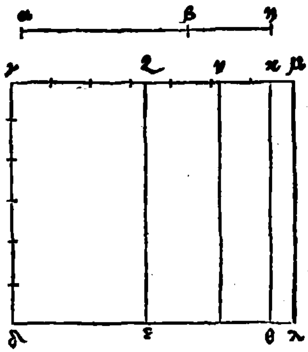


βη,

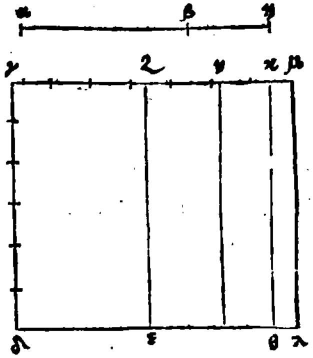
ϐκ, hoc est parallelogrāmo κλ. ergo & linea γκ erit longitudine commēsurabilis lineæ κμ. Eadem ratione qua usi sumus in præcedenti, probabitur parallelogrammū ex γκ, κμ esse æquale quadrato lineæ νμ, hoc est quartæ parti quadrati lineæ ζμ. Ergo linea γμ poterit plus, quā linea ζμ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & neutra ex lineis γμ, ζμ est longitudine commensurabilis lineæ rationali γδ. ergo linea γζ est residuum tertium. Ergo *quadratū residui medialis secundi &c.*

Centesimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuū quartum.



Sit linea minor αϐ, rationalis uero γδ: secundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum γε, faciens alterum latus γζ: dico lineam γζ esse residuum quartum. Sit enim lineæ αβ linea conuenienter iuncta ϐκ, ergo lineæ ακ, βκ sunt potentia incommēsurabiles, facientes compositū ex quadratis ipsarū rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale, & cætera sint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum γλ erit rationale. ergo & linea γμ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ γδ. Et quoniam id quod fit bis ex ακ, κϐ est mediale, ergo & illi æquale parallelogrammū ζλ erit mediale. ergo linea ζμ erit rationalis lōgitudine incōmen-



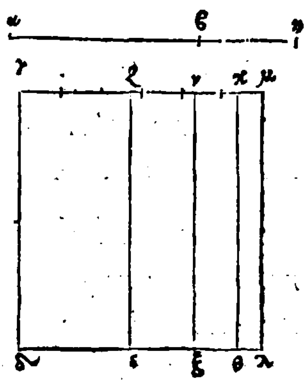
surabilis lineæ $\gamma\delta$*: sed linea* $\gamma\mu$ *est longitudine commensurabilis lineæ* $\gamma\delta$*. ergo per 13. uel 14. huius linea* $\gamma\mu$ *erit longitudine incõmensurabilis lineæ* $\zeta\mu$*. sed sunt ambæ rationales, ergo lineæ* $\gamma\mu$*,* $\zeta\mu$ *sunt rationales potentia tantũ cõmensurabiles. ergo linea* $\gamma\zeta$ *erit residuum. dico præterea esse residuum quartum. Cũ enim lineæ* $\alpha\eta$*,* $\eta\beta$*. sint potentia incommensurabiles, ergo & ipsarum quadrata, hoc est, illis æqualia parallelogramma* $\gamma\theta$*,* $\kappa\lambda$ *sunt incõmensurabilia. ergo & linea* $\gamma\kappa$ *erit longitudine incommensurabilis lineæ* $\kappa\mu$*. Similiter ostendemus parallelogrammum ex* $\gamma\kappa$*,* $\kappa\mu$ *esse æquale quadrato lineæ* $\nu\mu$*, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ* $\zeta\mu$*. ergo per 19. lineæ* $\gamma\mu$ *poterit plus, quàm linea* $\zeta\mu$ *quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & est tota* $\gamma\mu$ *longitudine commensurabilis lineæ rationali* $\gamma\delta$*, ergo linea* $\gamma\zeta$ *erit residuum quartum.* Ergo *quadratũ lineæ minoris &c.*

Centesimumprimum Theorema.

Quadratum lineæ cum rationali superficie facientis totam medialem secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum quintum.

Sit linea cum rationali superficie faciens totam medialem $\alpha\beta$*: rationalis uero* $\gamma\delta$*, secundum quam quadrato lineæ* $\alpha\beta$ *æquale applicetur parallelogrammum* $\gamma\epsilon$ *faciẽs alterum latus* $\gamma\zeta$*. dico lineam* $\gamma\zeta$ *esse residuum quintũ. Sit*

enim



enim lineæ α β, linea conuenienter iuncta ε η. ergo lineæ α η, β η sunt potentia incõmensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: id uero quod fit ex ipsis rationale. fiant enim omnia eo modo quo in præcedẽtibus, ergo totum γ λ erit mediale. ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: & utrũque ex parallelogrammis ζ ξ, ι λ erit rationale, ergo & totum ζ λ erit etiam rationale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine cõmensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam γ λ est mediale, parallelogrammum uero ζ λ rationale, ergo γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: & linea γ μ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea γ ζ est residuum. dico præterea esse residuum quintum: similiter enim probabimus parallelogrãmũ ex γ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ξ μ. Et quoniã quadratũ lineæ α η, hoc est, parallelogrammũ γ θ est incõmensurabile quadrato ε η, hoc est, parallelogrãmo κ λ, ergo linea γ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ κ μ. ergo per 19 linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & est conuenienter iuncta linea ζ μ longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo linea γ ζ est residuum quintum. Ergo quadratum &c.

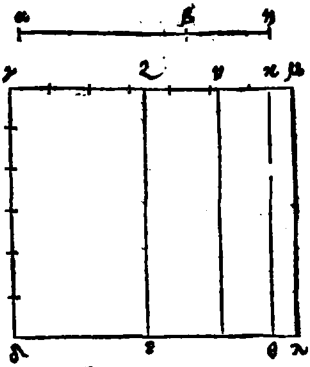
Centeſimumſecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem, ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum.

Sit linea cum mediali ſuperficie faciẽs totum mediale α ϐ, rationalis uero γ δ, ſecundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ε, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum ſextum. Sit enim lineæ α β linea conuenienter iuncta β η, ergo lineæ α η, β η ſunt potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uero quod ſit ex ipſis mediale: præterea incommenſurabile compoſitũ ex quadratis ipſarum ei, quod ſit ex ipſis. fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum γ λ erit mediale (quia eſt æquale compoſito ex quadratis linearũ α η, η ϐ, quod eſt mediale.) ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ δ: ſimiliter parallelogrammum ζ λ erit mediale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ γ δ. Et quoniam compoſitum ex quadratis linearum α η, β η eſt incommẽſurabile ei, quod ſit bis ex α η, η ϐ, ergo illis æqualia γ λ, ζ λ erunt incõmenſurabilia. ergo & lineæ γ μ, ζ μ erũt longitudine incommenſurabiles: ſunt autem ambæ rationales, ergo ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. Ergo linea γ ζ erit reſiduũ: dico præterea eſſe reſiduum ſextũ. fiãt cætera ut in ſuperioribus. Et quoniam lineæ α η, ϐ η ſunt potentia incommenſurabiles, ergo quadrata ipſarum ſunt incommenſurabilia, hoc eſt,

illis

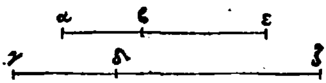
illis æqualia $\gamma\theta,\kappa\lambda$.ergo & linea $\gamma\kappa$ lineæ $\kappa\mu$ erit longitudine incommensurabilis,sicut in superioribus demonstrabatur parallelogrammorum $\gamma\theta,\kappa\lambda$ esse medium proportionale $\iota\lambda$.ergo per 19.linea $\gamma\mu$ plus poterit,quàm linea $\mu\zeta$ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis:& neutra ex ipsis $\gamma\mu,\zeta\mu$ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali $\gamma\delta$.ergo linea $\gamma\zeta$ est residuum sextum.Ergo *quadratum &c.*

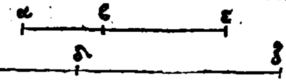


Centesimumtertium Theorema.

Linea residuo commensurabilis longitudine,est & ipsa residuum eiusdem ordinis.

*Sit residuum $\alpha\beta$,cui sit linea commensurabilis longitudine $\gamma\delta$.dico lineam $\gamma\delta$ esse & ipsam residuum & ordinis eiusdem,cuius & residuum $\alpha\beta$.Cũ enim linea $\alpha\beta$ sit residuũ,sit linea ei conuenienter iuncta $\beta\varepsilon$:ergo lineæ $\alpha\varepsilon$, $\beta\varepsilon$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: sitq́; sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\delta$,ita linea $\beta\varepsilon$ ad lineã $\delta\zeta$:ergo sicut unum ad unum,ita omnia ad omnia per 12.5.*Erit *ergo sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\delta$,ita tota linea $\alpha\varepsilon$,ad totam lineam $\gamma\zeta$,& linea $\beta\varepsilon$ ad lineam $\delta\zeta$. ergo per* 10 *huius,linea $\alpha\varepsilon$ erit commensurabilis longitudine lineæ $\gamma\zeta$,& linea $\beta\varepsilon$ lineæ $\delta\zeta$:sed linea $\alpha\varepsilon$ est rationalis,ergo & linea $\gamma\zeta$ erit rationalis.similiter &*





linea δζ erit rationalis, quia linea βε cui ipsa est commen surabilis est etiam rationalis: sed quoniam est sicut linea βε ad lineam αε, ita linea δζ ad lineā γζ, & linea βε, αε sunt potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ δζ, γζ sunt potentia tantum commensurabiles. ergo linea γδ est residuū. dico præterea esse residuū eiusdem ordinis cuius & linea αβ. Cum enim sit ut modo diximus sicut linea αε, ad lineam γζ ita linea βε ad lineā δζ. ergo permutata proportione sicut αε ad βε, ita γζ ad δζ: linea autem αε potest plus quàm linea εβ, aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ergo & linea γζ potest plus quàm linea δζ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15. Et quidem si linea αε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cum linea αε sit longitudine commensurabilis lineæ γζ. ergo per 12. etiam linea γζ erit longitudine cō mensurabilis propositæ rationali. ergo utraque linea αβ γδ erit residuum primū. Quòd si linea βε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cū linea βε sit longitudine commensurabilis lineæ δζ, ergo linea δζ erit etiam longitudine cōmensurabilis propositæ rationali: & tunc utraque linea αβ, γδ erit residuum secundū. Quòd si neutra ex lineis αε, βε erit longitudine commensurabilis propositæ rationali, neutra etiā ex lineis γζ, δζ erit propositæ rationali longitudine commensurabilis per 13, uel 14 huius: & tunc utraque linea αβ,

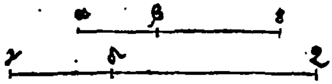
γδ

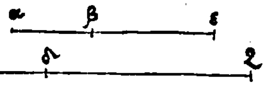
γ δ erit residuum tertium. Quòd si linea α ε plus potest quàm linea β ε quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, similiter & linea γ ζ plus poterit quàm linea δ ζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15: & quidem si linea α ε erit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea γ ζ erit eidem commensurabilis. & sic erit utraq; α β, γ δ residuum quartũ: si uero linea β ε erit commensurabilis longitudine rationali, similiter & linea δ ζ, & sic erit utraque α β, γ δ residuum quintum. si uero neutra ex lineis α ε, β ε erit longitudine commensurabilis rationali, similiter neutra ex lineis γ ζ, δ ζ erit eidem commensurabilis: & sic erit utraque a β, γ δ residuum sextum. Ergo *linea γ δ erit residuũ eiusdẽ ordinis cuius & α β.*

Centesimumquartum Theorema.

Linea commensurabilis residuo mediali, est & ipsa residuum mediale & eiusdem ordinis.

Sit residuum mediale α β, cui sit commensurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum linea γ δ. dico γ δ esse residuum mediale & eiusdẽ ordinis. Cum enim α β sit residuum mediale, sit ei conuenienter iuncta β ε, ergo lineæ α ε, β ε sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Sit autẽ sicut α β ad γ δ, ita β ε ad δ ζ. simili ratione qua in præcedẽti usi sumus, linea α ε erit longitudine & potentia, siue potentia tantum commensurabilis lineæ γ ζ, & linea β ε lineæ δ ζ. ergo per 24 linea γ ζ erit medialis: & linea δ ζ erit medialis, quia est cõmen-





surabilis lineæ mediali βε. similiter lineæ γζ, δζ erunt potentia tantum commensurabiles: quia habent eandem proportionem inter se, quam lineæ αε, βε, quæ sunt inter se commensurabiles potentia tantum. ergo linea γδ est residuum mediale. dico præterea esse eiusdem ordinis cuius & αβ. Cum enim sit, sicut linea αε ad lineam βε, ita linea γζ ad lineam δζ: sed sicut linea αε ad lineam βε, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, βε per 1.6: sicut autem linea γζ ad lineam δζ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. ergo sicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, βε, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. permutata ergo proportione sicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammum ex αε, βε ad parallelogrammũ ex γζ, δζ. Sed quadratum lineæ αε est cõmẽsurabile quadrato lineæ γζ (quia linea αε est commensurabilis lineæ γζ.) ergo & parallelogrammum ex αε, βε erit commensurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ergo si parallelogrammũ ex αε, βε est rationale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit rationale: & tunc utraque linea αβ, γδ erit residuũ mediale primum. Si uero parallelogrammum ex αε, βε erit mediale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit mediale per corollarium 24: et tunc utraque linea αβ, γδ erit residuum mediale secundum. ergo linea γδ erit residuũ mediale eiusdem ordinis. Hoc theorema cõceptũ est uniuersaliter, siue linea sit commẽsurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum residuo mediali, esse & ipsam

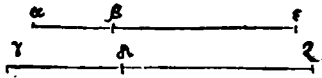
ipsam

ipsam residuum mediale, & eiusdem ordinis. Idem dicendum de tribus proximis theorematibus.

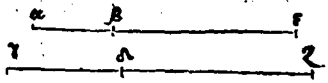
Centesimumquintum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ minori, est & ipsa linea minor.

Sit linea minor α β, cui sit commensurabilis γ δ. dico lineā γ δ esse lineam minorem: fiāt enim eadem quæ in præcedentibus. quoniam lineæ α ε, β ε sunt potentia incommensurabiles, ergo & lineæ γ ζ, δ ζ sunt potentia incommēsurabiles per 22. 6. & 10 huius. R*ursus per 22. 6 sicut quadratum lineæ α ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad quadratū lineæ δ ζ. cōiuncta ergo proportione, sicut quadrata linearum α ε, β ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadrata linearum γ ζ, δ ζ ad quadratum lineæ δ ζ: & permutata proportione sicut quadrata linearū α ε, β ε ad quadrata linearum γ ζ, δ ζ, ita quadratum lineæ β ε ad quadratum lineæ δ ζ. sed quadratum lineæ β ε est commensurabile quadrato lineæ δ ζ (quia lineæ β ε, δ ζ sunt cōmensurabiles.) ergo & compositū ex quadratis linearum α ε, β ε erit commensurabile composito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: sed compositū ex quadratis linearū α ε, β ε est rationale, ergo & compositum ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ erit rationale.* R*ursus cū sit sicut quadratum lineæ α ε ad parallelogrammum ex α ε, β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex γ ζ, δ ζ. (sicut diximus in proximo theoremate) permutata er-*



go proportione ſicut quadratũ lineæ α ι ad quadracũ lineæ γ ζ, ita parallelogrãmum

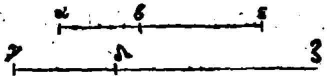


ex α ι, β ι ad parallelogrãmũ ex γ ζ, δ ζ. ſed quadratũ lineæ α ι eſt cõmenſurabile quadrato lineæ γ ζ, quia lineæ α ι, γ ζ ſunt cõmenſurabiles, ergo & parallelogrãmũ ex α ι, β ι erit commenſurabile parallelogrammo ex γ ζ, δ ζ. ſed parallelogrammũ ex α ι, β ι eſt mediale, ergo & parallelogrammum ex γ ζ, δ ζ erit mediale. ergo lineæ γ ζ, δ ζ erunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, parallelogrãmũ uero ex ipſis mediale. Ergo *linea γ δ erit linea minor.*

Centeſimumſextum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ cum rationali ſuperficie facienti totam medialem, eſt & ipſa linea cũ rationali ſuperficie faciens totam medialem.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β, cui ſit commẽſurabilis linea γ δ. dico lineã γ δ eſſe cũ



rationali ſuperficie facientẽ totam medialem. Sit lineæ α β linea conuenienter iuncta β ι, ergo lineæ α ι, β ι ſunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, parallelogrammũ uero ex ipſis rationale: fiant omnia quæ in præcedẽtibus. Similiter quoque demonſtrabimus ſicut linea α ι ad lineam β ι, ita lineam γ ζ ad lineam δ ζ: & compoſitũ ex quadratis linearum α ι, β ι eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: id uero quod ſit ex α ι, β ι

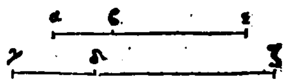
eſſe

esse similiter commensurabile ei, quod fit ex γ ζ, δ ζ. quare & similiter lineæ γ ζ, δ ζ erunt potentia incommensurabiles facientes ea quæ lineæ α ε, β ε. Ergo linea γ δ erit etiam linea cũ rationali superficie faciens totã medialẽ.

Centesimumseptimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ cum mediali superficie facienti totam medialem, commensurabilis est & ipsa cum mediali superficie faciens totam medialem.

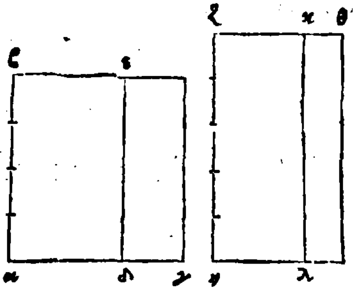
Sit linea cum mediali superficie faciẽs totam medialẽ α β, cui sit commensurabilis γ δ. dico lineam γ δ esse etiam lineam cum mediali superficie facientem totam medialẽ. Sit enim lineæ α β linea cõueniẽter iuncta β ε, & fiant cætera, ut in superioribus.



ergo lineæ α ε, β ε sunt potẽtia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiã mediale: & compositum ex quadratis incommensurabile ei, quod fit ex ipsis. Sunt autẽ, ut antea demonstratum est lineæ α ε, β ε commensurabiles lineis γ ζ, δ ζ, & compositum ex quadratis ipsorum α ε, β ε commensurabile composito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: id uero quod fit ex α ε, β ε cõmensurabile ei, quod fit ex γ ζ, δ ζ. ergo & lineæ γ ζ, δ ζ sunt potentia incommensurabiles facientes cætera omnia quæ lineæ α ε, β ε. Ergo linea γ δ est cum mediali superficie faciens totam medialem.

Centesimumoctauum Theorema.

Si de superficie rationali detrahatur superficies medialis, linea quæ reliquam superficiem potest, est alterutra ex duabus irrationalibus, aut residuum aut linea minor.



De *superficie rationali* β γ *detrahatur superficies medialis* β δ. *dico lineam quæ reliquam superficiē* ι γ *potest, esse alterutram ex duabus irrationalibus, aut residuū aut lineā minorem. Sit enim linea rationalis* ζ η, *secundum quam æqualis superficiei* β γ *applicetur superficies rectangula parallelogramma* η θ: *superficiei uero* ε δ *æqualis applicetur superficies parallelogrammo* η κ. *reliquum ergo parallelogrammū* ι γ *est æquale reliquo parallelogrammo* λ θ. *Cum igitur* ε γ *sit rationale, ipsum uero* ε δ *sit mediale, ergo & * η θ *erit rationale: ipsum uerò* η κ *mediale. ergo & linea* ζ θ *erit rationalis longitudine commensurabilis ipsi* ζ η *per* 21: *linea uero* ζ κ *erit rationalis longitudine incommensurabilis eidem lineæ* ζ η *per* 23. *ergo linea* ζ θ *erit longitudine incommensurabilis lineæ* ζ κ *per* 13. *ergo lineæ* ζ θ ζ κ *sunt rationales potentia tantum commensurabiles: ergo linea* κ θ *erit residuū, ipsi uero conuenienter iuncta linea* κ ζ: *linea autem* ζ θ *plus potest, quàm linea* ζ κ, *aut quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis. Posit prius quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cum sit tota* ζ θ *longitudine commensurabilis lineæ rationali* ζ η. *ergo linea* κ θ *est residuum primum.*

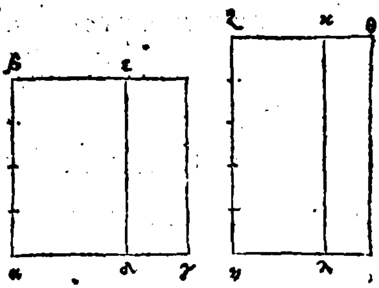
ergo

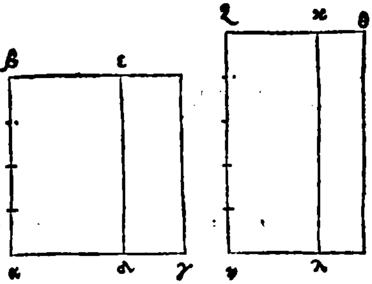
ergo per 91 linea potens parallelogrammum λθ, hoc est ιγ est residuũ. Quòd si linea ζθ plus possit quã linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, cum linea ζθ sit commensurabilis longitudine lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum quartum. Ergo per 94 linea potens superficiem λθ, hoc est γι est linea minor.

Centesimumnonum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies rationalis, aliæ duæ irrationales fiunt, aut residuum mediale primum, aut cum rationali superficie faciens totam medialem.

De superficie mediali βγ detrahatur rationalis superficies βδ, dico lineã quæ potest superficiem reliquã ιγ esse alterutram duarum irrationaliũ, uel residuũ mediale primum, uel cum rationali superficie faciẽtem totã medialem. Sit rationalis linea ζκ, secundũ quam applicentur superficies, ut in proximo dictum est: erit similiter linea ζθ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ζκ: linea uerò ζκ erit rationalis longitudine commensurabilis eidem ζκ: & lineæ ζθ, ζκ rationales erunt potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea κθ erit residuum: illi uerò conuenienter iuncta linea ζκ. Linea autem ζθ plus potest quàm linea ζκ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõ-



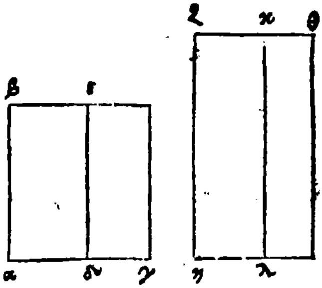


mensurabilis. Et quidem si linea ζθ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cũ linea cõuenienter iuncta ζκ sit longitudine commensurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum secũdum: quare linea quæ superficiem λθ, hoc est εγ potest, est residuũ mediale primũ per 92. Quòd si linea ζθ plus potest quã linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum linea conuenienter iuncta sit longitudine commẽsurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum quintum: quare linea quæ superficiẽ λθ, hoc est, εγ potest, est cum rationali superficie faciens totam medialem per 95.

Centesimumdecimum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies medialis, quæ sit incõmensurabilis toti, reliquæ duæ fiunt irrationales, aut residuum mediale secundum, aut cum mediali superficie faciens totam medialem.

Sicut in præcedentibus descriptionibus, hic quoque detrahatur de superficie mediali βγ superficies medialis βδ: quæ εδ sit incommensurabilis toti βγ. dico lineam quæ potest superficiem εγ, esse alterutram duarũ irrationalium, uel residuum mediale secundũ, uel cum mediali superficie facientem totam medialem. Cum enim utraque superficies

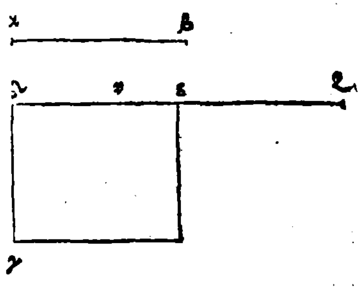


superficies ε γ, ε δ sit medialis, ergo utraque linea ζ θ, ζ κ est rationalis, & rationali ζ η lõgitudine incommensurabilis. Est autẽ superficies β γ, hoc est κ θ incommẽsurabilis ipsi β δ, hoc est η κ. ergo lineæ ζ θ, ζ κ sũt incommensurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea κ θ erit residuum: ipsi uero conuenienter iuncta, ζ κ. linea autem ζ θ plus potest quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et quidẽ si linea ζ θ plus potest, quàm ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. cum neutra ex ζ θ, ζ κ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζ η, ergo linea κ θ erit residuum tertium. ergo per 93. linea quæ potest superficiem λ θ, hoc est ε γ erit residuum mediale secundũ. Quòd si linea ζ θ plus potest quàm linea ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ex ζ θ, ζ κ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζ η, ergo linea κ θ erit residuum sextũ. Ergo per 96 linea quæ superficiem λ θ, hoc est ε γ potest, erit cum mediali superficie faciens totam medialem.

Centesimumundecimum Theorema.

Linea quæ residuum dicitur, non est eadem cum ea quæ dicitur binomium.

Sit residuum α β, dico α β non esse idem cum binomio. Nam si esse potest, est. Sitq; linea rationalis δ γ, secũdum quam



æquale quadrato lineæ αβ applicetur parallelogrammum rectangulũ γε faciens alterũ latus δε. cum linea αβ sit residuum, ergo linea δε erit residuum primũ per 97. Sit ipsi cõuenienter iuncta εζ, ergo lineæ δζ, ζε sunt rationales potentia tantũ commẽsurabiles, & linea δζ plus potest quàm linea εζ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis: & δζ, est longitudine cõmensurabilis rationali γδ. Rursus per positionem linea αβ est binomium, ergo linea δε est binomium primum per 60. Diuidatur in sua nomina in puncto η: sitq; maius nomẽ δη, ergo lineæ δη, ηε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea δη plus potest quàm linea ηε quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, eademq; linea δη est longitudine commensurabilis rationali γδ. Ergo per 12 lineæ δη, δζ sunt longitudine commensurabiles: ergo & reliqua linea ηζ erit longitudine commensurabilis toti δζ per 16, aut per corollarium eiusdem. Cum igitur linea δζ sit cõmensurabilis lineæ ζη, sit autem linea δζ rationalis, rationalis quoque erit ζη. Cum autem linea δζ sit longitudine commensurabilis lineæ ζη: sit autem linea δζ longitudine incommensurabilis lineæ εζ, ergo per 14 lineæ ζη, ζε sunt longitudine incommensurabiles. Sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζη, ζε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea εη erit residuũ: sed est rationalis ut modo conclusum est: hoc autem est

impoßibile

impoßibile, eandẽ ſcilicet lineam eſſe rationalem & irrationalem, ergo reſiduum nõ erit idem quod binomiũ. Linea quæ reſiduũ dicitur, & cæteræ quinq; eam conſequentes irrationales, neque lineæ mediali neque ſibi ipſæ inter ſe ſunt eædem. Nam quadratũ lineæ medialis ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus rationalem lineam longitudine incommẽſurabilem ei, ſecundum quam applicatur per 23. *quadratũ uerò reſidui ſecundum rationalem applicatum, facit alterũ latus reſiduum primum per* 97. *quadratum uerò reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſecũdum per* 98. *quadratum uerò reſidui medialis ſecundi, facit alterum latus reſiduum tertium per* 99. *quadratum uerò lineæ minoris, facit alterum latus reſiduum quartum per* 100. *quadratum uero lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem, facit alterum latus reſiduum quintum per* 101. *quadratum uero lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum per* 102. *Cum igitur dicta latera quæ ſunt latitudines cuiuſque parallelogrammi unicuique quadrato æqualis & ſecundum rationalem applicati differãt, & à primo latere & ipſa inter ſe, (nam à primo differunt, quoniam eſt rationalis linea: inter ſe uero differũt, quoniam ſunt reſidua non eiuſdem ordinis) conſtat ipſas quoq; lineas irrationales inter ſe differentes eſſe. Et quoniam demonſtratum eſt reſiduum non eſſe idem quod binomiũ: quadrata autem reſidui & quinque linearum irrationa-*

lium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciunt altera latera ex residuis eiusdem ordinis, cuius sunt & residua, quorũ quadrata applicantur rationali: similiter & quadrata binomij & quinque linearum irrationalium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciũt altera latera ex binomijs eiusdem ordinis, cuius sunt & binomia, quorũ quadrata applicantur rationali. ergo lineæ irrationales quæ consequuntur binomium, & quæ consequũtur residuũ, sunt inter se differentes. Quare dictæ lineæ omnes irrationales sunt numero 13.

1. *Medialis.*
2. *Binomium.*
3. *Bimediale primum.*
4. *Bimediale secundum.*
5. *Maior.*
6. *Potens rationale & mediale*
7. *Potens duo medialia.*
8. *Residuum.*
9. *Residuum mediale primum.*
10. *Residuũ mediale secundum.*
11. *Minor.*
12. *Faciens cum rationali superficie totam medialem.*
13. *Faciens cum mediali superficie totam medialem.*

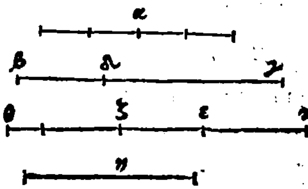
Centesimumduodecimum Theorema.

Quadratum, lineę rationalis secundum binomium applicatum facit alterum latus residuũ, cuius nomina sunt commẽsurabilia binomij nominibus, & in eadem proportione: præterea id quod fit residuũ, eundẽ ordinem retinet quem binomium.

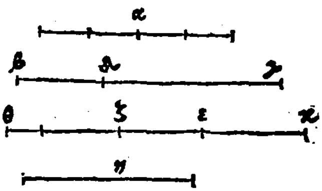
Sit linea rationalis α, binominm βγ, cuius maius nomen sit γδ: & quadrato lineæ α sit æquale parallelogrammum

ex

ex β γ, ι ζ. dico lineam ι ζ esse residuū, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius binomij β γ, quæ nomina sunt γ δ, δ β: & in eadem proportione præterea linea ι ζ eundē ordinem & locū tenet inter residua, quē binomium β γ retinet inter binomia. Sit rursus quadrato lineæ α æquale parallelogrammum ex β δ, κ. Cum igitur parallelogrammum ex β γ, ι ζ sit

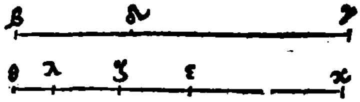


æquale parallelogrāmo ex β δ, κ, cum utrunq; sit æquale quadrato lineæ α, est igitur sicut linea γ β ad lineam β δ, ita linea κ ad lineam ι ζ per 14.6. sed γ β est maior quàm β δ, ergo & κ erit maior quàm ι ζ. Sit linea ι θ æqualis lineæ κ. est ergo sicut γ β ad γ δ, ita θ ι ad ι ζ per 7.5. ergo disiuncta proportione per 17.5. sicut γ δ ad β δ, ita θ ζ ad ζ ι. fiat sicut θ ζ ad ζ ι, ita ζ κ ad ι κ, (quod quēadmodum fiat dicemus ad finem demonstrationis.) ergo per 12.5. sicut linea ζ κ ad lineam ι κ, ita tota linea θ κ ad totā ζ κ. Sed sicut ζ κ ad ι κ, ita est γ δ ad δ β: (quia ζ κ est ad ι κ sicut θ ζ ad ζ ι, & θ ζ ad ζ ι est sicut γ δ ad δ β.) ergo sicut linea θ κ ad ζ κ, ita γ δ ad δ β. sed quadratum lineæ γ δ est commensurabile quadrato lineæ δ β, ergo & quadratum lineæ θ κ quadrato lineæ ζ κ erit commēsurabile per 22.6 & 10 huius. Sed tres lineæ θ κ, ζ κ, ι κ sunt proportionales in continua proportione: (ut modo dictum est.) ergo per secundum corollarium 20.6 quadratum lineæ θ κ erit ad quadratū lineæ ζ κ, sicut linea θ κ ad lineam ι κ. ergo linea θ κ erit longitudine commensurabilis lineæ ι κ: quare per 16 linea θ ι erit longitudi-



ne commēsurabilis lineæ ι κ. Et quoniam quadratū lineæ α est æquale parallelogrāmo ex θ ι, ϛ λ, & quadratum lineæ α est rationale, ergo & parallelogrammū ex θ ι, ϛ λ erit rationale. ergo per 21 linea θ ι erit rationalis & longitudine cōmensarabilis lineæ ϛ λ: quare & linea ι κ, quæ est ipsi θ ι longitudine commēsurabilis, erit etiam rationalis & longitudine commēsurabilis ipsi β λ. Cum igitur sit sicut linea γ λ ad λ ϛ, ita ζ κ ad ι κ: (quia supra dictum est, sicut γ λ ad λ β, ita θ ζ ad ζ ι, & sicut θ ζ ad ζ ι, ita ζ κ, ad ι κ,) lineæ uero γ λ, λ β sint potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ ζ κ, ι κ erunt potentia tantum commensurabiles. Et cum sit sicut γ λ ad λ β, ita ζ κ ad ι κ, ergo cōuersa proportione sicut λ ϛ ad γ λ, ita ι κ ad ζ κ: & permutata proportione sicut λ β ad ι κ, ita γ λ ad ζ κ: sed lineæ λ β, ι κ sunt longitudine commensurabiles, (ut modo probatum est) ergo & lineæ γ λ, ζ κ sunt longitudine commēsurabiles: sed linea γ λ, est rationalis, ergo & linea ζ κ erit etiam rationalis: ergo lineæ ζ κ, ι κ sunt rationales potētia tantam commēsurabiles: ergo linea ζ ι erit residuum, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus binomij & in eadem proportione: dico præterea illud residuum esse eiusdem ordinis cuius & binomiū. Nam linea γ λ plus potest, quàm linea β λ aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut lineæ incommensurabilis: & quidem si linea γ λ plus potest, quàm β λ quadrato lineæ sibi longitudine commēsurabilis, similiter & linea *ζκ plus poterit quàm linea ικ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15. Et quidē si linea γδ est longitudine commēsurabilis lineæ rationali, cum modo probatum sit lineas γδ, ζκ esse longitudine commensurabiles, ergo per 12 etiam linea ζκ erit longitudine commensurabilis lineæ rationali: tunc igitur linea βγ erit binomium primum, similiter & linea ζι erit residuum primū. Quòd si linea βδ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea ικ erit eidē cōmensurabilis: tunc ergo linea βγ erit binomium secundum, & linea ζι residuum secundum. Quòd si neutra ex γδ, δβ fuerit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζκ, ικ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea βγ binomium tertium, & linea ζι residuum tertium. Quòd si linea γδ plus potest quàm linea βδ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, similiter & linea ζκ plus poterit quàm ικ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15. Et quidem si linea γδ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea ζκ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea βγ binomium quartum, & linea ζι residuum quartum. Quòd si linea βδ fuerit rationali commensurabilis, similiter & linea ικ erit eidem commensurabilis, tunc linea βγ erit binomium quintū: & linea ζι residuū quintū. Quòd si neutra ex γδ, βδ erit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζκ, ικ erit eidem commensurabilis, tunc linea βγ erit binomium sextum, & linea ζι residuum sextum. Ergo linea ζι erit residuum, cuius nomina, nempe ζκ, ικ sunt com-*

mensurabilia nominibus binomij ϐγ, nominibus inquã γδ, δβ: & sunt in eadem proportione, & habent eundem ordinem & locum inter residua quem binomium inter binomia. Nunc illud *dicamus quomodo fiat sicut linea θζ ad lineam ζι, ita linea ζκ ad lineam ικ. linea γδ est maior linea βδ. ergo*

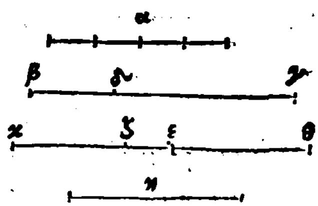


& linea θζ erit maior linea ζι. Detrahatur *de linea θζ æqualis lineæ ζι, quæ sit ζλ per 3.1. Et reliqua sit θλ. ergo linea θλ erit minor quam linea θζ, quia θζ est æqualis lineis θλ, λζ. fiat sicut θλ, ad θζ, ita ζι ad ζκ per 12.6: ergo per conuersam proportionem sicut θζ ad θλ, ita ζκ ad ζι. Ergo per euersam proportionem sicut linea θζ ad λζ, hoc est ad ei æqualem ζι, ita linea ζκ ad ικ.*

Centesimum decimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ rationalis secundum residuum applicatum, facit alterum latus binomium, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione: præterea id quod fit binomium est eiusdẽ ordinis, cuius & residuum.

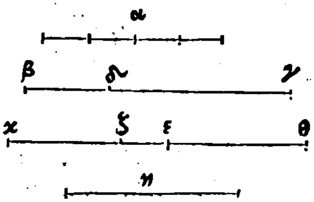
Sit linea rationalis α, residuũ uerò βδ: & quadrato lineæ α sit æquale id quod fit ex βδ, κθ: itaque quadratum lineæ rationalis α secundũ ϐδ residuũ



applicatum, facit alterum latus κθ. dico lineam κθ esse binomium cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius βδ & in eadem proportione: & lineã κθ

esse

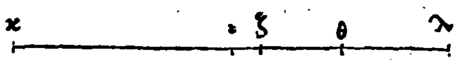
esse eiusdem ordinis binomium, cuius & εδ est residuũ. Sit lineæ εδ linea cõueniẽter iuncta δγ, ergo lineæ εγ, δγ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. & quadrato lineæ κ æquale sit parallelogrammum ex βγ,κ: sed quadratum lineæ κ est rationale, ergo & parallelogrammum ex βγ,κ est etiam rationale: ergo & linea κ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ εγ. Cum igitur parallelogrammum ex βγ,κ sit æquale ei quod fit ex βδ,κθ, ergo sicut εγ ad εδ, ita κθ ad,κ: sed εγ est maior quam βδ, ergo & linea κθ erit maior quàm κ. Sit lineæ κ æqualis linea κι, ergo linea κι erit rationalis longitudine commẽsurabilis linea βγ sicut & linea κ: & cum sit sicut βγ ad εδ, ita κθ ad κι. euersa ergo proportione sicut εγ ad δγ, ita κθ ad ιθ. fiat sicut κθ ad ιθ, ita linea ζθ ad ιζ, (quod quemadmodum fiat, dicemus ad finẽ demonstrationis.) ergo erit reliqua κζ ad reliquam ζθ, sicut tota κθ ad totã θι per 19.5, hoc est sicut εγ ad γδ: sed lineæ βγ, γδ sunt potentia tantũ commensurabiles, ergo & lineæ κζ, ζθ erunt potentia tantum commẽsurabiles. Et quoniam est sicut κθ ad θι, ita κζ ad ζθ, sed & sicut κθ ad θι, ita θζ ad ζι, ergo sicut κζ ad ζθ, ita ζθ ad ζι: quare sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. ergo sicut κζ ad ζι, ita quadratum lineæ κζ ad quadratum lineæ ζθ: sed hæc quadrata sunt commẽsurabilia, quia lineæ κζ, ζθ sunt potentia commensurabiles. ergo lineæ κζ, ζι sunt longitudine commensurabiles Quare per secundã partem 16. lineæ κι, ιζ sunt lougitudine commensurabiles: quare per eandem 16. & lineæ κζ, κι sunt longitu-



dine commensurabiles: sed linea κε est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ ϛγ. ergo & linea κζ erit rationalis & longitudine commensurabilis eidem ϛγ. Et quoniã est sicut linea βγ ad γδ, ita κζ ad ζθ, permutata ergo proportione sicut βγ ad κζ, ita γδ ad ζθ: sed linea βγ est longitudine commẽsurabilis lineæ κζ. ergo & linea γδ erit longitudine cõmẽsurabilis lineæ ζθ: sed linea γδ est rationalis, ergo & linea ζθ erit rationalis: sed & lineæ βγ, γδ sunt potentia tantum commensurabiles: ergo & lineæ κζ, ζθ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea κθ erit binomium, cuius nomina sunt commẽsurabilia nominibus residui, & in eadem proportionẽ. dico præterea illud binomium esse eiusdem ordinis cuius, & residuum ϛδ. Nam si βγ plus potest quàm γδ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, etiã linea κζ poterit plus quàm ζθ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis per 15. Quòd si linea ϛγ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea κζ erit eidem rationali commẽsurabilis longitudine per 12: quia lineæ βγ, κζ sunt longitudine commensurabiles: & sic erit linea ϛδ residuum primum, & linea κθ similiter binomium primum. Quòd si γδ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam linea ζθ erit eidem longitudine commensurabilis: & sic erit linea βδ residuum secundum, & linea κθ binomiũ secundũ. Quòd si neutra ex βγ, γδ fuerit rationali commensurabilis longi-

tudine

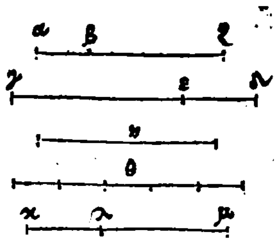
tudine, neutra etiam ex κ ζ, ζ θ erit eidem commensurabilis: & sic erit linea β δ residuum tertium, & linea κ θ binomium tertium. Si *uero linea β γ plus potest quàm linea γ δ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, etiam linea κ ζ poterit plus quàm linea ζ θ quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per* 15. E*t quidem si linea β γ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam κ ζ erit eidem commẽsurabilis longitudine: & tunc linea β δ erit residuum quartũ, & linea κ θ binomium quartũ.* Q*uòd si γ δ fuerit rationali commẽsurabilis longitudine, etiam ζ θ erit eidem commensurabilis longitudine: & tunc erit linea β δ residuum quintum, & linea κ θ binomiũ quintum.* Q*uòd si neutra ex β γ, γ δ fuerit longitudine commẽsurabilis rationali, similiter neutra ex κ ζ, ζ θ erit eidem cõmensurabilis longitudine: & sic linea β δ erit residuũ sextum, & linea κ θ binomium sextum.* Ergo *κ θ erit binomium, cuius nomina κ ζ, ζ θ sunt commẽsurabilia residui β δ nominibus β γ, γ δ, & in eadem proportione: & linea κ θ retinet inter binomia eundem ordinem quem β δ inter residua.* N*unc dicamus quomodo fiat sicut linea κ θ ad lineam θ ι, ita linea θ ζ ad lineã ζ ι.* L*ineæ κ θ ad*



datur in continuum & directum linea æqualis ipsi θ ι: & sit tota linea κ λ: & per 10.6 *diuidatur linea θ ι sicut tota linea κ λ diuisa est in puncto θ: sitq; linea θ ι diuisa in puncto ζ.* Erit *sicut κ θ ad θ λ, hoc est ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι &c.*

Centesimumdecimumquartum Theorema.

Si parallelogrammum contineatur ex reſiduo & binomio, cuius nomina ſint commenſurabilia nominibus reſidui & in eadem proportione, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt rationalis.



Contineatur parallelogrammum ex reſiduo α β & binomio γ δ, cuius binomij maius nomẽ ſit γ ε, minus uero ε δ: & ſint commenſurabilia nominibus reſidui α β, quæ ſint α ζ, ζ β, & in eadem proportione. ſitq́; potens illud parallelogrammum linea, η. dico lineam illam η, eſſe rationalem. Proponatur *rationalis θ, cuius quadrato æquale ſecundum lineam γ δ applicetur parallelogrammum faciens alterum latus κ λ. ergo linea κ λ eſt reſiduum per* 112*: cuius nomina ſint κ μ, μ λ quæ ſunt commenſurabilia binomij nominibus γ ε, ε δ, & in eadem proportione per* 112. *Sed per poſitionem lineæ γ ε, ε δ ſunt commenſurabiles lineis α ζ, ζ β, & ſunt in eadẽ proportione: erit ergo ſicut α ζ ad ζ β, ita κ μ ad μ λ. ergo permutata proportione ſicut α ζ ad κ μ, ita ζ β ad μ λ. ergo & reliqua α β ad reliquam κ λ erit ſicut α ζ ad κ μ. ſed linea α ζ eſt commenſurabilis lineæ κ μ, quia utraque ex α ζ, κ μ eſt cõmenſurabilis lineæ γ ε: ergo & linea α β erit commenſurabilis lineæ κ λ. eſt autem ſicut linea α β ad lineam κ λ, ita parallelogrammum ex γ δ, α β ad parallelogrammum ex γ δ, κ λ per* 1.6. *ergo parallelogrammum ex γ δ, α β eſt commẽſurabile parallelogrammo ex γ δ, κ λ: ſed parallelogrammum ex γ δ, κ λ eſt æquale quadrato lineæ θ, ergo parallelogrammũ ex γ δ, α β eſt*

commen-

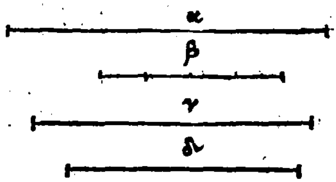
commensurabile quadrato lineæ θ: sed parallelogrammum ex γ δ, α β est æquale quadrato lineæ κ, ergo quadratum lineæ θ erit commensurabile quadrato lineæ κ. sed quadratum lineæ θ est rationale, ergo & quadratū lineæ κ erit rationale. ergo & linea κ erit rationalis: & potest parallelogrammum ex α β, γ δ. Ergo *si parallelogrammum contineatur &c.*

Corollarium.

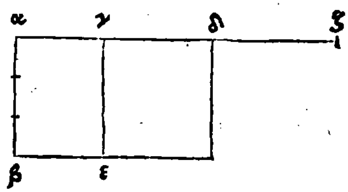
Ex hoc manifestū est, posse rationale parallelogrammum contineri ex lineis irrationalibus.

Centesimumdecimumquintum Theorema.

Ex linea mediali nascuntur lineæ irrationales innumerabiles, quarū nulla ulli ante dictorū eadē sit.



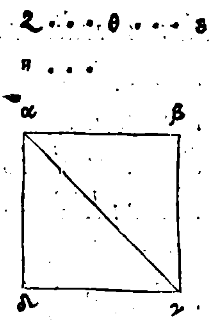
Sit linea medialis α γ. dico ex linea α γ innumerabiles gigni irrationales, quarū nulla ulli ex antedictis irrationalibus eadē sit. Ducatur *super extremitate lineæ α γ perpendicularis α ε, quæ sit rationalis: & cōpleatur parallelogrammū ε γ, ergo illud parallelogrāmū β γ erit irrationale per ea quæ dicta sunt in fine demōstrationis 38: linea ergo quæ illud potest, erit similiter irrationalis. Sit autē illa linea γ δ, quæ nulli ex ante dictis irrationalibus erit eadē: quia quadratū huius γ δ secundū lineā rationalē puta α ε applicatū, facit alterum latus lineā medialem nempe α γ: nullius uero ex antedictis quadratum secundum rationalem applicatum, facit alterum latus lineam medialem.* Rursus



compleatur parallelogrammum ι δ, erit similiter illud parallelogrammum ι δ irrationale, & linea quæ illud potest etiã irrationalis, quæ sit δ ζ: hæc similiter nulli ex antedictis irrationalibus eadem esse potest. Nullius *enim ex antedictis irrationalibus quadratum secundum rationalem applicatum facit alterum latus lineã γ δ.* Ergo *ex linea mediali &c.*

Centesimumdecimumsextum Theorema.

Propositum nobis esto, demonstrare in figuris quadratis diametrum esse longitudine incommensurabilem ipsi lateri.



Sit quadratum, α β γ δ, cuius diameter α γ. dico lineam α γ esse longitudine incommensurabilem lineæ α β. si enim posit fieri, sit commẽsurabilis: dico tunc illud consequi eundem numerum esse parem & imparem. Manifestum *est quadratum lineæ α γ esse duplum ad quadratũ lineæ α β per 47.1.* Et *quoniam linea α γ est longitudine commensurabilis lineæ α β per hypothesin, ergo habebunt proportionem inter se, quam numerus ad numerũ per 5 huius.* Habeat *linea α γ ad lineã α β proportionẽ, quam numerus ε ζ, ad numerum η: sintq; illi numeri minimi omnium habentium eandem proportionẽ: nõ igitur numerus ε ζ erit unitas.* Nam *si ε ζ esset unitas, cum habeat proportionem ad η, sicut linea α γ ad lineam α β,*

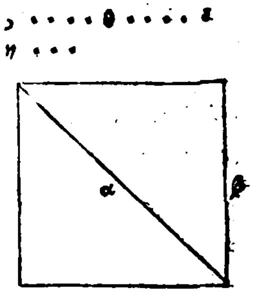
maior

maior autem sit α γ *quàm* α β: *maior ergo* ι ζ *unitas quàm numerus* κ, *quod est impoßibile. ergo* ι ζ *non est unitas, est ergo numerus.* Et *quoniam est sicut quadratū lineæ* α γ *ad quadratum lineæ* α β, *ita quadratus numerus productus ex* ι ζ *ad quadratum numerum productum ex* κ: *nam utrobique est proportio suorum laterum duplicata per corollarium* 20.6. & 11. 8: *proportio autem lineæ* α γ *ad lineam* α β *duplicata, est æqualis proportioni numeri* ι ζ, *ad numerum* κ *duplicatæ, quia est sicut* α γ *ad* α β, *ita numerus* ι ζ *ad numerum* κ: *quadratum uero lineæ* α γ *est duplum ad quadratū lineæ* α β, *ergo & quadratus productus ex numero* ι ζ *erit duplus ad numerum quadratum productum ex* κ. *ergo numerus quadratus ex* ι ζ *est par: quare & ipse* ι ζ *erit etiam par: nam si* ι ζ *esset impar, etiā quadratus ex ipso* ι ζ *esset impar per* 23.9, *aut per* 29.9. Secetur ι ζ *æqualiter & bifariam ubi est* θ: *quoniam numeri* ι ζ, κ *sunt minimi suæ proportionis, sunt inter se primi per* 24.7: & *est* ι ζ *par, ergo numerus* κ *est impar.* Nam *si* κ *esset par, binarius numeraret utrunq;* ι ζ, κ: (*nam omnis numerus par habet partem dimidiam per definitionem*) *sed illi numeri* ι ζ, κ *sunt inter se primi: est ergo impoßibile eos binario aut alio numero quàm unitate numerari. ergo numerus* κ *est impar.* Et *quoniam numerus* ι ζ *est duplus ad* ι θ, *ergo numerus quadratus ex* ι ζ *est quadruplus ad numerum quadratum ex* ι θ. Est *autem numerus quadratus ex* ι ζ *duplus ad numerum quadratum ex* κ, *ergo numerus quadratus ex* κ, *est duplus ad numerum quadratum ex* ι θ. *ergo numerus qua-*

dratus ex η est par, ergo & per ea quæ modo dicta sunt, ipse numerus η est par: sed probatum est eum esse imparem, quod est impossibile, non igitur linea α γ erit longitudine commensurabilis lineæ α β. ergo erit longitudine incommensurabilis.

Aliter.

Alia ratione demonstremus diametrum esse longitudine incommẽsurabilem ipsi lateri: si negetur, sit diameter α, latus uero sit β: fiátq; rursus sicut α ad β, ita numerus ε ζ ad numerum η, & sint minimi suæ proportionis: ergo sunt inter se primi. dico primo numerum η non esse unitatem: nam si possibile est, sit unitas. Et quoniam est quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus ex ε ζ ad quadratum numerum ex η (ut dictum est in præcedẽti demonstratione.) sed quadratum lineæ α est duplum ad quadratum lineæ β, ergo numerus quadratus ex ε ζ ad numerum quadratum ex η, est duplus: sed per te numerus η est unitas, ergo numerus quadratus ex ε ζ est binarius, quod est impossibile: nõ ergo η erit unitas, ergo erit numerus. Et quoniam est sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratus numerus ex ε ζ ad quadratum numerũ ex η, ergo numerus quadratus ex ε ζ erit duplus ad numerum quadratum ex η: quare numerus quadratus ex η numerabit numerum quadratum ex ε ζ: ergo per 14, 8 numerus η numerabit numerum ε ζ: sed etiã numerat seipsum, ergo numerus η nu-

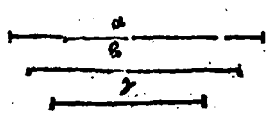


merabit

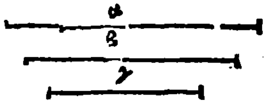
merabit numeros κ,ι ζ: cũ tamen sint inter se primi, quod est impoßibile. ergo linea α non erit longitudine cõmensurabilis lineæ β: ergo erit eidem incommensurabilis.

Hinc *animaduerti posse puto, neutram harum demõstrationũ esse* Theonis, *sed nec theorema ipsum esse* Euclidis: *nam & tractatio tota demonstrandi habet quod refelli poßit: nec refert eam diligẽtiam, qua in cæteris usum fuisse Theonẽ ex ipso uidere possumus.* Et *theorema ipsum uidetur non suo loco positum esse: debuit enim præcedere tractatũ linearum irrationaliũ.* Q*uanuis enim diameter sit longitudine incommensurabilis ipsi lateri, est tamen eidem commẽsurabilis potentia. ergo si latus ipsum aut diametrum posueris esse lineam rationalem, necessario sequitur & alterum, nempe latus ipsum aut diametrum esse rationalem, per definitionem linearum rationalium.* Huius *autem theorematis multo facillimã & certißimam demonstrationem legere licet in eo libello, quem supra memorauimus* Aristotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν. Illud *quoque quod sequitur, addititiũ esse nemo negauerit, qui intellexerit posteriorem ipsius additionis partem pertinere ad libros consequentes, perscriptos de solidis: quia tamen & uerũ est quod dicitur, & continet rerum ipsarum intelligentiam, prætermittendum nobis uisum non est.*

Repertis *lineis rectis longitudine inter se incommensurabilibus, ut lineis α, β, reperiri possunt & aliæ quamplurimæ magnitudines ex binis dimẽsionibus*



constantes, quales sunt plana ipsa siue superficies, quæ *ſint inter ſe incommenſurabiles. Nam ſi inter lineas α, β ſumatur media linea proportionalis γ, per*



13.6, erit ſicut linea α ad lineam β, ita ſimilis ſpecies figuræ deſcriptæ à linea α ad ſimilem ſuperficiem figuræ deſcriptæ à linea γ: ſimilis, inquã, ſpecies ad ſimilem ſpeciem ſimiliter deſcriptam, per ſecũdum corollarium 20 theorematis libri ſexti, hoc eſt, ſiue illæ ſint quadrata, (quæ ſemper ſunt inter ſe ſimiles) ſiue fuerint aliæ quæpiam ſpecies rectilineæ ſimiles, ſiue circuli circa diametros α, γ. Nam circuli habent eandem proportionem inter ſe, quam quadrata ſuarum diametrorum per 2. 12. ergo per ſecundam partem decimi theorematis huius libri, ſimilis ſpecies figuræ deſcriptæ à linea α, erit incommenſurabilis ſimili ſpeciei ſimiliter deſcriptæ à linea γ. Reperiuntur ergo hoc modo ſuperficies inter ſe incommenſurabiles. Simili ratione reperiuntur figuræ commenſurabiles, ſi poſueris lineas α, β eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles. Cum hæc ita ſint, nunc demonſtremus etiam in ipſis ſolidis eſſe quædam inter ſe commenſurabilia, & quædam incommenſurabilia. Nam ſi ex ſingulis quadratis linearum α, β, uel aliis figuris rectilineis, quæ ſint illis quadratis æquales, erexerimus ſolida ſingula æquali altitudine, ſiue ſint illa ſolida ex ſuperficiebus æquidiſtantibus compoſita, ſiue pyramides, ſiue corpora ſerratilia, illa ſolida ſic erecta, erunt inter ſe, ſicut etiam ipſorum baſes inter ſe, per 32.11, & per 5 & 6.12. De corporibus tamen ſerratilibus nullum eſt tale theorema. Et quidem ſi baſes ſolidorum fuerint inter

ter

ter se commensurabiles, solida quoque erunt inter se cõmensurabilia: quòd si bases fuerint incommensurabiles, solida quoque erunt incommẽsurabilia, per 10 huius libri decimi. At si fuerint circuli duo α, β, & super singulos erecti coni siue cylindri, eadem altitudine erunt similiter inter se coni, & cylindri inter se, sicut ipsi circuli, qui sunt eorum bases per 11.12. Et quidem si circuli fuerint inter se commẽsurabiles, similiter ipsi coni inter se, & cylindri inter se erunt cõmensurabiles. Quòd si fuerint circuli incommensurabiles, similiter & coni inter se, & cylindri inter se erunt incõmensurabiles, per 10. huius. Vnde constat, non in solis lineis & superficiebus esse commensurabilitatem aut incommẽsurabilitatem, sed in solidis quoque easdem reperiri.

P. MONTAVREI CARMEN.

Hîc formas iam uictor ouans, normámq; repono.
Hîc ego secessus uoti damnatus adibo
Phœbe tuos, duce te saltus emensus opacos:
Saxáque peruia nũc multis, prius hospita paucis
Exæquata meo quæ concessere labori.
Mox, tua dũ magno concussus numine mentem
Thure uaporabit purus delubra sacerdos,
Et sacris operatus erit Bellaïus aris,
Ipse tua hoc iubeas monimentum dedicet arce.
Nam per nos tentare, nefas, sine uate profanos.
Comperto ut spatium quadrata æquale duobus
Redderet ex ternis, cuneo quæ subdita recto

Linea, Pythagoras Samius lectiſſima centum
Terga boum impoſuit, uictor ceu ſplēdidus, aris
Pieridum, magnis ſibi parua rependere uiſus.
Tanto illi potior multis ſapientia nummis.
Ipſe quoque imparibus donis imitatus eoſdem,
Sit mihi fas, animos, at non ita diſſimili in re,
Parua quidē illa tibi, ſed quę mihi maxima, ſoluā
Munera. Diis quando pietas gratiſſima merces,
Me uotiua pium teſtabitur uſque tabella.
Noſtra tibi è multis cantabit pagina paucas
O Phœbi genus, inculto Sapientia laudes
Carmine, quóq; modo geminas res miſcuit uſus,
Et Sophiæ cōiunctus amor noua nomina duxit,
Cuius ut exemplo ſimul & ſermone fruamur.
Nanque homines ſeclis quondam ſenioribus uſi,
Qui ſtudiis animos & tempora longa dederunt,
Naturæ in rebus, ſapientum nomen adepti.
Quæ cum Pythagoræ ratio manaſſet in æuum,
Non tulit inuidiam ſenior. Nam forte Leonti
Cui regnata Phliuns, quondam cōgreſſus, & ore
Dum reſerat magno naturæ arcana parentis,
Admiranda dedit diuini ſigna uigoris,
Ingenio neque uiſa minor facundia ſummo.
Quærentíque uiro, quánam confideret arte,
Ille quidem negat eſſe ſibi quicquam ullius artis.
Sed ſtudiis æterna tuis Sapientia duci,
Hinc ſibi philoſophi nomen finxiſſe nouum ſe.
Attonitus uocis nouitate, rogat quid in hac re
Poneret, an reliquos inter diſcrimen & iſtos.

Nec minimum discrimē, ait, quod ut ipse doceri
Me referente queas, in imagine cuncta notabo.
Nónne uides quātis celebrentur Olympia ludis?
Quàm multis cuiusque modi mercatus abundet
Cœtibus ille frequēs glomerātibus? huic ego uitam
Persimilē esse hominū dicam. Nam corporis illic
Pluribus ut uires, uarióque exercita motu
Fortia mēbra solēt celebres parere inde coronas,
Tenuia gloriolæ pereuntis pabula: quæstus
Excitat hos, aliena ut emant, aut ut sua uendant.
Quos præter genus illud inest, lōge anteferēdum
Nobilitate aliis, laudem captantibus & rem:
Nec quoquā minus ingenuū, qui nec sibi plaudi
Fronde coronatis optent, neq; crescere nummos.
Hoc tantum rerum quid ab unoquoq; geratur,
Et quo quidque modo, cura studióque sagaci
Lustrantes recolunt, & ab omni parte uorantes,
Intentis iucunda oculis spectacula quærunt.
Haud aliter quàm qui mercatum aliunde profecti,
Nos etiam ex aliis alias peruenimus oras:
Terrarúmque solum exilio sortimur habendum.
Hic alios quæstus, popularis gloria famæ
Sunt quos uana tenet multi: plerisque uoluptas
Imperat, in multis morbi non simplicis est uis.
Sed quid ago? innumerósne parem enumerare furores?
Perrarum genus illorum, qui maximus esse
Debebat numerus, rebus constanter omissis,
Posthabitisque aliis, quos recti cura sequendi
Ceperit, & ueri dederit simulacra tueri.

Cæleſtes animæ, quas incoluere beatas
Suſpiciunt ſine fine domos, & abeſſe querentes,
Quod reliquũ eſt, ĩhiãt animis, & mẽte morãtur.
Nec terras meminere procul ſpectare iacentes,
Hi tales, ſtudio quibus eſt ſapientia, ſunto
Philoſophi, & meritũ me iudice nomen habẽto.
Addidit, utque illic hominum liberrima ſors eſt,
Qui ſpectant, rerúmque aliis cõmercia cedunt,
Sic ſtudiis cunctis, animos quæ plurima uerſant,
Naturæ indagare uias atque abdita præſtat.
Sed neq; Pythagoras tanto modò nobilis author
Nomine, quin rebus multo magis amplificatis
Floruit: atque animos cultu molliuit agreſtes,
Magna prius per quẽ ter maxima Græcia creuit.
Hæc mihi dictabat, uacua dum feſſus in umbra
Rure ſuburbano inſtantes leuat arte ruinas
Labentis patriæ, & curarum Tullius æſtum,
Purus & ipſe fluens Graiorum fontibus hauſtis
Tullius, in Latium peregrinas doctus Athenas
Ferre, ſuóſque nouis opibus ditare Quirites.
Materiẽ ille quidẽ, numeros ſed Phœbus & artẽ
Sufficit, ulla modo noſtri ſi carminis eſt ars.

FINIS.