Euclidis elementorum

LIBER DECIMVS, PETRO

Montaureo interprete.

Ad Ioannem Bellaïum Cardinalem.

LVTETIAE,

Apud Vascosanum, uia Iacobaa ad insigne F[illegible]

M. D. LI.

CVM PRIVILEGIO.

PRIVILEGII SENTENTIA.

Regio diplomate cautū est, ne quis alius præter Vascosanum, hunc Euclidis *elementorum librum decimum interprete* Petro Montaureo *uiro senatorio ante sexennium imprimat, néue uendat. Qui secus fecerit, libris & pœna in sanctione æstimata multabitur.* Datum Blesis decimo Calendas Februarij M. D. L.

De *moulins.*

AD IO. BELLAIVM CARDInalem Petri Montaurei

PRÆFATIO.

CVm ad inſitam mihi magno naturæ erga me beneficio incredibilem diſcẽdi cupiditatem, illud quoque iudiciũ progrediente ſenſim ętate ſtudióque confirmatum acceſſiſſet, nihil eſſe tam uehemẽter homini expetendũ, quàm rerum maximarum perceptam habere naturam; feci non inuitus adhuc, ut quò uocaret illa, eò me deduci facile paterer: in ídque uitæ curriculum immitti, quod & dignitati hominis cõuenientiſſimũ, & naturæ præterea meæ accõmodatũ eſſet. Huius uerò conſilij tantũ abeſſe uideo ut me pœnitere cœperit, ut maiores etiã quotidie uberiorésque fructus mihi non contingere tantum ipſe ſentiam, ſed & deinceps multo pręſtantiores perceptum iri certo ſperem. Nam quanto in altum longius euehimur, tanto laborẽ minui magis, qui maximus in cuiuſque rei principiis ſolet eſſe: animi uero uoluptatẽ nulla alia re tantũ, quã diſcendo ali augeríque cognoſcimus. Is autem meus in ſuſcipiendo uitæ genere ſenſus cum uniuerſæ philoſophiæ ſtudiũ mihi proponeret amplectẽdum, ſimul animo ſubiiciebat illud, nihil in ea re magnopere profici poſſe, niſi quis ueterum philoſophorum ueſtigia ſumma diligentia perſequutus, eandem quam ipsi,uiam institisset. Itaq; nihil,ut hoc quidem loco dicam,de nostris cæterarũ philosophiæ partium studiis, ad mathematicam cognitionem animum applicans, in eum me locum sensim abductum diuertisse intelligo,unde suscepti primum institutíque illius itineris recordatio propemodum effluxerit: neque id uero repugnante me admodum. Quid enim est,cum ex ea philosophię parte,quæ omnis est in agendi rationibus occupata,tantum præceptorum acceperis, quãtum ad unius hominis reíque priuatę cuiusq; suæ rectionem attinet, unde maior animum ueri cupiditate flagrantissimũ permulcere possit oblectatio,quàm quæ ueri cognitionem subsequi solet?Nam illa quidem studia ciuilis disciplinæ,quę publicis rebus consilio administrandis idonea totius hominum uitæ multo præstantissimas actiones ex recto rationis præscripto moderari debuerant,plane refrixerunt: tanta profecto perturbatione rerum omnium,ut cuius scientiæ ratio clauum aliquando in rerumpub. gubernatione magna cum sua laude,hominum uero lõge maxima felicitate, cursúque prospero tenuerit, eidem nũc sit uix aliquid relictũ in sentina loci. Tertia quædam supererat illa philosophãdi exercitatio, quæ naturam rerum persequens,ut est omnium ingeniorum cognitione dignissima, ita propter multiplices ipsius materiæ formas & motus incõstantes,acutum quoddam habet & subtile disputandi di genus,ſed obſcurum tamen, adeóq; repugnantes inter ſe ſummorum philoſophorum ſententias,ut uériſimilia tantum, non etiam uera docere uideri poſſit. Vna ergo eſt mathematicarũ rerum tractatio, quæ conſtantibus neceſſariíſque ducta principiis, uias quoque conſimiles perſecuta, eò nos progredientes manu ueluti ducit, ubi ueritatis ipſius cubilia,quę quidem mentibus humanis ſua ipſarum ui facultatéq; cerni queant, explicet intuenda. Quid autem eſt,quod hac una re præſtantius magnificentiúſque dici poſſit? An quid erit aliud, quod cuiquam anteuertẽdum uideri queat? Tibi certe non arbitror, Bellaï ampliſſime,cui neque ad acumen ingenij doctrinæ cultum, neque ad doctrinam iudicij uim deeſſe intelligo. Quæ cum ita ſint in te illuſtria, ut fortunæ tuæ,illius quidem per ſe ſplendidæ,luminibus ego unus omnium minime blandus fortunæ admirator offeciſſe putem, tibi homini grauiſſimo, idoneóque uiſo de tota noſtra ratione iudiciíque ſenſu perſcribam paulo liberius: ſi forte plus authoritatis ex perſonæ tuæ dignitate noſtra habitura eſt oratio, ut ſane habitura eſt, ad iuuentutem in eum ſtudiorum curſum, quẽ ualde uolumus, inducẽdam. Verum enim,ut ipſe tecum, hoc eſt, cum homine intelligente loquar, iampridem errabunde de uia deflexímus:ueterémque illam diſcendi conſuetudinem prę ſtudiis quibuſdam nouis amiſimus. Hîc cũ plurima quæ recte dici poſſint,omittenda ducam: unum illud quidem certe nunc maxime mihi dicẽdum eſt, illius perturbationis,de qua paulo ante diximus, eã eſſe cauſam, & potiſſimam quidem,quòd totius inſtitutionis, (quam à pueris παιδείαν ueteres illi ueritatis magiſtri uocare ſoliti ſunt) priſcis quõdam ſeculis tantopere conſeruatæ, ea eſt hac quidem ætate peruerſitas, ut quod primum potiſſimúmq; ſtudiorum eſſe debuerat, perexiguum quidem omnino locum apud nos, plurimorum autem hominum iudiciis nullam etiam dignitatis æſtimationíſque partem mereatur aut obtineat. Quid ergo eſt? dicat aliquis, quid habes quod reprehendas? Ego uero permulta, pene dixi omnia, ut iam indubitãter illud affirmare poſſim,tum demũ optime rebus hominũ conſultum iri, cum illud poëtarum ὕστερον πρότερον ipſi in ſuas actiones tranſtulerint: quódque primum ducunt, poſtremũ habuerint: & quod poſtremo,aut, ut uerius dicam, nullo loco ipſis eſt, ſi primum exiſtimauerint. Nunc unius artis,uixdum etiam artis prẹſidiis opibúſq; immodicis tam flagitioſe circumuenti tantis clamoribus obtundimur, ut naturæ uox ad ſcientiæ cupiditatem inuitantis, ne exaudiri quidem ulla ratione queat. Quæ ſi loco ſuo contẽta non ſe cõmouiſſet, diiudicandíſque hominum litibus occupata munus alienum aut nunquam appetiiſſet, aut certe non impediiſſet, minus profecto haberemus quod dolendum uideretur. eſt enim & iu-

diciis

diciis accommodata: iudicia porro ipſa diſceptationibus rerũ controuerſarum, quibus carere nullo modo poſſumus, pernecеſſaria. Neque ſane eſt in ea re quod reprehẽdi iure poſſit, ſi quis morem maiorum in illa conſequenda retineat, ut philoſophiæ totius inſtitutis abunde ſuppeditatus, hanc ipſam illius quidem imitatricem quandã & quaſi ſobolem aggrediatur diſcere, cum intellexerit id quod in genere ſciẽtiarum eſt perpetuum, ut aliis aliæ ſubſint, idem ipſum hîc quoque fieri, ut iuriſperitia philoſophiæ partem illam, quæ eſt de moribus tum ſingulorũ tum uniuerſorum, tanquam architectam agnoſcat & obſeruet. Sed hæc tota cõtrouerſorum ratio iudiciorum illius partis eſt iuſtitiæ, quæ συναλλάγματα tantum continet. Nam de altera illa quæ multo eſt & dignitate præſtantior, & utilitate in omnem uitæ ſocietatem uberior, quæ præmia recte factis, pœnáſque ſceleribus pro rata cuiúſque rei perſonæq; portione diſtribuens, duo uincula rerũpub. firmiſſima complectitur, aut omnino de iuſti ipſius ui atque natura, ne literam quidem. Se tamen ueram philoſophiam profiteri rerúmq; maximarum gubernationi unam idoneam prædicans, illam ipſam philoſophiam, cum omnium artium parentem, tum uero erga ſe beneficẽtiſſimam magiſtrámque uitæ certiſſimam lædens, dignitatis inuadit poſſeſſionẽ alienæ: neque ſe animaduertit (ne quid ipſe criminoſius dicam) alienum appetentem contra ſua ipſius,quid autem dico ſua?imò magis contra rationis uniuerſæ decreta,cuique ſuũ minime tribuere: quámque matris loco uereri debuerat ab ipſa genita & educata, unde ſuum aliquem in repub.locum ut tenere poſſet,habuerat, quod in parentes impij filij ſolent, ipſi quaſi ſenectute deſipienti,ut bonorum ſuorum adminiſtratione interdiceretur,efficere. Nam ſi nihil aliud eſſet,quis quæſo remigem in naui ferat gubernatoris munus arrogãter affectantem? Iam uero ut à primis ordiamur,hæc totas urbes ſuis ſacris initiorúmque pertractationi conſecratas habet:ad quas undique concurſus puerorum iuuenúmq; fiant,non tam diſcendi,quàm à magiſtris diſcedendi cupidorum.ſic ætas maxime imbecilla, ſuíque impotens,effrenis,incuſtodita,ſuo unius impetu ferenda permittitur,quam unam alieno parentem imperio,authoritate bonorum nixam, inſolétiæ, leuitati,audaciæ,uoluptati frenum,cęteris etiã animorum motibus modum imponendum eſſe maxime doceri oportuit:híſque uocibus aſſidue aures illius perſonare, ut concurſantes immenſique cupiditatum æſtus,quibus ætas illa plurimum nata eſt cõmoueri, reprimerétur. At enim qui recte præcipiãt doceántque , præſto ſunt, ſi modo eos audire in animum induxerint. Credo ſane, quod ad illorum artem attinet,ut eſt captus horum hominum & temporum, non indiligenter exponere teſtamenta,ſubſtitutiones,obligationes, ſtipulationes,

lationes. Sed quid hæc ad mores informãdos? Ita fit ut alij ne audiantur quidem, propter abhorrentem ab illis studiis multorum ingeniorum naturam: alij quãuis studiose soleant audiri, tamen uel rei ipsius per se spinosæ traditione perplexa, uel docendi imperitia præpediti, nihilo doctiores amittant auditores, quàm acceperint. Ex quo illud malum interea sequi omnino necesse est in iuuenum animis, cum uoluptates ex doctrina institutionéque liberales ipsi non habeant, ut consectandis alienis illiberalibúsq; totos sese dedant: prorsus enim eos aliquid agere, quietémq; contemnere, necesse est. Pauci quidam ex illo sunt genere, qui gloriæ, nescio cuius, utilitatísque expectatione deliniti, è toto studiorum suorum quinquennio fructus tenues illos quidem & austeros, sed quæsitos tamen colligant. Præclara uero res, hominem natura quidẽ ipsum sua nullius uirtutis, uitiíue præsentia habitúue fretum, uerùm facultatibus nudis in utramuis partem ferentibus, pręditum, magis tamẽ improbandorũ exemplorum multitudine, opinionúmque peruersitate deprauatum, cum opes, honores, diuitias præcipue duxerit expetendas, ad alendum morbum ex contagione contractum, artem etiam per omne uitæ tempus exercendam adhibere: cuius tota ratio disputandi sit de meo & tuo: déque iis rebus & modis, quibus quod meum est, tuum effici possit. Ad quam quidem disciplinã nimis multos dociliores reddi ſcimus, quàm ſocietati hominum cōducat tranquille conſtantérque moderandæ. Ita credo priſcos illos non tam antiquitate quàm dignitate memorabiles uiros, domi foríſq; in ſua quęque ciuitate rerum geſtarum gloria præſtantes, liberos ſuos ad maiorum imitationē inſtituiſſe: ac non potius Athenas, Rhodum, Maſſiliam, & quò non? ad cultum ingenij capeſſendum, mercaturámque artium optimarum dimiſiſſe. Vnde philoſophiæ præceptis inſtructi, cum ſe ipſi regere didiciſſent, agendíſque rebus adhiberentur, non ex artis illius formulis, ſed ex iuſtitiæ ſcitis immutabilibus hominum cœtus, & quidem uolentiū, regendos acciperent. Age modo, hunc ipſum hominem ex hac noſtra exercitatione, tali cultu educationéque in forum ex umbra tanquam in aciem producamus, ut ſtudij ſui rationē & uſum aliquē nobis tandem explicet. Ibi uero quanta prudentia, grauitate, conſtantia, probitate ſe gerat, dicere meū non eſt. Vos quæſo dicite Pierides, & quidem hominibus ignaris: nobis enim nihil attinet, quos plura ſcire neceſſe eſt, quàm referre iuuet. Hoc tantum dicam, cum ſe exiſtimēt parum in ea arte profecturos, niſi toti ſint in illius cognitione per omnē uitæ curſum occupati, tantúmq; ſibi periiſſe temporis, quantum aliis ſtudiis acceſſerit, homines ignorantes quantum cuique ſcientiæ temporis ſit tribuēdum, nimis magnam mercedem ſtatuunt, ſi prȩſtantiſſimarum rerum, offi cij dico munerísque sui ignoratione, hæc una for-tuitarum rerũ cognitio disceptatrix sibi ipsis cõparanda uideatur: neque uero intelligunt rei per se infinitæ finem nullũ reperiri posse. Verum ipse me longius scribendo prouectum in offensiones multorum incurrisse uideo, quod equidem nollem: sed cum nulla remedia tam faciant dolorem quàm quæ sunt salutaria, si quid est quod sanari possit, plus apud me ualere debere nonnullorum salutem quàm plurimorum indignationẽ ex remediorum acerbitate collectã semper existimaui. Quod cum optimis quibusq; uiris, quales iam bene multos hic noster ordo recipit, probatũ iri certo sciam, de cęteris minus est mihi laborandũ. Atque haud scio an quæ auditu nũc quidem grauia acerbáque uideantur, ipsis in experiundo suauissima futura sint: ut longior oratio comprobandæ rationis huius causa defensióque nulla requiratur alia, nisi quã rei ipsius intellectæ perceptio attulerit. Neque quenquam accepimus aut uidimus, qui, cum utranque scientiam tenuisset, non utranque adamaret: alteram uero nobiscum etiã admirationi maximæ summóque studio non habuisset. Porro alterius expertem & ignarum, de utraque iudicium suum esse uelle iniurium est. Præterea fuit ea profecto semper grauissimorum eruditissimorúmque hominum omnibus seculis de tota uitæ ratione consensio, cum expetendarũ rerum tria summa genera reperirentur, ut bonorum animi prima potissimáq; esset dignatio: cæterorum autem, ut quæque proxime nos attingerent. Ex quo illud efficeretur necessario, scientiarum quoque, quę bonorum adipiscendorum uias persequerentur & traderent, eandem esse debere rationem, ut cuiusque rei præstantissima uis esset, ita scientiæ, cui res ea subiiceretur, illi plurimum & tẽporis & industriæ nostræ deberetur. Ad quã sane normam si studia nostrorum hominum ab ipsis exigerentur, & firmior animorum tranquillitas, & uero maior ex ipsis in repub. esset utilitas: eiúsque mali, cuius mole propemodum obruti leuationem aliquam iampridem exposcimus, medicinam non leuem haberemus: cum non essent qui litigiosorum hominum audaciam, flagitium, furorem inconsultis suis consiliis adiuuantes, aut potius ipsos inter sese miserrimo cõcertationum genere committẽtes, alienis incommodis ad suas utilitates per iustitiæ conseruandæ speciem abuti uellẽt: quódque rerum omnium præcipuum est, illud boni præterea consequerẽtur, ut improbitas uirtuti suo loco dignitatíque restitutæ in rerũ administratione facile cõcederet. Hoc enim munus esse philosophiæ unius maxime proprium, humanarum rerum artem moderãdarum, diuinarúmque scientiam tradere quis non uidet, qui modo rem ullam unquam mẽtis acie perceperit? ne forte homines rerum omnium imperiti criminẽtur eam otij tantum esse, nõ item negotij. Cuius quidem

dem calumniæ perfacilis esset mihi quoque refellendæ ratio, nisi rem huius loci, aut operis nō esse intelligerem: ipsam tamen etiam scriptis grauissimis cuiusque ætatis hominum prudētissimorum agitatā, tum uero unius Iacobi Sadoleti uiri præstantissimi doctissimíque libello perelleganti, ab eo perscripto tanta diligentia & eruditione, ut maiore scribi posse non existimem. Quòd si exēplis agēdum esset, nónne permultos omnibus historiæ monimentis celebratos accepimus, qui studia doctrinæ ad rerumpub. moderationem conferentes, ciuitatum suarum statum ab initio constituerint, conseruauerint, perditúmque restituerint, tanta omnium gētium admiratione, ut summis etiam honoribus deferendis magnitudinem meritorum assequi se nullo modo posse faterentur? Quid enim? (ut uetera omittamus) nunquid unquam grauissimū sanctissimúmque istud uestrum Cardinalium collegium pœnituit, quātum dignitatis ornamentíque ex duorum hominum studiis, uirtute prudentiáque percepisset, Gasparis Contareni, & huius ipsius, de quo modo dixi, Sadoleti? Quorum ille per omnes pene gradus honorum in moderatissima florētissimáque Venetorum repub. peruagatus, suis ciuibus ita se probauit, ut præsentem colerent & admirarētur: absentem etiam propter singularis uirtutis memoriam permanentem requirerent, nobísque ipsis, qui ab se ciuem totius ciuitatis optimum nihil tale ambientem aut omnino cogitantem abduxissetis, pene inuiderent. Et sane fuit ille uir omni laude cumulatus, tum propter excellentẽ doctrinam, tum etiam probitatem & prudentiam multarum gentium imperio dignissimus: hic uero alter magis est otio delectatus, nõ illo quidẽ inani, sed fructuoso in omnem posteritatem & literato. Quid de Petro Bembo & Nicolao Ridolfo uiris certe in omni uirtutum genere maximis dicam? Libentius autem in cõmemoratione mortuorũ nostra uersatur oratio, ne quid assentationi uiuorum tribuisse iudicetur, si eorũ qui nunc sunt, laudationes attingeret. Hi quidẽ in philosophię sinu statim à pueris educati tales ad rempub. cum accessissent, utilitates ex se permagnas uniuerso quidem hominũ generi maxime, sibi uero ipsis immortalitatem præterea gloriæ cõpararunt. Quorum si qui studia imitatione consequuti erũt, quî fieri potest, ut respub. non maximam suę dignitatis recipiendæ spem in illorum prudentia & moderatione sibi repositam arbitretur? Ac profecto fuit tempus illud sane mihi periucũdum, cũ spes esset melius fore, propter alacritatem animorũ in id stadium sese dedentiũ, quod est ad ueram gloriam expeditissimum: nisi permultorum studia cogitationésque in alia traduxisset sua ipsorũ credulitas, nescio cuius hominis uanitati assentientium. Itáne uero? quo quæque uox proferetur absurdior, eo facilius in animis nostris uiam ad persuadendum

ſuadendum inueniet? Ergo repertus eſt, ſi diis placet, qui cum bellum nefarium omnibus bonis artibus indixiſſet, & ſapientiæ fructũ iam plane maxima bonorum omnium gratulatione renaſcentis nobis inuideret, Lutetiæ in luce atq; oculis nõ Galliæ modo, ſed totius Europæ caſtra figeret ignorantiæ: & uniuerſæ philoſophiæ uitæq; adeo è philoſophia conſtituendæ authorem Ariſtotelẽ oppugnatum palam etiam accederet, nihil in dialecticis, nihil in phyſicis, nihil uſquam ueri uidiſſe aut tradidiſſe argueret. Audax negotium dicerem & impudens, niſi uerborũ omnium acerbitatem rei ipſius per ſe inauditæ, neque iam audiẽdæ indignitas ipſa ſuperaret. O imperitos maiores noſtros, qui nunquam quiuerunt iſtud animo intelligere! Quid eſt quod profectum eſſe dicam recenti ſophiſtarum clade, atque exilio, ſi ſophiſtas alios aſciſcimus? Quaſi uero non iam miſerrimam rerum omnium ignorationem deprecemur, ſed mutationem tantum in ipſis ignorantiæ magiſtris expetamus. At certe totum illud eiuſmodi eſt, ut cẽſoria magis animaduerſione, quàm cuiuſquam omnino contra diſputantis oratione reprimendum ſit. Neque uero de hac ipſa re uerbum ullum facturus erã, ſi moderatius inſaniendum ſibi putaſſet: ſuáque ipſe cõtentus iuuẽtutis credulæ & rerum imperitæ non augeret ignauiã: nam de ipſo quidem leuior omnino iactura fuerat. Impune eſſe cuique debet periculo ſuo inſanire:ſed cum ad aliorum perniciem morbus animi conuertitur,id uero ferendũ non eſt.Huic certe malo niſi maturis conſiliis obuiam eatur, & audaciſſimos impetus diligentia continuerit magiſtratuum,næ præclara illa ſtudiorum nobis promiſſa compendia permagno conſtiterint iuuentuti:cum grauiſſima mercede totius temporis iactura didicerit nihil è nouis illis, ſed non ſatis eruditis magiſtris, interea niſi arrogantis cuiuſdã & confidentis ignorantiæ ignauiæque præcepta didiciſſe. Sed de hac re tota ſatis hactenus: aliàs fortaſſe pluribus,ſi cõmodum erit. Nũc autem quod eſt huius potiſſimũ loci & inſtituti perſequamur. Cum itaque,ut ante dictum eſt, mathematicã cognitionem uniuerſam iam tum à prima iuuentute uehementer amplexatus eſſem, & ſæpius ipſe per me Euclidis elementa reuoluerem, in cæteris quidem libris modicus ſane labor mihi fuit: ubi uero decimum hunc multorum opinione perobſcurum attigiſſem, ea certe opinio non mediocri mihi quoque fraudi fuit,cum non arbitrarer, qui locus à pleriſque propter ſuſpectã ipſius difficultatem præteriri ſolitus eſſet,mihi non periturum, quicquid in eo laboris impendiſſem. Itaque plurima extrinſecus adiumenta mihi ipſe excogitãs, iterum atque iterum repetita diligenti lectione, cum nihilo minor maneret rei ipſius obſcuritas, cœpi cogitare unum Euclidẽ in primis libris ſibi ipſi ad ipſorum intelligentiam ſufficere:neq; fieri

poſſe

posse,ut suum in docēdo modum atque ordinem repudians,hîc alienum quendam & nouum adhiberet. Itaq; uia simpliciori cum rem aggredi cœpissem,sola librorum pręcedentium ipsius Euclidis ope,& uocum simplicium quę sunt huic libro maxime propriæ, intelligentia, omnia uisa sunt quàm antea illustriora multo atque clariora: Euclidémque sui ubique similem hoc quoque libro, ut olim cogitatione præceperam,nullius omnino rei externæ indigentem,se ipso contentū: rem illam quidem paulominus inuulgatam, sed alia ratione nulla,neq; alia uia,quàm sua & familiari tradere plane uidi.Hæc uero est,ut à rebus cognitis ad ignotas sensim progrediens ex prioribus rerum subsequentium comprobet intelligentiam, & ueritatem. Quæ cum perspicerem,in eáque re sæpenumero uersatus,magnáque animi intētione & studio singulas quásque res inter se conuenire,nihil collidere intelligerem, nullam moram studiis hominum putaui, quantum per me effici posset,diutius afferendam,quin laboribus nostris animíque exercitationibus fruerentur. Cúmque ex maiorum lucubrationibus, quo posteritatem iuuaremus,aliquid uideremur cōsequuti, & quibus omnia deberemus nihil esset quod post mortem hominibus bene meritis gratius per nos referri posse uideretur, quàm si quorū industriam experti uehemēter admiramur & suspicimus,eorum etiam humanitatis exemplum studiúmque posteritatis adiuuandę uellemus imitari, cœpi cō ſilium rei totius illuſtrandæ. Itaque Græcorum demonſtrationes interpretando conſequutus, ſiue fuerint illæ Euclidis ſingulorúmue geometrarum, quorum ſymbolis hoc totum eſt opus abſolutum, ſiue ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν, ubi preſſius ſubtiliúſque compoſitæ uidebantur, fuſiore quodā ſcribēdi genere ita pateféciſſe me puto, ut lectori non dormitanti, ſed attento nihil deeſſe poſſit ad rerū intelligētiam: obitérque uiam & rationem reſoluendi in primis theorematibus exemplorū copia notauimus. Sed quo res adhuc multis incognita commendetur uberius, placuit nonnulla ex ueterum libris, Procli in primis, arbitratu quidem noſtro ſumpta, Latinis literis illuſtrata proponere, quibus initiis mathematica ducta cognitio, quā altū ediderit rerum maximarū faſtigium, ut quā incredibilem ex ſe utilitatē ſeculis prioribus attulerit, eandem quoque ſibi de ipſa polliceantur homines, ſi modo penitius ea ſtudia inſpexerint: neque, quod adhuc factum eſt, in primo liminis aditu, uixdum quinque ſéxue paſſus (totidem enim libris uulgo contenti ſunt) in ea re progreſſi, reſtiterint. Illud itaque ſciendum eſt, quod finitum & infinitum dicitur, principia ſumma eſſe mathematicarum ſpecierum omnium. Nam ea principia inter ſe aliter atque aliter copulata, ſufficiunt ad generandam eam uarietatē, quæ in rebus ipſis cernitur. Inde fit ut ipſarum proportiones in infi-

nitum

nitum excrescant: quas tamen ipsas finiri etiam necesse est, ob eam saltē causam, quia finiti quoq; naturam in ipsis existentem continent. Primum enim in arithmeticis, si ab unitate cœperis progrediēdo, reperies numeros in infinitum augeri: neque unquam excrescendi finem, ubi quiescant ipsi, fieri posse, ut cum eò perueneris, cessandum in illo numerorum auctu tibi prorsus intelligas. Quemcūque porro numerum effeceris, illum omnino finitū esse necesse est. Deinde in ipsis quoque magnitudinibus idē apparet, ut in infinitum diuisio illarum fieri possit. Ipsæ uero res ita diuisæ, omnino (& quod dicitur) actu ipso finitæ sunt: ut cum diuiditur aliquod totū in partes suas unde componitur, necesse est ipsas partes quæ ex diuisione procedunt, esse finitas: nam nisi finitæ essent, ne partes quidem ipsæ esse possent. Præterea si nihil esset infinitum, illa duo perabsurde consequerētur, & ut magnitudines omnes essent commensurabiles, neque in ipsis quicquam incōmensurabile: ideóque ne irrationale quidem. Hoc autem est, quo differunt ea, quæ in geometria pertractantur ab arithmeticis: siquidem in illis sunt quædam irrationalia, de quibus hoc libro: in arithmeticis uero nihil irrationale, aut incommensurabile cognoscitur: sunt enim omnes numeri commensurabiles inter se, ea saltem mēsura, quæ minima est in numeris, nempe unitate. Alterum quod perabsurde sequeretur, si nihil esset infinitū, illud est, quod ea uis & facultas unitatis, ut ex se numerorum sobolem infinitã procreare queat, non existeret: neque uero numeri proportiones omnes intra se continerent, quas in rebus singulis inesse perspicimus, multiplices dico, superparticulares & reliquas tales. Omnis enim numerus unitati cõparatus ad ipsam unitatem habet proportioné aliam, quàm idẽ ipse numerus ad alium numerum comparatus. Similiter si finitum nihil erit, commensurabilitas & communio proportionum, similitudo & æqualitas specierum, cæteráque huiusmodi quæ melioris cuiusdam sunt generis, in rebus distinguendis nulla sint: quæ tamẽ ipsa in mathematicis esse conspicimus. Ea uero si non essent, ne mathematica quidem ulla scientia superesset, cum nihil certo, constanter, subtilitérue diceretur, quod cogitatione firma cõcipi posset. Quantum uero utilitatis ea scientia communi hominum uitæ & societati cõferat, id quidem non ad usus ipsius uitæ necessarios respicienté æstimare conuenit: ita enim fieret ut cognitionem omnem & contemplationem rerum tãquam inutilem repudiaremus, quippe quæ à rerum humanarum necessaria suppeditatione sese quàm longissime soleat abducere, ne earum quidem rerum ullam omnino cognitionem aut curam appetẽs, quibus usus uitę necessarius cõtineri solet. Est uero mathematicæ scientiæ sua certa, propriáque dignitas & utilitas, illa quidem per se æstimanda,

neque

neque quicquam externum respiciens, quo se referat, nullius omnino rei ministerio suam utilitatem accommodans, neque uitę necessitati subseruiens. Quin & liberales disciplinæ à libertate dictę, sui nominis dignitatem sustinere tuerìue nullo modo possint, si ad seruiendum usibus necessariis reuocentur. Quòd si ulla ratione illud admittendum uidebitur, ut aliud quippiam extra se spectare debeat, cuius utilitatem consectandam sibi putet; quid est in omni rerum uniuersitate splendidius & magis excellens, quàm quod mathematica scientia uiam munire solet animis nostris? eámque certissimam ad rerum intelligibilium, omni materia solutarum cognitioné absolutam? Et quidé si qua est utilitas expetenda, illa est profecto, quam ex se præstãtissimã & eximiam profert. nam & quasi manu ducit ad res intelligibiles percipiendas, & quod est in Timæo scriptũ diuinitus, illius scientię cognitio uia quædam est ad plenam & integram mẽtis nostræ institutionem: cuius rei ea certe causa est atque ratio, quòd eadé est ipsi proportio ad cognitionem totius & primam philosophiam, quæ est institutioni puerili ad uirtutis ipsius summam & habitũ. Hæc enim efficit bonis & rectis moribus assuefaciendo, ut animus puerilis ad uitam ex uera uirtute perfectam adolescat: illa uero animi nostri partẽ eam, quæ διάνοια dicitur, ita suis commoditatibus instruit & cumulat, ut multo paratior ad res eximnias inſpiciẽdas & cognoſcẽdas accedat. Ex quo Socratis uerißimũ illud mihi uideri ſolet, oculũ animæ, quem mentẽ dicimus, ipſum quidem ſtudiis & cupiditatibus obtutúque rerum alienarum excæcatũ, & ueluti defoſſum, ſolius ſciẽtiæ ratione diligentiáque recreatum excitari, & quodam ueluti collyrio perſanatum cõualeſcere ſolere: ita ſane, ut rurſum ad ſpeculationem ipſius entis, ab imaginibúsque perſpectis ad res ipſas, quarum illæ fuerãt imagines, erigi, & tanquam ex caliginoſo ſpecu in locũ illuſtrißimũ eductus, illud ipſum lumen intelligibile acie conſtanti poßit intueri: omninóque carcere quodam egreſſus, & rerum generabilium uinculis inconſtantíſque materiæ nodoſa uarietate tandem exolutus, ad incorpoream & impartibilem ſubſtantiam attolli. Nam & pulchritudo & ordinis illius ratio, qui in mathematicis elucet diſciplinis, ipſáque rerum ibidem perſpectarum certa conſtantia, animum noſtrum propius ſiſtunt ad intelligibilia, ipſa quoq; ſemper eodem modo ſe habẽtia, pulchritudiníq; diuinæ conuenientißima. Quæ cum ita ſint, mathematica ſcientia eſt, & ipſa quidẽ per ſe & ſuapte ui dignißima, quæ ſtudioſe colatur: neque tamen non plurimum momenti ad eam uitam affert; quæ mentis unius maxime propria eſt & accommodata. Illud autem in hac re ſatis eſt argumenti, ſciẽtiam eam per ſe ſua ipſius dignitate & æſtimatione niti, ut eſt quodam loco ſcriptum ab

Ariſtotele,

Aristotele, quòd qui res illas exquisiuerunt, nullo præmio, magna diligentia studióque uehementi illud sunt assequuti, ut paruo temporis interuallo illa permagnum acciperet incrementum, cum ipsi cæteris omnibus posthabitis huic uni studio se totos tradidissent: atq; hi maxime, qui diuiniore natura præditi, diuinitatẽ suis factis exprimere, quoad licitum esset, elaborauerunt. Itaque uerissimũ illud est, si qui sunt, qui contẽptui habendum hoc studium existiment, eos sine gustu esse summarum, quæ quidem in homine libero constantíque existere possunt, uoluptatũ. Quid ergo? nunquid habet ea scientia quod cõtemni debeat, ea re tantum quod nihil adiuuet cõmunis hominum uitæ necessarias utilitates? Nullo certe modo: nam & extremi illius effectus ubi se cum materia coniungere incipiunt, eò maxime tendunt, ut paulo post dicturi sumus. Quin eo maiore digna res est admiratione, quod citra ullius omnino materiæ contagionem suum ipsa finem in eóque fine situm bonum persequatur: & in se ipsa conuersa nihil spectet externum. Homines enim rerum ad usum uitæ necessarium cõparandarum occupationibus uacui plane solutíq;, sese ad sciendum scientiæque adeptionem contulerunt: neque id tamen non recte, cum prima cura rerum illarum esse debeat, quibus natura ipsa ad sui educationem & tuitionẽ carere nullo modo potest. Huic porro si quando satisfactũ erit, hoc est, si na turam ducem consequuti, cupiditatem habendi rerum necessariarum modo naturáque metiri uoluerimus, tum uero illa nos cogitatio debet excipere, rerum à necessitate generationéque remotarum, & uerum ipsum proxime attingentium: quod cum acciderit, unà quoque id quod in anima nostra inchoatum & rude fuerat, integrũ absoluitur & perpolitũ. Scientiæ porro mathematicæ diuisionem eam attulerunt ueterũ plerique, inter quos & Geminus, ut diceret aliam quidem circa res uersari solo intellectu perceptibiles, aliã uero res sensui subiectas pertractare. Res autem intellligibiles illas esse dixerunt, quarũ intelligentiam ipse per se animus absque ulla rerum sensilium participatione seipsum ad contẽplationem excitans persequitur: cuius generis duæ sunt præcipuæ potissimæq; partes, arithmetica, & geometria: alterũ uero genus quod rebus sensilibus addictum illa sex comprehendit, astrologiam, musicam, supputatricem, mechanicã, perspectiuam, mensuratricem. Nam quod ad instruendas pertinet acies, (τακτικὸν uocant) in partibus mathematicæ habendum non arbitrãtur, quãuis interdum ipsius auxiliis uti adiuuaríque soleat, modo supputatricem adhibens, ut in enumerandis copiis, modo & mensuratricem, id est, γεωδαισίαν, ubi diuidenda sunt castrorum metationi campi spatia & dimetienda: multo uero minus aut historiam: aut medendi artem dixeris partem ullam esse mathe-

maticæ,

maticæ, licet utraque ipsius ope interdum adiuuetur. Nam & historiæ perscribendæ mathematica theoremata solere scimus appingi, ubi tractus sitúsque regionum, urbium magnitudines, diametros, ambitus colligere uolunt. Ipsi quidẽ medici quàm multa in arte sua, quàm elucidate tractant freti mathematicæ cognitionis subsidio? Nam quod ad astrologiam pertinet, quanta eius in omnem medicinæ partẽ manare possit utilitas, docent de ea re scripti diligenter Hippocratis libri: cæteri quoque omnes, qui modo de tẽpestatum ratione locorúmque situ sibi scribendum putauerunt. Eadem quoque ratio erit eius, qui aciebus instruendis operam accommodat: nam utetur & ipse mathematicis theorematibus: neque tamen continuo mathematici nomine perhibẽdus, licet aliquando q̃ minimos cupiens in speciem uideri suos exercitus ad circuli figurã constituat castrorum ambitum, nonnũquam in quadratum pentagonum aut aliam multorum angulorum formam, ubi quàm maximos apparere cupit. Tales autem primæ species cum sint ipsius mathematicæ, geometria rursus diuiditur in tractatus duos, alterum planorum, alterum solidorum: nam punctorum & linearũ propria nulla omnino ars reperiri potest, cum nulla figura punctis aut lineis constet, quæ non simul plana sit aut solida. Nihil enim aliud agit geometria ulla sui parte, quàm ut plana & solida constituat: constituta inter se com paret aut diuidat. Hoc idem efficitur in arithmetica: nam & numeri diuiduntur in lineares, planos & solidos, quorum omnium singulatim sua est tractatio. Nam & species numerorũ ipsæ per se ab unitate prodeuntes explicantur, & generationes planorum, similium, inquam, & dissimilium, & solidorum etiam, qui tertia quadam multiplicatione confici solent. Illa autem quam mensuratricem dicimus: item alia quam supputatricem superiorum similitudinem nonnullam referentes: ipsæ tamen sunt in eo dissimiles, quòd non de numeris aut figuris intellectu solo comprehensis inuestigant, sed de sensilibus: neque enim munus mensuratricis esse posueris, ut cylindrum aut conum metiatur, sed rerum in materia demersarum aceruos tanquam conos, puteos autem ut cylindros: sed neque lineis quibusdam intelligibilibus id assequitur, uerum sensilibus, & ut exactissime, radiis solaribus: ruditer autẽ, per applicationem amussis lineæ, aut alterius rei non dissimilis opera, quæ materia constet. Quam uero diximus supputatricem, ne ea quidem passiones numerorum ipsas per se cõsiderat, sed numeros rebus materialibus inuolutos: & diuidendo quidem nihil statuit esse minimum, quomodo neque arithmetica: quod tamen spectat ad certum genus unum, ponit aliquid quod sit minimum: unus enim aliquis homo est illi pro mensura totius hominum multitudinis, sicut unitas quoque mensura com-

munis

munis est omnium numerorum. Perspectiua rursus & musica sunt quædam ueluti partes, illa quidem geometriæ, hæc autẽ arithmeticę. Nam perspectiua uisu nostro ceu linea abutitur, & iis angulis qui ex radiis uisoriis constituuntur: diuiditúrque in eam quæ proprio nomine dicitur perspectiua, causas explicans eorũ, quæ aliter quàm sint, apparere solent, ob ipsorum alios atque alios positus & distantias: quales sunt lineæ parallelæ concurrere uisæ: rerum quoque quadratarũ figuræ circulari forma conspectæ. item in eam quę in uniuersum specularis dici potest, quæ cuiusq; generis radios fractos siue flexos perscrutatur, uisorum seu imaginum cognitionem adiunctam habẽs, simul & illud afferẽs, quî fieri possit, uti quod conspicitur, amœnum sit uisu iucundúmq;, nulla partium suarum discrepãtia aut deprauatione corruptam imaginem propter interuallũ aut eleuationem rei uisæ, oculis spectantium exhibens. Musica uero consonantium numerorum rationes auribus acceptas cũ indagasset, canones suos & fides ipsas ita secandas ostendit, ut faciles ad cognitionem nostram illæ sonorum conuenientiæ fierent: cúmque passim ad sensuum delectationẽ iudiciúmque diuerteret, sermonem Platoni dedit affirmanti eã esse, quæ menti aures ipsas prętulisse uisa sit. Ad illas superiores accedit mechanica, pars & ipsa quædã existens totius tractationis & cognitionis rerum sensilium & materiæ con-

iunctarum. Huius autē generis illa eſt quæ opera
& machinas cuiuſque modi efficit ad uſum to-
tius rei bellicę neceſſarium idoneas: qualia multa
diuino uir ingenio Syracuſius Archimedes exco-
gitaſſe ſcribitur & conſtruxiſſe, uim permagnam
& incredibilem habentia, ipſis quoque Romanis
Syracuſas terra maríque obſidentibus formidabi
lia: quorum tamen ipſorū nihil apud Archime-
dem tanti fuerat, ut magno ſtudio dignum arbi-
traretur: uerum ſicut Plutarchus in Marcello ſcri
bit elegantiſſime, γεωμετρίας παιζούσης ἐγεγόνει πάρεργα τὰ
πλεῖστα: ea tamē fuerunt unius hominis ludicra, ut
Romanorum uires toti pene terrarum orbi for-
midabiles diutius eluſerint, nec ante urbis potiū-
dæ Marcello imperatori clariſſimo ſpes facta fue
rit, quàm ex inſidiis noctu, mœnibus per abſen-
tiam Archimedis indefenſis ſcalas admouerit. Fa
buloſa hæc profecto uideri poſſint, ſi ad noſtrorū
hominum ingenia, quæ uſpiam ſunt nobiliſſima,
conferantur. Verum tamē perinique faceremus,
ſi primum aliorum induſtriam ex cæterorū me-
tiri uellemus ignauia: ut quod hi non poſſint, ne
illi quidem potuiſſe uideantur. Deinde quî fieri
poſſit, quæ præſtantiſſimi quique, iidémque gra-
uiſſimi ſcriptores, non Græci tantum, qui ſuis am
bitioſius fauiſſe uideri poſſint, ſed etiā Latini, iíq;
Græcis hominibus ſępius iniqui, M. Tullius, T. Li
uius in unius hominis laudibus conſentientes ad
cælum extulerūt, ut his fidem abrogemus? Quòd

ſine

ſine authoritate quidem ulla ad credendum adducimur, ſunt in oculis manibúſq; noſtris Archimedis ipſius opera, non illa quidem de machinis ipſis aut operibus conſcripta, nihil enim tale ſcriptione dignũ magnopere iudicauit, ſed quæ longe maiora diuinioráque cenſenda ſint, rerum illarum uniuerſalia theoremata, quæ ſi quis uia ordinéque aggreſſus erit, cum iiſdem ueſtigiis inſtiterit, quibus Archimedes & ueteres illi nobiléſq; geometræ, eodem quoque peruenturum ſeſe confidat. Nobis quidem ſi uita ſuppetet, illud in primis curæ futurum eſt, quod adhuc fuit in hoc decimo Euclidis libro, ut difficillimi quique priſcorum geometrarum libri certa ſpe & fiducia intelligendi legi poſſint ab iis, qui modo ſtudiorũ ſuorum rationem ad ueterum normam exigere, ordinémque certiſſimum diſcendi magiſtrum conſeruare uolẽt. Ordinem autem ipſum ſi quis obſeruauerit, nihil præterea putet eſſe, quod ſibi deeſſe poſſit. Sed iam ad inſtitutũ ut reuertamur, ad eas artes quas ante memorauimus accedit & illa, quæ rebus ex ſeſe immobilibus motum attribuit, nunc per quaſdam aſpirationes, quemadmodum perſecuti ſunt Cteſibius & Heron: nunc per librationes ponderúmque momenta, quorum inæqualitas mouendi cauſam affert, æqualitas uero quietis neceſſitatẽ, ut eſt in Timæo: nunc quibuſdã neruis & funiculis attractus & motiones animatorum corporum imitantibus. Eſt & alia generis eiusdem, quæ sphæris construendis operam adhibens, circuitus orbium cælestium imitatione consequitur: qualem idem ille nunquam satis laudatus Archimedes effinxit. Astrologia superest disputationem instituens de mundi ipsius couersione mirabili, de magnitudine, figura, situ, celeritate, tarditate corporum cælestium: quæ uis sit in illis illuminadi, qui discessus à terra, qui ad eadem accessus: & quæ sunt his consequentia, ex sensu quidem & ipsa permultum instructa, nihilo tamen minus cognitioni rerum naturalium familiariter communicas. Cuius illa pars contemnenda non est, quæ ex normarum & umbilicorum situ, horarum spatia & tempestatum interualla dimetitur: quæq; sublimia uestigando poli cælestis altitudines in quaque terrarum parte, astrorúmque dissitas positiones comprehedit, pleraque simul alia persequens, quæ sunt astrologo speculanti proposita. Est & illa quæ dioptrica dicitur per rimulas in sole, luna cæterísq; syderibus celeritates tarditatésque motuū uenari solita. Eæ quidem sunt partes scientiæ mathematicæ, ita descriptæ à ueteribus mathematicis, quemadmodū explicuimus. Nunc autem de fine ad quem feratur intendátque, cum hæc tota tractatio elementorum geometricorum, tum ea de lineis rationalibus & irrationalibus, quæ est huius decimi libri propria, pauca quædam afferamus. Qua in re illud sane cum primis est intelligendū, propositum

duplex

duplex Euclidi fuisse in his quidem libris: aliud quod traditionem rerum perquisitarum respiceret: aliud præterea quod discẽtis animum omnibus modis informaret & erudiret: ut si res ipsæ inuestigationi subiectæ considerandæ sint, dicendũ profecto uideatur toto hoc de geometria sermone nihil aliud quæri, quàm ut nobiles illæ figuræ quinque plane comprehẽsione intelligantur, à quibus mundus hic uniuersus, iudicio quidẽ Platonis, descriptas suas habet partes. Itaq; primum cœpit agi de simplicissimis quibusque rebus: deinde sensim assurgente compositionis structura, eò tandem peruentum est, ut uarietas omnis illarum figurarum aperiretur, & separatim quidem unaquæque prius constituta, tum denique simul omnes eodem globo contentæ inuoluerẽtur, expositis etiam proportionibus, quas lineis lateralibus cuiusque figuræ inter se, quásque superficiebus ipsis, & quas solidis etiam figuris inter ipsas inesse compertum est. Quod autem ad illud propositum attinet, erudiendi eius qui ad hoc studiũ discendum accesserit, huiusmodi est, ut secũdum Elementorũ geometricorum intelligẽtiam perfecte cumuletur animus, absoluatúrq; ipsius habitus & compleatur: quo facile possit ad quamlibet geometriæ tractationẽ comprehendẽdam ipse sibi sufficere. Ab his enim uelut initiis auspicati, cæterarũ quoq; permultarũ, uel potius omniũ huius sciẽtiæ partium poterimus cognitionem assequi, eiuſdémque multiplicem animo complecti uarietatem: neque id tantum, quin & illud quoque ueriſſime dici poteſt, ſine iiſdem ipſis reliquorum omnium non obſcuram ſolum, uerum neque omnino poſſibilem eſſe intelligẽtiam. Nam & prima quæque atq; ſimpliciſſima theoremata proxime etiam ad primas hypotheſes accedentia, ſunt his libris ita coagmentata, ut interim nullum ordinem magis cuiq; rei conuenientem afferri potuiſſe cognoſcamus: ex quibus cæterarũ partium ſcriptores ad propoſitũ ſuũ accõmodate, certiſſimis & incõuulſis uſi ſunt ſuarũ demõſtrationum fundamentis. Quo in genere eſt Archimedes, Apollonius Pergæus, & cęteri omnes nõ geometræ tantũ, ſed & aſtrologi, & qui mathematicorũ nomine cenſeri ſolẽt. Hoc autem cum alibi ſemper, tum uero in legendis Conicis Apollonij certiſſimum eſſe nuper ipſi uidimus: ad quæ niſi diligenter inſtructus ab Euclide ueneris, operã plane tibi periiſſe ſenties. Eſt enim Euclidis geometria non ad eorum tantũ cognitionem, quę ſunt de eodem genere ſcripta, neceſſario perdiſcenda, ſed etiam in quauis mathematicarũ ſcientiarũ nihil cuiquã ſatis poterit eſſe notum, qui nõ à geometria profectus peruenerit ad cætera: quam ſi quis ſecundũ Philonẽ eſſe dixerit principiũ & tãquam μητρόπολιν reliquarum omnium mathematicarum, is profecto à rei totius ueritate non aberrauerit. Nam ex illa matrice ueluti quadam urbe populoſa dedu-

ctæ

ctæ ſunt illæ deinceps colonię, quę ſunt à nobis ſuperius explicatæ. Eſt ergo finis ille geômetricorũ elementorum abſolutus diſcentis habitus, ſcientiæ uniuerſæ capax, traditióque mundanarũ figurarum, quæ ſint cuiuſq; propriæ fabricationes & inter ſe conuenientiæ. Id uero de quo conſcriptus eſt hic decimus liber, de commenſurabilitate dico & incommenſurabilitate, rationalitate & irrationalitate linearum, eò pertinet, ut cum extremum totius operis futurum illud eſſet exponere, figurarũ, de quibus antea dictũ eſt, dimenſus, ea præfari oportere uiſa ſunt, ſine quibus illud percipi nullo modo poſſet. In primíſque neceſſarium fuit, quoniá illæ figuræ æqualibus ſuperficiebus, lateríbus item & angulis æquis comprehendendæ erant, & eodem globo ita coercendæ, ut quilibet angulus ſolidus cuiuſque figuræ intimam faciem pertingeret, oſtendere quanto diameter globi longior eſſet unoquoque cuiuſque figuræ latere. Cúmque uidiſſet Euclides in pyramide, octaedro & cubo talem eſſe habitudinem ipſorum laterum ad globi diametrum, quam rationalem eſſe poſuerat, ut eſſent ipſa inter ſeſe comparata lõgitudine quidem incommenſurabilia, ſed potentia tamen commenſurabilia, ideóque rationalia: in eicoſaedro uero & dodecaedro non ſolum eſſe inter ipſa latera longitudinis incommenſurabilitatem, ſed & potentiæ quoque, ob eámque cauſam illa eſſe ſimpliciter irrationalia certæ cuiuſdã ſpeciei. Ea ratione priuſquã ad illa demonſtranda aggrederetur, intellexit omnino ſibi faciendũ eſſe, ut de linearum rationalitate irrationalitatéq; tractatum inſtitueret, quótque & quales eſſent ſpecies irrationalium linearum: ut non appellationibus tãtum diſcretis notari poſſent, ſed, quod multo certius eſt ad quãque rem cognoſcendam, quid cuique ſpeciei ſingulatim neceſſarióque cõueniret, perſpicuum fieret. Proinde tractatum illum abſolui non poſſe ſine cognitione numerorũ cùm facile intelligeret, ideo de ui numerorũ quãtùm ſatis uiſum eſt ad ſermonem ſuſceptum, tribus eſt libris diligentiſſime commẽtatus. Neque enim ferendus eſt neſcio quorũ hominum error, affirmantium proportiones linearum irrationalium eſſe non nobis tantum, ſed & naturæ ignotas: ob idque potiſſimum, quòd illæ tales proportiones nõ extent in numeris. Quod ſi ita eſſet, primum quàm inanis uideri deberet conatus Euclidis, operam in re per ſe inexplicabili abutentis? tum autem adeo ſunt illuſtres hoc libro notæ, tâmque proprij cuiuſque ueluti mores expreſſi, ut quod Euclides conari uiſus eſt, illud abunde perfectéque præſtitiſſe intelligatur. Nobiliſſimũ itaque totius geometriæ locum à Pythagora philoſopho præſtantiſſimo ante patefactum ita perpoliuit excoluítque, ut deſiderio nihil reliquerit.

Hæc habui Bellaï ampliſſime, quæ nõ quidẽ dicere poſſem, finem enim nullũ habitura eſſet oratio,

tio, ſed quæ cum dixiſſem, exiſtimaui iuuentutis partem aliquam excitatum iri, ut cuperet imitatione ſtudiorum, ueterum philoſophorum nominis gloriam æmulari. Cuius præclariſſimæ cõtentionis in animis hominum excitandæ facultatem uiris conceſſam eſſe principibus, eámque ampliſſimam, cum intelligeret Franciſcus Rex, huius noſtri pater, omnium bonarum artium fideliſſimus tutor, patronus atque propugnator acerrimus, iuuit ille quidem mirifice ſtudia literarum: uerum minus profecto quàm uoluit, magis autem multo, quàm licitum illi fuit per quorundam auerſas à laudabiliſſimo ſtudio rationes, atque uolũtates. Illius tu Regis alumnus, illius tu beneficentia ad ſummos fortunæ dignitatíſque gradus, doctrinæ commendatione ſublatus, recte conſtantérque fęceris, ſi quod per te nauiter facis, patrocinium philoſophiæ antea quidẽ à Rege liberaliſſimo ſuſceptum, ita retinere pergas, ut Margareta Regis filia, iudiciíque paterni, atque animi in bonarũ artium ſtudiis, bonorúmque omnium tuitione obſeruantiſſima atque æmula, bene collocatum in te ornando patris beneficium prædicare poſſit. Permultos autem eſſe multis in locis cum acceperim, quorum in philoſophiæ literis ſtudia, tuis paratiſſimis opibus alantur & ſuſtententur: hæc autem una mathematica cognitio, cuius tantæ ſunt in omni philoſophiæ parte commoditates, deſerta plane deſtitutáque reliquorum hominum pręſidiis paſſim iaceat atque ignoretur, tuæ certæ partes illæ ſunt, ut huic quoque ſtudio pro tua humanitate per te conſultum uelis: ex iſtóque præclaro tuorum grege, de quo paulò antè dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundiſſimi atque fructuoſiſſimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi, penitúſque perſcrutati, poſſint cæteros exemplo doctrináque ad ſui æmulationem permouere.

Vale. Lutetia Calend. Iulij. 1551.

Errata ſic corrigito. Fol.8.uerſ.9.propoſitis.fo.15.in fig.ε ζ.eod. fol.uerſ.18.Quare ε met.fo.20.in fig.α ζ.fo.24.b.uerſ.22.amplius. uerſ.26.quam.fol.27.b.uerſ. 18.ſecundã fo.31.uerſ.antepenul.dele ſuperficiales.fo.34.b.uerſ.antepen.quàm.fo.43.in fig.lin.α ſubijce γ.fo.49.ĩ fig.ubi eſt γ, pone δ.ubi eſt δ,γ.fo.54.in fig.θ δ ε ζ γ.fo. 74.uer.14.binomiũ:alibi.fo.80.uerſ.19.linea δ β.fo.88.uerſ.21.eo quod.fo.89.in fig.ε θ λ.fol.95.uerſ.10.uerbis ij.fol.102.b.uerſ.13. ideo ſic.fol.104.Octogeſimũ ubiq;.fol.110.b.uerſ.21.quàm.fo.114 in fig.ſub π ſcribe υ.fol.116.uerſ.13.per 1.6.fol.127.b.uerſ.2.quadratum.fol.329.uerſ.25.linea κ θ.fo.132.uerſ.14.ad β δ.fol.134. uerſ.12.lineæ.fo.135, b.uerſ.24.lineæ, κ λ.fol.136.uerſ.13.dictarũ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

Petro Montaureo interprete.

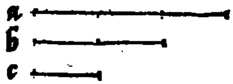
COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur illæ, quas eadem mensura metitur.

PROPOSITVM *nobis illud est hunc decimũ elemẽtorum librum (cuius intelligentiam plerique difficillimam suspicantur, neq; uerò poßibilem absque auxilio eius partis arithmeticæ, quam multorum scriptis illustratã* Algebram *uocant) sine omnino ullis numeris irrationalibus dictis ostendere, nõ solùm non difficillimũ, sed etiam facillimum esse, si quis attentum animum & instructum scientia librorum superiorum* Euclidis *afferat: neque porrò cuiusquam externæ scientiæ, nedum algebræ demonstrationibus indigere: sed ex suis ipsius* Euclidis *tãtum demonstrationibus, & familiarißimo ipsi ordine dependere.* Vt *autem clarius intelligatur hæc definitio, prius explanãdum puto, si quid in ea subobscurum contineri uideatur. sic enim præcipiunt dialectici.* Cum *itaque dicitur aliqua mensura magnitudinẽ aliam metiri: illud intelligitur primùm, ut ea mensura sit minor illa quam metitur, aut ei saltem æqualis. maior enim nullo modo metiri minorem potest.* De*inde ut ea mensura semel sumpta si æqualis erit, aut si minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudinem quam metitur, præcise referat. id quod ex numeris* *deprehendi facillime poteſt. Quãuis enim Euclides hac definitione comprӕhendat magnitudines tantùm quas quantitates continuas appellant, quales ſunt lineӕ, ſuperficies, & corpora: tamen arbitror non inepte requirendam eſſe explicationem huius loci à numeris: quum prӕſertim magnitudines commenſurabiles eam habeãt proportionem inter ſe, quam numerus ad numerum.*

Campanus uir ex geometriӕ ſtudijs laudem nõ immeritò conſequutus, illud principium recte inſerit cӕteris libri ſeptimi principijs, cum grӕcum exemplar nihil tale habeat. Numerus aliũ numerare dicitur, qui ſecundum aliquem multiplicatus, illum producit. cuius rei hoc ſit exemplum. Ternarius numerat ternarium per unitatẽ multiplicatus. idem ternarius numerat ſenarium per binarium multiplicatus: numerat nouenarium per ternarium multiplicatus: numerat 12 per 4: numerat quoq; cӕteros infinitos. Ille ipſe tamen ternarius alios numeros ſuperioribus interpoſitos minime numerat. Nam neq; unitatem ipſam, aut binarium numerat. Maior enim minorem nullo modo numerare poteſt: ſicut in magnitudinibus (ut antè diximus) maior menſura minorem ſeipſa magnitudinem non metitur. Neque uerò ternarius numerat 4 aut 5. per unitatem enim multiplicatus nihil amplius efficit quàm 3. binario uerò multiplicatus, excedit & 4 & 5. multo magis ſi alio ternario aut maiore aliquo numero multiplicatus fuerit, eoſdem 4 & 5 exceſſerit. Eadẽ ratio eſt ſeptenarij, octonarij, denarij & undenarij, ſi unum ex his quemlibet coneris per ternariũ numerare. Si quis

autem

autem erit qui me res nimiũ minutas persequi repræhendat: consilium nostrum illud esse sciat, ut librũ hũc, non tam natura sua difficilẽ, quàm ignoratione principiorum, ad intelligendum facillimum reddam his qui amœnissimum hunc geometriæ locũ perlustrare uolent. Et certè in maximos errores plerosq; imprudentiæ suæ uitio & principiorum parua siue dicas praua intelligentia turpiter incidisse, neminem dubitaturum arbitror, qui modò nostra legens, ipsarum rerum intelligentiam assequutus erit. De his autem hactenus. nos in uiã redeamus. Dicimus hanc definitionem magnitudinũ commensurabilium, siue malis principium nominare, per analogiam quandam ex illo Campani loco plane intelligi. Nam quod dicitur in numeris alios numeros numerantibus: idem aut simile quiddam intelligas in magnitudinibus, quarum alteram dicimus per alterã mensurari. Quod ut planius intelligatur, sumamus exẽplum in una specie magnitudinis. Sint duæ lineæ ã & b. quæ si fuerint cõmensurabiles, erit quoque communis utrique aliqua mensura quæ sit c. Nam illa linea c bis repetita, refert præcise lineam b. ter uerò repetita, lineam ã, & ipsa quoque præcise refert.

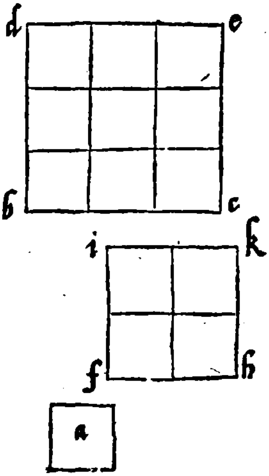


Incommensurabiles verò magnitudines dicuntur hæ, quarum nullam mensuram communẽ contingit reperiri.

Hic locus pluribus uerbis non uidetur indigere, quàm ut *moneamus ex ſuperius dictis intelligendū eſſe. Contraria enim ex contrarijs intelligi poſſe receptum eſt. Porrò accidentia & paßiones his congruentes ex ipſo Euclide repeti debere ſequentium rerum lectio docebit.*

Lineæ rectæ potentiâ commenſurabiles ſunt: quarum quadrata una eadem ſuperficies ſiue area metitur.

Quantum ad hunc locum attinet, duo quædam præſcribenda puto. Primum, ut intelligamus per hāc uocem, lineæ potentia, quadratū illius. tantum enim dicitur linea poſſe, quantum quadratum deſcribere poteſt. Alterum, ut tali diſtinctione hîc utamur. Linearum hæ quidem ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles: illæ uerò potentiâ inter ſe commenſurabiles. Alterum membrum linearum longitudine commenſurabiliū non explicat Euclides, quia uiſus erat illud comprehēdiſſe antea uniuerſali definitione magnitudinum commenſurabiliū. Nam lineæ ſunt ſub genere magnitudinis. Sed quia lineæ habent illud quoque in ſe propriū & peculiare, præter cæteras magnitudines, ut quædam ex his ſint potentiâ cōmenſurabiles: hoc uerò ſibi nō exiſtimauit prætermittendum.



Sit linea b c. eius quadratū ſit b c d e. ſit etiā linea f h. eius quadratū ſit f h i k. hæc duo quadrata me-

tiatur

tiatur una quæpiā superficies, uerbi gratia superficies ā, quæ metiatur primò quadratum b c d e, nouies repetita, qui est numerus areolarum in eodē quadrato descriptarum. Præterea *metiatur quadratū f h i* k, *quater repetita, secundum numerum suarum areolarum.* Erit *itaque superficies ā, illa, quæ metitur ea quadrata duo.* Horum *ergo, quadratorū inquam, b c d e, f h i* k, *latera siue lineæ potentes illa quadrata, quæ sunt lineæ b c, f h, erunt potentiâ commensurabiles.*

Incommensurabiles verò lineæ sunt, quarum quadrata, quę metiatur area communis, reperiri nulla potest.

Hoc loco nihil aliud dico, quàm ut adiuues intelligentiam huius loci additione uocis, potentia, quæ superiori definitioni additur, ut intelligas de lineis illis quæ sunt incommensurabiles potentiâ. quæ cum sint potentiâ incōmensurabiles: illud quoque habent, ut sint præterea longitudine incommensurabiles. hactenus dictū sit. Quòd si plura hoc quidem loco scire desideres: peruertes ordinem disciplinæ, qui certissimus est ad discēdū magister.

Hæc cum ita sint, ostendi potest, quòd quātacunq; linea recta nobis proponatur: existunt etiam alię lineæ innumerabiles eidem cōmensurabiles: alię item incommensurabiles. hæ quidē longitudine & potentia: illæ verò potentia tantùm.

Huius libri præcipuum illud esse uelim scias, quod non, ut cæterorum superiorum, in prima lectione percipi possit eius doctrina, sed iterata & sæpius repetita: eóque fit ut plæraque principia hic scripta, non quidem demonstrentur ex sequentibus: sed melius intelligantur, si cum ad sequentia ueneris, ad principia subinde redeas. Vsus enim harum uocum, qui est in ipsis theorematibus, res illis uocibus expressas faciliores intellectu reddit. Sic itaque faciendum puto hoc quidem loco. Nam sequentes propositiones magnam illi lucem afferent. Tantum enitere ut concipias animo res nudas, quarum significatio his uocibus simplicibus continetur: in quo te iuuabunt ea quæ superius à nobis scripta sunt. Vocetur igitur linea recta, quantacũque proponatur ῥητὴ, id est rationalis. Quam lineam uocari uult ῥητὴν, eam interpretes Latini nominauerunt rationalẽ. qua ratione ducti, nescio: mihi quidẽ non ualde probatur. Sit ergo ῥητὴ linea recta quæcunque, de qua sermo institui debeat. Etymologiæ rationem in enuntiatione rerũ uocibus simplicibus significandarum, sicut uisi sunt ueteres magna diligentia consequuti: ita nobis non contemnendã existimo, ut rerum ipsarum cognitionem adiuuemus. huius uocis ῥητὴ ratio ducta mihi uideri solet ἀπὸ τοῦ εἰρῆσθαι unde τὰ ῥητὰ καὶ ἄρρητα. ῥητὸν illud interpretor quod est effabile, certum, concessum, & determinatum: ac si, uerbi causa, dicas id esse, quod est dicibile, & uoce significari posit. ῥητὴ itaq; erit quæcunque linea, quantacunque magnitudine proponatur. Ideo ῥητὴ nominata, quia datam lineã possumus diuidere in quàm multas partes uoluerimus. Scitum est enim ex nona propositione sexti libri, A data linea iussam partẽ auferre.

ferre. Quod quum ita ſit, propoſita linea diuiſiones eas admittit, quas animo conceperis: ut dicas, hæc linea quæ proponitur; tot partes habet, tres puta, quatuor aut quinque, quas aut pedes aut paſſus, aut aliud quoduis menſuræ genus eſſe contigerit, ut tres pedes aut paſſus quatuor longa ſit. hæc autem linea, quam ῥητὴν uoco, omnibus penè propoſitionibus huius libri, & eis maximè quæ à decima incipiunt, fundamenta præſtat: ut niſi hanc primo loco poſueris, & animo conceperis antequam demonſtrationem cuiuſque theorematis attingas, nullum facile intelligas. Eſt enim uelut norma omnium linearum ex qua ipſarum quoque menſura peti debet an ſint rationales necne. Nam *hæc ipſa ῥητὴ quæ hic denominatur, eſt ῥητὴ ex ſuppoſitione quod quidem hæc uox προτεθεῖσα facile indicat, quaſi dixerit ὑποτεθεῖσα, quæ uelut ῥητὴ id eſt rationalis primo loco dici poteſt, ut ipſa uoce differat à cæteris lineis rationalibus, de quibus mox agit.* Cuius *rei te perpetuò meminiſſe uelim.*

Lineæ quoque illi ῥητῇ commenſurabiles, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantũ, vocentur & ipſæ ῥηταὶ id eſt rationales.

Hic locus plane intelligitur ex duabus definitionibus ſupradictis, nempe magnitudinum commenſurabilium, & linearum potentia commenſurabilium. Obiter tamen aduertas in his uerbis, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm, quantã cautionem adhibuit Euclides, *ut uocibus ipſis coniungeret* *res eas quæ natura ſua coniunguntur, ſeiungeretq; contrarias. quod religioſiſsime mathematici penè omnes uiſi ſunt obſeruare: ut in hoc loco, quia lineæ longitudine commenſurabiles, ſunt & ipſæ quoque potentia commenſurabiles, quum de commenſurabilibus longitudine loqueretur, addere uoluit, & potentia. cum uerò de potentia cõmenſurabilibus, appoſuit, tantùm. Quæ enim lineæ ſunt potentiâ commenſurabiles, non cõtinuò ſunt & longitudine. Hæ uerò ῥηταὶ id eſt rationales, quæ hoc loco talem denominationem acceperunt, iam non ſunt ῥηταὶ ex ſuppoſitione, id quod erat illa prior ῥητὸ: ſed ſunt tales propter relationem quam habent ad illam. Quia ſunt aut longitudine ſimulq; potentia, aut potentia tantùm, ipſi ῥητῇ quæ primo loco ita dicitur, commenſurabiles. Præterea hîc eſt animaduertendum, uoces illas, longitudine & potentia, aut potentia tantùm, coniungi cum illis uocibus commenſurabiles, aut incommenſurabiles: illis uerò uocibus, rationales, aut irrationales, nunquam adponi, ut dicantur longitudine ſiue potentia rationales aut irrationales lineæ. quod Campanus uidetur promiſcue uſurpaſſe. Si plura cupis, auidum diſcendi animũ hîc retineto, ne ueſtigia authoris, eiuſdemq; ducis tui deſeras, qui principia quidẽ ſimpliciſsime tradenda ſibi putauit, ut diſcentium animos nuda rei notione tantùm informaret. quod & uerius eſt, & ad docendum magis appoſitum.*

Quæ verò lineæ ſunt incommenſurabiles, illi τῇ ῥητῇ id eſt primo loco rationali, vocentur ἄλογοι id eſt irrationales.

Illud

Illud intellige de lineis longitudine & potentia incommē-surabilibus. Nam incommensurabiles potētia tantùm, ut eædem non sint longitudine etiam incommensurabiles, esse nullæ possunt. neque hic existimes Euclidem agere de lineis longitudine tantùm incommensurabilibus, potentia uerò commensurabilibus. has enim nuper posuit inter ῥητὰς id est rationales. Vult autem hic lineas omni ratione incōmensurabiles, id est potentia & longitudine uocari ἀλόγους. Quod cum non ita perceptum esset à Campano, uidetur homini causam erroris attulisse, quam ipse posteris quoque tradidit, ut mox dicemus. Quid sit ῥητὴ, & ῥητὸν, antè dictum est. Quod uerò ad hanc uocem ἄλογοι pertinet, ex commētarijs Procli scire licet, ῥητὸν καὶ ἄῤῥητον opponi per priuationem, ut ἄῤῥητον sit contrarium τῷ ῥητῷ: ἄλογον autem sæpius usurpari pro hac uoce ἄῤῥητον, cum tamē idem sit ἄλογον & ἄῤῥητον. hoc ἀπὸ τοῦ εἰρῆσθαι, illud ἀπὸ τοῦ λέγεσθαι, quæ idē significant. Itaque ἄλογος linea erit cuius proportio siue longitudo comparata ad longitudinem τῆς ῥητῆς id est ipsius lineæ primo loco, & ex suppositione rationalis, nullis numeris referri potest. Neq; putes ἄλογον dici per priuationem τοῦ λόγου id est proportionis. Est enim sua proportio linearum alogarum inter se non quidem nobis planè incognita, nedum ut naturæ cognitionē effugiāt: quod quidā uolunt, alioqui frustrà sumpsisset eam operam Euclides hoc quidē in libro in quo nihil aliud agit, quàm ut doceat paßiones illarum linearum, & proportiones quas illæ lineæ ἄλογοι inter se retinent. Verū ea ratione dicuntur ἄλογοι, quia numeris earum proportio *reddi non potest. Nam quod isti uocant irrationale, cur ita uocent, non intelligo. Surdas autem lineas dici, quas hîc* ἀλόγους *uocat* Euclides, *non omnino displicet: quãuis mathematici nõ facile huiusmodi translationes admittant, sed quia propriam huius rei uocẽ deesse agnoscimus, ferri potest hæc translatio.* Neque *tamen hoc loco prætermittendũ puto, quod* Nicolaus Tartalea *geometra apud* Venetos, *& libris eruditis nobis quoq; non incognitus, animaduertit* Campanum *& reliquos ab eo geometras falso existimauisse radices siue lineas quæ quadrata producunt, illa quidem numero significabilia, sed non quadrato numero, ueluti* 10, 11, 12, *& similibus, eas inquam lineas* ἀλόγους *esse id est, ut eorum uerbo utar, surdas: hoc uerò pugnare contra hypotheses* Euclidis, *qui uoluit eas uocari* ῥητὰς *id est rationales, quæ sunt ad lineam propositam commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm: ex quo magnas opinionum differentias in plerisque huius libri locis extitisse. hactenus* Tartalea. Neque *sanè hoc nihil est, neque tamen in eo sunt omnia.* Ego *uerò illud affirmare non dubitem, hinc cæpisse noctis illius initiũ, quæ tam densas tenebras offuderit ueritati rerum his libris traditarum, quæ docentes & discentes plerosq; omnes diuersos egerint: ut quum ulterius progrederẽtur, nihil amplius intelligerent, quàm se nihil intelligere. nostrum quidem de ea re iudicium cum opus fuerit, afferemus.*

Et quadratum quod à linea proposita describitur, quam ῥητὴν uocari uoluimus, uocetur ῥητόν.

Non uideo quid planius dici poßit.

Et

Et quæ ſunt huic commenſurabilia, uocentur ῥητά.

Hanc uocem commẽſurabilia, intelligas ſiue ſint quadrata, ſiue aliæ quæcunque figuræ rectilineæ. Scitum eſt enim cuicunque parallelogrammo, æquale quadratum deſcribere: per ultimum theorema libri ſecundi, ſiue per inuentionem lineæ mediæ proportionalis ſecundum 13 theorema libri 6. quam ubi repereris, colliges ſtatim per 17.6. parallelogrammum rectangulum cõpræhenſum ex duabus lineis extremis eſſe æquale quadrato lineæ mediæ. Simili ratione rurſus cuicunq; quadrato parallelogrammum æquale deſcribitur, per inuentionem tertiæ lineæ proportionalis ſecũdum theorema 11.6. hîc uides nihil tale dici de quadratis & cæteris figuris, quale de lineis antea, quarũ eſt & longitudo & potentia commenſurabilis. Figurarum enim ſola conſideratur capacitas, quam longitudo latitudini iuncta determinat.

Quæ uerò ſunt illi quadrato, ῥητῷ ſcilicet, incommẽſurabilia uocentur ἄλογα id eſt ſurda.

Incommenſurabilia hîc quoq; accipias, quales quales fuerint figuræ rectilineæ.

Et lineæ quæ illa incommenſurabilia deſcribunt, uocentur ἄλογοι. Et quidem ſi illa incommenſurabilia fuerint quadrata, ipſa eorum latera uocabuntur ἄλογαι lineæ. quod ſi quadrata quidem nõ fuerint, uerùm aliæ quæpiam ſuperficies ſiue figuræ rectilineæ, tunc uerò lineæ illæ quæ deſcribunt quadrata æqualia figuris rectilineis, vocentur ἄλογοι.

Vnum est quod hoc loco animaduertendum putem. Cum dixisset ἄλογα esse quæ sunt incommensurabilia τῷ ῥητῷ, subiungere uoluit de lineis illa incommensurabilia describentibus, & eas uocauit similiter ἀλόγους: cum tamẽ antea loqueretur de commensurabilibus ipsi ῥητῷ, nihil egit de lineis illa commensurabilia describentibus. hoc autem ea ratione prætermisit, quia satis sibi fecisse uidebatur, & de his innuisse, cum loqueretur de lineis τῇ ῥητῇ cõmensurabilibus, sub illis uerbis, siue potẽtia tantùm. Nam potentia lineæ est ipsius quadratum, ut antè diximus. Quod si quadratum commensurabile fuerit ipsi ῥητῷ, ipsa quoque linea quæ illud quadratum potest, commensurabilis erit saltem potentia. Itaque per diffinitionem linearum commensurabilium ῥητὴ etiam erit. Extat libellus nomine Aristotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν, quem quidem non esse Aristotelis ex multis locis ipsius facilè intelligitur: eruditio tamen facit, ut attribui debeat alicui ex nobili illa Peripateticorum & docta familia. in eo multa leges intelligentiæ horum principiorum conducentia. Quorum illud unũ annotabimus, quod ferè summam totius rei declarationem continere uideri posit. Commensurabilitatem & incommensurabilitatem magnitudinum inter se, natura quidem ipsarum magnitudinum constare. Rationalitatem uerò & irrationalitatem positione fieri, quia quæ primo loco linea sic dicitur, nempe rationalis positione talis efficitur. Aliæ uerò lineæ ad illã relatæ, sunt aut rationa-

les,

les, aut irrationales, quatenus sunt eidem commẽsurabiles aut eidem incommẽsurabiles. R*ursus linea rationalis quæ talis est, quia cõmensurabilis est lineæ illi primo rationali, & ipsa relata siue comparata alteri lineæ, quæ item proponatur primo loco rationalis esse, si eidem fuerit incommensurabilis, dicetur etiam irrationalis.* Itaque *eadem linea alteri atque alteri commensurabilis & incommensurabilis, erit similiter rationalis & irrationalis.* Hoc *autem ideo fit, quia rationalitas, & irrationalitas omnis pendet ex positione, non autem ex natura ipsarum magnitudinum. quod tamen in commensurabilitate & incommensurabilitate aliter est. Sunt & communes quædam animi conceptiones, quas hîc omisit* Euclides*, tum quia sunt infinitæ, tum uerò quia sunt eiusmodi, ut eas unusquisque poßit animo modica quadam animaduersione subijcere, ut locus ipse postulare uidebitur: ex quibus tamen illas non prætermittemus, quæ singulis locis conuenientes erunt, quales reperiuntur in demonstrationibus primi & secundi theorematum.*

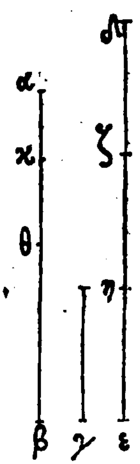
C*ampanus principijs huius libri illud quoq; inserit, Quamlibet quantitatem toties posse multiplicari, ut quamlibet eiusdem generis quantitatem excedat. quod quidem recte fecit. nam huius principij auxilio statim utitur demonstratio primi theorematis huius libri.* De *illa autem magnitudine hic dicit, quam geometræ & cæteri mathematici tractant, ut augeri poßit in infinitum.* Hoc *loco uisum est addere, quod cum alij obscurè,* P*roclus tamen luculentißimè tradit: cuius libros (de ijs* intelligo quos in Euclidem ſcripſit) ut omnes qui quidē mathematici fieri cupiunt, ſtudioſe legant, uehementer hortor: quibus ego plurimùm debere me, nunquam inficiabor. Quod ad rem attinet, id eſt huiuſmodi, principium illud Campani uniuerſaliter quantitatem omnē (ſiue ſit ea quam continuā uocant, ſiue diſcreta ſit qualis eſt numerus) compræhendere. Porrò aliud eſt quod quantitati continuæ ſoli conueniat, ut in infinitum minui poßit, ſicut in linea. Quantacunque enim detur in partes infinitas, minui ſiue diuidi poteſt, quarum tamē unaquæque linea erit. Illa porrò itidē in alias quæ eandem naturam retinent: neq; unquam ad minimum ex ſectione deuenitur, ne ſi punctum quidem dicas, quāuis illud per ſe ſit in geometria minimū. Eo fit ut ſint lineæ quædam ἄλογοι, quarum quidē eſt inter ſe quædā proportio, ſed numero exprimi nequit, itaque uocatur à Proclo λόγος ἄῤῥητος. Nam ubicunque eſt ſectio ſiue diuiſio in infinitum, ibi quoque reperitur illud ineffabile, quod ἄλογον dicunt. hoc uerò non ita eſt in numeris. Nullus enim eſt numerus quem diuidendo non reducas ad illud minimum quod eſt unitas, ex quo numeros omnes eſſe ῥητοὺς & συμμέτρους neceſſe eſt. omnes enim metitur unitas. Nulli igitur ſunt numeri ἄλογοι. Quod autem ad ſequentium theorematum expoſitionem attinet, hoc habetote, non fuiſſe conſilij noſtri initio ſuſcepti operis ſingulis manum admouere. Actum enim agere hoc quidē eſſe uidebatur, ſi quæ à maioribus recte tradita ſunt (ſunt autem bene multa) hîc deſcriberem. Neque ſanè cupiam ſi maxime poßim, alieno labore partam gloriā

in

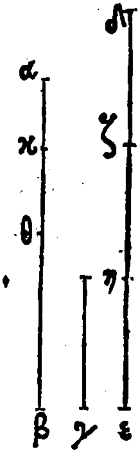
in me trāsferre: sed morem gestum amicis oportuit, qui me ad totius libri cōmentationem impulerunt, ut quam lucem rerum incognitarū obscuritas desyderaret, eam quantum in me esset ingenij, quantúmque diuturnum studiū huius præstantissimæ disciplinæ illud adiuuisset, ipse uobis afferrem, quos ueritatis studio ad rerum acutissimarū & dignissimarū cognitionē rapi intelligo.

Primum Theorema.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositsi, si de maiori detrahatur plus dimidio, & rursus de residuo iterum detrahatur plus dimidio, idq́; semper fiat: relinquetur quædā magnitudo minor altera minore ex duabus propositis.



Sint duæ magnitudines inæquales αβ, γ, quarū maior sit αβ: dico si de αβ detrahatur plus dimidio, & de residuo iterū plus dimidio, idq́; semper fiat, relinqueturquædā magnitudo minor q̃ magnitudo γ. Nam γ multiplicata erit tādē aliquādo maior magnitudine αβ. multiplicetur & sit δε multiplex quidē ipsius γ: maior uerò ipsa αβ: diuidatúrque δε in partes æquales ipsi γ, quæ sint δζ, ζη, ηε: & detrahatur de αβ plus dimidio, sitq́; βθ. rursus detrahatur de αθ plus dimidio, sitq́; θκ, idq́ue eò usq; fiat, donec diuisiones magnitudinis αβ tot fuerint quot sunt diuisiones in magnitudine δε. Sint igitur diuisiones ακ, κθ, θβ totidem numero quot sunt diuisiones *δζ, ζκ, κε. hactenus constructio: deinde sequitur demonstratio. Quia maior est δε quàm αβ, & detractum est de δε minus dimidio, scilicet ipsum κε, (quæ quidem detractio intelligitur facta ex superiori diuisione ipsius magnitudinis δε, in partes æquales ipsi γ. diuidendo enim minuitur magnitudo, sicut augetur multiplicando.) de αβ uerò detractum est plus dimidio βθ: residuum ergo κδ est maius residuo θα, quod & uerissimum est, & ad cogitãdum facillimum, si ad principium illud reuocetur (qualia multa sunt in animis hominum penitus insita) residuum maioris magnitudinis post detractum dimidium uel minus dimidio, esse maius residuo minoris post detractum plus dimidio. Cum itaque κδ sit maius quàm θα, detractúmq; sit de κδ dimidiũ, nempe κζ: & de θα sit detractum θκ, quod est plus dimidio totius θα: residuum ergo δζ residuo ακ maius est, ratione principij modo scripti. Atqui δζ est æquale ipsi γ ex consensu & suppositione: ergo etiam magnitudo γ est maior magnitudine ακ. quod idem est ac si dicatur, minorem esse ακ ipsa γ. relinquitur itaque de magnitudine αβ, magnitudo ακ minor ea quæ ex duabus propositis minor erat. Quod erat demonstrandum.*



Dictio *autem illa* ἄλλως, *in exemplari græco postponẽda est post ea uerba* ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡμίσεα ἢ τὰ ἀφαιρούμενα. Hunc *ordinem in demonstrationibus perpetuò retinet* Theon, *quem compositorium uocant.*

Nunc

Nunc autem tractemus resolutorium per syllogismos resoluentes theorema in sua principia indemonstrabilia. Sic ergo agamus. Omnis *magnitudo minor* δζ, *est minor* γ. Omnis ακ *est minor* δζ. Ergo *omnis* ακ *est minor* γ. *Quod si cupis propius accedere ad terminos ipsius theorematis: sit maior terminus, esse minorem altera minore ex duabus inæqualibus propositis. minor uerò sit illa pars prior theorematis duabus inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore: iterumq; de residuo, tali continuata detractione perpetuo residuũ ipsum.* Medius *terminus sit, minorem esse altera magnitudine, quæ æqualis est ipsi minori ex duabus propositis. itaq; dices,*

O*mnis magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis, est minor minore ex duabus propositis.* D*uabus inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore, itidémque de residuo continuata tali detractione perpetua, residuum est, magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis.* Ergo *duabus inæqualibus propositis magnitudinibus detracta &c. residuum est magnitudo minor minore ex duabus propositis.* Maior *propositio est principium indemonstrabile & per se notum, quod uniuersalius dici solet, quæ æqualia sunt inter se, ad idem eodem modo se habere.* Minor *uerò probatur ex illis uerbis demonstrationis.* Re*siduum ergo* δζ *residuo* ακ *maius est. quod idẽ ualet ac si dicatur* ακ *esse minus, quàm* δζ. Sit *ergo syllogismus per resolutionem: reuocetúrque res ad ele-*

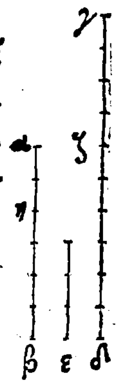
menta, quomodo solēt uti geometræ, ut paucioribus uerbis concludatur demonstratio, eoq́; promptius ab intellectu nostro comprahendatur. Primò quia composita est propositio minor, qualitas illa adiecta prædicato, quæ æqualis est minori, probatur ex consensu & suppositione præcedentibus. Maiorem *uerò terminum inesse minori sic probabis:* R*esiduū minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detractoq́; dimidio de maiore: de minore uerò detracto plus dimidio, est minus residuo maioris.* Sed *α κ est residuum minoris ex duabus magnitudinibus nempe ex θ α, κ λ &c.* Ergo *α κ est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ ζ, ergo α κ est minus λ ζ.* Maior *uerò cōtracta est ex principio uniuersali. Si ab inæqualibus inæqualia auferas, residua sunt inæqualia, & minus id quod residuū est, eius à quo plus ablatum est.* Q*uantum ad minorem propositionem attinet, illud solùm probatione indiget, α κ esse residuum minoris. primò residuum esse patet, ex suppositione.* Q*uod uerò magnitudo θ α (cuius residuum est α κ) sit minor magnitudo κ λ, patet ita.* R*esiduum minoris magnitudinis ex duabus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio de maiore: de minore uerò plus dimidio, est minus residuo maioris.* Sed *θ α est residuum minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio ex maiore λ ε: de minore uerò α β plus dimidio &c.* Ergo *θ α est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ κ, ergo θ α est minus quàm λ κ.* Ma*ior patet ex principio indemōstrabili.* Minor *uerò probatur, primò quòd θ α sit residuum. probatur ex suppositione,*

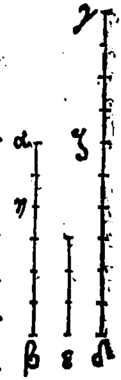
sitione, propter detractionē factam. Quòd uerò α β sit minor quàm δ ι, patet similiter ex suppositione & principio: quamlibet quantitatem toties posse multiplicari &c. Addit Theon hoc quoq; theorema uerum esse, etiā si partes detractæ sint dimidiæ. Quòd uerò dicitur in theoremate, Si detrahatur plus dimidio, eò pertinet ut si minus dimidio detrahatur, non semper uerum sit residuum esse minus minore ex duabus propositis.

Secundum Theorema.

Duabus magnitudinibus propositis inæqualibus, si detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque residuum unquam metiatur, id quod ante se metiebatur, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.

Sint magnitudines duæ inæquales α β, γ δ: minórq; sit α β: detractaq; per detractionem alternatim, & semper cōtinuatā minore de maiori: id quod relinquitur ex ea quæ maior fuerat ante detractionē, nunquam metiatur hoc ipsum, quod antequā id reliquum fieret, metiebatur maiorem magnitudinem. Dico incommēsurabiles illas esse magnitudines α β, γ δ. Quod si neges, illud cōtinuo affirmas, commēsurabiles eas esse. Porro si sint commensurabiles, metietur eas quædam communis magnitudo per diffinitionem linearum commensurabilium. Metiatur itaque, si fieri potest: eáque sit ι, detrahatúrque de maiori





magnitudine γ δ pars quædam, puta δ ζ quæ sit æqualis maiori magnitudini α β: aut si æqualis non erit, sit tamen huiusmodi, ut illa minor magnitudo α β aliquot uicibus repetita, repræsentet ipsam magnitudinem δ ζ. hoc enim est quod dicitur, magnitudinem α β metiri δ ζ: talique detractione facta, minoris inquam de maiore, relinquatur ex maiore portio quædam γ ζ minor magnitudine α β. hoc uerò est quod dicitur in theoremate, neq; residuum unquam metiatur id quod ante se erat. Similiter de α β detrahatur portio quædam β η æqualis magnitudini γ ζ, relinquatúrque ex ea detractione portio α η minor quàm γ ζ, ídque semper si sit, opus fiat, saltem dum relinquatur quædam magnitudo minor ipsa magnitudine ε. hoc enim tandem euenire necesse est, per primum theorema huius, Si propositis illis duabus magnitudinibus inæqualibus α β, ε, (quarum minor ex consensu & suppositione tua erat ε. hanc enim posuisti esse communem mensuram duarũ magnitudinum α β, γ δ, itaque minorem alterutra) de maiore α β detrahatur plus dimidio, itémque de residuo plus suo dimidio: itaque relicta sit α η minor quàm ε. hactenus ea quæ ad structuram pertinẽt. nunc ad demonstrationem ueniamus. Cum igitur magnitudo ε metiatur magnitudinẽ α β, ipsa uerò α β metiatur δ ζ: etiam ε metietur similiter magnitudinem δ ζ per commnnem cõceptionem. Si magnitudo quædam metiatur aliam, metietur quoque omnem aliam ab ea mensuratam. cui simile quiddam

apposuit

appoſuit Campanus in numeris inter principia ſeptimi. Itaque ι metietur δ ζ. eadem etiã magnitudo ι metitur totam magnitudinem γ δ ex tua ſuppoſitione. poſitum enim eſt eam eſſe communem menſuram ambarũ α β, γ δ. Ergo ι metietur & ipſum reſiduum, quod eſt γ ζ, per illam communem conceptionem, Quæ magnitudo metitur aliam totam, & partem ab ea detractã, metitur quoque reliquã. Idem in numeris poſuit Campanus. Cum itaque ι metiatur γ ζ: γ ζ autem metiatur β κ: ipſa quoque ι metietur β κ per ſuperiorem illam conceptionem. Atqui ι metitur totam magnitudinem α β: itaque per alteram conceptionẽ metitur reſiduum α κ. Metietur ergo maior magnitudo aliam ſe ipſa minorẽ. hoc autem fieri nullo modo poteſt, ut antè diximus inter principia. Non igitur illas magnitudines α β, γ δ metietur ulla magnitudo. Incommenſurabiles igitur erunt α β, γ δ. Duabus itaque magnitudinibus propoſitis inæqualibus et cæt. quod demonſtrandum erat.

Hæc demonſtratio concluſa eſt per deductionem ad impoßibile. Poſitum eſt enim contradictorium concluſionis uerum. ex qua propoſitione per plures gradus ſyllogiſmorum deuentum eſt tandem ad id quod falſißimum eſt, nempe maiorem magnitudinem eſſe quæ minorem metiatur. Quia ergo ex ueris nunquam colligitur falſum: nunc autem concluſa eſt hæc falſitas, neceſſe eſt poſitionem illam tuam falſam extitiſſe. quod ipſum per deſtructionem conſequentis oſtendi poſſe tradunt dialectici. Falſum autem eſt maiorem metiri minorem. quod conſequens erat ad illud antecedens, *duas magnitudines α β, γ δ esse commẽsurabiles. sequitur ergò ipsum antecedens falsum esse.* Incommensurabiles ergo necesse est esse α β, γ δ. Verum ex quibus medijs processerit illa conclusio falsa, maiorem magnitudinem metiri minorem, uideamus per resolutionẽ, sitq; syllogismus huiusmodi· Omnis magnitudo metiens totam magnitudinem α β, & de ea detractam κ β, metitur residuum α κ. Magnitudo ι est magnitudo metiens totam α β, & detractam κ β. Ergo magnitudo ι metitur residuum α κ. falsa est conclusio, quia positum fuit α κ esse minorem quàm ι. Maior est indemonstrabilis, cõtracta ex principio uninersali: quod quale esset, antè retulimus. Minoris uerò probatio quia plura continet, hinc petẽda est. Primò ex suppositione magnitudo ι metitur totam α β. deinde quòd eadem ι metiatur detractam partem quæ est κ β, ita probatur· Omnis magnitudo metiens magnitudinem γ ζ, metitur & κ β, quam γ ζ metitur. ι metitur γ ζ, ergo ι metitur & κ β. Maior similiter est per se nota ex principio uniuersali· Quæcunque magnitudo metitur aliam, metitur & eam quam ipsa metitur. Minor uerò sic probatur· Omnis magnitudo metiens totam magnitudinem γ δ, & detractã δ ζ, metitur & residuum γ ζ. ι metitur totam magnitudinem γ δ, & detractã δ ζ, ergo ι metitur γ ζ. Maior iterum per se nota est ex principio. Minor uerò quia duo membra habet, ita probatur· Primò ι metitur totã magnitudinem γ δ ex suppositione. deinde quòd eadem ι metiatur δ ζ, ita probandũ est· Omnis magnitudo metiẽs α β, metitur & δ ζ quam metitur α β. ι metitur α β,

ergo

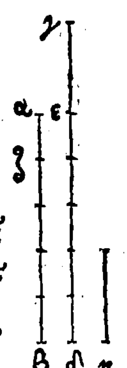
ergo ε metitur & δζ, quam metitur αβ. Maior uerißima eſt, & per ſe nota. Minorē uerò falſam eſſe ideo neceſſe eſt, quia cauſa fuit illius concluſionis falſæ, nempe quòd maior magnitudo minorē metiatur. Non erit itaque ε communis menſura ambarum magnitudinū αβ, γδ. Idem reperies, ſi quācunque aliam magnitudinē poſueris pro communi illarum menſura. Quia igitur nulla reperiri poteſt, erunt illæ magnitudines incommenſurabiles, quod demonſtrandum erat. Ex hoc elicitur πόρισμα ſiue corollarium à deſtructione conſequentis.

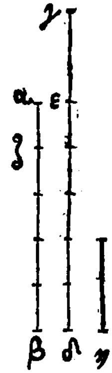
Si duæ magnitudines inæquales propoſitæ nō fuerint incommenſurabiles, ſed fuerint commenſurabiles: continuata detractione minoris alternatim facta de maiore, neceſſe eſt reſiduum metiri id quod ante ſe metiebatur.

Tertium Theorema.

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarū cōmunē menſurā reperire.

Sint datæ duæ magnitudines commenſurabiles αβ, γδ: quarum minor ſit αβ: oportet itaque magnitudinum αβ, γδ maximam communem menſuram reperire. Primum ipſa magnitudo αβ aut metitur γδ, aut nō metitur. Si itaque αβ metitur γδ, ſeipſam quoque cū metiatur, ipſa ergo αβ eſt communis menſura magnitudinum αβ, γδ. Manifeſtum porrò eſt maximā quoque eam ambarum menſuram communē eſſe. Nam nulla maior magnitudo quam αβ metietur ipſam αβ. Sed ne metiatur αβ ma-

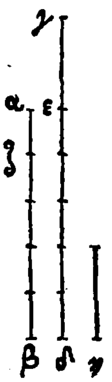




gnitudinem γδ. Detracta igitur per mutuã detractionem minore de maiori, residuũ metietur aliquando id quod ante se est per præcedens corollarium. Nam datæ sunt magnitudines αβ, γδ esse commensurabiles. itaque magnitudo αβ metiendo ιδ partem magnitudinis γδ, relinquat magnitudinem ιγ se αβ inquam minorem. Ipsa uerò ιγ metiendo magnitudinem ζβ partẽ magnitudinis αβ, relinquat similiter αζ se ιγ inquam minorem. Ipsa uerò αζ metiatur magnitudinem γι. Illud autẽ est metiri, id quod ante se est, quãdo nihil relinquitur post mensurationem factam. hactenus constructio. sequitur statim demõstratio. Cum igitur αζ metiatur magnitudinem γι: γι autẽ metiatur ζβ: ergo αζ metitur magnitudinem ζβ. Sed αζ metitur seipsam: ergo αζ metietur αβ. Sed quia αβ metitur δι: ergo αζ metietur δι. Sed eadem αζ metitur γι: totam ergo γδ metietur: ergo αζ metietur ambas magnitudines αβ, γδ, earúmq; cõmunis mẽsura erit. Dico præterea illam esse communẽ utriusque maximam mensuram. Quod si neges illam esse maximam mensuram: erit itaque magnitudo quædam maior quàm αζ, quæ metiatur utramque αβ, γδ. ea uero sit κ. Cum igitur per te κ metiatur αβ: ipsa autem αβ metiatur ιδ: ergo κ metietur ιδ. ipsa etiam κ per te metitur totam γδ: ergo metietur & residuũ γι. Sed cum γι metiatur ζβ, etiam κ metietur ζβ. metitur uerò eadem κ per te totam αβ: ergo metietur & residuũ αζ. Itaque magnitudo maior metietur minorem: quod sane

fieri

fieri nullo modo poteſt. Nulla *ergo maior magnitudo quàm* α ζ *metiètur utramq́;* α β, γ δ: *ergo* α ζ *eſt maxima earum communis menſura.* Duarum *igitur magnitudinum commenſurabilium* α β, γ δ *reperta eſt communis maxima mẽſura, nempe* α ζ. *quod faciendũ fuit.*

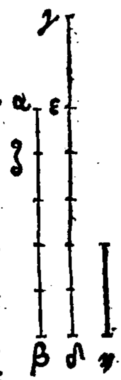


Corollarium.

Ex *hoc cõcluditur, ſi magnitudo quæpiam duas alias magnitudines metiatur, metietur quoque & communem utriuſq́; maximam mẽſuram.* Hoc *corollarium probatur ex poſtrema parte demõſtrationis.* Sint *duæ magnitudines* α β, γ δ, *quarum ſit maxima communis menſura* α ζ: *ſit porrò alia* η *quæ etiam metiatur utramque* α β, γ δ. *dico magnitudinem* η *metiri* α ζ. Sint *eædem ſuppoſitiones quas modò poſuimus.* Cum *igitur* η *metiatur* α β: α β *autem metiatur* ε δ: *ergo* η *metietur* ε δ. Sed η *metitur etiam totã* γ δ: *metietur ergo & reliquum* γ ε. Sed *quia* γ ε *metitur* ζ β: *ergo* η *metietur* ζ β. *ſed metitur totam* α β: *metietur ergo & reliquum, quod eſt* α ζ. *ergo* η *metiens utrãque* α β, γ δ, *metietur & maximam utriuſque communem menſuram, nempe* α ζ. Docet Proclus *differentiam inter problemata & theoremata geometrica eã eſſe, ut problemata ſint ea quæ proponunt aliquid fieri oportere, qualia ſunt omnia quæ uerbo infinito concipiuntur, ut reperire, cõſtituere, ſecare, & ſimilia.* Theoremata *uerò ſunt quæ aſſerendo ponunt & definiũt de unoquoq́; accidente cuiuſque ſubiecti, qualia ſunt duo prima huius libri.* Hoc *autem* 3. *problema eſt.* Huius *ergo pro-*

E

blematis demonstrationem sic resoluere nos oportet. Primùm aggrediamur partē eā quæ syllogismo directo & categorico cōcludit ipsam magnitudinē αζ esse cōmunem mensurā magnitudinū αϐ, γδ. Omnis magnitudo metiens magnitudines γε & εδ, metitur totam γδ. Sed αζ metitur γε & εδ: ergo αζ metitur totam γδ. Maior patet ex principio indemonstrabili. Quæcūq; magnitudo metitur duas, metitur etiam compositam ex illis. cuius simi



le ponit Campanus in numeris inter principia libri septimi. Minoris pars illa quod αζ metiatur γε, patet per corollarium secundi theorematis. Quòd uerò eadē αζ metiatur εδ, probatur. Omnis magnitudo metiens αϐ, metitur δε mensuratam ab αϐ. Sed αζ metitur αϐ: ergo αζ metitur δε. Maior patet ex principio. Quæcunq; magnitudo metitur aliam, metitur quamcunque mensuratam ab ea. Minorē ita probabis: Omnis magnitudo metiens magnitudines αζ, ζϐ, metitur & totam compositam ex illis αϐ. Sed αζ metitur αζ, ζϐ: ergo αζ metitur totam αϐ. Maior ex principio eodē patet. Minoris pars quod αζ metiatur αζ, patet etiam ex eo, quia omnis magnitudo seipsam metitur per unitatem. Quòd uerò αζ metiatur ζϐ, probatur sic. Omnis magnitudo metiens γε, metitur & ζϐ mensuratā ab ea. Sed αζ metitur γε, ergo αζ metitur ζϐ. Maior pendet ex principio. Minor etiam pendet ex antè dictis. Nunc uerò restat persequēda pars illa demonstrationis, qua ostēditur magnitudinem αζ communem utriusque αϐ, γδ mensuram, esse

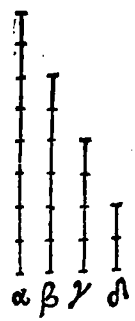
præterea

præterea maximam ambarum cõmunem mensurã: hoc autem fit per deductionem ad impoßibile. Nam *si neges illam* κ ζ *esse mensuram maximam communem utriusque magnitudinis* α β, γ δ, *sit alia maior quàm* κ ζ *maxima communis utriusque mensura quæ sit* κ. Tunc *dico te deductum iri ad illud impoßibile. magnitudinem maiorem, nempe* κ *metiri minorem, scilicet* α ζ. Manentibus *enim his quæ superius posita sunt*· Omnis *magnitudo metiens totam* α β, & *de ea partem detractam* ζ β, *metitur & residuũ* α ζ. Sed κ *metitur totam* α β & *detractam* ζ β: *ergo* κ *metitur* α ζ. Maior *est indemõstrabilis.* Minor *sic probatur.* Primum κ *metitur totã* α β *ex tua positione.* Quod *uerò eadem* κ *metiatur* ζ β, *probo.* Omnis *magnitudo metiens* γ ι *metitur* ζ β *quam* γ ι *metitur.* Sed κ *metitur* γ ι, *ergo* κ *metitur* ζ β. Maior *rursum nõ eget probatione.* Minoris *probatio hinc deducitur.* Omnis *magnitudo metiens totam* γ δ & *eius partẽ* δ ι, *metitur & residuũ* γ ι. Sed κ *metitur totam* γ δ & *eius partem* δ ι, *ergo* κ *metitur* γ ι. Maior *item est indemonstrabilis.* Minoris *probationẽ sic deduces*· Primũ *quod* κ *metiatur totam* γ δ, *patet ex tua positione.* Quòd *uerò eadem* κ *metiatur* δ ι, *sic agas*· Omnis *magnitudo metiens* α β, *metitur* δ ι *mensuratam ab ea.* Sed κ *metitur* α β: *ergo* κ *metitur* δ ι. Maior *est indemonstrabilis.* Minor *patet ex tua positione quãdo uoluisti* κ *esse communem maximam mensuram utriusque nẽpe* α β, γ δ. *ex qua quia sequitur illa cõclusio falsa, scilicet maiorem* κ *metiri minorẽ* α ζ, *necesse est illã tuam positionem falsam extitisse. nam ex ueris nõ sequi falsum* *compertum est. Ergo κ non erit communis utriusque maxima mensura. idemq; fiet si quãcunq; aliam posueris. Constat igitur αζ esse communem maximam utriusque mensuram. Quod autem hoc problemate proponitur inquirendum, id licet in theorema conuertere collecta summa totius demonstrationis, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus & commensurabilibus: si minor metitur maiorem, illa est communis maxima utriusque mensura: sin minus, facta mutua detractione quandocunque residuum metitur id quod ante se metiebatur postremo, illa est communis utriusque mẽsura atque ea maxima. Simili ratione poteris ex quocunque problemate theorema efficere.*

Quartum Theorema.

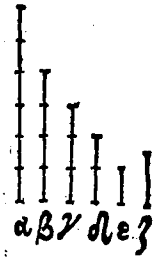
Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram reperire.

Sint datæ tres magnitudines cõmensurabiles α, β, γ, oportet ipsarum communem maximam mensuram reperire. Sumatur maxima communis duarum priorum α, β, mensura per præcedens problema, sitq; δ: hæc magnitudo δ, aut metitur magnitudinem tertiam quæ est γ, aut eam non metitur. metiatur prius. Hactenus constructio huius partis, nunc ad demonstrationem. Cum itaque δ metiatur γ, metiaturq; magnitudines α, β, Ergo δ metietur α, β, γ: ipsarúmque communis men-



sura

sura est. Præterea *hanc esse illarum maximam communem mensuram constat hac ratione.* Nam *nulla magnitudo maior quàm δ metietur illas α,β, γ.* Q*uod si fieri posse defendis, sit magnitudo ε maior quàm δ, quam dicis metiri magnitudines illas α,β,γ.* Cum *itaque ε per te metiatur α,β,γ, metitur duas priores ex illis scilicet α,β: & præterea maximam cõmunem utriusque mensuram, nempe δ per corollarium precedẽs.* Ergo *ε maior quàm δ, metietur ipsam δ, quod est impoßibile.* Sed *ne metiatur δ magnitudinem γ, hoc primum dico magnitudines γ,δ esse commensurabiles. quod ita demonstratur.* Cum *sint commensurabiles datæ magnitudines α,β,γ, metietur eas profecto quædam magnitudo quæ similiter metietur separatas ex illis duas α,β.* Q*uare metietur quoque maximam communem utriusque mensuram, nempe δ.* Metitur *etiam ipsa eadem magnitudinẽ γ.* Q*uare ε metietur utrãque γ,δ.* Ergo *γ,δ sunt commensurabiles ex definitione.* S*umatur itaque maxima communis mẽsura ambarum γ,δ, sitq; ε.* Hactenus *constructio huius partis, nunc est demonstratio.* Q*uoniã ε metitur δ, & δ metitur magnitudines α,β, itaque ε metietur α,β. metitur præterea magnitudinem γ.* Ergo *ε est communis mẽsura trium α,β,γ.* Dico *autem illam etiam esse maximam.* Nam *si fieri potest ut ε non sit maxima mensura communis trium α,β,γ, sit quædam maior quàm ε, magnitudo ζ, metiatúrque tres illas α,β,γ.* Cúmq; *ζ metiatur α,β,γ, etiam metietur α, β, & ipsarum maximam*



communem utriusque mensurã, nempe δ. Metitur præterea ipsa ζ magnitudinem γ. ergo ζ metitur γ, δ, & ambarum communem maximã mensuram, nempe ε, maior uidelicet magnitudo minorẽ. hoc uero fieri nullo modo poteſt. Nulla ergo maior quàm ε magnitudo metietur magnitudines α, β,

γ. Ergo ε eſt maxima trium dictarum communis menſura, ſiquidem δ non metitur magnitudinem γ. Quòd ſi δ metitur γ, ipſamet δ erit communis trium maxima menſura. Datis igitur tribus magnitudinibus commenſurabilibus, reperta eſt ipſarum communis maxima menſura, quod faciendum erat.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum relinquitur, ſi magnitudo tres magnitudines metiatur, metiri quoque maximam communem ipſarum menſuram. Similiter etiam in pluribus magnitudinibus maxima illarum communis menſura reperitur. In illis quoque uerum erit hoc corollarium. Huius corollarij demonſtratio continetur in poſtremis uerbis ipſius Theonis. itaque dices: Sint tres magnitudines α, β, γ, quarum communis maxima menſura ſit ε. ſit porrò alia ueluti ζ, ipſa quoque metiẽs tres illas magnitudines, dico ζ metiri ε. Demonſtrationẽ autem requires ab illis uerbis. Cumq; ζ metiatur α, β, γ etiã metietur α, β uſque ad ea uerba, Maior uidelicet. Hæc demõſtratio quia uarias partes habet, ſingulæ uerò pluribus ſyllogiſmis cõtinẽtur: ſingillatim omnes reſoluemus. Primò ſi δ communis maxima menſura ambarum

barum

barum α,β metiatur γ, per se clarum est magnitudinem δ esse communem mensuram magnitudinum α, β, γ. Quod uerò eadem δ sit earumdem communis mensura maxima, hinc liquet per deductionem ad illud impossibile, Maiorem magnitudinem metiri eam quæ se ipsa minor est. Nam si negas δ esse maximam mensuram, sit quæuis maior quàm δ, uidelicet ε metiens illas α,β,γ. Ex hoc sequitur ε metiri ipsam δ, quod falsum est & impossibile, cum maior non metiatur minorem.

Omnis magnitudo metiens α,β, metitur δ maximam α,β, mensuram. Sed ε metitur α,β: ergo ε metitur δ. Maior patet, quia collecta ex corollario superioris problematis. Minor patet ex tua positione. quam tamen falsam esse constat, quia causa est falsitatis illius ex ea consequentis. Verum est itaque δ esse communem & maximam trium mensuram, si modò δ metitur γ. Sin autẽ δ non metiatur γ, illud imprimis uerum esse dico (quod ueluti lemma quoddã demonstrandũ est antequã eatur ulterius) magnitudines γ,δ, esse cõmẽsurabiles. Omnes magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet θ, sunt cõmensurabiles. Sed γ,δ sunt magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet θ. ergo γ, δ sunt cõmẽsurabiles. Maior patet ex definitione. Minor patet ex eo, quia α,β,γ, positæ sunt cõmẽsurabiles per cõmunẽ mẽsurã, uidelicet θ. sic itaq; probabitur Omnis magnitudo metiẽs tres α,β,γ, metitur duas priores, & maximã mẽsuram duarũ priorũ nempe δ, per corollarium præcedentis theorematis. Sed θ metitur tres α,β,γ. ergo θ metitur δ. Quod autẽ θ metiatur γ, patet ex positione. Cũ

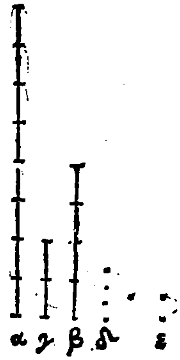
igitur θ *metiatur utrãq;* γ,δ*, sequitur ex definitione am-*
bas γ,δ *esse cõmẽsurabiles.* Sit *maxima cõmunis mẽsu-*
ra ipsarũ γ,δ*, quæ uocetur* ε. Dico *primo ipsam* ε *esse cõ-*
munem mensurã trium α,β,γ *sic probari. Omnis ma-*
gnitudo metiens δ*, metitur* α,β*, mensuratas à* δ. Sed ε
metitur δ*, ergo* ε *metitur* α,β. Maior *patet ex principio.*
Minor *uerò ex suppositione quando positum est ipsam* ε
esse maximam communem mensuram duarum γ,δ*, ex*
eadem etiam suppositione ε *metiebatur* γ. Ergo ε *meti-*
tur α,β,γ*, estq; earum communis mensura.* Dico *præ-*
terea eandem ε *esse communem maximam mensuram*
earũdem trium. sin minus, esto magnitudo quædã ma-
ior quàm ε *metiẽs illas, sitq;* ζ. Ex *hac positione sequi ui-*
debis illud idem impoßibile, maiorem ζ *metiri minorẽ* ε.
Omnis *magnitudo metiens* γ,δ*, metitur* ε *communem*
maximam utriusque mensuram. Sed ζ *metitur* γ,δ*; er-*
go ζ *metitur* ε. Maior *patet ex* corollario *superiori.* Mi-
nor uerò ita probatur. Primò *quod* ζ *metitur* γ*, patet ex*
suppositione, quia positũ est eam metiri singulas α,β,γ.
Quod *uerò eadem* ζ *metiatur* δ *probatur. Omnis ma-*
gnitudo metiens α,β*, metitur &* δ *communem utrius-*
que maximam mẽsuram. Sed ζ *metitur* α,β*, ergo* ζ *me-*
titur δ. Maior *patet ex* corollario. Minor *uerò à te posi-*
ta est, quæ cum sit unica caussa illius falsæ conclusionis,
necesse est ipsam quoq; falsam esse. Nulla *ergo alia ma-*
gnitudo quàm ε *erit communis illarum trium maxima*
mensura. Hoc *autem problema potes redigere in for-*
mam theorematis hoc modo. Si *maxima mẽsura dua-*
rum primarum ex tribus commensurabilibus magni-
tudinibus

tudinibus metitur tertiam, illa eſt communis maxima menſura trium. ſin minus, maxima menſura tertiæ & maximæ menſuræ duarum primarum eſt cõmunis maxima menſura trium.

Quintum Theorema.

Cõmẽſurabiles magnitudines inter ſe proportionẽ eam habent, quã habet numerus ad numerũ.

M*agnitudines dicũtur inter ſe proportionem habere, quã habet numerus ad numerum, quãdo quæ proportio eſt inter illas magnitudines, ea reperitur inter aliquos numeros, ut puta ſi magnitudo magnitudini ſit, uel æqualis, ut numerus 2 numero 2: uel dupla, ut numerus 4 ad 2: uel tripla, ut 6 ad 2: uel in alia quauis multiplici proportione. Idem de ſuperparticulari, ſi magnitudo ſit ſeſquialtera ad magnitudinem, ut numerus 3 ad numerum 2. Idem de aliis ſpeciebus ſuperparticularis proportionis. Idem de ſuperpartienti, de multiplici ſuperparticulari, & de multiplici ſuperpartienti, quæ ſunt omnia proportionum genera, quæ in numeris repe riuntur. Sint magnitudines commẽſurabiles α, β.* Dico *ipſas habere proportionem inter ſe, quã numerus aliquis ad aliquem aliũ numerum.* Nam *cùm ſint commenſurabiles α, β, ſit γ cõmunis earũ mẽſura, & quoties γ metitur α, (id eſt quot partes reperiũtur in α æquales ipſi γ) tot ſint unitates in numero δ. quoties uerò eadem γ meti-*



tur β, tot sint unitates in numero ε. Sequitur demonstratio. Cum itaque *γ metiatur α toties quot sunt unitates in δ numero, ipsáque unitas metiatur numerũ δ toties quot sunt in ipso δ unitates. totidem ergo uicibus γ metitur α, quot uicibus unitas metitur numerum δ.* Ergo *γ eandem proportionem habebit ad α, quam unitas ad numerum δ. per conuersam etiam proportionalitatem erit ut α ad γ: sic numerus δ ad unitatem.* Rursum *cum γ metiatur β toties quot sunt unitates in numero ε: metiatúrque unitas numerum ε toties, quot sunt in eo unitates. tot uicibus itaque γ metietur β, quot uicibus unitas metitur numerum ε.* Ergo *per æquam proportionalitatem (hanc uerò uocat* Euclides δι' ἴσου λόγου*) quam proportionem habet magnitudo α ad magnitudinem β, eandem habet numerus δ ad numerum ε. Itaque commensurabiles magnitudines, puta α, β, inter se proportionem eam habent, quam numerus δ ad numerum ε. quod demonstrandum erat.*

Resolutio.

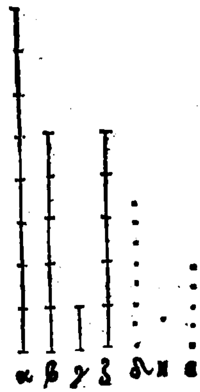
Omnia extrema duorum ordinum continentium æqualẽ numerum magnitudinum coniugatarum in eadẽ proportione, sunt & ipsa in eadem proportione. Sed α, β, & δ, ε sunt extrema duorum ordinum, &c. Ergo *α, β, & δ, ε sunt in eadem proportione.* Maior *patet ex* 22.5. Minoris *pars prior scilicet α, β & δ, ε esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentiũ*

magnitu-

magnitudinum patet ex suppositionibus admissis in cõstructione. Quod uerò magnitudines contentæ in illis ordinibus sint in eadem proportione coniugatæ, id est singula paria prioris ordinis cum singulis paribus alterius sint proportionalia, probatur ita: Primò quòd γ, β habeant eandem inter se proportionem quam unitas & numerus ι, λ. Omnis magnitudo metiens β tot uicibus, quot uicibus unitas metitur ι, habet ad β eandem proportionem, quam unitas ad numerum ι. Sed γ tot uicibus metitur β quot uicibus unitas metitur ι. Ergo γ habet ad β eandem proportionem, quam unitas ad numerum ι. Maior per se patet contracta ex definitione proportionalium, quæ est in principiis lib. 5. de quibus doctissime disserentem lege Petrum Nonium *Lusitanũ. Minor uerò concessa est per suppositionem. Quod uerò α, γ habeant eam proportionem quam numerus λ ad unitatem, probatur eodem modo: Omnis magnitudo quam metitur γ tot uicibus quot unitas metitur numerum λ, habet ad γ eandem proportionem quam numerus λ ad unitatem. Sed α est magnitudo quam metitur γ tot uicibus, &c. Ergo α habet ad γ eandẽ proportionem quam λ ad unitatem. Maior probatur eodem modo quo superior. Minor item patet ex suppositione. Vt uerò reperias numeros duos, quorum proportionem habeant inter se duæ magnitudines commensurabiles, uide quot uicibus mensura earum communis unamquãque metiatur. Numeri enim uicibus illis expressi retinent eam proportionem, quam magnitudines commensurabiles.*

Sextum Theorema.

Si duæ magnitudines proportionem eam habent inter ſe quam numerus ad numerum, commenſurabiles ſunt illæ magnitudines.



Duæ enim magnitudines α, β, inter ſe habeant eam proportionem, quam numerus δ ad numerum ε. Dico cõmenſurabiles eſſe magnitudines α, β. Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales quot ſunt unitates in numero δ (hoc uerò idem eſt ac ſi uelis quamcunque partem auferre de magnitudine α, quod quomodo fiat, docet 9.6.) ſitque magnitudo γ æqualis uni ex illis partibus æqualibus ipſius α. ſit etiam alia magnitudo ζ compoſita ex tot magnitudinibus æqualibus ipſi γ, quot unitates ſunt in numero ε. Hîc incipit demonſtratio. Cùm igitur tot magnitudines æquales ipſi γ ſint in magnitudine α, quot ſunt unitates in δ, quota pars ipſius δ eſt unitas, eadem pars erit magnitudo γ magnitudinis α. Eſt ergo ut γ ad α, ita unitas ad δ. metitur uerò unitas numerum δ. ergo & γ metietur α. Et quia eſt ut γ ad α, ſic unitas ad numerum δ. conuerſa igitur proportione erit ut α ad γ, ſic numerus δ ad unitatem. Rurſum quia quot ſunt unitates in numero ε, tot ſunt in magnitudine ζ magnitudines ſiue partes æquales ipſi γ. Erit itaque ut γ ad ζ, ſic unitas ad ε. Nuper uerò concluſum eſt ſicut α ad γ, ita numerus

numerus δ ad unitatem. Per *æquam igitur proportionem erit ut α ad ζ, sic δ ad ε. Sed sicut δ ad ε, ita se habet α ad β.* Itaque *etiam ut α ad β, similiter se habebit α ad ζ.* Ipsa *igitur magnitudo α ad utranque β, ζ, eandem proportionem retinebit.* Aequalis *est igitur magnitudo β magnitudini ζ per secundam partem 9. 5.* Sed *γ metitur ζ, ergo metietur β. Sed & eadem γ metitur α, igitur γ metitur α, β. commensurabiles igitur sunt magnitudines α, β.* Si *ergo duæ magnitudines &c. quod demonstrandum fuit.*

Resolutio.

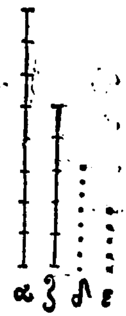
Omnes magnitudines quas eadem mensura metitur, sunt commensurabiles. Sed magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, metitur eadẽ mensura, puta γ. Ergo *magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt commensurabiles.* Maior *patet ex definitione commensurabilium magnitudinum.* Minoris *uerò pars illa quòd γ metiatur β, ita probanda est* Magnitudo *ζ est magnitudo β, quia æquales. γ metitur ζ, ergo γ metitur β.* Minor *patet ex concessione supposita inter construendum, illis uerbis,* Sit *etiam alia magnitudo ζ.* Maior *sic probatur* · Omnes *magnitudines ad quas eadem magnitudo, puta α eandem proportionem habet, sunt æquales.* Sed *ζ, β sunt huiusmodi. ergo ζ β sunt æquales.* Maior *patet ex secunda parte nonæ quinti.* Minor *uerò ita probetur* · Omnes *proportiones æquales eidem proportioni, puta ei quæ est inter δ, ε numeros, sunt inter se æquales.* Sed *proportiones inter α, ζ & α, β sunt æquales eidẽ proportioni, puta quæ est* *inter δ,ι. Ergo proportiones inter α,ζ & α,β sunt inter se æquales. Maior patet ex undecima quinti. Minoris pars illa, quòd proportio inter α,β sit æqualis ei quæ est inter δ,ι numeros, patet ex suppositione. Quòd uerò α,ζ eandem habeant proportionem quam δ,ι, probetur sic. Omnia extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum coniugatarũ in eadem proportione, sunt & ipsa in una & eadẽ proportione. Sed α,ζ, & δ,ι sunt extrema duorũ ordinũ, &c. Ergo α,ζ & δ,ι sunt in una & eadem proportione. Maior patet ex 22.5. Minoris uerò pars prior scilicet α,ζ & δ,ι esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum, patet ex suppositionibus admißis in construendo. Nam primus ordo est α,γ,ζ. Secundus uerò est δ,κ,ι. κ enim est loco unitatis. Quòd uerò magnitudines in his ordinibus cõtentæ sint in eadem proportione cõiugatæ, probetur. Et primo loco α,γ habere inter se eandem proportionẽ quam δ ad unitatem κ, patet ex suppositione admissa inter cõstruendũ illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales, &c. Quanuis ea pars syllogismo quoque demonstrari poßit. Omnes quatuor magnitudines inter se proportionales, sunt quoque conuersa proportione proportionales. Sed γ,α,κ unitas & δ sunt magnitudines proportionales. Ergo γ,α,κ & δ sunt conuersa proportione proportionales. Maior patet per corollariũ quarti theorematis libri quinti. Minor uerò patere potest ex suppositione, illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur. Secundum erat in illa minore γ,ζ habere eandem pro-*

portionem

portionem quam unitas & ε. quod quidem etiā patet ex ſuppoſitione inter conſtruēdum admiſſa illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ. Quantum ad alteram partem minoris aſſumptæ in primo ſyllogiſmo, nempe γ metiri magnitudinem α, ea quoque patet ex illa ſuppoſitione, Nam magnitudo α diuidatur, &c. Nihilominus poteſt & ipſa ſyllogiſmo demōſtrari: ſed quia eſt ex ſuppoſitione nota, nihil eſt opus ſyllogiſmo.

Corollarium.

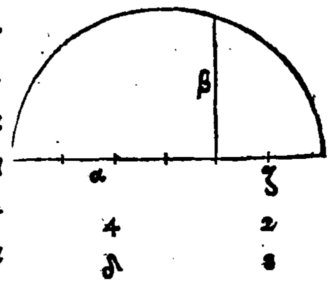
Ex *hoc fit manifeſtū, ſi fuerint duo numeri ut δ, ε, & recta linea ut α, dari poſſe aliam lineam ad quam linea α retineat eandem proportionem quā numerus δ ad numerum ε. Diuidatur linea α in tot partes æquales quot ſunt unitates in altero numero δ per nonam ſexti, & cōponatur altera linea, puta ζ ex tot partibus, quæ ſint æquales partibus lineæ α, quot ſunt unitates in altero numero ε. itaque linea α erit ad lineā ζ ſicut numerus δ ad numerū ε. Hac ratione potes cuicunque lineæ propoſitæ, aliā dare commenſurabilem in longitudine. Nam ſi duæ lineæ habent proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſunt inter ſe quoque longitudine commenſurabiles, per hoc theorema 6. Quod uerò ſequitur in exemplari græco, continet, ſubobſcurè tamen lemma quoddam, ipſum etiam alieno loco poſitū. inuenitur enim inter alia lemmata poſt 29 theorema huius libri, uerbis conceptis in formam problematis.*



Lemma.

Duobus numeris datis, & linea recta, oportere efficere ut numerum ad numerum: sic quadratum lineæ datæ ad quadratum alterius.

Sint dati numeri δ, ε: recta uerò sit α: propositúmque sit efficere id quod præcipitur hoc problemate. reperiatur igitur per postremum corollarium linea ζ, ad quam linea α sit in ea proportione in qua numerus δ ad numerum ε: sumatúrq; inter duas illas lineas α, ζ media proportionalis per tertiam decimam sexti, sitque β. Cum igitur sit sicut numerus δ ad numerum ε, ita linea α, ad lineam ζ. & quemadmodum se habet linea α ad lineam ζ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, per secundum corollarium uicesimæ sexti. Itaque sicut numerus δ ad numerum ε, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β.

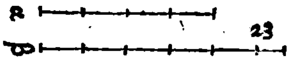


Septimum Theorema.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerũ.

Magnitudinum non habẽtium proportionem inter se quã numerus ad numerum, nullum exemplum efferre possumus in numeris, sicut fecimus in 5 huius. nam impossibile est numerum ad numerum nõ habere proportionem quam numerus ad numerum. Sint magnitudines incommensurabiles α, β. Dico α, β nullam omnino proportionem

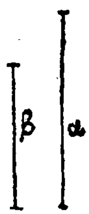
proportionem inter se talẽ habere, qualis inter ullos numeros reperitur. Quod si contra-



dicatur α,β habere proportionem inter se quam numerus ad numerum: sequitur illud continuo, commensurabiles quoque esse α,β per sextum theorema huius libri. Sed hoc theorema ponit illas esse incommensurabiles. Nullo igitur modo α habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum, quod demonstrandum fuit. Hic modus argumentationis & certissimus est, & breuissimus: sumitúrque ex syllogismis hypotheticis, quem à destructione consequentis uocant. Illúdque in uniuersum uerum esse deprehendes, quotiescunque in disciplinis mathematicis aut aliis quibuscunque, quæ nomine censentur scientiarum, reperiuntur duæ conclusiones ex earum numero, quas conuersas uocant, quales sunt quintum & sextum theorema huius libri: in his potentia contineri præterea alias duas conclusiones & ipsas conuersas, contrario tamen modo quàm superiores, quales sunt hoc theorema & proximum.

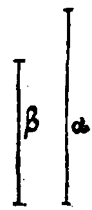
Octauum Theorema.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.



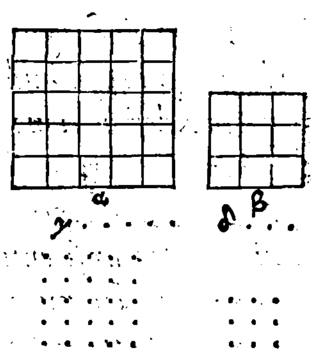
Duæ enim magnitudines α,β, inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum. Dico incommensurabiles esse magnitu-

dines α,β. Quòd ſi contradicas, uidelicet cõ menſurabiles eſſe, habent ſtatim proportionem quam numerus ad numerum, per quintum theorema huius. ſed hoc theorema ſupponit eas non habere. incommenſurabiles ergo ſunt magnitudines α,β. Si igitur duæ magnitudines, &c. quod demonſtrandum fuit.



Nonum Theorema.

Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine commēſurabilibus, inter ſe proportionē habent, quã numerus quadratus ad alium numerũ quadratum. Et quadrata habentia proportionem inter ſe quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habebunt quoque latera longitudine commenſurabilia. Quadrata verò quæ deſcribuntur à lineis longitudine incommenſurabilibus, proportionem non habent inter ſe quã quadratus numerus ad numerum alium quadratũ. Et quadrata non habentia proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque latera habebunt longitudine cõmenſurabilia.



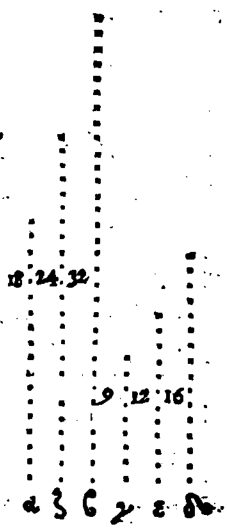
Quia difficile uidetur hoc theorema, dignum quoque uiſum

ſum eſt, quod pluribus modis demonſtraretur. Nos *uerò antequam ad demonſtrandum accedamus, nonnulla præfabimur de ſignificatione uocum ſiue terminorum huius theorematis, quæ rem totam illuſtrabūt.* Hoc *ſane theorema & quæ proxime ſequuntur, huiuſmodi ſunt, ut niſi plane percipiantur, res alioqui non difficillimæ inexplicabiles uideri poßint.* Imprimis *illud intelligendum eſt, lineas eſſe longitudine commenſurabiles, & lineas habere proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, idem eſſe.* Vt *quæcunque lineæ ſunt longitudine commenſurabiles, habeant etiam proportionem inter ſe quam numerus ad numerum. & contrà, quæ lineæ habent proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſint quoque longitudine commenſurabiles, ut patet ex 5. & 6. huius libri.* Similiter *illud conuertitur, lineas eſſe longitudine incommenſurabiles, & non habere proportionem quam numerus ad numerum, ut patet per 7 & 8 huius.* Itáque *intelligi debet quod dicitur in hoc theoremate, de lineis longitudine commenſurabilibus, & longitudine incōmenſurabilibus.* Sed *dicat aliquis, priuſquā* Euclides *docuit modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles, tractat de quadratis ipſarum, cum tamen contrà fieri oportere uideri poßit. prius enim exquiri debet de re aliqua an ſit, quàm quid ei accidat, conſyderetur.* Nos *uerò dicimus* Euclidem *quidem tradere modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles in theoremate* 11. *quod eſt in* Græco 10. *neque tamen peruerſe quicquam feciſſe.* Nam *hoc theoremate ſumit has* *lineas longitudine incommensurabiles ex hypothesi, neque amplius quicquam sibi demonstrãdum hoc quidem loco assumit, quàm ex illa hypothesi scilicet linearum longitudine incommensurabilium quadrata non habere proportionem, & cætera. Quod ubi uerum esse demonstrauerit, sat fecisse uidebitur. Ex hoc autem theoremate gradum sibi faciet ad inuestigationem linearum illarum in theoremate undecimo. Illud præterea intelligendum est quid uocibus illis significetur, habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod ut assequi possis, repetenda tibi sunt nõnulla theoremata, eorúmque demonstrationes ex arithmeticis suprà scriptis: atque ea maxime quæ agunt de numeris similibus superficialibus ex quibus est uicesimumsextum octaui. Numeri similes plani inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Similes uerò plani numeri sunt (ut est in principijs libri septimi) qui habent latera proportionalia. Latera uerò cuiusque numeri sunt, ex quibus inter se multiplicatis, singuli numeri producuntur. ex illo theoremate 26 octaui constat non solos numeros quadratos habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratum, sed eandem etiam proportionem habere numeros omnes similes superficiales inter se. Neque uerò idem est numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque hæc inter se conuerti possunt. Quãuis enim numeri quadrati habeant proportionem quã*

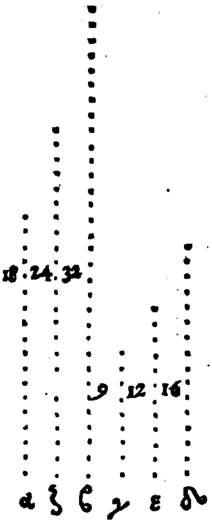
numerus

numerus quadratus ad quadratum, non ideo tamẽ omnes habentes proportionẽ quam quadratus ad quadratum sunt quadrati. Sunt enim similes superficiales & ijdem non quadrati, qui tamen proportionẽ habent quam quadratus ad quadratum, quanuis omnes quadrati sint similes superficiales. nam inter duos numeros quadratos incidit unus medius proportionalis, per 11.8. *Si uerò inter duos numeros incidat unus medius proportionalis, illi duo numeri sunt similes superficiales per* 20.8. *Dico præterea illud theorema* 26.8. *conuerti. Duo numeri habentes inter se proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum sunt similes superficiales: cuius rei illa demõstratio afferri potest.*

Sint duo numeri α, β habentes proportionem inter se quam quadratus ad quadratum. Illi duo numeri aut ambo simul sunt quadrati, aut ambo simul sunt nõ quadrati. (de illis autẽ non intelligimus hic quicquam dicere, quorum alter est quadratus, alter uerò non quadratus. tales enim non possunt habere proportionem quã numerus quadratus ad numerum quadratum, per 24.8. *à destructione consequẽtis.) Ergo si ambo sunt quadrati, sunt etiam similes superficiales, ut modo conclusum est. Si non sint quadrati, sint illi duo quadrati γ, δ, quorum proportionem habeant α, β. quia ergo α, β habent proportionem inter*

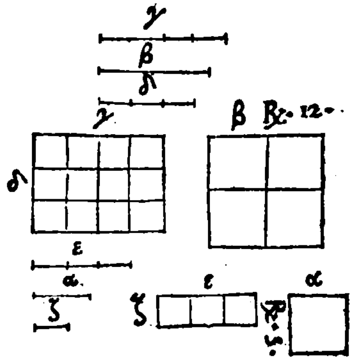


se quã γ, δ, & inter γ, δ incidit unus medius proportionalis puta ι, per 11. 8. *Ergo inter α, β incidet unus medius proportionalis, puta ζ per* 8. 8. *Sed si inter duos numeros nempe α, β unus medius incidat proportionalis, illi duo numeri sunt similes superficiales, per* 20. 8. *Ergo numeri α, β sunt similes superficiales. Duo ergo numeri habẽtes proportionẽ quã quadratus ad quadratum, sunt similes superficiales. Ex his intelligi potest numeros habentes proportionem inter se quam quadratus ad quadratum esse aut quadratos, aut similes planos id est superficiales. Similes uerò superficiales qui sint, intelligitur quidem ex definitione. Sed quibus notis statim agnosci possint numeri propositi, an similes superficiales sint nec ne, sic habetote. Primùm si inter duos numeros propositos non incidit medius proportionalis, illi duo numeri non sunt similes superficiales per* 18. 8. *à destructione consequentis. Quòd si incidit medius proportionalis, sunt illi similes superficiales per* 20. 8. *Deinde duo numeri similes superficiales multiplicatione alterius in alterum facta, producunt numerum quadratum, per primam* 9. *Ergo si non producunt quadratũ, non sunt similes superficiales. Quòd si fecerint quadratũ ex multiplicatione sui ipsius, sunt illi similes superficiales per* 2. 9. *Quo uerò facilius apprehendantur consequentes demonstrationes, & simul*



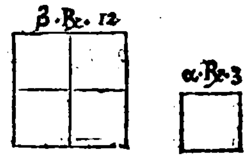
exemplum

exemplum adducamus eorum quæ diximus. Sit linea γ longa pedes quatuor. sit & alia linea δ longa & ipsa pedes tres, reperiatúrque media proportionalis per 13.6. quæ media proportionalis sit linea β. Ergo quadratum lineæ β erit æquale parallelogrãmo rectangulo quod fit ex lineis γ, δ, per 17. 6.

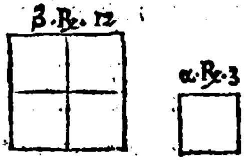


Quod quadratum continebit pedes 12, sicut & parallelogrammum ex lineis γ, δ. Sit etiam linea ε longa pedes 3, & linea ζ longa pedem 1, media proportionalis inter lineas ε, ζ, sit α. Quadratum lineæ α, erit pedum trium, sicut & parallelogrammum ex lineis ε, ζ. Dico *quadratum lineæ β quod est 12. pedum, habere proportionem ad quadratum lineæ α, quod est pedum triũ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ.* Nam *quemadmodũ se habet numerus 12. ad numerum 3, ita se habet quadratũ lineæ β, quod est 12 pedum, ad quadratũ lineæ α quod est 3.* Sed *numeri 12 & 3 sunt similes superficiales, quia latera numeri 12 quæ sunt 2. & 6, sunt proportionalia lateribus numeri 3, quæ sunt 1. & 3.* Ergo *quadratum lineæ β quod est 12, habebit eam proportionem ad quadratũ lineæ α, quod est 3, quam habet numerus similis superficialis ad similẽ superficialem.* Sed *numeri similes superficiales habent proportionẽ inter se quam numerus quadratus ad nu-*

merum quadratum qui ſunt 4 & 1, per 26. octaui. Ergo quadratũ lineæ ϐ quod eſt duodecim, habebit proportionem ad quadratum lineæ α quod eſt 3, quam numerus quadratus ad quadratum, eam ſcilicet quam quaternarius ad unitatem



quæ eſt quadrupla proportio. Nam quadratum maius quod eſt duodecim, continet quater quadratum minus quod eſt 3, quia latus quadrati duodecim quod eſt linea ϐ, eſt duplum ad latus quadrati 3 quod eſt linea α. Habet ergo linea ϐ ad lineã α proportionẽ quã numerus ad numerum. Ergo ſunt longitudine commenſurabiles per 5. huius, quæ eſt hypotheſis neceſſaria ad concluſionẽ eius paſsionis ſiue prædicati hoc theoremate comprehenſi, nempe quadrata talium linearum habere proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sic & numerus denominãs maiorem extremitatem proportionis lineæ ϐ ad lineã α, qui eſt 2. ſi in ſe ducatur reddet quadratum numerum nempe 4. ſimiliter & numerus denominans minorem extremitatẽ nempe 1, ſi ducatur in ſe, nihil amplius efficit quàm 1. quæ unitas eſt etiam potentia quadratus numerus. Ergo quadratum lineæ ϐ ad quadratum lineæ α habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, nempe quàm 4. ad 1. Ex hoc uides (quod modò dicebamus) non idem ſignificare numeros aliquos quadratos eſſe, & habere proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad quadratũ. Nam numeros

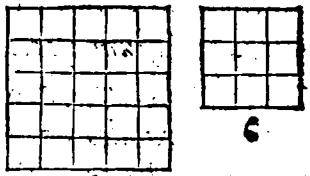


meros 12 & 3 quadratos nõ esse constat, cum tamẽ quadrata eos numeros continentia illam proportionem habeãt. Sed & latus quadrati 12, quanuis numero per se exprimi nequeat, ut dicas latus illud est longũ tot pedibus, qui pedes quadrati numero 12 complent totum illud quadratum: tamen ad aliud relatum siue comparatum, nempe ad latus quadrati 3, quod nec ipsum per se numero possis exprimere, ad latus inquam quadrati 3, proportionem duplam habet. Nam *quadratum quadruplum ad aliud quadratum (ut quadratum lineæ β quod est 12, ad quadratum lineæ α quod est 3) habet latus suum duplum ad latus alterius quadrati, per illud uniuersale corollarium 20. 6. Similes figuræ habent proportionem inter se suorum laterum relatiuorum duplicatam.* Quòd *si dicas latus quadrati 12. numerari posse, quia eius proportio quam habet ad latus quadrati 3 numeratur per binarium, cũ sit proportio dupla: illud primùm fac cogites, non esse id quod dicitur per se numerari aliquam magnitudinẽ, sed illius proportionem.* Magnitudo *autem illa scilicet latus quadrati 12 per se numeraretur, quãdo nulla habita ratione proportionis ipsius ad aliud, dicere possemus,* Quadrati *continẽtis pedes quadratos 12, latus est longum tot pedibus, quorum numerus in se ductus efficeret numerum illum 12. sed hoc fieri non potest, quia 12 non est numerus quadratus.* Sic *itaq; dices* Quatenus *quadratum illud 12 per se consyderatur, nulla habita* *ratione proportionis ad aliud, sed tantum ut est 12 pedum, non habet quidem latus per se numerabile, sed si conferatur ad aliud, puta ad quadratum 3 pedum, tũc dices, latus quadrati 12 est 2. latus uerò quadrati 3 est 1. sed hæc est denominatio ipsius proportionis quæ dupla dicitur. quæ proportio non potest esse aut consyderari in paucioribus terminis quàm duobus, cum sit relatio ad aliud, hoc est in prædicamento ad aliquid. Itaque binarius non est numerus pedum talium quales 12 sunt in ipso quadrato. Deinde si binarius esset latus quadrati 12, ut dicas illud latus esse duo, ex multiplicatione duorum in se, non efficeretur illud quadratum 12, sed quadratum aliud quod esset 4 pedum, quemadmodum ex binario numero in se ducto fit quadratus numerus quaternarius. Sed nec si dicas illud latus quadrati 12 numerari alio ullo numero, duxerisq́; numerum illum in seipsum, unquam efficitur duodenarius numerus. Cũ tamen omnes numeri denominantes latus cuiuscunque quadrati multiplicatione sui ipsius, illum ipsum numerum efficiant denominantem quadratum, cuius latera denominant, puta 2, multiplicatione sui in seipsum reddit 4. ternarius reddit 9. quaternarius reddit 16. & similiter cæteri omnes. Non igitur idem est aliquas magnitudines habere inter se proportionem quam numerus ad numerum, & numerari per se singulas ex illis nulla ratiòne habita proportionis, ut hic latus quadrati 12 per se quidem numerari nullo modo potest sed comparatum ad aliam magnitudinem, puta ad latus quadrati 3, numeratur illius proportio. Sic & latus ipsius*

quadrati

quadrati 3 & cæterarum omnium figurarũ quas geometræ quadratas uocant, quarum areæ tamen per numeros quadratos non designantur. Quod uerò dicimus, manifestum est ex uerbis ipsius Euclidis *in theorematibus 5, 6, 7, & 8 huius libri, cum ubique dicat commensurabiles & incommensurabiles magnitudines non quidem per se numerari; sed habere aut non habere proportionem quam numerus ad numerum. Quæ res non bene animaduersa uidetur plerisq; caussam erroris attulisse, ut ex sequentibus planum fiet.* N*unc uerò qui aggreßi sunt demonstrationem huius theorematis magis particularem aliquam demonstrationem nonnullis uideri possent attulisse, quàm uniuersalem.* Et *sane non deesse arbitror qui illorum dicta secus intelligant, cum existiment ab eis suppositas esse lineas quasdam non tam longitudine commensurabiles, quales in theoremate supponuntur esse, quàm numero certo singillatim numerabiles.* It*aque non intelligentes, illud de demonstrationibus illorum dicere potuerunt: cũ ea ratione credidissent à se conclusum illud uniuersale quod est in hoc theoremate* Euclidis, *Quadrata descripta ex lineis longitudine commensurabilibus habere proportionẽ inter se, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: illud particulare tantum concluserunt, Quadrata descripta ex lineis numero certo per se numerabilibus habere proportionem &c. Quod tamen aliter est, & demonstrationes illorum rectæ sunt, & proposito theoremati conuenientes.* T*antum pictura figurarum quas græcus codex habet, posset ambi-*

guitatis aliquid afferre. Nam ita pinguntur quadrata, & describuntur certis areolis, ut earũ numerus quadrato numero denominetur.

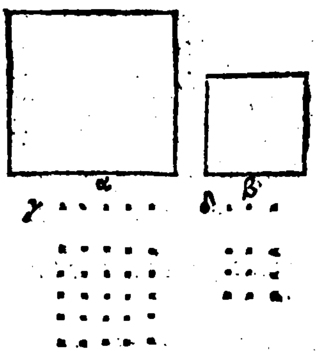


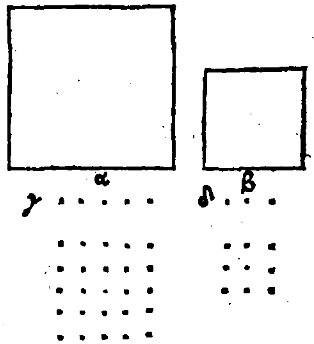
α β

Ex quo uideri posset lineas α, β, quæ describunt ipsa quadrata, oportere esse numero aliquo per se numerabiles, ut linea α sit pedum 5, & linea β pedum 3, ueluti pictura ipsa refert hîc. Quod tamen non supponit Euclides, sed unum illud supponit & requirit eas esse longitudine cõmensurabiles, ut in superiori exẽplo de quadratis duobus, quorum alterum spatium totum est 12, alterũ uerò est 3. Nam quanuis latera ipsorum non sint numero aliquo certo per se numerabilia, sunt tamen ipsa eadem longitudine cõmẽsurabilia. Præterea hæc pictura quadratorum α, β per areolas distinctorum illum errorem efficere posset, ut quis existimet idem esse numeros duos quadratos esse, & habere proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerũ. nam numerus areolarum in quadrato α, est numerus quadratus, nempe 25 productus ex radice 5, quæ est longitudo ipsius lineæ α. Similiter numerus areolarum quadrati β est quadratus, nempe 9, & ipse productus ex suo latere 3, longitudine inquã ipsius lineæ β. Nos uerò nuper ostẽdimus aliud esse numeros quadratos dici, & habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaque quantũ ad illas areolas attinet contentas maiore quadrato lineæ α, quæ sunt numero 25, exprimunt numerum illum quadratum 25, qui effici-

tur

tur ex numero 5 in se ducto. qui numerus 5 est maior extremitas proportionis inter 5 & 3, quæ est proportio linearum α, β. Hæc autẽ proportio, nempe numeri 5 ad 3 facit ut lineæ ipsæ α, β sint inter se longitudine commensurabiles per 6 huius. Idem dices de minoris quadrati areolis. Neque necesse est intelligere illas areolas quadratas esse, aut pedes aut passus quadratos conficiẽtes ipsa quadrata, quanuis tales esse possunt, si modò latera ipsorum quadratorũ sint tot pedibus longa, nempe 5 aut 3. Omnino tamen necesse est numeros ambos exprimentes numerum pedum aut passuum quadratorũ ipsis quadratis comprehensorũ esse simul aut quadratos, ut in his figuris quadratis linearum α, ϲ: aut ambos esse similes superficiales, ut in superioribus quadratis quæ erant 12, et 3. de quibus numeris constat ex antedictis eos esse similes superficiales, itáq; habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaq; potes pingenda tibi proponere ipsa quadrata linearum α, β, ut nullam distinctionem areolarum in se recipiãt, sintq; quadrata singula plane uacua, solisque quatuor lineis æqualibus cõtẽta. quod ut intelligatur, demonstrationes ipsas explicabimus. Sint duæ lineæ α, β longitudine commẽsurabiles. Dico quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β habere proportionẽ quã quadratus numerus ad quadra-



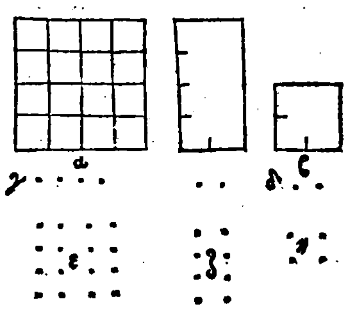


tum numerum. Cum enim commensurabilis sit longitudine linea α lineæ β. Ergo α ad β habet proportionẽ quã numerus ad numerum, per 5. huius. habeat itaque proportionem quã numerus γ ad δ. Cũ igitur sit quemadmodum linea α ad β, ita γ numerus ad δ numerum: cumq; proportio quadrati quidem lineæ α ad quadratum lineæ β sit proportio cõtinens duplicatam proportionem lineæ α ad lineam β, (similes enim figuræ sunt in duplicata proportione suorum laterum relatiuorum, per primum corollariũ 20. 6.) itidem cum proportio numeri quadrati, qui producitur à radice γ, ad quadratum numerum productum à radice δ sit proportio duplicata numeri γ, ad numerũ δ per secundum partem 11. 8: cúmque unius & eiusdẽ proportionis, puta quæ est lineæ α ad lineam β, uel numeri γ ad numerum δ, proportiones æque multiplices, nempe quadrati lineæ α ad quadratum lineæ β, & numeri quadrati producti à radice γ ad numerum quadratum productum à radice δ, sint inter se æquales: est igitur sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita numerus quadratus productus à radice γ, ad numerum quadratum productum à radice δ.

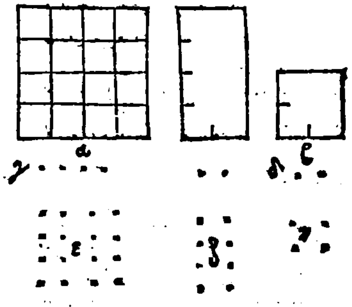
Aliter.

Sint α, β lineæ rectæ longitudine commensurabiles. Dico quadratum descriptum ab α ad quadratum descriptũ

ad



ad β habere proportionẽ quã numerus quadratus ad alium numerum quadratum. Quia enim linea α est longitudine cõmensurabilis lineæ β, habent inter se proportionẽ quam numerus ad numerum, per quintũ theorema huius libri. Habeant itaque proportionem eam quã *numerus γ ad numerum δ, & numerus γ se ipse multiplicans efficiat numerũ ε. idem porrò numerus γ multiplicans numerum δ reddat numerum ζ. numerus uerò δ ex sui ipsius multiplicatione producat numerum η. Cũ igitur γ ex sui ipsius multiplicatione reddiderit numerum ε: multiplicatus etiam per δ effecerit numerum ζ: est ergo ut numerus γ ad numerum δ, id est linea α ad lineam β, sic numerus ε ad numerum ζ per septimamdecimam septimi.* Sed *quemadmodum se habet linea α ad lineam β, sic se habet quadratũ lineæ α ad parallelogrammum descriptum ex linea α in lineam β ducta per primam sexti.* Quemadmodum *igitur quadratũ lineæ α ad parallelogrammum ex α, β, sic numerus ε ad numerum ζ.* Rursus *quia numerus δ ex sui ipsius multiplicatione reddidit numerum η, multiplicatus uerò idẽ δ in γ produxit numerum ζ: est igitur quemadmodum γ ad δ hoc est quemadmodum linea α ad lineam β, sic numerus ζ ad numerum η per eandem septimam decimam septimi.* Sed *quemadmodum linea α ad lineã β,*

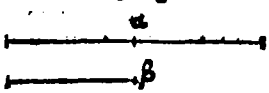


ita parallelogrãmũ ex lineis α,β, ad quadratũ lineæ β per primã sexti. Est igitur sicut parallelogrãmũ ex lineis α,β ad quadratum lineæ β, ita numerus ζ ad numerum κ.

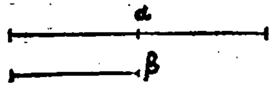
Sed modò cõclusum est sicut se habebat quadratum lineæ α ad parallelogrammum ex α,β, ita se habere numerum ι ad numerum ζ. Per æquam igitur proportionem erit quemadmodum quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sic numerus ι ad numerum κ. Vterque uerò illorum numerorũ est quadratus. Nam ι productus est ex multiplicatione γ in seipsum: κ uerò ex multiplicatione δ sui etiam ipsius in seipsum. Ergo quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ β habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod primo loco demonstrandũ erat. Priore demonstrationis modo usi sunt Theon & Campanus, posteriore etiam Theon aut quis alius. Ex his duabus nobis simplicior uidetur illa quam priore loco retulimus. Vacua itaque pingi possunt quadrata quæ describuntur à lineis longitudine commensurabilibus, modò constet tales esse suppositiones, quales accipiuntur in theoremate, lineas scilicet esse longitudine commensurabiles. tunc enim in uniuersum illud uerum erit, quotquot pedes aut passus quadrati fuerint in illis figuris quadratis, semper numerabuntur à numeris habentibus

proportionem

proportionem inter ſe quã quadratus numerus ad numerum. Sed quia perobſcurus hic locus totus uideri ſolet, non alienum exiſtimauimus noſtram quoque demonſtrationẽ apponere, ſi forte iuuare poſsimus, quod cupimus quidem, & certe confidimus. Sint lineæ duæ longitudine commenſurabiles α, β. dico quadrata earũ &c. Cum enim lineæ α, β ſint longitudine commenſurabiles, habebunt proportionem inter ſe quam numerus ad numerum per 5. huius. habeat igitur α ad β proportionẽ duplam, quæ



eſt quam habet numerus ad numerũ, puta 4 ad 2, & 6 ad 3, & plerique alij: reperianturque minimi numeri tres continuè proportionales in proportione dupla per 2. 8, ſintq́; illi 4, 2, 1. ergo per corollarium eiuſdem 2. 8, numeri 4 & 1 erunt quadrati. Nam ſicut 4 eſt quadratus ex 2 in ſe multiplicato productus, ita 1 eſt etiam numerus quadratus. fit enim ex eadem unitate in ſeipſam multiplicata. Dico præterea hos numeros quadratos illos eſſe, quorum proportionem habent inter ſe quadrata linearum α, β. Nam ſicut numerus 4 ad numerum 2, ita ſe habet linea α, ad lineam β. Vtrobiq; enim eſt dupla proportio per ſuppoſitionem. Sed quemadmodum ſe habet linea α ad lineam β, ita ſe habet quadratum lineæ α ad parallelogrammum, quod fit ex ductu lineæ α in lineam β, per primam ſexti. Ergo ſicut ſe habet numerus 4 ad 2, ita ſe habebit quadratum lineæ α ad parallelogrammum productum ex α & β. Itidem ſicut ſe habet numerus 2 ad 1, ita ſe habet linea α ad li-



neam β. utrobiq; enim etiã est dupla proportio per supositionẽ. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β per eandem primam sexti. Ergo *sicut se habet numerus 2. ad 1, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β.* Ergo *per definitionẽ æquæ proportionalitatis, & per 22.5 erit quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut numerus 4 ad 1. qui quadrati sunt. Illud ergo uerum est uniuersaliter, Quadrata descripta ex lineis longitudine commẽsurabilibus, habere proportionẽ inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quẽcunque numerum areolarum siue spatiorum intra se capiant illa quadrata: semper tamen necesse erit numeros ab illis contentos esse aut quadratos: aut si quadrati non erũt, (neque enim semper necesse est tales esse) similes saltem superficiales esse omnino necesse est. Porrò secundæ partis huius theorematis quæ est conuersa prioris illa est demonstratio. Sit quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus productus à γ ad quadratum productũ ex δ.* Dico *lineas α, β esse longitudine commensurabiles.* Nam *proportio quadrati α ad quadratum β est duplicata proportio lineæ α ad lineam β, per 20.6. Similiter proportio numeri quadrati producti ex γ ad quadratum productum ex δ est duplicata proportio ipsius numeri γ ad numerum δ, per 11.8.* Igitur *per 15.5, quemadmodum linea α ad lineã β,*

sic

sic numerus γ ad numerum δ. Commensurabilis est ergo longitudine linea α lineæ β per 6 huius libri. Tertiam uerò partem theorematis demonstrare non est difficile per secundum syllogismum hypotheticum, quem à destructione consequentis uocant. Sit linea α incommẽsurabilis longitudine lineæ β: quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β non habebit proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Nam si cõtradicatur, sequitur statim per secũdam partem huius theorematis, illa quadrata habere latera longitudine commensurabilia, quod est contrarium his quæ supposita sunt. Sic enim essent lineæ α, β, & commensurabiles & incommẽsurabiles longitudine, quod est impossibile. Simili ratione postrema pars huius theorematis demonstratur. Nam si quadrata inter se proportionẽ non habent quam quadratus numerus ad quadratum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia. Si contradicatur, continuo sequitur per primam partem huius theorematis, illa quadrata habere proportionem inter se quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quod est contrarium suppositioni.

Corollarium.

Ex quibus ita demonstratis, manifestũ illud est, lineas longitudine commensurabiles, omnino potentia quoq; cõmensurabiles esse. Quæ uerò sunt potentia commensurabiles, non omnino longitudine quoque commensurabiles esse. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino potentia etiam incommensurabiles esse. Quæ uerò potentia incommensurabiles sunt, omnino *longitudine quoque incommensurabiles esse. Cum enim quadrata linearum longitudine commensurabiliũ proportionem eam inter se habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ea uerò quæ proportionem habeant quadrati numeri ad quadratum numerum, simpliciter etiam habeát proportionem quam numerus ad numerum. & quæ proportionẽ habẽt quã numerus ad numerum, sint commẽsurabilia per 6 huius, sequitur omnino lineas longitudine commensurabiles non tantùm esse longitudine commensurabiles, sed etiã esse potentia.* Huius *probatio pendet ex prima parte theorematis.* R*ursus quia quadrata quædam sunt quæ non habẽt proportionem eam inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, habẽtia tamẽ ipsa proportionem eam simpliciter quam numerus ad numerum, latera quidem eorum sunt potẽtia commensurabilia, quia describunt quadrata habẽtia proportionem quam numerus simpliciter ad numerum, itáque commensurabilia per 6 huius: latera uerò ipsa inter se sunt longitudine incommensurabilia, per postremam partem theorematis.* V*erum est igitur lineas potentia commensurabiles nõ statim esse longitudine etiã commensurabiles.* H*ac eadẽ ratione probatur & illud tertium corollarij membrum, lineas longitudine incõmensurabiles non statim etiam esse potentia incommensurabiles.* P*ossunt enim esse longitudine quidem incommensurabiles, potentia tamen commensurabiles, ut in quadratis quæ habent quidem proportionem inter se quam numerus ad numerum, sed non quam numerus*

quadratus

quadratus ad numerum quadratum. Quartum uero probatur per secundum syllogismum hypotheticum à destructione consequentis, lineas potentia incommensurabiles, longitudine quoque incommensurabiles esse. N*am si dicas eas esse longitudine commensurabiles, sequitur esse ipsas quoque potentia cõmensurabiles, quod est contra suppositionem.* N*am positæ sunt incommensurabiles longitudine.* R*esolutio autẽ eius demonstrationis quam attulimus illa est.* O*mnia quadrata habentia proportionem inter se quam extremi trium numerorum minimorum suæ proportionis continuæ proportionalium, habẽt proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* S*ed quadrata duarũ linearum longitudine commensurabilium sunt huiusmodi.* E*rgo quadrata duarum linearũ longitudine commensurabilium habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum.* M*aior patet ex corollario* 2.8.M*inor patet ex* 22.5.

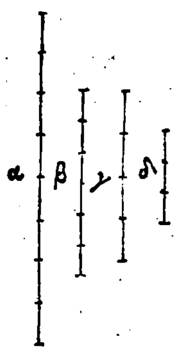
L*emma*.

D*emonstratum est in arithmeticis theoremate* 26.8. *similes planos numeros habere proportionem inter se quã numerus quadratus ad numerum quadratum.* C*onuersum uerò theorema, numeros habentes proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum esse similes planos, non quidem demonstratur in libris arithmeticis, sed est à nobis in præcedenti theoremate libri huius demonstratum.* V*nde manifestum est numeros qui non sunt similes plani, id est non habentes latera inter se proportionalia, non* *habere etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Eam enim proportionẽ si inter se haberent, sequeretur simul eos esse similes superficiales. cuius contrarium est positum, eos inquam non esse similes planos. Ergo numeri non similes superficiales non habent inter se proportionem eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Antequam attingamus theorema quod est decimo loco positum in hoc libro, illud omnino faciẽdum est, ut ei præponamus illud quod uulgo proximum locum tenet, scilicet undecimum. Aliter enim si fecerimus, demonstratio illius theorematis quod decimo loco scribi diximus, non procederet à priori, ut patebit in explicatione illius. Itáque Campanus fieri oportere recte indicauit, dum situm utriusque theorematis inuerteret.

Decimum Theorema.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, prima uerò secundæ fuerit commensurabilis, tertia quoque quartæ commensurabilis erit. Quòd si prima secũdæ fuerit incommẽsurabilis, tettia quoq; quartæ incommensurabilis erit.



Sint quatuor magnitudines proportionales α, β, γ, δ. ut α ad β, sic γ ad δ. Sitq́; α commensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse commensurabilem magnitudini δ. Cum enim α sit commensurabilis β, Ergo α habebit proportio-

nem

nem ad β quam numerus ad numerum, per 5 huius. Sed ex suppositione est sicut α ad β, sic γ ad δ. Ergo γ ad δ habebit etiam proportionem quam numerus ad numerum. Ergo commensurabilis erit magnitudo γ magnitudini δ per 6 huius. Rursus sit α incommensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse incommensurabilem δ. Cum enim α sit incommensurabile β, igitur α non habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum per 7 huius. Est autem sicut α ad β, ita γ ad δ. Ergo neque γ ad δ proportionem habebit quam numerus ad numerum. Incommensurabilis est igitur γ magnitudini δ per 8 huius. Si itaque quatuor magnitudines & cætera.

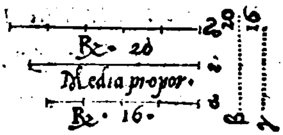
Corollarium.

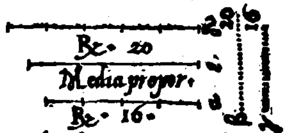
Si fuerint quatuor lineæ proportionales, fuerintque duæ priores, aut duæ posteriores inter se cõmensurabiles potentia tantum, cæteræ quoque duæ erunt potentia tantum cõmensurabiles. hoc probatur per 22.6, & per hoc theorema 10. quo corollario utitur demonstrator in sequentibus theorematibus 28.29. & alijs.

Vndecimum Theorema.

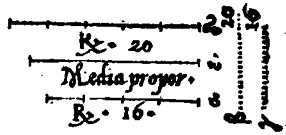
Propositæ lineæ rectæ (quam ῥητὴν uocari diximus) reperire duas lineas rectas incommensurabiles, hanc quidẽ longitudine tantum, illam uerò non longitudine tantum, sed etiam potentia incommensurabilem.

Sit linea recta proposita α, reperiendæ sunt duæ lineæ incommensurabiles lineæ α, alia qui-





dem longitudine tantùm, alia uerò etiam potentia incommẽsurabilis. Afferantur numeri duo β, γ inter se rationem eam non habentes quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est, ne sint illi numeri similes plani: fiatque sicut numerus β ad numerum γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum alterius lineæ quæ sit δ. Quomodo uerò id fiat, didicimus per lemma illud positum in theoremate 6 huius libri. Commensurabile est igitur quadratũ lineæ α, quadrato lineæ δ per 6 huius libri. Et quia numerus β ad numerum γ non habet eam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum: neque etiam quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ δ habebit eam proportionem quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Ergo linea α erit incommensurabilis longitudine tantum lineæ δ per 9 huius libri. Sic itaq; reperta est prior linea, nempe δ incommensurabilis longitudine tantum lineæ propósitæ quæ est α. Rursus reperiatur media proportionalis inter α, δ quæ sit ε per 13. 6. Est itaque sicut linea α ad lineam δ, ita quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ ε per secundum corollarium 20. 6. Sed linea α est incommensurabilis longitudine lineæ δ, ut modò conclusum est. Ergo quadratum etiam lineæ α erit incommensurabile quadrato lineæ ε, per secundam partem postremi theorematis. Nec te impediat quod illud theorema 10 loquatur de magnitudinibus cõmensurabilibus & incõmensurabilibus. Lineæ enim quando consyderantur earum lõgitudines, ut sint longitudine



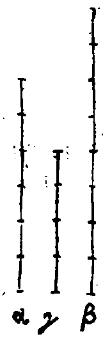
gitudine cõmensurabiles aut incommẽsurabiles lineæ, magnitudinis uoce comprehenduntur, & contrà, si consyderantur ut magnitudines, ut sint magnitudines commensurabiles siue incommensurabiles, de longitudinibus ipsarum linearum loqui intelligimus. neque tum quicquam de potentia lineæ intelligimus. Nam *magnitudo lineæ est ipsa longitudo, cum linea nihil aliud sit quàm longitudo sine latitudine.* De *quadratis uerò nihil est necesse ita loqui, quia magnitudo ipsius quadrati est ipsum quadratum. potentia enim quadrati non dicitur. Cum ergo quadratũ lineæ α sit incommensurabile quadrato lineæ γ, erit igitur per definitionem linearum incommensurabiliũ linea α incommẽsurabilis potentia lineæ γ.* Ergo *lineæ rectæ propositæ ueluti α quam ῥητὴν diximus, & ex qua mensuras cæterarum linearum accipi oportere dicebamus inter principia huius libri, reperta est linea α longitudine tantum incommensurabilis. Est itaque ea linea α ῥητὴ siue rationalis, longitudine tantum incommensurabilis, supple lineæ α quæ primò & ex suppositione rationalis est. Reperta est item linea γ eidem lineæ α incommensurabilis non longitudine tantum, sed etiam potentia. quæ linea γ per definitionem linearum incommensurabilium lineæ rationali erit irrationalis.* Nam *in uniuersum solet* Euclides *eas uocare ἀλόγους id est irrationales, quæ & longitudine & potentia sint incommensurabiles lineæ propositæ, & ex suppositione ῥητῇ id est rationali.* Hoc *au-*

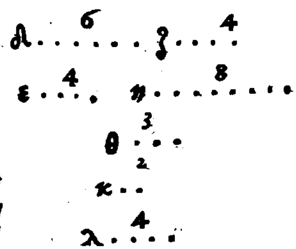
tem problema licet in theorema conuertere, quomodo diximus cætera conuerti posse.

Duodecimum Theorema.

Magnitudines quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, inter se quoq; sunt cõmẽsurabiles.

Vtraque magnitudo α, β sit commensurabilis magnitudini γ. Dico magnitudines etiam α, β esse inter se commensurabiles. Nam cum α sit commensurabilis magnitudini γ. igitur α ad γ habebit proportionem quam numerus ad numerum habeat proportionem quam numerus δ ad numerum ε. Rursus cum β sit commensurabilis γ, igitur γ ad β habebit proportionẽ quam numerus ad numerum. habeat itaque quam numerus ζ ad numerum η. Sumantur minimi numeri continuati in proportionibus datis secundum 4.8. qui numeri sint θ, κ, λ. ut quæ sit proportio numeri δ ad numerum ε, eadẽ sit numeri θ ad numerum κ: quæ uerò proportio sit numeri ζ ad numerum η, eadẽ sit numeri κ ad numerũ λ. Cum igitur sit sicut α ad γ, ita δ ad ε: sitq; δ ad ε sicut θ ad κ: est itaq; ut α ad γ, sic numerus θ ad numerũ κ. Itẽ cũ sit ut γ ad β, sic ζ ad η: sitq; sicut ζ ad η, ita κ ad λ. Ergo sicut γ ad β, ita κ ad λ. sed modò probatũ est, sicut erat α ad γ, ita θ ad κ. Per æquã igitur proportionẽ





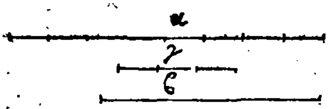
α, γ, β.
θ, κ, λ.

sicut

ſicut α ad β, ita numerus ϑ ad numerum λ. Ergo per 6 huius libri, magnitudo α erit commenſurabilis magnitudini β. ergo magnitudines quæ eidem ſunt commenſurabiles & cætera.

Decimumtertium Theorema.

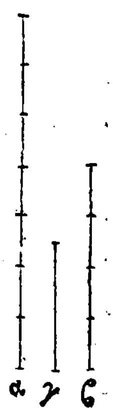
Si ex duabus magnitudinibus hæc quidem commenſurabilis ſit tertiæ magnitudini, illa uerò eidem incommenſurabilis, incõmenſurabiles ſunt illæ duæ magnitudines.



Sint duæ magnitudines α, β. porrò ſit tertia magnitudo γ: ſitq; α commenſurabilis ipſi γ: ſit etiam β incommenſurabilis eidem γ. dico magnitudinem α eſſe incommenſurabilem ipſi β. Nam ſi α eſſet commenſurabilis ipſi β, cum ſit α commenſurabilis ipſi γ: ipſa quoque magnitudo β eſſet commenſurabilis magnitudini γ, per 12. cuius poſitum eſt contrarium.

Decimumquartum Theorema.

Si duarum magnitudinum cõmenſurabilium altera fuerit incõmenſurabilis magnitudini alteri cuipiam tertiæ, reliqua quoque magnitudo eidem tertiæ incõmenſurabilis erit.

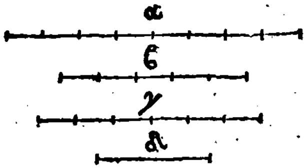


Sint duæ magnitudines commẽſurabiles α, β: altera uero ipſarum, nempe α alteri cuipiã quæ γ ſit, incommenſurabilis eſto. dico reliquam quoque magnitudinem β eſſe incommen-

ſurabilem ipſi γ. Nam ſi β eſſet commenſurabilis γ, cum etiam α ſit commenſurabilis β: ipſa quoque magnitudo α magnitudini γ erit commenſurabilis, per præcedens theorema. Sed poſitum eſt eas eſſe incommenſurabiles: quod eſt factu impoßibile. Non ergo erit commenſurabilis β ipſi γ. ergo incommēſurabilis. Si duarum ergo magnitudinum &c.

Corollarium.

Quæ ſunt commenſurabilia incommēſurabilibus, ſunt inter ſe incommenſurabilia. Sint magnitudines, α, β incommēſurabiles: ſit & magnitudo γ cōmenſurabilis ipſi α: ſit item magnitudo δ cōmenſurabilis ipſi β. dico γ, δ eſſe inter ſe incommenſurabiles.

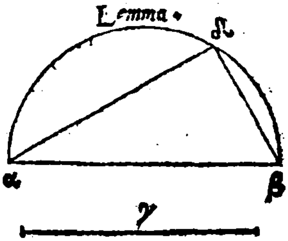


Nam α, γ ſunt commenſurabiles, ex quibus α eſt incommenſurabilis ipſi β. Ergo per hoc theorema 14. γ, β ſunt incommenſurabiles. Sed β, δ ſunt commenſurabiles. ergo per hoc ipſum theorema, aut per 13, γ, δ ſunt inter ſe incommenſurabiles. hoc autē corollario ſæpe utitur Theon, *ut in 23, 27, 38, & alijs.*

Lemma.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quanto plus poteſt maior q̃ minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ α β, & γ, quarum maior ſit α β, inueniēdū eſt quanto plus poſſit linea α β, quàm γ. Deſcribatur ſuper lineā α β ſemicirculus α δ β, & intra eum uſque



ad

ad ipsius semicirculi circunferentiam collocetur linea recta α Λ æqualis ipsi γ per primam quarti, & cõiungãtur puncta Λ, Β linea ducta, quæ sit Λ Β. Cõstat sane angulum α Λ Β rectum esse per 31.3. præterea lineam α Β posse plus quàm linea α Λ, quæ est æqualis ipsi γ: tantóque plus posse quantum est quadratum lineæ Λ Β, per 47.1. Similiter quoq; duabus datis rectis, linea utrãque potens reperietur hac ratione. Sint duæ datæ recta α Λ, Λ Β, inueniendáq; proponatur linea quæ utrãque posit. applicentur inter se eo situ quo angulum rectum conficiãt, qui sit α Λ Β, & ducatur linea à puncto α in punctum Β. constat item lineam α Β esse eam quam quærimus potentẽ quantũ illæ ambæ α Λ, Λ Β, per 47.1.

Decimumquintum Theorema.

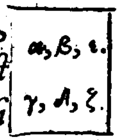
Si quatuor rectæ proportionales fuerint, posit autem prima plusquam secunda tanto quãtum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine: tertia quoque poterit plusquam quarta tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quòd si prima posit plusquam secunda quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: tertia quoque poterit plusquam quarta quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.

Sint quatuor lineæ rectæ proportionales α, Β, γ, Λ: sicut α ad Β, ita γ ad Λ. posit autem α plusquam Β tanto quãtum est quadratum lineæ ε: positq; γ plusquam Λ quadrato lineæ ζ. Dico si α fuerit commensurabilis longitudine li-

neæ ι, erit etiam γ commensurabilis longitudine lineæ ζ. sin autem α incommensurabilis longitudine fuerit lineæ ι, erit similiter γ incommensurabilis longitudine lineæ ζ. Ex eo enim quod est sicut α ad β, ita γ ad δ: erit etiam ut quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ

per 22.6. Sed ex suppositione quadrato lineæ α æqualia sunt quadrata linearum β, ι: quadrato uero lineæ γ æqualia sunt quadrata linearũ δ, ζ. Est igitur sicut proportio quadratorum earum linearum β, ι ad quadratũ lineæ β: ita proportio quadratorum duarum linearum δ ζ, ad quadratum lineæ δ. Per disiunctã igitur proportionalitatem sicut quadratum lineæ ι ad quadratũ lineæ β, ita quadratum lineæ ζ ad quadratum lineæ δ.

Est itaque ueluti ι ad β, sic ζ ad δ, per secundam partẽ 22.6. Per cõtrariam ergo proportionem, sicut β ad ι, ita δ ad ζ. Erat autem ex suppositione sicut α ad β, ita γ ad δ. Per æquam igitur proportionem est ut α ad ι, ita γ ad ζ. Itaque per decimam huius, si α est commensurabilis longitudine ipsi ι, erit quoque γ commensurabilis longitudine ipsi ζ. Si uerò incommensurabilis fuerit α ipsi ι, erit similiter incommensurabilis γ ipsi ζ. Ergo si quatuor rectæ proportionales &c.

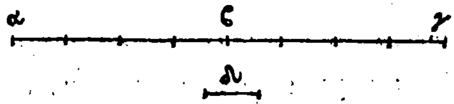


Decimumsextum Theorema.

Si duæ magnitudines commensurabiles componãtur, tota magnitudo composita singulis partibus commensurabilis

commenſurabilis erit. Quòd ſi tota magnitudo compoſita alterutri parti commenſurabilis fuerit, illæ duæ quoque partes commenſurabiles erunt.

Componantur duæ magnitudines commenſurabiles α β, β γ. Dico totam magnitudinem α γ ſingulis partibus α β, β γ cõ



menſurabilem eſſe. Cum enim α β & β γ ſint commẽſurabiles, metietur ipſas quædam magnitudo cõmunis ambarum menſura. Metiatur *igitur, ſitq; δ. Cum itaq; δ metiatur α β: β γ metietur quoque totam magnitudinem compoſitam α γ per communem cõceptionẽ. Quæcunque magnitudo metitur duas alias, metitur quoque compoſitam ex illis. Sed eadem δ metiebatur α β, β γ ex ſuppoſitione.* Ergo *δ metitur α β, β γ, & α γ.* Commenſu*rabilis eſt itaque α γ utriq; magnitudini α β, & β γ.* Sit *præterea α γ tota compoſita commenſurabilis alteri ex duabus α β, β γ: ſitq; illa α β.* Dico *duas illas α β, β γ eſſe commenſurabiles.* Nam *cum α γ & α β ſint commenſurabiles, metiatur ipſas communis quædam menſura: ſit autem illa magnitudo δ. Cum itaq; δ metiatur α β & α γ, reliquam quoque magnitudinem β γ metietur magnitudo δ per illam communem conceptionem. Quicquid metitur totũ, & detractum metitur & reliquũ. ſed eadem δ metiebatur magnitudinem α β ex ſuppoſitione.* Ergo *δ metitur utranque α β, & β γ.* Commenſu*rabiles itaque ſunt α β, β γ. itaq; ambæ partes theore-*

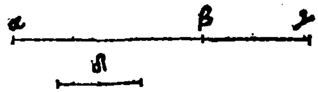
matis ueræ. **Corollarium.**

Si tota magnitudo fuerit commensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus commẽsurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti $\alpha\gamma$ est commensurabilis magnitudini $\beta\gamma$, ergo per secundam partem huius theorematis 16, magnitudines $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sunt commensurabiles. ergo per priorem partem eiusdem theorematis magnitudo $\alpha\gamma$ erit cõmensurabilis singulis $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Hoc *corollario utitur* Theon *in demonstratione* 18, & *aliorũ theorematum. omissum tamen est* Euclidi, *quia facile uidebatur ut cætera ferè corollaria.*

Decimumseptimum Theorema.

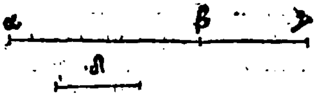
Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, ipsa quoq; tota magnitudo singulis partibus componentibus incommensurabilis erit. Quòd si tota alteri parti incommẽsurabilis fuerit, illæ quoque primæ magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Di*co totã magnitudinem $\alpha\gamma$, utricunq; magnitudini $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ incõmensurabilem fore.* Q*uòd si negetur incommensurabiles esse $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, metietur ipsas quædam magnitudo. metiatur itaque, ea quæ sit δ si fieri potest. Cum igitur δ metiatur per se $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, metietur similiter reliquã magnitudinem $\beta\gamma$: sed per se eadẽ δ metiebatur $\gamma\alpha$.* Ergo



$\alpha\beta$,

α β, β γ sunt commensurabiles. Sed ex suppositione erãt incõmensurabiles: fieri ergo nõ potest ut γ α, α β sint cõmensurabiles: sunt itaq; incõmensurabiles. Eadem uia demonstrari potest magnitudines α γ, γ β esse incommensurabiles. Ergo α γ singulis magnitudinibus α β, β γ est incommensurabilis.



Rursus α γ alteri magnitudini, nempe ipsi α ε, sit incõmensurabilis. dico etiam α β, β γ esse incommensurabiles. Nam si commẽsurabiles fuerint, metietur ipsas magnitudo quædam. metiatur, sitq; δ. Cum igitur δ metiatur α β, β γ, metietur quoque totam magnitudinem α γ. sed per te δ metiebatur α β: ergo δ metietur γ α, α ε. Cõmensurabiles itaq; sunt γ α, α β. Sed ex suppositione erant incommensurabiles. illud autem fieri nullo modo posse certum est, ut simul sint & commensurabiles & incommensurabiles. Nulla ergo magnitudo metietur α β, β γ. Ergo incommensurabiles sunt α β, β γ. Eadem quoque uia demonstrari potest illud idem, si posuerimus magnitudinem α γ esse incommensurabilem ipsi β γ. Ergo si duæ magnitudines incommensurabiles &c.

Corollarium.

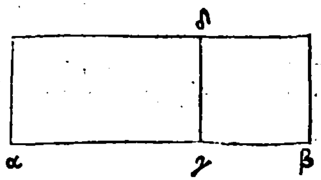
Si tota magnitudo fuerit incõmensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus incommẽsurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti α γ est incommensurabilis magnitudini β γ, ergo per secundam partem huius theorematis 17. magnitudines α β, β γ sunt incom-

mensurabiles. ergo per priorem partem eiusdẽ theorematis magnitudo α γ erit incommensurabilis singulis α β, β γ. hoc corollario utitur Theon in demonstratione 73 theorematis, & aliorum.

Lemma.

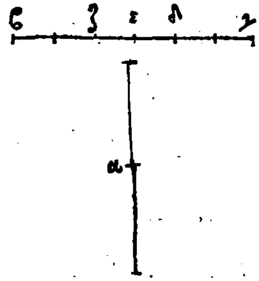
Si *parallelogrammum applicetur secundum lineam rectam, lineáque illa tanto plus excedat parallelogrammi latus, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi: illud parallelogrammũ sic applicatum, est æquale alteri parallelogrammo, quod fit ex sectionibus lineæ, quæ factæ sunt per applicationem ipsius parallelogrammi secundum lineam illam.*

Hoc *per se manifestum uideri potest, tamen quia reperitur inter cætera, demonstrationem eius afferemus.* Secũ*dum lineam rectam α β applicetur parallelogrammum α δ, cuius alterũ latus sit æquale illi portioni lineæ rectæ, quæ excurrit extra parallelogrammũ.* Dico *parallelogrammũ α δ esse æquale superficiei rectangulæ quæ fit ex α γ, γ β. quod per se patet, ut modò diximus.* Nam *quia quadratum est δ β, linea δ γ est æqualis lineæ β γ: estq́; parallelogrammum α δ, id quod est superficies rectangula α γ, γ β.* Ergo *si parallelogrammum applicetur &c.*

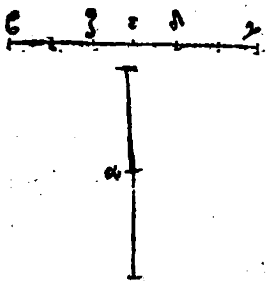


Decimumoctauum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati quod describitur à minore, æquale le parallelogrammum applicetur ſecundum ma iorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrãmi. Si præterea parallelogrammum ſui applicatione diuidat lineã illam in partes inter ſe cõmenſurabiles longitudine: illa maior linea tanto plus poteſt quàm minor, quantũ eſt quadratum lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi maior plus poſsit quàm minor, tanto quantum eſt quadratum lineæ ſibi cõmẽſurabilis longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur ſecundũ maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum eſt alterum latus ipſius parallelogrammi, parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe longitudine cõmenſurabiles.



Sint duæ rectæ inæquales α, β γ, quarum maior ſit β γ. Quartæ autem parti quadrati lineæ minoris α, hoc eſt ipſi quadrato quod deſcribitur à dimidia linea α, æquale parallelogrammum ſecundum lineã β γ, applicetur, quod relinquat ex linea β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipſius parallelogrãmi: ſitq; illud parallelogrammũ quod fiat ex β δ, δ γ: (hoc uerò quemadmodũ fiat, docet Campanus in fine demonſtrationis 13.) ſit quoque commen-



ſurabilis longitudine linea β δ ipſi lineæ δ γ. Dico lineā β γ plus poſſe quàm linea α, tanto quantum eſt quadratum lineæ cuiuſdā ſibi ipſi lineæ, dico β γ, longitudine cōmenſurabilis. Secetur enim linea β γ in duas partes æquales in puncto ε, ponatúrque lineam ε ζ æqualem eſſe lineæ δ ε: reliqua ergo linea δ γ erit æqualis lineæ β ζ. Cumq; linea recta β γ diuiſa ſit in partes æquales in puncto ε, in partes autem inæquales in puncto δ, ſuperficies rectangula contenta ex β δ, δ γ cum quadrato lineæ ε δ, æqualis eſt quadrato lineæ ε γ, per quintum theorema ſecundi libri. Itaque ſuperficies rectangula contenta ex β δ, δ γ quater ſumpta cū quadrato lineæ ε δ item quater ſumpto, eſt æqualis quadrato lineæ ε γ quater ſumpto. Nam æqualia quæ ſunt æqualiter multiplicata, ſimul æqualia ſunt. Sed ſuperficiei rectangulæ contentæ ex β δ, δ γ quater ſumptæ æquale eſt quadratū lineæ α ex ſuppoſitione. Nam parallelogrammum ex β δ, δ γ poſitum eſt æquale quartæ parti quadrati lineæ α. Quadrato uerò lineæ δ ε quater ſumpto æquale eſt quadratum lineæ δ ζ. Nam linea δ ζ eſt dupla ad lineam δ ε. quadrato autem lineæ ε γ quater ſumpto æquale eſt quadratū lineæ β γ. Similiter enim linea β γ dupla eſt ad lineam ε γ. Ergo quadrata linearū α, δ ζ ſunt æqualia quadrato lineæ β γ. Quocirca quadratum lineæ β γ maius eſt quàm quadratum lineæ α tanto quantum eſt quadratum lineæ δ ζ. Ergo maior linea β γ plus poteſt quàm

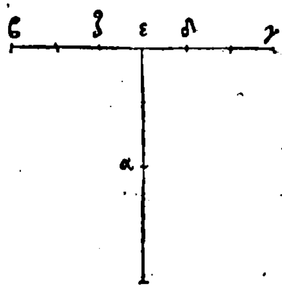
minor

minor α quadrato lineæ δζ. Nunc autem demonstrandum est lineam ϵγ esse longitudine commensurabilem ipsi lineæ δζ. Cum enim ex suppositione linea ϵδ sit longitudine commẽsurabilis ipsi δγ: ergo linea tota ϵγ erit longitudine commensurabilis lineæ δγ, per sextum decimum theorema huius libri. Atqui linea δγ est æqualis lineæ ϵζ. Ergo linea tota ϵγ est commensurabilis longitudine lineis ϵζ, γδ. Componantur illæ duæ lineæ ut unam lineam efficiant. Cum itaque linea tota βγ sit cõmensurabilis lõgitudine duabus lineis unius loco sumptis ϵζ, γδ. Ergo lineæ βζ, γδ unius loco sumptæ sunt cõmensurabiles longitudine ipsi lineæ ζδ, per secundam partẽ sextidecimi theorematis huius libri. Quare etiã residuæ lineæ ζδ commensurabilis longitudine erit tota linea βγ, per priorem partem eiusdem sextidecimi theorematis. hoc ipsum tamen probari potest per corollariũ à nobis positum post 16. Ergo linea βγ plus potest quàm lineà α quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Rursus linea βγ plus poßit quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi longitudine commẽsurabilis: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale secundum lineam βγ parallelogrammum applicetur, quod relinquat ex linea βγ portionem æqualem alteri ipsius lateri: sitq; superficies rectangula contẽta ex βδ, δγ, demonstrandum est lineas ϵδ, δγ esse inter se longitudine commensurabiles. Manentibus constructionibus & suppositionibus præcedentibus similiter demonstrabimus lineam ϵγ plus posse linea α tanto quantum est quadratum lineæ ζδ. Sed ex suppositione linea βγ plus *potest quàm linea α, tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Commensurabilis est itaque longitudine linea βγ lineæ ζδ. Ergo linea composita ex duabus βζ, δγ est commensurabilis longitudine lineæ ζδ, per secundã partem sextidecimi theorematis huius libri. Quocirca per 12 huius, siue per priorem partem sextidecimi theorematis, linea βγ est cõmensurabilis longitudine lineæ compositæ ex βζ, δγ. Sed tota linea composita ex βζ, δγ est commensurabilis longitudine ipsi δγ. nam βζ est æqualis ex antè dictis ipsi δγ. Ergo linea βγ est longitudine commensurabilis ipsi δγ, per 12 huius. Quare & linea βδ est longitudine commensurabilis lineæ δγ, per secundam partem sextidecimi theorematis. Ergo si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales &c. Quod demonstrandum erat.*

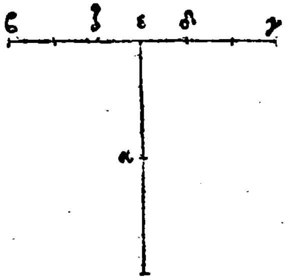
Decimumnonum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati lineę minoris æquale parallelogrammum secundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus eiusdem parallelogrammi: si parallelogrammum præterea sui applicatione diuidat lineam in partes inter se longitudine incommẽsurabiles, maior illa linea tanto plus potest quàm minor, quantũ est quadratum lineæ sibi maiori incõmensurabilis longitudine. Quòd si maior linea tanto plus posit quàm minor, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis

commenſurabilis ſibi longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur ſecundum maiorẽ, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrã-mi, quantum eſt alterum latus ipſius, parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe incommenſurabiles longitudine.

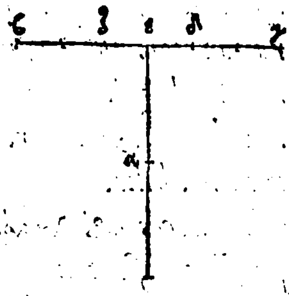


Sint duæ rectæ inæquales α, βγ, quarũ maior ſit βγ: quartæ autẽ parti quadrati minoris nempe α, æquale parallelogrammũ applicetur ſecundum lineã βγ, quod relinquat ex linea βγ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipſius parallelogrammi: ſitq́; illud parallelogrammum ex βδ, δγ: incommenſurabilis autem longitudine ſit βδ ipſi δγ. Dico lineam βγ poſſe plus quàm linea α tanto, quantum eſt quadratum lineæ incommenſurabilis ſibi longitudine. Sint primum eædem conſtructiones & ratiocinãdi uiæ, quæ in proximo theoremate. Similiter oſtendemus lineã βγ poſſe plus quàm linea α tanto, quantum eſt quadratum lineæ δζ. Reſtat ut demonſtremus lineam βγ eſſe incommenſurabilem longitudine ipſi δζ. Cum enim linea βδ ſit incommenſurabilis longitudine lineæ δγ ex ſuppoſitione, incommenſurabilis etiam longitudine erit linea βγ ipſi lineæ δγ, per 17 huius: ſed δγ eſt commenſurabilis ambabus lineis βζ, δγ ſimul compoſitis, quia δγ eſt



æqualis ipsi ε ζ. Ergo ε γ *est incommensurabilis ambabus* β ζ, δ γ *simul compositis, per* 14 *huius.* Ergo *per secundam partem septimidecimi theorematis huius libri linea composita ex* ε ζ, δ γ *simul & unius loco sumptis est incommẽsurabilis lineæ* ζ δ. Ergo *per priorem partẽ eiusdẽ septimidecimi theorematis linea* β γ *est incommensurabilis longitudine lineæ* ζ δ. Linea *igitur* β γ *potest plus quàm linea* α *tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine.* Rursus *linea* β γ *poßit plus linea* α *tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine: quartæ autem parti quadrati lineæ* α *æquale parallelogrammum applicetur secũdum lineam* β γ, *quod relinquat excurrentem portionem lineæ* β γ *æqualem alteri ipsius lateri: sitq́; illud parallelogrammum ex lineis* β δ, δ γ. Demonstrandum *nobis est illud lineam* β δ, *esse incommensurabilem longitudine lineæ* δ γ. Maneant *enim eædem constructiones & ratiocinandi uiæ: similiter etiam ostendemus lineam* β γ *posse plus quàm linea* α *quadrato lineæ* ζ δ. Primùm *ex suppositione linea* β γ *potest plusquam linea* α *tanto quantum est quadratum lineæ sibi incommensurabilis longitudine.* Ergo *linea* β γ *erit incommensurabilis longitudine lineæ* ζ δ. Itaque *linea composita ex* ε ζ, δ γ *& unius loco sumpta erit incommensurabilis longitudine lineæ* ζ δ, *per secundam partem septimidecimi theore-*

matis



matis libri huius. Quare & per primam partẽ eiusdẽ theorematis, linea βγ erit incommẽsurabilis longitudine lineæ compositæ ex βζ, δγ. Sed linea cõposita ex βζ, δγ est commensurabilis longitudine lineæ δγ, eò quia βζ est æqualis ipsi δγ ex anteprobatis. Itaque linea βγ est incommensurabilis longitudine ipsi δγ per 14 huius. Ergo per secundã partem eiusdem septimidecimi theorematis, linea βδ est incommensurabilis longitudine lineæ δγ. Quamobrem si fuerint duæ rectæ inæquales &c.

Lemma.

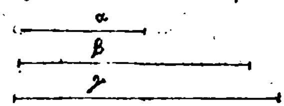
Cum sit demonstratum lineas longitudine commensurabiles omnino potentia quoque commensurabiles esse, eas uerò quæ potentia sunt commensurabiles non omnino longitudine quoque commensurabiles esse, sed esse posse & longitudine commensurabiles & incommensurabiles, constat si lineæ propositæ (quam ῥητὴν uocari diximus, eandémque rationalẽ à recentioribus) linea quædam fuerit commensurabilis longitudine, illam uocari debere rationalem, & commensurabilem non longitudine solum, sed etiam potentia. Nam lineæ longitudine commensurabiles, omnino potentia quoque commensurabiles sunt. Quod si propositæ lineæ, quam rationalem uocant, quædam fuerit linea commensurabilis potẽtia: siquidem & longitudine etiam cõmensurabilis ipsi fuerit, uocabitur illa rationalis, & commensurabilis ipsi *longitudine & potētia. Si uerò ipsi lineæ propositæ, quā rationalem uocant, linea quædam potentia commensurabilis, longitudine eidem fuerit incommensurabilis: uocabitur & illa rationalis, potentia tantum commensurabilis.*

Illæ duæ uoces πόκλυ χόλιον quæ sunt in exemplari impresso, non sunt in uetusto: & quod sequitur, continuata serie scribitur, addita particula γὰρ hoc modo, ἐντοῖς γὰρ, sic itaque dicemus· Rationales enim uocat Euclides (ut est in principijs huius libri) illas lineas quæ sunt lineæ propositæ quam ῥητὴν uocat, siue longitudine & potentia commensurabiles, siue potentia tantum. Sunt tamen & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incommensurabiles lineæ propositæ, id est τῇ ῥητῇ, siue dicas rationali, potentia tantum eidem commensurabiles, eoq; uocantur rationales & cōmensurabiles inter se ea ratione qua sunt rationales. sed & illæ eædem possunt esse cōmensurabiles inter se siue longitudine, & ideo potentia quoque, siue potentia tantum. Et quidē si fuerint inter se commensurabiles longitudine, uocabuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut tamen simul intelligatur potentia quoque cōmensurabiles esse. Quòd si potentia tantum inter se fuerint commensurabiles, uocabuntur & ipsæ rationales potentia tantum commensurabiles.

Corollarium.

Quod autem lineæ duæ siue plures rationales & commēsurabiles longitudine ipsi rationali sint inter se commēsurabiles longitudine, hinc cōstat. Nam cum sint rationales & longitudine commensurabiles ipsi primo rationali,

tionali, eæ autem magnitudines quæ sunt uni & eidem commensurabiles sint inter se commensurabiles, per 12 huius. Ergo *lineæ rationales ipsi primo rationali longitudine commensurabiles, sunt inter se quoque commensurabiles longitudine. Sed quantū ad eas attinet, quæ sunt rationales potentia tantum commensurabiles ipsi primo rationali, fieri omnino necesse est ut illæ quoque inter se sint potentia saltem cōmensurabiles.* Cum *enim quadrata earum sint rationalia, erunt commensurabilia quadrato lineæ propositæ quæ dicitur primo rationalis.* Itaque *per 12 huius ipsa quoque inter se erunt cōmensurabilia.* Ergo *lineæ eorum sunt inter se potentia saltem commensurabiles. Sed nihil uetat easdē esse præterea longitudine inter se commensurabiles. Sit enim linea α rationalis, sitq; linea β eidem lineæ α rationali potentia tantum commensurabilis,*

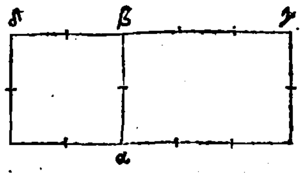


hoc est longitudine incommensurabilis eidē. sit præterea alia linea γ lineæ β longitudine commensurabilis (hoc enim esse posse constat ex principijs huius libri) per 14 huius, linea γ est incommensurabilis longitudine ipsi lineæ α: sed quadratum lineæ α est commensurabile quadrato lineæ β ex suppositione: quadratum item lineæ γ est commensurabile eidem quadrato lineæ β, per suppositionem. Ergo *per 12 huius, quadratum lineæ γ est commensurabile quadrato lineæ α.* Ergo *linea γ erit per definitionem rationalis, potentia tantum commensurabilis ipsi lineæ α, sicut & ipsa linea β.* Dantur *ergo duæ rationales potentia tantum commensurabiles ipsi ra-*

tionali, inter se uerò longitudine commensurabiles. Hîc *obiter repetendũ esse puto, quod antea diximus in diffinitione linearũ rationalium,* Campanũ, *ceteròsq; deinceps ab eo latinos geometras inuexisse illas uoces siue terminos, ut quasdam lineas uocarent rationales potentia tantum, quasdã uerò longitudine & potentia, quibus nunquam* Euclidem *usum esse reperies. hæ enim uoces longitudine & potentia nunquã referuntur ad rationalitatem aut irrationalitatem, sed semper ad commensurabilitatem, aut incommensurabilitatem linearum. Quæ peruersiones solent rerum per se difficilium etiam difficultatem & obscuritatem augere. Itaque te monitum iterum atque iterum uelim, ut principiorum id est simplicium terminorum simplicem uim diligenter intelligas & retineas, neque quicquam externum admiscendum existimes.*

Vigesimum Theorema.

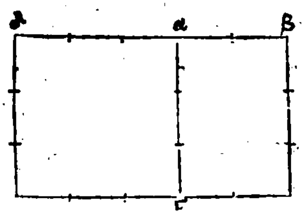
Superficies rectangula contenta ex lineis rectis rationalibus longitudine commensurabilibus secundum unum aliquem modum ex antedictis, rationalis est.



Nam ex lineis α β, β γ rationalibus longitudine commẽsurabilibus secundum unũ aliquem modum ex antedictis cõtineatur superficies rectãgula quæ sit α γ. dico superficiem α γ esse rationalẽ. Describatur enim à linea α β quadratum α δ: rationale est itaque

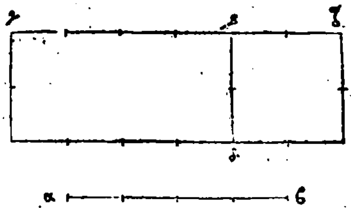
itaque quadratum illud α δ ex definitione. Cunque sit commensurabilis longitudine linea α β lineæ β γ, æqualisq; sit linea α β lineæ β δ, commensurabilis itaque longitudine erit linea β δ lineæ β γ. Est autē sicut linea ϛ δ ad lineam ϛ γ, ita quadratum δ α ad superficiē rectangulam α γ, per primam sexti. Sed modo conclusum est lineam β δ esse commensurabilem lineæ β γ. Ergo per decimam huius libri quadratum δ α est commensurabile superficiei rectangulæ α γ. Sed quadratum δ α est rationale: itaque per definitionem superficies α γ erit etiā rationalis. Ergo superficies rectangula cōtenta & cætera.

Sed & alia quadam descriptione placet idem demōstrare. Prior enim demonstratio quadratum minoris lineæ cōscripsit, nunc mutato casu demonstrationis quadratum maioris describamus. Sit superficies rectangula β γ contenta ex lineis rationalibus inæqualibus longitudine inter se commensurabilibus α β, α γ: sitque maior α γ. Describatur ex linea



α γ quadratum δ γ. dico parallelogrammum γ ϛ rationale esse. Nam linea α γ est commensurabilis longitudine lineæ α β ex suppositione: sed linea δ α est æqualis lineæ α γ. Ergo linea δ α est commensurabilis longitudine lineæ α β: sed quam proportionem habet δ α ad α β, eandem habet quadratum δ γ ad parallelogrammum γ β, per primam sexti. Ergo per 10 huius libri commensurabile est quadratum δ γ parallelogrāmo γ β. Quadratum autem δ γ rationale esse constat, quia est qua-

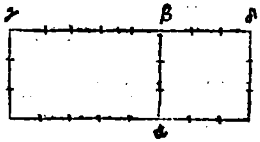
dratum lineæ rationalis, nempe α γ. Itaque per *definitionem, parallelogrammum etiam* γ β *erit rationale. Præterea cum demonstrationes illæ uideantur loqui de eo parallelogrammo quod fit ex duabus lineis, quarum altera sit ea proposita quam primo loco rationalem dicimus, unde diximus mensuras cæterarũ linearum ad illam comparatarum capi oportere, altera uerò sit eidẽ primo rationali commensurabilis longitudine, quæ est prima species linearum rationalium longitudine commensurabilium, alium casum afferendum puto de altera specie, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, ut demonstremus generalem huius theorematis ueritatem, neq; frustra in eo positum illud extitisse secundum unum aliquem modum ex antedictis.* Sit itaque linea primo rationalis α β: sit etiam parallelogrammum γ δ contentum ex lineis γ ε, ε δ rationalibus id est lineæ primo rationali α β commensurabilibus longitudine. Sint tamen illæ duæ lineæ γ ε, ε δ diuersæ & inæquales lineæ primo rationali α β. Dico parallelogrammũ γ δ esse rationale. Describatur quadratum lineæ ε δ, sitq; δ ζ. Primum constat lineas γ ε, ε δ esse inter se commensurabiles longitudine per 12 huius. Nam positum est utrãque esse longitudine commensurabilem ipsi α β. Sed ε δ est æqualis lineæ ε ζ. Ergo lineæ γ ε erit commensurabilis longitudine lineæ ε ζ. Sed quẽadmodum se habet linea γ ε ad lineã ε ζ, ita se habet parallelogrammum



rallelogrammum γ δ ad quadratū δ ζ, per primā sexti. Ergo per decimam huius parallelogrammum γ δ erit commensurabile quadrato δ ζ. Sed quadratum δ ζ est commensurabile quadrato lineæ α β, quia linea ι δ posita est cōmensurabilis longitudine lineæ α β, quæ est primo rationalis. Ergo per 12 huius, parallelogrammū γ δ est commensurabile quadrato lineæ α β. Sed quadratū lineæ α β est rationale per definitionem. Ergo per definitionem quoque figurarum rationalium parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Nunc restat alius casus tertiæ speciei, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, quæ sunt ipsi quidem lineæ primo rationali α β commensurabiles potentia tantum, itaque rationales tamen. inter se uerò longitudine commensurabiles sint ipsæ lineæ γ ι, ι δ, maneat itaque eadē constructio quæ in proximo casu modo lineæ γ ι, ι δ sint rationales potentia tantum commensurabiles ipsi α β: inter se uerò sint longitudine etiam commensurabiles. Dico sic quoque parallelogrammum γ δ esse rationale. Primo probabitur, sicut modo dictum est parallelogrāmum γ δ esse commēsurabile quadrato δ ζ: sed quadratum lineæ α β est commensurabile quadrato δ ζ. Ergo per 12 huius parallelogrammum γ δ erit commensurabile quadrato lineæ α β. sed quadratū lineæ α β est rationale. Ergo per definitionem parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Hunc autem casum notandum tibi memineris. Quum enim uentum erit ad 26 theorema, ad illius theorematis demonstrationem & intelligentiam illum tibi usui fore intelliges.

Vigeſimumprimum Theorema.

Si rationale ſecundum lineam rationalem applicetur, habebit alterum latus lineam rationalem & commenſurabilem longitudine lineæ, cui rationale parallelogrammum applicatur.

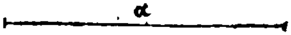


Hoc theorema eſt ueluti ἀντίςροφον præcedentis. Rationale *enim parallelogrammum α γ applicetur ſecundum lineam α β rationalẽ uno aliquo modo ex antedictis, ſiue ſit illa primo rationalis, ſiue alia ipſi primo rationali commenſurabilis, idq́; longitudine & potentia, uel potentia tãtum. his enim tribus modis dicitur linea rationalis.* Dico *lineam β γ eſſe rationalem & longitudine commenſurabilem ipſi lineæ α β.* Deſ*cribatur enim quadratum lineæ α β quod ſit α δ.* Rationale *eſt igitur quadratum α δ, ſed & parallelogrammum α γ eſt rationale per poſitionem.* Ergo *per definitionem rationaliũ quæ in ſe conuertitur, ſiue per* 12 *huius, commenſurabile eſt quadratum α δ parallelogrammo α γ.* E*ſt autem ſicut quadratum α δ ad parallelogrammũ α γ, ita linea δ β ad lineam β γ, per primam ſexti.* Itaq; *per decimam huius, linea δ β erit commenſurabilis lineæ β γ. ſed linea β δ, eſt æqualis lineæ β α, commenſurabilis eſt ergo linea α β, lineæ β γ.* Rationalis *autem eſt linea α β,* Rationalis *ergo erit & linea β γ, & commenſurabilis longitudine lineæ α β.* Ergo *ſi rationale ſecundum lineã rationalem &c.*

Lemma.

Linea

Lemma.

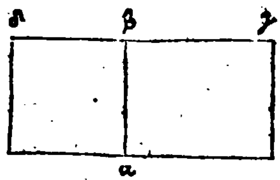


Linea potens superficiem irrationalem, est irrationalis. Possit enim linea α superficiem irrationalem, hoc est quadratum quod ab α describitur, æquale esto areæ irrationali. dico lineam α esse irrationalem. Nam si linea α esset rationalis, rationale quoque esset quadratum ab illa descriptum: (sic enim est positũ inter definitiones) sed ex positione est irrationale, irrationalis est ergo linea α. quod demonstrandum erat.

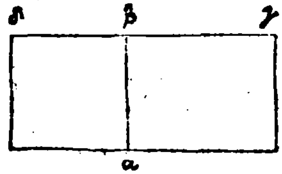
Hîc inseritur quoddam scholium, quod lemmatis inscriptionem habet, sed illud nihil aliud est quàm demõstratio quædam sequentis theorematis.

Vigesimumsecundum Theorema.

Superficies rectangula contenta duabus lineis rectis rationalibus potẽtia tantum cõmensurabilibus, irrationalis est. Linea autem quæ illam superficiem potest, irrationalis & ipsa est: uocetur uerò medialis.



Superficies enim rectãgula α γ comprehendatur à duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus, quæ sint α β, β γ. Dico superficiem illam esse irrationalem, & lineam quæ illam potest, irrationalem etiam esse: uocetur autem medialis. Describatur enim à linea α β quadratum α δ. rationale est itaq; quadratum α δ. Et quoniam incommẽsurabilis est longitudine linea α β lineæ β γ (nam ex ſuppoſitione ſunt illæ inter ſe potentia tantum commenſurabiles) æqualisq́; eſt linea α β, lineæ ϐ δ. incommenſurabilis longitudine ergo erit linea δ ϐ lineæ ϐ γ. Eſt autem ſicut linea δ ϐ ad lineã β γ, ita quadratum α δ ad parallelogrammum α γ, per primam ſexti. incommenſurabile. eſt ergo quadratum α δ parallelogrammo α γ per ſecundã partem decimi theorematis huius libri. Sed quadratũ δ α eſt rationale: irrationale eſt ergo parallelogrammum α γ. Quare & linea quæ illud parallelogrammũ α γ, hoc eſt ea quæ quadratum ipſi parallelogrammo æquale deſcribit, irrationalis erit per lemma poſtremum. Vocetur autem medialis ea ratione, quia quadratum quod ab ea deſcribitur, æquale eſt parallelogrammo quod comprehenditur à lineis α ϐ, β γ, itaque media ipſa proportionaliter intercidit inter illas lineas α ϐ, β γ per 17.6. quod demonſtrandum erat. Hæc autem μέση de qua hoc libro agitur, ſimpliciter μέση dicitur: illa uero cuius inuentionem tradidit lib. 6. theoremate 13. dicitur μέση ἀνάλογον. Neque omnis μέση ἀνάλογον eſt potens ſuperficiem irrationalẽ, ſed ea tantum quæ eſt media proportionalis inter duas lineas potentia tantum commenſurabiles. Campanus in propoſitione apud eum 19 addidit, dicitúrque ſuperficies medialis: quod tamẽ non eſt ita intelligendũ, ut omnis ſuperficies medialis contineatur ex duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽſurabilibus.

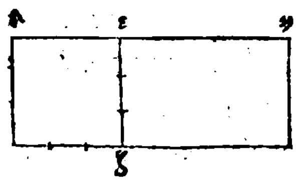


hoc

hoc enim refellitur per sequẽtia theoremata 26. & 29. ubi superficies medialis cõtineri dicitur ex duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. Itaque *superficies omnis rectãgula duabus rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehẽsa, medialis dicitur, sed non econuerso, ut omnis medialis superficies rectangula sit compræhensa duabus rectis rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus. est enim & medialis comprehensa duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. sed tamen in uniuersum superficies quam potest linea medialis est & ipsa medialis.*

Lemma.

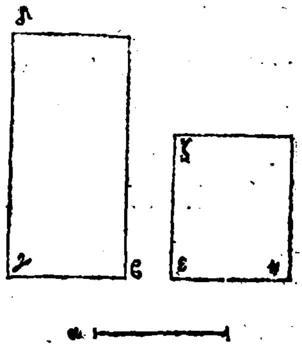
Si *sint duæ lineæ rectæ, erit sicut prior ad secundã, ita quadratum quod à priori describitur, ad parallelogrammum quod comprehenditur duabus illis rectis.* Hoc Lemma *nihil aliud affert quàm quod theorema primũ libri sexti.* Sint *duæ rectæ ζι, ικ.* Dico *sicut est linea ζι ad lineam ικ, ita quadratũ lineæ ζι ad parallelogrammum comprehensum ex ζι, ικ.* Describatur *enim quadratũ lineæ ιζ, sitq́; δζ, & compleatur parallelogrammum κζ.* Cum *igitur linea δι sit æqualis lineæ ιζ: sit autem sicut linea δι ad lineam ικ, ita quadratum δζ ad parallelogrammum ζκ per 1.6.* Ergo *sicut linea ιζ ad lineam ικ, ita quadratum δζ ad parallelogrammum ζκ.* Est *autem quadratum δζ, quadratum lineæ ιζ, parallelogrammum uerò ζκ. id quod comprehenditur dua-*



bus lineis ι ζ, ι κ. Est ergo sicut linea ι ζ ad lineam ι κ, ita quadratum lineæ ι ζ ad parallelogrammum comprehensum lineis duabus ζ ι, ι κ. Et econuerso sicut parallelogrammũ comprehensum duabus lineis κ ι, ι ζ ad quadratum lineæ ι ζ, ita linea κ ι ad lineam ι ζ.

Vigesimumtertium Theorema.

Quadrati lineæ medialis applicati secundum lineã rationalem, alterum latus est linea rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ secũdum quam a pplicatur.



Sit linea medialis α, rationalis uerò sit γ β: & quadrato lineæ α parallelogrammũ rectangulum æquale β δ applicetur secundum lineam β γ, cuius alterũ latus sit γ δ. Dico lineam γ δ esse rationalem & longitudine incommensurabilem lineæ β γ. Cum enim linea α sit medialis, potest parallelogrammum contentum ex lineis rationalibus potentia tantum commensurabilibus. possit itaque parallelogrammum rectangulum κ ζ: sed ex suppositione potest etiam parallelogrummum β δ. æquale est igitur parallelogrammum β δ parallelogrammo κ ζ. Sed & ambo parallelogramma sunt æqualium angulorum, quia sunt rectangula. Aequalium uerò & æquiangulorum parallelogrammorũ latera quæ sunt circa æquales angulos

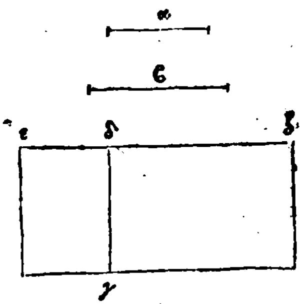
gulos reciprocam inter se proportionem habent per 14 sexti. proportionaliter ergo erit sicut linea ϐγ ad lineā ιϰ, ita linea ιζ ad lineam γδ. Est igitur sicut quadratū lineæ βγ ad quadratum lineæ ιϰ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ γδ, per 22 sexti. sed quadratū lineæ ϐγ est commēsurabile quadrato lineæ ιϰ: est enim utraque linea rationalis. commēsurabile ergo erit etiā quadratum lineæ ιζ quadrato lineæ γδ, per 10 huius. sed quadratum lineæ ιζ est rationale. ergo similiter rationale erit quadratum lineæ γδ. linea ergo γδ erit rationalis. Et quoniam linea ιζ est longitudine incommensurabilis lineæ ιϰ. nam illæ sunt potentia tantum inter se cōmensurabiles. Sicut autem linea ιζ ad lineā ιϰ, ita quadratum lineæ ιζ ad parallelogrammum ex ambabus lineis ιζ, ιϰ contentum per lemma proximum. incommensurabile est ergo quadratum lineæ ιζ parallelogrammo ex lineis ιζ, ιϰ per secundam partem decimi theorematis huius libri. Sed quadrato lineæ ιζ quadratum lineæ γδ est commensurabile: modò enim probatum est utrāque lineam esse rationalem. Ergo per 13 huius, quadratum lineæ γδ est incommensurabile parallelogrammo ex lineis ιζ, ιϰ. Sed parallelogrammum ex lineis γδ, γβ est æquale parallelogrammo ex lineis ιζ, ιϰ, ut modo probatum est. Ergo quadratum lineæ γδ est incommensurabile parallelogrāmo ex lineis γδ, γϐ. hæc uerò pars breuius concluditur per corollariū à nobis positū post 14 theorema. Sed sicut se habet quadratū lineæ γδ ad parallelogrammum ex lineis δγ, γϐ, ita se habet linea δγ ad lineam γβ per lemma proximum.

incommensurabilis longitudine est itaque linea δγ lineæ γβ. Rationalis est ergo linea γδ & longitudine incommensurabilis lineæ γβ. quod demonstrandum erat.

Hoc theorema est ἀντίστροφον proxime præcedentis. Vt uerò fieri poßit quod requirit hoc theorema, scilicet applicari quadratum lineæ medialis secundum lineam rationalem, reperienda est tertia linea proportionalis sicut docet 11. sexti, ita tamen ut linea rationalis sit prima, secunda sit linea medialis quæ potest quadratum applicandum. Nam superficies quæ fit ex prima & tertia est æqualis quadrato mediæ per 17 sexti.

Vigesimumquartum Theorema.

Linea recta mediali commẽsurabilis, est ipsa quoque medialis.



Sit linea medialis α, sitq; linea illi commensurabilis β siue longitudine & potentia, siue potentia tãtum, ut recte addidit Cãpanus, & in uetusto exemplari græco legitur. dico lineam β esse mediale͂. Exponatur linea rationalis γδ, & quadrato lineæ α æquale parallelogrammum rectangulum applicetur secundum lineam γδ, sitq; parallelogrammũ γε, eiusque alterum latus sit linea εδ. Rationalis itaq; erit linea εδ, & incommensurabilis longitudine lineæ γδ, per proximum theorema. Rursus quadrato lineæ β æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrã-

mum

mum rectangulum γζ, cuius alterum latus sit δζ. Cum igitur commensurabilis sit linea α lineæ β, commẽsurabile quoque erit quadratum lineæ α, quadrato lineæ β. sed quadrato lineæ α æquale est ε γ, quadrato autem lineæ β æquale est γζ: commensurabile est ergo parallelogrammum ε γ parallelogrammo γζ. Est autem sicut parallelogrammum γ ε ad parallelogrammum γζ, ita linea ε δ ad lineam δζ per primam sexti. commensurabilis est ergo longitudine linea ε δ lineæ δζ per 10 huius. Sed linea ε δ est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ γ δ. Rationalis est ergo linea δζ & incommensurabilis longitudine lineæ δ γ per 13 huius. Ergo lineæ γ δ, δζ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Sed linea quæ potest parallelogrammum rectãgulum compræhensum rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, medialis est per 22 huius. Igitur medialis est quæ parallelogrammum ex γ δ, δζ potest. Id uerò potest linea β, ergo linea β medialis est.

Corollarium.

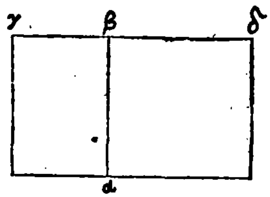
Vnde manifestum est superficiem commẽsurabilem superficiei mediali, medialem esse. Nam lineæ quæ possunt tales superficies, sunt potentia commensurabiles, quarum linearum altera, quæ scilicet potest superficiem medialem, medialis est, quare & reliqua medialis erit per hoc theorema 24. Sane quemadmodum diximus de lineis rationalibus, ita dicendũ est in lineis medialibus, nempe lineam mediali commensurabilem esse etiã medialem, lineam inquam quæ sit commẽsurabilis mediali siue sit longitudine & potentia commensurabilis, siue *potentia tantum. in uniuersum enim uerum est lineas longitudine commensurabiles, esse quoque potentia cōmensurabiles. Quod si lineæ mediali fuerit alia commēsurabilis potentia, siquidem & longitudine cōmensurabilis fuerit, dicuntur illæ lineæ mediales longitudine & potentia commensurabiles. si uerò potentia tantum fuerint inter se commensurabiles, dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles.* Sunt autem & *aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incōmensurabiles mediali, potentia tantum eidem commensurabiles, hæ uerò dicuntur & ipsæ mediales, eò quia commensurabiles sunt potētia lineæ mediali, & ea ratione qua sunt mediales, sunt inter se potētia commēsurabiles, sed & inter se ipsæ comparatæ, possunt esse siue longitudine & ideo etiam potentia commensurabiles, siue potētia tantum.* Et *quidem si longitudine, dicūtur & ipsæ mediales longitudine commensurabiles, ut consequenter intelligatur potentia quoque commensurabiles esse. Quòd si potentia tantum sint inter se commensurabiles, nihilominus tamen & ipsæ dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles.* Hoc *loco addit exemplar græcū, quod autem lineæ mediales sint cōmensurabiles, ita demonstrari potest. Quoniā mediales mediali cuidā sunt commensurabiles: quæ uerò sunt eidem commensurabilia, inter se quoque sunt commēsurabilia.* Ergo *mediales sunt inter se commensurabiles. hoc totum nō est* Euclidis, *neque ullius omnino geometræ. nam quum dicitur, quoniam mediales mediali cuidam sunt commensurabiles, petitur principium.* Præterea *falsum est simpliciter*

pliciter lineas mediales esse commensurabiles, quod patebit ex theoremate 35 huius libri, ubi propositum est reperire lineas duas potentia incommensurabiles cōficientes compositum ex quadratis ipsarū mediale, & id parallelogrammum quod fit ex eisdē mediale, ipsum etiā incommensurabile composito ex quadratis illarum. Cū ergo reperiantur duo medialia incōmensurabilia, certum est lineas quæ illa possunt esse mediales potentia incommensurabiles, quas necesse est esse etiam longitudine incommensurabiles.

Vigesimumquintum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum contentū ex lineis medialibus longitudine commensurabilibus mediale est.

Ex lineis enim medialibus longitudine commēsurabilibus α β, β γ contineatur parallelogrammum rectāgulū α γ, dico illud parallelogrāmum esse mediale. Describatur enim ex linea α β quadratum



α δ: mediale est ergo quadratum illud α δ. Et quoniā linea α β est longitudine cōmēsurabilis lineæ β γ, æqualisque est linea α β lineæ β δ, commensurabilis est ergo longitudine linea β δ, lineæ β γ. sed quemadmodum se habet linea δ β ad lineam β γ, ita quadratum δ α ad parallelogrammum α γ per primam sexti. Ergo per decimum theorema huius libri quadratum δ α est commensurabile parallelogrammo α γ. sed quadratū δ α est me-

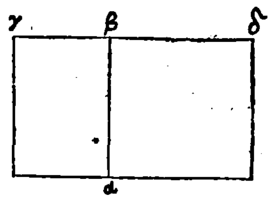
potentia tantum. in uniuersum enim uerum est lineas longitudine commensurabiles, esse quoque potentia cōmensurabiles. Quod si lineæ mediali fuerit alia commēsurabilis potentia, siquidem & longitudine cōmensurabilis fuerit, dicuntur illæ lineæ mediales longitudine & potentia commensurabiles. si uerò potentia tantum fuerint inter se commensurabiles, dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles. Sunt autem & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incōmensurabiles mediali, potentia tantum eidem commensurabiles, hæ uerò dicuntur & ipsæ mediales, eò quia commensurabiles sunt potētia lineæ mediali, & ea ratione qua sunt mediales, sunt inter se potētia commēsurabiles, sed & inter se ipsæ comparatæ, possunt esse siue longitudine & ideo etiam potentia commensurabiles, siue potētia tantum. Et quidem si longitudine, dicūtur & ipsæ mediales longitudine commensurabiles, ut consequenter intelligatur potentia quoque commensurabiles esse. Quòd si potentia tantum sint inter se commensurabiles, nihilominus tamen & ipsæ dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles. Hoc loco addit exemplar græcū, quod autem lineæ mediales sint cōmensurabiles, ita demonstrari potest. Quoniā mediales mediali cuidā sunt commensurabiles: quæ uerò sunt eidem commensurabilia, inter se quoque sunt commēsurabilia. Ergo mediales sunt inter se commensurabiles. hoc totum nō est Euclidis, neque ullius omnino geometræ. nam quum dicitur, quoniam mediales mediali cuidam sunt commensurabiles, petitur principium. Præterea falsum est simpliciter

pliciter lineas mediales esse commensurabiles, quod patebit ex theoremate 35 huius libri, ubi propositum est reperire lineas duas potentia incommensurabiles cõficientes compositum ex quadratis ipsarũ mediale, & id parallelogrammum quod fit ex eisdẽ mediale, ipsum etiã incommensurabile composito ex quadratis illarum. Cũ ergo reperiantur duo medialia incõmensurabilia, certum est lineas quæ illa possunt esse mediales potentia incommensurabiles, quas necesse est esse etiam longitudine incommensurabiles.

Vigesimumquintum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum contentũ ex lineis medialibus longitudine commensurabilibus mediale est.

Ex lineis enim medialibus longitudine commẽsurabilibus α β, β γ contineatur parallelogrammum rectãgulũ α γ, dico illud parallelogrãmum esse mediale. Describatur enim ex linea α β quadratum α δ: mediale est ergo quadratum illud α δ. Et quoniã linea α β est longitudine cõmẽsurabilis lineæ β γ, æqualisque est linea α β lineæ β δ, commensurabilis est ergo longitudine linea β δ, lineæ β γ. sed quemadmodum se habet linea δ β ad lineam β γ, ita quadratum δ α ad parallelogrammum α γ per primam sexti. Ergo per decimum theorema huius libri quadratum δ α est commensurabile parallelogrammo α γ. sed quadratũ δ α est me-

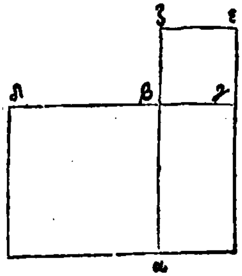


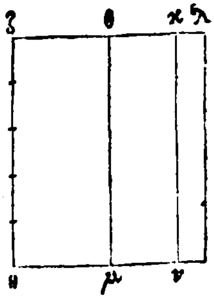
diale quia describitur à linea mediali. Ergo *per corollarium proximi theorematis parallelogrammū* $\alpha\gamma$ *erit etiam mediale. quod demonstrandum erat.*

Vigesimumsextum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum comprehensum duabus lineis medialibus potentia tantum commensurabilibus, uel rationale est, uel mediale.

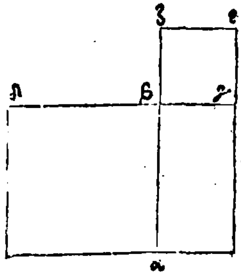
Proposita linea quæ sit medialis, alia reperitur potētia tantum commensurabilis eidem per 11 *huius, sicut de rationalibus ibidem dictum est.* Ex *duabus itaque medialibus potentia tantum cōmensurabilibus* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, *parallelogrammum rectangulum comprehendatur quod sit* $\alpha\gamma$. Dico *illud parallelogrammum esse aut rationale aut mediale.* De*scribātur enim quadrata linearū* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *quæ sint* $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, *mediale est ergo utrūque per* 22 *huius.* Pro*ponatur linea rationalis* $\eta\zeta$ *secundū quam applicetur æquale quadrato* $\alpha\delta$ *parallelogrammum rectangulum* $\eta\theta$, *cuius alterū latus sit* $\zeta\theta$. *(hoc autē quomodo fiat diximus in theoromate* 23.*) parallelogrammo uerò* $\alpha\gamma$ *æquale secundum lineam* $\theta\mu$, *æqualem lineæ* $\zeta\eta$ *applicetur parallelogrammum rectangulum* $\mu\kappa$, *cuius alterū latus sit* $\theta\kappa$. *(ut autem id fiat, sumēda est quarta li-*

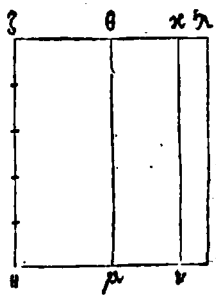




nea

nea proportionalis ad lineas θ μ, α ϛ, β γ per 12 sexti, quæ quarta sit θ κ: ergo per 16 sexti parallelogrammum ex θ μ, θ κ erit æquale parallelogrammo ex lineis α β, β γ.) præterea quadrato β ι æquale similiter secundum lineã κ ν applicetur parallelogrammum rectangulum ν λ, cuius alterum latus sit κ λ. In eadem ergo recta linea sunt lineæ ζ θ, θ κ, κ λ. (Nam illa parallelogramma sic applicata secũdum lineas ζ κ, θ μ, κ ν sunt rectangula, & anguli ζ θ μ, κ θ μ æquales duobus rectis, quia sunt ipsi recti. Itaque lineæ ζ θ, θ κ sunt in eadem linea recta per 14 primi. idem dices de angulis θ κ ν, λ κ ν.) Cum igitur mediale sit utrũque quadratum α δ, β ι parallelogramma illis æqualia κ θ, ν λ similiter medialia erunt. Illa autem applicantur secundum lineam rationalẽ, nempe ζ κ: rationalis est ergo utraque linea ζ θ, κ λ & incommensurabilis longitudine lineæ ζ κ per 23 huius. Sed quia lineæ α β, β γ positæ sunt potentia commensurabiles: ergo quadratum α δ est commensurabile quadrato β ι. similiter igitur illis æqualia parallelogramma κ θ, ν λ erunt inter se commensurabilia. Sed sicut se habet parallelogrammum κ θ ad parallelogrammum ν λ, ita se habet linea ζ θ, ad lineam κ λ per primum sexti. Ergo per decimum huius linea ζ θ erit commensurabilis longitudine lineæ κ λ. Lineæ ergo ζ θ, κ λ sunt rationales, longitudine inter se commensurabiles. inter se dico longitudine commẽsurabiles. Nam ipsi lineæ ζ κ propter quam sunt rationales, sunt longitudine incommensurabiles, ut modo probatum est. Ergo parallelogrammum contentum ex illis lineis ζ θ, κ λ est rationale per 20 huius. & quoniam linea $\beta\delta$ est æqualis lineæ $\beta\alpha$, linea uerò $\zeta\beta$ æqualis lineæ $\beta\gamma$: est igitur sicut linea $\beta\delta$ ad lineam $\beta\gamma$, ita linea $\alpha\epsilon$ ad lineã $\beta\zeta$. Sed sicut linea $\delta\beta$ ad lineam $\beta\gamma$, ita quadratũ $\delta\alpha$ ad parallelogrammum $\alpha\gamma$ per primum sexti. sicut autem linea $\alpha\beta$, ad lineam $\beta\zeta$, ita parallelogrammum $\alpha\gamma$ ad quadratũ $\epsilon\iota$. Est igitur sicut quadratũ $\alpha\delta$ ad parallelogrammũ $\alpha\gamma$, ita parallelogrãmũ $\alpha\gamma$ ad quadratũ $\beta\iota$. quadrato autẽ $\alpha\delta$ æquale est parallelogrammũ $\kappa\theta$. parallelogrammo autẽ $\alpha\gamma$ æquale est item parallelogrãmũ $\mu\kappa$. quadrato uerò



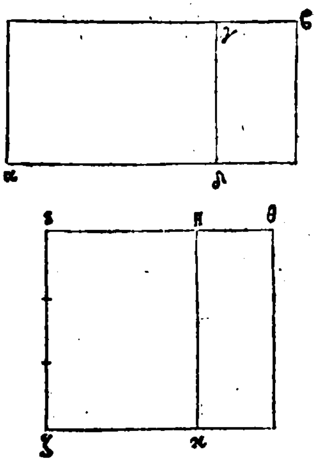


$\beta\iota$ æquale est parallelogrãmũ λ. Est igitur sicut parallelogrãmũ $\kappa\theta$ ad parallelogrãmũ $\mu\kappa$, ita parallelogrãmũ $\mu\kappa$ ad parallelogrãmũ $\nu\lambda$. Est ergo per primũ sexti sicut linea $\zeta\theta$ ad lineã $\theta\kappa$, ita linea $\theta\kappa$ ad lineã $\kappa\lambda$. Ergo parallelogrammũ contentum ex lineis $\zeta\theta$, $\kappa\lambda$ est æquale quadrato lineæ $\theta\kappa$ per 17 sexti. sed parallelogrãmũ ex lineis $\zeta\theta$, $\kappa\lambda$ est rationale, ut modo probatũ est, rationale est ergo quadratũ lineæ $\theta\kappa$. ergo linea $\theta\kappa$ erit rationalis. Et quidẽ si ipsa linea inquã $\theta\kappa$ fuerit longitudine cõmensurabilis lineæ $\theta\mu$, id est lineæ $\zeta\eta$ ipsi æquali, rationale tũc erit parallelogrãmũ $\theta\nu$ per 20 huius. Quod si fuerit longitudine incõmensurabilis ipsi lineæ $\zeta\eta$, tunc lineæ $\theta\mu$, $\theta\kappa$ sunt rationales potentia tantũ cõmensurabiles: sic igitur parallelogrammũ $\theta\nu$ erit mediale. Ergo paral-

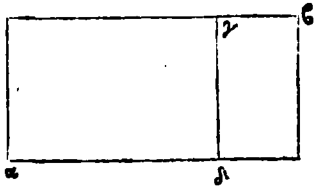
parallelogrammũ θ ι erit uel mediale uel rationale: sed parallelogrammũ θ ι est æquale parallelogrammo α γ. Ergo parallelogrammum α γ erit aut mediale aut rationale. Quomodo autem reperiantur lineæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale parallelogrammum continentes, item aliæ mediale continentes, docebunt theoremata 28. & 29.

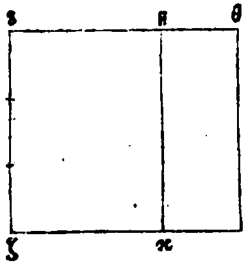
Vigesimumseptimum Theorema.

Mediale non est maius quàm mediale superficie rationali.



N*am si fieri potest mediale α β sit maius quàm mediale α γ superficie rationali quæ sit δ β, & proponatur linea rationalis ι ζ, & mediali α β æquale secundum lineam ι ζ applicetur parallelogrammum ζ θ, cuius alterum latus sit ι θ. ipsi autem mediali α γ æquale iuẽ auferatur parallelogrammũ ζ κ. Reliquum ergo ε δ reliquo κ θ æquale est. sed per positionem β δ est rationale, ergo rationale etiam erit κ θ. Cum igitur mediale sit utrunque α β, α γ, sitq; α ε æquale ipsi ζ θ: sit etiã α γ æquale ipsi ζ κ, mediale est ergo utrunque etiam ζ θ, ζ κ. & secundum lineam rationalẽ ι ζ applicãtur. rationalis est ergo utraq; linea θ ι, ι κ & incommensurabilis longitudine lineæ ι ζ per 23 huius. Et quoniam rationale est δ ε, ipsiq; æquale κ θ: rationale etiam erit κ θ, & secundum lineam ra-*





tionalem ε ζ uel ei æqualem η κ applicatur: rationalis est ergo linea η θ, & commensurabilis longitudine lineæ η κ per 21 huius. sed linea η κ est æqualis lineæ ε ζ: ergo linea η θ est rationalis, & cõmensurabilis lõgitudine lineæ ε ζ. sed & linea ε η rationalis est & incommensurabilis longitudine lineæ ε ζ. Ergo *linea η ε erit incommensurabilis longitudine lineæ η θ per 14 huius.* Est *autẽ sicut linea ε η ad lineam η θ, ita quadratũ lineæ ε η ad parallelogrammum ex ε η, η θ per lemma suprapositũ post theorema 22.* Incommensurabile *est ergo quadratum lineæ ε η parallelogrãmo ex lineis ε η, η θ per 10 huius. sed quadrato lineæ ε η commensurabilia sunt quadrata linearũ ε η, η θ. ambo enim sunt rationalia, ut modo probatum est.* Ergo *quadrata linearum ε η, η θ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex lineis ε η, η θ per 14 huius. parallelogrammo uerò ex lineis ε η, η θ commensurabile est id quod fit bis ex lineis ε η, η θ (habent enim proportionem sicut numerus ad numerum, nempe sicut unitas ad binariũ, aut sicut binarius ad quaternariũ: itaque per 6 huius sunt commẽsurabilia)* Ergo *per eandem 14 huius, id quod fit bis ex lineis ε η, η θ est incommẽsurabile quadratis linearum ε η, η θ. hoc breuius concluditur per corollarium 14 theorematis.* Sed *quadrata linearum ε η, η θ & id quod fit bis ex lineis ε η, η θ sunt*

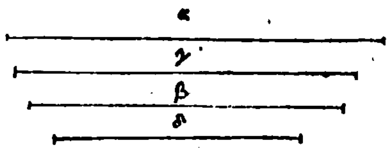
æqualia

æqualia quadrato totius lineæ ιθ per 4. secundi. Ergo *quadratum lineæ ιθ est incommensurabile quadratis linearum ικ, κθ per 17 huius. sed quadrata linearum ικ, κθ sunt rationalia: ergo quadratum lineæ ιθ est irrationale. irrationalis est ergo linea ιθ. Sed modo demõstratũ est eã esse rationalẽ, quod fieri nullo modo potest: non igitur mediale maius est mediali superficie rationali.*

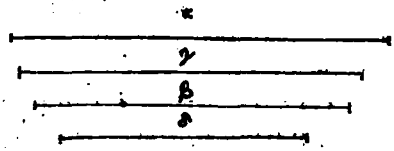
Vigesimumoctauum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmensurabiles rationale comprehendentes.

Proponantur *duæ rationales lineæ potentia tantum commensurabiles α, β: sumaturq; media proportionalis inter eas linea γ, sitq; sicut linea α ad lineã β, ita linea γ ad lineam δ per 13 sexti. Cũ igitur lineæ α, β sint rationales potentia tantum commensurabiles, parallelogrammum comprehensum ex lineis α, β, hoc est quadratum lineæ γ (nam quadratũ lineæ γ est æquale parallelogrãmo ex lineis α, β per 17 sexti) est mediale: medialis est ergo linea γ.* Et *quoniam est sicut linea α ad lineã β, ita linea γ ad lineam δ. erit sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ per 22.6. sed quadrata linearum α, β sunt commensurabilia, quia lineæ α, β positæ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles. ergo & quadrata linearum γ, δ sunt etiam commensurabilia per.*



10 huius. ergo & lineæ γ, δ sunt etiã potentia commensurabiles per diffinitionẽ. Est autẽ linea γ me-

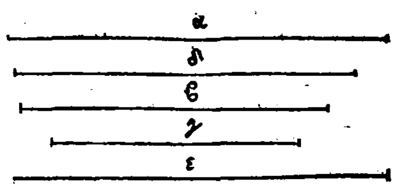


dialis. Medialis ergo est etiam linea δ per 24 huius. Ergo lineæ γ, δ sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico præterea eas continere parallelogrammũ rationale. Cum enim sit sicut linea α ad lineam ϐ, ita linea γ ad lineam δ. permutata ergo proportione erit sicut linea α ad lineam γ, ita linea ϐ ad lineam δ. sed sicut est linea α ad lineam γ, ita linea γ ad lineam β. ergo sicut linea γ ad lineã β, ita linea β ad lineam δ. ergo parallelogrammum ex lineis γ, δ est æquale quadrato lineæ β: sed quadratum lineæ β est rationale, quia linea β posita est rationalis. Rationale est ergo parallelogrammum ex lineis γ, δ. repertæ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, quod faciendum erat.

Vigesimumnonum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmensurabiles mediale comprehendentes.

Proponãtur tres rationales potentia tantum cõmensurabiles α, ϐ, γ, sumaturq; inter lineas α, ϐ media proportionalis δ per 13. 6. fiatq; sicut li-



nea

nea β ad lineam γ, ita linea δ ad lineā ε per 12.6. Cum igitur lineæ α, β sint rationales potentia tantum cōmensurabiles, ergo parallelogrammum ex α, β, hoc est quadratum lineæ δ est mediale, medialis est ergo linea δ. Et cum lineæ β, γ sint potentia tantum commensurabiles, sitq́; sicut β ad γ, ita δ ad ε. ergo δ, ε sunt potentia tantū commensurabiles. sed linea δ est medialis. ergo linea ε, erit etiam medialis. ergo lineæ δ, ε sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico præterea eas continere mediale. Cum enim sit sicut linea β ad lineā γ, ita δ ad ε: permutatim ergo sicut β ad δ, ita γ ad ε. sed sicut β ad δ, ita δ ad α per cōuersam siue contrariam proportionem, quæ probatur per corollarium quarti theorematis libri quinti. Itaque sicut δ ad α, ita γ ad ε. itaque parallelogrammum ex α, γ est æquale parallelogrammo ex δ, ε per 16.6. Sed parallelogrammū ex α γ per 22 huius mediale est, ergo mediale quoque erit parallelogrammum ex δ, ε. Repertæ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles mediale comprehendentes, quod demonstrandum erat.

Lemma.

Reperire duos numeros quadratos huiusmodi, ut numerus qui efficitur ex ipsorū additione sit etiā quadratus.

Proponātur duo numeri α β, ε γ similes superficiales, qui quomodo reperiātur, dictum est in theoremate 9. sint

autem ambo pares uel ambo impares, sit etiam maior α β. Et quia siue à numero pari par auferatur, siue ab *impari impar residuus est par, per*

24 & 26.9. Dempto itaque βγ de αβ residuus αγ par erit. Secetur numerus αγ in duas partes æquales in puncto δ, numerus ergo productus ex multiplicatione numerorũ αβ, βγ cum numero quadrato producto ex multiplicatione γδ in seipsum, est æqualis quadrato producto ex multiplicatione βδ in se ipsum, per ea quæ demõstrat Campanus propositione 16. libri 9. quam demonstrationem sumpsit ex 6 theoremate libri secundi. Est autẽ numerus productus ex multiplicatione αβ, βγ, quadratus, per 1.9. Reperti sunt ergo duo numeri quadrati, nẽpe alter productus ex αβ, βγ, alter autem ex multiplicatione γδ in seipsum, qui compositi per additionẽ efficiunt numerũ quadratum, nempe productum ex multiplicatione βδ in seipsum.

Corollarium.

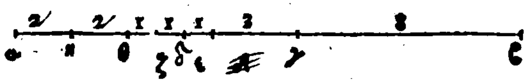
Ex hoc manifestum etiã illud est repertos esse duos numeros quadratos, nempe alterum productum ex multiplicatione βδ in seipsum, item alterum ex multiplicatione γδ in seipsum tales, ut numerus quo excedit alter alterum, ille inquam numerus qui producitur ex multiplicatione αβ, βγ: sit etiam quadratus quando uidelicet numeri αβ, βγ fuerint similes superficiales. Quòd si nõ fuerint similes superficiales, reperti sunt duo quadrati, nẽpe alter productus ex radice βδ, & alter productus ex radice γδ, quorum excessus, id est numerus quo maior excedit minorem, uidelicet productus ex αβ, βγ non est quadratus.

Lemma.

Lemma.

Reperire duos quadratos numeros huiusmodi ut compositus ex ipsorum additione ne sit quadratus.

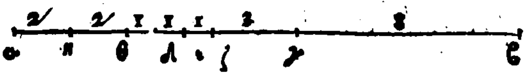
Sit numerus productus ex multiplicatione numerorum



α γ, β γ, ut diximus in proximo lemmate, quadratus: sitq; numerus γ α par, diuidatúrque idem numerus γ α in duas partes æquales in puncto δ. Manifestum *est numerum quadratum qui fit ex multiplicatione α β, ε γ, cum quadrato radicis γ δ, æqualem esse quadrato radicis β δ, per ea quæ dicta sunt in proximo lẽmate. auferatur unitas ex δ γ, quæ unitas sit δ ι.* Ergo *quadratus productus ex multiplicatione α β, ε γ, cũ quadrato radicis γ ι, minor est quadrato radicis β δ.* Dico *itaque numerũ compositũ ex quadrato producto per multiplicationẽ α ε, β γ, & quadrato radicis γ ι, non esse quadratũ.* Quòd *si dicas esse quadratũ, simul oportet eũ esse maiorẽ aut æqualẽ aut minorẽ quadrato radicis ε ι.* Pri*mũ non potest eo maior esse.* Modo *enim probatũ est numerũ productũ ex α ε, β γ, unà cũ quadrato radicis γ ι, esse minorem quadrato radicis ε δ: sed inter quadratũ radicis β δ & quadratum radicis ε ι, nullus medius quadratus interuenit.* Nam *radix β δ excedit radicem β ι, sola unitate quæ unitas in numeros diuidi nullo modo potest.* Aut *si numerus productus ex α ε, β γ, unà cũ quadrato radicis γ ι esset maior quadrato radicis β ι,* *oporteret eundem numerum productum ex α ζ, β γ unà cum quadrato radicis γ ι, esse æqualẽ quadrato radicis β δ, cuius modo probatũ est cõtrarium.* Sit ergo, *siquidẽ illud fieri posse dicis, numerus productus ex α β, ζ γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ι, sitq; numerus κ α duplus ad unitatẽ δ ι, id est binarius.* Cum *igitur totus numerus α γ totius numeri γ δ sit duplus ex suppositione, & numerus α κ sit duplus ad unitatẽ δ ι: ergo residuus numerus γ κ ad residuũ numerũ ι γ, duplus erit per* 5.5. *siue per* 7.7. *&* 11. *eiusdẽ* 7. Ergo *in duas partes æquales diuisus est numerus κ γ, in puncto ι.* Numerus *itaq; productus ex κ β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι est æqualis quadrato radicis ι β. sed per positionem tuam numerus productus ex α β, β γ unà cũ quadrato γ ι, est æqualis eidẽ quadrato radicis ζ ι.* Er*go numerus productus ex κ β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι est æqualis numero producto ex α β, β γ unà cũ quadrato radicis γ ι, quia quæ uni & eidẽ sunt æqualia, inter se quoq; sunt æqualia. sed si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanẽt sunt æqualia.* Ergo *numerus productus ex κ β, ζ γ, est æqualis numero producto ex α β, β γ.* Ergo *per* 17. *uel* 18.7. *numerus κ β est æqualis numero α β minor maiori, quod est impossibile.* Non *igitur erit numerus productus ex α β, β γ cũ quadrato radicis γ ι, æqualis quadrato radicis ζ ι.* Dico *similiter eũdem numerum productũ ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι non esse minorem quadrato radicis β ι.* Si *enim fieri posse dicas, erit ergo æqualis cuipiam numero quadrato minori quàm est quadratus radicis β ι. sit*

ergo

ergo numerus ille productus ex α β, β γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ζ, ſumatúrque numerus θ α duplus ad numerum λ ζ. efficitur ſimiliter ut numerus θ γ ſit duplus ad numerū ζ γ, ita ut etiam θ γ ſecetur in partes duas æquales in puncto ζ. ideóque ſimul numerus productus ex θ β, β γ cum quadrato radicis ζ γ erit æqualis quadrato radicis β ζ.

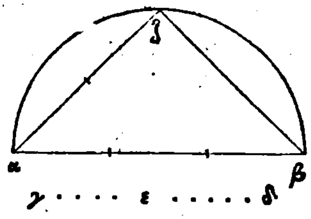


Sed per poſitionē tuā numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι erat æqualis quadrato radicis β ζ. efficitur ergo ut numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι ſit æqualis numero producto ex θ ϐ, β γ, unà cum quadrato radicis γ ζ, quod eſt impoßibile. Nam ſi eſſet æqualis, cum quadratus radicis γ ζ ſit minor quadrato radicis ϐ ι, oporteret numerū productum ex θ ϐ, ϐ γ eſſe maiorē numero producto ex α β, β γ, itaque ſimul neceſſe eſſet numerum θ ϐ eſſe maiorem numero α ϐ, cum tamen ſit eo minor. Non erit ergo numerus productus ex α ϐ, ϐ γ cum quadrato radicis γ ι æqualis numero minori quàm ſit quadratus radicis ϐ ι. Sed demonſtratum eſt neque eſſe poſſe eidem æqualem, neq; maiorem: igitur numerus ex α ϐ, ϐ γ unà cū quadrato radicis γ ι, compoſitus quadratus eſſe nullo modo poteſt.

Trigeſimum Theorema.

Reperire duas rationales potentia tantū commensurabiles huiusmodi, ut maior ex illis possit plusquam minor quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine.

Esto proposita linea rationalis α β, & duo numeri quadrati γ δ, δ ε, huiusmodi, ut excessus illorũ γ ε ne sit quadratus numerus per corollarium prioris lemmatis ex



duobus modo dictis: describaturque super linea α β, semicirculus α ζ β, fiatq; sicut numerus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum alterius lineæ quæ sit α ζ per lemma positum post 6. theorema huius libri, & ducatur linea ζ β. Cum igitur sit sicut quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ, ita numerus γ δ ad numerum γ ε, ergo commensurabile est quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ per 6 huius. sed quadratum lineæ α β est rationale. ergo etiam rationale erit quadratum lineæ α ζ. Rationalis est ergo linea α ζ. Cumq; numerus δ γ, ad numerum γ ε proportionem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum per 24. 8. à destructione consequentis: neque similiter quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo linea α β erit incommensurabilis longitudine lineæ α ζ, per 9 huius. ergo lineæ α β, α ζ, sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Cumque sit sicut numeus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratũ lineæ α ζ. per euer-

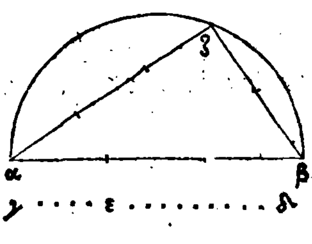
sam

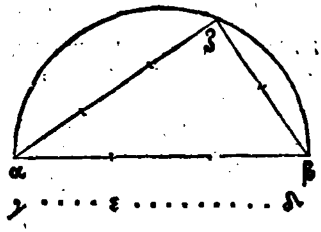
sam ergo porportionem quæ dicitur ἀναστροφὴ λόγου, demonstratúrque per corollarium 19 theorematis libri 5. sicut numerus γ δ ad numerum δ ι, ita quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ β ζ, qui est excessus quadrati lineæ α β, supra quadratum lineæ α ζ per lemma positum post 14 huius libri. sed numerus γ δ ad numerum δ ι habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo *quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ β ζ proportionem habet quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea α β est commensurabilis longitudine lineæ β ζ, per 9 huius.* Est *autem quadratum lineæ α β æquale duobus quadratis linearum α ζ, ζ β.* Ergo *linea α β plus potest quàm linea α ζ quadrato lineæ β ζ sibi commensurabilis longitudine.* Repertæ *sunt ergo duæ rationales potentia tantum cõmensurabiles huiusmodi &c. quod demonstrandum erat.*

Lemma.

Reperire *duas rationales potentia tantum commensurabiles huiusmodi, ut maior plus possit quàm minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.*

Proponatur *linea rationalis α β, & numeri quadrati duo γ ι, ι δ, tales ut compositus ex ipsis nempe γ δ, ne sit quadratus per alterũ lemma positum post 29. theorema huius libri: describatúrque super linea α β semicirculus α ζ β, fiatq; sicut numerus δ γ ad numerum γ ι, ita quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ: duca-*





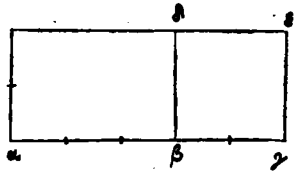
túrque linea à puncto ζ in punctum β quæ sit ζβ, quẽadmodũ in præcedẽti theoremate. similiter hîc demonstrabimus lineas αβ, αζ, esse rationales potentia tantum commensurabiles. Et *cum sit sicut numerus δγ ad numerum γε, ita quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ αζ.* Per *euersam ergo proportionem quemadmodũ numerus δγ ad numerum δε, ita quadratũ lineæ αβ ad quadratum lineæ ζβ, ut diximus in præcedẽti theoremate. sed numerus γδ ad numerum δε proportionẽ non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum per corollarium illatum à destructione consequentis* 24 *lib.*8. Ne*que ergo quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ βζ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ergo *per* 9 *huius linea αβ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζβ.* Pote*st autem linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ βζ sibi incommensurabilis longitudine.* Er*go lineæ αβ, αζ sunt duæ rationales potentia tãtum cõmensurabiles, & potest linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ ζβ sibi incommensurabilis longitudine.*

L*emma.*

Si sint duæ lineæ rectæ habentes inter se aliquam proportionem, erit ut linea recta ad lineam rectam, ita parallelogrammum contentum ex ambabus ad quadratum lineæ minoris ex illis duabus. Hoc *lemma nihil amplius affert quàm primum theorema libri sexti, itaque non reperitur*

reperitur in quibuſdam exemplaribus.

Sint duæ rectæ lineæ α β, β γ in aliqua proportione. Dico ſicut linea α β ad lineam β γ, ita eſſe parallelogrammum ex α β, β γ ad quadratũ β γ. Deſcribatur enim quadratũ lineæ β γ, quod ſit β δ ε γ, compleatúrq; parallelogrammum α δ. manifeſtum

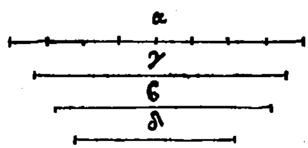


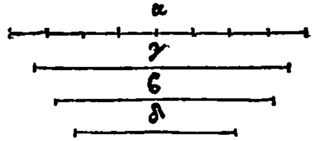
eſt ſicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammũ α δ ad parallelogrammum uel quadratum β ε per primam ſexti. Eſt autem parallelogrammum α δ contentũ ex lineis α β, β γ. eſt enim æqualis linea β γ lineæ β δ. parallelogrammum autem β ε eſt quadratum lineæ β γ. Ergo ſicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum ex α β, β γ ad quadratum lineæ β γ. quod demonſtrandum erat.

Trigeſimumprimum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potentia tantum cõmenſurabiles rationalem ſuperficiem continentes, tales inquam, ut maior poſsit pluſquã minor quadrato lineę ſibi cõmenſurabilis longitudine.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commenſurabiles α, β, tales ut maior α poſsit plus quàm minor β quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per 30 theorema, ſitq́; parallelogrammo ex α, β æquale quadratum lineæ γ (quod ſit reperta linea me-





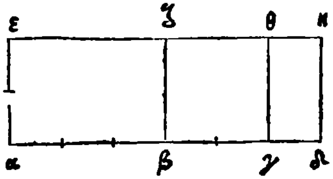
dia proportionali, nempe linea γ inter α, β, ut traditur libro sexto). Est autem mediale parallelogrã mũ ex α, β per 22 huius libri. ergo similiter mediale erit quadratũ lineæ γ. linea ergo γ erit medialis. Quadrato autẽ lineæ β æquale sit parallelogrammũ ex γ, δ, reperta tertia proportionali, nẽpe linea δ, ad duas lineas γ, β, ut traditur libro 6. Est autem quadratum lineæ β rationale. est ergo & parallelogrammum ex γ, δ rationale. Et quoniã sicut linea α ad lineam β, ita est parallelogrammum ex α, β ad quadratum lineæ β per lemma modo positum. Sed parallelogrammo ex α, β, æquale est quadratum lineæ γ. quadrato autẽ lineæ β æquale est parallelogrammum ex lineis γ, δ, ut modo probatũ est. Est ergo sicut linea α ad lineam β, ita quadratum lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ. Sed sicut est quadratũ lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ, ita linea γ ad lineam δ per lemma positum ante 23 huius libri. Ergo sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineã δ. Sed linea α est posita commensurabilis potentia tantum lineæ β. Ergo etiam linea γ est commensurabilis potentia tantũ lineæ δ per 10 huius. Sed linea γ est medialis, ergo etiam linea δ erit medialis per 24 huius. Et quoniam est sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ. lineáque α potest plusquam linea β quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per suppositionem. Ergo etiam linea γ poterit plusquam linea δ quadrato lineæ sibi cõmẽsurabilis longitudine per 15 huius. Repertæ sunt er-

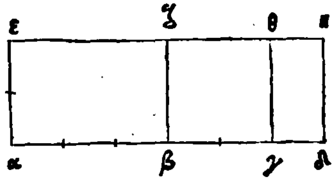
go

go duæ mediales potentia tantum commensurabiles γ, δ, rationalem superficiem continentes, potestque linea γ plusquam linea δ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Similiter etiam reperiri possunt duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, tales ut maior posit plusquã minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, quando uidelicet linea α poterit plusquam linea β quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. quod facere docuit prius lemma positũ post 30 theorema huius libri. Manente eadem constructione potest facilius illa pars huius theorematis demonstrari ab illis uerbis. Et quoniam sicut linea α usq; ad ea uerba, Sed linea α est posita commensurabilis. Nam lineæ γ, β, δ sunt continue proportionales per secũdam partem 17. 6. Sed etiam α, γ, ε sunt tres continue proportionales. Ergo per 11. 5. erit sicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ. Ergo permutata proportione sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ &c.

Lemma.

Si sint tres lineæ rectæ habẽtes proportionem aliquam inter se, erit sicut prima ad tertiam, ita parallelogrammũ ex prima & media ad parallelogrammum ex media & tertia. Sint tres lineæ rectæ in aliqua proportione αβ, βγ, γδ. Dico sicut linea αβ ad lineam γδ, ita esse parallelogrammum ex αε, βγ ad parallelogrammum ex βγ, γδ. Erigatur enim ex puncto α supra lineam αβ perpendicularis linea αι,

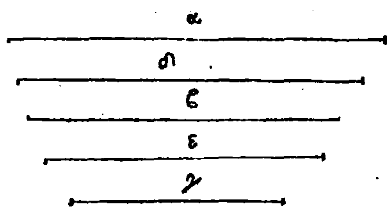




ſitq́; illa α ι æqualis lineæ ϐ ς, & à pũcto ι lineæ α δ ducatur parallela linea ι κ, & à ſingulis punctis β, γ, δ, lineæ α ι, parallelæ lineæ ducantur β ζ, γ θ, δ κ. Cúmque ſit ſicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum α ζ ad parallelogrammum ϐ θ, per primam ſexti. ſicut autem linea β γ ad lineã γ δ, ita parallelogrammum β θ ad parallelogrammum γ κ. Per æquam itaque proportionem erit ſicut linea α β ad lineam γ δ, ita parallelogrammum α ζ, ad parallelogrammum γ κ. Eſt autem parallelogrammũ α ζ ex lineis α β, β γ. poſita eſt enim æqualis α ι lineæ β γ, eſtq́; parallelogrammum γ κ ex lineis ϐ γ, γ δ. Nam β γ eſt æqualis lineæ γ θ, quia γ θ eſt æqualis lineæ α ι per 34. 1. Ergo ſi ſint tres lineæ rectæ &c. quod demonſtrandum erat.

Trigeſimumſecundum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potẽtia tantum cõmenſurabiles medialem ſuperficiem continentes, huiuſmodi ut maior plus poſsit quàm minor quadrato lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine.



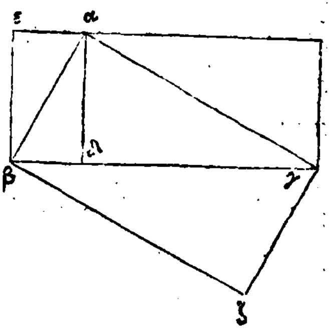
Proponantur tres rationales α, β, γ, potentia tantum commẽſurabiles, tales ut linea α plus poßit quàm linea γ quadrato lineæ ſibi commẽſurabilis longitudine. Et parallelogrãmo ex α, β ſit æqua-

le quadratum lineæ δ. Parallelogrammum autem ex α,β est mediale, mediale ergo erit, & quadratum lineæ δ. ergo linea δ erit medialis. parallelogrammo uerò ex β,γ sit æquale parallelogrammum ex δ,ι (quod fit reperta quarta proportionali ad lineas δ,ϛ,γ quæ sit linea ι.) Cum itaque sit sicut parallelogrammum ex α,β ad parallelogrammum ex ϛ,γ, ita linea α ad lineã γ per lemma proximũ. Sed parallelogrãmo ex α,ϛ est æquale quadratum lineæ δ: parallelogrammo uerò ex β,γ est æquale parallelogrammum ex δ,ι. Est ergo sicut linea α ad lineam γ, ita quadratũ lineæ δ, ad parallelogrammum ex δ,ι. Sed sicut quadratum lineæ δ ad parallelogrammũ ex δ,ι, ita linea δ ad lineam ι per lemma positum post 22 theorema. Ergo sicut linea α ad lineam γ, ita linea δ ad lineam ι. Sed linea α est commensurabilis potentia tantum lineæ γ. Ergo linea δ erit commensurabilis potentia tantũ lineæ ι. Sed linea δ est medialis. ergo linea ι erit etiã medialis per 24 huius. Cũq; sit sicut linea α ad lineã γ, ita linea δ ad lineam ι. linea autem α posit plus quàm linea γ quadrato lineæ sibi cõmensarabilis longitudine. Ergo linea δ poterit plusquã linea ι quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15 huius. Dico præterea parallelogrammum ex δ,ι esse mediale. Nam est æquale parallelogrammo ex β,γ quod est mediale per 22 huius. Mediale est ergo similiter parallelogrammum ex δ,ι, Repertæ sunt ergo duæ mediales potentia tantum commensurabiles, nempe δ,ι &c. quod fecisse oportuit. Rursus eadem ratione reperientur duæ mediales potentia tantum commensurabi-

les mediale continentes, huiusmodi, ut maior plus poßit quàm minor quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, quandocunque linea α plus poterit quàm linea γ quadrato lineæ sibi incõmẽsurabilis longitudine.

Lemma.

Sit triangulum rectangulum β α γ, habens rectum angulũ α, ducatúrque perpendicularis α δ. dico primò parallelogrammum ex γ β, β δ esse æquale quadrato lineæ β α. dico secundò parallelogrammum ex β γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ γ α. dico tertiò parallelogrammũ ex β δ, δ γ esse æquale quadrato lineæ δ α. dico quartò parallelogrammum ex β γ, α δ esse

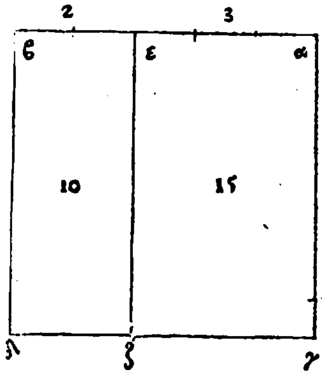


æquale parallelogrammo ex β α, α γ. Quod ad primum attinet, parallelogrãmũ ex γ β, β δ esse æquale quadrato lineæ β α, ita demonstratur. Cũ ab angulo recto triãguli rectanguli ad basim perpẽdicularis ducta sit linea α δ. Ergo triangula α β δ, α δ γ sunt similia toti triangulo α β γ, & ipsa inter se per 8.6. Et cum triangulũ α β γ sit simile triangulo α β δ. sunt igitur ambo triãgula æqualium angulorum per definitionem similium figurarum. Ergo per 4.6. sicut linea γ β ad lineã β α, ita linea β α ad lineam β δ. Ergo parallelogrammum ex γ β, β δ erit æquale quadrato lineæ α β per 17.6. Quod ad secũdum, parallelogrammũ ex β γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ α γ, eadem ratione demonstratur. Nam triangulum

gulum $\alpha\beta\gamma$ est simile triangulo $\alpha\delta\gamma$. Est igitur sicut linea $\beta\gamma$ ad lineam $\alpha\gamma$, ita linea $\alpha\gamma$ ad lineam $\delta\gamma$. Ergo *parallelogrammum ex $\beta\gamma,\gamma\delta$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\gamma$.* Quod *ad tertium, parallelogrammum ex $\beta\delta, \delta\gamma$ esse æquale quadrato lineæ $\delta\alpha$, ita demonstratur.* Cum *à recto angulo trianguli rectanguli ad basim ducta sit perpẽdicularis, illa perpẽdicularis est media proportionalis inter sectiones basis per corollariũ 8. theorematis libri 6.* Est *igitur sicut linea $\beta\delta$ ad lineã $\alpha\delta$, ita $\alpha\delta$ ad $\delta\gamma$.* Ergo *parallelogrammũ ex $\beta\delta,\delta\gamma$ est æquale quadrato lineæ $\delta\alpha$.* Quod *ad quartum, parallelogrammum ex $\beta\gamma,\alpha\delta$ esse æquale parallelogrammo ex $\beta\alpha,\alpha\gamma$, ita demonstratur.* Cum *enim, sicut modo dictũ est, triãgulum $\alpha\beta\gamma$ sit simile triangulo $\alpha\beta\delta$, & ideo æqualium angulorũ.* Est *igitur sicut linea $\beta\gamma$ ad lineam $\gamma\alpha$, ita linea $\beta\alpha$ ad lineam $\alpha\delta$ per 4.6.* Ergo *per 16.6. parallelogrammum ex $\beta\gamma,\alpha\delta$ esse æquale parallelogrammo ex $\beta\alpha,\alpha\gamma$.* Dico *præterea si compleatur parallelogrammũ rectangulum ex $\beta\gamma,\alpha\delta$ quod sit $\iota\gamma$, compleaturq́; parallelogrammũ ex $\beta\alpha,\alpha\gamma$ quod sit $\alpha\zeta$.* Alia *ratione demonstrabitur, parallelogrammum $\iota\gamma$ esse æquale parallelogrammo $\alpha\zeta$.* Nam *utrunque ipsorum est duplum trianguli $\alpha\gamma\beta$, per 41.1.* Et *quæ unius & eiusdem sunt dupla, inter se sunt æqualia. ergo &c.*

Lemma.

Si *linea recta scindatur in partes duas inæquales, erit ut maior portio ad minorem, ita parallelogrammum ex tota & maiore portione ad parallelogrammum ex tota & minore.* Recta *linea $\alpha\beta$ diuidatur in partes* *duas inæquales in puncto ι, sitq; α ι maior portio. Dico sicut α ι ad lineã ι β, ita parallelogrammũ ex β α, α ι ad parallelogrammũ ex ϛ α, β ι.*



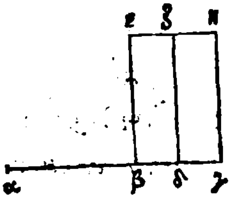
Describatur enim quadratũ lineæ α ϛ quod sit α γ δ ϛ, & à puncto ι utrique α γ, δ β parallela ducatur ι ζ, manifestũ est sicut linea α ι ad lineã ι β, ita parallelogrammũ α ζ ad parallelogrammũ ϛ ζ per primam sexti. Est autem parallelogrammum α ζ contentum ex lineis β α, α ι. est enim linea α γ æqualis lineæ α β, parallelogrammum uerò ϛ ζ est cõtentum ex lineis α β, ϛ ι. Nam δ ϛ est æqualis lineæ α ϛ. sicut ergo linea α ι ad lineam ι ϛ, ita parallelogrammum ex β α, α ι, ad parallelogrammum ex α β, ϛ ι. quod demonstrandum erat.

Hoc *lemma nihil aliud affert quàm quod primum theorema sexti.*

Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ inæquales, diuidatúrque minor in partes duas æquales, parallelogrammum ex ambabus lineis inæqualibus est duplum parallelogrammi ex maiore & media minoris. Quanuis hoc lemma sit in græco exemplari post 33. theorema, uisum est tamen hoc loco ponere, quia sequentis theorematis 33. demonstrationem adiuuat. Sint duæ rectæ inæquales α β, quarum maior sit α β, diuidatúrque β γ bifariam in puncto δ. Dico parallelogrammum ex α ϛ, β γ esse duplum parallelogrammi ex α β, ϛ δ. ducatur enim à puncto β super

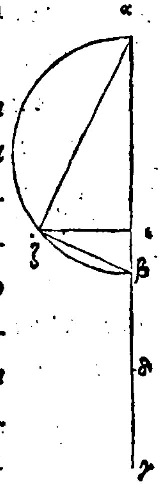
lineam



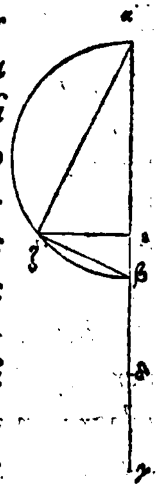
lineam βγ perpendicularis βι, sitq; æqualis lineæ βα, describaturq; figura ut picta est. Cũ igitur sit sicut δβ ad δγ, ita parallelogrammum βζ ad parallelogrammum δκ per 1.6. Composita ergo proportione erit sicut tota linea βγ ad lineã δγ, ita parallelogrammũ βκ ad parallelogrammũ δκ per 18.5. Est autem linea βγ dupla lineæ δγ, ergo parallelogrammum βκ erit duplum parallelogrammi δκ. Est autem parallelogrammum βκ ex lineis αβ, βγ. nam linea αβ est æqualis lineæ βι: parallelogrammũ uero δκ est ex lineis αβ, βδ. nam æqualis est βδ linea, lineæ δγ: linea uerò αβ lineæ δζ. quod demonstrandum erat.

Trigesimumtertium Theorema.

Reperire duas rectas potentia incommensurabiles, quarum quadrata simul addita faciant superficiem rationalem, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum sit mediale.



Proponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles αβ, βγ, huiusmodi, ut maior ex illis, nempe αβ, plus possit, quàm minor βγ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine per lemma positũ priore loco post 30 theorema huius libri. Diuidaturque linea βγ bifariam & æqualiter in pũcto δ: & quadrato lineæ βδ uel δγ æquale secundum lineam αβ applicetur paral-



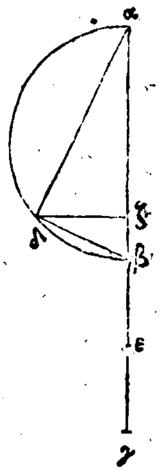
lelogrammũ quadrata figura deficiens per 28.6.(Hæc autem uerba, quadrata figura deficiẽs, idem significant quod ea quibus usi sumus in 18 & 19 theoremate, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrãmi.) sitq́; parallelogrammũ ex α ι, ι β. describatur super linea α ϛ semicirculus α ζ ϛ, & à linea α β ad circunferentiã semicirculi ducatur perpendicularis ι ζ, ducantúrq́; lineæ α ζ, ζ β. Cum igitur sint duæ rectæ inæquales α ϛ, ϛ γ, positq́; linea α β plusquam linea β γ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine: quartæ autẽ parti quadrati lineæ minoris β γ, hoc est quadrato illius dimidiæ quod est δ β, æquale parallelogrammum deficiens figura quadrata applicatũ sit secundum lineam α β, quod parallelogrammum est ex α ι, ι β. Ergo incommensurabilis est longitudine linea α ι lineæ ι β, per secundam partem 19 huius libri. Est autem sicut linea α ι ad lineam ι β, ita parallelogrammũ ex β α, α ι ad parallelogrammum ex α β, β ι, per lemma penultimo loco positum ante hoc theorema. Est autẽ parallelogrammum ex α β, α ι æquale quadrato lineæ α ζ, per secundam partẽ lemmatis primo positi post 32 theorema: parallelogrammum autem ex α β, β ι est æquale quadrato lineæ β ζ per primã partem eiusdem lemmatis. Ergo incõmensurabile est quadratũ lineæ α ζ quadrato lineæ β ζ per 10 huius, ergo lineæ α ζ, ζ β sunt potentia incommensurabiles. Sed quia linea α ϛ est rationalis,

nalis, rationale est ergo quadratum ipsius. ergo compositum ex additione amborum quadratorum, nempe descriptorum ex lineis α ζ, ζ ϛ, quæ sunt æqualia quadrato lineæ α β per 47.1. erit inquam illud compositum rationale. Rursum parallelogrammũ ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ ι ζ per tertiam partem eiusdem lemmatis. Sed per suppositionem idem parallelogrammum ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ β δ. Ergo linea ζ ι est æqualis lineæ ϛ δ. ergo linea β γ est dupla ad lineam ζ ι. Quare & parallelogrammum ex α β, β γ est duplũ ad parallelogrammũ ex α ϛ, ι ζ, per proximũ lemma, quod perperam positũ esse diximus in exemplari græco post huius theorematis demõstrationem. Sed parallelogrammum ex α β, β γ est mediale per suppositionem & 22 theorema. Ergo etiam mediale erit parallelogrammum ex α β, ι ζ per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α β, ι ζ est æquale parallelogrammo ex α ζ, ζ β per quartam partem illius lemmatis positi post 32. theorema. Ergo parallelogrammum ex α ζ, ζ β erit mediale. Sed modo probatũ est compositũ ex quadratis earundem linearum α ζ, ζ β esse rationale. Repertæ sunt ergo duæ lineæ rectæ, nempe α ζ, ζ β potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: parallelogrammum uerò ex eisdem cõtentũ, mediale, quod faciendum erat.

Trigesimumquartum Theorema.

Reperire lineas duas rectas potentia incommensurabiles conficientes compositum ex ipsarũ quadratis mediale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum rationale.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles α β, ϲ γ rationale continentes parallelogrammum ex ipsis, tales inquã, ut linea α β possit plus quàm linea β γ quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, per postremam partem demõstrationis theorematis 31. *Describatúrque super linea α ϲ semicirculus α δ β. diuidatur etiam linea ϲ γ bifariam & æqualiter in puncto ε: & secundũ lineã α β quadrato lineæ β ε æquale parallelogrammum applicetur, deficiens figura quadrata quod parallelogrammum sit ex α ζ, ζ β, ut dictũ*



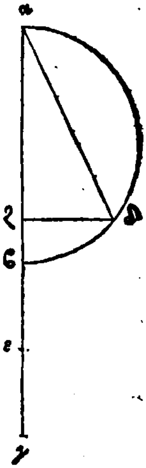
est in proximo theoremate. Incommensurabilis est ergo longitudine linea α ζ lineæ ζ β, ut ibidem dictum est: & à puncto ζ erigatur linea ζ δ perpendicularis super linea α β, ducantúrque lineæ α δ, δ β. Et *quoniam est sicut linea α ζ ad lineam ζ β, ita parallelogrammum ex β α, α ζ ad parallelogrammum ex β α, β ζ per alterum lemma positum ante theorema* 33. *uel per primũ sexti.* Er*go per* 10 *huius, parallelogrammum ex β α, α ζ est incõmensurabile parallelogrammo ex α ϲ, β ζ.* Sed *per lemma positum post* 32 *theorema, parallelogrammum ex ϲ α, α ζ est æquale quadrato lineæ α δ: parallelogrammũ uerò ex α β, ϲ ζ est item æquale quadrato lineæ β δ.* Incõ*mensurabile est ergo quadratum lineæ α δ quadrato lineæ ϲ δ.* Ergo *lineæ α δ, δ ϲ sunt potentia incommensurabiles.*

*rabiles.*Et *quoniam quadratum lineæ α β est mediale, quod est æquale duobus quadratis duarum linearum α δ, δ β per* 47.1.*Ergo compositum ex illis duobus quadratis linearum α δ, δ β est etiam mediale.*Et *quoniam linea β γ est dupla ad lineam δ ζ, ut probatū est in proximo theoremate.*Ergo *parallelogrammum ex α β, β γ erit duplum ad parallelogrammum ex α β, δ ζ per lemma positum ante* 33 *theorema, uel per primam sexti, quare & eidem erit commensurabile per* 6 *huius.*Sed *per positionem parallelogrammum ex α β, β γ est rationale. ergo parallelogrammum ex α β, δ ζ est etiam rationale. parallelogrammo uerò ex α ε, δ ζ æquale est parallelogrammum ex α δ, δ β per tertiam partem lemmatis positi post* 32 *theorema. quare parallelogrammū ex α δ, δ β erit etiam rationale.*Repertæ *sunt ergo duæ lineæ rectæ, nēpe α δ, δ β potentia incōmēsurabiles &c.*

Trigesimumquintum Theorema.

Reperire duas lineas rectas potentia incommensurabiles, conficientes id quod ex ipsarum quadratis componitur mediale, simúlque parallelogrammum ex ipsis cōtentū, mediale, quod præterea parallelogrammum sit incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles α β, ε γ mediale continentes, tales inquam, ut α ε plus posit quàm β γ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, per postremam partem demonstrationis theorematis 32. *Describatúrque super linea α ε*



ſemicirculus α δ β, cæteráque constructa ſunto eo modo quo in præcedentibus. Cum linea α ζ ſit incommenſurabilis longitudine lineæ ζ β, eſt etiam incommenſurabilis potẽtia linea α δ lineæ δ β, per ea quæ ſunt demonſtrata in proximo theoremate. Et quoniam quadratum lineæ α β eſt mediale, ergo compoſitum ex quadratis linearũ α δ, δ ϐ quod eſt æquale quadrato lineæ α ϐ per 47.1. erit etiam mediale. Et quoniã parallelogrammum ex α ζ, ζ β eſt æquale alterutri quadrato ex ſingulis lineis β ε, δ ζ. Nam ex ſuppoſitione parallelogrammum ex α ζ, ζ ϐ eſt æquale quadrato lineæ ϐ ε. idem etiã parallelogrammũ ex lineis α ζ, ζ β eſt æquale quadrato lineæ δ ζ per tertiam partem lemmatis poſiti poſt 32. theorema. Ergo linea δ ζ eſt æqualis lineæ ϐ ε. dupla eſt ergo linea β γ ad lineam ζ δ. Quare & parallelogrammũ ex α β, β γ erit duplum ad parallelogrammum ex α β, ζ δ, itaque ſunt commenſurabilia per ſextam huius. Sed parallelogrãmum ex α β, β γ eſt mediale per poſitionem. Ergo parallelogrammum ex α ϐ, ζ δ erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α ϐ ζ δ eſt æquale parallelogrammo ex α δ, δ β per quartã partem eiuſdem lemmatis. Ergo parallelogrammum ex α δ, δ ϐ erit etiam mediale. Et quoniam linea α ϐ eſt incommenſurabilis longitudine lineæ β γ: linea uerò ϐ γ eſt commẽſurabilis longitudine lineæ β ε: eſt ergo linea α β longitudine incommenſurabilis lineæ β ε per 13. uel 14 huius.

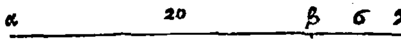
huius. quare & quadratum lineæ α β erit incommensurabile parallelogrammo ex α β, β ι per primum sexti & 10 huius. Sed quadrato lineæ α ε est æquale compositum ex quadratis linearum α δ, δ β. parallelogrammo uerò ex α β, β ι est æquale parallelogrammũ ex α β, ζ δ, hoc est parallelogrammum ex α δ, δ β. Nam parallelogrammũ ex α β, ζ δ est æquale parallelogrammo ex α δ, δ ε. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearum α δ, δ ε parallelogrammo ex eisdem lineis α δ, δ ε. Repertæ sunt ergo duæ rectæ nempe α δ, δ ε potentia incommensurabiles &c.

Principium senariorum per compositionem.

Trigesimumsextum Theorema.

Si duæ rationales potentia tantum commensurabiles cõponantur, tota linea erit irrationalis. Vocetur autem Binomium.

Componantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α β, ε γ, quales reperire docet 11 huius. Dico totam lineam α γ esse irrationalem. Cum enim sit incommensurabilis longitudine linea α β, lineæ ε γ, positæ sunt enim potentia tantum commensurabiles: cumque sit sicut linea α ε ad lineã β γ, ita parallelogrãmum ex α ε, ε γ ad quadratum ε γ per 1. 6. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ex α ε, ε γ quadrato lineæ β γ per 10 huius. Sed parallelogrammo ex α ε, ε γ commensurabile est id quod fit bis ex α ε, β γ per 6. huius. Ergo id quod fit bis ex α ε, β γ est incommensurabi-

le quadrato lineæ βγ 
per 14 huius. Quadrato autem lineæ ζγ est commensurabile compositū ex quadratis linearum αβ, ζγ per 16 huius, quia per suppositionem lineæ αβ, ζγ sunt potentia tantum commensurabiles. Ergo *per 14 compositum ex quadratis linearum αβ, ζγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, ζγ.* Ergo *per 17 id quod fit bis ex αζ, ζγ cum quadratis linearum αζ, ζγ, quod est æquale quadrato totius lineæ αγ per 4.2. est incommensurabile cōposito ex quadratis linearum αζ, ζγ.* Sed *compositū ex quadratis linearum αζ, βγ est rationale, quia est commensurabile alterutri quadrato linearum αβ, ζγ, quorum utrūque est rationale per positionem.* Ergo *quadratum lineæ αγ est irrationale, quare & linea αγ erit irrationalis. Vocetur autem linea illa* Binomium. *Hic autem & in cæteris deinceps denominationibus linearum irrationalium, nihil innouandum censuimus de uocibus tritis & iamdudum inter latinos geometras receptis, nisi si quādo ratio contrarium suaserit.*

Trigesimumseptimum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes cōponantur, tota linea est irrationalis. Vocetur autem bimediale prius.

Componantur *duæ mediales potentia tantum commensurabiles αζ, ζγ rationale continentes*  *(quales reperire docet 28) dico totam lineam αγ esse irrationalem. sicut enim*

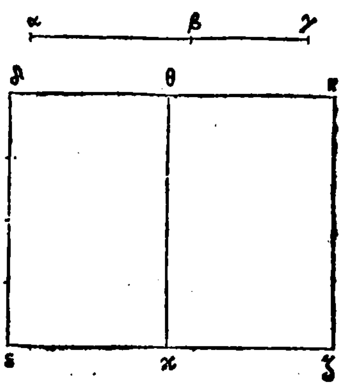
dictum

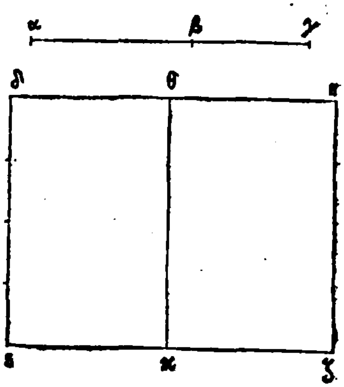
dictum est in proximo theoremate, compositum ex quadratis linearum αβ, ϐγ est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per 17 huius, compositum ex quadratis linearum αϐ, βγ cum eo quod fit bis ex αϐ, βγ, quod est æquale quadrato totius lineæ αγ, est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ, ϐγ. Sed id quod fit bis ex αϐ, ϐγ est commensurabile ei quod fit semel ex αϐ, ϐγ per 6 huius. Ergo quadratum totius lineæ αγ est incommensurabile ei quod fit semel ex αϐ, ϐγ per 14 huius. Sed per positionem id quod fit semel ex αϐ, ϐγ est rationale. Ergo quadratum totius lineæ αγ est irrationale. Irrationalis est ergo tota linea αγ. Vocetur autem Bimediale prius.

Trigesimumoctauum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes componantur, tota linea est irrationalis, uocetur autem Bimediale secundum.

Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles αϐ, ϐγ mediale continentes (quales docet reperire 29.) Dico totam lineã αγ esse irrationalem. Proponatur enim linea rationalis δι, & quadrato lineæ αγ æquale secundum lineam δι applicetur parallelogrãmum δζ, cuius alterũ latus





ſit δκ. Cum quadratũ lineæ αγ ſit æquale quadratis linearum αβ, βγ. & ei quod fit bis ex αβ, βγ per 4.2. applicetur ſecundum lineã δε quadratis linearum αβ, βγ æquale parallelogrammum εθ. Reſiduum ergo parallelogrammum ζθ, eſt æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ. Sed poſitũ eſt parallelogrammũ ex αβ, βγ eſſe mediale, cui id quod fit bis ex αβ, βγ eſt commenſurabile per 6 huius. Ergo per corollarium 24 theorematis id quod fit bis ex αβ, βγ eſt etiam mediale. Eſt autem parallelogrammum εθ æquale quadratis linearum αβ, βγ, quæ quadrata ſunt inter ſe commenſurabilia ex ſuppoſitione. Ergo per 16 huius, parallelogrammum εθ erit commenſurabile utrique quadrato lineæ αβ, & lineæ βγ. Sed illa quadrata ſunt medialia, quia ex poſitione lineæ αβ, βγ ſunt mediales. Ergo per corollarium 24 theorematis parallelogrammũ εθ erit etiam mediale. Ei uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale eſt reſiduum parallelogrammũ θζ. Mediale eſt ergo utrũque parallelogrammum εθ, θζ, & ſecundum lineam rationalem δε applicantur. Rationalis eſt ergo utraq; linearum δθ, θκ, & incommẽſurabilis longitudine lineæ δε, per 23. Et quoniam per poſitionem eſt incommenſurabilis longitudine linea αβ, lineæ βγ: eſt autem ſicut linea αβ ad lineam βγ, ita quadratum lineæ αβ ad parallelogrammum ex αβ, βγ per 1.6: incommenſurabile

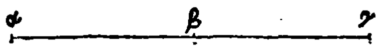
eſt

est ergo quadratum lineæ αβ parallelogrammo ex αβ, βγ per 10 huius. Sed quadrato lineæ αβ est commensurabile compositũ ex quadratis linearum αβ, ϐγ per 16, quia quadrata linearum αβ, ϐγ sunt commẽsurabilia, cum lineæ αϐ, ϐγ positæ sint potentia tantum commensurabiles. Ergo compositum ex quadratis linearum αϐ, ϐγ est incommensurabile parallelogrammo ex αϐ, βγ per 14. Parallelogrammo uero ex αϐ, ϐγ commensurabile est id quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per idẽ 14 theorema incommensurabile est compositum ex quadratis linearũ αβ, βγ ei quod fit bis ex αϐ, ϐγ. Ergo eis æqualia parallelogramma ιθ, θζ sunt etiam inter se incommensurabilia. quare & linea δθ lineæ θκ est incommẽsurabilis lõgitudine per 1.6 & 10 huius. Sed modo probatum est eas esse rationales. lineæ ergo δθ, θκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: quare & linea δκ est irrationalis per 36 huius. Sed parallelogrammum δζ contentum ex linea irrationali δκ, & rationali δι est ipsum etiam irrationale. nam si esset rationale cum applicetur secundum lineam rationalem puta δι, esset & altera linea nempe δκ etiam rationalis per 21. cum tamen probata sit irrationalis. Irrationale est ergo parallelogrammum δζ. quare & linea quæ illud parallelogrammum potest, nempe αγ, est etiam irrationalis. Vocetur autem Bimediale *secundum. Vocauit autem illam eo nomine, quia mediale est non rationale quod continetur ex illis medialibus lineis αϐ, βγ, quarum compositione fit linea αγ. Posterius est autem & natura & cognitione mediale rationali.*

Trigesimumnonum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur, conficientes compositum ex quadratis ipsarum rationale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum mediale, tota linea recta est irrationalis. Vocetur autem linea maior.

Componantur enim duæ rectæ potentia incommensurabiles α β, β γ conficiētes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 33.) Dico *totam lineā α γ esse irrationalem.* Nam *parallelogrammum ex α β, β γ est mediale: & quod fit bis ex α β, β γ est commensurabile ei quod fit semel ex α ϐ, β γ per 6 huius.* Ergo *per corollarium 24 huius, quod fit bis ex α β, β γ erit mediale.* Sed *per positionem compositum ex quadratis linearum α β, β γ est rationale.* Ergo *id quod fit bis ex α β, β γ est incommensurabile composito ex quadratis linearū α ϐ, β γ.* Quare *per 17 compositum ex quadratis linearum α β, β γ cum eo quod fit bis ex α β, β γ est incommē-surabile composito ex quadratis linearum α ϐ, β γ.* Sed *compositum ex quadratis linearū α β, β γ cum eo quod fit bis ex α β, ϐ γ est æquale quadrato totius lineæ α γ per 4.2.* Compositū *uerò quod fit ex quadratis linearū α ϐ, ϐ γ est rationale per positionem.* Ergo *quadratū totius lineæ α γ est irrationale. ergo tota linea α γ est etiā irrationalis.* Vocetur *autem linea maior.* Vocauit *autē ideo maiorem, quia compositum ex quadratis linearū α ϐ, ϐ γ quæ sunt rationalia, est maius eo quod fit bis ex*



α ϐ,

αβ,βγ ut modo dicemus. Et *ſane decet fieri denominationem à conuenientia rationalium.*

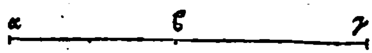
Lemma.

Quod autem compoſitum ex quadratis linearum αβ,βγ ſit maius eo quod fit bis ex αβ, βγ, ita demõſtretur. Primò *manifeſtum eſt lineas αβ,βγ eſſe inæquales.* Nam *ſi æquales eſſent, æqualia quoque eſſent quadrata linearũ αβ, βγ ei quod fieret bis ex αβ,βγ. itaque ambo, compoſitũ inquam ex quadratis linearum αβ,βγ, & id quod ex illis continetur, eſſent ſimul aut medialia aut rationalia, quod eſt cõtra poſitionem.* Ergo *inæquales ſunt lineæ αβ,βγ.* *Sit autem per ſuppoſitionem maior linea αβ: ſit autẽ æqualis linea βδ lineæ βγ.* Ergo *per 7.2. quadrata linearũ αβ,βδ ſunt æqualia ei quod fit bis ex αβ, βδ, & quadrato lineæ δα.* Eſt *autem æqualis δβ lineæ βγ.* Ergo *quadrata linearum αβ, βγ ſunt æqualia ei quod fit bis ex αβ,βγ, & quadrato lineæ δα. Quare quadrata linearum αβ,βγ ſunt maiora quàm id quod fit bis ex αβ,βγ, tanto quantũ eſt quadratũ lineæ δα.*

Quadrageſimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur conficientes compoſitũ ex ipſarum quadratis mediale: id uerò quod fit ex ipſis rationale, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens rationale & mediale.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽſurabiles αβ, βγ conficientes id quod dicitur in theoremate (quales



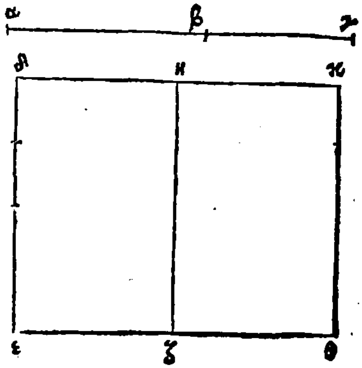
reperire docet 34.) Dico totam lineam αγ esse irrationalem. Cum enim cõpositum ex quadratis linearum αβ, βγ sit mediale: id uerò quod fit bis ex αβ, βγ sit rationale. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearũ αβ, βγ ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo per 17 compositum ex quadratis linearũ αβ, βγ unà cum eo quod fit bis ex αβ, βγ, quod est quadratũ totius αγ, est incommẽsurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Sed id quod fit bis ex αβ, βγ est rationale, quia id quod continetur ex αβ, βγ positum est esse rationale. Ergo irrationale est quadratum totius lineæ αγ, quare & ipsa linea αγ erit irrationalis. Vocetur autẽ potens rationale & mediale. Quam ideo sic uocauit, quia potest duas superficies, aliam quidẽ rationalem, aliam uerò medialem. Et quia rationale præcedit ordine naturæ & cognitionis, prius intulit mentionẽ ipsius rationalis. Sciendum est has rationes denominationum quæ sunt in 38. 39. & hoc theoremate, item in 41 esse additiones, quæ tamẽ ut in nonnullis conueniãt hæc certe nõ satisfacit.

Quadragesimumprimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur conficientes compositũ ex quadratis ipsarum, mediale & quod continetur ex ipsis mediale, & præterea incommensurabile composito ex quadratis ipsarum, tota linea est irrationalis. Vocetur autem potens duo medialia.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽsurabiles αβ,

βγ



$\beta\gamma$ conficiẽtes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 35.) Dico totam lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Proponatur linea rationalis $\delta\epsilon$, & secũdum illã quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ æquale parallelogrammum $\delta\zeta$ applicetur. Item secundum eandem lineam $\delta\epsilon$ uel ei æqualem $\eta\zeta$ ac æquale ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ parallelogrammum $\eta\theta$ applicetur: totum ergo parallelogrammum $\delta\theta$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\gamma$ per 4. 2. Et quoniam cõpositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est mediale cui est æquale parallelogrammũ $\delta\zeta$. Ergo mediale erit etiã $\delta\zeta$ per ea quæ scripsimus in demonstratione 38 theorematis. ergo linea $\delta\eta$ est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ $\delta\epsilon$ per 23. Eadẽ ratione linea $\eta\kappa$ erit rationalis & incommensurabilis longitudine eidẽ lineæ $\delta\epsilon$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$: ergo etiam incommensurabile erit parallelogrammum $\delta\zeta$ parallelogrammo $\theta\eta$. Quare & linea $\delta\eta$ lineæ $\eta\kappa$ erit incommensurabilis per 1. 6. & 10 huius. Sed modo probatum est illas esse rationales: sunt ergo lineæ $\delta\eta$, $\eta\kappa$ rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo tota linea $\delta\kappa$ est irrationalis quæ uocatur Binomiũ per 36. Sed linea $\delta\epsilon$ est rationalis. ergo parallelogrammum $\delta\theta$ est irrationale per id quod probatum est in fine 38.

Ergo linea potens illud parallelogrammum nempe α γ erit irrationalis. Vocetur autẽ potẽs duo medialia. Hãc uerò uocauit hoc nomine, quia potest duas superficies mediales, & eam quæ componitur ex quadratis linearum α β, β γ, & eam quæ fit ex α β, β γ. Quod uerò dictæ irrationales lineæ unico modo, id est uno tantum in puncto diuiduntur in rectas lineas ex quibus componũtur, & quæ constituunt singulas species illarũ irrationalium, mox demonstrabimus, si prius demonstrauerimus huiusmodi lemma.

Lemma.

Proponatur recta linea α β, diuidatúrque in partes inæquales duas in puncto γ, iterúmq; diuidatur eadem linea α β in partes duas inæquales in alio puncto δ. Sit

autem linea α γ maior quàm linea δ β. Dico compositum ex quadratis duarum linearum α γ, γ β esse maius quàm compositum ex quadratis α δ, δ β. Diuidatur enim bifariam & æqualiter linea α β in puncto ε. & quoniam linea α γ est maior linea δ β, auferatur ab utraque ea pars quæ utriusque est communis nempe δ γ. Residua ergo linea α δ est maior residua linea γ β. Quia de duabus lineis inæqualibus quarum maior erat α γ, idem ablatum est nempe δ γ. Est autem æqualis linea α ε lineæ ε β. Ergo linea δ ε est minor linea ε γ. ergo puncta γ, δ, non æqualiter distant à puncto ε, quod est punctum sectionis in partes duas æquales. Et quoniam parallelogrammum contentum ex α γ, γ β cum quadrato lineæ γ ε est æquale quadrato lineæ ε β per 5.2.

&

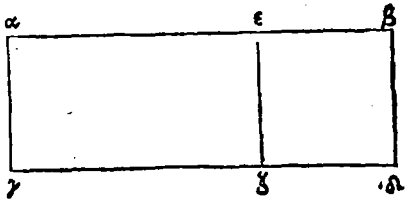
& eadem ratione parallelogrammum contentum ex αδ, δβ unà cum quadrato lineæ δι est æquale eidem quadrato eiusdem lineæ ιβ. Ergo parallelogrammum contentum ex αγ, γβ unà cum quadrato lineæ γι est æquale parallelogrammo ex αδ, δβ unà cum quadrato lineæ δι, quia quæ sunt æqualia uni tertio sunt æqualia inter se. Sed quadratũ lineæ δι est minus quadrato lineæ ιγ, quia linea δι est probata minor linea ιγ. Ergò & residuum nempe parallelogrammum ex αγ, γβ est minus parallelogrammo ex αδ, δβ. quare & id quod fit bis ex αγ, γβ est minus eo quod fit bis ex αδ, δβ. Sed per 4. 2 quadratum totius lineæ αβ est æquale composito ex quadratis linearum αγ, γβ unà cum eo quod fit bis ex αγ, γβ, & eadem ratione. Idem quadratum totius lineæ αβ est æquale composito ex quadratis linearum αδ, δβ unà cum eo quod fit bis ex αδ, δβ. Ergo compositum ex quadratis linearum αγ, γβ unà cum eo quod fit bis ex αγ, γβ est æquale composito ex quadratis linearum αδ, δϐ unà cum eo quod fit bis ex αδ, δϐ. Sed modo probatũ est id quod fit bis ex αγ, γβ esse minus eo quod fit bis ex αδ, δβ. Residuum ergo nempe compositum ex quadratis linearum αγ, γϐ est maius residuo nempe composito ex quadratis linearum αδ, δβ, quod erat demonstrandum.

Lemma.

Rationale excedit rationale superficie rationali.

Sit rationale αδ excedẽs aliud rationale αζ, superficie ιδ. Dico superficiem ιδ esse etiam rationalem. Nam pa-

rallelogrammũ α δ eſt commẽſurabile parallelogrammo α ζ. Ergo per ſecundam partẽ 16 huius, parallelogrammũ

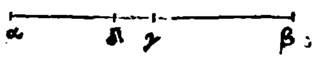


α ζ eſt commẽſurabile parallelogrammo ε δ. Sed parallelogrammum α ζ eſt rationale. Ergo etiam parallelogrammum ε δ eſt rationale.

Quadrageſimumſecundum Theorema.

Binomium in unico tantũ puncto diuiditur in ſua nomina, id eſt in lineas ex quibus componitur.

Sit binomium linea α β diuiſa in puncto γ in ſua nomina, hoc eſt in lineas ex quibus linea tota α β cõponitur. Ergo lineæ α γ, γ β ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles per 36. Dico lineam α β non poſſe diuidi in ullo alio puncto quàm γ, in alias lineas duas rationales potentia tantum commenſurabiles. Nam ſi contradicatur, diuidatur in pũcto δ, ita ut lineæ α δ, δ β ſint duæ rationales potentia tantum commenſurabiles. Primò conſtat neutrum illorum punctorum γ, δ diuidere lineã α β in partes æquales, alioquin eſſent lineæ α γ, γ β, rationales longitudine cõmenſurabiles, ſimiliter & lineæ α δ, δ β. Quælibet enim linea ſeipſam metitur & quãcunque aliam ſibi æqualem. Præterea linea δ β uel eſt eadem cũ linea α γ, hoc eſt æqualis lineæ α γ, uel eadem maior, uel minor eadem. Si eſt æqualis linea δ β lineæ α γ, impoſita ergo linea δ β lineæ α γ ſingulæ extremitates unius



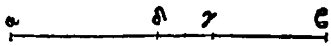
tribuunt

tribuũt cũ singulis extremitatibus alterius. Posito *itaque puncto β super puncto α, punctum etiam δ incidet super punctum γ, & residua linea α δ ex linea α γ erit etiam æqualis lineæ γ β residuæ ex δ β.* Ergo *linea α β diuiditur in puncto γ, in sua nomina.* Sic *itaque linea α β diuisa per punctum δ, diuisa erit, in eodem puncto quo fuerat prius diuisa eadem linea α β per punctũ γ, quod est contra hypothesin contradicentis. nam ex positione erat diuisa aliter atque aliter in punctis γ, δ.* Quòd *si linea δ β est maior quàm linea α γ, diuidatur linea α β bifariam & æqualiter in puncto ε. non itaque puncta γ, δ æqualiter distabunt à puncto ε.* Sed *per lemma modo positum post* 41, *compositum ex quadratis linearum α δ, δ β est maius composito ex quadratis linearum α γ, γ β: & compositum ex quadratis linearum α δ, δ β unà cum eo quod fit bis ex α δ, δ β est æquale composito ex quadratis linearum α γ, γ β, unà cum eo quod fit bis ex α γ, γ β. quia utrunque est æquale quadrato totius lineæ α β per* 4.2. Ergo *quanto compositum ex quadratis linearum α δ, δ β est maius cõposito ex quadratis linearũ α γ, γ β, tanto id quod fit bis ex α γ, γ β est maius eo quod fit bis ex α δ, δ β.* Quod *ipsum quãuis sit indemonstrabile, modica tamen inductione fit manifestius, si duabus lineis æqualibus propositis, puta quatuor pedes longis, ab altera pedes tres abstuleris, ab altera pedes duos.* Re*siduum eius à qua pedes duos abstulisti, est maius quàm residuum eius à qua pedes tres abstulisti pede uno. quãto scilicet maiores erant pedes tres ablati quã pedes duo ablati.* Sed *compositum ex quadratis linearum α δ, δ β* *excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β superficie rationali per lemma positum ante hoc theorema. Sunt enim utraq; composita rationalia, quia lineæ α δ, δ β, sunt positæ rationales potentia tantum cõmensurabiles, similiter & lineæ α γ, γ ε. Ergo etiam id quod fit bis ex α γ, γ ε excedit id quod fit bis ex α δ, δ ε superficie rationali, cum sint tamẽ ambo medialia per 22 huius, quod est impossibile per 27. Quòd si linea δ ε est minor linea α γ, eadem uia deducitur ad idem impossibile. Non igitur binomium diuidetur aliter atque aliter in sua nomina, sed unico tantum modo. Qui defendebant unitatem entis ex opinione Parmenidis, existimauerunt esse quasdã lineas insecabiles, de quibus ageretur hoc theoremate & cæteris sequentibus, quam tamen illorum opinionem Aristoteles in libello περὶ ἀτόμων γραμμῶν, seu quis alius author eius opusculi, falsam esse arguit, & peruerse ab illis intellectũ hoc theorema.*

Quadragesimumtertium Theorema.

Bimediale prius in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit bimediale prius linea α β, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ ε sint mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes.



Dico lineam α β non posse diuidi in alio puncto quàm γ in sua nomina. Quod si cõtradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut α δ, δ β sint mediales potentia tantum commensurabiles rationale continẽtes. Cum igitur tanto differat id quod fit bis ex

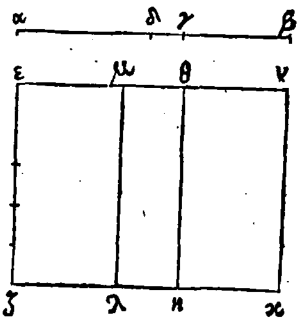
α δ,

α δ, δ β, ab eo quod ſit bis ex α γ, γ β, quanto differt compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β, à compoſito ex quadratis linearum α δ, δ β, & quod ſit bis ex α δ, β δ differat ab eo quod ſit bis ex α γ, γ β, ſuperficie rationali, ſunt enim ambo rationalia. Ergo & cõpoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β differt à compoſito ex quadratis linearum α δ, δ β mediale inquam à mediali ſuperficie rationali quod eſt impoſsibile. Non igitur bimediale prius aliter atque aliter diuiditur in ſua nomina, ergo unico tantum modo.

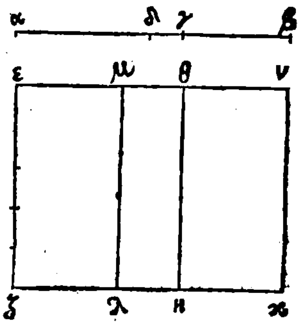
Quadrageſimumquartum Theorema.

Bimediale ſecundum in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.

Sit Bimediale ſecundum linea α β diuiſa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β ſint mediales potentia tantum cõmẽſurabiles, mediale continentes. Manifeſtũ eſt igitur punctum γ non ſecare totam lineam α β bifariã & æqualiter, quia lineæ α γ, γ β non ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles. Dico lineam α β



non poſſe diuidi aliter quàm in pũcto γ, in ſua nomina. Quòd ſi contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut linea α γ ne ſit eadem, hoc eſt ne ſit æqualis lineæ δ β, ſed ea maior. lineæ autẽ α δ, δ β ſint mediales potentia tantum commenſurabiles mediale continentes per te. Manifeſtum eſt primo quadrata linearũ α γ, γ β eſſe maiora



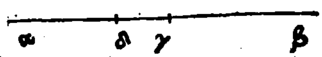
quadratis linearũ α δ, δ β per lemma positum ante 42. Proponatur linea rationalis ε ζ, & quadrato lineæ α β æquale secundum lineã ε ζ applicetur parallelogrammum ε κ. Ex quo parallelogrammo detrahatur id quod æquale est quadratis linearum α γ, γ β, puta parallelogrammum ε η. Residuum ergo, nempe parallelogrammum θ κ est æquale ei quod fit bis ex α γ, γ β. Rursus quadratis linearũ α δ, δ β quæ sunt minora quadratis linearum α γ, γ β æquale detrahatur parallelogrammum ε λ. Residuum ergo parallelogrammum μ κ, est æquale ei quod fit bis ex α δ, δ β. Et quoniam quadrata linearum α γ, γ β sunt medialia, ergo parallelogrammum ε η erit etiam mediale, & secũdum lineã rationalẽ ε ζ applicatur rationalis. Est ergo linea ε θ & incommẽsurabilis longitudine lineæ ε ζ. Eadem ratione quia parallelogrammum θ κ est mediale. (nam id quod est ei æquale, nempe quod fit bis ex α γ, γ β est mediale.) Ergo linea θ ν est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ ε ζ. Et quoniam lineæ α γ, γ β sunt mediales potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea α γ ad lineã γ β, ita quadratũ lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β per 1.6. ergo quadratum lineæ α γ est incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. Sed quadrato lineæ α γ est commensurabile compositum ex quadratis linearum α γ, γ β per 16. quia lineæ

α γ,

α γ, γ β sunt potentia inter se commensurabiles. parallelogrammo uerò ex α γ, γ β est commensurabile id quod fit bis ex α γ, γ ϵ. Ergo compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϵ est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ ϵ, per corollarium à nobis additum theoremati 14. Sed cõposito ex quadratis linearum α γ, γ ϵ est æquale parallelogrammũ ι κ, ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β est æquale parallelogrammum θ κ. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ι κ parallelogrammo θ κ. quare & linea ι θ, erit incommensurabilis longitudine lineæ θ ν. sunt autem ambæ rationales. Sunt ergo illæ lineæ ι θ, θ ν rationales potentia tantum commensurabiles, per lemma positũ post 19 theorema. Nam eo ipso quod sunt rationales sunt potentia saltem commẽsurabiles. Ergo tota linea ι ν erit binomiũ per 36. quæ diuisa est in puncto θ, in sua nomina. Eadem uia demonstrabitur lineas ι μ, μ ν esse rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea ι ν quæ est binomium, in alio atque alio puncto nempe θ, μ, diuiditur in sua nomina quod est impoßibile per 42. Quòd si quis dicat posse fieri ut linea ι θ sit eadem hoc æqualis lineæ μ ν, itaque nihil cõsequi impoßibile, neque lineam ι ν quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio, atque alio puncto, sed in uno tantum. hoc etiam demonstrabimus, nempe lineam ι θ nõ esse eandẽ, hoc est æqualem lineæ μ ν. Nam quadrata linearũ α γ, γ ϵ, sunt maiora quadratis linearum α δ, δ ϵ per lemma positum post 41. Sed quadrata linearũ α δ, δ β sunt maiora eo quod fit bis ex α δ, δ β, per lemma positũ post 39. Ergo multo maiora sunt quadrata linearũ α γ, γ ϵ, hoc *est illis æquale parallelogrammũ $\iota\,\kappa$ est maius eo quod fit bis ex $\alpha\,\delta$, $\delta\,\beta$ hoc est, quàm parallelogrammum $\mu\,\kappa$, quod est æquale ei quod fit bis ex $\alpha\,\delta$, $\delta\,\beta$.* Ergo per 1.6. *Linea etiam $\iota\,\theta$ erit maior quàm linea $\mu\,\nu$.* Ergo *linea $\iota\,\theta$ non erit eadem cum linea $\mu\,\nu$.* Q*uod si posueris ab initio lineam $\alpha\,\gamma$ esse minorem linea $\delta\,\beta$.* I*dem etiam tunc impossibile consequetur, hoc est lineam $\iota\,\nu$ quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio atque alio puncto.* Non *igitur bimediale secundum in alio atque alio puncto diuiditur in sua nomina, ergo in uno tantum.*

Quadragesimumquintum Theorema.

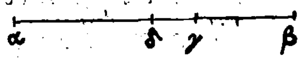
Linea maior in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.



Sit linea maior $\alpha\,\beta$ diuisa in puncto γ, ita ut $\alpha\,\gamma$, $\gamma\,\beta$ sint potentia incommensurabiles conficiẽtes compositum ex quadratis linearum $\alpha\,\gamma$, $\gamma\,\zeta$, rationale, contentũ uero ex ipsis parallelogrammum mediale. Dico *lineam $\alpha\,\beta$ non posse diuidi in sua nomina alibi quàm in puncto γ.* Q*uòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ in sua nomina.* E*t quoniam quanto differt compositum ex quadratis linearum $\alpha\,\gamma$, $\gamma\,\beta$ à composito ex quadratis linearũ $\alpha\,\delta$, $\delta\,\zeta$, tanto differt id quod fit bis ex $\alpha\,\delta$, $\delta\,\beta$ ab eo quod fit bis ex $\alpha\,\gamma$, $\gamma\,\beta$ per ea quæ scripsimus in demonstratione* 42 *theorematis.* S*ed compositum ex quadratis linearũ $\alpha\,\gamma$, $\gamma\,\zeta$ excedit compositum ex quadratis linearum $\alpha\,\delta$, $\delta\,\zeta$, superficie rationali.* S*unt enim ambo rationalia.* E*rgo & id quod fit bis ex $\alpha\,\delta$, $\delta\,\beta$ excedet id quod fit bis ex* *ex α γ, γ β superficie rationali, sed illa sunt medialia.* Ergo *mediale excedet mediale superficie rationali, quod est impoßibile per 27.* Non *igitur linea maior diuiditur aliter atq; aliter in sua nomina, ergo in uno tantū puncto diuidetur.*

Quadragesimumsextum Theorema.

Linea potens rationale & mediale in unico tantum puncto, diuiditur in sua nomina.

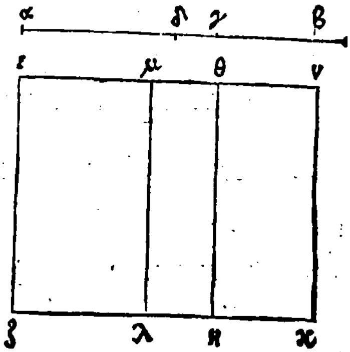


Sit linea potens rationale & mediale α β, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ β sint potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum α γ, γ β mediale: id autem quod cōtinetur ex α γ, γ β rationale. Dico *lineam α β in alio puncto quàm γ non posse diuidi in sua nomina.* Quod *si contradicatur, diuidatur in puncto δ, in sua nomina.* Cū *igitur quanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β ab eo quod fit bis ex α γ, γ β, tanto differat compositum ex quadratis linearum α γ, γ β à composito ex quadratis linearum α δ, δ β, id autem quod fit bis ex α γ, γ β excedat id quod fit bis ex α δ, δ β, superficie, rationali quia utrunque est rationale.* Ergo *& compositum ex quadratis linearum α γ, γ β excedit compositum ex quadratis linearum α δ, δ β superficie rationali, cum tamē utrunque illorum sit mediale.* Quod *est impoßibile.* Non *igitur linea potens rationale & mediale diuiditur aliter atque aliter in sua nomina.* Ergo *diuiditur tantum in puncto uno.*

Quadragesimumseptimum Theorema.

Linea potens duo medialia in unico tantum puncto diuiditur in ſua nomina.

Sit linea potens duo medialia αβ, diuiſa in puncto γ, ita ut lineæ αγ, γβ ſint potẽtia incommenſurabiles conficientes compoſitum ex quadratis linearum αγ, γβ mediale: ſimiliter & quod continetur ex ipſis mediale, item contentum ex ipſis incommẽſurabile compoſito ex quadratis ipſarum αγ γβ. Dico *lineam αβ non poſſe diuidi in alio puncto, quàm γ in ſua nomina. Quòd ſi contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut lineæ αδ, δβ conficiant ea quæ lineæ αγ, γβ. Sitq́; rurſus ex ſuppoſitione linea αγ maior linea δβ. Sit autem rationalis linea εζ, ſecundum quam applicetur parallelogrammum εη æquale quadratis linearum αγ, γβ. ei uerò quod fit bis ex αγ, γβ æquale applicetur θκ. Totum ergo parallelogrammum εκ eſt æquale quadrato lineæ αβ.* Rur*ſus ſecundum eandem lineam εζ applicetur æquale quadratis linearum αδ, δβ parallelogrammum ελ.* Re*ſiduum ergo parallelogrammũ μκ eſt æquale reſiduo, nempe ei quod fit bis ex αδ, δβ.* Et *quoniam ex ſuppoſitione compoſitum ex quadratis linearũ αγ, γβ eſt mediale.* E*ſt ergo parallelogrammũ illi æquale, nempe εη: etiam mediale & ſecũdum lineam rationalem εζ applicatur.* Ergo *linea εθ eſt rationalis, & incommenſurabilis longitudine lineæ εζ.* Ea*dem ratione*



&

& linea θ ν est etiam rationalis & incommensurabilis longitudine eidem lineæ ι ζ. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β (quia positum est esse incommensurabile ei quod fit semel ex α γ, γ β.) Ergo parallelogrammum ι κ est incommensurabile parallelogrammo θ κ. quare & linea ι θ est incommensurabilis lineæ θ ν. Sunt autem ι θ, θ ν rationales. Ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea ι ν est binomium per 36, & diuisa in puncto θ, in sua nomina. Similiter demonstrabimus eandem lineam ι ν diuidi in puncto μ in sua nomina: nec est linea ι θ lineæ μ ν eadem, hoc est æqualis, ut probatum est in fine demonstrationis 44. Ergo binomium alibi atque alibi diuiditur in sua nomina, quod est impossibile per 42. Non igitur linea potens duo medialia diuiditur alibi atque alibi in sua nominæ. Ergo in puncto uno tantum diuiditur.

Termini secundi siue definitiones secundæ.

Proposita linea rationali, & binomio diuiso in sua nomina, cuius binomij maius nomen, id est maior portio possit plusquam minus nomen quadrato lineæ sibi, maiori inquam nomini commensurabilis longitudine.

Siquidem maius nomen fuerit commensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea Binomium *primum.*

Si uerò minus nomen, id est minor portio binomij fuerit cõmensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea Binomium *secundum.*

Si uerò neutrum nomen fuerit commensurabile longitu-

dine propositæ lineæ rationali, uocetur binomiũ tertiũ.

Rursus si maius nomen poßit plusquã minus nomen quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, siquidem maius nomen est cõmensurabile lõgitudine propositæ lineæ rationali uocetur tota linea binomiũ quartum.

Si uerò minus nomen fuerit commensurabile longitudine lineæ rationali, uocetur binòmium quintum.

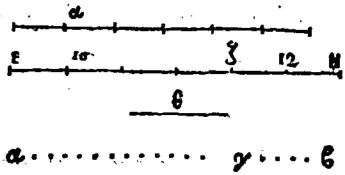
Si uerò neutrum nomen fuerit longitudine commensurabile lineæ rationali, uocetur illa binomium sextum.

Hìc nihil dicitur de lineis illis quarũ ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali, quia lineæ tales non sunt binomia, cum scilicet illæ cõponantur ex duabus rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, ut est in 36. Lineæ *uerò quarum ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali non sunt binomia, quia portiones taliũ linearum essent inter se quoque longitudine commensurabiles per 12 huius.* Ergo *non essent quales requirũtur ad compositionem binomij.* Præterea *lineæ tales nõ essent irrationales sed rationales, quia sunt commẽsurabiles singulis partibus se componẽtibus per 16.* Ergo *essent rationales quia componentes essent rationales.*

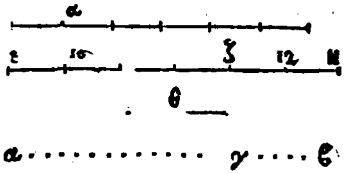
Quadragesimumoctauum Theorema.

Reperire binomium primum.

Proponantur numeri duo $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *tales ut compositus ex ipsis totus* $\alpha\beta$ *ad alterum ex ijsdẽ nempe* $\gamma\beta$ *habeat proportionem quã numerus quadratus ad numerũ quadratum: ad alterum uerò* $\alpha\gamma$, *idem* $\alpha\beta$ *proportionẽ eam ne*



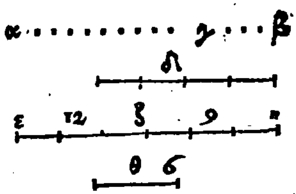
ne retineat quam numerus quadratus ad numerū quadratum, qualis est numerus quadratus diuisibilis in quadratum & non quadratū, inquit Campanus *theoremate* 17. *Sit autem linea rationalis* Δ, *eiq; commēsurabilis longitudine sit linea* ε ζ: *rationalis est ergo linea* ε ζ. Fiat *autē sicut numerus* α β *ad numerum* α γ, *ita quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratum alterius lineæ quæ sit* ζ η *per lemma repositum à nobis post 6 theorema.* Ergo *quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratū lineæ* ζ η *proportionē habet quam numerus ad numerū.* Quare *illa quadrata sunt commensurabilia per 6.* Est *autem linea* ε ζ *rationalis, ergo linea* ζ η *erit etiam rationalis.* Et *quoniam numerus* β α *ad numerum* α γ *non habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque etiam quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratum lineæ* ζ η *habebit proportionem quā numerus quadratus ad numerum quadratum. incommensurabilis est ergo longitudine linea* ε ζ *lineæ* ζ η. Ergo *illæ lineæ* ε ζ, ζ η *sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Ergo *tota linea* ε η *est binomium per* 36. Dico *præterea eandem lineam esse binomium primum.* Nam *cum sit sicut numerus* β α *ad numerum* α γ, *ita quadratū lineæ* ε ζ *ad quadratum lineæ* ζ η. *sitq; numerus* β α *maior numero* α γ: *maius quoq; erit quadratum lineæ* ε ζ *quadrato lineæ* ζ η. *Sint igitur quadrato lineæ* ε ζ *æqualia quadrata linearum* ζ η, θ *(quæ quomodo reperiantur docet lemma positū post* 14.) Et *cum sit sicut numerus* β α *ad numerū*



αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratũ lineæ ζη. Per euersam ergo proportionem ſicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus αβ ad numerum αγ habet proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ θ habet etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo linea εζ erit longitudine commenſurabilis lineæ θ, per 9. ergo linea εζ plus poteſt q̃ linea ζη quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Sunt autem lineæ εζ, ζη rationales potentia tantum commenſurabiles. eſtq́; linea εζ longitudine cõmenſurabilis lineæ rationali δ. ergo linea εη eſt binomiũ primũ.

Quadrageſimumnonum Theorema.

Reperire binomium ſecundum.



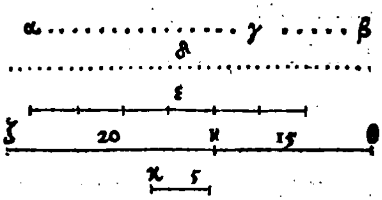
Proponantur numeri duo αγ, γβ tales ut compoſitus ex ipſis totus αβ ad βγ proportionem habeat quam numerus quadratus ad numerum quadratum: ad γα uerò proportionem eam ne habeat quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, ut dictum eſt in proximo theoremate. & proponatur linea rationalis δ, & lineæ δ ſit cõmenſurabilis longitudine linea ζη. rationalis eſt ergo linea ζη. Fiat autẽ ſicut numerus γα ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum

alterius

alterius lineæ quæ sit ζι. Ergo commensurabile est quadratum lineæ ζκ lineæ ζι. est ergo rationalis etiam linea ζι. Et quoniam numerus γα ad numerum αβ non habet proportionem quam quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ζκ ad quadratum ζι habebit proportionẽ quam quadratus numerus ad quadratum. Ergo linea ζκ est incommensurabilis longitudine lineæ ζι per 9. ergo lineæ ζκ, ζι sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea ικ est binomiũ. Dico præterea eandem esse binomium secundum. Cum enim per contrariam siue dicas conuersam proportionem sit sicut numerus αϐ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζκ. maior autem est numerus αϐ, numero αγ. maius etiam erit quadratũ lineæ ιζ quadrato lineæ ζκ. Sint quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearum ζκ, θ, ut dictum est in proximo theoremate. Per euersam ergo proportionẽ sicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus αϐ ad numerũ βγ habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratũ lineæ ιζ ad quadratũ lineæ θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ιζ erit commensurabilis longitudine lineæ θ, per 9. Quare linea ιζ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sed linea ζκ quæ est minus nomen, est commensurabilis longitudine propositæ lineæ rationali δ per hypothesin. Ergo linea ικ est binomium secundum.

Quinquagesimum Theorema.

Reperire binomium tertium.



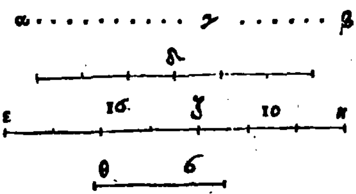
Proponãtur numeri duo α β, γ β, tales ut cõpositus ex ipsis, totus α β ad numerum β γ proportionem habeat quã numerus quadratus ad quadratum, ad numerũ uerò α γ proportionem ne habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponatur autẽ & alius numerus siue quadratus, siue non quadratus, qui sit δ, qui ad singulos α β, α γ proportionem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponaturq; linea rationalis ε & fiat sicut numerus δ ad numerum α β, ita quadratum lineæ ε ad quadratum ζ η. Commensurabile est ergo quadratum lineæ ε quadrato lineæ ζ η. Sed linea ε est rationalis: rationalis est ergo linea ζ η. & quoniam numerus δ ad numerum α β proportionem non habet quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratum lineæ ζ η proportionem eam habet quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo linea ε incõmensurabilis longitudine lineæ ζ η. Rursus fiat sicut numerus α β ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ. Commensurabile ergo est quadratum lineæ ζ η quadrato lineæ η θ. Sed linea ζ η est rationalis. ergo linea η θ erit etiã rationalis. Et quoniam numerus α β ad numerum α γ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, neq; etiam quadratum lineæ ζ η ad quadratũ lineæ η θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum.

dratum. Est ergo linea ζκ longitudine incommensurabilis lineæ κθ. ergo lineæ ζκ, κθ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. tota ergo linea ζθ erit binomiũ. Dico præterea illam esse binomium tertium. Cum enim *sit sicut numerus δ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ι ad quadratũ lineæ ζκ. Sicut uerò numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ.* Per *æquam ergo proportionem sicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ι ad quadratũ lineæ κθ. Sed numerus δ ad numerũ αγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum.* Ergo *quadratum lineæ ι nõ habet proportionẽ ad quadratũ lineæ κθ quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo linea ι longitudine incommensurabilis lineæ κθ per 9.* Et *quoniam est sicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ.* Ergo *quadratum lineæ ζκ est maius quadrato lineæ κθ. sint ergo quadrato lineæ ζκ æqualia quadrata linearum κθ, λ.* Per *euersam ergo proportionẽ sicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ λ. Sed numerus αβ ad numerum βγ habet proportionem quã quadratus numerus ad quadratum. ergo & quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ λ habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζκ est longitudine commensurabilis lineæ λ. ergo linea ζκ plus potest quam linea κθ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sunt autem lineæ ζκ, κθ rationales potentia tantum commensurabiles: & neutra est commensurabilis lon-*

gitudine lineæ ε. Ergo linea ζθ est binomium tertium.

Quinquagesimumprimum Theorema.

Reperire binomium quartum.



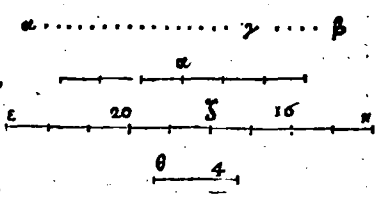
Proponantur numeri duo αγ, γβ tales ut cõpositus ex ipsis nempe αβ ad neutrũ eorum habeat proportionem quam numerus quadratus ad quadratũ (qualis est omnis numerus quadratus ad duos numeros non quadratos se minores ipsum componentes.) Sit autem linea rationalis δ, & lineæ δ sit commẽsurabilis longitudine linea εζ. est ergo rationalis εζ. Sitq; sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratũ lineæ εζ ad quadratũ lineæ ζκ. ergo quadratum lineæ εζ est commensurabile quadrato lineæ ζκ. Est ergo linea ζκ rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerũ αγ proportionem nõ habet quam quadratus numerus ad quadratum: neque quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζκ habebit proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea εζ est longitudine incommensurabilis lineæ ζκ. Ergo lineæ εζ, ζκ sunt rationales potentia tantum commensurabiles, quare tota linea εκ est binomium. Dico præterea eam esse binomium quartum. Cum enim sit sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζκ: est autem numerus βα maior numero αγ. Ergo quadratum lineæ εζ erit maius quadrato lineæ ζκ. Sint ergo quadrato lineæ εζ æqualia quadrata linearũ ζκ, θ.

Per

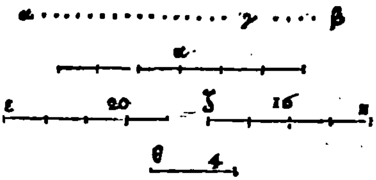
Per euersam ergo proportionem sicut numerus β α ad numerum ς γ, ita quadratum lineæ ι ζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus ς α ad numerum ς γ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, igitur neque quadratū lineæ ι ζ ad quadratum lineæ θ habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Est ergo linea ι ζ incommensurabilis longitudine lineæ θ. ergo linea ι ζ plus potest quā linea ζ κ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ ι ζ, ζ κ rationales potentia tantū commensurabiles, estq́; linea ι ζ lineæ rationali δ cōmēsurabilis lōgitudine. Ergo linea ι κ est binomiū quartū.

Quinquagesimumsecundum Theorema.

Reperire binomium quintum.



Proponātur numeri duo α γ, γ ς tales, ut totus α ς ad singulos α γ, γ β proportionē eam ne habeat quā quadratus numerus ad quadratum, sicut in proximo theoremate. Et sit linea rationalis δ: lineæ autem δ sit commensurabilis longitudine linea ζ κ. Est ergo linea ζ κ rationalis: sitq́; sicut numerus γ α ad numerum α ς, ita quadratū lineæ ζ κ ad quadratum lineæ ζ ι. ergo quadratum lineæ ζ κ est commensurabile quadrato lineæ ζ ι. Est ergo etiam linea ζ ι rationalis. Et quoniam numerus α γ ad numerum α β nō habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ζ κ ad quadra-

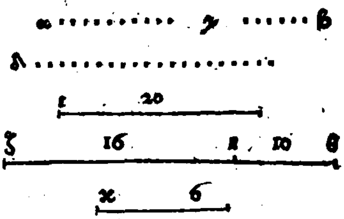


tum lineæ ζι habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ, Ergo lineæ ζκ,ζι sunt longitudine incommensurabiles. ergo lineæ ζκ,ζι sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo tota linea ικ est binomiũ. Dico *præterea eam esse binomium quintum.* Cum *enim sit sicut numerus αγ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ ιζ.* Per *conuersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζκ.* Est *ergo quadratum lineæ ιζ maius quadrato lineæ ζκ.* Sint *ergo quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearũ ζκ,θ.* Per *euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ.* Sed *numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum.* Ergo *neque quadratum lineæ ιζ ad quadratũ lineæ θ, habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum.* Est *ergo linea ζι longitudine incommẽsurabilis lineæ θ. ergo linea ζι plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis.* Sunt *autem lineæ ζι,ζκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea ζκ minus nomen est, commensurabile longitudine lineæ rationali δ.* Ergo *linea ικ est binomium quintum.*

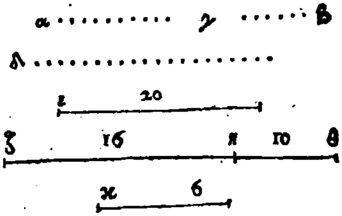
Quinquagesimumtertium Theorema.

Reperire binomium sextum.

Proponantur



Proponantur numeri duo αγ, γβ tales, ut totus αβ ad singulos αγ, γβ proportionẽ ne habeat quam quadratus numerus ad quadratũ. Sit etiã & alius numerus δ, quique ad singulos αβ, αγ non habeat proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Sitq; linea rationalis ε: sit etiam sicut numerus δ ad numerum βα, ita quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ ζη. Ergo linea ε erit potentia commensurabilis lineæ ζη. est autem rationalis linea ε. ergo & lineæ ζη erit rationalis. Et quoniam numerus δ ad numerũ αβ non habet proportionẽ quam numerus quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ ζη habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratum. Est ergo linea ε longitudine incommensurabilis lineæ ζη. Rursus fiat sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Ergo quadrata illa sunt commensurabilia. Sed quadratum lineæ ζη est rationale: est ergo etiã quadratum lineæ ηθ rationale. Ergo & linea ηθ rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerum αγ proportionẽ nõ habet quam numerus quadratus ad quadratum: neq; quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea ζη longitudine incommensurabilis lineæ ηζ. ergo lineæ ζη, ηθ sunt rationales potentia tantũ commensurabiles. ergo tota linea ζθ erit binomium. Dico præterea eam esse binomium sextum. Cum enim sit



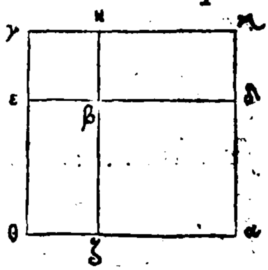
ſicut numerus δ ad numerū βα, ita quadratū lineæ ε ad quadratum lineæ ζη. Eſt autem ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratū lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Per æquam ergo proportionem ſicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratū lineæ ε ad quadratum lineæ ηθ. Sed numerus δ ad numerum αγ non habet proportionem quam quadratus numerus ad quadratum: neq; etiam quadratū lineæ ε ad quadratum lineæ ηθ habebit proportionem quā numerus quadratus ad quadratū. Ergo linea ε eſt longitudine incommenſurabiles lineæ ηθ. Sed modo probatū eſt lineam ζη eſſe etiam longitudine incommēſurabilem lineæ ε. Ergo ambæ lineæ ζη, ηθ ſunt incommenſurabiles longitudine lineæ ε. Et quoniam eſt ſicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratū lineæ ηθ. maius eſt ergo quadratū lineæ ζη quadrato lineæ ηθ. Sint ergo quadrato lineæ ζη æqualia quadrata linearum ηθ, κ. Ergo per euerſam proportionem ſicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ κ. Sed numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo neq; quadratū lineæ ζη ad quadratum lineæ κ habebit proportionē quam numerus quadratus ad quadratū. Ergo linea ζη, eſt longitudine incommenſurabilis lineæ κ. ergo linea ζη poteſt pluſquam linea ηθ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Sunt autem lineæ ζη, ηθ rationales potētia tan-

tum

tum commensurabiles, & ambæ lineæ $\zeta\kappa$, $\kappa\theta$ incommensurabiles longitudine lineæ rationali λ. Ergo tota linea $\zeta\theta$ est binomium sextum.

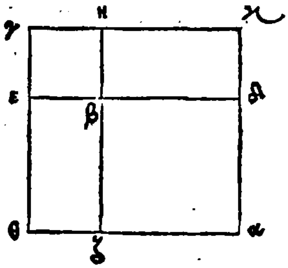
Lemma.

Si linea recta secetur in partes duas quocunque modo parallelogrammum rectangulum contentum ex sectionibus ambabus est medium proportionaliter inter quadrata sectionum. Et *parallelogrammum rectangulum contentum ex tota linea & altera sectione est medium proportionaliter inter quadratũ totius lineæ & quadratum dictæ sectionis.* Sint *duo quadrata $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ita collocata ut lineæ $\delta\beta$, $\beta\varepsilon$ sint in eadem recta linea.* Erunt *ergo & lineæ $\zeta\beta$, $\beta\kappa$ in eadem recta linea per* 14.1. Com*pleatur ergo parallelogrãmũ $\alpha\gamma$.*



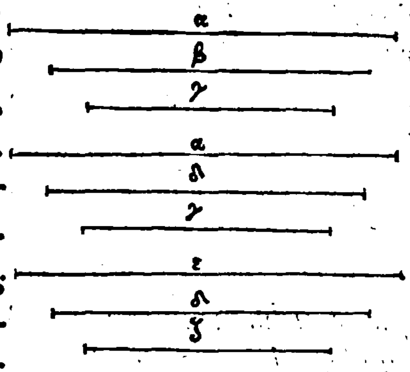
Dico *parallelogrammum rectangulum &c. ut in lemmate.* Imprimis *parallelogrammum $\alpha\gamma$ est quadratum, quia linea* αδ ~~$\delta\beta$~~ *est æqualis lineæ $\zeta\beta$: linea uerò $\beta\varepsilon$ lineæ $\beta\kappa$. tota ergo linea $\delta\varepsilon$ est æqualis toti lineæ $\zeta\kappa$.* Sed *linea $\delta\varepsilon$ est æqualis utrique $\gamma\lambda$, $\theta\alpha$. linea item $\zeta\kappa$ est æqualis utrique $\alpha\lambda$, $\theta\gamma$ per* 34.1. *ergo utraque linearum $\alpha\theta$, $\lambda\gamma$ est æqualis utrique $\alpha\lambda$, $\theta\gamma$.* Ergo *parallelogrammum $\alpha\gamma$ est æquilaterum.* Est *etiam rectangulum per* 29.1. *ergo parallelogrammum $\alpha\gamma$ est quadratum.* Et *quoniam est sicut linea $\zeta\beta$ ad lineam $\beta\kappa$, ita linea $\delta\beta$ ad lineam $\beta\varepsilon$.* Sed *sicut linea $\zeta\beta$ ad lineam $\beta\kappa$, ita parallelogrammum $\alpha\beta$, quod est quadratũ lineæ $\delta\beta$, ad parallelogrammũ $\delta\kappa$ per* 1.6. Sicut *autem linea $\delta\beta$ ad lineam $\beta\varepsilon$, ita pa-*

rallelogrammum δη ad parallelogrammũ βγ, quod est quadratũ lineæ ϐε per 1.6. Ergo sicut quadratum αϐ ad parallelogrammũ δη, ita parallelogrammum δη ad quadratũ βγ. Ergo parallelogrammum δη est medium proportionaliter inter quadrata αϐ, βγ. Dico præterea parallelogrammum δγ esse medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. Cum enim sit sicut linea αδ ad lineam δκ, ita linea κη ad lineam ηγ. singulæ enim sunt singulis æquales. Per compositam ergo proportionem quæ probatur per 18.5, sicut linea ακ ad lineam κδ, ita linea κγ ad lineã ηγ. Sed sicut linea ακ ad lineam κδ, ita quadratum lineæ ακ, quod est quadratum αγ, ad parallelogrammum ex ακ, κδ, hoc est parallelogrammum δγ per 1.6. Sicut autem linea κγ ad lineam ηγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum lineæ ηγ, quod est quadratum βγ. Sicut ergo quadratum αγ ad parallelogrammum δγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum βγ. Ergo parallelogrammum δγ est medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. quod demonstrandum erat.



Lemma.

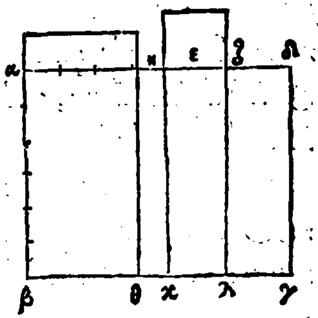
Quæ sunt media proportionaliter inter eadẽ aut æqualia, sunt ipsa quoque inter se æqualia. Sint tres magnitudines α, ϐ, γ. Sitque sicut α ad ϐ, ita β ad γ. sit similiter sicut eadẽ magnitudo α ad δ, ita δ ad eandẽ magnitudinẽ γ. Dico β, δ esse inter se æqualia. Nam proportio α ad γ est proportio duplicata ipsius α ad ϐ per diffinitionẽ, similiter



liter proportio eadẽ ipsius α ad γ, est proportio duplicata ipsius α ad δ, per eandẽ diffinitionẽ. sed quorum æqualiter multiplicia sunt æqualia, aut eadẽ ipsa quoq; sunt æqualia. Ergo sicut α ad β, ita α ad δ: ergo per 9.5. β, δ, sunt inter se æqualia. Idẽ, si fuerint aliæ magnitudines æquales ipsis α, γ puta ε, ζ inter quas sit media proportionalis magnitudo δ.

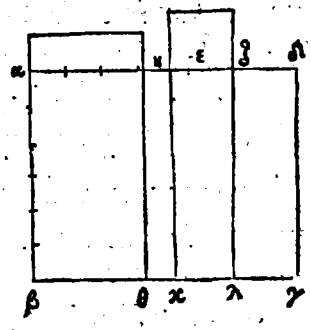
Quinquagesimumquartum Theorema.

Si superficies contenta fuerit ex rationali & binomio primo, linea quæ illam superficiẽ potest, est irrationalis quæ binomium uocatur.

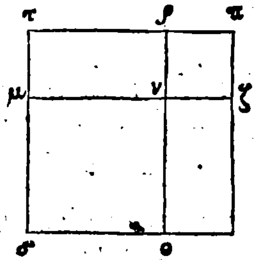


Superficies enim, α β γ δ, cõtineatur ex linea rationali α β & binomio primo linea α δ. Dico *lineam quæ superficiem α γ potest esse irrationalẽ illam quæ uocatur binomium. Cum enim linea α δ sit binomium primũ, diuidatur in sua nomina in pũcto ε, sitq; maius nomen α ε, constat lineas α ε, ε δ esse rationales potentia tantum commensurabiles, & lineam α ε plus posse, quàm linea ε δ quadrato lineæ sibi cõmensurabilis longitudine, & lineam α ε esse longitudine cõ-*

mensurabilem lineæ propositæ rationali αϐ. *Diuidatur linea* ιδ *bifariam, & æqualiter in puncto* ζ. *Et quoniam linea* αι *plus potest quàm linea* ιδ *quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis, si quartæ parti quadrati lineæ minoris, hoc est*

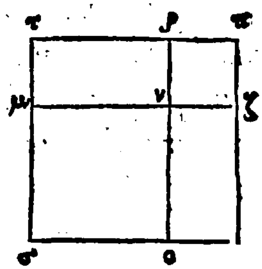


quadrato lineæ ιζ *æquale secundum maiorẽ lineã, nempe* αι *applicetur, deficiẽs figura quadrata diuidet lineã maiorem, nempe* αι *in partes inter se longitudine commensurabiles, per secundam partem 18 huius. applicetur ergo secũdum lineam* αι *æquale quadrato lineæ* ιζ *parallelogrammum ex* ακ, κι. *Ergo linea* ακ *est longitudine commensurabilis lineæ* ικ. *Ducantur per puncta* κ, ι, ζ *alterutri linearum* αβ, δγ *parallelæ* κθ, ιχ, λζ *per 31.1. & parallelogrammo* αθ *æquale quadratum construatur* συ: *parallelogrammo uerò* κχ, *sit æquale quadratum* υπ, *& ita describatur, ut linea* μυ *sit in eadem recta linea cum* υξ. *sunt ergo in eadẽ recta linea lineæ* ρυ, υο, *& compleatur parallelogrammum* σπ. *Ergo parallelogrammũ*



σπ *est quadratum per ea quæ dicta sunt in demonstratione lemmatis penultimi. Et quoniam parallelogrammum ex* ακ, κι *est æquale quadrato lineæ* ιζ: *Est igitur sicut linea* ακ *ad lineam* ιζ, *ita linea* ιζ *ad lineã* κι *per 17.6. Ergo per 1.6. sicut parallelogrammum* αθ *ad parallelo-*

rallelogrammum ι λ, ita parallelogrammum ι λ ad parallelogrammum κ η. Ergo parallelogrammũ ι λ est medium proportionaliter inter parallelogramma α θ, κ η. Sed parallelogrammum α θ est æquale quadrato σ υ. parallelogrammum uerò η κ est æquale quadrato υ ϖ. Ergo quadratorum σ υ, υ ϖ mediũ proportionale est ι λ, quorũ quadratorum σ υ, υ ϖ medium quoque proportionaliter est parallelogrammum μ ρ per lemma penultimũ. ergo μ ρ est æquale parallelogrammo ι λ per lemma proximum ante hoc theorema. Sed parallelogrammũ μ ρ est æquale parallelogrammo ο ξ per 43.1. parallelogrammum uerò ι λ est æquale parallelogrammo ζ γ. Totũ ergo parallelogrammum ι γ est æquale duobus parallelogrammis μ ρ, ο ξ inter se æqualibus. Sed parallelogramma α θ, η κ sunt æqualia quadratis σ υ, υ ϖ. totum ergo parallelogrammum α γ est æquale toti quadrato σ ϖ, hoc est quadrato lineæ μ ξ. Ergo linea μ ξ potest parallelogrammum α γ. dico lineam μ ξ esse binomiũ. Cum enim linea α η sit longitudine commensurabilis lineæ η ι, ergo linea tota α ι est commensurabilis longitudine utrique α η, η ι per 16. Sed per suppositionem linea α ι est longitudine commensurabilis lineæ α β, ergo & utraque α η, η ι est commensurabilis longitudine lineæ α β per 12. est autem linea α β rationalis: rationalis est ergo utraque α η, η ι. Est ergo utrũq; parallelogrammum α θ, η κ rationale per 20. Ergo & parallelogrammum α θ erit commensurabile parallelogrãmo η κ. ergo & quæ sunt illis æqualia, nempe quadrata σ υ, υ π quæ sunt quadrata linearũ μ ν, ν ξ sunt rationalia & commensurabilia. Et quoniã

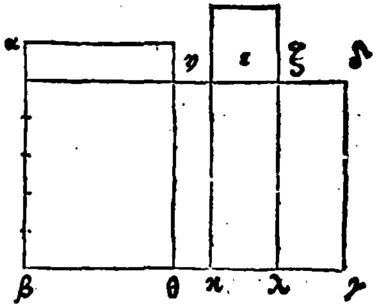


linea κι est per positionem longitudine incõmensurabilis lineæ ι λ, sed linea κι lineæ κ κ est commensurabilis, ut modo probatum est: linea autem ι λ est commensurabilis lineæ ιζ. Ergo per corollariũ à nobis positum post 14. linea κ κ, est incommensurabilis longitudine lineæ ιζ. Quare & parallelogrammum κ θ parallelogrammo ι λ est incõmensurabile. Ergo & quadratũ σ ν est incommensurabile parallelogrãmo μ ρ, quia per positionem parallelogrãmum κ θ est æquale quadrato σ ν: & parallelogrãmum ι λ probatum est æquale parallelogrammo μ ρ. Sed sicut quadratum σ ν, ad parallelogrammum μ ρ, ita linea ο ν ad lineam ν ρ per 1.6. ergo per 10 linea ο ν est incommẽsurabilis lineæ ν ρ. est autem linea ο ν æqualis lineæ μ ν: linea autem ν ρ lineæ ν ξ. est ergo incommensurabilis linea μ ν lineæ ν ξ. Modo autem probatum est quadrata ambarum linearum μ ν, ν ξ esse rationalia & commensurabilia. Ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles. ergo linea μ ξ est binomium, & potest parallelogrammum α γ. quod demonstrandum erat.

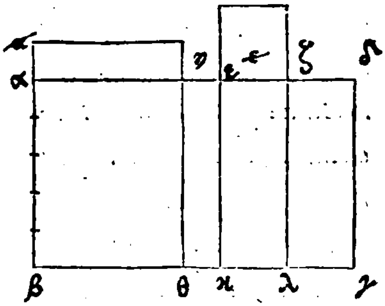
Quinquagesimumquintum Theorema.

Si superficies contenta fuerit ex linea rationali & binomio secundo, linea potens illam superficiem est irrationalis quæ bimediale primum uocatur.

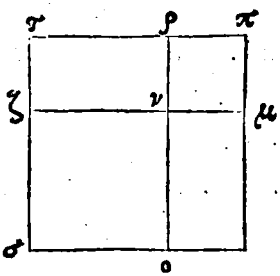
Superficies enim, α ϐ γ δ, contineatur ex rationali α β & binomio secundo, quæ sit linea α δ. Dico lineam quæ superficiem



perficiē αγ poteſt, eſſe bimediale primū. Cū enim linea αδ ſit binomium ſecūdum, diuidatur in ſua nomina in pūcto ε, ita ut maius nomen ſit αε. ergo lineæ αε, εδ ſunt rationales tantum potentia commenſurabiles, & linea αε poteſt plus quàm linea εδ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen nempe εδ eſt commenſurabile longitudine lineæ αβ. Secetur *linea εδ bifariam & æqualiter in puncto ζ, & quadrato lineæ εζ æquale ſecundum lineam αε applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod parallelogrammum ſit ex lineis αη, ηε.* Ergo *linea αη, eſt longitudine cōmenſurabilis lineæ ηε: & per puncta η, ε, ζ ducantur parallela lineis αβ, δγ, lineæ ηθ, εκ, ζλ.* Et *parallelogrāmo αθ æquale quadratum conſtruatur σν. parallelogrammo uerò ηκ, æquale quadratum ſimiliter cōſtruatur νπ, & ita componantur ut linea μν, & linea νξ conficiant unam lineam rectam. ergo & lineæ ον, νρ cōficiunt unā & eandem lineam, & compleatur quadratū σπ.* Con*ſtat ex his quæ demōſtrata ſunt in proximo theoremate parallelogrammum μρ eſſe proportionaliter mediū inter quadrata σν, νπ, & æquale parallelogrāmo ελ & lineam μξ poſſe ſuperficiē αγ.* Modo *ſupereſt ut demonſtremus lineam μξ eſſe bimediale primum: quoniā linea αε eſt longitudine incommenſurabilis lineæ εδ, & linea εδ eſt commenſurabilis longitudine lineæ αβ. eſt*



ergo linea αι longitudine incommensurabilis lineæ αβ per 14. Et quoniam linea ακ est commensurabilis lõgitudine lineæ κι, est ergo tota linea αι lõgitudine commensurabilis lineæ utrique ακ, κι per 16. est autẽ linea αι rationalis, ergo utraque ακ, κι rationalis. Et quoniam linea αι est longitudine incommẽsurabilis lineæ αβ. est autem linea αι commensurabilis longitudine utrique ακ, κι, ergo lineæ ακ, κι sunt longitudine incõmensurabiles lineæ αβ. ergo lineæ αβ, ακ, κι sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. Quare utrunque parallelogrammũ αθ, κλ est mediale per 22. quare utrũque quadratum σν, νπ, est etiã mediale, ergo lineæ μν, νξ, sunt mediales. Et quoniã linea ακ est longitudine cõmẽsurabilis lineæ κι, commẽsurabile est parallelogrãmũ αθ parallelogrammo κλ per 1.6. & 10 huius, hoc est quadratum σν quadrato νπ, hoc est quadratum lineæ μν, quadrato lineæ νξ, quare lineæ μν, νξ sunt potentia cõmensurabiles.



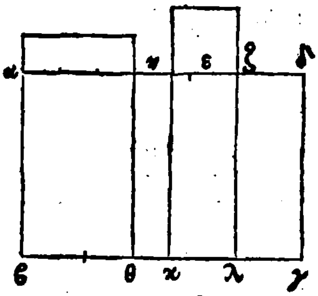
Et quoniã linea αι est longitudine incõmẽsurabilis lineæ ιλ. sed linea αι est longitudine cõmẽsurabilis lineæ ακ, linea uerò ιλ est lõgitudine commensurabilis lineæ ιζ. est ergo linea ακ incommensurabilis longitudine lineæ ιζ per corollarium 14 theorematis. Quare & parallelogrammũ αθ est incommen-

commensurabile parallelogrammo ι λ, hoc est quadratum σ ν parallelogrãmo μ ρ, hoc est linea ο ν lineæ ν ρ, hoc est linea μ ν lineæ ν ξ est longitudine incommensurabilis. Ergo *lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia tantum commensurabiles.* Sed *modo probatũ est easdem esse mediales, ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt mediales potentia tantum commensurabiles.* Dico *præterea eas continere superficiem rationalem.* Cum *enim linea ι δ sit longitudine cõmensurabilis utrique α β, ι ζ.* Est *ergo linea ι ζ longitudine commensurabilis lineæ ι κ quæ est æqualis lineæ α ϛ.* Est *autẽ utraque linea ι ζ, ι κ rationalis. ergo parallelogrammũ ι λ est rationale per 20 huius, hoc est ei æquale parallelogrammum μ ρ.* Sed *parallelogrammum μ ρ est contentum ex lineis μ ν, ν ξ.* Ergo *per 37 linea μ ξ est bimediale primum quod demonstrandum erat.*

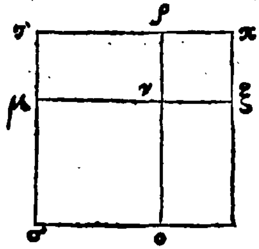
Quinquagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio tertio, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis quæ dicitur bimediale secundum.

Superficies enim α β γ δ contineatur ex rationali α β & binomio tertio linea α δ, quæ sit diuisa in sua nomina in puncto ι, quorum maius nomen sit linea α ι. Dico *lineã quæ potest superficiem α γ esse irrationalem uocatã bimediale secundum.* Sit *enim eadem constructio figurarum quæ in proximis theorematibus.* Quoniam *linea α δ est binomium tertiũ lineæ α ι, ι δ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea α ι plus potest quàm linea ι δ quadrato lineæ sibi longitudine com-*



mēſurabilis, & neutra linearū α ι, ι δ eſt longitudine commēſurabilis lineæ α β. Sicut in ſuperioribus eſt demonſtratū, ita hîc demonſtrari poteſt lineā μ ξ poſſe ſuperficiē α γ, & lineas μ ν, ν ξ eſſe mediales potentia tantū cōmenſurabiles, itaque lineam μ ξ eſſe compoſitā ex lineis medialibus potentia tantum commenſuralibus. Reſtat *demonſtrandum eandem lineam μ ξ eſſe bimediale ſecundum, quoniam linea ι δ*



eſt longitudine incommēſurabilis lineæ α β, hoc eſt lineæ ι κ. ſed linea ι δ eſt commēſurabilis lōgitudine lineæ ι ζ. Eſt ergo linea ι ζ lōgitudine incommēſurabilis lineæ ι κ. ergo lineæ ζ ι, ι κ ſunt rationales, quia ex hypotheſi linea ι δ eſt rationalis, cui linea ζ ι eſt commenſurabilis. Ergo lineæ ζ ι, ι κ ſunt rationales potētia tantum commenſurabiles. ergo parallelogrammum ι λ eſt mediale per 22. hoc eſt parallelogrammum μ ρ, quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo linea μ ξ eſt bimediale ſecundum.

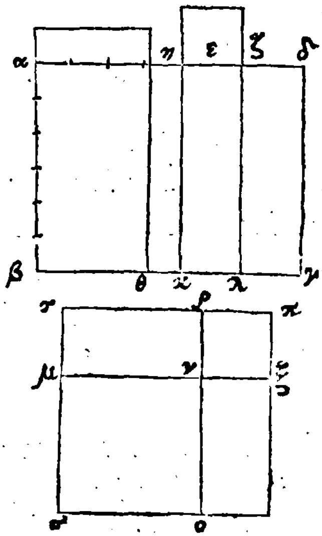
Quinquageſimumſeptimum Theorema.

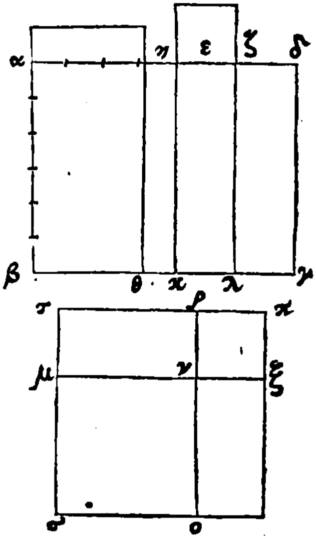
Si ſuperficies contineatur ex rationali & binomio quarto, linea potens ſuperficiem illam eſt irrationalis, quæ dicitur maior.

Superficies α γ contineatur ex linea rationali α β, & binomio quarto, linea α δ diuiſa in ſua nomina in puncto ι,

ſitq;

sitq; maius nomen $\alpha\iota$. *Dico lineam quæ potest superficiem* $\alpha\gamma$ *esse irrationalẽ eam, quæ dicitur maior. Cum enim linea* $\alpha\delta$ *sit binomium quartum, ergo lineæ* $\alpha\iota$, $\iota\delta$ *sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & linea* $\alpha\iota$ *plus potest quàm linea* $\iota\delta$ *quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine: & linea* $\alpha\iota$ *est longitudine cõmẽsurabilis rationali* $\alpha\beta$*. Secetur linea* $\iota\delta$ *bifariã & æqualiter in puncto* ζ*, & secũdum lineam* $\alpha\iota$ *quadrato lineæ* $\iota\zeta$ *æquale applicetur parallelogrammum ex* $\alpha\eta$, $\eta\iota$*. Ergo linea* $\alpha\eta$ *est incommẽsurabilis longitudine lineæ* $\eta\iota$ *per secundam partem 19. theorematis. Ducantur ad lineam* $\alpha\beta$ *parallelæ* $\eta\theta$, $\iota\kappa$, $\zeta\lambda$*, & fiant cætera ut in superioribus. constat lineam* $\mu\xi$ *posse superficiem* $\alpha\gamma$*. Nunc demõstremus illam lineã* $\mu\xi$ *esse irrationalem, quæ maior dicitur. Cum enim linea* $\alpha\eta$ *sit incommensurabilis longitudine lineæ* $\eta\iota$*. ergo etiam erit parallelogrammũ* $\alpha\theta$ *incommensurabile parallelogrammo* $\eta\kappa$*, hoc est quadratum* $\sigma\nu$ *quadrato* $\nu\varpi$*. ergo lineæ* $\mu\nu$, $\nu\xi$ *sunt potentia incommensurabiles. Et quoniã linea* $\alpha\iota$ *est longitudine cõmensurabilis rationali* $\alpha\beta$*, id est per positionẽ, parallelogrammũ* $\alpha\kappa$ *est rationale per 20. ergo & compositũ ex quadratis illi æqualibus, nempe* $\sigma\nu$, $\nu\varpi$*, quæ sunt quadrata linearũ* $\mu\nu$,

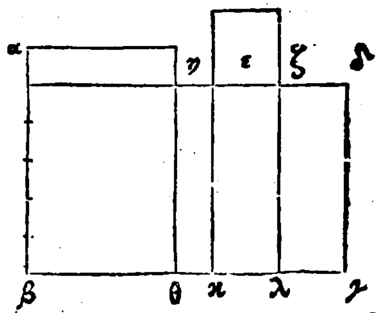




ν ξ, erit similiter rationale. & quoniam linea ι δ est longitudine incommensurabilis lineæ α β, hoc est lineæ ι κ: & linea ι δ est commensurabilis longitudine lineæ ι ζ: Ergo linea ι ζ est longitudine incommensurabilis lineæ ι κ. ergo parallelogrammũ ι λ est mediale, hoc est μ ρ, contẽtum ex lineis μ ν, ν ξ. ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositũ ex quadratis ipsarum rationale: parallelogrammum uero ex ipsis mediale. ergo tota linea μ ξ est irrationalis quæ dicitur linea maior, & potest superficiem α γ quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumoctauum Theorema.

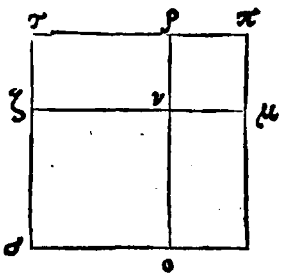
Si superficies contineatur ex rationali & binomio quinto, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis, quę dicitur potẽs rationale & mediale.



Superficies α γ contineatur ex rationali α β & binomio quinto, linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι, ita ut maius nomen sit α ι. Dico lineã quæ potest superficiem illam α γ,

esse

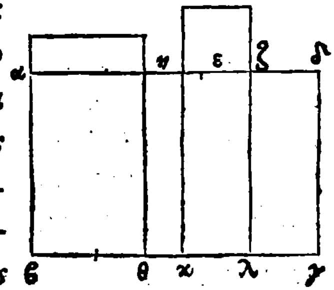
esse irrationalem, quæ dicitur potens rationale & mediale. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedēti. Constat lineam quæ potest superficiem *α γ* esse *μ ξ*. Demonstremus illam lineam *μ ξ*, esse lineam potentem rationale & mediale. Cum enim linea *α κ* sit incommensurabilis longitudine lineæ *κ ι*, est etiam incommensurabile parallelogrammum *α θ* parallelogrammo *θ ι*, hoc est quadratū lineæ *μ ν*, quod est quadratū *σ ν* quadrato lineæ *ν ξ*, quod est quadratū *ν ϖ*. Ergo lineæ *μ ν* *ν ξ* sunt potentia incommensurabiles. Et quoniā linea *α δ* est binomium quintū, estq; minus eius nomē linea *ι δ* illa linea *ι δ*, est lō-

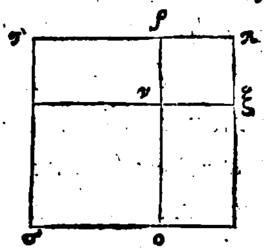


gitudine cōmensurabilis rationali *α β*. Sed linea *α ι* est longitudine incommensurabilis lineæ *ι δ*. Ergo linea *α ι* est longitudine incommēsurabilis rationali *α β*. ergo lineæ *α β*, *α ι* sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum *α κ*, est mediale hoc est compositum ex quadratis linearum *μ ν*, *ν ξ*. Et quoniam est commensurabilis longitudine linea *ι δ* lineæ *α β*, hoc est lineæ *ι κ*. sed linea *ι δ* est commensurabilis longitudine lineæ *ι ζ*. Ergo & linea *ι ζ* est longitudine commēsurabilis lineæ *ι κ*, & linea *ι κ* est rationalis. ergo & parallelogrammū *ι λ* erit rationale per 20. hoc est parallelogrammum *μ ρ* quod continetur ex lineis *μ ν*, *ν ξ*. Ergo illæ lineæ *μ ν*, *ν ξ* sunt potētia incōmensurabiles cōficientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: parallelegrammum uerò ex ipsis rationale. Ergo tota linea *μ ξ* *est irrationalis, quæ dicitur potẽs rationale & mediale: & potest superficiem α γ. quod demonstrandum erat.*

Quinquagesimumnonum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio sexto, linea quæ illam superficiem potest est irrationalis, quæ dicitur potens duo medialia.





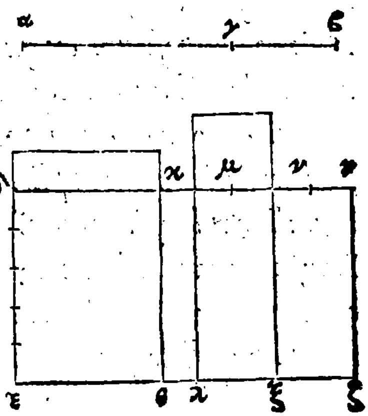
Superficies α β γ δ, contineatur ex rationali α β, & binomio sexto linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι, ita ut maius illius nomẽ sit α ι: dico lineã quæ potest superficiem α γ esse irrationalem eam, quæ dicitur potens duo medialia. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedentibus. Manifestum est lineã quæ potest superficiem α γ esse lineã μ ξ, & lineam μ ν esse incommensurabilem potentia lineæ ν ξ: & quoniam est incommẽsurabilis longitudine linea α ι lineæ α β. ergo lineæ illæ α ι, α β sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. Ergo parallelogrammum α κ, hoc est compositum ex quadratis linearum μ ν, ν ξ est mediale. Rursus cum linea ι δ sit incommẽsurabilis longitudine lineæ α β, ergo etiam incommensurabilis longitudine erit linea ι ζ lineæ ι κ. Ergo mediale erit parallelogrammum ι λ, hoc est μ ρ, quod cõtinetur ex μ ν, ν ξ. Et quoniam est longitudine incommẽsurabilis linea α ι li-

neæ

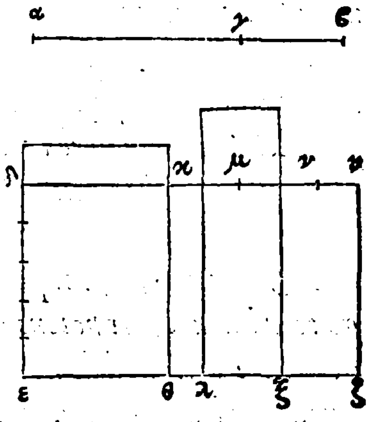
neæ ι ζ.ergo etiam parallelogrammum α κ erit incommensurabile parallelogrãmo ι λ. Sed parallelogrammũ α κ eſt æquale compoſito ex quadratis linearum μ ν, ν ξ: parallelogrammũ uerò ι λ eſt æquale ei quod fit ex μ ν, ν ξ. Ergo compoſitum ex quadratis linearũ μ ν, ν ξ eſt incommẽſurabile ei quod fit ex μ ν, ν ξ, eſtq́; mediale utrũque: & lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia incõmenſurabiles. Ergo tota linea μ ξ eſt potens duo medialia, & poteſt ſuperficiem α γ. quod demonſtrandum fuit. Hîc legitur quoddam lemma, quod quia uiſum eſt idem cũ eo quod poſtponitur 39 theorematì, ideo prætermiſimus. præterea quæ hîc affertur illius demonſtratio, cum non ſatisfaciat, ſuperiore illa, quæ & certiſsima & facillima eſt, contenti ſimus: hoc ipſum lemma perſecutus eſt Campanus poſt 35.

Sexageſimum Theorema.

Quadratum binomij ſecundum lineam rationalem applicatũ facit alterũ latus binomiũ primũ.



Sit binomium linea α β diuiſa in ſua nomina in pũcto γ, ita ut maius nomẽ ſit α γ: & proponatur linea rationalis linea δ ε: & quadrato lineæ α β æquale ſecundum lineam δ ε applicetur parallelogrammum δ ε ζ η latus alterum faciẽs lineam δ η. Dico lineam δ η



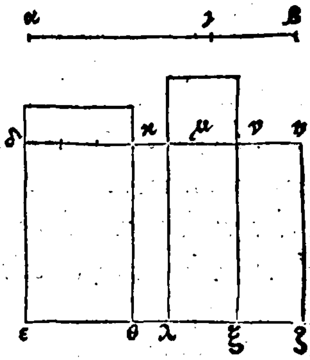
esse binomiũ primum. Nã secundum lineam δι quadrato lineæ αγ æquale applicetur parallelogrammũ δθ. quadrato autem lineæ βγ æquale applicetur parallelogrammum κλ. Residuum ergo, nempe id quod fit bis ex lineis αγ, γβ est æquale residuo uidelicet parallelogrammo μζ. Secetur linea μι bifariã & æqualiter in puncto ν. & ducatur linea νξ parallela utriq; linearum μλ, ιζ. Vtrumuis ergo parallelogrammorũ μξ, νζ est æquale ei quod fit semel ex lineis αγ, γβ. Et quoniam linea αβ est binomium diuisa in sua nomina in puncto γ. ergo lineæ αγ, γβ sunt rationales potẽtia tantum commensurabiles. Ergo quadrata linearum αγ, γβ sunt rationalia, ideoque cõmensurabilia inter se. quare & compositum ex illis quadratis linearum αγ, γβ est commensurabile singulis quadratis linearũ αγ, γβ per 16. Ergo compositum ex quadratis linearum αγ, γβ est rationale. est autem æquale parallelogrammo δλ. ergo & parallelogrammum δλ est rationale, & secundum lineam rationalem applicatur δι. Ergo linea δμ est rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ δι per 21. Rursus quoniam lineæ αγ, γβ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: ergo id quod fit bis ex αγ, γβ, nempe parallelogrammum μζ est mediale per 22. & illud parallelogrammum μζ applicatur secũdum rationalem

nalem μ λ. est ergo linea μ κ rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ μ λ, hoc est lineæ δ ι. Est autem & linea δ μ rationalis & longitudine commensurabilis lineæ δ ι. Est ergo linea δ μ, lineæ μ κ longitudine incõmensurabilis. Sunt autem ambæ rationales. sunt ergo lineæ δ μ, μ κ rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo *linea δ κ est binomium.* Demonstremus *præterea illam esse binomium primum.* Nam *cum quadratorum linearum α γ, γ ϛ sit proportionaliter medium parallelogrammum ex α γ γ β per lemma positum post 53.* Ergo *etiam parallelogrammorum δ θ, κ λ, proportionaliter medium erit parallelogrammum μ ξ, quia singula singulis sunt æqualia.* Est *ergo sicut parallelogrammum δ θ ad μ ξ, ita μ ξ ad κ λ, hoc est sicut linea δ κ ad lineam μ ν, ita linea μ ν ad lineam μ κ.* Ergo *quadratum lineæ μ ν est æquale parallelogrammo ex δ κ, μ κ.* Et *quoniã quadratum lineæ α γ est cõmensurabile quadrato lineæ γ ϛ: ergo & parallelogrammum δ θ est cõmensurabile parallelogrammo κ λ.* Quare *& linea δ κ est longitudine commensurabilis lineæ κ μ per 1.6. & 10 huius.* Et *quoniam quadrata linearũ α γ, γ β sunt maiora eo quòd fit bis ex α γ, γ β per lemma positũ post 39. ergo & parallelogrammũ δ λ est maius parallelogrammo μ ζ.* Quare *& linea δ μ est maior linea μ κ per. 1.6.* Et *est æquale parallelogrammũ ex δ κ, κ μ quadrato lineæ μ ν hoc est quartæ parti quadrati lineæ μ κ, quia linea μ κ diuisa est bifariam & æqualiter in puncto ν, & est linea δ κ longitudine commensurabilis lineæ κ μ.* Ergo *per 18. linea δ μ plus potest quàm linea μ κ quadrato lineæ sibi lon-*

gitudine commensurabilis. Sunt autem & lineæ δμ, μκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea δμ, quæ est maius nomen, est longitudine commensurabilis propositæ lineæ rationali δε. Ergo linea δκ est binomium primum. quod demonstrandum erat.

Sexagesimumprimum Theorema.

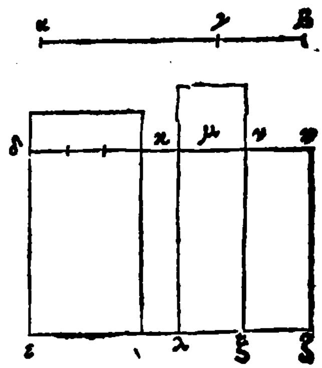
Quadratum bimedialis primi secundum rationanalem lineam applicatum facit alterum latus binomium secundum.



Sit bimediale primum linea αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, quorum maius nomẽ sit, αγ: & proponatur linea rationalis δε, secundũ quam applicetur æquale quadrato lineæ αβ parallelogrammũ δζ faciens alterum latus lineam δκ: dico lineã δκ esse binomiũ secundum. Sint enim eædem constructiones quæ in proximo theoremate, quoniam bimediale primum diuisum est in sua nomina in puncto γ. Quadrata linearum, αγ, γβ sunt medialia. ergo parallelogrammum δλ est etiã mediale. Est ergo rationalis linea δμ, & incommensurabilis longitudine lineæ δε per 23. Rursus quoniam id quod fit bis ex αγ, γβ est rationale, etiam parallelogrãmum μζ erit rationale. Ergo linea μκ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ μλ, hoc est lineæ δε. ergo linea δμ est longitudine incommensurabilis lineæ *μ ν, & sunt rationales: ergo lineæ δ μ, μ ν sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea δ ν est binomium. demonstremus illam esse binomium secundum. Quoniam quadrata linearum α γ, γ β sunt maiora eo quod fit bis ex α γ, γ β. erit ergo parallelogrammũ δ λ maius parallelogrãmo μ ζ. quare & linea δ μ maior linea μ ν. & quoniam quadratum lineæ α ε est commensurabile quadrato lineæ γ β, etiam parallelogrammum δ θ erit cõmensurabile parallelogrammo κ λ. quare & linea δ κ erit commensurabilis longitudine lineæ κ μ: & est parallelogrammũ ex δ κ, κ μ æquale quadrato lineæ μ ι, hoc est quartæ parti quadrati lineæ μ ν.* Er*go linea δ μ plus potest quàm linea μ ν, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per* 18. *& est linea μ ν longitudine commensurabilis lineæ rationali δ ε. ergo linea δ ν est binomium secundum.*

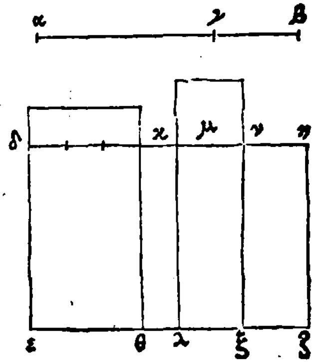
Sexagesimumsecundum Theorema.

Quadratum bimedialis secundi secundum rationalem applicatũ, facit alterũ latus binomiũ tertiũ.



Sit bimediale secundum linea α β diuisa in sua nomina in puncto γ: ita ut maius nomẽ sit α γ. Sitq; rationalis δ ε secundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrã mum δ ζ, faciẽs alterum latus lineam δ ν. dico lineam δ ν esse binomium tertium. Sint enim

AA



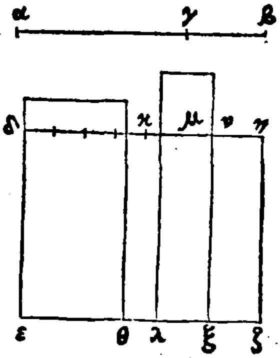
eadem constructiones, quæ in præcedentibus, quoniam linea α β est bimediale secundũ, diuisum in puncto γ in sua nomina. ergo & cõpositũ ex quadratis linearum α γ, γ β est mediale, estq́ue æquale parallelogrammo δ λ. ergo & δ λ erit mediale. ergo linea δ μ erit rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ δ ε per 23. Eadem ratione & linea μ η erit rationalis & longitudine incõmẽsurabilis lineæ μ λ, hoc est lineæ δ ε. ergo utraque linearum δ μ, μ η est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ δ ε. Et quoniam est incommensurabilis longitudine linea α γ lineæ γ β: & sicut linea α γ ad lineam γ β, ita & quadratum lineæ α γ ad parallelogrammũ ex α γ, γ β per 1. 6. Ergo & quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. Quare & compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β est incõmensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrammum δ λ, parallelogrammo μ ζ. Quare & linea δ μ erit incommensurabilis longitudine lineæ μ η. Sunt autẽ ambæ rationales. tota ergo linea δ η est binomium. Demonstrandum est præterea illam esse binomium tertium. quemadmodum in superioribus, ita hic cõcludemus lineam δ μ esse maiorem linea μ η, esséque lineam δ κ longitudine commẽsurabilem lineæ κ μ, esse etiam parallelogrammum ex δ κ, μ κ æquale quadrato lineæ μ ν. ergo & lineã δ μ plus posse quàm linea

μ η

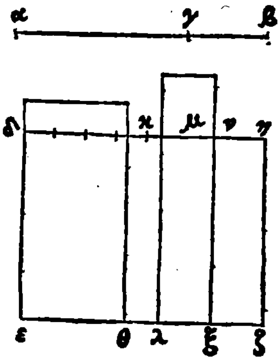
μκ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & neutra ex δμ, μκ eſt longitudine commenſurabilis lineæ δι. ergo linea δκ eſt binomium tertium.

Sexageſimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ maioris ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum.



Sit linea maior αϐ diuiſa in ſua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen ſit αγ, ſitq́; rationalis δι, & ſecundum lineam δι quadrato lineæ αϐ æquale applicetur parallelogrammum ζδ faciens alterũ latus δκ. dico lineam δκ eſſe binomium quartum. Sint eædem conſtructiones quæ in præcedẽtibus. & quoniam linea αβ eſt linea maior diuiſa in ſua nomina in puncto γ, lineæ αγ, γβ ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarũ rationale: id uero quod fit ex ipſis, mediale. Cum igitur compoſitum ex quadratis linearum αγ, γϐ ſit rationale: ergo & parallelogrãmũ δλ erit rationale. ergo & linea δμ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ δι. Rurſus cum id quod fit bis ex αγ, γβ, hoc eſt parallelogrammum μζ ſit mediale, & ſecũdum lineam rationalem μλ ſit applicatũ: ergo & linea μκ erit rationalis, & longitudine incõmenſurabilis lineæ δι. ergo & linea δμ erit longitudine incommenſurabilis li-



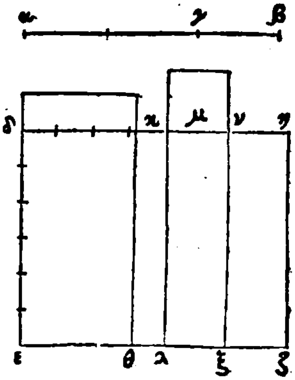
neæ μκ. ergo lineæ δμ, μκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea δκ erit binomium. Demonstrandum est illam præterea esse binomium quartũ similiter, ut in præcedentibus concludetur lineam δμ esse maiorem linea μκ. Cum igitur quadratum lineæ αγ sit incõmẽsurabile quadrato lineæ γβ. ergo & parallelogrammum δθ erit incommẽsurabile parallelogrammo κλ. Quare & linea δκ erit longitudine incommensurabilis lineæ κμ. Ergo per 19. linea δμ plus potest, quàm linea μκ quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis: suntq; lineæ δμ, μκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea δμ longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali δε. ergo tota linea δκ erit binomium quartum.

Sexagesimumquartum Theorema.

Quadratum lineæ potẽtis rationale & mediale secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quintum.

Sit linea potens rationale & mediale αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen sit αγ: sitq; rationalis δε, & secũdum lineam δε quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum δζ, faciens alterũ latus lineã δκ. dico lineam δκ esse binomium quintum. Sint eædem constructiones quæ in præcedentibus. Cum igitur linea αβ sit potẽs rationale & mediale diuisa in

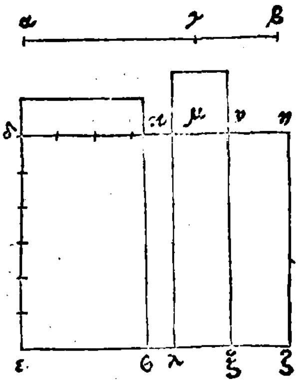
sua



ſua nomina in pũcto γ, lineæ α γ, γ β ſunt potentia incommenſurabiles, conficientes compoſitum ex quadratis ipſarum, mediale: id uerò quod fit ex ipſis, rationale. Cum igitur compoſitũ ex quadratis linearum α γ, γ β ſit mediale, ergo parallelogrammũ δ λ erit etiam mediale. quare linea δ μ erit rationalis longitudine incommẽſurabilis lineæ δ ι. Rurſus cum id quod fit bis ex α γ, γ β ſit rationale, hoc eſt parallelogrammũ μ ζ, ergo linea μ η erit rationalis longitudine commẽſurabilis lineæ δ ι. Igitur linea δ μ eſt longitudine incommẽſurabilis lineæ μ η. Ergo lineæ δ μ, μ η erunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo tota linea δ η erit binomiũ. dico præterea illam eſſe binomium quintũ. Similiter enim demonſtrabitur parallelogrammũ ex δ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ μ ν, & lineam δ κ eſſe longitudine incommenſurabilẽ lineæ κ μ. Ergo per 19. linea δ μ plus poteſt quàm linea μ η quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ſuntq́; lineæ δ μ, μ η rationales potentia tantum cõmẽſurabiles, eſtq́; minor linea μ η longitudine cõmẽſurabilis lineæ δ ι. ergo tota linea δ η erit binomiũ quintũ.

Sexageſimumquintum Theorema.

Quadratum lineæ potentis duo medialia ſecundũ rationalem applicatum, facit alterum latus binomium ſextum.

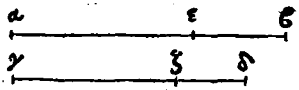


Sit linea potens duo medialia α β diuisa in sua nomina in puncto γ, sitq; linea rationalis δ ι, secundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrãmum δ ζ faciẽs alterũ latus δ η. dico lineã δ η esse binomiũ sextum. Sint *eædem constructiones quæ in præcedentibus. quoniam linea α β est potens duo medialia diuisa in sua nomina in puncto γ, sicut in cæteris dictum est, utrũque parallelogrammum δ λ, μ ζ est mediale, & secundum lineã rationalem δ ι applicantur. ergo utraque linea δ μ, μ η est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δ ι.* Et *quoniam compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β est incõmẽsurabile ei quod fit bis ex α γ, γ β. Ergo & parallelogrammum δ λ est incommensurabile parallelogrammo μ ζ. ergo linea δ μ est longitudine incommẽsurabilis lineæ μ η. ergo lineæ δ μ, μ η sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea δ η est binomiũ. dico præterea illam esse binomium sextum. Quemadmodum enim in cæteris est demonstratum, ita hic etiam demonstretur parallelogrammum ex δ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ μ ν, lineamq; δ κ esse longitudine incõmensurabilem lineæ κ μ, itaque per* 19. *lineam δ μ plus posse quàm linea μ η quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. sed neutra linearum δ μ, μ η est longitudine commensurabilis lineæ rationali δ ι. ergo tota linea δ η est binomium sextum.*

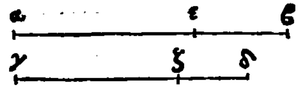
Sexa-

Sexagesimumsextum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis binomio est, & ipsa binomium eiusdem ordinis.



Sit binomium linea αβ, sitq́; ei longitudine commensurabilis linea γδ. dico lineam γδ esse etiam binomium eiusdem ordinis, cuius est & linea αβ. cũ enim linea αβ sit binomium, diuidatur in sua nomina in puncto ε, sitq́; maius nomẽ αε. Ergo *lineæ αε, εβ sunt rationales potentia tantum commensurabiles, fiatq́; sicut linea αβ ad lineam γδ, ita linea αε ad lineam γζ per* 12. 6. Ergo *& residua εβ ad residuam ζδ erit sicut tota linea αβ ad totam lineã γδ per* 19. 5. *Sed linea αβ est longitudine commẽsurabilis lineæ γδ. ergo etiam erit longitudine commensurabilis linea αε lineæ γζ: & linea εβ lineæ ζδ per* 10 *huius. Sunt autem lineæ αε, εβ rationales. sunt ergo etiam rationales lineæ γζ, ζδ.* Et *quoniam est sicut linea αε ad lineam γζ, ita linea εβ ad lineã ζδ. permutata ergo proportione sicut linea αε ad lineã εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ, sed lineæ αε, εβ sunt potentia tantum commensurabiles. ergo & lineæ γζ, ζδ, sunt potentia tantum commẽsurabiles per* 10 *huius. Sunt autẽ & rationales: ergo linea tota γδ est binomium.* Dico *præterea esse binomium eiusdem ordinis cuius & linea αβ. nam linea αε plus potest quàm linea εβ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Si primum plus potest quadrato lineæ sibi longitudine commensurabi-*



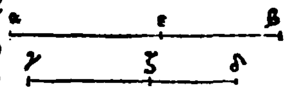
lis, ergo et linea $\gamma\zeta$ plus poterit, quàm linea $\zeta\delta$, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15 huius. Et siquidem linea $\alpha\epsilon$ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: ergo linea $\gamma\zeta$, quæ est longitudine commensurabilis lineæ $\alpha\epsilon$, erit inquam linea $\gamma\zeta$ etiam longitudine commensurabilis eidem lineæ propositæ rationali per 12 huius, ob eamque causam utraque linea $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ est binomiũ primum, hoc est utraque erit eiusdem ordinis. Si uerò linea $\epsilon\beta$ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ergo linea $\zeta\delta$, quæ est longitudine commensurabilis lineæ $\epsilon\beta$, erit etiam longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ob eamq; causam erit utraque binomiũ secundum, hoc est utraque eiusdem ordinis. Si uerò neutra linearum $\alpha\epsilon$, $\epsilon\beta$ est longitudine cõmensurabilis propositæ rationali, neutra etiam linearum $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ erit eidẽ propositæ lineæ rationali commensurabilis longitudine per 14 huius. sic ergo utraque linea erit binomium tertium. Quòd si linea $\alpha\epsilon$ plus potest, quàm linea $\epsilon\beta$ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, ergo & linea $\gamma\zeta$ plus poterit quàm linea $\zeta\delta$, quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per 15 huius. Et si quidem linea $\alpha\epsilon$ est longitudine commensurabilis propositæ rationali, & linea $\gamma\zeta$ erit eidem rationali longitudine commensurabilis: tunc erit utraque binomium quartũ. Quòd si linea $\epsilon\beta$ fuerit rationali commensurabilis longitudine, & linea $\zeta\delta$ erit eidem longitudine commensurabilis: eritque hoc modo utraque binomium quintum.

Quòd

Quòd si neutra linearum α ι, ι β fuerit rationali commensurabilis longitudine, neutra etiam γ ζ, ζ δ erit eidē commensurabilis longitudine: eritq; utraque binomium sextum. Quare linea longitudine commensurabilis binomio, est etiam binomium eiusdem ordinis.

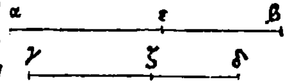
Sexagesimumseptimum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis alteri bimedialium, est & ipsa bimediale etiā eiusdē ordinis.



Sit bimediale linea α β: eidem sit alia cōmēsurabilis lōgitudine γ δ. dico lineam γ δ esse etiā bimediale eiusdem ordinis, cuius & linea α β. Diuidatur linea α β in sua nomina in puncto ι, fiatq; sicut linea α β ad lineam γ δ, ita linea α ι ad lineam γ ζ: residua ergo linea ι β erit ad lineam ζ δ sicut tota linea α β ad totam γ δ: sed linea α β est longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo & linea α ι erit longitudine commensurabilis lineæ γ ζ, & linea ι β lineæ ζ δ. Sunt autē lineæ α ι, ι β mediales. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ sunt etiā mediales per 24. Et quoniam est sicut linea α ι ad lineam ι β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: sed lineæ α ι, ι β sunt potentia tantum commēsurabiles, ergo & lineæ γ ζ, ζ δ sunt potētia tantum cōmensurabiles. sed modo probatum est eas etiam esse mediales, ergo tota linea γ δ erit etiā bimediale: dico præterea esse bimediale eiusdē ordinis, cuius & linea α β. cum enim sit sicut linea α ι ad lineā ι β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: sitq; sicut linea γ ζ ad lineā ζ δ, ita quadratū lineæ γ ζ ad ζ δ parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ per 1.6.

Ergo sicut linea αε ad lineam εβ, ita quadratũ lineæ γζ ad parallelogrammũ ex γζ, ζδ per 11.5. Sed



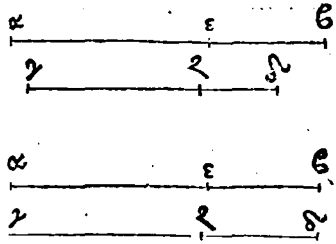
sicut linea αε ad lineam εβ, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, εβ, per 1.6. *Ergo sicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, εβ, ita quadratum lineæ γζ, ad parallelogrammum ex γζ, ζδ per* 11.5. *permutata ergo proportione sicut quadratũ lineæ αε ad quadratum linæ γζ, ita parallelogrammũ ex αε, εβ ad parallelogrammum ex γζ, ζδ: sed quadratum lineæ αε est commensurabile quadrato lineæ γζ, quia modo probatum est lineas αε, γζ esse commensurabiles. Ergo parallelogrammum ex αε, εβ erit commensurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. Si ergo parallelogrãmum ex αε, εβ fuerit rationale, hoc est si linea αβ fuerit bimediale primum, parallelogrammum quoque ex γζ, ζδ erit rationale, ergo linea γδ erit etiã bimediale primum. Si uerò parallelogrammum ex αε, εβ fuerit mediale, hoc est si linea αβ fuerit bimediale secundum, erit etiam parallelogrammum ex γζ, ζδ mediale. Ergo etiã linea γδ erit bimediale secundũ, quare & ambæ erunt eiusdem ordinis, quod demonstrandum erat: hoc autem theorema 67. potest uniuersaliter concipi. linea commẽsurabilis alteri bimedialium longitudine & sententia siue sentẽtia tantum, est & ipsa bimediale, etiam eiusdem ordinis, neque eo minus uerum erit. quod ipsum, etiam eadem uia demonstrabitur.*

Sexagesimumoctauum Theorema.

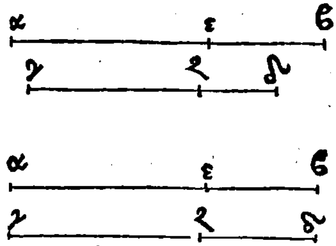
Linea cõmẽsurabilis lineæ maiori est & ipsa maior.

Sit

Sit linea maior α β cui ſit commenſurabilis linea γ δ quocunque modo, hoc eſt, ſiue ſit longitudine & potentia ſimul commenſurabilis, ſiue potentia tantum. Dico lineã *γ δ eſſe etiam lineã maiorẽ.*



Diuidatur linea α β in ſua nomina in puncto ε, fiantq́; cætera quemadmodum in ſuperioribus. Et *quoniã eſt ſicut linea α β ad lineam γ δ: ita & linea α ε ad lineam γ ζ, & linea ε β ad lineã ζ δ. ergo ſicut linea α ε ad lineam γ ζ: ita linea ε β ad lineam ζ δ. ſed linea α β eſt commenſurabilis lineæ γ δ. ergo & linea α ε erit commenſurabilis lineæ γ ζ, & ſimiliter linea ε β lineæ ζ δ.* Et *quoniam eſt ſicut linea α ε ad lineã γ ζ, ita linea ε β ad lineã ζ δ. permutata ergo proportione ſicut linea α ε ad lineam ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ. ergo ſicut quadratum lineæ α ε ad quadratum lineæ ε β, ita quadratum lineæ γ ζ ad quadratũ lineæ ζ δ, per 22. 6.* Ergo *per coniunctam proportionẽ (quæ probatur per* 18.5.) *ſicut compoſitum ex quadratis linearũ α ε, ε β ad quadratum lineæ ε β, ita compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad quadratũ lineæ ζ δ.* Ergo *per contrariam proportionem ſicut quadratum lineæ ε β ad compoſitum ex quadratis linearum α ε, ε β, ita quadratum lineæ ζ δ ad compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ.* Ergo *permutata proportione ſicut quadratum lineæ ε β ad quadratum lineæ ζ δ, ita compoſitum ex quadratis linearum α ε, ε β, ad compoſitũ ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ.* Sed *quadratũ lineæ ε β eſt commẽſurabile qua-*



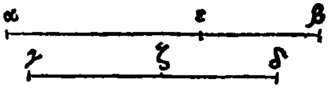
drato lineæ ζδ, quia modo probatũ eſt lineas εβ, ζδ eſſe cõmenſurabiles: ergo & cõpoſitum ex quadratis linearum αε, εβ erit commẽſurabile cõpoſito ex quadratis linearum γζ, ζδ. Sed compoſitum ex quadratis linearum αε, εβ eſt rationale per poſitionem. ergo & compoſitũ ex quadratis linearum γζ, ζδ erit etiam rationale. Sicut autem linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ. Sicut autem lin̄ea αε ad lineam εβ, ita quadratũ lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, εβ. ergo ſicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, εβ. ſed ſicut linea γζ ad lineam ζδ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, ζδ: ergo ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, εβ, ita quadratũ lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, ζδ. ergo permutata proportione ſicut quadratũ lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammũ ex αε, εβ ad parallelogrammum γζ, ζδ. ſed quadratũ lineæ αε eſt commenſurabile quadrato lineæ γζ, quia modo probatum eſt lineas αε, γζ eſſe commenſurabiles, ergo & parallelogrammum ex αε, εβ erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. ſed parallelogrammũ ex αε, εβ eſt mediale per poſitionem. ergo & parallelogrammũ ex γζ, ζδ erit etiam mediale per corollarium 24. Sed (ut modo probatum eſt) ſicut linea αε ad lineam εβ, ita linea γζ ad lineam ζδ: linea autẽ αε erat per ſuppoſitionem potentia incommẽſurabilis lineæ εβ.

ergo

ergo per 10 & linea γζ erit potentia incommensurabilis lineæ ζδ. Ergo lineæ γζ, ζδ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. ergo tota linea γδ erit linea maior per 39 huius. ergo linea cõmẽsurabilis lineæ maiori erit & ipsa linea maior. In hoc theoremate 68 ideo persequuti non sumus demonstrationẽ Theonis, quia difficilior uisa est, & indigere lemmate ad id probandũ, quod pro demonstrato sumit, illis uerbis: καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αε, εβ.

Sexagesimumnonum Theorema.

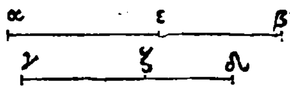
Linea cõmẽsurabilis lineæ potẽti rationale & mediale, est & ipsa linea potẽs rationale & mediale.



Sit linea potẽs rationale & mediale αβ, cui sit commensurabilis linea γδ, siue sit longitudine & potentia siue potentia tantum commensurabilis: dico etiam γδ esse lineam potentẽ rationale & mediale. Diuidatur linea αβ in sua nomina in pũcto ε: sint quoque eædem construtiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas γζ, ζδ esse potentia incõmensurabiles, sicut sunt lineæ αε, εβ: & compositũ ex quadratis linearum αε, εβ esse commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, ζδ: item parallelogrammum ex αε, εβ esse commensurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. Quare & compositum ex quadratis linearũ γζ, ζδ erit etiam mediale, sicut compositũ ex quadratis linearum αε, εβ: item parallelogrammum ex γζ, ζδ *erit etiam rationale sicut & parallelogrammũ ex α ι, ι β. ergo linea γ δ erit etiam linea potens rationale & mediale per 40.*

Septuagesimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ potenti duo medialia, est & ipsa linea potens duo medialia.

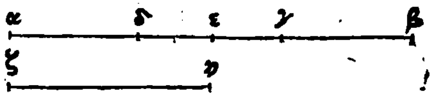


Sit linea potens duo medialia α β, eiq; cõmensurabilis linea γ δ, siue sit longitudine & potẽtia, siue potentia tantum commensurabilis: dico lineam γ δ esse etiam lineam potentem duo medialia. Diuidatur linea α β in sua nomina in puncto ι: sint quoque eædem constructiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas γ ζ, ζ δ esse potentia incommensurabiles, & compositum ex quadratis linearum α ι, ι β esse cõmensurabile composito ex quadratis linearũ γ ζ, ζ δ: parallelogrammum uero ex α ι, ι β esse commẽsurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. quare & compositũ ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ erit etiam mediale: & similiter parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ erit mediale. Quòd autẽ compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ sit incommẽsurabile parallelogrãmo quod fit ex γ ζ, ζ δ, ita probatur. Cum sit enim sicut compositum ex quadratis linearum α ι, ι β ad quadratum lineæ α ι, ita compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad quadratum lineæ γ ζ (ut probatũ est in præcedentibus.) ergo permutata proportione, sicut compositum ex quadratis linearũ α ι, ι β ad compositum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ, ita quadratum

tum lineæ α ι ad quadratũ lineæ γ ζ: ſed in ſuperioribus, nempe in 68 theoremate probatum eſt, ſicut quadratũ lineæ α ι ad quadratum lineæ γ ζ, ita parallelogrammũ ex α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. Ergo ſicut cõ poſitum ex quadratis linearum α ι, ι ϐ ad compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ, ita parallelogrammum ex α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. ergo permutata proportione ſicut compoſitum ex quadratis linearum α ι, ι ϐ ad parallelogrammum ex α ι, ι ϐ, ita compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. Sed per ſuppoſitionẽ compoſitũ ex quadratis linearum α ι, ι ϐ eſt incommenſurabile parallelogrammo ex α ι, ι ϐ. ergo & compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ eſt incommenſurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. Ergo linea γ δ eſt potens duo medialia.

Scholium.

Hactenus dictum eſt de ſenarijs ſex, quorum primus ſenarius cõtinet generationem linearum irrationalium per compoſitionem: ſecundus diuiſionem, nempe quòd hæ diuidantur in unico tantum puncto: tertius inuẽtionem binomiorum, primi inquam, ſecundi, tertij, quarti, quinti & ſexti, poſt quem incipit quartus ſenarius continẽs differentiam linearum irrationalium inter ſe. Nam ex uſu ſingulorum binomiorum demonſtrantur differentiæ irrationalium. Quintus autem docet de applicationibus quadratorum cuiuſq; lineæ irrationalis, ex qualibus ſcilicet irrationalibus ſint latitudines cuiuſque ſuperficiei applicatæ. In ſexto uerò ſenario dicitur ſingulas lineas ſingulis irrationalibus commenſurabiles, eſſe *etiam ipsas irrationales eiusdem speciei. Mox uero dicetur de septimo senario, in quo reliquæ ipsarũ rursus inter se differẽtiæ dilucide pertractantur. Existit etiam in illis ipsis lineis irrationalibus proportionalitas arithmetica. eáque linea quæ sumitur media proportionaliter secundum medietatem arithmeticam inter nomina cuiusque lineæ irrationalis similiter est irrationalis eiusdẽ speciei. Prius autem constat proportionalitatẽ arithmeticã inter illa nomina reperiri. Sit enim linea $\alpha\beta$ quæcunque ex dictis irrationalibus. uerbi gratia, sit binomiũ, diuidaturq; in sua nomina in puncto γ: sitq; maius nomẽ $\alpha\gamma$, de quo auferatur linea $\alpha\delta$ æqualis minori nomini, nempe $\gamma\beta$: diuidaturq; linea $\gamma\delta$ bifariã & æqualiter in puncto ε: manifestum est lineam $\alpha\varepsilon$ esse æqualem lineæ $\varepsilon\beta$. Sit alterutri earũ æqualis linea $\zeta\eta$, manifestũ est, quanto differt linea $\alpha\gamma$ à linea $\zeta\eta$, tanto eandem lineam $\zeta\eta$ differre à linea $\gamma\beta$. utrobique enim est differentia $\delta\varepsilon$ uel $\varepsilon\gamma$, quod est propriũ arithmeticæ proportionalitatis. Constat autem lineam $\zeta\eta$ esse commensurabilem longitudine lineæ $\alpha\beta$, quia est eius dimidia. quare per 66 linea $\zeta\eta$ erit etiam binomium, eodémque modo demonstrabitur de cæteris irrationalibus. Totum hoc scholium non reperitur in uetusto.*



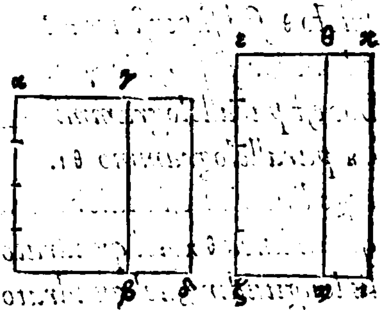
Septuagesimumprimum Theorema.

Si duæ superficies rationalis & medialis simul cõponantur, linea quæ totam superficiem composi-

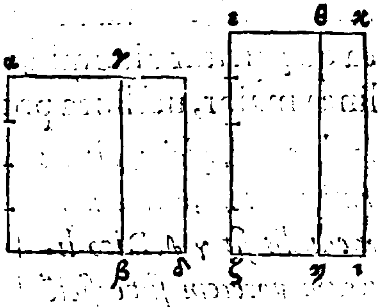
tam

tam poteſt, eſt una ex quatuor irrationalibus, uel ea quę dicitur binomiũ, uel bimediale primũ, uel linea potẽs rationale & mediale.

Sint duæ ſuperficies, altera rationalis α ϛ, altera uerò medialis ſit γ δ. Dico lineam potẽtem ſuperficiẽ α δ, eſſe uel binomiũ, uel bimediale primũ, uel lineam maiorem uel lineã



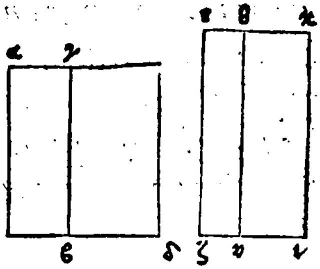
potentem rationale & mediale. Nam *ſuperficies α β, eſt uel maior uel minor ſuperficie γ δ: nã æquales eſſe nullo modo poſſunt, cũ alia ſit rationalis, alia uerò medialis.* Sit *prius ea maior proponatúrq; linea rationalis ε ζ, ſecundũ quam æqualis ſuperficiei α β, applicetur ſuperficies parallelogramma rectangula ε η, faciens alterum latus ε θ: ſuperficiei autem γ δ æqualis ſecundum eandẽ lineam ε ζ, hoc eſt ſecũdum lineam θ η applicetur parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ. Cum ſuperficies α β ſit rationalis, etiã parallelogrammum ε η erit rationale: ergo & linea ε θ erit rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ ε ζ per* 21. Rurſus *eadem ratione linea θ κ erit rationalis & longitudine incommẽſurabilis lineæ ε ζ per* 23. *& quoniam ſuperficies α β eſt rationalis, ſuperficies uerò γ δ eſt medialis, ſuperficies α ϛ, hoc eſt parallelogrãmum ε η, eſt incõmenſurabile ſuperficiei γ δ: hoc eſt parallelogrãmo θ ι.* Ergo *per* 1. 6 *&* 10. *huius linea ε θ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ θ κ: ergo lineæ ε θ, θ κ ſunt rationales potẽtia tantum*



cōmensurabiles. ergo tota linea ι κ est binomiū diuisum in sua nomina in pūcto θ. sed superficies α ϐ est maior superficie γ δ, hoc est parallelogrammū ι κ parallelogrammo θ ι. ergo linea ι θ est maior linea θ κ, sed linea ι θ plus potest quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, uel quadrato lineæ sibi longitudine incōmēsurabilis. Prius autem posit plus ea quadrato lineæ sibi commensurabilis: est autem linea ι θ longitudine cōmēsurabilis lineæ rationali ε ζ, (ut modo probatum est) ergo linea ι κ est binomiū primum. Ergo per 54 linea potens superficiem ε ι est binomium, quare & linea potens superficiem α δ est binomium. Sed secundo loco linea ι θ plus posit quàm linea θ κ, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq́; maius nomen linea ι θ commensurabile longitudine lineæ rationali ε ζ, ergo linea ι κ est binomium quartum. sed linea ε ζ est rationalis, ergo per 57 linea potēs superficiē ε ι, est linea maior: quare & linea potens superficiem α δ, est linea maior. Rursus superficies α β, quæ est rationalis, sit minor superficie γ δ, quæ est medialis, hoc est parallelogrammum ι κ parallelogrammo θ ι. Quare & linea ι θ erit minor linea θ κ: lineæ uero θ κ plus potest quàm linea ι θ, uel quadrato lineæ sibi longitudine cōmēsurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis. Prius posit plus ea quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, est

autem

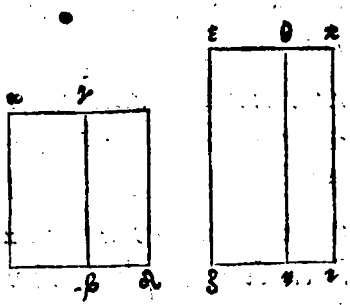
autẽ minus nomen, nempe ε θ cõmensurabile longitudine rationali lineæ rationali ε ζ, ut modo probatum est: ergo linea ε κ est binomiũ secundum. Ergo per 55 linea potens parallelogrammũ ε ι, hoc est parallelogrammum α δ, est bimediale primũ. Sed linea θ κ plus poßit quàm linea ε θ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq́; minus nomẽ ε θ commensurabile longitudine lineæ rationali ε ζ, ergo linea ε κ est binomium quintum. ergo per 58 linea potens parallelogrammum ε ι, hoc est ei æquale α δ, erit linea potens rationale & mediale. Ergo si duæ superficies rationalis & medialis &c.



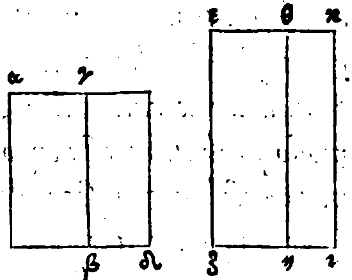
Septuagesimumsecundum Theorema.

Si duæ superficies mediales incommensurabiles simul componantur, fiunt reliquæ duæ lineæ irrationales, uel bimediale secundum, uel linea potẽs duo medialia.

Componantur duæ superficies mediales incommensurabiles inter se α β, γ δ. dico lineam potentem superficiem α δ esse uel bimediale secundum, uel lineam potentẽ duo medialia. Nã superficies α β est uel maior uel minor superficie γ δ (æquales enim esse



nullo modo possunt, cum sint incommensurabiles.) Sit ergo prius superficies α β maior superficie γ δ, proponaturq; linea rationalis ε ζ secundũ quam æquale superficiei α β applicetur parallelogrammum ε κ, faciens alterum latus ε θ: superficiei uerò γ δ applicetur æquale parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ: & quoniam utraque superficies α β, γ δ est medialis: hoc est utrũque parallelogrammum ε κ, θ ι, ergo utraque linea ε θ, θ κ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniam superficies α β, γ δ sunt incommensurabiles, ergo est etiam incommensurabile parallelogrammum ε κ parallelogrammo θ ι. ergo & lineæ ε θ, θ κ, sunt longitudine incommẽsurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. Ergo linea ε κ, est binomium: similiter autem ac in proximo theoremate demonstratur lineam ε θ esse maiorẽ linea θ κ, qua linea ε θ plus potest, quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis. Possit prius plus quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: neutra autem linearũ ε θ, θ κ est longitudine cõmensurabilis lineæ rationali ε ζ: ergo linea ε κ est binomium tertium. ergo per 56. linea potens parallelogrammum ε ι, hoc est ei æquale α δ est bimediale secundũ. Sed linea ε θ possit plus, quàm linea θ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, est autem utraq; ε θ, θ κ



longitudine

longitudine incommensurabilis lineæ rationali ι ζ: ergo linea ι κ est binomium sextum. Ergo *per 59 linea potens parallelogrammũ ι ι, hoc est α λ est linea potens duo medialia.* Eadem *ratione si superficies α ε fuerit minor superficie γ λ, demonstrabimus lineam potentem superficiem α λ, esse uel bimediale secundum uel lineam potentem duo medialia.* Ergo *si duæ superficies mediales &c. binomium & cæteræ consequentes lineæ irrationales neque sunt eadẽ cum linea mediali, neque ipsæ inter se.*

Nam *quadratum lineæ medialis applicatum secundũ lineam rationalem, facit alterum latus lineam rationalem, & longitudine incommensurabilem lineæ, secũdum quam applicatur, hoc est lineæ rationali per 23. Quadratum uero binomij secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium primum per 60. Quadratum uero bimedialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ secũdum per 61. Quadratum uerò bimedialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium tertium per 62. Quadratum uerò lineæ maioris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum per 63. Quadratum uerò lineæ potentis rationale & mediale secũdum rationalem applicatũ, facit alterum latus binomium quintum per 64. Quadratum uero lineæ potentis duo medialia secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ sextum per 65. Cũ igitur dicta latera, quæ latitudines uocantur, differant, & à prima latitudine quoniam est rationalis, cum inter se quoque differant, eo quia sunt* *binomia diuersorum ordinum: manifestum est ipsas lineas irrationales differentes esse inter se.*

Secundus ordo alterius sermonis, qui est de detractione.

Principium senariorum per detractionem.

Septuagesimumtertium Theorema.

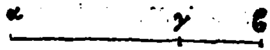
Si de linea rationali detrahatur rationalis potentia tantum commensurabilis ipsi toti, residua est irrationalis. Vocetur autem residuum.

De *rationali αβ detrahatur rationalis βγ, potẽtia tãtũ commensurabilis toti αβ. dico residuam αγ esse irrationalem, quæ uocetur residuum. cum enim linea αβ sit lõgitudine incõmensurabilis lineæ βγ, sitq́; sicut linea αβ ad lineam βγ, ita quadratũ lineæ αβ ad parallelogrãmum ex αβ,βγ: ergo quadratum lineæ αβ erit incõmensurabile parallelogrãmo ex αβ,βγ. sed quadrato lineæ αβ sunt commensurabilia quadrata linearũ αβ,βγ per* 16. Ergo *quadrata linearũ αβ,βγ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex αβ,βγ per* 14. *sed parallelogrammo ex αβ,βγ commẽsurabile est ei quod fit bis ex αβ,βγ.* Ergo *quadrata linearum αβ,βγ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex αβ,βγ. sed quadrata linearũ αβ,βγ sunt æqualia ei quod fit bis ex αβ,βγ, & quadrato lineæ αγ, per 7.2. ergo id quod fit bis ex αβ,βγ cum quadrato lineæ αγ, est incommensurabile ei quod fit bis ex αβ,βγ.* Ergo *per secundam partem 17 id quod fit*

fit bis ex α β, ϛ γ est incōmensurabile quadrato lineæ α γ. ergo per primam partem eiusdem 17 id quod fit bis ex α ϛ, ϛ γ cum quadrato α γ, hoc est illi toti æqualia quadrata linearum α ϛ, β γ sunt incommensurabilia quadrato lineæ α γ. Hoc *breuius cōcluditur per corollarium à nobis demonstratum post 17. sed quadrata linearum α ϛ, ϛ γ sunt rationalia, quia lineæ α β, ϛ γ positæ sunt rationales. ergo linea α γ est irrationalis: uocetur autē residuum.* Hoc *uero theorema nihil aliud dicit, quàm portionem eam maioris nominis ipsius binomij, quæ remanet post detractionem minoris nominis de maiori, esse irrationalem: quæ uocatur residuum, hoc est si de maiori nomine ipsius binomij, quod maius nomen est linea rationalis potentia tantum commensurabilis minori nomini, detrahatur minus nomen, quod ipsum est etiā cōmensurabile potentia tantū maiori nomini (quod maius nomen hoc theorema uocat lineam totam) residuā lineam esse irrationalem, quam uocat residuum.* Itaque *omnes lineæ, de quibus agitur hoc theoremate, & cæteris quinque consequētibus, sunt reliquæ portiones maiorum nominum totarum linearum, de quibus actum est 36.37.38.39.40 & 41 post detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuagesimumquartum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potētia tantum cōmensurabilis toti lineę, quæ uero detracta est cū tota cōtineat superficiē rationalē, residua est irrationalis. uocetur autę residuū mediale primū.

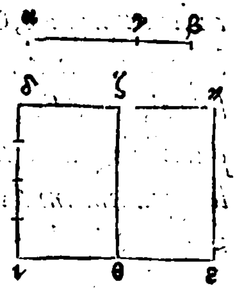


De linea mediali α β detrahatur medialis β γ potentia tantum commẽsurabilis toti α β, quæ scilicet β γ cũ α β contineat rationale, nempe parallelogrammũ ex α β, β γ. Dico reliquã α γ esse irrationalem. Vocetur autem residuum mediale primum. Nam cum lineæ α β, β γ sint mediales, quadrata illarum erunt medialia. sed quod fit bis ex α β, β γ est rationale: ergo cõpositum ex quadratis linearũ α β, β γ hoc est id quod fit bis ex α β, β γ, cum quadrato lineæ α γ est incommensurabile ei quod fit bis ex α β, β γ. Ergo per secũdam partem 17. id quod fit bis ex α β, β γ, est incommẽsurabile quadrato lineæ α γ. sed id quod fit bis ex α β, β γ est rationale. ergo quadratum lineæ α γ est irrationale. ergo & linea α γ irrationalis. Vocetur autẽ residuum mediale primum. Est etiam hoc residuum mediale primũ, residua portio maioris nominis bimedialis primi, post detractionem minoris nominis de maiori: unde & denominationem habet residuum mediale primum.

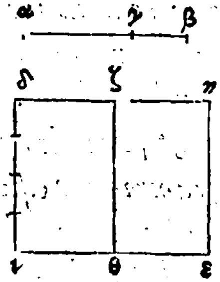
Septuagesimumquintum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum commensurabilis toti, quæ uero detracta est cum tota contineat superficiem medialem, reliqua est irrationalis. Vocetur autem residuum mediale secundum.

De linea mediali α β, detrahatur medialis β γ potentia tantum commensurabilis toti α β, cum tota uerò α β continens superficiem medialem, nempe parallelogrammum ex α β, β γ: dico reliquã α γ esse irrationalẽ. Vocetur autem



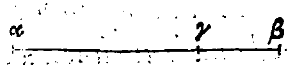
tem residuũ mediale secundũ. proponatur linea rationalis δι, & secundum illam quadratis linearum αβ, βγ æquale applicetur parallelogrammum δε, facięs alterum latus δκ. Et uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale secũdum eandem lineam δι, applicetur parallelogrammum δθ faciens alterum latus δζ. parallelogrammum δθ est minus parallelogrãmo δε: quia & quadrata linearum αβ, βγ sunt maiora eo quod fit bis ex αβ, βγ tanto, quantũ est quadratum lineæ αγ per 7.2. Ergo & residuum nempe parallelogrammũ ζε, erit æquale quadrato lineæ αγ. Et quoniam quadrata linearum αβ, βγ sunt commensurabilia & medialia: ergo compositum ex ipsis parallelogrammum δε, erit utrique quadrato commẽsurabile per 16. ergo & parallelogrammum δε, erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. ergo per 23 linea δκ erit rationalis longitudine incõmensurabilis lineæ δι. Rursus cum id quod fit ex αβ, βγ sit mediale: etiam id quod fit bis ex ijsdem αβ, βγ erit mediale. ergo & illi æquale parallelogrammũ δθ erit mediale. Ergo & linea δζ erit rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ δι. Et cum linea αβ sit longitudine incommensurabilis lineæ βγ, ergo quadratum lineæ αβ erit incommẽsurabile parallelogrammo ex αβ, βγ per 1.6 & 10 huius. Sed quadrato lineæ αβ sunt commensurabilia quadrata linearũ αβ, βγ, parallelogrammo uero ex αβ, βγ est commensurabile id, quod fit bis ex αβ, βγ. ergo quadra-



ta linearum αε, βγ, hoc est parallelogrammum δι est incommēsurabile ei, quod sit bis ex αε, βγ, hoc est parallelogrãmo δθ: sed sicut parallelogrammum δι ad parallelogrammum δθ, ita linea δκ ad lineam δζ. Ergo *linea δκ, est longitudine incōmēsurabilis lineæ δζ: sunt autē ambæ rationales. Ergo linea ζκ est residuum per 73. sed linea δι est rationalis: parallelogrammum uerò contentum ex linea rationali & irrationali est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demonstrationis 38. Ergo parallelogrammum ζι, est irrationale: ergo & linea αγ, quæ illud parallelogrã mum potest est irrationalis.* V*ocatur autem residuū mediale secundum: estq; hoc residuum mediale secundum, reliqua portio maioris nominis ipsius bimedialis secundi post detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuagesimumsextum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti, compositum autē ex quadratis totius lineæ & lineæ detractæ sit rationale: parallelogrammum uerò ex iisdem contentum sit mediale, reliqua linea erit irrationalis: uocetur autem linea minor.

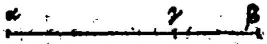


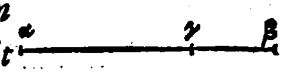
De *linea recta αβ, detrahatur recta βγ potentia incommensurabilis toti αβ, cuius totius inquam αβ quadratum cum quadrato lineæ βγ sit rationale.* C*ontentū uero ex αβ,* *βγ sit mediale, dico residuam lineam αγ esse irrationalem, quæ uocetur minor. Cum enim compositũ ex quadratis linearum αβ, βγ sit rationale, id uerò quod fit bis ex αβ, βγ sit mediale: ergo quadrata linearum αβ, βγ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex αβ, βγ. ergo & reliquo quadrato scilicet lineæ αγ, erunt incommensurabilia quadrata linearum αϐ, ϐγ, sicut dictum est in 73: sed quadrata linearum αβ, ϐγ sunt rationalia. ergo quadratum lineæ αγ erit irrationale, & linea αγ irrationalis: uocetur autẽ linea minor, ideo sic dicta, quia est reliqua portio maioris nominis lineæ maioris post detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuagesimumseptimum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractę sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem contentum sit rationale, reliqua linea est irrationalis: uocetur autẽ linea faciẽs cum superficie rationali totam superficiem medialem totum mediale.

De linea recta αβ, detrahatur recta βγ potentia incommẽsurabilis toti lineæ αβ, ex quadratis quarum scilicet αγ, ϐγ compositum sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem sit rationale. dico reliquã lineam αγ esse irrationalẽ, quæ uocetur linea faciens cum superficie rationali totam superficiem medialem. Cum enim compositũ ex quadratis linearũ αϐ, βγ sit mediale, id uerò quod fit bis ex αϐ,





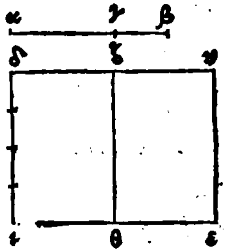
ζγ sit rationale. Ergo compositum ex quadratis linearum αζ,βγ erit incommẽsurabile ei quod fit bis ex αβ,βγ. Ergo & reliquum nempe αγ erit incommensurabile ei, quod fit bis ex αβ,βγ per 17. Est autem id quod fit bis ex αβ, ζγ rationale, ergo quadratum lineæ αγ erit irrationale, & linea αγ irrationalis. Vocetur autem faciẽs cum superficie rationali totam medialem: ideo sic dicta, quia compositum ex quadratis linearum αβ,βγ est mediale, & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex αβ,ζγ existens & ipsum rationale. Nam *quadrata linearũ αβ, βγ sunt æqualia ei quod fit bis ex αζ,βγ, & quadrato lineæ αγ per 7.2. aut ideo sic dicta est, quia quadratum eius iunctum cum superficie rationali facit totã superficiem medialem, ut intelligetur ex theoremate 109. In hac autem linea denominanda recessimus à uoce recepta* Campano, *qui hãc lineã uocauit, iunctam cum rationali componentem totum mediale: idem faciemus in proximo theoremate, quia denominationes illæ* Campa*ni non satis conuenientes rebus ipsis esse uisæ sunt.*

Septuagesimumoctauum Theorema.

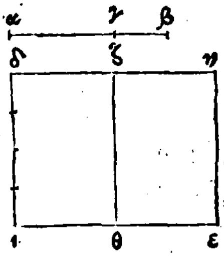
Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractæ sit mediale, parallelogrammum uerò ex eisdem sit etiam mediale: præterea sint quadrata ipsarum incommẽsurabilia parallelogrammo ex iisdem, reliqua linea est irrationalis: uocetur autem linea faciens

cum

cum superficie mediali totam superficiem medialem.



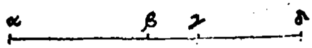
De linea α ϐ detrahatur recta ϐ γ potentia incõmensurabilis toti α β ex quadratis, quarum compositũ sit mediale: parallelogrammũ quoque ex eisdem sit mediale. præterea compositũ ex quadratis linearum α β, ϐ γ sit incommensurabile parallelogrammo ex α β, ϐ γ. dico lineã reliquam α γ esse irrationalem. Vocetur autem faciens cum mediali superficie totam medialẽ. Proponatur linea rationalis δ ι*, secũdum quam quadratis linearum α β, β γ, æquale applicetur parallelogrammũ* δ ι *faciẽs alterum latus* δ κ*: ei uerò quod fit bis ex α ϐ, β γ æquale applicetur* δ θ *faciens alterum latus* δ ζ*, residuum ergo* ζ ι *erit æquale residuo, nempe quadrato lineæ α γ. quare linea α γ potest parallelogrammum* ζ ι*. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α β, β γ, hoc est* δ ι *est mediale, ergo linea* δ κ *est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ* δ ι*. Rursus cum id quod fit bis ex α ϐ, ϐ γ, hoc est* δ θ *sit mediale: ergo & linea* δ ζ *erit rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ* δ ι*. Et quoniam quadrata linearum α β, β γ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α β, β γ: ergo incommensurabile etiam erit* δ ι *ipsi* δ θ*. Ergo linea* δ κ *erit incommensurabilis lineæ* δ ζ*: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ* δ κ, δ ζ *sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo* ζ κ *erit residuum per 73. Sed linea* ζ θ *est rationalis, quia æqualis rationali* δ ι*: parallelogrammum*



uerò cõtentum ex linea rationali & irrationali, nẽpe ζι, est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demõstrationis 38. ergo linea αγ, quæ illud potest, erit irrationalis: uocetur autẽ faciens cum superficie mediali totam medialem. Ideo sic dicta quia compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex αβ, βγ, existens & ipsum mediale: huius quoq; denominationis rationem aliam intelliges ex theoremate 110. Hîc non est alienum inserere lemma quoddã positum à Campano ante proposit. 74. Illud tantum in eo emẽdandum est, ut excessus linearũ intelligatur secundum Arithmeticam proportionalitatem, nõ autem secundũ geometricã: itaque loco numeri 4. qui adscribitur minime lineæ, reponatur binarius.

Septuagesimumnonum Theorema.

Residuo unica tantũ linea recta coniungitur rationalis, potentia tantũ commensurabilis toti lineę.



Sit residuum linea αβ, cõiungaturque ipsi linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint rationales potentia tantum commensurabiles. Nego lineæ αβ aliam posse coniungi huiusmodi, ut sit rationalis potentia tantum commẽsurabilis ipsi toti αγ. Si dicas aliam cõiungi posse, huiusmodi sit illa linea βδ: ergo lineæ αδ, δβ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Et quoniam quantò differunt quadrata linearum αδ, δβ ab eo quod fit bis

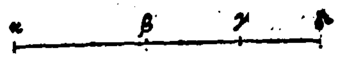
ex

ex α δ, δ ς, (differunt autem illa ab isto quadrato lineæ α β per 7. 2.) tantò differunt & quadrata linearũ α γ, γ ς, ab eo quod fit bis ex α γ, γ β (differunt autẽ illa quoque ab isto similiter eodem quadrato lineæ α β, per 7, 2) Ergo *& permutate per lemma positũ à* Campano *ante* 74. *quantò differunt quadrata linearũ α δ, δ ς, à quadratis linearum α γ, γ β, tantò differt id quod fit bis ex α δ, δ ς, ab eo quod fit bis ex α γ, γ β: sed cõpositũ ex quadratis linearum α δ, δ β, & compositum ex quadratis linearum α γ, β γ cum sint ambo rationalia differũt inter se superficie rationali, per lemma positũ à nobis ante* 42. Ergo *& id quod fit bis ex α δ, δ β differet ab eo quod bis ex α γ, γ β superficie rationali.* Sed *id quod fit bis ex α δ, δ ς est mediale, quia est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex α δ, δ β, quod ipsum est mediale per* 22. Item *eadem ratione id quod fit bis ex α γ, γ ς est mediale: ergo mediale differet à mediali superficie rationali, quod est impossibile per* 27. Ergo *lineæ α ς alia linea coniungi nõ potest, quàm linea ς γ potentia tantũ commensurabilis toti: ergo residuo unica tantum linea &c.* Deinceps *per hanc uocem lineæ coniunctæ seu conueniẽter iunctæ intellige eam, quam* Euclides *uocat* προσαρμόζουσαν: *quæ scilicet iuncta cum residuo, restituit totam lineã, unde ea ablata remanent singula residua.*

Octuagesimum Theorema.

Residuo mediali primo unica tantum linea coniungitur medialis, potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens rationale.

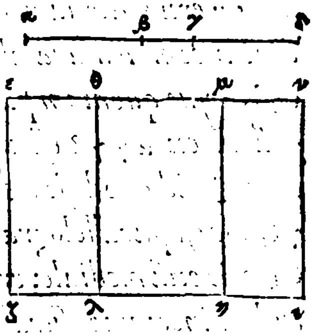
Sit residuũ mediale primũ αβ, cui coniungatur linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint mediales potentia tantum commensurabiles: quæ scilicet βγ cum tota αγ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex αγ, βγ. Nego *aliam lineã huiusmodi posse cõiungi lineæ αβ.* Nam *si fieri posse dicas, sit illa linea βδ. ergo lineæ αδ, δβ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes id quod fit ex αδ, δβ. Et quoniã quanto excedit cõpositum ex quadratis linearũ αδ, δβ id quod fit bis ex αδ, δβ tanto excedit compositum ex quadratis linearũ αγ, γβ id quod fit bis ex αγ, γβ. (utrobique enim excedunt quadrato lineæ αβ) ergo & permutate (sicut dictum est in proximo theoremate) quãto compositum ex quadratis linearum αδ, δβ excedit compositũ ex quadratis linearum αγ, γβ, tanto excedit id quod fit bis ex αδ, δβ id quod fit bis ex αγ, γβ. sed id quod fit bis ex αδ, δβ est rationale: item id quod fit bis ex αγ, γβ est rationale. ergo id quod fit bis ex αδ, δβ excedit id quod fit bis ex αγ, γβ superficie rationali per lemma positũ à nobis ante 42. Ergo & compositum ex quadratis linearũ αδ, δβ, quod est mediale, sicut dictum est in 75. excedit compositum ex quadratis linearum αγ, γβ, quod ipsum est etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ positæ sunt mediales) superficie rationali, quod est impossibile per 27. Ergo residuo mediali primo &c.*



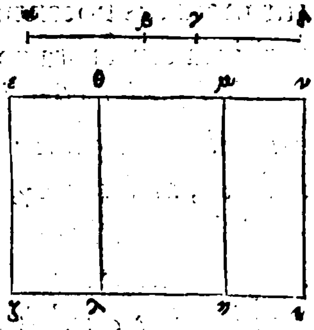
Octuagesimumprimum Theorema.

Residuo mediali secundo unica tantum coniungitur

tur medialis potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens mediale.



Sit residuũ mediale secũdum αβ, cui coniungatur linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint mediales potentia tãtum commensurabiles mediale continẽtes, id scilicet quod fit ex αγ, γβ. Nego aliam lineam huiusmodi posse coniungi lineæ αβ: nam si fieri potest, cõiungatur linea βδ, ergo lineæ αδ, δβ sunt mediales potentia tantum cõmensurabiles, mediale continentes id, quod fit ex αδ, βδ. Proponatur *linea rationalis εζ, secundum quam quadratis linearum αγ, γβ æquale applicetur parallelogrammum εκ, faciẽs alterum latus εμ: ei uero quod fit bis ex αγ, γβ æquale auferatur parallelogrammum θκ, faciens alterum latus lineam θμ. ergo residuũ ελ est æquale quadrato lineæ αβ, per 7. 2. quare linea αβ potest parallelogrammum ζλ. Rursus secundum eandem lineam εζ, quadratis linearũ αδ, δβ applicetur æquale parallelogrammũ ει, faciens alterũ latus εν. Sed quadrata linearum αδ, δβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex αδ, δβ & quadrato lineæ αβ. ergo parallelogrãmum ει est æquale ei, quod fit bis ex αδ, δβ, & quadrato lineæ αβ. Est autem ελ æquale quadrato lineæ αβ. ergo id quod fit bis ex αδ, δβ est æquale parallelogrammo θι: & quoniam lineæ αγ, γβ sunt mediales, ergo & quadrata ipsarum sunt medialia, & sunt æqualia parallelogrãmo εκ. ergo εκ*



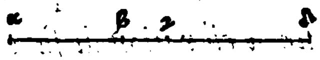
erit etiã mediale per ea quæ dicta sunt in 75. Ergo per 23 linea ε μ erit rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Rursus quoniam parallelogrãmũ ex α γ, γ β est mediale, ergo & id quod fit bis ex α γ, γ δ, hoc est parallelogrammum θ κ, erit etiã mediale: ergo linea θ μ est rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniã lineæ α γ, γ δ sunt potentia tantum cõmensurabiles, ergo ipsæ sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea α γ ad lineam γ δ, ita quadratum lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β. Ergo quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ δ. sed quadrato lineæ α γ sunt commẽsurabilia quadrata linearum α γ, γ β: parallelogrammo uerò ex α γ, γ β est commensurabile id quod fit bis ex α γ, γ δ: ergo quadrata linearũ α γ, γ δ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α γ, γ β. Est autẽ quadratis linearum α γ, γ β æquale parallelogrãmum ε κ: ei uero quod fit bis ex α γ, γ δ est æquale parallelogrammũ θ κ. Ergo parallelogrammum ε κ est incommensurabile parallelogrammo θ κ, ergo & linea ε μ erit longitudine incommensurabilis lineæ θ μ: sunt autẽ ambæ rationales, ergo sunt rationales potẽtia tantum cõmensurabiles. Ergo linea ε θ est residuum, eique coniuncta linea θ μ rationalis, est toti lineæ ε μ rationali commensurabilis potentia tantum. Similiter etiam probabimus cõiungi lineæ ε θ, lineam θ ι existentem & ipsam

rationalem

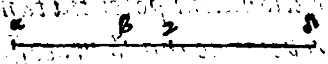
rationalem potentia tantum commensurabilem toti α γ, repetendo inquã processum demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniam lineæ α γ, γ β sunt mediales: & loco linearum α γ, γ β reponendo lineas α δ, δ ϐ, & cætera similiter. ergo residuo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commensurabilis toti, quod est impossibile per 79. Ergo residuo mediali secundo &c.

Octuagesimumsecundum Theorema.

Lineæ minori unica tantum recta coniungitur, potentia incommensurabilis toti, faciens cum tota compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uerò parallelogrãmũ, quod ex ipsis fit, mediale.



Sit linea minor α ϐ, sitq; illi cõiuncta linea ϐ γ, qualis ponitur in theoremate. ergo lineæ α γ, γ β sunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarũ rationale. Id uero quod fit ex ipsis mediale, nego lineæ α ϐ aliam lineam posse coniungi, quæ idem efficiat. nam si fieri potest, sit ei coniuncta linea β δ: ergo lineæ α δ, δ ϐ sunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. Et quoniam quãto compositum ex quadratis ipsarum excedit id quod fit bis ex ipsis, tanto excedit compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β, id quod fit bis ex ipsis α γ, γ β. Et permutate sicut in 79 theoremate quanto differt compositum ex quadratis linearum α δ, δ β compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ ϐ, id quod fit bis ex α γ, γ ϐ: sed *compositum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β, superficie rationali, quia utrunque compositum est rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ γ β superficie rationali, cũ tamẽ utrunque sit mediale, quod est impossibile. ergo lineæ minori &c.*



Octuagesimumtertium Theorema.

Lineæ facienti cum superficie rationali totã superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incõmensurabilis toti: faciens autem cum tota compositũ ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale.

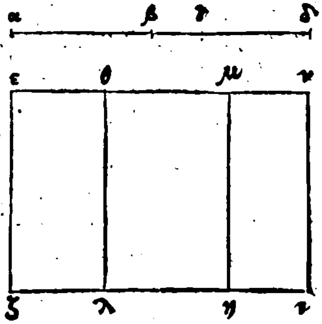
Sit linea cũ rationali superficie faciens totam superficiem medialem α β, eiq; coniuncta sit β γ: ergo lineæ α γ, γ β, sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Nego lineæ α β aliam lineam posse coniungi quæ idem efficiat: nam si possibile est, sit illa cõiuncta β δ. ergo lineæ α δ, δ β sunt lineæ potẽtia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum α δ, δ β tanto excedat compositũ ex quadratis linearum α γ, γ β, quanto id quod fit bis ex α δ, δ β excedit, quod fit bis ex α γ, γ β, sicut dictum est in præcedentibus: sed id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ, γ β superficie rationali, cum sit utrũq; rationale

rationale. ergo & compositum ex quadratis linearum α δ, δ ς excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β superficie rationali, cum tamen utrunque sit mediale, quod est impossibile. Non igitur alia linea cõiungi potest lineæ α ς, quàm linea β γ, quæ idẽ efficiat. ergo lineæ facienti cum rationali &c.

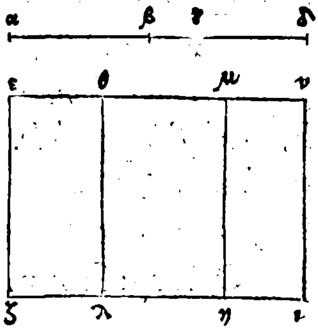
Octuagesimumquartum Theorema.

Lineæ cum mediali superficie faciẽti totam superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommensurabilis, faciẽs cum tota compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiam mediale: & præterea faciens compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei, quod fit ex ipsis.

Sit linea cum mediali superficie faciens totã medialem α β, cui cõiungatur linea ς γ potẽtia toti incommẽsurabilis, faciantq; ambæ id quod dicitur in theoremate. Nego lineæ α ς aliam lineã cõiungi posse, quæ idem efficiat: nam si possibile est, cõiungatur linea β δ, quæ idẽ efficiat quod linea ς γ: pro-



ponaturq; linea rationalis ε ζ, secũdum quam quadratis linearum α γ, γ β æquale applicetur parallelogrammum ε η, faciens alterũ latus ε μ: ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β æquale detrahatur parallelogrammũ θ η, faciens alterum latus θ μ. residuum ergo nempe quadratum li-



neæ α ϐ est æquale parallelogrammo ι λ. ergo linea α ϐ potest parallelogrammũ ι λ. Rursus secundum eandem lineam ι ζ, quadratis linearum α δ, δ ϐ æquale applicetur parallelogrammum ι ι, faciens alterum latus ι ν: est autem quadratum lineæ α ϐ æquale parallelogrãmo ι λ: ergo residuũ, nempe id quod fit bis ex α δ, δ ϐ, est æquale parallelogrammo θ ι. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ, hoc est ι ν, est mediale: ergo linea ι μ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ ι ζ. Rursus quoniã id quod fit bis ex α γ, γ ϐ, hoc est θ ν, est mediale: ergo & linea θ μ est rationalis longitudine incõmensurabilis lineæ ι ζ. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϐ, hoc est ι ν, est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ ϐ, hoc est parallelogrãmo θ ν: ergo & lineæ ι μ, θ μ sunt longitudine inter se incommensurabiles. sunt autẽ ambæ rationales, ergo lineæ ι μ, θ μ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. Ergo linea ι θ est residuum per 73: coniuncta uerò ei erit linea θ μ. Similiter etiam probabimus lineam ι θ esse residuum coniunctã ei uerò esse lineam θ ν, repetendo processum huius demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniã cõpositũ ex quadratis linearũ α γ &c. ut diximus in theoremate 81. Ergo residuo alia atq; alia linea cõiungitur idẽ efficiẽs, quod est impoßibile per 79. Nõ ergo lineæ α ϐ alia linea, quã β γ coniungi potest similis naturæ, & quæ idem efficiat.

Definitiones

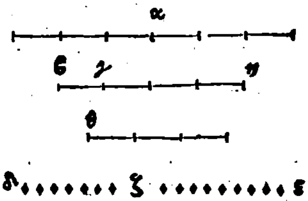
Definitiones tertiæ, siue termini tertij.

Proposita linea rationali & residuo, siquidem tota, nempe composita ex ipso residuo & linea illi cõiuncta, plus potest, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, fueritq; tota longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: residuum ipsum uocetur residuum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, ipsa autem tota plus posit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, residuum uocetur residuum secundũ. Si uero neutra linearum fuerit longitudine commensurabilis rationali, posit autem ipsa tota plus quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uocetur residuum tertium. Rursus si tota posit plus, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis: & quidem si tota fuerit longitudine commensurabilis ipsi rationali, uocetur residuũ quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, & tota plus posit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum quintum. Si uerò neutra linearum fuerit commensurabilis lõgitudine ipsi rationali, fueritq; tota potentior, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum sextum.

Octuagesimumquintum Theorema.

Reperire primum residuum.

Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commẽsurabilis linea βγ: ergo & linea βγ erit rationalis. Sint



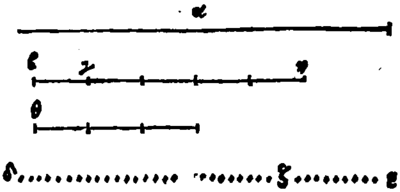
duo numeri quadrati δι, ιζ tales, ut excessus maioris δζ, ne sit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis post 29. Neq; ergo numerus ιδ ad numerum δζ habebit proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, per 24. 8. à destructione consequẽtis. Sitq; sicut numerus ιδ ad numerum δζ, ita quadratũ lineæ βη, ad quadratũ lineæ ηγ, per lemma positum post 6. ergo quadratum lineæ βη est commensurabile quadrato lineæ ηγ: sed quadratũ lineæ βη est rationale, ergo & quadratũ lineæ ηγ erit rationale. ergo linea ηγ erit etiam rationalis. Et quoniam numerus ιδ ad numerum δζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratũ lineæ βη habebit proportionem ad quadratum lineæ ηγ, quam numerus quadratus ad quadratũ. ergo linea βη erit longitudine incommensurabilis lineæ ηγ per 9. Sunt autem ambæ rationales, ergo sunt lineæ βη, ηγ rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea βγ est residuum: dico præterea eandem esse residuum primũ. Quò enim est maius quadratum lineæ βη quadrato lineæ ηγ (maius autem esse constat, quia quadratum lineæ βη, ad quadratum lineæ ηγ est, sicut numerus ιδ, maior, ad numerum δζ ex suppositione:) quò ergo quadratum lineæ βη est maius quadrato lineæ ηγ, sit quadratum lineæ θ. Et quoniam est sicut numerus δι ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ ηγ. per euersam ergo proportionem sicut numerus

δι

δι ad numerum ιζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: sed numerus δι habet proportionẽ ad numerum ζι, quam numerus quadratus ad quadratũ, quia est uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ κβ habebit proportionem ad quadratum lineæ θ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea κβ est longitudine commensurabilis lineæ θ. Potest autẽ *linea κβ plus, quàm linea κγ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem tota βκ longitudine commensurabilis rationali α. ergo linea βγ est residuũ primum.* Repertum *est igitur residuum primum, quod faciendum erat.*

Octuagesimumsextum Theorema.

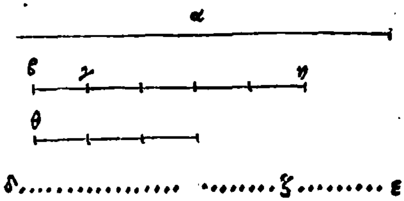
Reperire secundum residuum.



Proponatur *linea rationalis α, cui sit cõmẽsurabilis longitudine linea κγ: sintq́; numeri quadrati duo δι, ιζ, quorum excessus δζ ne sit quadratus: sit etiã sicut numerus δζ ad numerum δι, ita quadratum lineæ κγ ad quadratum lineæ κβ, ergo ambo quadrata sunt cõmensurabilia: & quia quadratum lineæ κγ est rationale, etiam quadratum lineæ βκ erit rationale. ergo & linea βκ erit rationalis.* Et *quia quadrata linearũ βκ, κγ non habent proportionem inter se, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo lineæ βκ, κγ erunt longitudine incõmensurabiles, & sunt ambæ rationales. ergo lineæ βκ, κγ erũt*

FF

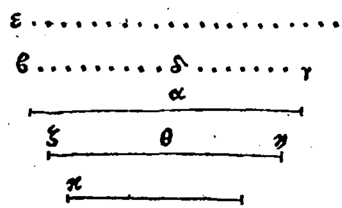
rationales potentia tantum cõmẽsurabiles. ergo linea βγ erit residuũ: dico præterea eandẽ esse residuum secundum.



quò enim est maius quadratum lineæ βκ quadrato lineæ κγ, sit quadratum lineæ θ. Cum igitur sit sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ κβ ad quadratum lineæ κγ: per euersam ergo proportionẽ sicut δε ad numerum εζ, ita quadratũ lineæ βκ ad quadratum lineæ θ. Est autem uterque numerus δε, εζ quadratus. ergo linea κβ erit longitudine commensurabilis lineæ θ: potestq; linea βκ plus, quàm linea κγ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. & est linea coniuncta κγ longitudine commensurabilis lineæ rationali α. Ergo linea βγ erit secũdum residuum. Repertum est ergo residuum secundum.

Octuagesimumseptimum Theorema.

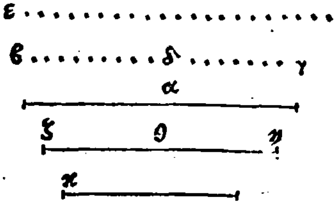
Reperire tertium residuum.



Proponatur linea rationalis α, & proponãtur numeri tres ε, βγ, γδ proportionẽ non habẽtes inter se, quam numerus quadratus ad quadratum: & numerus βγ ad numerum βδ habeat proportionem, quam numerus quadratus ad quadratũ: sitq; numerus βγ maior numero γδ. fiatq; sicut numerus ε ad βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζκ.

sicut

ſicut autem numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζη, ad quadratum lineæ θη. ergo quadratum lineæ α eſt commēſurabile quadrato lineæ ζη. Sed quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & quadratum lineæ ζη erit rationale. ergo linea ζη erit rationalis: et quoniā numerus ε ad numerum βγ non habet proportionē, quā numerus quadratus ad quadratū, neq; ergo quadratum lineæ α, ad quadratū lineæ ζη habebit proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζη. Rurſus quoniam eſt ſicut numerus βγ ad γδ, ita quadratū lineæ ζη ad quadratum lineæ θη, ergo quadratum lineæ ζη eſt commēſurabile quadrato lineæ θη: ſed quadratū lineæ ζη eſt rationale, ergo & quadratum lineæ θη erit rationale. ergo linea θη erit rationalis. Et quoniam numerus βγ ad numerum γδ non habet proportionē, quā numerus quadratus ad quadratū, neque ergo quadratum lineæ ζη habebit proportionem ad quadratum lineæ θη, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζη erit longitudine incommēſurabilis lineæ θη: ſunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζη, θη ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea ζθ erit reſiduum per 73. dico præterea eſſe reſiduū tertium. Cum enim ſit ſicut numerus ε ad numerū βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζη: ſicut autē numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζη, ad quadratum lineæ θη. ergo per æquam proportionem ſicut numerus ε ad numerum γδ, ita quadratū lineæ α ad quadratum lineæ θη: ſed numerus ε ad γδ non habet



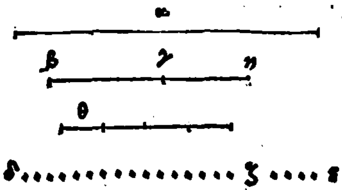
proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum: neq; ergo quadratum lineæ α habebit proportionẽ ad quadratũ lineæ θκ, quã quadratus numerus ad quadratum, ergo linea α erit longitudine incommẽsurabilis lineæ θκ. Neutra ergo linearum ζκ, θκ erit longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quo uero maius est quadratũ lineæ ζκ quadrato lineæ θκ, maius autem esse constat, quia per suppositionem numerus βγ est maior numero γδ, sit quadratum lineæ κ. Cum igitur sit sicut numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ: per euersam ergo proportionẽ sicut numerus βγ ad βδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κ: sed βγ ad βδ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratũ lineæ κ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine commensurabilis lineæ κ. Ergo linea ζκ plus potest, quam linea θκ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, & neutra linearum ζκ, θκ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, cum tamen utraque linearum ζκ, θκ sit rationalis: ergo linea ζθ erit residuum tertium. Repertum *est ergo tertium residuum.*

Octuagesimumoctauum Theorema.

Reperire quartum residuum.

Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commẽ-

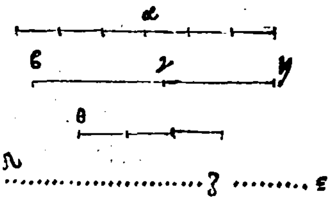
surabilis



ſurabilis linea βη: ergo linea βη erit rationalis. Proponãtur numeri duo δζ, ζε huiuſmodi, ut totus δε ad neutrũ δζ, ζε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq́; ſicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ ηγ: ergo quadratum lineæ βη erit cõmenſurabile quadrato lineæ ηγ. ergo & quadratum lineæ ηγ erit rationale, & linea ηγ rationalis. Et quoniã numerus δε ad numerum εζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo linea βη erit longitudine incõmenſurabilis lineæ ηγ: ſunt autem ambæ rationales. ergo linea βγ eſt reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum: quò enim quadratum lineæ βη eſt maius quadrato lineæ ηγ, ſit quadratum lineæ θ. Cum igitur ſit ſicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadrat~~um lineæ βη ad~~ quadratũ lineæ ηγ: ergo per euerſam proportionem ſicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ θ: ſed numeri δε, δζ non habent proportionem inter ſe, quam quadratus ad quadratum: ergo linea βη erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ. Ergo linea βη plus poteſt, quàm linea ηγ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: eſtq́ue tota βη longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit reſiduum quartũ. Repertum eſt igitur reſiduum quartum.

Octuageſimumnonum Theorema.

Reperire quintum reſiduum.



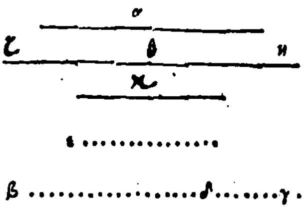
Proponatur linea rationalis α, cui ſit longitudine commenſurabilis linea γκ, erit ergo linea γκ rationalis. Proponantur numeri duo δζ, ζε tales, ut δε ad neutrum δζ, ζε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: ſitq; ſicut numerus ζε ad numerum δε, ita quadratum lineæ γκ ad quadratũ lineæ βκ, ergo quadratum lineæ γκ erit commenſurabile quadrato lineæ βκ. ergo quadratum lineæ βκ erit rationale, & linea βκ rationalis: ſed numeri δε, εζ nõ habent proportionem, quam quadratus ad quadratũ, ergo lineæ βκ, κγ. ſunt rationales potentia tantum commẽſurabiles. ergo linea βγ erit reſiduũ, dico præterea eſſe reſiduum quintum: quò enim maius eſt quadratum lineæ βκ quadrato lineæ κγ, ſit quadratũ lineæ θ. Cũ igitur ſit ſicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratũ lineæ βκ ad quadratũ lineæ κγ, ergo per euerſam proportionem, ſicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: ſed numeri δε, εζ non habet proportionem inter ſe, quã numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea βκ erit longitudine incommenſurabilis lineæ θ. ergo linea βκ plus poteſt linea γκ, quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis: eſtque coniuncta linea γκ longitudine commenſurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit reſiduum quintum. Repertum eſt ergo reſiduum quintum.

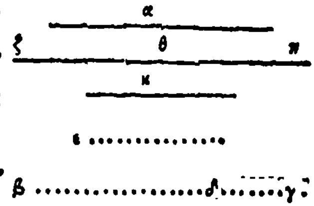
Nonageſimum Theorema.

Reperire ſextum reſiduum.

Sit

Sit linea rationalis α, & numeri tres ε, β γ, γ δ proportionem non habentes inter se, quã numerus quadratus ad quadratum numerum: numerus autem β γ ne habeat proportionem ad numerum β δ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum: sitque numerus β γ maior numero γ δ, fiatq; sicut numerus ε ad numerum β γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζ κ: sicut autem numerus β γ ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ κ θ. Cum igitur sit sicut ε ad β γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζ κ, ergo quadratum lineæ α est commẽsurabile quadrato lineæ ζ κ. ergo quadratũ lineæ ζ κ erit rationale, & linea ζ κ rationalis. Et quoniam numerus ε ad β γ non habet proportionem, quã quadratus numerus ad quadratũ, ergo linea α erit longitudine incõmensurabilis lineæ ζ κ. Rursus quoniam est sicut numerus β γ ad numerũ γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ κ θ, ergo quadratum lineæ ζ κ erit commensurabile quadrato lineæ κ θ: sed quadratum lineæ ζ κ est rationale, ergo & quadratũ lineæ κ θ erit rationale. ergo linea κ θ erit rationalis. Et quoniam numerus β γ ad numerum γ δ nõ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea ζ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ κ θ: sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζ κ, κ θ sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea ζ θ erit residuum: dico præterea esse residuum sextum. Cũ enim sit sicut numerus ε ad β γ, ita quadra-



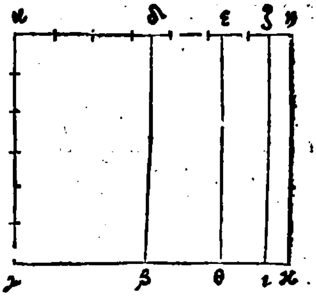


tum lineæ α, ad quadratum lineæ ζ κ: sicut autem numerus β γ ad numerũ γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratũ lineæ κ θ. Per æquam igitur proportionẽ sicut numerus ε ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ α, ad quadratum lineæ κ θ: sed numerus ε nõ habet proportionem ad numerũ γ δ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommensurabilis lineæ κ θ, & neutra linearum ζ κ, κ θ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quò igitur maius est quadratum lineæ ζ κ, quadrato lineæ κ θ, sit quadratum lineæ λ. Cum igitur *sit sicut numerus ϛ γ ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ ζ κ ad quadratum lineæ κ θ. ergo per euersam proportionem sicut numerus ϛ γ ad numerum ϛ δ, ita quadratũ lineæ ζ κ ad quadratum lineæ λ: sed numerus ϛ γ ad numerum β δ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ λ.* Ergo *linea ζ κ plus potest quã linea κ θ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & neutra linearum ζ κ, κ θ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, ergo linea ζ θ est residuum sextum.* Repertum *est ergo residuum sextum.* Est *autem & facilior quædam ratio reperiendi cuiusque residui, ex illis sex antè dictis, hoc modo.* Propositũ *sit reperire residuũ primum.* Proponatur *binomiũ primum linea α γ, cuius maius nomẽ sit α ϛ: & lineæ ϛ γ æqualis sit linea β δ. ergo lineæ α β, β γ, hoc est lineæ α ϛ, β δ. sunt rationales potentia*

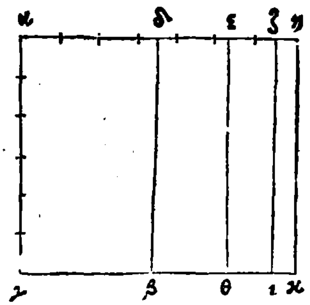
tentia tantum commẽſurabiles. & linea α ϐ plus poteſt, quàm linea β γ, hoc eſt quàm linea β δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & linea α ϐ eſt longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali, quia poſitum eſt lineam α γ eſſe binomiũ primum. ergo linea α δ eſt reſiduum primum. Simili ratione ſecundum, tertium, quartum, quintum & ſextum reſiduum reperire licet, ſi propoſuerimus ſingula binomia eiuſdẽ ordinis.

Nonageſimumprimum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo primo, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum.

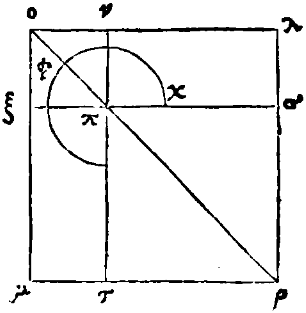


Cõtineatur ſuperficies rectãgula α β, ex linea rationali α γ, & reſiduo primo α δ. dico lineã, quæ poſsit ſuperficiem illam, eſſe reſiduum. Cum enim linea α δ ſit reſiduũ primum, ſit illi coniuncta linea δ η, (cõiunctam intellige, qualem dixi in fine theorematis 79.) ergo lineæ α η, η δ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: & tota α η eſt longitudine commenſurabilis rationali lineæ α γ, & linea α η plus poteſt, quàm linea η δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur linea η δ in partes duas æquales in puncto ε, & quadrato lineæ ε η, æquale ſecundum lineam α η applicetur parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata: ſitq́; illud parallelogrammum ex α ζ, ζ η. ergo linea α ζ eſt

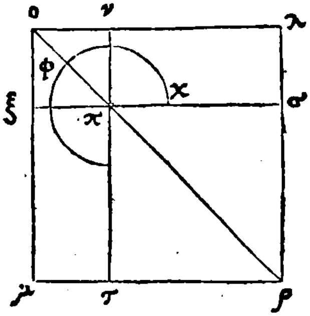


longitudine cõmensurabilis lineæ ζη per 18. & per puncta ε, ζ, η ipsi lineæ αγ parallelæ ducantur εθ, ζι, ηκ. Et quoniam linea αζ est longitudine cõmensurabilis lineæ ζη, ergo & tota linea αη utriq; ex αζ, ζη est longitudine commensurabilis per 16. sed linea αη est longitudine commẽsurabilis lineæ αγ. ergo utraque linearum αζ, ζη est longitudine commẽsurabilis lineæ αγ: sed linea αγ est rationalis, ergo utraque αζ, ζη est etiam rationalis: quare & utrunque parallelogrammum αι, ζκ est rationale per 20. Et quoniam linea δε est longitudine commensurabilis lineæ εη, ergo & linea δη est longitudine commẽsurabilis utrique δε, εη: sed linea δη est rationalis, ergo utraque δε, εη est rationalis: sed eadem linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αγ per definitionem residui primi uel per 13 aut 14 huius. Quia linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αη, quæ linea αη est longitudine commensurabilis eidem lineæ αγ. ergo utraque linea δε, εη est rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ. Ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ est mediale per 22. Sit parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: parallelogrammo uero ζκ sit æquale quadratum νξ, detractum ex quadrato λμ, habens cum illo communem angulum λομ. Quod ut fiat reperiatur media proportionalis inter lineas ζι, ζκ: nam quadratum mediæ proportionalis erit æquale parallelogrammo ex ζι, ζκ: porro de

linea



linea λ ο sumatur linea æqualis lineæ mediæ proportionali modo repertæ, & describatur eius quadratũ. Sunt ergo ambo quadrata λ μ, ν ξ circa eandem diametrũ per 26.6: sit eorũ diameter linea ο ρ, & describatur figura qualis hic uidetur. Cum igitur sit parallelogrammũ ex α ζ, ζ η æquale quadrato lineæ ι η. est igitur sicut linea α ζ ad lineam ι η, ita linea ι η ad lineam ζ η per 17.6: sed sicut linea α ζ ad lineam ι η, ita parallelogrammum α ι ad parallelogrammum ι κ: sicut autem linea ι η ad lineam ζ η, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammum ζ κ Ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ parallelogrammum ι κ est mediũ proportionale: sed & quadratorũ λ μ, ν ξ parallelogrammum μ ν, est medium proportionale per lemma positum post 53. Est autem parallelogrammo α ι æquale quadratum λ μ: parallelogrãmo uero ζ κ est æquale quadratum ν ξ. ergo parallelogrãmum μ ν est æquale parallelogrammo ι κ per lemma positum à nobis ante 54. Sed parallelogrammum ι κ est æquale parallelogrammo δ θ per 1.6: parallelogrammũ uero μ ν est æquale parallelogrãmo λ ξ per 43.1. Ergo parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, qui gnomo constat ex illis parallelogrãmis. per quæ uides in figura maiorem semicirculo portionem pertransire, & præterea quadrato ν ξ. Est autem & parallelogrammũ α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ: & modo conclusum est parallelogrammũ δ κ esse æquale gnomoni υ φ χ, & præ-



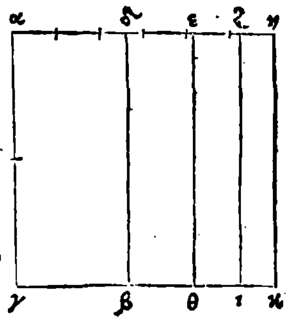
terea quadrato, ν ξ. Reliquum ergo, nempe parallelogrammum α ϛ, erit æquale quadrato σ τ, quod eſt quadratum lineæ λ ν. ergo quadratũ lineæ λ ν eſt æquale parallelogrammo α β. ergo linea λ ν poteſt illud parallelogrammum α β: dico præterea lineam λ ν eſſe reſiduum. Cum enim utrunque parallelogrammũ α ι, ζ κ ſit rationale, ut ſupra dictum, ergo & illis æqualia quadrata λ μ, ν ξ, hoc eſt, quadrata linearum λ ο, ο ν erunt rationalia, & lineæ ipſæ λ ο, ο ν, rationales. Rurſus quoniam parallelogrammum δ θ, hoc eſt, λ ξ eſt mediale, ergo parallelogrammum λ ξ erit incommenſurabile quadrato ν ξ. ergo per 1.6 & 10. huius, linea λ ο erit longitudine incommẽſurabilis lineæ ο ν: ſunt autem ambæ rationales, ſunt ergo rationales potentia tantum cõmenſurabiles. ergo linea λ ν eſt reſiduum: poteſt autẽ parallelogrammum α ϛ. ergo ſi ſuperficies cõtineatur & c. linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum.

Nonageſimumſecundum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex linea rationali, & reſiduo ſecundo, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum mediale primum.

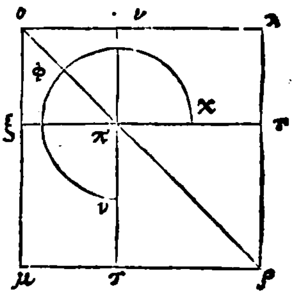
Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, & reſiduo ſecundo α δ. dico lineam quæ poteſt ſuperficiem α β eſſe eam, quæ dicitur reſiduũ mediale primum. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ κ. ergo lineæ α κ, κ δ ſunt rationales

tionales



tionales potentia tantum cõmensurabiles: & linea coniuncta δκ, est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali αγ: linea uerò ακ plus potest quã linea δκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur *linea δκ bifariã & æqualiter in pũcto ε, & secũdum lineã ακ applicetur quartæ parti quadrati lineæ δκ, hoc est, quadrato lineæ εκ æquale parallelogrammũ ex αζ, ζκ, deficiens specie quadrata. ergo per* 18 *linea αζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ζκ: & per puncta ε, ζ, κ ipsi lineæ αγ ducantur parallelæ εθ, ζι, ηκ: & quoniam linea αζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ζκ, ergo tota linea ακ est utrique αζ, ζκ longitudine cõmensurabilis:* E*st autem linea ακ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ. ergo & utraque αζ, ζκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum αι, ζκ est mediale per* 22. R*ursus cum linea δε sit commensurabilis longitudine lineæ εκ, ergo & δκ est utrique δε, εκ longitudine commensurabilis: sed linea δκ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali αγ, ergo utraque δε, εκ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ est rationale per* 20. D*escribatur parallelogrammo αι æquale quadratũ λμ: parallelogrammo uero ζκ, æquale sit quadratũ νξ, sicut in præcedenti theoremate, quadrata λμ, νξ erunt circa eandem diametrum: sit diameter ορ, & describa-*

tur figura ſicut modo dictū eſt.



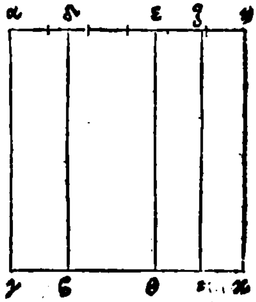
Quoniam ergo parallelogramma αι, ζκ ſunt medialia & inter ſe commenſurabilia, & illis æqualia quadrata linearū λο, ον ſunt medialia, ergo lineæ λο, ον ſunt mediales potentia commenſurabiles. Conſtat autem potentia commenſurabiles eſſe lineas λο, ον, quia earum quadrata ſunt commēſurabilia: commēſurabilia ſunt porro quadrata illa, ſcilicet linearum λο, ον, quia ſunt æqualia parallelogrammis, αι, ζκ, quæ ſunt cōmenſurabilia: cōmēſurabilia porro eſſe illa parallelogrāma αι, ζκ conſtat eo, quod modo probatum eſt, lineas αζ, ζη eſſe longitudine commenſurabiles. Ergo per 1.6 *&* 10 *huius parallelogrāma αι, ζκ ſunt commenſurabilia. ergo modo probatum eſt uia reſolutionis lineas λο, ον, eſſe potentia cōmenſurabiles. Et quoniam parallelogrammum ex αζ, ζη eſt æquale quadrato lineæ εη. eſt ergo ſicut linea αζ ad lineā εη, ita linea εη ad lineam ζη: ſed ſicut linea αζ ad lineam εη, ita parallelogrammū αι ad parallelogrammū εκ: ſicut autem linea εη ad lineam ζη, ita parallelogrammū εκ ad parallelogrammum ζκ. ergo parallelogrammorum αι, ζκ medium proportionale eſt parallelogrammū εκ. Eſt etiam quadratorum λμ, νξ medium proportionale parallelogrammum μν: & eſt æquale parallelogrammū αι quadrato λμ: parallelogrammum uero ζκ eſt æquale quadrato νξ. Ergo μν erit æquale parallelogrāmo εκ: ſed εκ eſt æquale parallelogrammo δθ: parallelogrammum*

mum uero λ ξ est æquale parallelogrammo μ ν. Totũ ergo parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. reliquum ergo, nempe parallelogrammũ α β, est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν. Ergo linea λ ν potest superficiem α ϐ: dico præterea lineã λ ν esse residuum mediale primum. Cum enim parallelogrammum ι κ sit rationale, sitq́; æquale parallelogrãmo μ ν, hoc est λ ξ: ergo λ ξ, hoc est parallelogrammum ex λ ο, ο ν erit rationale: sed quadratum ν ξ est mediale, quia ei æquale parallelogrammum ζ κ modo probatũ est esse mediale. Ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ: sed sicut parallelogrammũ λ ξ ad quadratum ν ξ, ita linea λ ο, ad lineam ο ν, per 16. ergo per 10 huius, lineæ λ ο, ο ν sunt longitudine incommensurabiles: sed modo probatum est eas esse mediales potentia commensurabiles. ergo lineæ λ ο, ο ν sunt mediales potentia tantum commensurabiles, continentes rationale. Ergo linea λ ν est residuum mediale primum, & potest superficiem α β contentam ex linea rationali & residuo secundo.

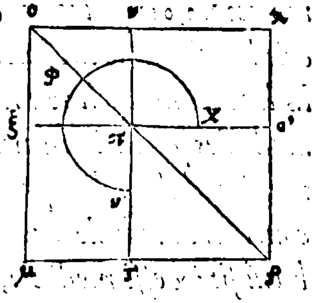
Nonagesimumtertium Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo tertio, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale secundum.

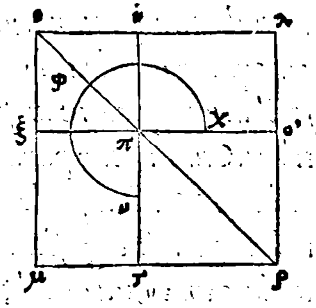
Superficies enim α β cõtineatur ex linea rationali α γ, & residuo tertio α δ. dico lineam quæ possit superficiem α β esse residuum mediale secũdum. Sit linea coniuncta δ η, ergo lineæ α η, η δ sunt rationales potentia tantum com-



mẽsurabiles, & neutra linearum αη, ηδ est longitudine commensurabilis lineæ rationali αγ. Tota uero αβ plus potest, quàm coniuncta ηδ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. reliqua fiãt, ut in præcedẽtibus. ergo lineæ αζ, ζη sunt longitudine commẽsurabiles & parallelogrammũ αι, commensurabile parallelogrammo ζκ. Et quoniam αζ, ζη sunt longitudine cõmensurabiles, ergo tota linea αη est utrique αζ, ζη longitudine commẽsurabilis: sed linea αη est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ αγ, ergo utraque αζ, ζη. est rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ. ergo utrũque parallelogrammum αι, ζκ est mediale per 22. Rursus cum linea δε sit longitudine commensurabilis lineæ εη, ergo & tota δη est longitudine cõmensurabilis utrique δε, εη: sed linea δη est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ αγ, ergo & utraque linearum δε, εη est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ αγ. ergo & utrũque parallelogrammum δθ, εκ est mediale: & quoniam lineæ αη, δη sunt potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommensurabiles: sed linea αη est longitudine commensurabilis lineæ ᾱζ: linea autem δη est longitudine commensurabilis lineæ ηε, ergo linea αζ est longitudine incommensurabilis lineæ εη. Sicut autem linea αζ ad lineam εη, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum εκ. ergo αι est incommensurabile ipsi εκ. Construatur parallelogrammo αι æquale



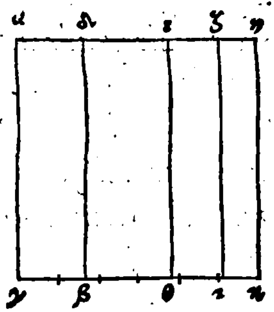
æquale quadratum $\lambda\mu$*: ipſi uero* $\zeta\kappa$ *æquale quadratũ* $\nu\xi$*, & deſcribatur figura, ut in præceden tibus. Cum igitur parallelogrãmũ ex* $\alpha\zeta$*,* $\zeta\kappa$ *ſit æquale quadrato lineæ* $\iota\kappa$*. eſt ergo ſicut linea* $\alpha\zeta$ *ad lineam* $\iota\kappa$*, ita* $\iota\kappa$ *ad* $\zeta\kappa$*: ſed ſicut linea* $\alpha\zeta$ *ad lineam* $\kappa\iota$*, ita parallelogrammũ* $\alpha\iota$ *ad parallelogrammum* $\iota\kappa$*: ſicut autem linea* $\iota\kappa$ *ad lineam* $\zeta\kappa$*, ita parallelogrammum* $\iota\kappa$ *ad parallelogrammũ* $\zeta\kappa$*. ſicut ergo parallelogrammum* $\alpha\iota$ *ad parallelogrammũ* $\iota\kappa$*, ita* $\iota\kappa$ *ad* $\zeta\kappa$*. ergo parallelogrammorum* $\alpha\iota$*,* $\zeta\kappa$ *medium proportionale eſt* $\iota\kappa$*. Sed quadratorũ* $\lambda\mu$*,* $\nu\xi$ *medium proportionale eſt parallelogrammum* $\mu\nu$*, ergo* $\iota\kappa$ *eſt æquale ipſi* $\mu\nu$*. ergo totum parallelogrammum* $\delta\kappa$ *eſt æquale gnomoni* $\upsilon\phi\chi$*, & quadrato* $\nu\xi$*. Eſt autem ipſum* $\alpha\kappa$ *æquale quadratis* $\lambda\mu$*,* $\nu\xi$*, reliquum ergo nempe* $\alpha\varsigma$ *eſt æquale quadrato* $\sigma\tau$*, hoc eſt quadrato lineæ* $\lambda\nu$*, ergo* $\lambda\nu$ *poteſt ſuperficiem* $\alpha\varsigma$*: dico præterea lineam* $\lambda\nu$ *eſſe reſiduum mediale ſecundum. Cum enim, ſicut probatũ eſt, parallelogramma* $\alpha\iota$*,* $\zeta\kappa$ *ſint medialia, ergo eis æqualia quadrata linearũ* λo*,* $o\nu$ *ſunt etiã medialia. ergo utraq; linea* λo*,* $o\nu$ *erit medialis: & quoniam parallelogrammum* $\alpha\iota$ *eſt commenſurabile parallelogrammo* $\zeta\kappa$*, ergo & eis æqualia quadrata linearum* λo*,* $o\nu$ *erunt commenſurabilia. Rurſus cum ſit probatum parallelogrammum* $\alpha\iota$ *eſſe incommẽſurabile parallelogrammo* $\iota\kappa$*, ergo incommenſurabile erit quadratum* $\lambda\mu$*, parallelogrammo* $\mu\nu$*, hoc eſt, quadratum lineæ* λo*, parallelogrã-*



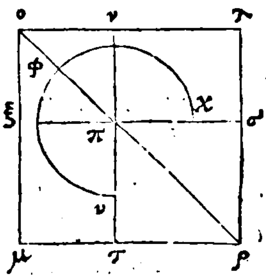
mo ex λο, οι: quare & linea λο erit longitudine incõmensurabilis lineæ οι. ergo lineæ λο, οι sunt mediales potentia tantum commensurabiles: dico præterea eas continere mediale. Cũ enim probatũ sit ιχ esse mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ex λο, οι erit mediale. ergo linea λι est residuum mediale secundum, & potest superficiem αβ. Ergo linea potens superficiem αβ est residuum mediale secundum.

Nonagesimumquartum Theorema.

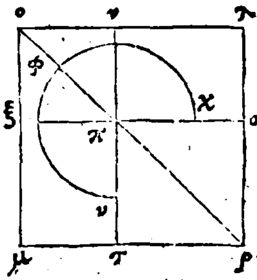
Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo quarto, linea quę illam ſuperficiẽ poteſt, eſt linea minor.



Superficies αβ contineatur ex linea rationali αγ, et residuo quarto αδ. dico lineam quæ illam superficiem αβ potest, esse eã, quæ dicitur linea minor: sit enim linea cõiuncta δκ, ergo lineæ ακ, δκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: & linea ακ plus potest, quàm linea δκ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, & linea ακ est longitudine commensurabilis lineæ αγ. Diuidatur linea δκ bifariam & æqualiter in puncto ε: & quadrato lineæ εκ æquale secũdum lineam ακ applicetur parallelogrãmum, deficiẽs figura quadrata, sitq; illud parallelogrãmum *mũ ex αζ,ζκ. ergo per 19. linea αζ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζκ. Ducantur per puncta ε,ζ,κ ipsis lineis αγ,δβ, parallelæ εθ,ζι,κχ. Cum igitur linea ακ sit rationalis, & longitudine commensurabilis lineæ αγ, ergo totum parallelogrammum αχ est rationale per 20. Rursus cum linea δκ sit longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ, (nam si esset linea δκ longitudine commensurabilis lineæ αγ, cum linea ακ sit eidem αγ longitudine commẽsurabilis, essent etiam lineæ ακ,δκ longitudine commensurabiles, cum tamen positæ sint potẽtia tantum commensurabiles) sunt autem ambæ αγ,δκ rationales. ergo parallelogrammũ δχ est mediale. Rursus cum linea αζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζκ, ergo incommensurabile est αι ipsi parallelogrammo ζχ. Cõstruatur parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: ipsi uero ζχ æquale quadratum νξ, ambo quadrata habentia communem angulũ λον. ergo quadrata λμ, νξ sunt circa eandem diametrũ: sit diameter ορ & describatur figura.*



Cum igitur parallelogrammũ ex αζ,ζκ sit æquale quadrato lineæ εκ, erit proportionaliter, sicut linea αζ ad lineam εκ, ita linea εκ ad lineã ζκ: sed sicut linea αζ ad lineam εκ, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum εχ per 1.6. Sicut autem linea εκ ad lineã ζκ, ita parallelogrammum εχ ad parallelogrammum ζχ. ergo parallelogrammorũ αι,ζχ medium proportionale est εχ. ergo, sicut dictum est in præcedentibus, parallelo-



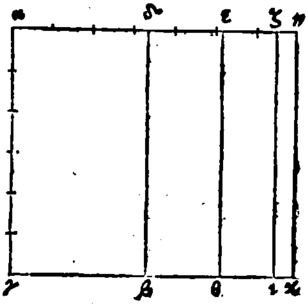
grammum μν est æquale parallelogrammo ιχ: sed δθ est æquale ipsi ιχ, ipsum autem μν ipsi λξ. ergo parallelogrammum δχ est æquale gnomoni υφχ, & quadrato νξ. ergo reliquum αβ est æquale reliquo quadrato στ, hoc est, quadrato lineæ λν: dico præterea lineã λν esse irrationalem eam, quæ linea minor uocatur. Cum enim parallelogrammum αχ sit rationale, & sit æquale quadratis linearum λο, ον, ergo compositum ex quadratis linearũ λο, ον erit rationale. Rursus cum δχ sit mediale, sitq́; æquale ei, quod fit bis ex λο, ον, ergo id quod fit bis ex λο, ον est etiam mediale: & quoniam parallelogrammum αι est incommensurabile parallelogrammo ζχ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λο, ον sunt incõmensurabilia. ergo lineæ λο, ον sunt potentia incommẽsurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit bis ex ipsis mediale, quod est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex ipsis: ergo & quod fit semel ex ipsis, erit etiã mediale. Ergo linea λν est irrationalis, quæ uocatur linea minor & potest superficiẽ αβ.

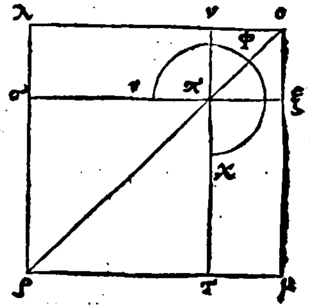
Nonagesimumquintum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo quinto, linea quæ illam superficiẽ potest, est ea, quę dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.

Superficies enim αβ contineatur ex linea rationali αγ, & residuo

residuo quinto α δ. dico lineam, quæ illam superficiẽ potest, eam esse quæ dicitur faciens cum rationali superficie totam medialem: sit enim lineæ α δ iuncta linea δ η, quæ erit longitudine cõmensurabilis lineæ rationali α γ, cætera erunt ut in præcedenti. Et *quoniam linea α η est longitudine incommensurabilis lineæ α γ, & sunt ambæ rationales, ergo parallelogrãmũ α κ erit mediale.* R*ursus quoniã linea δ η est rationalis, & lõgitudine cõmẽsurabilis lineæ α γ, ergo δ κ erit rationale.* C*õstruatur quadratum λ μ æquale parallelogrammo α ι, quadratum uero ν ξ æquale ipsi ζ κ, ut in proximo, similiter demõstrabimus lineam λ ν posse superficiem α β: dico præterea eam esse lineam, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialẽ:*

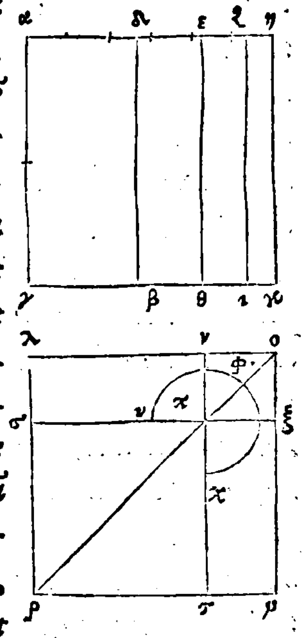




cum enim α κ sit mediale, etiam illis æquale compositum ex quadratis linearum λ ο, ο ν, erit mediale. R*ursus quia δ κ est rationale, ergo & illi æquale id, quod fit bis ex λ ο, ο ν erit etiam rationale, & quoniam linea α ζ est longitudine incommẽsurabilis lineæ ζ η, ergo per* 1. 6 *&* 10 *huius. parallelogrammum α ι erit incõmensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & quadratũ lineæ λ ο erit incommensurabile quadrato lineæ ο ν: ergo lineæ λ ο, ο ν sunt potentia incommensurabiles facientes compositum* *ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit bis ex ipsis rationale. ergo reliqua linea λ ν est irrationalis: nẽpe ea quæ dicitur cum rationali superficie faciens totã medialem, & potest superficiem α β. Ergo linea potens superficiem α β est linea, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.*

Nonagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo sexto, linea quæ illam superficiem potest, est ea quæ dicitur faciens cum mediali superficie totam medialem.

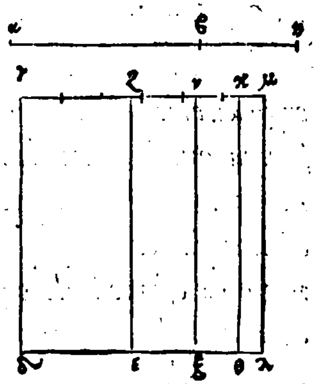


Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, et residuo sexto α δ. dico lineam quæ potest superficiẽ α β esse eam, quæ dicitur faciens cum mediali superficie totã medialem. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ η, & cætera fiãt, ut in præcedẽtibus. cum linea α ζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζ η, ergo & parallelogrammum α ι erit incommensurabile parallelogrammo ζ κ. Et quoniã lineæ α η, α γ, sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, ergo parallelogrammum α κ erit mediale: simili ratione δ κ erit mediale. Cum igitur lineæ α η, η δ sint potentia tantum commensurabiles, ergo *go sunt longitudine inter se incommensurabiles: sed sicut linea $\alpha\kappa$ ad $\kappa\delta$, ita parallelogrammum $\alpha\kappa$ ad $\delta\kappa$. ergo $\alpha\kappa$ erit incõmensurabile ipsi $\delta\kappa$.* Construatur eadẽ *figura, quæ in præcedentibus, similiter probabimus lineam $\lambda\nu$ posse superficiẽ $\alpha\zeta$: dico præterea eam esse, quæ dicitur faciẽs cum superficie mediali totam medialem: nam $\alpha\kappa$ est mediale, ergo & illi æquale compositũ ex quadratis linearum $\lambda o, o\nu$ erit mediale.* Rursus *quoniã $\delta\kappa$ est mediale, ergo & ei æquale, id quod fit bis ex $\lambda o, o\nu$ erit mediale.* Et *quoniam $\alpha\kappa$ est incommensurabile ipsi $\delta\kappa$, ergo & quadrata linearum $\lambda o, o\nu$ erunt incõmensurabilia ei, quod fit bis ex $\lambda o, o\nu$: & cum parallelogrammum $\alpha\iota$ sit incommensurabile parallelogrammo $\zeta\kappa$, ergo etiam quadratum lineæ λo erit incommensurabile quadrato lineæ $o\nu$. ergo lineæ $\lambda o, o\nu$ erunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositũ ex quadratis linearum $\lambda o, o\nu$ mediale, & quod fit bis ex ipsis mediale: præterea compositum ex quadratis ipsarũ incommensurabile ei, quod fit bis ex ipsis. ergo linea $\lambda\nu$ est irrationalis, quæ dicitur cum mediali superficie faciens totam medialẽ, & potest superficiem $\alpha\zeta$.* Ergo *linea potens superficiem $\alpha\beta$ est ea, quæ dicitur faciens cum superficie mediali totam medialem.*

Nonagesimumseptimum Theorema.

Quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus residuum primũ.

Sit residuum $\alpha\zeta$, rationalis uero linea $\gamma\delta$: & quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale secundum lineam $\gamma\delta$ applicetur paral-



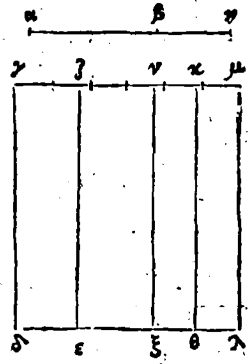
lelogrammum γ ε facies alterũ latus γ ζ, dico lineam γ ζ esse residuum primum. Sit enim lineæ α β linea cõueniẽter iuncta β η, quæ & eadem dicitur linea cõ iuncta, ut in fine theorematis 79. ergo lineæ α η, η β, sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & quadrato lineæ α η secundum lineam γ δ applicetur parallelogrammum γ θ, quadrato uero lineæ β η æquale parallelogrãmum κ λ: totum ergo γ λ est æquale quadratis linearum α η, η β: sed parallelogrammum γ ε est æquale quadrato lineæ α β, reliquum ergo ζ λ est æquale ei, quod fit bis ex α η, η β: quia quadrata linearum α η, η β sunt æqualia ei, quod fit bis ex α η, η β, & quadrato lineæ α β per 72. Secetur linea ζ μ bifariam & æqualiter in puncto ν, & à pũcto ν ducatur lineæ γ δ parallela linea ν ξ, ergo utrũque ex parallelogrãmis ζ ξ, ν λ est æquale ei. quod fit semel ex α η, η β. Et *quoniam quadrata linearum α η, η β sunt rationalia, quibus quadratis æquale est parallelogrammũ γ λ, ergo γ λ est rationale. ergo linea γ μ est rationalis longitudine commensurabilis lineæ γ δ.* Rur*sus quoniam id quod fit bis ex α η, η β est mediale, ergo & illi æquale nempe parallelogrammum ζ λ, erit mediale. ergo linea ζ μ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ.* Et *quoniam quadrata linearum α η, η β sunt rationalia, id uero quod fit bis ex α η, η β mediale, ergo quadrata linearum α η, η β sunt incommensurabilia*

bilia ei, quod fit bis ex α κ, κ ϛ. Est autē quadratis linearū α κ, κ ϛ æquale parallelogrammum γ λ: ei uero quod fit bis ex α κ, κ ϛ æquale ζ λ, ergo γ λ erit incommensurabile ipsi ζ λ. ergo & linea γ μ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ μ: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles, & linea γ ζ est residuum per 73: dico præterea esse primum residuum. Cum enim quadratorum linearum α κ, κ β sit id quod fit ex α κ, κ β medium proportionale per lemma positum post 53: sit autem quadrato lineæ α κ, æquale parallelogrammum γ θ, ei uero quod fit ex α κ, κ ϛ æquale ι λ: quadrato uero lineæ κ β æquale κ λ. ergo inter parallelogramma γ θ, κ λ medium proportionale est ι λ. ergo sicut γ θ ad ι λ, ita ι λ ad κ λ. Sed sicut γ θ ad ι λ, ita linea γ κ ad lineam ι μ: sicut autem ι λ ad κ λ, ita linea ι μ ad lineam κ μ. sicut ergo linea γ κ ad lineam ι μ, ita linea ι μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ ~~est æquale quadrato~~ ι μ, hoc est quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniam quadratum lineæ α κ est commensurabile quadrato lineæ κ β, ergo & γ θ erit cō mensurabile ipsi κ λ: sicut autem γ θ ad κ λ, ita linea γ κ ad lineam κ μ. ergo linea γ κ erit longitudine commensurabilis lineæ κ μ. ergo per 18. linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Est autem linea γ μ longitudine commensurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ est residuum primum. Ergo quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum facit alterum latus residuum primum.

Nonagesimumoctauum Theorema.

II

Quadratum residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuũ secundum.



Sit residuum mediale primum αβ, rationalis uero γδ: et quadrato lineæ αϐ æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γε, faciens alterum latus γζ. dico lineam γζ esse residuum secũdum. Sit enim lineæ αϐ linea conuenienter iuncta βη, ergo lineæ αη, βη sunt mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes. Et quadrato lineæ αη æquale secundum lineam γδ applicetur γθ faciens alterum latus γκ: quadrato uero lineæ ηβ æquale applicetur κλ faciens alterum latus κμ. totũ ergo γλ est æquale ambobus quadratis linearum αη, ηϐ, quæ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo & parallelogramma γθ, κλ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo per 16. totum γλ est utrique γθ, κλ commensurabile: ergo per corollarium 24 totum γλ est etiam mediale. ergo linea γμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ per 23. Et quoniam γλ est æquale quadratis linearũ αη, ηϐ, quadrata uero linearum αη, ηβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex αη, ηϐ, et quadrato lineæ αϐ per 7.2. quadrato uero lineæ αβ est æquale parallelogrammum γε: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex αη, ηϐ est æquale residuo parallelogrãmo ζλ: sed id quod fit bis ex αη, ηβ est rationale, ergo ζλ erit rationale, ergo linea ζμ est

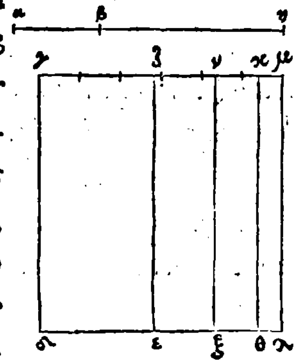
ratio-

rationalis & longitudine cōmensurabilis lineæ γ δ per 21. Cum igitur parallelogrammum γ λ sit mediale, parallelogrammum uero ζ λ sit rationale, ergo sunt incōmēsurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommēsurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ erit residuum. dico præterea esse residuū secundum. Secetur enim linea *ζ μ bifariam & æqualiter in puncto ν: à quo puncto parallela ad lineam γ δ ducatur linea ν ξ. ergo utrūq; ex ζ ξ, ν λ est æquale parallelogrāmo ex* α κ, κ β. Et *quoniam quadratorum linearum α κ, κ β medium proportionale est id quod fit ex α κ, κ β, ergo & parallelogrammorum γ θ, κ λ medium proportionale est ν λ.* Sed *sicut γ θ est ad ν λ, ita linea γ κ ad lineam ν μ: sicut autem ν λ ad κ λ, ita linea ν μ ad lineā κ μ. sicut ergo linea γ κ ad lineam ν μ, ita linea ν μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ est æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ.* Sed *parallelogrammum γ θ est commēsurabile ipsi κ λ, ergo & linea γ κ lineæ κ μ erit commensurabilis longitudine. ergo per 18. linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem linea ζ μ, quæ dicitur cōuenienter iuncta cōmensurabilis longitudine lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ est residuū secundum.* Ergo *quadratum residui medialis primi &c.*

Nonagesimumnonum Theorema.

Quadratum residui medialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum tertium.

Sit linea α ϛ residuum mediale secūdum, rationalis uero sit linea γ λ: & quadrato lineæ α β æquale secundum lineā γ λ applicetur parallelogrammum γ ε faciens alterum latus γ ζ: dico lineam γ ζ esse residuum tertium. Sit enim lineæ α β linea conuenienter iuncta β κ, ergo lineæ α κ, κ β sunt mediales potentia tantum commensurabiles continentes mediale & cætera, ut in proximo theoremate. ergo linea γ μ est rationalis lōgitudine incommensurabilis lineæ rationali γ λ: & utrūque ex ζ ξ, ν λ est æquale ei, quod fit ex α κ, κ ϛ: sed id quod fit ex α κ, κ β est mediale, ergo id quod fit bis ex α κ, κ ϛ est etiam mediale: ergo & totum ζ λ est etiam mediale. Ergo *linea ζ μ est rationalis & lōgitudine incommensurabilis lineæ γ λ.* Et *quoniam lineæ α κ, κ β sunt longitudine incommensurabiles, ergo & quadratum lineæ α κ erit incommensurabile parallelogrammo ex α κ, κ β: sed quadrato lineæ α κ sunt commensurabilia quadrata linearum α κ, κ β: parallelogrammo uero ex α κ, κ ϛ est commensurabile id, quod fit bis ex α κ, κ ϛ: ergo quadrata linearum α κ, κ β sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex α κ, κ ϛ. ergo & eis æqualia parallelogramma γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommēsurabilis lineæ ζ μ, & sunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ est residuum: dico præterea esse residuum tertium.* Cum *enim sit commensurabile quadratū lineæ α κ, hoc est γ θ, quadrato lineæ*

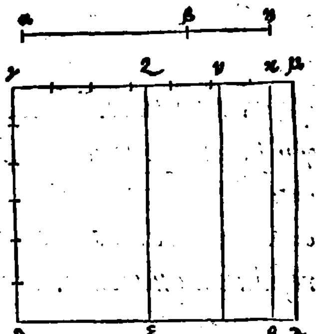


β κ,

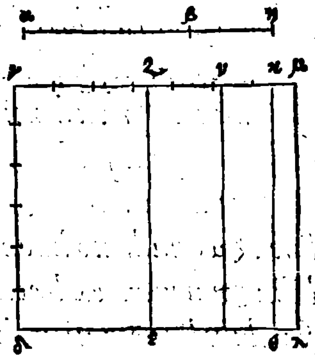
$\beta\eta$, hoc est parallelogrāmo $\kappa\lambda$. ergo & linea $\gamma\kappa$ erit longitudine commēsurabilis lineæ $\kappa\mu$. Eadem *ratione qua usi sumus in præcedenti, probabitur parallelogrammū ex $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ esse æquale quadrato lineæ $\nu\mu$, hoc est quartæ parti quadrati lineæ $\zeta\mu$.* Ergo *linea $\gamma\mu$ poterit plus, quā linea $\zeta\mu$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & neutra ex lineis $\gamma\mu$, $\zeta\mu$ est longitudine commensurabilis lineæ rationali $\gamma\delta$. ergo linea $\gamma\zeta$ est residuum tertium.* Ergo *quadratū residui medialis secundi &c.*

Centesimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuū quartum.



Sit linea minor $\alpha\beta$, rationalis uero $\gamma\delta$: secundum quam quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$, faciens alterum latus $\gamma\zeta$: dico lineam $\gamma\zeta$ esse residuum quartum. Sit *enim lineæ $\alpha\beta$ linea conuenienter iuncta $\beta\eta$, ergo lineæ $\alpha\eta$, $\beta\eta$ sunt potentia incommēsurabiles, facientes compositū ex quadratis ipsarū rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale, & cætera sint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum $\gamma\lambda$ erit rationale. ergo & linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ $\gamma\delta$. Et quoniam id quod fit bis ex $\alpha\eta$, $\eta\beta$ est mediale, ergo & illi æquale parallelogrammū $\zeta\lambda$ erit mediale. ergo linea $\zeta\mu$ erit rationalis lōgitudine incōmen-*



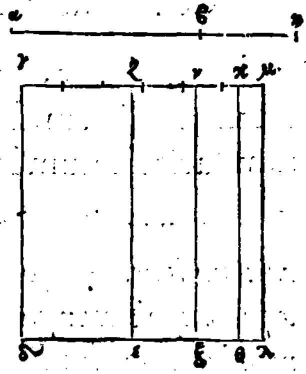
ſurabilis lineæ γ δ: ſed linea γ μ eſt longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo per 13. uel 14. huius linea γ μ erit longitudine incõmenſurabilis lineæ ζ μ. ſed ſunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantũ cõmenſurabiles. ergo linea γ ζ erit reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum. Cũ enim lineæ α κ, κ β. ſint potentia incommenſurabiles, ergo & ipſarum quadrata, hoc eſt, illis æqualia parallelogramma γ θ, κ λ ſunt incõmenſurabilia. ergo & linea γ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ μ. Similiter oſtendemus parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. ergo per 19. linea γ μ poterit plus, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt tota γ μ longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ. ergo linea γ ζ erit reſiduum quartum. Ergo quadratũ lineæ minoris &c.

Centeſimumprimum Theorema.

Quadratum lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quintum.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β: rationalis uero γ δ, ſecundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ε faciẽs alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum quintũ. Sit

enim



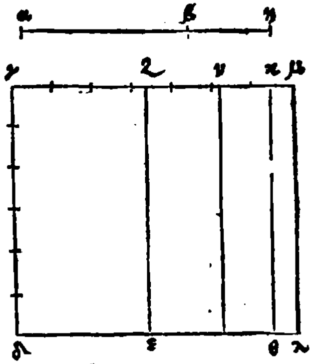
enim lineæ α β, linea conuenienter iuncta ζ κ. ergo lineæ α κ, β κ sunt potentia incõmensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: id uero quod fit ex ipsis rationale. fiant enim omnia eo modo quo in præcedẽtibus, ergo totum γ λ erit mediale. ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: & utrũque ex parallelogrammis ζ ξ, ι λ erit rationale, ergo & totum ζ λ erit etiam rationale: ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine cõmensurabilis lineæ γ δ. Et quo*niam γ λ est mediale, parallelogrammum uero ζ λ rationale, ergo γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: & linea γ μ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea γ ζ est residuum. dico præterea esse residuum quintum: similiter enim probabimus parallelogrãmũ ex γ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ.* Et *quoniã quadratũ lineæ α κ, hoc est, parallelogrammũ γ θ est incõmensurabile quadrato ζ κ, hoc est, parallelogrãmo κ λ, ergo linea γ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ κ μ. ergo per* 19 *linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & est conuenienter iuncta linea ζ μ longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo linea γ ζ est residuum quintum.* Ergo *quadratum &c.*

Centesimumsecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali superficie facientis totam medialem, secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum sextum.

Sit linea cum mediali superficie faciẽs totum mediale α β, rationalis uero γ δ, secundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ι, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ esse residuum sextum. Sit enim lineæ α β linea conuenienter iuncta β η, ergo lineæ α η, β η sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis mediale: præterea incommensurabile compositũ ex quadratis ipsarum ei, quod fit ex ipsis. fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum γ λ erit mediale (quia est æquale composito ex quadratis linearũ α η, η β, quod est mediale.) ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: similiter parallelogrammum ζ λ erit mediale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α η, β η est incommẽsurabile ei, quod fit bis ex α η, η β, ergo illis æqualia γ λ, ζ λ erunt incõmensurabilia. ergo & lineæ γ μ, ζ μ erũt longitudine incommensurabiles: sunt autem ambæ rationales, ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea γ ζ erit residuũ: dico præterea esse residuum sextũ. fiãt cætera ut in superioribus. Et quoniam lineæ α η, β η sunt potentia incommensurabiles, ergo quadrata ipsarum sunt incommensurabilia, hoc est,

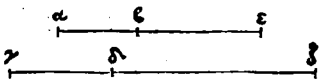
illis



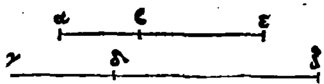
illis æqualia γθ,κλ. ergo & linea γκ lineæ κμ erit longitudine incommensurabilis, sicut in superioribus demonstrabatur parallelogrammorum γθ,κλ esse medium proportionale νλ. ergo per 19. linea γμ plus poterit, quàm linea μζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ex ipsis γμ,ζμ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali γδ. ergo linea γζ est residuum sextum. Ergo *quadratum &c.*

Centesimumtertium Theorema.

Linea residuo commensurabilis longitudine, est & ipsa residuum eiusdem ordinis.



Sit *residuum αβ, cui sit linea commensurabilis longitudine γδ. dico lineam γδ esse & ipsam residuum & ordinis eiusdem, cuius & residuum αβ. Cũ enim linea αβ sit residuũ, sit linea ei conuenienter iuncta βε: ergo lineæ αε, βε sunt rationales potentia tantum commensurabiles: sitq́; sicut linea αβ ad lineam γδ, ita linea βε ad lineã δζ: ergo sicut unum ad unum, ita omnia ad omnia per* 12.5. *Erit ergo sicut linea αβ ad lineam γδ, ita tota linea αε, ad totam lineam γζ, & linea βε ad lineam δζ. ergo per* 10 *huius, linea αε erit commensurabilis longitudine lineæ γζ, & linea βε lineæ δζ: sed linea αε est rationalis, ergo & linea γζ erit rationalis. similiter &*



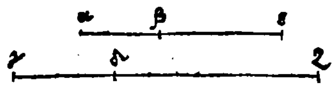
linea δ ζ erit rationalis, quia linea β ε cui ipsa est commensurabilis est etiam rationalis: sed quoniam est sicut linea β ε ad lineam α ε, ita linea δ ζ ad lineã γ ζ, & lineæ β ε, α ε sunt potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ δ ζ, γ ζ sunt potentia tantum commensurabiles. ergo linea γ δ est residuũ. dico præterea esse residuũ eiusdem ordinis cuius & linea α β. Cum enim sit ut modo diximus sicut linea α ε, ad lineam γ ζ ita linea β ε ad lineã δ ζ: ergo permutata proportione sicut α ε ad β ε, ita γ ζ ad δ ζ: linea autem α ε potest plus quàm linea ε β, aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ergo & linea γ ζ potest plus quàm linea δ ζ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15. Et quidem si linea α ε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cum linea α ε sit longitudine commensurabilis lineæ γ ζ. ergo per 12. etiam linea γ ζ erit longitudine cõmensurabilis propositæ rationali. ergo utraque linea α β γ δ erit residuum primũ. Quòd si linea β ε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cũ linea β ε sit longitudine commensurabilis lineæ δ ζ, ergo linea δ ζ erit etiam longitudine cõmensurabilis propositæ rationali: & tunc utraque linea α β, γ δ erit residuum secundũ. Quòd si neutra ex lineis α ε, β ε erit longitudine commensurabilis propositæ rationali, neutra etiã ex lineis γ ζ, δ ζ erit propositæ rationali longitudine commensurabilis per 13, uel 14 huius: & tunc utraque linea α β,

γ δ

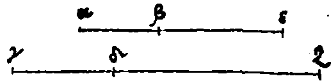
γδ erit residuum tertium. Quòd si linea αε plus potest quàm linea βε quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis, similiter & linea γζ plus poterit quàm linea δζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15: & quidem si linea αε erit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea γζ erit eidem commensurabilis. & sic erit utraq; αβ, γδ residuum quartū: si uero linea βε erit commensurabilis longitudine rationali, similiter & linea δζ, & sic erit utraque αβ, γδ residuum quintum. si uero neutra ex lineis αε, βε erit longitudine commensurabilis rationali, similiter neutra ex lineis γζ, δζ erit eidem commensurabilis: & sic erit utraque αβ, γδ residuum sextum. Ergo linea γδ erit residuū eiusdē ordinis cuius & αβ.

Centesimumquartum Theorema.

Linea commensurabilis residuo mediali, est & ipsa residuum ~~mediale &~~ eiusdem ordinis.



Sit residuum mediale αβ, cui sit commensurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum linea γδ. dico γδ esse residuum mediale & eiusdē ordinis. Cum enim αβ sit residuum mediale, sit ei conuenienter iuncta βε, ergo lineæ αε, βε sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Sit autē sicut αβ ad γδ, ita βε ad δζ. simili ratione qua in præcedēti usi sumus, linea αε erit longitudine & potentia, siue potentia tantum commensurabilis lineæ γζ, & linea βε lineæ δζ. ergo per 24 linea γζ erit medialis: & linea δζ erit medialis, quia est cōmen-



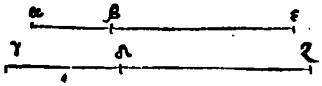
ſurabilis lineæ mediali βε. ſimiliter lineæ γζ, δζ erunt potentia tantum commenſurabiles: quia habent eandem proportionem inter ſe, quam lineæ αε, βε, quæ ſunt inter ſe commenſurabiles potentia tantum. ergo linea γδ eſt reſiduum mediale. dico præterea eſſe eiuſdem ordinis cuius & αβ. Cum enim ſit, ſicut linea αε ad lineam βε, ita linea γζ ad lineam δζ: ſed ſicut linea αε ad lineam βε, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, βε per 1.6: ſicut autem linea γζ ad lineam δζ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. ergo ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, βε, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. permutata ergo proportione ſicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammum ex αε, βε ad parallelogrammũ ex γζ, δζ. Sed quadratum lineæ αε eſt cõmẽſurabile quadrato lineæ γζ (quia linea αε eſt commenſurabilis lineæ γζ.) ergo & parallelogrammum ex αε, βε erit commenſurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ergo ſi parallelogrammũ ex αε, βε eſt rationale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit rationale: & tunc utraque linea αβ, γδ erit reſiduũ mediale primum. Si uero parallelogrammum ex αε, βε erit mediale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit mediale per corollarium 24: et tunc utraque linea αβ, γδ erit reſiduum mediale ſecundum. ergo linea γδ erit reſiduũ mediale eiuſdem ordinis. Hoc theorema cõceptũ eſt uniuerſaliter, ſiue linea ſit commẽſurabilis longitudine & potentia, ſiue potentia tantum reſiduo mediali, eſſe &

ipſam

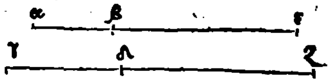
ipſam reſiduum mediale, & eiuſdem ordinis. Idem *dicendum de tribus proximis theorematibus.*

Centeſimumquintum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ minori, eſt & ipſa linea minor.



Sit linea minor αβ, cui ſit commenſurabilis γδ. dico lineā γδ eſſe lineam minorem: fiāt enim eadem quæ in præcedentibus. quoniam lineæ αε, βε ſunt potentia incommenſurabiles, ergo & lineæ γζ, δζ ſunt potentia incommēſurabiles per 22. 6. & 10 huius. Rurſus *per 22. 6 ſicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ βε, ita quadratum lineæ γζ ad quadratū lineæ δζ. cōiuncta ergo proportione, ſicut quadrata linearum αε, βε ad quadratum lineæ βε, ita quadrata linearum γζ, δζ ad quadratum lineæ δζ: & permutata proportione ſicut quadrata linearū αε, βε ad quadrata linearum γζ, δζ, ita quadratum lineæ βε ad quadratum lineæ δζ. ſed quadratum lineæ βε eſt commenſurabile quadrato lineæ δζ (quia lineæ βε, δζ ſunt cōmenſurabiles.) ergo & compoſitū ex quadratis linearum αε, βε erit commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γζ, δζ: ſed compoſitū ex quadratis linearū αε, βε eſt rationale, ergo & compoſitum ex quadratis linearum γζ, δζ erit rationale.* Rurſus *cū ſit ſicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, βε, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. (ſicut diximus in proximo theoremate) permutata er-*

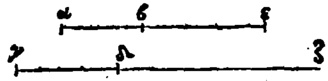


go proportione sicut quadratũ lineæ αε ad quadracũ lineæ γζ, ita parallelogrãmum ex αε, βε ad parallelogrãmũ ex γζ, δζ. sed quadratũ lineæ αε est cõmensurabile quadrato lineæ γζ, quia lineæ αε, γζ sunt cõmensurabiles, ergo & parallelogrãmũ ex αε, βε erit commensurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. sed parallelogrammũ ex αε, βε est mediale, ergo & parallelogrammum ex γζ, δζ erit mediale. ergo lineæ γζ, δζ erunt potentia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum rationale, parallelogrãmũ uero ex ipsis mediale. Ergo linea γδ erit linea minor.

Centesimumsextum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ cum rationali superficie facienti totam medialem, est & ipsa linea cũ rationali superficie faciens totam medialem.

Sit linea cum rationali superficie faciens totam medialem αβ, cui sit commẽsurabilis linea γδ. dico lineã γδ esse cũ rationali superficie facientẽ totam medialem. Sit lineæ αβ linea conuenienter iuncta βε, ergo lineæ αε, βε sunt potentia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, parallelogrammũ uero ex ipsis rationale: fiant omnia quæ in præcedẽtibus. Similiter quoque demonstrabimus sicut linea αε ad lineam βε, ita lineam γζ ad lineam δζ: & compositũ ex quadratis linearum αε, βε esse commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod fit ex αε, βε



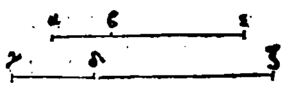
esse

eſſe ſimiliter commenſurabile ei, quod ſit ex γζ, δζ. quare & ſimiliter lineæ γζ, δζ erunt potentia incommenſurabiles facientes ea quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ erit etiam linea cũ rationali ſuperficie faciens totã medialẽ.

Centeſimumſeptimum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ cum mediali ſuperficie facienti totam medialem, commenſurabilis eſt & ipſa cum mediali ſuperficie faciens totam medialem.

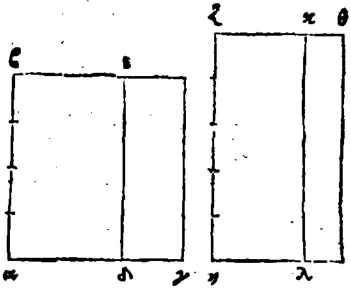
Sit linea cum mediali ſuperficie faciẽs totam medialẽ αβ, cui ſit commenſurabilis γδ. dico lineam γδ eſſe etiam lineam cum mediali ſuperficie facientem totam medialẽ. Sit enim lineæ αβ linea cõueniẽter iuncta βι, & fiant cætera, ut in ſuperioribus.



ergo lineæ αι, βι ſunt potẽtia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, id uero quod ſit ex ipſis etiã mediale: & compoſitum ex quadratis incommenſurabile ei, quod ſit ex ipſis. Sunt autẽ, ut antea demonſtratum eſt lineæ αι, βι commenſurabiles lineis γζ, δζ, & compoſitum ex quadratis ipſorum αι, βι commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod ſit ex αι, βι cõmenſurabile ei, quod ſit ex γζ, δζ. ergo & lineæ γζ, δζ, ſunt potentia incommenſurabiles facientes cætera omnia quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ eſt cum mediali ſuperficie faciens totam medialem.

Centeſimumoctauum Theorema.

Si de ſuperficie rationali detrahatur ſuperficies medialis,linea quæ reliquam superficiem potest, est alterutra ex duabus irrationalibus,aut residuum aut linea minor.



De *superficie rationali βγ detrahatur superficies medialis βδ.dico lineam quæ reliquam superficiẽ εγ potest, esse alterutram ex duabus irrationalibus,aut residuũ aut lineã minorem.Sit enim linea rationalis ζη,secundum quam æqualis superficiei βγ applicetur superficies rectangula parallelogramma ηθ:superficiei uero βδ æqualis applicetur superficies parallelogrammo ηκ.reliquum ergo parallelogrammũ εγ est æquale reliquo parallelogrammo λθ.Cum igitur βγ sit rationale, ipsum uero βδ sit mediale, ergo & ηθ erit rationale:ipsum uerò ηκ mediale.ergo & linea ζθ erit rationalis longitudine commensurabilis ipsi ζη per 21: linea uero ζκ erit rationalis longitudine incommensurabilis eidem lineæ ζη per 23. ergo linea ζθ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζκ per 13.ergo lineæ ζθ ζκ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: ergo linea κθ erit residuũ, ipsi uero conuenienter iuncta linea κζ:linea autem ζθ plus potest,quàm linea ζκ, aut quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Possit prius quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis,cum sit tota ζθ longitudine commensurabilis lineæ rationali ζη.ergo linea κθ est residuum primum.*

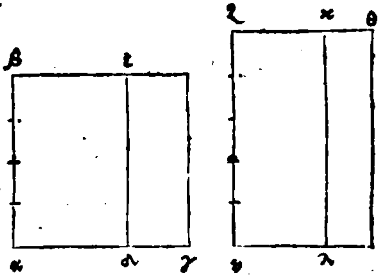
ergo

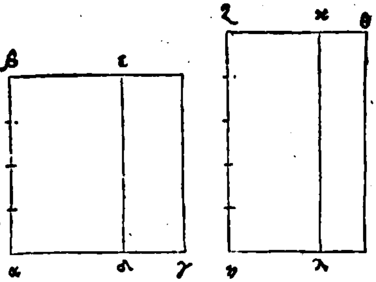
ergo per 91 linea potens parallelogrammum λ θ, hoc est ι γ est residuũ. Quòd si linea ζ θ plus poßit quã linea ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, cum linea ζ θ sit commensurabilis longitudine lineæ rationali ζ κ, ergo linea κ θ erit residuum quartum. Ergo *per 94 linea potens superficiem λ θ, hoc est γ ι est linea minor.*

Centesimumnonum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies rationalis, aliæ duæ irrationales fiunt, aut residuum mediale primum, aut cum rationali superficie faciens totam medialem.

De superficie mediali β γ detrahatur rationalis superficies β δ, dico lineã quæ potest superficiem reliquã ι γ esse alterutram duarum irra-~~tionaliũ~~ uel residuũ mediale primum, uel cum rationali superficie faciẽtem totã medialem. Sit *rationalis linea ζ κ, secundũ quam applicentur superficies, ut in proximo dictum est: erit similiter linea ζ θ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ζ κ: linea uerò ζ κ erit rationalis longitudine commensurabilis eidem ζ κ: & lineæ ζ θ, ζ κ rationales erunt potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea κ θ erit residuum: illi uerò conuenienter iuncta linea ζ κ.* Linea *autem ζ θ plus potest quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõ-*



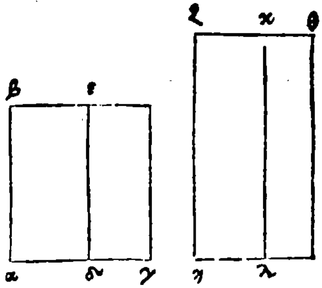


mensurabilis. Et quidem si linea ζθ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cũ linea cõuenienter iuncta ζκ sit longitudine commensurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum secũdum: quare linea quæ superficiem λθ, hoc est εγ potest, est residuũ mediale primũ per 92. Quòd si linea ζθ plus potest quã linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum linea conuenienter iuncta sit longitudine commẽsurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum quintum: quare linea quæ superficiẽ λθ, hoc est, εγ potest, est cum rationali superficie faciens totam medialem per 95.

Centesimumdecimum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies medialis, quæ sit incõmensurabilis toti, reliquæ duæ fiunt irrationales, aut residuum mediale secundum, aut cum mediali superficie faciens totam medialem.

Sicut in præcedentibus descriptionibus, hìc quoque detrahatur de superficie mediali βγ superficies medialis βδ: quæ εδ sit incommensurabilis toti βγ. dico lineam quæ potest superficiem εγ, esse alterutram duarũ irrationalium, uel residuum mediale secundũ, uel cum mediali superficie facientem totam medialem. Cum enim utraque superficies

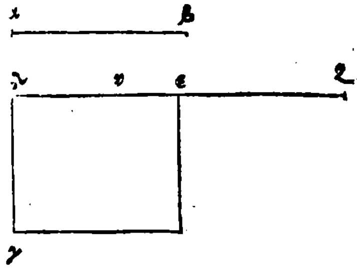


superficies εγ, εδ sit medialis, ergo utraque linea ζθ, ζκ est rationalis, & rationali ζκ lõgitudine incommensurabilis. Est autẽ superficies βγ, hoc est κθ incommẽsurabilis ipsi βδ, hoc est κκ. ergo lineæ ζθ, ζκ sũt incommensurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea κθ erit residuum: ipsi uero conuenienter iuncta, ζκ. linea autem ζθ plus potest quàm linea ζκ, uel quadrato lineæ sibi longitudine com mensurabilis, uel lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et *quidẽ si linea ζθ plus potest, quàm ζκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. cum neutra ex ζθ, ζκ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum tertium. ergo per 93. linea ~~quæ~~ potest superficiem λθ, hoc est εγ erit residuum mediale secundũ. Quod si linea ζθ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ex ζθ, ζκ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum sextũ.* Er*go per 96 linea quæ superficiem λθ, hoc est εγ potest, erit cum mediali superficie faciens totam medialem.*

Centesimumundecimum Theorema.

Linea quæ residuum dicitur, non est eadem cum ea quæ dicitur binomium.

Sit residuum αε, dico αβ non esse idem cum binomio. Nam *si esse potest, est. Sitq; linea rationalis δγ, secũdum quam*



æquale quadrato lineæ $\alpha\beta$ applicetur parallelogrammum rectangulū $\gamma\varepsilon$ faciens alterū latus $\delta\varepsilon$. cum linea $\alpha\beta$ sit residuum, ergo linea $\delta\varepsilon$ erit residuum primū per 97. Sit ipsi cōuenienter iuncta $\varepsilon\zeta$, ergo lineæ $\delta\zeta$, $\zeta\varepsilon$ sunt rationales potentia tantū commēsurabiles, & linea $\delta\zeta$ plus potest quàm linea $\varepsilon\zeta$ quadrato lineæ sibi longitudine cōmensurabilis: & $\delta\zeta$, est longitudine cōmensurabilis rationali $\gamma\delta$. Rursus per positionem linea $\alpha\beta$ est binomium, ergo linea $\delta\varepsilon$ est binomium primum per 60. Diuidatur in sua nomina in puncto κ: sitq; maius nomē $\delta\kappa$, ergo lineæ $\delta\kappa$, $\kappa\varepsilon$ sunt rationales potentia tantum commēsurabiles, & linea $\delta\kappa$ plus potest quàm linea $\kappa\varepsilon$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, eademq; linea $\delta\kappa$ est longitudine commensurabilis rationali $\gamma\delta$. Ergo per 12 lineæ $\delta\kappa$, $\delta\zeta$ sunt longitudine commensurabiles: ergo & reliqua linea $\kappa\zeta$ erit longitudine commensurabilis toti $\delta\zeta$ per 16, aut per corollarium eiusdem. Cum igitur linea $\delta\zeta$ sit cōmensurabilis lineæ $\zeta\kappa$, sit autem linea $\delta\zeta$ rationalis, rationalis quoque erit $\zeta\kappa$. Cum autem linea $\delta\zeta$ sit longitudine commensurabilis lineæ $\zeta\kappa$: sit autem linea $\delta\zeta$ longitudine incommensurabilis lineæ $\varepsilon\zeta$, ergo per 14 lineæ $\zeta\kappa$, $\zeta\varepsilon$ sunt longitudine incommensurabiles. Sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ $\zeta\kappa$, $\zeta\varepsilon$ sunt rationales potentia tantum commēsurabiles. ergo linea $\varepsilon\kappa$ erit residuū: sed est rationalis ut modo conclusum est: hoc autem est

impossibile

impoßibile, eandẽ ſcilicet lineam eſſe rationalem & irrationalem, ergo reſiduum nõ erit idem quod binomiũ. Linea quæ reſiduũ dicitur, & cæteræ quinq; eam conſequentes irrationales, neque lineæ mediali neque ſibi ipſæ inter ſe ſunt eædem. Nam quadratũ lineæ medialis ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus rationalem lineam longitudine incommẽſurabilem ei, ſecundum quam applicatur per 23. quadratũ uerò reſidui ſecundum rationalem applicatum, facit alterũ latus reſiduum primum per 97. quadratum uerò reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſecũdum per 98. quadratum uerò reſidui medialis ſecundi, facit alterum latus reſiduum tertium per 99. quadratum uerò lineæ minoris, facit alterum latus reſiduum quartum per 100. quadratum uero lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem, facit alterum latus reſiduum quintum per 101. quadratum uero lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum per 102. Cum igitur dicta latera quæ ſunt latitudines cuiuſque parallelogrammi unicuique quadrato æqualis & ſecundum rationalem applicati differãt, & à primo latere & ipſa inter ſe, (nam à primo differunt, quoniam eſt rationalis linea: inter ſe uero differũt, quoniam ſunt reſidua non eiuſdem ordinis) conſtat ipſas quoq; lineas irrationales inter ſe differentes eſſe. Et quoniam demonſtratum eſt reſiduum non eſſe idem quod binomiũ: quadrata autem reſidui & quinque linearum irrationa-

lium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciunt altera latera ex residuis eiusdem ordinis, cuius sunt & residua, quorũ quadrata applicantur rationali: similiter & quadrata binomij & quinque linearum irrationalium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciũt altera latera ex binomijs eiusdem ordinis, cuius sunt & binomia, quorũ quadrata applicantur rationali. ergo lineæ irrationales quæ consequuntur binomium, & quæ consequũtur residuũ, sunt inter se differentes. Quare dictæ lineæ omnes irrationales sunt numero 13.

1. *Medialis.*
2. *Binomium.*
3. *Bimediale primum.*
4. *Bimediale secundum.*
5. *Maior.*
6. *Potens rationale & mediale*
7. *Potens duo medialia.*
8. *Residuum.*
9. *Residuum mediale primum.*
10. *Residuũ mediale secundum.*
11. *Minor.*
12. *Faciens cum rationali superficie totam medialem.*
13. *Faciens cum mediali superficie totam medialem.*

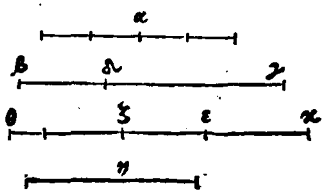
Centesimumduodecimum Theorema.

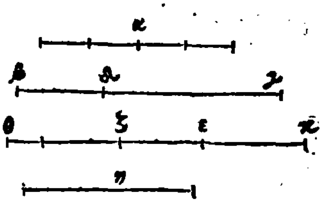
Quadratum, lineę rationalis secundum binomium applicatum facit alterum latus residuũ, cuius nomina sunt commẽsurabilia binomij nominibus, & in eadem proportione: præterea id quod fit residuũ, eundẽ ordinem retinet quem binomium.

Sit linea rationalis α, binominm βγ, cuius maius nomen sit γδ: & quadrato lineæ α sit æquale parallelogrammum

ex

ex β γ, ε ζ. dico lineam ε ζ esse residuū, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius binomij β γ, quæ nomina sunt γ δ, δ β: & in eadem proportione præterea linea ε ζ eundē ordinem & locū tenet inter residua, quē binomium β γ retinet inter binomia. Sit rursus quadrato lineæ α æquale parallelogrammum ex β δ, κ. Cum igitur parallelogrammum ex β γ, ε ζ sit æquale parallelogrāmo ex β δ, κ, cum utrunq; sit æquale quadrato lineæ α, est igitur sicut linea γ β ad lineam β δ, ita linea κ ad lineam ε ζ per 14.6. sed γ β est maior quàm β δ, ergo & κ erit maior quàm ε ζ. Sit linea ε θ æqualis lineæ κ. est ergo sicut γ β ad γ δ, ita θ ε ad ε ζ per 7.5. ergo disiuncta proportione per 17.5. sicut γ δ ad β δ, ita θ ζ ad ζ ε. fiat sicut θ ζ ad ζ ε, ita ζ κ ad ε κ, (quod quēadmodum fiat dicemus ad finem demonstrationis.) ergo per 12.5. sicut linea ζ κ ad lineam ε κ, ita tota linea θ κ ad totā ζ κ. Sed sicut ζ κ ad ε κ, ita est γ δ ad δ β: (quia ζ κ est ad ε κ sicut θ ζ ad ζ ε, & θ ζ ad ζ ε est sicut γ δ ad δ β.) ergo sicut linea θ κ ad ζ κ, ita γ δ ad δ β. sed quadratum lineæ γ δ est commensurabile quadrato lineæ δ β, ergo & quadratum lineæ θ κ quadrato lineæ ζ κ erit commēsurabile per 22.6 & 10 huius. Sed tres lineæ θ κ, ζ κ, ε κ sunt proportionales in continua proportione: (ut modo dictum est.) ergo per secundum corollarium 20.6 quadratum lineæ θ κ erit ad quadratū lineæ ζ κ, sicut linea θ κ ad lineam ε κ. ergo linea θ κ erit longitudine commensurabilis lineæ ε κ: quare per 16 linea θ ε erit longitudi-



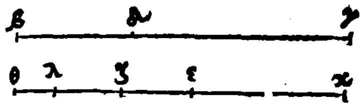


ne commẽſurabilis lineæ ε κ. Et *quoniam quadratũ lineæ α eſt æquale parallelogrãmo ex θ ε, ϛ δ, & quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & parallelogrammũ ex θ ε, ϛ δ erit rationale. ergo per* 21 *linea θ ε erit rationalis & longitudine cõmenſarabilis lineæ ϛ δ: quare & linea ε κ, quæ eſt ipſi θ ε longitudine commẽſurabilis, erit etiam rationalis & longitudine commẽſurabilis ipſi β δ.* Cum *igitur ſit ſicut linea γ δ ad δ ϛ, ita ζ κ ad ε κ: (quia ſupra dictum eſt, ſicut γ δ ad δ β, ita θ ζ ad ζ ε, & ſicut θ ζ ad ζ ε, ita ζ κ, ad ε κ,) lineæ uero γ δ, δ β ſint potentia tantum commenſurabiles, ergo & lineæ ζ κ, ε κ erunt potentia tantum commenſurabiles.* Et *cum ſit ſicut γ δ ad δ β, ita ζ κ ad ε κ, ergo cõuerſa proportione ſicut δ ϛ ad γ δ, ita ε κ ad ζ κ: & permutata proportione ſicut δ β ad ε κ, ita γ δ ad ζ κ: ſed lineæ δ β, ε κ ſunt longitudine commenſurabiles, (ut modo probatum eſt) ergo & lineæ γ δ, ζ κ ſunt longitudine commẽſurabiles: ſed linea γ δ, eſt rationalis, ergo & linea ζ κ erit etiam rationalis: ergo lineæ ζ κ, ε κ ſunt rationales potẽtia tantam commẽſurabiles. ergo linea ζ ε erit reſiduum, cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus binomij & in eadem proportione. dico præterea illud reſiduum eſſe eiuſdem ordinis cuius & binomiũ.* Nam *linea γ δ plus poteſt, quàm linea β δ aut quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut lineæ incommenſurabilis: & quidem ſi linea γ δ plus poteſt, quàm β δ quadrato lineæ ſibi longitudine commẽſurabilis, ſimiliter & linea*

ζ κ

$\zeta\kappa$ plus poterit quàm linea $\iota\kappa$ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per 15. Et quidẽ ſi linea $\gamma\delta$ eſt longitudine commẽſurabilis lineæ rationali, cum modo probatum ſit lineas $\gamma\delta$, $\zeta\kappa$ eſſe longitudine commenſurabiles, ergo per 12 etiam linea $\zeta\kappa$ erit longitudine commenſurabilis lineæ rationali: tunc igitur linea $\beta\gamma$ erit binomium primum, ſimiliter & linea $\zeta\iota$ erit reſiduum primũ. Quòd ſi linea $\beta\delta$ fuerit longitudine commenſurabilis lineæ rationali, ſimiliter & linea $\iota\kappa$ erit eidẽ cõmenſurabilis: tunc ergo linea $\beta\gamma$ erit binomium ſecundum, & linea $\zeta\iota$ reſiduum ſecundum. Quòd ſi neutra ex $\gamma\delta$, $\delta\beta$ fuerit rationali commenſurabilis, ſimiliter neutra ex $\zeta\kappa$, $\iota\kappa$ erit eidem commenſurabilis, tunc erit linea $\beta\gamma$ binomium tertium, & linea $\zeta\iota$ reſiduum tertium. Quòd ſi linea $\gamma\delta$ plus poteſt quàm linea $\beta\delta$ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, ſimiliter & linea $\zeta\kappa$ plus poterit quàm $\iota\kappa$ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis per 15. Et quidem ſi linea $\gamma\delta$ fuerit longitudine commenſurabilis lineæ rationali, etiam linea $\zeta\kappa$ erit eidem commenſurabilis, tunc erit linea $\beta\gamma$ binomium quartum, & linea $\zeta\iota$ reſiduum quartum. Quòd ſi linea $\beta\delta$ fuerit rationali commenſurabilis, ſimiliter & linea $\iota\kappa$ erit eidem commenſurabilis, tunc linea $\beta\gamma$ erit binomium quintũ: & linea $\zeta\iota$ reſiduũ quintũ. Quòd ſi neutra ex $\gamma\delta$, $\beta\delta$ erit rationali commenſurabilis, ſimiliter neutra ex $\zeta\kappa$, $\iota\kappa$ erit eidem commenſurabilis, tunc linea $\beta\gamma$ erit binomium ſextum, & linea $\zeta\iota$ reſiduum ſextum. Ergo linea *$\zeta\iota$ erit reſiduum, cuius nomina, nempe $\zeta\kappa$, $\iota\kappa$ ſunt com-*

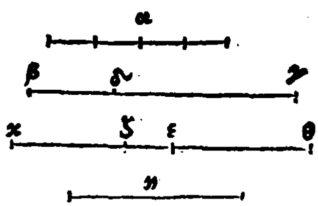
mensurabilia nominibus binomij βγ, nominibus inquā γδ, δβ: & sunt in eadem proportione, & habent eundem ordinem & locum inter residua quem binomium inter binomia. Nunc illud *dicamus quomodo fiat sicut linea θζ ad lineam ζι, ita linea ζκ ad lineam ικ. linea γδ est maior linea βδ. ergo & linea θζ erit maior linea ζι.* Detrahatur de linea θζ *æqualis linea ζι, quæ sit ζλ per 3.1.* Et *reliqua sit θλ. ergo linea θλ erit minor quam linea θζ, quia θζ est æqualis lineis θλ, λζ. fiat sicut θλ, ad θζ, ita ζι ad ζκ per 12.6: ergo per conuersam proportionem sicut θζ ad θλ, ita ζκ ad ζι.* Ergo *per euersam proportionem sicut linea θζ ad λζ, hoc est ad ei æqualem ζι, ita linea ζκ ad ικ.*



Centesimum decimumtertium Theorema.

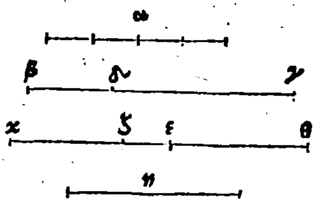
Quadratum lineæ rationalis secundum residuum applicatum, facit alterum latus binomium, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione: præterea id quod fit binomium est eiusdē ordinis, cuius & residuum.

Sit linea rationalis α, residuū verò βδ: & quadrato lineæ α sit æquale id quod fit ex βδ, κθ: itaque quadratum lineæ rationalis α secundū βδ residuū applicatum, facit alterum latus κθ. dico lineam κθ esse binomium cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius βδ & in eadem proportione: & lineā κθ



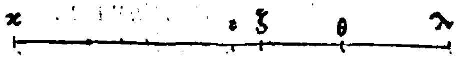
esse

esse eiusdem ordinis binomium, cuius & ϛ δ est residuũ. Sit *lineæ ϛ δ linea cõueniẽter iuncta δ γ, ergo lineæ ϛ γ, δ γ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. & quadrato lineæ α æquale sit parallelogrammum ex β γ, κ: sed quadratum lineæ α est rationale, ergo & parallelogrammum ex β γ, κ est etiam rationale: ergo & linea κ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ ϛ γ.* Cum *igitur parallelogrammum ex β γ, κ sit æquale ei quod fit ex β δ, χ θ, ergo sicut ϛ γ ad ϛ δ, ita χ θ ad κ: sed ϛ γ est maior quam β δ, ergo & linea χ θ erit maior quàm κ.* Sit *lineæ κ æqualis linea χ ι, ergo linea χ ι erit rationalis longitudine commẽsurabilis linea β γ sicut & linea κ: & cum sit sicut β γ ad ϛ δ, ita χ θ ad χ ι. euersa ergo proportione sicut ϛ γ ad δ γ, ita χ θ ad ι θ. fiat sicut χ θ ad ι θ, ita linea ζ θ ad ι ζ, (quod quemadmodum fiat, dicemus ad finẽ demonstrationis.) ergo erit reliqua χ ζ ad reliquam ζ θ, sicut tota χ θ ad totã θ ι per 19.5, hoc est sicut ϛ γ ad γ δ: sed lineæ β γ, γ δ sunt potentia tantũ commensurabiles, ergo & lineæ χ ζ, ζ θ erunt potentia tantum commẽsurabiles.* Et *quoniam est sicut χ θ ad θ ι, ita χ ζ ad ζ θ, sed & sicut χ θ ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι, ergo sicut χ ζ ad ζ θ, ita ζ θ ad ζ ι: quare sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. ergo sicut χ ζ ad ζ ι, ita quadratum lineæ χ ζ ad quadratum lineæ ζ θ: sed hæc quadrata sunt commẽsurabilia, quia lineæ χ ζ, ζ θ sunt potentia commensurabiles. ergo lineæ χ ζ, ζ ι sunt longitudine commensurabiles. Quare per secundã partem 16. lineæ χ ι, ι ζ sunt longitudine commensurabiles: quare per eandem 16. & lineæ χ ζ, χ ι sunt longitu-*



dine commensurabiles: sed linea κι est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ βγ. ergo & linea κζ erit rationalis & longitudine commensurabilis eidem βγ. Et quoniã est sicut linea βγ ad γδ, ita κζ ad ζθ, permutata ergo proportione sicut βγ ad κζ, ita γδ ad ζθ: sed linea βγ est longitudine commẽsurabilis lineæ κζ. ergo & linea γδ erit longitudine cõmẽsurabilis lineæ ζθ: sed linea γδ est rationalis, ergo & linea ζθ erit rationalis: sed & lineæ βγ, γδ sunt potentia tantum commensurabiles: ergo & lineæ κζ, ζθ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea κθ erit binomium, cuius nomina sunt commẽsurabilia nominibus residui, & in eadem proportione. dico præterea illud binomium esse eiusdem ordinis cuius, & residuum βδ. Nam si βγ plus potest quàm γδ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, etiã linea κζ poterit plus quàm ζθ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis per 15. Quòd si linea βγ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea κζ erit eidem rationali commẽsurabilis longitudine per 12: quia lineæ βγ, κζ sunt longitudine commensurabiles: & sic erit linea βδ residuum primum, & linea κθ similiter binomium primum. Quòd si γδ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam linea ζθ erit eidem longitudine commensurabilis: & sic erit linea βδ residuum secundum, & linea κθ binomiũ secundũ. Quòd si neutra ex βγ, γδ fuerit rationali commensurabilis longitudine

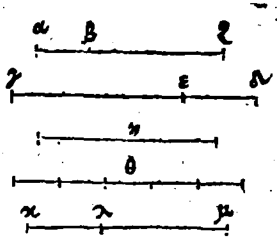
tudine, neutra etiam ex κ ζ, ζ θ erit eidem commensurabilis: & sic erit linea β δ residuum tertium, & linea κ θ binomium tertium. Si uero linea ε γ plus potest quàm linea γ δ quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis, etiam linea κ ζ poterit plus quàm linea ζ θ quadrato lineæ sibi longitudine incōmensurabilis per 15. Et quidem si linea β γ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam κ ζ erit eidem commēsurabilis longitudine: & tunc linea ε δ erit residuum quartū, & linea κ θ binomium quartū. Quòd si γ δ fuerit rationali commēsurabilis longitudine, etiam ζ θ erit eidem commensurabilis longitudine: & tunc erit linea β δ residuum quintum, & linea κ θ binomiū quintum. Quòd si neutra ex β γ, γ δ fuerit longitudine commēsurabilis rationali, similiter neutra ex κ ζ, ζ θ erit eidem cōmensurabilis longitudine: & sic linea β δ erit residuū sextum, & linea κ θ binomium sextum. Ergo κ θ erit binomium, cuius nomina κ ζ, ζ θ sunt commēsurabilia residui ε δ nominibus β γ, γ δ, & in eadem proportione: & linea κ θ retinet inter binomia eundem ordinem quem ε δ inter residua.
Nunc dicamus quomodo fiat sicut linea κ θ ad lineam θ ι, ita linea θ ζ ad lineā ζ ι. Lineæ κ θ ad



datur in continuum & directum linea æqualis ipsi θ ι: & sit tota linea κ λ: & per 10.6 diuidatur linea θ ι sicut tota linea κ λ diuisa est in puncto θ: sitq; linea θ ι diuisa in puncto ζ. Erit sicut κ θ ad θ λ, hoc est ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι &c.

Centesimumdecimumquartum Theorema.

Si parallelogrammum contineatur ex residuo & binomio, cuius nomina sint commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione, linea quæ illam superficiem potest, est rationalis.



Contineatur parallelogrammum ex residuo αβ & binomio γδ, cuius binomij maius nomē sit γε, minus uero εδ: & sint commensurabilia nominibus residui αβ, quæ sint αζ, ζβ, & in eadem proportione. sitq́; potens illud parallelogrammum linea, η. dico lineam illam η, esse rationalem. Proponatur *rationalis θ, cuius quadrato æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum faciens alterum latus κλ. ergo linea κλ est residuum per* 112*: cuius nomina sint κμ, μλ quæ sunt commensurabilia binomij nominibus γε, εδ, & in eadem proportione per* 112. Sed *per positionem lineæ γε, εδ sunt commensurabiles lineis αζ, ζβ, & sunt in eadē proportione: erit ergo sicut αζ ad ζβ, ita κμ ad μλ. ergo permutata proportione sicut αζ ad κμ, ita ζβ ad μλ. ergo & reliqua αβ ad reliquam κλ erit sicut αζ ad κμ. sed linea αζ est commensurabilis lineæ κμ, quia utraque ex αζ, κμ est cōmensurabilis lineæ γε: ergo & linea αβ erit commensurabilis lineæ γλ. est autem sicut linea αβ ad lineam κλ, ita parallelogrammum ex γδ, αβ ad parallelogrammum ex γδ, κλ per* 1.6. *ergo parallelogrammum ex γδ, αβ est commēsurabile parallelogrammo ex γδ, κλ: sed parallelogrammum ex γδ, κλ est æquale quadrato lineæ θ, ergo parallelogrammū ex γδ, αβ est*

commen-

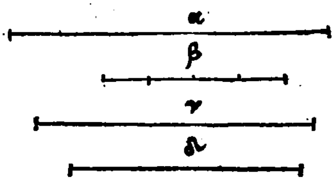
commenſurabile quadrato lineæ θ: ſed parallelogrammum ex γ δ, α β eſt æquale quadrato lineæ κ, ergo quadratum lineæ θ erit commenſurabile quadrato lineæ κ. ſed quadratum lineæ θ eſt rationale, ergo & quadratũ lineæ κ erit rationale. ergo & linea κ erit rationalis: & poteſt parallelogrammum ex α β, γ δ. Ergo ſi parallelogrammum contineatur &c.

Corollarium.

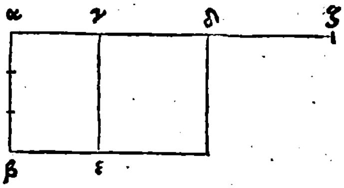
Ex hoc manifeſtũ eſt, poſſe rationale parallelogrammum contineri ex lineis irrationalibus.

Centeſimumdecimumquintum Theorema.

Ex linea mediali naſcuntur lineæ irrationales innumerabiles, quarũ nulla ulli ante dictorũ eadẽ ſit.



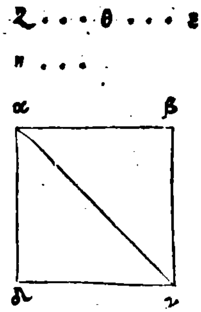
Sit linea medialis α γ. dico ex linea α γ innumerabiles gigni ~~irrationales~~, quarũ nulla ulli ex antedictis irrationalibus eadẽ ſit. Ducatur ſuper extremitate lineæ α γ perpendicularis α ϲ, quæ ſit rationalis: & cõpleatur parallelogrammũ ϲ γ, ergo illud parallelogrãmũ β γ erit irrationale per ea quæ dicta ſunt in fine demõſtrationis 38: linea ergo quæ illud poteſt, erit ſimiliter irrationalis. Sit autẽ illa linea γ δ, quæ nulli ex ante dictis irrationalibus erit eadẽ: quia quadratũ huius γ δ ſecundũ lineã rationalẽ puta α ϲ applicatũ, facit alterum latus lineã medialem nempe α γ: nullius uero ex antedictis quadratum ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus lineam medialem. Rurſus,



compleatur parallelogrammum ε δ, erit similiter illud parallelogrammum ε δ irrationale, & linea quæ illud potest etiã irrationalis, quæ sit δ ζ: hæc similiter nulli ex antedictis irrationalibus eadem esse potest. Nullius *enim ex antedictis irrationalibus quadratum secundum rationalem applicatum facit alterum latus lineã γ δ.* Ergo *ex linea mediali &c.*

Centesimumdecimumsextum Theorema.

Propositum nobis esto, demonstrare in figuris quadratis diametrum esse longitudine incommensurabilem ipsi lateri.



Sit quadratum, α β γ δ, cuius diameter α γ. dico lineam α γ esse longitudine incommensurabilem lineæ α β. si enim possit fieri, sit commẽsurabilis: dico tunc illud consequi eundem numerum esse parem & imparem. Manifestum *est quadratum lineæ α γ esse duplum ad quadratũ lineæ α β per* 47.1. Et *quoniam linea α γ est longitudine commensurabilis lineæ α β per hypothesin, ergo habebunt proportionem inter se, quam numerus ad numerũ per* 5 *huius.* Habeat *linea α γ ad lineã α β proportionẽ, quam numerus ε ζ, ad numerum η: sintq; illi numeri minimi omnium habentium eandem proportionẽ: nõ igitur numerus ε ζ erit unitas.* Nam *si ε ζ esset unitas, cum habeat proportionem ad η, sicut linea α γ ad lineam α β,*

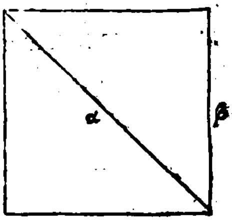
maior

maior autem sit $\alpha\gamma$ quàm $\alpha\beta$: maior ergo $\iota\zeta$ unitas quàm numerus κ, quod est impossibile. ergo $\iota\zeta$ non est unitas, est ergo numerus. Et *quoniam est sicut quadratũ lineæ $\alpha\gamma$ ad quadratum lineæ $\alpha\beta$, ita quadratus numerus productus ex $\iota\zeta$ ad quadratum numerum productum ex κ: nam utrobique est proportio suorum laterum duplicata per corollarium* 20.6. & 11. 8:*proportio autem lineæ $\alpha\gamma$ ad lineam $\alpha\beta$ duplicata, est æqualis proportioni numeri $\iota\zeta$, ad numerum κ duplicatæ, quia est sicut $\alpha\gamma$ ad $\alpha\beta$, ita numerus $\iota\zeta$ ad numerum κ: quadratum uero lineæ $\alpha\gamma$ est duplum ad quadratũ lineæ $\alpha\beta$, ergo & quadratus productus ex numero $\iota\zeta$ erit duplus ad numerum quadratum productum ex κ. ergo numerus quadratus ex $\iota\zeta$ est par: quare & ipse $\iota\zeta$ erit etiam par: nam si $\iota\zeta$ esset impar, etiã quadratus ex ipso $\iota\zeta$ esset impar per 23.9, aut per 29.9. Secetur $\iota\zeta$ æqualiter ~~& bifariam ubi~~ est θ: quoniam numeri $\iota\zeta$, κ sunt minimi suæ proportionis, sunt inter se primi per 24.7: & est $\iota\zeta$ par, ergo numerus κ est impar.* Nam *si κ esset par, binarius numeraret utrunq; $\iota\zeta$, κ: (nam omnis numerus par habet partem dimidiam per definitionem) sed illi numeri $\iota\zeta$, κ sunt inter se primi: est ergo impossibile eos binario aut alio numero quàm unitate numerari. ergo numerus κ est impar.* Et *quoniam numerus $\iota\zeta$ est duplus ad $\iota\theta$, ergo numerus quadratus ex $\iota\zeta$ est quadruplus ad numerum quadratum ex $\iota\theta$. Est autem numerus quadratus ex $\iota\zeta$ duplus ad numerum quadratum ex κ, ergo numerus quadratus ex κ, est duplus ad numerum quadratum ex $\iota\theta$. ergo numerus qua-*

dratus ex η est par, ergo & per ea quae modo dicta sunt, ipse numerus η est par: sed probatum est eum esse imparem, quod est impossibile, non igitur linea α γ erit longitudine commensurabilis lineae α β. ergo erit longitudine incommensurabilis.

Aliter.

Alia ratione demonstremus diametrum esse longitudine incommēsurabilem ipsi lateri: si negetur, sit diameter α, latus uero sit β: fiátq; rursus sicut α ad β, ita numerus ε ζ ad numerum η, & sint minimi suae proportionis: ergo sunt inter se primi. dico primo numerum η non esse unitatem: nam si possibile est, sit unitas. Et *quoniam est quadratum lineae α ad quadratum lineae β, sicut quadratus numerus ex ε ζ ad quadratum numerum ex η (ut dictum est in praecedēti demonstratione.) sed quadratum lineae α est duplum ad quadratum lineae β, ergo numerus quadratus ex ε ζ ad numerum quadratum ex η, est duplus: sed per te numerus η est unitas, ergo numerus quadratus ex ε ζ est binarius, quod est impossibile: nō ergo η erit unitas, ergo erit numerus.* Et *quoniam est sicut quadratum lineae α ad quadratum lineae β, ita quadratus numerus ex ε ζ ad quadratum numerū ex η, ergo numerus quadratus ex ε ζ erit duplus ad numerum quadratum ex η: quare numerus quadratus ex η numerabit numerum quadratum ex ε ζ: ergo per* 14, 8 *numerus η, numerabit numerum ε ζ: sed etiā numerat seipsum, ergo numerus η nu-*

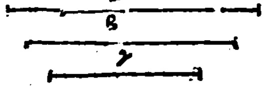


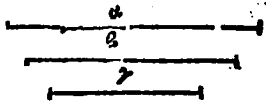
merabit

merabit numeros κ, ι, ζ: cũ tamen ſint inter ſe primi, quod eſt impoßibile. ergo linea α non erit longitudine cõmenſurabilis lineæ β: ergo erit eidem incommenſurabilis.

Hinc animaduerti poſſe puto, neutram harum demõſtrationũ eſſe Theonis, ſed nec theorema ipſum eſſe Euclidis: nam & tractatio tota demonſtrandi habet quod refelli poßit: nec refert eam diligẽtiam, qua in cæteris uſum fuiſſe Theonẽ ex ipſo uidere poſſumus. Et theorema ipſum uidetur non ſuo loco poſitum eſſe: debuit enim præcedere tractatũ linearum irrationaliũ. Quanuis enim diameter ſit longitudine incommenſurabilis ipſi lateri, eſt tamen eidem commẽſurabilis potentia. ergo ſi latus ipſum aut diametrum poſueris eſſe lineam rationalem, neceſſario ſequitur & alterum, nempe latus ipſum aut diametrum eſſe rationalem, per definitionem linearum rationalium. Huius autem theorematis multo facillimã & certißimam demonſtrationem legere licet in eo libello, quem ſupra memorauimus Ariſtotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν. Illud quoque quod ſequitur, addititiũ eſſe nemo negauerit, qui intellexerit poſteriorem ipſius additionis partem pertinere ad libros conſequentes, perſcriptos de ſolidis: quia tamen & uerũ eſt quod dicitur, & continet rerum ipſarum intelligentiam, prætermittendum nobis uiſum non eſt.

Repertis lineis rectis longitudine inter ſe incommenſurabilibus, ut lineis α, β, reperiri poſſunt & aliæ quamplurimæ magnitudines ex binis dimẽſionibus conſtantes, quales ſunt plana ipſa ſiue ſuperficies, quæ





sint inter se incommensurabiles. Nam si inter lineas α, β sumatur media linea proportionalis γ, per 13.6, erit sicut linea α ad lineam β, ita similis species figuræ descriptæ à linea α ad similem superficiem figuræ descriptæ à linea γ: similis, inquã, species ad similem speciem similiter descriptam, per secũdum corollarium 20 theorematis libri sexti, hoc est, siue illæ sint quadratæ, (quæ semper sunt inter se similes) siue fuerint aliæ quæpiam species rectilineæ similes, siue circuli circa diametros α, γ. Nam circuli habent eandem proportionem inter se, quam quadrata suarum diametrorum per 2. 12. ergo per secundam partem decimi theorematis huius libri, similis species figuræ descriptæ à linea α, erit incommensurabilis simili speciei similiter descriptæ à linea γ. Reperiuntur ergo hoc modo superficies inter se incommensurabiles. Simili ratione reperiuntur figuræ commensurabiles, si posueris lineas α, β esse inter se longitudine commensurabiles. Cum hæc ita sint, nunc demonstremus etiam in ipsis solidis esse quædam inter se commensurabilia, & quædam incommensurabilia. Nam si ex singulis quadratis linearum α, β, uel aliis figuris rectilineis, quæ sint illis quadratis æquales, erexerimus solida singula æquali altitudine, siue sint illa solida ex superficiebus æquidistantibus composita, siue pyramides, siue corpora serratilia, illa solida sic erecta, erunt inter se, sicut etiam ipsorum bases inter se, per 32.11, & per 5 & 6.12. De corporibus tamen serratilibus nullum est tale theorema. Et quidem si bases solidorum fuerint in-

ter

ter se commensurabiles, solida quoque erunt inter se cōmensurabilia: quòd si bases fuerint incommensurabiles, solida quoque erunt incommēsurabilia, per 10 huius libri decimi. At si fuerint circuli duo α, β, & super singulos erecti coni siue cylindri, eadem altitudine erunt similiter inter se coni, & cylindri inter se, sicut ipsi circuli, qui sunt eorum bases per 11.12. Et quidem si circuli fuerint inter se commēsurabiles, similiter ipsi coni inter se, & cylindri inter se erunt cōmensurabiles. Quòd si fuerint circuli incommensurabiles, similiter & coni inter se, & cylindri inter se erunt incōmensurabiles, per 10. huius. Vnde constat, non in solis lineis & superficiebus esse commensurabilitatem aut incommēsurabilitatem, sed in solidis quoque easdem reperiri.

P. MONTAVREI CARMEN.

Hîc formas iam uictor ouans, normámq; repono.
Hîc ego secessus uoti damnatus adibo
Phœbe tuos, duce te saltus emensus opacos;
Saxáque peruia nūc multis, prius hospita paucis
Exæquata meo quæ concessere labori.
Mox, tua dū magno concussus numine mentem
Thure uaporabit purus delubra sacerdos,
Et sacris operatus erit Bellaïus aris,
Ipse tua hoc iubeas monimentum dedicet arce.
Nam per nos tentare, nefas, sine uate profanos.
Comperto ut spatium quadrata æquale duobus
Redderet ex ternis, cuneo quæ subdita recto

Linea, Pythagoras Samius lectissima centum
Terga boum imposuit, uictor ceu splēdidus, aris
Pieridum, magnis sibi parua rependere uisus.
Tanto illi potior multis sapientia nummis.
Ipse quoque imparibus donis imitatus eosdem,
Sit mihi fas, animos, at non ita dissimili in re,
Parua quidē illa tibi, sed quę mihi maxima, soluā
Munera. Diis quando pietas gratissima merces,
Me uotiua pium testabitur usque tabella.
Nostra tibi è multis cantabit pagina paucas
O Phœbi genus, inculto Sapientia laudes
Carmine, quóq; modò geminas res miscuit usus,
Et Sophiæ cōiunctus amor noua nomina duxit,
Cuius ut exemplo simul & sermone fruamur.
Nanque homines seclis quondam senioribus usi,
Qui studiis animos & tempora longa dederunt,
Naturæ in rebus, sapientum nomen adepti.
Quæ cum Pythagoræ ratio manasset in æuum,
Non tulit inuidiam senior. Nam forte Leonti
Cui regnata Phliuns, quondam cōgressus, & ore
Dum referat magno naturæ arcana parentis,
Admiranda dedit diuini signa uigoris,
Ingenio neque uisa minor facundia summo.
Quærentíque uiro, quánam confideret arte,
Ille quidem negat esse sibi quicquam ullius artis.
Sed studiis æterna tuis Sapientia duci,
Hinc sibi philosophi nomen finxisse nouum se.
Attonitus uocis nouitate, rogat quid in hac re
Poneret, an reliquos inter discrimen & istos.

Nec minimum discrimẽ, ait, quod ut ipse doceri
Me referente queas, in imagine cuncta notabo.
Nónne uides quãtis celebrentur Olympia ludis?
Quàm multis cuiusque modi mercatus abundet
Cœtibus ille frequẽs glomerãtibus? huic ego uitam
Persimilẽ esse hominũ dicam. Nam corporis illic
Pluribus ut uires, urióque exercita motu
Fortia mẽbra solẽt celebres parere inde coronas,
Tenuia gloriolæ pereuntis pabula: quæstus
Excitat hos, aliena ut emant, aut ut sua uendant.
Quos præter genus illud inest, lõge anteferẽdum
Nobilitate aliis, laudem captantibus & rem:
Nec quoquã minus ingenuũ, qui nec sibi plaudi
Fronde coronatis optent, neq; crescere nummos.
Hoc tantum. rerum quid ab unoquoq; geratur,
Et quo quidque modo, cura studióque sagaci
Lustrantes recolunt, & ab omni parte uorantes,
Intentis iucunda oculis spectacula quærunt.
Haud aliter quàm qui mercatum aliunde profecti,
Nos etiam ex aliis alias peruenimus oras:
Terrarúmque solum exilio sortimur habendum.
Hic alios quæstus, popularis gloria famæ
Sunt quos uana tenet multi: plerisque uoluptas
Imperat, in multis morbi non simplicis est uis.
Sed quid ago? innumerósne parem enumerare furores?
Perrarum genus illorum, qui maximus esse
Debebat numerus, rebus constanter omissis,
Posthabitísque aliis, quos recti cura sequendi
Ceperit, & ueri dederit simulacra tueri.

Cælestes animæ, quas incoluere beatas
Suspiciunt sine fine domos, & abesse querentes,
Quod reliquũ est, ĩhiãt animis, & mẽte morãtur.
Nec terras meminere procul spectare iacentes,
Hi tales, studio quibus est sapientia, sunto
Philosophi, & meritũ me iudice nomen habẽto.
Addidit, utque illic hominum liberrima sors est,
Qui spectant, rerúmque aliis cõmercia cedunt,
Sic studiis cunctis, animos quæ plurima uersant,
Naturæ indagare uias atque abdita præstat.
Sed neq; Pythagoras tanto modò nobilis author
Nomine, quin rebus multo magis amplificatis
Floruit: atque animos cultu molliuit agrestes,
Magna prius per quẽ ter maxima Græcia creuit.
Hæc mihi dictabat, uacua dum fessus in umbra
Rure suburbano instantes leuat arte ruinas
Labentis patriæ, & curarum Tullius æstum,
Purus & ipse fluens Graiorum fontibus haustis
Tullius, in Latium peregrinas doctus Athenas
Ferre, suósque nouis opibus ditare Quirites.
Materiẽ ille quidẽ, numeros sed Phœbus & artẽ
Sufficit, ulla modo nostri si carminis est ars.

FINIS.